ALGEBRA UND GEOMETRIE

für Ingenieur- und Fachschulen

Algebra und Geometrie für Ingenieur- und Fachschulen

von H. Nickel, G. Kettwig, H. Beinhoff, W. Pauli, H. Georgi, H. Kreul, W. Leupold

3. Auflage. Mit 344 Bildern und 1065 Aufgaben und Lösungen

VEB FACHBUCHVERLAG LEIPZIG 1967

Als Lehrbuch
an den Fachschulen der Deutschen Demokratischen Republik eingeführt
Staatssekretariat für das Hoch- und Fachschulwesen
Berlin, den 4. 9. 1965

AUTOREN *Federführung:*

Fachschuldozent Heinz Nickel
Ingenieurschule für Geodäsie und Kartographie, Dresden

Autoren der einzelnen Abschnitte:

Fachschuldozent Dipl.-Math. Günter Kettwig
Ingenieurschule für Maschinenbau und Elektrotechnik, Dresden
(Mengen, Zahlenbereiche und Rechenoperationen)

Fachschuldozent Horst Beinhoff
Ingenieurschule für Kraft- und Arbeitsmaschinenbau „Rudolf Diesel", Meißen
(Gleichungen)

Wolfgang Pauli
Jena
(Trigonometrie der Ebene)

Fachschuldozent Herbert Georgi
Ingenieurschule für Maschinenbau, Karl-Marx-Stadt
(Analytische Geometrie der Ebene: Kreis und Gerade)

Fachschuldozent Heinz Nickel
Ingenieurschule für Geodäsie und Kartographie, Dresden
(Analytische Geometrie der Ebene: Arbeitsweise der analytischen Geometrie, Kegelschnitte)

Fachschuldozent Hans Kreul
Ingenieurschule für Energiewirtschaft „Dr. Robert Mayer", Zittau
(Analytische Geometrie der Ebene: Technisch wichtige Kurven)

Fachschuldozent Dipl.-Ing. Wilhelm Leupold
Ingenieurschule für Maschinenbau und Elektrotechnik, Dresden
(Vektorrechnung)

Die Begutachtung und Lektorierung des Manuskriptes wurde durchgeführt von:
Dipl.-Ing. Gisela Becker, Ingenieurschule für Bauwesen, Berlin
Dipl.-Math. Irmfried Strohbach, Ingenieurschule für Schwermaschinenbau, Wildau
Dipl.-Math. Siegfried Völkel, Ingenieurschule für Eisenbahnwesen, Dresden

Verlagslektor: Alfred Sommer
Redaktionsschluß: 15. 1. 1967
ES 20 C 2 (19 B 1)

Satz und Druck: VEB Druckhaus „Maxim Gorki", Altenburg
Veröffentlicht unter der Lizenznummer 114—210/49/67
11,50

GELEITWORT

Wenn sich Wissenschaft und Technik planmäßig und schnell weiterentwickeln sollen, so ist es unumgänglich, daß alle Bereiche der Volkswirtschaft in immer stärkerem Maße mathematisch durchdrungen werden. Um dieses Ziel zu erreichen, wurde am 1. 9. 1963 an den Ingenieur- und Fachschulen der Deutschen Demokratischen Republik ein neuer Lehrplan für das Unterrichtsfach Mathematik eingeführt, in dem wesentlich mehr als vorher Wert gelegt wurde auf eine gediegene Grundlagenausbildung, die das Erfassen komplizierterer mathematischer Zusammenhänge wesentlich erleichtert und damit die Voraussetzung für die erfolgreiche Lösung der in der Praxis auftretenden mathematischen Probleme schafft.
Die bisherigen Lehrbücher der Mathematik für Ingenieur- und Fachschulen erfüllen nicht mehr die Anforderungen, die der neue Lehrplan an Lehrer und Studierende stellt. Aus diesem Grunde wurde auf Veranlassung des Staatssekretariats für das Hoch- und Fachschulwesen in Zusammenarbeit mit der Zentralen Fachkomission für Mathematik ein Autorenkollektiv beauftragt, in möglichst kurzer Zeit ein neues, zweibändiges Unterrichtswerk der Mathematik zu erarbeiten, das später durch einen weiteren Band ergänzt werden wird, der ausgewählte Kapitel der Mathematik enthalten wird, die für den Ingenieur und Ökonomen in der neuen Entwicklung unentbehrlich sind.
Der nunmehr vorliegende erste Band enthält die Teilgebiete Mengen, Zahlenbereiche und Rechenoperationen; Gleichungen; Trigonometrie; Analytische Geometrie der Ebene und Vektorrechnung. Das Erscheinen dieses Bandes soll der Anlaß sein, den Autoren für die aufopferungsvolle Arbeit zu danken, die sie mit der Zusammenstellung des Manuskriptes übernommen hatten.
An die Benutzer dieses Buches sei die Bitte gerichtet, uns ihre Erfahrungen, Kritiken und Verbesserungsvorschläge mitzuteilen, die sie bei der Arbeit mit dem Buch gesammelt haben. Denn nur durch den gegenseitigen Erfahrungsaustausch zwischen Autoren und Leserschaft kann der Inhalt des Buches laufend verbessert werden.
Wir sind überzeugt davon, daß dieses Buch sowohl den Lehrern als auch den Studierenden des Direkt- und des Fernstudiums eine wertvolle Hilfe sein wird, und daß es die mathematischen Kenntnisse vermittelt, die durch die sich ständig weiterentwickelnde Technik von den Absolventen unserer Ingenieur- und Fachschulen gefordert werden müssen.

Zentrale Fachkommission für Mathematik

INHALTSVERZEICHNIS

GLEICHUNGEN

Einführung

Das neue Lehrwerk der Mathematik ist in der Auswahl und Gliederung des Stoffes auf den Lehrplan abgestimmt, der 1963 an den Ingenieurschulen der Deutschen Demokratischen Republik eingeführt wurde. Auf Grund der höheren mathematischen Kenntnisse, die von den Bewerbern an Ingenieurschulen gefordert werden, wurde zunächst eine neue Stoffabgrenzung nach unten notwendig. Inhaltlich schließt das Buch an den „Lehrgang der Elementarmathematik" (VEB Fachbuchverlag Leipzig) an. Dieser enthält die Stoffgebiete der Mathematik, deren Behandlung zur Vorbereitung auf den Fachschulbesuch notwendig ist. Hinweise auf das Buch werden im folgenden kurz mit „Vgl. El. math." und durch Angabe der betreffenden Abschnittsnummer gegeben.
Der vorliegende erste Band „Algebra und Geometrie für Ingenieurschulen" enthält die Abschnitte Zahlenbereiche und Rechenoperationen, Gleichungen, Trigonometrie der Ebene, Analytische Geometrie der Ebene und Vektorrechnung, während der zweite Band das Gebiet der Analysis umfaßt. Der inhaltliche Aufbau beider Bände erlaubt es, daß sie dem Lehrplan entsprechend im Unterricht parallel verwendet werden können. In dem unter dem Titel „Ausgewählte Kapitel der Mathematik" erscheinenden Band sind die für den Ingenieur wichtigen Gebiete der Matrizenrechnung, linearen Optimierung, mathematischen Statistik, maschinellen Rechentechnik und der Nomographie zusammengefaßt.
Die Darstellung des Stoffes wurde so gewählt, daß das Lehrbuch sowohl zum Gebrauch neben dem Unterricht als auch zum Selbststudium geeignet ist. Daher wurde versucht, Anschaulichkeit mit mathematischer Strenge zu verbinden. Jeder Abschnitt enthält durchgerechnete Beispiele sowie eine größere Zahl von Übungsaufgaben, deren Lösungen am Ende des Bandes angegeben sind.
Trotz der ausführlichen Darstellung stellt das Buch Anforderungen an das selbständige und kritische Denken des Lesers. Wie jedes Mathematikbuch kann auch das vorliegende nur mit Papier und Bleistift in der Hand durchgearbeitet werden. Man begnüge sich nicht mit fertigen Formeln und Rezepten, sondern verfolge genau die Herleitungen und Beweise. Jeder einmal völlig verstandene Beweis fördert die Fähigkeit zum mathematischen Denken, selbst wenn man ihn bald wieder vergessen hat. Die durchgerechneten Beispiele dürfen trotz des Kleindruckes nicht übergangen werden, da sie nicht nur den vorher gebotenen Stoff erläutern und einüben, sondern auch neue Erkenntnisse vermitteln sollen. Ebenso wichtig ist es, daß der Lernende selb-

ständig eine möglichst große Anzahl der Übungsaufgaben durchrechnet. Es stellt eine gute Übung dar, wenn der Leser von Zeit zu Zeit den Inhalt mehrerer durchgearbeiteter Abschnitte in einer knappen Zusammenfassung angibt. Er wird dadurch gezwungen, das Wesentliche vom Unwesentlichen zu trennen, Verbindungen zwischen den Teilgebieten herzustellen, und erkennt, ob er den Stoff wirklich verstanden hat.

Bei Zahlenrechnungen zwinge man sich zu größter Sorgfalt. Es werden zunächst alle für die Lösung der Aufgabe erforderlichen Formeln niedergeschrieben, wobei stets Rechenproben zu beachten sind. Dann wird ein Rechenschema aufgestellt, das den zu verwendenden Hilfsmitteln wie Rechenstab, Logarithmentafel und Rechenmaschine entspricht und in das alle bei der Rechnung auftretenden Zahlen einzutragen sind. Schmierzettel gibt es nicht! Jede Rechnung muß so sauber angefertigt sein, daß sie ohne Schwierigkeit von einer zweiten Person überprüft werden kann.

1. Mengen

1.1. Der Mengenbegriff

Im täglichen Leben wird ein naiver Mengenbegriff häufig gebraucht. Man spricht von der Menge der Häuser einer Stadt, von der Menge aller Bücher einer Bibliothek, von der Menge aller Schüler einer Lehranstalt, von der Menge aller Planeten des Sonnensystems und so fort. Der Mengenbegriff wird verwendet, wenn Objekte einer bestimmten Art, Objekte mit bestimmten Eigenschaften zu einer Gesamtheit zusammengefaßt werden sollen. Dies ist auch im Bereich der Mathematik oft notwendig oder vorteilhaft. Man faßt die Zahlen $0, 2, -2, 4, -4, \ldots$ zur Menge aller geraden Zahlen zusammen, spricht von der Menge aller Primzahlen, von der Menge aller Lösungen der Gleichung $\sin x = {}^1/_2$ oder von der Menge aller auf einer Kurve liegenden Punkte.
Für den Mengenbegriff als einen Grundbegriff kann hier keine explizite Definition (das ist eine Erklärung, die den Begriff auf früher erklärte Begriffe zurückführt[1]) gegeben werden. Dies ist nur mit Hilfe noch grundlegenderer Teilgebiete der Mathematik als der Mengenlehre möglich[2]). Daher wird lediglich erklärt, unter welchen Bedingungen und in welcher Weise der zu definierende Begriff verwendet werden soll. Diese Erklärung nennt man eine implizite Definition.

Definition

Ist eine solche Eigenschaft gegeben, daß ein jedes Objekt diese Eigenschaft entweder besitzt oder aber nicht besitzt, so sagt man, alle Dinge, die diese Eigenschaft besitzen, bilden eine **Menge**. Sie werden *Elemente* dieser Menge genannt.

BEISPIELE

1. Alle Münzen in einer Münzensammlung bilden eine Menge. Die mengenbildende Eigenschaft heißt: Münze der Sammlung sein.
2. Alle Bewohner eines Hauses bilden eine Menge. Die mengenbildende Eigenschaft heißt: Bewohner des Hauses sein.
3. Alle durch 5 teilbaren ganzen Zahlen bilden eine Menge. Die mengenbildende Eigenschaft heißt: eine durch 5 teilbare ganze Zahl sein.
4. Die drei Buchstaben a, b, c bilden eine Menge. Die mengenbildende Eigenschaft heißt: entweder der Buchstabe a, der Buchstabe b oder der Buchstabe c sein.

Das letzte Beispiel lehrt, daß es mitunter möglich ist, eine Menge durch Aufzählen ihrer Elemente zu bestimmen. Soll eine Menge aus den (endlich oder unendlich vielen)

---

[1]) Beispiel für eine explizite Definition: „Unter einem Parallelogramm versteht man ein Viereck, dessen Seiten paarweise parallel sind."

[2]) zum Beispiel mit Hilfe der mathematischen Logik

Elementen $a, b, c, \ldots$ gebildet werden, so bezeichnet man sie mit

$$\{a, b, c, \ldots\}.$$

Die mengenbildende Eigenschaft besteht in diesem Fall einfach darin, mit einem der aufgeführten Elemente identisch zu sein.
Mengen werden gewöhnlich mit großen lateinischen Buchstaben $A, B, C, \ldots$, ihre Elemente mit kleinen lateinischen Buchstaben $a, b, c, \ldots$ bezeichnet.
Ist a Element der Menge A, so wird das durch

$$a \in A$$

symbolisiert.
Ist zum Beispiel $U = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$ die Menge aller ungeraden positiven Zahlen, so gilt:

$$1013 \in U.$$

Die Definition schließt nicht aus, daß eine Menge nur aus einem Element besteht. So ist $A = \{a\}$ die Menge, die allein aus dem Element a gebildet wird. Ja, eine Menge darf sogar *leer* sein. Zum Beispiel definiert die Eigenschaft, eine Maschine zu sein, die ohne Verbrauch irgendwelcher Energie immerfort Arbeit verrichtet, eine Menge; denn von jedem Objekt kann entschieden werden, ob es diese Eigenschaft besitzt oder nicht. Weil aber kein Objekt — wie aus der Physik bekannt — diese Eigenschaft besitzt, hat die Menge kein einziges Element, sie ist leer.

AUFGABEN

1. In welchen der folgenden Beispiele wird der Mengenbegriff im mathematischen Sinn gebraucht:
   a) die Menge der Freitage im laufenden Jahr,
   b) die Menge der Primzahlen,
   c) die Menge Wasser in einem Litergefäß,
   d) die Menge der Punkte auf der Peripherie eines Kreises,
   e) die Menge der Monatsnamen, die mit K beginnen.
2. Welchen der genannten Mengen gehört ein Rechteck mit dem Seitenverhältnis 1:2 an:
   a) Menge V der Vielecke,
   b) Menge T der Trapeze,
   c) Menge S der Rhomben,
   d) Menge R der Rechtecke,
   e) Menge P der Parallelogramme,
   f) Menge D der Drachenvierecke,
   g) Menge Q der Quadrate?

1.2. Relationen zwischen Mengen

Die wichtigsten Relationen (Beziehungen), in denen Mengen zueinander stehen können, sind das **Enthaltensein** und die **Gleichheit**.

Definition

Eine Menge A ist in einer Menge B **enthalten**, in Zeichen

$$A \subset B,$$

wenn jedes Element der Menge A auch Element der Menge B ist. A heißt dann *Untermenge* oder *Teilmenge* von B.

BEISPIELE

1. Bild 1 zeigt zwei ebene Punktmengen A und B, von denen A in B enthalten ist.
2. Die Menge aller Säugetiere ist enthalten in der Menge aller Wirbeltiere.
3. Die Menge aller geraden Zahlen ist Teilmenge der Menge aller ganzen Zahlen:

$$\{0, 2, -2, 4, -4, \ldots\} \subset \{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\}.$$

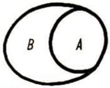


Bild 1

4. Die Menge aller Quadrate ist enthalten in der Menge aller Vierecke, diese wieder in der Menge aller Vielecke.

Beim Enthaltensein zweier Mengen, $A \subset B$, sind zwei Sonderfälle möglich:
Erstens kann die Teilmenge A eine leere Menge sein. Eine leere Menge ist in jeder beliebigen anderen Menge B enthalten; denn von jedem ihrer Elemente (sie hat ja keine) kann gesagt werden, es sei Element von B.
Zweitens kann die Teilmenge A die Menge B vollständig ausmachen, so daß es kein Element von B gibt, das nicht zu A gehört. In diesem Fall sagt man, A sei eine *unechte Teilmenge* von B, oder spricht von der *Gleichheit* der Mengen A und B. Von diesem Sonderfall unterscheidet man das echte Enthaltensein, wo A die Menge B nicht vollständig erfüllt.

Definition

Eine Menge A ist **gleich** einer Menge B, in Zeichen

$$A = B,$$

wenn jedes Element von A auch Element von B und umgekehrt jedes Element von B auch Element von A ist.

Nach dieser Definition sind zwei Mengen A und B genau dann gleich, wenn A in B und B in A enthalten ist:

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \quad \text{und} \quad B \subset A.$^{1)}$$

BEISPIELE

5. Die Menge aller Quadrate ist gleich der Menge aller Rhomben, die einen rechten Winkel besitzen.
6. Die Menge aller durch drei teilbaren ganzen Zahlen ist gleich der Menge aller ganzen Zahlen mit durch drei teilbarer Quersumme.
7. Die Menge A aller arabischen Ziffern ist gleich der Menge $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$:

$$A = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}.$$

---

1) Bedeutung des Zeichens $\Leftrightarrow$ vgl. S. 573

Da alle leeren Mengen aus denselben Elementen (nämlich aus gar keinen) gebildet werden, sind sie untereinander gleich. Aus diesem Grund wird von *der* leeren Menge gesprochen. Sie wird mit dem Symbol $\varnothing$ bezeichnet:

$$\varnothing = \{\ \}.$$

Von der leeren Menge ist die Menge $\{0\}$ zu unterscheiden, die als Element die Zahl Null enthält.
Die beiden Relationen Enthaltensein und Gleichheit besitzen folgende **Eigenschaften**:

Für eine beliebige Menge A gilt stets sowohl $A \subset A$ als auch $A = A$.

Beziehungen, die stets dann wahre Aussagen ergeben, wenn sie zwischen einem Objekt und sich selbst aufgestellt werden, heißen *reflexiv*. Enthaltensein und Gleichheit sind demnach reflexive Beziehungen.

Ist eine Menge A in einer Menge B enthalten und die Menge B Teilmenge einer Menge C, so ist auch A Teilmenge von C:

$$A \subset B \text{ und } B \subset C \Rightarrow A \subset C. \tag{I}$$

Beweis: Ist a ein beliebiges Element von A, so gehört es wegen $A \subset B$ auch der Menge B an: $a \in B$. Wegen $B \subset C$ folgt aber daraus $a \in C$. Somit sind alle Elemente von A auch Elemente von C, das heißt $A \subset C$.
Dieselbe Eigenschaft kommt auch der Gleichheit zu:

Ist die Menge A gleich der Menge B und die Menge B gleich der Menge C, so ist auch A gleich C:

$$A = B \text{ und } B = C \Rightarrow A = C. \tag{II}$$

Beziehungen, die wie das Enthaltensein in (I) oder die Gleichheit in (II) übertragbar sind, werden *transitiv* genannt.
In einer Hinsicht aber unterscheiden sich die beiden Relationen:

Aus $A = B$ folgt stets $B = A$.

Dagegen kann aus $A \subset B$ keineswegs $B \subset A$ geschlossen werden. Dürfen bei einer Relation, wie bei der Gleichheit, die Bezugsobjekte ausgetauscht werden, so heißt diese Relation *symmetrisch*.

Die Gleichheit ist eine symmetrische, reflexive und transitive Relation. Das Enthaltensein ist nur reflexiv und transitiv.

AUFGABEN

i l s e il is ie ls

3. Es sind alle Teilmengen der Menge $\{i, l, s, e\}$ zu bestimmen. ls se ils ile lse ilse $\varnothing$

ise

4. Welche Eigenschaften haben die folgenden Relationen:
   a) die in der Menge aller ebenen Figuren erklärte Kongruenz $F_1 \cong F_2$,
   b) die in derselben Menge erklärte Ähnlichkeit $F_1 \sim F_2$,
   c) die in der Menge aller Geraden einer Ebene erklärte Orthogonalität (Senkrechtsein) $g_1 \perp g_2$,
   d) die in derselben Menge erklärte Parallelität $g_1 \parallel g_2$?

1.3. Operationen mit Mengen

Es ist auf verschiedene Weisen möglich, aus zwei Mengen eine dritte Menge zu bilden. Dies ähnelt den Rechenoperationen mit Zahlen, die auch zwei gegebenen Zahlen eine dritte zuordnen. Deshalb spricht man von „Operationen mit Mengen“. Die wichtigsten sind die Vereinigung und die Bildung des Durchschnitts, der Differenz und des Produktes.

Definition

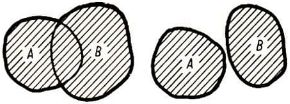
Unter der **Vereinigungsmenge** $A \cup B$ der beiden Mengen A und B versteht man die Menge aller Elemente, die zu A *oder* zu B gehören (vielleicht auch zu beiden).

Es gilt daher:

$$A \subset A \cup B \quad \text{und} \quad B \subset A \cup B.$$

BEISPIELE

1. Sind A und B die in den Bildern 2a und 2b dargestellten ebenen Punktmengen, so ist $A \cup B$ jeweils die durch Schraffur gekennzeichnete Punktmenge.



a) b)

Bild 2

2. Ist A die Menge aller lehrreichen Bücher in einem Bücherschrank, B die Menge aller Bücher mit grünem Einband in diesem Schrank, dann ist $A \cup B$ die Menge aller Bücher dieses Schrankes, die lehrreich sind *oder* einen grünen Einband besitzen (vielleicht auch beides).
3. Ist A die Menge aller im Wasser lebenden Tiere, B die Menge aller auf dem Lande lebenden Tiere, so stellt $A \cup B$ die Menge aller im Wasser *oder* auf dem Lande lebenden Tiere dar.
4. $\{a, m, s, e, l\} \cup \{s, t, a, r\} = \{a, m, s, e, l, t, r\}$.

Es können auch mehr als zwei Mengen vereinigt werden. Zum Beispiel läßt sich die Vereinigungsmenge der drei Mengen A, B und C in der Weise bilden, daß man erst A und B vereinigt zu $A \cup B$ und dann diese Menge mit C zu $(A \cup B) \cup C$. Es ergibt sich die Menge aller Elemente, die zu A oder zu B oder zu C gehören. Dasselbe ist der Fall, wenn erst B mit C vereinigt wird zu $B \cup C$, und dann A mit $B \cup C$ vereinigt wird zu $A \cup (B \cup C)$. Da es mithin gleichgültig ist, in welcher Reihenfolge die Operationen ausgeführt werden, ist es gestattet, die Klammern ganz wegzulassen:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C.$$

Den durch diese Formelzeile dargestellten Sachverhalt nennt man das *Assoziationsgesetz der Vereinigung*. Es gilt auch für die Vereinigung beliebig vieler Mengen. Die Vereinigung einer Menge A mit einer Teilmenge B liefert stets wieder A und umgekehrt:

$$B \subset A \iff A \cup B = A.$$

Eine ebenso einfache Operation wie die Vereinigung zweier Mengen ist das Bilden ihres Durchschnitts.

Definition

Unter dem **Durchschnitt** $A \cap B$ der beiden Mengen A und B versteht man die Menge aller Elemente, die *sowohl* zu A *als auch* zu B gehören.

Es gilt daher:

$$A \cap B \subset A \quad \text{und} \quad A \cap B \subset B.$$

BEISPIELE

5. Bild 3 stellt schraffiert den Durchschnitt zweier ebener Punktmengen A und B dar.
6. Sei wieder A die Menge aller lehrreichen und B die Menge aller grün eingebundenen Bücher in einem Bücherschrank, dann ist $A \cap B$ die Menge aller Bücher in diesem Schrank, die *sowohl* lehrreich sind, *als auch* einen grünen Einband haben.
7. Ist A die Menge aller im Wasser lebenden Tiere, B die Menge aller auf dem Lande lebenden Tiere, so ist $A \cap B$ die Menge aller Amphibien.
8. $\{a, m, s, e, l\} \cap \{s, t, a, r\} = \{a, s\}$.

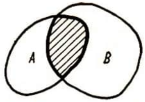


Bild 3

Enthalten A und B keine gemeinsamen Elemente — man sagt dann, die beiden Mengen seien *elementfremd* oder disjunkt —, so ist ihr Durchschnitt leer: $A \cap B = \varnothing$. Dies gilt auch umgekehrt: Ist der Durchschnitt zweier Mengen die leere Menge, so haben sie keine gemeinsamen Elemente.
Auch der Durchschnitt kann von mehr als zwei Mengen gebildet werden. Dabei ergibt sich ähnlich wie bei der Vereinigung:

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C.$$

Für die Durchschnittsbildung gilt also ebenfalls ein *Assoziationsgesetz.*
Eine dritte Art, Elemente zweier Mengen A und B zu einer neuen Menge zusammenzufassen, ist die Bildung der Differenz.

Definition

Unter der **Differenz** $A \setminus B$ der beiden Mengen A und B versteht man die Menge aller Elemente von A, die nicht zu B gehören.

BEISPIELE

9. Bild 4 zeigt schraffiert die Differenzmenge der Mengen A und B.
10. Sei A die Menge aller Fünfecke, B die Menge aller regelmäßigen Vielecke, so ist $A \setminus B$ die Menge aller nichtregelmäßigen Fünfecke.
11. Sei A die Menge aller Lehrlinge eines Betriebes, B die Menge aller an einem bestimmten Tag abwesenden Angehörigen des Betriebes, so erscheint zu einer betrieblichen Lehrveranstaltung an diesem Tag im allgemeinen die Menge $A \setminus B$ aller Lehrlinge, die an dem Tag nicht abwesend sind.
12. $\{r, e, i, s\} \setminus \{s, t, u, r, m\} = \{e, i\}$.

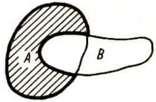


Bild 4

Sind die Mengen A und B elementfremd, so stimmt die Differenz $A \setminus B$ mit A überein und umgekehrt. Auf jeden Fall aber gilt:

$$A \setminus B = A \setminus (A \cap B),$$

weil bei der Differenzbildung von A nur Elemente weggelassen werden, die sowohl zu A als auch zu B gehören.

Eine ganz andere Art der Verknüpfung zweier Mengen als Vereinigung, Bildung des Durchschnitts oder der Differenz stellt die Bildung des Produktes zweier Mengen A und B dar. Das Mengenprodukt kommt zustande, indem man aus den Elementen von A und den Elementen von B sämtliche Paare bildet. Ist zum Beispiel $A = \{a, b\}$ und $B = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, so besteht das Mengenprodukt dieser beiden Mengen aus den Paaren $(a; \alpha)$, $(a; \beta)$, $(a; \gamma)$, $(b; \alpha)$, $(b; \beta)$, $(b; \gamma)$. Dabei ist die Reihenfolge wesentlich: Bei jedem Paar steht an erster Stelle ein Element von A, an zweiter Stelle ein Element von B. Man spricht deshalb von *geordneten* Paaren.

Definition

Unter dem **Mengenprodukt** $A \times B$ der beiden Mengen A und B versteht man die Menge aller geordneten Elementpaare $(a; b)$ mit $a \in A$ und $b \in B$.

BEISPIELE

13. Ist R die Menge aller Zahlen der Zahlengeraden, so können die Elemente von $R \times R$ als Koordinatenpaare von Punkten in der Ebene eines cartesischen Koordinatensystems gedeutet werden. Bild 5 zeigt die Darstellung des Zahlenpaares $(x_1; y_1)$ als Punkt P_1 der Koordinatenebene.

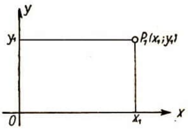


Bild 5

14. Bildet man das Produkt aus den Mengen aller Punktkoordinaten $(x; y)$ in einer Ebene und der Menge aller Höhen z über dieser Ebene, so ergeben sich Zahlentripel $(x; y; z)$, die die Raumkoordinaten der Punkte des dreidimensionalen Raumes bilden.
15. Ist T die Menge aller Zeitpunkte, so liefert das Mengenprodukt von T mit der Punktmenge des vorigen Beispiels Quadrupel $(x; y; z; t)$, die als Ort-Zeit-Punkte des vierdimensionalen Raumes der Relativitätstheorie gedeutet werden können.

AUFGABEN

5. Es ist der Durchschnitt von je zwei der in Aufgabe 2b) bis f) genannten Mengen zu bilden.
6. Es sind Vereinigung, Durchschnitt und Differenz aus folgenden Mengenpaaren zu bilden:
   a) $\{a, u, t, o\}$ und $\{m, a, u, s\}$,
   b) $\{0, 2, 4, 6, \ldots\}$ und $\{0, 5, 10, 15, \ldots\}$,
   c) der Menge aller russisch sprechenden Menschen und der Menge aller englisch sprechenden Menschen.
7. K sei die Menge aller Schüler einer Klasse, E die Menge der an einem bestimmten Tag entschuldigt, U die Menge der an diesem Tag unentschuldigt Fehlenden. Durch K, E und U ist die Menge aller an diesem Tag anwesenden Schüler der Klasse darzustellen.
8. Wie heißt die kleinste Menge, die die Mengen A, B und C enthält?
9. Wie heißt die größte Menge, die in den Mengen A, B und C enthalten ist?
10. Was ergibt
    a) $A \cap \varnothing$, b) $A \setminus \varnothing$, c) $\varnothing \setminus A$?
11. Es ist
    a) $A \cup (A \cap B)$, b) $A \cap (A \cup B)$
    zu bestimmen (Skizze für Punktmengen!).

12. Die nachstehenden Folgerungen sind zu begründen oder zu widerlegen:

a) $a \in A, \quad A \subset B$ und $B \subset C \Rightarrow a \in C$, b) $a \in A$ und $B \subset A \Rightarrow a \in A \setminus B$,
c) $a \in A$ und $B \subset A \Rightarrow a \in A \cap B$, d) $A \cup B = B \Rightarrow B \subset A$,
e) $A \setminus B = \emptyset \Rightarrow A = B$, f) $A \cap B = A \cup B \Rightarrow A = B$.

13. Was folgt

a) aus $a \in A \cup B$ und $a \notin A$, b) aus $a \notin A \cap B$ und $a \in A$

hinsichtlich der Beziehung von a zu B?

14. Es ist der Durchschnitt der Mengen $A \setminus B$ und $B \setminus A$ zu bilden.
15. Was kann aus $A \setminus B = B \setminus A$ geschlossen werden?
16. Was läßt sich über die Mengen A und B aussagen, wenn

a) $A \cup B \subset A \cap B$, b) $A \setminus B \subset A \cap B$?

17. Am Beispiel ebener Punktmengen sind folgende Beziehungen zu bestätigen:

a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,
b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
c) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$.

18. Die in Aufgabe 17. genannten Beziehungen sind für die Mengen $A = \{g, e, i, s, t\}$, $B = \{i, n, s, e, l\}$ und $C = \{l, a, c, h, e, n\}$ zu bestätigen.

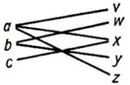
1.4. Abbildungen

Es kommt häufig vor, daß die Elemente zweier Mengen einander zugeordnet sind.

BEISPIEL

1. Ist $A = \{a, b, c\}$ die Menge aller Schalter in einem Raum und $B = \{v, w, x, y, z\}$ die Menge aller Lampen dieses Raumes, so sind jedem Schalter diejenigen Lampen zugeordnet, die durch ihn eingeschaltet werden. Die Zuordnung kann in Form einer Tabelle oder eines Schemas dargestellt werden:

A	B
a	v, x, z
b	w, y
c	x



Definition

Werden durch eine bestimmte Vorschrift den Elementen einer Menge A die Elemente einer Menge B zugeordnet, wobei jedem Element von A ein oder mehrere Elemente von B entsprechen, so spricht man von einer **Abbildung** der Menge A auf die Menge B.

Abbildungen werden mit kleinen griechischen Buchstaben, $\sigma, \tau, \ldots$, bezeichnet. Entspricht dem Element $a \in A$ bei der Abbildung — vielleicht unter weiteren Elementen — das Element $b \in B$, so heißt b *Bild* des Elementes a und a *Urbild* des Elementes b. In diesem Sinne wird B *Bildmenge* und A *Urbildmenge* genannt.

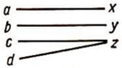
BEISPIEL

2. A sei die Menge aller Lehrkräfte, B die Menge aller Klassen einer Schule. Ordnet man jeder Lehrkraft diejenigen Klassen zu, die sie unterrichtet, so entsteht eine Abbildung der Menge A auf die Menge B.

Von besonderer Bedeutung sind diejenigen Abbildungen, bei denen jedes Urbild genau ein Bild besitzt. Sie heißen *eindeutige Abbildungen* oder, soweit die beiden Mengen mathematische Objekte enthalten, *Funktionen.*

BEISPIELE

3. Falls jede Lehrkraft genau eine Klasse unterrichtet, stellt das Beispiel 2. eine eindeutige Abbildung der Menge der Lehrkräfte auf die Menge der Klassen der Schule dar. Dabei können mehrere Lehrkräfte in der gleichen Klasse Unterricht erteilen. Bezeichnen etwa die Buchstaben a, b, c, d die Lehrkräfte und x, y, z die Klassen, so könnte das Schema der eindeutigen Abbildung folgendermaßen aussehen:



4. Es sei A die Menge aller Schüler einer Schule, B die Menge aller Klassen dieser Schule. Ordnet man jedem Schüler die Klasse zu, der er angehört, so erhält man eine eindeutige Abbildung der Menge A auf die Menge B.
5. Die Tabelle

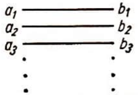
A	B
1	2
2	4
3	5
4	4
5	2

stellt eine Funktion dar.

Am einfachsten sind jedoch diejenigen Abbildungen zu überblicken, bei denen nicht nur jedem Urbild genau ein Bild, sondern auch jedem Bild genau ein Urbild entspricht. Solche Abbildungen heißen *eineindeutig*, weil sie sowohl in der Richtung von A nach B als auch umgekehrt eindeutig sind.

BEISPIEL

6. Ist A die Menge aller Sitzplätze in einem Theater und B die Menge aller Eintrittskarten für eine bestimmte Vorstellung, so liefert die Zuordnung jeder Karte zu dem auf ihr bezeichneten Platz eine eineindeutige Abbildung der Menge A auf die Menge B. Wenn die Sitzplätze mit $a_1, a_2, a_3, \ldots$ und die zugehörigen Karten mit $b_1, b_2, b_3 \ldots$ bezeichnet werden, lautet das Abbildungsschema:



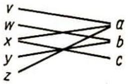
Gelegentlich — vor allem bei Funktionen — ist es nötig, bei einer Abbildung die Rollen von Urbildmenge und Bildmenge zu vertauschen.

BEISPIEL

7. Im Beispiel 1. wurde die Menge A der Schalter in einem Raum auf die Menge B der Lampen dieses Raumes abgebildet. Die Abbildung beantwortete die Frage: Welche Lampen brennen

beim Betätigen eines bestimmten Schalters? Es kann aber auch die umgekehrte Frage gestellt werden. Welche Schalter bringen eine bestimmte Lampe zum Leuchten? In diesem Fall interessiert man sich für die umgekehrte Zuordnung, die Zuordnung der Schalter zu den Lampen. Sie wird — dieselbe Installation des Raumes wie oben vorausgesetzt — auf folgende Weisen dargestellt:

B	A
v	a
w	b
x	a, c
y	b
z	a



Definition

Die aus einer gegebenen Abbildung σ durch Vertauschen von Urbildmenge und Bildmenge entstehende Abbildung heißt *Umkehrabbildung* zu σ.

In diesem Sinne spricht man auch von *Umkehrfunktionen.*

AUFGABEN

19. A sei die Menge aller in einem bestimmten Internat wohnenden Studierenden, B die Menge der von ihnen bewohnten Räume dieses Hauses. Es werden jedem Studenten diejenigen Räume zugeordnet, die er bewohnt. Unter welchen Bedingungen ist diese Abbildung
   a) eindeutig,
   b) eineindeutig?
20. Wie muß eine eindeutige Abbildung beschaffen sein, damit ihre Umkehrabbildung wiederum eindeutig ist?

1.5. Eigenschaften von Mengen

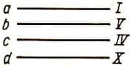
Zum Vergleich zweier Mengen in bezug auf ihren Reichtum an Elementen dient der Begriff der **Mächtigkeit**.

Definition

Ist es möglich, die Menge A eineindeutig auf die Menge B abzubilden, so heißen die beiden Mengen *gleichmächtig*.

BEISPIELE

1. Die Menge A der Sitzplätze und die Menge B der Eintrittskarten in einem Theater sind gleichmächtig (vgl. 1.4. Beispiel 6.).
2. Die beiden Mengen $\{a, b, c, d\}$ und $\{I, V, IV, X\}$ sind gleichmächtig; denn die Zuordnung



liefert eine eineindeutige Abbildung.

3. Ein Massenpunkt bewege sich gleichförmig auf einer Geraden. M sei die Menge aller Punkte dieser Geraden und T die Menge aller Zeiten. Ordnet man jeder Zeit $t \in T$ den Punkt $P \in M$ der Geraden zu, an dem sich der Massenpunkt zur Zeit t befindet, so bekommt man eine eineindeutige Abbildung der Menge T auf die Menge M. Die Menge aller Zeiten ist also gleichmächtig der Menge aller Punkte auf einer Geraden.
4. Es sei A die Menge aller Geraden durch einen Punkt H und B die Menge aller Punkte auf einer nicht durch H gehenden Geraden h. Diese Mengen sind gleichmächtig. Wird nämlich wie in Bild 6 jeder Geraden aus A der Punkt aus B zugeordnet, in dem sie die Gerade h schneidet, so entsteht eine eineindeutige Abbildung von A auf B. (Der Parallelen zu h entspricht der „unendlich ferne" Punkt der Geraden h.)

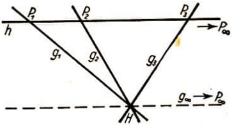


Bild 6

Ist es nicht möglich, die Menge A eineindeutig auf die Menge B abzubilden, wohl aber, die Menge A auf eine echte Teilmenge von B eineindeutig abzubilden, so sagt man, die Menge B sei *mächtiger* oder *von größerer Mächtigkeit* als die Menge A. In diesem Sinn ist zum Beispiel die Menge $\{a, b, c\}$ mächtiger als die Menge $\{\alpha, \beta\}$.

Bezüglich der inneren Struktur einer Menge ist die **Ordnung** die wichtigste Eigenschaft. Eine Menge heißt geordnet, wenn für je zwei verschiedene Elemente durch eine *Ordnungsrelation* eine Reihenfolge festgelegt ist.

BEISPIELE

5. Von zwei verschiedenen Punkten eines Strahles kann stets gesagt werden, welcher in der Richtung des Strahles gesehen vor dem anderen kommt. Das Zuvorkommen stellt eine Ordnungsrelation in der Menge der Punkte des Strahles dar und prägt ihr eine Ordnung auf.
6. Von zwei verschiedenen positiven ganzen Zahlen kann stets gesagt werden, welche kleiner als die andere ist. Das Kleinersein stellt eine Ordnungsrelation in der Menge der positiven ganzen Zahlen dar und prägt ihr eine Ordnung auf.
7. Von zwei Schülern einer Klasse kann stets gesagt werden, welcher dem anderen nach der im Klassenbuch vorhandenen Schülerliste vorangeht. Das Vorangehen laut Klassenbuch stellt eine Ordnungsrelation in der Menge der Schüler der Klasse dar und prägt ihr eine Ordnung auf.

Eine Ordnungsrelation wird im allgemeinen durch das Zeichen $<$ ausgedrückt. Sie muß drei Bedingungen erfüllen:

1. Aus $a < b$ und $b < c$ folgt stets $a < c$ (Transitivität).
2. Für zwei verschiedene Elemente a und b gilt entweder $a < b$ oder $b < a$.
3. Es gilt niemals $a < a$ (Irreflexivität).

Es ist leicht, zu bestätigen, daß die in den Beispielen 5, 6 und 7 beschriebenen Relationen diese Bedingungen erfüllen.

AUFGABEN

21. Es ist zu beweisen, daß die Menge der Punkte eines Halbkreises, die beiden Begrenzungspunkte ausgenommen, der Menge der im Endlichen liegenden Punkte auf einer Geraden gleichmächtig ist.
22. Kann eine Menge einer ihrer echten Teilmengen gleichmächtig sein?
23. Angenommen, es ist möglich, die Menge A eineindeutig auf die echte Teilmenge B' der Menge B abzubilden. Folgt daraus, daß B mächtiger als A ist?
24. Ist durch die lexikographische Anordnung der Worte im Duden in der Menge aller deutschen Worte im Sinne der Mengenlehre eine Ordnungsrelation gegeben?

2. Der Bereich der natürlichen Zahlen

2.1. Entstehung der natürlichen Zahlen

Eine der ersten mathematischen Aufgaben, vor die der Mensch sich im Laufe seiner Entwicklung gestellt sah, war der Vergleich einfacher Mengen bezüglich ihrer Mächtigkeit. Beim Tauschhandel wurde etwa eine Menge Früchte für eine gleichmächtige Menge Muscheln gegeben. Um den persönlichen Besitz zu vergleichen, mußte festgestellt werden, wessen Viehherde von größerer Mächtigkeit war. Beim Kampf kam es unter anderem auf die Mächtigkeit der Menge der eigenen Krieger im Vergleich zur Mächtigkeit der Menge der gegnerischen Krieger an.
Im einfachsten Fall konnte dieser Vergleich durch eine eineindeutige Zuordnung der Elemente beider Mengen geschehen. Im Handel stellte man etwa jeder Frucht eine Muschel entgegen und erhielt dadurch, ohne zu zählen, zwei gleichmächtige Mengen.
Schwieriger wurde es, wenn die räumliche Entfernung der beiden Mengen oder andere Umstände die unmittelbare Zuordnung der Elemente nicht gestattete. In diesem Falle benutzte man zunächst selbstgefertigte Vergleichsmengen. Sollte etwa die Mächtigkeit zweier weit voneinander entfernten Herden verglichen werden, so bediente man sich eines gekerbten Stabes, auf dem jede Kerbe einem Tier der einen Herde entsprach. Man trug den Stab zur anderen Herde und verglich die Mächtigkeit der Kerbenmenge mit deren Mächtigkeit.
Besonders die Finger der Hände wurden gern zur Bildung von Vergleichsmengen gebraucht. Indem man sie mehrfach benutzte, reichten sie auch zur Beschreibung reichhaltigerer Mengen aus. Symbolisch können die durch Finger gebildeten Mengen durch die folgenden Strichmengen dargestellt werden:

$$|,\ ||,\ |||,\ ||||,\ \cancel{||||},\ \ldots,\ \cancel{||||}\ \cancel{||||},\ \cancel{||||}\ \cancel{||||}\ |,\ \ldots$$

In dieser Folge entsteht jedesmal durch Hinzufügen eines Striches eine Menge größerer Mächtigkeit[1]). Als Namen für die Mächtigkeit der durch die aufgeführten Strichmengen vertretenen Mengen bildeten sich die „natürlichen"[2]) Zahlen Eins, Zwei, Drei, … heraus. Später kam als Namen für die Mächtigkeit der leeren Menge die Null hinzu.

Definition

> Die **natürlichen Zahlen** sind Namen für die durch Strichmengen vertretenen Mächtigkeiten:
>
> Null, Eins, Zwei, Drei, Vier, Fünf, …
>
> $\quad ,\quad |,\quad ||,\quad |||,\quad ||||,\quad \cancel{||||}, \ldots$

[1]) Diese Tatsache bedürfte eines Beweises, der aber hier nicht gegeben werden kann

[2]) Der Ausdruck „natürliche Zahlen" bedeutet nicht, daß andere Zahlen — etwa die gebrochenen — weniger mit der Natur verbunden wären als diese. Er stammt aus einer Zeit, als in der Mathematik idealistische Vorstellungen den Zahlenbegriff beherrschten

Die Menge der natürlichen Zahlen wird mit N bezeichnet. Hat die Mächtigkeit einer Menge A den Namen $n \in N$, so wird auch kurz gesagt: A besitze n Elemente, oder die *Elementezahl* von A sei n.

Nach den durch sie benannten Mächtigkeiten können die natürlichen Zahlen geordnet werden. Die natürliche Zahl m heißt kleiner als die natürliche Zahl n, in Zeichen

$$m < n,$$

wenn die n darstellende Strichmenge von größerer Mächtigkeit ist als die m darstellende Strichmenge. Die damit erklärte Relation $<$ erfüllt die drei in 1.5. genannten Forderungen[1]). Mit ihr bilden die natürlichen Zahlen eine geordnete Menge.

Das *Gleichheitszeichen* steht zunächst nur zwischen einer natürlichen Zahl und sich selbst: $n = n$. Möchte man ausdrücken, daß m nicht kleiner als n ist, so kann das in der Form $m \geqq n$ geschehen. $m \leqq n$ bedeutet: m ist nicht größer als n. Um die Gleichheit auszuschließen, verwendet man das Zeichen $\neq$. Statt $n > 0$ sagt man auch, n sei *positiv*.

Zur graphischen Darstellung der natürlichen Zahlen benutzt man eine Gerade (Zahlengerade). Auf ihr werden — bei einem beliebigen Punkt, dem Nullpunkt beginnend — den natürlichen Zahlen der Reihe nach in gleichen Abständen aufeinander folgende Punkte zugeordnet (Bild 7). Die Beziehung $m < n$ zwischen den natürlichen Zahlen m und n kommt dann dadurch zum Ausdruck, daß der m darstellende Punkt, von dem n darstellenden Punkt aus gesehen, auf der Seite des Nullpunktes liegt.

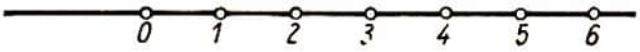


Bild 7

Obwohl es unter den natürlichen Zahlen keine größte gibt, können trotzdem Mengen vorkommen, die von höherer Mächtigkeit sind, als eine natürliche Zahl zu beschreiben vermag, das heißt von höherer Mächtigkeit als jede der oben aufgeführten Strichmengen. Ein Beispiel dafür ist die Menge der natürlichen Zahlen selbst. Um solche Mengen von den Mengen geringerer Mächtigkeit zu unterscheiden, dient der Begriff der *Endlichkeit*. Eine Menge heißt endlich, wenn ihre Mächtigkeit durch eine natürliche Zahl benannt wird. Im anderen Fall heißt sie unendlich. Die Menge der natürlichen Zahlen ist also eine unendliche Menge.

AUFGABEN

25. Wie kann die Menge der positiven natürlichen Zahlen unter Benutzung von Mengenoperationen durch N dargestellt werden?
26. Welche Eigenschaften besitzt die Relation $\leqq$?

2.2. Rechenoperationen im Bereich der natürlichen Zahlen

Den Operationen mit endlichen Mengen entsprechen Rechenoperationen mit natürlichen Zahlen.

---

[1]) Der Beweis dafür kann hier nicht geführt werden

Definition

Die Elementezahl s der Vereinigungsmenge S der beiden elementfremden endlichen Mengen A und B mit den Elementezahlen a und b heißt *Summe* der beiden Zahlen a und b und wird durch $a + b$ bezeichnet:

$$S = A \cup B, \qquad A \cap B = \varnothing,$$
$$s = a + b.$$

a und b heißen *Summanden*, die Rechnung heißt **Addition**.

Die Addition erfüllt folgende *Grundgesetze*[1]:

1. Die Addition ist *unbeschränkt ausführbar:*
   Zu zwei Zahlen a und b gibt es stets eine Summe $a + b$.
2. Die Summe ist *eindeutig* bestimmt:
   Aus $a = a'$ und $b = b'$ folgt stets $a + b = a' + b'$.
3. *Assoziationsgesetz:*
   Es ist stets $a + (b + c) = (a + b) + c$.
   In Summen aus mehr als zwei Gliedern kommt es nicht auf die Reihenfolge der Ausführung der Additionen an.
4. *Kommutationsgesetz:*
   Es ist stets $a + b = b + a$.
   In einer Summe sind die Glieder vertauschbar.

Im Zusammenhang mit der Anordnung gilt ferner noch das *Monotoniegesetz:*

Aus $a < b$ folgt stets $a + c < b + c$.

Eine Ungleichung bleibt bestehen, wenn auf beiden Seiten die gleiche Zahl addiert wird.

Wird eine endliche Menge A mit der Elementezahl a mit der leeren Menge (Elementezahl Null) vereinigt, so erhält sie dadurch nicht mehr Elemente. Daher ist die Summe gleich dem ersten Summanden, wenn der zweite Null ist:

$$A \cup \varnothing = A$$
$$a + 0 = a.$$

Die Addition kann — allerdings im Bereich der natürlichen Zahlen nur bedingt — umgekehrt werden: Ist $a \geqq b$, dann gibt es eine Zahl d, so daß $b + d = a$ ist. Da für jede Zahl $d' > d$ nach dem Monotoniegesetz $b + d' > b + d = a$, für jede kleinere Zahl d'' aber $b + d'' < b + d = a$ ist, gibt es außer d keine weitere Zahl, die die Bedingung $b + d = a$ erfüllt. Die Zahl d ist durch sie eindeutig bestimmt.

Definition

Ist für die beiden Zahlen a und b die Bedingung $b + d = a$ erfüllbar, so heißt die durch sie eindeutig bestimmte Zahl d *Differenz* von a und b und wird mit $a - b$ bezeichnet. In ihr wird a *Minuend* und b *Subtrahend* genannt. Die Rechnung heißt **Subtraktion.**

---

[1]) Die Beweise dieser Grundgesetze sind leicht zu erbringen, würden jedoch hier zu weit führen

Die Differenz $d = a - b$ ist also die Zahl, die, zu b addiert, a ergibt.
Wenn die endliche Menge B mit der Elementezahl b in der endlichen Menge A mit der Elementezahl a enthalten ist, so hat die Differenzmenge D die Elementezahl $d = a - b$:

$$D = A \setminus B,$$
$$d = a - b, \qquad\qquad B \subset A.$$

Die Gesetze der Subtraktion ergeben sich aus der Definition dieser Operation und den Grundgesetzen der Addition. Ein Beispiel mag dies belegen.

BEISPIEL

1. Zu beweisen ist: $a + (b - c) = (a + b) - c$.

Beweis: Die in der Gleichung rechts stehende Zahl ist nach der Erklärung der Subtraktion dadurch eindeutig bestimmt, zu c addiert $a + b$ zu ergeben.
Kommt diese Eigenschaft auch der linken Seite zu? Zur linken Seite wird c addiert:

$$(a + (b - c)) + c.$$

Nach dem Assoziationsgesetz darf die äußere Klammer umgesetzt werden:

$$(a + (b - c)) + c = a + ((b - c) + c).$$

Nun ist aber nach der Definition der Subtraktion $b - c$ die Zahl, die zu c addiert b ergibt. Also liefert $(b - c) + c$ den Wert b. Der ganze Ausdruck ist folglich gleich $a + b$. Daher stimmt die linke Seite der Gleichung mit der rechten überein.

Zur Definition des Produktes zweier natürlicher Zahlen dient die Elementezahl des Mengenprodukts:

Definition

Die Elementezahl p des Mengenprodukts P der beiden endlichen Mengen A und B mit den Elementezahlen a und b heißt *Produkt* der Zahlen a und b und wird durch $a \cdot b$ oder kurz ab bezeichnet:

$$P = A \times B,$$
$$p = a \cdot b.$$

a und b heißen *Faktoren*, die Rechnung heißt **Multiplikation**.

Die Multiplikation befolgt ähnliche *Grundgesetze* wie die Addition:

1. Die Multiplikation ist *unbeschränkt ausführbar:*
   Zu zwei Zahlen a und b gibt es stets ein Produkt $a \cdot b$.
2. Das Produkt ist *eindeutig* bestimmt:
   Aus $a = a'$ und $b = b'$ folgt stets $a \cdot b = a' \cdot b'$.
3. *Assoziationsgesetz:*
   Es ist stets $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.
   In Produkten aus mehr als zwei Gliedern kommt es nicht auf die Reihenfolge der Ausführung der Multiplikationen an.

4. *Kommutationsgesetz:*
   Es ist stets $a \cdot b = b \cdot a$.
   In einem Produkt sind die Glieder vertauschbar.
5. *Distributionsgesetz:*
   Es ist stets $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.
   Dieses Gesetz kann in zwei Richtungen gelesen werden:
   von links nach rechts: Man multipliziert eine Zahl mit einer Summe, indem man sie mit jedem Summanden einzeln multipliziert und die Produkte addiert;
   von rechts nach links: Aus einer Summe von Produkten dürfen gemeinsame Faktoren ausgeklammert werden.

Auch für die Multiplikation gilt im Zusammenhang mit der Anordnung ein *Monotoniegesetz:*

Aus $a < b$ und $c > 0$ folgt stets $a \cdot c < b \cdot c$.

Bei der Bildung des Mengenprodukts $A \times B$ können alle a Elemente der Menge A mit einem Element der Menge B gepaart werden und liefern dabei a Elemente des Mengenprodukts. B hat b Elemente, also ergibt sich für die Elementezahl $a \cdot b$ des Mengenprodukts die Darstellung

$$a \cdot b = \underbrace{a + a + \ldots + a}_{b \text{ Summanden}}.$$

Dies ist der bekannte Zusammenhang zwischen Multiplikation und Addition: Das Produkt $a \cdot b$ ist gleich der Summe aus b Summanden a.
Überträgt man den Gedanken der mehrfachen Verknüpfung einer Zahl mit sich selbst von der Addition auf die Multiplikation, so kommt man zum Begriff der **Potenz**: a^n $(n \in N \setminus \{0\})$ ist Abkürzung für ein Produkt aus n Faktoren a:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}.$$

a heißt dabei *Basis*, n *Exponent* und a^n *Potenzwert*.

a^0 definiert man sinnvollerweise als Eins:

$$a^0 = 1.$$

Ist eine der beiden Mengen A und B die leere Menge, so enthält das Mengenprodukt $A \times B$ kein einziges Elementepaar und ist ebenfalls leer. Daher hat das Produkt den Wert Null, wenn einer der Faktoren Null ist. Enthält aber jede der beiden Mengen A und B wenigstens ein Element, so besitzt das Mengenprodukt $A \times B$ wenigstens das Paar dieser beiden Elemente und ist nicht leer. Demnach ist ein Produkt *nur* dann gleich Null, wenn einer der Faktoren Null ist.

Satz

Ein Produkt hat *dann und nur dann* den Wert Null, wenn einer der Faktoren Null ist.

Besteht eine der beiden Mengen A und B nur aus einem Element, so lassen sich genau so viele Paare bilden, wie die andere Menge Elemente zählt. Das heißt: Multipliziert man eine Zahl mit eins, so bleibt ihr Wert erhalten.
Ein Beispiel mag zeigen, wie aus den Grundgesetzen der Addition und der Multiplikation weitere Gesetze abgeleitet werden können:

BEISPIEL

2. Zu beweisen ist:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

(binomische Formel).

Beweis: Nach der Definition der Potenz ist

$$(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b).$$

Hierauf wird das Distributionsgesetz angewendet:

$$(a + b) \cdot (a + b) = (a + b) \cdot a + (a + b) \cdot b.$$

Nun gebraucht man das Kommutationsgesetz und darauf abermals das Distributionsgesetz:

$$a \cdot (a + b) + b \cdot (a + b) = (a \cdot a + a \cdot b) + (b \cdot a + b \cdot b).$$

Das Assoziationsgesetz der Addition gestattet das Weglassen der Klammern, $b \cdot a$ wird kommutiert, und für die Verknüpfungen einer Zahl mit sich selbst werden die Abkürzungen benutzt:

$$a \cdot a + a \cdot b + a \cdot b + b \cdot b = a^2 + 2ab + b^2.$$

Die Multiplikation ist ebenso wie die Addition — aber im Bereich der natürlichen Zahlen auch nur bedingt — umkehrbar. Wenn die natürliche Zahl b „Teiler" der natürlichen Zahl a ist, gibt es eine natürliche Zahl c, so daß $b \cdot c = a$ ist. Bei $b \neq 0$ ist c durch diese Bedingung eindeutig bestimmt. Denn aus $c' > c$ folgt nach dem Monotoniegesetz der Multiplikation $b \cdot c' > b \cdot c = a$, aus $c' < c$ aber ergäbe sich $b \cdot c' < b \cdot c = a$.

Definition

Ist für die beiden Zahlen a und b die Bedingung $b \cdot c = a$ erfüllbar und b verschieden von Null, so heißt die durch sie eindeutig bestimmte Zahl c *Quotient* aus a und b und wird mit $a:b$ bezeichnet. In ihm wird a *Dividend*, b *Divisor* genannt. Die Rechnung heißt **Division.**

Der Quotient $c = a:b$ ist also die Zahl, die mit b multipliziert a ergibt.

Statt $a:b$ darf auch a/b geschrieben werden. In der letzteren Form nennt man den Quotienten einen *Bruch*. a heißt dabei *Zähler* und b *Nenner*.
Von größter Bedeutung für praktische Rechnungen ist:

Die Division durch Null ist ausgeschlossen.

AUFGABEN

27. In welcher Weise läßt sich das Quadrat einer natürlichen Zahl durch das Mengenprodukt definieren?
28. Es ist die Rechenregel $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$ mit Hilfe der Definitionen und Grundgesetze der Addition, Subtraktion und Multiplikation zu beweisen.
29. Mit Hilfe der in Aufgabe 28 bewiesenen Regel und der Grundgesetze ist die binomische Formel $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ zu bestätigen.
30. Welche der Mengenoperationen Vereinigung, Durchschnitt und Differenz sind

    a) assoziativ, b) kommutativ?
31. Welche Eigenschaften hat die im Bereich der natürlichen Zahlen erklärte Relation $a|b$ (a ist Teiler von b)?
32. Es ist zu beweisen, daß die Menge der natürlichen Zahlen der Menge der durch zwei teilbaren natürlichen Zahlen gleichmächtig ist.
33. Es ist eine Wertetabelle der Funktion aufzustellen, die jeder positiven natürlichen Zahl die Anzahl der in ihr enthaltenen Teiler zuordnet (bis 20).
34. Worin besteht der Fehler in folgendem „Beweis", daß 1 die größte natürliche Zahl ist?
    Die größte natürliche Zahl kann nur eine sein, deren Quadrat (das ja wieder eine natürliche Zahl ist) nicht größer als sie ist. Danach kommen nur 0 und 1 in Frage, unter denen 1 die größte ist.

2.3. Ziffernsysteme

Zur Darstellung der Zahlen bedient man sich Ziffern, die nach bestimmten Verabredungen zusammengesetzt werden. Die Zusammenstellung von Verabredungen, die man trifft, um eine beliebige Zahl durch gegebene Ziffern darzustellen, wird **Ziffernsystem** genannt.
Heute werden vor allem drei Ziffernsysteme verwendet: das römische Ziffernsystem, das Dezimalsystem und das Dualsystem.
Die *römischen Ziffern* verraten durch ihre Form zum Teil noch deutlich die Herkunft der natürlichen Zahlen durch Abstraktion konkreter Vergleichsmengen:

I	Eins	(Finger),
V	Fünf	(Hand),
X	Zehn	(zwei Hände).

Ziffern für größere Zahlen sind

L	Fünfzig,
C	Hundert,
D	Fünfhundert,
M	Tausend.

Das **römische Ziffernsystem** besteht in folgenden Verabredungen: Alle Zahlen werden als möglichst kurze Summen der durch die Ziffern dargestellten Zahlen ohne Additionszeichen geschrieben. Dabei wird viermaliges Wiederholen ein und derselben Ziffer dadurch ersetzt, daß diese Ziffer einmal vor die nächsthöhere Ziffer geschrieben wird, was Subtraktion bedeuten soll (IV statt IIII, IX statt VIIII):

MDCCCLXXXVIII = 1888,
MCMLXIV = 1964.

Bei der Darstellung großer Zahlen und beim Rechnen bietet das römische Ziffernsystem beträchtliche Schwierigkeiten.

Das **Dezimalsystem** benutzt die *arabischen Ziffern:* 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Um die natürlichen Zahlen durch diese Ziffern auszudrücken, werden diese bekanntlich als Summen von Vielfachen von Zehnerpotenzen dargestellt, wobei die Zehnerpotenzen selbst und die Additionszeichen fortgelassen werden:

$$3 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0 = 3706.$$

Der Wert, den eine Ziffer innerhalb einer Zahl vertritt, hängt also von ihrer Stellung innerhalb der Ziffernfolge ab.

Stellt man eine Zahl nicht als Summe vielfacher Zehnerpotenzen, sondern als Summe von Zweierpotenzen dar und verfährt ansonsten wie im Dezimalsystem, so erhält man das für die moderne Rechentechnik unersetzliche **Dualsystem**. Seine Bedeutung ergibt sich daraus, daß die Zellen der modernen Rechenmaschinen, Röhren oder Transistoren, zweier Zustände fähig sind, die die Ziffern des Dualsystems vertreten. Da die Zahl Zwei selbst schon Zweierpotenz ist, kommt das Dualsystem mit zwei Ziffern, eine für Null und eine für Eins, allein aus. Um Dualzahlen von Dezimalzahlen zu unterscheiden, wird die Eins hier durch L bezeichnet.

$$\begin{aligned} 9 &= 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = \mathrm{L\,00L}, \\ 30 &= 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = \mathrm{LL\,LL0}. \end{aligned}$$

Im Dualsystem werden schon kleine Zahlen recht vielziffrig. Für Rechenautomaten ist dies aber kein Nachteil.

Eine Zahl aus dem Dualsystem ins Dezimalsystem zu übertragen, kann unter Umständen eine häufig zu lösende Aufgabe sein. Es ist daher zweckmäßig, dabei möglichst rationell vorzugehen. Zur Übertragung der Zahl

$$\mathrm{L\,0LL\,L0L} = 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$

empfiehlt es sich, soweit wie möglich auszuklammern:

$$\begin{aligned} &(1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 0) \cdot 2 + 1 = \\ = \; &((1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 0) \cdot 2 + 1 = \\ = \; &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \\ = \; &\Big(\Big(\big(\big(((1 + 0) \cdot 2 + 0) \cdot 2 + 1\big) \cdot 2 + 1\big) \cdot 2 + 1\Big) \cdot 2 + 0\Big) \cdot 2 + 1. \end{aligned}$$

Die Anzahl der auszuführenden Operationen wird dadurch verringert. In dem erhaltenen Ausdruck wechseln Additionen zu den Ziffern der gegebenen Zahl mit Multiplikationen mit 2 ab. Am vorteilhaftesten ordnet man die Rechnung in einem Schema an:

In eine erste Zeile schreibt man die Ziffern der Zahl, addiert senkrecht und schreitet beim Multiplizieren schräg nach rechts oben vor:

1	0	1	1	1	0	1
0	$1 \cdot 2 = 2$	$2 \cdot 2 = 4$	$5 \cdot 2 = 10$	$11 \cdot 2 = 22$	$23 \cdot 2 = 46$	$46 \cdot 2 = 92$
$1 + 0 = 1$	$0 + 2 = 2$	$1 + 4 = 5$	$1 + 10 = 11$	$1 + 22 = 23$	$0 + 46 = 46$	$1 + 92 = 93$

oder kurz:

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 2 & 4 & 10 & 22 & 46 & 92 \\
\hline
1 & 2 & 5 & 11 & 23 & 46 & 93
\end{array}$$

Dieses Rechenschema hat in der praktischen Mathematik große Bedeutung. Es heißt HORNER*sches Schema*[1]) und wird sich später noch häufig als nützlich erweisen. Da das Dualsystem wie das Dezimalsystem ein Stellenwertsystem ist, lassen sich die üblichen Verfahren des schriftlichen Rechnens auch im Umgang mit Dualzahlen anwenden. Beim Addieren ist zu beachten: L + L = L0, LL + L = L00, LLL + L = L000 usw. Das Einmaleins besteht im Dualsystem nur aus 0 · 0 = 0, 0 · L = 0 und L · L = L.

BEISPIEL

a)
$$\begin{array}{r}
\mathrm{L\ 0LL} \\
\mathrm{L0\ 0LL} \\
\hline
\mathrm{LL\ LL0}
\end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r}
\mathrm{L0\ L00} \\
-\mathrm{L\ 0LL} \\
\hline
\mathrm{L\ 00L}
\end{array}$$

c)
$$\begin{array}{l}
\underline{\mathrm{L0LL} \cdot \mathrm{L0L}} \\
\mathrm{L0LL} \\
\quad\ \ \mathrm{L0LL} \\
\hline
\mathrm{LL0LLL}
\end{array}$$

AUFGABEN

35. Folgende Zahlen sind ins Dualsystem zu übertragen:
 a) 35, b) 126, c) 80, d) 1024.
36. Folgende Zahlen sind mit Hilfe des HORNER-Schemas ins Dezimalsystem zu übertragen:
 a) L0 00L, b) L 0L0 L0L, c) L LLL LLL, d) L0L L0L L0L.
37. Wie könnte das HORNER-Schema umgekehrt werden, um eine im Dezimalsystem gegebene Zahl ins Dualsystem zu übertragen?
38. Woran erkennt man im Dualsystem gerade und ungerade Zahlen?
39. Wie kann eine Dualzahl durch Zwei, Vier, Acht usw. geteilt werden?
40. Im Dualsystem ist auszurechnen:
 a) L 0L0 + LL0, b) L0 L0L − LLL, c) L 0L0 · LL0, d) $\mathrm{L\ 0L0}^{\mathrm{LL}}$, e) $\dfrac{\mathrm{L00 \cdot LL0}}{\mathrm{L0}}$

2.4. Vollständige Induktion

Induktion und *Deduktion* sind zwei wichtige Wege der Wissenschaft zur Erkenntnis. Deduktion nennt man den Schluß vom Allgemeinen auf das Besondere. Er ist logisch völlig exakt und spielt in der Mathematik die vorherrschende Rolle. Unter Induktion versteht man — grob gesagt — den Schluß vom Besonderen auf das Allgemeine. Etwa stellt man fest: Ein Schwan ist weiß, ein zweiter auch, ein dritter wiederum und so fort, auch der hundertste — und schließt daraus: Alle Schwäne sind weiß. Induktion muß stets angewendet werden, wenn aus Naturbeobachtungen oder Experimenten Erkenntnisse gewonnen werden sollen. Sie ist aber logisch nicht einwandfrei, wie gerade das Beispiel der Schwäne lehrt. Es gibt nämlich auch schwarze.

---

[1]) Vgl. 18.1.

Die *vollständige Induktion* ist ein mathematisches Beweisverfahren, welches zwar einem Induktionsschluß ähnelt, aber im Grunde genommen eine deduktive Schlußweise verkörpert. Mit ihm werden Sätze und Formeln bewiesen, in denen eine natürliche Zahl vorkommt, die in gewissem Ausmaß frei gewählt werden darf.

BEISPIEL

1. Es ist die Formel zu beweisen

$$\boxed{1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{(n+1)\cdot n}{2}, \quad n \in N \setminus \{0\}}\,. \tag{1}$$

Beweis: Für kleine Werte von n läßt sich die Behauptung ohne Umstände prüfen:

$$n = 1: \qquad 1 = \frac{2\cdot 1}{2},$$

$$n = 2: \qquad 1 + 2 = \frac{3\cdot 2}{2},$$

$$n = 3: \qquad 1 + 2 + 3 = \frac{4\cdot 3}{2}.$$

Um die Aussage für beliebige Werte von n zu sichern, genügt es nun, zu beweisen, daß es keine letzte natürliche Zahl gibt, für die die Formel gerade noch gilt und für die folgende nicht mehr.

Angenommen, k wäre diese letzte Zahl, so stimmte demnach

$$n = k: \qquad 1 + 2 + \cdots + k = \frac{(k+1)\cdot k}{2}. \tag{I}$$

Dagegen wäre

$$n = k + 1: \quad 1 + 2 + \cdots + (k+1) = \frac{(k+2)\cdot(k+1)}{2} \tag{II}$$

falsch. Aus (I) folgt indessen durch Addition von $k + 1$ auf beiden Seiten

$$(1 + \cdots + k) + (k+1) = \frac{(k+1)\cdot k}{2} + k + 1 = (k+1)\cdot\left(\frac{k}{2} + 1\right) =$$

$$= (k+1)\cdot\frac{k+2}{2} = \frac{(k+2)(k+1)}{2}.$$

Demnach kann (II) nicht falsch sein, wenn (I) gilt, und es gibt keine letzte natürliche Zahl, für die die Behauptung gerade noch richtig wäre. Diese ist damit für alle Werte von n bewiesen.

Das benutzte Beweisverfahren enthält zwei wesentliche Teile: den Beweis der Behauptung für die kleinste Wahl von n und den Schluß von $n = k$ auf $n = k + 1$.

Satz der vollständigen Induktion

Um eine Aussage zu beweisen, die eine von einer gewissen Größe an frei wählbare natürliche Zahl n enthält, genügt es, zu zeigen:

a) Die Aussage gilt für die kleinste Wahl von n. (Induktionsanfang)

b) Wenn sie für $n = k$ gilt, ist sie auch für $n = k + 1$ richtig. (Schluß von k auf $k + 1$)

BEISPIEL

2. Zu beweisen ist der Satz:
n unterschiedliche Objekte in eine Reihenfolge zu bringen, gibt es $n(n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ (Produkt aller natürlichen Zahlen von 1 bis n) Möglichkeiten.

Beweis: Der Beweis wird durch vollständige Induktion geführt:

a) Induktionsanfang: Ein Objekt in eine Reihenfolge zu bringen, gibt es eine Möglichkeit. Das Produkt $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ beginnt in diesem Fall schon mit der letzten Zahl (die Faktoren $n - 1, \ldots, 2, 1$ gelten dann als nicht geschrieben) und hat demnach den Wert 1.

b) Schluß von k auf $k + 1$: Angenommen, es sei schon bewiesen, daß sich k unterschiedliche Objekte auf $k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ Weisen in eine Reihenfolge bringen lassen.
Von $k + 1$ unterschiedlichen Dingen kann jedes als erstes benutzt werden. Die übrigen k folgen zu lassen, gibt es nach Voraussetzung jeweils $k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ Möglichkeiten.
Daher sind für die $k + 1$ unterschiedlichen Objekte $(k+1) \cdot k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ Anordnungen möglich. Das entspricht der Aussage des Satzes für $n = k + 1$.
Damit ist der Satz bewiesen.
Zur Illustration dieses Beispiels seien alle $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ Möglichkeiten genannt, die 3 Elemente a, b, c in eine Reihenfolge zu bringen:

a, b, c	b, a, c	c, a, b
a, c, b	b, c, a	c, b, a.

Eine Anordnung von n unterschiedlichen Objekten in einer Reihe nennt man *Permutation* der n Objekte.
Für das Produkt aus den ersten n natürlichen Zahlen gebraucht man die Abkürzung $n!$ (gelesen: n Fakultät):

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Damit kann der im Beispiel 2 bewiesene Satz folgendermaßen gefaßt werden:

Satz

Mit n unterschiedlichen Objekten lassen sich $n!$ Permutationen bilden.

AUFGABEN

41. Durch vollständige Induktion ist die Formel zu beweisen:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{(2n+1) \cdot n \cdot (n+1)}{6}, \qquad n \in N \setminus \{0\}.$$

42. Zu beweisen ist: m unterschiedliche Objekte lassen sich unter Berücksichtigung der Reihenfolge auf

a) $m(m-1)$ Weisen zu Paaren,

b) $m(m-1)(m-2)$ Weisen zu Tripeln,

c) $m(m-1)(m-2)(m-3)$ Weisen zu Quadrupeln

zusammenfassen.

43. Durch vollständige Induktion nach n ist zu beweisen: m unterschiedliche Objekte lassen sich unter Berücksichtigung der Reihenfolge auf $m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)$ Weisen zu Gruppen aus n Objekten zusammenfassen.

44. Es ist zu begründen, warum für jede natürliche Zahl n

a) $\dfrac{n(n+1)}{2} \in N$, b) $\dfrac{n(n+1)(n+2)}{2 \cdot 3} \in N$,

c) $\dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{2 \cdot 3 \cdot 4} \in N$.

Welche Verallgemeinerung ist zu vermuten?

3. Der binomische Lehrsatz

3.1. Einführung der Eulerschen Symbole

Der *binomische Lehrsatz* gibt an, wie Potenzen von zweigliedrigen Summen (Binomen) mit natürlichen Zahlen als Exponenten in Summen entwickelt werden können. Beim Exponenten 2 ergibt sich die bekannte binomische Formel

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Höhere Potenzen formt man durch Ausmultiplizieren nach dem Distributionsgesetz um, zum Beispiel

$$\begin{aligned}(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b) &= (a^2 + 2ab + b^2)(a+b) = \\ &= a^3 + 2a^2b + ab^2 + \\ &\quad + a^2b + 2ab^2 + b^3 = \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.\end{aligned}$$

Unter Hinzunahme der ersten und der nullten Potenz erhält man:

$$\begin{aligned}(a+b)^0 &= 1\\ (a+b)^1 &= a + b\\ (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2\\ (a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\\ (a+b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4\\ (a+b)^5 &= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5\\ (a+b)^6 &= a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6\end{aligned}$$

....

Diese Summenentwicklungen besitzen folgende *Gesetzmäßigkeiten:* Die Anzahl der Summanden ist um 1 größer als der Exponent des Binoms. Die Summanden sind aus a und b gebildete, mit Koeffizienten versehene Potenzprodukte. Die Summe der Exponenten in jedem Potenzprodukt ist gleich dem Exponenten des Binoms. Dabei werden alle Möglichkeiten, mit natürlichen Zahlen diese Summe zu bilden, erschöpft. Sind die Potenzprodukte wie oben nach fallenden Potenzen von a oder b geordnet, so können die Koeffizienten folgendem Schema, dem PASCAL*schen*[1]) *Zahlendreieck*, entnommen werden:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\
\multicolumn{13}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}
\end{array}$$

In ihm ist jede Zahl Summe der beiden darüberstehenden.
Potenzen einer Differenz $a - b$ können genauso behandelt werden. Als einziger Unterschied ergeben sich hier beim Ausmultiplizieren wechselnde Vorzeichen, die bei der Anordnung der Glieder nach fallenden Potenzen von a mit plus beginnen.

BEISPIEL

1. $(2a - 3)^5$ ist nach dem binomischen Lehrsatz zu entwickeln.

Lösung:

$$\begin{aligned}
&(2a-3)^5 = \\
&= 1(2a)^5 - 5(2a)^4 \cdot 3 + 10(2a)^3 \cdot 3^2 - 10(2a)^2 \cdot 3^3 + 5 \cdot 2a \cdot 3^4 - 1 \cdot 3^5 = \\
&= \underline{\underline{32a^5 - 240a^4 + 720a^3 - 1080a^2 + 810a - 243}}.
\end{aligned}$$

Die Ermittlung der Binomialkoeffizienten durch das PASCALsche Zahlendreieck ist recht unbequem, wenn es um höhere Potenzen geht. Denn dazu muß eine Vielzahl nicht unmittelbar benötigter Koeffizienten gebildet werden, die die Zeilen bis zur gesuchten Stelle füllen. Für gewisse Probleme ist es auch gar nicht nötig, alle Binomialkoeffizienten einer Zeile zu kennen; es genügen unter Umständen schon einige am Anfang der Zeile.
Deswegen ist eine Formel sehr nützlich, die gestattet, ohne Berechnung weiterer Koeffizienten unmittelbar einen an bestimmter Stelle des Zahlendreiecks stehenden Binomialkoeffizienten zu errechnen. Zu einer solchen Formel gelangte LEONHARD EULER[2]) durch kombinatorische[3]) Überlegungen, die hier nicht dargelegt werden können.

---

[1]) BLAISE PASCAL (1623 bis 1662), französischer Mathematiker

[2]) LEONHARD EULER, genialer Schweizer Mathematiker, Physiker und Astronom, geboren 1707 in Basel, gestorben 1783 in Petersburg

[3]) Die Kombinatorik fragt nach der Anzahl der Möglichkeiten, gewisse Elemente unter gewissen Bedingungen zu Gruppen zusammenzustellen. Die Ermittlung der Anzahl der Permutationen von n unterschiedlichen Elementen (vgl. 2.4.) war ein kombinatorisches Problem

Für die Anwendung der EULERschen Formel werden die Zeilen des PASCALschen Zahlendreiecks nach den Exponenten der zugehörigen Potenzen von $a + b$ gezählt. Die ganz oben stehende Zeile, nur die Eins enthaltend, ist demnach die nullte Zeile. Ebenso zählt man die Koeffizienten in einer Zeile. Man sagt, die Eins ganz links stehe in jeder Zeile an nullter Stelle und benennt die Stellen von da aus weiter.
Im Sinne dieser Vereinbarung gab EULER für den Binomialkoeffizienten

in der 4. Zeile an 2. Stelle die Darstellung $\frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6$,

in der 6. Zeile an 3. Stelle die Darstellung $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20$,

in der 5. Zeile an 5. Stelle die Darstellung $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 1$,

in der 2. Zeile an 1. Stelle die Darstellung $\frac{2}{1} = 2$

und allgemein für den Binomialkoeffizienten in der n-ten Zeile $(n > 0)$ an k-ter Stelle $(k > 0)$ die Darstellung

$$\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}. \tag{I}$$

Der Bau dieser Brüche ist durch folgende Gesetzmäßigkeiten gekennzeichnet:
In Zähler und Nenner eines Bruches stehen Produkte mit gleich viel Faktoren. Diese bilden im Zähler eine fallende, im Nenner eine steigende Folge natürlicher Zahlen. Die Nummer der Zeile gibt an, mit welcher Zahl der Zähler beginnt. Die Nummer der Stelle nennt die Anzahl der Faktoren in Zähler und Nenner und gibt an, womit der Nenner endet.
Für den in der n-ten Zeile an k-ter Stelle stehenden Binomialkoeffizienten hat EULER die Abkürzung $\binom{n}{k}$ (gelesen: n über k) eingeführt, die nach ihm „*Eulersches Symbol*" genannt wird. Erweitert man den Bruch (I) mit dem Produkt $(n-k)(n-k-1)\dots 2 \cdot 1 = (n-k)!$, so ergibt sich im Zähler die lückenlose Folge der von n bis 1 absteigenden natürlichen Zahlen. Der Wert des Zählers ist also dann $n!$. Daher gilt:

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}}. \tag{2}$$

Spezialfälle bilden die Binomialkoeffizienten, die an nullter Stelle in einer Zeile stehen: $\binom{n}{0}$. Nach den oben genannten Regeln müßten hier in Zähler und Nenner 0, also keine Faktoren stehen.
Sinnvollerweise setzt man

$$\binom{n}{0} = 1 \quad \text{für beliebiges } n.$$

Mit den EULERschen Symbolen geschrieben, nimmt das PASCALsche Zahlendreieck folgende Form an:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \binom{0}{0} & & & \\ & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\ & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\ \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

Nach den EULERschen Symbolen geordnet, werden die Binomialkoeffizienten in jeder ausführlicheren mathematischen Tabellensammlung angegeben[1]).

AUFGABEN

45. Mit Hilfe des PASCALschen Zahlendreiecks ist zu bilden:

a) $(x-1)^8$, b) $\left(\frac{u}{2}+\frac{v}{3}\right)^4$, c) $(2a-3b)^5$.

46. Folgende Summen sind in Potenzen umzuwandeln:

a) $x^6+3x^4+3x^2+1$, b) $a^4+8a^3+24a^2+32a+16$,
c) $u^3-6u^2v+12uv^2-8v^3$, d) $b^9+9b^6+27b^3+27$,
e) $36a^2b+27b^3+8a^3+54ab^2$.

47. Unter Benutzung des binomischen Lehrsatzes ist zu berechnen:

a) 103^3, b) 998^3, c) 99^4, d) 101^5.

48. Zu berechnen ist: $(a+1)^6+(a-1)^6$.

49. Die Potenz $(a+b+c)^3$ ist als $[a+(b+c)]^3$ durch mehrmalige Anwendung des binomischen Lehrsatzes zu berechnen.

50. Zu errechnen ist

a) $\binom{15}{3}$, b) $\binom{10}{5}$, c) $\binom{11}{7}$, d) $\binom{14}{9}$, e) $\binom{19}{17}$.

51. Welche Binomialkoeffizienten haben den Wert 6?

52. Was ist über n und k vorauszusetzen, damit $\binom{n}{k}$ im PASCALschen Zahlendreieck vorkommt?

53. Durch die Zuordnung $(n, k) \to \binom{n}{k}$ kann eine Teilmenge des Mengenprodukts $N \times N$ auf die Menge N der natürlichen Zahlen abgebildet werden. Welche Eigenschaften besitzt diese Abbildung?

54. Die ersten fünf Zeilen des PASCALschen Zahlendreiecks sind im Dualsystem zu schreiben.

55. Zu beweisen ist: Ohne Berücksichtigung der Reihenfolge lassen sich m unterschiedliche Objekte auf $\binom{m}{n}$ Weisen zu Gruppen aus n Objekten zusammenfassen.

---

[1]) Vgl. Fußnote S. 92

3.2. Eigenschaften der Eulerschen Symbole

Das PASCALsche Zahlendreieck ist symmetrisch zu seiner vertikalen Mittelachse gebaut. Diese **Symmetrie** muß auch den EULERschen Symbolen innewohnen. Sie fordert die Gleichheit von

$$\binom{n}{0} \text{ und } \binom{n}{n}, \qquad \binom{n}{1} \text{ und } \binom{n}{n-1}, \qquad \binom{n}{2} \text{ und } \binom{n}{n-2},$$

allgemein von

$$\binom{n}{k} \text{ und } \binom{n}{n-k}.$$

Die letzte Gleichheit läßt sich leicht mit Hilfe der Formel (2) bestätigen:
Danach ist

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Für $\binom{n}{n-k}$ ist darin k durch $n - k$ zu ersetzen:

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\,(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}.$$

Damit ist die Symmetrie der EULERschen Symbole bewiesen:

$$\boxed{\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}}. \tag{3}$$

Auch die **Summeneigenschaften** der Zahlen im PASCALschen Zahlendreieck, daß nämlich jede die Summe der beiden darüberstehenden ist, kann für die EULERschen Symbole nachgewiesen werden. Dazu muß man von einem beliebigen Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ ausgehen. Links neben ihm, also auch in der n-ten Zeile, aber an $(k-1)$-ter Stelle, steht $\binom{n}{k-1}$. Unter beiden, in der $(n+1)$-ten Zeile an k-ter Stelle, steht $\binom{n+1}{k}$. Es wird daher behauptet:

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}.$$

Zum Beweis werden die Koeffizienten $\binom{n}{k-1}$ und $\binom{n+1}{k}$ gebildet. $\binom{n}{k-1}$ unterscheidet sich von $\binom{n}{k}$ (vgl. (2)), indem nur $k - 1$ Faktoren, also ein Faktor weniger, in Zähler und Nenner stehen. Der Zähler beginnt mit n, endet demnach mit $n - k + 2$; im Nenner fehlt der Faktor k:

$$\binom{n}{k-1} = \frac{n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+2)}{(k-1)!}.$$

$\binom{n+1}{k}$ entsteht aus $\binom{n}{k}$, indem der letzte Faktor des Zählers durch den vorangesetzten Faktor $(n + 1)$ ersetzt wird:

$$\binom{n+1}{k} = \frac{(n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+2)}{k!}.$$

Nun ist

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+2)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (k-2)(k-1)} + \frac{n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+2)(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (k-2)(k-1)k} =$$

$$= \frac{k \cdot n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+2) + n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+2)(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (k-2)(k-1) \cdot k}.$$

Im Zähler lassen sich die Faktoren $n, n-1, \ldots, n-k+2$ ausklammern:

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{(k + (n-k+1)) \cdot n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+2)}{k!}.$$

$k + (n - k + 1)$ aber ist gleich $n + 1$, und so ergibt sich der Ausdruck für $\binom{n+1}{k}$:

$$\boxed{\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}}. \tag{4}$$

AUFGABEN

56. Zu berechnen ist:

a) $\binom{n+2}{2}$, b) $\binom{n+k}{k}$, c) $\binom{n+k}{k+1}$, d) $\binom{m+7}{m+7}$.

57. Welcher Binomialkoeffizient steht

a) rechts neben $\binom{n}{k}$, b) links über $\binom{n}{k}$, c) rechts unter $\binom{n}{k}$,

und wie wird er nach Euler berechnet?

58. Zu berechnen ist $\binom{n}{k+1} - \binom{n}{k}$.

59. Durch vollständige Induktion nach n ist zu beweisen:

a) $\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \cdots + \binom{n}{2} = \binom{n+1}{3}$,

b) $\binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \binom{p+2}{p} + \cdots + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.

3.3. Beweis und Anwendung des binomischen Lehrsatzes mit den Eulerschen Symbolen

Mit den EULERschen Symbolen ist es möglich, für den binomischen Lehrsatz eine allgemeingültige Formel aufzustellen. Der Beweis dieser Formel beinhaltet den Beweis der Richtigkeit der EULERschen Koeffizientenberechnung, die durch die Überlegungen im vorigen Abschnitt zwar glaubhaft gemacht, aber nicht eigentlich bestätigt wurde. Wenn der Exponent n eine beliebige natürliche Zahl ist, enthält die Summenentwicklung von $(a + b)^n$ alle Potenzprodukte aus a und b mit der Exponentensumme n:

$$a^n, \quad a^{n-1}b, \quad a^{n-2}b^2, \quad \ldots, \quad ab^{n-1}, \quad b^n.$$

Die zugehörigen Koeffizienten heißen:

$$\binom{n}{0}, \quad \binom{n}{1}, \quad \binom{n}{2}, \quad \ldots, \quad \binom{n}{n-1}, \quad \binom{n}{n}.$$

Binomischer Lehrsatz

Ist n eine beliebige natürliche Zahl, so gilt für die Potenz $(a + b)^n$ des Binoms $a + b$ die Summenentwicklung

$$\boxed{(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + \binom{n}{n} b^n}. \tag{5}$$

Beweis durch vollständige Induktion:

a) Induktionsanfang:

Für die kleinste natürliche Zahl, den Exponenten Null, steht rechts nur ein Glied: $\binom{0}{0} a^0 b^0$. Wegen der Definitionen $\binom{n}{0} = 1$ für jedes n und $a^0 = 1$ für jedes a hat es den Wert 1. $(a + b)^0$ ist aber nach Definition ebenfalls gleich 1. Also ist der Induktionsanfang gesichert.

b) Schluß von k auf $k + 1$:

Angenommen, die Formel wäre bereits für $n = k$ nachgewiesen, so gilt:

$$(a+b)^k = \binom{k}{0} a^k + \binom{k}{1} a^{k-1}b + \binom{k}{2} a^{k-2}b^2 + \ldots + \binom{k}{k-1} ab^{k-1} + \binom{k}{k} b^k.$$

Durch Multiplikation mit $a + b$ folgt daraus:

$$(a+b)^{k+1} = (a+b)^k (a+b) =$$

$$= \binom{k}{0} a^{k+1} + \binom{k}{1} a^k b + \binom{k}{2} a^{k-1}b^2 + \ldots + \binom{k}{k-1} a^2b^{k-1} + \binom{k}{k} ab^k +$$

$$+ \binom{k}{0} a^k b + \binom{k}{1} a^{k-1}b^2 + \ldots + \binom{k}{k-2} a^2b^{k-1} + \binom{k}{k-1} ab^k + \binom{k}{k} b^{k+1}.$$

Dabei entsteht das Glied $\binom{k}{k-2} a^2 b^{k-1}$ aus dem oben unter anderen durch drei Punkte ersetzten $\binom{k}{k-2} a^2 b^{k-2}$ durch Multiplikation mit b. Beim Zusammenfassen gleicher Potenzprodukte benutzt man die Summeneigenschaft der EULERschen Symbole:

$$\binom{k}{1} + \binom{k}{0} = \binom{k+1}{1}, \quad \binom{k}{2} + \binom{k}{1} = \binom{k+1}{2}, \ldots$$

$$\ldots, \binom{k}{k-1} + \binom{k}{k-2} = \binom{k+1}{k-1}, \quad \binom{k}{k} + \binom{k}{k-1} = \binom{k+1}{k}.$$

Für $\binom{k}{0}$ kann auch $\binom{k+1}{0}$, für $\binom{k}{k}$ auch $\binom{k+1}{k+1}$ geschrieben werden, da alle diese Ausdrücke gleich 1 sind. Auf diese Weise ergibt sich:

$$(a+b)^{k+1} = \binom{k+1}{0} a^{k+1} + \binom{k+1}{1} a^k b + \binom{k+1}{2} a^{k-1} b^2 + \ldots +$$
$$+ \binom{k+1}{k} a b^k + \binom{k+1}{k+1} b^{k+1}.$$

Damit folgte aus der angenommenen Gültigkeit der Behauptung für $n = k$ die Richtigkeit für $n = k + 1$, und der Schluß von k auf $k + 1$ ist erbracht.
Nach dem Satz über die vollständige Induktion ist hiermit der binomische Lehrsatz mit den EULERschen Symbolen bewiesen.
Das folgende Beispiel zeigt, bei welcher Art Aufgaben die bewiesene Formel vor allem zur **Anwendung** gelangt.

BEISPIEL

Es sind die ersten fünf Glieder der Summenentwicklung von $(1 + a)^{20}$ zu berechnen.

Lösung:

1. Glied: $\binom{20}{0} \cdot 1^{20} = 1,$

2. Glied: $\binom{20}{1} \cdot 1^{19} \cdot a = \frac{20}{1} \cdot a = 20a,$

3. Glied: $\binom{20}{2} \cdot 1^{18} \cdot a^2 = \frac{20 \cdot 19}{1 \cdot 2} \cdot a^2 = 190a^2,$

4. Glied: $\binom{20}{3} \cdot 1^{17} \cdot a^3 = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot a^3 = 1140a^3,$

5. Glied: $\binom{20}{4} \cdot 1^{16} \cdot a^4 = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot a^4 = 4845a^4.$

Damit ergibt sich:

$$(1+a)^{20} = \underline{\underline{1 + 20a + 190a^2 + 1140a^3 + 4845a^4 + \ldots}}$$

AUFGABEN

60. Zu berechnen sind:

a) die ersten drei Glieder von $(1 + a)^{50}$,
b) die ersten sechs Glieder von $(a - 1)^{10}$.

61. In den Summenentwicklungen folgender Ausdrücke sind die Absolutglieder und die Koeffizienten von x, x^2 und x^3 zu bestimmen:

a) $(1 + 2x)^{16} + (x - 1)^{15}$, b) $(1 + x)^{12} \cdot (2 + x)^7$,
c) $(x - 1)^{15} \cdot (x + 1)^{17}$, d) $(2x - 3)^6 \cdot (x + 1)^{20}$.

62. In den Formeln für $(a \pm b)^n$ ist $a = b = 1$ zu setzen. Welche Beziehungen ergeben sich daraus für die Binomialkoeffizienten einer Zeile?

4. Der Bereich der ganzen Zahlen

4.1. Wesen und arithmetische Struktur

Um einen Zahlenbereich zu gewinnen, in dem außer der Addition und der Multiplikation auch die Subtraktion unbeschränkt ausführbar ist, müssen zu den natürlichen Zahlen weitere Zahlen hinzugenommen werden. Die Existenz der geforderten Zahlen in einem erweiterten Zahlenbereich kann streng bewiesen werden, wird aber hier vorausgesetzt.
Mindestens sind alle Zahlen der Form $0 - n$ nötig, die sich als Differenzen aus Null und einer positiven natürlichen Zahl n bilden lassen. Zu ihrer Darstellung benutzt man die Abkürzung

$$0 - a = -a.$$

Die Zahl $-a$ ist also nach der Definition der Subtraktion (vgl. 2.2.) die Zahl, die zu a addiert 0 ergibt.
Demnach werden die neuen Zahlen aus den positiven natürlichen Zahlen durch Vorsetzen des Minuszeichens gebildet: -1, -2, -3, -4, ... Sie werden *negative ganze Zahlen* genannt. Aus den natürlichen Zahlen und ihnen besteht der Bereich der ganzen Zahlen.

Definition

Der Bereich G der **ganzen Zahlen** wird von den Zahlen

$$\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$$

gebildet.

Im neuen Zahlenbereich treten vorzeichenbehaftete Zahlen auf, über die zunächst einiges Grundsätzliche bewiesen werden soll.

Vorzeichenregeln:

1. Es ist stets

$$a + (-a) = 0.$$

Denn $0 - a = -a$ ist nach Definition der Subtraktion (vgl. 2.2.) die Zahl, die zu a addiert 0 ergibt.

2. Es ist stets

$$-(-a) = a.$$

Denn nach der ersten Regel ist a die Zahl, die zu $-a$ addiert Null liefert. Sie hat demnach Recht auf die Bezeichnung $0 - (-a)$, die mit $-(-a)$ abgekürzt wird.

3. Es ist stets

$$a + (-b) = a - b.$$

Denn $a - b$ ist die Zahl, die zu b addiert a ergibt. Dieselbe Eigenschaft besitzt aber auch die Zahl $a + (-b)$:

$$a + (-b) + b = a \quad \text{(vgl. Regel 1.).}$$

4. Es ist stets

$$a - (-b) = a + b.$$

Ersetzt man nämlich in der Regel 3. die Zahl b durch die Zahl $-b$, so erhält man zunächst

$$a + (-(-b)) = a - (-b).$$

Daraus folgt nach Regel 2.

$$a + b = a - (-b).$$

5. Es ist stets

$$-(a + b) = -a + (-b) \quad \text{(oder nach Regel 3. } -a -b\text{).}$$

Denn $-(a + b)$ ist die Abkürzung für die Zahl, die zu $a + b$ addiert 0 ergibt. Diese Eigenschaft kommt nach Regel 1. auch der Summe $-a + (-b)$ zu:

$$-a + (-b) + a + b = -a + a + (-b) + b = 0.$$

6. Es ist stets

$$-(a - b) = -a + b.$$

Dies ergibt sich aus Regel 5. durch Ersetzen von b durch $-b$ unter Beachtung der Regeln 2. und 3..

7. Es ist stets

$$a \cdot (-b) = -ab.$$

Denn $-ab$ ist die Zahl, die zu ab addiert 0 ergibt. Das gleiche leistet aber auch $a \cdot (-b)$:

$$\begin{aligned} a \cdot b + a \cdot (-b) &= a \cdot (b + (-b)) && \text{(Distributionsgesetz)} \\ &= a \cdot 0 && \text{(Regel 1)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

8. Es ist stets

$$(-a) \cdot (-b) = a \cdot b.$$

Dies erhält man, wenn man in Regel 7 für a die Zahl $-a$ einsetzt:

$$\begin{aligned} (-a) \cdot (-b) &= -(-a) \cdot b \\ &= -b \cdot (-a) && \text{(Kommutationsgesetz)} \\ &= -(-b \cdot a) && \text{(Regel 7)} \\ &= b \cdot a && \text{(Regel 2)} \\ &= a \cdot b && \text{(Kommutationsgesetz).} \end{aligned}$$

Mit diesen Vorzeichenregeln ist es leicht, zu zeigen, daß das Ergebnis der Addition, Subtraktion oder Multiplikation zweier ganzer Zahlen entweder eine natürliche Zahl oder eine negative ganze Zahl ist.

Satz

Der Bereich G der ganzen Zahlen ist der kleinste, den Bereich N der natürlichen Zahlen enthaltende Zahlenbereich, in dem Addition, Subtraktion und Multiplikation unbeschränkt ausführbar sind.

AUFGABEN

63. Wie kann
   a) die Menge G der ganzen Zahlen durch die Menge N der natürlichen Zahlen und die Menge $\overline{N}$ der negativen ganzen Zahlen,
   b) die Menge N durch die Mengen G und $\overline{N}$ dargestellt werden?
64. Es ist durch Fallunterscheidung zu beweisen, daß die Subtraktion zweier ganzer Zahlen stets wieder eine ganze Zahl ergibt.
65. Mit Hilfe des Hornerschen Schemas ist eine Wertetabelle für die Funktion aufzustellen, die jeder ganzen Zahl x den Wert

$$x^4 - 3x^3 + x^2 - 2x + 1$$

zuordnet (Ausschnitt: $-4, \ldots, +4$).
66. Nach den Regeln für die Eulerschen Symbole ist formal zu berechnen:

a) $\binom{-2}{3}$, b) $\binom{-7}{4}$, c) $\binom{-1}{5}$, d) $\binom{-5}{5}$.

67. Zu beweisen ist: $\binom{n}{2} = \binom{-n+1}{2}$.

4.2. Ordnung und Mächtigkeit

Auf einer Geraden, auf der wie in 2.1. beschrieben, die Menge der natürlichen Zahlen dargestellt wurde, kann auch noch die Menge der negativen ganzen Zahlen aufgetragen werden. Man weist den Zahlen -1, -2, -3, ... der Reihe nach diejenigen Punkte zu, die ausgehend vom Nullpunkt die Teilung in dem noch unbesetzten Teil der Geraden fortsetzen (Bild 8).

Bild 8

Auf der so ergänzten Zahlengeraden nennt man die Richtung vom Nullpunkt nach den positiven ganzen Zahlen hin positiv, die umgekehrte Richtung negativ. Auf Grund dieser Vereinbarung kann für die ganzen Zahlen eine **Ordnungsrelation** (vgl. 1.5.) erklärt werden, die die Ordnung der natürlichen Zahlen erweitert.

Zwischen zwei voneinander verschiedenen ganzen Zahlen g und h gilt die Relation $g < h$, wenn die Richtung von g nach h die positive Richtung der Zahlengeraden ist. Da die Bildpunkte der Zahlen -1, -2, -3, ... auf der Zahlengeraden in umgekehrter Richtung aufeinanderfolgen wie die der Zahlen 1, 2, 3, ..., ergibt sich folgende Bemerkung:

Aus $n < m$ folgt stets $-n > -m$.

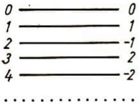
Für die Ordnung der ganzen Zahlen gilt das Monotoniegesetz der Addition (vgl. 2.2.). Das Monotoniegesetz der Multiplikation besteht aber nur dann, wenn mit einer positiven ganzen Zahl multipliziert wird:

Aus $a < b$ und $c < 0$ folgt stets $a \cdot c > b \cdot c$.

Beweis: Ist $c = -n$ $(n \in N \setminus \{0\})$, so folgt aus $a < b$ zunächst nach dem für positive Faktoren gültigen Monotoniegesetz $na < nb$. Daraus ergibt sich nach der obigen Bemerkung $-n \cdot a > -n \cdot b$, oder der Vorzeichenregel 7. des vorigen Abschnittes zufolge $(-n) \cdot a > (-n) \cdot b$.

Analog folgt aus $a > b$ und $c < 0$ stets $a \cdot c < b \cdot c$.

Bringt man die ganzen Zahlen in die Reihenfolge 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, ..., so können sie eine nach der anderen den natürlichen Zahlen zugeordnet werden:



Dadurch entsteht eine eineindeutige Abbildung der Menge der natürlichen Zahlen auf die Menge der ganzen Zahlen. Über deren **Mächtigkeit** kann daher gesagt werden:

Die Menge G der ganzen Zahlen ist der Menge N der natürlichen Zahlen gleichmächtig.

AUFGABEN

68. Es sei A die Menge der tausend ganzen Zahlen von -499 bis 500. Ist die Differenzmenge $G \setminus A$ noch gleichmächtig zu G?
69. Kann durch die Reihenfolge $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots$ eine Ordnung der Menge G der ganzen Zahlen festgelegt werden? Wenn ja, gilt für diese Ordnung
    a) das Monotoniegesetz der Addition,
    b) das Monotoniegesetz der Multiplikation?

5. Absolute Beträge und Abschätzungen

5.1. Absolute Beträge

Um auf der Zahlengeraden den Abstand der Zahl $g \neq 0$ vom Nullpunkt auszudrücken, braucht man die positive der beiden Zahlen g und $-g$: Liegt g rechts vom Nullpunkt ($g > 0$), so ist g gleich der Maßzahl des Abstandes, liegt g indessen links vom Nullpunkt ($g < 0$), so ist die Maßzahl des Abstandes gleich $-g$ (zum Beispiel für $g = -4$ ergibt sich der Wert $-g = -(-4) = 4$). Um in ähnlichen Fällen allgemeingültige Aussagen machen zu können, wird der Begriff des Betrages eingeführt.

Definition

Unter dem **absoluten Betrag** einer Zahl a, in Zeichen $|a|$, versteht man die nichtnegative der beiden Zahlen a und $-a$.

Es ist demnach

$$|a| = \begin{cases} a & \text{bei } a \geqq 0, \\ -a & \text{bei } a < 0. \end{cases}$$

Aus der Definition ergeben sich die Folgerungen:

1. $|a|$ ist niemals negativ:

$$|a| \geqq 0.$$

Das Gleichheitszeichen gilt dann und nur dann, wenn $a = 0$ ist.

2. Für jede Wahl des Vorzeichens ist

$$\pm a \leqq |a|.$$

Denn $|a|$ ist gleich der nicht negativen und damit gleich der größeren der beiden Zahlen a und $-a$.

3. Es ist stets

$$|-a| = |a|.$$

Denn auf beiden Seiten handelt es sich um die nicht negative der beiden Zahlen a und $-a$.

Satz

Der Betrag eines Produktes ist gleich dem Produkt aus den Beträgen der Faktoren:

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|.$$

Denn $|a| \cdot |b|$ liefert den nicht negativen der beiden Werte $a \cdot b$ und $-a \cdot b$.

Analog gilt:

Der Betrag eines Quotienten ist gleich dem Quotienten aus den Beträgen von Dividend und Divisor:

$$|a : b| = |a| : |b|.$$

BEISPIELE

1. Zu berechnen ist der Wert der Summe

$$|2 - a| - |b + 1| + |a + b|$$

a) für $a = 3$, $b = 5$,
b) für $a = 2$, $b = -4$.

Lösung:

a) $|2 - 3| - |5 + 1| + |3 + 5| = |-1| - |6| + |8| = 1 - 6 + 8 = \underline{\underline{3}}$
b) $|2 - 2| - |-4 + 1| + |2 - 4| = |0| - |-3| + |-2| = 0 - 3 + 2 = \underline{\underline{-1}}$

2. Zu berechnen ist der Ausdruck

$$|a(a - b)^2|.$$

Lösung:

$$|a(a - b)^2| = |a| \cdot |(a - b)^2|.$$

Das zweite Betragszeichen kann weggelassen werden, weil das Quadrat $(a - b)^2$ nicht negativ sein kann:

$$|a(a - b)^2| = |a|(a - b)^2 = \underline{\underline{|a|(a^2 - 2ab + b^2)}}.$$

AUFGABEN

70. Welchen Wert erhält die Summe $|2a - 3b| + 5$
a) für $a = 7$, $b = 10$,
b) für $a = 0$, $b = -3$?

71. Welchen Wert erhält die Summe $|a^2 - b^2 + 5ab| + |b - a| - 1$
a) für $a = 2$, $b = -1$,
b) für $a = 0$, $b = 4$,
c) für $a = b = 1$?

72. Welcher Werte ist die Summe $2a + b$ unter der Bedingung fähig, daß $|a| = 1$ und $|b| = 5$ ist?

73. Was kann für

$$|a^2 - 16| + (a + 2)^2$$

geschrieben werden, wenn a zwischen -4 und $+4$ liegt?

74. Was kann für

$$|3a - 3b - 1| + 2a + 1$$

geschrieben werden, wenn

a) $a > b$, b) $a \leqq b$ ist?

75. Unter welchen Bedingungen ist

$$|a - 3|^n = (a - 3)^n ?$$

76. Welches ist die größte aus den ganzen Zahlen a, b, c mit Hilfe von Addition und Subtraktion bildbare Zahl?

77. Was ergibt:

a) $\dfrac{a}{|a|}$, b) $\dfrac{a + |a|}{2}$, c) $\dfrac{a + b + |a - b|}{2}$, d) $\dfrac{a + b - |a - b|}{2}$?

78. Welche Eigenschaften besitzt die Abbildung $a \to |a|$ $(a \in G)$?

5.2. Abschätzungen

Oftmals ist es für den Ingenieur nicht wichtig, den genauen Wert einer technischen Größe zu kennen, sondern es genügt ihm zu wissen, daß diese nicht größer oder nicht kleiner als ein gegebener Wert ist. In diesem Fall ist es für ihn sehr vorteilhaft, statt mit exakten Werten komplizierte Rechnungen mit großer Genauigkeit durchzuführen, die fragliche Größe nur überschlagsmäßig „abzuschätzen". Für diesen Zweck ist die Kenntnis einiger wichtiger Abschätzungsformeln erforderlich, die im folgenden genannt werden.

Für nicht negative Zahlen a und b und jede beliebige natürliche Zahl $n \neq 0$ gilt:

$$a^n + b^n \leqq (a + b)^n .$$

Dies folgt unmittelbar daraus, daß links nur die beiden Randglieder der Summenentwicklung von $(a + b)^n$ nach dem binomischen Lehrsatz stehen und keiner der vorkommenden Summanden negativ ist.

Bernoullische Ungleichung

Für jedes nicht negative a und jede natürliche Zahl n gilt:

$$\boxed{(1 + a)^n \geqq 1 + n \cdot a} \tag{6}$$

Hier sind rechts nur die ersten beiden der nach dem binomischen Lehrsatz zu errechnenden Glieder aufgeschrieben, während die übrigen nicht negativ sind.

Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

Für beliebige vier Zahlen a_1, a_2, b_1, b_2 gilt die Ungleichung

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 \leqq (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2). \tag{I}$$

Um diese Ungleichung zu bestätigen, werden beide Seiten ausgerechnet:

$$a_1^2b_1^2 + 2a_1b_1a_2b_2 + a_2^2b_2^2 \leqq a_1^2b_1^2 + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 + a_2^2b_2^2.$$

Diese Ungleichung ist dann richtig, wenn

$$0 \leqq a_1^2b_2^2 - 2a_1b_1a_2b_2 + a_2^2b_1^2$$

gilt; denn durch Addition von $a_1^2b_1^2 + 2a_1b_1a_2b_2 + a_2^2b_2^2$ ergibt sich die darüberstehende Ungleichung. Die letzte Ungleichung aber ist stets richtig, weil die rechte Seite das Quadrat $(a_1b_2 - a_2b_1)^2$ darstellt, welches — was sich auch immer für die Klammer $(a_1b_2 - a_2b_1)$ ergeben mag — niemals negativ sein kann.
Die Formel (I) kann für je n Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ und $b_1, b_2, \ldots, b_n$ verallgemeinert werden:

$$(a_1b_1 + \cdots + a_nb_n)^2 \leqq (a_1^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + \cdots + b_n^2).$$

Auf den Beweis wird hier verzichtet.

Dreiecksungleichung[1])

Der Betrag einer Summe ist niemals größer als die Summe der Beträge der Summanden:

$$\boxed{|a + b| \leqq |a| + |b|} \tag{7}$$

Denn es ist $\pm a \leqq |a|$, $\pm b \leqq |b|$, also auch

$$\pm(a + b) \leqq |a| + |b|.$$

$|a + b|$ aber ist die größere der beiden Zahlen $a + b$ und $-(a + b)$.
Wird in (7) für b der Wert $-b$ gesetzt, so folgt wegen $|-b| = |b|$:

$$\boxed{|a - b| \leqq |a| + |b|} \tag{7a}$$

Die Dreiecksgleichung läßt sich auch für mehr als zwei Summanden aussprechen:

Für eine beliebige Anzahl n von Summanden $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gilt:

$$\boxed{|a_1 + a_2 + \ldots + a_n| \leqq |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|} \tag{7b}$$

Der Beweis kann durch vollständige Induktion geführt werden:

a) Für $n = 2$ ist (7b) in der Form (7) bewiesen.

b) Schluß von k auf $k + 1$:

---

[1]) Diese Bezeichnung rührt daher, daß in der Geometrie ein analoger Satz gilt: Im Dreieck ist eine Seite stets kleiner als die Summe der beiden anderen Seiten. Mit Hilfe von Vektoren (vgl. Abschnitt 38.2.) kann der direkte Zusammenhang zwischen diesem Satz und der Dreiecksungleichung hergestellt werden

Gilt (7b) für $n = k$:

$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_k| \leqq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_k|, \tag{II}$$

so folgt nach (7)

$$|(a_1 + a_2 + \cdots + a_k) + a_{k+1}| \leqq |a_1 + a_2 + \cdots + a_k| + |a_{k+1}|$$

und wegen (II)

$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1}| \leqq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_k| + |a_{k+1}|.$$

Nach dem Satz über die vollständige Induktion (vgl. 2. 4.) ist hiermit die Formel (7b) bewiesen.

BEISPIELE

1. Es ist das Produkt

$$(3 - a)(b + ac)$$

nach oben abzuschätzen.

Lösung:

$$(3 - a)(b + ac) = 3b - ab + 3ac - a^2c \leqq |3b - ab + 3ac - a^2c|.$$

Nach der Dreiecksungleichung ist dieser Betrag

$$\leqq |3b| + |ab| + |3ac| + |a^2c| = 3|b| + |a|\,|b| + 3\,|a|\,|c| + |a|^2\,|c|.$$

Bei $|a|^2$ kann das Betragszeichen weggelassen werden, da a^2 für keine ganze Zahl a negativ ist. Daher ergibt sich

$$\underline{\underline{(3 - a)(b + ac) \leqq 3|b| + |a|\,|b| + 3|a|\,|c| + a^2|c|.}}$$

Die Wirksamkeit der gewonnenen Abschätzung sei an folgenden Zahlen erläutert: $a = -2$, $b = 10$, $c = 1$. Es ergibt sich:

$$(3 - (-2))(10 + (-2) \cdot 1) \leqq 3|10| + |-2|\,|10| + 3|-2|\,|1| + (-2)^2|1|,$$

also

$$5 \cdot 8 \leqq 30 + 20 + 6 + 4.$$

2. Das Quadrat $(2a + 3b)^2$ ist nach oben abzuschätzen, wenn a und b die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks mit der Hypotenuse $c = 5$ cm sind.

Lösung:

Nach der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung ergibt sich:

$$(2a + 3b)^2 \leqq (2^2 + 3^2)(a^2 + b^2) = 13c^2 = 13 \cdot 25 \text{ cm}^2,$$

also

$$\underline{\underline{(2a + 3b)^2 \leqq 325 \text{ cm}^2.}}$$

AUFGABEN

79. Es sind folgende Ausdrücke nach oben abzuschätzen:

 a) $a(3a - 5b)$, b) $(a + b)(a - 2b)$, c) $3 + a - 2b(2a - b)$.

80. Nach oben ist $|a + b|^3$ abzuschätzen.

81. Es ist $(1 + m)^n$ nach unten abzuschätzen, wenn m und n zwei natürliche Zahlen sind, deren Produkt 12 ist.

82. Wann gilt in

 a) $a^n + b^n \leqq (a + b)^n$ b) $(1 + a)^n \geqq 1 + na$

 das Gleichheitszeichen $(a, b \geqq 0, n > 0)$?

83. Es ist die Ungleichung

$$(1 + a)(1 + b) \geqq 1 + a + b$$

 unter der Voraussetzung zu beweisen, daß a und b gleiche Vorzeichen besitzen.

84. Es ist die Ungleichung

$$a^2 + b^2 \geqq 2|a|\,|b|$$

 zu beweisen.

85. Für beliebige Werte von a und b ist die Ungleichung

$$(a + b)^2 \leqq 2(a^2 + b^2)$$

 zu beweisen.

86. Durch vollständige Induktion ist zu beweisen:
 Für jede natürliche Zahl n gilt die Abschätzung

$$2^n > n.$$

87. Man beweise die CAUCHY-SCHWARZsche Ungleichung für je drei Summanden:

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \leqq (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2).$$

6. Der Körper der rationalen Zahlen

6.1. Wesen der rationalen Zahlen

Um auch die Division möglichst unbeschränkt ausführen zu können, müssen zur Menge der ganzen Zahlen abermals neue Zahlen hinzugenommen werden. Der erweiterte Zahlenbereich müßte mindestens alle Brüche g/h, die sich aus ganzen Zahlen g und h bilden lassen, enthalten. Der Bereich der ganzen Zahlen besitzt nur einen kleinen Teil dieser Brüche, etwa $4/2$, $-7/1$, $0/5$, aber zum Beispiel nicht $7/3$, $1/-2$, $3/0$.
Die Existenz einiger dieser Brüche in einem die natürlichen Zahlen enthaltenden Zahlenbereich ist aber mit den Regeln der Arithmetik unverträglich. Es sind dies

alle diejenigen Brüche, deren Nenner Null ist. Schon im Bereich der natürlichen Zahlen mußte beim Nachweis der Eindeutigkeit der Division der Divisor Null ausgeschlossen werden (vgl. 2.2.). Damals wurde a/b als die Zahl erklärt, die mit b multipliziert a ergibt:

$$\left(\frac{a}{b}\right) \cdot b = a .$$

Also müßte man unter $a/0$ eine Zahl verstehen, die mit 0 multipliziert a liefert:

$$\left(\frac{a}{0}\right) \cdot 0 = a .$$

Wenn a ebenfalls Null ist, so löst jede Zahl die gestellte Aufgabe: $1 \cdot 0 = 0$, $(-2) \cdot 0 = 0$. Die Division von Null durch Null muß also nicht deswegen ausgeschlossen werden, weil es keine Zahl gäbe, die mit Null multipliziert Null ergibt, sondern weil es zu viele Zahlen gibt, die das Geforderte leisten.
Ganz anders liegen die Dinge, wenn a verschieden von 0 ist. Stellvertretend für jeglichen solchen Wert von a soll $a = 1$ betrachtet werden. Es ist leicht einzusehen, daß es keinen Zahlenbereich geben kann, der den Bereich der natürlichen Zahlen enthält und in dem eine Zahl existiert, die mit 0 multipliziert 1 liefert. Gäbe es nämlich eine solche Zahl, etwa u, so würde

$$0 \cdot u = 1 \tag{I}$$

gelten. Aus dieser Beziehung und der Gleichheit $2 = 2$ folgt nach dem Eindeutigkeitsgesetz der Multiplikation (vgl. 2.2.)

$$2 \cdot (0 \cdot u) = 2 \cdot 1 .$$

Nach dem Assoziationsgesetz ist die linke Seite gleich $(2 \cdot 0) \cdot u = 0 \cdot u$:

$$0 \cdot u = 2 . \tag{II}$$

Aus (I) und (II) folgte aber wegen der Transitivität der Gleichheit

$$1 = 2.$$

In einem Zahlenbereich, in dem es eine Zahl gibt, die mit 0 multipliziert 1 ergibt, verschwindet demnach der Unterschied zwischen 1 und 2, und der Bereich der natürlichen Zahlen stürzt in sich zusammen.

Satz

▌ Die Division durch Null ist in keinem Zahlenbereich möglich.

Daß dagegen alle anderen der geforderten Brüche g/h, also alle mit $h \neq 0$, in umfassenderen Zahlenbereichen existieren, kann hier nicht gezeigt werden. Es muß im folgenden jedoch als Voraussetzung dienen.

Alle Brüche g/h, die sich aus ganzen Zahlen g und h mit $h \neq 0$ bilden lassen, werden als **rationale Zahlen** oder gebrochene Zahlen bezeichnet. Die Menge K der rationalen Zahlen enthält die Menge G der ganzen Zahlen:

$$G \subset K.$$

Die ganze Zahl g wird in der Menge K durch den Bruch $g/1$ vertreten.
In der Menge der gebrochenen Zahlen kann ein und dieselbe Zahl mit verschiedenen Zählern und Nennern geschrieben werden. Aus der *Gleichheit*

$$\frac{g}{h} = \frac{g'}{h'}$$

zweier Brüche folgt durch Multiplikation mit hh'

$$gh' = g'h;$$

denn auf Grund der Definition der Quotienten (vgl. 2.2.) ist

$$\frac{g}{h} \cdot h = g \quad \text{und} \quad \frac{g'}{h'} \cdot h' = g'.$$

Ist umgekehrt für die Zahlen $g, h, g', h' \in G$, $h \neq 0$, $h' \neq 0$ die Gleichung $gh' = g'h$ erfüllt, so stimmen die Brüche g/h und g'/h' auf Grund der Eindeutigkeit der Division überein. Denn g/h ist die Zahl, die mit hh' multipliziert gh' ergibt, und g'/h' ist die Zahl, die mit hh' multipliziert $g'h = gh'$ ergibt.

Satz

Zwei Brüche g/h und g'/h' sind genau dann *gleich*, wenn $gh' = g'h$ ist:

$$\frac{g}{h} = \frac{g'}{h'} \quad \Leftrightarrow \quad gh' = g'h.$$

Aus diesem Kriterium ergibt sich, daß man in einem Bruch Zähler und Nenner mit derselben Zahl $k \neq 0$ multiplizieren oder durch dieselbe Zahl $k \neq 0$ dividieren darf, ohne seinen Wert zu verändern. Es ist

$$\frac{g}{h} = \frac{g \cdot k}{h \cdot k},$$

weil $g \cdot h \cdot k = g \cdot k \cdot h$ ist. So begründet sich das bekannte *Erweitern* und *Kürzen* von Brüchen.

Die Null wird in der Menge der rationalen Zahlen durch jeden Bruch $0/h$ $(h \in G \setminus \{0\})$ dargestellt, weil $h \cdot 0 = 0$ ist. Hat umgekehrt ein Bruch den Wert Null:

$$\frac{g}{h} = \frac{0}{k} \quad (k \in G \setminus \{0\}),$$

so ergibt sich nach dem Gleichheitskriterium $gk = 0 \cdot h = 0$. Wegen $k \neq 0$ folgt hieraus $g = 0$ (vgl. 2.2.):

Satz

Ein Bruch hat dann und nur dann den Wert Null, wenn sein Zähler gleich Null ist.

AUFGABEN

88. Worin besteht der Fehler in folgendem „Schluß", daß jede Zahl x ihrem Doppelten, $2x$, gleicht:

$$x^2 - x^2 = x^2 - x^2,$$
$$x(x - x) = (x + x)(x - x),$$
$$x = 2x.$$

89. Welche Eigenschaften besitzt die Abbildung, die jedem Element $(g, h) \in G \times (G \setminus \{0\})$ den Bruch g/h zuordnet?

90. Zu beweisen ist: Aus

$$\frac{u}{v} = \frac{u'}{v'} \qquad (v \cdot v' \neq 0)$$

folgt

$$\frac{gu + hv}{ku + lv} = \frac{gu' + hv'}{ku' + lv'},$$

wobei g, h, k, l beliebige Zahlen sind, für die $ku + lv \neq 0$ ist. Dieses Verfahren, aus einer Bruchgleichung (Proportion) eine neue abzuleiten, heißt *korrespondierende Addition.*

6.2. Die Menge der rationalen Zahlen als Zahlenkörper

In der Menge K der rationalen Zahlen sind Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division mit der einzigen Ausnahme der Division durch Null unbeschränkt ausführbar.

Beweis:

Am einfachsten läßt sich die *Multiplikation* zweier rationaler Zahlen g/h und k/l $(g, h, k, l \in G, h \neq 0, l \neq 0)$ ausführen. Nach der Definition der Division sind die beiden Brüche durch folgende Bedingungen eindeutig beschrieben:

$$h \cdot \frac{g}{h} = g, \quad l \cdot \frac{k}{l} = k.$$

Daher ergibt das Produkt $(g/h) \cdot (k/l)$ mit $h \cdot l$ multipliziert gk:

$$l \cdot h \cdot \frac{g}{h} \cdot \frac{k}{l} = l \cdot g \cdot \frac{k}{l} = g \cdot l \cdot \frac{k}{l} = g \cdot k.$$

Deshalb kann es gemäß der Definition des Quotienten mit gk/hl bezeichnet werden:

$$\frac{g}{h} \cdot \frac{k}{l} = \frac{g \cdot k}{h \cdot l}. \tag{I}$$

Wegen $gk \in G$, $hl \in G \setminus \{0\}$ gehört das Produkt wieder der Menge K der rationalen Zahlen an.
Die Formel (I) lehrt:

Bei der Multiplikation zweier Brüche wird Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziert[1]).

Um nachzuweisen, daß in der Menge K der rationalen Zahlen die *Division* bis auf die Ausnahme der Division durch Null unbeschränkt ausführbar ist, hat man zu zeigen: Sind g/h und k/l ($g, k \in G$, $h, l \in G \setminus \{0\}$) zwei beliebige rationale Zahlen, deren zweite von Null verschieden ist (das heißt $k \neq 0$), so gibt es eine rationale Zahl, die mit k/l multipliziert g/h ergibt. Diese gebrochene Zahl kann aber ohne weiteres benannt werden: gl/hk. Indem $h \neq 0$ und $k \neq 0$ vorausgesetzt wurde, ist auch $hk \neq 0$, und gl/hk gehört zu K. Die Probe lautet:

$$\frac{k}{l} \cdot \frac{g \cdot l}{h \cdot k} = \frac{g \cdot \cancel{l} \cdot \cancel{k}}{\cancel{l} \cdot h \cdot \cancel{k}} = \frac{g}{h}.$$

Das Ergebnis der Division kann auf folgende Form gebracht werden:

$$\frac{g}{h} : \frac{k}{l} = \frac{g}{h} \cdot \frac{l}{k}.$$

Bei der Division von Brüchen wird der Dividend mit dem Kehrwert des Divisors multipliziert.

Zur *Addition* oder *Subtraktion* werden zwei rationale Zahlen zunächst so erweitert, daß sie einen gleichen Nenner, einen Hauptnenner, erhalten. Man macht sie *gleichnamig*. Als Hauptnenner dient bekanntlich das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der beiden Nenner. Sind g/h und k/h ($g, h, k \in G$, $h \neq 0$) zwei derart vorbereitete Brüche, so gilt:

$$\frac{g}{h} \pm \frac{k}{h} = \frac{g \pm k}{h};$$

denn $(g \pm k)/h$ ist die Zahl, die, mit h multipliziert, $g \pm k$ ergibt, und dadurch ist sie eindeutig definiert. Diese Eigenschaft trifft nach dem Distributionsgesetz auch für $g/h \pm k/h$ zu:

$$\left(\frac{g}{h} \pm \frac{k}{h}\right) \cdot h = \frac{g}{h} \cdot h \pm \frac{k}{h} \cdot h = g \pm k.$$

Bei der Addition (Subtraktion) gleichnamiger Brüche werden deren Zähler addiert (subtrahiert) und der Nenner beibehalten.

[1]) Dieser Satz beschränkt sich kürzehalber auf das Wichtigste an der Formel (I). Er ist ihr nicht gleichwertig

Indem also im Bereich der rationalen Zahlen die vier Grundrechnungsarten bis auf die unvermeidliche Ausnahme der Division durch Null unbeschränkt ausführbar sind, ist ein in dieser Hinsicht vollendeter Zahlenbereich erreicht. Für Zahlenbereiche solcher Art hat die Algebra den Namen Zahlenkörper. Der Körperbegriff wird aber nicht allein auf Zahlenbereiche angewendet, sondern auch auf Mengen, die nicht nur aus Zahlen bestehen. Er wird folgendermaßen erklärt:

Definition

Eine Menge M, unter deren Elementen eine Addition, eine Subtraktion, eine Multiplikation und eine Division mit den in 2.2. genannten Grundgesetzen erklärt und bis auf die Division durch Null ($= a - a$ für ein beliebiges $a \in M$) unbeschränkt ausführbar sind, heißt **Körper**.

Nach dem Vorangegangenen bildet die Menge der rationalen Zahlen einen Zahlenkörper. Von ihm kann gesagt werden:

Satz

Der Körper K der rationalen Zahlen ist der kleinste Zahlenkörper, der den Bereich der natürlichen Zahlen enthält.

AUFGABEN

91. Was ergibt:
a) $a + 0$, b) $a - 0$, c) $0 - a$, d) $0 \cdot a$, e) $0 : a$ $(a \neq 0)$?

92. Gibt es einen Zahlenkörper, der eine echte Teilmenge des Körpers der rationalen Zahlen darstellt?

6.3. Ordnung und Mächtigkeit

Auf der mit den Bildern der ganzen Zahlen versehenen Zahlengeraden lassen sich auch den rationalen Zahlen Bildpunkte zuordnen. Um der Zahl g/h $(g, h \in G, h \neq 0)$ einen Punkt anzuweisen, sorgt man durch eventuelles Erweitern mit -1 zunächst dafür, daß der Nenner positiv ist. Dann teilt man alle Strecken zwischen je zwei ganzen Zahlen in h gleiche Abschnitte und trägt vom Nullpunkt aus $|g|$ solcher Abschnitte in positiver oder negativer Richtung ab, je nachdem g positiv oder negativ ist. Der so erreichte Punkt wird der rationalen Zahl g/h zugeordnet (Bild 9). Auf diese Weise lassen sich alle rationalen Zahlen auf der Geraden unterbringen, verschiedene Zahlen erhalten verschiedene Orte, gleiche Zahlen — gekürzt oder erweitert dargestellt — erhalten denselben Ort.

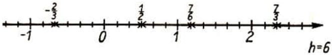


Bild 9

Auf Grund der Anordnung der Bildpunkte auf der Zahlengeraden wird für die rationalen Zahlen die Ordnungsrelation „kleiner als" definiert: Die rationale Zahl a heißt kleiner als die rationale Zahl b, wenn der b zugeordnete Punkt der Zahlengeraden in positiver Richtung auf den a zugeordneten Punkt folgt. Zwei verschiedene rationale Zahlen a und b genügen somit genau einer der Beziehungen $a < b$ oder $b < a$. Die rationalen Zahlen bilden auf diese Weise einen *geordneten Zahlenkörper*.

Es ist interessant, daß die Menge der rationalen Zahlen immer noch der Menge der natürlichen Zahlen gleichmächtig ist. Man kann nämlich die nicht negativen rationalen Zahlen g/h $(g, h \in N, h \neq 0)$ nach der Summe s aus Zähler und Nenner ordnen:

$s = g + h$	g	h	g/h
1	0	1	$0/1 = 0$
2	0	2	$0/2 = 0$
	1	1	$1/1 = 1$
3	0	3	$0/3 = 0$
	1	2	$1/2$
	2	1	$2/1 = 2$
.	.	.	.
.	.	.	.

In dieser Aufstellung werden Wiederholungen fortgelassen:
$0, 1, 1/2, 2, \ldots,$ und nach jeder Zahl wird die entsprechende negative eingefügt: $0, 1, -1, 1/2, -1/2, 2, -2, \ldots$. So erhält man eine Aufzählung der rationalen Zahlen, in der jede genau an einer Stelle vorkommt. Man kann sie der Reihe nach eineindeutig den natürlichen Zahlen zuordnen:

$$\begin{array}{ccccccc} 0, & 1, & -1, & 1/2, & -1/2, & 2, & -2, \ldots \\ 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, \ldots . \end{array}$$

AUFGABEN

93. Wieviel rationale Zahlen liegen zwischen Eins und Zwei?
94. Eins ist die kleinste positive ganze Zahl. Welches ist die kleinste positive rationale Zahl?
95. Es sind die ersten 20 Glieder der in 6.3. beschriebenen Aufzählung der rationalen Zahlen zu bestimmen.
96. Mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes ist

    a) $1{,}1^7$, b) $0{,}98^5$

    auf vier Stellen nach dem Komma zu bestimmen.

    Hinweis: Von $1{,}1^7 = (1 + 0{,}1)^7$ müssen nicht alle Glieder berechnet werden. Zur Vermeidung von Rundungsfehlern rechnet man mit 5 Stellen (eine „Schutzstelle").
97. Nach den Regeln für EULERsche Symbole ist formal zu berechnen:

    a) $\binom{1/2}{1}$, b) $\binom{1/2}{3}$, c) $\binom{1/3}{4}$, d) $\binom{-3/2}{3}$.
98. Unter der Voraussetzung $a < b$ sind die Abschätzungen

    a) $a < \dfrac{a+b}{2} < b$, b) $a < \dfrac{2a+3b}{5} < b$,

    c) $a < \dfrac{ma+nb}{m+n} < b \quad (m, n \in N,\ m \cdot n \neq 0)$

    zu beweisen.

7. Gleichungen und Ungleichungen

7.1. Konstante und Variable, Terme

Möchte man mathematische Aufgaben allgemein lösen, oder mathematische Überlegungen unabhängig von konkreten Zahlen durchführen, so benutzt man in der Rechnung Buchstaben als Zeichen, die die Zahlen vertreten. Je nach deren Sinn unterscheidet man zwei Arten:

Definition

Ein Buchstabe, der in einer mathematischen Überlegung lediglich ein Zeichen für einen festzuhaltenden Zahlenwert ist, heißt eine **Konstante**.
Stellt ein Buchstabe dagegen eine während der Untersuchung in gewissem Ausmaß frei wählbare Zahl dar, so nennt man ihn eine **Variable** (Veränderliche).

Die Menge der Zahlenwerte, die für eine Variable eingesetzt werden dürfen, heißt *Variablenbereich* dieser Veränderlichen. Wird für eine Variable ein bestimmter Wert des Variablenbereiches gesetzt, so spricht man von einer *Belegung* der Variablen. Als Konstante werden oft auch gegebene Zahlen selbst bezeichnet.
Ebenso werden Buchstaben, die für physikalische Größen stehen, sinngemäß als Konstante und Variable angesprochen.
Je nach der durchzuführenden Überlegung kann ein und derselbe Buchstabe eine Konstante oder eine Variable darstellen.

BEISPIELE

1. Untersucht man die Veränderung des Potenzwertes x^n $(n \in N)$ bei der Veränderung der Basis, so gilt x als Variable mit K als Variablenbereich, n als Konstante.
Untersucht man dagegen die Veränderung des Potenzwertes x^n bei der Veränderung des Exponenten, so gilt n als Variable mit N als Variablenbereich und x als Konstante.
2. Bestimmt man die Gewichte von Stahlzylindern mit verschiedenen Abmessungen, so gelten in der Formel

$$G = \frac{\pi}{4} g\varrho d^2 h$$

g, ϱ (und $\pi/4$) als Konstante, d und h als Variable mit der Menge aller Längen als Variablenbereich.
Untersucht man dagegen das Gewicht eines Stahlzylinders an verschiedenen Stellen der Erde, so sind ϱ, d, h (und $\pi/4$) Konstante und die Erdbeschleunigung g ist variabel mit der Menge aller Beschleunigungswerte zwischen 9,78 m/s² und 9,83 m/s² als Variablenbereich.

Oft — wie gerade in den genannten Beispielen — ist es nützlich, sich die Belegung einer Variablen durch stetig wachsende oder stetig fallende Zahlenwerte ihres Variablenbereiches vorzustellen. Das ist besonders für die Naturwissenschaft von größter Bedeutung. Variable können der mathematischen Widerspiegelung von Bewegungen und Veränderungen in der Natur dienen.
Zahlen, Konstanten und Variablen können auf verschiedene Weise verknüpft werden.

Definition

Eine aus Zahlen, Buchstaben und Rechenzeichen gebildete mathematische Zeichenfolge, die nach Ersetzen der Buchstaben durch in gewissem Ausmaß frei wählbare Zahlen einen Zahlenwert annimmt, heißt **Term**.

Terme werden gewöhnlich mit großen lateinischen Buchstaben bezeichnet: $T, S, \ldots$. Nimmt ein Term bei einer bestimmten Belegung der in ihm vorkommenden Variablen einen Zahlenwert an, so sagt man, der Term sei für diese Belegung *definiert*. Die Menge aller Belegungen, für die ein Term definiert ist, heißt *Definitionsbereich* des Termes.

BEISPIELE

3. $a + b + c$, definiert für alle Zahlentripel (a, b, c), liefert zum Beispiel für $a = 1, b = 2, c = 0$ den Wert $1 + 2 + 0 = 3$.
4. $5x^2 + 3x - 1$, definiert für alle Zahlen x, liefert zum Beispiel für $x = 3$ den Wert $5 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 - 1 = 53$.
5. $\dfrac{x + y + z}{x^2 + y^2 + z^2}$, definiert für alle Zahlentripel (x, y, z), für die $x^2 + y^2 + z^2$ verschieden von Null ist.
6. $\dfrac{4}{3}\pi r^3$ (Kugelvolumen), definiert für alle Längen r.
7. -205 (An einem Term müssen nicht unbedingt Buchstaben beteiligt sein.)

Setzt man in einen, nur eine Variable x enthaltenden Term T für die Veränderliche nacheinander verschiedene Belegungen aus dem Variablenbereich X ein, so erhält man im allgemeinen eine Reihe verschiedener Werte. Zum Beispiel nimmt der Term $T = x^2 - 1$ für die

Belegungen	-2,	-1,	0,	1,	2,	3
die Werte	3,	0,	-1,	0,	3,	8

an. Die Tatsache, daß der Wert des Termes T auf diese Weise von der Belegung der Variablen x abhängt, drückt man auch aus, indem man sagt, der Term T hänge von der Variablen x ab, und schreibt $T(x)$. Analog ist die Schreibweise $T(x_1, \ldots, x_n)$ zu verstehen: Der Term T enthält die n Variablen $x_1, \ldots, x_n$; sein Wert hängt von den Belegungen dieser Veränderlichen ab. Je nach der Verknüpfung der beteiligten Variablen werden verschiedene **Arten von Termen** unterschieden:

a) Terme, in denen die Variablen nur mit Konstanten (Zahlen eingeschlossen) multipliziert und solche Produkte zu Konstanten addiert werden, heißen *lineare Terme*.

   $3x - 1$ ist ein linearer Term in einer Variablen x.

   $a + b + c$ ist ein linearer Term in den Variablen a, b und c.

b) Terme, in denen auf die Variablen nur Addition, Subtraktion und Multiplikation angewendet werden, heißen *ganze rationale Terme* oder *Polynome*.

   $(x + 1)(x - 2) = x^2 - x - 2$ ist ein Polynom in einer Variablen x.

   $x^2 + 2y^2 - 3$ ist ein Polynom in den Variablen x und y.

c) Terme, in denen auf die Variablen nur die vier Grundrechnungsarten angewendet werden, heißen *rationale Terme.*

$\frac{1}{x} + \frac{x-1}{x+1} = \frac{x^2+1}{x^2+x}$ ist ein rationaler Term in x.

Werden zwei Terme addiert, so erhält man wieder einen Term. Dasselbe trifft für die Subtraktion, Multiplikation und Division zu, wenn der Divisor nicht die Zahl 0 ist, beziehungsweise nicht nur diesen Wert annehmen kann. *Die Menge der Terme bildet also einen Körper.*

Eine besonders wichtige Operation mit Termen ist die **Linearkombination**. Zwei oder mehr Terme linear kombinieren, heißt jeden mit einer Konstanten multiplizieren und die Produkte addieren. Bei zwei Termen T_1 und T_2 entsteht dabei der Ausdruck

$$m_1 T_1 + m_2 T_2 .$$

Zum Beispiel kann aus den Termen $T_1 = 3x - 5y$ und $T_2 = 2x + y$ die Linearkombination $(-2)T_1 + 3T_2 = (-2)(3x - 5y) + 3(2x + y) = 13y$ hergestellt werden.

AUFGABEN

99. Mit Hilfe des Horner-Schemas sind Wertetafeln für
    a) das Polynom $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1$
    zum Variablenbereich $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$,
    b) das Polynom $x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 1$
    zum Variablenbereich $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
    herzustellen.

100. Aus den Termen $T_1 = 2x + 5y$ und $T_2 = 3x - y$ ist eine Linearkombination zu bilden, die
    a) die Variable x nicht enthält,
    b) die Variable y nicht enthält.

7.2. Gleichungsbegriff

Definition

> Unter einer **Gleichung** versteht man einen Ausdruck der Form
>
> $$T_1 = T_2 ,$$
>
> in dem zwei Terme T_1 und T_2 durch das Gleichheitszeichen verbunden sind.

Der Begriff „Gleichung" ist vom Begriff „Gleichheit" zu unterscheiden: Jede Gleichheit kann durch eine Gleichung ausgedrückt werden, aber nicht jede Gleichung stellt eine Gleichheit dar.

Enthalten die beiden Terme einer Gleichung keine Variablen, so stellt sie eine wahre oder eine falsche Gleichheitsaussage dar. Zum Beispiel ist die Gleichung $2 = 1 + 3/5$ eine falsche Gleichheitsaussage.

Kommen in der Gleichung dagegen Variable vor, etwa $x + 1 = y$, so kann über Wahrheit oder Falschheit erst dann entschieden werden, wenn die Veränderlichen mit Werten aus den entsprechenden Variablenbereichen belegt werden.
Hier sollen zunächst nur *Gleichungen mit einer Variablen* behandelt werden, das heißt solche, in denen die Terme T_1 und T_2 höchstens von ein und derselben Veränderlichen abhängen:

$$T_1(x) = T_2(x).$$

Ist für x ein Variablenbereich X gegeben, für dessen Zahlen sowohl $T_1(x)$ als auch $T_2(x)$ definiert ist, so stellt die Gleichung bei jeder Belegung der Veränderlichen entweder eine wahre oder eine falsche Aussage dar.

BEISPIEL

1. $x^2 + 7 = 7x - 3, \quad X = \{1, 2, \ldots, 6\}$.

Man erhält beim Einsetzen von

1	$1^2 + 7 = 7 \cdot 1 - 3$	eine falsche,
2	$2^2 + 7 = 7 \cdot 2 - 3$	eine wahre,
3	$3^2 + 7 = 7 \cdot 3 - 3$	eine falsche,
4	$4^2 + 7 = 7 \cdot 4 - 3$	eine falsche,
5	$5^2 + 7 = 7 \cdot 5 - 3$	eine wahre und
6	$6^2 + 7 = 7 \cdot 6 - 3$	eine falsche Aussage.

Diejenigen Zahlen des Variablenbereiches X, für die $T_1(x) = T_2(x)$ in eine wahre Aussage übergeht, heißen **Erfüllungen** oder **Lösungen** dieser Gleichung im Bereich X. Die Menge aller Erfüllungen einer Gleichung im Bereich X wird **Erfüllungsmenge**, **Lösungsmenge** oder auch **Gültigkeitsbereich** der Gleichung bezüglich des Variablenbereiches X genannt und mit E bezeichnet.

Im Beispiel 1. kann dann folgendermaßen formuliert werden:
Die Erfüllungsmenge der Gleichung $x^2 + 7 = 7x - 3$ bezüglich des Variablenbereiches $X = \{1, 2, \ldots, 6\}$ ist $E = \{2, 5\}$.

Die Erfüllungsmenge einer Gleichung zu bestimmen, ist eine sehr häufig auftretende Aufgabe.

BEISPIEL

2. Vermehrt man eine einstellige natürliche Zahl um 5, so erhält man 1 mehr, als wenn man sie verdreifacht. Wie heißt die Zahl?

Ansatz: Solange man die Zahl nicht kennt, betrachtet man eine Variable, die aller in der Aufgabe zugelassener Werte fähig ist. x sei also eine Veränderliche mit dem in der Aufgabe genannten Variablenbereich $X = \{0, 1, \ldots, 9\}$. Die um 5 vermehrte Zahl wird durch den Term $T_1(x) = x + 5$ dargestellt. Die verdreifachte und um 1 vermehrte Zahl drückt der Term $T_2(x) = 3x + 1$ aus. Demnach wird in der Aufgabe nach allen Zahlen des Bereiches X gefragt, für die

$$x + 5 = 3x + 1$$

eine wahre Aussage liefert, das heißt, nach der Erfüllungsmenge dieser Gleichung bezüglich des Variablenbereiches X.

Lösung: Setzt man in der Gleichung der Reihe nach sämtliche zehn Werte des Variablenbereiches ein, so stellt man ohne weiteres fest, daß nur für die Belegung der Variablen durch die Zahl 2 eine wahre Aussage entsteht. Also ist

$$E = \{2\}.$$

Ergebnis: Die gesuchte Zahl heißt 2.

Bezüglich der Erfüllungsmenge einer Gleichung können zwei *Sonderfälle* auftreten:

a) Die Erfüllungsmenge kann den ganzen Variablenbereich ausmachen: $E = X$. Dann nennt man die Gleichung $T_1(x) = T_2(x)$ eine **Identität** bezüglich des Variablenbereiches X oder sagt auch: Die Terme $T_1(x)$ und $T_2(x)$ sind gleich bezüglich des Variablenbereiches X. Dadurch wird die *Gleichheit von Termen* definiert.

b) Die Erfüllungsmenge kann die leere Menge sein: $E = \varnothing$. Dann sagt man, die Gleichung sei bezüglich des Variablenbereiches X *unerfüllbar*.

BEISPIELE

3. $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$, $X = K$.
Hier ist $E = K = X$. Die Gleichung stellt eine Identität bezüglich des Körpers K dar.

4. $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$, $X = \{1, 2, 3\}$.
Auch hier ist $E = X$. Die Gleichung stellt eine Identität bezüglich des Bereiches $\{1, 2, 3\}$ dar.

5. $x^2 + 1 = 0$, $X = K$.
Welche rationale Zahl man auch für x einsetzen mag, stets ist $x^2 \geqq 0$ und damit $x^2 + 1 > 0$. Daher ist $E = \varnothing$. Die Gleichung ist bezüglich des Körpers K unerfüllbar.

6. $x + 2 = 5$, $X = \{0, 1, 2\}$.
Hier ist ebenfalls $E = \varnothing$. Die Gleichung ist bezüglich des Variablenbereiches $\{0, 1, 2\}$ unerfüllbar.

AUFGABEN

101. Welche Bedeutung haben folgende Ausdrücke:

a) $2x - 3 = 5$ für $x = 8$,

b) $(2x-5)(4x+5) - 5x = 8x^2 - 25 - 15x$, $X = K$?

102. Kann eine unerfüllbare Gleichung zugleich eine Identität sein?

103. Vermindert man eine zweistellige Zahl mit der Quersumme 9 um 3 und verdreifacht diese Differenz, so erhält man eine zweistellige Zahl mit den ursprünglichen Ziffern in umgekehrter Reihenfolge. Wie heißt die Zahl?

Hinweis: Eine Zahl aus den Ziffern a und b besitzt den Wert $10a + b$.

7.3. Gleichwertigkeit von Gleichungen

Die Erfüllungsmenge einer Gleichung läßt sich in den seltensten Fällen durch Einsetzen (oder „Probieren") aller Zahlen des Variablenbereiches feststellen. In der Regel ist der Variablenbereich eine unendliche Menge und vereitelt damit von vornherein dieses Verfahren. Man kann aber auch zur Erfüllungsmenge gelangen, indem man die Gleichung in andere, gleichwertige Gleichungen umformt mit dem Ziel, letztlich zu einer so einfachen Gleichung zu kommen, daß man ihr die Erfüllungsmenge sofort ansehen kann.

Dabei heißen zwei Gleichungen bezüglich des gegebenen Variablenbereiches **gleichwertig** oder **äquivalent**, wenn sie die gleiche Erfüllungsmenge bezüglich des Variablenbereiches besitzen.
Die wichtigsten Operationen, um eine Gleichung in eine gleichwertige überzuführen, werden durch folgende zwei Regeln beschrieben:

1. Addiert man auf beiden Seiten einer Gleichung

   $$T_1 = T_2$$

   denselben, für alle in der Gleichung zugelassenen Variablenwerte definierten Term T, so ist die neue Gleichung

   $$T_1 + T = T_2 + T$$

   der ursprünglichen gleichwertig.
2. Multipliziert man beide Seiten einer Gleichung

   $$T_1 = T_2$$

   mit dem gleichen Term T, der bei allen in der Gleichung zugelassenen Variablenbelegungen von Null verschiedene Werte besitzt, so ist die neue Gleichung

   $$T_1 \cdot T = T_2 \cdot T$$

   der ursprünglichen gleichwertig.

Indem der Term T sowohl Minuszeichen als auch Bruchstriche enthalten darf, schließt die erste Regel die Subtraktion eines Terms von beiden Seiten einer Gleichung und die zweite die Division der beiden Seiten einer Gleichung durch denselben Term ein.
Die beiden Regeln gelten für Gleichungen mit beliebig vielen Veränderlichen und sind deshalb allgemein formuliert worden. Die Beweise sind leicht zu erbringen. Hier mag der Beweis der Regel 2 für Gleichungen mit einer Variablen genügen.
Es ist zu zeigen, daß die Erfüllungsmengen der beiden Gleichungen

$$T_1(x) = T_2(x) \quad \text{und} \quad T_1(x) \cdot T(x) = T_2(x) \cdot T(x)$$

übereinstimmen. Dazu wird zunächst bewiesen, daß jede Erfüllung der ursprünglichen Gleichung auch Erfüllung der neuen ist: Erfüllt die Zahl $\bar{x} \in X$ die ursprüngliche Gleichung, ist also $T_1(\bar{x}) = T_2(\bar{x})$ eine wahre Gleichheitsaussage, dann ist auch $T_1(\bar{x}) \cdot T(\bar{x}) = T_2(\bar{x}) \cdot T(\bar{x})$ nach dem Eindeutigkeitsgesetz der Multiplikation (vgl. 2.2.) eine wahre Aussage. Denn aus $T_1(\bar{x}) = T_2(\bar{x})$ und $T(\bar{x}) = T(\bar{x})$ folgt $T_1(\bar{x}) \cdot T(\bar{x}) = T_2(\bar{x}) \cdot T(\bar{x})$. Das heißt aber: $\bar{x}$ erfüllt die neue Gleichung.
Nun ergibt sich aber die ursprüngliche Gleichung aus der neuen durch Multiplikation mit dem Term $1/T(x)$, der wiederum, weil $T(x)$ für alle zugelassenen Variablenwerte verschieden von 0 ausfällt, für alle zugelassenen Belegungen definiert ist. Also kann durch denselben Schluß begründet werden: Jede Erfüllung der neuen Gleichung ist ebenfalls eine Erfüllung der ursprünglichen. Damit stimmen die Erfüllungsmengen der beiden Gleichungen überein.
Die Anwendung der beiden Regeln zeigt das folgende Beispiel.

BEISPIEL

Es ist die Erfüllungsmenge der Gleichung

$$\frac{1}{x-4} + \frac{1}{x-5} = \frac{2}{x-6}$$

bezüglich des Körpers K der rationalen Zahlen zu bestimmen.

Lösung: Da die Division durch 0 ausgeschlossen ist, darf als Variablenbereich $X = K \setminus \{4, 5, 6\}$ angenommen werden. Um die Nenner zu beseitigen, multipliziert man die beiden Seiten der Gleichung mit dem Term $(x-4)(x-5)(x-6)$, der für alle Belegungen von x durch Werte aus X verschieden von Null ist, und erhält:

$$\begin{aligned} (x-5)(x-6) + (x-4)(x-6) &= 2(x-4)(x-5), \\ x^2 - 11x + 30 + x^2 - 10x + 24 &= 2x^2 - 18x + 40, \\ 2x^2 - 21x + 54 &= 2x^2 - 18x + 40. \end{aligned}$$

Durch Subtraktion des Termes $2x^2 - 18x + 54$ auf beiden Seiten der Gleichung ergibt sich:

$$-3x = -14.$$

Daraus folgt durch Division durch den Term -3:

$$x = \frac{14}{3}.$$

Die Gleichung $x = 14/3$ wird nur dann eine wahre Aussage, wenn x durch 14/3 belegt wird. 14/3 gehört zum Variablenbereich. Demnach besteht die Erfüllungsmenge der Gleichung allein aus der Zahl 14/3.

Kontrolle: Um die Rechnung auf ihre Richtigkeit zu prüfen, wird die Variable in der Ausgangsgleichung durch den Lösungswert belegt, wobei eine wahre Aussage entstehen muß. Es ergibt sich:

$$\frac{1}{14/3-4} + \frac{1}{14/3-5} = \frac{2}{14/3-6},$$

also
$$\frac{3}{2} + (-3) = -\frac{3}{2}.$$

Ergebnis: $\underline{\underline{E = \{14/3\}}}$.

AUFGABEN

104. Für Gleichungen mit einer Variablen ist die erste Regel über die Gleichwertigkeit zu beweisen.

105. Im Körper der rationalen Zahlen sind die Erfüllungsmengen folgender Gleichungen zu bestimmen:

a) $\dfrac{5}{x-6} + \dfrac{6}{x-5} = \dfrac{11}{x-7}$, b) $\dfrac{x+7}{x+1} + \dfrac{x+9}{x+2} = \dfrac{4(x+8)}{2x+3}$,

c) $\dfrac{6}{x-3} - \dfrac{9}{x-2} + \dfrac{4}{x-1} = \dfrac{1}{x-4}$, d) $\dfrac{19-5x}{4-2x} - \dfrac{20-14x}{6-3x} = 5$.

7.4. Der Begriff einer Ungleichung

Für Ungleichungen gelten ähnliche Festlegungen, wie sie für Gleichungen getroffen wurden.

Definition

Unter einer **Ungleichung** versteht man einen Ausdruck der Form

$$T_1 < T_2, \quad T_1 \leqq T_2, \quad T_1 > T_2 \quad \text{oder} \quad T_1 \geqq T_2,$$

in dem zwei Terme T_1 und T_2 durch eines der Zeichen $<$, $\leqq$, $>$ oder $\geqq$ verbunden sind.

Der Begriff „Ungleichung" ist ebenso von dem Begriff „Ungleichheit" zu unterscheiden, wie der Begriff „Gleichung" vom Begriff „Gleichheit".
Enthalten die beiden Terme T_1 und T_2 keine Variablen, so ist die Ungleichung bereits eine wahre oder eine falsche Aussage. Kommt in beiden Termen nur ein und dieselbe Veränderliche x vor, wie etwa bei

$$T_1(x) < T_2(x),$$

so spricht man von einer *Ungleichung mit einer Veränderlichen*. Zunächst soll nur von diesen Ungleichungen die Rede sein. Der Variablenbereich X darf nur Zahlen enthalten, für die sowohl $T_1(x)$ als auch $T_2(x)$ definiert ist. Jede Belegung der Variablen in der Ungleichung ergibt dann entweder eine wahre oder eine falsche Aussage.
Diejenigen Zahlen des Variablenbereiches X, für die die Ungleichung eine wahre Aussage liefert, heißen *Erfüllungen* oder *Lösungen* der Ungleichung im Bereich X. Ihre Gesamtheit stellt die *Erfüllungsmenge*, die *Lösungsmenge* oder den *Gültigkeitsbereich* E der Ungleichung bezüglich des Variablenbereiches X dar.

BEISPIEL

1. $x - 3 > 4, \qquad X = \{6, 7, 8, 9\}.$

Lösung: Bei der Belegung der Variablen x mit den Werten 6, 7, 8, 9 ergeben sich folgende Aussagen:

6	$3 > 4$,	falsch,
7	$4 > 4$,	falsch,
8	$5 > 4$,	wahr,
9	$6 > 4$,	wahr.

Folglich ist $\underline{\underline{E = \{8, 9\}}}$.

Auch bei Ungleichungen können bezüglich der Erfüllungsmenge die bei Gleichungen erwähnten Sonderfälle auftreten:

a) Die Erfüllungsmenge kann mit dem Variablenbereich übereinstimmen: $E = X$. Dann stellt die Ungleichung eine **Abschätzung** im Variablenbereich X dar.

b) Die Erfüllungsmenge kann die leere Menge sein: $E = \varnothing$. Dann sagt man, die Ungleichung sei im Variablenbereich X *unerfüllbar*.

BEISPIELE

2. $x \leqq |x|, \quad X = K.$
Hier ist $E = K = X$. Die Ungleichung ist eine Abschätzung im Körper der rationalen Zahlen.

3. $3x + 5 < -1, \quad X = \{-5, -4, -3\}.$
Auch diese Ungleichung stellt eine Abschätzung im Bereich X dar.

4. $x^6 < 0, \quad X = K.$
Da es keine rationale Zahl gibt, von der eine sechste Potenz einen negativen Wert besitzt, ist $E = \varnothing$. Die Ungleichung ist im Körper der rationalen Zahlen unerfüllbar.

Besonders häufig sind in der Mathematik einige einfache Ungleichungen, die, weil man ihnen ihre Gültigkeitsbereiche sofort ansieht, auch oft zur Beschreibung dieser Zahlenmengen dienen. Als Variablenbereich gilt dabei die Menge K, später auch jeder umfassendere Zahlenbereich:

1. $x > a$ $(x \geqq a)$: Menge aller Zahlen, die größer (nicht kleiner) als die Zahl a sind.

2. $x < a$ $(x \leqq a)$: Menge aller Zahlen, die kleiner (nicht größer) als die Zahl a sind.

3. $|x| < a$ $(|x| \leqq a)$: Menge aller Zahlen, deren Betrag kleiner (nicht größer) als die Zahl a ist, das ist die Menge aller Zahlen, die zwischen $-a$ und $+a$ liegen (einschließlich der Zahlen $-a$ und $+a$). Dabei ist a positiv vorauszusetzen. Die Ungleichung ist gleichwertig mit $-a < x < +a$ $(-a \leqq x \leqq +a)$.

4. $|x - s| < a$ $(|x - s| \leqq a)$: Menge aller Zahlen, die von der Zahl s weniger (nicht mehr) als a abweichen, das ist die Menge aller Zahlen, die zwischen $s - a$ und $s + a$ liegen (einschließlich der Zahlen $s - a$ und $s + a$). s ist der *Gültigkeitsmittelpunkt*, a der *Gültigkeitsradius* der Ungleichung (Bild 10). Dabei ist a positiv vorauszusetzen. Die Ungleichung ist gleichwertig mit $s - a < x < s + a$ $(s - a \leqq x \leqq s + a)$.

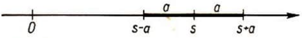


Bild 10

Zum Beispiel beschreibt $|x - 3| \leqq 0{,}1$ die Menge aller Zahlen, die nicht mehr als ein Zehntel von dem Wert 3 abweichen, das ist die Menge aller Zahlen, die zwischen 2,9 und 3,1 liegen einschließlich dieser beiden Zahlen. Die Ungleichung ist gleichwertig mit $2{,}9 \leqq x \leqq 3{,}1$.

Die genannten Ungleichungen werden oft als Voraussetzungen für Abschätzungen gegeben:

BEISPIEL

5. Die Summe

$$(3 - a)b + c$$

ist unter der Bedingung nach oben abzuschätzen, daß $|a| < 1$, $|b| < 0{,}5$ und $|c| < 2$ ist.

Lösung: Nach den in Abschnitt 5.2. dargelegten Regeln kann die Summe wie folgt abgeschätzt werden:

$$\begin{aligned}(3 - a)b + c &= 3b - ab + c \leqq |3b - ab + c| \leqq \\ &\leqq |3b| + |ab| + |c| = 3|b| + |a|\,|b| + |c|.\end{aligned}$$

Benutzt man nun die über a, b und c gemachten Voraussetzungen, so ergibt sich:

$$3|b| + |a|\,|b| + |c| < 3 \cdot 0{,}5 + 1 \cdot 0{,}5 + 2 = 4.$$

Die gesuchte Abschätzung lautet also:

$$\underline{\underline{(3 - a)b + c < 4.}}$$

AUFGABEN

106. Welche einstelligen Primzahlen unterscheiden sich von ihren Quadraten um mehr als 6?

107. Es sei A die Menge aller ganzen Zahlen z, die der Ungleichung $|z| < 5$ genügen, B die Menge aller ganzen Zahlen u, die der Ungleichung $|u - 3| \leqq 4$ genügen. Zu bestimmen sind folgende Zahlenmengen:

a) $A \cup B$, b) $A \cap B$, c) $A \setminus B$, d) $B \setminus A$.

108. Es ist nach oben abzuschätzen:

a) $n(1 - p)$ für $|n| \leqq 3$, $|p| < 0{,}05$.
b) $(3a - 10)(2b - 5)$ für $|a| < 3$, $|b| < 4$.

109. Der Bruch

$$\frac{1 + a}{1 - a}$$

ist unter der Bedingung nach oben abzuschätzen, daß $|a| \leqq 0{,}5$ ist.

Hinweis: Der Nenner ist beim Abschätzen zu verkleinern!

7.5. Gleichwertigkeit von Ungleichungen

Auch Erfüllungsmengen von Ungleichungen müssen oft bestimmt werden. Dabei ist man in der Regel nicht in der Lage, alle Werte des Variablenbereiches „durchzuprobieren“. Es besteht aber wiederum die Möglichkeit, die Ungleichung zielstrebig in einfachere Ungleichungen mit demselben Gültigkeitsbereich umzuformen, um schließlich bei einer die Erfüllungsmenge ablesen zu können. Ungleichungen heißen bezüglich des gegebenen Variablenbereiches *gleichwertig* oder *äquivalent*, wenn sie die gleiche Erfüllungsmenge bezüglich des Variablenbereiches besitzen. Für die Gleichwertigkeit von Ungleichungen gelten ähnliche Regeln wie für die von Gleichungen. Der Kürze halber wird dabei stellvertretend für die vier möglichen Formen einer Ungleichung, für die gleichlautende Aussagen gelten, immer nur die Grundform $T_1 < T_2$ geschrieben:

1. Addiert man auf beiden Seiten einer Ungleichung

$$T_1 < T_2$$

denselben, für alle in der Ungleichung zugelassenen Variablenwerte definierten Term T, so ist die neue Ungleichung

$$T_1 + T < T_2 + T$$

der ursprünglichen gleichwertig.

2. Multipliziert man beide Seiten einer Ungleichung

$$T_1 < T_2$$

mit demselben Term T, der bei allen in der Ungleichung zugelassenen Variablenbelegungen *positive* Werte besitzt, so ist die neue Ungleichung

$$T_1 \cdot T < T_2 \cdot T$$

der ursprünglichen gleichwertig.

Wie bei Gleichungen schließen auch diese beiden Regeln sinngemäß die Subtraktion und Division ein. Die in der zweiten Regel genannte Bedingung, daß der Faktor T für alle Variablenbelegungen größer als Null sein muß, ist deswegen erforderlich, weil das Monotoniegesetz der Multiplikation (vgl. 2.2.) nur bei positiven Faktoren gilt. Wird mit einem Term multipliziert, der für alle Variablenbelegungen negative Werte besitzt, so ist die Umkehrung der Ordnungsbeziehung (vgl. 4.2.) zu beachten. Mit Hilfe der Monotoniegesetze der Addition und der Multiplikation sind auch die Beweise der beiden Regeln zu erbringen.

BEISPIEL

Es ist der Gültigkeitsbereich der Ungleichung

$$\frac{1}{2x+1} < \frac{2}{x+5}$$

bezüglich der Menge aller positiven rationalen Zahlen zu bestimmen.

Lösung: Da innerhalb des gegebenen Variablenbereiches beide Nenner nur positive Werte annehmen, darf die Ungleichung mit dem Term $(2x + 1)(x + 5)$ multipliziert werden:

$$x + 5 < 4x + 2.$$

Subtrahiert man nun auf beiden Seiten der Ungleichung den Term $x + 2$, so erhält man

$$3 < 3x.$$

Schließlich liefert die Division durch den (für alle Variablenbelegungen positiven) Term 3

$$x > 1.$$

Demnach gehören alle rationalen Zahlen, die größer als 1 sind, zum Gültigkeitsbereich der Ungleichung.

Kontrolle: Um die Richtigkeit der Rechnung zu prüfen, wird die Variable in der gegebenen Ungleichung durch einige Werte belegt. Dabei müssen sich für größere Werte als 1 wahre, dagegen für alle anderen Werte falsche Aussagen ergeben.

$$x = \frac{1}{2}: \quad \frac{1}{2\cdot\frac{1}{2}+1} < \frac{2}{\frac{1}{2}+5}, \qquad \text{also } \frac{1}{2} < \frac{4}{11}: \text{ falsch;}$$

$$x = 1: \qquad \frac{1}{2 \cdot 1 + 1} < \frac{2}{1 + 5}, \qquad \text{also } \frac{1}{3} < \frac{1}{3}: \text{ falsch;}$$

$$x = \frac{3}{2}: \qquad \frac{1}{2 \cdot \frac{3}{2} + 1} < \frac{2}{\frac{3}{2} + 5}, \qquad \text{also } \frac{1}{4} < \frac{4}{13}: \text{ wahr.}$$

Ergebnis: Der Gültigkeitsbereich E der Ungleichung ist die Menge aller rationalen Zahlen, die größer als 1 sind.

AUFGABEN

110. Für Ungleichungen mit einer Variablen ist die zweite Regel über die Gleichwertigkeit zu beweisen.

111. Es sind die Gültigkeitsbereiche folgender Ungleichungen innerhalb des Bereiches der positiven rationalen Zahlen zu bestimmen:

a) $\frac{2}{3x + 1} < \frac{3}{5x + 1}$, b) $\frac{2}{5x + 12} < \frac{3}{9x + 10}$, c) $\frac{1}{1 + x} < \frac{1}{1 + 2x}$.

8. Der Körper der reellen Zahlen

8.1. Unvollkommenheit des Bereiches der rationalen Zahlen

Der Körper der rationalen Zahlen genügt bereits vielen Anforderungen der Praxis. Man kann in ihm alle vier Grundrechnungsarten mit der einzigen, aber unvermeidlichen Ausnahme der Division durch Null unbeschränkt ausführen. Dabei wird die Zahlengerade durch die Bilder der rationalen Zahlen überall dicht besetzt. Das heißt: Sind g/h und k/l $(g, k \in G,\ h, l \in G \setminus \{0\})$ zwei verschiedene, noch so dicht nebeneinanderliegende rationale Zahlen, so gibt es doch eine dritte zwischen ihnen, etwa das arithmetische Mittel

$$\frac{\frac{g}{h} + \frac{k}{l}}{2} = \frac{gl + kh}{2hl}$$

(vgl. Aufgabe 98). Zwischen dem Mittel und g/h liegt abermals als Mittel eine vierte rationale Zahl und so weiter. Daher gibt es zwischen den Zahlen g/h und k/l nicht nur eine, sondern unendlich viele rationale Zahlen. Diesen Sachverhalt drückt man mit den Worten aus:

Die rationalen Zahlen liegen auf der Zahlengeraden *in sich dicht.*

Trotzdem gibt es auf der Zahlengeraden Punkte, die nicht Bilder rationaler Zahlen sind; und die Menge dieser „Lücken“ ist von höherer Mächtigkeit als die Menge der zu rationalen Zahlen gehörigen Punkte.

Eine solche Lücke läßt sich auffinden, indem man über der Einheitsstrecke der Zahlengeraden ein Quadrat konstruiert und dessen vom Nullpunkt ausgehende Diagonale mit dem Zirkel auf die Zahlengerade überträgt (Bild 11).

Der so gefundene Punkt der Zahlengeraden heiße P. Nach dem Lehrsatz des Pythagoras müßte P eine Zahl zugeordnet sein, deren Quadrat 2 ist. Aber es gibt keine solche rationale Zahl.

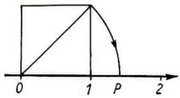


Bild 11

Dies läßt sich indirekt beweisen. (Beim indirekten Beweis nimmt man das Gegenteil der Behauptung als wahr an und leitet daraus eine sicher falsche Aussage ab. Da die Mathematik frei von Widersprüchen[1]) ist, gilt damit die Behauptung als bewiesen.) Es sei also g/h ($g, h \in G$, $h \neq 0$) eine rationale Zahl, deren Quadrat 2 ist. Man darf voraussetzen, daß der Bruch nicht weiter kürzbar ist. Die Annahme bedeutet:

$$\left(\frac{g}{h}\right)^2 = 2, \quad \text{oder} \quad \frac{g^2}{h^2} = 2.$$

Durch Multiplikation mit h^2 ergibt sich:

$$g^2 = 2h^2.$$

Demnach muß g^2 eine gerade Zahl sein. Das ist aber nur möglich, wenn g gerade ist. Wenn aber g den Faktor 2 enthält, muß g^2 den Faktor 4 enthalten. Zwangsläufig ist dann die rechte Seite ebenfalls durch 4 teilbar. Ein Faktor 2 steht vor h^2, der andere muß in h^2 enthalten sein: h^2 muß gerade sein. Das ist aber wiederum nur dann möglich, wenn h schon gerade ist.

Also müssen g und h beide gerade sein. Dies ist jedoch ein Widerspruch zu der Voraussetzung, g/h sei nicht weiter kürzbar. Damit folgte aus der Annahme, das Quadrat einer rationalen Zahl sei 2, ein Widerspruch, und der indirekte Beweis, daß es keine solche rationale Zahl gibt, ist geführt.

Somit ist es mit rationalen Zahlen nicht einmal möglich, die Quadratdiagonale des Einheitsquadrates exakt auszumessen.

Nun ist aber nicht nur dem Punkt P keine rationale Zahl zugeordnet, sondern auch jedem anderen Punkt, den man erreicht, wenn man von dieser Lücke aus in positiver Richtung eine rationale Zahl r abträgt (Bild 12). Gelangte man dabei an den Bildpunkt einer rationalen Zahl r', so wäre P Bild der Zahl $r' - r$, die als Differenz zweier rationaler Zahlen wieder eine rationale Zahl wäre.

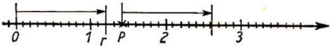


Bild 12

Da für r jede beliebige rationale Zahl benutzt werden darf, ist die Menge der Lücken von nicht geringerer Mächtigkeit als die Menge der zu den rationalen Zahlen ge-

[1]) Gemeint sind hier kontradiktorische Widersprüche. Ein kontradiktorischer Widerspruch besteht darin, daß eine Aussage zugleich wahr und falsch sei. Kontradiktorische Widersprüche sind von dialektischen Widersprüchen zu unterscheiden. Dialektische Widersprüche finden sich überall

hörigen Punkte. Daß sie tatsächlich von höherer Mächtigkeit ist, soll hier nicht bewiesen werden. Es sei nur an Zahlen wie π erinnert, die ebenfalls nicht rational sind, und deren Bildpunkte auf der Zahlengeraden nicht einmal mit Zirkel und Lineal konstruiert werden können.

AUFGABEN

112. Liegt die Menge $K \setminus G$ auf der Zahlengeraden in sich dicht?
113. Es ist zu beweisen, daß es keine rationale Zahl gibt, deren Quadrat 13 ist.

8.2. Der Bereich der reellen Zahlen

Es erhebt sich nun die Frage, ob und — wenn ja — welche Zahlen den Lücken auf der Zahlengeraden zugeordnet werden können.
Bei der Lösung dieses Problems macht man sich zunutze, daß die rationalen Zahlen auf der Zahlengeraden in sich dicht liegen. Gibt es keine rationale Zahl, die dem Punkt P (siehe oben) zugeordnet ist, so können doch rationale Zahlen benannt werden, deren Bilder P mit jeder gewünschten Genauigkeit ersetzen. Am bequemsten sind für diesen Zweck Dezimalbrüche, das heißt Brüche ganzer Zahlen, deren Nenner Zehnerpotenzen sind und die in Dezimalschreibweise dargestellt werden können:

	Näherung		maximale Abweichung
1.	1,4	= 14/10	0,1
2.	1,41	= 141/100	0,01
3.	1,414	= 1414/1000	0,001
4.	1,4142	= 14142/10000	0,0001
5.	1,41421	= 141421/100000	0,00001

. . . .

Jede Näherung hat eine Dezimalstelle mehr als die vorangegangene und erreicht damit ungefähr zehnfache Genauigkeit.
Die Näherungen werden auf folgende Weise bestimmt: Man unterteilt die Zahlengerade in Zehntel und liest die letzte Teilstelle vor P auf der Seite des Nullpunktes ab. Die gefundene rationale Zahl stellt P bis auf Zehntel dar. Dann unterteilt man die Zahlengerade in Hundertstel und liest die letzte Teilstelle vor P auf der Seite des Nullpunktes ab. Die gefundene Dezimalzahl stellt P bis auf Hundertstel dar. So kann beliebig weit fortgefahren werden.

Denkt man sich das Verfahren jedoch ohne Ende fortgesetzt, so gelangt man zu einem *unendlichen Dezimalbruch*: 1,4142136 ... Der Näherungsfehler ist dabei auf Null zusammengeschrumpft.

Da das Verfahren auf jede Stelle der Zahlengeraden anwendbar ist, können allen ihren Punkten — auch den durch rationale Zahlen belegten — solche unendlichen Dezimalbrüche zugeordnet werden.
In der Menge der unendlichen Dezimalbrüche ist für diejenigen, die keine rationalen Zahlen darstellen, charakteristisch, daß sie nicht periodisch sind.
Denn jeder periodische unendliche Dezimalbruch stellt eine rationale Zahl dar. Als Beispiel sei der Dezimalbruch

$$x = 1{,}357\overline{507}\ldots$$

angeführt. Multiplikation mit 1000 liefert:

$$1000x = 1357{,}507\overline{507}\,\ldots.$$

Durch Subtraktion der oberen Gleichung von der unteren ergibt sich

$$999x = 1356{,}15 = \frac{135615}{100},$$

also

$$x = \frac{135615}{99900}.\quad \text{Folglich ist } x \text{ eine rationale Zahl.}$$

Umgekehrt ist bekannt, daß jede rationale Zahl einen periodischen unendlichen Dezimalbruch liefert. Denn bei der Division durch eine ganze Zahl kann nur eine endliche Anzahl von Resten vorkommen. Falls der Rest 0 nicht auftritt und dann 0 die Periode bildet ($1/5 = 0{,}20\overline{0}\,\ldots$), müssen sich bei der Division ohne Ende die Reste in einer bestimmten Reihenfolge wiederholen.

In der Menge R der unendlichen Dezimalbrüche sind die vier Grundrechnungsarten mit der einzigen Ausnahme der Division durch Null in bekannter Weise unbeschränkt ausführbar und genügen den in 2.2. genannten Grundgesetzen. Daher ist es sinnvoll, unendliche Dezimalbrüche als Zahlen aufzufassen. Man nennt sie **reelle Zahlen**. Nach dem Vorangegangenen kann dann gesagt werden:

Satz

Die Menge R der reellen Zahlen bildet einen Zahlenkörper. Dieser enthält den Körper der rationalen Zahlen. Seine Elemente entsprechen eineindeutig den Punkten der Zahlengeraden.

Die nicht rationalen reellen Zahlen werden als **irrationale Zahlen** bezeichnet. Als Folgerung des Satzes ergibt sich: *Die Menge R der reellen Zahlen ist der Menge der Punkte auf einer Geraden gleichmächtig.*

Auch im Bereich der rellen Zahlen wird durch die Zahlengerade die Ordnung gegeben: Wie bisher gilt $a < b$, wenn der zur Zahl a gehörige Punkt der Zahlengeraden von dem zu b gehörigen aus gesehen in negativer Richtung liegt.

Man könnte meinen, der Begriff der reellen Zahl sei recht unbefriedigend, weil sich von nichtperiodischen unendlichen Dezimalbrüchen stets nur wenige Dezimalen angeben lassen und die meisten — das sind die unendlich vielen weiteren — unbekannt bleiben. Aber dieser Umstand wirkt sich kaum nachteilig aus. Bei jeder praktischen Rechnung wird das Ergebnis nur mit einer bestimmten Genauigkeit gebraucht. Um diese zu erzielen, genügt immer eine angemessene Anzahl von Stellen der in der Rechnung beteiligten irrationalen Zahlen. Mit irrationalen Zahlen wird also in der Praxis nur näherungsweise gerechnet.

AUFGABEN

114. Folgende periodische Dezimalbrüche sind als Brüche ganzer Zahlen darzustellen:

 a) $0{,}04\overline{4}\,\ldots$, b) $5{,}\overline{713}\,\ldots$, c) $2{,}\overline{314572}\,\ldots$.

115. Wieviel größer ist der unendliche Dezimalbruch $1{,}000\,\ldots$ als $0{,}999\,\ldots$?

116. Nach HERON kann man eine Zahl, deren Quadrat die positive Zahl b ist, finden, indem man nacheinander folgende Werte bildet: einen Schätzwert a_0; $a_1 = b/a_0$; $a_2 = (a_0 + a_1)/2$; $a_3 = b/a_2$; $a_4 = (a_2 + a_3)/2$; $a_5 = b/a_4$; ....
Dieses Verfahren ist für folgende Werte von b bis zur Sicherheit der dritten Stelle nach dem Komma durchzuführen:

a) 2, b) 3, c) 17, d) 1,372.

8.3. Grenzwertbegriff

Bei der schrittweisen Annäherung einer irrationalen Zahl durch rationale Zahlen, etwa durch Dezimalbrüche, bildet man nach einer bestimmten Vorschrift nacheinander Zahlen. Eine so gewonnene Zahlenmenge heißt eine Zahlenfolge.

Definition

Ist eine eindeutige Vorschrift gegeben, nach der man eine erste Zahl a_1, eine zweite Zahl a_2 und nach jeder gewonnenen eine folgende bilden kann, so nennt man die Menge dieser Zahlen

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$$

in dieser Anordnung eine **Zahlenfolge**. Die Zahlen werden *Glieder* der Folge genannt.

BEISPIELE

1. 1; 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; 1,41421; ....
Vorschrift: Annäherung der zum Punkt P (siehe oben) gehörigen irrationalen Zahl d durch endliche Dezimalbrüche. Bei jeder folgenden Zahl wird eine Stelle des unendlichen Dezimalbruches hinzugenommen.
2. 1, 2, 3, 4, ...
Vorschrift: Aufzählen der natürlichen Zahlen ohne die Null.
3. 8, 4, 2, 1, 1/2, 1/4, ...
Vorschrift: Die erste Zahl heißt 8. Jede weitere entsteht aus der vorangegangenen durch Division durch 2.
4. 1, −1, 1, −1, 1, ...
Vorschrift: Abwechselndes Aneinanderreihen von 1 und −1.

Die Glieder einer Folge müssen nicht einem bestimmten Wert immer näher kommen. Im Beispiel 1 kommen die Glieder der Folge dem Wert d, dessen Quadrat 2 ist (siehe oben), beliebig nahe; in Beispiel 3 streben die Glieder der Folge dem Wert 0 zu. Aber in den Beispielen 2 und 4 ist keine solche Annäherung der Glieder an einen bestimmten Wert festzustellen. Dieses Hinstreben nach einem bestimmten Wert ist demnach eine hervorhebenswerte Eigenschaft einer Zahlenfolge. Sie wird durch den Begriff der **Konvergenz** ausgedrückt. Die Zahl, nach der die Glieder hinstreben, wird **Limes**, zu deutsch **Grenzwert**, genannt.
Bei der scharfen Fassung dieser Begriffe wird der Ausdruck *fast alle* verwendet. „Fast alle“, bezogen auf die Elemente einer unendlichen Menge, soll bedeuten: alle bis auf endlich viele. Zum Beispiel sind in diesem Sinne fast alle natürlichen Zahlen größer als eine Million.

Von der Zahlenfolge des Beispiels 1 kann man sagen: Fast alle Glieder unterscheiden sich von dem Wert d betragsmäßig um weniger als 10^{-5}, stellen also d mit einer Genauigkeit von mindestens 10^{-5} dar. Nur die ersten 5 Glieder sind auszunehmen. Offenbar läßt sich dieser Sachverhalt für jede beliebige Genauigkeit feststellen: Fast alle Glieder der Zahlenfolge 1 nähern den Wert d mit der Genauigkeit 10^{-n} $(n \in N)$ an.
Für die Folge 3 treffen ganz analoge Aussagen zu. Wird irgendeine Genauigkeit gefordert, so nähern doch fast alle Glieder der Folge 3 den Wert Null mit dieser Genauigkeit an. Dieses Verhalten wird zur Definition des Konvergenzbegriffes benutzt:

Definition

Man sagt, die Zahlenfolge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ *konvergiert* gegen den Limes a (strebt gegen den Grenzwert a), wenn nach Wahl einer beliebigen Genauigkeit fast alle Glieder die Zahl a mit dieser Genauigkeit darstellen.

Die Folge 1; 1,4; 1,41; 1,414; ... konvergiert demnach gegen den Limes d. Ebenso strebt die Folge 8, 4, 2, 1, 1/2, ... gegen den Grenzwert 0. Die Folgen der Beispiele 2 und 4 dagegen konvergieren nicht. Man sagt dafür: sie divergieren. *Divergenz* ist das Gegenteil von Konvergenz.
Betrachtet man die Grenzwertbildung als neue Rechenoperation, so kann man beweisen — der Beweis wird hier nicht geführt —, daß der Körper der reellen Zahlen in folgendem Sinn gegenüber dieser Rechenoperation abgeschlossen ist (das heißt keiner Erweiterung mehr bedarf):

Konvergiert eine Folge reeller Zahlen gegen eine Zahl a, so ist auch a eine reelle Zahl.

Von praktischem Wert ist die Folgerung:
Hat man im Bereich der reellen Zahlen ein Näherungsverfahren, von dem man weiß, die Näherungswerte streben einem Grenzwert zu, so ist dieser Grenzwert bereits im Bereich der reellen Zahlen zu finden.

AUFGABEN

117. Was kann über die Folge $a_1 - a, a_2 - a, a_3 - a, \ldots$ ausgesagt werden, wenn die Folge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ gegen a konvergiert?

118. Welche der nachstehenden Folgen konvergieren und welche Grenzwerte haben diese:

a) $1;\ 0;\ -\frac{1}{2};\ 0;\ \frac{1}{3};\ 0;\ -\frac{1}{4};\ 0;\ \frac{1}{5};\ 0;\ \ldots,$

b) 1,00; 0,99; 1,00; 0,99; 1,00; 0,99; ...,

c) $\frac{1}{4};\ \frac{2}{5};\ \frac{1}{2}\left(=\frac{3}{6}\right);\ \frac{4}{7};\ \frac{5}{8};\ \frac{2}{3};\ \frac{7}{10};\ \ldots$?

8.4. Intervalle

Als Grund für die Abgeschlossenheit des Bereiches der reellen Zahlen gegenüber der Grenzwertbildung kann die kontinuierliche Belegung der Zahlengeraden mit Zahlen

betrachtet werden. Aus dem gleichen Grund ist der Bereich der reellen Zahlen auch bezüglich der Ordnung abgeschlossen. Es können nämlich keine neuen Zahlen hinzukommen, die zusammen mit den reellen Zahlen der alten Ordnungsrelation „kleiner als" genügen. Daher ist es sinnvoll, für die nicht weiter zu vervollständigende Menge aller Zahlen auf einem Abschnitt der Zahlengeraden Bezeichnungen einzuführen.
Für die Menge aller reellen Zahlen, die einem bestimmten Abschnitt der Zahlengeraden entspricht, gebraucht man den Namen **Intervall** und bezeichnet sie gewöhnlich mit J. Handelt es sich um einen endlichen Abschnitt, so kann er durch die Angabe der beiden Randpunkte beschrieben werden. Je nachdem, ob diese zum Intervall gerechnet werden sollen oder nicht, spricht man von *abgeschlossenen* oder *offenen* Intervallen. Bei der Darstellung dieser Zahlenmengen durch Zeichen wird die Eigenschaft „offen" durch eine runde, die Eigenschaft „abgeschlossen" durch eine eckige Klammer wiedergegeben. Von den Zahlen a und b $(a \leqq b)$ können dann folgende Intervalle eingeschlossen werden:

a) $J_1 = (a;\ b)$, Gültigkeitsbereich der Ungleichung $a < x < b$, beiderseits offenes Intervall von a bis b, $a \notin J_1$, $b \notin J_1$.

b) $J_2 = [a;\ b]$, Gültigkeitsbereich der Ungleichung $a \leqq x \leqq b$, beiderseits abgeschlossenes Intervall von a bis b, $a \in J_2$, $b \in J_2$.

c) $J_3 = (a;\ b]$, Gültigkeitsbereich der Ungleichung $a < x \leqq b$, unten offenes, oben abgeschlossenes Intervall von a bis b, $a \notin J_3$, $b \in J_3$.

d) $J_4 = [a;\ b)$, Gültigkeitsbereich der Ungleichung $a \leqq x < b$, unten abgeschlossenes, oben offenes Intervall von a bis b, $a \in J_4$, $b \notin J_4$ (Bild 13).

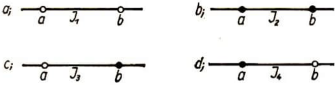


Bild 13

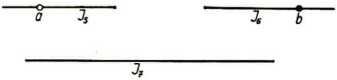


Bild 14

Entspricht das Intervall dagegen einem unendlichen Abschnitt der Zahlengeraden, so tritt das Zeichen ∞ an die Stelle der nicht mehr vorhandenen oberen, das Zeichen $-\infty$ an die Stelle der nicht mehr vorhandenen unteren Begrenzung. In diesen Richtungen ist das Intervall stets offen; denn ∞ und $-\infty$ sind keine Zahlen. Zum Beispiel ist das Intervall

$J_5 = (a;\ \infty)$ der Gültigkeitsbereich der Ungleichung $a < x$,

$J_6 = (-\infty;\ b]$ der Gültigkeitsbereich der Ungleichung $x \leqq b$,

$J_7 = (-\infty;\ \infty) = R$ die Menge aller reellen Zahlen (Bild 14).

AUFGABEN

119. Mit den Intervallen $A = (-1;\ 1)$ und $B = [0;\ 2]$ ist zu bilden:
    a) $A \cup B$; b) $A \cap B$, c) $A \setminus B$.

120. Mit den Intervallen $A = (-1;\ 1)$, $B = (0;\ 2)$ und $C = (-2;\ 0)$ ist zu bilden
    a) $(A \setminus C) \setminus B$, b) $A \setminus (B \cup C)$, c) $(A \cap C) \cup B$, d) $(B \setminus A) \cap C$.

121. Wie Dezimalbrüche, zum Beispiel

$$1{,}327 = 1 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2} + 7 \cdot 10^{-3},$$

können auch Dualbrüche gebildet werden:

$$\text{L,LL0L} = 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + 0 \cdot 2^{-3} + 1 \cdot 2^{-4} \left(= \frac{29}{16}\right).$$

Welche Werte haben folgende Dualbrüche:

a) L,L0L, b) 0,0LL, c) LL,00L, d) L,000L?

122. Folgende Brüche sind durch Dualbrüche darzustellen:

a) $^1/_{16}$, b) $^3/_4$, c) $^{23}/_8$, d) $^{17}/_{32}$.

123. Mit Hilfe des üblichen Divisionsverfahrens sind die unendlichen Dualbrüche zu folgenden Zahlen zu bestimmen:

a) $^1/_3$, b) $^4/_5$, c) $^{10}/_7$, d) $^{11}/_9$.

124. Welche Werte besitzen folgende unendlichen periodischen Dualbrüche:

a) $0{,}\overline{\text{L00}}\ldots$, b) $0{,}\overline{\text{L000}}\ldots$, c) $\text{L0},\overline{\text{LLL0}}\ldots$, d) $0{,}\text{L}\overline{\text{L}}\ldots$?

125. Welches sind die ersten vier Ziffern des unendlichen Dualbruches, dessen Quadrat L0 (= 2) ist?

126. Nach den Regeln über Eulersche Symbole ist

$$\binom{1{,}41421\ldots}{3}$$

auf Rechenstabgenauigkeit zu bestimmen.

9. Potenzen, Logarithmen

9.1. Potenzen mit rationalen Exponenten

Die einfachsten Potenzen sind solche mit natürlichen Zahlen als Exponenten. Sie sind als Abkürzungen für Produkte aus gleichen Faktoren bereits in Abschnitt 2.2. definiert worden. Die erste Erweiterung dieses Potenzbegriffes besteht in der Definition von *Potenzen mit negativen ganzen Exponenten*, bei denen wegen der Ausführbarkeit der Division die Basis verschieden von Null vorausgesetzt werden muß.

Definition

Ist a verschieden von Null und $-n$ eine negative ganze Zahl, so versteht man unter der Potenz a^{-n} den Wert $1/a^n$:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (a \neq 0,\ n \in N \setminus \{0\}).$$

Bei *Potenzen mit gebrochenen Exponenten* muß im Interesse der Ausführbarkeit die Basis sogar positiv vorausgesetzt werden:

Definition

Ist a eine positive reelle Zahl und g/n $(g \in G,\ n \in N \setminus \{0\})$ eine beliebige rationale Zahl, so versteht man unter $a^{g/n}$ die positive Zahl, deren n-te Potenz a^g ist.

Statt $a^{1/n}$ darf auch $\sqrt[n]{a}$ geschrieben werden. Dieser Ausdruck wird n-te *Wurzel* aus a genannt. Dabei heißen: n — *Wurzelexponent*, a — *Radikand* und $\sqrt[n]{a}$ — *Wurzelwert*. Für die Multiplikation, die Division und das Potenzieren der Potenzen gelten die folgenden

Potenzgesetze

1. Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, indem man ihre Exponenten addiert und die Basis beibehält:

$$a^s \cdot a^t = a^{s+t}.$$

2. Potenzen mit gleicher Basis werden dividiert, indem man ihre Exponenten subtrahiert und die Basis beibehält:

$$a^s : a^t = a^{s-t}.$$

3. Potenzen mit gleichen Exponenten werden multipliziert, indem man ihre Basen multipliziert und das Produkt mit dem gleichen Exponenten potenziert. Oder: Ein Produkt wird potenziert, indem man jeden Faktor einzeln potenziert:

$$a^s \cdot b^s = (a \cdot b)^s.$$

4. Potenzen mit gleichen Exponenten werden dividiert, indem man ihre Basen dividiert und den Quotienten mit dem gleichen Exponenten potenziert. Oder: Ein Bruch wird potenziert, indem man Zähler und Nenner einzeln potenziert:

$$\frac{a^s}{b^s} = \left(\frac{a}{b}\right)^s.$$

5. Eine Potenz wird potenziert, indem man die Exponenten multipliziert und die Basis der Potenz beibehält:

$$(a^s)^t = a^{t \cdot s}.$$

Diese Gesetze können der Reihe nach für die verschiedenen Exponentenbereiche bewiesen werden. Als Beispiel sei nur der Beweis des dritten Gesetzes erbracht:

$$a^s \cdot b^s = (a \cdot b)^s.$$

a) Ist $s = n$ eine natürliche Zahl, so behauptet das Gesetz auf Grund der Potenzdefinition (vgl. 2.2.)

$$\underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n \text{ Faktoren}} \cdot \underbrace{(b \cdot b \cdot \ldots \cdot b)}_{n \text{ Faktoren}} = \underbrace{(a \cdot b)\,(a \cdot b) \cdot \ldots \cdot (a \cdot b)}_{n \text{ Faktoren}}.$$

Wegen des Kommutations- und des Assoziationsgesetzes können aber die Faktoren links zu den Paaren rechts umgeordnet und zusammengefaßt werden.

b) Ist $s = -n$ eine negative ganze Zahl, so besagt die zu beweisende Formel

$$\frac{1}{a^n} \cdot \frac{1}{b^n} = \frac{1}{(ab)^n}.$$

Zum Beweis werden auf der linken Seite die beiden Brüche nach der Multiplikationsregel (vgl. 6.2.) vereint, und für $a^n \cdot b^n$ wird nach a) — der Exponent ist hier eine natürliche Zahl — $(a \cdot b)^n$ geschrieben.

c) Ist $s = g/n$ $(g \in G, \quad n \in N \setminus \{0\})$ eine rationale Zahl, so heißt die Behauptung

$$a^{g/n} \cdot b^{g/n} = (a \cdot b)^{g/n}.$$

$(a \cdot b)^{g/n}$ ist nach Definition die positive Zahl, deren n-te Potenz $(a \cdot b)^g$ ist, und durch diese Eigenschaft eindeutig definiert. Dieselbe Eigenschaft besitzt aber auch das Produkt auf der linken Seite der Gleichung: Beide Faktoren sind auf Grund der Definition positiv, und wegen des in a) und b) Bewiesenen gilt:

$$(a^{g/n} \cdot b^{g/n})^n = (a^{g/n})^n \cdot (b^{g/n})^n = a^g \cdot b^g = (a \cdot b)^g.$$

Also stimmen in der Behauptung beide Seiten überein.

Die Potenzgesetze 3, 4 und 5 werden auch als *Wurzelgesetze* formuliert:

3a. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}.$

4a. $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a : b}.$

5a. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}.$

AUFGABEN

127. Wodurch kommt ein negativer Potenzwert zustande?

128. Für den Variablenbereich $X = \{-^3/_2; -1; -^1/_2; 0; ^1/_2; 1; ^3/_2; 2\}$ sind Wertetabellen folgender Terme aufzustellen (Genauigkeit bis zur zweiten Stelle hinter dem Komma):
a) 2^x, b) 3^x, c) 4^x.

129. Es ist das vierte Potenzgesetz für rationale Exponenten zu beweisen.

130. Es ist das fünfte Potenzgesetz für Potenzen mit rationalen Exponenten zu beweisen.

131. Zu beweisen ist: Das arithmetische Mittel zweier positiver reeller Zahlen ist nie kleiner als das geometrische:

$$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{a \cdot b} \quad (a > 0, b > 0).$$

132. Durch vollständige Induktion ist zu beweisen: Für einen bestimmten von Null verschiedenen natürlichen Exponenten n und nicht negative Basen a und b ist der Potenzwert um so größer, je größer die Basis ist, und umgekehrt:

$$a < b \iff a^n < b^n.$$

133. Aus dem in Aufgabe 132 bewiesenen Satz ist mit Hilfe der BERNOULLIschen Ungleichung zu folgern:

$$\sqrt[n]{1+z} < 1 + \frac{z}{n} \quad (z \in R, \quad z > 0, \quad n \in N \setminus \{0, 1\}).$$

9.2. Potenzen mit beliebigen reellen Exponenten

Was unter einer Potenz mit irrationalen Exponenten zu verstehen ist, soll zunächst am Beispiel der Potenz $3^{\sqrt{2}}$ erläutert werden.
Der Wert $\sqrt{2}$ kann durch die Dezimalbruchfolge

$$1;\ 1{,}4;\ 1{,}41;\ 1{,}414;\ 1{,}4142;\ \ldots$$

beliebig angenähert werden. Die den Gliedern dieser Folge entsprechenden Potenzen von 3 lassen sich als Potenzen mit rationalen Exponenten bilden:

$$\begin{aligned}
3^1 &= 3 \\
3^{1,4} &= 3^{14/10}, \\
3^{1,41} &= 3^{141/100}, \\
3^{1,414} &= 3^{1414/1000}, \\
3^{1,4142} &= 3^{14142/10000}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

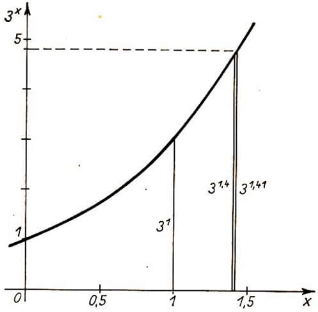


Bild 15

Der Anfang dieser Folge ist in Bild 15 dargestellt, das die zu rationalen Exponenten x gehörigen Potenzwerte 3^x im Diagramm zeigt. Nach diesem Bild besteht Grund zu der Annahme, daß die Potenzwertfolge einem bestimmten Grenzwert zustrebt. In der Tat läßt sich die Konvergenz mit Mitteln, die hier nicht zur Verfügung stehen, beweisen. Sinnvollerweise wird $3^{\sqrt{2}}$ als dieser Grenzwert definiert.
Da jede irrationale Zahl als unendlicher Dezimalbruch durch eine zu ihr gehörige Folge von endlichen Dezimalbrüchen angenähert werden kann und die Konvergenz der entstehenden Folge von Potenzwerten beweisbar ist, kann das für $3^{\sqrt{2}}$ beschriebene Verfahren allgemein angewendet werden. Daher wird für Potenzen mit irrationalen Exponenten gemeinhin die folgende Definition gegeben.

Definition

Ist s eine beliebige reelle Zahl, $r_1, r_2, r_3, \ldots$ eine konvergente Folge rationaler Zahlen mit dem Grenzwert s und a eine beliebige positive reelle Zahl, so versteht man unter a^s den Grenzwert der Folge

$$a^{r_1}, a^{r_2}, a^{r_3}, \ldots .$$

Auf diese Weise sind nunmehr zu allen reellen Exponenten einer positiven Basis Potenzwerte erklärt. Man kann somit die in Bild 15 dargestellte Kurve zum Diagramm aller zu reellen Exponenten x gehörigen Potenzwerte 3^x erweitern. Das Auge nimmt bei dieser Erweiterung freilich nichts wahr, weil die zu rationalen Exponenten gehörigen Punkte der Kurve bereits in sich dicht lagen.[1])
Es läßt sich zeigen, daß auch die Potenzen mit beliebigen reellen Exponenten allen Potenzgesetzen gehorchen. Die Beweise dafür würden allerdings den Rahmen weit übersteigen.

AUFGABEN

134. Welchen Wert besitzt $1^{\sqrt{7}}$?

135. Zu vereinfachen ist:

a) $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$, b) $\dfrac{3^{\sqrt{12}} \cdot 3^{\sqrt{75}}}{3^{\sqrt{147}}}$, c) $\left(\sqrt{3}^{\sqrt{2}} \cdot \sqrt[3]{3}^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{6}}$, d) $\left(\sqrt[3]{7}^{\sqrt{12}} : \sqrt[3]{7}^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}}$.

9.3. Grundbegriffe der Logarithmenrechnung

Aus der in Bild 15 dargestellten Kurve ist ersichtlich, daß es genau einen Exponenten x gibt, der an die Basis 3 geschrieben einen geforderten Potenzwert liefert. Dies gilt auch für alle anderen positiven Basen, die von 1 verschieden sind. Daraus ergibt sich die Definition des Logarithmenbegriffes:

Definition

Sind $a \neq 1$ und u beliebige positive reelle Zahlen, so versteht man unter dem **Logarithmus** von u zur Basis a, in Zeichen $\log_a u$, die Zahl s, die als Exponent an die Basis a gesetzt den Potenzwert u ergibt:

$$s = \log_a u \quad \Leftrightarrow \quad a^s = u \quad (a, u \in R;\, a, u > 0;\, a \neq 1).$$

Der Wert a heißt dabei *Logarithmenbasis* und u *Numerus* oder Logarithmand.

Aus der Definition folgen unmittelbar die Beziehungen

$$a^{\log_a u} = u \quad \text{und} \quad \log_a a^s = s.$$

---

[1]) Die zeichnerische Wiedergabe eines Punktes nimmt in jedem Fall eine bestimmte Fläche ein. Die Wiedergabe aller zu rationalen Zahlen gehörigen Punkte überdeckt daher bereits die ganze Zahlengerade. Werden die zu irrationalen Zahlen gehörigen Punkte hinzugenommen, so ist dies für das Auge unbemerkbar. Genauso verhält es sich mit den Punkten auf der Kurve

Für das Rechnen mit Logarithmen gelten folgende Gesetze, die sich aus den Potenzgesetzen 1, 2 und 5 herleiten:

Logarithmengesetze

1. Der Logarithmus eines Produktes ist gleich der Summe der Logarithmen der Faktoren:

$$\log_a (u \cdot v) = \log_a u + \log_a v .$$

2. Der Logarithmus eines Quotienten ist gleich der Differenz aus dem Logarithmus des Dividenden und dem Logarithmus des Divisors:

$$\log_a (u : v) = \log_a u - \log_a v .$$

3. Der Logarithmus einer Potenz ist gleich dem Produkt aus dem Exponenten und dem Logarithmus der Basis:

$$\log_a u^s = s \cdot \log_a u .$$

Folgerung für $s = 1/n \quad (n \in N \setminus \{0\})$:

Der Logarithmus einer Wurzel ist gleich dem Quotienten aus dem Logarithmus des Radikanden und dem Wurzelexponenten:

$$\log_a \sqrt[n]{u} = \frac{\log_a u}{n} .$$

Wie diese Gesetze zu beweisen sind, wird am Beispiel des ersten gezeigt:

$$\log_a (u \cdot v) = \log_a u + \log_a v \quad (a, u, v \in R;\ a, u, v > 0;\ a \neq 1)$$

Beweis: Es sei

$$\log_a u = r \quad \text{und} \quad \log_a v = t .$$

Das bedeutet:

$$a^r = u \quad \text{und} \quad a^t = v .$$

Durch Multiplikation dieser beiden Gleichungen erhält man

$$a^r \cdot a^t = u \cdot v$$

und nach dem ersten Potenzgesetz

$$a^{r+t} = u \cdot v .$$

Diese Gleichung aber lautet in Logarithmenschreibweise:

$$r + t = \log_a (u \cdot v).$$

Besinnt man sich auf die Bedeutung von r und t, so ist der Beweis vollendet.

Die Verabredung, alle positiven reellen Zahlen durch ihre Logarithmen zu einer bestimmten, festgehaltenen Basis darzustellen, nennt man ein **Logarithmensystem**. Demnach gibt es so viele Logarithmensysteme, wie Logarithmenbasen möglich sind. In der Praxis aber spielen vor allem zwei eine Rolle.

a) Das System der *dekadischen* (oder auch BRIGGSschen[1]) *Logarithmen* mit der Basis 10. Dieses Logarithmensystem entspricht am besten den Bedürfnissen des praktischen Rechnens, da es dem Dezimalsystem angepaßt ist. Der Kürze wegen wird für $\log_{10} u$ einfach $\lg u$ geschrieben. Der Zerlegung jeder positiven reellen Zahl in ein Produkt aus einer Zehnerpotenz und einer Zahl zwischen 1 und 10 entspricht die Zerlegung ihres dekadischen Logarithmus in eine Summe aus einer ganzen Zahl, der *Kennziffer*, und einem positiven echten Dezimalbruch, der *Mantisse*:

$$\lg 3060 = \lg (10^3 \cdot 3{,}060) = 3 + 0{,}4657 \ldots = 3{,}4657 \ldots$$

Da die Kennziffern als Exponenten der Stellenwerte der ersten geltenden Ziffern mit Leichtigkeit zu bestimmen sind, brauchen nur die Mantissen tabelliert zu werden. Die Tafeln der dekadischen Logarithmen sind daher stets Mantissentafeln.

b) Das System der *natürlichen* (oder auch NAPIERschen[2]) *Logarithmen* mit der im folgenden zu erklärenden Basis $\mathrm{e} = 2{,}71828 \ldots$

Diese Logarithmen erweisen sich in der höheren Mathematik als sehr vorteilhaft. Mit ihnen gestalten sich viele Formeln einfacher als mit allen anderen Logarithmensystemen.

Für natürliche Logarithmen wird statt $\log_{\mathrm{e}} u$ die Abkürzung $\ln u$ verwendet.

Beim Wechsel der Logarithmenbasis können die Logarithmen überraschend einfach umgerechnet werden.

Um eine Beziehung zwischen den Logarithmen des gleichen Numerus zu zwei verschiedenen Basen a und b abzuleiten, logarithmiert man die Definitionsgleichung

$$u = a^{\log_a u} \; (a, u \in R;\, a, u > 0;\, a \neq 1)$$

zur Basis b $(b \in R;\, b > 0,\, b \neq 1)$:

$$\log_b u = \log_b (a^{\log_a u}).$$

Nach dem Gesetz über den Logarithmus einer Potenz kann die rechte Seite umgeformt werden:

$$\log_b u = \log_a u \cdot \log_b a\,.$$

Diese Formel gestattet, den Logarithmus von u zur Basis a in den Logarithmus von u zur Basis b umzurechnen. Der Logarithmus $\log_b a$ hängt nur von beiden gegebenen Logarithmenbasen a und b ab und spielt bei der Umrechnung des Logarithmus zur Basis a in den zur Basis b die Rolle eines Proportionalitätsfaktors.

---

[1]) Die zuerst von dem Engländer BRIGGS (1556 bis 1630) berechneten Logarithmen zur Basis 10 erschienen 1617

[2]) Die erste Logarithmentafel dieser Art wurde von dem englischen Mathematiker JOHN NEPER (oder NAPIER) (1550 bis 1617) 1614 in Edinburg herausgegeben

Satz

Die Logarithmen zweier verschiedener Logarithmensysteme sind einander proportional:

$$\boxed{\log_b u = \log_b a \cdot \log_a u} \tag{8}$$

$\log_b a$ wird *Umrechnungsmodul* der beiden Systeme genannt.

Zwischen den natürlichen und den dekadischen Logarithmen heißt die Umrechnungsformel

$$\log_{10} u = \log_{10} \mathrm{e} \cdot \log_{\mathrm{e}} u,$$

oder kurz

$$\lg u \quad = \lg \mathrm{e} \cdot \ln u.$$

Der Umrechnungsmodul lg e hat fünfstellig gerundet den Wert 0,43429 und wird mit M bezeichnet:

$$\lg u \quad = \mathrm{M} \cdot \ln u, \qquad \mathrm{M} \approx 0{,}43429.$$

Für die Umrechnung

$$\ln u = \frac{1}{\mathrm{M}} \cdot \lg u$$

sei noch

$$\frac{1}{\mathrm{M}} \approx 2{,}30259$$

angegeben.

Die Umrechnungsformel gibt die Möglichkeit, aus den tabellierten dekadischen Logarithmen auf einfache Weise Logarithmen zu jeder anderen Basis zu berechnen. Sie wird dabei in der Gestalt

$$\log_{10} u = \log_{10} a \cdot \log_a u$$

verwendet und nach $\log_a u$ aufgelöst:

$$\log_a u = \lg u : \lg a.$$

BEISPIEL

Zu berechnen sei $\log_2 273{,}5$.

Lösung: Mit $a = 2$ und $u = 273{,}5$ folgt aus der obigen Formel

$$\log_2 273{,}5 = \frac{\lg 273{,}5}{\lg 2} = \frac{2{,}43696}{0{,}30103} = \underline{\underline{8{,}0956}}.$$

AUFGABEN

136. Warum muß 1 als Logarithmenbasis ausgeschlossen werden?

137. Was ist a) $\log_2 1/8$, b) $\log_8 4$, c) $\log_{\sqrt{2}} {}^1/_2$, d) $\log_{81} 1/27$?

138. Es ist das dritte Logarithmengesetz zu beweisen.

139. Nach den Logarithmengesetzen ist umzuformen:

a) $\log_a \dfrac{u^3 \cdot \sqrt{u+v}}{a}$, b) $\log_a \dfrac{a^7 - a^4}{b}$, c) $\log_2 \dfrac{64\, u \sqrt{v}}{w}$.

140. Folgende Potenzen sind logarithmisch zu berechnen:

a) $17^{\sqrt{3}}$, b) $\sqrt{3}^{\sqrt{3}}$, c) $0{,}37156^{5{,}6727}$.

141. Es sind folgende Logarithmen zu berechnen:

a) $\log_2 74$, b) $\log_2 65$, c) $\log_{0,5} 13{,}72$.

9.4. System der natürlichen Logarithmen

Während mathematisch gesehen die Basis der dekadischen Logarithmen ihre Entstehung einer Zufälligkeit verdankt — hätte der Mensch nicht „zufällig" zehn Finger an beiden Händen, so spielte diese Zahl kaum eine so bedeutende Rolle —, ist das System der natürlichen Logarithmen auf tiefere mathematische Überlegungen gegründet.

Ist a eine beliebige Logarithmenbasis, so gilt

$$\log_a 1 = 0;$$

denn 0 ist der Exponent, den man an die Basis a setzen muß, um 1 zu erhalten. Trägt man für den Numerus wachsende Werte, etwa $1 + h$ $(h > 0)$ ein, so nimmt, wenn a größer als 1 ist, auch der Logarithmus zu. Bei dekadischen Logarithmen sieht das so aus:

$$\begin{aligned} \lg\ 1{,}0000 &= 0{,}0000000, \\ \lg\,(1{,}0000 + 0{,}0001) &= 0{,}0000434, \\ \lg\,(1{,}0000 + 0{,}0002) &= 0{,}0000869, \\ \lg\,(1{,}0000 + 0{,}0005) &= 0{,}0002171. \end{aligned} \tag{I}$$

Der Zuwachs des Logarithmus ist dem des Numerus also ungefähr proportional. Nach dem Dreisatz ist aus den ersten beiden Zeilen auszurechnen, daß dem Zuwachs h des Numerus der Zuwachs

$$\frac{0{,}0000434}{0{,}0001} \cdot h = 0{,}434\, h$$

des Logarithmus entspricht, was an den folgenden Zeilen von (I) überprüft werden kann.[1]) In Verallgemeinerung der Zeilen (I) ergibt sich daher die Näherungsformel

$$\lg\,(1 + h) \approx 0{,}434\, h\,.$$

Sie gilt auch für dem Betrag nach kleine negative Werte von h, zum Beispiel

$$\lg\,(1{,}0000 - 0{,}0001) \approx 0{,}434 \cdot (-0{,}0001) = 0{,}9999566 - 1\,.$$

[1]) Die Abweichungen der letzten Dezimale rühren einerseits von der Rundung der Zahlen auf 7 Stellen her; andererseits kommt in ihnen die Verschlechterung der Proportionalität mit zunehmender Entfernung des Numerus von 1 zum Ausdruck

Für größere Werte von h verschlechtert sich diese Näherung.
Bei $h = 1$ liefert sie etwa

$$\lg(1 + 1) \approx 0{,}434 \cdot 1 = 0{,}434$$

statt 0,301.

Für andere Logarithmenbasen $a > 1$ sind analoge Näherungsformeln anzunehmen, bei denen lediglich die Konstante 0,434 durch andere Zahlen zu ersetzen ist. Allgemein wird gelten:

$$\log_a(1 + h) \approx k \cdot h.$$

Dabei ist der Betrag von h klein gegen 1 vorauszusetzen, was in Zeichen durch $|h| \ll 1$ ausgedrückt wird.

Besonders einfach wird die Formel bei einem Logarithmensystem, für das $k = 1$ ist. Wie groß muß die Basis dieses Logarithmensystems sein?

Die gewünschte *Näherungsformel*

$$\log_a(1 + h) \approx h \quad \text{für } |h| \ll 1$$

lautet in Potenzschreibweise

$$a^h \approx 1 + h.$$

Daraus folgt, wenn beide Seiten in die $\frac{1}{h}$-te Potenz erhoben werden:

$$a \approx (1 + h)^{1/h}.$$

Da die Näherungsformel um so besser gilt, je kleiner $|h|$ ist, wird man a dadurch berechnen, daß man für h möglichst kleine Werte einsetzt. Man bildet „den Grenzwert von $(1 + h)^{1/h}$, wenn h hinschwindet". Diese Vorschrift wird durch das Symbol $\lim\limits_{h \to 0}$ (gelesen: limes h gegen 0) ausgedrückt:

$$a = \lim_{h \to 0} (1 + h)^{1/h}.$$

Die durch diesen Grenzwert gegebene, vor den übrigen Basen durch die Einfachheit der Näherungsformel ausgezeichnete Basis wird mit e bezeichnet. Das zugehörige Logarithmensystem ist das System der natürlichen Logarithmen.

Definition

Die Basis der natürlichen Logarithmen ist die Zahl

$$\boxed{\mathrm{e} = \lim_{h \to 0} (1 + h)^{1/h}} \tag{9}$$

Der Grenzwert kann auf folgende Weisen näherungsweise berechnet werden:

a) Für h werden der Reihe nach die Glieder einer schwindenden Zahlenfolge eingesetzt, etwa 1, 1/10, 1/100, 1/1000, ... Durch Benutzung der dekadischen Logarithmen erhält man:

h	1,000	0,100	0,010	0,001	....
$(1+h)^{1/h}$	2,000	2,594	2,705	2,717	....

b) Der Grenzwert wird umgeformt. Für h wird der Wert $1/n$ eingetragen. Der Vorschrift $h \to 0$ entspricht dabei die Anweisung $n \to \infty$:

$$\mathrm{e} = \lim_{h\to 0}(1+h)^{1/h} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Für natürliche Zahlen n kann der Ausdruck $(1 + 1/n)^n$ nach dem binomischen Lehrsatz entwickelt werden:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}\cdot\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\cdot\frac{1}{n^2} + \binom{n}{3}\cdot\frac{1}{n^3} + \binom{n}{4}\cdot\frac{1}{n^4} + \cdots + \binom{n}{n}\cdot\frac{1}{n^n}.$$

Durch Einsetzen der Binomialkoeffizienten erhält man:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}\cdot\frac{1}{n^4} + \cdots + \frac{1}{n^n} = 1 + 1 + \frac{n^2-n}{2!\,n^2} + \frac{n^3-3n^2+2n}{3!\,n^3} + \frac{n^4-6n^3+11n^2-6n}{4!\,n^4} + \cdots + \frac{1}{n^n}.$$

Zerlegt man jeden Bruch in eine Summe von Brüchen mit dem gleichen Nenner und kürzt, so ergibt sich:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{2!\,n} + \frac{1}{3!} - \frac{3}{3!\,n} + \frac{2}{3!\,n^2} + \frac{1}{4!} - \frac{6}{4!\,n} + \frac{11}{4!\,n^2} - \frac{6}{4!\,n^3} + \cdots + \frac{1}{n^n}.$$

Wenn man nun für n wachsende Werte einsetzt, schwinden alle Glieder mit n im Nenner hin, während die Summe immer mehr Summanden erhält. So entsteht als „Grenzwert“

$$1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots.$$

Für die ersten Glieder dieser „unendlichen Reihe“ kann man noch der Einheitlichkeit halber 1/0! und 1/1! schreiben.

Satz

Die Basis e der natürlichen Logarithmen wird durch die unendliche Reihe

$$\boxed{e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots} \tag{10}$$

dargestellt.

Die „Teilsummen“ dieser Reihe sind leicht zu berechnen und konvergieren außerordentlich rasch:

0.	$\frac{1}{0!}$	1,00000
1.	$\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!}$	2,00000
2.	$\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}$	2,50000
3.	$\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}$	2,66667
4.	$\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}$	2,70833
....	....	....
8.	$\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!}$	2,71828

Mit dem Wert 2,71828 wurde 5-stellige Genauigkeit erreicht.

Beim Benutzen der natürlichen Logarithmen, die ebenfalls in Tabellenbüchern enthalten sind, ist zu beachten, daß nicht wie bei dekadischen Logarithmen mit Kennziffern und Mantissen gearbeitet werden kann. In einer Tabelle der natürlichen Logarithmen müßten daher auch zu allen positiven reellen Zahlen, von 0 bis unendlich, die natürlichen Logarithmen angegeben werden. Das geht natürlich nicht. Wie man sich ohne die Umrechnungsformel aus 9.3. hilft, falls man natürliche Logarithmen nicht tabellierter Zahlen benötigt, zeigt das folgende Beispiel:

BEISPIEL

Gegeben seien die natürlichen Logarithmen der Zahlen 10; 11; ...; 1009[1]); zu bestimmen:
a) ln 3752, b) ln 0,02524.

Lösung: a) $\ln 3752 = \ln(10 \cdot 375{,}2) = \ln 10 + \ln 375{,}2 = 2{,}30259 + 5{,}92746 = \underline{\underline{8{,}23005}}.$

b) $\ln 0{,}02524 = \ln(252{,}4 : 10^4) = \ln 252{,}4 - 4 \cdot \ln 10 = 5{,}53101 - 4 \cdot 2{,}30259 = \underline{\underline{-3{,}67935}}.$

[1]) Vergleiche z. B. MÜLLER, „Fünfstellige Logarithmen und andere mathematische Tafeln“

AUFGABEN

142. Mit Hilfe der Reihe

$$1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$$

ist die Zahl e auf 7 Dezimalen nach dem Komma zu berechnen.

143. ln 23,1407 und ln 0,12734 sind
a) nach der Tafel der natürlichen Logarithmen,
b) mit Hilfe dekadischer Logarithmen und der Umrechnungsformel
zu bestimmen.

144. Mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes ist
a) $1{,}03^6$,
b) $0{,}98^8$
auf 5 Stellen nach dem Komma zu berechnen. Das Resultat ist mit dem logarithmisch bestimmten Wert zu vergleichen.

10. Näherungen

Bei Näherungsrechnungen spielen die Begriffe „klein gegen" und „vernachlässigen" eine wichtige Rolle. Ihren Gebrauch erläutert das folgende Beispiel:

BEISPIEL

1. Bei der Berechnung der Potenz $1{,}012^2$ liefert der binomische Lehrsatz:

$$(1{,}000 + 0{,}012)^2 = 1{,}000^2 + 2 \cdot 1{,}000 \cdot 0{,}012 + 0{,}012^2.$$

$0{,}012^2 = 0{,}000144$ ist „klein gegen" die übrigen Glieder der Summe und kann daher bei gröberer Rechnung „vernachlässigt" werden. Das Ergebnis ist dann $1{,}000 + 0{,}024 = \underline{\underline{1{,}024}}$.

Auch 0,024 ist schon klein gegen 1,000. Dieses Glied vernachlässigen würde aber bedeuten, statt 1,012 nur den Wert 1,000 quadrieren. Man sagt, 0,024 und 0,000144 seien klein von verschiedener Ordnung, und zwar 0,024 klein von erster und 0,000144 klein von zweiter Ordnung. In der obigen Rechnung wurde also nur mit Gliedern, die von erster Ordnung klein sind, gerechnet. Das dabei gewonnene Ergebnis wird als eine erste Näherung bezeichnet.

Der Begriff der Ordnung der Kleinheit hat folgenden Sinn:
Ist der Betrag einer Zahl ε klein gegen[1]) 1, in Zeichen: $|\varepsilon| \ll 1$, so heißen in der Folge

$$\varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \dots, \varepsilon^n, \dots.$$

das erste Glied klein von erster Ordnung, das zweite klein von zweiter Ordnung und so fort, ε^n heißt *klein von n-ter Ordnung.*,
Indem man in einer Rechnung nur die Glieder berücksichtigt, die von erster Ordnung klein sind, und die von höherer Ordnung kleinen vernachlässigt, erhält man eine erste Näherung für das Ergebnis. Berücksichtigt man auch noch die Glieder, die von

[1]) Der Begriff „klein gegen" ist in der Mathematik nicht vollständig streng gefaßt. Von Mal zu Mal ist die Zulässigkeit der mit seiner Anwendung verbundenen Vernachlässigungen zu prüfen

zweiter Ordnung klein sind, und vernachlässigt die von höherer Ordnung kleinen, so erhält man eine zweite Näherung für das Ergebnis und so weiter. Berücksichtigt man alle Glieder, die bis zur n-ten Ordnung klein sind, und vernachlässigt die von höherer Ordnung kleinen, so erhält man eine *n-te Näherung* für das Ergebnis.
Häufig tritt in Anwendungen die durch folgenden Satz beschriebene Näherung auf:

Satz

Ist ε eine reelle Zahl, deren Betrag von erster Ordnung klein ist ($|\varepsilon| \ll 1$) und s ein beliebiger reeller Exponent, so gilt im Sinne einer ersten Näherung

$$\boxed{(1+\varepsilon)^s \approx 1 + s\varepsilon} \tag{11}$$

Der Beweis wird schrittweise für die verschiedenen Exponentenbereiche geführt:

a) Für einen natürlichen Exponenten $s = n$ folgt die Formel unmittelbar aus der Aussage des binomischen Lehrsatzes:

$$(1+\varepsilon)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}\varepsilon + \binom{n}{2}\varepsilon^2 + \cdots + \binom{n}{n}\varepsilon^n,$$

indem die von höherer Ordnung kleinen Glieder $\binom{n}{2}\varepsilon^2, \ldots, \binom{n}{n}\varepsilon^n$ vernachlässigt und für $\binom{n}{0}$ und $\binom{n}{1}$ die Werte 1 und n eingetragen werden.

b) Für einen negativen ganzen Exponenten $s = -n$ ($n \in N$) gilt zunächst nach a)

$$(1+\varepsilon)^{-n} = \frac{1}{(1+\varepsilon)^n} \approx \frac{1}{1+n\varepsilon}.$$

Daraus folgt durch Erweitern mit $1 - n\varepsilon$ und Vernachlässigen von $n^2\varepsilon^2$:

$$\frac{1-n\varepsilon}{(1+n\varepsilon)(1-n\varepsilon)} = \frac{1-n\varepsilon}{1-n^2\varepsilon^2} \approx 1 - n\varepsilon.$$

c) Für einen gebrochenen Exponenten $g/n \in K$ ($g \in G$, $n \in N \setminus \{0\}$) behauptet die Formel (11):

$$(1+\varepsilon)^{g/n} \approx 1 + \frac{g}{n}\cdot\varepsilon.$$

$(1+\varepsilon)^{g/n}$ ist nach Definition (vgl. 9.1.) die dadurch eindeutig bestimmte positive Zahl, daß ihre n-te Potenz $(1+\varepsilon)^g \approx 1 + g\varepsilon$ (vgl. b) ist. Die rechte Seite der Behauptung besitzt aber die gleichen Eigenschaften: Wegen $|\varepsilon| \ll 1$ ist $1 + \frac{g}{n}\varepsilon > 0$, und nach a) gilt:

$$\left(1 + \frac{g}{n}\varepsilon\right)^n \approx 1 + n\cdot\frac{g}{n}\varepsilon = 1 + g\varepsilon.$$

Der Beweis für irrationale Exponenten kann hier nicht geführt werden.

Zwei Sonderfälle der Formel (11) sind:

$$s = -1: \quad \boxed{\frac{1}{1 \pm \varepsilon} \approx 1 \mp \varepsilon} \tag{11a}$$

$$s = 1/n: \quad \boxed{\sqrt[n]{1 \pm \varepsilon} \approx 1 \pm \frac{\varepsilon}{n}} \tag{11b}$$

BEISPIELE

2. $1{,}01^3 = (1{,}00 + 0{,}01)^3 \approx 1{,}00 + 3 \cdot 0{,}01 = \underline{\underline{1{,}03.}}$

3. $\sqrt[5]{0{,}991} \approx 1{,}000 - \dfrac{0{,}009}{5} = \underline{\underline{0{,}998.}}$

4. $\dfrac{1}{1{,}01} \approx \underline{\underline{0{,}99}}.$

5. $1{,}012^{3/4} \approx 1{,}000 + \dfrac{3}{4} \cdot 0{,}012 = \underline{\underline{1{,}009.}}$

Wie die in der Formel (11) vorkommende Summe $1 + \varepsilon$ unter Umständen auch erst geschaffen werden kann, lehren die folgenden

BEISPIELE

6. $$\sqrt{6372^2 + 82240} = \sqrt{6372^2\left(1 + \frac{82240}{6372^2}\right)} =$$
$$= 6372\sqrt{1 + \frac{82240}{6372^2}} \approx 6372 \cdot \left(1 + \frac{82240}{2 \cdot 6372^2}\right) \approx$$
$$\approx 6372 + \frac{41120}{6372} \approx \underline{\underline{6378.}}$$

Mit dem Rechenstab allein wäre diese Aufgabe ohne Anwendung der Näherungsformel nicht mit solcher Genauigkeit lösbar.

7. Fallzeit eines Körpers für die ersten 20 m (freier Fall):
$$t = \sqrt{\frac{2s}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 20\ \mathrm{m}}{9{,}81\ \mathrm{m/s^2}}} = \sqrt{\frac{40}{10{,}00 - 0{,}19}}\ \mathrm{s} =$$
$$= \sqrt{\frac{4}{1{,}000 - 0{,}019}}\ \mathrm{s} \approx \sqrt{4(1{,}000 + 0{,}019)}\ \mathrm{s} \approx$$
$$\approx 2(1{,}000 + 0{,}010)\ \mathrm{s} = \underline{\underline{2{,}019\ \mathrm{s}.}}$$

Es sei noch erwähnt, daß die für natürliche Logarithmen gültige Näherungsformel

$$\boxed{\ln(1 + \varepsilon) \approx \varepsilon} \quad \text{(vgl. 9.4.)} \tag{12}$$

ebenfalls eine erste Näherung darstellt (ohne Beweis).

AUFGABEN

145. Welche Eigenschaften haben die Relationen

a) näherungsweise gleich ($\approx$),
b) klein gegen ($\ll$)?

146. Warum stellt die Relation „klein gegen" keine Ordnungsrelation (vgl. 1.5.) dar?

147. Für folgende Werte ist eine erste Näherung zu bilden:

a) $0{,}99^5$, b) $\sqrt[7]{1{,}030}$, c) $\dfrac{1}{0{,}993}$, d) $\dfrac{1}{0{,}99^4}$, e) $\ln 0{,}987$.

148. Erste Näherungen sind für folgende Ausdrücke zu berechnen:

a) $\dfrac{0{,}98}{1{,}02}$; b) $1{,}02^7 \cdot 0{,}99$, c) $\dfrac{1}{0{,}987 \cdot 1{,}013}$, d) $\dfrac{0{,}97 \cdot 1{,}02}{1{,}03}$.

149. Nach dem Vorbild von Beispiel 6. dieses Abschnitts sind für folgende Ausdrücke erste Näherungen zu entwickeln:

a) $\sqrt[3]{12{,}3^3 - 237{,}3}$, b) $\dfrac{\sqrt{0{,}94}}{2 + \sqrt{1{,}06}}$.

150. Es ist eine Näherungsformel für

$$\ln \frac{1}{(1+\varepsilon)^n}$$

aufzustellen.

151. Für das Polynom $P(x) = x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 1$ ist ein Näherungsterm (erste Näherung) für $x = 1 + \varepsilon$ ($|\varepsilon| \ll 1$) zu entwickeln. Mit ihm ist eine Wertetabelle zum Variablenbereich $X = \{0{,}95;\ 0{,}96;\ \ldots;\ 1{,}05\}$ aufzustellen. Alle Werte sind mit Hilfe des HORNERschen Schemas auf ihre Genauigkeit zu prüfen.

152. Bei den folgenden Termen sind erste Näherungen für $x = 1 + \varepsilon$ ($|\varepsilon| \ll 1$) anzugeben:

a) $\sqrt[3]{x^3 + 2x + 5}$, b) $\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2}$, c) $\dfrac{1}{x^3} + \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{3}{x} - 1$, d) $\dfrac{x}{1+x}$.

153. Für den Wert, auf den ein Guthaben von 500 Mark bei 3%iger jährlicher Verzinsung mit Zins und Zinseszins anwächst, ist

a) eine erste Näherung,
b) eine zweite Näherung

zu bestimmen.

154. Es ist eine Formel aufzustellen, nach der die indizierte Leistung P_i von Getrieben, deren Wirkungsgrad η nahe bei 1 liegt, angenähert aus der effektiven Leistung P_e berechnet werden kann ($P_\mathrm{i} = P_\mathrm{e}/\eta$).

155. Wie lautet die in der vorigen Aufgabe aufgestellte Formel für folgende Werte von η: 90%, 92%, 94%, 96% und 98%?

11. Der Körper der komplexen Zahlen

11.1. Imaginäre Einheit

Trotz der Leistungsfähigkeit des Körpers der reellen Zahlen, in dem nicht nur die vier Grundrechnungsarten so weit wie möglich ausführbar sind, sondern auch Grenzübergänge unbeschränkt vollzogen werden können, gibt es doch Situationen, in denen eine Erweiterung des Bereiches der reellen Zahlen wünschenswert erscheint. Eine solche Situation kann bereits bei der Lösung einer *quadratischen Gleichung*, das heißt einer Gleichung der Form

$$Ax^2 + Bx + C = 0 \quad (A, B, C \in R, A \neq 0)$$

auftreten.
Nachdem man sie durch Division durch A auf die „Normalform“

$$x^2 + px + q = 0 \quad \left(p = \frac{B}{A}; q = \frac{C}{A}\right)$$

gebracht hat, wird die „quadratische Ergänzung“ gebildet:

$$\left(x^2 + 2\,\frac{p}{2}\,x + \frac{p^2}{4}\right) - \frac{p^2}{4} + q = 0.$$

Daraus folgt:

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q. \tag{I}$$

Ist $p^2/4 - q \geqq 0$, so stellt $x + p/2$ eine Zahl dar, deren Quadrat $p^2/4 - q$ ist. Nach Definition (vgl. 9.1.) hat $\sqrt{p^2/4 - q}$ die gewünschte Eigenschaft. Aber auch $-\sqrt{p^2/4 - q}$ leistet das Geforderte. Alle anderen reellen Zahlen sind jedoch dem Betrag nach kleiner oder größer und ihre Quadrate daher kleiner oder größer als $p^2/4 - q$ (Monotoniegesetz der Multiplikation, vgl. 2.2.). Also gibt es zwei Möglichkeiten:

$$x + \frac{p}{2} = \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \quad \text{oder} \quad x + \frac{p}{2} = -\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\,.$$

Daher besteht die Lösungsmenge aus den beiden (bei $p^2/4 - q = 0$ allerdings gleichen) Zahlen

$$-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \quad \text{und} \quad -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\,.$$

Ist dagegen $p^2/4 - q < 0$, so kann die Gleichung (I) im Körper der reellen Zahlen nicht erfüllt werden. Welche reelle Zahl man auch für x einsetzt: als Quadrat einer reellen Zahl ist die linke Seite niemals negativ.
Der Term $p^2/4 - q$, von dem die Erfüllbarkeit der quadratischen Gleichung abhängt, heißt *Diskriminante* dieser Gleichung.
Bei der Lösung von quadratischen Gleichungen macht sich also der Mangel des Bereiches der reellen Zahlen bemerkbar, keine Elemente zu besitzen, deren Quadrate negativ sind.
Wären in einem den Körper der reellen Zahlen enthaltenden Zahlenkörper auch alle negativen reellen Zahlen Quadrate anderer Zahlen, so besäßen in ihm alle quadratischen Gleichungen (mit reellen Koeffizienten) zwei (unter Umständen gleiche) Lösungen.

Schreibt man die im Bereich der reellen Zahlen unerfüllbaren Gleichungen

a) $x^2 = -4$, b) $x^2 = -\frac{5}{4}$ oder allgemein c) $x^2 = -a$ $(a \in R, a > 0)$

in der Form

a) $x^2 = (-1) \cdot 4$, b) $x^2 = (-1) \cdot \frac{5}{4}$, c) $x^2 = (-1) \cdot a$,

so erkennt man, daß eine einzige Zahl, deren Quadrat -1 wäre, genügte, um für jede der Gleichungen zwei Lösungen bilden zu können. Wäre nämlich j eine solche Zahl ($\mathrm{j}^2 = -1$), so hießen die Lösungen

a) $2\mathrm{j}$ und $-2\mathrm{j}$, b) $\frac{\mathrm{j}}{2}\sqrt{5}$ und $-\frac{\mathrm{j}}{2}\sqrt{5}$, c) $\mathrm{j}\sqrt{a}$ und $-\mathrm{j}\sqrt{a}$,

wie durch Quadrieren bestätigt werden kann.

Die Existenz einer solchen Zahl j in einem den Körper der reellen Zahlen enthaltenden Zahlenkörper war in der geschichtlichen Entwicklung der Mathematik lange Zeit umstritten. Schon im 16. Jahrhundert machte G. CARDANO[1]) den Versuch, mit Zahlen, deren Quadrate negativ sind, zu rechnen. Obwohl man derartige Zahlen lange für sinnlos hielt, stellte sich doch heraus, daß ihre Benutzung richtige und wertvolle Ergebnisse brachte. Aber erst Ende des 18. Jahrhunderts erschienen Arbeiten, die die Existenz des diese Zahlen enthaltenden Zahlenkörpers nachwiesen. Volle Anerkennung fand der neue Zahlenbereich durch das Wirken von C. F. GAUSS[2]).

Hier wird die Existenz eines Zahlenkörpers, der den Körper der reellen Zahlen und die Zahl j enthält, vorausgesetzt.
Die Zahl j wird *imaginäre Einheit*[3]) genannt.

Definition

Unter der imaginären Einheit j versteht man eine Zahl, deren Quadrat -1 ist:

$$\mathrm{j}^2 = -1.$$

In der Definition steht vor dem Wort „Zahl" der unbestimmte Artikel. Denn es gibt nicht nur eine Zahl, deren Quadrat -1 ist, sondern zwei: Auch $-\mathrm{j}$ hat nach den im Körper geltenden Rechenregeln das Quadrat -1:

$$(-\mathrm{j})^2 = ((-1) \cdot \mathrm{j})^2 = (-1)^2 \cdot \mathrm{j}^2 = 1 \cdot (-1) = -1.$$

---

[1]) GERONIMO CARDANO (1501 bis 1576), italienischer Mathematiker, Arzt und Philosoph

[2]) CARL FRIEDRICH GAUSS (1777 bis 1855), genialer deutscher Mathematiker, Physiker, Astronom und Geodät

[3]) Die imaginäre Einheit wird nach EULER häufig auch mit i bezeichnet, vor allem in der rein mathematischen Literatur. In der Ingenieurmathematik setzt sich aber im Hinblick auf die Verwendung des Buchstaben i als Symbol für Stromstärken die Bezeichnung j mehr und mehr durch

Die Zahl $-\mathrm{j}$ ist von $+\mathrm{j}$ verschieden; aus $\mathrm{j} = -\mathrm{j}$ folgte nämlich $2\mathrm{j} = 0$ und damit $\mathrm{j} = 0$.
Andererseits gibt es keine weiteren Zahlen, deren Quadrat -1 ist. Auf den Beweis soll hier verzichtet werden.
Mit Hilfe der Zahl j lassen sich nun auch Erfüllungen für quadratische Gleichungen angeben, die im Körper der reellen Zahlen unerfüllbar sind, für die also $p^2/4 - q < 0$ ist (vgl. oben). Die Gleichung (I) wird zu diesem Zweck in der Form

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = (-1)\left(q - \frac{p^2}{4}\right)$$

geschrieben. Wegen $q - p^2/4 > 0$ ist $\sqrt{q - p^2/4}$ erklärt. Für $x + p/2$ als eine Zahl, deren Quadrat $(-1)(q - p^2/4)$ ist, kommen die Zahlen $\mathrm{j}\sqrt{q - p^2/4}$ und $-\mathrm{j}\sqrt{q - p^2/4}$ in Frage:

$$x + \frac{p}{2} = \mathrm{j}\sqrt{q - \frac{p^2}{4}} \quad \text{oder} \quad x + \frac{p}{2} = -\mathrm{j}\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}.$$

Daher besteht die Lösungsmenge aus den beiden Zahlen

$$-\frac{p}{2} + \mathrm{j}\sqrt{q - \frac{p^2}{4}} \quad \text{und} \quad -\frac{p}{2} - \mathrm{j}\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}.$$

BEISPIEL

Es ist die Erfüllungsmenge folgender Gleichung zu bestimmen:

$$x^2 - 2x + 10 = 0.$$

Lösung: Hier ist

$$\frac{p^2}{4} - q = 1 - 10 = -9 < 0.$$

Die Lösungsmenge besteht demnach aus dem Zahlenpaar

$$-\frac{p}{2} \pm \mathrm{j}\sqrt{q - \left(\frac{p}{2}\right)^2} = -\frac{-2}{2} \pm \mathrm{j}\sqrt{10 - 1^2} = 1 \pm 3\mathrm{j}.$$

Also ist $\underline{\underline{E = \{1 + 3\mathrm{j};\ 1 - 3\mathrm{j}\}}}$.

AUFGABEN

156. Wie unterscheidet sich die Zahl j hinsichtlich der Definition von einer Quadratwurzel, etwa $\sqrt{2}$?
157. Stellt der Buchstabe j als imaginäre Einheit eine Konstante oder eine Variable dar?
158. Wie heißen die Lösungen folgender quadratischer Gleichungen:

a) $x^2 - 6x + 25 = 0$, b) $x^2 - 2x + 3 = 0$,
c) $x^2 - 2ax + (a^2 + b^2) = 0$?

11.2. Die Menge der komplexen Zahlen

Welche Zahlen muß ein Zahlenkörper, der den Körper R der reellen Zahlen und die Zahl j, also $R \cup \{j\}$ enthält, mindestens besitzen?
Weil die Multiplikation unbeschränkt ausführbar sein muß, sind alle Produkte $b \cdot j$, gebildet aus einer reellen Zahl b und der imaginären Einheit j, erforderlich, zum Beispiel $5j$, $-2j$, $^3/_7 j$, πj. Diese Produkte werden **imaginäre Zahlen** genannt.
Auch die Addition muß unbeschränkt ausführbar sein. Daher muß der neue Zahlenkörper mindestens alle Summen aus einer reellen Zahl und einer imaginären Zahl enthalten: $3 + 5j$, $-7 + {}^3/_4 j$, allgemein $a + bj$ $(a, b \in R)$.

Definition

Die Summen

$$a + bj \qquad (a, b \in R)$$

aus je einer reellen Zahl a und einer imaginären Zahl bj heißen **komplexe Zahlen**. In ihnen bezeichnet man a als *Realteil* und b als *Imaginärteil*.

Die Menge der komplexen Zahlen wird mit C bezeichnet. Sie enthält die Menge der reellen Zahlen:

$$R \subset C.$$

Denn jede reelle Zahl a läßt sich als komplexe Zahl in der Form $a + 0j$ schreiben.
Ebenso sind alle imaginären Zahlen und insbesondere die imaginäre Einheit j unter den komplexen Zahlen zu finden. Denn jede imaginäre Zahl bj läßt sich in der Gestalt $0 + bj$ als komplexe Zahl darstellen. Insbesondere ist $j = 0 + 1j$.
Die Gleichwertigkeit von j und $-j$ als Erfüllungen der definierenden Gleichung $x^2 = -1$ kommt bei komplexen Zahlen dadurch zum Ausdruck, daß die Zahlen $z = a + bj$ und $\bar{z} = a - bj$ zueinander in einer besonderen Beziehung stehen.
Man nennt zwei komplexe Zahlen, die sich nur durch das Vorzeichen des Imaginärteiles unterscheiden, zueinander *konjungiert*. $3 + 2j$ ist zum Beispiel konjugiert zu $3 - 2j$, $-5j$ ist konjugiert zu $5j$. Jede reelle Zahl ist zu sich selbst konjugiert.
Ein Paar konjugiert komplexer Zahlen bildet auch die Erfüllungsmenge einer quadratischen Gleichung, die keine reellen Lösungen besitzt.
Um prüfen zu können, ob die Menge C bereits einen Körper bildet oder ob noch weitere Zahlen hinzugenommen werden müssen, sind zunächst einige Erfahrungen im Umgang mit komplexen Zahlen nötig.

Gleichheit

Satz

Zwei komplexe Zahlen $a + bj$ und $a' + b'j$ $(a, b, a', b' \in R)$ sind genau dann gleich, wenn sie in Real- und Imaginärteil übereinstimmen:

$$a + bj = a' + b'j \iff a = a' \text{ und } b = b'.$$

Beweis: Aus $a + bj = a' + b'j$
folgt $a - a' = (b' - b)j$.

Wäre $b \neq b'$, so könnte man durch $b' - b$ dividieren und erhielte für j die Darstellung $(a - a'):(b' - b)$, einen Quotient zweier reeller Zahlen. Dann wäre aber j selbst reell. Dies ist unmöglich.
Also muß $b = b'$ sein. Dann aber verschwindet in der obigen Gleichheit die rechte Seite und die linke muß ebenfalls 0 sein: $a = a'$.

Addition und Subtraktion. Die Summe, beziehungsweise die Differenz

$$(a + b\mathrm{j}) \pm (a' + b'\mathrm{j})$$

der beiden komplexen Zahlen $a + b\mathrm{j}$ und $a' + b'\mathrm{j}$ ist nach dem Assoziations- und dem Kommutationsgesetz gleich

$$a \pm a' + b\mathrm{j} \pm b'\mathrm{j}.$$

Nach dem Distributionsgesetz kann j ausgeklammert werden:

$$\boldsymbol{(a \pm a') + (b \pm b')\,\mathrm{j}}.$$

$a \pm a'$ und $b \pm b'$ sind reelle Zahlen, und daher ist das Ergebnis wieder eine komplexe Zahl.

Satz

Man addiert (beziehungsweise subtrahiert) zwei komplexe Zahlen, indem man ihre Real- und ihre Imaginärteile addiert (beziehungsweise subtrahiert).

BEISPIEL

1. $(1 + 2\mathrm{j}) + (3 - 5\mathrm{j}) = (1 + 3) + (2 - 5)\mathrm{j} = \underline{\underline{4 - 3\mathrm{j}}}.$

Multiplikation. Das Produkt

$$(a + b\mathrm{j}) \cdot (a' + b'\mathrm{j})$$

zweier komplexer Zahlen kann nach dem Distributionsgesetz ausgerechnet werden:

$$aa' + ab'\mathrm{j} + a'b\mathrm{j} + bb'\mathrm{j}^2.$$

Das ergibt unter Berücksichtigung von $\mathrm{j}^2 = -1$:

$$aa' + ab'\mathrm{j} + a'b\mathrm{j} - bb'.$$

Durch Zusammenfassen gleichartiger Glieder erhält man:

$$\boldsymbol{(aa' - bb') + (ab' + a'b)\,\mathrm{j}}.$$

Das Ergebnis ist eine komplexe Zahl mit dem Realteil $aa' - bb'$ und dem Imaginärteil $ab' + a'b$.

BEISPIEL

2. $(2 + \mathrm{j}) \cdot (5 - 3\mathrm{j}) = 2 \cdot 5 - 2 \cdot 3\mathrm{j} + 5\mathrm{j} - 3\mathrm{j}^2 = 10 - 6\mathrm{j} + 5\mathrm{j} + 3 = \underline{\underline{13 - \mathrm{j}}}.$

Division. Bei der Division zweier komplexer Zahlen, zum Beispiel

$$\frac{3-4\mathrm{j}}{1+2\mathrm{j}}$$

bedient man sich des Verfahrens, mit dem bei Brüchen wie etwa

$$\frac{3-4\sqrt{2}}{1+2\sqrt{2}}$$

die Irrationalität des Nenners beseitigt wird. Dies geschieht durch Erweitern, im angeführten Beispiel mit $1-2\sqrt{2}$. Dieses Verfahren liefert bei dem zu berechnenden Quotienten

$$\frac{3-4\mathrm{j}}{1+2\mathrm{j}}=\frac{(3-4\mathrm{j})(1-2\mathrm{j})}{(1+2\mathrm{j})(1-2\mathrm{j})}=\frac{3+8\mathrm{j}^2-4\mathrm{j}-6\mathrm{j}}{1-4\mathrm{j}^2}.$$

Durch Benutzung von $\mathrm{j}^2=-1$ ergibt sich daraus:

$$\frac{3-8-4\mathrm{j}-6\mathrm{j}}{1+4}=\frac{-5-10\mathrm{j}}{5}=\underline{\underline{-1-2\mathrm{j}}}.$$

Die allgemeine Rechnung lautet:

$$\frac{a+b\mathrm{j}}{a'+b'\mathrm{j}}=\frac{(a+b\mathrm{j})(a'-b'\mathrm{j})}{(a'+b'\mathrm{j})(a'-b'\mathrm{j})}=\frac{aa'-bb'\mathrm{j}^2+a'b\mathrm{j}-ab'\mathrm{j}}{a'^2-b'^2\mathrm{j}^2}=$$

$$=\frac{aa'+bb'+(a'b-ab')\mathrm{j}}{a'^2+b'^2}=\boldsymbol{\frac{aa'+bb'}{a'^2+b'^2}+\frac{a'b-ab'}{a'^2+b'^2}\mathrm{j}}.$$

Sowohl $\frac{aa'+bb'}{a'^2+b'^2}$ als auch $\frac{a'b-ab'}{a'^2+b'^2}$ ist eine reelle Zahl. Das Ergebnis stellt also wiederum eine komplexe Zahl dar.

Für die Ausführbarkeit der Division muß vorausgesetzt werden, daß der Nenner nicht 0 ist. Dies bedeutet hier: a' und b' sind nicht beide 0.

Wie somit festgestellt wurde, führen weder Addition, Subtraktion, Multiplikation noch Division aus der Menge der komplexen Zahlen heraus. Diese stellt daher einen Zahlenkörper dar. Nach den Überlegungen, die zum Begriff der komplexen Zahl führten, ist dieser Körper der kleinste Zahlenkörper, der den Körper der reellen Zahlen und die Zahl j, deren Quadrat -1 ist, enthält.

Satz

Die Menge C aller Zahlen

$$a+b\mathrm{j} \quad (a, b \in R;\ \mathrm{j}^2=-1)$$

bildet einen Zahlenkörper, den **Körper der komplexen Zahlen.**

Nach Konstruktion haben im Körper der komplexen Zahlen alle quadratischen Gleichungen mit reellen Koeffizienten Lösungen.

AUFGABEN

159. Zu berechnen ist:

a) $(3 - 2j) + (5 + 17j)$, b) $(2 + 5j) - (3 + 5j)$, c) $(3 + 7j) - 10j$.

160. Es sind folgende Produkte zu berechnen:

a) $(3 + 4j)(1 - j)$, b) $(3 - 2j)(5 + 17j)$,
c) $(4 - 6j)(6 + 9j)$, d) $(3 + 7j) \cdot 2j$,
e) $(3 + 2j\sqrt{2})(3 - 2j\sqrt{2})$, f) $(3 + j\sqrt{2})^2$.

161. Es sind folgende Quotienten zu berechnen:

a) $\dfrac{3 - 2j}{5 + 2j}$, b) $\dfrac{17 - 6j}{3 - 4j}$, c) $\dfrac{1 + 3j}{1 - j}$, d) $\dfrac{5}{1 - 2j}$,

e) $\dfrac{1}{3 + \sqrt{2}j}$, f) $\dfrac{\sqrt{3} + j\sqrt{2}}{\sqrt{3} - j\sqrt{2}}$, g) $\dfrac{3 + 2j}{3j}$.

162. Wann stimmt eine komplexe Zahl mit ihrer konjugierten überein?

163. Gegeben sind die konjugiert komplexen Zahlen

$z_1 = 2 + 3j$ und $\overline{z_1} = 2 - 3j$,
$z_2 = 4 - 2j$ und $\overline{z_2} = 4 + 2j$.

Zu berechnen ist:

a) $z_1 \cdot z_2$ und $\overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$, b) $z_1 : z_2$ und $\overline{z_1} : \overline{z_2}$.

Was fällt an den Ergebnissen auf?

164. Unter Benutzung der imaginären Einheit läßt sich nun auch die Summe zweier Quadrate nach der Formel $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ in ein Produkt zerlegen:

$a^2 + b^2 = a^2 - (jb)^2 = (a + bj)(a - bj)$.

Auf diese Weise ist in ein Produkt zu verwandeln:

a) $4x^2 + 9y^2$, b) $a + b$ $(a, b > 0)$, c) $17\ (= 16 + 1)$.

11.3. Potenzen komplexer Zahlen

Wie schon das Beispiel der imaginären Einheit lehrt, können Wurzeln im Körper der komplexen Zahlen nicht eindeutig erklärt werden. Daher sollen in diesem Lehrbuch nur Potenzen komplexer Zahlen mit ganzen Exponenten in Betracht kommen. Diese sind genau wie die von reellen Basen im Sinne von 2.2. und 9.1. definiert.
Für ihre Berechnung werden die höheren Potenzen $j^3, j^4, \ldots$ der imaginären Einheit j gebraucht. Man erhält sie eine nach der anderen, indem man jeweils die vorangegangene mit j multipliziert:

$$\begin{aligned}
j^1 &= & & j \\
j^2 &= & & -1 \\
j^3 &= -1 \cdot j &=& -j \\
j^4 &= -j \cdot j &=& +1 \\
j^5 &= 1 \cdot j &=& j \\
j^6 &= j \cdot j &=& -1 \\
&\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

In der Folge der Potenzen von j wechseln sich also die Zahlen j, -1, $-$j, 1 in dieser Reihenfolge periodisch ab. Ist der Exponent durch 4 teilbar, so hat die Potenz den Wert 1. Läßt er dagegen bei der Division durch 4 den Rest 1, 2 oder 3, so hat die Potenz den Wert j, beziehungsweise -1 oder $-$j.
Diese Regel gilt auch für negative ganzzahlige Exponenten und den Exponenten 0. Das kann von $j^1 = j$ ausgehend durch Multiplikation mit $j^{-1} = 1/j = j/j^2 = -j$ bestätigt werden:

$$\begin{array}{lrl} j^1 = & & j \\ j^0 = & j\cdot(-j) = & 1 \\ j^{-1} = & 1\cdot(-j) = & -j \\ j^{-2} = & -j\cdot(-j) = & -1 \\ j^{-3} = & -1\cdot(-j) = & j \\ j^{-4} = & j\cdot(-j) = & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

Jede durch 4 teilbare ganze Zahl kann in der Form $4g$ ($g \in G$) dargestellt werden. Eine ganze Zahl, die bei der Division durch 4 den Rest 1, 2 oder 3 ergibt, wird dann durch $4g + 1$, beziehungsweise $4g + 2$ oder $4g + 3$ wiedergegeben. Auf diese Weise läßt sich die gewonnene Regel durch folgende Formeln ausdrücken:

$$j^{4g} = 1,\ j^{4g+1} = j,\ j^{4g+2} = -1,\ j^{4g+3} = -j \quad (g \in G).$$

Zum Beispiel ist: $j^{1000} = 1$, $j^{42} = j^{4\cdot 10+2} = -1$, $j^{-301} = j^{4\cdot(-76)+3} = -j$.

Unter Benutzung der Regel über die Potenzen von j lassen sich die Potenzen komplexer Zahlen mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes (vgl. Abschnitt 3.) berechnen.

BEISPIELE

1. $(2 + 3j)^5 =$

$$= 2^5 + 5\cdot 2^4\cdot(3j) + 10\cdot 2^3\cdot(3j)^2 + 10\cdot 2^2\cdot(3j)^3 + 5\cdot 2\cdot(3j)^4 + (3j)^5 =$$
$$= 32 + 240j + 720j^2 + 1080j^3 + 810j^4 + 243j^5 =$$
$$= 32 + 240j - 720 - 1080j + 810 + 243j = \underline{\underline{122 - 597j}}.$$

2. $(3 + 2j)^{-3} = \dfrac{1}{(3 + 2j)^3}$.

Es gibt zwei Möglichkeiten: Entweder wird $(3 + 2j)$ erst potenziert und dann der Kehrwert gebildet, oder man berechnet erst $1/(3 + 2j)$ und potenziert dann. Hier wird der erste Weg beschritten; der zweite sei als Übung empfohlen.

$$(3 + 2j)^3 = 3^3 + 3\cdot 3^2\cdot 2j + 3\cdot 3\cdot(2j)^2 + (2j)^3 = 27 + 54j - 36 - 8j = \underline{-9 + 46j}.$$

Der Kehrwert davon ist:

$$\frac{1}{(3+2j)^3} = \frac{1}{-9+46j} = \frac{-9-46j}{(-9+46j)(-9-46j)} =$$
$$= \frac{-9-46j}{81+2116} = \underline{\underline{-\frac{9}{2197} - \frac{46}{2197}\,j}}.$$

AUFGABEN

165. Was ist: a) j^{14}, b) j^{113}, c) j^{-201}, d) j^{-180}?

166. Was ergibt: a) $(-j)^{17}$, b) $-j^{18}$, c) $(-j)^{-20}$, d) $\frac{1}{j^5} + \frac{1}{j^7}$?

167. Es sind folgende Potenzen zu berechnen:

a) $(1 + j)^4$, b) $(2 - j)^5$, c) $(1 + 2j)^7$, d) $(3 - 6j)^4$.

168. Desgleichen:

a) $(1 + j)^{-6}$, b) $(2 - j)^{-4}$, c) $(1 + \sqrt{3}j)^{-3}$, d) $\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}\,j\right)^{-1}$.

169. Folgende Ausdrücke sind zu berechnen:

a) $\left(\frac{3 + 2j}{5 - 7j}\right)^2$, b) $(1 - 3j)^5 + (1 + 3j)^5$, c) $\frac{2 - 3j}{4 + j} - 2j$,

d) $\frac{(3 + j)(2 + j)}{2 + 3j}$, e) $\frac{2 + 3j}{4 - j} + \frac{2 - 3j}{1 + 4j}$.

170. Gegeben sind die konjugiert komplexen Zahlen $z = 2 + 3j$ und $\bar{z} = 2 - 3j$. Zu berechnen ist z^5 und $\bar{z}^5$. Was fällt an den Ergebnissen auf?

171. Welche der folgenden Zahlen erfüllen die Gleichung

$x^4 - 2x^3 - x^2 - 38x + 130 = 0$?

a) $-2 + 3j$, b) $1 - 2j$, c) $3 + j$.

11.4. Gaußsche Zahlenebene

Jede komplexe Zahl $a + bj$ $(a, b \in R)$ entspricht einem geordneten Zahlenpaar $(a; b)$ aus reellen Zahlen. Diese Beziehung der Menge der komplexen Zahlen zum Mengenprodukt $R \times R$ legt den Gedanken nahe, den komplexen Zahlen wie den Elementen von $R \times R$ mit Hilfe eines cartesischen Koordinatensystems[1]) die Punkte einer Ebene zuzuordnen.

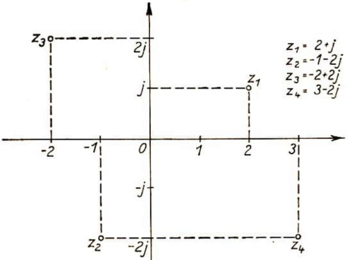


Bild 16

Der komplexen Zahl $a + bj$ entspricht dabei der Punkt mit der Abszisse a und der Ordinate b. Beispiele zeigt Bild 16. Die Bildebene wird **Gaußsche Zahlenebene** genannt.

Bei dieser Abbildung werden die reellen Zahlen $(b = 0)$ auf diejenigen Punkte der Ebene abgebildet, deren Ordinate 0 ist. Das sind die Punkte der Abszissenachse. Diese wird daher auch *reelle Achse* der Gaussschen Zahlenebene genannt.

---

[1]) Vgl. 26.2.

Die imaginären Zahlen ($a = 0$) dagegen werden auf die Punkte der Ebene abgebildet, deren Abszisse 0 ist. Das sind die Punkte der Ordinatenachse. Deswegen nennt man diese auch *imaginäre Achse* der GAUSSschen Zahlenebene.

Bei der Abbildung der komplexen Zahlen auf die Punkte der Zahlenebene entspricht jeder Zahl genau ein Punkt, und umgekehrt ist jeder Punkt genau einer Zahl zugeordnet. Es handelt sich also um eine *eineindeutige Abbildung* der Menge der komplexen Zahlen auf die Menge der Punkte der GAUSSschen Zahlenebene. Damit ist die Menge der komplexen Zahlen der Menge der Punkte in einer Ebene gleichmächtig.

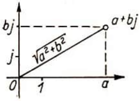


Bild 17

Auf Grund der Lage der komplexen Zahlen in der Ebene ist es nicht möglich, eine Ordnungsrelation wie das Kleinersein im Bereich der reellen Zahlen zu erklären. Für beliebige komplexe Zahlen haben die Zeichen $<$ und $>$ keinen Sinn. Man kann auch nicht von positiven oder negativen komplexen Zahlen sprechen. Trotzdem ist es möglich, den Begriff „absoluter Betrag" für komplexe Zahlen zu verallgemeinern. Man definiert ihn entsprechend seiner Bedeutung für reelle Zahlen als den Abstand des Bildpunktes einer komplexen Zahl vom Nullpunkt der Zahlenebene (vgl. Bild 17).

Definition

Unter dem Betrag $|z|$ der komplexen Zahl $z = a + b\mathrm{j}$ $(a, b \in R)$ versteht man den Wert $\sqrt{a^2 + b^2}$:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Nach der Erklärung der Wurzel ist der Betrag einer komplexen Zahl ebenso wie der einer reellen Zahl eine nicht negative reelle Zahl:

$$|z| \geqq 0.$$

Auch jetzt gilt das Gleichheitszeichen nur für $z = 0$, wie aus $a^2 + b^2 = 0$ sofort folgt.

BEISPIELE

1. $|1 + \mathrm{j}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \underline{\underline{\sqrt{2}}}.$
2. $|4 - 3\mathrm{j}| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = \underline{\underline{5}}.$
3. $|2\mathrm{j}| = \sqrt{0^2 + 2^2} = \underline{\underline{2}}.$

Für die geometrische Ausführung der Rechenoperationen in der GAUSSschen Zahlenebene erweist es sich als zweckmäßig, die komplexen Zahlen nicht durch Punkte, sondern durch Pfeile darzustellen. Man ordnet der Zahl $z = a + b\mathrm{j}$ denjenigen Pfeil zu, der vom Nullpunkt zum Punkt mit den Koordinaten $a; b$ geht (Bild 18). Die komplexen Zahlen erhalten dadurch einen neuen Aspekt, den Aspekt gerichteter Größen in einer Ebene (*zweidimensionale Vektoren*).

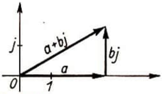


Bild 18

Realteil und Imaginärteil von z entsprechen den Komponenten des z darstellenden Pfeiles in Richtung der reellen und in Richtung der imaginären Achse. Da diese Komponenten nach 11.2. bei der Addition für sich addiert werden, kann die Summe zweier komplexer Zahlen geometrisch durch eine Parallelverschiebung des einen Pfeiles gewonnen werden (Bild 19):

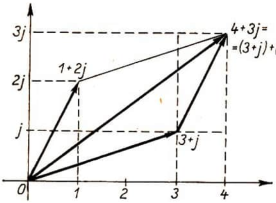


Bild 19

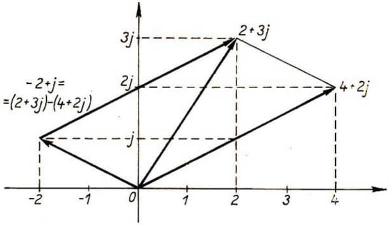


Bild 20

> Um die Summe zweier komplexer Zahlen geometrisch zu bilden, wird der den einen Summanden darstellende Pfeil so parallel verschoben, daß sein Anfang auf der Spitze des den anderen Summanden darstellenden Pfeiles liegt. Der vom Nullpunkt zur Spitze des verschobenen Pfeiles reichende Pfeil stellt die Summe dar.

Auf analogem Wege kann auch die Subtraktion ausgeführt werden (Bild 20):

> Um die Differenz zweier komplexer Zahlen geometrisch zu bilden, wird der den Subtrahenden darstellende Pfeil so parallel verschoben, daß seine Spitze auf der Spitze des den Minuenden darstellenden Pfeiles liegt. Der vom Nullpunkt zum Anfang des verschobenen Pfeiles reichende Pfeil stellt die Differenz dar.

AUFGABEN

172. Von folgenden komplexen Zahlen sind die Beträge zu bestimmen:

a) $3 + 2j$, b) $3 - 2j$, c) $\sqrt{7} + \sqrt{2}\,j$, d) $a + aj$, e) $5j$, f) $-1 - j$.

173. Wo liegen die Zahlen z in der Gaussschen Zahlenebene, für die gilt

a) $|z| = 1$, b) $|z| < 1$, c) $|z| > 1$, d) $|z| = r \quad (r > 0)$?

174. Wie kann $|z_1 - z_2|$ für zwei komplexe Zahlen z_1 und z_2 in der Gaussschen Zahlenebene gedeutet werden?

175. Wo liegen die Zahlen z in der Gaussschen Zahlenebene, für die gilt

a) $|z - 2| = 1$, b) $|z + 3| \leqq 2$, c) $|z - (1 + j)| > 1$?

176. Welcher Bedingung genügen die Zahlen z, die in der Gaussschen Zahlenebene

a) auf einem Kreis um die Zahl $-2 + j$ mit dem Radius 4,
b) innerhalb eines Kreises um die Zahl j mit dem Radius 1,
c) auf einem Kreis um die Zahl z_0 mit dem Radius r liegen?

177. Gegeben sind die Ungleichung $|z-1| \leqq 1$ mit der Erfüllungsmenge E_1 und die Ungleichung $|z-2\mathrm{j}| \leqq 2$ mit der Erfüllungsmenge E_2. Es sind in der Gaussschen Zahlenebene die Punktmengen

a) $E_1 \cup E_2$, b) $E_1 \cap E_2$, c) $E_1 \setminus E_2$

darzustellen.

178. Für zwei beliebige komplexe Zahlen $z_1 = a_1 + b_1\mathrm{j}$ und $z_2 = a_2 + b_2\mathrm{j}$ ist zu beweisen:

a) die Gültigkeit der Dreiecksungleichung

$$|z_1 + z_2| \leqq |z_1| + |z_2|,$$

b) die Gültigkeit der Gleichung $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

179. Welche Eigenschaften besitzen die auf folgende Weisen erklärten Abbildungen, und wie wirken sie sich in der Gaussschen Zahlenebene aus:

a) $z = a + b\mathrm{j} \to \bar{z} = a - b\mathrm{j}$,

b) $z = a + b\mathrm{j} \to -z = -a - b\mathrm{j}$.

11.5. Goniometrische Form komplexer Zahlen

Es lohnt sich, der Darstellung komplexer Zahlen durch Pfeile auch rechnerisch nachzugehen. Ein Pfeil, oder — wie der Fachausdruck dafür lautet — ein *Vektor*, wird gewöhnlich durch zwei Angaben bestimmt: seine Länge und seine Richtung. Die Länge r stimmt mit dem bereits erklärten Betrag der komplexen Zahl überein. Die Richtung wird am besten durch den mit der reellen Achse eingeschlossenen Winkel φ bestimmt (Bild 21). Er wird von der Achse aus im mathematisch positiven Drehsinn[1]) gemessen und kann im Bereich von 0° bis 360° angegeben werden.

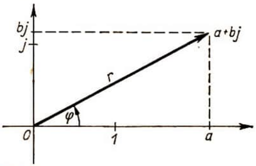


Bild 21

Es ist leicht, zu gegebenem Realteil a und Imaginärteil b einer komplexen Zahl die Größen r und φ zu errechnen. Für r wurde bereits in 11.4. die Formel aufgestellt:

$$r = |a + b\mathrm{j}| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Der Winkel φ ergibt sich aus der Beziehung

$$\tan \varphi = \frac{b}{a}.$$

Weil dabei zu einem Wert b/a zwei Winkel gehören, die sich um 180° unterscheiden, muß die Vorzeichenkombination von a und b zu Hilfe genommen werden, um φ eindeutig festzulegen.

BEISPIEL

1. $a = -2, \quad b = 2$:

$$r = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8} = \underline{\underline{2\sqrt{2}}}, \quad \tan \varphi = \frac{2}{-2} = \underline{\underline{-1}}.$$

[1]) das ist entgegen dem Uhrzeigersinn

Für φ kommen demnach die Werte 135° und 315° in Betracht. Wegen des negativen Realteils und des positiven Imaginärteils liegt der die Zahl darstellende Pfeil im zweiten Quadranten. Damit ist $\underline{\underline{\varphi = 135°}}$.

Umgekehrt kann eine komplexe Zahl durch die Werte r und φ gegeben werden. Nach Bild 21 folgen daraus für a und b die Darstellungen

$$a = r \cos \varphi \quad \text{und} \quad b = r \sin \varphi .$$

Für die komplexe Zahl $z = a + b\mathrm{j}$ ergibt sich somit die Form

$$z = r \cos \varphi + \mathrm{j} r \sin \varphi = r(\cos \varphi + \mathrm{j} \sin \varphi).$$

Satz

Jede komplexe Zahl z läßt sich in der Gestalt

$$\boxed{z = r(\cos \varphi + \mathrm{j} \sin \varphi)} \quad (r \in R, r \geqq 0, \quad 0° \leqq \varphi < 360°) \tag{13}$$

darstellen. r heißt *Modul* und φ *Argument* von z.
$r(\cos \varphi + \mathrm{j} \sin \varphi)$ wird **goniometrische Form** der komplexen Zahl z genannt.

Im Gegensatz dazu heißt $a + b\mathrm{j}$ **arithmetische Form** einer komplexen Zahl.

BEISPIELE

2. Wie heißt die goniometrische Form der komplexen Zahl

$$z = -2 + 2\sqrt{3}\,\mathrm{j}\,?$$

Lösung: Es ist $a = -2$, $b = 2\sqrt{3}$. Daraus ergibt sich $r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4 + 12} = 4;$

$$\tan \varphi = \frac{2\sqrt{3}}{-2} = -\sqrt{3}.$$

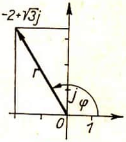


Bild 22

Die Zahl z liegt im zweiten Quadranten (vgl. Bild 22): $\varphi = 120°$:

$$-2 + 2\sqrt{3}\,\mathrm{j} = \underline{\underline{4(\cos 120° + \mathrm{j} \sin 120°)}}.$$

3. Wie heißt die arithmetische Form der komplexen Zahl

$$z = 7(\cos 60° + \mathrm{j} \sin 60°)?$$

Lösung: $a = 7 \cos 60° = \dfrac{7}{2}$, $b = 7 \sin 60° = \dfrac{7}{2}\sqrt{3}$.

$$z = \underline{\underline{\frac{7}{2} + \frac{7}{2}\sqrt{3}\,\mathrm{j}}}.$$

AUFGABEN

180. Folgende komplexe Zahlen sind in die goniometrische Form zu bringen:

a) $1 - \sqrt{3}\,\mathrm{j}$, b) $-1 - \mathrm{j}$, c) $8 + 15\mathrm{j}$, d) $-\mathrm{j}$, e) 2.

181. Folgende Zahlen sind in die arithmetische Form zu übertragen:

a) $3(\cos 30° + \mathrm{j}\sin 30°)$, b) $4(\cos 135° + \mathrm{j}\sin 135°)$, c) $9(\cos 330° + \mathrm{j}\sin 330°)$,
d) $\sqrt{2}(\cos 45° + \mathrm{j}\sin 45°)$, e) $5(\cos 180° + \mathrm{j}\sin 180°)$.

182. Wie heißt die goniometrische Form der Zahlen

a) $z = r(\cos\varphi - \mathrm{j}\sin\varphi)$,
b) $z = -r(\cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi)$ $(r \geqq 0)$?

183. Wie können konjugiert komplexe Zahlen hinsichtlich Betrag und Argument gekennzeichnet werden?

11.6. Multiplikation, Division und Potenzieren in der Gaußschen Zahlenebene

Multipliziert man zwei komplexe Zahlen z und z' in ihrer goniometrischen Form

$$z = r(\cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi), \quad z' = r'(\cos\varphi' + \mathrm{j}\sin\varphi'),$$

so ergibt sich:

$$\begin{aligned} z \cdot z' &= r \cdot r'(\cos\varphi\cos\varphi' + \mathrm{j}\cos\varphi\sin\varphi' + \mathrm{j}\sin\varphi\cos\varphi' + \mathrm{j}^2\sin\varphi\sin\varphi') \\ &= r \cdot r'[\cos\varphi\cos\varphi' - \sin\varphi\sin\varphi' + \mathrm{j}(\sin\varphi\cos\varphi' + \cos\varphi\sin\varphi')]. \end{aligned}$$

Auf diesen Ausdruck können die Additionstheoreme (vgl. (57) und (58))

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,$$
$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

der Goniometrie angewendet werden. Man erhält dadurch

$$z \cdot z' = r \cdot r'[\cos(\varphi + \varphi') + \mathrm{j}\sin(\varphi + \varphi')].$$

Dies ist die goniometrische Form der komplexen Zahl mit dem Betrag $r \cdot r'$ und dem Argument $\varphi + \varphi'$.

Satz

Der *Betrag eines Produktes* komplexer Zahlen ist gleich dem Produkt ihrer Beträge, das *Argument des Produktes* ist gleich der Summe der Argumente der Faktoren:

$$\boxed{z \cdot z' = r \cdot r'[\cos(\varphi + \varphi') + \mathrm{j}\sin(\varphi + \varphi')]} \tag{14}$$

Dieser Sachverhalt läßt sich geometrisch leicht deuten: Bei der Multiplikation mit z' wird der z darstellende Pfeil um den Winkel φ' gedreht und im Verhältnis $r':1$ gestreckt. Man spricht daher von einer **Drehstreckung**.

Bild 23 stellt das Produkt $z \cdot z'$ nach diesen Angaben dar. Die beiden eingezeichneten Dreiecke sind ähnlich, denn sie stimmen im Winkel bei O überein, während das Verhältnis der anliegenden Seiten in beiden gleich ist $(rr':r = r':1)$. Deshalb sind in ihnen auch die übrigen Winkel, jeder dem entsprechenden des anderen Dreiecks, gleich. Auf Grund dieser Erkenntnis kann zz' auf folgende Weise konstruiert werden:

Geometrische Konstruktion des Produktes $z \cdot z'$

An den z darstellenden Pfeil trägt man in O das Argument von z' im mathematisch positiven Sinn an und findet damit die Richtung des zz' darstellenden Pfeiles. Dann bestimmt man den Winkel, der im Punkt 1 zwischen der Richtung zum Ursprung und zur Zahl z' liegt, und trägt ihn in z an den Pfeil an. Der Schnittpunkt der beiden konstruierten Winkelschenkel stellt das Produkt zz' dar.

Weil die Division die genaue Umkehrung der Multiplikation ist, können die entsprechenden Sätze für sie ohne zusätzliche Überlegungen formuliert werden:

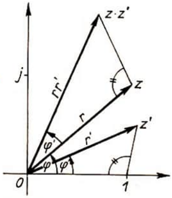


Bild 23

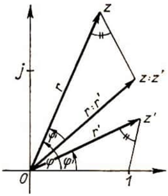


Bild 24

Satz

Der *Betrag eines Quotienten* komplexer Zahlen ist gleich dem von ihren Beträgen gebildeten Quotienten. Das *Argument des Quotienten* ist gleich der Differenz der Argumente von Dividend und Divisor:

$$\boxed{\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}\,[\cos(\varphi - \varphi') + \mathrm{j}\sin(\varphi - \varphi')]} \quad . \tag{15}$$

Geometrische Konstruktion des Quotienten $z:z'$ (Bild 24)

An den die Zahl z darstellenden Pfeil trägt man in O das Argument von z' im mathematisch negativen Sinn an und findet damit die Richtung des $z:z'$ darstellenden Pfeiles. Dann bestimmt man den Winkel, der im Punkt z' zwischen den Richtungen zum Ursprung und zur Zahl 1 liegt, und trägt ihn in z an den Pfeil an. Der Schnittpunkt der beiden konstruierten Winkelschenkel stellt den Quotienten $z:z'$ dar.

BEISPIEL

1. **Aus folgenden Zahlen z, z', z'' ist der Wert zz'/z'' zu bilden:**

$$z = 6\,(\cos 15^\circ + \mathrm{j}\sin 15^\circ),$$
$$z' = 10\,(\cos 45^\circ + \mathrm{j}\sin 45^\circ),$$
$$z'' = 15\,(\cos 75^\circ + \mathrm{j}\sin 75^\circ).$$

Lösung: $$\frac{z \cdot z'}{z''} = \frac{6 \cdot 10}{15}\,[\cos(15^\circ + 45^\circ - 75^\circ) + \mathrm{j}\sin(15^\circ + 45^\circ - 75^\circ)] =$$
$$= 4[\cos(-15^\circ) + \mathrm{j}\sin(-15)^\circ] =$$
$$= \underline{\underline{4\,(\cos 345^\circ + \mathrm{j}\sin 345^\circ)}}.$$

Bei der Berechnung von Potenzen erweist sich die goniometrische Form komplexer Zahlen der arithmetischen überlegen.
Das Quadrat der Zahl $z = r(\cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi)$ ist nach der Formel für Produkte

$$\begin{aligned} z\cdot z &= r\cdot r\,[\cos(\varphi+\varphi) + \mathrm{j}\sin(\varphi+\varphi)] = \\ &= r^2\cdot(\cos 2\varphi + \mathrm{j}\sin 2\varphi). \end{aligned}$$

Man vermutet daraufhin für z^n ($n \in N$, $n \geqq 2$) die Formel

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + \mathrm{j}\sin n\varphi). \tag{I}$$

Sie kann durch vollständige Induktion bewiesen werden:

a) Induktionsanfang: Für $n = 1$ und $n = 2$ gilt die Formel.

b) Schluß von k auf $k+1$: Angenommen, für die natürliche Zahl k sei bereits bewiesen

$$z^k = r^k(\cos k\varphi + \mathrm{j}\sin k\varphi).$$

Dann ergibt sich nach der Produktformel:

$$z^{k+1} = z^k\cdot z = r^k\cdot r\,[\cos(k\varphi+\varphi) + \mathrm{j}\sin(k\varphi+\varphi)],$$

also

$$z^{k+1} = r^{k+1}[\cos(k+1)\varphi + \mathrm{j}\sin(k+1)\varphi].$$

Die Behauptung gilt somit auch für $k+1$.

Durch die Teile a) und b) ist der Induktionsbeweis geliefert. Die Potenzformel ist ebenfalls richtig, wenn man für n die Zahl 0 einträgt:

$$z^0 = r^0(\cos 0\varphi + \mathrm{j}\sin 0\varphi) = 1(\cos 0 + \mathrm{j}\sin 0) = 1.$$

Ist der Exponent eine negative ganze Zahl, etwa $-n$ ($n \in N$), und die Basis verschieden von 0, so läßt sich der Potenzwert als Quotient errechnen:

$$z^{-n} = \frac{1}{z^n} = \frac{1(\cos 0 + \mathrm{j}\sin 0)}{r^n(\cos n\varphi + \mathrm{j}\sin n\varphi)} = r^{-n}[\cos(-n\varphi) + \mathrm{j}\sin(-n\varphi)].$$

Das Ergebnis beweist, daß die Formel (I) selbst für negativ ganze Exponenten gültig ist.

Satz

Der *Betrag der g-ten Potenz* ($g \in G$) einer komplexen Zahl ist gleich der g-ten Potenz ihres Betrages. Das *Argument der g-ten Potenz* ist gleich dem g-fachen ihres Argumentes:

$$\boxed{z^g = r^g(\cos g\varphi + \mathrm{j}\sin g\varphi)}\,,\quad g \in G. \tag{16}$$

BEISPIEL

2. Zu berechnen ist $(1 + j)^{20}$.

Lösung: $1 + j$ hat den Betrag $r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ und das Argument 45°, wie Bild 25 lehrt. Damit ist

$$1 + j = \sqrt{2}\,(\cos 45° + j \sin 45°)$$

und

$$(1+j)^{20} = \sqrt{2}^{20}(\cos 20 \cdot 45° + j \sin 20 \cdot 45°) =$$
$$= 2^{10}(\cos 900° + j \sin 900°) =$$
$$= 1024(\cos 180° + j \sin 180°) = \underline{\underline{-1024}}.$$

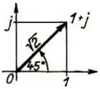


Bild 25

AUFGABEN

184. Mit den Zahlen

$$z = 12(\cos 300° + j \sin 300°),$$
$$z' = 8(\cos 135° + j \sin 135°),$$
$$z'' = 30(\cos 180° + j \sin 180°)$$

sind folgende Werte zu bilden:

a) $\dfrac{z}{z' z''}$, b) $\dfrac{z'}{z z''}$, c) $\dfrac{z''}{zz'}$.

185. Das Produkt $(1{,}37 + 2{,}14j) \cdot (0{,}97 - 1{,}73j)$ ist
a) in der arithmetischen Form,
b) in der goniometrischen Form,
c) geometrisch
zu bestimmen. Die Ergebnisse sind zu vergleichen.

186. Mit Hilfe der goniometrischen Form ist zu berechnen:

a) $(1 - j)^{13}$, b) $(1 + j)^{8}$, c) $(\sqrt{3} + j)^{9}$, d) $(1 + \sqrt{3}\,j)^{10}$, e) $\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\sqrt{3}j\right)^{23}$.

187. Wie ist aus den goniometrischen Formen der Faktoren ersichtlich, ob ein Produkt eine reelle Zahl ergibt?

188. Zu beweisen ist: Wird mit $\bar{z}$ allgemein die konjugiert komplexe Zahl zu z verstanden, so gilt stets:

$$\overline{z^n} = \bar{z}^n, \quad n \in N.$$

189. Welche Eigenschaften besitzt die Abbildung $z \to 1/z$, und welche Wirkung hat sie in der Gaussschen Zahlenebene.

11.7. Komplexe n-te Wurzeln einer Zahl

Während es im Körper der reellen Zahlen beispielsweise nur zwei Zahlen gibt, deren vierte Potenz 1 ist, enthält der Körper der komplexen Zahlen deren vier. Denn es ist

$$1^4 = 1, \quad j^4 = 1, \quad (-1)^4 = 1, \quad (-j)^4 = 1.$$

Die Gleichung $x^4 = 1$ hat also im Körper der komplexen Zahlen vier Lösungen.

Definition

Die Lösungen der Gleichung

$$x^n = z, \quad x \in C \quad (n \in N \setminus \{0\},\ z \in C)$$

heißen **komplexe n-te Wurzeln von z.**

Die Zahl 1 besitzt also die komplexen vierten Wurzeln 1, j, -1 und $-$j.
Für nicht negative reelle Werte von z ist unter den komplexen n-ten Wurzeln von z auch die Zahl $\sqrt[n]{z}$ als die n-te Wurzel von z schlechthin vertreten.
Die Lösungen der Gleichung $x^n = 1$ werden *komplexe n-te Einheitswurzeln* genannt.

BEISPIEL

1. Es sind alle komplexen vierten Wurzeln von $z = -8 + 8\sqrt{3}\,\mathrm{j}$ zu bestimmen.

Lösung: Nach der Definition sind die komplexen vierten Wurzeln von $-8 + 8\sqrt{3}\,\mathrm{j}$ die Lösungen der Gleichung

$$x^4 = -8 + 8\sqrt{3}\,\mathrm{j}, \quad x \in C.$$

Benutzt man die goniometrischen Darstellungen

$$x = \varrho\,(\cos\psi + \mathrm{j}\sin\psi),$$
$$-8 + 8\sqrt{3}\,\mathrm{j} = 16\,(\cos 120^\circ + \mathrm{j}\sin 120^\circ),$$

so lautet die Forderung

$$x^4 = \varrho^4(\cos 4\psi + \mathrm{j}\sin 4\psi) = 16(\cos 120^\circ + \mathrm{j}\sin 120^\circ).$$

Nun stimmen zwei von Null verschiedene komplexe Zahlen nur dann überein, wenn sie denselben Betrag besitzen und ihre Argumente höchstens um ein ganzzahliges Vielfaches des Vollwinkels voneinander abweichen. Also folgt:

$$\varrho^4 = 16 \text{ und wegen } \varrho \in R,\ \varrho \geqq 0 \text{ ergibt sich } \varrho = 2;$$
$$4\psi = 120^\circ + k \cdot 360^\circ (k \in G) \text{ und damit } \psi = 30^\circ + k \cdot 90^\circ.$$

Für k lohnen sich nur die Werte 0, 1, 2 und 3, da ab $k = 4$ mit $4 \cdot 90^\circ = 360^\circ$ nur bereits berechnete Werte wiederholt werden, was auch für $k = -1, -2, \ldots$ zutrifft. Daher gibt es genau vier verschiedene komplexe vierte Wurzeln von $-8 + 8\sqrt{3}\,\mathrm{j}$:

$$x_1 = 2(\cos 30^\circ + \mathrm{j}\sin 30^\circ) = \underline{\underline{\sqrt{3} + \mathrm{j}}},$$
$$x_2 = 2[\cos(30^\circ + 90^\circ) + \mathrm{j}\sin(30^\circ + 90^\circ)] = \underline{\underline{-1 + \sqrt{3}\,\mathrm{j}}},$$
$$x_3 = 2[\cos(30^\circ + 2 \cdot 90^\circ) + \mathrm{j}\sin(30^\circ + 2 \cdot 90^\circ)] = \underline{\underline{-\sqrt{3} - \mathrm{j}}},$$
$$x_4 = 2[\cos(30^\circ + 3 \cdot 90^\circ) + \mathrm{j}\sin(30^\circ + 3 \cdot 90^\circ)] = \underline{\underline{1 - \sqrt{3}\,\mathrm{j}}}.$$

Zur allgemeinen Berechnung der komplexen n-ten Wurzeln der Zahl z wird die Gleichung

$$x^n = z, \quad x \in C$$

mit Hilfe der goniometrischen Darstellungen

$$x = \varrho(\cos \psi + \mathrm{j} \sin \psi),$$
$$z = r(\cos \varphi + \mathrm{j} \sin \varphi)$$

untersucht. Die Forderung erhält die Form

$$x^n = \varrho^n(\cos n\psi + \mathrm{j} \sin n\psi) = r(\cos \varphi + \mathrm{j} \sin \varphi).$$

Daraus folgt:

$$\varrho^n = r \quad \text{und wegen} \quad \varrho \in R,\ \varrho \geqq 0\colon \varrho = \sqrt[n]{r}\,;$$
$$n\psi = \varphi + k \cdot 360^\circ\ (k \in G) \quad \text{und damit} \quad \psi = \frac{\varphi}{n} + k \cdot \frac{360^\circ}{n}.$$

Hier genügt es, für k die Werte $0, 1, 2, \ldots, n-1$ einzusetzen. Bei $k = -1, -2, \ldots$ oder $k = n, n+1, \ldots$ entstehen dann nur Wiederholungen.

Satz

Jede von Null verschiedene komplexe Zahl

$$z = r(\cos \varphi + \mathrm{j} \sin \varphi)$$

besitzt genau n verschiedene komplexe n-te Wurzeln ($n \in N \setminus \{0\}$). Der *Betrag einer komplexen n-ten Wurzel* von z ist gleich der n-ten Wurzel aus dem Betrag von z. Die *Argumente der komplexen n-ten Wurzeln* erhält man, indem man zum Argument von z das k-fache ($k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$) des Vollwinkels addiert und die Summen durch n teilt:

$$\boxed{x_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos \frac{\varphi + k \cdot 360^\circ}{n} + \mathrm{j} \sin \frac{\varphi + k \cdot 360^\circ}{n}\right), \quad k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}} \tag{17}$$

BEISPIEL

2. Es sind alle komplexen sechsten Einheitswurzeln zu bestimmen.

Lösung: 1 besitzt die goniometrische Darstellung

$$1 = 1(\cos 0^\circ + \mathrm{j} \sin 0^\circ) \quad (r = 1, \quad \varphi = 0^\circ).$$

Daraus ergibt sich nach dem Satz jede der komplexen sechsten Wurzeln zu

$$x_k = \sqrt[6]{1}\left(\cos \frac{k \cdot 360^\circ}{6} + \mathrm{j} \sin \frac{k \cdot 360^\circ}{6}\right), \quad k \in \{0, 1, 2, \ldots, 5\}.$$

Es ist somit

$$x_0 = \sqrt[6]{1}\,(\cos 0^\circ + \mathrm{j} \sin 0^\circ) = \underline{\underline{1}},$$
$$x_1 = \sqrt[6]{1}\left(\cos \frac{360^\circ}{6} + \mathrm{j} \sin \frac{360^\circ}{6}\right) = \underline{\underline{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\,\mathrm{j}}},$$

$$x_2 = \sqrt[6]{1}\left(\cos\frac{720^\circ}{6} + \mathrm{j}\sin\frac{720^\circ}{6}\right) = \underline{\underline{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\,\mathrm{j}}},$$

$$x_3 = \sqrt[6]{1}\left(\cos\frac{1080^\circ}{6} + \mathrm{j}\sin\frac{1080^\circ}{6}\right) = \underline{\underline{-1}},$$

$$x_4 = \sqrt[6]{1}\left(\cos\frac{1440^\circ}{6} + \mathrm{j}\sin\frac{1440^\circ}{6}\right) = \underline{\underline{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\,\mathrm{j}}},$$

$$x_5 = \sqrt[6]{1}\left(\cos\frac{1800^\circ}{6} + \mathrm{j}\sin\frac{1800^\circ}{6}\right) = \underline{\underline{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\,\mathrm{j}}}.$$

Bild 26 stellt die Ergebnisse grafisch dar.

AUFGABEN

190. Zu bestimmen sind:
 a) die komplexen dritten Wurzeln von $-\frac{1}{2}\sqrt{2}\,(1-\mathrm{j})$,
 b) die komplexen Quadratwurzeln von $-1+\sqrt{3}\,\mathrm{j}$,
 c) die komplexen dritten Wurzeln von -1,
 d) die komplexen Quadratwurzeln von j,
 e) die komplexen achten Einheitswurzeln,
 f) die komplexen sechsten Wurzeln von $-8\mathrm{j}$,
 g) die komplexen dritten Wurzeln von $5-\mathrm{j}$.
191. Welche Darstellung ergibt sich aus der Formel (17) für die komplexen n-ten Einheitswurzeln?

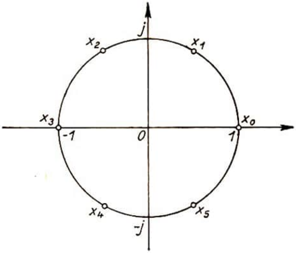


Bild 26

192. Wo liegen die komplexen n-ten Einheitswurzeln in der GAUSSschen Zahlenebene?
193. Für welche Rechenoperationen verwendet man a) die arithmetische, b) die goniometrische Form komplexer Zahlen?

11.8. Algebraische Gleichungen im Komplexen

Definition

Eine **algebraische Gleichung** mit einer Variablen x ist eine Gleichung der Form

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0,$$

wobei $a_0, a_1, \ldots, a_n$ gegebene Zahlen sind. Ist $a_n \neq 0$, so sagt man, die Gleichung sei von *n-tem Grad*. Die Lösungen werden auch als *Wurzeln* der algebraischen Gleichung bezeichnet.

Quadratische Gleichungen sind algebraische Gleichungen zweiten Grades.

Beispiele für algebraische Gleichungen:

$x^3 - 2x^2 + {}^1/_2 x = 0$, dritten Grades;
$3x^7 - x + 1 = 0$, siebenten Grades;
${}^1/_{10}x^{10} + 3x^5 - 2x = 0$, zehnten Grades.

Nur in seltenen Fällen ist es möglich, die Lösungen einer algebraischen Gleichung durch eine Formel darzustellen. Die algebraischen Gleichungen bis einschließlich vierten Grades gehören zu diesen Ausnahmen. Im allgemeinen gestaltet sich die Lösung ziemlich schwierig.

BEISPIEL

Es ist die Erfüllungsmenge der Gleichung

$$x^6 - 4x^3 + 8 = 0, \quad x \in C$$

zu bestimmen.

Lösung: Es handelt sich um eine algebraische Gleichung sechsten Grades, die aber nur die Potenzen x^3 und $x^6 = (x^3)^2$ der Variablen x enthält. Deshalb berechnet man zunächst x^3 und ersetzt es dazu durch die neue Variable z. Es ergibt sich die quadratische Gleichung

$$z^2 - 4z + 8 = 0, \quad z \in C.$$

In ihr ist $p^2/4 - q = 4 - 8 < 0$, also ergibt sich (vgl. 11.1.)

$$z_{1;2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}\,\mathrm{j} = 2 \pm 2\mathrm{j}.$$

Nun wurde $z = x^3$ gesetzt, demnach ist x aus den Gleichungen

$$x^3 = 2 + 2\mathrm{j} \quad \text{und} \quad x^3 = 2 - 2\mathrm{j}$$

zu bestimmen. Aus der ersten ergibt sich

$$x^3 = 2\sqrt{2}\,(\cos 45^\circ + \mathrm{j}\sin 45^\circ),$$

$$x_1 = \sqrt{2}\,(\cos 15^\circ + \mathrm{j}\sin 15^\circ) \approx \underline{\underline{1{,}37 + 0{,}37\mathrm{j}}},$$

$$x_2 = \sqrt{2}\,[\cos(15^\circ + 120^\circ) + \mathrm{j}\sin(15^\circ + 120^\circ)] = \underline{\underline{-1 + \mathrm{j}}},$$

$$x_3 = \sqrt{2}\,[\cos(15^\circ + 240^\circ) + \mathrm{j}\sin(15^\circ + 240^\circ)] \approx \underline{\underline{-0{,}37 - 1{,}37\mathrm{j}}}.$$

Aus der zweiten erhält man

$$x^3 = 2\sqrt{2}\,(\cos 315^\circ + \mathrm{j}\sin 315^\circ),$$

$$x_4 = \sqrt{2}\,(\cos 105^\circ + \mathrm{j}\sin 105^\circ) \approx \underline{\underline{-0{,}37 + 1{,}37\mathrm{j}}},$$

$$x_5 = \sqrt{2}\,[\cos(105^\circ + 120^\circ) + \mathrm{j}\sin(105^\circ + 120^\circ)] = \underline{\underline{-1 - \mathrm{j}}},$$

$$x_6 = 2\,[\cos(105^\circ + 240^\circ) + \mathrm{j}\sin(105^\circ + 240^\circ)] \approx \underline{\underline{1{,}37 - 0{,}37\mathrm{j}}}.$$

Das Beispiel zeigt, daß die algebraische Gleichung sechsten Grades $x^6 - 4x^3 + 8 = 0$, die im Körper der reellen Zahlen keine Lösung besitzt (die reellen Lösungen müßten nämlich unter den komplexen vorkommen), im Körper der komplexen Zahlen sechs Lösungen hat. Dies kennzeichnet eindrucksvoll die Überlegenheit des Körpers der komplexen Zahlen gegenüber dem Körper der reellen Zahlen.

Nach dem Fundamentalsatz der Algebra (vgl. 18.2.) ist die Lösungsmenge einer algebraischen Gleichung mit dem Körper der komplexen Zahlen als Variablenbereich niemals leer. Im Körper der komplexen Zahlen hat also nicht nur, wie am Anfang beabsichtigt, jede quadratische Gleichung, sondern darüber hinaus jede algebraische Gleichung mindestens eine Lösung.

AUFGABEN

194. Welche Rechenoperationen dürfen in einer algebraischen Gleichung auf die Variable angewendet sein?
195. Es sind die Erfüllungsmengen folgender algebraischer Gleichungen zu bestimmen:

a) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$, b) $x^4 - 4x^2 + 16 = 0$, c) $x^8 + 4x^4 + 16 = 0$.

11.9. Logarithmen und Exponentialform komplexer Zahlen

Bei der Definition des Begriffes „natürlicher Logarithmus einer komplexen Zahl"[1]) ist folgendes zu berücksichtigen:

1. Soll der natürliche Logarithmus der komplexen Zahl z wieder die Zahl sein, die an die Basis e gesetzt den Potenzwert z ergibt, so darf er keine reelle Zahl sein. Denn alle Potenzen von e mit reellen Exponenten sind positive reelle Zahlen. Der natürliche Logarithmus einer komplexen Zahl muß also als komplexe Zahl definiert werden.
2. Sollen für die natürlichen Logarithmen komplexer Zahlen die Logarithmengesetze Gültigkeit besitzen, so ergibt sich aus der goniometrischen Darstellung

$$z = r(\cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi)$$

des Logarithmanden für $r \neq 0$ die Formel

$$\ln z = \ln r + \ln(\cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi).$$

Darin ist $\ln r$ bereits als reelle Zahl definiert.
3. Bei der Multiplikation, der Division oder beim Potenzieren komplexer Zahlen werden die Argumente addiert, beziehungsweise subtrahiert oder vervielfacht. Die Argumente tragen demnach logarithmischen Charakter.

Die einfachste Definition, die dieser Sachlage gerecht wird, ist folgende:

Definition

Unter dem natürlichen Logarithmus der von 0 verschiedenen[2]) komplexen Zahl

$$z = r(\cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi)$$

versteht man die komplexe Zahl

$$\ln z = \ln r + \mathrm{j}\varphi.$$

[1]) Andere als natürliche Logarithmen komplexer Zahlen werden kaum benötigt
[2]) Der Logarithmus von 0 kann auch im Komplexen nicht erklärt werden

Der Realteil des Logarithmus $\ln z$ ist der natürliche Logarithmus des Betrages von z, der Imaginärteil ist das Argument von z. Da das Argument einer komplexen Zahl z nur bis auf ganzzahlige Vielfache von 2π bestimmt ist, gibt es unendlich viele Werte $\ln z$, die sich um ganzzahlige Vielfache von $2\pi\mathrm{j}$ unterscheiden.
Die früher für positive reelle Numeri gegebene Definition ist in der neuen enthalten: Ist z eine positive reelle Zahl, so lautet die goniometrische Darstellung $z = r(\cos 0 + \mathrm{j}\sin 0)$, und nach der neuen Definition ist $\ln z = \ln r + \mathrm{j}\cdot 0 = \ln r$.
Im Logarithmus wird das Argument des Logarithmanden in der Regel durch die Maßzahl des in der Einheit Radiant gemessenen Winkels (Bogenmaß, vgl. Abschnitt 21.) angegeben.

BEISPIELE

1. $z = 1 + \mathrm{j} = \sqrt{2}\,(\cos 45° + \mathrm{j}\sin 45°)$.

$$\ln z = \ln\sqrt{2} + \frac{\pi}{4}\mathrm{j} = \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{4}\mathrm{j} \approx \underline{\underline{0{,}347 + 0{,}785\,\mathrm{j}}}.$$

2. $z = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\sqrt{3}\,\mathrm{j} = 1(\cos 240° + \mathrm{j}\sin 240°)$.

$$\ln z = \ln 1 + \frac{4}{3}\pi\mathrm{j} = 0 + \frac{4}{3}\pi\mathrm{j} = \frac{4}{3}\pi\mathrm{j} \approx \underline{\underline{4{,}189\,\mathrm{j}}}.$$

3. $z = 3\mathrm{j} = 3(\cos 90° + \mathrm{j}\sin 90°)$.

$$\ln z = \ln 3 + \frac{\pi}{2}\mathrm{j} \approx \underline{\underline{1{,}099 + 1{,}571\,\mathrm{j}}}.$$

4. $z = -2 = 2(\cos 180° + \mathrm{j}\sin 180°)$.

$$\ln z = \ln 2 + \pi\mathrm{j} \approx \underline{\underline{0{,}693 + 3{,}142\,\mathrm{j}}}.$$

Für die natürlichen Logarithmen komplexer Zahlen gelten alle in 9.3. aufgeführten Logarithmengesetze. Hier sei nur das erste bewiesen:

$$\ln(z\cdot z') = \ln z + \ln z'.$$

Beweis: Es sei $z = r(\cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi)$, $z' = r'(\cos\varphi' + \mathrm{j}\sin\varphi')$. Dann ist $z\cdot z' = rr'[\cos(\varphi+\varphi') + \mathrm{j}\sin(\varphi+\varphi')]$. Die behauptete Formel sagt demnach:

$$\ln(rr') + (\varphi+\varphi')\mathrm{j} = (\ln r + \varphi\mathrm{j}) + (\ln r' + \varphi'\mathrm{j}).$$

Für die positiven reellen Zahlen r und r' wurde aber die Umformung $\ln(rr') = \ln r + \ln r'$ bereits bewiesen.
In Übereinstimmung mit der Erklärung der natürlichen Logarithmen komplexer Zahlen werden Potenzen zur Basis e mit komplexen Exponenten definiert:

Definition

Unter der Potenz $\mathrm{e}^{a+b\mathrm{j}}$ versteht man den Wert

$$\mathrm{e}^{a}(\cos b + \mathrm{j}\sin b).$$

Die Erklärung der Potenzen mit beliebigen komplexen Exponenten beschränkt sich allein auf die Basis e.

BEISPIELE

5. $e^{1+\frac{2}{3}\pi j} = e^1\left(\cos\frac{2}{3}\pi + j\sin\frac{2}{3}\pi\right) = e\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}\,j\right) \approx \underline{\underline{-1{,}359 + 2{,}354j}}.$

6. $e^{2-3j} = e^2(\cos(-3) + j\sin(-3)) \approx e^2[\cos(-171°53') + j\sin(-171°53')] \approx$
$\approx 7{,}389(-0{,}990 - 0{,}131j) \approx \underline{\underline{-7{,}315 - 0{,}970j}}.$

7. $e^j = e^0(\cos 1 + j\sin 1) \approx 1(\cos 57°17' + j\sin 57°17') \approx \underline{\underline{0{,}542 + 0{,}841j}}.$

Die neu erklärten Potenzen und Logarithmen stehen in dem gewohnten Zusammenhang:

Der natürliche Logarithmus $\ln z$ der komplexen Zahl z ist der Exponent, der an die Basis e gesetzt den Potenzwert z ergibt.

Beweis: Sei $z = r(\cos\varphi + j\sin\varphi)$. Dann ist nach Definition der Logarithmen $\ln z = \ln r + j\varphi$, nach Definition der Potenzen aber

$$e^{\ln r + j\varphi} = e^{\ln r}(\cos\varphi + j\sin\varphi) = r(\cos\varphi + j\sin\varphi) = z.$$

Da zu jeder komplexen Zahl, die Null ausgenommen, ein natürlicher Logarithmus erklärt ist, können alle komplexen Zahlen mit Ausnahme der Null als e-Potenzen geschrieben werden:

$$\boxed{z = r(\cos\varphi + j\sin\varphi) = e^{\ln r + j\varphi}} \tag{18}$$

$e^{\ln r + j\varphi}$ heißt **Exponentialform** der komplexen Zahl z.
Um die Exponentialform einer komplexen Zahl zu gewinnen, muß ihr natürlicher Logarithmus gebildet werden.

BEISPIEL

8. Es ist die Exponentialform der komplexen Zahl $2 + 2j$ herzustellen.

Lösung: $z = 2 + 2j = \sqrt{8}\,(\cos 45° + j\sin 45°)$.

$$\ln z = \frac{1}{2}\ln 8 + \frac{\pi}{4}j \approx 1{,}040 + 0{,}785j.$$

$$\underline{\underline{z \approx e^{1{,}040+0{,}785j}}}.$$

Für die Potenzen der Zahl e mit komplexen Exponenten gelten alle in 9.1. genannten Potenzgesetze. Als Beispiel sei nur das Gesetz über das Potenzieren von Potenzen bewiesen. Es besagt hier lediglich

$$(e^z)^g = e^{z\cdot g} \quad (z \in C,\ g \in G),$$

weil von der komplexen Zahl e^z nur Potenzen mit ganzzahligen Exponenten gebildet werden dürfen.

Beweis: Mit $z = a + b\mathrm{j}$ gilt:

$$\begin{aligned}(\mathrm{e}^z)^g = (\mathrm{e}^{a+b\mathrm{j}})^g &= (\mathrm{e}^a(\cos b + \mathrm{j}\sin b))^g \\ &= \mathrm{e}^{ga}(\cos gb + \mathrm{j}\sin gb).\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ergibt sich aber auch für $e^{gz} = \mathrm{e}^{ga+gb\mathrm{j}}$.

Ihrer Kürze und bequemen Handhabung wegen wird die **Exponentialform komplexer Zahlen bei multiplikativen Rechnungen gern angewendet.**

BEISPIEL

9. $$\left(\mathrm{e}^{2+\frac{\pi}{6}\mathrm{j}}\cdot \mathrm{e}^{3-\frac{\pi}{12}\mathrm{j}}\right)^{-4} = \left(\mathrm{e}^{5+\frac{\pi}{12}\mathrm{j}}\right)^{-4} = \mathrm{e}^{-20-\frac{\pi}{3}\mathrm{j}}.$$

Die Exponentialform komplexer Zahlen erlaubt einige wichtige *Folgerungen.* Auf Grund der Definition der e-Potenzen ist

$$\mathrm{e}^{0+\mathrm{j}\varphi} = \mathrm{e}^0(\cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi),$$

das heißt

$$\boxed{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi} \qquad (19)$$

Diese Beziehung hat den Namen **Eulersche Formel.**
Wird in ihr φ durch $-\varphi$ ersetzt, so ergibt sich

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi} = \cos(-\varphi) + \mathrm{j}\sin(-\varphi),$$

$$\boxed{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi} = \cos\varphi - \mathrm{j}\sin\varphi}\,. \qquad (19\mathrm{a})$$

Durch Addition der Formeln (19) und (19a) folgt

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi} = 2\cos\varphi,$$

durch Subtraktion

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi} = 2\mathrm{j}\sin\varphi.$$

Aus diesen beiden Zeilen lassen sich folgende interessante Beziehungen ableiten:

$$\boxed{\begin{aligned}\sin\varphi &= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi}}{2\mathrm{j}}, \\ \cos\varphi &= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi}}{2}\end{aligned}} \qquad (20)$$

Sie stellen die Verbindung zwischen den Exponentialfunktionen und den trigonometrischen Funktionen her.

AUFGABEN

196. Von folgenden Zahlen sind die natürlichen Logarithmen zu bestimmen:

a) $\sqrt{3} + \mathrm{j}$, b) $-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\mathrm{j}$, c) $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\,\mathrm{j}$, d) $3 - 4\mathrm{j}$, e) $2 + 3\mathrm{j}$, f) $-\mathrm{j}$.

197. Für Logarithmen komplexer Zahlen z und z' sind folgende Logarithmengesetze zu beweisen:

a) $\ln \frac{z}{z'} = \ln z - \ln z'$, b) $\ln z^n = n \cdot \ln z \quad (n \in N)$.

198. Wo liegen alle komplexen Zahlen, deren Logarithmen rein imaginär sind?

199. Für komplexe Exponenten z und z' ist das Potenzgesetz

$$e^z \cdot e^{z'} = e^{z+z'}$$

zu beweisen.

200. Es ist die Exponentialform folgender komplexer Zahlen zu bilden:

a) $3(\cos 15° + \mathrm{j} \sin 15°)$, b) -2, c) $-\frac{1}{2} + \mathrm{j}$.

201. Wie lautet die arithmetische Form folgender komplexer Zahlen:

a) $e^{-1+\frac{3}{2}\pi \mathrm{j}}$, b) $e^{\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}\mathrm{j}}$, c) $e^{-0{,}732+0{,}123\,\mathrm{j}}$.

202. Folgende Ausdrücke sind zu vereinfachen:

a) $\left(\frac{e^{2+3\mathrm{j}}}{e^{5-\mathrm{j}}}\right)^2$, b) $\frac{e^{2-\mathrm{j}} \cdot e^{\frac{1}{2}-2\mathrm{j}}}{e^{3-3\mathrm{j}}} \sqrt{e}$, c) $\left(e^{\pi(1+\mathrm{j})} \cdot e^{\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\mathrm{j}\right)}\right)^5$.

203. Mit den Formeln (20) sind folgende Beziehungen zu beweisen:

a) das Additionstheorem

$$\sin(\varphi + \psi) = \sin\varphi \cos\psi + \cos\varphi \sin\psi,$$

b) die Doppelwinkelformel

$$\cos 2\varphi = 1 - 2\sin^2\varphi.$$

Überblick über die Zahlenbereiche

Bereich	Abkürzung	Zahlen	Unbeschränkt ausführbare Rechenoperationen
Bereich der natürlichen Zahlen	N	$0, 1, 2, 3, \ldots$	Addition, Multiplikation
Bereich der ganzen Zahlen	G	$\ldots, -1, 0, 1, \ldots$	Addition, Multiplikation, Subtraktion
Körper der rationalen Zahlen	K	$\frac{g}{n} \quad (g \in G,\ n \in N \setminus \{0\})$	Addition, Multiplikation, Subtrakt., Division
Körper der reellen Zahlen	R	unendliche Dezimalbrüche	Addition, Multiplikation, Subtraktion, Division, Limesbildung
Körper der komplexen Zahlen	C	$a + b\mathrm{j} \quad (a, b \in R,\ \mathrm{j}^2 = -1)$	Addition, Multiplikation, Subtraktion, Division, Limesbildung, Erfüllen algebraischer Gleichungen

12. Allgemeines über Gleichungen

12.1. Aufbau von Gleichungen

Die grundlegenden Begriffe Term, Definitionsbereich des Terms, Gleichung und Lösungsmenge wurden bereits im Abschnitt 7. eingeführt. Danach wird eine Gleichung durch Gleichsetzen zweier Terme, von denen mindestens einer mindestens eine Variable enthalten muß, gebildet:

$$T_1(x, y, \ldots) = T_2(x, y, \ldots).$$

Unter dem *Definitionsbereich der Gleichung* ist die Durchschnittsmenge der durch die Definitionsbereiche der einzelnen Terme gegebenen Mengen zu verstehen.

BEISPIEL

1. Es ist der im Körper der reellen Zahlen gelegene Definitionsbereich von

$$\frac{1}{2x-3} = \sqrt{2x-1}$$

zu bestimmen.

Lösung: Definitionsbereich X_1 des Terms $\frac{1}{2x-3}$:

Die Variable x darf nur mit den Zahlen belegt werden, für die der Nenner des Terms von Null verschieden ist:

$$X_1 = R \setminus \{3/2\}.$$

Definitionsbereich X_2 des Terms $\sqrt{2x-1}$:

Da Wurzeln nur für nichtnegative Radikanden definiert sind, ergibt sich:

$$X_2 = [1/2; +\infty).$$

Definitionsbereich der Gleichung:

$$\underline{\underline{X = X_1 \cap X_2 = [1/2; +\infty) \setminus \{3/2\}.}}$$

Werden die Variablen einer Gleichung mit irgendwelchen Elementen des Definitionsbereiches belegt, so ergibt sich eine wahre oder falsche *Aussage*, je nachdem ob die auf beiden Seiten der Gleichung stehenden Terme gleiche oder ungleiche Werte annehmen.

Allgemein wird ein Ausdruck, der bei einer Belegung der in ihm enthaltenen Variablen in eine Aussage übergeht, *Aussageform* genannt. Eine Gleichung ist in diesem Sinne eine Aussageform.
Alle Elemente des Definitionsbereichs, mit denen die Gleichung erfüllt wird, d. h. für die aus der Gleichung eine wahre Aussage entsteht, bilden die *Lösungs-* oder *Erfüllungsmenge* der Gleichung. Weist die Gleichung eine, zwei oder allgemein n Variable auf, so sind die Elemente der Lösungmenge Einzelelemente, Wertepaare oder allgemein n-Tupel. Bei Nichterfüllbarkeit der Gleichung ist ihre Lösungsmenge leer. In der Schreibweise der Mengenlehre wird die die Gleichung $T_1 = T_2$ erfüllende Lösungsmenge symbolisch in der Form

$$L = \{(x;\, y;\, \ldots) \mid T_1(x, y, \ldots) = T_2(x, y, \ldots)\}$$

dargestellt.

BEISPIEL

2. Die Lösungsmenge der Gleichung $2x = 3$ wird durch

$$L = \{x \mid 2x = 3\} = \{3/2\}$$

wiedergegeben.

Bei verschiedenen Aufgaben ist nur die Teilmenge der Lösungsmenge von Interesse, die einem gegebenen *Variablenbereich* angehört. Insbesondere bedingen Textaufgaben einen für sie sinnvollen Variablenbereich.

BEISPIEL

3. Das Fünffache einer einstelligen Zahl ist um 5 größer als ihr Vierfaches. Wie heißt diese Zahl?

Lösung: Wird die gesuchte Zahl mit x bezeichnet, so lautet die zu lösende Gleichung

$$5x = 4x + 5.$$

Während der Definitionsbereich der formalen Gleichung den Körper der reellen Zahlen umfaßt, verlangt die Aufgabenstellung eine Beschränkung auf den Variablenbereich

$$\{1;\, 2;\, \ldots;\, 9\}.$$

Nur so ist die Gleichung zur gestellten Aufgabe äquivalent.

Lösungsmenge der Gleichung: $\underline{\underline{\{5\}}}$.

Die gesuchte Zahl ist 5.

Ist der Durchschnitt von Variablenbereich und Lösungsmenge leer, so ist entweder die zur Lösung der Aufgabe angesetzte Gleichung ungeeignet, oder die Aufgabe ist überhaupt unlösbar.
Eine durch die Aufgabe bedingte Einschränkung auf einen Variablenbereich M, der Teilmenge des Definitionsbereichs ist, wird zusätzlich angegeben:

$$L = \{(x;\, y;\, \ldots) \mid (x;\, y;\, \ldots) \in M \wedge T_1(x;\, y;\, \ldots) = T_2(x;\, y;\, \ldots)\}$$

Das die *Konjunktion* (Vereinigung, Verbindung) „und" kennzeichnende Symbol $\wedge$ verbindet die einzelnen Eigenschaften, die von der Lösungsmenge erfüllt werden müssen.

BEISPIEL

4. Es ist $\{x \mid x \in N \wedge 2x = 3\}$ zu bestimmen.

   Lösung: Ohne Einschränkung auf den Bereich der natürlichen Zahlen würde der Wert 3/2 die Gleichung erfüllen. So aber ist die Lösungsmenge leer.

   Lösungsmenge: $\underline{\underline{\emptyset}}$.

Dieses letzte Beispiel zeigt, wie die Lösungsmenge nicht nur durch die Gleichung allein, sondern auch durch den festgelegten Variablenbereich bedingt wird. Es können in einem Variablenbereich erfüllbare Gleichungen in anderen Bereichen nicht erfüllbar sein.

12.2. Einteilung der Gleichungen

Für Gleichungen ergeben sich verschiedene Einteilungsmöglichkeiten, je nachdem welche Unterscheidungsmerkmale herangezogen werden.
Eine erste Unterteilung kann nach der Anzahl der auftretenden Variablen erfolgen. Es werden Gleichungen mit einer, zwei und allgemein n Variablen unterschieden.
Eine weitere Unterteilung wird nach der Art, wie die Gleichung aus den Variablen und Konstanten aufgebaut ist, vorgenommen. Treten dabei die rationalen Rechenoperationen und das Radizieren endlich oft auf, ohne daß jedoch die Variable als Exponent erscheint, so liegt eine **algebraische Gleichung** vor (vgl. 11.8.). Algebraische Gleichungen mit einer Variablen lassen sich stets in der Form

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0 \qquad \begin{matrix} a_i \in R \\ n \in N \end{matrix}$$

darstellen. Eine Unterteilung dieser Gleichungsart läßt sich nach dem Wert des größten auftretenden Exponenten, dem *Grad* der Gleichung, vornehmen.
Alle anderen Gleichungen heißen **transzendent**. Als Beispiele derartiger Gleichungen seien angegeben:

$$\sin x + \cos x = 1 \qquad \text{(goniometrische Gleichung),}$$

$$3^{2x+4} = 7^x \qquad \text{(Exponentialgleichung),}$$

$$3 \lg (x + 3) - 2 \lg x = x + 1 \qquad \text{(logarithmische Gleichung).}$$

In den folgenden Abschnitten sollen nun die Lösungsverfahren für die verschiedenen Gleichungsarten behandelt werden.

13. Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen

13.1. Eine lineare Gleichung mit zwei Variablen

Als lineare Gleichung mit zwei Variablen wird jede Aussageform

$$a_1 x + a_2 y = b \qquad (a_1, a_2, b, x, y \in R)$$

bezeichnet, in der a_1, a_2 und b reelle Konstanten, x und y reelle Variablen darstellen.

Alle Wertepaare $(x; y) \in R \times R$, für die diese Aussageform in eine wahre Aussage übergeht, bilden die Lösungsmenge L der Gleichung:

$$L = \{(x;\, y) \mid (x;\, y) \in R \times R \wedge a_1 x + a_2 y = b\}$$

oder kürzer, wenn grundsätzlich keine Zweifel bezüglich des Variablenbereiches möglich sind:

$$L = \{(x;\, y) \mid a_1 x + a_2 y = b\}.$$

Sind a_1 und a_2 von Null verschieden ($a_1 \cdot a_2 \neq 0$), so läßt sich die Lösungsmenge aufstellen, indem die eine Variable als *freie Variable* aufgefaßt und mit beliebigen Werten belegt wird und dann die jeweils entsprechenden Werte der zweiten, *gebundenen Variablen* ermittelt werden. Dazu ist es zweckmäßig, die Gleichung zunächst nach der einen der beiden Variablen aufzulösen. Die einzelnen Elemente $(x; y)$ der unendlichen Lösungsmenge lassen sich dann aus dem beliebig wählbaren

$$x \in R \qquad \text{bzw.} \qquad y \in R$$

und

$$y = \frac{b - a_1 x}{a_2} \quad \text{bzw.} \quad x = \frac{b - a_2 y}{a_1}$$

bilden.

Die Lösungsmenge

$$L = \left\{(x;\, y) \;\middle|\; x \in R \wedge y = \frac{b - a_1 x}{a_2}\right\} \quad \text{bzw.}$$

$$L = \left\{(x;\, y) \;\middle|\; y \in R \wedge x = \frac{b - a_2 y}{a_1}\right\}$$

oder kürzer

$$L = \left\{\left(x;\, \frac{b - a_1 x}{a_2}\right) \;\middle|\; x \in R\right\} \quad \text{bzw.} \quad L = \left\{\left(\frac{b - a_2 y}{a_1};\, y\right) \;\middle|\; y \in R\right\} \qquad \text{(I)}$$

kann so als Abbildung

$$x \to y \quad \text{bzw.} \quad x \leftarrow y$$

angesehen werden. Ihre graphische Darstellung als Punktmenge in einem cartesischen Koordinatensystem ergibt eine Gerade.

BEISPIEL

In Bild 27 ist die Lösungsmenge der Gleichung $2x - 5y = 1$, also

$$\{(x;\, y) \mid 2x - 5y = 1\}$$

als Punktmenge wiedergegeben. Auszugsweise läßt sich die Lösungsmenge in Form einer Wertetabelle darstellen:

x	-2	-1	0	0,5	1	2	3	4,2
$y = \frac{2x-1}{5}$	-1	$-3/5$	$-1/5$	0	1/5	3/5	1	1,48

Gleiche Lösungsmengen weisen

$$a_1x + a_2y = b \quad \text{und} \quad k \cdot a_1x + k \cdot a_2y = k \cdot b \qquad k \in R \setminus \{0\}$$

auf. Wie in 7.3. bereits festgestellt wurde, stellt die Multiplikation einer Gleichung mit einem von Null verschiedenen Faktor eine identische Umformung dar. Die dadurch neu entstehende Gleichung ist zur Ausgangsgleichung äquivalent. Die beiden Gleichungen sind voneinander *linear abhängig*.

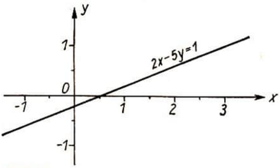


Bild 27

Während im vorhergehenden sowohl a_1 als auch a_2 von Null verschieden waren, soll jetzt einer der beiden Koeffizienten verschwinden. Somit tritt in der Gleichung eine der beiden Variablen nicht mehr auf. Trotzdem soll sie weiterhin als Gleichung mit zwei Variablen angesehen werden. Man denke sich die Gleichung in der Form

$$0 \cdot x + a_2y = b \quad \text{bzw.} \quad a_1x + 0 \cdot y = b$$

mit

$$a_2 \neq 0 \quad \text{bzw.} \quad a_1 \neq 0$$

geschrieben. Im ersten Fall erfüllt jedes aus einem beliebigen $x \in R$ und dem konstanten $y = \dfrac{b}{a_2}$ bestehende Wertepaar, also die aus der Menge der reellen Zahlen und der einelementigen Menge $\{b/a_2\}$ gebildete Produktmenge $R \times \{b/a_2\}$, die Gleichung. Im zweiten Fall erfüllen alle aus dem gleichbleibenden $x = b/a_1$ und dem beliebig wählbaren $y \in R$ gebildeten Wertepaare, also die Elemente der Produktmenge $\{b/a_1\} \times R$. Es ist demnach

$$\{(x; y) \mid a_2y = b\} = \left\{\left(x; \frac{b}{a_2}\right) \middle| \, x \in R\right\} \quad \text{bzw.}$$

$$\{(x; y) \mid a_1x = b\} = \left\{\left(\frac{b}{a_1}; y\right) \middle| \, y \in R\right\}.$$

Der Vergleich mit dem vorhergehenden zeigt, daß dieser Sonderfall mit $a_1 = 0$ bzw. $a_2 = 0$ in (I) enthalten ist. Während jedoch im Fall $a_1 \cdot a_2 \neq 0$ wahlweise eine der beiden Darstellungsmöglichkeiten herangezogen werden konnte, existiert im Sonderfall jeweils nur eine der beiden Möglichkeiten.

Dieser Sonderfall einer linearen Gleichung mit zwei Variablen ist klar von einer Gleichung mit einer Variablen zu unterscheiden, deren Lösungsmenge aus einem Einzelelement besteht, während hier die Lösungsmenge (unbegrenzt viele) Wertepaare umfaßt.

Die den Lösungsmengen entsprechenden Geraden liegen im Fall $a_1 = 0$ parallel zur x-Achse und im Fall $a_2 = 0$ parallel zur y-Achse, falls $b \neq 0$ ist, während sie bei $b = 0$ mit den Achsen zusammenfallen.

Ist $a_1 = a_2 = 0$, die Gleichung also völlig entartet zu

$$0 \cdot x + 0 \cdot y = b,$$

so ist sie im Fall $b \neq 0$ von keinem Wertepaar zu erfüllen, ihre Lösungsmenge also leer. Verschwindet dagegen b ebenfalls, so führt jede beliebige Belegung der Variablen x und y zu einer wahren Aussage. Die Lösungsmenge ist dann mit der gesamten Produktmenge $R \times R$ identisch.

13.2. Zwei lineare Gleichungen mit zwei Variablen

13.2.1. Lösungsmenge

Unter der Lösungsmenge eines Gleichungssystems[1])

$$\left| \begin{array}{l} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{array} \right|$$

ist die Menge aller Wertepaare $(x;\, y) \in R \times R$ zu verstehen, die beide Gleichungen in eine wahre Aussage überführen. Sind

$$L_1 = \{(x;\ y) \mid a_{11}x + a_{12}y = b_1\} \quad \text{und} \quad L_2 = \{(x;\ y) \mid a_{21}x + a_{22}y = b_2\}$$

die Lösungsmengen der beiden Teilgleichungen, so muß demnach die Lösungsmenge L des Gleichungssystems mit der Durchschnittsmenge $L_1 \cap L_2$ identisch sein:

$$L_1 \cap L_2 = L = \{(x;y) \mid a_{11}x + a_{12}y = b_1 \wedge a_{21}x + a_{22}y = b_2\}.$$

BEISPIELE

1. Die beiden Gleichungen des Systems

$$\left| \begin{array}{l} 2x - 5y = 1 \\ 3x - 2y = 7 \end{array} \right|$$

haben, einzeln betrachtet, die auszugsweise in Form einer Wertetabelle wiedergegebenen Lösungsmengen:

x	…	-1	0	1	2	3	4	…
$y = \dfrac{2x-1}{5}$	…	$-3/5$	$-1/5$	$1/5$	$3/5$	1	$7/5$	…

x	…	-1	0	1	2	3	4	…
$y = \dfrac{3x-7}{2}$	…	-5	$-7/2$	-2	$-1/2$	1	$5/2$	…

1) Die Koeffizienten sind durch Doppelindizes gekennzeichnet. Der erste Index benennt die zugehörige Gleichungsnummer (desgl. der Index des absoluten Gliedes) und damit die Zeile, während der zweite Index die Zugehörigkeit des Koeffizienten zur ersten Variablen x bzw. zur zweiten Variablen y und damit die Spalte angibt
Lies a_{21} als „a-zwei-eins"

Lösungsmenge des Systems ist demnach

$$L = \{(x; y) \mid 2x - 5y = 1 \wedge 3x - 2y = 7\} = \{(3; 1)\}.$$

Die beiden zuzuordnenden Geraden schneiden sich im Punkt (3; 1) (Bild 28).

2. Lautet die zweite Gleichung

$$4x - 10y = 2,$$

so ist deren Lösungsmenge mit der der ersten Gleichung identisch. Die beiden Gleichungen sind voneinander linear abhängig. Das Lösungssystem weist eine unbeschränkte Lösungsmenge auf. Die den beiden Gleichungen zuzuordnenden Geraden fallen zusammen.

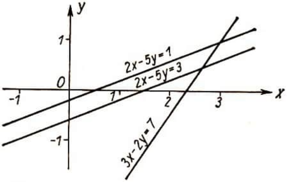


Bild 28

3. Wird als zweite Gleichung

$$2x - 5y = 3$$

gewählt, so zeigt die Wertetabelle

x	...	-1	0	1	2	3	...
y	...	-1	$-3/5$	$-1/5$	$1/5$	$3/5$	...

daß alle y-Werte jeweils um $-{}^2/_5$ kleiner sind als die der ersten Gleichung. Es kann also kein gemeinsames Wertepaar existieren. Die Lösungsmenge ist leer:

$$L = \{(x; y) \mid 2x - 5y = 1 \wedge 2x - 5y = 3\} = \emptyset .$$

Die Gleichungen stehen zueinander in Widerspruch, denn bei gleichen linken Seiten sind die rechten Seiten voneinander verschieden. Die entsprechenden Geraden verlaufen parallel.

An Hand dieser Beispiele lassen sich für die Lösungsmengen derartiger Gleichungssysteme drei grundsätzliche Möglichkeiten erkennen:

a) Die Lösungsmenge besteht aus einem Wertepaar $(x; y)$.

b) Die Lösungsmenge ist identisch mit den untereinander gleichen Lösungsmengen der beiden Gleichungen. Das Gleichungssystem weist eine unendliche Lösungsmenge auf.

c) Die Lösungsmenge ist leer. Das Gleichungssystem läßt sich nicht erfüllen; beide Gleichungen stehen zueinander in Widerspruch.

Die Allgemeingültigkeit dieser Feststellungen, die hier lediglich aus der Betrachtung eines Beispieles gewonnen wurden, wird in 13.2.5. nachgewiesen.

13.2.2. Lösungsverfahren

Grundgedanke des Lösens mit Hilfe des Einsetz-, des Gleichsetz- und des Additionsverfahrens ist die Aufstellung einer neuen Gleichung, die nur noch eine Variable enthält. Mit dem daraus bestimmbaren Wert der einen Variablen kann dann aus einer der beiden Ausgangsgleichungen der Wert der anderen Variablen errechnet werden.

Die grundsätzliche Möglichkeit zur Aufstellung einer derartigen Gleichung ergibt sich aus der Behauptung:
Ist das Wertepaar $(x_0; y_0)$ Element der Lösungsmenge eines Gleichungssystems:

$$(x_0; y_0) \in \{(x; y) \mid T_1(x, y) = b_1 \wedge T_2(x, y) = b_2\},$$

so ist es auch in der Lösungsmenge jeder durch *Linearkombination* beider Gleichungen gebildeten Gleichung enthalten:

$$(x_0; y_0) \in \{(x; y) \mid k_1 \cdot T_1(x, y) + k_2 \cdot T_2(x, y) = k_1 b_1 + k_2 b_2\}.$$

Beweis: Nach Voraussetzung nimmt $T_i(x, y)$ für $x = x_0$ und $y = y_0$ den Wert b_i an:

$$T_i(x_0, y_0) = b_i \quad i \in \{1; 2\}.$$

Dann aber ist auch

$$k_1 \cdot T_1(x_0, y_0) + k_2 \cdot T_2(x_0, y_0) = k_1 b_1 + k_2 b_2$$

erfüllt.

BEISPIEL

1. Für das schon behandelte Gleichungssystem

$$\left| \begin{array}{l} 2x - 5y = 1 \\ 3x - 2y = 7 \end{array} \right|$$

mit der Lösungsmenge $\{(3; 1)\}$ sei beispielsweise eine neue Gleichung durch Linearkombination mit $k_1 = 2$ und $k_2 = -1$ aufgestellt:

$$x - 8y = -5.$$

Einige Elemente der Lösungsmenge dieser Gleichung sind durch die Wertetabelle

x	...	-1	0	1	2	3	...
y	...	1/2	5/8	3/4	7/8	1	...

wiedergegeben. Diese Lösungsmenge stimmt im Wertepaar (3; 1) mit denen der beiden Ausgangsgleichungen überein.

Das Additionsverfahren

Durch geeignete Linearkombination der beiden Ausgangsgleichungen wird eine nur noch eine Variable enthaltende Gleichung aufgestellt.

BEISPIELE

Auf die folgenden Gleichungssysteme soll das Additionsverfahren angewendet werden.

2. $$\left| \begin{array}{l} 2x - 5y = 1 \\ 3x - 2y = 7 \end{array} \right| \begin{array}{r} -3 \\ 2 \end{array}$$

Lösung: Die Erweiterungsfaktoren sind hinter jeder Gleichung angegeben. Als neue Gleichung ergibt sich

$$11y = 11 \quad \text{bzw.} \quad y = 1.$$

Lösungsmenge dieser Gleichung ist demnach

$$\{(x; 1) \mid x \in R\}.$$

Für $y = 1$ erfordern zu ihrer Erfüllung sowohl die erste als auch die zweite Gleichung $x = 3$. Dabei wird eine der beiden Gleichungen zur Berechnung von x, die andere zur Probe für die gefundene Lösungsmenge verwendet.

Lösungsmenge des Systems: $\underline{\underline{\{(3; 1)\}}}$.

Eine andere Möglichkeit zur Berechnung des x besteht in einer nochmaligen Linearkombination, bei der eine von y freie Gleichung aufzustellen ist.

3. $$\left|\begin{array}{r} 9x + 4y = 22 \\ 11x + 6y = 28 \end{array}\right| \begin{array}{r} 3 \\ -2 \end{array}$$

Lösung: Es wird zweckmäßigerweise die Elimination vorgenommen, bei der der Rechenaufwand möglichst klein ist. Im vorliegenden Beispiel ist y zu eliminieren, da das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der beiden Koeffizienten von y durch möglichst kleine Erweiterungsfaktoren erreicht werden kann.

Lösungsmenge: $\underline{\underline{\{(2; 1)\}}}$.

4. $$\left|\begin{array}{r} 2x - 5y = 1 \\ 4x - 10y = 2 \end{array}\right| \begin{array}{r} -2 \\ 1 \end{array}$$

Lösung: Bei der formalen Anwendung des Additionsverfahrens auf dieses schon untersuchte Gleichungssystem, bei dem die beiden Gleichungen voneinander linear abhängig sind, ergibt sich die identische Gleichung $0 = 0$. Das Additionsverfahren führt also hier nicht weiter zum Ziel.

5. $$\left|\begin{array}{r} 2x - 5y = 1 \\ 2x - 5y = 3 \end{array}\right| \begin{array}{r} -1 \\ 1 \end{array}$$

Lösung: In diesem widersprechenden System führt das Additionsverfahren auf die falsche Aussage $0 = 2$, die auf die Nichtexistenz einer Lösung des Gleichungssystems hinweist.

Nur wenn ein widerspruchsfreies, linear unabhängiges Gleichungssystem vorliegt, kann die in diesem Fall aus einem Element bestehende Lösungsmenge mit Hilfe des Additionsverfahrens ermittelt werden. In den beiden anderen Fällen ergibt sich lediglich ein entsprechender Hinweis.

Das Einsetzverfahren (Substitutionsverfahren)

Beim Einsetzverfahren wird nur auf formal andere Art die neue, nur noch eine Variable enthaltende Gleichung aufgestellt. Für lineare Gleichungssysteme hat es, wie auch das noch folgende Gleichsetzverfahren, geringere Bedeutung als das Additionsverfahren.

BEISPIEL

6. Zur Lösung des Gleichungssystems

$$\left| \begin{array}{l} 2x - 5y = 1 \\ 3x - 2y = 7 \end{array} \right|$$

ist das Einsetzverfahren zu verwenden.

Lösung:

1. Auflösen der ersten Gleichung nach x:

(Substitutionsgleichung) $x = \dfrac{5y + 1}{2}$.

2. Einsetzen in die zweite Gleichung und Auflösung:

$$11y = 11$$
$$y = 1.$$

3. Ermittlung des zugehörigen x aus der Substitutionsgleichung:

$$x = 3.$$

Lösungsmenge: $\underline{\underline{\{(3;\ 1)\}}}$.

Die Probe ist an beiden Gleichungen vorzunehmen. Es ist grundsätzlich gleichgültig, welche Variable eliminiert wird. Man wird auf möglichst kleinen Rechenaufwand achten.
Der Leser erprobe das Verfahren an den beiden Sonderfällen!

Das Gleichsetzverfahren

Auch hier wird eine neue Gleichung aufgestellt, die nur noch eine Variable enthält.

BEISPIEL

7. Das Gleichungssystem

$$\left| \begin{array}{l} 2x - 5y = 1 \\ 3x - 2y = 7 \end{array} \right|$$

ist mit Hilfe des Gleichsetzverfahrens zu lösen.

Lösung:

1. Auflösung beider Gleichungen nach einer der beiden Variablen (nach x):

$$x = \frac{5y + 1}{2} \qquad\qquad x = \frac{2y + 7}{3}.$$

2. Gleichsetzen beider rechten Seiten und Auflösung:

$$11y = 11 \quad \text{bzw.} \quad y = 1.$$

3. Ermittlung des zugehörigen Wertes der anderen Variablen aus einer der beiden nach x aufgelösten Gleichungen:

$$x = 3.$$

Lösungsmenge: $\underline{\underline{\{(3;\ 1)\}}}$.

13.2.3. Lösung mit Hilfe von Determinanten. Einführung der zweireihigen Determinante

Aus dem Additionsverfahren heraus soll ein weiteres Verfahren entwickelt werden, das eine größere Schematisierung der erforderlichen Rechenvorgänge beim Lösen von linearen Gleichungssystemen ermöglicht. In größerer Übersichtlichkeit gestattet dieses Verfahren weiterhin den Übergang auf Gleichungssysteme mit mehr als zwei Variablen und die allgemeine Beurteilung derartiger Systeme bezüglich ihrer Lösbarkeit.

Es sei der Lösungsgang für das Gleichungssystem

$$\left| \begin{array}{l} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{array} \right|$$

mit Hilfe des Additionsverfahrens eingeleitet:

a) Zur Berechnung von x:

$$\left| \begin{array}{l} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{array} \right| \begin{array}{l} \cdot a_{22} \\ \cdot (-a_{12}) \end{array}$$

$$\left| \begin{array}{rcr} a_{11}a_{22}x + a_{12}a_{22}y &=& a_{22}b_1 \\ -a_{12}a_{21}x - a_{12}a_{22}y &=& -a_{12}b_2 \end{array} \right|$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x = a_{22}b_1 - a_{12}b_2. \tag{I}$$

b) Zur Berechnung von y:

$$\left| \begin{array}{l} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{array} \right| \begin{array}{l} \cdot (-a_{21}) \\ \cdot a_{11} \end{array}$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})y \quad = a_{11}b_2 - a_{21}b_1. \tag{II}$$

Sowohl in (I) als auch in (II) erscheint jeweils auf der linken Seite als Faktor der Variablen x bzw. y der Term $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Der Anordnung der vier Koeffizienten im Gleichungssystem entsprechend, soll diese Differenz zweier Produkte durch das quadratische Schema

$$D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

wiedergegeben werden. Ein derartiges Schema wird allgemein **Determinante** genannt. Im vorliegenden Fall stellt es die zweireihige Koeffizientendeterminante des Gleichungssystems dar. Die vier Elemente einer zweireihigen Determinante sind in zwei *Zeilen* bzw. zwei *Spalten* angeordnet. Die im quadratischen Schema von links oben nach rechts unten verlaufende Diagonale wird *Hauptdiagonale*, die andere dagegen *Nebendiagonale* genannt.

Definition

Zur Berechnung des Wertes einer zweireihigen Determinante ist das Produkt der Elemente der Hauptdiagonalen um das Produkt der Elemente der Nebendiagonalen zu vermindern:

$$\boxed{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \tag{21}$$

Nach dieser Definition lassen sich die auf den rechten Seiten von (I) und (II) stehenden Terme $D_x = a_{22}b_1 - a_{12}b_2$ und $D_y = a_{11}b_2 - a_{21}b_1$ auch in der Determinantensymbolik wiedergeben. Der Vergleich mit der Koeffizientendeterminante D läßt erkennen, daß in D_x die Elemente a_{11} und a_{21} gegen b_1 bzw. b_2 ausgetauscht sind. Es sind also die in der ersten Spalte von D stehenden Koeffizienten der Variablen x durch die absoluten Glieder zu ersetzen:

$$D_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{22}b_1 - a_{12}b_2.$$

Entsprechend sind zur Bildung von D_y die Elemente der zweiten Spalte von D, also die Koeffizienten der Variablen y, gegen die absoluten Glieder auszutauschen:

$$D_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - a_{21}b_1.$$

Mit diesen Bezeichnungen lassen sich (I) und (II) als **Cramersche Regel** in der Form

$$\boxed{\begin{aligned} D \cdot x &= D_x \\ D \cdot y &= D_y \end{aligned}} \tag{22}$$

wiedergeben.

Ist die Koeffizientendeterminante D von Null verschieden, so ergibt sich

$$x = \frac{D_x}{D} \qquad y = \frac{D_y}{D}.$$

BEISPIEL

Das Gleichungssystem

$$\left| \begin{aligned} 2x - 5y &= 1 \\ 3x - 2y &= 7 \end{aligned} \right|$$

ist mit Hilfe von Determinanten zu lösen.

Lösung: Es ist

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) - (-5) \cdot 3 = -4 + 15 = 11$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 7 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2) - (-5) \cdot 7 = -2 + 35 = 33$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 2 \cdot 7 - 1 \cdot 3 = 14 - 3 = 11$$

und damit $x = \frac{33}{11} = 3$; $y = \frac{11}{11} = 1$.

Lösungsmenge: $\underline{\underline{\{(3;\,1)\}}}$.

Bevor eine weitere Diskussion der CRAMERschen Regel, insbesondere für den Fall $D = 0$, vorgenommen wird, sollen im folgenden Abschnitt zunächst einige Gesetzmäßigkeiten für zweireihige Determinanten aufgestellt werden.

13.2.4. Gesetze für zweireihige Determinanten

Die Determinantengesetze werden für die weiteren grundsätzlichen Darlegungen über lineare Gleichungssysteme von Bedeutung sein und werden zu Erleichterungen bei der Berechnung von Determinanten beitragen.
Die zunächst für zweireihige Determinanten zu beweisenden Eigenschaften haben, wie später nachgewiesen wird, auch für drei- und mehrreihige Determinanten Gültigkeit.

Satz 1

Werden in einer Determinante die Spalten mit den gleichstelligen Zeilen vertauscht, so bleibt ihr Wert unverändert.

Auf Grund der Definition der zweireihigen Determinante sind

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Die Gleichheit der rechten Seiten bestätigt die aufgestellte Behauptung.
Aus dieser Eigenschaft kann eine wichtige Schlußfolgerung gezogen werden.
Jede für die Zeilen (Spalten) nachgewiesene Gesetzmäßigkeit gilt gleichzeitig für die Spalten (Zeilen).
Spalte und Zeile sind gleichberechtigt. Für sie wird deshalb die gemeinsame Bezeichnung *Reihe* eingeführt.

Satz 2

Enthalten alle Elemente einer Reihe einen gemeinsamen Faktor, so kann dieser Faktor vor die Determinante gesetzt werden.

Weisen z. B. die Elemente der ersten Zeile den gemeinsamen Faktor $k \in R$ auf, so ist

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = ka_{11}a_{22} - ka_{12}a_{21} = k(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) =$$
$$= k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Satz 3

Werden in einer Determinante zwei parallele Reihen miteinander vertauscht, so ändert der Wert der Determinante das Vorzeichen.

Entsteht D' beispielsweise aus D durch Vertauschen der ersten und zweiten Zeile, so bestätigt der Vergleich von

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad \text{und}$$

$$D' = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}$$

die Richtigkeit der Behauptung $D = -D'$.

Satz 4

Weist eine Determinante zwei gleiche parallele Reihen auf, so hat sie den Wert Null.

Werden in dieser Determinante diese beiden Reihen miteinander vertauscht, so tritt infolge der Gleichheit keine Änderung ein. Nach Satz 3 ändert aber dabei die Determinante das Vorzeichen. Es muß demnach $D = -D$ sein, was aber nur mit $D = 0$ erfüllbar ist.

Satz 4 und Satz 2 lassen sich verknüpfen.

Satz 5

Eine Determinante hat den Wert Null, wenn die Elemente einer Reihe zu denen einer parallelen Reihe proportional sind.

Mit $a_{21} = ka_{11}$ und $a_{22} = ka_{12}$ ist

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ ka_{11} & ka_{12} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = 0.$$

Für die Beurteilung eines Gleichungssystems ist die Frage nach der Umkehrbarkeit dieses Satzes von Interesse:

Wie müssen die Elemente einer zweireihigen Determinante beschaffen sein, damit sie den Wert Null hat?

Aus der Definition der Determinante folgt offensichtlich:

1. Besteht mindestens eine Reihe nur aus Nullelementen, so verschwindet die Determinante.
2. Weist die eine der beiden Diagonalen mindestens ein Nullelement auf, die andere aber nicht, so hat die Determinante einen von Null verschiedenen Wert.
3. Sind nun alle Elemente der Determinante von Null verschieden, so folgt

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$$

$$a_{11}a_{22} = a_{12}a_{21}$$

$$\frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{21}}{a_{22}}$$

und daraus mit dem Proportionalitätsfaktor $k \in R \setminus \{0\}$

$$a_{21} = ka_{11} \qquad\qquad a_{22} = ka_{12}.$$

Zusammengefaßt ergibt sich als Umkehrung:

Satz 6

Eine zweireihige Determinante kann nur dann den Wert Null haben, wenn die Elemente einer Reihe alle Null oder zu denen einer Parallelreihe proportional sind.

BEISPIELE

Unter Verwendung der Determinantengesetze sind die Werte folgender Determinanten zu berechnen:

1. $\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot (-1) = \underline{\underline{-6}}.$

2. $\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 11 = \underline{\underline{66}}.$

3. $\begin{vmatrix} 1{,}5 & 2{,}5 \\ 1{,}2 & 2{,}0 \end{vmatrix} = 0{,}5 \cdot 0{,}4 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = \underline{\underline{0}}.$

13.2.5. Diskussion eines Systems von zwei linearen Gleichungen mit zwei Variablen

Im Abschnitt 13.2.3. wurde festgestellt, daß die Auflösung des Gleichungssystems

$$\begin{vmatrix} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{vmatrix}$$

auf die CRAMERsche Regel (22)

$$D \cdot x = D_x \qquad\qquad D \cdot y = D_y$$

mit

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

führt. Für die weitere Behandlung sind die beiden Hauptfälle $D \neq 0$ und $D = 0$ zu unterscheiden.

Hauptfall I: $D \neq 0$

Wie schon erwähnt, gilt im Fall $D \neq 0$:

Ist die Koeffizientendeterminante D von Null verschieden, so hat das Gleichungssystem die eindeutige Lösung

$$x = \frac{D_x}{D} \qquad y = \frac{D_y}{D}.$$

Hauptfall II: $D = 0$

Nach den Untersuchungen im vorhergehenden Abschnitt muß zwischen den linken Seiten der Gleichungen des Systems lineare Abhängigkeit bestehen, es muß $a_{21} = ka_{11}$ und $a_{22} = ka_{12}$ sein.

Unterfall 1:

Ist nun auch $b_2 = kb_1$, so sind beide Gleichungen insgesamt voneinander linear abhängig. Die unendlichen Lösungsmengen der beiden Gleichungen sind identisch. In diesem Fall ist dann auch

$$D_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ kb_1 & ka_{12} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_1 & a_{12} \end{vmatrix} = 0$$

und

$$D_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ ka_{11} & kb_1 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{11} & b_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Die CRAMERsche Regel nimmt mit $D = D_x = D_y = 0$ die Form

$$0 \cdot x = 0 \qquad\qquad 0 \cdot y = 0$$

an und kann nicht zur Bestimmung der Lösungsmenge verwendet werden, da sie durch jedes willkürlich gewählte Wertepaar $(x; y)$ erfüllbar ist.

Die Lösungsmenge ist wie im Abschnitt 13.1. zu bestimmen.

Unterfall 2:

Ist hingegen $b_2 \neq kb_1$, so stehen beide Gleichungen im Widerspruch. In diesem Fall ist mindestens eine der Determinanten D_x und D_y von Null verschieden.

Die Widersprüchlichkeit läßt sich an der Unerfüllbarkeit der CRAMERschen Regel erkennen. Ist zum Beispiel $D_x \neq 0$, so existiert kein x, das $0 \cdot x = D_x \neq 0$ erfüllt. Die linke Seite hat für jedes x den Wert Null, während die rechte Seite von Null verschieden ist.

In der nachfolgenden Tabelle sind die Ergebnisse der Diskussion zusammengefaßt:

D	D_x, D_y	Lösbarkeit des Systems
$\neq 0$	beliebig	eindeutig lösbar
0	beide 0	Gleichungen voneinander linear abhängig, unendliche Lösungsmenge
0	nicht beide 0	Widerspruch zwischen den Gleichungen, Lösungsmenge leer

Allein der Wert der Koeffizientendeterminante D gibt ein Kriterium dafür, ob ein vorliegendes Gleichungssystem eindeutig lösbar ist (Normalfall) oder nicht. Oft hängt allein schon von der Eindeutigkeit die Lösbarkeit eines Problems ab, so daß ein Verschwinden von D die Unlösbarkeit des Problems bedeutet.

BEISPIEL

1. Das Gleichungssystem

$$\left| \begin{array}{l} 1{,}3x + 2{,}4y = -3{,}72 \\ 0{,}8x + 1{,}8y = -3 \end{array} \right|$$

ist unter Verwendung von Determinanten zu lösen.

Lösung:

$$D = \begin{vmatrix} 1{,}3 & 2{,}4 \\ 0{,}8 & 1{,}8 \end{vmatrix} = 0{,}6 \begin{vmatrix} 1{,}3 & 4 \\ 0{,}8 & 3 \end{vmatrix} = 0{,}6 \cdot 0{,}7.$$

Das Gleichungssystem muß eindeutig lösbar sein (Hauptfall I).

$$D_x = \begin{vmatrix} -3{,}72 & 2{,}4 \\ -3 & 1{,}8 \end{vmatrix} = -3 \cdot 0{,}6 \begin{vmatrix} 1{,}24 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}28$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1{,}3 & -3{,}72 \\ 0{,}8 & -3 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 1{,}3 & 1{,}24 \\ 0{,}8 & 1 \end{vmatrix} = -3 \cdot 0{,}308$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{3 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}28}{0{,}6 \cdot 0{,}7} = 1{,}2 \qquad y = \frac{D_y}{D} = -\frac{3 \cdot 0{,}308}{0{,}6 \cdot 0{,}7} = -2{,}2.$$

Lösungsmenge: $\underline{\underline{\{(1{,}2;\ -2{,}2)\}}}$.

Ein Gleichungssystem, dessen absolute Glieder den Wert Null haben, wird *homogenes Gleichungssystem* genannt. Andernfalls spricht man von einem *inhomogenen Gleichungssystem*.

BEISPIELE

Die folgenden Gleichungssysteme sind mit Hilfe von Determinanten zu lösen:

2. $$\left| \begin{array}{l} 3x - 2y = 0 \\ 5x + 3y = 0 \end{array} \right|$$

Lösung:

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 9 + 10 = 19.$$

Hauptfall I: Ohne weitere Rechnung läßt sich

$$x = y = 0$$

angeben. Mit $b_1 = b_2 = 0$ ist $D_x = D_y = 0$.

Lösungsmenge: $\underline{\underline{\{(0;\, 0)\}}}$.

3.
$$\left|\begin{array}{r} 8{,}4x - 3{,}6y = 4{,}8 \\ 14{,}7x - 6{,}3y = 8{,}4 \end{array}\right|$$

Lösung:

$$D = \begin{vmatrix} 8{,}4 & -3{,}6 \\ 14{,}7 & -6{,}3 \end{vmatrix} = -0{,}3 \cdot 0{,}9 \begin{vmatrix} 28 & 4 \\ 49 & 7 \end{vmatrix} = -0{,}3 \cdot 0{,}9 \cdot 4 \cdot 7 \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Es liegt Hauptfall II und mit

$$D_x = \begin{vmatrix} 4{,}8 & -3{,}6 \\ 8{,}4 & -6{,}3 \end{vmatrix} = -1{,}2 \cdot 0{,}9 \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 7 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 8{,}4 & 4{,}8 \\ 14{,}7 & 8{,}4 \end{vmatrix} = 2{,}1 \cdot 1{,}2 \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 7 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

Unterfall 1 vor. Beide Gleichungen sind linear abhängig.

Lösungsmenge: $\underline{\underline{\left\{\left(x;\, \frac{7x-4}{3}\right) \,\middle|\, x \in R\right\}}}$.

4.
$$\left|\begin{array}{r} 12x - 18y = 0 \\ 10x - 15y = 0 \end{array}\right|$$

Lösung:

$$D = \begin{vmatrix} 12 & 18 \\ 10 & 15 \end{vmatrix} = 0.$$

Es muß Hauptfall II, Unterfall 1 vorliegen, denn bei einem homogenen System ist stets $D_x = D_y = 0$.

Lösungsmenge: $\underline{\underline{\left\{\left(x;\, \frac{2}{3}\,x\right) \,\middle|\, x \in R\right\}}}$.

5.
$$\left|\begin{array}{rr} 3{,}9x + 5{,}7y = & -3{,}1 \\ 6{,}5x + 9{,}5y = & 4{,}3 \end{array}\right|$$

Lösung:

$$D = \begin{vmatrix} 3{,}9 & 5{,}7 \\ 6{,}5 & 9{,}5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 \begin{vmatrix} 1{,}3 & 1{,}9 \\ 1{,}3 & 1{,}9 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{Hauptfall II}$$

$$D_x = \begin{vmatrix} -3{,}1 & 5{,}7 \\ 4{,}3 & 9{,}5 \end{vmatrix} = -3{,}1 \cdot 9{,}5 - 4{,}3 \cdot 5{,}7 \neq 0\,.$$

Da schon $D_x \neq 0$, ist die Zugehörigkeit zum Unterfall 2 bereits geklärt. Beide Gleichungen stehen in Widerspruch zueinander.

Lösungsmenge: $\underline{\underline{\emptyset}}$.

Erfolgt die Berechnung der Determinanten mit dem Rechenstab, so ist zur einwandfreien Unterscheidung der Hauptfälle I und II bei absolut sehr kleiner oder verschwindender Koeffizientendeterminante ($|D| \ll 1$ bzw. $D = 0$) noch eine exakte Berechnung vorzunehmen (Rechenstabungenauigkeit!).

13.3. Gleichungen, die sich auf lineare Gleichungen zurückführen lassen

Zum Teil treten innerhalb von Systemen nichtlineare Gleichungen auf, die sich aber in lineare Gleichungen umwandeln lassen. Entweder läßt sich das durch geeignete Umformungen erreichen, oder dadurch, daß neue Variable eingeführt werden. Dabei ist zu überprüfen, ob die so entstehenden linearen Gleichungen zu den gegebenen Gleichungen äquivalent sind. Zweckmäßigerweise wird dazu der Definitionsbereich der umzuformenden Gleichung untersucht. Ist er nur ein Teilbereich des für die linearen Gleichungen grundsätzlich möglichen Bereichs der reellen Zahlen, so ist der Variablenbereich der linearen Gleichung entsprechend festzulegen, um das Auftreten unzulässiger Elemente in der Lösungsmenge der Ausgangsgleichung zu vermeiden. Wird die Kontrolle der Variablenbereiche nicht vorgenommen, so muß unbedingt am Schluß der Rechnung die Einsetzprobe durchgeführt werden, damit dann nachträglich unzulässige Elemente entfernt werden können.

BEISPIEL

$$\left\{(x;\, y) \;\middle|\; \frac{x+3}{x-1} + \frac{y+3}{y-2} = 2 \wedge 3x - 4y = -5\right\}$$

Lösung:

Definitionsbereich der ersten Gleichung: $x \in R \setminus \{1\}$
$y \in R \setminus \{2\}$.

Umformung der ersten Gleichung:

$$(x+3)(y-2) + (y+3)(x-1) = 2(x-1)(y-2)$$
$$5x + 4y = 13\,.$$

Das neue Gleichungssystem

$$\begin{vmatrix} 5x + 4y = & 13 \\ 3x - 4y = & -5 \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} x \in R \setminus \{1\} \\ y \in R \setminus \{2\} \end{matrix}$$

würde ohne einschränkenden Variablenbereich die Lösungsmenge $\{(1;\, 2)\}$ besitzen, so aber ist sie leer.

Lösungsmenge: $\underline{\underline{\emptyset}}$.

Ein reziprokes Gleichungssystem

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{y} = c \\[2mm] \dfrac{e}{x} + \dfrac{f}{y} = g \end{array} \right|$$

kann mittels der Substitution $1/x = u$, $1/y = v$ in das lineare Gleichungssystem

$$\left| \begin{array}{l} au + bv = c \\ eu + fv = g \end{array} \right| \qquad \begin{array}{l} \text{Variablenbereich:} \\ u, v \in R \setminus \{0\} \end{array}$$

überführt werden.
Entsprechend kann das nichtlineare System

$$\left| \begin{array}{l} a\sqrt{x} + b\sqrt{y} = c \\ e\sqrt{x} + f\sqrt{y} = g \end{array} \right|$$

mit $u = \sqrt{x}$, $v = \sqrt{y}$ auf das lineare System

$$\left| \begin{array}{l} au + bv = c \\ eu + fv = g \end{array} \right| \qquad \begin{array}{l} \text{Variablenbereich:} \\ u, v \in [0; +\infty) \end{array}$$

zurückgeführt werden.
Die beiden zuletzt angeführten nichtlinearen Systeme führen auf das formal gleiche, aber im Variablenbereich unterschiedliche lineare Gleichungssystem.

AUFGABEN

Die Lösungsmengen folgender Gleichungssysteme sind zu bestimmen:

204. $\left| \begin{array}{l} 3x + 2y = 8 \\ 6x - 3y = 30 \end{array} \right|$

205. $\left| \begin{array}{l} x = 3y - 19 \\ y = 3x - 23 \end{array} \right|$

206. $\left| \begin{array}{l} 3x = 4y - 15 \\ 5y = 11 - 4x \end{array} \right|$

207. $\left| \begin{array}{l} 18x = 10y - 20 \\ 24x = 15y - 30 \end{array} \right|$

208. $\left| \begin{array}{l} 2{,}4x - 1{,}7y = 1{,}52 \\ 3{,}2x + 2{,}3y = 5{,}68 \end{array} \right|$

209. $\left| \begin{array}{l} 4{,}9y + 3{,}2x = 1{,}23 \\ 3{,}5y - 2{,}4x = 6{,}97 \end{array} \right|$

210. $\left| \begin{array}{l} 3{,}5x + 4{,}7 = 3{,}8y \\ 5{,}7y - 3{,}9 = 6{,}3x \end{array} \right|$

211. $\left| \begin{array}{l} 4{,}5x + 1{,}5y = 3 \\ 3{,}6x + 1{,}2y = 2{,}4 \end{array} \right|$

212. $\left| \begin{array}{l} 18x - 25y = 31{,}2 \\ 23{,}4x - 32{,}5y = 23{,}4 \end{array} \right|$

213. $\left| \begin{array}{l} 4{,}2x - 0{,}03y = 3{,}489 \\ 12x + 0{,}7y = 6{,}59 \end{array} \right|$

214. $\left| \begin{array}{l} 7{,}21x - 4{,}13y = 8{,}44 \\ 4{,}83x + 5{,}72y = 12{,}02 \end{array} \right|$

215. $\left| \begin{array}{l} 1{,}42x - 1{,}16y = 4{,}1 \\ 8{,}52x - 6{,}96y = 24{,}6 \end{array} \right|$

216. $$\left| \begin{array}{l} 7(x+2) - 6(y+3) = 41 \\ 4(x+2) + 9(y+3) = 11 \end{array} \right|$$

217. $$\left| \begin{array}{l} 7{,}8(x-1) + 4{,}9(y+2) = -1 \\ 11{,}7(x-1) - 3{,}5(y+2) = 9{,}35 \end{array} \right|$$

218. $$\left| \begin{array}{l} 3(x-2) + 4\left(2y + \frac{3}{2}\right) = 0 \\ 5(x+3) - 3\left(y - \frac{1}{3}\right) = 16 \end{array} \right|$$

219. $$\left| \begin{array}{l} 2(3x+5y) - 4(2x-3y) = 20 \\ 3(5x-2y) + 6(x+y) = 21 \end{array} \right|$$

220. $$\left| \begin{array}{l} 2(7x+3y) - 4(5x+2y-1) = x - 13 \\ 5(3-2y) + 3(11x-3y-20) = 90 - y \end{array} \right|$$

221. $$\left| \begin{array}{l} 4x(15y-11) + 12y(3-5x) = 6(11y+12) \\ 3x(4y-10) + 4(2x-3y) = 3y(4x+1) - 12 \end{array} \right|$$

222. $$\left| \begin{array}{l} \frac{x-2}{3} - \frac{y+2}{2} = \frac{x-2y}{5} \\ \frac{x-y}{6} + \frac{3y+2}{4} = \frac{x-2(y-1)}{3} \end{array} \right|$$

223. $$\left| \begin{array}{l} \frac{3x-4y}{2} + \frac{5-3x}{3} - \frac{4y-1}{4} = \frac{23+6x}{12} \\ \frac{2x-y}{3} + \frac{2y-5x}{6} = -\frac{x}{6} \end{array} \right|$$

224. $$\left| \begin{array}{l} \frac{2x-3y+1}{5} + \frac{5x+4(y+3)}{7} = 3 \\ \frac{3x+11y}{7} - (2x+y)(4x-1) = (4-x)(8x+4y-9) - 16 \end{array} \right|$$

225. $$\left| \begin{array}{l} 3x + 5y = 36a - 7b \\ 2x - 3y = 5a - 11b \end{array} \right|$$

226. $$\left| \begin{array}{l} 5x + 2y = 29a \\ 2x + \frac{4}{5}y = \frac{58}{5}a \end{array} \right|$$

227. $$\left| \begin{array}{l} ax + by = a \\ x - y = 0 \end{array} \right|$$

228. $$\left| \begin{array}{l} ax + by = 2a \\ a^2x - b^2y = a^2 + b^2 \end{array} \right|$$

229. $$\left| \begin{array}{l} \left(\frac{a^2+b^2}{2a}\right)^2 x - \left(\frac{a^2-b^2}{2a}\right)^2 y = b^2 \\ \frac{a^2+b^2}{2a}x + \frac{a^2-b^2}{2a}y = a \end{array} \right|$$

230. $$\left| \begin{array}{l} \frac{x}{a+b} + \frac{y}{a} = 2b - a \\ \frac{x}{b} + \frac{y}{a-b} = b \end{array} \right|$$

231. $$\left| \begin{array}{l} \frac{x}{2a} + \frac{y}{a-b} = a + 3b \\ \frac{x}{a+b} - \frac{y}{2b} = a + b \end{array} \right|$$

232. $\left| \begin{aligned} \frac{x}{a-b} + \frac{y}{a+b} &= 1 \\ \frac{x}{a+b} + \frac{y}{a-b} &= 1 \end{aligned} \right|$

233. $\left| \begin{aligned} \frac{x}{a+b} + \frac{y}{a-b} &= 1 \\ \frac{x}{a-b} + \frac{y}{a+b} &= \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} \end{aligned} \right|$

234. $\left| \begin{aligned} 2a(x+y) + 4a(a+b) &= 2(x+y) + 4a^2(a+b) \\ (x+y+2a)(x-y-2b) &= (x+y-2a)(x-y+2b) \end{aligned} \right|$

235. $\left| \begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} &= \frac{1}{2} \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} &= \frac{1}{6} \end{aligned} \right|$

236. $\left| \begin{aligned} \frac{4}{x} + \frac{5}{y} &= 3 \\ \frac{7}{x} - \frac{1}{y} &= 2 \end{aligned} \right|$

237. $\left| \begin{aligned} \frac{7}{x} + 4y &= 8 \\ \frac{1}{x} - y &= -2 \end{aligned} \right|$

238. $\left| \begin{aligned} 5y + 8x &= 3xy \\ 2x - y &= 0 \end{aligned} \right|$

239. $\left| \begin{aligned} 4y - 9x &= -xy \\ 6y + 3x &= 4xy \end{aligned} \right|$

240. $\left| \begin{aligned} \frac{2x+3y}{3x-y} &= \frac{17}{9} \\ \frac{3x+4y}{6x-1} &= 2 \end{aligned} \right|$

241. $\left| \begin{aligned} \frac{5x+3y+3}{2x+y+1} &= 3 \\ \frac{4x-2y-3}{3x+4y+1} &= -1 \end{aligned} \right|$

242. $\left| \begin{aligned} \frac{2x-3y}{2x-6} &= \frac{4}{3} \\ \frac{3x-2y}{x+y} &= 1 \end{aligned} \right|$

243. $\left| \begin{aligned} \frac{1}{x+y+1} &= \frac{1}{4x-3y+1} \\ \frac{1}{3x+y+2} &= \frac{2}{4+3(x+2y)} \end{aligned} \right|$

244. $(x+2):(y+3):(2y-5x) = 1:3:5$

245. $(x+1):(y+2):(x+y+1) = 3:4:6$

246. Zwei Bautrupps A und B sollten eine Anlage zusammen in 30 Tagen montieren. Da aber Trupp A bereits nach 12 Tagen abgezogen wird, benötigt B noch 27 Tage zur Fertigstellung der Arbeit. In welcher Zeit hätte jeder Trupp allein die Montage durchführen können?

247. Ein Benzinkessel kann durch zwei Zuleitungen gefüllt werden. Ist die erste 6 min und die zweite 3 min geöffnet, so werden $^5/_6$ des Behälters gefüllt. Ist die erste 3 min und die zweite 6 min geöffnet, so bleibt $^1/_{12}$ des Behälters leer. Wie lange muß jede Zuleitung geöffnet sein, damit sie einzeln den Behälter füllt, und wie lange müssen sie zusammen in Betrieb genommen werden, um den Kessel zu füllen?

248. Die Produktionsauflage eines Maschinenbaubetriebes lag im 1. Quartal des neuen Jahres um 40 Maschinen höher als die Produktion im letzten Quartal des Vorjahres. Sie wurde um $^1/_3$ übererfüllt. Die so erreichte Produktion lag um 60% über der im letzten Quartal des Vorjahres. Wie groß waren die Vorjahresproduktion und die Produktionsauflage des neuen Jahres?

249. Zwei LKW eines städtischen Kraftverkehrsbetriebes sollten die Steine zur Ausbesserung einer Straße in 12 Tagen gemeinsam anfahren. Nach 8 Tagen wurde der eine Wagen anderweitig eingesetzt, und der andere Wagen fuhr noch 7 Tage allein. In wieviel Tagen hätte jeder LKW die Steine allein angefahren?

250. Eine Legierung mit der Dichte ϱ ist aus zwei Legierungsbestandteilen B_1 und B_2 mit den Dichten ϱ_1 und ϱ_2 zusammengesetzt ($\varrho_1 < \varrho < \varrho_2$). Es sind die prozentuale Massenzusammensetzung und das Mischungsverhältnis zu bestimmen.

251. Eine Flüssigkeit mit der Dichte ϱ ist durch Mischen zweier Flüssigkeiten F_1 und F_2 mit den Dichten ϱ_1 und ϱ_2 entstanden. Wie groß sind die prozentuale Volumenzusammensetzung und das Mischungsverhältnis?

252. Ein Quadratmeter eines 5,5 mm dicken Messingbleches hat die Masse 47,025 kg. Wieviel Cu ($\varrho = 8{,}9\ \mathrm{kg/dm^3}$) und wieviel Zn ($\varrho = 7{,}14\ \mathrm{kg/dm^3}$) sind darin enthalten?

253. Wieviel Schwefelsäure mit der Dichte $\varrho = 1{,}15\ \mathrm{kg/dm^3}$ und $\varrho = 1{,}20\ \mathrm{kg/dm^3}$ ergeben beim Mischen 60 dm³ Säure mit der Dichte $\varrho = 1{,}17\ \mathrm{kg/dm^3}$?

254. Welche Länge haben die Durchmesser zweier Kreise, wenn die Summe der Umfänge 109,96 cm beträgt und die Durchmesser sich um 5 cm unterscheiden?

255. Die Summe zweier Seiten eines Dreiecks beträgt 84 cm. Die Projektionen dieser Seiten auf die dritte sind 40 cm und 16 cm lang. Wie groß sind die Dreiecksseiten?

256. Wird die lange Seite eines Rechtecks um 4 cm verkürzt und die kurze Seite um 6 cm verlängert, so entsteht ein Quadrat mit gleichlanger Diagonale. Wie groß sind die Seiten des Rechtecks?

257. Wird die lange Seite eines Rechtecks um 2 cm verkürzt und die kurze Seite um 8 cm verlängert, so entsteht ein Quadrat mit einem um 50 cm² größeren Flächeninhalt. Es sind die Seitenlängen des Rechtecks zu bestimmen.

258. Verkürzt man die lange Seite eines Rechtecks um a und verlängert die kurze Seite um b, so entsteht ein Quadrat, dessen Flächeninhalt um ΔA größer ist als der des Rechtecks. Wie lang sind die Seiten des Rechtecks? Welchen Bedingungen müssen a, b und ΔA genügen, damit ein derartiges Rechteck existieren kann? ($a \neq b$)

259. Desgl. für $a = b$

260. Auf einer kreisrunden Bahn von 440 cm Länge treffen sich zwei Körper bei gleich gerichteter Bewegung alle 20 min, bei entgegengesetzter Bewegung alle 5 min. Wie groß sind die Geschwindigkeiten beider Körper?

261. Zwei Jugendwandergruppen wandern aus 30 km Entfernung einander entgegen. Bricht die erste 2 h früher auf als die zweite, so treffen sie sich $2\,^1/_2$ h nach dem Aufbruch der zweiten Gruppe. Bricht die zweite Gruppe 2 h früher auf als die erste, so treffen sie sich 3 h nach dem Aufbruch der ersten Gruppe. Wieviel km in der Stunde legt jede Gruppe zurück?

262. Das Drehmoment einer Kraft bleibt unverändert, wenn man die Kraft um 24 kp vergrößert und den Hebelarm um 10 cm verkürzt oder wenn man die Kraft um 24 kp verringert und den Hebelarm um 20 cm verlängert. Wie groß sind die Kraft und ihr Hebelarm?

263. Zwei Kräfte F_1 und F_2 wirken in der gleichen Geraden und haben bei gleichem Richtungssinn die Resultierende $F_{R1} = 31$ kp und bei entgegengesetztem Richtungssinn die Resultierende $F_{R2} = 5$ kp. Wie groß ist jede Kraft?

264. Das Übersetzungsverhältnis zweier Zahnräder eines Getriebes ist 7:11. Hätte jedes Rad 4 Zähne mehr, so würde das Verhältnis 2:3 sein. Wieviel Zähne hat jedes Rad?

265. Vermehrt man in einer Leitung bei unveränderter Spannung den Widerstand um 2 Ω, so verringert sich die Stromstärke um 1 A. Verringert man den Widerstand um 4 Ω, so steigert sich die Stromstärke um 3 A. Wie groß sind Widerstand und Stromstärke der Leitung?

14. Lineare Gleichungssysteme mit drei Variablen

14.1. Zwei lineare Gleichungen mit drei Variablen

Ein derartiges Gleichungssystem sei in der Normalform

$$\left| \begin{array}{l} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \end{array} \right|$$

gegeben. Ist mindestens eines der beiden absoluten Glieder b_i von Null verschieden, so liegt ein *inhomogenes System* vor, während ein *homogenes System* $b_1 = b_2 = 0$ erfordert.

14.1.1. Homogenes System

Das homogene System

$$\left| \begin{array}{l} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0 \end{array} \right|$$

hat offensichtlich stets die (triviale) Lösung

$$x = y = z = 0$$

und ist somit grundsätzlich widerspruchsfrei.
Es sind nun Untersuchungen anzustellen, ob noch weitere Lösungen möglich sind. Das Problem läßt sich auf die Auflösung von zwei Gleichungen mit zwei Variablen zurückführen. Dazu ist eine der drei Variablen als freie Variable anzusehen und auf die rechte Seite zu bringen. Dabei ergeben sich, je nachdem ob x, y oder z als freie Variable angenommen werden, drei Möglichkeiten:

1. $$\left| \begin{array}{l} a_{12}y + a_{13}z = -a_{11}x \\ a_{22}y + a_{23}z = -a_{21}x \end{array} \right|$$

2. $$\left| \begin{array}{l} a_{11}x + a_{13}z = -a_{12}y \\ a_{21}x + a_{23}z = -a_{22}y \end{array} \right|$$

3. $$\left| \begin{array}{l} a_{11}x + a_{12}y = -a_{13}z \\ a_{21}x + a_{22}y = -a_{23}z \end{array} \right|$$

Jedes der drei Gleichungssysteme kann nach einem der in 13.2. behandelten Verfahren gelöst werden. Hier sollen der Übersichtlichkeit wegen Determinanten zur Auflösung herangezogen werden.
Die Koeffizientendeterminanten der drei Gleichungssysteme sind:

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad D_2 = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Aus später ersichtlichen Gründen wurde die Determinante D_2 zusätzlich mit einem Minuszeichen versehen.

Fall 1. Mindestens eine der drei Determinanten hat einen von Null verschiedenen Wert.

Ohne Einschränkung der Allgemeingültigkeit kann angenommen werden, daß System 3 eine nicht verschwindende Koeffizientendeterminante aufweist ($D_3 \neq 0$).

Andernfalls kann entsprechend eines der beiden anderen Systeme herangezogen werden.

Für das Gleichungssystem 3 ist dann

$$D_x = \begin{vmatrix} -a_{13}z & a_{12} \\ -a_{23}z & a_{22} \end{vmatrix} = -z \begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} \\ a_{23} & a_{22} \end{vmatrix}$$

und nach Vertauschen der beiden Spalten

$$D_x = z \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = D_1 z$$

und entsprechend

$$D_y = \begin{vmatrix} a_{11} & -a_{13}z \\ a_{21} & -a_{23}z \end{vmatrix} = -z \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = D_2 \cdot z .$$

Die Wertetripel der unendlichen Lösungsmenge lassen sich unter Zuhilfenahme der Cramerschen Regel bestimmen:

Für jedes beliebig gewählte $z \in R$ ist

$$x = \frac{D_1 \cdot z}{D_3}, \quad y = \frac{D_2 \cdot z}{D_3}, \quad z = z .$$

Wird ein Parameter t in der Form $t = \dfrac{z}{D_3}$ eingeführt, so ergibt sich für beliebig wählbares $t \in R$:

$$x = D_1 \cdot t, \quad y = D_2 \cdot t, \quad z = D_3 \cdot t .$$

Lösungsmenge eines linearen, homogenen Gleichungssystems mit zwei Gleichungen und drei Variablen

$$\left| \begin{array}{l} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0 \end{array} \right|$$

ist

$$\boxed{L(t) = \{(D_1 t;\ D_2 t;\ D_3 t) \mid t \in R\}}$$

Die zugehörigen zweireihigen Determinanten

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad D_2 = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

ergeben sich aus dem rechteckigen Koeffizientenschema (Matrix)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

durch jeweiliges Streichen der ersten, zweiten bzw. dritten Spalte. Das zusätzliche Minuszeichen bei D_2 ist zu beachten. Das einem bestimmten $t = t_0$ entsprechende Lösungstripel $L(t_0) \in L(t)$ wird *partikuläres Lösungstripel* genannt.

Für $t = 0$ ergibt sich das schon erkannte partikuläre Lösungstripel

$$L(0) = \{(0;\ 0;\ 0)\}.$$

BEISPIELE

Für die folgenden Gleichungssysteme sind die Lösungsmengen zu ermitteln:

1. $$\left| \begin{array}{l} 3x + 2y - 4z = 0 \\ 2x + 3y - 5z = 0 \end{array} \right|$$

Lösung: Es sind

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = 2, \quad D_2 = -\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = 7, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5.$$

Alle drei Determinanten sind von Null verschieden.

Lösungsmenge: $\underline{\underline{\{(2t;\ 7t;\ 5t) \mid t \in R\}}}$.

2. $$\left| \begin{array}{l} 4x + 6y - 3z = 0 \\ 6x + 9y - 5z = 0 \end{array} \right|$$

Lösung: Es sind

$$D_1 = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 9 & -5 \end{vmatrix} = -3, \quad D_2 = -\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 6 & -5 \end{vmatrix} = 2, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = 0.$$

$D_3 = 0$ besagt, daß zwischen den x- und y-Gliedern beider Gleichungen eine lineare Abhängigkeit besteht.

Lösungsmenge: $\underline{\underline{\{(-3t;\ 2t;\ 0) \mid t \in R\}}}$.

In diesem Beispiel hat z für jedes t den Wert Null.

Fall 2. Alle drei Determinanten verschwinden: $D_1 = D_2 = D_3 = 0$.

Es genügt schon festzustellen, daß zwei Determinanten verschwinden, denn dann muß zwangsweise auch die dritte Determinante den Wert Null aufweisen. Es folgt nämlich aus

$$D_1 = 0: \quad a_{22} = ka_{12} \quad \text{und} \quad a_{23} = ka_{13}$$
$$D_2 = 0: \quad a_{21} = ka_{11} \quad (\text{und} \quad a_{23} = ka_{13}).$$

Damit ist aber auch

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ ka_{11} & ka_{12} \end{vmatrix} = 0.$$

Beide Gleichungen sind voneinander linear abhängig und werden durch die gleichen Lösungstripel erfüllt. Zur Ermittlung der Menge aller Lösungstripel kann über zwei der Variablen frei verfügt werden, die zugehörigen Werte der dritten Variablen sind dann mit Hilfe einer der beiden Gleichungen zu bestimmen.

BEISPIEL

3. Es ist die Lösungsmenge des Gleichungssystems

$$\begin{vmatrix} 4x + 6y - 3z \ \ = 0 \\ 6x + 9y - 4{,}5z = 0 \end{vmatrix}$$

zu bestimmen.

Lösung: Da

$$D_1 = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 9 & -4{,}5 \end{vmatrix} = 0 \qquad D_2 = -\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 6 & -4{,}5 \end{vmatrix} = 0$$

sind, liegt lineare Abhängigkeit vor. Die Menge der Lösungstripel wird durch

$$\underline{\underline{\left\{\left(x;\, y;\, \frac{4x+6y}{3}\right) \mid x \in R,\quad y \in R\right\}}}$$

wiedergegeben. Die Variablen x und y sind darin frei wählbar. Für einige Werte sei diese Lösungsmenge in Form einer Wertetabelle dargestellt:

x	...	1	1	...	3	...
y	...	0	1	...	2	...
z	...	$\frac{4}{3}$	$\frac{10}{3}$	...	8	...

14.1.2. Inhomogenes System

Wie bei dem entsprechenden homogenen System kann zunächst eine der drei Variablen als freie Variable angesehen und mit beliebigen Werten belegt werden. Ist $D_3 \neq 0$, so kann man

$$\begin{vmatrix} a_{11}x + a_{12}y = b_1 - a_{13}z \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 - a_{23}z \end{vmatrix}$$

als Gleichungssystem mit zwei Variablen lösen und wird für jeden fest angenommenen Wert z eine eindeutige Lösungsmenge erhalten. Da z mit beliebigen Werten belegt werden kann, weist das Gleichungssystem eine unendliche Lösungsmenge auf. Sind

$$(x_i;\, y_i;\, z_i) \quad \text{und} \quad (x_i';\, y_i';\, z_i')$$

zwei Elemente dieser Lösungsmenge, so stellen

$$a_{k1}x_i + a_{k2}y_i + a_{k3}z_i = b_k$$

und $\qquad k \in \{1; 2\}$

$$a_{k1}x'_i + a_{k2}y'_i + a_{k3}z'_i = b_k$$

wahre Aussagen dar. Die jeweils für gleiches k zu bildenden Differenzen dieser Aussagen

$$a_{k1}(x'_i - x_i) + a_{k2}(y'_i - y_i) + a_{k3}(z'_i - z_i) = 0$$

besagen, daß

$$(x'_i - x_i;\, y'_i - y_i;\, z'_i - z_i)$$

das homogene System

$$a_{k1}x + a_{k2}y + a_{k3}z = 0 \qquad k \in \{1; 2\}$$

erfüllt. Ist

$$L_h(t) = \{(D_1t;\, D_2t;\, D_3t) \mid t \in R\}$$

Lösungsmenge des homogenen Systems, so muß demnach

$$\boxed{L_i(t) = \{(D_1t + x_i;\quad D_2t + y_i;\quad D_3t + z_i) \mid t \in R\}} \tag{24}$$

Lösungsmenge des inhomogenen Systems sein.
Der Beweis dafür, daß durch die so gebildete Lösungsmenge auch alle Lösungstripel erfaßt werden, soll hier nicht geführt werden.

Haben nicht alle zweireihigen Determinanten des rechteckigen Koeffizientenschemas

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

den Wert Null, so setzt sich die Lösungsmenge des inhomogenen Systems

$$\left| \begin{array}{l} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \end{array} \right|$$

aus der Lösungsmenge des zugehörigen homogenen Systems und einem beliebig gebildeten Lösungstripel des inhomogenen Systems zusammen.

BEISPIEL

$$\{(x; y; z) \mid 3x + 2y - z = 3 \wedge 2x - 4y + 2z = -2\}$$

Lösung:

a) homogenes System: $\left| \begin{array}{l} 3x + 2y - z = 0 \\ 2x - 4y + 2z = 0 \end{array} \right|$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad D_2 = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -8, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -16$$

$$L_h(t) = \{(0;\ -8t;\ -16t) \mid t \in R\}$$

oder, wenn $-8t$ durch einen neuen Parameter t ersetzt wird:

Lösungsmenge des homogenen Systems:

$$L_h(t) = \{(0;\ t;\ 2t) \mid t \in R\}.$$

b) inhomogenes System:

Ein Lösungstripel des inhomogenen Systems soll mit $z_i = 0$ gebildet werden. Da auch $D_2 \neq 0$ ist, hätte auch $y_i = 0$ gewählt werden können.

$$\left| \begin{array}{l} 3x + 2y = 3 \\ 2x - 4y = -2 \end{array} \right|$$

$$x_i = \frac{1}{2}, \quad y_i = \frac{3}{4}, \quad z_i = 0.$$

Lösungsmenge des inhomogenen Systems:

$$\underline{\underline{L_i(t) = \left\{\left(\frac{1}{2};\ t + \frac{3}{4};\ 2t\right) \middle| \ t \in R\right\}}}. \quad \text{Probe!}$$

Der Leser untersuche, welche Aussagen im Fall $D_1 = D_2 = D_3 = 0$ bezüglich der Lösbarkeit des inhomogenen Gleichungssystems getroffen werden können.

AUFGABEN

266. $\left| \begin{array}{l} 3x + 5y + z = 0 \\ 2x + 4y - 3z = 0 \end{array} \right|$

267. $\left| \begin{array}{l} 2{,}5x - 1{,}4y + 3{,}1z = 0 \\ 2{,}8x + 0{,}9y + 1{,}8z = 0 \end{array} \right|$

268. $\left| \begin{array}{l} 2x + 3y - 4z = 0 \\ 3x + 5y - 6z = 0 \end{array} \right|$

269. $\left| \begin{array}{l} 1{,}30x - 1{,}25y + 2{,}40z = 0 \\ 0{,}78x - 0{,}75y + 1{,}44z = 0 \end{array} \right|$

270. $\left| \begin{array}{l} 2x - 5y + 4z = 9 \\ x - y - z = 3 \end{array} \right|$

271. $\left| \begin{array}{l} 7{,}2x + 9{,}6y + 4{,}8z = 2{,}4 \\ 11{,}1x + 14{,}8y + 7{,}4z = 3{,}7 \end{array} \right|$

272. $\left| \begin{array}{l} 11{,}4x - 7{,}6y + 19{,}0z = 15{,}2 \\ 8{,}7x - 5{,}8y + 14{,}5z = 10{,}4 \end{array} \right|$

14.2. Drei lineare Gleichungen mit drei Variablen

14.2.1. Einführung der dreireihigen Determinante

Im Vordergrund dieser Darlegung soll das Lösen mit Hilfe von Determinanten stehen. Es sei lediglich darauf hingewiesen, daß die in 13.2.2. angeführten Lösungsverfahren sinngemäß verwendet werden können. Durch Anwendung des Additions-, Einsetz- oder Gleichsetzverfahrens werden aus den drei Gleichungen mit drei Variablen heraus

zwei Gleichungen mit nur zwei Variablen aufgestellt, die dann gelöst werden. Mit dem gefundenen Lösungspaar kann dann aus einer der drei Ausgangsgleichungen der zugehörige Wert der dritten Variablen errechnet werden.
An einem Beispiel sei hier lediglich das am häufigsten verwendete Additionsverfahren demonstriert.

BEISPIEL

$$\left| \begin{array}{r} 2x - 3y + z = 7 \\ 4x + 2y + 3z = 8 \\ x + 5y + 2z = 0 \end{array} \right|$$

Lösung: Es werden zweckmäßig zwei von x freie Gleichungen aufgestellt. Dazu wird einmal die erste Gleichung mit -2 multipliziert und zur zweiten Gleichung addiert und zum anderen die dritte Gleichung mit -2 multipliziert und zur ersten addiert.

$$\begin{array}{|r|l|l} 2x - 3y + z = 7 & \cdot(-2) & \cdot(+1) \\ 4x + 2y + 3z = 8 & \cdot(+1) & \\ x + 5y + 2z = 0 & & \cdot(-2) \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|r|l} 8y + z = -6 & \cdot(+3) \\ -13y - 3z = 7 & \cdot(+1) \\ \hline \end{array}$$

$$11y = -11$$

$$y = -1.$$

Aus der ersten Gleichung des Systems mit zwei Variablen folgt dafür

$$8(-1) + z = -6$$

$$z = 2$$

und aus der dritten Gleichung des gegebenen Systems

$$x + 5 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 = 0$$

$$x = 1.$$

Lösungsmenge: $\underline{\underline{\{(1;\ -1;\ 2)\}}}.$

Die Probe ist an der ersten und zweiten Gleichung durchzuführen.

Lösung mit Determinanten

Das gegebene Gleichungssystem sei

$$\left| \begin{array}{l} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{array} \right|$$

Es soll jetzt eine Linearkombination aller drei Gleichungen so vorgenommen werden, daß in ihr nur noch eine der drei Variablen auftritt. Dazu werden die drei Gleichungen mit den noch näher zu bestimmenden Faktoren A_{11}, A_{21} und A_{31} multipliziert und dann addiert. Die entstehende Kombinationsgleichung soll nur noch die Variable x enthalten.

$$\left|\begin{array}{l} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{array}\right| \begin{array}{l} \cdot A_{11} \\ \cdot A_{21} \\ \cdot A_{31} \end{array}$$

In der so entstehenden Beziehung

$$\begin{aligned} &(a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31})x + (a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + a_{32}A_{31})y + \\ &\quad + (a_{13}A_{11} + a_{23}A_{21} + a_{33}A_{31})z = A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + A_{31}b_3 \end{aligned} \tag{I}$$

müssen dann auf Grund der angegebenen Forderung die Koeffizienten von y und z verschwinden:

$$\begin{aligned} a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + a_{32}A_{31} &= 0 \\ a_{13}A_{11} + a_{23}A_{21} + a_{33}A_{31} &= 0. \end{aligned}$$

Diese beiden Gleichungen stellen ein homogenes lineares System von zwei Gleichungen mit den drei zu bestimmenden A_{i1} dar. Dieses Gleichungssystem hat eine unendliche Lösungsmenge. Es ergeben sich also unbegrenzt viele Möglichkeiten, das gestellte Problem, eine nur x enthaltende Gleichung herzustellen, zu lösen. Hier interessiert aber nur eine Möglichkeit, die als partikuläre Lösung mit $t = 1$ gewonnen werden soll:

Unter Beachtung des vorliegenden Koeffizientenschemas

$$\begin{pmatrix} a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

ist somit

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{32} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

In den zweireihigen Determinanten sollen noch die Zeilen mit den Spalten vertauscht werden, damit die Elemente mit gleichem ersten Index (Zeilenindex) jeweils in gleicher Zeile stehen:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Werden die Koeffizienten des ursprünglich gegebenen Gleichungssystems in Form einer dreireihigen Determinante angeordnet

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

so ist sofort zu erkennen:

A_{11} entsteht durch Streichung der 1. Zeile und der 1. Spalte,
A_{21} ,, ,, ,, ,, 2. ,, ,, ,, ,, ,, ,
A_{31} ,, ,, ,, ,, 3. ,, ,, ,, ,, ,, ,

wobei A_{21} noch zusätzlich mit einem Minuszeichen zu versehen ist.
Man nennt die A_{i1} die zur ersten Spalte gehörigen zweireihigen **Unterdeterminanten** der dreireihigen Determinante D.
Mit den so gewählten A_{i1} nimmt (I) die Form

$$(a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31})x = A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + A_{31}b_3$$

an. Wie zuvor bei zwei Gleichungen mit zwei Variablen wird der auf der linken Seite stehende Klammerausdruck mit der Koeffizientendeterminante D identifiziert:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}. \tag{II}$$

Damit wird der Determinante D ein Wert zugeordnet, der u. a. auf die rechts beschriebene Art berechnet werden kann. Man sagt: Die Determinante ist nach den Elementen der ersten Spalte entwickelt.
Die rechte Seite von (I) kann auf Grund der vorstehenden Festlegung ebenfalls in Determinantenform geschrieben werden. Es sind dazu lediglich die Elemente a_{i1} durch die b_i ($i \in \{1, 2, 3\}$) zu ersetzen:

$$D_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = b_1\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - b_2\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + b_3\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Damit nimmt (I) die Form

$$D \cdot x = D_x$$

an. Ist $D \neq 0$, so kann daraus x mit

$$x = \frac{D_x}{D}$$

berechnet werden. Bevor jedoch die Lösung des Gleichungssystems weiter verfolgt wird, sollen die Gesetzmäßigkeiten dreireihiger Determinanten untersucht werden.

14.2.2. Gesetze für dreireihige Determinanten (Regel von Sarrus)

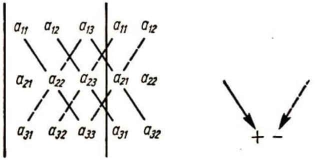
Um zunächst einmal feststellen zu können, wie sich der Wert von D aus den Elementen a_{ik} direkt zusammensetzt, sollen die auf der rechten Seite von (II) befindlichen zweireihigen Determinanten ausgewertet werden.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{aligned}[t] & a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + \\ & + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}) \end{aligned} \tag{III}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + \\ + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Es ist bemerkenswert, daß in jedem Summanden jede Spalte bzw. jede Zeile nur einmal vertreten ist. Jedes der neun Glieder kommt insgesamt zweimal vor. Auf diese entwickelte Form einer dreireihigen Determinante kommt man auch durch die folgende *Regel von* SARRUS:

Man füge der Determinante die beiden ersten Spalten zusätzlich an



und bilde die Produkte der Elemente, die jeweils auf einer der eingezeichneten Diagonalen liegen. Dabei sind die Produkte mit dem für die Diagonalenrichtung vorgeschriebenen Vorzeichen (von links oben nach rechts unten: plus, von rechts oben nach links unten: minus) zu versehen.

Diese Regel gilt nur für dreireihige Determinanten!

BEISPIEL

1. Die Determinante

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -2 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

ist a) durch Entwicklung nach den Elementen der ersten Spalte und b) mit Hilfe der Regel von SARRUS zu berechnen.

Lösung:

a) $$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -2 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot 8 - 3 \cdot (-10) + 4 \cdot (-4) = \underline{\underline{30.}}$$

b)
$$D = \left|\begin{array}{rrr|rr} 2 & -1 & 3 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -2 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 4 & 3 \end{array}\right| = 2\cdot 2\cdot 1 + (-1)\cdot(-2)\cdot 4 + 3\cdot 3\cdot 3 - 3\cdot 2\cdot 4 - 2\cdot(-2)\cdot 3 - (-1)\cdot 3\cdot 1 = \underline{\underline{30}}.$$

Entwicklung nach den Elementen einer Reihe

In (II) liegt eine dreireihige Determinante in der nach den Elementen der ersten Spalte entwickelten Form vor. Für die Elemente einer anderen Spalte oder Zeile lassen sich entsprechende Entwicklungen bilden. Werden dazu in (III) beispielsweise die Elemente der zweiten Zeile ausgeklammert, so ergibt sich

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= -a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) - a_{23}(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}) =$$

$$= -a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

A_{11} +	A_{12} −	A_{13} +
A_{21} −	A_{22} +	A_{23} −
A_{31} +	A_{32} −	A_{33} +

Bild 29

Bei der zuletzt angegebenen Darstellung wurde darauf geachtet, daß jede zweireihige Unterdeterminante die Form erhält, die sich durch Streichen der Zeile und Spalte von D ergibt, in der sich das zugehörige Element a_{ik} befindet. Dazu ist es erforderlich, die Unterdeterminanten mit dem aus $(-1)^{i+k}$ zu ermittelnden Vorzeichen zu versehen. Dieses Vorzeichen läßt sich auch leicht aus Bild 29 bestimmen (Schachbrettregel).

Die den Elementen der zweiten Zeile a_{21}, a_{22} und a_{23} zugeordneten Unterdeterminanten sind demnach

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Damit lautet die Entwicklung von D nach den Elementen der zweiten Zeile:

$$D = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}.$$

Allgemein ergibt sich als Entwicklung von D nach den Elementen der i-ten Zeile:

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3} = \sum_{k=1}^{3} a_{ik}A_{ik} \qquad i \in \{1; 2; 3\}$$

und nach den Elementen der k-ten Spalte:

$$D = a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + a_{3k}A_{3k} = \sum_{i=1}^{3} a_{ik}A_{ik} \qquad k \in \{1; 2; 3\}.$$

BEISPIEL

2. Die Determinante D aus Beispiel 1 ist mit Hilfe der Entwicklung nach den Elementen a) der dritten Zeile und b) der zweiten Spalte zu berechnen.

Lösung:

a)
$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -2 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} =$$
$$= 4(-4) - 3(-13) + 7 = \underline{\underline{30}}.$$

b)
$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -2 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -(-1) \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} =$$
$$= -(-1)11 + 2(-10) - 3(-13) = \underline{\underline{30}}.$$

Determinantengesetze

Wie schon bei der Untersuchung zweireihiger Determinanten erwähnt, gelten die dort aufgestellten Determinantengesetze entsprechend auch für dreireihige Determinanten. Im folgenden soll der Nachweis ihrer Gültigkeit geführt werden. Die entscheidende Bedeutung dieser Regeln liegt in den sich daraus ergebenden Vereinfachungen bei der Berechnung von Determinanten.

Satz 1

Werden in einer Determinante die Spalten mit den gleichstelligen Zeilen vertauscht, so bleibt ihr Wert unverändert.

Werden beispielsweise

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

nach den Elementen der ersten Zeile bzw. nach denen der ersten Spalte entwickelt, und wird dabei das entsprechende Gesetz für zweireihige Determinanten berücksichtigt, so bestätigt sich die Richtigkeit dieses Satzes.
Wie schon bei den zweireihigen Determinanten gilt also jede Gesetzmäßigkeit bezüglich der Spalten ebenso für die Zeilen und umgekehrt. Aus diesem Grunde soll im weiteren Verlauf für Spalten und Zeilen der Sammelbegriff Reihen verwendet werden.

Satz 2

Enthalten alle Elemente einer Reihe einen gemeinsamen Faktor, so kann dieser Faktor vor die Determinante gesetzt werden.

Enthalten z. B. die Elemente der zweiten Spalte einen derartigen Faktor k, so sei die Determinante nach diesen Elementen entwickelt. Der Faktor k läßt sich ausklammern, also vor das Summenzeichen setzen. Wird nun die Summe wieder als Determinante dargestellt, so ist die Richtigkeit der im Satz aufgestellten Behauptung zu erkennen.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & ka_{12} & a_{13} \\ a_{21} & ka_{22} & a_{23} \\ a_{31} & ka_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{3} ka_{i2}A_{i2} = k\sum_{i=1}^{3} a_{i2}A_{i2} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Entsprechend kann mit allen Reihen verfahren werden.

Satz 3

Werden in einer Determinante zwei parallele Reihen miteinander vertauscht, so ändert der Wert der Determinante das Vorzeichen.

Zum Nachweis sollen die beiden Determinanten

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad D' = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

in denen die erste und zweite Zeile miteinander vertauscht sind, nach der ersten bzw. zweiten Zeile entwickelt werden. Es ist

$$D = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

und

$$D' = -a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

und damit

$$D = -D'.$$

Bemerkung: Die zu vertauschenden Reihen müssen dabei nicht aufeinanderfolgend sein.

Satz 4

Weist eine Determinante zwei gleiche parallele Reihen auf, so hat sie den Wert Null.

Der Beweis erfolgt unter Zuhilfenahme von Satz 2. Werden in dieser Determinante die beiden übereinstimmenden Zeilen miteinander vertauscht, so muß einerseits nach Satz 2 die Determinante das Vorzeichen wechseln, andererseits aber ändert sie sich infolge der Übereinstimmung der beiden Reihen nicht. Demnach muß $D = -D$ oder $2D = 0$, also $D = 0$ sein.
Als Folgerung aus Satz 4 ergibt sich

Satz 4a

Die Produktsumme aus den zu einer Reihe gehörenden Unterdeterminanten und den Elementen einer Parallelreihe hat den Wert Null.

Es ist beispielsweise

$$a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = -a_{11}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} -$$

$$- a_{13}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0 \quad \text{(zwei gleiche Zeilen).}$$

Für die Zeilen gilt allgemein mit $i \in \{1, 2, 3\}$ und $j \in \{1, 2, 3\}$

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + a_{i3}A_{j3} = \sum_{k=1}^{3} a_{ik}A_{jk} = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ D & \text{für } i = j \end{cases}$$

und entsprechend für die Spalten

$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + a_{3i}A_{3j} = \sum_{k=1}^{3} a_{ki}A_{kj} = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ D & \text{für } i = j \end{cases} \tag{I}$$

Die Verknüpfung der Sätze 2 und 4 führt zum

Satz 5

Eine Determinante hat den Wert Null, wenn die Elemente einer Reihe zu denen einer parallelen Reihe proportional sind.

Mit $a_{31} = ka_{11}$, $a_{32} = ka_{12}$ und $a_{33} = ka_{13}$ ist

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix} = 0 \qquad (k \in R)$$

Dieser Satz läßt sich noch erweitern:

Satz 5a

Sind die Elemente einer Reihe Linearkombinationen der Elemente der beiden parallelen Reihen, so hat die Determinante den Wert Null.

Sind $a_{31} = k_1a_{11} + k_2a_{21}$, $a_{32} = k_1a_{12} + k_2a_{22}$ und $a_{33} = k_1a_{13} + k_2a_{23}$ mit $k_1 \in R$ und $k_2 \in R$, so ist

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ k_1a_{11} + k_2a_{21} & k_1a_{12} + k_2a_{22} & k_1a_{13} + k_2a_{23} \end{vmatrix} =$$

$$= (k_1a_{11} + k_2a_{21})A_{31} + (k_1a_{12} + k_2a_{22})A_{32} + (k_1a_{13} + k_2a_{23})A_{33} =$$

$$= k_1\underbrace{(a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33})}_{0} + k_2\underbrace{(a_{21}A_{31} + a_{22}A_{32} + a_{23}A_{33})}_{0} =$$

$$= 0.$$

Daraus läßt sich mit $k_1 = k_2 = 0$ folgern: Weist eine Determinante in einer Reihe nur Nullelemente auf, so hat sie den Wert Null.
Insbesondere zur Beurteilung der Lösbarkeit eines Gleichungssystems ist wiederum die Umkehrung dieser beiden Sätze 5 und 5a von Bedeutung. Es soll daher jetzt untersucht werden, was aus dem Verschwinden einer Determinante über ihre Beschaffenheit geschlossen werden kann.

1. $D = 0$, aber nicht alle $A_{ik} = 0$.

Dazu sei angenommen, daß mindestens $A_{33} \neq 0$ ist.

Sollte das nicht der Fall sein, so läßt es sich aber durch Vertauschen von Reihen und entsprechende Umnumerierung der Elemente erreichen.

Unter Verwendung von (I) gilt:

$$\begin{aligned}
a_{11}A_{13} + a_{21}A_{23} + a_{31}A_{33} &= 0\\
a_{12}A_{13} + a_{22}A_{23} + a_{32}A_{33} &= 0\\
a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33} &= D = 0.
\end{aligned}$$

Damit steht fest, daß zwischen den Elementen eine lineare Abhängigkeit besteht. Um den Sachverhalt noch weiter zu verdeutlichen, sollen diese drei Beziehungen nach den Elementen der dritten Zeile aufgelöst werden. Die Möglichkeit dazu ergibt sich aus dem Nichtverschwinden von A_{33}. Es ist

$$a_{3i} = -\frac{A_{13}}{A_{33}}\,a_{1i} - \frac{A_{23}}{A_{33}}\,a_{2i} \qquad i \in \{1;2;3\}$$

und mit $k_1 = -\dfrac{A_{13}}{A_{33}}$ und $k_2 = -\dfrac{A_{23}}{A_{33}}$

$$a_{3i} = k_1 a_{1i} + k_2 a_{2i} \qquad i \in \{1;2;3\}.$$

Sind A_{13} und A_{23} und damit sowohl k_1 als auch k_2 von Null verschieden, so stellen die a_{3i} Linearkombinationen der a_{1i} und a_{2i} dar. Verschwindet eine der beiden Unterdeterminanten, so sind die a_{3i} den Elementen einer Zeile proportional. Nehmen beide Unterdeterminanten den Wert Null an, so besteht die dritte Zeile nur aus Nullelementen.

2. $D = 0$, alle $A_{ik} = 0$, aber nicht alle $a_{ik} = 0$.

Auf Grund der Untersuchungen im Abschnitt 13.2.4. folgt aus $A_{31} = A_{32} = A_{33} = 0$ das Bestehen einer linearen Abhängigkeit zwischen den Elementen der ersten und zweiten Zeile. Aus $A_{21} = A_{22} = A_{23} = 0$ läßt sich entsprechend auf die Existenz einer linearen Abhängigkeit zwischen den Elementen der ersten und dritten Zeile schließen. $A_{11} = A_{12} = A_{13} = 0$ bestätigt dann noch die schon aus dem Vorhergehenden folgende lineare Abhängigkeit zwischen den Elementen der zweiten und dritten Zeile. Es ist

$$a_{2i} = k_1 a_{1i} \quad \text{und} \quad a_{3i} = k_2 a_{1i}$$

mit $k_1, k_2 \in R$ und $i \in \{1;2;3\}$.

Die für die Zeilen angestellten Untersuchungen gelten entsprechend für die Spalten. Zusammengefaßt ergibt sich als Umkehrung

Satz 5b

Hat eine dreireihige Determinante den Wert Null und verschwinden dabei nicht alle zweireihigen Unterdeterminanten, so besteht eine lineare Abhängigkeit zwischen mindestens zwei Reihen. Verschwinden auch alle zweireihigen Unterdeterminanten, ohne daß jedoch alle Elemente den Wert Null haben, so sind die Elemente zweier Reihen zu den Elementen der dritten Reihe proportional.

Die Anzahl der linear unabhängigen Reihen einer Determinante wird als *Rang* r bezeichnet. Ist eine dreireihige Determinante D von Null verschieden, so weist sie den Rang $r = 3$ auf. Im Fall $D = 0$ hat D den Rang $r = 2$, wenn nicht alle A_{ik} verschwinden, und den Rang $r = 1$, wenn alle $A_{ik} = 0$, aber nicht alle $a_{ik} = 0$ sind.

Satz 6

Werden in einer Determinante zu den Elementen einer Reihe die mit einem Faktor multiplizierten Elemente einer parallelen Reihe addiert, so ändert die Determinante ihren Wert nicht.

Zu den Elementen der dritten Spalte der Determinante

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

sollen die mit einem Faktor k multiplizierten Elemente der ersten Spalte addiert werden:

$$D' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} + ka_{11} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} + ka_{21} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} + ka_{31} \end{vmatrix} =$$

$$= (a_{13} + ka_{11})A_{13} + (a_{23} + ka_{21})A_{23} + (a_{33} + ka_{31})A_{33} =$$

$$= \underbrace{a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}}_{D} + k\underbrace{(a_{11}A_{13} + a_{21}A_{23} + a_{31}A_{33})}_{0}.$$

Damit ist $D' = D$.

Für die anderen Reihen kann der Nachweis entsprechend geführt werden.

Ebenso wird die Determinante ihren Wert nicht ändern, wenn zu den Elementen einer Reihe die jeweils mit beliebigen Faktoren multiplizierten Elemente mehrerer Reihen addiert werden, kommt dies doch einer mehrfachen Anwendung des Satzes 6 gleich.

Insbesondere Satz 6 gestattet es, den Rechenaufwand bei der Berechnung von Determinanten erheblich einzuschränken. Der Grundgedanke besteht darin, durch Anwendung dieses Satzes möglichst viele Elemente einer Reihe verschwinden zu lassen. Bei dreireihigen Determinanten wird man versuchen, möglichst zwei Nullelemente innerhalb einer Reihe zu erzeugen. Die anschließende Entwicklung der Determinante nach den Elementen dieser Reihe führt dann die dreireihige Determinante auf eine einzige zweireihige zurück.

BEISPIELE

3.
$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$

Die mit (-2) multiplizierten Elemente der ersten Zeile sollen zu den Elementen der zweiten Zeile addiert werden, damit das neue Element a_{21} den Wert Null annimmt:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 8 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix}.$$

Damit auch a_{11} verschwindet, wird die mit (-2) multiplizierte dritte Zeile zur ersten Zeile addiert:

$$D = \begin{vmatrix} 0 & -13 & -3 \\ 0 & 8 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix}.$$

Die Entwicklung nach den Elementen der ersten Spalte ergibt:

$$D = 1 \begin{vmatrix} -13 & -3 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} = \underline{\underline{11}}.$$

Eine andere Möglichkeit besteht darin, die Elemente a_{11} und a_{12} verschwinden zu lassen. Dazu ist die mit (-2) bzw. $(+3)$ multiplizierte dritte Spalte zur ersten bzw. zweiten Spalte zu addieren:

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 11 & 3 \\ -3 & 11 & 2 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -2 & 11 \\ -3 & 11 \end{vmatrix} = -11 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = \underline{\underline{11}}.$$

Es lassen sich noch weitere Möglichkeiten auffinden.

4.
$$\begin{vmatrix} 4 & -0{,}5 & 3 \\ 6 & 4 & -0{,}2 \\ 0{,}8 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & -0{,}5 & 3 \\ 3 & 4 & -0{,}2 \\ 0{,}4 & 2 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \begin{vmatrix} 0 & -0{,}5 & 0 \\ 19 & 4 & 23{,}8 \\ 8{,}4 & 2 & 17 \end{vmatrix} = -2(-0{,}5) \begin{vmatrix} 19 & 23{,}8 \\ 8{,}4 & 17 \end{vmatrix} =$$

$$= -2(-0{,}5)\,(323 - 199{,}92) = \underline{\underline{123{,}08}}.$$

5.
$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & -7 \\ 7 & -5 & 3 \\ 3 & -7 & 5 \end{vmatrix}$$

Um ein Einselement zu erzeugen, wird das 2fache der Elemente der zweiten Spalte zu den Elementen der dritten Spalte addiert:

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 7 & -5 & -7 \\ 3 & -7 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -28 & -26 & -7 \\ -42 & -34 & -9 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} -28 & -26 \\ -42 & -34 \end{vmatrix} =$$

3

5

$$= -14 \cdot 2 \begin{vmatrix} 2 & 13 \\ 3 & 17 \end{vmatrix} = \underline{\underline{140}}.$$

14.2.3. Lösung und Diskussion eines Systems von drei linearen Gleichungen mit drei Variablen

Zur Lösung eines linearen Gleichungssystems mit drei Variablen

$$\left| \begin{array}{l|l|l|l} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 & \cdot A_{11} & \cdot A_{12} & \cdot A_{13} \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 & \cdot A_{21} & \cdot A_{22} & \cdot A_{23} \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 & \cdot A_{31} & \cdot A_{32} & \cdot A_{33} \end{array} \right.$$

wurden, wie in der ersten Spalte rechts neben dem Gleichungssystem angegeben, die mit A_{11}, A_{21} und A_{31} multiplizierten Gleichungen addiert. Es entstand die nur noch die Variable x enthaltende Gleichung $D \cdot x = D_x$. Die nur noch y enthaltende Gleichung ergibt sich entsprechend durch Addition der mit den Unterdeterminanten der zweiten Spalte A_{12}, A_{22} und A_{32} multiplizierten Gleichungen:

$$x \underbrace{\sum_{i=1}^{3} a_{i1} A_{i2}}_{0} + y \underbrace{\sum_{i=1}^{3} a_{i2} A_{i2}}_{D} + z \underbrace{\sum_{i=1}^{3} a_{i3} A_{i2}}_{0} = \underbrace{\sum_{i=1}^{3} b_i A_{i2}}_{D_y}.$$

Dabei verschwinden gemäß Satz 4a die als Koeffizienten von x bzw. z auftretenden Summen, während die bei y mit der Koeffizientendeterminante D identisch ist. Auf der rechten Seite ist die Determinante D_y entstanden, die aus D durch Ersetzen der a_{2i} durch die b_i hervorgeht:

$$b_1 A_{12} + b_2 A_{22} + b_3 A_{32} = -b_1 \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Somit ergibt sich

$$D \cdot y = D_y.$$

Bezüglich der dritten Variablen z ist entsprechend zu verfahren. Die drei Gleichungen sind dazu mit den in der dritten Spalte angegebenen Faktoren, den zweireihigen Unterdeterminanten A_{i3} der Koeffizientendeterminante D, einzeln zu multiplizieren und dann zu addieren. Wird die auf der rechten Seite entstehende Determinante, in der gegenüber D die a_{i3} durch die b_i ersetzt sind, entsprechend mit D_z bezeichnet:

$$D_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix},$$

so ergibt sich für die dritte Variable

$$D \cdot z = D_z.$$

Zusammengefaßt hat die **Cramersche Regel für drei lineare Gleichungen mit drei Variablen** die Form:

$$\boxed{D \cdot x = D_x, \quad D \cdot y = D_y, \quad D \cdot z = D_z} \qquad (25)$$

Wie bei zwei linearen Gleichungen mit zwei Variablen sind wiederum, je nachdem die Koeffizientendeterminante D von Null verschieden ist oder gleich Null ist, zwei Hauptfälle zu unterscheiden.

Hauptfall I: $D \neq 0$

In diesem Fall lassen die in Formel (25) gegebenen Ausdrücke die Division durch D zu. Das Gleichungssystem hat die eindeutige Lösung:

$$x = \frac{D_x}{D}, \qquad y = \frac{D_y}{D}, \qquad z = \frac{D_z}{D}.$$

Hauptfall II: $D = 0$

Je nach dem Verhalten der Zählerdeterminanten D_x, D_y und D_z sind zwei Unterfälle zu unterscheiden.

Unterfall 1: $D_x = D_y = D_z = 0$

a) Verschwinden nicht alle zweireihigen Unterdeterminanten A_{ik} der Koeffizientendeterminante D, so ist gemäß Satz 5b in 14.2.2. eine der Gleichungen von einer oder von den beiden anderen Gleichungen linear abhängig. Das Gleichungssystem besteht also in Wirklichkeit nur aus zwei Gleichungen und kann nach 14.1. behandelt werden.

Die Feststellung des Verschwindens der Zählerdeterminanten D_x, D_y und D_z verlangt die Berechnung von drei dreireihigen Determinanten. Die Überlegungen zu Satz 5b in 14.2.2. führen kürzer zum Ziel, die Widerspruchsfreiheit des Gleichungssystems zu ermitteln. Die für die Koeffizientendeterminante, also für die linken Seiten des Gleichungssystems, festgestellte Abhängigkeit muß in diesem Fall auch für die rechten Seiten bestehen. Die die Koeffizienten der linken Seiten verbindenden Proportionalitätsfaktoren k_1 und k_2 müssen also genauso die b_i

verbinden. Diese Faktoren können in der Art berechnet werden, wie das in den schon erwähnten Untersuchungen erfolgte. Dem entspricht auch folgende Überlegung: Ist z. B. A_{33} eine der nicht verschwindenden Unterdeterminanten, so muß das Gleichungssystem

$$\left| \begin{array}{l} a_{11}k_1 + a_{21}k_2 = a_{31} \\ a_{12}k_1 + a_{22}k_2 = a_{32} \end{array} \right|$$

eindeutig nach den k_i auflösbar sein, da die mit A_{33} identische Koeffizientendeterminante von Null verschieden ist. Auf der linken Seite dieses Gleichungssystems treten als Koeffizienten die Elemente einer der nicht verschwindenden A_{ik} auf, während als absolutes Glied das jeweils noch fehlende dritte Element der entsprechenden Spalte erscheint.

b) Haben alle zweireihigen Unterdeterminanten A_{ik} den Wert Null, ohne daß jedoch alle a_{ik} verschwinden, so sind zunächst die linken Seiten zweier Gleichungen zur linken Seite der dritten Gleichung proportional. Weisen die rechten Seiten dieselbe Abhängigkeit auf, folgt also aus

$$a_{21} = k_1 a_{11} \quad \text{und} \quad a_{31} = k_2 a_{11}$$

auch

$$b_2 = k_1 b_1 \quad \text{und} \quad b_3 = k_2 b_1,$$

so wird der Zusammenhang zwischen den drei Variablen schon allein durch eine Gleichung ausgedrückt. Die unendliche Menge der Lösungstripel ergibt sich durch beliebige Belegung zweier Variablen der Gleichung und Berechnung des zugehörigen Wertes der dritten Variablen.
Besteht jedoch die angegebene Proportionalität zwischen den absoluten Gliedern nicht, so stehen die Gleichungen zueinander in Widerspruch.

Unterfall 2:

Haben nicht alle Zählerdeterminanten D_x, D_y und D_z den Wert Null, so stehen die Gleichungen zueinander in Widerspruch. Die zugehörige Lösungsmenge ist leer.
In der nachfolgenden Übersicht sind die Ergebnisse der Diskussion noch einmal zusammengefaßt:

D	Zählerdet. D_x, D_y, D_z	Unterdet. A_{ik}	Lösbarkeit, Anzahl d. Lösungen
$\neq 0$	beliebig	beliebig	eindeutig lösbar
0	sämtl. 0	nicht sämtl. 0	nur zwei unabh. Gleichungen: Lösungsmenge unendlich
0	sämtl. 0	sämtl. 0	wenn widerspruchsfrei, nur eine aussagende Gleichung: unendl. Lösungsmenge; wenn widersprechend: Lösungsmenge leer
0	nicht sämtl. 0	beliebig	Gleichungen einander widersprechend: Lösungsmenge leer

BEISPIELE

Es sind die Lösungsmengen folgender Gleichungssysteme zu bestimmen:

1.
$$\left|\begin{aligned} 2x + 3y - 2z &= 7 \\ -3x - y + 3z &= 0 \\ 5x + 2y - z &= 1 \end{aligned}\right|$$

Lösung: Es sind

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -3 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 4 \cdot 7,$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 7 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 3 & 7 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 7 & 7 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -7 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -7 \cdot 4,$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 7 & -2 \\ -3 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 4 \cdot 21,$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 7 \\ -3 & -1 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -7 & 3 & 7 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} -7 & 7 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

und damit

$$x = -\frac{7 \cdot 4}{4 \cdot 7} = -1, \qquad y = \frac{4 \cdot 21}{4 \cdot 7} = 3, \qquad z = 0.$$

Lösungsmenge: $\underline{\underline{\{(-1;\,3;\,0)\}}}$.

2.
$$\left|\begin{aligned} 4x + 6y - 5z &= -7 \\ 6x + 9y - 3z &= 3 \\ -2x - 3y + 7z &= 17 \end{aligned}\right|$$

Lösung: Da die Koeffizientendeterminante

$$D = \begin{vmatrix} 4 & 6 & -5 \\ 6 & 9 & -3 \\ -2 & -3 & 7 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 3 \begin{vmatrix} 2 & 2 & -5 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

verschwindet, liegt Hauptfall II vor. Bei der Feststellung, ob eine von Null verschiedene Unterdeterminante existiert, ist systematisch vorzugehen. Es ist $A_{33} = 0$, $A_{23} = 0$, $A_{13} = 0$, dann aber

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = -18.$$

Zur Untersuchung der Widerspruchsfreiheit werden auf Grund des Nichtverschwindens von A_{32} die Elemente der ersten und dritten Spalte herangezogen. Für die zu ermittelnden Faktoren k_1 und k_2 gilt

$$\left|\begin{aligned} 4k_1 + 6k_2 &= -2 \\ -5k_1 - 3k_2 &= 7 \end{aligned}\right|.$$

Mit den daraus zu ermittelnden Faktoren

$$k_1 = -2 \quad \text{und} \quad k_2 = 1$$

stellt

$$-7k_1 + 3k_2 = 17$$

eine wahre Aussage dar. Das Gleichungssystem ist widerspruchsfrei.

Da $A_{32} \neq 0$, weist das gegebene System mindestens das voneinander unabhängige System

$$\left|\begin{aligned} 4x + 6y - 5z &= -7 \\ 6x + 9y - 3z &= 3 \end{aligned}\right|$$

auf. Nach 14.1. ergibt sich mit

$$D_1 = A_{31} = \begin{vmatrix} 6 & -5 \\ 9 & -3 \end{vmatrix} = 27, \qquad D_2 = A_{32} = -\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = -18,$$

$$D_3 = A_{33} = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

als Lösungsmenge des zugehörigen homogenen Systems:

$$L_\text{h}(t) = \{(27t;\ -18t;\ 0) \mid t \in R\}$$

oder einfacher mit neuem Parameter t

$$L_\text{h}(t) = \{(3t;\ -2t;\ 0) \mid t \in R\}.$$

Da $D_1 = A_{31} \neq 0$ ist, kann ein Lösungstripel des inhomogenen Systems mit $x_i = 0$ aus

$$\left|\begin{aligned} 6y - 5z &= -7 \\ 9y - 3z &= 3 \end{aligned}\right|$$

bestimmt werden: $x_i = 0,\ y_i = {}^4/_3,\ z_i = 3.$

Lösungsmenge: $\underline{\underline{\{(3t;\ -2t + {}^4/_3;\ 3) \mid t \in R\}.}}$

3.
$$\left|\begin{aligned} 2{,}50x + 4{,}50y - 3{,}20z &= 1{,}40 \\ 3{,}00x + 5{,}40y - 3{,}84z &= 1{,}68 \\ -5{,}50x - 9{,}90y + 7{,}04z &= -3{,}08 \end{aligned}\right|$$

Lösung: Die Koeffizientendeterminante

$$D = \begin{vmatrix} 2{,}50 & 4{,}50 & -3{,}20 \\ 3{,}00 & 5{,}40 & -3{,}84 \\ -5{,}50 & -9{,}90 & 7{,}04 \end{vmatrix} = 0{,}5 \cdot 0{,}9 \begin{vmatrix} 5 & 5 & -3{,}20 \\ 6 & 6 & -3{,}84 \\ -11 & -11 & 7{,}04 \end{vmatrix} = 0$$

verschwindet, so daß Hauptfall II vorliegt. Infolge der Proportionalität der ersten beiden Spalten von D verschwinden die nur Elemente aus diesen beiden Spalten enthaltenden zweireihigen Unterdeterminanten A_{i3} ($i \in \{1;\ 2;\ 3\}$). Wenn also von Null verschiedene Unterdeterminanten existieren, dann müssen sie unter den A_{i1} und A_{i2} zu finden sein. Es sind aber auch

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 3{,}00 & -3{,}84 \\ -5{,}50 & 7{,}04 \end{vmatrix} = -0{,}5 \cdot 0{,}8 \begin{vmatrix} 6 & -4{,}8 \\ -11 & 8{,}8 \end{vmatrix} =$$

$$= -0{,}5 \cdot 0{,}8^2 \begin{vmatrix} 6 & -6 \\ -11 & 11 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 2{,}50 & -3{,}20 \\ -5{,}50 & 7{,}04 \end{vmatrix} = 0{,}5 \cdot 0{,}8^2 \begin{vmatrix} 5 & -5 \\ -11 & 11 \end{vmatrix} = 0.$$

Mit $A_{12} = A_{22} = 0$ muß auch $A_{32} = 0$ sein. Die A_{i1} haben infolge der Proportionalität der ersten und zweiten Spalte von D ebenfalls den Wert Null. Läßt sich nun noch nachweisen, daß zwischen den absoluten Gliedern des Gleichungssystems dieselbe Abhängigkeit besteht wie zwischen den Koeffizienten, so steht fest, daß das vorliegende Gleichungssystem dem Hauptfall II, Unterfall 1 b angehört. Mit den Proportionalitätsfaktoren

$$k_1 = \frac{a_{21}}{a_{11}} \left(= \frac{a_{22}}{a_{12}} = \frac{a_{23}}{a_{13}}\right) = \frac{3{,}00}{2{,}50} = 1{,}2$$

und

$$k_2 = \frac{a_{31}}{a_{11}} \left(= \frac{a_{32}}{a_{12}} = \frac{a_{33}}{a_{13}}\right) = -\frac{5{,}50}{2{,}50} = -2{,}2$$

sind $b_2 = k_1 b_1$ also $1{,}68 = 1{,}2 \cdot 1{,}40$

und $b_3 = k_2 b_1$ also $-3{,}08 = -2{,}2 \cdot 1{,}40$

erfüllt. Es liegt demnach nur eine Gleichung mit drei Variablen vor.

Lösungsmenge: $\underline{\underline{\left\{\left(x;\ y;\ \frac{2{,}50x + 4{,}50y - 1{,}40}{3{,}20}\right) \,\middle|\, x,\ y \in R\right\}}}.$

15. Lineare Gleichungssysteme mit n Variablen, n-reihige Determinante

In völlig analoger Weise wie beim Übergang von zwei linearen Gleichungen mit zwei Variablen auf lineare Systeme mit drei Gleichungen und drei Variablen, ließe sich nun für Systeme mit vier und allgemein n Gleichungen die vier bzw. n-reihige Determinante einführen. Für diese n-reihigen Determinanten gelten die für dreireihige Determinanten aufgestellten Gesetze unverändert (außer der Regel von Sarrus, die nur für dreireihige Determinanten Gültigkeit besitzt). Eine n-reihige Determinante kann nach den Elementen einer Reihe entwickelt werden und ist so, falls nicht einige Elemente dieser Reihe den Wert Null aufweisen, auf n $(n-1)$-reihige Determinanten zurückzuführen. Werden zuvor durch entsprechende Linearkombinationen der Reihen $n - 1$ Elemente einer Reihe zum Verschwinden gebracht, so läßt sich die n-reihige

Determinante auf eine einzige $(n-1)$-reihige reduzieren. Beispielsweise wird eine fünfreihige zunächst in eine vierreihige und diese wiederum in eine dreireihige Determinante überführt.

Die einem Element a_{ik} zugeordnete Unterdeterminante A_{ik} ergibt sich wiederum durch Streichen der i-ten Zeile und k-ten Spalte der zu entwickelnden Determinante. Das Vorzeichen von A_{ik} kann mit Hilfe der Schachbrettregel (Bild 30) oder durch $(-1)^{i+k}$ ermittelt werden.

A_{11} +	A_{12} −	A_{13} +	A_{14} −
A_{21} −	A_{22} +	A_{23} −	A_{24} +
A_{31} +	A_{32} −	A_{33} +	A_{34} −
A_{41} −	A_{42} +	A_{43} −	A_{44} +

Bild 30

Die Entwicklung der vierreihigen Determinante

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

nach den Elementen der ersten Zeile lautet

$$D = \sum_{k=1}^{4} a_{1k} A_{1k},$$

wobei

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \qquad \ldots$$

ist.

BEISPIEL

Zur Zurückführung der vierreihigen Determinante

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

auf eine dreireihige Determinante wird die mit 2 bzw. 3 multiplizierte dritte Zeile zur ersten bzw. vierten Zeile addiert und anschließend nach den Elementen der zweiten Spalte entwickelt.

$$D = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 3 & 6 \\ 3 & 0 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 11 & 0 & 10 & 1 \end{vmatrix} = -(-1) \begin{vmatrix} 5 & 3 & 6 \\ 3 & 1 & 5 \\ 11 & 10 & 1 \end{vmatrix}$$

Weiterhin ist dann

$$D = \begin{vmatrix} -4 & 3 & -9 \\ 0 & 1 & 0 \\ -19 & 10 & -49 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 9 \\ 19 & 49 \end{vmatrix} = \underline{\underline{25}}$$

Ein System von n linearen Gleichungen mit n Variablen

$$\left| \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{array} \right|$$

hat bei von Null verschiedener Koeffizientendeterminante

$$D = \begin{vmatrix} a_{11}\ a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22} \ldots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\ a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

die eindeutige Lösung (CRAMERsche Regel):

$$x_1 = \frac{D_{x1}}{D}, \qquad x_2 = \frac{D_{x2}}{D}, \ldots, \qquad x_n = \frac{D_{xn}}{D}$$

mit

$$D_{x1} = \begin{vmatrix} b_1\ a_{12} \ldots a_{1n} \\ b_2\ a_{22} \ldots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ b_n\ a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad D_{x2} = \begin{vmatrix} a_{11}\ b_1 \ldots a_{1n} \\ a_{21}\ b_2 \ldots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\ b_n \ldots a_{nn} \end{vmatrix}, \ldots,$$

$$D_{xn} = \begin{vmatrix} a_{11}\ a_{12} \ldots b_1 \\ a_{21}\ a_{22} \ldots b_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\ a_{n2} \ldots b_n \end{vmatrix}.$$

Im Falle $D = 0$ liegt zunächst eine lineare Abhängigkeit der linken Seiten des Gleichungssystems vor. Besteht dieselbe Abhängigkeit zwischen den absoluten Gliedern $(D_{x1} = D_{x2} = \ldots = D_{xn} = 0)$, ist also das Gleichungssystem widerspruchsfrei, so reduziert sich das Gleichungssystem auf höchstens $n - 1$ Gleichungen und weist eine unendliche Lösungsmenge auf. Andernfalls ist die Lösungsmenge leer.
Der Rechenaufwand bei der Auflösung von derartigen Gleichungssystemen mit Hilfe von Determinanten steigt mit der Anzahl der Gleichungen und Variablen sehr stark an. Der Einsatz von Rechenmaschinen ist zudem in dieser Form nicht möglich. Aus diesen Gründen sollen weitergehende Betrachtungen über diesen grundsätzlich möglichen Lösungsweg für lineare Gleichungssysteme nicht angestellt werden. Obwohl das im nächsten Abschnitt zu entwickelnde Lösungsverfahren ohne Determinanten auskommt, findet die nun abgeschlossene Behandlung von Determinanten ihre Rechtfertigung in dem auf anderen Gebieten der Mathematik und Technik erfolgenden Einsatz von Determinanten (z. B. Vektorrechnung, Matrizenrechnung, Analytische Geometrie usw.).

16. Gaußscher Algorithmus

Ein anderes Verfahren, von GAUSS erstmalig in dieser Form angegeben und deshalb GAUSSscher Algorithmus genannt, ermöglicht ein rationelleres Lösen linearer Gleichungssysteme. Dieses Eliminationsverfahren hat in abgewandelter Form, dem mechanisierten oder verketteten GAUSSschen Algorithmus, zudem noch den wesentlichen Vorteil, daß für die anfallenden Rechnungen gut Rechenmaschinen eingesetzt werden können.
Der Grundgedanke des Verfahrens besteht darin, ein System mit n linear unabhängigen Gleichungen und n Variablen, das in der rechteckigen Form

$$\left|\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1r}x_r + \cdots + a_{1n}x_n = a_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2r}x_r + \cdots + a_{2n}x_n = a_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nr}x_r + \cdots + a_{nn}x_n = a_n \end{array}\right|$$

gegeben ist, durch geeignete Linearkombinationen in ein *gestaffeltes Gleichungssystem* von dreieckiger Form

$$\left|\begin{array}{r} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1r}x_r + \cdots + b_{1n}x_n = b_1 \\ b_{22}x_2 + \cdots + b_{2r}x_r + \cdots + b_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\qquad\qquad\qquad \\ b_{rr}x_r + \cdots + b_{rn}x_n = b_r \\ \dots\dots\dots\dots\quad \\ b_{nn}x_n = b_n \end{array}\right|$$

zu überführen. Die x_k können nun schrittweise, beginnend mit x_n, aus den Gleichungen berechnet werden, in denen sie als jeweils erste Variable auftreten.

16.1. Linear unabhängige Gleichungssysteme

Am allgemeinen Fall eines Gleichungssystems mit drei linearen Gleichungen und drei Variablen sowie an einem entsprechenden speziellen Beispiel soll dieses Verfahren demonstriert werden. Dabei sei im allgemeinen Fall angenommen, daß alle drei Gleichungen voneinander linear unabhängig sind ($D \neq 0$).

$$\left|\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = a_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = a_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = a_3 \end{array}\right| \qquad \left|\begin{array}{r} 2x - 3y + 4z = 19 \\ 4x - 4y + 3z = 22 \\ -6x - y + 5z = 7 \end{array}\right|$$

Die erste Gleichung des Systems bleibe ungeändert, nicht verschwindendes a_{11} vorausgesetzt, was gegebenenfalls durch Vertauschen von Zeilen oder Spalten und entsprechende Umnumerierung zu erreichen ist. Mit dieser Gleichung soll aus den beiden anderen Gleichungen die erste Variable eliminiert werden. Sie ist dazu jeweils mit dem Faktor

$$c_{21} = -\frac{a_{21}}{a_{11}} \qquad\qquad c_{21} = -2$$

$$c_{31} = -\frac{a_{31}}{a_{11}} \qquad\qquad c_{31} = 3$$

zu multiplizieren und zur zweiten bzw. dritten Gleichung zu addieren. Als neue zweite und dritte Gleichung ergeben sich

$$\left| \begin{aligned} a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 &= a'_2 \\ a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 &= a'_3 \end{aligned} \right| \qquad\qquad \left| \begin{aligned} 2y - 5z &= -16 \\ -10y + 17z &= 64 \end{aligned} \right|.$$

Mit diesen beiden Gleichungen wird analog verfahren, es wird x_2 bzw. y aus der dritten Gleichung eliminiert. Dazu ist im Fall $a'_{22} \neq 0$ die mit

$$c_{32} = -\frac{a'_{32}}{a'_{22}} \qquad\qquad c_{32} = 5$$

multiplizierte zweite Gleichung zur dritten zu addieren, so daß sie die Form

$$a''_{33}x_3 = a''_3 \qquad\qquad -8z = -16$$

annimmt. Zusammengefaßt ergibt sich als gestaffeltes System

$$\left| \begin{aligned} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 &= b_1 \\ b_{22}x_2 + b_{23}x_3 &= b_2 \\ b_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned} \right| \qquad \left| \begin{aligned} 2x - 3y + 4z &= 19 \\ 2y - 5z &= -16 \\ -8z &= -16 \end{aligned} \right|,$$

wobei $b_{1k} = a_{1k}$, $b_{2k} = a'_{2k}$ und $b_{33} = a''_{33}$ gesetzt worden ist. Aus der dritten Gleichung kann nun x_3 berechnet werden und damit aus der zweiten Gleichung x_2 usw. Für das angegebene Beispiel ergeben sich nacheinander

$$z = 2, \quad y = -3 \quad \text{und} \quad x = 1,$$

so daß

$$\{(1;\ -3;\ 2)\}$$

die Lösungsmenge darstellt. Zur Probe müssen alle drei Ausgangsgleichungen herangezogen werden.

Eine vereinfachte Probe ergibt sich aus folgender, allgemein angestellter Überlegung: Werden alle Gleichungen einzeln durch die Lösungsmenge erfüllt, stellen sie also bei dieser Belegung wahre Aussagen dar, so muß dabei auch die Gleichung zur wahren Aussage werden, die sich durch Addition aller Gleichungen ergibt. Wird mit σ_k die Summe der zur Variablen x_k gehörenden, also in der k-ten Spalte auftretenden Koeffizienten bezeichnet (*Spaltensumme*) und mit σ die Summe der absoluten Glieder

$$\sigma_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} \qquad \sigma = \sum_{i=1}^{n} a_i \qquad k \in \{1;\ 2;\ \ldots;\ n\},$$

so muß

$$\sigma_1 x_1 + \sigma_2 x_2 + \cdots + \sigma_n x_n = \sigma$$

mit der gefundenen Lösungsmenge eine wahre Aussage darstellen.
Die Erfüllung dieser Gleichung durch die ermittelte Lösungsmenge ist allerdings nur eine notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung.
Im angegebenen Beispiel ist

$$0 \cdot 1 - 8 \cdot (-3) + 12 \cdot 2 = 48 .$$

Es ist sehr vorteilhaft, eine laufende Kontrolle der einzelnen Eliminationsschritte vorzunehmen. Dazu sind die Summen s_i der Koeffizienten jeder Gleichung (einschl. Absolutglied) zu bilden (*Zeilensumme*):

$$s_i = a_{i1} + a_{i2} + \cdots + a_{in} + a_i \qquad i \in \{1; 2; \ldots; n\}.$$

Da die Koeffizienten a'_{ik} der bei der ersten Elimination entstehenden neuen i-ten Gleichung durch die Linearkombination

$$a'_{ik} = a_{ik} + c_{i1} a_{1k}, \quad a'_i = a_i + c_{i1} a_1$$

gebildet werden, muß auch die entsprechende Zeilensumme s'_i mit s_i und s_1 durch die gleiche Linearkombination verbunden sein:

$$\begin{aligned} s'_i &= a'_{i1} + a'_{i2} + \cdots + a'_{in} + a'_i = \\ &= (a_{i1} + c_{i1} a_{11}) + (a_{i2} + c_{i1} a_{12}) + \cdots + (a_{in} + c_{i1} a_{1n}) + (a_i + c_{i1} a_1) = \\ &= (a_{i1} + a_{i2} + \cdots + a_{in} + a_i) + c_{i1}(a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n} + a_1) = \\ &= \qquad s_i \qquad + c_{i1} \cdot s_1 . \end{aligned}$$

Entsprechendes gilt für die folgenden Eliminationsstufen. Diese Möglichkeit, die s'_i, s''_i usw. auf zwei verschiedenen Wegen zu berechnen, wird zur Kontrolle verwendet, indem das durch Linearkombination berechnete jeweilige s'_i, s''_i usw. mit der durch Addition der Koeffizienten und des Absolutgliedes der entsprechenden Gleichung gebildeten Zeilensumme verglichen wird. Beide Werte müssen, von Ableseungenauigkeiten bei Verwendung des Rechenstabes abgesehen, übereinstimmen.
Zur Vermeidung unnötiger Schreibarbeit wird ein zweckmäßiges Rechenschema verwendet, in das zunächst lediglich die Koeffizienten und die absoluten Glieder des Gleichungssystems eingetragen werden. Außer nach der Eliminationszeile (E) ist nach jeder Zeile Platz für die zu addierenden $c_{i1} a_{1k}$ freizulassen. Links neben den einzelnen Zeilen werden die zugehörigen Erweiterungsfaktoren c_{i1} der Eliminationszeile angeführt. In einer weiteren Spalte sind rechts neben den einzelnen Zeilen die Zeilensummen s_i und die daraus durch Linearkombination entstehenden s'_i, s''_i usw. anzugeben. Daneben können noch, insbesondere bei Verwendung des Rechenstabes, die Abweichungen der durch Addition der Zeilenelemente gewonnenen Zeilensummen vermerkt werden. Oberhalb des Schemas ist Platz für die Spaltensummen σ_k, σ und die Kopfzeile zu lassen. Zusätzlich kann noch zur Kontrolle in der oberen rechten Ecke die Zeilensumme der σ-Werte angegeben werden, die der Spaltensumme der s_i gleich

sein muß. Für das schon behandelte Beispiel nimmt das Rechenschema folgende Form an:

	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_i	
	0	-8	12	48	52
E	2	-3	4	19	22
-2	4	-4	3	22	25
	-4	*6*	*-8*	*-38*	*-44*
3	-6	-1	5	7	5
	6	*-9*	*12*	*57*	*66*
E	0	2	-5	-16	-19
5	0	-10	17	64	71
		10	*-25*	*-80*	*-95*
		0	-8	-16	-24

Die Elemente der mit E bezeichneten Zeilen sowie die der letzten Zeile stellen die Koeffizienten b_{ik} bzw. Absolutglieder b_i des gestaffelten Systems dar.

Verallgemeinert ergibt sich das Rechenschema

	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	$\cdots$	a_{in}	a_i	
	σ_1	σ_2	σ_3	$\cdots$	σ_n	σ	$\sigma + \Sigma\sigma_k = \Sigma s_i$
E	a_{11}	a_{12}	a_{13}	$\cdots$	a_{1n}	a_1	s_1
c_{21}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	$\cdots$	a_{2n}	a_2	s_2
	— —	— —	— —		— —	— —	— —
c_{31}	a_{31}	a_{32}	a_{33}	$\cdots$	a_{3n}	a_3	s_3
	— —	— —	— —		— —	— —	— —
c_{41}	a_{41}	a_{42}	a_{43}	$\cdots$	a_{4n}	a_4	s_4
	— —	— —	— —		— —	— —	— —
	. . . .						
c_{n1}	a_{n1}	a_{n2}	a_{n3}	$\cdots$	a_{nn}	a_n	s_n
	— —	— —	— —		— —	— —	— —
E	0	a'_{22}	a'_{23}	$\cdots$	a'_{2n}	a'_2	s'_2
c_{32}	0	a'_{32}	a'_{33}	$\cdots$	a'_{3n}	a'_3	s'_3
		— —	— —		— —	— —	— —
c_{42}	0	a'_{42}	a'_{43}	$\cdots$	a'_{4n}	a'_4	s'_4
		— —	— —		— —	— —	— —
	. . . .						
c_{n2}	0	a'_{n2}	a'_{n3}	$\cdots$	a'_{nn}	a'_n	s'_n
		— —	— —		— —	— —	— —

(Fortsetzung)

	(a_{i1})	(a_{i2})	$(a_{i3}) \dots (a_{in})$	(a_i)	
E	0	0	$a''_{33} \dots a''_{3n}$	a''_3	s''_3
c_{13}	0	0	$\underline{a''_{43}} \dots \underline{a''_{4n}}$	$\underline{a''_4}$	$\underline{s''_4}$
	. . . .				
c_{n3}	0	0	$\underline{a''_{n3}} \dots \underline{a''_{nn}}$	$\underline{a''_n}$	$\underline{s''_n}$
	. . . .				

BEISPIEL

1. Die Lösungsmenge des Gleichungssystems

$$\left| \begin{aligned} x + y + z + u &= 7 \\ x + 2y + 3z - u &= 6 \\ 2x - 3y - 2z + 4u &= 7 \\ 3x - y + z + 2u &= 10 \end{aligned} \right|$$

ist zu bestimmen.

Lösung:

	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	a_i	
	7	−1	3	6	30	45
E	1	1	1	1	7	11
−1	1	2	3	−1	6	11
	−1	*−1*	*−1*	*−1*	*−7*	*−11*
−2	2	−3	−2	4	7	8
	−2	*−2*	*−2*	*−2*	*−14*	*−22*
−3	3	−1	1	2	10	15
	−3	*−3*	*−3*	*−3*	*−21*	*−33*
E	0	1	2	−2	−1	0
5	0	−5	−4	2	−7	−14
		5	*10*	*−10*	*−5*	*0*
4	0	−4	−2	−1	−11	−18
		4	*8*	*−8*	*−4*	*0*
E		0	6	−8	−12	−14
−1		0	6	−9	−15	−18
			−6	*8*	*12*	*14*
			0	−1	−3	−4

Das gestaffelte System

$$\left|\begin{array}{rl} x + y + z + u = & 7 \\ y + 2z - 2u = & -\ 1 \\ 6z - 8u = & -12 \\ -\ u = & -\ 3 \end{array}\right|$$

ergibt nacheinander

$$u = 3; \quad z = 2; \quad y = 1; \quad x = 1.$$

Die Summenprobe

$$7 \cdot 1 - 1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 6 \cdot 3 = 30$$

zeigt keinen Widerspruch.

Lösungsmenge: $\underline{\underline{\{(1;\ 1;\ 2;\ 3)\}}}$.

Insbesondere bei nicht ganzzahligen Koeffizienten führt dieses Lösungsverfahren unter Verwendung des Rechenstabes verhältnismäßig schnell zum Ziel. Die Multiplikationen der Elemente der Eliminationszeile mit den Faktoren c_{ik} können mit fest eingestelltem Rechenstab durchgeführt werden. Um zu erreichen, daß die $|c_{ik}| < 1$ und so die Abrundungsfehler möglichst klein werden, ist jeweils die Zeile mit größtem Anfangselement als Eliminationszeile anzusetzen.

BEISPIEL

2. Das Gleichungssystem

$$\left|\begin{array}{rcl} 3{,}25x - 0{,}93y + 2{,}41z - 1{,}40u & = & 4{,}13 \\ 2{,}91x + 1{,}98y - 0{,}43z + 1{,}01u & = & 3{,}08 \\ 1{,}38x + 3{,}41y + 1{,}06z + 7{,}00u & = & 7{,}48 \\ -3{,}12x - 2{,}54y + 1{,}07z - 2{,}14u & = & -5{,}17 \end{array}\right|$$

ist mit Hilfe des Rechenstabes zu lösen.

Lösung:

	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	a_i		
	4,42	1,92	4,11	4,47	9,52	24,44	Abw.
E	3,25	−0,93	2,41	−1,40	4,13	7,46	
$-\frac{2{,}91}{3{,}25}$	2,91	1,98	−0,43	1,01	3,08	8,55	
	−2,91	*0,83*	*−2,16*	*1,25*	*−3,70*	*−6,68*	*−0,01*
$-\frac{1{,}38}{3{,}25}$	1,38	3,41	1,06	7,00	7,48	20,33	
	−1,38	*0,39*	*−1,02*	*0,59*	*−1,75*	*−3,17*	
$\frac{3{,}12}{3{,}25}$	−3,12	−2,54	1,07	−2,14	−5,17	−11,90	
	3,12	*−0,89*	*2,31*	*−1,34*	*3,96*	*7,16*	

(Fortsetzung)

	(a_{i1})	(a_{i2})	(a_{i3})	(a_{i4})	(a_i)		
$-\frac{2,81}{3,80}$	0	2,81	−2,59	2,26	−0,62	1,87	−0,01
		−2,81	*−0,03*	*−5,61*	*−4,23*	−12,69	*+0,01*
E	0	3,80	0,04	7,59	5,73	17,16	
$\frac{3,43}{3,80}$	0	−3,43	3,38	−3,48	−1,21	−4,74	
		3,43	*0,04*	*6,85*	*5,16*	*15,49*	*−0,01*
$\frac{2,62}{3,42}$		0	−2,62	−3,35	−4,85	−10,82	
			2,62	*2,58*	*3,03*	*8,24*	*−0,01*
E		0	3,42	3,37	3,95	10,75	−0,01
			0	−0,77	−1,82	2,58	+0,01

Die aus den σ-Werten gebildete Kontrollgleichung und das gestaffelte System sind demnach

$$K\colon 4{,}42x + 1{,}92y + 4{,}11z + 4{,}47u = 9{,}52$$

$$\left|\begin{array}{rcrcrcrcr} 3{,}25x & - & 0{,}93y & + & 2{,}41z & - & 1{,}40u & = & 4{,}13 \\ & & 3{,}80y & + & 0{,}04z & + & 7{,}59u & = & 5{,}73 \\ & & & & 3{,}42z & + & 3{,}37u & = & 3{,}95 \\ & & & & & - & 0{,}77u & = & -1{,}82 \end{array}\right| .$$

Die letzte Gleichung des gestaffelten Systems ergibt

$$u = \frac{1{,}82}{0{,}77} = 2{,}36\,.$$

Zweckmäßig wird jetzt möglichst die Rechenstabeinstellung festgehalten, damit zunächst die in die einzelnen Gleichungen (einschl. Kontrollgleichung) einzusetzenden Werte $3{,}37u$, $7{,}59u$, $-1{,}40u$ und $4{,}47u$ abgelesen werden können. Diese Werte sind an den entsprechenden Stellen des Systems einzusetzen:

$$\begin{array}{lcccccl} K\colon & -- & + & -- & -- & +10{,}41 & = 9{,}52 \\ & 3{,}25x & & -- & -- & -\;\;3{,}31 & = 4{,}13 \\ & & & 3{,}80y & -- & +17{,}94 & = 5{,}73 \\ & & & & 3{,}42z & +\;\;7{,}97 & = 3{,}95\,. \end{array}$$

Nach Berechnung des z werden wieder möglichst mit feststehendem Rechenstab die für die anderen Gleichungen benötigten Vielfachen von z abgelesen und eingesetzt. So ergeben sich nacheinander

$$z = -1{,}17; \qquad y = -3{,}20; \qquad x = 2{,}24,$$

während die Kontrollgleichung zur identischen Gleichung

$$9{,}92 - 6{,}14 - 4{,}83 + 10{,}57 = 9{,}52$$

wird.

Lösungsmenge: $\underline{\underline{\{(2{,}24;\ -3{,}20;\ -1{,}17;\ 2{,}36)\}}}$.

Aus dem Gaussschen Algorithmus ergibt sich eine Möglichkeit zur Berechnung n-reihiger Determinanten. Die Koeffizientendeterminante des gegebenen und des gestaffelten Gleichungssystems stimmen wertmäßig überein, wurden doch die Umwandlungen mit Hilfe von Linearkombinationen der Zeilen vorgenommen. Dabei aber ändert sich auf Grund der Determinantengesetze der Wert nicht. Es ist also

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

Aus der rechts stehenden Determinante ergibt sich der Wert

$$D = b_{11}b_{22} \dots b_{nn}$$

als Produkt der Elemente der Hauptdiagonalen, wie leicht einzusehen ist, wenn sie nach der ersten Spalte, die dabei entstehende $(n-1)$-reihige Unterdeterminante wiederum nach der ersten Spalte usw. entwickelt wird.
Da bei einem linear unabhängigen Gleichungssystem stets $D \neq 0$ ist, müssen alle $b_{ii} \neq 0$ sein. Daraus kann gefolgert werden, daß grundsätzlich jedes derartige Gleichungssystem auf die gestaffelte Form gebracht werden kann. Eventuell macht sich dabei eine Umnumerierung der Gleichungen bzw. Variablen erforderlich. Identisch mit der Umnumerierung der Gleichungen ist die Wahl einer anderen als der jeweils ersten Gleichung als Eliminationsgleichung.

16.2. Linear abhängige Gleichungssysteme

Wurden bisher Systeme mit voneinander linear unabhängigen Gleichungen, also mit eindeutiger Lösung, behandelt, so soll jetzt untersucht werden, wie sich der Gausssche Algorithmus bei linear abhängigen Gleichungssystemen gestaltet. Da in diesem Fall $D = 0$ ist, werden nicht alle $b_{ii} \neq 0$ sein.
Zunächst sollen entsprechende Beispiele behandelt werden.

BEISPIEL

1.
$$\left| \begin{aligned} x + 2y - z + 3u &= 6 \\ 2y + z + 2u &= 2 \\ 2x + 10y + z + 12u &= 18 \\ x + 6y + z + 7u &= 10 \end{aligned} \right|$$

Lösung:

	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	a_i	
	4	20	2	24	36	86
E	1	2	−1	3	6	11
0	0	2	1	2	2	7
	0	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*
−2	2	10	1	12	18	43
	−2	*−4*	*2*	*−6*	*−12*	*−22*
−1	1	6	1	7	10	25
	−1	*−2*	*1*	*−3*	*−6*	*−11*
E	0	2	1	2	2	7
−3	0	6	3	6	6	21
		−6	*−3*	*−6*	*−6*	*−21*
−2	0	4	2	4	4	14
		−4	*−2*	*−4*	*−4*	*−14*
		0	0	0	0	0
		0	0	0	0	0

Das zugehörige gestaffelte System umfaßt nur die beiden Gleichungen

$$\left| \begin{array}{r} x + 2y - z + 3u = 6 \\ 2y + z + 2u = 2 \end{array} \right| .$$

Das gegebene Gleichungssystem hat den *Rang* $r = 2$. Die Koeffizienten und Absolutglieder der beiden anderen Gleichungen verschwinden infolge ihrer linearen Abhängigkeit von den beiden ersten Gleichungen. Werden beispielsweise z und u als freie Variable betrachtet und auf die rechten Seiten gebracht

$$\left| \begin{array}{r} x + 2y = 6 + z - 3u \\ 2y = 2 - z - 2u \end{array} \right| ,$$

so ist

$$x = 4 + 2z - u; \qquad y = 1 - \frac{z}{2} - u .$$

Zweckmäßigerweise können noch zwei Parameter in der Form

$$t_1 = \frac{z}{2} \quad \text{und} \quad t_2 = u$$

eingeführt werden.

Lösungsmenge: $\left\{\left(4 + 2z - u; \quad 1 - \frac{z}{2} - u; \quad z; \quad u\right) \middle| \, z, u \in R\right\} =$

$$= \underline{\underline{\{(4 + 4t_1 - t_2; \quad 1 - t_1 - t_2; \quad 2t_1; \quad t_2) \mid t_1, t_2 \in R\}}}.$$

Auch bei einem Gleichungssystem mit weniger Gleichungen als Variablen muß, allein schon durch die geringere Anzahl der Gleichungen bedingt, die Umwandlung in die Dreiecksform eher abbrechen. Lineare Abhängigkeiten zwischen den Gleichungen vermindern zusätzlich die Anzahl der Eliminationsstufen.

BEISPIEL

2.
$$\left|\begin{array}{rcl} 2x - 4y + 3z - u &=& 2 \\ x - 2y - 2z + 3u &=& 15 \\ 3x - 6y + 8z - 5u &=& -11 \end{array}\right|$$

Lösung:

	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	a_i	
	6	−12	9	−3	6	6
−2	2	−4	3	−1	2	2
	−2	*4*	*4*	*−6*	*−30*	*−30*
E	1	−2	−2	3	15	15
−3	3	−6	8	−5	−11	−11
	−3	*6*	*6*	*−9*	*−45*	*−45*
$-\frac{1}{2}$	0	0	7	−7	−28	−28
			−7	*7*	*28*	*28*
E	0	0	14	−14	−56	−56
			0	0	0	0

Somit liegt das gestaffelte System

$$\left|\begin{array}{rcl} x - 2y - 2z + 3u &=& 15 \\ 14z - 14u &=& -56 \end{array}\right| \quad :14$$

mit dem Rang $r = 2$ vor. Als freie Variable müssen x oder y und z oder u verwendet werden. Aus

$$\left|\begin{array}{rcl} x - 2z &=& 15 + 2y - 3u \\ z &=& -4 + u \end{array}\right|$$

folgt dann

$$x = 7 + 2y - u; \qquad z = -4 + u$$

Lösungsmenge: $\underline{\underline{\{(7 + 2t_1 - t_2;\ t_1;\ -4 + t_2;\ t_2) \mid t_1, t_2 \in R\}.}}$

Weiterhin sei an einem Beispiel demonstriert, wie der GAUSSsche Algorithmus auf ein lineares System mit einander widersprechenden Gleichungen reagiert.

BEISPIEL

3.
$$\left|\begin{array}{l} 2x - 3y + 4z = 19 \\ 4x - 4y + 3z = 22 \\ 6x - 7y + 7z = 10 \end{array}\right|$$

Lösung:

	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_i	
	12	−14	14	51	63
E	2	−3	4	19	22
−2	4	−4	3	22	25
	−4	*6*	*−8*	*−38*	*−44*
−3	6	−7	7	10	16
	−6	*9*	*−12*	*−57*	*−66*
E	0	2	−5	−16	−19
−1	0	2	−5	−47	−50
		−2	*5*	*16*	*19*
		0	0	−31	−31

Die aus der letzten Zeile entstehende Gleichung

$$0 \cdot z = -31$$

ist für keinen Wert z erfüllbar. Das Gleichungssystem ist widersprechend, die Lösungsmenge leer.

16.3. Zusammenfassende Betrachtung des Gaußschen Algorithmus

Allgemein läßt sich das zu einem linearen Gleichungssystem mit m Gleichungen und n Variablen gehörige Koeffizientenschema

$$\begin{array}{ccccccc}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} & \ldots & a_{1n} & a_1 \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2r} & \ldots & a_{2n} & a_2 \\
\multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\
a_{r1} & a_{r2} & \ldots & a_{rr} & \ldots & a_{rn} & a_r \\
\multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\
a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mr} & \ldots & a_{mn} & a_m
\end{array}$$

durch entsprechende Eliminationen in die gestaffelte Form

$$
\begin{array}{cccccccc}
b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} & \dots & b_{1n} & b_1 \\
 & b_{22} & \dots & b_{2r} & \dots & b_{2n} & b_2 \\
 & & \dots\dots\dots & & & & \\
 & & & b_{rr} & \dots & b_{rn} & b_r \\
 & & & 0 & \dots & 0 & b_{r+1} \\
 & & & & \dots\dots & & \\
 & & & & & 0 & b_m
\end{array}
$$

überführen. Der *Rang* r kennzeichnet die Anzahl der voneinander linear unabhängigen Gleichungen, kann also nicht größer als die kleinere der beiden Zahlen m und n sein $[r \leqq \min(m, n)]$.

Fall 1: Haben nicht alle $b_i \in \{b_{r+1}; \dots; b_m\}$ den Wert Null, so ist das Gleichungssystem nicht erfüllbar, die Lösungsmenge leer.

Fall 2: Ist $b_{r+1} = \cdots = b_m = 0$, so ist das Gleichungssystem grundsätzlich lösbar.

Unterfall 1: Für $r < \min(m, n)$ und im Fall $m < n$ auch für $r = m$ ergibt sich ein aus r linearen Gleichungen bestehendes System mit n Variablen, in dem $n - r$ freie Variable (Parameter) auftreten. Die diese Variablen enthaltenden Glieder werden auf die rechten Seiten gebracht, wobei zu beachten ist, daß alle die x_i als freie Variable angesetzt werden müssen, die nicht in der Hauptdiagonalen auftreten, deren b_{ii} also den Wert Null hat. Das so erhaltene gestaffelte Gleichungssystem

$$
\left|\begin{array}{r}
b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1r}x_r = b_1 - b_{1,r+1}x_{r+1} - \cdots - b_{1n}x_n \\
b_{22}x_2 + \cdots + b_{2r}x_r = b_2 - b_{2,r+1}x_{r+1} - \cdots - b_{2n}x_n \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \qquad\qquad\qquad\qquad \\
b_{rr}x_r = b_r - b_{r,r+1}x_{r+1} - \cdots - b_{rn}x_n
\end{array}\right|
$$

kann nun nach $x_r, \dots, x_1$ gelöst werden. Infolge des Auftretens freier Variabler umfaßt die Lösungsmenge unbegrenzt viele Elemente.

Unterfall 2: Bei $r = n \leqq m$ liegt ein eindeutig lösbares Gleichungssystem

$$
\left|\begin{array}{r}
b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1n}x_n = b_1 \\
b_{22}x_2 + \cdots + b_{2n}x_n = b_2 \\
\dots\dots\dots\dots \qquad \\
b_{nn}x_n = b_n
\end{array}\right|
$$

vor.

AUFGABEN

Die Lösungsmengen der nachfolgenden Gleichungssysteme sind zu bestimmen:

273. $\left|\begin{array}{l} x + y = 28 \\ x + z = 30 \\ y + z = 32 \end{array}\right|$

274. $\left|\begin{array}{l} y + z = a \\ z + x = b \\ x + y = c \end{array}\right|$

275. $\left|\begin{array}{l} x + y = a + b \\ x + z = a + c \\ y + z = b + c \end{array}\right|$

276. $\begin{vmatrix} x + y - z = 17 \\ x - y + z = 13 \\ -x + y + z = 7 \end{vmatrix}$

277. $\begin{vmatrix} 2x - 3y + z = 12 \\ -x + 5y - 2z = -11 \\ 3x - 8y + 5z = 39 \end{vmatrix}$

278. $\begin{vmatrix} x + y + z = 9 \\ x + 2y + 4z = 15 \\ x + 3y + 9z = 23 \end{vmatrix}$

279. $\begin{vmatrix} x + y + z = 3 \\ 2x + 4y + 8z = 13 \\ 3x + 9y + 27z = 34 \end{vmatrix}$

280. $\begin{vmatrix} 5x - y + 3z = a \\ 3x + 5y - z = b \\ -x + 3y + 5z = c \end{vmatrix}$

281. $\begin{vmatrix} -4x + 3y - 2z = 8 \\ 5x + 4y - 6z = -8 \\ -3x + 2y + 4z = 19 \end{vmatrix}$

282. $\begin{vmatrix} 0{,}2x + 0{,}3y + 0{,}4z = 29 \\ 0{,}3x + 0{,}4y + 0{,}5z = 38 \\ 0{,}4x + 0{,}5y + 0{,}7z = 51 \end{vmatrix}$

283. $\begin{vmatrix} 3x + 2y + 3z = 110 \\ 5x + y - 4z = 0 \\ 2x - 3y + z = 0 \end{vmatrix}$

284. $\begin{vmatrix} x + 2y - 0{,}7z = 21 \\ 3x + 0{,}2y - z = 24 \\ 0{,}9x + 7y - 2z = 27 \end{vmatrix}$

285. $\begin{vmatrix} 3x + 5y - 2z = 0 \\ 7x - 4y + 3z = 0 \\ -2x + 3y - z = 0 \end{vmatrix}$

286. $\begin{vmatrix} 3x - 4y + z = 0 \\ -3x + 6y - 2z = 0 \\ 6x - 2y - z = 0 \end{vmatrix}$

287. $\begin{vmatrix} 6x - 4y + 8z = 0 \\ -9x + 6y - 12z = 0 \\ 15x - 10y + 20z = 0 \end{vmatrix}$

288. $\begin{vmatrix} 6x + 5y - 3z = 0 \\ 2x + 3y - z = 0 \\ -4x - y + 2z = 0 \end{vmatrix}$

289. $\begin{vmatrix} x - y = 0 \\ x + z = 0 \\ y + z = 0 \end{vmatrix}$

290. $\begin{vmatrix} 11{,}3x + 8{,}9y + 5{,}4z = 80{,}13 \\ 8{,}4x - 2{,}8y + 10{,}3z = 3{,}36 \\ 5{,}5x + 9{,}7y - 8{,}4z = 91{,}89 \end{vmatrix}$

291. $\begin{vmatrix} 3{,}2x - 4{,}1y + 5{,}3z = 4{,}90 \\ 5{,}1x + 3{,}2y - 2{,}9z = 11{,}07 \\ 2{,}1x + 1{,}5y + 3{,}1z = 11{,}83 \end{vmatrix}$

292. $\begin{vmatrix} 2{,}8x + 3{,}4y + 1{,}2z = 14 \\ 5{,}1x - 2{,}2y + 3{,}3z = 7{,}6 \\ 6{,}5x - 0{,}5y + 3{,}9z = 24{,}2 \end{vmatrix}$

293. $\begin{vmatrix} 5x - 3y - 3z + 13 = 0 \\ 3x - 5y + 11z + 11 = 0 \\ x - y + z + 3 = 0 \end{vmatrix}$

294. $\begin{vmatrix} 4{,}13x + 3{,}72y + 5{,}83z = -0{,}10 \\ 3{,}26x - 4{,}11y + 6{,}29z = -17{,}73 \\ 1{,}14x + 2{,}18y - 4{,}15z = 19{,}91 \end{vmatrix}$

295. $\begin{vmatrix} 5{,}36x - 0{,}93y + 4{,}72z = 14{,}68 \\ 4{,}72x + 1{,}13y - 0{,}84z = 14{,}20 \\ 1{,}17x + 2{,}14y + 1{,}11z = 23{,}91 \end{vmatrix}$

296. $\begin{vmatrix} 9x + 3y - 2z + 6u = 63 \\ 3x - 2y + 4z - 2u = -12 \\ 6x + 2z + u = 19 \\ x + 2y - 2z + 3u = 23 \end{vmatrix}$

297. $\begin{vmatrix} 3x - 5y + 4z - 3u = -2{,}5 \\ 2x - 3z + 2u = -1{,}7 \\ 3x + 2y + 4u = 14{,}8 \\ 5x - 2y + 3z - 3u = 4 \end{vmatrix}$

298. $$\left|\begin{aligned} 14{,}3x + 5{,}9y + 2{,}7z - 3{,}1u &= 39{,}09 \\ 12{,}1x - 8{,}3y - 9{,}7z + 6{,}6u &= 16{,}28 \\ 8{,}3x + 5{,}2y + 3{,}9z - 10{,}2u &= 12{,}19 \\ 2{,}4x + 4{,}4y + 6{,}5z + 3{,}3u &= 26{,}19 \end{aligned}\right|$$

299. $$\left|\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 - 14 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 - 4x_4 - 10 &= 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 - 7 &= 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 8x_4 - 25 &= 0 \end{aligned}\right|$$

300. $$\left|\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 &= 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 &= 4 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 8 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5 &= 2 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 &= 10 \end{aligned}\right|$$

301. $$\left|\begin{aligned} -2M_1 - 2M_2 + M_3 + 3M_4 + M_5 &= 3 \\ M_1 - 2M_2 - 2M_3 + M_4 + 3M_5 &= 4 \\ 3M_1 + M_2 - 2M_3 - 2M_4 + M_5 &= 2 \\ M_1 + 3M_2 + M_3 - 2M_4 - 2M_5 &= 1 \\ -2M_1 + M_2 + 3M_3 + M_4 - 2M_5 &= 5 \end{aligned}\right|$$

302. $$\left|\begin{aligned} 28{,}3x - 19{,}2y + 34{,}2z - 11{,}3u &= 7{,}30 \\ -19{,}4x + 15{,}1y - 22{,}1z + 29{,}6u &= 47{,}24 \\ 14{,}6x + 11{,}3y + 9{,}6z + 10{,}4u &= 78{,}06 \\ 15{,}2x - 21{,}4y + 14{,}3z + 15{,}2u &= 18{,}01 \end{aligned}\right|$$

303. $$\left|\begin{aligned} \frac{6}{x} + \frac{4}{y} + \frac{5}{z} &= 4 \\ \frac{3}{x} + \frac{8}{y} + \frac{5}{z} &= 4 \\ \frac{9}{x} + \frac{12}{y} - \frac{10}{z} &= 4 \end{aligned}\right|$$

345

304. $$\left|\begin{aligned} \frac{4}{x} - \frac{3}{y} &= 1 \\ \frac{2}{x} + \frac{3}{z} &= 4 \\ \frac{3}{y} - \frac{1}{z} &= 0 \end{aligned}\right|$$

305. $$\left|\begin{aligned} \frac{xy}{4y - 3x} &= 20 \\ \frac{xz}{2x - 3z} &= 15 \\ \frac{yz}{4y - 5z} &= 12 \end{aligned}\right|$$

306. $$\left|\begin{aligned} \frac{3}{x} + \frac{1}{y} - \frac{5}{z} &= 0 \\ \frac{5}{x} - \frac{2}{y} - \frac{1}{z} &= 0 \\ \frac{4}{x} + \frac{5}{y} - \frac{14}{z} &= 0 \end{aligned}\right|$$

307. $$\left|\begin{aligned} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} - \frac{1}{z} &= -3 \\ -\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z} &= 3 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z} &= 1 \end{aligned}\right|$$

308. $$\left|\begin{aligned} \frac{xy}{x + y} &= \frac{1}{5} \\ \frac{xz}{x + z} &= \frac{1}{6} \\ \frac{yz}{y + z} &= \frac{1}{7} \end{aligned}\right|$$

309. Drei Zahnräder eines Getriebes haben zusammen 80 Zähne. Bei 10 Umdrehungen des ersten Rades drehen sich das zweite 18- und das dritte 45mal. Wieviel Zähne hat jedes Rad?

310. Ein Schnellzug benötigt auf einer bestimmten Strecke $2^1/_2$ Stunden weniger Fahrzeit als ein Personenzug, da er stündlich 25 km mehr als dieser zurücklegt. Ein Güterzug, dessen Geschwindigkeit um 15 km/h geringer ist als die des Personenzuges, benötigt für die Strecke $3^1/_2$ Stunden mehr als der Personenzug. Wie lang ist die Strecke, und mit welchen Geschwindigkeiten fahren die drei Züge?

311. Von drei Pumpen hebt die zweite 3 m³ Wasser mehr, aber 4 m weniger hoch als die erste. Die dritte Pumpe hebt in der gleichen Zeit 2 m³ Wasser weniger, aber 6 m höher als die erste. Welche Wassermengen bis zu welcher Höhe hebt jede Pumpe, wenn sie alle gleiche Leistungen haben?

312. Drei Behälter enthalten zusammen 270 hl Flüssigkeit. Füllt man den Inhalt des ersten Behälters in den zweiten um, so bleiben im ersten $^2/_7$ zurück. Füllt man den Inhalt der zwei letzten Behälter in den ersten um, so fehlen noch 10 hl, um den ersten vollständig zu füllen. Wieviel Hektoliter faßt jeder Behälter?

313. Stellt man in einer dreistelligen Zahl mit der Quersumme 9 die dritte Ziffer an den Anfang, so nimmt die Zahl um 135 zu. Addiert man dagegen zur dritten Ziffer 3, so erhält man den fünften Teil der aus den ersten beiden Ziffern bestehenden Zahl. Wie heißt die Zahl?

17. Quadratische Gleichungen

Nachdem in 11. der Körper der komplexen Zahlen eingeführt wurde, kann die bereits im „Lehrgang der Elementarmathematik“ begonnene Behandlung der quadratischen Gleichungen weitergeführt werden. Konnten dort nur die Gleichungen gelöst werden, deren Lösungsmengen sich als Untermengen des Körpers der reellen Zahlen erwiesen, so soll jetzt die gesamte Menge der komplexen Zahlen zur Verfügung stehen.

17.1. Reinquadratische Gleichung

Wurde im o. a. Lehrbuch zur Lösbarkeit von

$$Ax^2 + C = 0 \qquad (A \neq 0)$$

im Bereich der reellen Zahlen C als nicht positiv vorausgesetzt, so soll diese Bedingung jetzt aufgehoben sein. C sei also irgendeine beliebige reelle Zahl. Wird die Gleichung durch A dividiert, so nimmt sie die Form

$$x^2 + q = 0$$

an, worin $C/A = q$ wiederum eine beliebige reelle Zahl darstellt. Je nach der Beschaffenheit des absoluten Gliedes q bestehen folgende Möglichkeiten:

a) $q \leqq 0$

Es sei $q = -a\ (a \geqq 0)$ gesetzt. Nach dem dritten binomischen Gesetz kann in diesem Fall die linke Seite von

$$x^2 - a = 0$$

als Produkt zweier Linearfaktoren dargestellt werden:

$$(x - \sqrt{a})\,(x + \sqrt{a}) = 0.$$

Da ein Produkt nur Null sein kann, wenn mindestens einer der beiden Faktoren den Wert Null annimmt, und da beide Faktoren die Variable enthalten, kann die Gleichung in die beiden linearen Gleichungen

$$x - \sqrt{a} = 0 \qquad \text{und} \qquad x + \sqrt{a} = 0$$

mit den Lösungsmengen

$$\{x \mid x - \sqrt{a} = 0\} = \{\sqrt{a}\} \quad \text{und} \quad \{x \mid x + \sqrt{a} = 0\} = \{-\sqrt{a}\}$$

zerlegt werden. Ihre Vereinigungsmenge stellt die Lösungsmenge der quadratischen Gleichung dar:

$$\{x \mid x^2 - a = 0 \wedge a \geqq 0\} = \{x_1 = \sqrt{a}\,;\, x_2 = -\sqrt{a}\}.$$

Die Gleichung hat, wie bereits bekannt, zwei sich nur im Vorzeichen unterscheidende Wurzeln. Ist $a = 0$, so wird $x_1 = x_2 = 0$ als reelle Doppelwurzel bezeichnet.

b) $q > 0$

Es sei $q = a$ $(a > 0)$ gesetzt. Auf

$$x^2 + a = 0$$

kann nun zunächst nicht, wie zuvor, das dritte binomische Gesetz angewendet werden. Wird die Gleichung unter Verwendung der Definition $\mathrm{j}^2 = -1$ der imaginären Einheit in der Form

$$x^2 - a \cdot \mathrm{j}^2 = 0 \quad (\mathrm{j}^2 = -1)$$

dargestellt, so läßt sich die linke Seite in ein Produkt zerlegen:

$$(x - \mathrm{j}\sqrt{a})\,(x + \mathrm{j}\sqrt{a}) = 0,$$

wobei infolge $a > 0$ die Wurzel sinnvoll ist. Die Vereinigung der Lösungsmengen

$$\begin{array}{lcl} \{x \mid x - \mathrm{j}\sqrt{a} = 0\} & \text{und} & \{x \mid x + \mathrm{j}\sqrt{a} = 0\} \\ \quad = \{\mathrm{j}\sqrt{a}\} & & \quad = \{-\mathrm{j}\sqrt{a}\} \end{array}$$

der beiden linearen Gleichungen ergibt dann wieder die Lösungsmenge der quadratischen Gleichung

$$\{x \mid x^2 + a = 0 \wedge a > 0\} = \{x_1 = \mathrm{j}\sqrt{a}\,;\, x_2 = -\mathrm{j}\sqrt{a}\}.$$

Die Gleichung hat zwei imaginäre Wurzeln x_1 und x_2, die sich nur im Vorzeichen unterscheiden.
Die Probe, das Belegen der Variablen mit den ermittelten Werten

$$\begin{array}{rcr} x_1^2 + a = 0 & & x_2^2 + a = 0 \\ (\mathrm{j}\sqrt{a})^2 + a = 0 & & (-\mathrm{j}\sqrt{a})^2 + a = 0 \end{array}$$

$$\mathrm{j}^2 \cdot a + a = 0$$

$$0 = 0$$

verwandelt die Aussageform in eine wahre Aussage und bestätigt die Richtigkeit der gefundenen Lösungsmenge.

Satz

Eine reinquadratische Gleichung $x^2 + q = 0$ besitzt die beiden sich nur im Vorzeichen unterscheidenden Wurzeln

$$\boxed{x_{1;2} = \begin{cases} \pm\sqrt{-q}, & \text{wenn } q \leqq 0 \\ \pm\mathrm{j}\sqrt{q}, & \text{wenn } q > 0 \end{cases}} \tag{26}$$

BEISPIEL

1. $\{x \mid x^2 + 16 = 0\}$

Lösung: Zur praktischen Lösung wird das absolute Glied auf die rechte Seite gebracht

$$x^2 = -16$$

$$x_{1;2} = \pm\mathrm{j}\sqrt{16} = \pm 4\mathrm{j}.$$

Lösungsmenge: $\underline{\underline{\{4\mathrm{j};\ -4\mathrm{j}\}}}$.

Treten als Koeffizienten allgemeine Zahlensymbole auf, so machen sich, je nach den zwischen ihnen möglichen Relationen, Fallunterscheidungen notwendig.

BEISPIEL

2. $\{x \mid ax^2 - b = cx^2 + d \wedge a, b, c, d > 0\}$

Lösung: $(a - c)x^2 - (b + d) = 0$

Fall $a > c$:

$$x_{1;2} = \pm\sqrt{\frac{b+d}{a-c}}$$

Lösungsmenge: $\underline{\underline{\left\{\frac{1}{a-c}\sqrt{(b+d)(a-c)};\ -\frac{1}{a-c}\sqrt{(b+d)(a-c)}\right\}}}$.

Fall $a < c$:

$$x_{1;2} = \pm\mathrm{j}\sqrt{\frac{b+d}{c-a}}$$

Lösungsmenge: $\underline{\underline{\left\{\frac{\mathrm{j}}{c-a}\sqrt{(b+d)(c-a)};\ -\frac{\mathrm{j}}{c-a}\sqrt{(b+d)(c-a)}\right\}}}$.

17.2. Gemischtquadratische Gleichung ohne Absolutglied

Diese Gleichung konnte bereits im Körper der reellen Zahlen in jedem Fall gelöst werden, so daß sich hier keine Erweiterungen ergeben.

17.3. Gemischtquadratische Gleichung

Die bei der Lösung der reinquadratischen Gleichung gewonnenen Ergebnisse lassen sich auf die gemischtquadratische Gleichung

$$x^2 + px + q = 0$$

übertragen, wenn sie mit Hilfe der quadratischen Ergänzung zunächst auf die Form

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left[q - \left(\frac{p}{2}\right)^2\right] = 0$$

gebracht wird. Einander entsprechende Terme sind dann

reinquadr. Gl.	gemischtquadr. Gl.
x	$x + \frac{p}{2}$
q	$q - \left(\frac{p}{2}\right)^2$
$-q$	$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q.$

Formel (26) nimmt damit die Gestalt

$$x_{1;2} + \frac{p}{2} = \begin{cases} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \\ \pm \mathrm{j} \sqrt{q - \left(\frac{p}{2}\right)^2} \end{cases}$$

an. Wird noch der Term $p/2$ auf die rechte Seite gebracht, so müßten demnach

$$x_{1;2} = \begin{cases} -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}, & \text{wenn } \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \geqq 0, \\ -\frac{p}{2} \pm \mathrm{j} \sqrt{q - \left(\frac{p}{2}\right)^2}, & \text{wenn } \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0, \end{cases}$$

die Wurzeln der gemischtquadratischen Gleichung sein. Bei der Belegung der Variablen mit diesen Werten müßte also $x^2 + px + q = 0$ oder die dazu identische Gleichung $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2 = 0$ in eine wahre Aussage übergehen. Nachweis für $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$:

$$\left(x_{1;2} + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2 = 0$$

$$\left(\pm \mathrm{j} \sqrt{q - \left(\frac{p}{2}\right)^2}\right)^2 + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2 = 0$$

$$\mathrm{j}^2\left[q - \left(\frac{p}{2}\right)^2\right] + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2 = 0 \qquad (\mathrm{j}^2 = -1)$$

$$0 = 0.$$

Satz

Die gemischtquadratische Gleichung

$$x^2 + px + q = 0$$

besitzt stets die zwei Wurzeln

$$\boxed{x_{1;2} = \begin{cases} -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}, & \text{wenn } \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \geqq 0, \\ -\frac{p}{2} \pm \mathrm{j}\sqrt{q - \left(\frac{p}{2}\right)^2}, & \text{wenn } \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0, \end{cases}} \tag{27}$$

die im Fall

a) $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0$ voneinander verschieden und reell

b) $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0$ einander gleich (reell)

c) $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$ konjugiert komplex

sind.

Der Term $(p/2)^2 - q$ heißt *Diskriminante* der Gleichung.
Die bereits im „Lehrgang der Elementarmathematik" für reelle Wurzeln aufgestellten Wurzelsätze von VIETA

$$x_1 + x_2 = -p$$
$$x_1 \cdot x_2 = q$$

gelten in gleicher Form auch für komplexe Wurzeln. Es ist

$$x_1 + x_2 = -\frac{p}{2} + \mathrm{j}\sqrt{q - \left(\frac{p}{2}\right)^2} + \left(-\frac{p}{2} - \mathrm{j}\sqrt{q - \left(\frac{p}{2}\right)^2}\right) = -p$$

und

$$x_1 x_2 = \left(-\frac{p}{2} + \mathrm{j}\sqrt{q - \left(\frac{p}{2}\right)^2}\right)\left(-\frac{p}{2} - \mathrm{j}\sqrt{q - \left(\frac{p}{2}\right)^2}\right) =$$
$$= \left(-\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\mathrm{j}\sqrt{q - \left(\frac{p}{2}\right)^2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2 = q.$$

Somit besteht auch für komplexe Wurzeln x_1 und x_2 der Gleichung $x^2 + px + q = 0$ die Identität

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2).$$

BEISPIEL

1. $\{x \mid x^2 - 4x + 13 = 0\}$

   Lösung: Untersuchung der Diskriminante: $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 4 - 13 = -9 < 0$

   Anwendung der entsprechenden Lösungsformel:

   $$x_{1;2} = -2 \pm \mathrm{j}\sqrt{9} = -2 \pm 3\mathrm{j}.$$

   Lösungsmenge: $\underline{\underline{\{-2 + 3\mathrm{j};\ -2 - 3\mathrm{j}\}}}$.

   Sollte die Überprüfung der Diskriminante unterblieben und eventuell die nur für reelle Wurzeln geltende Lösungsformel verwendet sein, so ist spätestens an der Stelle im Lösungsgang die Korrektur vorzunehmen, bei der ein nicht zulässiger negativer Radikand auftritt. Im angeführten Beispiel müßte dann

   $$x_{1;2} = -2 \pm \sqrt{-9}$$

   durch

   $$x_{1;2} = -2 \pm \mathrm{j}\sqrt{9}$$

   ersetzt werden, was aber nicht etwa heißt, daß aus einer negativen Zahl eine Wurzel gezogen wurde.

Bei Anwendungsaufgaben weist meist das Auftreten komplexer Wurzeln, oft auch das negativer Wurzeln, auf die Nichtlösbarkeit des Problems hin. Insbesondere in der höheren Mathematik aber kommt den komplexen Wurzeln auch bei den Anwendungen außerordentliche Bedeutung zu.

BEISPIEL

2. Ein Rechteck mit den Seitenlängen $a = 4$ cm und $b = 5$ cm ist in ein inhaltsgleiches Rechteck mit dem Umfang $U = 16$ cm zu verwandeln.

   Lösung: Die eine Seite des gesuchten Rechtecks sei x cm, die andere dann entsprechend $(8 - x)$ cm lang (Bild 31).

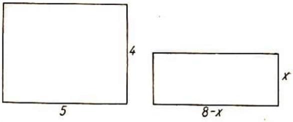


Bild 31

   Aus der geforderten Inhaltsgleichheit folgt

   $$x(8 - x) = 20.$$

   Die gestellte Aufgabe läßt den Variablenbereich $\left(0;\ \frac{U}{2} = 8\right)$ zu. Die Diskriminante der quadratischen Gleichung

   $$x^2 - 8x + 20 = 0$$

   ist negativ. Die Wurzeln der Gleichung sind komplex. Für den zulässigen Variablenbereich ist die Lösungsmenge leer, das gestellte Problem ist nicht lösbar.

17.4. Geometrische Bedeutung der Diskriminante. Diskussion der quadratischen Gleichung

Wie bereits im „Lehrgang der Elementarmathematik“ festgestellt wurde, ergibt sich nach der Umwandlung der Funktionsgleichung

$$y = x^2 + px + q$$

mittels quadratischer Ergänzung in

$$y = (x - x_s)^2 + y_s$$

die Möglichkeit, die Koordinaten x_s und y_s des Scheitelpunktes S der zugehörigen Normalparabel abzulesen (Bild 32). Aus

$$y = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left[\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q\right]$$

folgt demnach

$$S\left(-\frac{p}{2};\ -\left[\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q\right]\right).$$

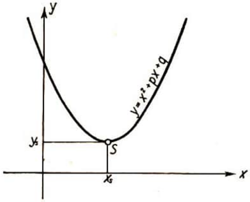


Bild 32

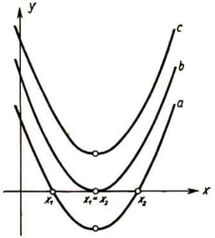


Bild 33

Der Scheitelpunkt liegt

$$\left.\begin{array}{l} \text{a) unterhalb} \\[2ex] \text{b) auf} \\[2ex] \text{c) oberhalb} \end{array}\right\} \text{ der } x\text{-Achse, wenn } \left\{\begin{array}{l} \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0 \\[2ex] \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0 \\[2ex] \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0 \end{array}\right.$$

ist (Bild 33).

Somit bestimmt also das Vorzeichen des Terms $(p/2)^2 - q$, der als Diskriminante der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$ eingeführt wurde, auf welcher Seite der x-Achse der Scheitel der Parabel zu finden ist.
Im Fall a) schneiden sich Kurve und x-Achse in den zwei Punkten, deren Abszissen x_1 und x_2 mit den Wurzeln der quadratischen Gleichung identisch sind. Die quadratische Gleichung hat zwei reelle Wurzeln.
Wird durch Vergrößern des q die Kurve in Richtung der positiven y-Achse verschoben, so werden sich die beiden Schnittpunkte einander nähern, um im Fall b) als Berührungspunkt zusammenzufallen. Die quadratische Gleichung weist dann die Doppelwurzel $x_1 = x_2 = -p/2$ auf.
Nach einer weiteren Vergrößerung des q werden sich im Fall c) Kurve und x-Achse nicht mehr schneiden. Die Lösungsmenge der quadratischen Gleichung besteht aus zwei komplexen Zahlen.

17.5. Gleichungen, die sich auf quadratische Gleichungen zurückführen lassen

Verschiedene Gleichungen lassen sich durch Umformen bzw. Einführen einer neuen Variablen auf quadratische Gleichungen zurückführen. Wie schon bei den linearen Gleichungen ist die Äquivalenz der neu entstehenden Gleichung zu überprüfen. Entweder wird diese Untersuchung beim Umwandeln der Gleichung durchgeführt: Feststellung des Definitionsbereichs, oder am Schluß des Lösungsvorganges: Einsetzprobe.

BEISPIELE

1. $\{x \mid x + 2\sqrt{x} - 15 = 0\}$

Lösung:

Definitionsbereich: $[0; +\infty)$,

neue Variable: $u = \sqrt{x}$,

quadratische Gleichung: $u^2 + 2u - 15 = 0 \qquad u \in [0; +\infty)$

$u_{1;2} = -1 \pm 4 \qquad u_1 = 3, \qquad (u_2 = -5$ entfällt).

Lösungsmenge: $\underline{\underline{\{9\}}}$.

Werden zunächst $u_1 = 3$ und $u_2 = -5$, also $x_1 = 9$ und $x_2 = 25$ in die Lösungsmenge aufgenommen, so führt x_2 bei der Probe auf die falsche Aussage

$$25 + 2\sqrt{25} - 15 = 0,$$

so daß x_2 keine Wurzel der Ausgangsgleichung darstellt.

2. $\{x \mid x^4 + 5x^2 - 36 = 0\}$

Lösung:

Definitionsbereich: C,

neue Variable: $u = x^2$,

quadratische Gleichung: $u^2 + 5u - 36 = 0 \qquad u \in K$

$u_{1,2} = -{}^5/_2 \pm {}^{13}/_2 \qquad u_1 = 4, \qquad u_2 = -9.$

Wird x wieder eingeführt, so ergeben sich die beiden reinquadratischen Gleichungen

$$x^2 = 4 \qquad\qquad x^2 = -9$$

$$x_1 = 2, \quad x_2 = -2, \qquad\qquad x_3 = 3\mathrm{j}, \quad x_4 = -3\mathrm{j}.$$

Lösungsmenge: $\underline{\underline{\{2;\ -2;\ 3\mathrm{j};\ -3\mathrm{j}\}}}$.

Die bereits schon einmal im „Lehrgang der Elementarmathematik" behandelten Wurzelgleichungen können eventuell auch auf quadratische Gleichungen führen.

BEISPIELE

3. $\{x \mid 3x - 8 - 4\sqrt{4x+1} = 0\}$

Lösung: Der Definitionsbereich läßt sich als Durchschnittsmenge der Lösungsmengen der beiden Ungleichungen

$3x - 8 \geqq 0$ (weil Wurzelterm nicht negativ sein kann)

$4x + 1 \geqq 0$ (weil Radikand nicht negativ sein darf)

bestimmen:

$$x \in [8/3; +\infty).$$

Wurzel isolieren: $\qquad 3x - 8 = 4\sqrt{4x+1},$

beiderseits quadrieren: $\qquad 9x^2 - 48x + 64 = 16(4x+1)$

$$x^2 - \frac{112}{9}x + \frac{48}{9} = 0$$

$$x_{1;2} = \frac{56}{9} \pm \frac{52}{9}$$

$$x_1 = 12, \quad (x_2 = 4/9 \text{ entfällt}).$$

Die bei Wurzelgleichungen unbedingt erforderliche Probe führt für $x_1 = 12$ auf eine wahre Aussage.

Lösungsmenge: $\underline{\underline{\{12\}}}$.

4. $\{x \mid \sqrt{2-x} + \sqrt{x-3} = 1\}$

Lösung: Die beiden Wurzelterme schränken im einzelnen die Variable x auf die Bereiche

$$(-\infty; 2] \quad \text{bzw.} \quad [3; +\infty)$$

ein. Die Durchschnittsmenge dieser beiden Bereiche, der Definitionsbereich der Gleichung ist leer. Somit muß auch die Lösungsmenge leer sein.

Lösungsmenge: $\underline{\underline{\varnothing}}$.

Der Leser untersuche selbst, welche Lösungsmenge in diesem Fall die durch Quadrieren entstehende quadratische Gleichung aufweist und begründe, weshalb sie nicht Lösungsmenge der Wurzelgleichung sein kann.

Bei komplizierteren Wurzelgleichungen läßt sich der Definitionsbereich der Gleichung nur sehr mühselig feststellen. Man wird dann darauf verzichten, muß aber alle gefundenen Wurzeln der quadratischen Gleichung der Probe an der Ausgangsgleichung unterziehen.

AUFGABEN

Es sind die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen zu bestimmen.

Reinquadratische Gleichungen:

314. $x^2 - 144 = 0$
315. $x^2 - 256 = 0$
316. $x^2 + 9 = 0$
317. $3x^2 - 27 = 0$
318. $2x^2 - 40 = 0$
319. $x^2 - 24 = -6$
320. $5x^2 + 10 = 34$
321. $2x^2 + 25 = 0$
322. $ax^2 + b = 0 \quad (a \cdot b > 0)$
323. $ax^2 + b = 0 \quad (a \cdot b < 0)$
324. $\frac{a+b}{a-b} x^2 = a^2 - b^2$
325. $\frac{x}{x+a} + \frac{x}{x-a} = 1$
326. $\frac{a}{x} + \frac{x}{a} = \frac{x}{ab^2} + \frac{ab^2}{x}$
327. $\frac{a}{b} x^2 = a^3b + 2a^2b + ab$

Gemischtquadratische Gleichungen:

328. $x^2 + x - 12 = 0$
329. $x^2 - 7x + 10 = 0$
330. $x^2 + x - 90 = 0$
331. $x^2 - 6x + 13 = 0$
332. $x^2 - 2x + 2 = 0$
333. $x^2 - 0{,}3x + 0{,}02 = 0$
334. $x^2 + 3{,}6x + 7{,}65 = 0$
335. $x^2 + 4{,}7x + 11{,}2825 = 0$
336. $4x^2 - 4x - 3 = 0$
337. $8x^2 - 6x + 1 = 0$
338. $2x^2 + 4x + 5 = 0$
339. $3x^2 - 22x + 35 = 0$
340. $2x^2 - 34{,}60x + 129{,}40 = 0$
341. $10x^2 - 18{,}2x + 16{,}202 = 0$
342. $3x^2 - 8{,}4x + 5{,}88 = 0$
343. $x^2 + 6{,}51 = 5{,}2x$
344. $x^2 - (a-b)x = 2b(a+b)$
345. $4x^2 - 4ax = b^2 - a^2$
346. $x^2 - (3a-b)x + 2a^2 - 5ab - 12b^2 = 0$
347. $a(a-b)x^2 + b^2x = a(a+b)$
348. $x^2 - 2ax + a^2 = a - b$ (Fallunterscheidung $a > b$ und $a < b$)
349. $m(m+n) = n(2m - nx)x$
350. $(a-x)^2 + (x-b)^2 = a^2 + b^2$
351. $\frac{x+11}{x+3} = \frac{2x+1}{x+5}$
352. $\frac{7x-5}{10x-3} = \frac{5x-3}{6x+1}$
353. $\frac{5x-1}{9} + \frac{3x-1}{5} = \frac{2}{x} + x - 1$
354. $\frac{5x-7}{9} + \frac{14}{2x-3} = x - 1$
355. $\frac{7}{2x-3} + \frac{5}{x-1} = 12$
356. $\frac{7-x}{11-2x} + \frac{4x-5}{3x-1} = 2$
357. $\frac{1}{x-2} + \frac{2}{x-3} = \frac{x^2-2x-1}{x^2-5x+6}$
358. $\frac{x^3 - 10x^2 + 1}{x^2 - 6x + 9} = x - 3$
359. $\frac{21}{x} - \frac{10}{x-2} - \frac{4}{x-3} = 0$
360. $\frac{(a-x)^2 + (x-b)^2}{(a-x)^2 - (x-b)^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$

Die folgenden Terme sind als Produkte von Linearfaktoren darzustellen:

361. $x^2 + 2x - 15$
362. $x^2 - 4x$
363. $x^2 - 6x + 25$
364. $4x^2 + 8x - 5$
365. $2x^2 - 12x + 18$
366. $4x^2 - 4x + 10$
367. $x^2 - ax - bx + ab$
368. $x^2 - 2ax + a^2 + b^2$
369. $ax^2 + bx + adx + bd$

Welche quadratischen Gleichungen (Normalform) weisen die angegebenen Lösungsmengen auf?

370. $\{3; -2\}$ 371. $\{0; 5\}$ 372. $\{-4; -4\}$
373. $\{a; -a\}$ 374. $\{a\mathrm{j}; -a\mathrm{j}\}$ 375. $\{0; 0\}$
376. $\{3 + 2\mathrm{j}; 3 - 2\mathrm{j}\}$ 377. $\{a(1 + \mathrm{j}); a(1 - \mathrm{j})\}$
378. $\{a + 2b;\ 2a + b\}$ 379. $\{2a + 3b\mathrm{j}; 2a - 3b\mathrm{j}\}$

Die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen, die sich auf quadratische Gleichungen zurückführen lassen, sind zu bestimmen.

380. $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$
381. $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$
382. $x^4 - 8x^2 = 0$
383. $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$
384. $(x^2 - 10)(x^2 - 3) = 78$
385. $x^4 + 5x^2 = 0$
386. $x^4 - 9 = 0$
387. $x - 2\sqrt{x} - 3 = 0$
388. $x - 8\sqrt{x} + 15 = 0$
389. $x + 5\sqrt{x} + 6 = 0$
390. $x - \sqrt{-x} + 2 = 0$
391. $x - 6\sqrt{x} + 9 = 0$
392. $x - 5\sqrt{x} = 0$
393. $x - a\sqrt{x} = ab + b^2 \quad (a, b > 0)$
394. $\sqrt{2x^2 + 4x - 6} - x - 3 = 0$
395. $x + 1 - \sqrt{2x^2 + 0{,}5x + 1{,}5} = 0$
396. $x + 2 - \sqrt{2x^2 - 2x + 12} = 0$
397. $\sqrt{2x + 15} - \sqrt{x + 4} = 2$
398. $\sqrt{x + 5} - \sqrt{2x + 3} = -1$
399. $\sqrt{x + 5} - \sqrt{2x + 3} = 1$
400. $\sqrt{2x - 1} - \sqrt{x - 4} = 2$
401. $\sqrt{3 - x} + \sqrt{x - 4} = 3$
402. $\sqrt{x + 8} - \sqrt{x + 3} - \sqrt{x} = 0$
403. $\sqrt{x + 8} + \sqrt{x + 3} - \sqrt{x} = 0$
404. $\sqrt{3x + 1} + 2\sqrt{7x - 10} = 7\sqrt{x - 1}$
405. $\sqrt{5x - 1} - \sqrt{8 - 2x} = \sqrt{x - 1}$
406. $\sqrt{a - x} + \sqrt{x - b} = \sqrt{a - b} \quad (0 < b < a)$
407. $\sqrt{2x - 1} + \sqrt{x + 8} - \sqrt{2x + 2} - \sqrt{x + 3} = 0$
408. $\sqrt{2x - 1} - \sqrt{x + 8} + \sqrt{2x + 2} - \sqrt{x + 3} = 0$
409. $\sqrt{x + 1} + \sqrt{3x - 5} - \sqrt{x - 2} - \sqrt{3x} = 0$
410. $\sqrt{x + 2 + \sqrt{2x - 4}} = 4$
411. $\sqrt{x + 1 + \sqrt{3x + 4}} = 3$
412. $\sqrt{x + 1 - \sqrt{3x + 4}} = 3$
413. $\sqrt{x + 2 - \sqrt{2x - 6}} = 2$
414. $\sqrt{x + 3} + \sqrt{2x - 8} = \dfrac{15}{\sqrt{x + 3}}$
415. $\sqrt{2x - 1} + \sqrt{x - 1{,}5} = \dfrac{6}{\sqrt{2x - 1}}$

416. Nach einer Preissenkung im Einzelhandel zahlte man für 60 kg einer Ware 6 Mark mehr als vorher für 45 kg. Wieviel kostete 1 kg vor und nach der Preissenkung, wenn man nach der Senkung für 6 Mark 1 kg mehr erhält als vorher?

417. Ein Schlosser kauft für 3 Mark Schrauben. 8 Wochen zuvor waren sie je Stück einen Pfennig teurer, so daß es für 3 Mark 10 Stück weniger gab. Wie groß sind die Anzahl der Schrauben und der Stückpreis?

418. Die Erzeugung von Briketts im Jahr 1950 übertraf die Erzeugung von 1947 um 21%. Diese Steigerung soll durch 2 Kreisflächen graphisch dargestellt werden. Um wieviel Prozent muß der Radius des die höhere Leistung anzeigenden Kreises größer genommen werden als der Radius des Kreises für die frühere Erzeugung?

419. Zwei Elektriker stellen zusammen eine Anlage in $6^2/_3$ Tagen fertig. Wie lange müßte jeder allein an ihr arbeiten, wenn der zweite 3 Tage mehr als der erste benötigt?

420. Die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks verhalten sich wie 3:4. Wie groß sind sie, wenn die Hypotenuse 50 cm lang ist?

421. Die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ist 0,53 m lang. Wie groß sind die Katheten, wenn ihre Gesamtlänge 0,686 m beträgt?

422. Der Inhalt eines Dreiecks, das einen rechten Winkel enthält, beträgt 24 cm^2. Die beiden Katheten unterscheiden sich um 2 cm. Wie lang sind sie?

423. Verlängert man die Seite eines Quadrates um 3 cm und verkürzt die benachbarte Seite um ebensoviel, so hat das aus den veränderten Seiten gebildete Rechteck eine Fläche von 55 cm^2. Wie lang ist die Seite des Quadrates?

424. In ein Rechteck mit den Seiten 49 cm und 30 cm ist ein zweites Rechteck gezeichnet, dessen Seiten von denen des ersten Rechtecks gleich weit entfernt sind und dessen Fläche $^4/_7$mal so groß ist wie die des ersten Rechtecks. Wie lang sind die Seiten des zweiten Rechtecks?

425. Wird der Durchmesser eines Kreises um 3 cm vergrößert, so verdoppelt sich damit der Flächeninhalt. Wie groß war der Durchmesser?

426. Wie groß ist die Spannweite eines kreisförmigen Brückenbogens mit dem Radius 26 m und der Pfeilhöhe 1,6 m?

427. Wie groß sind die Seiten einer rechteckigen Obstanlage einer landwirtschaftlichen Genossenschaft, die einen Umfang von 430 m und eine Fläche von 1 ha 8 a 81 m^2 hat?

428. Von den drei an einer Ecke zusammenstoßenden Kanten eines Quaders, dessen Gesamtoberfläche 568 cm^2 beträgt, ist die erste um 4 cm länger als die zweite und um 4 cm kürzer als die dritte. Wie lang sind die Kanten?

429. Die Oberflächen zweier Kugeln betragen zusammen 15400 cm^2. Die Radien unterscheiden sich um 7 cm. Wie groß sind sie? (Man rechne mit $\pi \approx 22/7$.)

430. Ein Maurer hätte an einer Mauer 9 Tage länger allein gearbeitet als ein anderer. Beide zusammen haben die Mauer in 20 Tagen aufgeführt. Wie lange hätte jeder allein gearbeitet?

431. Um einen Behälter zu füllen, braucht die eine von zwei Pumpen 24 min mehr als die zweite. Beide gleichzeitig pumpen den Behälter in 35 min voll. In welcher Zeit füllt die erste Pumpe den Behälter allein?

432. Ein Kessel wird durch 2 Pumpen gefüllt. Arbeiten beide Pumpen zugleich, so dauert die Füllung 6 h. Setzt man die Pumpen nacheinander in Betrieb, so daß der Kessel durch jede Pumpe allein gefüllt wird, so wird er in 25 h zweimal voll. In wieviel Stunden wird er durch jede Pumpe allein gefüllt?

433. Durch Verbesserung im Betrieb kann ein Eisenbahnzug jetzt eine um 9 km/h höhere Durchschnittsgeschwindigkeit erreichen und erzielt dadurch auf einer Strecke von 180 km Länge eine Zeiteinsparung von 60 min. Wieviel Stunden benötigt er für die Strecke?

434. Zum Durchfahren einer 225 km langen Strecke benötigt ein Eilzug $3^1/_2$ h weniger als ein Personenzug. Der Eilzug legt dabei 26,25 km in der Stunde mehr zurück als der Personenzug. Wie groß sind Geschwindigkeit und Fahrtdauer beider Züge?

435. Ein Fußgänger geht mit einer Geschwindigkeit von 5 km/h von A nach B. Er wird $1^1/_2$ h nach seinem Aufbruch von einem Radfahrer überholt, der 30 min nach dieser Begegnung in B ankommt, dort sofort wendet und in A zu derselben Zeit ankommt, in welcher der Fußgänger B erreicht. Wie weit sind die Orte A und B voneinander entfernt?

436. Auf dem einen Schenkel eines rechten Winkels befindet sich im Abstande 11 cm vom Scheitel ein Punkt P_1, auf dem anderen Schenkel ein Punkt P_2 im Scheitelabstand 3 cm. Beide Punkte bewegen sich mit gleicher Geschwindigkeit vom Scheitel fort. P_1 beginnt 6 s später als P_2 sich in Bewegung zu setzen und hat nach 3 s einen Abstand von 130 cm von P_2 erreicht. Wie groß ist die Geschwindigkeit beider Punkte?

437. Auf dem Umfang eines Kreises von 420 m Länge bewegen sich zwei Körper A und B. B legt in der Minute 25 m mehr zurück als A und braucht daher, um den ganzen Kreis zu umlaufen, 5 min weniger als A. Welche Geschwindigkeiten haben A und B?

438. Auf den Schenkeln eines Winkels von 60° bewegen sich zwei Punkte A und B vom Scheitel fort. Ursprünglich sind A und B 2 m bzw. 10 m vom Scheitel entfernt. Wann werden die beiden Punkte 30 m voneinander entfernt sein, wenn sie 7 m bzw. 5 m in der Sekunde zurücklegen? (Man wende den Cosinussatz an)

439. Auf einem 225 m langen Wege bewegen sich 2 Körper, gleichzeitig beginnend, einander entgegen. Der erste Körper führt eine gleichförmige Bewegung mit einer Geschwindigkeit von 20 m/s aus, der zweite eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung mit der Beschleunigung 10 m/s². Wann werden sich beide Punkte treffen, und welchen Weg hat dann jeder zurückgelegt?

440. Ein Elbdampfer, der von Dresden um 9.30 Uhr mit einer Geschwindigkeit von 13,2 km/h abfährt, begegnet um 11.18 Uhr einem Dampfer, der Riesa um 8.00 Uhr verlassen hat. Der stromab fahrende Dampfer kommt 30 min früher in Riesa an als der stromauf fahrende Dampfer in Dresden. Wie lang ist die Fahrtstrecke?

441. Zwei Radfahrer treffen einander nach 42 Sekunden, wenn sie in einer kreisförmigen Bahn von derselben Stelle aus in entgegengesetzter Richtung abfahren. Wieviel Sekunden benötigt der erste Radfahrer für eine Runde, wenn er 13 s mehr braucht als der zweite?

442. Um die Tiefe eines Brunnens zu bestimmen, läßt man einen Stein frei hineinfallen und hört ihn nach 6 s im Wasser aufschlagen. Wie tief ist der Brunnen? (Schallgeschwindigkeit 333 m/s; Erdbeschleunigung 9,81 m/s². Der Luftwiderstand wird vernachlässigt.)

443. Der Achsenschnitt eines Zylinders ist ein Rechteck von 26 cm Umfang. Die Oberfläche des Zylinders beträgt 138,23 cm². Wie groß ist das Volumen?

444. Das Abstecken einer kreisförmigen Bordsteinkante einer Stadtstraße soll von der Sehne aus erfolgen, die einen Mittelpunktabstand von 39 m hat und 71 m länger ist als der Radius. Wie lang ist die Sehne?

445. Einer Kugel von 25 cm Radius soll ein Zylinder einbeschrieben werden, dessen Achsenschnitt einen Umfang von 140 cm hat. Wie groß sind die Höhe und der Grundkreisdurchmesser des Zylinders?

446. Die Höhe eines Kegels beträgt 12 cm, der Mantel 424,12 cm². Wie groß sind Oberfläche und Rauminhalt?

447. Die Oberfläche eines Kegelstumpfes von 8 cm Mantellinie beträgt 1298 cm², der Mantel 528 cm². Wie groß sind die Halbmesser?

448. Eine Hohlkugel aus Stahl ($\varrho = 7{,}85\ \mathrm{kg/dm^3}$) von 3 cm Wanddicke hat eine Masse von 39,360 kg. Wie groß sind die Durchmesser?

449. Die Resultierende zweier rechtwinklig aufeinander wirkender Kräfte ist 17 kp. Vergrößert man die eine Kraft um 1 kp und die andere um 4 kp, so wächst die Resultierende um 3 kp. Wie groß sind die Kräfte?

450. Wird in einem Stromkreis mit 120 V Spannung der Widerstand um 10 Ω vergrößert, so sinkt die Stromstärke um 1 A. Wie groß sind Stromstärke und Widerstand?

451. Zwei Widerstände, die sich um 1 Ω unterscheiden, geben bei Parallelschaltung einen Gesamtwiderstand von 0,375 Ω. Wie groß sind die Einzelwiderstände?

452. Die Resultierende zweier rechtwinklig aufeinander wirkender Kräfte, die sich um 6 kp unterscheiden, hat die Größe 30 kp. Wie groß sind die Kräfte?

453. Zu einem Draht werden zwei weitere Drähte parallel geschaltet, deren Widerstände um 4 Ω größer bzw. 5,6 Ω kleiner sind als der Widerstand des ersten Drahtes. Dadurch sinkt der Gesamtwiderstand auf den fünften Teil des ersten Drahtes. Welchen Widerstand haben die einzelnen Drähte?

454. Zwei Widerstände, die sich um 200 Ω unterscheiden, haben in Parallelschaltung einen Gesamtwiderstand von 24 Ω. Wie groß sind die Widerstände?

455. Der Gesamtwiderstand einer Reihenschaltung von zwei Widerständen beträgt 50 Ω, eine Parallelschaltung derselben zwei Widerstände 8 Ω. Wie groß sind die Einzelwiderstände?

456. In einem Stromkreis, an dem eine Spannung von 220 V angelegt ist, fließt bei Parallelschaltung zweier Widerstände ein Strom von 4 A und bei Reihenschaltung derselben Widerstände ein Strom von 1 A. Wie groß sind die Widerstände?

457. In einem rechteckigen Hof mit der Breite 48 m und der Länge 54 m soll ein gleichmäßig breiter Streifen mit quadratischen Fliesen von einer Kantenlänge 30 cm gepflastert werden. Die freie Fläche innen von einer Größe von 567 m² soll mit Rasen angesät werden. Wieviel Fliesen werden benötigt, und wie breit ist der Streifen?

458. Die Sehne eines Kreises hat den Mittelpunktabstand 9 cm und ist 39 cm länger als der Halbmesser. Wie groß ist die Sehne?

459. Bei einer Brinellhärteprüfung eines Stahls verwendet man eine Stahlkugel von 10 mm Durchmesser und erhält nach der Prüfung, bei der die Stahlkugel auf die Oberfläche des zu prüfenden Werkstückes gedrückt wird, einen Kugeleindruck, dessen Durchmesser (auf der ebenen Oberfläche des Werkstückes gemessen) 5 mm ist. Wie tief ist die Kugel in das Werkstück eingedrungen?

18. Algebraische Gleichungen n-ten Grades

Die bisher behandelten linearen und quadratischen Gleichungen mit einer Variablen sind Sonderfälle der allgemeinen Gleichung n-ten Grades (vgl. 11.8.)

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0 \qquad a_n \neq 0,$$

in der die a_i beliebige reelle Koeffizienten darstellen und $n \in N$ ist. Der größte auftretende Exponent n bestimmt den *Grad* der Gleichung.
Wie im Abschnitt 1.3.3. des Bandes „Analysis" dargelegt, stellt die Funktionsgleichung

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

die analytische Form der ganzen rationalen Funktion n-ten Grades dar.
An dem in beiden Fällen auftretenden Term

$$g_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

allgemein **Polynom n-ten Grades** genannt, sollen im folgenden einige Untersuchungen vorgenommen werden, die als Ergebnis praktische Verfahren zur Berechnung derartiger Polynome zeitigen werden.

18.1. Das Schema von Horner

Zunächst soll ein derartiges Polynom in eine Summe zerlegt werden, deren einer Summand ein Produkt mit dem Linearfaktor $(x - x_1)$ und deren anderer eine Konstante ist. Diese Aufgabe läßt sich mit Hilfe der im „Lehrgang der Elementarmathematik" behandelten Partialdivision lösen.

BEISPIEL

1. Das Polynom $4x^4 - 15x^3 + 14x^2 - 17x + 9$ ist als Produktsumme mit dem Linearfaktor $(x - 3)$ darzustellen.

Lösung:

$$\begin{array}{l}
(4x^4 - 15x^3 + 14x^2 - 17x + 9):(x-3) = 4x^3 - 3x^2 + 5x - 2 \\
-\underline{|4x^4 - 12x^3} \\
\qquad -3x^3 + 14x^2 \\
\quad -\underline{|-3x^3 + 9x^2} \\
\qquad\qquad\quad 5x^2 - 17x \\
\qquad\qquad -\underline{|5x^2 - 15x} \\
\qquad\qquad\qquad -2x + 9 \\
\qquad\qquad\quad -\underline{|-2x + 6} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 3
\end{array}$$

Die Division führt auf ein Polynom dritten Grades und, da sie nicht aufgeht, auf einen konstanten Rest. Für das angegebene Polynom gilt somit

$$\underline{\underline{4x^4 - 15x^3 + 14x^2 - 17x + 9 = (x-3)(4x^3 - 3x^2 + 5x - 2) + 3.}}$$

Allgemein wird sich ein Polynom n-ten Grades in der Form

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = (x - x_1)(b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0) + r_0$$

oder kurz

$$g_n(x) = (x - x_1) \cdot g_{n-1}(x) + r_0$$

darstellen lassen. Zur Bestimmung der Koeffizienten b_i und des Restes r_0 soll nun ein rationelleres Verfahren als die Partialdivision entwickelt werden. Dazu ist die rechte Seite auszumultiplizieren und nach fallenden Potenzen von x zu ordnen:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = b_{n-1}x^n + (b_{n-2} - x_1 b_{n-1})x^{n-1} + (b_{n-3} - x_1 b_{n-2})x^{n-2} + \cdots + (b_0 - x_1 b_1)x + (r_0 - x_1 b_0).$$

Werden nun die Koeffizienten jeweils gleicher Potenzen von x miteinander verglichen, so ergibt sich

$$\begin{array}{lcl}
a_n = b_{n-1} & \text{bzw.} & b_{n-1} = a_n \\
a_{n-1} = b_{n-2} - x_1 b_{n-1} & & b_{n-2} = a_{n-1} + x_1 b_{n-1} \\
a_{n-2} = b_{n-3} - x_1 b_{n-2} & & b_{n-3} = a_{n-2} + x_1 b_{n-2} \\
\cdots\cdots\cdots & & \cdots\cdots \\
a_1 = b_0 - x_1 b_1 & & b_0 = a_1 + x_1 b_1 \\
a_0 = r_0 - x_1 b_0 & & r_0 = a_0 + x_1 b_0 .
\end{array}$$

Das rechtsstehende System kann zur schrittweisen Berechnung der b_i verwendet werden. Mit dem Koeffizienten des gegebenen Polynoms ist b_{n-1} bekannt. Durch

Addition des zu bildenden Produkts $x_1 b_{n-1}$ mit dem gegebenen a_{n-1} läßt sich nun b_{n-2} bestimmen usw. Es lassen sich also die b_i und r_0 durch Multiplikationen mit dem gleichbleibenden Faktor x_1 (feste Einstellung des Rechenstabes!) und Additionen berechnen. Von HORNER wurde 1819 ein nach ihm benanntes Schema zur übersichtlichen Ausführung dieser Rechnungen angegeben. Darin werden zunächst die gegebenen Koeffizienten a_i, mit a_n beginnend, in einer Zeile niedergeschrieben (für fehlende Potenzen von x ist der Koeffizient 0 einzusetzen). Dann sind in der durch die eingezeichneten Pfeile gekennzeichneten Reihenfolge nacheinander b_{n-1}, $x_1 b_{n-1}$, b_{n-2} usw. anzugeben bzw. zu berechnen und einzutragen:

$$\begin{array}{c|ccccccc} & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & & a_1 & a_0 \\ & & x_1 b_{n-1} & x_1 b_{n-2} & \cdots & & x_1 b_1 & x_1 b_0 \\ \hline x_1 & b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \cdots & b_1 & b_0 & r_0 \end{array}.$$

BEISPIEL

1. (Fortsetzung): Für das angegebene Polynom entwickelt sich das HORNERsche Schema schrittweise folgendermaßen:

1. Angabe der Koeffizienten und Vorbereitung des Schemas:

$$\begin{array}{c|ccccc} & 4 & -15 & 14 & -17 & 9 \\ & & & & & \\ \hline 3 & & & & & \end{array}$$

2. Der Koeffizient $a_4 = 4$ ist mit b_3 identisch und wird direkt in der dritten Zeile eingetragen:

$$\begin{array}{c|ccccc} & 4 & -15 & 14 & -17 & 9 \\ & & & & & \\ \hline 3 & 4 & & & & \end{array}$$

3. Das Produkt $x_1 b_3 = 3 \cdot 4 = 12$ wird unter dem Koeffizienten a_3 in der zweiten Zeile eingetragen:

$$\begin{array}{c|ccccc} & 4 & -15 & 14 & -17 & 9 \\ & & 12 & & & \\ \hline 3 & 4 & & & & \end{array}$$

4. Die Summe der in der zweiten Spalte übereinanderstehenden Werte $-15 + 12 = -3$ ist in der dritten Zeile derselben Spalte anzugeben:

$$\begin{array}{c|ccccc} & 4 & -15 & 14 & -17 & 9 \\ & & 12 & & & \\ \hline 3 & 4 & -3 & & & \end{array}$$

Im gleichen Sinne ist weiter zu verfahren:

$$\begin{array}{c|ccccc} & 4 & -15 & 14 & -17 & 9 \\ & & 12 & -9 & 15 & -6 \\ \hline 3 & 4 & -3 & 5 & -2 & 3 \\ & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & r_0. \end{array}$$

Damit sind die (zusätzlich unter den errechneten Werten vermerkten) Koeffizienten des entsprechenden Polynoms dritten Grades und der Rest r_0 gefunden, wie ein Vergleich mit dem Ergebnis der weiter vorn ausgeführten Partialdivision bestätigt.

Zweckmäßig wird noch eine Kontrollrechnung eingeschaltet. Dazu werden die *Koeffizientensummen*

$$a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0 = s_n$$

und

$$b_{n-1} + b_{n-2} + \cdots + b_1 + b_0 = s_{n-1}$$

der beiden Polynome eingeführt. Da die identische Gleichung

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = (x - x_1)(b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + \\ + b_0) + r_0$$

für $x = 1$ die Form

$$a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0 = (1 - x_1)(b_{n-1} + \cdots + b_1 + b_0) + r_0$$

annimmt, muß

$$s_n = (1 - x_1)\, s_{n-1} + r_0$$

bzw.

$$s_n + (x_1 - 1) s_{n-1} = r_0$$

sein.

BEISPIEL

1. (Fortsetzung): Für obiges Polynom ist

$$s_4 = -5, \quad s_3 = 4$$

und damit

$$-5 + (3 - 1) \cdot 4 = 3.$$

Wird in

$$g_n(x) = (x - x_1) \cdot g_{n-1}(x) + r_0$$

für x der Wert x_1 eingesetzt:

$$g_n(x_1) = (x_1 - x_1) \cdot g_{n-1}(x_1) + r_0,$$

so folgt

$$g_n(x_1) = r_0.$$

Satz

▌ Der Rest r_0 ist gleich dem Wert des Polynoms an der Stelle x_1.

Es kann also das HORNERsche Schema sehr zweckmäßig zur Aufstellung einer Wertetabelle der Funktionsgleichung $y = g_n(x)$ herangezogen werden.

BEISPIEL

1. (Fortsetzung):

   Es ist $g_4(3) = 3$.

Besonders bewährt sich das HORNERsche Schema, wenn die Koeffizienten und der Wert x_1 nicht ganzzahlig sind.

BEISPIEL

2. Es ist

$$g_4(x) = 1{,}25x^4 - 2{,}71x^3 + 1{,}41x + 3{,}21$$

für $x = 0{,}91$ zu berechnen.

Lösung:

	1,25	−2,71	0	1,41	3,21	$s_4 = 3{,}16$
		1,14	−1,43	−1,30	0,10	
0,91	1,25	−1,57	−1,43	0,11	3,31	$s_3 = -1{,}64$

Kontrolle: $3{,}16 + (0{,}91 - 1) \cdot (-1{,}64) = 3{,}31$.

Demnach ist

$$g_4(x) = (x - 0{,}91)(1{,}25x^3 - 1{,}57x^2 - 1{,}43x + 0{,}11) + 3{,}31,$$

$$\underline{\underline{g_4(0{,}91) = 3{,}31}}.$$

Ergibt sich $g_n(x_1) = 0$, ist also $r_0 = 0$, so heißt dieser Wert x_1 **Nullstelle des Polynoms** und stellt eine Wurzel der Gleichung $g_n(x) = 0$ bzw. eine Nullstelle der durch $y = g_n(x)$ gegebenen Funktion dar.

Satz

Hat ein Polynom n-ten Grades die Nullstelle x_1, so läßt es sich als Produkt aus dem Linearfaktor $(x - x_1)$ und dem entsprechenden Polynom $(n - 1)$-ten Grades darstellen.
Aus $g_n(x_1) = 0$ folgt $g_n(x) = (x - x_1) \cdot g_{n-1}(x)$.

BEISPIEL

3. Es ist

$$g_4(x) = x^4 - 3x^3 - 12x^2 + 52x - 48$$

als Produkt mit dem Linearfaktor $(x - 2)$ darzustellen.

Lösung:

	1	−3	−12	52	−48	$s_4 = -10$
		2	−2	−28	48	
2	1	−1	−14	24	0	$s_3 = 10$

Kontrolle:
$-10 + (2 - 1) \cdot 10 = 0$.

Daraus folgt:

$$\underline{\underline{g_4(x) = (x - 2)(x^3 - x^2 - 14x + 24)}}$$

und

$$g_4(2) = 0, \quad \text{also } x = 2 \text{ Nullstelle.}$$

Entwicklung eines Polynoms an der Stelle $x = x_1$

Die einmalige Anwendung des Hornerschen Schemas führte auf

$$g_n(x) = (x - x_1) \cdot g_{n-1}(x) + r_0.$$

Nun soll das Polynom $g_{n-1}(x)$ in gleicher Weise behandelt werden, so daß sich dafür

$$g_{n-1}(x) = (x - x_1) \cdot g_{n-2}(x) + r_1$$

ergibt. Damit ist dann

$$g_n(x) = (x - x_1)\,[(x - x_1) \cdot g_{n-2}(x) + r_1] + r_0 =$$
$$= (x - x_1)^2 \cdot g_{n-2}(x) + r_1(x - x_1) + r_0.$$

Wird das Polynom $g_{n-2}(x)$ genauso behandelt, so folgt

$$g_n(x) = (x - x_1)^3 \cdot g_{n-3}(x) + r_2(x - x_1)^2 + r_1(x - x_1) + r_0.$$

Ein Ende wird diese fortschreitende Entwicklung finden, wenn schließlich ein Polynom $g_0(x)$ nullten Grades, also eine Konstante, übrigbleibt. Das gegebene Polynom $g_n(x)$ ist dann an der Stelle $x = x_1$ *entwickelt:*

$$g_n(x) = r_n(x - x_1)^n + r_{n-1}(x - x_1)^{n-1} + \cdots + r_1(x - x_1) + r_0.$$

Die praktische Durchführung der Rechnung erfolgt durch Fortsetzung des HORNERschen Schemas, wobei das sich jeweils als letzter Wert ergebende r_i vom nächsten Zyklus auszuschließen ist.

BEISPIEL

4. Es ist $g_4(x) = 3x^4 + 20x^3 + 46x^2 + 40x + 3$ an der Stelle $x = -2$ zu entwickeln.

Lösung:

	3	20	46	40	3		$s_4 = 112$	
		-6	-28	-36	-8			Kontrolle:
-2	3	14	18	4	$-5 = r_0$		$s_3 = 39$	$112 + (-2-1) \cdot 39 = -5$
		-6	-16	-4				
-2	3	8	2	$0 = r_1$			$s_2 = 13$	$39 + (-2-1) \cdot 13 = 0$
		-6	-4					
-2	3	2	$-2 = r_2$				$s_1 = 5$	$13 + (-2-1) \cdot 5 = -2$
		-6						
-2	3	$-4 = r_3$					$s_0 = 3$	$5 + (-2-1) \cdot 3 = -4$
-2	$3 = r_4.$							

Somit ist

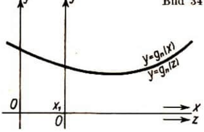
$$\underline{\underline{g_4(x) = 3(x+2)^4 - 4(x+2)^3 - 2(x+2)^2 - 5.}}$$

Wird eine derartige Entwicklung an der Funktionsgleichung $y = g_n(x)$ vorgenommen und anschließend für den Term $(x - x_1)$ eine neue Variable z eingeführt:

$$z = x - x_1,$$

so entspricht der Übergang von $y = g_n(x)$ auf $y = g_n(z)$ einer Parallelverschiebung der y-Achse um x_1, wenn dabei die z-Achse so auf die x-Achse gelegt wird, daß entsprechende Werte zusammenfallen (Bild 34).

Bild 34



Umgekehrt läßt sich genauso jedes nach $(x - x_1)$ entwickelte Polynom

$$g_n(x - x_1) = a_n(x - x_1)^n + a_{n-1}(x - x_1)^{n-1} + \cdots + a_1(x - x_1) + a_0$$

nach Potenzen von x selbst, also an der Stelle $x = 0$ entwickeln. Dazu ist eine Hilfsvariable z in der Form

$$x - x_1 = z \quad \text{bzw.} \quad x = z + x_1$$

einzuführen, und dann

$$g_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

an der Stelle $z = -x_1$ zu entwickeln, also mit Potenzen von $z + x_1 = x$ darzustellen.

BEISPIEL

5. Es ist $(x + 1)^3 - 3(x + 1)^2 + 5(x + 1) + 2$ nach Potenzen von x zu entwickeln.

Lösung: Mit $z = x + 1$ ist $z^3 - 3z^2 + 5z + 2$ an der Stelle $z = 1$ zu entwickeln:

	1	−3	5	2
		1	−2	3
1	1	−2	3	5
		1	−1	
1	1	−1	2	
		1		
1	1	0		
1	1.			

$s_3 = 5$

$5 + (1 - 1) \cdot 2 = 5$

$s_2 = 2$

$2 + (1 - 1) \cdot 0 = 0$

$s_1 = 0$

$0 + (1 - 1) \cdot 0 = 0$

$s_0 = 0$

Somit ist

$$\underline{\underline{(x + 1)^3 - 3(x + 1)^2 + 5(x + 1) + 2 = x^3 + 2x + 5.}}$$

Im letzten Beispiel folgte aus dem Polynom $g_3(z)$ das von x^2 freie Polynom $g_3(x)$. Bei der Auflösung von Gleichungen höheren Grades wird häufig von einer derartigen Transformation, bei der die zweithöchste Potenz der neu eingeführten Variablen verschwindet, Gebrauch gemacht. Es ist zu untersuchen, wie in $z = x - x_1$ das x_1 gewählt werden muß, damit in $g_n(z)$ die Potenz z^{n-1} nicht mehr auftritt, ihr Koeffizient also den Wert Null hat (*reduziertes Polynom*). Aus

$$g_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

wird mit $z = x - x_1$, also $x = z + x_1$

$$\begin{aligned} g_n(z) &= a_n(z + x_1)^n + a_{n-1}(z + x_1)^{n-1} + \cdots + a_1(z + x_1) + a_0 = \\ &= a_n z^n + n \cdot a_n x_1 z^{n-1} + \cdots \\ &\qquad\quad + a_{n-1} z^{n-1} \qquad + \cdots \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\quad + \cdots = \\ &= a_n z^n + (n \cdot a_n x_1 + a_{n-1}) z^{n-1} + \cdots. \end{aligned}$$

Der Koeffizient von z^{n-1} verschwindet für

$$\boxed{x_1 = -\frac{a_{n-1}}{n \cdot a_n}} \tag{28}$$

BEISPIEL

6. In das Polynom $1{,}20x^3 - 4{,}50x^2 + 7{,}19x - 1{,}20$ ist eine neue Variable z so einzuführen, daß $g_3(z)$ kein Glied mit z^2 enthält.

   Lösung:

   Nach Formel (28) ist $x_1 = \frac{4{,}5}{3 \cdot 1{,}2} = \frac{5}{4} = 1{,}25.$

	1,20	−4,50	7,19	−1,20
		1,50	−3,75	4,30
1,25	1,20	−3,00	3,44	3,10
		1,50	−1,875	
1,25	1,20	−1,50	1,565	
		1,50		
1,25	1,20	0		
1,25	1,20			

$$s_3 = 2{,}69$$
$$2{,}69 + 0{,}25 \cdot 1{,}64 = 3{,}10$$
$$s_2 = 1{,}64$$
$$1{,}64 - 0{,}25 \cdot 0{,}30 = 1{,}565$$
$$s_1 = -0{,}30$$

   Es ist $\underline{\underline{g_3(z) = 1{,}20z^3 + 1{,}565z + 3{,}10.}}$

Ergibt die Entwicklung eines Polynoms an einer Stelle x_1

$$r_0 = r_1 = \cdots = r_{i-1} = 0, \quad r_i \neq 0 \quad (i \leqq n),$$

so läßt sich $g_n(x)$ in der Produktform

$$g_n(x) = (x - x_1)^i \cdot g_{n-i}(x)$$

darstellen. Ein derartiges x_1 wird *i-fache Nullstelle* genannt. Die Koeffizienten von $g_{n-i}(x)$ können der Zeile des HORNERschen Schemas entnommen werden, deren letztes Glied r_{i-1} ist.

BEISPIEL

7. Es ist das Polynom

$$g_5(x) = x^5 - 15x^3 + 10x^2 + 60x - 72$$

   auf die Vielfachheit der Nullstelle $x_1 = 2$ hin zu untersuchen und als Produkt mit der entsprechenden Potenz von $(x - 2)$ darzustellen.

Lösung:

	1	0	−15	10	60	−72	
		2	4	−22	−24	72	$-16 + 1 \cdot 16 = 0$
2	1	2	−11	−12	36	0	
		2	8	−6	−36		$16 + 1 \cdot (-16) = 0$
2	1	4	−3	−18	0		
		2	12	18			$-16 + 1 \cdot 16 = 0$
2	1	6	9	0			
		2	16				$16 + 1 \cdot 9 = 25$
2	1	8	25				

$x_1 = 2$ ist dreifache Nullstelle.

Produktdarstellung: $g_5(x) = (x-2)^3 (x^2 + 6x + 9)$

$$\underline{\underline{g_5(x) = (x-2)^3 (x+3)^2.}}$$

Aus der Produktdarstellung folgt $x_2 = -3$ als zweifache Nullstelle.

AUFGABEN

Es sind die Werte des Polynoms $g_n(x)$ an den Stellen x_1 und x_2 zu berechnen:

460. $g_3(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 2;\quad x_1 = 2;\quad x_2 = -3$
461. $g_3(x) = 2x^3 - 3x - 1;\quad x_1 = -1;\quad x_2 = 3$
462. $g_4(x) = x^4 - 2x^2 + x + 2;\quad x_1 = -2;\quad x_2 = -3$
463. $g_2(x) = 3{,}7x^2 - 4{,}56x + 7{,}92;\quad x_1 = 2{,}8;\quad x_2 = -4{,}2$
464. $g_2(x) = 0{,}38x^2 - 0{,}564x + 0{,}692;\quad x_1 = 1{,}8;\quad x_2 = -4{,}7$
465. $g_3(x) = 4{,}9x^3 - 3{,}87x^2 + 5{,}694x - 2{,}687;\quad x_1 = 1{,}3;\quad x_2 = -2{,}7$
466. $g_3(x) = 0{,}8x^3 + 1{,}354x - 2{,}394;\quad x_1 = 1{,}7;\quad x_2 = -1{,}9$
467. $g_4(x) = 1{,}2x^4 - 2{,}74x^3 + 3{,}98x^2 - 4{,}561x - 4{,}5618;\quad x_1 = 2{,}7;\quad x_2 = -4{,}3$
468. $g_4(x) = 3{,}6x^4 - 2{,}54x^2 - 2{,}19736;\quad x_1 = 1{,}1;\quad x_2 = -1{,}5$

Für die angegebenen Funktionen ist eine Wertetabelle aufzustellen:

469. $\{(x;\, y) \mid y = x^3 - 3x^2 - 24x + 1\}\qquad x \in \{-3;\, -2;\, \ldots;\, 4;\, 5\}$
470. $\{(x;\, y) \mid y = x^3 - 9x^2 + 24x - 1\}\qquad x \in \{-1;\, 0;\, 1;\, \ldots;\, 6;\, 7\}$
471. $\{(x;\, y) \mid y = x^4 - 3x^2 + 3x + 2\}\qquad x \in \{-3;\, -2;\, \ldots;\, 2;\, 3\}$

Es sind die folgenden Polynome $g_n(x)$ als Produkte mit dem Linearfaktor $x - x_1$ darzustellen:

472. $g_3(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4;\quad x_1 = 2$
473. $g_4(x) = x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 9x + 9;\quad x_1 = -3$
474. $g_4(x) = x^4 - 3x^2 + 3x + 2;\quad x_1 = -2$

Die folgenden Polynome sind an der Stelle x_1 zu entwickeln:

475. $g_3(x) = 3x^3 - 13x^2 + 14x + 1;\quad x_1 = 2$
476. $g_3(x) = 4x^3 - 41x^2 + 140x - 159;\quad x_1 = 3$
477. $g_4(x) = 2x^4 + 16x^3 + 45x^2 + 52x + 25;\quad x_1 = -2$
478. $g_4(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 5;\quad x_1 = 1$

Es sind nach Potenzen von x zu entwickeln:

479. $g_3(x) = 3(x+2)^3 - 5(x+2)^2 + 2(x+2) + 4$
480. $g_3(x) = 2(x-3)^3 + 3(x-3)^2 + 4$
481. $g_3(x) = 2(x+1{,}1)^3 + 2{,}6(x+1{,}1)^2 + 3{,}46(x+1{,}1) + 5{,}322$
482. $g_4(x) = (x+3)^4$

Wie lauten die reduzierten Polynome für:

483. $g_3(x) = x^3 - 3x^2 + x + 4$
484. $g_3(x) = 2x^3 + 12x^2 + 19x + 6$
485. $g_3(x) = x^3 - 9x^2 + 27x - 22$
486. $g_3(x) = x^3 - 1{,}5x^2 + 2{,}1x + 1{,}4$
487. $g_3(x) = x^3 - 3{,}6x^2 + 5{,}2x - 1{,}3$?

Welche Vielfachheit hat die Nullstelle x_1 des Polynoms $g_n(x)$? Wie lautet die entsprechende Produktdarstellung?

488. $x_1 = 2;\quad g_3(x) = x^3 + x^2 - 10x + 8$
489. $x_1 = -1;\quad g_3(x) = x^3 - x^2 - 5x - 3$
490. $x_1 = 2;\quad g_4(x) = x^4 - 4x^3 - 5x^2 + 36x - 36$
491. $x_1 = 1$ und $x_2 = 2;\quad g_5(x) = x^5 - 7x^4 + 19x^3 - 25x^2 + 16x - 4$

18.2. Fundamentalsatz der Algebra

Im folgenden soll untersucht werden, wieviel Wurzeln eine algebraische Gleichung n-ten Grades

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \quad (a_n \neq 0;\quad a_i \in R;\quad n \in N)$$

im Bereich der komplexen Zahlen aufweist. Die Lösungsmenge einer in dieser Form gegebenen linearen Gleichung besteht grundsätzlich aus einem Element, während die einer quadratischen Gleichung im Bereich der komplexen Zahlen aus zwei (eventuell gleichen) Elementen besteht. Vermutlich wird nun allgemein eine Gleichung n-ten Grades n Wurzeln aufweisen. Ehe ein derartiger Satz formuliert wird, sei zunächst der von C. F. Gauss 1799 in seiner Dissertation erstmalig bewiesene **Fundamentalsatz der Algebra** angeführt:

> Jede algebraische Gleichung n-ten Grades mit einer Variablen
>
> $$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$
>
> hat im Bereich der komplexen Zahlen mindestens eine Wurzel.

Der vollständige Beweis kann hier nicht aufgestellt werden. Für Gleichungen, deren Grad n ungerade ist, ergibt sich ein einfacher Nachweis für die Richtigkeit dieses Satzes bei der Untersuchung des Verhaltens der durch die Funktionsgleichung

$$y = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

gegebenen Funktion für große Absolutwerte von x. Dazu sei die Funktionsgleichung auf die Form

$$y = a_n x^n\left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \cdots + \frac{a_1}{a_n x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n x^n}\right)$$

gebracht. Wenn $|x|$ immer größere Werte annimmt, so werden die Beträge von $\frac{a_{n-1}}{a_n x}, \ldots, \frac{a_0}{a_n x^n}$ klein gegenüber Eins, sie streben gegen Null. Für große $|x|$ ist also

$$y \approx a_n x^n$$

und damit wird, ungerades n vorausgesetzt, y entgegengesetzte Vorzeichen annehmen, je nachdem x mit absolut großen negativen oder positiven Werten belegt wird. Infolge der Stetigkeit muß dann aber mindestens ein reelles x existieren, für das y verschwindet, an dessen Stelle also die der Funktion entsprechende Kurve die x-Achse schneidet. Bei ungeradzahligem n muß also die Gleichung mindestens eine reelle Wurzel aufweisen. Für geradzahliges n kann eine entsprechende Folgerung nicht gezogen werden, da y für absolut große $x \lessgtr 0$ stets Werte gleichen Vorzeichens annimmt, und deshalb nicht mit Sicherheit auf die Existenz von Schnittpunkten der Kurve mit der x-Achse geschlossen werden kann.

Wenn also jede Gleichung n-ten Grades mindestens eine Wurzel x_1 aufweist, dann muß sich das auf der linken Seite der Gleichung stehende Polynom n-ten Grades als Produkt aus dem Linearfaktor $(x - x_1)$ und dem entsprechenden Polynom $(n - 1)$-ten Grades darstellen lassen:

$$(x - x_1)\,(b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1 x + b_0) = 0 \quad (b_{n-1} = a_n).$$

Die Belegung der linken Seite mit $x = x_1$ ergibt die auf Grund der angenommenen Bedeutung des x_1 zu erwartende wahre Aussage. Das Verschwinden der linken Seite kann nun aber auch Folge des Nullwerdens des zweiten Faktors sein. So liegt mit

$$b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1 x + b_0 = 0$$

jetzt eine Gleichung $(n - 1)$-ten Grades vor, auf die wiederum der Fundamentalsatz zutrifft, für die also mindestens eine Wurzel x_2 existiert, die nicht unbedingt von x_1 verschieden ist. Es muß sich demnach ein Faktor $(x - x_2)$ abspalten lassen. Wird diese Überlegung fortgesetzt, so kann schließlich die in der allgemeinen Form gegebene Gleichung n-ten Grades in die **Produktform**

$$a_n(x - x_1)\,(x - x_2) \cdots (x - x_n) = 0$$

überführt werden. Daraus folgt unmittelbar der Satz:

Satz

Eine algebraische Gleichung n-ten Grades mit einer Variablen hat im Bereich der komplexen Zahlen stets n Wurzeln.

Über die Art der Wurzeln sagt die Produktform nichts aus. Sie können teilweise reell oder komplex, voneinander verschieden oder gleich sein. Tritt ein Wert x_k mit der Vielfachheit λ als Wurzel auf, so wird er als *λ-fache Wurzel* bezeichnet.

18.3. Eigenschaften der Wurzeln einer algebraischen Gleichung

In diesem Abschnitt sollen noch einige Eigenschaften der Wurzeln algebraischer Gleichungen n-ten Grades herausgestellt werden, die für das praktische Lösen derartiger Gleichungen von Bedeutung sein können.

Zweckmäßigerweise werden zunächst die zu lösenden Gleichungen durch Division mit a_n in ihre Normalform überführt, bei der also der Koeffizient der höchsten Potenz von x die Eins ist. Im weiteren Verlauf sei daher stets das Polynom in der Form

$$g_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

angenommen.
Ohne Beweis sei hier der Satz angeführt:

Satz

Ist eine komplexe Zahl $a + b\,\mathrm{j}$ Wurzel einer algebraischen Gleichung mit reellen Koeffizienten, so ist es auch die dazu konjugiert komplexe Zahl $a - b\,\mathrm{j}$.

Komplexe Zahlen treten also grundsätzlich nur paarweise auf. Aus diesem Satz folgt unmittelbar, daß algebraische Gleichungen mit ungeradzahligem Grad stets eine ungerade Anzahl reeller Wurzeln aufweisen müssen. So können beispielsweise bei einer Gleichung dritten Grades zwei Möglichkeiten bezüglich der Beschaffenheit ihrer Wurzeln eintreten:

a) drei reelle Wurzeln (eventuell vollständig oder teilweise gleich),

b) eine reelle Wurzel und ein Paar konjugiert komplexe Wurzeln.

Bei Gleichungen geraden Grades hingegen treten reelle Wurzeln, falls sie überhaupt existieren, stets in gerader Anzahl auf.

Satz

Nimmt für zwei verschiedene x-Werte $g_n(x)$ Werte mit ungleichen Vorzeichen an, so muß zwischen diesen beiden x eine reelle Nullstelle liegen.

Von dieser Tatsache wurde schon beim Existenznachweis einer reellen Wurzel bei algebraischen Gleichungen mit ungeradzahligem Grad Gebrauch gemacht.
Je nach Art des Vorzeichens des absoluten Gliedes a_0 lassen sich die folgenden Fallunterscheidungen anstellen.

$a_0 < 0$

Grad ungeradzahlig: Mindestens eine reelle Wurzel muß im Bereich $x > 0$ liegen; Grad geradzahlig: Es existieren mindestens je eine reelle Wurzel im Bereich $x < 0$ und $x > 0$;

$a_0 > 0$

Grad ungeradzahlig: Mindestens eine reelle Wurzel muß im Bereich $x < 0$ liegen; Grad geradzahlig: In diesem Fall läßt sich keine Aussage über die Existenz reeller Wurzeln machen;

$a_0 = 0$

Aus der in diesem Fall möglichen Produktdarstellung

$$x(x^{n-1} + a_{n-1}x^{n-2} + \ldots + a_2 x + a_1) = 0$$

ergibt sich grundsätzlich $x_1 = 0$ als Wurzel. Sind darüber hinaus auch $a_1 = a_2 = = \ldots = a_{k-1} = 0$, $a_k \neq 0$ $(k < n)$, läßt sich also x^k ausklammern, so ist $x_1 = 0$ eine k-fache Nullstelle.

Eine Begründung für diese Aussagen läßt sich aus der Stetigkeit der durch die Funktionsgleichung $y = g_n(x)$ gegebenen Funktion, ihrem Verhalten für gegen $+\infty$ bzw. $-\infty$ strebendes x sowie aus $a_0 = g_n(0)$ leicht finden.

Der graphischen Darstellung der Funktion lassen sich zumindest angenähert die reellen Nullstellen entnehmen. Schnittpunkten der Kurve mit der x-Achse entsprechen dabei einfache Wurzeln der Gleichung, während Berührungspunkte auf mehrfache Wurzeln hinweisen.

18.4. Algebraische Gleichungen dritten Grades

Im Sonderfall $n = 3$ liegt mit

$$x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

eine algebraische Gleichung dritten Grades, auch kubische Gleichung genannt, vor. Für diese Gleichung wurden von Cardano[1]) Lösungsformeln angegeben, die aber für den praktischen Gebrauch zu aufwendig sind, so daß sie im Rahmen dieses Lehrbuches nicht behandelt werden sollen. Hier soll auf Verfahren eingegangen werden, die den Erfordernissen der praktischen Ingenieurtätigkeit Genüge tun.

18.4.1. Wurzelsätze des Vieta

Sind x_1, x_2 und x_3 Wurzeln der gegebenen kubischen Gleichung, so gilt nach den vorangestellten allgemeinen Betrachtungen

$$x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3).$$

Wird die rechte Seite dieser Identität ausmultipliziert und nach fallenden Potenzen von x geordnet

$$x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + \\ + x_2x_3)x - x_1x_2x_3,$$

so ergibt der Vergleich der Koeffizienten entsprechender Potenzen von x die

Wurzelsätze des Vieta für kubische Gleichungen

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= -a_2 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 &= a_1 \\ x_1x_2x_3 &= -a_0 \end{aligned}} \qquad (29)$$

[1]) Vgl. S. 98

18.4.2. Sonderfälle der kubischen Gleichung

An den Anfang der Ausführungen zur praktischen Lösung kubischer Gleichungen sollen einige Sonderfälle gestellt werden. Im Fall $a_2 = a_1 = 0$, $a_0 \neq 0$ nimmt die Gleichung die einfache Form

$$x^3 + a_0 = 0$$

an. Bereits in 11.7. wurde ein möglicher Lösungsweg angegeben, auf den hier nicht noch einmal eingegangen werden soll. Grundsätzlich läßt sich jede Gleichung dieser Art auf die Grundform

$$x^3 - 1 = 0$$

zurückführen. Dazu wird die gegebene Gleichung durch $(-a_0)$ dividiert

$$\frac{x^3}{-a_0} - 1 = 0$$

und eine neue Variable z eingeführt:

$$z = \frac{x}{-\sqrt[3]{a_0}}, \text{ wenn } a_0 > 0; \qquad z = \frac{x}{\sqrt[3]{-a_0}}, \text{ wenn } a_0 < 0.$$

Für die so entstehende Gleichung

$$z^3 - 1 = 0$$

läßt sich sofort $z_1 = 1$ als Wurzel angeben. Aus der unter Zuhilfenahme des Horner-schen Schemas

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & 0 & -1 \\ & & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

zu bildenden quadratischen Gleichung

$$z^2 + z + 1 = 0$$

ergeben sich die beiden restlichen Wurzeln

$$z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\mathrm{j}}{2}\sqrt{3} \quad \text{und} \quad z_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\mathrm{j}}{2}\sqrt{3}.$$

Wurzeln der Ausgangsgleichung $x^3 + a_0 = 0$ sind danach

$$x_i = \begin{cases} -\sqrt[3]{a_0} \cdot z_i, & \text{wenn } a_0 > 0 \\ \sqrt[3]{-a_0} \cdot z_i, & \text{wenn } a_0 < 0. \end{cases} \qquad i \in \{1; 2; 3\}$$

Weist die kubische Gleichung kein Absolutglied auf ($a_0 = 0$)

$$x^3 + a_2x^2 + a_1x = 0,$$

so kann, wie schon bei der allgemeinen Behandlung erwähnt, sofort eine Faktorenzerlegung vorgenommen werden:

$$x(x^2 + a_2x + a_1) = 0.$$

Eine Wurzel lautet in diesem Fall immer $x_1 = 0$, während die beiden anderen Wurzeln aus der quadratischen Gleichung

$$x^2 + a_2x + a_1 = 0$$

ermittelt werden können. Ist zusätzlich noch $a_1 = 0$, so kann aus

$$x^2(x + a_2) = 0$$

sofort

$$\{0;\ 0;\ -a_2\}$$

als Lösungsmenge abgelesen werden, wobei durchaus auch noch $a_2 = 0$ sein kann. Die letzte der drei Formeln der VIETAschen Wurzelsätze (29) kann zum Auffinden der Wurzeln einer kubischen Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten herangezogen werden. Es gilt:

Satz

Hat eine kubische Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten

$$x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

eine ganzzahlige Wurzel x_1, dann muß sie ein Teiler des absoluten Gliedes a_0 sein, so daß der Quotient a_0/x_1 wiederum ganzzahlig ist.

Der Beweis dieses Satzes soll indirekt geführt werden. Angenommen, der ganzzahlige Wert $x_1 \neq 0$ ist kein Teiler von a_0, also a_0/x_1 keine ganze Zahl. Dann ist die aus

$$x_1^3 + a_2x_1^2 + a_1x_1 + a_0 = 0$$

gewonnene Aussage

$$x_1^2 + a_2x_1 + a_1 = -\frac{a_0}{x_1}$$

falsch, ist doch auf Grund der vorausgesetzten Ganzzahligkeit von a_2, a_1 und x_1 die linke Seite ganzzahlig.
Die in dem angeführten Satz vorausgesetzte Existenz einer ganzzahligen Wurzel ist keinesfalls grundsätzlich für jede kubische Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten gesichert. Sie muß durch Probieren nachgeprüft werden.

BEISPIEL

Es ist die Lösungsmenge der Gleichung

$$x^3 - 4x^2 - 3x + 18 = 0$$

zu bestimmen.

Lösung: Als ganzzahlige Wurzeln kommen nur die Teiler des absoluten Gliedes, also ± 1; ± 2; ± 3; ± 6; ± 9 und $\pm\ 18$ in Frage. Die Werte ± 1 scheiden aus, da bei der Belegung der Variablen mit diesen Werten offensichtlich falsche Aussagen entstehen. Für die anderen Teiler soll das HORNERsche Schema herangezogen werden:

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -4 & -3 & 18 \\
 & & 2 & -4 & -14 \\
\hline
2 & 1 & -2 & -7 & \underline{4} \\
\\
 & & -2 & 12 & -18 \\
\hline
-2 & 1 & -6 & 9 & \underline{0}.
\end{array}$$

$12 + 1 \cdot (-8) = 4$

$x_1 = 2$ ist keine Wurzel

$12 + (-3) \cdot 4 = 0$

Damit ist $x_1 = -2$ Wurzel der Gleichung.

Aus dem für $x = -2$ aufgestellten HORNERschen Schema ergibt sich als quadratische Gleichung für x_2 und x_3:

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

mit $x_2 = x_3 = 3$.

Lösungsmenge: $\underline{\underline{\{-2;\ 3;\ 3\}}}$.

18.4.3. Allgemeiner Fall

Liegt keiner der erwähnten Sonderfälle vor und ist $a_2 \neq 0$, wird zunächst zweckmäßig, wie in 18.1. über das HORNERsche Schema beschrieben, eine neue Variable z so eingeführt, daß die neue Gleichung kein quadratisches Glied aufweist (reduzierte Gleichung). Nach (28) ist dazu das Polynom an der Stelle $(-a_2/3)$ zu entwickeln und $x + a_2/3 = z$ zu setzen.

Für die so entstehende Gleichung

$$z^3 + r_1 z + r_0 = 0$$

können die Sonderfälle

a) $r_1 = 0;\quad r_0 \neq 0,$

b) $r_0 = 0;\quad r_1$ beliebig

eintreten. Die Gleichung kann dann nach den weiter vorn angegebenen Gesichtspunkten gelöst werden. Im Fall b) ist $x_1 = -a_2/3$ Wurzel der Ausgangsgleichung.

BEISPIEL

1. Es ist $\{x \mid x^3 + 4{,}56x^2 + 8{,}28x + 5{,}56 = 0\}$ zu bestimmen.

   Lösung:

   1. Übergang zur reduzierten Gleichung:

$$z = x + \frac{4{,}56}{3} = x + 1{,}52$$

	1	4,56	8,28	5,56	
		$-1{,}52$	$-4{,}62$	$-5{,}56$	$19{,}40 - 2{,}52 \cdot 7{,}70 = 0$
$-1{,}52$	1	3,04	3,66	0	
		$-1{,}52$	$-2{,}31$		$7{,}70 - 2{,}52 \cdot 2{,}52 = 1{,}35$
$-1{,}52$	1	1,52	1,35		
		$-1{,}52$			
$-1{,}52$	1	0			
	1				reduz. Gleichung: $z^3 + 1{,}35z = 0$.

   2. Lösung der reduzierten Gleichung:

$$z^3 + 1{,}35z = 0 \quad \text{(kein absolutes Glied!)}$$

$$z(z^2 + 1{,}35) = 0$$

$$z_1 = 0; \quad z_{2;3} = \pm \mathrm{j}\sqrt{1{,}35}.$$

   Lösungsmenge der Ausgangsgleichung:

$$\underline{\underline{\{-1{,}52;\ -1{,}52 + \mathrm{j}\sqrt{1{,}35};\ -1{,}52 - \mathrm{j}\sqrt{1{,}35}\}}}.$$

Bevor nun im Fall $r_1 \cdot r_2 \neq 0$ ein graphisches Lösungsverfahren zu Hilfe genommen wird, soll eine noch einfach durchzuführende Untersuchung bezüglich einer eventuell existierenden Doppelwurzel vorangestellt werden. Aus der ersten und zweiten Formel des VIETAschen Wurzelsatzes (29) folgt unter der Voraussetzung $z_1 = z_2$ und unter Berücksichtigung, daß für die vorliegende Gleichung $a_2 = 0$ und $a_1 = r_1$ sind,

$$2z_1 + z_3 = 0 \quad \text{und} \quad z_1^2 + 2z_1z_3 = r_1.$$

Wird daraus z_3 eliminiert, so entsteht mit

$$3z_1^2 + r_1 = 0$$

eine reinquadratische Gleichung, die von der eventuell vorhandenen Doppelwurzel erfüllt werden muß. Da diese Gleichung nur im Fall $r_1 \leqq 0$ die reellen Wurzeln

$$\sqrt{\frac{-r_1}{3}} \quad \text{und} \quad -\sqrt{\frac{-r_1}{3}}$$

aufweist, kann eine Doppelwurzel der kubischen Gleichung nur bei negativem Absolutglied auftreten. Durch Probe ist zu bestimmen, ob überhaupt einer der beiden Werte die kubische Gleichung erfüllt und so als Doppelwurzel anzusehen ist. Dritte Wurzel ist dann $z_3 = -2z_1$.

BEISPIEL

2. $\{x \mid x^3 - 1{,}800x^2 - 1{,}350x + 2{,}700 = 0\}$

Lösung:

1. Übergang zur reduzierten Gleichung:

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -1{,}8 & -1{,}35 & 2{,}7 \\
 & & 0{,}6 & -0{,}72 & -1{,}242 \\
\hline
0{,}6 & 1 & -1{,}2 & -2{,}07 & 1{,}458 \\
 & & 0{,}6 & -0{,}36 & \\
\hline
0{,}6 & 1 & -0{,}6 & -2{,}43 & \\
 & & 0{,}6 & & \\
\hline
0{,}6 & 1 & 0 & & \\
\hline
 & 1 & & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
0{,}55 + 0{,}4 \cdot 2{,}27 = 1{,}458 \\[2em]
-2{,}27 - 0{,}4 \cdot 0{,}4 = -2{,}43
\end{array}
$$

reduz. Gleichung: $z^3 - 2{,}43z + 1{,}458 = 0.$

2. Lösung der reduzierten Gleichung:

$$z^3 - 2{,}43z + 1{,}458 = 0.$$

Untersuchung auf Doppelwurzel:

$$\pm\sqrt{\frac{-r_1}{3}} = \pm 0{,}9$$

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 0 & -2{,}43 & 1{,}458 \\
 & & 0{,}9 & 0{,}81 & -1{,}458 \\
\hline
0{,}9 & 1 & 0{,}9 & -1{,}62 & 0 \\
 & & 0{,}9 & 1{,}62 & \\
\hline
0{,}9 & 1 & 1{,}8 & 0. &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
0{,}028 - 0{,}1 \cdot 0{,}28 = 0 \\[2em]
0{,}28 - 0{,}1 \cdot 2{,}8 = 0
\end{array}
$$

Damit ist $z_1 = z_2 = 0{,}9$ und $z_3 = -1{,}8$.

Lösungsmenge der Ausgangsgleichung: $\underline{\underline{\{1{,}5;\ 1{,}5;\ -1{,}2\}}}$.

Weist die kubische Gleichung keine Doppelwurzel auf, so ist sie, nachdem das lineare und absolute Glied auf die rechte Seite gebracht worden sind

$$z^3 = -r_1 z - r_0,$$

in die beiden Gleichungen

$$y = z^3 \quad \text{und} \quad y = -r_1 z - r_0$$

aufzuspalten. Ihre jeweiligen Lösungsmengen sollen nun als Punktmengen in einem cartesischen Koordinatensystem wiedergegeben werden. Die so immer wieder auftretende kubische Parabel ($y = z^3$) wird dauerhaft eingezeichnet, während die der zweiten Gleichung entsprechende, von Fall zu Fall jeweils andere Gerade, nur dünn mit Bleistift einzutragen ist. Die z-Werte der aus beiden Lösungsmengen gebildeten Durchschnittsmenge, also die z-Werte der Schnittpunkte beider Kurven, sind mit den reellen Wurzeln der reduzierten Gleichung identisch und können zumindest näherungsweise abgelesen werden. Eventuell vorhandene komplexe Wurzeln lassen sich auf diese Art nicht ermitteln. Da sich aber Gerade und kubische Parabel mindestens in einem Punkt schneiden müssen, kann stets wenigstens eine reelle Wurzel abgelesen werden. Damit kann dann aber die quadratische Gleichung gebildet werden, der die beiden fehlenden Wurzeln genügen müssen.

Ihrer jeweiligen Lage entsprechend, wird die Gerade die kubische Parabel in einem Punkt (eine reelle Wurzel) oder in drei Punkten (drei reelle Wurzeln) schneiden. Wurde die Voruntersuchung bezüglich des Vorhandenseins einer Doppelwurzel nicht angestellt, so besteht noch die Möglichkeit, daß sich beide Kurven in einem Punkt berühren und in einem weiteren Punkt schneiden (Bild 35).

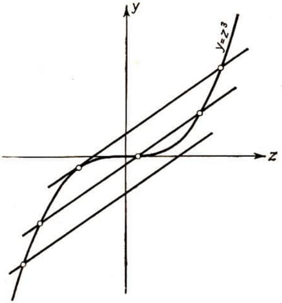


Bild 35

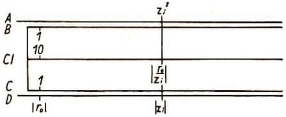


Bild 36

Mit Hilfe des Rechenstabes kann nun leicht eine Verbesserung der Näherungswerte vorgenommen werden, die dazu nur grob einer einfachen Skizze zu entnehmen sind. Nach Umformung der Gleichung in

$$z^2 + \frac{r_0}{z} = -r_1$$

wird die 1 (bzw. 10) der C-Teilung des Rechenstabes der Marke $|r_0|$ der D-Teilung gegenübergestellt. Zieht man anschließend den Läuferstrich über die Marke $|z_i|$ der D-Teilung, wobei $|z_i|$ den absoluten Betrag einer der reellen Wurzeln der Gleichung angibt, so können auf der A- und CI-Teilung die Werte z_i^2 bzw. $|r_0/z_i|$ abgelesen werden (Bild 36). Im Fall $r_0 \cdot z_i > 0$ ($r_0 \cdot z_i < 0$) muß die Summe (Differenz) dieser Werte mit $-r_1$ übereinstimmen. Für die festgestellten Näherungswerte wird diese Übereinstimmung noch nicht bestehen, läßt sich aber durch probeweises Verschieben des Läuferstriches erreichen. Der so verbesserte Näherungswert kann dann unter dem Läuferstrich auf der D-Teilung abgelesen werden.

BEISPIEL

3. $\{x \mid x^3 + 15x^2 + 64x + 78 = 0\}$

Lösung:

1. Übergang zur reduzierten Gleichung:

$$z = x + 5$$

	1	15	64	78
		-5	-50	-70
-5	1	10	14	8
		-5	-25	
-5	1	5	-11	
		-5		
-5	1	0		
	1.			

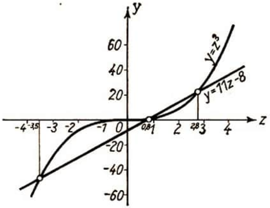


Bild 37

2. Lösung der reduzierten Gleichung

$$z^3 - 11z + 8 = 0.$$

Zerlegung in: $y = z^3$ und $y = 11z - 8$.

Aus Bild 37 werden als grobe Näherungswerte entnommen:

$$z_1 \approx -3{,}5; \quad z_2 \approx 0{,}8; \quad z_3 \approx 2{,}8.$$

Umstellung der Gleichung auf

$$z^2 + \frac{8}{z} = 11$$

und entsprechende Einstellung des Rechenstabes. Es ergeben sich

	z_1	z_2	z_3
z_i^2	13,21	0,591	8,21
$8/z_i$	$-2{,}20$	10,401	2,79
Σ	11,01	10,992	11,00
z_i	$-3{,}635$	0,769	2,865

Mit $x = z - 5$ folgt daraus als Lösungsmenge der Ausgangsgleichung:

$$\underline{\underline{\{-8{,}635; \quad -4{,}231; \quad -2{,}135\}}}.$$

Sollte die mit dem Rechenstab erzielte Genauigkeit noch nicht ausreichen, so muß anschließend eine weitere Verbesserung mit einem der in Abschnitt 19. dargestellten Näherungsverfahren vorgenommen werden.

AUFGABEN

Es sind die im Bereich der komplexen Zahlen gelegenen Wurzeln der folgenden kubischen Gleichungen zu ermitteln:

492. $x^3 - 8 = 0$
493. $x^3 + 8 = 0$
494. $x^3 - 5 = 0$
495. $x^3 - 3x^2 + 2x = 0$
496. $x^3 - 6x^2 + 13x = 0$
497. $x^3 + 5x^2 = 0$
498. $x^3 - 4x = 0$
499. $x^3 - x^2 - 41x + 105 = 0$
500. $x^3 + x^2 - 6x - 56 = 0$
501. $x^3 - 2x^2 - 23x + 150 = 0$
502. $x^3 - 4x^2 + 25x - 100 = 0$
503. $x^3 - 7x^2 + 9x - 63 = 0$
504. $x^3 - 11x^2 + 55x - 125 = 0$
505. $x^3 - 3x^2 + 3x + 7 = 0$
506. $x^3 + 6x^2 + 10{,}79x + 5{,}58 = 0$
507. $x^3 + 3{,}3x^2 + 5{,}88x + 3{,}806 = 0$
508. $x^3 - 7{,}5x^2 + 18x - 13{,}5 = 0$
509. $x^3 - 4{,}32x^2 + 14{,}64x - 23{,}2 = 0$

Die reellen Wurzeln der folgenden Gleichungen sind zu ermitteln:

510. $x^3 + 7x - 9 = 0$
511. $x^3 - 3x - 16 = 0$
512. $x^3 - 33x + 17 = 0$
513. $2x^3 - 5x - 1 = 0$
514. $x^3 - 4x^2 + 24x - 100 = 0$
515. $x^3 - 7x^2 + 9x - 61 = 0$
516. $x^3 + x^2 - 6x - 55 = 0$
517. $x^3 - 0{,}5x^2 - 0{,}5x - 1{,}5 = 0$
518. $x^3 + 1{,}8x^2 - 0{,}8x + 5{,}6 = 0$
519. $2x^3 - 1{,}28x^2 + 0{,}096x - 3{,}456 = 0$
520. $x^3 - 20x^2 + 96x - 40 = 0$
521. $x^3 - 12x^2 + 36x - 24 = 0$
522. $x^3 - 5{,}348x^2 + 9{,}294x - 5{,}283 = 0$
523. $1{,}5x^3 - 12{,}313x^2 + 20{,}855x - 29{,}439 = 0$
524. In einem Quader ist die erste Kante um 2 cm länger als die zweite und um 4 cm kürzer als die dritte. Er hat ein Volumen von 576 cm³. Wie groß sind die Kantenlängen?
525. Von den Radien dreier Kugeln ist der zweite 2 cm und der dritte 4 cm größer als der erste. Wie groß sind die Radien, wenn das Volumen der dritten Kugel den dreifachen Inhalt der beiden anderen zusammen aufweist?
526. Einer Kugel mit dem Radius 6 cm ist ein Zylinder mit dem Volumen 162π cm³ einbeschrieben. Welche Höhe hat dieser Zylinder?
527. Einer Kugel mit dem Radius 6 cm ist ein Zylinder einbeschrieben, dessen Inhalt sich wie 5:9 zu dem der Kugel verhält. Welche Höhe hat der Zylinder?
528. Eine quadratische Säule mit dem Inhalt 960 cm³ ist einer Kugel mit dem Radius 7 cm einbeschrieben. Wie hoch ist die Säule?
529. Wie tief sinkt eine Kugel mit dem Radius 20 cm aus Tannenholz ($\varrho = 0{,}56$ kg/dm³) in Wasser von 4 °C ein?

19. Näherungsverfahren zur Lösung numerischer Gleichungen

Die Lösungsmengen linearer und quadratischer Gleichungen konnten stets durch Anwendung bestimmter Verfahren bzw. Lösungsformeln in geschlossener Form ermittelt werden. Bereits bei den kubischen Gleichungen wurde ein Näherungsverfahren herangezogen, weil die Handhabung der auch für diese Gleichungen bestehenden Lösungsformeln zu umständlich ist. Gleiches gilt für Gleichungen vierten Grades. Während in diesen beiden Fällen die Näherungsverfahren lediglich zur Erleichterung des Lösungsganges herangezogen werden, so stellen sie für algebraische Gleichungen fünften und höheren Grades im allgemeinen die einzige Lösungsmöglichkeit überhaupt dar. Auch zur Lösung transzendenter Gleichungen müssen größtenteils Näherungsverfahren aufgeboten werden. Es wäre jedoch ein Irrtum, wollte man die Näherungsverfahren als zweitrangig ansehen. Wenn mit ihnen die Elemente der Lösungsmengen mit jeder gewünschten Genauigkeit ermittelt werden können, stellen sie ebenfalls exakte, völlig gleichberechtigte Lösungsverfahren dar. In den folgenden Abschnitten sollen drei numerische Verfahren dargestellt werden, mit deren Hilfe die reellen Wurzeln gegebener Gleichungen ermittelt werden können.

19.1. Graphische Ermittlung erster Näherungswerte

Grundsätzlich setzt die Anwendung eines numerischen Näherungsverfahrens die Kenntnis eines mehr oder weniger groben Näherungswertes voraus. Derartige erste Näherungen werden meist, sollten sie nicht schon anderweitig bekannt sein (Abschätzungen, Probieren usw.), graphisch ermittelt.
Hierzu können zwei Wege eingeschlagen werden:

1. Die in der Form $f(x) = 0$ gegebene Gleichung wird zur Kurvengleichung $y = f(x)$ umgewandelt, und die Abbildung

$$f = \{(x; f(x)) \mid x \in D\},$$

wobei $D \subseteqq R$ den im Körper der reellen Zahlen gelegenen Definitionsbereich von f darstellt, als Punktmenge in ein cartesisches Koordinatensystem eingezeichnet. An den Schnitt- und den Berührungspunkten der entsprechenden Kurve mit der x-Achse können dann die Näherungswerte abgelesen werden (Bild 38).

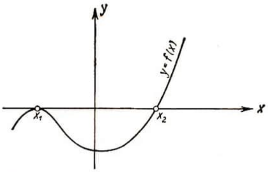


Bild 38

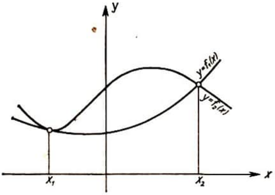


Bild 39

2. Nach der Aufspaltung der linken Seite in zwei Terme wird die gegebene Gleichung in der Form $f_1(x) = f_2(x)$ dargestellt. Aus der graphischen Darstellung der beiden Abbildungen

$$f_1 = \{(x; f_1(x)) \mid x \in D_1 \cap D_2\} \quad \text{und} \quad f_2 = \{(x; f_2(x)) \mid x \in D_1 \cap D_2\},$$

wobei D_1 und D_2 die Definitionsbereiche von f_1 bzw. f_2 kennzeichnen, lassen sich die Näherungswerte als Abszissen der Schnitt- und der Berührungspunkte beider Kurven ablesen (Bild 39). Bei der allgemeinen Lösung der kubischen Gleichung wurde bereits in dieser Weise vorgegangen.
Der zuerst angegebene Weg kann als Sonderfall des zweiten Weges angesehen werden. Es ist dort

$$f_1(x) \equiv f(x) \quad \text{und} \quad f_2(x) \equiv 0.$$

19.2. Lineares Eingabeln (regula falsi)

Dieses Verfahren war schon im Altertum den arabischen Mathematikern unter dem Namen „Regel der zwei Waagschalen“ bekannt und wird jetzt häufig als „regula falsi“ (Regel des doppelten falschen Ansatzes) bezeichnet. Durch den Namen „lineares Eingabeln“ wird die eigentliche Wirkungsweise des Verfahrens besser gekennzeichnet.

Zunächst gilt es, zwei Näherungswerte x_1 und x_2 festzulegen, von denen die Wurzel x_0 der Gleichung $f(x) = 0$ eingegabelt wird:

$$x_1 < x_0 < x_2.$$

Die $y = f(x)$ entsprechende Kurve soll nun im Intervall $[x_1; x_2]$ durch eine Sekante ersetzt werden, die innerhalb dieses Intervalls die x-Achse schneidet (Bild 40). Dazu ist vorauszusetzen, daß $f(x_1)$ und $f(x_2)$ unterschiedliche Vorzeichen aufweisen. Andernfalls ist das Verfahren nicht anwendbar. Ohne Einschränkung der Allgemeingültigkeit kann angenommen werden, daß $f(x_1)$ negativ und $f(x_2)$ positiv ist. Wird zwischen den Punkten $(x_1; f(x_1))$ und $(x_2; f(x_2))$ linear interpoliert:

$$y = f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1),$$

so ergibt sich ein verbessertes Näherungswert x_3 durch Schnitt der entsprechenden Sekante mit der x-Achse:

$$0 = f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x_3 - x_1)$$

$$\boxed{x_3 = x_1 - \frac{f(x_1) \cdot (x_2 - x_1)}{f(x_2) - f(x_1)}} \qquad (30)$$

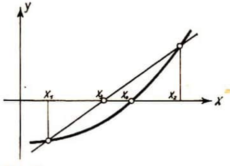


Bild 40

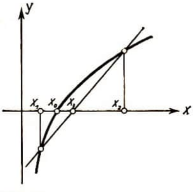


Bild 41

Je nach Krümmungsrichtung der Kurve wird dieser Wert x_3 zwischen x_1 und x_0 oder x_0 und x_2 liegen (Bild 40 und 41). Im ersten Fall stimmt das Vorzeichen von $f(x_3)$ mit dem von $f(x_1)$ und im zweiten Fall mit dem von $f(x_2)$ überein. Soll nun das Verfahren zu einer erneuten Verbesserung verwendet werden, so ist ein weiterer x-Wert heranzuziehen, der in Verbindung mit x_3 wiederum x_0 eingabelt usw.

Bei jedem Schritt wird zweckmäßigerweise meist eine Verbesserung des Näherungswertes um eine Dezimalstelle vorgenommen. Für die übersichtliche Durchführung der Rechnungen wird ein Schema etwa in der Form

x_1	x_2	$x_2 - x_1$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_2) - f(x_1)$	$\frac{f(x_1)\cdot(x_2 - x_1)}{f(x_2) - f(x_1)}$	x_3

verwendet.

BEISPIEL

Die zwischen 0,7 und 0,8 gelegene Wurzel der Gleichung $z^3 - 11z + 8 = 0$ ist durch lineares Eingabeln auf drei Dezimalen anzunähern.

Lösung:

z_1	z_2	$z_2 - z_1$	$f(z_1)$	$f(z_2)$	$f(z_2) - f(z_1)$	$\frac{f(z_1)\cdot(z_2 - z_1)}{f(z_2) - f(z_1)}$	z_3
0,7	0,8	0,1	0,64	−0,29	−0,93	−0,07	0,77
0,76	0,77	0,01	0,079	−0,013	−0,092	−0,009	0,769

Lösungsmenge: $\{0{,}769\}$.

Die Werte $f(z_i)$ werden dazu mit Hilfe des HORNERschen Schemas berechnet (die Proben führe der Leser selbst durch):

	1	0	−11	8	
		0,7	0,49	−7,36	
0,7	1	0,7	−10,51	0,64	$= f(0{,}7)$
		0,8	0,64	−8,29	
0,8	1	0,8	−10,36	−0,29	$= f(0{,}8)$
		0,76	0,578	−7,921	
0,76	1	0,76	−10,422	0,079	$= f(0{,}76)$
		0,77	0,593	−8,013	
0,77	1	0,77	−10,407	−0,013	$= f(0{,}77)$.

19.3. Newtonsches Näherungsverfahren

Während bei dem im vorhergehenden Abschnitt behandelten Näherungsverfahren lediglich Elemente der Elementarmathematik Verwendung fanden, stützt sich das zuerst von NEWTON[1]) angegebene Verfahren auf die Elemente der Differentialrechnung, setzt also deren Kenntnis voraus.

Wie beim Verfahren des linearen Eingabelns wird auch hier die Kurve in der Umgebung der einfachen Nullstelle x_0 durch eine Gerade, also die zu lösende Gleichung

[1]) ISAAC NEWTON, engl. Naturwissenschaftler, 1643 bis 1727

$f(x) = 0$ durch eine lineare Gleichung ersetzt. War es beim linearen Eingabeln eine Sekante, so findet hier die im Punkt $P(x_1; f(x_1))$ berührende Tangente Verwendung (Bild 42). Der Tangentenanstieg läßt sich mit Hilfe der Differentialrechnung als Wert der Ableitung an der Stelle x_1 angeben: $f'(x_1)$.

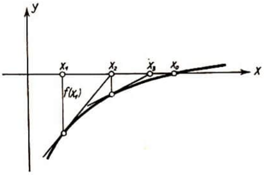


Bild 42

Die der Tangente entsprechende Funktionsgleichung ist somit

$$y = f(x_1) + f'(x_1) \cdot (x - x_1).$$

Durch Schnitt mit der x-Achse folgt daraus als verbesserter Näherungswert

$$0 = f(x_1) + f'(x_1) \cdot (x_2 - x_1)$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Der so erhaltene Wert kann wiederum als Ausgangswert einer erneuten Verbesserung verwendet werden usw.

Allgemein kann man so aus einem Näherungswert x_i mit

$$\boxed{x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}} \qquad i \in \{1; 2; \ldots; n\} \tag{31}$$

ein verbessertes x_{i+1} bilden, bis mit dem n-ten Schritt die gewünschte Genauigkeit erreicht ist.

Wie die Bilder 42 und 43 zeigen, kann die Annäherung entweder von einer Seite oder von beiden Seiten her erfolgen.

Formel (31) setzt voraus, daß die Funktion $\{(x; y) \mid y = f(x)\}$ differenzierbar ist und,

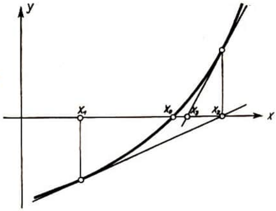


Bild 43

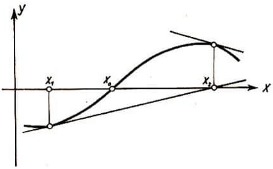


Bild 44

da nicht durch Null dividiert werden darf, ihre Ableitung für alle Näherungswerte x_i und somit für alle x einer Umgebung der Stelle x_0 von Null verschieden ist. Wie Bild 44 zeigt, ist diese Bedingung aber nicht hinreichend für die Konvergenz der Näherungswerte $x_1, x_2, \ldots, x_n$. In diesem Fall wurde x_1 nicht „nahe genug“ gewählt.

Im nächsten Abschnitt ergibt sich als hinreichende Bedingung für die Konvergenz des NEWTONschen Verfahrens:

$$\boxed{\left| \frac{f(x_i) \cdot f''(x_i)}{[f'(x_i)]^2} \right| < 1} \tag{32}$$

Formel (32) setzt die Existenz der zweiten Ableitung voraus.

An Hand eines Beispiels soll gezeigt werden, wie speziell bei algebraischen Gleichungen das NEWTONsche Verfahren in Verbindung mit dem HORNERschen Schema angewendet werden kann.

BEISPIEL

$$\{x \mid x + \sqrt{x} - 7\sqrt[4]{x} - 11 = 0\}$$

Lösung: Wird eine neue Variable

$$z = x^{\frac{1}{4}}$$

eingeführt, so entsteht eine algebraische Gleichung vierten Grades

$$f_4(z) = z^4 + z^2 - 7z - 11 = 0,$$

die bei Beschränkung ihres Variablenbereichs auf reelle $z \geqq 0$ zur anfangs gegebenen Gleichung äquivalent ist.

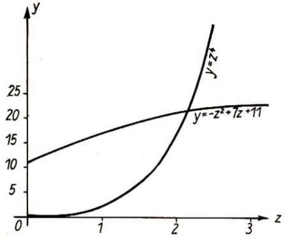


Bild 45

Aus Bild 45 kann als erster Näherungswert $z_1 = 2$ abgelesen werden. Das Polynom $f_4(z)$ ist nun an der Stelle $z_1 = 2$ zu entwickeln. Wie in Band „Analysis", 1.3.9., gezeigt wird, stehen die benötigten Werte $f'(2)$ und $f''(2)$ im angegebenen Zusammenhang mit r_1 und r_2.

	1	0	1	−7	−11	
		2	4	10	6	
2	1	2	5	3		$-5 = r_0 = f_4(2)$
		2	8	26		
2	1	4	13			$29 = r_1 = f_4'(2)$
		2	12			
2	1	6				$25 = r_2 = \frac{1}{2!} f_4''(2)$
		2				
2	1	8				
	1					

Konvergenzuntersuchung: $\left| \frac{f(2) \cdot f''(2)}{(f'(2))^2} \right| = \left| \frac{-5 \cdot 50}{29^2} \right| \approx \frac{1}{3} < 1.$

Näherungsverbesserung: $z_2 = 2 - \frac{-5}{29} = 2 + 0{,}2$

$\left(\text{von } \frac{5}{29} \text{ wurde nur die erste Dezimalstelle verwendet}\right).$

Mit $u = z - 2$ hat dann $u^4 + 8u^3 + 25u^2 + 29u - 5 = 0$ als Näherung $u_1 = 0{,}2$.

	1	8	25	29	−5
		0,2	1,64	5,328	6,8656
0,2	1	8,2	26,64	34,328	1,8656
		0,2	1,68	5,664	
0,2	1	8,4	28,32	39,992	
		0,2	1,72		
0,2	1	8,6	30,04		
		0,2			
0,2	1	8,8			
	1				

Näherungsverbesserung: $u_2 = 0{,}2 - \dfrac{1{,}8656}{39{,}992} = 0{,}2 - 0{,}05.$

Wird die nächste Transformation $v = u - 0{,}2$ durchgeführt, so hat $v^4 + 8{,}8v^3 + 30{,}04v^2 + 39{,}992v + 1{,}8656 = 0$ als Näherung $v_1 = -0{,}05$.

	1	8,8	30,04	39,992	1,8656
		−0,05	−0,4375	−1,4801	−1,9256
−0,05	1	8,75	29,6025	38,5119	−0,0600
		−0,05	−0,4350	−1,4584	
−0,05	1	8,70	29,1675	37,0535	
		−0,05	−0,4325		
−0,05	1	8,65	28,7350		
		−0,05			
−0,05	1	8,60			
	1				

Näherungsverbesserung: $v_2 = -0{,}05 - \dfrac{-0{,}06}{37{,}0535} = -0{,}05 + 0{,}00162.$

Transformation: $w = v + 0{,}05$.

Näherungswert: $w_1 = 0{,}002$.

	1	8,60	28,7350	37,0535	−0,0600
		0,002	0,0172	0,0575	0,0742
0,002	1	8,602	28,7522	37,1110	0,0142
		0,002	0,0172	0,0575	
0,002	1	8,604	28,7694	37,1685	

Aus

$$w_2 = 0{,}002 - \frac{0{,}0142}{37{,}1685} = 0{,}002 - 0{,}00038 = 0{,}00162$$

resultiert keine Veränderung der mitgeführten vierten Dezimalstelle mehr.

Mit

$$z = u + 2 \quad \text{und} \quad u = v + 0{,}2$$

ist

$$z = 2 + 0{,}2 + v$$

und

$$z_3 = 2 + 0{,}2 - 0{,}05 + 0{,}0016 = 2{,}1516.$$

Für die gegebene Gleichung folgt aus $x = z^4$ als Lösungsmenge: $\underline{\underline{\{21{,}431\}}}$.

19.4. Iteration

Eine weitere Möglichkeit zur Verbesserung eines bekannten Näherungswertes x_1 einer Wurzel x_0 der Gleichung $f(x) = 0$ ist mit dem *Verfahren der Iteration* gegeben. Wie schon beim NEWTONschen Verfahren, das in diesem Sinne auch eine Iteration darstellt, soll dabei eine schrittweise Verbesserung der Näherungswerte durch wiederholte Anwendung derselben Rechenvorschrift erreicht werden.
Zur Aufstellung dieser Iterationsvorschrift ist die gegebene Gleichung so in eine Form

$$x = \varphi(x)$$

zu überführen, daß beim Einsetzen des Näherungswertes x_1 in die rechte Seite mit $x_2 = \varphi(x_1)$ und dann mit $x_3 = \varphi(x_2)$ usw., allgemein mit

$$\boxed{x_{i+1} = \varphi(x_i)} \qquad i \in \{1; 2; \ldots; n\} \tag{33}$$

eindeutig immer bessere Näherungswerte entstehen.

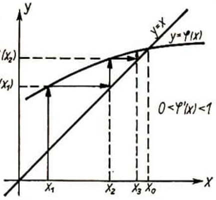


Bild 46

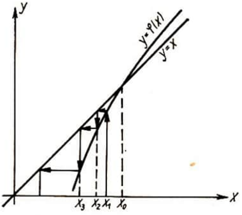


Bild 47

In Bild 46 ist die Wirkungsweise des Verfahrens zu erkennen. Ausgehend von x_1 stellt der Iterationsvorschrift zufolge die Ordinate des Punktes $P_1(x_1; \varphi(x_1))$ den nächsten Näherungswert x_2 dar. Die durch diesen Punkt laufende Parallele zur x-Achse schneidet die Gerade $y = x$ in dem Punkt, dessen Abszisse dieser neue Näherungswert x_2 ist. Mit diesem Wert wird der Vorgang wiederholt und x_3 gefunden usw. Es entsteht so die durch die Pfeile angedeutete Annäherung an den Schnittpunkt. Die x_i konvergieren von einer Seite her gegen x_0. Bild 47 und 48 lassen erkennen, daß sich $x_2, x_3, \ldots$ immer mehr von x_0 entfernen, während in Bild 49 sich die Pfeile wieder, jetzt aber

spiralförmig, dem Schnittpunkt nähern. Die x_i konvergieren von beiden Seiten her gegen x_0.
Die mit Hilfe der Iterationsvorschrift ermittelten x_i konvergieren offensichtlich nur dann gegen x_0, wenn für alle x einer Umgebung X_0 der Stelle x_0, dem Näherungsinter-

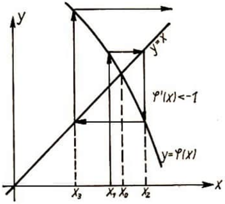


Bild 48

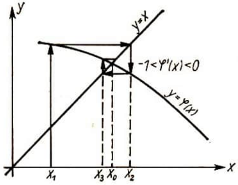


Bild 49

vall, die der Kurvengleichung $y = \varphi(x)$ entsprechende Kurve entweder nur Tangentenwinkel zwischen 0° und 45° oder zwischen 135° und 180° aufweist, wenn also $\varphi(x)$ der Bedingung

$$\boxed{|\varphi'(x)| < 1} \qquad (x \in X_0) \tag{34}$$

genügt. Diese der geometrischen Anschauung entnommene Bedingung läßt sich auch analytisch bestätigen. Es sei m der größte Wert, den $|\varphi'(x)|$ im Näherungsintervall annehmen kann:

$$m = \max |\varphi'(x)| < 1 \quad (x \in X_0).$$

Für zwei aufeinanderfolgende Näherungswerte x_i, $x_{i+1} \in X_0$, die der Iterationsvorschrift (33) genügen, stellt, wenn noch $x_0 = \varphi(x_0)$ gesetzt wird,

$$\frac{x_0 - x_{i+1}}{x_0 - x_i} = \frac{\varphi(x_0) - \varphi(x_i)}{x_0 - x_i}$$

den Differenzenquotienten der Funktion φ an der Stelle x_i dar. Da aber der absolute Betrag des Differenzenquotienten (Tangens des Sekantenwinkels) nicht größer als der im gleichen Intervall größtmögliche absolute Betrag der Ableitung (Tangens der Tangentenwinkel) sein kann, ist

$$\left| \frac{x_0 - x_{i+1}}{x_0 - x_i} \right| \leqq m < 1$$

und somit

$$|x_0 - x_{i+1}| < |x_0 - x_i|.$$

Wie gefordert, liegt also der Näherungswert x_{i+1} näher an x_0 als x_i, und zwar um so näher, je kleiner $|\varphi'(x)|$ ist.

Am Anfang dieses Abschnittes wurde bereits erwähnt, daß das NEWTONsche Näherungsverfahren ebenfalls eine Iteration darstellt. Zur Bildung der Iterationsvorschrift ist dort $f(x) = 0$ auf die Form

$$x = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = \varphi(x)$$

gebracht worden. Als Konvergenzbedingung folgt aus Formel (34)

$$|\varphi'(x)| = \left| 1 - \frac{[f'(x)]^2 - f(x) \cdot f''(x)}{[f'(x)]^2} \right| = \left| \frac{f(x) \cdot f''(x)}{[f'(x)]^2} \right| < 1,$$

wie bereits angegeben wurde. Da hierbei $|\varphi'(x)|$ mit $|f(x)|$ bei jedem Iterationsschritt kleiner wird, verbessert sich die Konvergenz der mit Hilfe des NEWTONschen Verfahrens berechneten Näherungswerte zusehends. Darin ist die Ursache zu sehen, daß im allgemeinen das NEWTONsche Verfahren schon nach verhältnismäßig wenigen Schritten zu ausreichend genauen Näherungswerten führt.

20. Transzendente Gleichungen

20.1. Lösung unter Verwendung von Näherungsverfahren

Mußte schon teilweise bei algebraischen Gleichungen zur Ermittlung der Lösungsmenge ein Näherungsverfahren herangezogen werden, so besteht darin, von einigen Ausnahmen abgesehen, bei transzendenten Gleichungen die einzige Lösungsmöglichkeit. An einigen Beispielen sollen diese Verfahren, insbesondere die Iteration, demonstriert werden.

BEISPIELE

1. $\left\{x \mid \ln x - \frac{1}{x} = 0\right\}$

Lösung: Aus Bild 50, in dem $y = \ln x$ und $y = {}^1/_x$ in einem einfach logarithmisch geteilten Koordinatensystem dargestellt sind, ist als erste Näherung $x_1 = 1{,}7$ zu entnehmen. Die Verbesserung dieses Näherungswertes soll durch Iteration erfolgen.

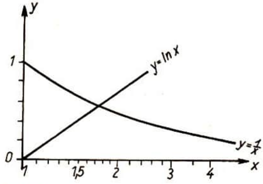


Bild 50

Aufstellung einer Iterationsgleichung:

1. $x = \frac{1}{\ln x} \qquad \varphi'(x) = -\frac{1}{x(\ln x)^2}$

Konvergenzuntersuchung: $|\varphi'(1{,}7)| \approx \frac{1}{1{,}7 \cdot 0{,}25} > 1$ entfällt.

2. $\ln x = \frac{1}{x}$

$$x = e^{\frac{1}{x}} \qquad \varphi'(x) = -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$$

Konvergenzuntersuchung: $|\varphi'(1{,}7)| \approx \dfrac{e^{0{,}6}}{2{,}8} \approx \dfrac{1{,}8}{2{,}8} < 1.$

Iterationsvorschrift: $x_{i+1} = e^{1/x_i}$.
Die abgewandelte Iterationsvorschrift

$$\lg x_{i+1} = \frac{1}{x_i} \cdot \lg e = \frac{1}{2{,}303 \cdot x_i}$$

gestattet eine einfache Auswertung mit dem Rechenstab, wenn auf ihm die in Bild 51 wiedergegebene Einstellung möglich ist. Ausgehend vom Näherungswert $x_1 = 1{,}7$ wird der Läuferstrich so lange verschoben, bis die auf der CI- und lg-Teilung abzulesenden Zahlen übereinstimmen. Es ergibt sich als neuer Näherungswert $x_2 = 1{,}76$.

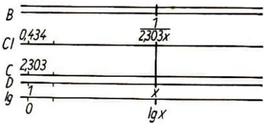


Bild 51

Zur weiteren Verbesserung mit der Logarithmentafel wird die Iterationsvorschrift in

$$\lg \lg x_{i+1} = \lg \lg e - \lg x_i$$

umgeformt und ein übersichtliches Rechenschema verwendet:

		x_3	x_4
lg lg e	+	0,63778−1	0,63778−1
lg x_i	−	0,24551	0,24676
lg lg x_{i+1}		0,39227−1	0,39102−1
lg x_{i+1}		0,24676	0,24605.

Da infolge $\varphi'(x) < 0$ die Näherungswerte von beiden Seiten her konvergieren, soll mit dem arithmetischen Mittelwert 0,24640 von lg x_3 und lg x_4 weitergerechnet werden.

		x_5	x_6	x_7	x_8
lg lg e	+	0,63778−1	0,63778−1	0,63778−1	0,63778−1
lg x_i	−	0,24640	0,24625	0,24630	0,24631
lg lg x_{i+1}		0,39138−1	0,39153−1	0,39148−1	0,39147−1
lg x_{i+1}		0,24625	0,24634	0,24631	0,24631.

0,24630

In Spalte x_7 wurde wiederum der Mittelwert der beiden vorangehenden Näherungswerte eingesetzt. Für $\lg x_7 = 0{,}24631$ ergibt sich bei Verwendung fünfstelliger Tafeln keine weitere Verbesserung.

Lösungsmenge: $\underline{\underline{\{1{,}7632\}}}$.

2. $\{x \mid 2x + \sin x - 2 = 0\}$ soll

a) durch Iteration
b) mit Hilfe des Newtonschen Näherungsverfahrens

bestimmt werden. Die Gleichung ist als Zahlenwertgleichung gegeben, in der x die Maßzahl eines in Radiant gemessenen Winkels β darstellt.

Lösung: Aus der graphischen Darstellung der Funktionsgleichungen

$$y = -2x + 2 \quad \text{und} \quad y = \sin x$$

folgt als erster Näherungswert $x_1 = 0{,}7$ (Bild 52).

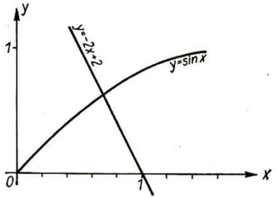


Bild 52

a) Die zur Iterationsgleichung $x = 1 - \frac{1}{2} \sin x$ gehörige Iterationsbedingung

$$|\varphi'(x)| = \left| -\frac{1}{2} \cos x \right| < 1$$

wird von jeder reellen Zahl x erfüllt.

Iterationsvorschrift: $x_{i+1} = 1 - \frac{1}{2} \sin x_i$.

Die Auswertung soll mit dem Rechenstab vorgenommen werden. In der letzten Zeile des Rechenschemas ist die Größe des entsprechenden Winkels $\beta_i = x_i$ rad im Gradmaß angegeben, um den jeweiligen Sinuswert auf dem Rechenstab bilden zu können.

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$\sin x_i$			0,644	0,626	0,634	0,632
1	+		1	1	1	1
$\frac{1}{2} \sin x_i$	−		0,322	0,313	0,317	0,316
x_{i+1}		0,7	0,678	0,687	0,683	0,684
β_{i+1}		40,1°	38,8°	39,3°	39,2°	39,2°.

Lösungsmenge: $\{0{,}684\}$.

b) Es ist

$$f(x) = 2(x-1) + \sin x,$$
$$f'(x) = 2 + \cos x,$$
$$f''(x) = -\sin x.$$

Konvergenzbedingung: $\left| \frac{f(0{,}7) \cdot f''(0{,}7)}{(f'(0{,}7))^2} \right| < \frac{0{,}4 \cdot 0{,}64}{2{,}76^2} < 1.$

x_i	β_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	$-\frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$	x_{i+1}
0,7	40,1°	0,044	2,765	−0,0159	0,6841
0,6841	39,195°	0			
	39° 11′ 42″				

Lösungsmenge: $\{0{,}6841\}$.

Bei der Berechnung von x_2 wurde der Rechenstab, bei x_3 die Tafel der natürlichen Werte der Winkelfunktionen verwendet.

Beim Lösungsweg b) ist die bereits bei der Behandlung der Iteration erwähnte fortlaufende Konvergenzverbesserung deutlich erkennbar. Mit wesentlich weniger, wenn auch bezüglich des Rechenaufwandes umfangreicheren Schritten als bei a) kann der gleiche bzw. bessere Genauigkeitsgrad erreicht werden.

AUFGABEN

Für die folgenden Gleichungen sind die reellen Wurzeln zu bestimmen:

530. $x^4 - 5{,}1x^3 + 5{,}9x^2 - 9{,}3x + 27 = 0$
531. $x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x - 1 = 0$
532. $x^4 - 9x^3 + 24{,}25x^2 - 25{,}5x + 9 = 0$
533. $x^4 - 11x^3 + 44{,}75x^2 - 79{,}75x + 52{,}5 = 0$
534. $x^4 - 12x^3 + 45x^2 - 54x + 18 = 0$
535. $x^4 + 3x^2 - 2x - 12 = 0$
536. $x^4 - 20x^2 + 27x + 15 = 0$
537. $x^4 - 6x^3 - 11x^2 - 7x + 2 = 0$
538. $x^{\frac{3}{4}} + 5x^{\frac{1}{4}} - 9 = 0$
539. $x^{\frac{3}{4}} - 2x^{\frac{1}{2}} - 7 = 0$
540. $4x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 23 = 0$

Es sind die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen zu bestimmen:

541. $10^x + x - 3{,}429 = 0$
542. $e^x - 5x + 1{,}633 = 0$
543. $x - \lg x - 7{,}489 = 0$
544. $x + \lg x^2 - 22{,}7429 = 0$
545. $2x - 5 \sin x + 0{,}1575 = 0$
546. $3x - \cos x - 5{,}2357 = 0$
547. $x + \lg x = 5$
548. $x^x - 10^{7,2} = 0$
549. $\cos x - \dfrac{3}{4}x = 0$
550. $\tan x + \sin x - 2x = 0 \qquad x \in [0; 2\pi)$
551. $\sqrt{x - 4{,}5} + \sqrt[3]{x + 2{,}35} - 3{,}9292 = 0$
552. $\sqrt{x - 1{,}1} - \sqrt[3]{x + 0{,}75} + x - 5{,}4701 = 0$

20.2. Sonderfälle transzendenter Gleichungen

In einigen besonderen Fällen können transzendente Gleichungen ohne die Verwendung von Näherungsverfahren geschlossen gelöst werden. Im Rahmen des Lehrbuches ist keine umfassende Behandlung dieses umfangreichen Gebietes möglich. An Hand von Beispielen, die größtenteils praktischen Anwendungen entnommen sind, soll ein Einblick gewährt werden. Grundsätzlich sei für alle Betrachtungen der Körper der reellen Zahlen als Variablenbereich zugrunde gelegt.

20.2.1. Exponentialgleichungen

Eine Gleichung heißt Exponentialgleichung, wenn die Variable mindestens in einem Exponenten auftritt.

Im Rahmen dieses Abschnittes sollen einige Exponentialgleichungen behandelt werden, die sich auf den Grundtyp

$$a^x = b,$$

worin a und b positive reelle Zahlen darstellen, zurückführen lassen. Unter anderem ist das grundsätzlich nicht möglich, wenn die Variable nicht nur in den Exponenten erscheint. Wird eine Gleichung $a^x = b$ logarithmiert, wobei zweckmäßigerweise den dekadischen Logarithmen der Vorzug zu geben ist, so läßt sie sich auf die einfache Gleichung

$$x = \frac{\lg b}{\lg a}$$

zurückführen.

In ihr stellen lg b und lg a Zähler und Nenner des auf der rechten Seite stehenden Bruches dar, und nicht etwa ihre Logarithmen. Sie müssen also dividiert (und nicht subtrahiert) werden, was gegebenenfalls logarithmisch geschehen kann. Der Quotient stellt bereits den gesuchten Wert x dar. Es ist also nicht zusätzlich der Numerus aufzusuchen.

Läßt sich die rechte Seite der Gleichung als Potenz mit der auf der linken Seite auftretenden Basis darstellen:

$$a^x = a^c,$$

so erübrigt sich das Logarithmieren, denn infolge der Monotonie der Exponentialfunktion muß dann

$$x = c$$

sein (Exponentenvergleich bei gleicher Basis). Grundsätzlich ist demnach

$$\{x \mid a^x = a^c\} = \{c\}.$$

BEISPIELE

1. $\left\{x \,\middle|\, a^{\frac{4}{5}x+3} = a^{2x-3}\right\}$

Lösung: Durch Exponentenvergleich folgt als äquivalente Gleichung

$$\frac{4}{5}x + 3 = 2x - 3.$$

Lösungsmenge: $\underline{\underline{\{5\}}}$.

2. $\{x \mid 4^{2x-5} = 64\}$

Lösung: Nachdem die rechte Seite als Potenz mit der Basis 4 dargestellt worden ist,

$$4^{2x-5} = 4^3,$$

kann durch Exponentenvergleich die äquivalente Gleichung

$$2x - 5 = 3$$

aufgestellt werden.

Lösungsmenge: $\underline{\underline{\{4\}}}$.

3. $\left\{x \,\middle|\, (a^{3x-5})^{8x-2} \cdot (a^{5x+3})^{2x-1} = (a^{6x-5})^{3x+2} \cdot (a^{4x-7})^{4x-3}\right\}$

Lösung: Nach Anwendung der entsprechenden Potenzgesetze folgt

$$a^{34x^2-45x+7} = a^{34x^2-43x+11}$$

und daraus durch Exponentenvergleich

$$34x^2 - 45x + 7 = 34x^2 - 43x + 11.$$

Lösungsmenge: $\underline{\underline{\{-2\}}}$.

4. $\{x \mid 1{,}32^x = 5{,}413\}$

Lösung: Die Gleichung muß beiderseitig logarithmiert werden:

$$x \cdot \lg 1{,}32 = \lg 5{,}413$$

$$x = \frac{\lg 5{,}413}{\lg 1{,}32} = \frac{0{,}73344}{0{,}12057} = 6{,}083.$$

Lösungsmenge: $\underline{\underline{\{6{,}083\}}}$.

5. $\left\{x \,\middle|\, \left(\frac{27{,}13}{14{,}25}\right)^{\frac{x-1}{x}} = \frac{23{,}16}{39{,}41}\right\}$

Lösung: Nach Einführung der Hilfsvariablen

$$u = \frac{x-1}{x} \qquad (u \neq 1)$$

wird die Gleichung beiderseitig logarithmiert und aufgelöst.

$$u = \frac{\lg 23{,}16 - \lg 39{,}41}{\lg 27{,}13 - \lg 14{,}25}$$

	lg
23,16	2,36474−1
39,41	1,59561
	$Z = 0{,}76913-1$

	lg
27,13	1,43345
14,25	1,15381
	$N = 0{,}27964$

$$u = \frac{0{,}76913-1}{0{,}27964}.$$

Die im Zähler auftretende Differenz muß zur weiteren Berechnung des Bruches aufgelöst werden:

$$u = -\frac{0{,}23087}{0{,}27964}.$$

Der absolute Betrag des Bruches kann mit einer logarithmischen Hilfsrechnung ermittelt werden:

	lg
0,23087	1,36337−2
0,27964	0,44660−1
0,82560	0,91677−1

$$u = -0{,}82560.$$

Daraus ist x zu berechnen:

$$x = \frac{1}{1-u} = \frac{1}{1{,}82560}$$

	lg
1	1,00000−1
1,8256	0,26140
0,54778	0,73860−1

$$x = 0{,}54778.$$

Lösungsmenge: $\underline{\underline{\{0{,}54778\}}}$.

In den folgenden Beispielen treten Terme der Form $a^{T(x)}$ als Summanden innerhalb der Gleichung auf.

BEISPIELE

6. $\{x \mid 4^{2x+3} - 3^x = 2^{4x+3} + 3^{x+3}\}$

Lösung:

$$4^{2x+3} - 2^{4x+3} = 3^{x+3} + 3^x$$
$$2^{4x+6} - 2^{4x+3} = 3^{x+3} + 3^x$$
$$2^{4x+3}(2^3 - 1) = 3^x(3^3 + 1)$$
$$2^{4x+3} = 4 \cdot 3^x$$
$$(4x + 3) \cdot \lg 2 = \lg 4 + x \cdot \lg 3$$
$$x \cdot \lg 16 - x \cdot \lg 3 = 2 \lg 2 - 3 \lg 2$$
$$x = -\frac{\lg 2}{\lg 16 - \lg 3} =$$
$$= -0{,}41407.$$

Lösungsmenge: $\underline{\underline{\{-0{,}41407\}}}$.

7. $\{x \mid e^{2x} + e^x = 2\}$

Lösung: Mit $u = e^x$ und Einschränkung dieser neuen Variablen auf den Bereich $u \in (0; +\infty)$ entsteht die äquivalente Gleichung

$$u^2 + u - 2 = 0.$$

Ihre Lösungsmenge besteht nur aus dem Element $u_1 = 1$ ($u_2 = -2$ entfällt).
Somit ist die gegebene Gleichung auf

$$e^x = 1$$

zurückgeführt.

Lösungsmenge: $\underline{\underline{\{0\}}}$.

8. $\{x \mid e^{x-1} - e^{2-x} = 2\}$

Lösung: Nach dem Zerlegen der Potenzen

$$e^x \cdot e^{-1} - e^2 \cdot e^{-x} = 2$$

und Einführung einer neuen Variablen $u = e^x$ entsteht

$$e^{-1} \cdot u - e^2 \cdot u^{-1} = 2 \qquad u \in (0; +\infty)$$
$$u^2 - 2eu - e^3 = 0$$
$$u = e \overset{+}{(-)} \sqrt{e^2 + e^3}.$$

(Das Minuszeichen vor der Wurzel entfällt, da $\sqrt{e^2 + e^3} > e$).

Somit ist

$$e^x = e(1 + \sqrt{1 + e})$$
$$x = 1 + \ln(1 + \sqrt{1 + e}).$$

Lösungsmenge: $\underline{\underline{\{1 + \ln(1 + \sqrt{1 + e})\}}}$.

AUFGABEN

Die nachfolgenden Exponentialgleichungen sind zu lösen:

553. $a^{x+5} = a^{12}$

554. $b^{3-x} = b^8$

555. $p^{3x+5} = p^{2x+1}$

556. $v^7 \cdot v^{3(x-2)} = v \cdot v^{2(x+1)} \cdot v^{4(x-2)}$

557. $(r^{x-3})^{x-4} = (r^{x-2})^{x-7}$

558. $a(a^{x-2})^{x+3} = a^{3x+8}(a^{x+1})^{x-5}$

559. $\sqrt{p^{12-x}} = p^{2(x+3)}$

560. $\sqrt[x-2]{u^{2x-1}} = \sqrt[x+1]{u^{x-3}}$

561. $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^5$

562. $\left(\frac{p}{q}\right)^x = \sqrt[3]{\left(\frac{q}{p}\right)^7}$

563. $\sqrt[x]{a} = mn$

564. $\left(\frac{4}{5}\right)^{2x-3} = \left(\frac{5}{4}\right)^{3x+5}$

565. $a^x b^{mx} = c$

566. $a^{n-x} = 2b^x$

567. $a^{mx-p} = b^{nx-q}$

568. $3^x = 10$

569. $5^x = 100$

570. $0{,}025^x = 1000$

571. $10^x = 1{,}25^{10}$

572. $3{,}412^x = 2432$

573. $4{,}8321^x = 8{,}2137$

574. $\sqrt[x]{6452} = 3{,}7824$

575. $\sqrt[x]{5{,}738} = 2500$

576. $\sqrt[x]{4360{,}2} = 0{,}0011$

577. $\sqrt[x]{1{,}3311} = \sqrt[3]{7}$

578. $18^{-x} \cdot 2436^x = 45^{x+1}$

579. $4{,}278^{2x-3} = 3 \cdot 1{,}542^{3x+5}$

580. $\left(\frac{3}{8}\right)^{3x+4} = \left(\frac{4}{5}\right)^{2x+1}$

581. $100^{\frac{1}{x}} = 36{,}63^{\frac{1}{25}}$

582. $\sqrt[2x]{2^{3x+2}} = \sqrt[3x]{3^{2x+3}}$

583. $25 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{5x-2} = 37 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{x+5}$

584. $\sqrt[x]{\frac{22}{25}} = \frac{15}{7}$

585. $\left(\frac{294{,}2}{315{,}8}\right)^{x-1} = \left(\frac{24{,}49}{19{,}27}\right)^x$

586. $2^x - 3^{x+1} = 2^{x+2} - 3^{x+3}$

587. $3^{2x+1} - 5^{x-1} = 3^{2x+3} - 5^{x+1}$

588. $7^{2x-1} - 3^{3x-2} = 7^{2x+1} - 3^{3x+2}$

589. $2^{(3^x)} = 3^{(2^x)}$

590. Bei einer gedämpften Schwingung mit Luftreibung bilden die Amplituden eine fallende geometrische Folge. Beträgt die Amplitudenabnahme von Periode zu Periode 0,5%, so ist der Quotient der geometrischen Folge $q = 0{,}995$ und die Amplitude der n-ten Schwingung $A_n = A_1 q^{n-1}$, wobei A_1 die Anfangsamplitude kennzeichnet. Bei welcher Periode unterschreitet die Amplitude 1% des Anfangswertes?

591. Für den Riementrieb (Bild 53) gilt auf Grund des Eulerschen Gesetzes für die Seilreibung, wenn das Rutschen des Riemens verhindert werden soll, die Forderung

$$\frac{S_1}{S_2} \leqq e^{\mu_0 \frac{\alpha}{\text{rad}}}.$$

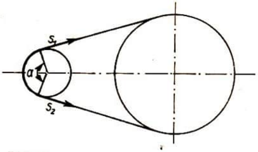


Bild 53

Hierbei bedeuten S_1 die Seilkraft in dem ziehenden Riementeil, S_2 die Seilkraft im gezogenen Riementeil, $\mu_0 = 0{,}25$ die Haftreibzahl von Leder auf Grauguß und α den in Radiant gemessenen Umschlingungswinkel. Wie groß muß α im Gradmaß sein, wenn sich S_1 zu S_2 wie $5:2$ verhält?

592. Für einen Potenzflaschenzug gilt

$$F_1 = \frac{F_2}{2^n \cdot \eta}.$$

Wieviel Rollen werden benötigt, um die Last $F_2 = 4000$ kp mit der Kraft $F_1 \leqq 60$ kp bei einem Wirkungsgrad $\eta = 0{,}64$ heben zu können?

20.2.2. Logarithmische Gleichungen

In einer logarithmischen Gleichung tritt die Variable im Argument logarithmischer Terme auf. An Hand von Beispielen soll gezeigt werden, wie sich einige logarithmische Gleichungen auf eine Grundgleichung vom Typ

$$\log_a x = b$$

zurückführen lassen, die nach dem Potenzieren mit der Basis $a > 0$ die Gestalt

$$x = a^b$$

annimmt. Kann man die rechte Seite der Grundgleichung als Logarithmus mit der Basis a darstellen,

$$\log_a x = \log_a c,$$

so läßt sich infolge der Monotonie der Logarithmusfunktion setzen

$$x = c.$$

Bei allen logarithmischen Gleichungen ist zu beachten, daß nur Logarithmen von positiven reellen Zahlen definiert sind. Da beim Lösen derartiger Gleichungen häufig nichtäquivalente Umformungen vorgenommen werden, empfiehlt es sich, zu Beginn des Lösungsvorganges den der Gleichung zukommenden Definitionsbereich festzustellen. Dadurch wird von vornherein vermieden, daß unzulässige Elemente in der Lösungsmenge erscheinen; zum Beispiel stellt der Übergang von $2n \cdot \log x$ auf $\log x^{2n}$ im Fall $n \in G$ keine äquivalente Umformung dar, da beide Terme verschiedene Definitionsbereiche aufweisen. Andererseits dürfen bei den erforderlichen Umformungen keine Elemente verlorengehen. So muß

$$\log x^{2n} = 2n \log |x| \qquad n \in G$$

gesetzt werden, weil $\log x^{2n}$ für $x \in (-\infty; +\infty) \setminus \{0\}$ definiert ist. Lediglich wenn x von vornherein auf den Bereich $(0; +\infty)$ eingeschränkt ist, darf auf die Absolutstriche verzichtet, also das dritte Logarithmengesetz formal angewendet werden.

BEISPIEL

1. $\{x \mid 2 \ln x = \ln 16\}$

Lösung: Definitionsbereich: $(0; +\infty)$.

a) $\ln x = \frac{1}{2} \ln 16 = \ln 4$

$x = 4.$

Die Lösungsmenge der logarithmischen Gleichung stimmt mit der der äquivalenten linearen Gleichung überein:

Lösungsmenge: $\underline{\underline{\{4\}}}$.

b) Wird die nichtäquivalente Umformung

$$\ln x^2 = \ln 16$$

vorgenommen, so darf nur die in dem anfangs angegebenen Definitionsbereich liegende, also die positive, Wurzel der Gleichung

$$x^2 = 16,$$

in die Lösungsmenge aufgenommen werden.

Lösungsmenge: $\underline{\underline{\{4\}}}$.

In der höheren Mathematik treten logarithmische Gleichungen häufig in der Form

$$\ln(ax + b) = c$$

auf. Wird mit der Basis e der natürlichen Logarithmen potenziert,

$$ax + b = \mathrm{e}^c,$$

so läßt sich die Gleichung nach x auflösen

$$x = \frac{1}{a}(\mathrm{e}^c - b).$$

Sind a, b und c mit Zahlen belegt, so wird nach einem etwas abgewandelten Verfahren vorgegangen.

BEISPIEL

2. $\{x \mid \ln(3x - 2) = 0{,}5\}$

Lösung: Definitionsbereich: $(^2/_3;\ +\infty)$.

Da meist keine ausreichenden Tabellen für natürliche Logarithmen zur Verfügung stehen, wird zunächst mit Hilfe des entsprechenden Moduls (vgl. 9.3.) der natürliche Logarithmus in den dekadischen Logarithmus umgewandelt

$$\lg(3x - 2) = 0{,}5\,\mathrm{M}_{10} = 0{,}217\,14 \qquad (\mathrm{M}_{10} = 0{,}434\,29)$$

und aus der Logarithmentafel der zugehörige Numerus abgelesen

$$3x - 2 = 1{,}6487$$
$$x = 1{,}2162.$$

Lösungsmenge: $\underline{\underline{\{1{,}2162\}}}$.

Andere Aufgaben lassen sich nach Anwendung der Logarithmengesetze auf die Grundgleichung zurückführen.

BEISPIEL

3. $\{x \mid \lg 16x^2 - \lg 8x^2 = 2\lg 4x^2 - \lg x^2 - \lg 8\}$

Lösung: $x \in (-\infty; +\infty) \setminus \{0\}$

$$\lg 16x^2 - \lg 8x^2 - \lg 16x^4 + \lg x^2 + \lg 8 = 0$$

$$\lg \frac{16x^2 \cdot x^2 \cdot 8}{8x^2 \cdot 16x^4} = 0$$

$$\lg 1/x^2 = 0$$

$$-2\lg |x| = 0$$

$$|x| = 1.$$

Lösungsmenge: $\underline{\underline{\{-1; 1\}}}$.

Die im folgenden Beispiel gegebene Gleichung kann als Exponentialgleichung und logarithmische Gleichung angesehen werden.

BEISPIEL

4. $\{x \mid 4^{3\lg x} = 2\}$

Lösung: $x \in (0; +\infty)$.

Um den die Variable x enthaltenden Term aus den Exponenten zu entfernen, wird die Gleichung logarithmiert.

$$3\lg x \cdot \lg 4 = \lg 2$$

$$\lg x = \frac{\lg 2}{3\lg 4} = \frac{\lg 2}{6\lg 2} = \frac{1}{6}$$

$$x = 1{,}4678.$$

Lösungsmenge: $\underline{\underline{\{1{,}4678\}}}$.

AUFGABEN

Es sind die Lösungsmengen folgender logarithmischer Gleichungen zu bestimmen:

593. $4 + 3\lg x = 5{,}2$

594. $5 - 2\lg 3x = 12{,}4$

595. $\lg x^3 + 2\lg x^2 = 20{,}4$

596. $\lg \sqrt[3]{2x} = 0{,}876$

597. $\frac{1}{3}\lg x^2 + \frac{1}{2}\lg x^3 = 0{,}0234$

598. $\lg (2x + 3) = \lg (x - 1) + 1$

599. $\lg x^5 = \lg x^2 + 6$

600. $\lg 5^x = \lg 2^x + 2$

601. $5^{\lg x} = 2 \cdot 3^{\lg x}$

602. $3\lg x = 2\lg 8$

603. $2\lg x = 3\lg 4$

604. $\lg x^2 = 3\lg 4$

605. $2\lg 4x - 2\lg x - 2\lg 8 = 0$

606. $\frac{1}{3}\ln x^6 = \frac{1}{2}\ln 81$

607. $\ln x - \ln a = b$

608. Die Gleichung $A \cdot B^{C \cdot \lg D + E} = F$ ist nach A, B, C, D und E umzustellen.

Die in der Elementargeometrie auftretenden Gleichungen sind *algebraisch*[1]. Stellen sie Beziehungen zwischen Stücken des ebenen Dreiecks dar, so enthält eine Gleichung entweder nur Winkel, wie z. B. der Satz von der Winkelsumme im Dreieck, oder nur Seiten, wie z. B. der Satz des Pythagoras. Im zweiten Falle können außer den Seiten auch noch andere Strecken und der Flächeninhalt des Dreiecks auftreten.
Der Zusammenhang zwischen den Seiten und Winkeln des ebenen Dreiecks ist nicht durch algebraische Gleichungen darstellbar. Hierfür bedarf es daher eines besonderen Abschnitts der Geometrie:

> Die **Trigonometrie**[2] **der Ebene** hat die Aufgabe, die Beziehungen zwischen den Strecken und Winkeln im ebenen Dreieck und in anderen ebenen, geradlinig begrenzten Figuren herzustellen. Sie benutzt hierzu die *trigonometrischen Funktionen*.

Die Lehre von den Eigenschaften und den gegenseitigen Beziehungen der trigonometrischen Funktionen heißt **Goniometrie**[3]) und ist ein Teil der Trigonometrie. Die Trigonometrie im engeren Sinne behandelt die eigentliche Dreiecksberechnung.

21. Winkelmessung. Winkeleinheiten

Wie bereits bekannt, schließen zwei von einem gemeinsamen Punkt O ausgehende Strahlen einen ebenen **Winkel** φ ein. Der Winkel ist also der Teil der Ebene, der von einem Strahl überstrichen wird, wenn sich dieser um seinen Anfangspunkt O von der Ausgangslage s_1 bis zu einer bestimmten Endlage s_2 dreht (Bild 54). Der Winkel heißt *positiv* oder *negativ*, je nachdem er durch Drehung eines Strahls gegen oder mit dem Uhrzeigersinn entsteht.

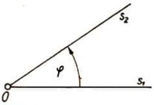


Bild 54

Dreht sich der Strahl einmal vollständig um seinen Anfangspunkt O, so wird der **Vollwinkel** φ_0 beschrieben (Bild 55).

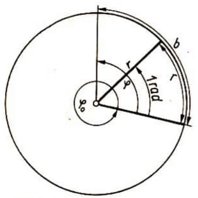


Bild 55

---

[1]) Vgl. Abschnitt 18.
[2]) (griech.) Dreiecksmessung
[3]) (griech.) Winkelmessung

In der **Tafel der gesetzlichen Einheiten** vom 14. 8. 1958 wurden für den ebenen Winkel die Einheiten

Radiant	Kurzzeichen:	rad
rechter Winkel, Rechter		$\llcorner$
Grad		$^\circ$
Neugrad, Gon		^{g}

festgelegt, und zwar gilt folgende

Definition der Winkeleinheiten

$$\boxed{1\,\varphi_0 = 2\pi\ \mathrm{rad} = 4^{\llcorner} = 360^\circ = 400^g} \tag{35}$$

Als weitere, abgeleitete Winkeleinheiten sind die

Minute	Kurzzeichen:	$'$
Sekunde		$''$
Neuminute		^{c}
Neusekunde		^{cc}

zugelassen, für die

$$\boxed{1' = \frac{1^\circ}{60} \qquad 1'' = \frac{1'}{60} \qquad 1^c = \frac{1^g}{100} \qquad 1^{cc} = \frac{1^c}{100}} \tag{35a}$$

gilt.

Der Radiant wurde aus folgendem Grund als Winkeleinheit gewählt. Der Umfang des Kreises ist

$$U = 2\pi r,$$

d. h. das 2π-fache des Radius. Entsprechend wurde der Vollwinkel, der dem Kreisumfang entspricht, als 2π-faches des Radianten definiert, also

$$\varphi_0 = 2\pi\ \mathrm{rad}.$$

Aus dem Bild 55 kann die Proportion

$$b : 2\pi r = \varphi : \varphi_0$$

abgelesen werden. Sie führt zu folgender allgemeingültiger Größengleichung[1]) für den Kreisbogen b:

$$b = \frac{2\pi}{\varphi_0}\,\varphi r.$$

---

[1]) Größengleichungen sind Gleichungen, die unabhängig von der Wahl der Einheiten gelten

Hieraus ergeben sich z. B. die für die Winkeleinheiten Radiant und Grad zugeschnittenen Größengleichungen[1]) des Kreisbogens, wenn nach (35) für den Vollwinkel $\varphi_0 = 2\pi$ rad und $\varphi_0 = 360°$ eingesetzt werden:

$$b = \frac{\varphi}{\text{rad}}\, r, \qquad b = \frac{\pi}{180} \cdot \frac{\varphi}{\text{Grad}}\, r.$$

Somit gilt:

$$\boxed{\frac{b}{r} = \frac{\varphi}{\text{rad}} = \frac{\pi}{180} \cdot \frac{\varphi}{\text{Grad}}} \tag{36}$$

Wird in (36) $\varphi = 1$ rad gesetzt, so folgt $\dfrac{b}{r} = 1$ bzw. $b = r$. Das ergibt folgenden

Satz

Der Radiant ist der ebene Winkel, für den das Verhältnis der Längen des zugehörigen Kreisbogens zu seinem Halbmesser gleich 1 ist (Bild 55).

Bevor durch die Tafel der gesetzlichen Einheiten der Radiant als Winkeleinheit eingeführt wurde, war es üblich, mit dem sog. **Bogenmaß** des Winkels zu rechnen. Das Bogenmaß ist die Maßzahl des in der Einheit Radiant gemessenen Winkels und wird durch das Verhältnis b/r, also durch (36) bestimmt.

Der Radiant ist unter den Winkeleinheiten die einzige **kohärente Einheit**[2]), er ist daher zu bevorzugen.
Beim praktischen Messen[3]) von Winkeln werden jedoch überwiegend die anderen Winkeleinheiten benutzt. Es ist daher günstig, für die Umrechnung solcher Winkel, die in den nichtkohärenten Winkeleinheiten Grad, Neugrad usw. angegeben sind, in die Winkeleinheit rad und umgekehrt eine Formel herzuleiten. Zu diesem Zweck wird der

Umrechnungsfaktor ϱ $$\boxed{\varrho = \frac{\varphi_0}{2\pi}} \tag{37a}$$

eingeführt, für den sich aus (35) und (35a) wegen $\pi = 3{,}141\,592\,65\ldots$ im einzelnen ergibt:

$$\boxed{\begin{aligned} \varrho = 1\ \text{rad} = 0{,}636\,619\,8^{\llcorner} &= 57{,}295\,78° = 63{,}661\,98^{g} = \\ = 3437{,}747' &= 206\,264{,}8'' = \\ = 6366{,}198^{c} &= 636\,619{,}8^{cc} \end{aligned}} \tag{37b}$$

[1]) Zugeschnittene Größengleichungen sind Größengleichungen, in denen jede Größe durch eine zugehörige Einheit dividiert erscheint

[2]) cohaerere (lat.) zusammenhängen. Die Grundeinheiten und die aus ihnen unmittelbar abgeleiteten Einheiten eines Maßsystems, in denen nur der Zahlenfaktor 1 auftritt, bilden ein sog. kohärentes Einheitensystem

[3]) Das Bau- und Vermessungswesen z. B. benutzt für das Messen von Horizontal- und Vertikalwinkeln im Gelände den Theodolit. Seine Teilkreise sind in Grad, Minuten und Sekunden oder in Neugrad, Neuminuten und Neusekunden geteilt

Die meisten Rechenstäbe enthalten die Marken für $\varrho/'$, $\varrho/''$, $\varrho/^{cc}$.
Aus (36) folgt z. B. die Gleichung

$$\frac{\varphi}{\text{Grad}} = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{\varphi}{\text{rad}},$$

die bei Berücksichtigung von (37) in

$$\frac{\varphi}{\text{Grad}} = \frac{\varrho}{\text{Grad}} \cdot \frac{\varphi}{\text{rad}}$$

übergeht. Verallgemeinert man die letzte Gleichung, indem man „Grad" durch „nichtkohärente Winkeleinheit", abgekürzt WE, ersetzt, so ergibt sich die

Umrechnungsformel $$\boxed{\frac{\varphi}{\text{WE}} = \frac{\varrho}{\text{WE}} \cdot \frac{\varphi}{\text{rad}}} \tag{38}$$

BEISPIELE

1. Gegeben: $\varphi = 0{,}14524$ rad

   Gesucht: φ in $\llcorner$, °, ^{cc}.

   Lösung: Aus (38) erhält man mit der Rechenmaschine:

$$\frac{\varphi}{\llcorner} = 0{,}63662 \cdot 0{,}14524 \qquad \underline{\underline{\varphi = 0{,}092463\llcorner}}$$

$$\frac{\varphi}{{}^\circ} = 57{,}29578 \cdot 0{,}14524 \qquad \underline{\underline{\varphi = 8{,}32164^\circ}}$$

$$\frac{\varphi}{\text{cc}} = 636619{,}8 \cdot 0{,}14524 \qquad \underline{\underline{\varphi = 92462{,}7^{cc}}}.$$

2. Gegeben: $\varphi = 26°17'$

   Gesucht: φ in rad

   Lösung:

   Aus (38) folgt mit dem Rechenstab:

$$\frac{\varphi}{\text{rad}} = \frac{\varphi}{1'} : \frac{\varrho}{1'} = \frac{1577}{3438} \qquad \underline{\underline{\varphi = 0{,}459 \text{ rad}}}.$$

Die Umrechnungen nach (38) lassen sich auch in einfacher Weise mit der sog. Bogentafel[1]) ausführen, die in den Logarithmentafeln enthalten ist.
Für einige ausgezeichnete Winkel werden die Beziehungen zwischen den verschiedenen Einheiten besonders oft gebraucht. Daher sei die folgende Tabelle angegeben:

---

[1]) Vgl. Literaturhinweis S. 580

φ/rad	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	1	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$\varphi/\llcorner$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	0,636 ...	$\frac{2}{3}$	1	2	3	4
$\varphi/^\circ$	30	45	57,295 ...	60	90	180	270	360
$\varphi/^g$	$33,\overline{3}$	50	63,661 ...	$66,\overline{6}$	100	200	300	400

Die Teilung des Vollwinkels in 360° mit der Unterteilung in Minuten und Sekunden heißt **sexagesimale Teilung**[1]) oder **„alte Teilung" des Winkels**. Sie wird hauptsächlich in der Astronomie und Geographie benutzt, weil dort der Winkel mit der ebenfalls sexagesimal geteilten Zeit zusammenhängt. Auch in der Mathematik wurde bisher die „alte Teilung" bevorzugt, jedoch nur aus Gründen der Überlieferung.
Die Addition mehrerer Winkel, insbesondere bei Benutzung einer Rechenmaschine, ist in der sexagesimalen Teilung unbequem, da die Sekunden, Minuten und Grade getrennt addiert werden müssen. Die Division zweier Winkel in sexagesimaler Teilung verlangt die vorherige Verwandlung der Minuten und Sekunden in Dezimalen des Grads. Physik und Technik benutzen daher die **Altgradteilung mit dezimalgeteiltem Grad.**
Die gleichen Vorzüge wie die zuletzt genannte Teilung hat die zur Zeit der französischen Revolution eingeführte **zentesimale Teilung**[2]) oder **„neue Teilung" des Winkels**, die den Vollwinkel in 400^g und den Neugrad in Neuminuten und Neusekunden teilt [vgl. (35)]. Sie wird in Deutschland nur vom Vermessungswesen benutzt.
Die Beziehungen zwischen den verschiedenen Gradteilungen des Winkels ergeben sich aus (35) und (35a):

$1^\circ = 1,\overline{1}^g$	$1^g = 54' = 0,9^\circ$	$0,1^\circ = 6' = 0,\overline{1}^g$	(39)
$1' = 0,01\overline{6}^\circ = 0,0\overline{185}^g$	$1^c = 32,4'' = 0,009^\circ$	$0,01^\circ = 36'' = 0,0\overline{1}^g$	
$1'' = 0,000\overline{27}^\circ = 0,000309^g$	$1^{cc} = 0,324'' = 0,00009^\circ$	$0,001^\circ = 3,6'' = 0,00\overline{1}^g$	

Die Umrechnung von einer Gradteilung in die andere wird am schnellsten mit Tabellen[3]) ausgeführt.

AUFGABEN

609. Folgende Winkel sind umzurechnen:
a) $43^\circ 12' 14''$, b) $28,7349^\circ$ in Neugrad,
c) $21,4419^g$, d) $38,1962^\circ$ in sexagesimale Teilung,
e) $36^g 45^c 20^{cc}$, f) $81^\circ 22' 35''$ in dezimalgeteilten Altgrad.

---

[1]) Stammt von den Babyloniern und heißt so, weil die Zahl 60 Grundzahl ist; sexagesimus (lat.) der sechzigste
[2]) 100 ist Grundzahl; centesimus (lat.) der hundertste
[3]) siehe die Tafeln lt. Literaturhinweis S. 580

610. Folgende Winkel sind in die Winkeleinheit rad umzurechnen:

a) $\frac{5}{3}{}^{\llcorner}$, b) $301°17'20''$, c) $138{,}1923°$, d) $5^{g}88^{c}25^{cc}$.

611. Wie groß sind die Winkel

a) 0,3 rad, b) 1 rad, c) $\frac{\pi}{12}$ rad in sexagesimaler Teilung?

612. Welche Länge hat der Bogen des Erdumfangs, der zu einem Mittelpunktswinkel von
a) $1°$, b) $15'$, c) $1'$, d) $1''$ gehört? ($R = 6371{,}11$ km)

613. Wie lauten bei gegebenem Halbmesser r und gegebenem Mittelpunktswinkel φ die für die Winkeleinheiten rad, °, ∟ zugeschnittenen Größengleichungen der Kreissektorfläche A?

614. Man berechne die Fläche A des Kreissektors für
a) $r = 12$ cm, $\varphi = 96°15'25''$; b) $r = 5{,}5$ cm, $b = 7$ cm.

615. Der Horizontalkreis eines Theodolits soll in Intervalle zu 20 Neuminuten eingeteilt werden. Wie groß ist der Abstand zwischen zwei benachbarten Teilstrichen, wenn der Kreisdurchmesser 94 mm beträgt?

22. Trigonometrische Funktionen

22.1. Allgemeine Definition der trigonometrischen Funktionen

Im folgenden wird für die trigonometrischen Funktionen eine Definition gewählt, die eine Verallgemeinerung der dem Leser bekannten Definitionen im rechtwinkligen Dreieck und am Einheitskreis darstellt. Bekanntlich[1]) werden jedem Punkt P der Ebene durch die Einführung eines cartesischen oder eines Polarkoordinatensystems je zwei Koordinaten zugeordnet, nämlich entweder

1. die **rechtwinkligen Koordinaten**, die *Abszisse* u und die *Ordinate* v (Bild 56), oder
2. die **Polarkoordinaten**, der *Abstand*[2]) r und der *Richtungswinkel*[3]) φ (Bild 57).

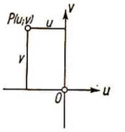


Bild 56

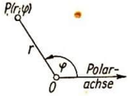


Bild 57

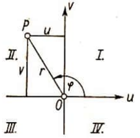


Bild 58

Hierbei sind u, v und r die Maßzahlen der in den Bildern 56, 57 usf. gezeichneten Strecken.

---

[1]) Vgl. 26.2. bzw. El. math. 12.2.
[2]) Wird auch Radiusvektor, Leitstrahl oder Modul genannt
[3]) Heißt auch Phase, Amplitude oder Argument

Im Fall 2. dient ein beliebiger Strahl als *Polarachse* (Nullrichtung), sein Anfangspunkt O heißt *Pol.*
Fallen Ursprung und Pol sowie u-Achse und Polarachse zusammen, so ergibt sich Bild 58. Der Zusammenhang zwischen den Koordinaten beider Systeme wird durch die Einführung der **trigonometrischen Funktionen** (auch goniometrische oder Winkelfunktionen genannt) Sinus, Cosinus, Tangens, Cotangens beschrieben:

Definition der trigonometrischen Funktionen[1])

$$\boxed{\begin{array}{ll} \sin\varphi = \dfrac{v}{r} & \cos\varphi = \dfrac{u}{r} \\[2ex] \tan\varphi = \dfrac{v}{u} & \cot\varphi = \dfrac{u}{v} \end{array}} \tag{40}$$

Ersetzt man für die folgenden Überlegungen den Abstand r durch $\sqrt{u^2 + v^2}$ (Bild 58), so ergibt sich:

$$\sin\varphi = \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}} \qquad \cos\varphi = \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}$$

$$\tan\varphi = \frac{v}{u} \qquad \cot\varphi = \frac{u}{v}.$$

Da ein Bruch mit dem Nenner Null genauso wenig einen Zahlenwert hat wie ein Bruch, dessen Zähler und Nenner verschwinden, läßt sich hieraus folgendes ablesen:
Durch (40) werden jedem geordneten Paar $(u; v) \in K$ (also jedem Punkt der Koordinatenebene mit Ausnahmen) vier trigonometrische Funktionswerte

$$\sin\varphi \in [-1; +1], \qquad \cos\varphi \in [-1; +1]$$
$$\tan\varphi \in (-\infty; +\infty), \qquad \cot\varphi \in (-\infty; +\infty)$$

zugeordnet. Der Bereich K ist für die vier trigonometrischen Funktionen verschieden und läßt sich mit dem Körper R der reellen Zahlen ausdrücken:

$K_{\sin\varphi, \cos\varphi} = (R \times R) \setminus \{(0;0)\}$ (Koordinatenebene außer Ursprung O)
$K_{\tan\varphi} = (R \setminus \{0\}) \times R$ (Koordinatenebene außer der v-Achse)
$K_{\cot\varphi} = R \times (R \setminus \{0\})$ (Koordinatenebene außer der u-Achse)

---

[1]) Wie noch in Band „Analysis", 11.1.1., gezeigt wird, läßt sich jede trigonometrische Funktion in eine Potenzreihe entwickeln. So ergibt sich z. B. für die Sinusfunktion

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots .$$

Beim Rechnen mit diesen Reihen ist zu beachten, daß für x beispielsweise nicht der Winkel 10°, sondern der Zahlenwert $\frac{\pi}{18}$ eingesetzt werden muß; das ist aber die Maßzahl des in der Winkeleinheit „rad" gemessenen Winkels, also das Bogenmaß (vgl. 21.). Somit gilt: Das Argument der trigonometrischen Funktionen ist nicht der Winkel φ, sondern $\frac{\varphi}{\text{rad}}$. Der Einfachheit halber schreiben wir jedoch für das Argument meistens den Winkel φ selbst. Hier erkennt man einen großen Nachteil der durch die Tafel der gesetzlichen Einheiten eingeführten Winkeleinheit „rad" im Vergleich zum früher üblichen Bogenmaß.

Wie aus obigem bereits hervorgeht, wird $r > 0$ vereinbart, also $r = +\sqrt{u^2 + v^2}$, daher gilt

$$r \in (0; +\infty).$$

Die Menge Φ der Elemente $\frac{\varphi}{\text{rad}}$ ist wie die Menge K von der Art der trigonometrischen Funktion abhängig:

$$\Phi_{\sin\varphi,\cos\varphi} = (-\infty; +\infty)$$

$$\Phi_{\tan\varphi} = (-\infty; +\infty) \setminus \left\{(2k+1)\cdot\frac{\pi}{2} \,\middle|\, k \in G\right\}^{1)}$$

$$\Phi_{\cot\varphi} = (-\infty; +\infty) \setminus \{k\pi \mid k \in G\}.$$

Die trigonometrischen Funktionswerte sind als Streckenverhältnisse *dimensionslos*, also reine Zahlen.
Durch das Achsenkreuz werden Vollwinkel und Ebene in vier Teile, die sog. **Quadranten**[2]) zerlegt. Letztere heißen I., II., III., IV. Quadrant (Bild 58).

22.2. Graphische Darstellung der trigonometrischen Funktionswerte. Bestimmung der Funktionswerte besonderer Winkel

Wird von O aus ein beliebiger Strahl g gezogen, so haben alle auf g liegenden Punkte $P, A, B, \ldots, P_1, P_2, \ldots$ denselben Richtungswinkel φ. Aus Bild 59 läßt sich bei Anwendung der Strahlensätze wegen (40) folgendes ablesen:

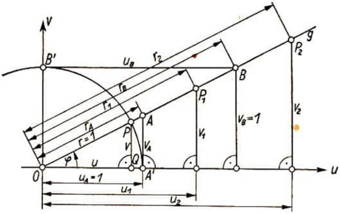


Bild 59

$$\left.\begin{aligned} \sin\varphi &= \frac{v}{r} = \frac{v_A}{r_A} = \frac{v_B}{r_B} = \ldots; \qquad \cos\varphi = \frac{u}{r} = \frac{u_A}{r_A} = \frac{u_B}{r_B} = \ldots \\ \tan\varphi &= \frac{v}{u} = \frac{v_A}{u_A} = \frac{v_B}{u_B} = \ldots; \qquad \cot\varphi = \frac{u}{v} = \frac{u_A}{v_A} = \frac{u_B}{v_B} = \ldots \end{aligned}\right\} \quad \text{(I)}$$

Während $P_1, P_2, \ldots$ beliebig auf g liegen, sind P, A, B so gewählt, daß $r = 1$, $u_A = 1$, $v_B = 1$ gilt. P ist also der Schnittpunkt des Strahls g mit dem Einheitskreis[3]),

1) G ist die Menge der ganzen Zahlen, vgl. Abschnitt 4.
2) quattuor (lat.) vier; Quadrant heißt Viertelkreis
3) Kreis vom Radius $r = 1$

$A'A$ und $B'B$ sind Abschnitte der Vertikaltangente in A' und Horizontaltangente in B' an den Einheitskreis (Bilder 59 und 60). Somit ergibt sich aus (I):

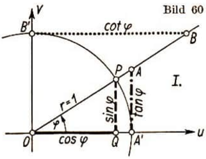


Bild 60

$$\sin\varphi = v,\ \cos\varphi = u,$$
$$\tan\varphi = v_A,\ \cot\varphi = u_B. \tag{II}$$

Die Werte der trigonometrischen Funktionen können daher als Maßzahlen von Strecken am Einheitskreis unmittelbar abgelesen werden (Bild 60), so daß sich aus (II) ergibt:

Satz

Sinus bzw. *Cosinus* eines Winkels φ sind gleich der *Ordinate* bzw. *Abszisse* des zu φ gehörigen veränderlichen Punktes auf dem Einheitskreis.
Tangens bzw. *Cotangens* eines Winkels φ sind gleich den Maßzahlen derjenigen Abschnitte der *Vertikal-* bzw. *Horizontaltangente* an den Einheitskreis, die vom Berührungspunkt bis zum Schnittpunkt mit dem durch φ festgelegten Leitstrahl gemessen werden.

Beim Drehen des Radius OP aus der Ausgangslage OA' im positiven Sinn bis zu ihr zurück kann an der Änderung der Strecken PQ, OQ, $A'A$, $B'B$ der Verlauf der trigonometrischen Funktionen in den vier Quadranten verfolgt werden (Bilder 60 bis 63).

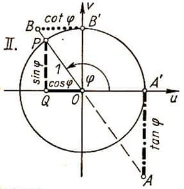


Bild 61

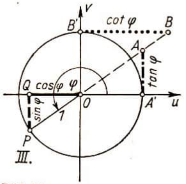


Bild 62

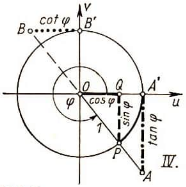


Bild 63

Da hierbei der Tangens auf der Tangente in A' und der Cotangens auf der Tangente in B' abgelesen werden, muß man für Winkel im II., III., IV. Quadranten den Strahl OP rückwärts verlängern.

Mit den bekannten Vorzeichen der rechtwinkligen Koordinaten in den vier Quadranten ergeben sich aus (40) in Verbindung mit den Bildern 60 bis 63 folgende Regeln:

Vorzeichen der trigonometrischen Funktionen (41)

Funktion \ Quadrant von φ	I	II	III	IV
$\sin\varphi$	+	+	−	−
$\cos\varphi$	+	−	−	+
$\tan\varphi$	+	−	+	−
$\cot\varphi$	+	−	+	−

Aus den den trigonometrischen Funktionswerten entsprechenden Strecken am Einheitskreis findet man unmittelbar die Funktionswerte für die Winkel 0°, 90°, 180°, 270°, 360°. Bei Anwendung der Definition (40) auf solche Punkte P im I. Quadranten, für die der Winkel $\varphi = 30°, 45°, 60°$ ist, ergeben sich die restlichen[1]) der in der folgenden Tafel zusammengefaßten Werte:

Trigonometrische Funktionswerte für besondere Winkel

Funktion \ Winkel φ	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
$\sin\varphi$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	0	-1	0
$\cos\varphi$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\tan\varphi$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$[2])	0	$\pm\infty$	0
$\cot\varphi$	$\pm\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$

(42)

22.3. Trigonometrische Funktionen — Kurven und Periodizität

Ausgehend von der ursprünglichen Definition der trigonometrischen Funktionen in 22.1. werden jetzt die üblichen Bezeichnungen und Begriffe aus der Funktionenlehre (vgl. Band „Analysis", Abschnitt 1.) benutzt. Danach ist jede der vier trigonometrischen Funktionen

$$\boxed{y = \sin x, \quad y = \cos x, \quad y = \tan x, \quad y = \cot x} \tag{40a}$$

eine Menge von geordneten Paaren $(x; y)$. Denn jedem Element $x \in X$ ist genau ein Element $y \in Y$ zugeordnet. Die Menge X wird *Definitionsbereich* und die Menge Y *Wertebereich* der jeweiligen Funktion genannt. Hierbei sind x mit $\frac{\varphi}{\text{rad}}$ und X mit Φ aus 22.1. identisch. Man erhält wie dort:

Funktion \ Menge	Definitionsbereich X	Wertebereich Y
$\sin x$	$(-\infty; +\infty) = R$	$[-1; +1]$
$\cos x$	$(-\infty; +\infty) = R$	$[-1; +1]$
$\tan x$	$(-\infty; +\infty) \setminus \left\{(2k+1)\cdot\frac{\pi}{2} \,\middle|\, k \in G\right\}$	$(-\infty; +\infty) = R$
$\cot x$	$(-\infty; +\infty) \setminus \{k\pi \mid k \in G\}$	$(-\infty; +\infty) = R$

(43)

[1]) Vgl. El. math. 26.3. [2]) Das Symbol $\pm\infty$ bedeutet, daß an dieser Stelle gar kein Funktionswert existiert; vgl. auch Unstetigkeitsstellen, Band „Analysis", 2. 4.

Die im Definitionsbereich von $\tan x$ und $\cot x$ ausgenommenen Winkel heißen *Unstetigkeitsstellen* der beiden Funktionen.

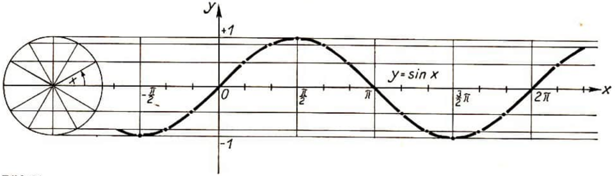


Bild 64

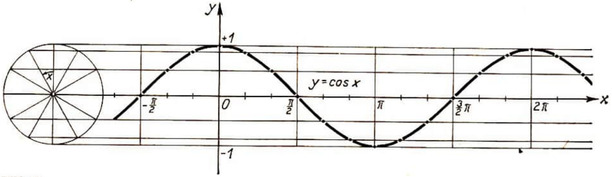


Bild 65

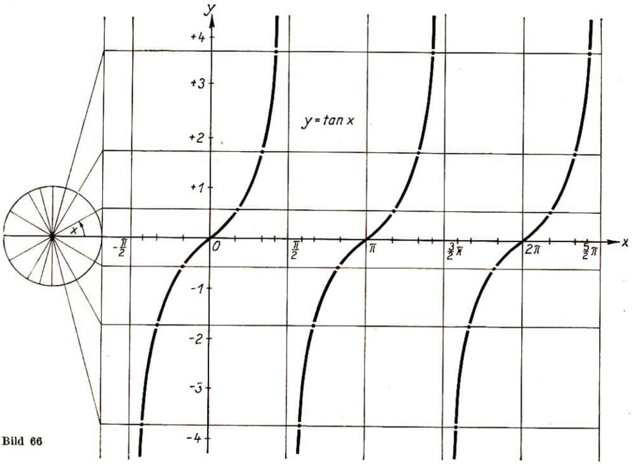


Bild 66

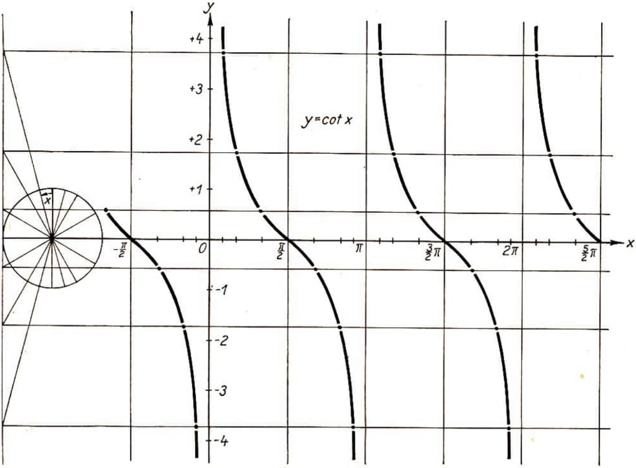


Bild 67

Eine anschauliche Vorstellung von den trigonometrischen Funktionen geben ihre Kurven (Bilder 64 bis 67).

Man beachte, daß wegen Fußnote 1) auf Seite 244 als Argument der trigonometrischen Funktionen $x = \frac{\varphi}{\text{rad}}$ aufgetragen werden muß, damit der Maßstab auf beiden Achsen gleich wird und dadurch unverzerrte Bilder entstehen.

Periodizität der trigonometrischen Funktionen

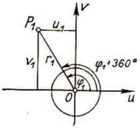


Bild 68

Betrachtet man einen beliebigen festen Punkt P_1 der Ebene, so ist seine Lage durch die zugehörigen rechtwinkligen Koordinaten u_1; v_1 oder durch die Polarkoordinaten r_1; φ_1 eindeutig bestimmt. Man erkennt, daß auch die Polarkoordinaten r_1; $\varphi_1 + k \cdot 360°$ ($k \in G$) auf denselben Punkt P_1 führen (Bild 68). Hieraus folgt, daß sich die Werte der vier trigonometrischen Funktionen mindestens alle 360° wiederholen.
Im einzelnen ergibt sich: Wird der Radiusvektor OP von 0° aus im positiven und im negativen Sinn unbegrenzt gedreht, so wiederholen sich die Sinus- und Cosinuswerte alle 360° und die Tangens- und Cotangenswerte alle 180°. Aus dieser unbegrenz-

ten Drehung des Radius in beiden Richtungen (Bilder 60 bis 63) ergibt sich eine unbegrenzte Fortsetzung der Kurven nach links und rechts (Bilder 64 bis 67).

Satz

Die trigonometrischen Funktionen sind *periodische Funktionen.* Die Sinus- und die Cosinusfunktion haben die Periode 360°, bei der Tangens- und der Cotangensfunktion beträgt die Periode 180°.

Dieser Satz ist gleichwertig mit folgenden Gleichungen:

Periodizität der trigonometrischen Funktionen

$$\boxed{\begin{aligned} \sin(\varphi + k \cdot 360°) &= \sin\varphi \\ \cos(\varphi + k \cdot 360°) &= \cos\varphi \\ \tan(\varphi + k \cdot 180°) &= \tan\varphi \\ \cot(\varphi + k \cdot 180°) &= \cot\varphi \end{aligned}} \qquad (44)$$

mit $k \in G$

Mit (44) lassen sich trigonometrische Funktionswerte beliebiger Winkel auf Funktionswerte von Winkeln zwischen 0° und 360° zurückführen.

BEISPIELE

1. $\sin 620° = \sin(620° - 360°) = \underline{\underline{\sin 260°}}$
2. $\cos(-630°) = \cos(-630° + 2 \cdot 360°) = \underline{\underline{\cos 90°}}$
3. $\tan 865° = \tan(865° - 4 \cdot 180°) = \underline{\underline{\tan 145°}}$
4. $\cot 390° = \cot(390° - 2 \cdot 180°) = \underline{\underline{\cot 30°}}$
5. $\cos\left(-\frac{14}{3}\pi \text{ rad}\right) = \cos\left(-\frac{14}{3}\pi \text{ rad} + 3 \cdot 2\pi \text{ rad}\right) = \underline{\underline{\cos\frac{4}{3}\pi \text{ rad}}}$
6. $\tan\frac{13}{4}\pi \text{ rad} = \tan\left(\frac{13}{4}\pi \text{ rad} - 3 \cdot \pi \text{ rad}\right) = \underline{\underline{\tan\frac{\pi}{4} \text{ rad}}}$

Anmerkung: Die allgemeine Definition (40) der trigonometrischen Funktionen wurde so gewählt, daß sie für beliebig große Winkel φ gültig ist. Dies ist für die Anwendung der trigonometrischen Funktionen bei Aufgaben aus Physik und Technik notwendig.

BEISPIEL

7. Eine an einem Faden aufgehängte kleine Kugel P bewege sich mit konstanter Geschwindigkeit v auf einem Kreis vom Halbmesser a (Bild 69, a). Die Projektion dieser Kreisbewegung auf eine senkrecht zur Kreisebene stehende Wand ergibt ein Hin- und Hergehen des punktförmigen Kugelschattens P' auf einer Strecke der Länge $2a$ (Bild 69, b). Man sagt, die Projektion P' der kreisenden Kugel führe eine harmonische Schwingung aus. Braucht die Kugel für einen Umlauf des Kreises die Zeit T, so ist T auch die Zeitdauer einer Schwingung, d. h. eines Hin- und Hergangs von P'. T wird als Periode oder Schwingungsdauer bezeichnet. Da in

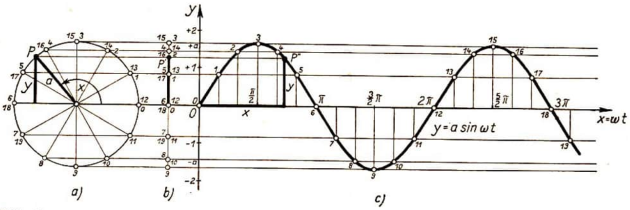


Bild 69

der Zeit T der Vollwinkel φ_0 durchlaufen wird, lautet die allgemeine Größengleichung für die Winkelgeschwindigkeit (Kreisfrequenz)

$$\omega = \frac{\varphi_0}{T}, \tag{I}$$

und die auf die Winkeleinheit „Radiant" sowie die Zeiteinheit „Sekunde" zugeschnittene Größengleichung für ω heißt

$$\omega \Big/ \frac{\text{rad}}{\text{s}} = \frac{2\pi}{T/\text{s}}. \tag{I a}$$

Die allgemeine Größengleichung für die Bahn- oder Tangentialgeschwindigkeit v wird, da in der Zeit T der Umfang des Kreises vom Radius a durchlaufen wird:

$$v = \frac{2\pi a}{T}. \tag{II}$$

Hieraus folgt die auf die Längeneinheit „Meter" und die Zeiteinheit „Sekunde" zugeschnittene Größengleichung:

$$v \Big/ \frac{\text{m}}{\text{s}} = \frac{2\pi a/\text{m}}{T/\text{s}}. \tag{II a}$$

Dies ergibt mit (I a)

$$v \Big/ \frac{\text{m}}{\text{s}} = \omega \Big/ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot a/\text{m} \tag{III a}$$

oder die bezüglich Länge und Zeit allgemeine Größengleichung

$$v = \frac{\omega}{\text{rad}} \cdot a. \tag{III b}$$

Mit (35) erhält man hieraus die nun auch bezüglich des Winkels allgemeine Größengleichung

$$v = \frac{2\pi}{\varphi_0}\,\omega a. \tag{III}$$

Für den in der Zeit t durchlaufenen Winkel φ gilt die Proportion

$$\varphi : \varphi_0 = t : T,$$

so daß mit (I) folgt:

$$\varphi = \omega t. \tag{IV}$$

Wegen $x = \frac{\varphi}{\text{rad}}$ wird hieraus:

$$x = \frac{\omega}{\text{rad}}\, t. \tag{IVa}$$

Für den jeweiligen Abstand y des schwingenden Punktes P' von der Mittellage, Ausschlag oder Elongation genannt, wird wegen (40) aus Bild 69, a entnommen:

$$y = a \sin x \quad \text{oder} \quad y = a \sin \frac{\omega}{\text{rad}}\, t. \tag{V}$$

Wird der Kreis mehr als einmal durchlaufen, so wird $x > 2\pi$, d. h., die Definition der Sinusfunktion wird für beliebig große Winkel gebraucht. Um den zeitlichen Ablauf der Schwingungen zu veranschaulichen, trägt man die zu x gehörige Elongation y in einem rechtwinkligen Koordinatensystem auf (Bild 69, c).

Zum besseren Verständnis, insbesondere für die Größengleichungen, sei das folgende Zahlenbeispiel angegeben. Für $T = 0{,}5$ s und $a = 0{,}2$ m z. B. ergibt sich aus (I a) und (II): $\omega = 12{,}57$ rad/s, $v = 2{,}51$ m/s. Dies liefert beispielsweise für $t = T/6$ wegen (IV), (IVa) und (V) bei Beachtung von (37b), (38) und (42):

$$\varphi = 1{,}05 \text{ rad} = 60°, \quad x = 1{,}05, \quad y = 0{,}17 \text{ m}.$$

AUFGABE

616. Man zeichne einen Viertelkreis vom Radius 10 cm und ermittle graphisch die Werte der Sinus- und der Cosinusfunktion und, soweit möglich, auch der Tangens- und der Cotangensfunktion für die Winkel 10°, 20°, 30°, ..., 80°.

22.4. Zusammenhang zwischen den trigonometrischen Funktionen

Im folgenden werden Gleichungen hergeleitet, die die Grundlage dafür bieten, um jede trigonometrische Funktion durch eine der drei anderen auszudrücken.

Aus (40) und Bild 58 ergibt sich:

$$\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = \frac{v^2}{r^2} + \frac{u^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1.$$

Diese Gleichung führt den Namen

Trigonometrische Form des Lehrsatzes von Pythagoras

$$\boxed{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1} \tag{45}$$

Ferner gilt:

$$\tan\varphi = \frac{v}{u} = \frac{1}{\frac{u}{v}} = \frac{1}{\cot\varphi}$$

$$\boxed{\tan\varphi = \frac{1}{\cot\varphi}} \tag{46}$$

Außerdem findet man:

$$\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{v}{r} : \frac{u}{r} = \tan\varphi .$$

$$\boxed{\tan\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}} \qquad (47)$$

Hieraus wegen (46):

$$\boxed{\cot\varphi = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}} \qquad (48)$$

Die Formeln sind für beliebige Winkel φ gültig, abgesehen von den Ausnahmen, die aus (43) hervorgehen.

BEISPIEL

Gegeben: $\cot\varphi$; gesucht: $\cos\varphi$.

Lösung: Aus (45) und (48) folgt zunächst:

$$\cot\varphi = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} = \frac{\cos\varphi}{\sqrt{1-\cos^2\varphi}} .$$

Quadriert:

$$\cot^2\varphi = \frac{\cos^2\varphi}{1-\cos^2\varphi} .$$

Hieraus durch Umstellen:

$$\cot^2\varphi = \cos^2\varphi\,(1+\cot^2\varphi).$$

Also:

$$\underline{\underline{\cos\varphi = \frac{\cot\varphi}{\sqrt{1+\cot^2\varphi}}}} .$$

Anmerkung: Über das Vorzeichen des gesuchten Funktionswertes entscheidet der Quadrant des Winkels φ nach (41). Entsprechendes gilt für die folgende Tabelle.

Zusammenhang zwischen den trigonometrischen Funktionen

Gegeben / Gesucht	$\sin\varphi$	$\cos\varphi$	$\tan\varphi$	$\cot\varphi$
$\sin\varphi$	$\sin\varphi$	$\sqrt{1-\cos^2\varphi}$	$\frac{\tan\varphi}{\sqrt{1+\tan^2\varphi}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\varphi}}$
$\cos\varphi$	$\sqrt{1-\sin^2\varphi}$	$\cos\varphi$	$\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\varphi}}$	$\frac{\cot\varphi}{\sqrt{1+\cot^2\varphi}}$
$\tan\varphi$	$\frac{\sin\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\varphi}}$	$\frac{\sqrt{1-\cos^2\varphi}}{\cos\varphi}$	$\tan\varphi$	$\frac{1}{\cot\varphi}$
$\cot\varphi$	$\frac{\sqrt{1-\sin^2\varphi}}{\sin\varphi}$	$\frac{\cos\varphi}{\sqrt{1-\cos^2\varphi}}$	$\frac{1}{\tan\varphi}$	$\cot\varphi$

(49)

Die in der Tabelle zusammengefaßten Beziehungen zwischen den vier trigonometrischen Funktionen ergeben sich auch unmittelbar aus Bild 70, in dem die aus dem pythagoreischen Lehrsatz folgenden Ausdrücke enthalten sind.

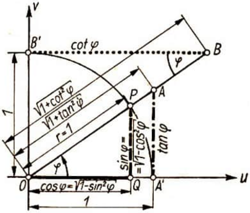


Bild 70

AUFGABEN

617. Wie lauten die Gültigkeitsbereiche für die Gleichungen (45) bis (48)?

618. Die in der Tabelle (49) angegebenen Beziehungen sind nachzuprüfen.

619. Die Werte der drei anderen Funktionen sind für

a) $\sin\varphi = \frac{7}{25}$; b) $\cos\varphi = 0{,}6$;

c) $\tan\varphi = \frac{12}{5}$

zu bestimmen. Dabei sei $\varphi \in (0°; 90°)$.

620. Man berechne die anderen Funktionswerte für

a) $\sin\varphi = \frac{4\sqrt{m}}{1+4m}$; b) $\cos\varphi = \frac{1-q^2}{1+q^2}$.

m bzw. q seien vorgegebene Konstanten.

621. Die Gleichungen

a) $1 + \tan^2\varphi = \frac{1}{\cos^2\varphi}$; b) $1 + \cot^2\varphi = \frac{1}{\sin^2\varphi}$

sind zu beweisen.

622. Folgende Ausdrücke sind zu vereinfachen:

a) $\frac{\sin\varphi}{\tan\varphi}$; b) $\frac{\cot\varphi}{\cos\varphi}$; c) $\cos\varphi\sqrt{1+\tan^2\varphi}$.

22.5. Trigonometrische Funktionen im rechtwinkligen Dreieck

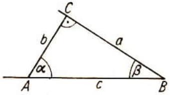


Bild 71

Aus (40) folgen bei Beschränkung auf $\varphi \in (0°; 90°)$, $u \in (0; +\infty)$, $v \in (0; +\infty)$ und bei gewohnten Bezeichnungen, wie sie in Bild 71 eingetragen sind, für die trigonometrischen Funktionen die bekannten Beziehungen in Form von Seitenverhältnissen am rechtwinkligen Dreieck.

Erklärung der trigonometrischen Funktionen im rechtwinkligen Dreieck

$$\boxed{\begin{aligned} \sin\alpha &= \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{a}{c} \\ \cos\alpha &= \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{b}{c} \\ \tan\alpha &= \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{a}{b} \\ \cot\alpha &= \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}} = \frac{b}{a} \end{aligned}} \tag{50}$$

Aus Bild 71 folgt mit (50): $\sin \beta = \frac{b}{c} = \cos \alpha$ usw. Wegen $\beta = 90° - \alpha$ ergeben sich daher Beziehungen für die Funktionen eines Winkels und seines Komplementwinkels.

Komplementbeziehungen[1])

$$\boxed{\begin{aligned} \sin\,(90° - \alpha) &= \cos \alpha \\ \cos\,(90° - \alpha) &= \sin \alpha \\ \tan\,(90° - \alpha) &= \cot \alpha \\ \cot\,(90° - \alpha) &= \tan \alpha \end{aligned}} \qquad (51)$$

Diese Beziehungen veranlassen dazu, die Cosinus- bzw. Cotangensfunktion **Cofunktion** der Sinus- bzw. Tangensfunktion zu nennen und umgekehrt.

Herkunft und Bedeutung des Wortes Sinus sind umstritten. Im Einheitskreis ist die Maßzahl der halben Sehne gleich dem Sinus des zugehörigen halben Zentriwinkels. Daher hängt die Entstehung der Bezeichnung sinus vermutlich mit den Sehnentafeln des PTOLEMÄUS[2]) zusammen, die von den Indern verbessert wurden. Das indische Wort ardhajyâ für Sehne übersetzten die Araber mit dschiba. Da in der arabischen Schrift die Vokale nicht mitgeschrieben wurden, verwechselte man das Wort wahrscheinlich mit dschaib, die Ausbuchtung, was dann im Lateinischen durch sinus wiedergegeben wurde. Andere Quellen führen das Wort Ausbuchtung auf die Form der Sinuskurve zurück.

Die Funktionsbezeichnung tangens hat sich daraus ergeben, daß der Tangens als Tangente (lat. tangere, berühren) am Einheitskreis erscheint (Bild 60).

Der Cosinus eines Winkels ist gleich dem Sinus des Komplementwinkels [vgl. (51)], lat. sinus complementi, daher abgekürzt und zusammengezogen zu cosinus. Entsprechendes gilt für cotangens.

Die Berechnung des rechtwinkligen Dreiecks ist dem Leser von seiner früheren Ausbildung[3]) bekannt und wird daher in diesem Lehrbuch nicht ausführlich besprochen.

AUFGABEN

623. Ein regelmäßiges Sechseck mit der Seite $a = 5$ cm ist gegen die Horizontalebene um den Winkel $\alpha = 30°$ geneigt. Wie groß ist der Flächeninhalt A' der Projektion?

624. Durch eine Grundkante eines gegebenen Würfels mit der Kantenlänge $a = 12{,}5$ cm ist eine unter $\alpha = 30°$ geneigte Ebene gelegt. Wie groß sind die Rauminhalte der beiden Teile, in die der Würfel durch die Ebene zerfällt?

625. 0,8 m über der Mitte eines runden Tisches von 1,20 m Durchmesser ist eine Lampe mit der Lichtstärke $I = 200$ cd angebracht. Wie groß ist die Beleuchtungsstärke E am Rande des Tisches? (Bild 72). Man beachte, daß sich E aus der Formel $E = \frac{I}{r^2} \sin \varphi$ (in lx) ergibt, wobei r die Entfernung der Lichtquelle von der beleuchteten Fläche in Metern und φ der Winkel zwischen Lichtstrahlrichtung und beleuchteter Fläche ist.

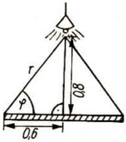


Bild 72

[1]) Dieser Name wurde gewählt, weil z. B. $\cos \alpha$ gleich dem Sinus des Komplementwinkels von α ist
[2]) CLAUDIUS PTOLEMÄUS (etwa 90 bis 160), griech. Mathematiker und Astronom
[3]) Vgl. z. B. El. math. Abschnitt 26.

626. Ein Seil läuft über eine kleine Rolle. Es trägt an dem einen Ende die Last $Q = 200$ kp und wird am anderen Ende mit der Kraft $F = 200$ kp unter einem Winkel 30° gegen die Horizontale gehalten. Welche Zugkraft F_Z muß die Pendelstange, an der die Rolle befestigt ist, aufnehmen, und unter welchem Winkel α gegen die Horizontale stellt sie sich ein? (Bild 73).

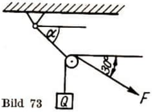


Bild 73

22.6. Einrichtung und Benutzung der trigonometrischen Funktionstafeln

Die Berechnung der Funktionswerte für beliebige Winkel ist wesentlich schwieriger als für die speziellen Winkel 0°, 30°, 45°, ... [vgl. (42)]. Daher wurden Tafelwerke geschaffen, aus denen die Funktionswerte ohne Schwierigkeiten entnommen werden können. Zweierlei Tafeln sind grundsätzlich zu unterscheiden, die Tafeln der trigonometrischen Funktionswerte, auch Tafeln der natürlichen Werte der trigonometrischen Funktionen genannt, und die Tafeln der Logarithmen der trigonometrischen Funktionswerte. Beide sind stets in den gebräuchlichen Logarithmentafeln enthalten[1]).
Die Tafeln enthalten die Funktionswerte oder ihre Logarithmen für die Winkel 0° bis 90°, wobei der Tafelumfang durch Berücksichtigung der Komplementbeziehungen (51) auf die Hälfte reduziert ist. Die Funktionswerte von Winkeln über 90° müssen auf Funktionswerte von spitzen Winkeln zurückgeführt werden, was der Leser in 22.9. kennenlernt.
Soll der Logarithmus eines Funktionswertes für einen Winkel aufgesucht werden, der nicht in vollen Minuten bzw. nicht in vollen Hundertstelgrad gegeben ist, wie z. B. $\lg \cos 32°12'15''$ oder $\lg \sin 17{,}4533°$, so hat man wie in der gewöhnlichen Logarithmentafel zu interpolieren. Hierbei ist zu beachten, daß Cosinus und Cotangens im I. Quadranten fallende Funktionen sind, d. h., daß ihre Funktionswerte mit wachsendem Winkel abnehmen (vgl. Bilder 65 und 67). Bei ihnen muß also der Interpolationsbetrag stets subtrahiert werden, falls mit fortschreitendem Winkel interpoliert wird. Entsprechendes gilt auch für die Tafeln der natürlichen Werte. Auf die Besprechung von Beispielen für die Interpolation wird verzichtet, da der Leser diese Aufgaben in seiner Grundausbildung[2]) ausführlich geübt hat.
Die natürlichen und die logarithmischen Werte der Winkelfunktionen sind im allgemeinen irrationale Zahlen, d. h., sie werden durch unendliche, nichtperiodische Dezimalbrüche dargestellt. Wir müssen uns jedoch bei der Angabe ihres Wertes auf eine endliche Anzahl von Dezimalen beschränken und unterscheiden daher 4stellige, 5stellige, 6stellige, 7stellige usw. Tafeln der trigonometrischen Funktionen. Je höher die Genauigkeitsansprüche an die Rechnung sind, desto genauer brauchen wir die Funktionswerte, d. h., mit desto mehr Dezimalen müssen sie verwendet werden. Für Berechnungen im Unterricht reichen 4- oder 5stellige Tafeln aus, desgleichen für viele Rechnungen der Praxis.

Hinweise zum Rechenschema

Bei der Lösung einer Aufgabe werden zuerst die für die Rechnung notwendigen Formeln zusammengestellt. Dann erfolgt die Zahlenrechnung. Im folgenden wird für

[1]) Vgl. die Tafeln lt. Literaturhinweis S. 580
[2]) Vgl. El. math., 7.2.2.

logarithmische Berechnungen ein Schema benutzt. In diesem werden die Operationszeichen weggelassen, da die jeweilige Rechenoperation für die Logarithmen aus den neben dem Rechenschema stehenden Formeln abgelesen werden kann.

BEISPIEL

Von einem rechtwinkligen Dreieck seien die Hypotenuse $c = 31{,}294$ m und der Winkel $\alpha = 48{,}204°$ gegeben (Bild 74).

Gesucht sind β, a, b.

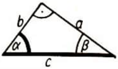


Bild 74

Lösung:

$\beta = 90° - \alpha$

$a = c \sin \alpha$

$b = c \cos \alpha$

$\underline{\underline{\beta = 41{,}796°}}$

$\underline{\underline{a = 23{,}331 \text{ m}}}$

$\underline{\underline{b = 20{,}857 \text{ m}}}$

N	$\lg N$
a	1,367 92
$\sin \alpha$	9,872 46 − 10
. . . .	. . . .
c	1,495 46
. . . .	. . . .
$\cos \alpha$	9,823 79 − 10
b	1,319 25

22.7. Rechnen mit kleinen Winkeln

Aus Bild 75 liest man für Winkel x rad $= \alpha \in (0°; 90°)$

$$r \sin x < rx < r \tan x$$

ab. Diese Beziehung geht für kleine Winkel x bei Division durch r über in:

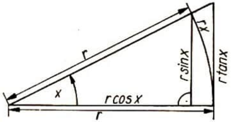


Bild 75

Für *kleine Winkel* $\alpha = x$ rad gilt:

$$\boxed{\sin x \approx x \approx \tan x} \qquad (52)$$

Aus der Funktionstafel entnimmt man folgende Werte:

α	$\sin x$	x	$\tan x$
1°	0,0175	0,0175	0,0175
2°	0,0349	0,0349	0,0349
3°	0,0523	0,0524	0,0524
4°	0,0698	0,0698	0,0699
5°	0,0872	0,0873	0,0875
6°	0,1045	0,1047	0,1051

Hieraus ist zu erkennen, in welchem Bereich die Näherungsformel (52) gültig ist. Dieser Anwendungsbereich läßt sich genauer wie folgt angeben (ohne Beweis):

$$\left.\begin{matrix}3\text{-}\\4\text{-}\\5\text{-}\\6\text{-}\end{matrix}\right\}\text{stellige Rechnung:}\quad |\alpha| < \left\{\begin{matrix}5{,}7^\circ\\2{,}6^\circ\\1{,}2^\circ\\0{,}6^\circ\end{matrix}\right.$$

BEISPIEL

Für die Schwingungsdauer T einer harmonischen Schwingung gilt:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{my}{F}}.$$

Hierbei bedeutet m die schwingende Masse, y den Ausschlag aus der Ruhelage, F die rücktreibende Kraft. Die Schwingungsdauer des mathematischen Pendels ist für kleine Ausschlagswinkel $\alpha < 5^\circ$ zu berechnen.

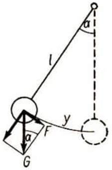


Bild 76

Lösung: Der jeweilige Ausschlag ist der zum Winkel α gehörige Bogen $y = l\alpha$, für die rücktreibende Kraft ergibt sich $F = G\sin\alpha = mg\sin\alpha$ (Bild 76). Wird für kleine Ausschläge nach (52) $\sin\alpha \approx \alpha$ gesetzt, so findet man aus obiger Formel:

$$\underline{\underline{T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}}$$

22.8. Trigonometrische Funktionen auf dem Rechenstab

Für Rechnungen mit geringerer Genauigkeit oder für Überschlagsrechnungen können mit Vorteil statt der trigonometrischen Funktionstafel die trigonometrischen Teilungen des Rechenstabs benutzt werden.
Auf den gebräuchlichen Rechenstäben sind im allgemeinen drei trigonometrische Teilungen angebracht:

1. die Sinusteilung, mit sin oder S bezeichnet,
2. die Tangensteilung, mit tan oder T bezeichnet,
3. die Sinus-Tangens-Teilung, mit sin/tan oder S/T oder arc bezeichnet.

Diese Teilungen enthalten die Winkel in sexagesimal- oder dezimalgeteiltem Altgrad und arbeiten jeweils mit einer der vier Skalen A, B, C, D zusammen, auf denen die Funktionswerte abzulesen sind.
Die trigonometrischen Teilungen umfassen im allgemeinen folgende Bereiche für die Winkel und Funktionswerte:

sin-Teilung:	$5^\circ 44' \dots 90^\circ$	mit den Sinuswerten 0,1 … 1
tan-Teilung:	$5^\circ 43' \dots 45^\circ$	mit den Tangenswerten 0,1 … 1
sin/tan-Teilung:	$34' \dots 5^\circ 44'$	mit den Sinus- bzw. Tangenswerten 0,01 … 0,1

Wegen (52) lassen sich mit der sin/tan-Teilung die Sinus- und die Tangenswerte im Bereich $[34'; 5^\circ 44']$ näherungsweise gemeinsam einstellen. Aus demselben Grund werden die Sinus- und die Tangenswerte für Winkel im Bereich $[0^\circ; 34']$ ohne die trigonometrischen Teilungen genähert aus (38) unter Benutzung der Marken ϱ bestimmt.

Am häufigsten sind zwei Typen des Rechenstabs vertreten:

1. System „Rietz"

Die drei trigonometrischen Teilungen befinden sich auf der Rückseite der Zunge. Die Zunge wird so verschoben, daß der zum Winkel α gehörige Teilstrich mit der festen Marke koinzidiert, die auf der Rückseite des Stabes (häufig an einem U-förmigen Ausschnitt) angebracht ist. Der Funktionswert wird auf der Vorderseite des Rechenstabes gegenüber der 1 bzw. 10 der D-Skale auf der C-Skale abgelesen. Man beachte, daß 0, ... bzw. 0,0 ... der Ziffernfolge vorzusetzen ist. Bei älteren Typen dieses Systems und bei einigen Taschenrechenstäben fehlt die sin/tan-Teilung. Dafür enthält die Sinusteilung die Winkel $\alpha \in [34'; 90°]$. Die zugehörigen Sinuswerte (und die genäherten Tangenswerte für $\alpha \in [34'; 5°43'])$ umfassen den Bereich $[0{,}01; 1]$ und werden daher gegenüber der 1 bzw. 100 der A-Skale auf der B-Skale abgelesen.

2. System „Darmstadt"

Die drei trigonometrischen Teilungen befinden sich auf der Rückseite des Stabkörpers. Der rückseitige Läuferstrich wird auf den Winkel α der trigonometrischen Teilung eingestellt, auf der Vorderseite liest man an der Läufermarke auf der D-Skale den Funktionswert ab. Bei anderen Rechenstabfabrikaten dieses Systems sind nur die ersten beiden trigonometrischen Teilungen auf der unteren Seite des Stabkörpers angebracht. Die Funktionswerte für $\alpha \in [34'; 5°43']$ werden daher wie diejenigen im Bereich $[0°; 34']$ näherungsweise nach (52) und (38) bestimmt.

Die Cosinuswerte für $\alpha \in [0°; 90°]$ und die Cotangenswerte für $\alpha \in [45°; 90°]$ ergeben sich aus $\sin\alpha$ bzw. $\tan\alpha$ durch Anwendung der Komplementbeziehungen (51). Für die Bestimmung der Werte $\tan\alpha$ im Intervall $[45°; 90°)$ und $\cot\alpha$ im Intervall $(0°; 45°]$ benutzt man die Formel (46). Soll beispielsweise tan 75° ermittelt werden, so hat man wegen

$$\tan 75° = \frac{1}{\cot 75°} = \frac{1}{\tan 15°}$$

auf der Tangensteilung 15° einzustellen und den Kehrwert von tan 15° auf der Reziprokskale CI des Rechenstabs abzulesen. Hierbei ist zu beachten, daß das Ergebnis für $\alpha \in [45°; 84°17']$ im Intervall $[1; 10]$ liegt. Entsprechend ergibt sich z. B.

$$\cot 20° = \frac{1}{\tan 20°}.$$

Wegen der Vielfalt der Rechenstabfabrikate wird dem Leser empfohlen, stets zu überprüfen, wie am jeweils benutzten Rechenstab einzustellen und abzulesen ist. Hierfür eignen sich am besten die bekannten Funktionswerte

$$\sin 30° = 0{,}5 \qquad \text{und} \qquad \tan 30° = \frac{1}{3}\sqrt{3} \approx 0{,}577.$$

BEISPIEL

Die im Beobachtungsort B gemessene Zenitdistanz z muß bei nahe gelegenen Gestirnen G vor dem Einsetzen in die Rechnung um die sog. Parallaxe p verbessert werden, weil in den astronomischen Berechnungen die im Erdmittelpunkt M erscheinende Zenitdistanz $z_0 = z - p$ gebraucht wird (Bild 77). Für die Sonne mit der Entfernung $e = 149{,}6 \cdot 10^6$ km von der Erde ist p bei den Zenitdistanzen $z = 30°, 40°, \ldots, 90°$ mit dem Rechenstab zu berechnen ($R = 6370$ km).

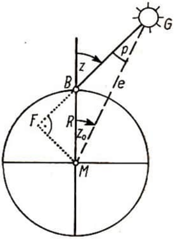


Bild 77

Lösung: In den rechtwinkligen Dreiecken GFM und BFM gilt:

$$\sin p = \frac{\overline{FM}}{e} \qquad \sin z = \frac{\overline{FM}}{R}.$$

$\overline{FM}$ eliminiert:

$$\sin p = \frac{R}{e} \sin z\ ^{1)}.$$

Da R im Vergleich zu e klein ist, wird p sehr klein. Mit (52) findet man bei Beachtung von (38):

$$p/'' = \varrho/'' \cdot \frac{R}{e} \sin z.$$

Mit dem Rechenstab ergeben sich wegen $\varrho = 206265''$ folgende Werte:

z	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
p	4,4″	5,7″	6,7″	7,6″	8,3″	8,7″	8,8″

AUFGABEN

627. Ein rechtwinkliges Dreieck ABC ist zu berechnen aus (Rechenstab):
   a) $a = 33$ cm; $b = 56$ cm. Gesucht: α, β, c, A, h_c
   b) $a = 24$ cm; $c = 74$ cm. Gesucht: α, β, b, A, h_c
   c) $a = 40$ cm; $\alpha = 43°36'$. Gesucht: β, b, c, A
   d) $b = 60$ cm; $\alpha = 39°48'$. Gesucht: β, c, a, A
   e) $c = 50$ cm; $\beta = 53°08'$. Gesucht: α, a, b, A

628. Ein gleichschenkliges Dreieck ABC (Bild 78) ist logarithmisch zu berechnen aus:
   a) $a = 41{,}33$ m; $\gamma = 30{,}3°$. Gesucht: α, c, h_c, A
   b) $c = 18{,}12$ m; $\alpha = 45{,}3°$. Gesucht: γ, a, h_c, A
   c) $c = 28{,}04$ m; $\gamma = 50{,}8°$. Gesucht: α, a, h_c, A
   d) $a = 61$ cm; $h_c = 11$ cm. Gesucht: α, γ, c, A
   e) $h_c = 35$ cm; $A = 420\ \text{cm}^2$. Gesucht: c, a, α, γ

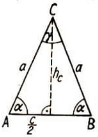


Bild 78

629. Von einem gleichschenkligen Dreieck seien die Basis $c = 28{,}00$ cm und der Schenkel $a = 42{,}30$ cm gegeben. Der Inkreisradius r_i und der Umkreisradius r sind zu berechnen.

630. Um wieviel länger ist der Bogen b als die Sehne s, wenn der Kreisradius $r = 80$ m beträgt und der zu b und s gehörige Zentriwinkel $\alpha = 22{,}33°$ ist?

631. In einem Kreis vom Halbmesser $r = 50$ cm seien auf verschiedenen Seiten des Mittelpunkts zwei parallele Sehnen gezogen, von denen die eine $a = 14$ cm und die andere $b = 30$ cm Abstand vom Kreismittelpunkt hat. Man berechne Inhalt und Umfang der von beiden Sehnen und dem Kreis eingeschlossenen Fläche.

632. Ein gerades regelmäßiges dreiseitiges Prisma mit den Grundkanten $a = 4$ cm und der Höhe $h = 12$ cm sei gegeben. Durch eine Grundkante wird eine Ebene gelegt, die gegen die Grundfläche unter dem Winkel $\alpha = 50{,}75°$ geneigt ist. Welches Volumen hat die abgeschnittene Pyramide?

633. Eine gerade regelmäßige dreiseitige Pyramide habe die Grundkante $a = 5$ cm und die Höhe $h = 8$ cm. Man berechne den Winkel α zwischen Grund- und Seitenkante, den Neigungswinkel β einer Seitenkante gegen die Grundfläche, den Neigungswinkel γ einer Seitenfläche gegen die Grundfläche sowie den Keilwinkel δ zwischen zwei Seitenflächen.

634. Ein zylindrischer Dampfkessel hat den Durchmesser $d = 1{,}00$ m und die Länge $l = 6{,}00$ m und ist bis zu einer Höhe $h = \frac{4}{5} d$ mit Wasser gefüllt. Wie groß ist die vom Wasser benetzte Fläche A des Dampfkessels?

---

[1]) Folgt auch unmittelbar aus dem Sinussatz

635. Wie groß sind der Mantel M und das Volumen V eines geraden Kreiskegels mit dem Öffnungswinkel $2\gamma = 31°36'40''$, dem eine Kugel vom Radius $r = 27{,}7$ cm einbeschrieben ist?

636. Zwei im Raum liegende Geraden g_1 und g_2 schließen den Winkel $\alpha = 55°$ miteinander ein und spannen eine Ebene auf, die gegen die Projektionsebene um den Winkel $\varphi = 68°$ geneigt ist und die die Projektionsebene in der Geraden g_1 schneidet. Wie groß ist der Winkel α' zwischen g_1 und der Projektion g_2' von g_2?

637. a) Man sagt, eine Gerade (Straße, Böschung u. ä.) habe eine Neigung $1:n$ oder eine Neigung von $p\,\%$, wenn sie auf n horizontale LE[1]) um 1 LE bzw. auf 100 horizontale LE um p LE steigt. Bezeichnet man den Neigungswinkel mit α, so gilt (Bild 79)

$$\tan\alpha = \frac{1}{n} = \frac{p}{100}.$$

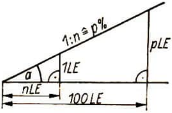


Bild 79

Man stelle eine Tabelle für den Neigungswinkel α in dezimalgeteiltem Altgrad bei einer Neigung von $p = 5, 10, 20, 40, 60, 80, 100\%$ auf.

b) Eine Straße habe eine Neigung von 8%. Wie groß ist ihr Neigungswinkel α, und welchen Höhenunterschied h muß ein Fahrzeug bei 75 m (schräger) Fahrbahn überwinden?

638. Ein Eisenbahndamm ist aufzuschütten. Die Kronenbreite soll 10 m und der Böschungswinkel 30° betragen. Da die Dammrichtung parallel zu den Höhenlinien des Geländes verläuft, hat die Dammsohle eine Querneigung von 15%. Die Dammhöhe h_2 soll 1,6 m betragen (Bild 80). Man berechne

a) die Dammhöhe h_1,

b) die Länge der Böschungsfallinien AD und BC,

c) die Breite AB der Dammsohle,

d) die Fläche $ABCD$ des Dammquerschnitts.

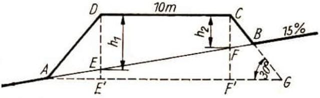


Bild 80

639. Bild 81 zeigt ein Walmdach in kotierter Projektion. Wie groß sind die Dachfläche A und die Neigungswinkel α_1 und α_2?

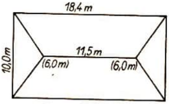


Bild 81

640. Welche Fläche A hat die Stirnseite eines exzentrischen Tonnengewölbes mit der Lichtweite $s = 7{,}20$ m, der lichten Bogenhöhe $p = 1{,}80$ m, der Scheiteldicke $d = 1{,}30$ m und der Dicke am Widerlager $c = 2{,}10$ m, wenn die Fuge am Widerlager nach dem Kreismittelpunkt der inneren Wölbung gerichtet ist (Bild 82)?

641. Von der Plattform eines $h = 28{,}50$ m hohen Aussichtsturmes mißt man mit dem Theodolit die Zenitdistanzen nach der Spitze und dem Fuß eines Schornsteins zu $\alpha = 85°30'$ und $\beta = 91°22'$. Aus dem Meßtischblatt entnimmt man die Horizontalentfernung des Schornsteins zu $e = 530$ m. Wie groß ist der Höhenunterschied Δh des Geländes beider Bauwerke, und welche Höhe x hat der Schornstein?

642. An einer Hauswand, die in west-östlicher Richtung steht, ist eine Sonnenuhr angebracht. Steht die Sonne im Süden,

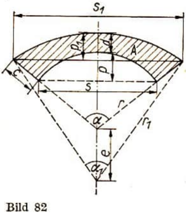


Bild 82

[1]) LE Längeneinheit

so wirft der an der Hauswand befestigte $l = 0{,}50$ m lange Stab einen lotrechten Schatten, der mit dem Stab einen Winkel $\varphi = 20°$ einschließt. Scheint die Sonne aus Südosten ($\beta = 45°$), so beträgt die Schattenlänge $s = 0{,}40$ m. Wie hoch steht dann die Sonne?

643. Man entwickle für den im Bild 83 dargestellten Querschnitt eines Zementrohres eine Flächenformel.

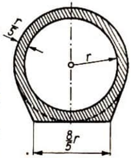


Bild 83

644. Die Höhe über Grund wurde bei den ehemaligen Zeppelinluftschiffen mit Hilfe des Echolotes bestimmt. Durch eine Schallquelle am Heck des Schiffes wurden Schallwellen ausgesandt, die von einem am Bug in 190 m Entfernung angebrachten Gerät aufgenommen wurden. Unter welchem Winkel (gegen die Senkrechte gemessen) treffen die Schallstrahlen auf die Erde auf, und wie hoch fliegt das Schiff, wenn die Fluggeschwindigkeit 125 km/h, die Schallgeschwindigkeit 333 m/s und die Zeit von Aussendung bis Empfang der Schallwellen 6 s betragen?

645. Eine vorgegebene Kraft F ist in zwei Komponenten F_1 und F_2 derart zu zerlegen, daß die Komponenten senkrecht aufeinanderstehen und F_1 mit F den Winkel α einschließt:

a) $F = 44$ kp, $\alpha = 30°$; b) $F = 512$ kp, $\alpha = 42{,}5°$; c) $F = 141{,}4$ kp, $\alpha = 45°$.

646. Eine vorgegebene Kraft F ist in zwei gleich große Komponenten F_1 und F_2 zu zerlegen, die miteinander den Winkel α einschließen:

a) $F = 471$ kp, $\alpha = 48°$; b) $F = 240$ kp, $\alpha = 72{,}5°$

647. Ein Sparren schließt mit der Horizontalebene einen Winkel $\alpha = 36{,}25°$ ein und erzeugt in seiner Richtung eine Kraft $F = 1000$ kp. Man berechne Horizontalschub F_H und Vertikaldruckkraft F_V in der Mauer am Angriffspunkt des Sparrens (Bild 84).

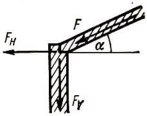


Bild 84

648. Auf einer schiefen Ebene mit dem Neigungswinkel $\alpha = 21{,}5°$ gleitet eine Last $F_L = 223{,}2$ kp. Wie groß sind der Hangabtrieb F_H, die die Reibung erzeugende Normalkraft F_N und die Reibung F_R (Reibungskoeffizient für Gleitreibung $\mu = 0{,}3$)?

22.9. Quadrantenrelationen

Zwischen den Werten der trigonometrischen Funktionen von Winkeln im II. bis IV. Quadranten und den Funktionswerten im I. Quadranten bestehen Beziehungen, die **Quadrantenrelationen** genannt werden.

Wie aus den Bildern 64 bis 67 zu ersehen ist, treten die Funktionswerte des I. Quadranten abgesehen vom Vorzeichen auch in den anderen drei Quadranten jeweils genau für einen Winkel auf. Die Funktionstafeln lassen sich daher und wegen (44) für beliebige Winkel benutzen, obwohl sie die trigonometrischen Funktionswerte nur für spitze Winkel enthalten.

BEISPIEL

1. Wie lauten die Quadrantenrelationen für den Winkel $180° - \varphi$?

Lösung: Aus der Kongruenz der Dreiecke OQP und OQ_1P_1 in Bild 85 folgt $v_1 = v$ und $u_1 = -u$. Daher erhält man mit (40), 22.1.:

$$\sin(180° - \varphi) = \frac{v_1}{r} = \frac{v}{r} = \sin\varphi$$

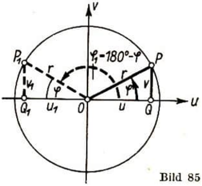


Bild 85

$$\cos(180° - \varphi) = \frac{u_1}{r} = \frac{-u}{r} = -\frac{u}{r} = -\cos\varphi$$

$$\tan(180° - \varphi) = \frac{v_1}{u_1} = \frac{v}{-u} = -\frac{v}{u} = -\tan\varphi$$

$$\cot(180° - \varphi) = \frac{u_1}{v_1} = \frac{-u}{v} = -\frac{u}{v} = -\cot\varphi$$

Auf der gleichen Grundlage ergeben sich für alle Quadranten und Bezugswerte (90° oder 270° bzw. 180° oder 360°) folgende Beziehungen:

Quadrantenrelationen

Funktion \ α	$90° \pm \varphi$	$180° \pm \varphi$	$270° \pm \varphi$	$360° \pm \varphi$
$\sin\alpha$	$+\cos\varphi$	$\mp\sin\varphi$	$-\cos\varphi$	$\pm\sin\varphi$
$\cos\alpha$	$\mp\sin\varphi$	$-\cos\varphi$	$\pm\sin\varphi$	$+\cos\varphi$
$\tan\alpha$	$\mp\cot\varphi$	$\pm\tan\varphi$	$\mp\cot\varphi$	$\pm\tan\varphi$
$\cot\alpha$	$\mp\tan\varphi$	$\pm\cot\varphi$	$\mp\tan\varphi$	$\pm\cot\varphi$

(53)

Beim obigen Beispiel war φ als spitzer Winkel angenommen worden. Trotzdem gilt (53) für beliebige Winkel φ. Auf den Beweis wird verzichtet.
Sämtliche Quadrantenrelationen der Tabelle (53) lassen sich in einem Satz zusammenfassen:

Satz

Für beliebige Winkel φ gilt:

$$|F(180° \pm \varphi)| = |F(360° \pm \varphi)| = |F(\varphi)|$$

$$|F(\ 90° \pm \varphi)| = |F(270° \pm \varphi)| = |\mathrm{co}\ F(\varphi)|$$

Das Vorzeichen des Funktionswertes ist durch den Quadranten bestimmt, in dem der Winkel $\alpha = \cdots \pm \varphi$ liegt. In allgemeinen Rechnungen wird der Winkel φ als positiver spitzer Winkel angenommen.

Aus den Quadrantenrelationen (53) für den Winkel $360° - \varphi$ und der Periodizität (44) der Funktionen erhält man auch die allgemeingültigen Beziehungen zwischen den Funktionswerten für Argumente von gleicher Größe, aber verschiedenem Vorzeichen:

Beziehungen zwischen positiven und negativen Winkeln

$$\boxed{\begin{aligned} \sin(-\varphi) &= -\sin\varphi \\ \cos(-\varphi) &= +\cos\varphi \\ \tan(-\varphi) &= -\tan\varphi \\ \cot(-\varphi) &= -\cot\varphi \end{aligned}} \qquad (54)$$

BEISPIELE

Folgende Funktionswerte sind zu bestimmen, indem sie auf Funktionswerte positiver spitzer Winkel zurückgeführt werden.

2. $\sin 230°50' = \sin(180° + 50°50') = -\sin 50°50' = \underline{\underline{-0{,}77531}}$

Man kann auch über 270° rechnen:

$\sin 230°50' = \sin(270° - 39°10') = -\cos 39°10' = \underline{\underline{-0{,}77531}}$

Die erste Rechnung ist einfacher, da die Zerlegung einer Zahl in eine Summe bequemer ist als in eine Differenz. Es empfiehlt sich daher, jedesmal das unterhalb des vorgegebenen Winkels liegende ganzzahlige Vielfache von 90° zu suchen und hierauf die Umrechnung zu beziehen.

3. $\cos(-640{,}20°) = \cos 640{,}20° = \cos(360° + 280{,}20°) = \cos 280{,}20° =$
$= \cos(270° + 10{,}20°) = \sin 10{,}20° = \underline{\underline{0{,}17708}}$

4. $\tan(-332°50') = -\tan 332°50' = \cot 62°50' = \underline{\underline{0{,}51320}}$

5. $\cot(-102{,}75°) = \cot 102{,}75° = \tan 12{,}75° = \underline{\underline{0{,}22628}}$

Die Logarithmen der folgenden Funktionswerte sind zu bestimmen.

6. $\cos 217°50'$

Da die Cosinusfunktion im III. Quadranten negativ ist, gibt es im Bereich der reellen Zahlen den verlangten Logarithmus nicht. Deshalb schlägt man vom absoluten Betrag des Funktionswertes den Logarithmus auf und vermerkt hinter diesem den Buchstaben n, der zum Ausdruck bringen soll, daß der zum Logarithmus gehörige Numerus negativ ist. Entsprechend verfährt man in ähnlichen Fällen. Also:

N	$\lg \lvert N \rvert$
$\cos 217°50' = -\cos 37°50'$	$\underline{\underline{9{,}89752 - 10\ (n)}}$
7. $\tan 244°40' = \tan 64°40'$	$\underline{\underline{0{,}32476}}$
8. $\sin(-158{,}134°) = -\cos 68{,}134°$	$\underline{\underline{9{,}57105 - 10\ (n)}}$
9. $\cot 700{,}568° = -\tan 70{,}568°$	$\underline{\underline{0{,}45249\ (n)}}$

Für welche $\varphi \in [0°; 360°)$ in dezimalgeteiltem Altgrad werden folgende Gleichungen erfüllt?

10. $\cos\varphi = -0{,}9494$ Man erhält: $\underline{\underline{\varphi_1 = 161{,}7°}}$; $\underline{\underline{\varphi_2 = 198{,}3°}}$.

φ_1 und φ_2 folgen aus $\cos(180° \pm \varphi) = -\cos\varphi$.

11. $\tan\varphi = -1{,}171$ Dies ergibt: $\underline{\underline{\varphi_1 = 130{,}5°}}$; $\underline{\underline{\varphi_2 = 310{,}5°}}$.

φ_1 und φ_2 folgen aus $\tan(180° - \varphi) = \tan(360° - \varphi) = -\tan\varphi$.

Auf diese Art Aufgaben, in denen für einen gegebenen Funktionswert die zugehörigen Winkel zu bestimmen sind, wird in Abschnitt 25. näher eingegangen.

Eine Anwendung für die Quadrantenrelationen bietet die *Umformung von rechtwinkligen Koordinaten in Polarkoordinaten und umgekehrt* [aus (40) und Bild 58 in 22.1.]:

Umformung von rechtwinkligen Koordinaten in Polarkoordinaten und umgekehrt

$$\boxed{r = \sqrt{u^2 + v^2} \quad \Big| \quad \tan \varphi = \frac{v}{u}} \tag{55a}$$

$$\boxed{u = r \cos \varphi \quad \Big| \quad v = r \sin \varphi} \tag{55b}$$

Zur eindeutigen Bestimmung des Richtungswinkels $\varphi \in [0°; 360°)$ aus (55a) ist zu beachten, daß $\sin \varphi$ und v sowie $\cos \varphi$ und u wegen (40) im Vorzeichen übereinstimmen. Daher ergibt sich der Quadrant von φ aus (41) in 22.2.

BEISPIELE

12. Die rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes P_1 der Ebene seien zu $u_1 = -342{,}18$, $v_1 = 105{,}27$ gegeben. Wie groß sind die Polarkoordinaten r_1; φ_1 von P_1?

Lösung:

	N	$\lg \lvert N \rvert$
$u_1^2 = 117087$	v_1	2,02231
$v_1^2 = 11082$	u_1	2,53425 (n)
$r_1^2 = 128169$	$\tan \varphi_1$	9,48806 − 10 (n)
$\underline{\underline{r_1 = 358{,}01}}$		$\underline{\underline{\varphi_1 = 162{,}899°}}$

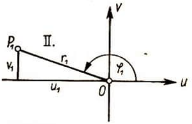


Bild 86

Wegen $u_1 < 0$, $v_1 > 0$ liegt φ_1 im II. Quadranten (Bild 86).

13. Aus den Polarkoordinaten $r_2 = 217{,}03$, $\varphi_2 = 301{,}542°$ eines Ebenenpunktes P_2 sind die rechtwinkligen Koordinaten u_2; v_2 zu berechnen.

Lösung:

	N	$\lg \lvert N \rvert$
$\underline{\underline{u_2 = 113{,}53}}$	u_2	2,05512
	$\cos \varphi_2$	9,71860 − 10
	r_2	2,33652
	$\sin \varphi_2$	9,93057 − 10 (n)
$\underline{\underline{v_2 = -184{,}97}}$	v_2	2,26709 (n)

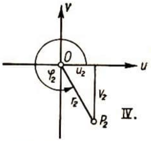


Bild 87

Da φ_2 im IV. Quadranten liegt, werden $u_2 > 0$ und $v_2 < 0$ (Bild 87).

AUFGABEN

649. Die im Text nicht hergeleiteten Quadrantenrelationen der Tabelle (53) sind zu beweisen.
650. Folgende Funktionswerte sind in der Tafel aufzuschlagen:

a) $\cos(-258°10')$, b) $\sin 317°15'$, c) $\cot 210°30'$,
d) $\tan 195°40'$, e) $\sin(-284{,}25°)$, f) $\cos 368{,}75°$,
g) $\tan(-835{,}50°)$, h) $\cot 457{,}40°$.

651. Die Logarithmen folgender Funktionswerte sind zu bestimmen:
a) $\sin 150°07'12''$, b) $\cot 251°26'37''$, c) $\cos 234{,}5679°$,
d) $\tan 188{,}2386°$.

652. Man ermittle die im Intervall $[0°; 360°)$ liegenden Lösungen folgender Gleichungen in sexagesimalgeteiltem Altgrad:
a) $\sin \varphi = 0{,}33216$ b) $\cot \varphi = -1{,}17223$

653. Welche Winkel $\varphi \in [0°; 360°)$ in dezimalgeteiltem Altgrad befriedigen folgende Gleichungen:
a) $\lg \cos \varphi = 9{,}72315 - 10$ b) $\lg \tan \varphi = 0{,}29531$ (n)

654. Folgende Funktionen sind zu vereinfachen:
a) $y = \cos(x + \pi)$, b) $y = -\tan(\pi - x)$,

c) $y = \cos\left(\frac{5}{2}\pi - 2x\right)$,

d) $y = \dfrac{\sin\left(-x - \frac{3}{2}\pi\right)}{\cot(2\pi - x)}$, mit $x \neq \left(\frac{3}{2} - k\right)\pi$ und $x \neq k\pi$ für $k \in G$.

655. Ein Punkt P der Ebene ist durch seine rechtwinkligen Koordinaten u; v bzw. Polarkoordinaten r; φ gegeben:
a) $u = 32{,}12$, $v = 125{,}75$; b) $u = 154{,}48$, $v = -233{,}66$;
c) $r = 157{,}52$, $\varphi = 225{,}5°$; d) $r = 68{,}24$, $\varphi = 131°13'12''$.
Gesucht sind jeweils die anderen Koordinaten.

22.10. Allgemeine Sinusfunktion

Bereits in 22.3., Beispiel 7, wurde gezeigt, daß die Sinusfunktion wegen ihrer Periodizität für die Beschreibung periodischer Vorgänge, insbesondere harmonischer Schwingungen, benutzt werden kann. Die dort gefundenen Erkenntnisse werden hier verallgemeinert.

Da die in diesem Abschnitt auftretenden Funktionen bei ihrer Anwendung in der Praxis im allgemeinen Funktionen der Zeit sind, wird im folgenden für die unabhängige Variable t geschrieben.

In 22.3. wurde festgestellt, daß die Sinusfunktion

$$y = \sin t \tag{I}$$

eine periodische Funktion mit dem Definitionsbereich $T = R$ ist, deren Werte y den Bereich $y = [-1; +1]$ durchlaufen und deren Periode $p = 2\pi$ beträgt (Bild 88).
Die Funktion (I) führt durch Multiplikation der Sinusfunktion mit einer beliebigen Konstanten a bzw. durch Multiplikation von t mit einem beliebigen Faktor ω bzw. durch Addition eines beliebigen Summanden φ zur Variablen t der Reihe nach auf die Funktionen

$$y = a \sin t \tag{II}$$

$$y = \sin \omega t \tag{III}$$

$$y = \sin(t + \varphi) \tag{IV}$$

In den Bildern 88, 89, 90 sind für diese Funktionen Beispiele gezeichnet. Sie lassen die geometrische Bedeutung der drei Konstanten a, ω, φ erkennnen.

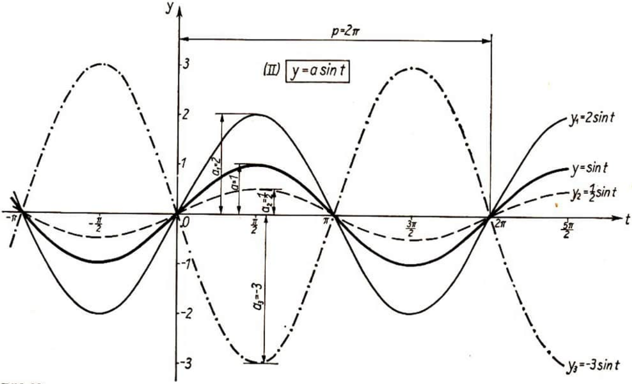


Bild 88

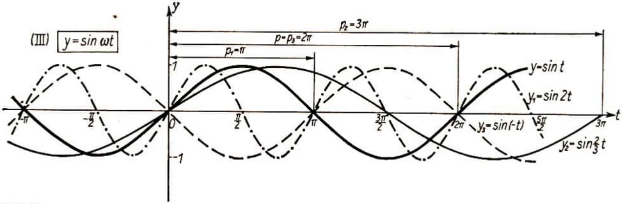


Bild 89

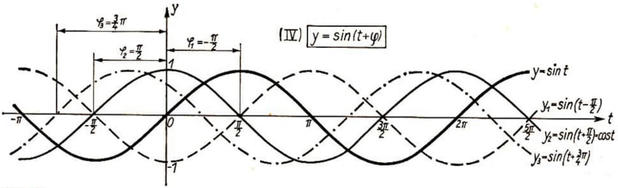


Bild 90

Aus der Zusammenfassung von (II), (III) und (IV) ergibt sich die

allgemeine Sinusfunktion oder harmonische Funktion $\boxed{y = a \sin(\omega t + \varphi)}$ (56)

In Bild 91 ist für (56) das Beispiel $y = \frac{5}{2} \sin\left(\frac{2}{3} t + \frac{\pi}{6}\right)$ aufgetragen.

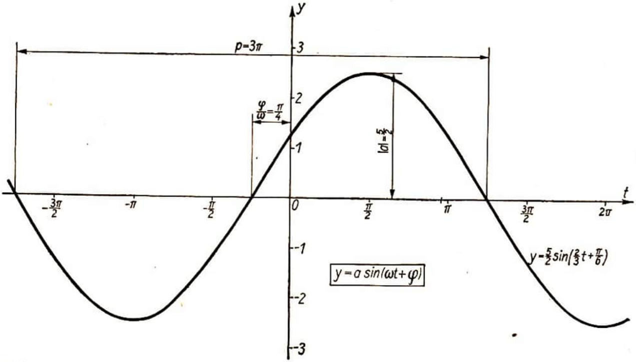


Bild 91

Wie aus den Bildern 88 bis 91 ersichtlich ist, bewirken in (56)

1. der *Faktor a* eine **Vergrößerung oder Verkleinerung der Ordinaten** von (I) auf das $|a|$-fache, je nachdem $|a| > 1$ oder $|a| < 1$, und eine Spiegelung an der t-Achse, falls $a < 0$,
2. der *Faktor* ω eine gleichmäßige **Stauchung oder Dehnung** der Kurve von (I) in Richtung der t-Achse auf das $1/|\omega|$-fache, je nachdem $|\omega| > 1$ oder $|\omega| < 1$, und eine Spiegelung an der t-Achse, falls $\omega < 0$, sowie die Periode $p = 2\pi/|\omega|$,
3. der *Summand* φ eine **Verschiebung** der Sinuskurve (I) in Richtung der t-Achse um φ/ω nach rechts oder links, je nachdem $\frac{\varphi}{\omega} < 0$ oder $\frac{\varphi}{\omega} > 0$. Man beachte, daß die Verschiebung nicht φ, sondern φ/ω lautet, weil wegen der Zusammenfassung von (III) und (IV) die Beziehung $\sin(\omega t + \varphi) = \sin \omega \left(t + \frac{\varphi}{\omega}\right)$ gilt.

Oft trägt man auf der Abszissenachse nicht die Werte t, sondern ωt ab. Hierbei wird der Zusammenhang zwischen den in (56) auftretenden Konstanten und ihrer geometrischen Bedeutung insofern einfacher, daß dann die Periode stets $p = 2\pi$ beträgt, die Verschiebung φ lautet und die Stauchung oder Dehnung entfällt (Bild 92).

Bei den bisherigen Betrachtungen wurden die in (56) auftretenden Größen als dimensionslos aufgefaßt. Dies trifft auch auf die im Argument der Sinusfunktion stehenden Größen zu (vgl. Fußnote 1, Seite 244).

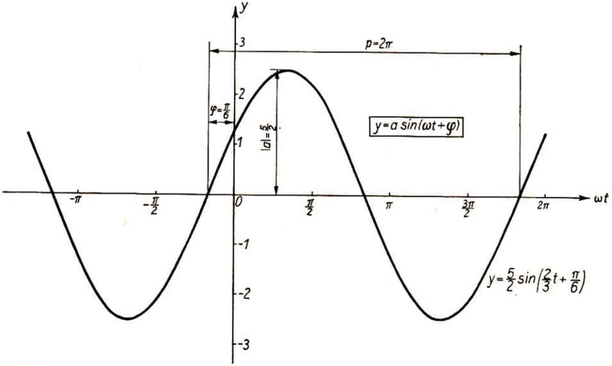


Bild 92

Wird die harmonische Funktion auf physikalische Vorgänge angewendet, dann haben die Größen folgende Bedeutung:

y	*Elongation*	$[y]$	$= \mathrm{m}$
t	*Zeit*	$[t]$	$= \mathrm{s}$
$\|a\|$	*Amplitude*	$[a]$	$= \mathrm{m}$
ω	*Kreisfrequenz* ($\omega > 0$)	$[\omega]$	$= \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$
$\omega t + \varphi$	*Phasenwinkel*	$[\omega t + \varphi]$	$= \mathrm{rad}$
φ	*Nullphasenwinkel*	$[\varphi]$	$= \mathrm{rad}$

Da das Argument der trigonometrischen Funktionen die Maßzahl des in der Einheit rad gemessenen Winkels darstellt, lautet (56) exakt:

$$y = a \sin\left(\frac{\omega}{\mathrm{rad}}\, t + \frac{\varphi}{\mathrm{rad}}\right). \tag{56a}$$

Somit ist die Periode der harmonischen Funktion

$$p/\mathrm{s} = \frac{2\pi}{\omega \Big/ \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}},$$

falls auf der Abszissenachse die Zeit t abgetragen wird. Die Periode p ist mit der Schwingungsdauer (Periodendauer) T identisch [vgl. (Ia), Seite 251].
Es ergibt sich die Folgerung:
Trägt man auf der Abzissenachse

a) die Zeit t ab, so sind die Periode $p = T$ und die Verschiebung $\frac{\varphi/\text{rad}}{\omega/\text{rad}} = \frac{\varphi}{\omega}$,

b) die Maßzahl $\omega t/\text{rad}$ des in der Einheit rad gemessenen Winkels ωt ab, so sind die Periode $p = 2\pi$ und die Verschiebung $\frac{\varphi}{\text{rad}}$.

BEISPIEL

Ein mathematisches Pendel der Länge $l = 3{,}15$ m werde in Schwingungen versetzt. Nach einem Ausschlag von $\alpha_0 = 2°$ beginne die Messung der Zeit t, der Maximalausschlag betrage $\alpha_{\max} = 4°$ (Bild 93). Wie lautet die harmonische Funktion, die die Schwingungen des Pendels beschreibt?

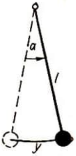


Bild 93

Lösung: Für die Amplitude ergibt sich nach der Kreisbogenformel:

$$a = \frac{\alpha_{\max}}{\text{rad}}\, l.$$

Die Schwingungsdauer folgt aus 22.7., Beispiel S. 258:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Die Kreisfrequenz wird (vgl. S. 251):

$$\omega = \frac{2\pi \text{ rad}}{T} = \sqrt{\frac{g}{l}} \text{ rad}.$$

Bezeichnet y_0 die Elongation zur Zeit $t = 0$ s, so findet man $y_0 : a = \alpha_0 : \alpha_{\max}$ oder

$$y_0 = \frac{\alpha_0}{\alpha_{\max}} \cdot a.$$

Hieraus wird wegen $t = 0$ s mit (56a):

$$\sin \frac{\varphi}{\text{rad}} = \frac{\alpha_0}{\alpha_{\max}}.$$

Werden die gegebenen Zahlenwerte eingesetzt, so ergibt sich:

$$a = \frac{4°}{57{,}3°} \cdot 3{,}15 \text{ m} = 0{,}22 \text{ m}; \qquad T = 6{,}28 \sqrt{\frac{3{,}15 \text{ m s}^2}{9{,}81 \text{ m}}} = 3{,}56 \text{ s}$$

$$\omega = \frac{1 \text{ rad}}{0{,}567 \text{ s}} = 1{,}76 \frac{\text{rad}}{\text{s}}; \qquad \sin \frac{\varphi}{\text{rad}} = \frac{1}{2}.$$

Da die Zeitmessung im 1. Viertel der 1. Schwingung beginnt, gilt $\frac{\varphi}{\text{rad}} \in \left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$. Somit folgt:

$$\varphi = 30° = \frac{\pi}{6} \text{ rad}.$$

Mit den gefundenen Werten erhält man aus (56a) folgende harmonische Funktion:

$$\underline{\underline{y = 0{,}22\ \text{m} \cdot \sin\left(1{,}76\ \frac{t}{\text{s}} + \frac{\pi}{6}\right).}}$$

Den Ablauf der Pendelschwingungen veranschaulicht die Kurve in Bild 94.

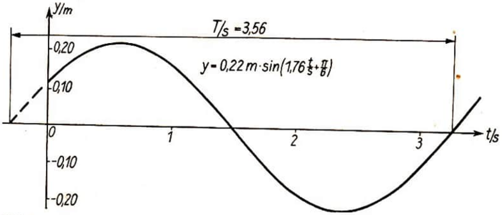


Bild 94

AUFGABE

656. Die Periode, die Verschiebung, der Funktionswert y_0 für $t = 0$ und eventuelle Spiegelungen an der Abszissenachse sind für folgende Funktionen anzugeben, wenn auf der Abszissenachse entweder die Werte t oder ωt abgetragen werden:

a) $y = 0{,}3 \sin\left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{2}\right)$; b) $y = -3 \sin\left(2t + \frac{2\pi}{3}\right)$;

c) $y = 2 \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$; d) $y = -\frac{1}{4} \sin\left(-\frac{t}{3} + \frac{\pi}{6}\right)$

23. Additionstheoreme und andere goniometrische Formeln

In diesem Abschnitt werden einige goniometrische Formeln hergeleitet, deren Grundlage die sog. Additionstheoreme bilden. Trotz der angegebenen Beispiele erkennt der Leser zunächst nicht ihre große Bedeutung. Sie finden später häufig Anwendung, so daß es vorteilhaft ist, sich die wichtigsten Formeln einzuprägen.

23.1. Funktionen von Winkelsummen und -differenzen

Um den Scheitel O eines Winkels $\alpha + \beta < 90°$ sei ein Kreis vom Radius r geschlagen, der die Schenkel des Winkels in A und B schneidet (Bild 95). Der gemeinsame Schenkel der Teilwinkel heiße $\overline{OC}$. Von B seien Lote auf $\overline{OC}$ bis D und auf $\overline{OA}$ bis E gefällt, desgleichen von D auf $\overline{BE}$ bis F und auf $\overline{OA}$ bis G. In der entstandenen Figur ist dann $\overline{OB} = r$, $\overline{BD} = r \sin \beta$, $\overline{OD} = r \cos \beta$. Ferner heißen $\overline{OG} = u$, $\overline{EG} = \overline{FD} = v$, $\overline{DG} = x$, $\overline{BF} = y$.

Im $\triangle$ *OEB* gilt:

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{x + y}{r} \qquad \text{(I)} \qquad\qquad \cos(\alpha + \beta) = \frac{u - v}{r} \qquad \text{(II)}$$

Im $\triangle$ *OGD*:

$$\sin \alpha = \frac{x}{r \cos \beta} \quad \text{(III)} \quad \cos \alpha = \frac{u}{r \cos \beta} \quad \text{(IV)}$$

Im $\triangle$ *DBF*:

$$\cos \alpha = \frac{y}{r \sin \beta} \quad \text{(V)} \quad \sin \alpha = \frac{v}{r \sin \beta} \quad \text{(VI)}$$

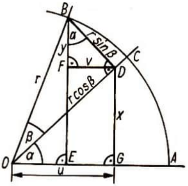


Bild 95

(III) und (V) in (I) eingesetzt:

$$\boxed{\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta} \qquad (57)$$

Aus (II) folgt mit (IV) und (VI):

$$\boxed{\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} \qquad (58)$$

Es läßt sich zeigen, daß die Formeln (57) und (58) und damit die aus ihnen noch herzuleitenden Gleichungen für beliebige Winkel gelten. Auf den Beweis wird verzichtet.

Wird in (57) und (58) der Winkel β durch $(-\beta)$ ersetzt und (54) in 22.9. beachtet, so ergibt sich:

$$\boxed{\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta} \qquad (59)$$

$$\boxed{\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta} \qquad (60)$$

Aus (57) und (58) folgt durch Division und Kürzen des entstehenden Bruches mit $\cos \alpha \cos \beta$:

$$\boxed{\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}} \qquad (61)$$

Entsprechend findet man:

$$\boxed{\cot(\alpha + \beta) = \frac{\cot \alpha \cot \beta - 1}{\cot \beta + \cot \alpha}} \qquad (62)$$

$$\boxed{\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}} \qquad (63)$$

$$\boxed{\cot(\alpha - \beta) = \frac{\cot\alpha \cot\beta + 1}{\cot\beta - \cot\alpha}} \qquad (64)$$

Die 8 Formeln (57) bis (64) heißen **Additionstheoreme.**

BEISPIEL

tan 15° ist ohne Benutzung der trigonometrischen Funktionstafel zu bestimmen.

Lösung: Wegen (63) und (42) ergibt sich:

$$\tan 15° = \tan(45° - 30°) = \frac{\tan 45° - \tan 30°}{1 + \tan 45° \tan 30°} = \frac{1 - \frac{1}{3}\sqrt{3}}{1 + \frac{1}{3}\sqrt{3}} = \frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} =$$

$$= \frac{(3 - \sqrt{3})(3 - \sqrt{3})}{(3 + \sqrt{3})(3 - \sqrt{3})} = \frac{9 - 6\sqrt{3} + 3}{9 - 3} = \underline{\underline{2 - \sqrt{3} \approx 0{,}26795.}}$$

23.2. Funktionen des doppelten Winkels

Wird $\beta = \alpha$ in (57) und (58) gesetzt, so ergibt sich:

$$\boxed{\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha} \quad (65) \qquad \boxed{\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha} \quad (66\text{a})$$

Aus (66a) erhält man bei Beachtung von (45):

$$\boxed{\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1} \quad (66\text{b}) \qquad \boxed{\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha} \quad (66\text{c})$$

Für $\beta = \alpha$ gehen (61) und (62) über in

$$\boxed{\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}} \quad (67) \qquad \boxed{\cot 2\alpha = \frac{\cot^2\alpha - 1}{2\cot\alpha}} \quad (68)$$

Diese 6 Formeln lassen sich auch in anderer Form schreiben, wenn α durch $\alpha/2$ ersetzt wird:

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} \quad (69)$$

$$\tan\alpha = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1 - \tan^2\frac{\alpha}{2}} \quad (71)$$

$$\cot\alpha = \frac{\cot^2\frac{\alpha}{2} - 1}{2\cot\frac{\alpha}{2}} \quad (72)$$

$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} \quad (70\text{a})$$

$$\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1 \quad (70\text{b})$$

$$\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2} \quad (70\text{c})$$

BEISPIEL

Gegeben sei ein Winkel $\alpha = 30°$. Von einem Punkt P_1 des einen Schenkels in der Entfernung $b = 7{,}0$ cm vom Scheitel wird das Lot P_1P_2 auf den anderen Schenkel gefällt, von P_2 wird wieder das Lot P_2P_3 auf den ersten Schenkel gefällt und so unbegrenzt fort. Gesucht ist die Länge s des gesamten Streckenzuges. (Bild 96).

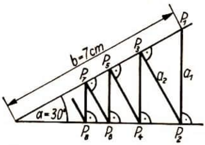


Bild 96

Lösung:

$$a_1 = b \sin\alpha, \quad a_2 = a_1 \cos\alpha,$$
$$a_3 = a_2 \cos\alpha, \ldots .$$

Die Strecken bilden eine konvergente unendliche geometrische Folge[1]) mit dem Anfangsglied $a = b \sin\alpha$ und dem Quotienten $q = \cos\alpha$. Die Summe der Reihe wird bei Beachtung von (69) und (70c):

$$s = \frac{a}{1-q} = \frac{b\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{b\cdot 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}} = b\cot\frac{\alpha}{2} = \underline{\underline{26{,}1\text{ cm.}}}$$

23.3. Verwandlung von Produkten in Summen von Funktionen und umgekehrt

Aus (57) bis (60) findet man durch Addition bzw. Subtraktion folgende Formeln:

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right] \qquad (73)$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)\right] \qquad (74)$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right] \qquad (75)$$

$$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)\right] \qquad (\mathrm{I})$$

Wird vorübergehend $\alpha + \beta = \varphi$, $\alpha - \beta = \psi$ gesetzt, so folgt

$$\alpha = \frac{\varphi+\psi}{2}, \quad \beta = \frac{\varphi-\psi}{2}.$$

Hiermit ergibt sich der Reihe nach aus (74), (I), (75), (73), wenn wieder α und β geschrieben wird:

---

[1]) Vgl. Band „Analysis" 2.1.

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \tag{76}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \tag{77}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \tag{78}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \tag{79}$$

Aus (61) folgt durch entsprechendes Auflösen und Umformen der Gleichung:

$$\tan\alpha + \tan\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}\cdot\left(1 - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\sin\beta}{\cos\beta}\right) =$$
$$= \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}\cdot\frac{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

Hieraus mit (58):

$$\boxed{\tan\alpha + \tan\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}} \tag{80}$$

Analog ergeben sich drei weitere Formeln:

$$\tan\alpha - \tan\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} \tag{81}$$

$$\cot\alpha + \cot\beta = \frac{\sin(\beta+\alpha)}{\sin\beta\sin\alpha} \tag{82}$$

$$\cot\alpha - \cot\beta = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\beta\sin\alpha} \tag{83}$$

BEISPIELE

1. Ein Ballon B schwebt über einem See, in dem sein Spiegelbild B' gesehen wird. Wie groß ist seine Höhe x über dem See, wenn er von einem Standpunkt A mit der Höhe $h = 28{,}3$ m über dem See unter dem Höhenwinkel $\varepsilon = 55{,}45°$ und sein Spiegelbild unter dem Tiefenwinkel $\delta = 58{,}23°$ zu sehen ist?

   Lösung: Aus Bild 97 liest man ab:

$$\tan\varepsilon = \frac{x-h}{y}, \quad \tan\delta = \frac{x+h}{y}.$$

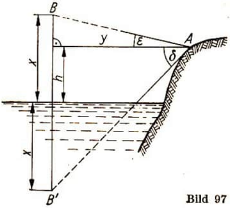


Bild 97

Hieraus folgt durch Elimination der unbekannten Entfernung y und Anwendung der Formeln (80) und (81) bei Benutzung des Rechenstabs:

$$x = h \frac{\tan \delta + \tan \varepsilon}{\tan \delta - \tan \varepsilon} = \frac{h \sin(\delta + \varepsilon)}{\sin(\delta - \varepsilon)} = \frac{28{,}3 \text{ m} \cdot 0{,}917}{0{,}0486} = \underline{\underline{534 \text{ m}}}.$$

2. Der Ausdruck $x = \dfrac{\cos \alpha + \cos \beta}{\sin \alpha + \sin \beta}$ ist zu vereinfachen.

Lösung: Aus (76) und (78) folgt: $x = \dfrac{2 \cos \dfrac{\alpha + \beta}{2} \cos \dfrac{\alpha - \beta}{2}}{2 \sin \dfrac{\alpha + \beta}{2} \cos \dfrac{\alpha - \beta}{2}} = \underline{\underline{\cot \dfrac{\alpha + \beta}{2}}}.$

23.4. Rechnen mit kleinen Winkeln

Für kleine Winkel kann der Cosinus annähernd gleich 1 gesetzt werden (vgl. 22.3., Bild 65). Dies läßt sich in (57) und (59) anwenden. In (61) und (63) kann für kleine Winkel α und β das Produkt $\tan \alpha \tan \beta$ als ,,kleine Größe 2. Ordnung" (vgl. Abschnitt 10.) vernachlässigt werden. Daher gilt für *kleine Winkel* α *und* β:

$$\boxed{\begin{aligned} \sin(\alpha \pm \beta) &\approx \sin \alpha \pm \sin \beta \\ \tan(\alpha \pm \beta) &\approx \tan \alpha \pm \tan \beta \end{aligned}} \qquad \begin{aligned} &(84) \\ &(85) \end{aligned}$$

Folgender Anwendungsbereich läßt sich berechnen:

zu (84)

		Oberes Vorzeichen			Unteres Vorzeichen	
	β	$\frac{1}{4}\alpha$	α	5α	$\frac{1}{4}\alpha$	5α
3-stellige Rechnung:	$\alpha <$	8,4°	4,5°	1,8°	10,0°	2,1°
4-stellige Rechnung:	$\alpha <$	3,9°	2,1°	0,8°	4,5°	1,0°
5-stellige Rechnung:	$\alpha <$	1,8°	1,0°	0,4°	2,1°	0,4°
6-stellige Rechnung:	$\alpha <$	0,8°	0,4°	0,2°	1,0°	0,2°

zu (85)

		Oberes Vorzeichen			Unteres Vorzeichen	
	β	$\frac{1}{4}\alpha$	α	5α	$\frac{1}{4}\alpha$	5α
3-stellige Rechnung:	$\alpha <$	6,7°	3,6°	1,5°	8,0°	1,7°
4-stellige Rechnung:	$\alpha <$	3,1°	1,7°	0,7°	3,7°	0,8°
5-stellige Rechnung:	$\alpha <$	1,4°	0,8°	0,3°	1,7°	0,4°
6-stellige Rechnung:	$\alpha <$	0,7°	0,4°	0,1°	0,8°	0,2°

Ist in den Formeln (84) und (85) $\beta = \alpha$, so folgt im Falle des Pluszeichens und bei entsprechender Verallgemeinerung für *kleine Winkel* α:

$$\boxed{\sin n\alpha \approx n \sin \alpha} \tag{86}$$

$$\boxed{\tan n\alpha \approx n \tan \alpha} \tag{87}$$

Anwendungsbereich:

		zu (86)			zu (87)		
	n	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	4	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	4
3-stellige Rechnung:	$\lvert\alpha\rvert <$	13,4°	11,4°	2,1°	10,6°	9,1°	1,7°
4-stellige Rechnung:	$\lvert\alpha\rvert <$	6,1°	5,3°	1,0°	4,9°	4,2°	0,8°
5-stellige Rechnung:	$\lvert\alpha\rvert <$	2,8°	2,4°	0,4°	2,3°	2,0°	0,4°
6-stellige Rechnung:	$\lvert\alpha\rvert <$	1,3°	1,1°	0,2°	1,0°	0,9°	0,2°

Die hier hergeleiteten Näherungsformeln und andere gehören zum unentbehrlichen Rüstzeug des Ingenieurs und des Physikers. Denn selten kommt es bei Berechnungen in der Praxis auf höchste Genauigkeit an. Vielmehr ist es bei manchen Problemen von großer Bedeutung, möglichst schnell eine Lösung zu finden, und dabei leisten Näherungsformeln unschätzbare Dienste.

BEISPIEL

Bei der Projektierung einer Straße ergibt sich die Aufgabe, zwei Geraden mit verschiedenem Anstieg durch einen Kreisbogen abzurunden. Die Neigungen betragen $p_A = 5{,}4\%$ und $p_B = 1{,}4\%$, der Ausrundungshalbmesser soll zu $R = 2000$ m gewählt werden. Für die Absteckung des Profils werden die Tangentenstrecken $t = \overline{AS} = \overline{BS}$ gebraucht. Bild 98 zeigt einen Vertikalschnitt durch das Gelände.

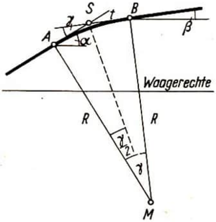


Bild 98

Lösung: Aus Bild 98 wird abgelesen:

$$\tan \alpha = \frac{p_A}{100}, \quad \tan \beta = \frac{p_B}{100}.$$

Wegen der Kleinheit von α und β ergibt sich nach (85):

$$\tan \gamma = \tan (\alpha - \beta) \approx \tan \alpha - \tan \beta = \frac{p_A - p_B}{100}.$$

Aus Bild 98 folgt ferner bei Beachtung von (87):

$$t = R \tan \frac{\gamma}{2} \approx \frac{R}{2} \tan \gamma.$$

Somit:

$$t \approx \frac{R}{200} (p_A - p_B).$$

Werden die gegebenen Zahlenwerte eingesetzt, so findet man:

$$\underline{\underline{t \approx 40 \text{ m}.}}$$

AUFGABEN

657. Folgende Formeln sind zu beweisen:

a) $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$

b) $\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$

c) $\tan 3\alpha = \dfrac{3 \tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - 3 \tan^2 \alpha}$

d) $\cot 3\alpha = \dfrac{\cot^3 \alpha - 3 \cot \alpha}{3 \cot^2 \alpha - 1}$

e) $\sin \dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{2} \sqrt{2 - 2 \cos \alpha}$

f) $\cos \dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{2} \sqrt{2 + 2 \cos \alpha}$

g) $\tan \dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \dfrac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$

h) $\cot \dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} = \dfrac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}$

i) $\cos \alpha + \sin \alpha = \sqrt{2} \sin (45^\circ + \alpha)$

j) $\cos \alpha - \sin \alpha = \sqrt{2} \cos (45^\circ + \alpha)$

k) $\cot \alpha + \tan \alpha = \dfrac{2}{\sin 2\alpha}$

l) $\cot \alpha - \tan \alpha = 2 \cot 2\alpha$

m) $\dfrac{1 + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha} = \tan(45^\circ + \alpha)$

n) $\dfrac{\cot \alpha + 1}{\cot \alpha - 1} = \cot(45^\circ - \alpha)$.

658. Es sind a) $\cos 4\alpha$, b) $\cos 5\alpha$ in $\cos \alpha$ auszudrücken.

659. Ohne Verwendung der trigonometrischen Tafeln sind die vier Funktionswerte für folgende Winkel zu ermitteln:

a) 75° b) $22^\circ 30'$ c) 18° d) 54°

660. Folgende Ausdrücke sind zu vereinfachen:

a) $\cos (60^\circ + \alpha) + \sin (30^\circ + \alpha)$

b) $\sin (\alpha + 60^\circ) + \sin (\alpha - 60^\circ)$

c) $\cos (\alpha + 45^\circ) + \cos (\alpha - 45^\circ)$

d) $\tan \alpha \tan \beta + (\tan \alpha + \tan \beta) \cot (\alpha + \beta)$

e) $\dfrac{\sin (45^\circ + \alpha) - \cos (45^\circ + \alpha)}{\sin (45^\circ + \alpha) + \cos (45^\circ + \alpha)}$

f) $\dfrac{\sin (60^\circ + \alpha) - \cos (30^\circ + \alpha)}{\sin (60^\circ + \alpha) + \cos (30^\circ + \alpha)}$

g) $\dfrac{1 - \cos^2 2\alpha}{2 \sin \alpha}$

h) $\dfrac{\sin 2\alpha \cos \alpha}{(1 + \cos 2\alpha)(1 + \cos \alpha)}$

661. Die Formel $\sin \alpha + \sin (\alpha + 120^\circ) + \sin (\alpha + 240^\circ) = 0$ tritt in der Wechselstromtechnik auf. Man führe den Beweis.

662. Folgende Ausdrücke sind in Produkte zu verwandeln:

a) $\dfrac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha}$

b) $\dfrac{\sin \alpha + \sin \beta}{\sin \alpha - \sin \beta}$

c) $\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$

d) $\cos^2 \alpha - \cos^2 \beta$

e) $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma$ mit $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

663. Zu berechnen sind

a) die Pfeilhöhe p eines Kreisabschnitts aus dem Radius r und dem Mittelpunktswinkel α,

b) die Fläche A eines gleichschenkligen Dreiecks aus dem Schenkel a und dem Basiswinkel α,

c) die Fläche A eines einem Kreis vom Radius r einbeschriebenen regelmäßigen n-Ecks.

664. Wie groß ist die Fläche A eines Kreissegments, wenn der Kreisradius $r = 15{,}58$ m und der Mittelpunktswinkel $\alpha = 62{,}167^\circ$ betragen?

665. Die Mantellinien eines geraden Kreiskegels schließen mit der Grundfläche einen Winkel $\alpha = 53{,}833^\circ$ ein und haben die Länge $s = 48$ cm. Wie groß sind Mantel M und Volumen V des Kegels?

666. Wie groß ist der vom 40. und 50. Breitenkreis begrenzte Teil M der Erdoberfläche ($R = 6371{,}11$ km), und welche Länge r_1 und r_2 haben die zu beiden Breitenkreisen gehörigen Radien?

667. Die Hypotenuse c eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Ebene gegen die Projektionsebene um den Winkel φ geneigt sei, liege in der Projektionsebene. Die Projektion γ' des rechten Winkels $\gamma = 90°$ ist aus den gegebenen Katheten a, b und dem Neigungswinkel φ zu berechnen. Das Ergebnis der Aufgabe 636 kann benutzt werden.

668. Vor dem Bau eines Tunnels sollen seine Länge $x = B'C'$ und seine Neigung ν bestimmt werden. Zu diesem Zweck steckt man beiderseits des Berges zwei horizontale Standlinien $AB = 262{,}71$ m und $CD = 380{,}50$ m ab, die mit der Bergspitze E sowie dem Tunneleingang B' und dem Tunnelausgang C' in einer Vertikalebene liegen. Ferner mißt man die horizontalen Strecken $BB' = 144{,}20$ m und $CC' = 79{,}33$ m sowie in A, B, C, D die Höhenwinkel $\alpha = 28°58'$, $\beta = 40°30'$, $\gamma = 58°50'$, $\delta = 32°20'$ (Bild 99).

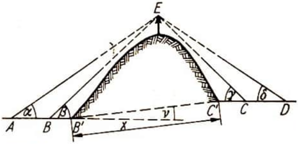


Bild 99

669. Die Höhe h_T eines Turmes ist zu bestimmen. In einer die Turmspitze T enthaltenden Vertikalebene werden zwei Punkte A und B festgelegt. Durch Messung werden die Höhenwinkel $\alpha = 11°54'40''$, $\beta = 15°37'20''$, die Instrumentenhöhen $i_A = 1{,}412$ m, $i_B = 1{,}385$ m und die Horizontalentfernung $e = 57{,}89$ m bestimmt. Durch Nivellement findet man $h_A = 377{,}974$ m und $h_B = 376{,}050$ m über NN. (Bild 100).

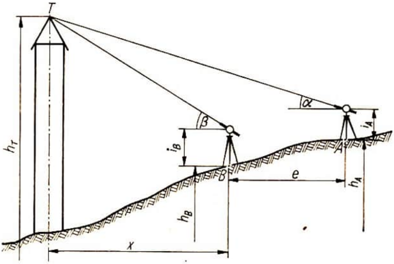


Bild 100

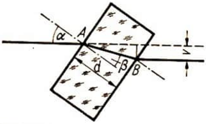


Bild 101

670. Ein Lichtstrahl fällt unter dem Einfallswinkel $\alpha = 30°$ auf eine planparallele Glasplatte (Dicke der Platte $d = 1$ cm, relativer Brechungsindex $n = 1{,}5$) und erfährt beim Austritt eine Parallelverschiebung v (Bild 101). Für v ist eine allgemeine Formel mit α, d, n zu entwickeln, aus der die Verschiebung im Falle des Zahlenbeispiels zu bestimmen ist.

671. Für $\sin(\alpha + \Delta\alpha)$ mit $\Delta\alpha \approx 0$ ist eine Näherungsformel herzuleiten. Aus dieser ist der Fehler des Sinuswertes zu bestimmen, wenn statt des Winkels α der fehlerhafte Winkel $\alpha + \Delta\alpha$ eingesetzt wird.

672. Im Falle kleiner Zentriwinkel α ist eine Näherungsformel für die Pfeilhöhe p zu entwickeln, die die Sehne s und den Radius r des Kreisbogens enthält.

24. Berechnung des schiefwinkligen Dreiecks

Aus der Planimetrie ist bekannt, daß ein schiefwinkliges Dreieck durch *drei voneinander unabhängige Stücke* bestimmt ist. Bei gegebenen Seiten und Winkeln sind fünf Grundaufgaben zu unterscheiden:

1. Gegeben 1 Seite, 2 Winkel
   a) eine Seite und die beiden anliegenden Winkel (WSW)
   b) eine Seite, ein anliegender und der gegenüberliegende Winkel (SWW)
2. Gegeben 2 Seiten, 1 Winkel
   a) zwei Seiten und der der einen Seite gegenüberliegende Winkel (SSW)
   b) zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel (SWS)
3. Gegeben 3 Seiten (SSS)

Die Grundaufgaben sind unter folgenden Bedingungen lösbar:

1a) und b): Die Summe der beiden gegebenen Winkel muß kleiner als 180° sein.

2a) und b): Der gegebene Winkel muß kleiner als 180° sein.

3: Die Summe zweier Seiten muß jeweils größer als die dritte Seite sein.

Die im Fall 2a) angegebene Bedingung ist *notwendig*[1]), alle anderen Bedingungen sind notwendig und *hinreichend*[2]).
Die Lösungen aller Grundaufgaben sind, abgesehen vom Fall 2a) (SSW), stets eindeutig.

24.1. Lösung der Grundaufgaben mit Sinus- und Cosinussatz

Zur Berechnung des schiefwinkligen Dreiecks (Bild 102) werden bekanntlich[3])

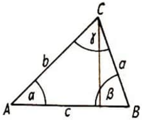


Bild 102

Sinussatz

$$\boxed{a:b:c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma} \qquad (88)$$

Cosinussatz

$$\boxed{\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \\ b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca\cos\beta \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \end{aligned}} \qquad (89)$$

---

[1]) Eine notwendige Bedingung bedeutet: Die Aufgabe ist nur dann lösbar, wenn die Bedingung erfüllt ist. Ist die Bedingung erfüllt, so braucht aber die Aufgabe nicht lösbar zu sein

[2]) Eine hinreichende Bedingung bedeutet: Ist die Bedingung erfüllt, dann läßt sich die Aufgabe lösen. Die Aufgabe kann aber auch lösbar sein, wenn die Bedingung nicht erfüllt ist

[3]) Vgl. z. B. El. math. 26.2.

Winkelsumme des Dreiecks

$$\boxed{\alpha + \beta + \gamma = 180°} \tag{90}$$

gebraucht. Im folgenden ist zur Wiederholung für jede Grundaufgabe ein Beispiel angegeben.

BEISPIELE

1. Gegeben: $\alpha = 25°$; $\beta = 31°$; $c = 48{,}2$ m (WSW)

Gesucht: γ, a, b (Rechenstab!)

Lösung:

$\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$ $\qquad \underline{\underline{\gamma = 124°}}$

$a = \dfrac{c \sin \alpha}{\sin \gamma}$ $\qquad \underline{\underline{a = 24{,}6 \text{ m}}}$

$b = \dfrac{c \sin \beta}{\sin \gamma}$ $\qquad \underline{\underline{b = 30{,}0 \text{ m}}}$

2. Gegeben: $\alpha = 14{,}3°$; $\gamma = 143{,}2°$; $c = 39{,}1$ m (SWW)

Gesucht: β, a, b (Rechenstab!)

Lösung:

$\beta = 180° - (\alpha + \gamma)$ $\qquad \underline{\underline{\beta = 22{,}5°}}$

$a = \dfrac{c \sin \alpha}{\sin \gamma}$ $\qquad \underline{\underline{a = 16{,}3 \text{ m}}}$

$b = \dfrac{c \sin \beta}{\sin \gamma}$ $\qquad \underline{\underline{b = 25{,}1 \text{ m}}}$

3. Gegeben: $a = 19{,}5$ m; $b = 27{,}9$ m; $\alpha = 36{,}8°$ (SSW)

Gesucht: β, γ, c (Rechenstab!)

Lösung:

$\sin \beta_{1,2} = \dfrac{b \sin \alpha}{a}$ $\qquad \beta_1$ (spitz) $\qquad \beta_2 = 180° - \beta_1$ (stumpf)

$\gamma_{1,2} = 180° - (\alpha + \beta_{1,2})$ $\qquad c_{1,2} = \dfrac{a \sin \gamma_{1,2}}{\sin \alpha}$

1. Dreieck: $\underline{\underline{\beta_1 = 59{,}3°}}$; $\qquad \underline{\underline{\gamma_1 = 83{,}9°}}$; $\qquad \underline{\underline{c_1 = 32{,}3 \text{ m}}}$

2. Dreieck: $\underline{\underline{\beta_2 = 120{,}7°}}$; $\qquad \underline{\underline{\gamma_2 = 22{,}5°}}$; $\qquad \underline{\underline{c_2 = 12{,}5 \text{ m}}}$

Bemerkungen zur Grundaufgabe SSW (*doppeldeutiger Fall*)

Außer den Formeln (88) bis (90) ist für die Dreiecksberechnung folgender allgemeiner Satz grundlegend:

Satz

In einem beliebigen Dreieck gilt für zwei Seiten a, b und die gegenüberliegenden Winkel α, β stets:

Aus $a \lesseqgtr b$ folgt $\alpha \lesseqgtr \beta$ und umgekehrt.

Sind nun, wie im vorliegenden Beispiel, die Seiten a, b mit $a < b$ und der Winkel $\alpha < 90^\circ$ gegeben, so muß wegen des oben zitierten Satzes auch $\alpha < \beta$ sein. Diese Bedingung erfüllt im Fall $a > b \sin \alpha$ sowohl der spitze Winkel β_1 als auch der stumpfe Winkel $\beta_2 = 180^\circ - \beta_1$ (vgl. Bild 103).
Es ergeben sich daher 2 Lösungen für β und somit auch 2 Lösungen für das ganze Dreieck. Deshalb wird der Fall SSW auch **doppeldeutiger Fall** genannt.
In der Praxis sind nur solche Beispiele wichtig, bei denen die Lösung auf Grund eines bekannten Kongruenzsatzes eindeutig ist.

Satz

Die Lösung der Grundaufgabe SSW ist eindeutig, wenn der der größeren Seite gegenüberliegende Winkel gegeben ist.

Die systematische Falluntersuchung für die Grundaufgabe SSW wird geometrisch folgendermaßen ausgeführt: Zwei Bestimmungsstücke des Dreiecks ABC, nämlich $b = \overline{AC}$ und α, seien fest vorgegeben; das dritte Bestimmungsstück a werde veränderlich angenommen. Die Konstruktion ergibt den dritten Eckpunkt B als Schnittpunkt des freien Schenkels des Winkels α und des Kreisbogens um C mit dem veränderlichen Radius a (Bild 103). Das führt zu folgender Determination:

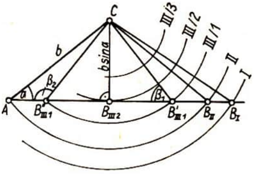


Bild 103

Fall				Art der Lösung	
I	$a > b$		$\alpha \gtreqless 90^\circ$	$\beta < 90^\circ$	eindeutig
II	$a = b$	$a > b \sin \alpha$		$\beta = \alpha$	eindeutig; gleichschenkliges Dreieck
III/1			$\alpha < 90^\circ$	$\beta \gtrless 90^\circ$	zwei Lösungen
III/2	$a < b$	$a = b \sin \alpha$		$\beta = 90^\circ$	eindeutig; rechtwinkliges Dreieck
III/3		$a < b \sin \alpha$		—	keine Lösung

In den Fällen II bis III/3 gibt es für $\alpha \geqq 90^\circ$ stets keine Lösung.

BEISPIELE

4. Gegeben: $a = 14{,}31$ m, $b = 26{,}02$ m, $\gamma = 82{,}110°$ (SWS)

Gesucht: c, α, β

Lösung:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}$$

$$\sin\alpha = \frac{a\sin\gamma}{c}$$

$$\sin\beta = \frac{b\sin\gamma}{c}$$

$$\begin{aligned} a^2 &= 204{,}78 \\ b^2 &= 677{,}04 \\ \hline a^2 + b^2 &= 881{,}82 \\ P &= 102{,}23 \\ \hline c^2 &= 779{,}59 \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{c}} = 27{,}921\text{ m} \approx \underline{\underline{27{,}92\text{ m}}}$$

$$\underline{\underline{\alpha = 30{,}508°}}$$

$$\underline{\underline{\beta = 67{,}380°}}$$

$$\gamma = 82{,}110°$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 179{,}998° \text{ (Probe)}$$

N	$\lg N$
2	0,301 03
a	1,155 64
b	1,415 31
$\cos\gamma$	9,137 58 − 10
P	2,009 56
$\sin\gamma$	9,995 87 − 10
c	1,445 94
$\frac{\sin\gamma}{c}$	8,549 93 − 10
$\sin\alpha$	9,705 57 − 10
a	1,155 64
$\frac{\sin\gamma}{c}$	8,549 93 − 10
b	1,415 31
$\sin\beta$	9,965 24 − 10

Anmerkung: Ist der gegebene Winkel spitz, so hat man, um die Doppeldeutigkeit des aus der Sinusfunktion bestimmten Winkels zu umgehen, bei der Berechnung des zweiten und dritten Winkels stets *zuerst den Gegenwinkel der kleineren der beiden gegebenen Seiten mit dem Sinussatz* zu bestimmen. Die Entscheidung über die Größe des dritten Winkels ergibt sich aus der Winkelsumme im Dreieck.

5. Gegeben: $a = 10{,}03$ m, $b = 119{,}25$ m, $c = 120{,}22$ m (SSS)

Gesucht: α, β, γ

Lösung:

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$\sin\alpha = \frac{a\sin\gamma}{c}$$

$$\sin\beta = \frac{b\sin\gamma}{c}$$

N	$\lg \lvert N \rvert$
$2a$	1,302 33
b	2,076 46
$2ab$	3,378 79
$a^2 + b^2 - c^2$	2,119 59 (n)
$\cos\gamma$	8,740 80 − 10 (n)

$$a^2 = 100{,}6$$

$$b^2 = 14220{,}5$$

$$a^2 + b^2 = 14321{,}1$$

$$c^2 = 14452{,}8$$

$$a^2 + b^2 - c^2 = -131{,}7$$

$$\underline{\underline{\gamma = 93{,}1561^\circ}}$$

$$\underline{\underline{\alpha = 4{,}7786^\circ}}$$

$$\underline{\underline{\beta = 82{,}07^\circ}}$$ [1]

$$\alpha + \beta + \gamma = 180{,}0047^\circ \text{ (Probe)}$$

N	$\lg \lvert N \rvert$
$\sin \gamma$	$9{,}99934 - 10$
c	$2{,}07997$
$\dfrac{\sin \gamma}{c}$	$7{,}91937 - 10$
$\sin \alpha$	$8{,}92067 - 10$
a	$1{,}00130$
....	....
$\dfrac{\sin \gamma}{c}$	$7{,}91937 - 10$
....	....
b	$2{,}07646$
$\sin \beta$	$9{,}99583 - 10$

Anmerkung: Da sich ein Winkel aus der Cosinusfunktion in den ersten beiden Quadranten eindeutig ergibt, wird zur Umgehung der Doppeldeutigkeit des aus der Sinusfunktion bestimmten Winkels stets *zuerst der der größten Seite gegenüberliegende Winkel mit dem Cosinussatz* bestimmt. Die beiden anderen Winkel sind in jedem Fall spitz.

24.2. Betrachtungen über bequeme und genaue Rechnung

Im vorangehenden Abschnitt haben wir gesehen, daß die Grundaufgaben WSW, SWW, SSW mit dem Sinussatz, die Grundaufgaben SWS, SSS mit dem Cosinussatz und dem Sinussatz zu lösen sind, d. h., Sinus- und Cosinussatz reichen aus, um ein schiefwinkliges Dreieck zu berechnen. Jedoch zeigen die letzten beiden Beispiele, daß der Cosinussatz für die logarithmische Rechnung unbequem ist, denn man muß entweder eine Quadrattafel verwenden oder die logarithmische Rechnung unterbrechen. Diesen Nachteil haben Formeln nicht, die aus Produkten und Quotienten bestehen.

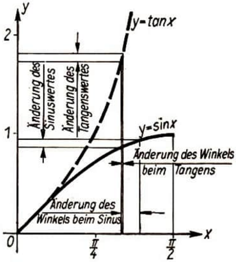


Bild 104

Ferner ergibt sich ein in der Nähe von 90° bzw. 0° liegender Winkel aus der Sinusfunktion bzw. Cosinusfunktion ungenau. Denn an diesen Stellen ändert sich der jeweilige Funktionswert bei verhältnismäßig großen Änderungen des Winkels nur gering (Bild 104). Im Gegensatz hierzu ist die Winkelbestimmung aus der Tangens- und der Cotangensfunktion an allen Stellen genügend genau (Bild 104).

Dieser Sachverhalt ergibt sich auch aus der Größe der Tafeldifferenzen an den betreffenden Stellen. Für Winkel in der Nähe von 90° findet man bei der Sinusfunktion sehr kleine und bei der Tangensfunktion wesentlich größere Tafeldifferenzen.

[1] Die Tausendstel- und Zehntausendstelgrad des Winkels β sind vollkommen unsicher; denn hätte sich $\lg \sin \beta$ z. B. um eine Einheit der 5. Stelle größer ergeben, so wäre das Resultat

Beispielsweise habe sich für die Bestimmung von α aus dem Sinussatz ergeben: $\lg \sin \alpha = 9{,}99943 - 10$. Der Tafel entnimmt man $\alpha = 87{,}06°$ oder $\alpha = 87{,}07°$, d. h., die Tausendstelgrad sind vollkommen unsicher! Dagegen liefert die Tangensfunktion den Winkel mit genügender Schärfe. Zum Beispiel folgt aus $\lg \tan \alpha = 1{,}28978$ der Winkel $\alpha = 87{,}0627°$.
Soll umgekehrt für einen gegebenen Winkel der Funktionswert ermittelt werden, so sind Sinus und Cosinus günstiger als Tangens und Cotangens; denn z. B. eine kleine Änderung eines in der Nähe von 90° liegenden Winkels ruft fast keine Änderung des Sinus, jedoch eine große Änderung des Tangens hervor (Bild 104).
Diese Erkenntnisse führen zu folgenden Forderungen:
Die Formeln sollen möglichst

1. Produkte oder Quotienten darstellen,
2. die Tangens- oder die Cotangensfunktion der gesuchten Winkel und die Sinus- oder die Cosinusfunktion der gegebenen Winkel enthalten.

24.3. Gleichungen von Mollweide[1]) und der Tangenssatz

Aus zwei Gleichungen des Sinussatzes (88), beispielsweise

$$b \sin \alpha = a \sin \beta \quad \text{und} \quad c \sin \alpha = a \sin \gamma,$$

ergibt sich durch Addition bzw. Subtraktion:

$$(b + c) \sin \alpha = a (\sin \beta + \sin \gamma), (b - c) \sin \alpha = a (\sin \beta - \sin \gamma).$$

Nach Umformung der rechten Seiten mit (76) bzw. (77), 23.3., und der linken Seiten mit (69), 23.2., findet man, wenn $\cos \frac{\alpha}{2} = \sin \frac{\beta + \gamma}{2}$ und $\sin \frac{\alpha}{2} = \cos \frac{\beta + \gamma}{2}$ [vgl. (51) und (90)] beachtet wird:

$$(b + c) \sin \frac{\alpha}{2} = a \cos \frac{\beta - \gamma}{2}, (b - c) \cos \frac{\alpha}{2} = a \sin \frac{\beta - \gamma}{2}.$$

Aus beiden Formeln folgen durch *zyklische Vertauschung*[2]) jeweils zwei weitere, so daß sich insgesamt 6 Gleichungen ergeben:

Mollweidesche Gleichungen

$(b + c) \sin \frac{\alpha}{2} = a \cos \frac{\beta - \gamma}{2}$	$(b - c) \cos \frac{\alpha}{2} = a \sin \frac{\beta - \gamma}{2}$
$(c + a) \sin \frac{\beta}{2} = b \cos \frac{\gamma - \alpha}{2}$	$(c - a) \cos \frac{\beta}{2} = b \sin \frac{\gamma - \alpha}{2}$
$(a + b) \sin \frac{\gamma}{2} = c \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$	$(a - b) \cos \frac{\gamma}{2} = c \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$

(91)

$\beta = 82{,}08°$ gewesen (vgl. 24.2.). Daraus erklärt sich auch die verhältnismäßig große Differenz der Winkelsumme gegen 180°

[1]) KARL MOLLWEIDE, Mathematiker und Astronom, 1774 bis 1825

[2]) kyklos (griech.) Kreis; die Vertauschung sämtlicher Stücke einer Dreiecksformel mit ihren entsprechenden linken (oder rechten) Nachbarn am Dreieck führt wieder auf eine gültige Dreiecksformel, da entsprechende Stücke untereinander gleichberechtigt sind

Bei Division von jeweils zwei nebeneinander stehenden Gleichungen (91) und Umformung unter Beachtung von (51) und (90) folgen die **Neperschen**[1]) **Gleichungen** oder der

Tangenssatz[2])

$$\boxed{\frac{a+b}{a-b}=\frac{\tan\frac{\alpha+\beta}{2}}{\tan\frac{\alpha-\beta}{2}} \quad \frac{b+c}{b-c}=\frac{\tan\frac{\beta+\gamma}{2}}{\tan\frac{\beta-\gamma}{2}} \quad \frac{c+a}{c-a}=\frac{\tan\frac{\gamma+\alpha}{2}}{\tan\frac{\gamma-\alpha}{2}}} \tag{92}$$

24.4. Halbwinkelsatz

Aus der ersten Gleichung des Cosinussatzes (89) ergibt sich mit (70c) und (70b), 23.2., sowie den binomischen Formeln:

$$a^2=(b-c)^2+4bc\sin^2\frac{\alpha}{2}, \qquad a^2=(b+c)^2-4bc\cos^2\frac{\alpha}{2}.$$

Durch Umstellen und Berücksichtigen der 3. binomischen Formel findet man:

$$4bc\ \sin^2\frac{\alpha}{2}=(a+b-c)\,(a-b+c) \tag{I}$$

$$4\,bc\,\cos^2\frac{\alpha}{2}=(a+b+c)\,(-a+b+c). \tag{II}$$

Wird der halbe Dreiecksumfang mit s bezeichnet, so folgt:

$$\boxed{a+b+c=2s} \tag{93}$$

Hieraus erhält man:

$$\left.\begin{aligned} -a+b+c &= 2(s-a)\\ a-b+c &= 2(s-b)\\ a+b-c &= 2(s-c). \end{aligned}\right\} \tag{94}$$

Bei Division von (I) und (II) und Beachtung von (93) und (94) ergibt sich einschließlich der aus der zyklischen Vertauschung folgenden Gleichungen:

---

[1]) John Neper, vgl. Fußnote 2 S. 87

[2]) Der Tangenssatz ergibt sich auch unmittelbar aus jeweils einer Gleichung des Sinussatzes durch korrespondierende Addition und Subtraktion

Halbwinkelsatz

$$\boxed{\begin{aligned} \tan\frac{\alpha}{2} &= \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}} \\ \tan\frac{\beta}{2} &= \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}} \\ \tan\frac{\gamma}{2} &= \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}} \end{aligned}} \qquad (95)$$

24.5. Umkreisradius, Inkreisradius und Fläche des Dreiecks

Aus der Planimetrie ist bekannt, daß der Mittelpunktswinkel doppelt so groß wie der Umfangswinkel über gleichem Bogen ist. Daher folgt aus Bild 105 bei Beachtung der zyklischen Vertauschung:

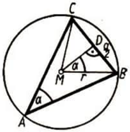


Bild 105

Umkreisradius

$$\boxed{r = \frac{a}{2\sin\alpha} = \frac{b}{2\sin\beta} = \frac{c}{2\sin\gamma}} \qquad (96)$$

Zerlegt man das $\triangle ABC$ in die Teildreiecke ABO, BCO und CAO (Bild 106), so findet man für die Fläche A des Dreiecks

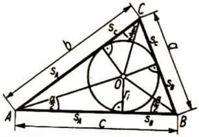


Bild 106

$$A = \frac{ar_i}{2} + \frac{br_i}{2} + \frac{cr_i}{2} = r_i \cdot \frac{a+b+c}{2}$$

oder wegen (93):

Flächeninhalt des Dreiecks $\boxed{A = r_i s}$ (97)

Aus Bild 106 ergeben sich die drei Gleichungen

$$s_A + s_B = c \qquad s_A + s_C = b \qquad s_B + s_C = a$$

Somit:

$$2s_A = -a + b + c \qquad 2s_B = a - b + c \qquad 2s_C = a + b - c$$

Hieraus wegen (94):

$$s_A = s - a \qquad s_B = s - b \qquad s_C = s - c \qquad (\mathrm{I})$$

Aus Bild 106 liest man ferner ab, wenn (I) berücksichtigt wird:

$$\boxed{\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{r_i}{s-a}} \quad \boxed{\tan\frac{\beta}{2} = \frac{r_i}{s-b}} \quad \boxed{\tan\frac{\gamma}{2} = \frac{r_i}{s-c}} \qquad (98)$$

Durch Gleichsetzen liefern (95) und (98):

Inkreisradius

$$\boxed{r_i = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}} \tag{99}$$

sowie (97) und (99):

Heronische Formel[1]) des Dreiecksinhalts

$$\boxed{A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}} \tag{100}$$

Für die Höhe auf der Seite c ergibt sich im beliebigen Dreieck $h_c = b \sin \alpha$. Hieraus folgt beim Einsetzen in die Dreiecksflächenformel $A = ch_c/2$ und bei Beachtung der zyklischen Vertauschung:

Flächeninhalt des Dreiecks

$$\boxed{A = \frac{bc}{2} \sin \alpha = \frac{ca}{2} \sin \beta = \frac{ab}{2} \sin \gamma} \tag{101}$$

24.6. Zweckmäßigste Lösungsverfahren der Grundaufgaben

Während die Grundaufgaben WSW, SWW und SSW mit dem Sinussatz gelöst werden, wie in 24.1. bereits angegeben, vermeidet man in den Fällen SWS und SSS den Cosinussatz und benutzt statt dessen für SWS die MOLLWEIDEschen Gleichungen (91) und den Tangenssatz (92) und für SSS den Halbwinkelsatz (95). Für die Lösung der Grundaufgabe SSS ergibt sich eine günstige Anordnung der Rechnung, wenn die Bestimmung der halben Winkel $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\beta}{2}$, $\frac{\gamma}{2}$ nicht direkt aus (95), sondern mit dem Inkreisradius r_i als Zwischengröße aus (99) und (98) erfolgt. Die Beispiele 4 und 5 aus 24.1. werden im folgenden mit diesen Sätzen nochmals durchgerechnet.

BEISPIELE

1. Gegeben: $a = 14{,}31$ m, $b = 26{,}02$ m, $\gamma = 82{,}110°$ (SWS)

   Gesucht: α, β, c, A

   Lösung: Wegen $a < b$ wird $\alpha < \beta$. Daher sind die in (91) und (92) auftretenden Differenzen $a - b$ und $\alpha - \beta$ negativ. Um das Rechnen mit negativen Größen zu vermeiden, werden die Gleichungen mit -1 multipliziert.
   Aus (90):

$$\frac{\beta + \alpha}{2} = 90° - \frac{\gamma}{2}.$$

---

[1]) HERON VON ALEXANDRIA, griech. Mathematiker, um 100 v. u. Z.

In (92, I) eingesetzt:

$$\tan\frac{\beta-\alpha}{2}=\frac{(b-a)\cos\frac{\gamma}{2}}{(b+a)\sin\frac{\gamma}{2}}.$$

Aus (91, III u. IV):

$$c=\frac{(b+a)\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\beta-\alpha}{2}}\qquad c=\frac{(b-a)\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\beta-\alpha}{2}}\ \text{(Probe)}.$$

(101): $A=\frac{ab}{2}\sin\gamma$

$$\gamma = 82{,}110^\circ$$
$$a = 14{,}31$$
$$b = 26{,}02$$
$$b-a = 11{,}71$$
$$b+a = 40{,}33$$
$$\frac{\gamma}{2} = 41{,}055^\circ$$
$$\frac{\beta+\alpha}{2} = 48{,}945^\circ$$
$$\frac{\beta-\alpha}{2} = 18{,}437^\circ$$
$$\alpha = 30{,}508^\circ$$
$$\beta = 67{,}382^\circ$$
$$\alpha+\beta+\gamma = 180{,}000^\circ \quad \text{(Probe)}$$
$$c = 27{,}92\ \text{m}$$
$$A = 184{,}41\ \text{m}^2$$

N	lg N
$b-a$	1,068 56
$\cos\frac{\gamma}{2}$	9,877 42 − 10
$b+a$	1,605 63
$\sin\frac{\gamma}{2}$	9,817 42 − 10
$(b-a)\cos\frac{\gamma}{2}$	0,945 98
$\sin\frac{\beta-\alpha}{2}$	9,500 04 − 10
$\cos\frac{\beta-\alpha}{2}$	9,977 12 − 10
$(b+a)\sin\frac{\gamma}{2}$	1,423 05
$\tan\frac{\beta-\alpha}{2}$	9,522 93 − 10
c	1,445 93 (4)
a	1,155 64
$\frac{b}{2}$	1,114 28
$\sin\gamma$	9,995 87 − 10
A	2,265 79

Anmerkungen: Durch die Winkelsummenprobe wird lediglich die Bildung von $\frac{\gamma}{2}$ und $\frac{\beta+\alpha}{2}$ sowie die Berechnung von α und β aus $\frac{\beta+\alpha}{2}$ und $\frac{\beta-\alpha}{2}$ gesichert, während $\frac{\beta-\alpha}{2}$ nicht überprüft ist! Die Seite c kann auch mit dem Sinussatz berechnet werden.

2. Gegeben: $a = 10{,}03$ m, $b = 119{,}25$ m, $c = 120{,}22$ m (SSS)
Gesucht: $\alpha, \beta, \gamma, A, r_i$

Lösung:

(93): $a + b + c = 2s$ (99): $r_i = \sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$

(98): $\tan\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{r_i}{s-a}$ $\tan\dfrac{\beta}{2} = \dfrac{r_i}{s-b}$ $\tan\dfrac{\gamma}{2} = \dfrac{r_i}{s-c}$ (97): $A = r_i\, s$.

Rechenproben: $(s-a) + (s-b) + (s-c) = s$

$$s \tan\frac{\alpha}{2} \tan\frac{\beta}{2} \tan\frac{\gamma}{2} = r_i$$

$$\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = 90°$$

$a = 10{,}03$
$b = 119{,}25$
$c = 120{,}22$

$2s = 249{,}50$
$s = 124{,}75$

$s - a = 114{,}72$
$s - b = 5{,}50$
$s - c = 4{,}53$

Probe: $s = 124{,}75$

$\dfrac{\alpha}{2} = 2{,}3892°$

$\dfrac{\beta}{2} = 41{,}0331°$

$\dfrac{\gamma}{2} = 46{,}5780°$

Probe: $90{,}0003°$

$\alpha = 4{,}7784°$

$\beta = 82{,}0662°$

$\gamma = 93{,}1560°$

Probe: $180{,}0006°$

$A = 597{,}13\ \text{m}^2$

$r_i = 4{,}79$ m

N	$\lg N$
$s-a$	2,059 64
$s-b$	0,740 36
$s-c$	0,656 10
$(s-a)(s-b)(s-c)$	3,456 10
s	2,096 04
r_i^2	1,360 06
r_i	0,680 03
$\tan\dfrac{\alpha}{2}$	8,620 39 − 10
$\tan\dfrac{\beta}{2}$	9,939 67 − 10
$\tan\dfrac{\gamma}{2}$	0,023 93
s	2,096 04
Probe: r_i	0,680 03
A	2,776 07

Anmerkung: Die Winkelsummenprobe sichert die Ergebnisse durchgreifend. Die Winkelsumme ist daher ein Maß für die Genauigkeit der Rechnung.

Die letzten beiden Beispiele zeigen im Vergleich zu Beispiel 4 und 5, 24.1., die Überlegenheit der hier angewendeten Rechenverfahren bezüglich der bequemen logarithmischen Rechnung und der Genauigkeit. Insbesondere hat sich der Winkel β im letzten Beispiel wesentlich genauer ergeben als im Beispiel 5, 24.1.

AUFGABEN

673. Sinus- und Cosinussatz sind zu beweisen.

674. Der Tangenssatz ist aus dem Sinussatz durch korrespondierende Addition und Subtraktion herzuleiten.

675. Wie lautet der Beweis für die Formeln des Dreiecksinhalts

a) $A = \dfrac{a\,b\,c}{4\,r}$ b) $A = \dfrac{a^2 \sin\beta \sin\gamma}{2 \sin(\beta+\gamma)}$?

676. Der Umkreisradius r ist in den drei Seiten a, b, c des Dreiecks auszudrücken.

677. Ein Dreieck ist logarithmisch zu berechnen aus:

a)	$b = 191{,}02$ m;	$\alpha = 33{,}550°$;	$\gamma = 17{,}500°$.	Gesucht: β, a, c, r
b)	$a = 33{,}12$ m;	$\beta = 120{,}283°$;	$\gamma = 4{,}683°$.	Gesucht: α, b, c, A, h_a
c)	$c = 68{,}10$ m;	$\alpha = 55{,}684°$;	$\gamma = 18{,}317°$.	Gesucht: β, a, b, r_i
d)	$a = 103{,}14$ m;	$\alpha = 70{,}379°$;	$\beta = 30{,}334°$.	Gesucht: γ, b, c, A
e)	$b = 112{,}77$ m;	$c = 44{,}33$ m;	$\beta = 130{,}167°$.	Gesucht: γ, α, a, s_a[1])
f)	$a = 83{,}12$ m;	$c = 83{,}12$ m;	$\alpha = 76{,}417°$.	Gesucht: $\gamma, \beta, b, r_i, w_\alpha$[2])
g)	$a = 341{,}79$ m;	$b = 435{,}57$ m;	$\alpha = 48{,}728°$.	Gesucht: β, γ, c
h)	$a = 120{,}58$ m;	$b = 59{,}13$ m;	$\beta = 110{,}333°$.	Gesucht: α, γ, c
i)	$b = 48{,}17$ m;	$c = 21{,}25$ m;	$\gamma = 30{,}533°$.	Gesucht: β, α, a
j)	$a = 37{,}60$ m;	$b = 100{,}08$ m;	$\gamma = 58{,}205°$.	Gesuchte c, α, β, A, h_a
k)	$a = 135{,}22$ m;	$c = 75{,}25$ m;	$\beta = 41{,}008°$.	Gesucht: b, α, γ, r
l)	$b = 120{,}18$ m;	$c = 8{,}04$ m;	$\alpha = 20{,}339°$.	Gesucht: $a, \gamma, \beta, r_i, w_\alpha$
m)	$a = 205{,}37$ m;	$b = 252{,}76$ m;	$c = 189{,}68$ m.	Gesucht: $\alpha, \beta, \gamma, A, r_i$
n)	$a = 68{,}98$ m;	$b = 91{,}81$ m;	$c = 124{,}85$ m.	Gesucht: $\alpha, \beta, \gamma, r, s_a$
o)	$a = 43{,}55$ m;	$b = 56{,}13$ m;	$c = 20{,}00$ m.	Gesucht: α, β, γ, A

678. Die restlichen Seiten und Winkel eines Dreiecks sind mit dem Rechenstab zu berechnen aus:

a)	$a + b = 52$ cm;	$\gamma = 60°$;	$A = 160\sqrt{3}$ cm² $(a > b)$
b)	$b = 52{,}3$ m;	$h_c = 28{,}6$ m;	$\beta = 95{,}2°$
c)	$p_c^b = 18{,}1$ m;[3])	$p_b^c = 22{,}3$ m;	$\alpha = 46{,}2°$
d)	$w_\alpha = 30{,}0$ m;	$\alpha = 40{,}3°$;	$\beta = 75{,}5°$
e)	$h_b = 40{,}2$ m;	$w_\beta = 58{,}8$ m;	$\alpha = 52{,}4°$
f)	$w_\gamma = 120{,}2$ m;	$\alpha = 93{,}2°$;	$\beta = 27{,}5°$
g)	$a + b = 53{,}3$ m;	$c = 24{,}2$ m;	$\alpha - \beta = 23{,}3°$
h)	$h_a + h_b = 153{,}1$ m;	$\alpha = 42{,}9°$;	$\beta = 39{,}7°$
i)	$a : b = 8 : 5$;	$A = 1220$ m²;	$\gamma = 51{,}2°$

679. In einem Parallelogramm mit den Seiten a, b und den Diagonalen e, f gilt:

$$e^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2).$$

Man beweise die Formel.

680. Schneiden die Diagonalen e und f eines beliebigen Vierecks einander unter dem Winkel ε, so gilt für den Vierecksflächeninhalt die Formel $A = \dfrac{ef}{2} \sin\varepsilon$. Der Beweis ist zu führen.

---

[1]) s_a ist die Seitenhalbierende von a

[2]) w_α ist die Winkelhalbierende von α

[3]) Unter p_c^b versteht man die Projektion der Seite b auf die Seite c

681. Drei Kreise mit den Radien $r_1 = 8$ cm, $r_2 = 6$ cm, $r_3 = 5$ cm berühren sich gegenseitig von außen. Unter welchen Winkeln schneiden sich je zwei Verbindungsgeraden zweier Mittelpunkte und welchen Inhalt hat die zwischen den Kreisen liegende dreieckähnliche Fläche?

682. Die Grundfläche eines geraden Prismas mit der Höhe $h > 56$ cm ist ein Dreieck $A'B'C'$ mit den Seiten $a' = 33$ cm, $b' = 21$ cm, $c' = 45$ cm. Eine durch $C' = C$ gehende Ebene schneidet die den Punkt A' enthaltende Seitenkante des Prismas in A und die dritte Seitenkante in B. Diese Schnittpunkte haben die Höhen $h_A = 28$ cm und $h_B = 56$ cm über der Grundfläche. Man berechne Seiten, Winkel und Fläche des entstandenen Schnittdreiecks ABC.

683. Ein gerades dreiseitiges Prisma habe das Volumen $V = 400\ \text{cm}^3$. Zwei Winkel der Grundfläche betragen $\alpha = 42{,}533°$ und $\beta = 71{,}333°$. Das Volumen des umbeschriebenen Zylinders ist zu berechnen.

684. Die Höhe h_T einer Turmspitze T soll bestimmt werden. Zu diesem Zweck wird im Vorgelände des Turmes eine Standlinie AB abgesteckt, deren horizontale Länge $A'B' = e = 108{,}12$ m gemessen wird und deren Endpunkte A und B durch Nivellement höhenmäßig zu $h_A = 168{,}778$ m und $h_B = 170{,}959$ m über NN bestimmt werden. In A bzw. B werden mit dem Theodolit die Horizontalwinkel $\alpha = \sphericalangle\, T'A'B' = 41°12'20''$ bzw. $\beta = \sphericalangle\, A'B'T' = 68°04'00''$ zwischen der Standlinie und der Richtung zum Turm, die Höhenwinkel $\delta = 5°29'30''$ bzw. $\varepsilon = 6°02'40''$ nach T und die Instrumenthöhen $i_A = 1{,}423$ m bzw. $i_B = 1{,}478$ m gemessen.

685. Um die Höhe h der Figur auf dem Dresdner Rathausturm zu bestimmen, wird im Vorgelände eine Standlinie AB mit der schrägen Länge $a = 100{,}27$ m und der Neigung 0,2% (fällt von B nach A; B liegt näher am Turm) so abgesteckt, daß sie mit der Turmachse in einer Vertikalebene liegt. In A werden die Höhenwinkel $\alpha_K = 32°22'$ und $\alpha_F = 31°31'$ nach dem Kopf und dem Fuß der Figur und in B der Höhenwinkel $\beta_F = 43°03'$ nach deren Fuß gemessen. Die Höhe h ist zu ermitteln, nachdem die Neigung der Standlinie in den Winkel δ umgerechnet worden ist.

686. Die Höhe $h = AB$ eines Turmes ist zu bestimmen. In den Punkten C, D, E einer horizontalen Standlinie wurden die Höhenwinkel $\gamma = 31°15'$, $\delta = 32°20'$, $\varepsilon = 31°45'$ nach der Turmspitze gemessen, die Teilstrecken der Standlinie ergaben sich zu $\overline{CD} = a = 41{,}22$ m und $\overline{DE} = b = 63{,}15$ m. Wie hoch liegt die Turmspitze über dem Niveau der Standlinie?

687. Die gebrochene Grenzlinie ABC zwischen zwei Gundstücken G_1 und G_2 soll von C aus durch die neue Grenze CD so begradigt werden, daß die Flächeninhalte der Grundstücke erhalten bleiben. Für die Absteckung des Grenzpunktes D ist die Strecke $x = AD$ aus den gemessenen Stücken $a = 201{,}10$ m, $c = 246{,}20$ m, $\gamma = 43°17'$, $\delta = 76°23'$ zu berechnen (Bild 107).

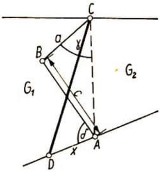


Bild 107

688. Zwecks Standortbestimmung werden von einem in der Nähe der Küste fahrenden Schiff ein Schornstein T in Richtung N 33,20° O und ein Leuchtturm L in Richtung N 48,42° W gepeilt. Aus der Karte werden die Strecke $LT = 18{,}3$ km und ihre Richtung $(LT) =$ N 82,28° O entnommen. Wie weit ist das Schiff vom Leuchtturm L entfernt, und welchen Kurs muß das Schiff fahren, um den Leuchtturm im Abstand von 6,5 Seemeilen (1 sm = 1,852 km) zu passieren?

689. Ein Schiff fährt mit dem Kurs S 32,82° O und peilt einen Leuchtturm in Richtung S 63,47° O. Nachdem es 1 h 15 min mit einer Geschwindigkeit von 8 sm/h weitergefahren ist, peilt es den Leuchtturm in N 72,63°O. Wie weit ist es jetzt vom Leuchtturm entfernt?

690. Ein Flugzeug ist um $10^{\text{h}}20^{\text{min}}$ in A mit dem Kurs N 42,50° O gestartet, um einen 600 km entfernt liegenden Ort C um $11^{\text{h}}50^{\text{min}}$ zu erreichen. In einem Ort B, der 400 km südlich von C liegt, startet um $10^{\text{h}}35^{\text{min}}53^{\text{s}}$ ein zweites Flugzeug, um das erste auf seinem Fluge von A nach C zu treffen und mit ihm weiterzufliegen. Welchen Kurs muß das zweite Flugzeug flie-

gen, wenn es eine Fluggeschwindigkeit von 450 km/h hat? Wann treffen sich die Flugzeuge, und welche Entfernung hat der Treffpunkt T von C?

691. Ein meteorologischer Beobachtungsballon hat sich losgerissen und wird vom Wind in Richtung S 22,50° O mit der Geschwindigkeit $v_1 = 30$ km/h abgetrieben. Um $13^{\mathrm{h}}\,50^{\mathrm{min}}$ wird er in A gesichtet. 100 km östlich von A startet in B um 15^{h} ein Hubschrauber mit der Eigengeschwindigkeit $v_2 = 150$ km/h, um den Ballon zu bergen. Welchen Kurs muß das Flugzeug einschlagen, wo und wann erreicht es den Ballon? Die Einwirkung des Windes auf das Flugzeug ist durch Berechnung mit dem Geschwindigkeitsparallelogramm zu berücksichtigen.

692. Drei Kräfte $F_1 = 50$ kp, $F_2 = 70$ kp, $F_3 = 80$ kp greifen in einem Punkt an und halten sich das Gleichgewicht. Welche Winkel schließen ihre Wirkungslinien miteinander ein?

693. An einem Punkt greifen die drei Kräfte $F_1 = 250$ N, $F_2 = 400$ N und $F_3 = 500$ N an. Ihre Wirkungslinien bilden die Winkel $(F_1F_2) = 61°$ und $(F_2F_3) = 53°$. Die Resultierende F_R ist zu berechnen.

694. Eine Kraft $F = 330$ N ist in zwei Komponenten F_1 und F_2 so zu zerlegen, daß diese mit F die Winkel $(F_1F) = 32{,}3°$ und $(FF_2) = 47{,}6°$ bilden.

695. Ein Scherenkran ist mit $F_\mathrm{Q} = 2800$ kp belastet. Die Streben s_1 und s_2 greifen unter den Winkeln $\alpha = 36°$ und $\beta = 55°$ an. Es sind die Stabkräfte $F_{\mathrm{S}1}$ und $F_{\mathrm{S}2}$ sowie die am Spannschloß S auftretende Zugkraft F_Z und Normalkraft F_N zu bestimmen (Bild 108).

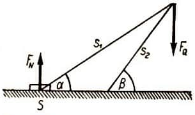


Bild 108

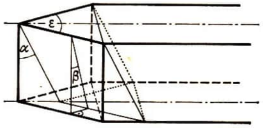


Bild 109

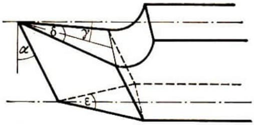


Bild 110

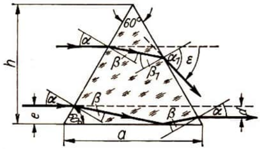


Bild 111

696. Am Gewindeschneidmeißel treten der Zahnwinkel ε, der Freiwinkel α und der Spanwinkel γ auf. Der Gewindeschneidmeißel (Bild 110) entsteht aus dem Rohstück (Bild 109) durch Anschleifen eines Flankenwinkels β und des Spanwinkels γ. Wie groß muß für $\alpha = 15°$ und $\gamma = 30°$ der Zahnwinkel ε gewählt werden, damit der von den oberen Kanten des Schneidmeißels eingeschlossene Winkel $\delta = 60°$ wird? Welche Größe muß der Flankenwinkel β erhalten?

697. Der Normalschnitt eines dreiseitigen Glasprismas mit dem relativen Brechungsindex $n = 1{,}5$ sei ein gleichseitiges Dreieck. Der Gang eines parallel zu einer Begrenzungsfläche einfallenden Lichtstrahls ist zu untersuchen (Bild 111).

a) Man zeige, daß ein im unteren Teile einfallender Strahl das Prisma parallel verschoben verläßt, und stelle die Verschiebung d als Funktion der Einfallshöhe e und der Seitenlänge a dar.

b) Ein im oberen Teil einfallender Lichtstrahl wird um einen Winkel ε abgelenkt, dieser ist zu berechnen.

c) Es gibt einen Grenzfall e_G der Einfallshöhe, bei dem sich das Verhalten des Lichtstrahls von der Eigenschaft *a*) zur Eigenschaft *b*) sprunghaft ändert. e_G ist als Funktion der Seitenlänge a bzw. Höhe h auszudrücken.

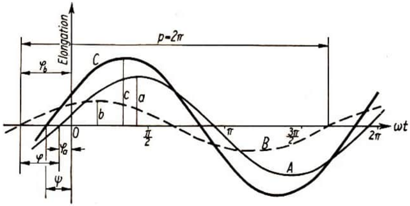


Bild 112

698. Die Addition zweier Sinusschwingungen $A = a \sin(\omega t + \varphi_a)$ und $B = b \sin(\omega t + \varphi_b)$ mit dem Phasenunterschied $\varphi = \varphi_b - \varphi_a$ ergibt wieder eine Sinusschwingung $C = c \sin(\omega t + \psi)$ mit dem Nullphasenwinkel ψ (Bild 112). ψ und c sind in a, b und φ_a, φ_b bzw. φ auszudrücken.

Anleitung: Die Lösung ist auf zwei Wegen möglich:

a) Koeffizientenvergleich in der Gleichung $C = A + B$,

b) Auflösung des Dreiecks OP_aP_b, dessen Seiten die als Vektoren dargestellten Sinusschwingungen sind. Hierbei ist $\overline{OP_a} = |\mathfrak{a}| = a$, $\overline{OP_b} = |\mathfrak{b}| = b$, $\overline{OP_c} = |\mathfrak{c}| = c$ (Bild 113).

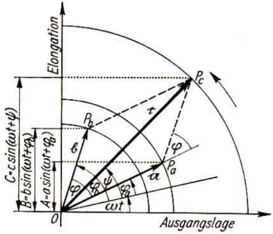


Bild 113

25. Goniometrische Gleichungen

Goniometrische Gleichungen sind Gleichungen, bei denen die Variablen u. a. im Argument trigonometrischer Funktionen auftreten, z. B. $\tan 2x - x \cos x/2 = 3x$.

In diesem Abschnitt werden nur solche goniometrische Gleichungen behandelt, die sich auf algebraische Gleichungen zurückführen lassen. Das sind goniometrische Gleiehungen, in denen die Variablen nur im Argument trigonometrischer Funktionen vorkommen, z. B. $\tan 2x - \cos x/2 = 3$ (vgl. auch Abschnitt 20.: Transzendente Gleichungen).

25.1. Goniometrische Gleichungen mit einer Variablen

Da alle vier Winkelfunktionen mit verschiedenen Argumenten und in verschiedenen Potenzen vorkommen können, sind die Formen goniometrischer Gleichungen sehr

zahlreich. Es gibt keine allgemeine Methode für ihre Auflösung. Ziel der äquivalenten Umformungen der Gleichung ist stets, daß in der Gleichung nur noch eine der vier trigonometrischen Funktionen mit ein und demselben Argument, allgemein $F(nx + \alpha)$, auftritt. Durch die Substitution $u = F(nx + \alpha)$ wird die umgeformte goniometrische Gleichung in eine algebraische Gleichung mit der Variablen u übergeführt.
Der *zulässige Variablenbereich* für x sei im allgemeinen die Menge $X = (-\infty; +\infty) = R$[1]. Die Menge der Lösungen x_i bezüglich X heiße E.
Die **Lösungen** $\bar{x}_i$ im Variablenbereich $\overline{X} = [0; 2\pi) = A$ bzw. $\overline{X} = [0°; 360°) = A$ sind Elemente einer Teilmenge $\bar{E} \subset E$ und sollen **Hauptwerte der Lösungsmenge E** genannt werden. $\bar{E}$ ergibt sich als Durchschnitt der Mengen E und $\overline{X}$: $\bar{E} = E \cap \overline{X}$.

25.1.1. Goniometrische Gleichungen vom linearen Typ

Die einfachsten goniometrischen Gleichungen sind Gleichungen der Form

$$F(x) = c \quad \text{bzw.} \quad F(nx + \alpha) = c.$$

Hierbei stellen c, n und α Konstanten dar. F ist eine der vier trigonometrischen Funktionen und x der gesuchte Winkel. Da alle goniometrischen Gleichungen bei ihrer Lösung auf diesen Typ führen, ist er besonders wichtig.

BEISPIELE

1. Welche Winkel x erfüllen die Gleichung $\sin x = -0{,}4586$?

Lösung: Zunächst werden die Hauptwerte bestimmt. Aus dem negativen Vorzeichen des gegebenen Sinuswertes folgt, daß je eine Lösung im III. und IV. Quadranten liegen muß. In der Funktionstafel wird der Wert 0,4586 aufgesucht. Man liest für ihn in der

Sinus-Spalte den Winkel $y = 27{,}3°$ und in der

Cosinus-Spalte den Winkel $z = 62{,}7°$ ab.

Aus dem Satz in 22.9., S. 263, folgt:

$$\bar{x}_1 = 180° + y = 207{,}3°$$

$$\bar{x}_2 = 270° + z = 332{,}7°$$

$\bar{x}_1$ und $\bar{x}_2$ sind die Hauptwerte, also

$$\bar{E} = \{207{,}3°;\quad 332{,}7°\}.$$

Mit der Periode 360° der Sinusfunktion ergibt sich folgende Lösungsmenge, wobei G die Menge der ganzen Zahlen darstellt:

$$\underline{\underline{E = \{207{,}3° + k \cdot 360°;\ 332{,}7° + k \cdot 360° \mid k \in G\}}}.$$

2. Für folgende Gleichungen sind die Hauptwerte der Lösungen zu bestimmen:

a) $\cos x = 0{,}13341$; b) $\tan x = -0{,}26795$; c) $\cot x = -1{,}67530$

d) $\sin x = 1$; e) $\cos x = 0{,}96440$; f) $\tan x = 1{,}15037$

g) $\sin x = \pm\dfrac{1}{2}$; h) $\cos x = -\dfrac{1}{2}\sqrt{2}$

[1]) R ist der Körper der reellen Zahlen

Lösung:

a) $\underline{\underline{\overline{E} = \{82°20'; 277°40'\}}}$ b) $\underline{\underline{\overline{E} = \{165°; 345°\}}}$

c) $\underline{\underline{\overline{E} = \{149°10'; 329°10'\}}}$ d) $\underline{\underline{\overline{E} = \{90°\}}}$

e) $\underline{\underline{\overline{E} = \{15°20'; 344°40°\}}}$ f) $\underline{\underline{\overline{E} = \{49°; 229°\}}}$

g) $\underline{\underline{\overline{E} = \{30°; 150°; 210°; 330°\}}}$ h) $\underline{\underline{\overline{E} = \{135°; 225°\}}}$

Man beachte, daß der Variablenbereich für b) und f) $\overline{X} = A \setminus \{90°; 270°\}$ und für c) $\overline{X} = A \setminus \{0°; 180°\}$ lautet.

Für eine Gleichung der Form $F(nx + \alpha) = c$ mit $n > 0$ gilt:

Satz

Die Lösungsmenge $\overline{E}$ der Hauptwerte $\overline{x}_i$ der Gleichung $F(nx + \alpha) = c$ mit $n > 0$ ergibt sich, wenn für die Gleichung $F(y) = c$ alle Lösungen $\overline{y}_i \in B = [\alpha; n \cdot 360° + \alpha)$ bestimmt werden.

Beweis: Aus der Ungleichung $0° \leqq \overline{x}_i < 360°$ folgt durch Multiplikation mit $n > 0$ und durch Addition von α:

$$\alpha \leqq n\overline{x}_i + \alpha < n \cdot 360° + \alpha.$$

BEISPIEL

3. Wie lauten die Hauptwerte der Lösungsmenge folgender Gleichungen:

a) $\sin(2x + 10°) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ b) $\tan\left(\frac{x}{3} - 100°\right) = 1$

Lösung:

a) Die Lösungsmenge der Gleichung heißt für die Variable $y = 2x + 10°$:

$$E_y = \{60° + k \cdot 360°;\ 120° + k \cdot 360° \mid k \in G\}.$$

Wegen des obigen Satzes muß $\overline{y}_i$ Element der Menge $B = [10°; 730°]$ sein. Somit kommen nur $k = 0$ und $k = 1$ in Frage, und es wird:

$$\overline{E}_y = E_y \cap B = \{60° + k \cdot 360°; 120° + k \cdot 360° \mid k = 0; k = 1\}$$

Daher folgt aus $x_i = \dfrac{y_i - 10°}{2}$:

$$\underline{\underline{\overline{E}_x = \{25°;\ 55°;\ 205°;\ 235°\}}}$$

b) Für die Menge B gilt $B = [-100°; 20°)$, die allgemeine Lösung lautet $E_y = \{45° + k \cdot 180° \mid k \in G\}$. Wegen $\overline{E}_y = E_y \cap B = \varnothing$ wird $\overline{E}_x = \varnothing$, d. h., es gibt überhaupt keinen Hauptwert.

Zurückführen auf goniometrische Gleichungen vom linearen Typ mit einer trigonometrischen Funktion

Durch Anwendung goniometrischer Formeln und gegebenenfalls der korrespondierenden Addition und Subtraktion lassen sich kompliziertere Gleichungen in die einfachste Form des linearen Typs überführen.

BEISPIELE

4. $\cos x + \cos(x + 60°) - \frac{3}{2} = 0$

   Lösung: Mit (78) umgeformt: $\cos(x + 30°) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

   $$x + 30° = \pm 30° + k \cdot 360°$$

   $$\underline{\underline{E = \{k \cdot 360°;\ 300° + k \cdot 360° \mid k \in G\}}} \qquad \underline{\underline{\overline{E} = \{0°;\ 300°\}}}$$

   Zur Sicherung gegen Rechenfehler wird möglichst bei jeder Aufgabe überprüft, ob bei Belegung der Variablen x mit den gefundenen Lösungen x_i die gegebene Gleichung in eine wahre Aussage übergeht. Im Beispiel ergibt sich:

   $$x = k \cdot 360°: \qquad 1 + \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = 0$$

   $$x = 300° + k \cdot 360°: \qquad \frac{1}{2} + 1 - \frac{3}{2} = 0$$

   Da beide Aussagen wahr sind, ist die gefundene Lösungsmenge richtig.

5. $2\sin(x + 170°) + 4\sin(x + 50°) = 0$

   Lösung: Durch Umstellen und Anwenden der korrespondierenden Addition und Subtraktion findet man:

   $$\frac{\sin(x + 170°) + \sin(x + 50°)}{\sin(x + 170°) - \sin(x + 50°)} = \frac{1}{3}.$$

   Mit (76) und (77) folgt hieraus:

   $$\tan(x + 110°) = \frac{1}{3}\sqrt{3} \qquad x + 110° = 30° + k \cdot 180°$$

   $$\underline{\underline{E = \{100° + k \cdot 180° \mid k \in G\}}} \qquad \underline{\underline{\overline{E} = \{100°;\ 280°\}}}$$

6. $\sin(x - 30°) \cdot \cos x = \frac{1}{4}$

   Lösung: Mit (74) wird:

   $$\frac{1}{2}[\sin(-30°) + \sin(2x - 30°)] = \frac{1}{4}.$$

   Durch Umstellen:

   $$\sin(2x - 30°) = 1 \qquad 2x - 30° = 90° + k \cdot 360°$$

   $$\underline{\underline{E = \{60° + k \cdot 180° \mid k \in G\}}} \qquad \underline{\underline{\overline{E} = \{60°;\ 240°\}}}$$

7. In einem Dreieck mit der Seite $AB = c = 140{,}2$ m sei durch den Eckpunkt C eine Gerade g derart gezogen, daß die Seite c im Punkt D im Verhältnis $d : e = 3 : 2$ geteilt wird und die den Strecken d und e gegenüberliegenden Teilwinkel von γ die Größe $\delta = 37°$ und $\varepsilon = 28°$ erhalten (Bild 114). Wie groß sind a, b, α, β, γ?

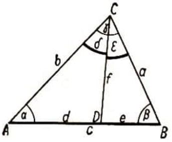


Bild 114

   Lösung: Aus den gegebenen Stücken folgt unmittelbar:

   $$d = \frac{3}{5} \cdot 140{,}2\ \text{m} = 84{,}12\ \text{m}$$

   $$e = \frac{2}{5} \cdot 140{,}2\ \text{m} = 56{,}08\ \text{m}$$

   $$\underline{\underline{\gamma}} = \delta + \varepsilon = \underline{\underline{65°}}$$

Bei Einführung der Hilfsgröße f findet man durch Anwendung des Sinussatzes:

$$f = \frac{d \sin \alpha}{\sin \delta} = \frac{e \sin \beta}{\sin \varepsilon}.$$

Diese Gleichung enthält die beiden Variablen α und β. β läßt sich bei Beachtung der Winkelsumme im Dreieck durch Einsetzen der Gleichung

$$\beta = 180° - \gamma - \alpha = 115° - \alpha$$

eliminieren:

$$\frac{\sin (115° - \alpha)}{\sin \alpha} = \frac{d \sin \varepsilon}{e \sin \delta}.$$

Mit dem Rechenstab ergibt sich

$$\frac{d \sin \varepsilon}{e \sin \delta} = 1{,}17 = m.$$

Der unbekannte Winkel α läßt sich aus der goniometrischen Gleichung

$$\frac{\sin (115° - \alpha)}{\sin \alpha} = m$$

berechnen. Die Anwendung der korrespondierenden Addition und Subtraktion führt bei Beachtung von (76) und (77) auf

$$\cot (57{,}5° - \alpha) = \frac{m + 1}{m - 1} \cot 57{,}5°.$$

Wegen $m = 1{,}17$ findet man:

$$\cot (57{,}5° - \alpha) = 8{,}13.$$

Hieraus:

$$57{,}5° - \alpha = 7{,}0° + k \cdot 180°$$

$$\alpha = 50{,}5° - k \cdot 180°.$$

Wegen $\alpha \in \overline{X} = (0°; 180°)$ ist nur $k = 0$ möglich. Das ergibt:

$$\underline{\underline{\alpha = 50{,}5°}} \qquad \underline{\underline{\beta = 64{,}5°}}.$$

Der Sinussatz liefert nun auch die Seiten a und b:

$$a = \frac{c \sin \alpha}{\sin \gamma} = \underline{\underline{119{,}3 \text{ m}}} \qquad b = \frac{c \sin \beta}{\sin \gamma} = \underline{\underline{139{,}6 \text{ m}}}$$

Hilfswinkelmethode

Gegeben sei eine Gleichung der Form

$$a \cos x + b \sin x = c. \tag{I}$$

Die Lösung der Gleichung wäre auf folgendem Wege möglich: Eine der beiden trigonometrischen Funktionen wird durch Anwendung von (45) in der anderen ausgedrückt. Es entsteht eine Wurzelgleichung, die durch Quadrieren in eine quadratische Gleichung übergeführt wird. Dieser Lösungsweg ist umständlich, zumal die Ergebnisse einer Wurzelgleichung auf ihre Brauchbarkeit als Lösung der Ausgangsgleichung untersucht werden müssen.

Der Übergang zur Wurzel- bzw. quadratischen Gleichung läßt sich folgendermaßen vermeiden: Die Konstanten a, b werden als rechtwinklige Koordinaten eines Ebenenpunktes aufgefaßt und in Polarkoordinaten r, φ umgeformt. Mit (55) ergibt sich dann:

$$a = r\cos\varphi \quad \text{(II)}, \qquad b = r\sin\varphi \quad \text{(III)}, \qquad \tan\varphi = \frac{b}{a} \qquad \text{(IV)}$$

Zur eindeutigen Bestimmung des Hilfswinkels φ aus (IV) vgl. 22.9.
(II) und (III) in (I) eingesetzt:

$$r\cos x\cos\varphi + r\sin x\sin\varphi = c.$$

Hieraus mit (60) und (II):

$$\cos(x - \varphi) = \frac{c}{a}\cos\varphi. \qquad \text{(V)}$$

Mit dem Hilfswinkel aus (IV) gibt (V) die Lösung von (I).

BEISPIELE

8. $3\cos x - 4\sin x = 2$

Lösung:

Aus (IV):

$$\tan\varphi = \frac{-4}{3} \quad \text{(IV. Quadrant)}$$

Hieraus wegen (49):

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2\varphi}} = \frac{3}{5}.$$

Mit dem Rechenstab folgt:

$$\varphi = 306{,}9^\circ.$$

(V) ergibt:

$$\cos(x - 306{,}9^\circ) = 0{,}4.$$

Hieraus:

$$x - 306{,}9^\circ = \pm 66{,}4^\circ + k \cdot 360^\circ.$$

Somit:

$$\underline{\underline{E = \{13{,}3^\circ + k\cdot 360^\circ;\ 240{,}5^\circ + k\cdot 360^\circ \mid k \in G\}}}$$

$$\underline{\underline{\bar{E} = \{13{,}3^\circ;\ 240{,}5^\circ\}.}}$$

9. $\cos x - \sin x = -1$

Lösung:

$$\tan\varphi = \frac{-1}{1}; \qquad \varphi = 315^\circ; \qquad \cos\varphi = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\cos(x - 315^\circ) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

$$\underline{\underline{E = \{90^\circ + k\cdot 360^\circ;\ 180^\circ + k\cdot 360^\circ \mid k \in G\}}} \qquad \underline{\underline{\bar{E} = \{90^\circ;\ 180^\circ\}}}$$

Graphische Lösung

Am vorangehenden Beispiel soll das **graphische Verfahren** für die Lösung goniometrischer Gleichungen erläutert werden. Wie bei algebraischen Gleichungen mit einer Variablen werden alle Glieder auf die eine Seite der Gleichung gebracht, so daß auf der anderen Seite Null steht. Die Null wird durch y ersetzt, so daß die Gleichung in eine Funktionsgleichung, hier im Beispiel

$$y = \sin x - \cos x - 1,$$

übergeht. Da die Nullstellen dieser Funktion die gesuchten Lösungen der goniometrischen Gleichung

$$0 = \sin x - \cos x - 1$$

sind, braucht man nur das Bild der Funktion zu zeichnen und an den Schnittpunkten der Kurve mit der x-Achse die Lösungen abzulesen.

Zum Zwecke der bequemen Zeichnung der Kurve wird die Funktion in drei Teilfunktionen

$$y_1 = \sin x, \quad y_2 = -\cos x, \quad y_3 = -1$$

zerlegt, deren Addition

$$y = y_1 + y_2 + y_3$$

graphisch durchgeführt wird, indem man die Summenkurve durch *Überlagerung* (*Superposition*) der Teilkurven zeichnet (Bild 115). Dabei werden die Ordinaten y punktweise durch algebraische Addition der Ordinaten y_1, y_2, y_3 mit dem Stechzirkel ermittelt.

Aus Bild 115 liest man die Hauptwerte $\bar{x}_1 = 90°$, $\bar{x}_2 = 180°$ ab, wie es auch die Rechnung ergeben hat.

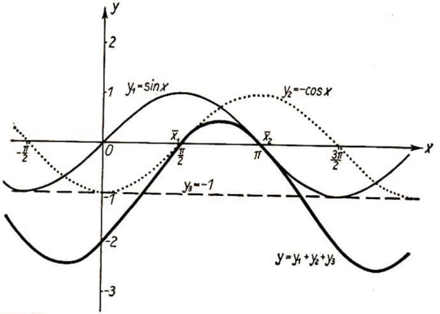


Bild 115

Da das graphische Verfahren die Lösungen der Gleichung ungenau liefert, wird es nur in den Fällen angewandt, wo die rechnerischen Methoden versagen, z. B. bei nicht auf algebraische Gleichungen zurückführbaren goniometrischen Gleichungen. Gegebenenfalls können die Lösungen mit Näherungsverfahren (vgl. Abschnitt 19.) verbessert werden.

25.1.2. Goniometrische Gleichungen vom quadratischen Typ

Eine goniometrische Gleichung quadratischen Typs

$$F^2(x) + pF(x) + q = 0$$

führt durch die Substitution $u = F(x)$ auf die quadratische algebraische Gleichung

$$u^2 + pu + q = 0,$$

deren Lösungsformel bekanntlich

$$u_{1;2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

lautet.

BEISPIEL

1. $\tan^2 x + 2\tan x - 1 = 0$

Lösung: Mit $u = \tan x$ wird

$$u^2 + 2u - 1 = 0.$$

Somit:

$$u_{1;2} = (\tan x)_{1;2} = -1 \pm \sqrt{2}$$

$$u_1 = (\tan x)_1 = \sqrt{2} - 1$$

$$u_2 = (\tan x)_2 = -(\sqrt{2} + 1)$$

$$\underline{\underline{E = \{22{,}5° + k \cdot 90° \mid k \in G\}}} \qquad \underline{\underline{\bar{E} = \{22{,}5°;\ 112{,}5°;\ 202{,}5°;\ 292{,}5°\}}}$$

Treten in der gegebenen Gleichung verschiedene Funktionen auf, so ist sie in eine Gleichung mit nur einer Funktion umzuformen.

BEISPIEL

2. $3\sin x = 2\cos^2 x$

Lösung: Mit (45) folgt:

$$3\sin x - 2(1 - \sin^2 x) = 0 \quad \text{oder} \quad \sin^2 x + \frac{3}{2}\sin x - 1 = 0.$$

Hieraus:

$$(\sin x)_{1;2} = -\frac{3}{4} \pm \frac{5}{4}$$

$$(\sin x)_1 = \frac{1}{2} \qquad \bar{x}_1 = 30°, \quad \bar{x}_2 = 150°$$

$$(\sin x)_2 = -2.$$

Da $\sin x \in [-1; 1]$ gilt, ist der Wert $\sin x = -2$ goniometrisch nicht möglich und muß daher ausgeschlossen werden.

$$\underline{\underline{E = \{30^\circ + k \cdot 360^\circ;\ 150^\circ + k \cdot 360^\circ \mid k \in G\}}} \qquad \underline{\underline{\bar{E} = \{30^\circ;\ 150^\circ\}}}$$

Auch bei der Auflösung goniometrischer Gleichungen von linearem Typ mit verschiedenen Argumenten oder verschiedenen Funktionen können quadratische Gleichungen entstehen, wie die folgenden Beispiele zeigen.

BEISPIEL

3. $3 \cos x - 4 \sin x = 2$

Lösung: Dieses Beispiel ist identisch mit dem 8. Beispiel des Abschnitts 25.1.1. Jetzt soll die Gleichung nach dem dort beschriebenen, aber nicht ausgeführten Verfahren gelöst werden. Aus der Gleichung folgt wegen (45):

$$3 \cos x - 4 \sqrt{1 - \cos^2 x} = 2.$$

Durch Umstellen, Quadrieren und Zusammenfassen ergibt sich eine Gleichung vom quadratischen Typ:

$$\cos^2 x - \frac{12}{25} \cos x - \frac{12}{25} = 0.$$

Man erhält bei Benutzung des Rechenstabs:

$$(\cos x)_1 = 0{,}973 \qquad\qquad (\cos x)_2 = -0{,}493.$$

Hieraus:

$$\bar{x}_1 = 13{,}3^\circ;\ \bar{x}_2 = 119{,}5^\circ;\ \bar{x}_3 = 240{,}5^\circ;\ \bar{x}_4 = 346{,}7^\circ.$$

Beim Vergleich mit dem früheren Ergebnis muß festgestellt werden, daß sich jetzt zwei Hauptwerte mehr ergeben haben. Zur Klärung dieses Widerspruchs wird überprüft, ob bei Belegung der Variablen mit den $\bar{x}_i$ $(i = 1, \ldots, 4)$ die gegebene Gleichung in eine wahre Aussage übergeht. Man erhält:

$$\begin{array}{lllll}
\bar{x}_1: & 3 \cdot 0{,}973 - 4 \cdot 0{,}230 & = 2 & \text{oder} & 1{,}999 = 2, \\
\bar{x}_2: & 3 \cdot (-0{,}493) - 4 \cdot 0{,}870 & = 2 & \text{oder} & -4{,}959 = 2, \\
\bar{x}_3: & 3 \cdot (-0{,}493) - 4 \cdot (-0{,}870) & = 2 & \text{oder} & 2{,}001 = 2, \\
\bar{x}_4: & 3 \cdot 0{,}973 - 4 \cdot (-0{,}230) & = 2 & \text{oder} & 3{,}839 = 2.
\end{array}$$

Abgesehen von Rechenungenauigkeiten werden nur die 1. und 3. Aussage wahr. Die Ursache hiervon ist, daß das Quadrieren einer Gleichung keine äquivalente Umformung darstellt, so daß die gegebene Gleichung und die durch Quadrieren entstehende Gleichung verschiedene Lösungsmengen haben können. Wie in 25.1.1. lautet die Lösungsmenge:

$$\underline{\underline{E = \{13{,}3^\circ + k \cdot 360^\circ;\ 240{,}5^\circ + k \cdot 360^\circ \mid k \in G\}}}$$

Als Folge aus der im Beispiel gewonnenen Erkenntnis ergibt sich:

Regel

Wenn bei der Umformung einer Gleichung das Quadrieren angewendet worden ist, müssen die erhaltenen Ergebnisse daraufhin überprüft werden, ob sie die ursprünglich gegebene Gleichung erfüllen.

Wegen dieser Regel und zur Auffindung von Rechenfehlern ist eine Probe am Schluß der Rechnung stets angebracht.

BEISPIELE

4. $\cos 2x + \cos x = 0$

   Lösung: Mit (66b) folgt:

$$\cos^2 x + \frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{2} = 0.$$

   Die Auflösung dieser Gleichung ergibt:

$$\underline{\underline{E = \{60^\circ + k \cdot 120^\circ \mid k \in G\}}} \qquad \underline{\underline{\overline{E} = \{60^\circ; 180^\circ; 300^\circ\}}}$$

5. $3 \tan x = 5 \cot x$

   Lösung: Die Anwendung von (47) und (48) führt auf:

$$3 \sin^2 x = 5 \cos^2 x.$$

   Hieraus:

$$\tan^2 x = \frac{5}{3} \quad \text{oder} \quad \tan x = \pm 1{,}29.$$

   Die Division durch $\cos^2 x$ ist erlaubt, da $\cos^2 x \neq 0$. Denn wäre $\cos^2 x = 0$, so müßte wegen $3 \sin^2 x = 5 \cos^2 x$ auch $\sin^2 x = 0$ sein, was wegen $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ nicht möglich ist!

$$\underline{\underline{E = \{\pm 52{,}25^\circ + k \cdot 180^\circ \mid k \in G\}}}$$

$$\underline{\underline{\overline{E} = \{52{,}25^\circ; 127{,}75^\circ; 232{,}25^\circ; 307{,}75^\circ\}}}$$

25.1.3. Gleichungen, die sich in goniometrische Gleichungen vom linearen und quadratischen Typ zerlegen lassen

Oft ist es zweckmäßig, durch Anwendung geeigneter goniometrischer Formeln sowie durch Ausklammern die Gleichung so umzuformen, daß auf der einen Seite der Gleichung ein Produkt und auf der anderen Seite Null steht.

BEISPIELE

1. $\sin 2x = \tan x$

   Lösung: (65) und (47) ergeben:

$$2 \sin x \cos^2 x - \sin x = 0.$$

   Durch Ausklammern von $\sin x$ folgt:

$$\sin x (2 \cos^2 x - 1) = 0.$$

   Man beachte, daß die Division durch $\sin x$ nicht erlaubt ist, da $\sin x = 0$ werden kann. Wird trotzdem durch $\sin x$ geteilt, so gehen die aus $\sin x = 0$ folgenden Lösungen verloren!
   Aus der letzten Gleichung ergeben sich zwei Gleichungen, denn ein Produkt wird Null, wenn mindestens ein Faktor Null ist:

$$\sin x = 0$$

$$2 \cos^2 x - 1 = 0 \qquad \cos x = \pm \frac{1}{2} \sqrt{2}$$

   Dies ergibt:

$$\underline{\underline{E = \{k \cdot 180^\circ; 45^\circ + k \cdot 90^\circ \mid k \in G\}}}$$

$$\underline{\underline{\overline{E} = \{0^\circ; 45^\circ; 135^\circ; 180^\circ; 225^\circ; 315^\circ\}}}$$

2. $\cos x - \cot \frac{x}{2} + 1 = 0$

Lösung: Durch Umstellen und Beachten von (70b) und (48) findet man:

$$2 \cos^2 \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} = 0.$$

Hieraus:

$$\cos \frac{x}{2} (\sin x - 1) = 0$$

$$\cos \frac{x}{2} = 0 \qquad \sin x = 1$$

$$\underline{\underline{E = \{90° + k \cdot 360°;\ 180° + k \cdot 360° \mid k \in G\}}} \quad \underline{\underline{\bar{E} = \{90°; 180°\}}}$$

25.2. Goniometrische Gleichungen mit zwei Variablen

Dieser Abschnitt beschränkt sich auf solche Gleichungssysteme, bei denen in einer Gleichung trigonometrische Funktionen der Variablen auftreten, während in der zweiten Gleichung die Variablen nicht mit trigonometrischen Funktionen verknüpft sind. Den einfachsten Lösungsweg zeigt das nachstehende Beispiel.

BEISPIEL

1. $\sin x + \sin y = 0{,}9$ (I)

$x + y = 62{,}3°$ (II)

Lösung: Durch Einsetzen von (II) in (I) erhält man eine goniometrische Gleichung mit einer Variablen:

$$\sin x + \sin (62{,}3° - x) = 0{,}9.$$

(76) angewendet:

$$2 \sin 31{,}15° \cos(x - 31{,}15°) = 0{,}9.$$

Hieraus folgt mit dem Rechenstab:

$$\cos(x - 31{,}15°) = 0{,}871, \quad x - 31{,}2° = \pm 29{,}5° + k \cdot 360°.$$

Dies gibt wegen $y = 62{,}3° - x$:

$$\underline{\underline{E_x = \{1{,}7° + k_1 \cdot 360°;\ 60{,}7° + k_2 \cdot 360° \mid k_{1;2} \in G\}}},$$

$$\underline{\underline{E_y = \{60{,}6° - k_1 \cdot 360°;\ 1{,}6° - k_2 \cdot 360° \mid k_{1;2} \in G\}}}.$$

Das Mengenprodukt $E = E_x \times E_y$ von E_x und E_y ergibt die Menge aller Lösungspaare $(x; y)$:

$$\underline{\underline{E = \{(1{,}7° + k_1 \cdot 360°}};\ \underline{\underline{60{,}6° - k_1 \cdot 360°)}};\ \underline{\underline{(60{,}7° + k_2 \cdot 360°}};\ \underline{\underline{1{,}6° - k_2 \cdot 360°) \mid k_{1;2} \in G\}}}$$

Die Menge der Hauptwerte lautet:

$$\underline{\underline{\bar{E} = \{(1{,}7°; 60{,}6°);\ (60{,}7°; 1{,}6°)\}}}.$$

In der Vermessungstechnik z. B. treten solche Gleichungssysteme bei einigen wichtigen Aufgaben auf. Dabei wird im Interesse einer übersichtlichen, bequemen und genauen Rechnung ein etwas umständlicher Weg eingeschlagen, wie das nachfolgende Beispiel zeigt.

BEISPIEL

2. Um die Entfernung e zweier unzugänglicher Punkte P_1 und P_2 zu bestimmen, werden in den Endpunkten A und B einer Standlinie der Länge $a = 311{,}16$ m die Horizontalwinkel $\alpha_1 = 58°24'34''$, $\alpha_2 = 18°59'07''$, $\beta_1 = 78°58'42''$, $\beta_2 = 28°17'32''$ gemessen (Bild 116).

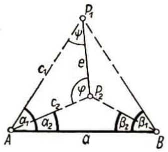


Bild 116

Lösung: Werden die Hilfswinkel $\sphericalangle\, AP_2P_1 = \varphi$ und $\sphericalangle\, P_2P_1A = \psi$ eingeführt, so ergibt sich aus Bild 116 nach dem Sinussatz:

$$c_1 = \frac{a \sin\beta_1}{\sin(\alpha_1 + \beta_1)} \quad \text{(I)} \qquad c_2 = \frac{a \sin\beta_2}{\sin(\alpha_2 + \beta_2)} \quad \text{(II)}$$

$$e = \frac{c_1 \sin(\alpha_1 - \alpha_2)}{\sin\varphi} = \frac{c_2 \sin(\alpha_1 - \alpha_2)}{\sin\psi}. \quad \text{(III)}$$

(I) und (II) in (III) eingesetzt:

$$e = \frac{a \sin\beta_1 \sin(\alpha_1 - \alpha_2)}{\sin(\alpha_1 + \beta_1)\sin\varphi} = \frac{a \sin\beta_2 \sin(\alpha_1 - \alpha_2)}{\sin(\alpha_2 + \beta_2)\sin\psi}. \quad \text{(IV)}$$

Hieraus durch Umstellen:

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \frac{\sin\beta_1 \sin(\alpha_2 + \beta_2)}{\sin\beta_2 \sin(\alpha_1 + \beta_1)} = m. \quad \text{(V)}$$

Aus Bild 116 entnimmt man ferner:

$$\varphi + \psi = 180° - (\alpha_1 - \alpha_2). \quad \text{(VI)}$$

Das goniometrische Gleichungssystem (V) und (VI) wird folgendermaßen gelöst. Für den in (V) rechts stehenden Bruch, dessen Wert m sich aus den gemessenen Winkeln berechnen läßt, wird $\tan\mu$ gesetzt. Diese Verwendung eines Hilfswinkels μ mit $\mu \in (-90°; +90°)$ ist wegen $\tan\mu \in (-\infty; +\infty)$ immer möglich. Es ergibt sich:

$$\tan\mu = \frac{\sin\beta_1 \sin(\alpha_2 + \beta_2)}{\sin\beta_2 \sin(\alpha_1 + \beta_1)} \quad \text{(VII)}, \qquad \frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \tan\mu. \quad \text{(VIII)}$$

Aus (VIII) folgt mit der korrespondierenden Addition und Subtraktion:

$$\frac{\sin\varphi - \sin\psi}{\sin\varphi + \sin\psi} = \frac{\tan\mu - 1}{\tan\mu + 1}.$$

Bei Beachtung von (76), (77) und der Formel in Aufgabe 657, m) sowie durch Vereinfachen folgt:

$$\tan\frac{\varphi - \psi}{2} = \tan(\mu - 45°)\tan\frac{\varphi + \psi}{2}. \quad \text{(IX)}$$

Aus (VI) erhält man:

$$\frac{\varphi + \psi}{2} = 90° - \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}. \quad \text{(X)}$$

Die Zahlenrechnung liefert mit (VII), (X), (IX) und (IV) folgendes Ergebnis:

$$\underline{\underline{e = 322{,}32 \text{ m}.}}$$

AUFGABEN

699. Wie lautet die Lösungsmenge folgender Gleichungen?

a) $\cos(2x + 20°) = 0{,}5$

b) $\cot x = -0{,}2679$

c) $\sin x = -0{,}4067$

d) $\tan x = -(\sqrt{2} - 1)$

e) $\sin \frac{x}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

f) $\cot x = 0{,}5317$

g) $\tan\left(-\frac{x}{3} + 17°\right) = 0{,}5543$

h) $\cos x = -0{,}9907$

i) $\sin x = \pm 0{,}1736$

j) $\cos x = \pm 0{,}8290$

k) $\tan x = \pm 4{,}331$

l) $\cot x = \pm 0{,}4224$

700. Folgende goniometrische Gleichungen mit einer Variablen sind zu lösen:

a) $\sqrt{3}\sin x = \cos x$

b) $\sqrt{3}\cos x + \sin x - 1 = 0$

c) $\sin x + \cos x = 1$

d) $8\sin x - 10\cos x = 5$

e) $2\cos^2 x = 3 - 4\sin x$

f) $\cos^2 x - 4\sin x + 5\sin^2 x = 0$

g) $\cos x = \frac{1}{2}\tan x$

h) $3\cos 2x - 20\sin x = 9$

i) $\frac{\cos(x - 45°)}{\sin x \sin 45°} = 1 + \tan x$

j) $3\sin 2x = -2\cos 3x$

k) $3\cos^2 x = \sin^2 2x$

l) $2\cos^2 \frac{x}{2} = 1 + \cot x$

m) $\cos^2 x + \frac{1}{3}\sin x\cos x + \frac{2}{3}\sin^2 x = 1$

n) $\cos(x + 38°) + \cos(x + 15°) = 0{,}5$

o) $\cos(x + 22{,}5°) = (\sqrt{2} - 1)\cos(x - 22{,}5°)$

p) $2\cos(x + 60°) + \sin(x - 90°) = 0$

701. Wie lautet die Lösungsmenge der folgenden goniometrischen Gleichungen mit zwei Variablen?

a) $\cos x + \sin y = -1$
$x + y = 450°$

b) $\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{4}$
$x + y = 70°$

c) $\frac{\cos x}{\cos y} = \sqrt{2} - 1$
$x - y = 90°$

d) $\frac{\sin x}{\sin y} = 2{,}25$
$x + y = 88{,}2°$

e) $\frac{\tan x}{\tan y} = 3{,}8$
$x - y = 30°$

702. Ein schiefwinkliges Dreieck sei durch $a = 82{,}14$ m, $h_a = 33{,}62$ m, $\alpha = 42{,}28°$ gegeben. Gesucht sind b, c, β, γ.

703. Die Lage dreier Punkte A, B, C zueinander sei durch die Strecken $AC = a = 625{,}30$ m, $BC = b = 418{,}40$ m und den Winkel $\sphericalangle ABC = \gamma = 152°37'23''$ bekannt. Durch die Messung der Winkel $\sphericalangle CPA = \alpha = 47°26'04''$ und $\sphericalangle BPC = \beta = 38°53'37''$ soll die Lage des Punktes P in bezug auf A, B und C bestimmt werden, d. h., es sind die Strecken $PA = x$, $PB = y$, $PC = z$ zu ermitteln (Rückwärtseinschneiden). Zur Lösung sind die Hilfswinkel $\sphericalangle PAC = \varphi$ und $\sphericalangle CBP = \psi$ (Bild 117) einzuführen. Die Rechnung soll analog zu Beispiel 2., S. 305, erfolgen.

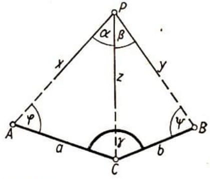


Bild 117

704. Bei der Bestimmung der Länge einer Strecke AB können wegen eines Hindernisses zwischen C und C' nur die Teilstrecken $AC = a = 99{,}83$ m und $C'B = b = 73{,}68$ m direkt gemessen werden. Für die Berechnung der Teilstrecke $CC' = x$ werden in einem passend gewählten Punkt P die Horizontalwinkel $\alpha = 23°24'20''$, $\beta = 24°18'30''$, $\gamma = 36°54'40''$ gemessen (Bild 118). Folgende Hilfsvariablen sind einzuführen: $\varphi = \sphericalangle BAP$, $\psi = \sphericalangle PBA$, $c_1 = \overline{PC}$, $c_2 = \overline{PC'}$. Zu beachten ist, daß das Dreieck ABP nur spitze Winkel enthält.

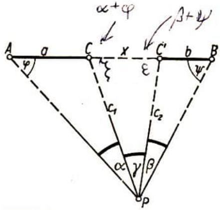


Bild 118

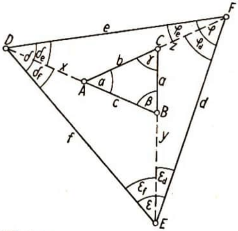


Bild 119

705. Innerhalb eines gegebenen Dreiecks DEF mit den Seiten $d = 240{,}68$ m, $e = 238{,}36$ m, $f = 236{,}04$ m liege ein weiteres Dreieck ABC mit den Seiten $a = 37{,}30$ m, $b = 35{,}00$ m, $c = 28{,}50$ m derart, daß die Punkte A, B, D; B, C, E; A, C, F jeweils eine Gerade bilden (Bild 119). Man berechne die Winkel $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \varphi$ beider Dreiecke und alle Stücke δ_e, δ_f, ε_f, ε_d, φ_d, φ_e, x, y, z, die zur Festlegung der gegenseitigen Lage beider Dreiecke notwendig sind.

706. Die Differenz zweier Kräfte F_1 und F_2, deren Wirkungslinien den Winkel $\alpha = 121{,}6°$ einschließen, betrage $\Delta F = F_1 - F_2 = 32{,}5$ kp, ihre Resultierende habe die Größe $F_R = 71{,}6$ kp. Man berechne die Winkel, die die Richtungen beider Kräfte mit der Richtung der Resultierenden einschließen, sowie die Kräfte F_1 und F_2.

26. Arbeitsweise der analytischen Geometrie

26.1. Einleitung

Die Geometrie läßt sich im erweiterten Sinn in die **Synthetische Geometrie** und in die **Analytische Geometrie** einteilen. Zur synthetischen Geometrie gehören u. a. die Gebiete der Planimetrie und der Stereometrie. Ausgehend von der Anschauung werden hier die Beziehungen zwischen den Elementen überwiegend mit Hilfe geometrischer Konstruktionen bewiesen. Algebraische Rechnungen werden nur in geringem Umfang für die Entwicklung oder Umstellung von Formeln verwandt. In der analytischen Geometrie löst man dagegen die geometrischen Probleme auf rechnerischem Wege, wie es aus der Trigonometrie bekannt ist. Im folgenden soll jedoch unter der analytischen Geometrie im engeren Sinn nur die von DESCARTES[1]) entwickelte *Koordinatengeometrie* verstanden werden. Durch die Verwendung von Koordinaten werden den Punkten der Ebene bzw. des Raumes Zahlenpaare bzw. Zahlentripel zugeordnet und damit Möglichkeiten geschaffen, die Eigenschaften der geometrischen Gebilde und ihre gegenseitigen Beziehungen mit den Hilfsmitteln der Algebra zu untersuchen. Gegenüber der synthetischen Geometrie hat die analytische Geometrie zunächst den Vorteil, einen größeren Anwendungsbereich zu besitzen (jede konstruktiv lösbare Aufgabe läßt sich auch rechnerisch lösen; die Umkehrung gilt dagegen nicht). Außerdem führt die analytische Geometrie meistens auf kürzerem Weg zum Ziel und liefert die zu bestimmenden Größen wie Strecken oder Flächen mit beliebig hoher Genauigkeit.
Der vorliegende Abschnitt erstreckt sich nur auf die analytische Geometrie der Ebene. Im Abschnitt „Vektorrechnung" werden dann mit weiterreichenden Hilfsmitteln auch räumliche Probleme untersucht.

26.2. Rechtwinklige Koordinaten und Polarkoordinaten in der Ebene

Unter den zahlreichen möglichen Koordinatensystemen in der Ebene haben das System der rechtwinkligen Koordinaten und das System der Polarkoordinaten die größte Bedeutung.
Zunächst sei das **System der rechtwinkligen Koordinaten**, auch cartesisches Koordinatensystem genannt, noch einmal zusammenfassend erläutert.
In der Ebene sind zwei senkrecht aufeinander stehende Geraden ausgewählt, die sich im Punkt O, dem Ursprung, schneiden (Bild 120). Die horizontale Gerade heißt x-Achse oder *Abszissenachse*, die vertikale Gerade y-Achse oder *Ordinatenachse*. Von O aus wird eine beliebig gewählte Strecke auf den Achsen nach rechts und nach oben abgetragen. Den dadurch bestimmten Punkten E_x und E_y ordnet man jeweils die Zahl 1 zu. Die Richtung von O nach E_x bzw. E_y wird als positive Richtung der betreffen-

[1]) RENÉ DESCARTES (latinisiert Cartesius) franz. Philosoph, Mathematiker u. Physiker 1596 bis 1650

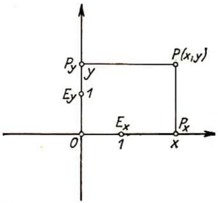


Bild 120

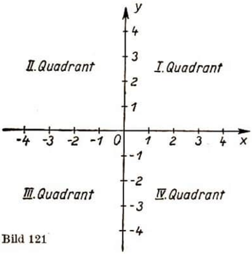


Bild 121

den Achse definiert und durch Pfeile angegeben. Damit sind auf den Achsen *Einheitslänge* und *Orientierung* festgelegt. P_x ist ein beliebiger Punkt der x-Achse. Sein Abstand OP_x vom Ursprung läßt sich mit der Einheitsstrecke OE_x messen und die Maßzahl x dem Punkt P_x zuordnen. Bei einer Messung entgegengesetzt zur positiven Richtung erhält die Maßzahl das negative Vorzeichen. Damit liegt eine eineindeutige Abbildung der Punkte der x-Achse auf den Körper R der reellen Zahlen vor. Entsprechend läßt sich jedem Punkt der y-Achse eineindeutig eine reelle Zahl y zuordnen.

P ist ein beliebiger Punkt der Ebene. Die Lote von P auf die Koordinatenachsen besitzen die Fußpunkte P_x und P_y mit den zugeordneten Zahlen x und y. Jeder Punkt P wird also eindeutig auf ein geordnetes Paar reeller Zahlen abgebildet. Umgekehrt läßt sich zu jedem geordneten Wertepaar $(x; y)$ eindeutig ein Punkt der Ebene konstruieren. In den zu x und y gehörenden Punkten P_x und P_y werden die Senkrechten zu den Achsen errichtet, die sich in P schneiden. Daraus folgt:

Unter Zugrundelegung eines rechtwinkligen Koordinatensystems lassen sich die Punkte der Ebene eineindeutig auf die Produktmenge $R \times R$ abbilden.

x und y sind die *rechtwinkligen Koordinaten* von P, x heißt *Abszisse* und y *Ordinate*. Für den Punkt P mit den Koordinaten x und y schreibt man $P(x; y)$.

Die Koordinatenachsen zerlegen die Ebene in vier Quadranten (Bild 121).

Als Grundlage des **Polarkoordinatensystems** werden ein Punkt O als *Pol*, ein von O ausgehender Strahl als *Polarachse* und auf dieser eine Einheitsstrecke OE gewählt (Bild 122). Jedem Punkt P der Ebene, den Pol ausgenommen, werden eindeutig die Strecke OP mit der Maßzahl $r > 0$ und ein Winkel φ zugeordnet. φ ist der in O mathematisch positiv gemessene Winkel von der Polarachse bis zur Strecke OP. r und φ heißen die *Polarkoordinaten* von P, r heißt *Abstand* oder *Radiusvektor* und φ *Richtungswinkel* oder *Argument*. Da zu jedem $r > 0$ und $\varphi \in [0°, 360°)$ eindeutig ein Punkt P konstruiert werden kann, liegt eine eineindeutige Abbildung der Punkte der Ebene mit Ausnahme des Poles auf die Menge der geordneten Paare $(r; \varphi)$, genauer auf die Menge

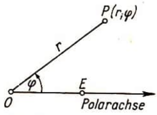


Bild 122

$$\{(r; \varphi) \mid r > 0, \varphi \in [0°, 360°)\} \text{ vor.}$$

26.3. Kurvengleichungen

26.3.1. Kurvengleichungen der Form $F(x; y) = 0$ bzw. $y = f(x)$.

Aus der Punktmenge der Ebene soll eine Teilmenge ausgewählt werden, die eine Kurve darstellt. Hierzu ist eine *Vorschrift* notwendig, die für jeden Punkt der Ebene eindeutig festlegt, ob er zur Kurve gehört oder nicht. Die Kurve als Teilmenge wird im folgenden durch kleine lateinische Buchstaben c, g, k, ... bezeichnet.
Die Vorschrift kann in *Worten* gegeben sein, wie es von der Planimetrie her bekannt ist. Dort war auch für die Teilmenge der Name *geometrischer Ort* gebräuchlich.

BEISPIELE

1. Die Menge der Punkte einer Ebene, deren Abstände von zwei festen Punkten A und B der Ebene jeweils gleich sind, ist die Mittelsenkrechte der Strecke AB.
2. Die Menge der Punkte einer Ebene, die von einem Punkt M der Ebene den gleichen Abstand r besitzen, ist der Kreis um M mit dem Radius r.
3. An einem Kreis mit dem Durchmesser AB ist in B die Tangente t angelegt (Bild 123). Eine Gerade g durch A schneidet den Kreis in R und die Tangente in Q. Die Parallele zu t durch R und die Senkrechte zu t durch Q schneiden sich in P. Die Gerade g drehe sich um A. Die Menge aller Punkte P, die zu den verschiedenen Lagen von g gehören, bestimmt eine Kurve mit dem Namen *Versiera der Agnesi*.

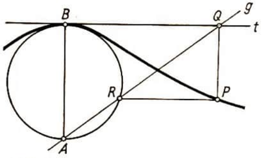


Bild 123

Bei Verwendung eines Koordinatensystems kann die Vorschrift auch in *analytischer Form* durch eine Gleichung in den Variablen x und y, den Koordinaten der Kurvenpunkte, gegeben sein. Für rechtwinklige Koordinaten lautet diese Gleichung

$$F(x; y) = 0. \tag{I}$$

Alle Paare $(x; y)$ von reellen Zahlen, die Gleichung (I) erfüllen, bilden eine Teilmenge von $R \times R$. Dieser Teilmenge ist nach 26.2. eineindeutig eine Punktmenge in der Ebene zugeordnet, die eine Kurve k bildet.
Die Gleichung (I) heißt eine zu k gehörende **Kurvengleichung**. Mit der Symbolik der Mengenlehre läßt sich für k schreiben:

$$k = \{P(x; y) \mid F(x; y) = 0\}. \tag{II}$$

Oft wird vereinfacht, aber nicht mehr exakt, von der Kurve $F(x; y) = 0$ gesprochen und darunter der durch (II) gegebene Zusammenhang verstanden.

Statt der impliziten[1]) Form (I) der Kurvengleichung verwendet man auch explizit

$$y = f(x), \tag{III}$$

die u. a. für die Aufstellung einer Wertetabelle geeignet ist. In (III) erhält x den Charakter einer unabhängigen Variablen, y den einer abhängigen. Die Abbildung $x \to f(x)$

[1]) Vgl. Band „Analysis“, 1.3.

ist i. allg. nicht eindeutig. Bei eindeutiger Abbildung stellt die Kurvengleichung (III) bzw. (I) eine Funktionsgleichung dar.
X ist die Menge der Zahlen x, für die (I) bzw. (II) definiert ist, Y die Menge der zugeordneten Zahlen y. Im Fall einer Funktion ist X der Definitionsbereich und Y der Wertevorrat. Der Punkt $P(x; y)$ in (II) ist ein beliebiger Vertreter der Punkte von k. Da seine Koordinaten Variable sind, heißt P **variabler Punkt**. Wird angenommen, daß sich $x \in X$ stetig ändert, so folgt daraus i. allg. auch eine stetige Änderung von $y \in Y$ und der zugehörige Punkt $P(x; y)$ bewegt sich auf der Kurve. Für die Darstellung eines festen Kurvenpunktes werden Indizes verwendet, z. B. $P_0(x_0; y_0)$, $P_1(2; 3)$ usw.
Für die Anwendung ergibt sich aus Gleichung (II) die wichtige Folgerung:

Erfüllt ein Wertepaar $(x_0; y_0)$ die Kurvengleichung $F(x; y) = 0$, dann liegt der Punkt $P_0(x_0; y_0)$ auf der Kurve. Umgekehrt erfüllen die Koordinaten jedes Kurvenpunktes $P_0(x_0; y_0)$ die Kurvengleichung.

BEISPIELE

4. Von der Schule her ist bekannt, daß zu einer Geraden g eine lineare Gleichung gehört, z. B. ist der Gleichung $3x - 8y + 15 = 0$ die Gerade

$$g = \{P(x; y) \mid 3x - 8y + 15 = 0\}$$

zugeordnet.

5. Die Kurve

$$k = \{P(x; y) \mid x^3 + xy^2 - 2y^2 = 0\}$$

heißt *Zissoide*. Man schreibe die Kurvengleichung in expliziter Form, zeichne die Kurve mit Hilfe einer Wertetabelle und stelle fest, ob die Punkte $P_1(1; -1)$, $P_2(1{,}5; 0{,}5)$, $P_3(0{,}4; -0{,}201)$ auf der Kurve liegen.

Lösung: Die explizite Form der Kurvengleichung lautet

$$y = \pm\sqrt{\frac{x^3}{2-x}}. \qquad \text{(IV)}$$

Der Radikand muß positiv sein, so daß x auf das Intervall $X = [0; 2)$ beschränkt wird. Daraus folgt $Y = (-\infty; \infty)$. Nach der Wertetabelle

x	0	0,3	0,6	0,9	1,2	1,5
y	0	$\pm 0{,}13$	$\pm 0{,}33$	$\pm 0{,}81$	$\pm 1{,}47$	$\pm 2{,}60$

sind die Kurvenpunkte in Bild 124 konstruiert. Die Kurve ist wegen der zwei Vorzeichen in (IV) symmetrisch zur x-Achse. Die Koordinaten von P_1, P_2, P_3 werden in (IV) eingesetzt und ergeben für

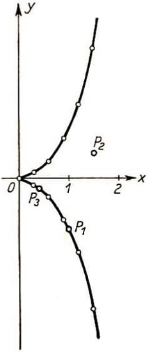


Bild 124

$$\begin{array}{llll} P_1: -1 & = -1, & \text{d. h.,} & P_1 \in k \\ P_2: \ \ 0{,}5 & \neq \ \ 2{,}60, & \text{d. h.,} & P_2 \notin k \\ P_3: -0{,}201 & \neq -0{,}20, & \text{d. h.,} & P_3 \notin k. \end{array}$$

Für P_2 könnte graphisch festgestellt werden, daß der Punkt nicht auf k liegt. Für P_3 ist wegen der begrenzten Zeichengenauigkeit und des in Bild 124 verwendeten Maßstabes nur noch die rechnerische Überprüfung möglich.

Jeder Kurve der Ebene ist im allgemeinen bei festgelegtem Koordinatensystem eine Gleichung $F(x; y) = 0$ zugeordnet und umgekehrt gehört zu jeder derartigen Gleichung eine Kurve. Weil die Kurvengleichung abhängig von der Lage des Koordinatensystems ist, kann durch geschickte Wahl desselben, etwa unter Ausnutzung vorhandener Symmetrie der Kurve, ein relativ einfacher Term für die Gleichung erhalten werden. Das wird in den folgenden Abschnitten weitgehend angewandt. Im allgemeinen besteht die erste Aufgabe in der analytischen Geometrie darin, aus der in Worten gegebenen Definition einer Kurve nach Wahl eines Koordinatensystems die Kurvengleichung herzuleiten. Durch diese Gleichung wird die Kurve vollständig beschrieben, so daß sich als weitere Aufgaben ergeben, durch Rechnungen und anschließende geometrische Interpretation die Eigenschaften der Kurve zu ermitteln, d. h. die Kurvengleichung zu „entschlüsseln".
Häufig sind die Schnittpunkte zweier Kurven

$$k_1 = \{P(x; y) \mid F_1(x; y) = 0\}, \qquad k_2 = \{P(x; y) \mid F_2(x; y) = 0\}$$

zu berechnen. Für einen Schnittpunkt P_1 gilt $P_1 \in k_1$ und $P_1 \in k_2$, also auch $P_1 \in k_1 \cap k_2$. Schneiden sich die Kurven in n Punkten P_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, dann ist

$$k_1 \cap k_2 = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}.$$

Die Koordinaten jedes Schnittpunktes P_i müssen beide Kurvengleichungen erfüllen:

$$F_1(x_i; y_i) = 0, \qquad F_2(x_i; y_i) = 0. \tag{V}$$

(V) ist daher ein Gleichungssystem mit 2 Variablen. Seine Lösungsmenge besteht aus den Koordinatenpaaren $(x_i; y_i)$ der Schnittpunkte P_i.

Satz

Um die Koordinaten der Schnittpunkte zweier Kurven zu berechnen, faßt man die zugehörigen Kurvengleichungen zu einem Gleichungssystem zusammen und bestimmt dessen Lösungsmenge.

Da alle Koordinaten reelle Zahlenpaare sind, bedeutet das Auftreten von komplexen Zahlen in einem Zahlenpaar der Lösungsmenge, daß diesem Paar kein Schnittpunkt zuzuordnen ist.

BEISPIEL

6. Die Schnittpunkte der Kurven sind zu berechnen:

$$k_1 = \{P(x; y) \mid x^2 - 10x - 2y + 30 = 0\}$$
$$k_2 = \{P(x; y) \mid x - y - 1 = 0\}$$

Lösung: Für einen Schnittpunkt P_i gilt

$$x_i^2 - 10x_i - 2y_i + 30 = 0$$
$$x_i - y_i - 1 = 0.$$

Der Wert von y_i aus der 2. Gleichung in die 1. Gleichung eingesetzt ergibt $x_i^2 - 12x_i + 32 = 0$. Die quadratische Gleichung hat die Lösungen $x_1 = 8$, $x_2 = 4$.

Aus der 2. Gleichung folgt

$$y_1 = 7, \quad y_2 = 3.$$

Die Kurven schneiden sich in den Punkten

$$\underline{\underline{P_1(8;\,7)}}, \quad \underline{\underline{P_2(4;\,3)}}.$$

Zur Probe setzt man die Schnittpunktkoordinaten in beide Kurvengleichungen ein. Außerdem kann graphisch eine Kontrolle erfolgen.

26.3.2. Parameterdarstellung einer Kurve

In manchen Fällen ist es notwendig oder zumindest einfacher, statt einer Gleichung $F(x;\,y) = 0$ zwei Gleichungen anzugeben, in denen x und y getrennt voneinander in Abhängigkeit von einer Hilfsvariablen t, dem **Parameter**, dargestellt werden:

$$\begin{aligned} x &= x(t), \\ y &= y(t). \end{aligned} \qquad \text{(I)}$$

Jedem Wert $t \in T$ wird nach (I) ein Zahlenpaar $(x;\,y)$ und diesem bei gewähltem Koordinatensystem ein Punkt $P(x;\,y)$ zugeordnet. Durch das Gleichungssystem (I) ist eine **Parameterdarstellung** der Kurve gegeben.

BEISPIELE

1. Eine Kurve besitzt die Parameterdarstellung

$$\begin{aligned} x &= t^2 - 2 \\ y &= 2t + 1. \end{aligned} \qquad \text{(II)}$$

Es ist eine Wertetabelle aufzustellen und die Kurve zu zeichnen.

Lösung: Die Gleichungen (II) sind für $t \in T = (-\infty;\,\infty)$ definiert. t ist unabhängige Variable, x und y sind abhängige Variable. Bild 125 zeigt die nach der Wertetabelle konstruierten Kurvenpunkte. Die Parameterwerte kann man an die Kurvenpunkte anschreiben.

t	x	y
-3	7	-5
-2	2	-3
-1	-1	-1
0	-2	1
1	-1	3
2	2	5
3	7	7

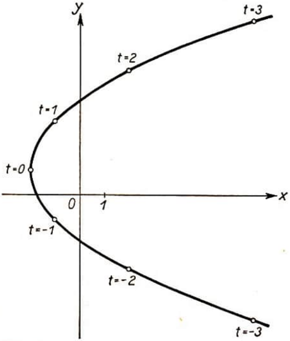


Bild 125

2. Für die in Beispiel 3. aus 26.3.1. definierte Kurve ist eine Parameterdarstellung anzugeben.

Lösung: Der Punkt A (vgl. Bild 123) wird als Ursprung eines rechtwinkligen Koordinatensystems und $\overline{AB}$ als y-Achse gewählt. Da sich die Gerade g um A drehen soll, kann der Winkel zwischen g und der x-Achse als Parameter t verwendet werden (Bild 126). Mit $\overline{AB} = a$ folgt für einen Kurvenpunkt $P(x; y)$:

$$x = \overline{AV} = \overline{QV} \cdot \cot t = a \cot t$$
$$y = \overline{PV} = \overline{RU} = \overline{AR} \sin t$$

und mit $\overline{AR} = a \sin t$ folgt

$$y = a \sin^2 t.$$

Die Parameterdarstellung der Kurve lautet

$$\left.\begin{aligned} x &= a \cot t \\ y &= a \sin^2 t \end{aligned}\right\} \quad t \in T = (0°; 180°).$$

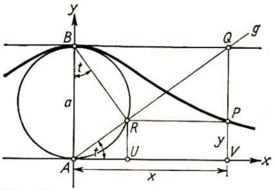


Bild 126

Das Intervall für t liest man aus dem Bild ab.

Der Parameter t des Beispiels 1 hat keine selbständige geometrische Bedeutung, während in Beispiel 2 der Parameter ein Winkel ist. Bei vielen physikalischen oder technischen Aufgaben stellt t die Zeit bzw. ihre Maßzahl dar.
Zu behandeln ist noch der Übergang von der Darstellung $F(x; y) = 0$ zur Parameterdarstellung und umgekehrt. Aus einer Kurvengleichung $F(x; y) = 0$ lassen sich i. allg. unbegrenzt viele Parameterdarstellungen ableiten. Die Kurvengleichung wird nach y aufgelöst, $x = x(t)$ beliebig gewählt und in $y = f(x)$ eingesetzt. $y = f[x(t)] = y(t)$ ist dann die zweite Parametergleichung. Die Freiheit bei der Wahl von $x = x(t)$ wird benützt, möglichst einfache Parametergleichungen zu erhalten.
Soll aus einer gegebenen Parameterdarstellung $x = x(t)$, $y = y(t)$ die Kurvengleichung $y = f(x)$ aufgestellt werden, dann ist t zu eliminieren. Im allgemeinen Fall wird $x = x(t)$ nach t aufgelöst und die erhaltene Gleichung $t = \varphi(x)$ in $y = y(t)$ eingesetzt. Dann folgt $y = y[\varphi(x)] = f(x)$.

BEISPIELE

3. Aus der Kurvengleichung $y = \sqrt[3]{x^2}$ ist eine Parameterdarstellung der Kurve abzuleiten.

   Lösung: Wegen des Wurzelexponenten wird am besten

   $$x = t^3 = x(t)$$

   gesetzt. Dann folgt

   $$y = \sqrt[3]{(t^3)^2} = t^2 = y(t).$$

   Aus $x = \sqrt{t}$ ergibt sich mit $y = \sqrt[3]{t}$ eine weitere, aber für praktische Rechnung nicht mehr so einfache Parameterdarstellung.

4. Aus der Parameterdarstellung $x = a \cot t$, $y = a \sin^2 t$ des Beispiels 2. soll die parameterfreie Kurvengleichung $y = f(x)$ bestimmt werden.

   Lösung: Aus der ersten Gleichung folgt

   $$\cot t = \frac{x}{a}$$

und aus der zweiten

$$y = a \sin^2 t = a \, \frac{1}{1 + \cot^2 t} = a \, \frac{1}{1 + \frac{x^2}{a^2}}$$

$$y = \frac{a^3}{a^2 + x^2}.$$

26.3.3. Kurvengleichungen in Polarkoordinaten

Bei zugrunde gelegtem Polarkoordinatensystem wählt eine Gleichung der Form

$$F(r; \varphi) = 0 \quad \text{oder} \quad r = f(\varphi) \tag{I}$$

aus der Punktmenge der Ebene eine Teilmenge aus. Diese enthält alle Punkte, deren Polarkoordinaten r und φ Gleichung (I) erfüllen und ergibt i. allg. eine Kurve k:

$$k = \{P(r; \varphi) \mid F(r; \varphi) = 0\}.$$

Die Betrachtungen aus 26.3.1. lassen sich sinngemäß auf den vorliegenden Fall übertragen.
Wichtig ist der Übergang von rechtwinkligen Koordinaten zu Polarkoordinaten und umgekehrt.
Von einer Kurve ist die Gleichung $F(x; y) = 0$ gegeben, und es wird die Gleichung $\overline{F}(r; \varphi) = 0$ gesucht. Vorausgesetzt wird, daß der Ursprung des rechtwinkligen Koordinatensystems mit dem Pol und die x-Achse mit der Polarachse zusammenfallen. Dann wird

$$x = r \cos \varphi; \quad y = r \sin \varphi \quad \text{(Bild 127)}$$

in $F(x; y) = 0$ eingesetzt und ergibt die Kurvengleichung in Polarkoordinaten, die gegebenenfalls nach r aufgelöst wird.
Ist von der Gleichung $\overline{F}(r; \varphi) = 0$ zu rechtwinkligen Koordinaten überzugehen, dann ersetzt man r und φ durch

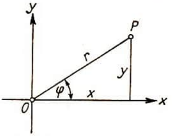


Bild 127

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \varphi = \arctan \frac{y}{x}.$$

Vorteilhaft sind manchmal auch die Formeln

$$\sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \qquad \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

BEISPIELE

1. Aus der Gleichung der Zissoide (Beispiel 5. aus 26.3.1.)

$$y = \pm \sqrt{\frac{x^3}{2 - x}} \tag{II}$$

ist die Kurvengleichung in Polarkoordinaten abzuleiten.

Lösung: Gleichung (II) wird quadriert

$$y^2 = \frac{x^3}{2 - x}$$

und $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$ eingesetzt:

$$r^2\sin^2\varphi = \frac{r^3\cos^3\varphi}{2 - r\cos\varphi}.$$

Die Kurvengleichung wird nach r aufgelöst.

$$2r^2\sin^2\varphi - r^3\sin^2\varphi\cos\varphi - r^3\cos^3\varphi = 0$$

$$2\sin^2\varphi - r(1 - \cos^2\varphi)\cos\varphi - r\cos^3\varphi = 0$$

$$2\sin^2\varphi - r\cos\varphi = 0$$

$$r = \frac{2\sin^2\varphi}{\cos\varphi}$$

$$r = 2\sin\varphi\tan\varphi = f(\varphi). \qquad \text{(III)}$$

Aus der Festsetzung $r > 0$ folgt $\varphi \in (-90°; 90°)$.

Die Kurvengleichung (III) zeigt den Weg zu einer einfachen Kurvenkonstruktion, die aus (II) nicht abzulesen ist. Auf der x-Achse wird der Punkt $A(2;\ 0)$ gewählt, der Kreis mit $\overline{OA}$ als Durchmesser gezeichnet und in A die Tangente t gezogen (Bild 128). Eine beliebige Gerade durch O schneidet den Kreis in R und die Tangente in Q. φ ist der Winkel zwischen g und der x-Achse. Nach Bild 128 folgt

$$\overline{AR} = 2\sin\varphi$$

$$\overline{RQ} = \overline{AR}\tan\varphi = 2\sin\varphi\tan\varphi.$$

Wird also $\overline{RQ}$ als Radiusvektor r auf g von O bis P abgetragen, dann ist P ein Punkt der Zissoide.

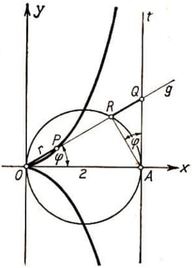


Bild 128

2. Eine Kurve besitzt in Polarkoordinaten die Gleichung

$$r = 2\cos\varphi = f(\varphi). \qquad \text{(IV)}$$

Wie heißt ihre Gleichung in rechtwinkligen Koordinaten?

Lösung: Es wird $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ in (IV) eingesetzt:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 2\,\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Umgeformt ergibt

$$F(x;\ y) = x^2 + y^2 - 2x = 0. \qquad \text{(V)}$$

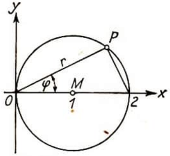


Bild 129

Gleichung (IV) zeigt in Verbindung mit Bild 129 und dem Satz des Thales, daß die Kurve ein Kreis mit dem Radius 1 und dem Mittelpunkt $M(1;\ 0)$ ist.

AUFGABEN

707. Die Kurven

$$k_1 = \{P(x; y) \mid y = 2x - 4\}$$
$$k_2 = \{P(x; y) \mid x^2 + 6y - 9 = 0\}$$
$$k_3 = \{P(x; y) \mid x^2y - 6 = 0\}$$
$$k_4 = \left\{P(x; y) \mid y = \pm\frac{3}{5}\sqrt{25 - x^2}\right\}$$

sind unter Verwendung einer Wertetabelle zu zeichnen.

708. Welche von den Punkten

$$P_1(0; 5), \quad P_2(4; 3), \quad P_3(0; \ -2), \quad P_4\left(3; \frac{1}{2}\right)$$

liegen auf den Kurven

$$k_1 = \left\{P(x; y) \mid y = \frac{5}{1 + x^2}\right\}$$
$$k_2 = \{P(x; y) \mid 5x^2 - 16y - 32 = 0\}$$
$$k_3 = \{P(x; y) \mid x^2 + y^2 - 25 = 0\}$$
$$k_4 = \{P(x; y) \mid 5x - 6y - 12 = 0\}?$$

709. Gegeben sind zwei Kurvengleichungen. In welchen Punkten schneiden sich die zugehörigen Kurven?

a) $x - y + 7 = 0$
$3x + y + 13 = 0$

b) $x^2 - 9x - y + 18 = 0$
$x + y - 6 = 0$

c) $x^2 + y^2 - 4 = 0$
$3x + 2y - 12 = 0$

710. Wo schneiden die Kurven mit den Gleichungen

a) $y = 2x - 6$ b) $9x^2 + 25y^2 - 900 = 0$ c) $y = x^2 - 5x + 4$
d) $x^2 - 4x - 4y + 28 = 0$

die x-Achse?

711. Wo schneiden die Kurven mit den Gleichungen

a) $5x + y - 3 = 0$ b) $25x^2 + 16y^2 - 400 = 0$ c) $x^2y + y - 1 = 0$
d) $4x^2 - 9y^2 - 36 = 0$

die y-Achse?

712. Eine Kurve ist durch eine Parameterdarstellung gegeben. Man stelle eine Wertetabelle auf, zeichne die Kurve und bestimme ihre parameterfreie Gleichung $F(x; y) = 0$.

a) k_1: $x = t - 1$, $y = \frac{1}{2}t^2 - 3$

b) k_2: $x = \frac{t}{1 - t}$, $y = \frac{1 + t}{1 - t}$

c) k_3: $x = 2\cos t + 3$, $y = 2\sin t$

d) k_4: $x = 3\cot t$, $y = \frac{2}{\sin t}$

713. Für die Kurvengleichung $r = \frac{3}{1 + \sin\varphi}$ ist eine Wertetabelle für $\varphi \in [-30°; 210°]$ und die Differenz $\Delta\varphi = 10°$ aufzustellen (Rechenstab) und die Kurve zu zeichnen.

714. Aus der gegebenen Kurvengleichung $F(x;\, y) = 0$ ist die Gleichung in Polarkoordinaten $r = f(\varphi)$ abzuleiten.

a) $y = 2\sqrt[3]{x^2}$ b) $y = 2x - 1$ c) $x^2 - y^2 - 1 = 0$

715. Aus der gegebenen Kurvengleichung $r = f(\varphi)$ ist die Gleichung in rechtwinkligen Koordinaten $F(x;\, y) = 0$ abzuleiten.

a) $r = \dfrac{2}{1 - \cos\varphi}$ b) $r = \dfrac{4}{\sin\varphi + \cos\varphi}$ c) $r - 4\sin\varphi + \cos\varphi = 0.$

27. Punkte, Strecken und Flächen im rechtwinkligen Koordinatensystem

27.1. Länge und Anstiegswinkel einer Strecke

Die Lage eines Punktes im cartesischen Koordinatensystem ist durch seine Koordinaten eindeutig festgelegt. Damit ist es auch möglich, die Entfernung zweier Punkte, also die Länge einer Strecke, durch die Koordinaten ihrer Endpunkte auszudrücken. Es seien die beiden Punkte $P_1(x_1;\, y_1)$ und $P_2(x_2;\, y_2)$ gegeben (Bild 130). Zieht man durch P_1 eine Parallele zur x-Achse und durch P_2 eine Parallele zur y-Achse, so entsteht ein rechtwinkliges Dreieck P_1CP_2 mit den Katheten $P_1C = x_2 - x_1$ und $CP_2 = y_2 - y_1$. Daraus ergibt sich sofort als

Länge der Strecke P_1P_2

$$\boxed{d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} \tag{102}$$

Es bedeutet keine Einschränkung, daß die beiden Punkte P_1 und P_2 im Bild 130 im

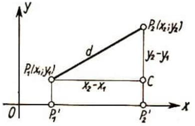


Bild 130

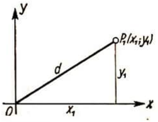


Bild 131

ersten Quadranten gewählt wurden. Die Entfernungsformel (102) gilt stets, in welchem Quadranten die Endpunkte der Strecke auch liegen mögen. Insbesondere ergibt sich als

Abstand eines Punktes $P_1(x_1;\, y_1)$ vom Koordinatenursprung (Bild 131)

$$\boxed{d = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}} \tag{103}$$

Unter dem Anstiegs- oder Neigungswinkel α einer Strecke P_1P_2 versteht man denjenigen Winkel $\alpha \in [0°; 180°)$, den diese Strecke mit der positiven Richtung der x-Achse bildet. Der Tangens des Anstiegswinkels wird als *Anstieg* m oder auch als *Richtungsfaktor* der Strecke bezeichnet.

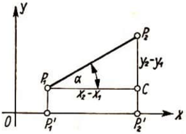


Bild 132

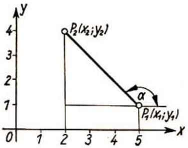


Bild 133

Aus Bild 132 folgt für den

Anstieg der Strecke P_1P_2

$$\boxed{m = \tan\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}} \tag{104}$$

BEISPIEL

Gegeben seien die Punkte $P_1(5; 1)$ und $P_2(2; 4)$. Wie groß ist die Entfernung P_1P_2 und welchen Anstiegswinkel besitzt diese Strecke?

Lösung: Hier ist (Bild 133)

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} =$$
$$= \sqrt{(2-5)^2 + (4-1)^2} =$$
$$= \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = \underline{\underline{3\sqrt{2}}}$$

$$\tan\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{+3}{-3} = -1.$$

Da der Funktionswert von $\tan\alpha$ negativ ist, liegt α im 2. Quadranten. Es ist

$$\underline{\underline{\alpha = 135°}}.$$

AUFGABEN

716. Es sind die Längen der Verbindungsstrecken folgender Punktpaare und der Anstiegswinkel dieser Strecke zu ermitteln:

a) $P_1(3; 5)$ und $P_2(7; 8)$ b) $P_1(3; -5)$ und $P_2(-2; 7)$
c) $P_1(8; 15)$ und $P_2(-1; 0)$ d) $P_1(-3; -2)$ und $P_2(5; 13)$
e) $P_1(-2{,}2; 3)$ und $P_2(5{,}8; -4)$ f) $P_1(-1{,}9; -2{,}5)$ und $P_2(-4{,}3; 2{,}6)$

717. Wie lauten die Koordinaten des Punktes $P_0(x_0; y_0)$, der von den Punkten $A(8; 2)$, $B(-7; 5)$ und $C(4; 8)$ gleiche Entfernung hat?

718. Wo liegt ein Punkt $P_0(x_0; y_0)$ auf der y-Achse, der von $A(3; 8)$ und $B(7; 7)$ gleiche Entfernung hat?

719. Wie lang sind die Seiten eines Dreiecks und wie groß sind seine Innenwinkel, wenn die Eckpunkte folgende Koordinaten haben:

a) $A(-5;0)$	b) $P_1(2;\ 1)$	c) $D(5;\ 0)$
$B(8;\ 3)$	$P_2(-5;\ 3)$	$E(-2{,}5;\ 1)$
$C(5;\ 11)$	$P_3(1;\ -4)$	$F\left(-2;\ -\frac{5}{2}\right)$?

720. Wie lang sind die Diagonalen des Vierecks mit den Eckpunkten $A(-3;\ -1)$, $B(0;\ -5)$, $C(2;\ 0)$ und $D(-1;\ 3)$?

721. Ein regelmäßiges Sechseck hat seinen Mittelpunkt im Ursprung, und zwei Gegenecken liegen auf der x-Achse. Welche Koordinaten haben sämtliche Eckpunkte? (Anfertigung einer Skizze auf Millimeterpapier!) Die Seitenlänge des Sechsecks sei a.

27.2. Teilung einer Strecke

P_1 und P_2 seien zwei beliebige, aber feste Punkte einer Geraden g, während ein weiterer Punkt T eine beliebige Stellung auf der Geraden einnehmen darf. Durch die Lage der beiden Punkte P_1 und P_2 ist auf g ein bestimmter Richtungssinn festgelegt, und zwar soll diejenige Richtung, in der sich ein Punkt auf g fortbewegen müßte, um von P_1 nach P_2 zu gelangen, als positive Richtung bezeichnet werden, während alle Strecken, die in der entgegengesetzten Richtung durchlaufen werden, negativ gerichtet heißen sollen.

So ist beispielsweise in Bild 134 die positive Richtung der Geraden g durch die Streckenangabe P_1P_2 von links nach rechts festgelegt. Demzufolge sind auch die Strecken P_1T und TP_2 positiv. Dagegen sind die Strecken P_2P_1, TP_1 und P_2T negativ zu nehmen, da z. B. die Bewegungsrichtung von P_2 nach P_1 derjenigen von P_1 nach P_2 entgegengesetzt ist.

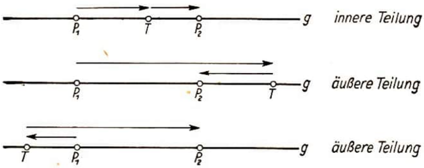


Bild 134

Nach diesen Vorbereitungen kommt man zu folgender **Definition**:

> Sind P_1, P_2 und T drei Punkte einer Geraden g, von denen P_1 und P_2 fest sind, während T eine beliebige Lage auf g einnehmen darf, dann wird das Verhältnis $\overline{P_1T}:\overline{TP_2}$ das durch T bewirkte **Teilungsverhältnis** λ der Strecke P_1P_2 genannt:
>
> $$\boxed{\overline{P_1T}:\overline{TP_2} = \lambda} \tag{105}$$

Das Teilungsverhältnis λ einer Strecke P_1P_2 ist demnach eine dimensionslose Zahl. Es ist positiv, wenn der Teilungspunkt T im Innern der Strecke P_1P_2 liegt, denn in

diesem Fall werden die beiden Teilstrecken P_1T und TP_2 in der gleichen Richtung durchlaufen. Man spricht hier von einer *inneren Teilung* der Strecke P_1P_2.
Ist speziell T der Mittelpunkt der Strecke P_1P_2, so wird wegen $\overline{P_1T} = \overline{TP_2}$ das zugehörige Teilungsverhältnis $\lambda = 1$.
Von einer *äußeren Teilung* der Strecke P_1P_2 spricht man, wenn der Teilungspunkt T außerhalb der Strecke P_1P_2 auf g liegt. In diesem Falle wird λ negativ, da die beiden Teilstrecken P_1T und TP_2 in entgegengesetzter Richtung durchlaufen werden.

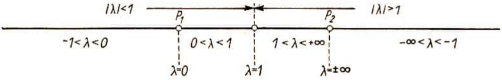


Bild 135

Bild 135 zeigt, welche Werte das Teilungsverhältnis λ der Strecke P_1P_2 annimmt, wenn der Teilungspunkt T in den verschiedenen Abschnitten der Geraden g liegt.
Es sollen nun die Koordinaten x_T und y_T des Teilungspunktes T ermittelt werden, der eine gegebene Strecke P_1P_2 in einem vorgeschriebenen Teilungsverhältnis λ teilt.
Wenn T die Strecke P_1P_2 im Verhältnis λ teilen soll

$$\overline{P_1T} : \overline{TP_2} = \lambda,$$

so müssen nach dem ersten Strahlensatz auch die Projektionen der beiden Teilstrecken auf die x-Achse im gleichen Verhältnis zueinanderstehen (Bild 136):

$$\overline{P_1'T'} : \overline{T'P_2'} = \lambda.$$

Mit $\overline{P_1'T'} = x_T - x_1$ und $T'P_2' = x_2 - x_T$ folgt daraus

$$(x_T - x_1) : (x_2 - x_T) = \lambda,$$

woraus sich durch Auflösen nach x_T die Abszisse des Teilungspunktes zu

$$x_T = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$$

ergibt.
Entsprechend erhält man für die Ordinate

$$y_T = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

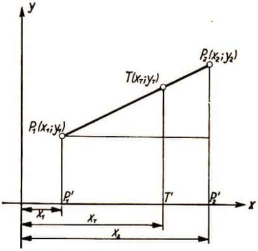


Bild 136

Sind $P_1(x_1;\, y_1)$ und $P_2(x_2;\, y_2)$ die Endpunkte einer Strecke, die durch einen Teilungspunkt T im Verhältnis λ geteilt werden soll, so lauten die **Koordinaten x_T und y_T dieses Teilungspunktes**

$$\boxed{x_T = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \qquad y_T = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}} \tag{106}$$

Mit $\lambda = 1$ erhält man hieraus als Sonderfall die

Koordinaten des Mittelpunktes einer Strecke

$$\boxed{x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}} \tag{107}$$

BEISPIELE

1. Wie lauten die Koordinaten des Mittelpunktes M einer Strecke P_1P_2, deren Endpunkte $P_1(-3;\ +5)$ und $P_2(+7;\ -5)$ sind?

   Lösung:

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{(-3) + (+7)}{2} = 2$$

$$y_M = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{(+5) + (-5)}{2} = 0$$

   Der Mittelpunkt der Strecke ist demnach der Punkt $M(2;0)$. Dies ist durch Zeichnung auf Millimeterpapier nachzuweisen.

2. Wie heißen die Koordinaten der Punkte, die die Strecke P_1P_2 innen und außen im Verhältnis 1:2 teilen (harmonische Punkte)[1], wenn $P_1(0{,}5;\ 1)$ und $P_2(5;\ 4)$ ist?

   Lösung: Für den inneren Teilungspunkt T_i ist $\lambda_i = 1/2$, während für T_a, den äußeren Teilungspunkt, $\lambda_a = -1/2$ sein muß. Nach (106) ergibt sich damit

$$x_i = \frac{0{,}5 + \frac{1}{2}\cdot 5}{1 + \frac{1}{2}} = 2 \qquad x_a = \frac{0{,}5 - \frac{1}{2}\cdot 5}{1 - \frac{1}{2}} = -4$$

$$y_i = \frac{1 + \frac{1}{2}\cdot 4}{1 + \frac{1}{2}} = 2 \qquad y_a = \frac{1 - \frac{1}{2}\cdot 4}{1 - \frac{1}{2}} = -2.$$

   Der innere Teilungspunkt ist demnach $T_i\ (2;2)$, der äußere $T_a\ (-4;2)$. Man prüfe dies zeichnerisch nach.

3. Wo liegt der Schwerpunkt $S(x_s;\ y_s)$ eines homogenen Dreiecks mit den Eckpunkten $P_1(x_1;y_1)$, $P_2(x_2;y_2)$ und $P_3(x_3;y_3)$?

   Lösung: Beachtet man, daß die Seitenhalbierenden eines Dreiecks einander im Schwerpunkt schneiden und daß jede dieser drei Seitenhalbierenden durch den Schwerpunkt im Verhältnis

[1]) Wird eine Strecke P_1P_2 innen und außen durch T_i und T_a im gleichen Verhältnis geteilt, so nennt man die vier Punkte „harmonische Punkte“ und spricht auch von einer „harmonischen Teilung“

2:1 geteilt wird, so kann man S als inneren Teilungspunkt von z. B. P_3D_1 auffassen und nach (106) schreiben (Bild 137)

$$x_s = \frac{x_3 + 2x_m}{1+2}$$

$$y_s = \frac{y_3 + 2y_m}{1+2}.$$

Dabei sind x_m und y_m die Koordinaten des Mittelpunktes D_1 der Strecke P_1P_2

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Setzt man diese beiden Werte in die Ausdrücke für x_s und y_s ein, so erhält man als Koordinaten des Schwerpunktes eines Dreiecks:

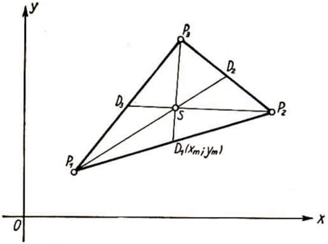


Bild 137

$$x_s = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \qquad y_s = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$

AUFGABEN

722. Es ist der Mittelpunkt der Strecke P_1P_2 zu bestimmen, wenn

a) $P_1(-2;1)$ und $P_2(1;2)$ b) $P_1(^5/_2;3)$ und $P_2(^3/_2;-3)$
c) $P_1(-2;1)$ und $P_2(4;-2)$ d) $P_1(-1{,}6;-0{,}8)$ und $P_2(2{,}3;\ 4{,}1)$

gegeben sind.

723. Gegeben sei die Strecke P_1P_2 mit $P_1(-1;1)$ und $P_2(3;-^1/_2)$. Die Strecke ist innen und außen im Verhältnis $m:n = 1:3$ zu teilen. Welches sind die Koordinaten der Teilungspunkte?
(Zeichnerische Probe!)

724. Im Dreieck ABC ist die Seite AB im Verhältnis $m:n = 5:2$ geteilt. Es soll der Teilungspunkt T_i mit der Gegenecke verbunden werden. Wo liegt der Punkt T_i', der die Verbindungsstrecke im Verhältnis $p:q = 1:2$ teilt? (Nach der analytischen Berechnung ist eine Zeichnung auf Millimeterpapier anzufertigen und die Richtigkeit des Ergebnisses nachzuprüfen!) Eckpunkte: $A(-4;1)$, $B(3;-6)$ und $C(4;-1)$.

725. Es sind die Schwerpunkte der folgenden Dreiecke zu bestimmen.

a)	b)	c)
$P_1(0;0)$	$A(4;7)$	$D(-8;-6)$
$P_2(4;0)$	$B(-3;2)$	$E(-1;2)$
$P_3(6;8)$	$C(5;-3)$	$F(5;-1)$

726. Von einem Dreieck kennt man die Koordinaten zweier Eckpunkte $P_1(2{,}5;-0{,}5)$ und $P_2(-1;4{,}5)$ sowie die des Schwerpunktes $S(-0{,}5;1)$. Wie lauten die Koordinaten des 3. Eckpunktes und welche Länge haben die Seiten des Dreiecks?
(Zeichnerische Probe!)

727. Die Strecke P_1P_2 soll über P_2 hinaus verdoppelt werden. Es sind die Koordinaten des so gefundenen Punktes $P_3(x_3;y_3)$ zu bestimmen.

728. Von einem Parallelogramm kennt man 3 Punkte:

$$A(-3;1),\quad B(2;-2),\quad C(5;1).$$

Welche Koordinaten hat der 4. Punkt D?

Anleitung: Man bestimme zunächst den Halbierungspunkt einer Diagonalen und benutze dann das Ergebnis von Aufgabe 727.

27.3. Berechnung der Fläche des ebenen Vielecks

Die Grundlage für die Herleitung der Formel für den Flächeninhalt eines beliebigen Dreiecks bilden zwei Sätze der Planimetrie:

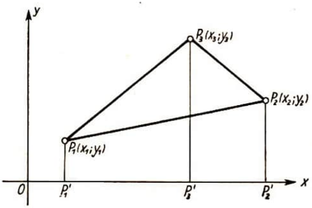


Bild 138

a) $A_\triangle = \dfrac{g \cdot h}{2}$

b) $A_{\text{Trapez}} = m \cdot h = \dfrac{a+c}{2} h$,

wobei $m = \dfrac{a+c}{2}$ die Mittelparallele des Trapezes ist.

Fällt man in Bild 138 von den 3 Punkten P_1, P_2 und P_3 die Lote auf die Abszissenachse, läßt sich der gesuchte Flächeninhalt des Dreiecks $P_1P_2P_3$ durch die folgenden Trapezinhalte ausdrücken:

$$A_\triangle = \overbrace{\text{Trapez } P_1P_1'P_3'P_3}^{A_{\mathrm{I}}} + \overbrace{\text{Trapez } P_3P_3'P_2'P_2}^{A_{\mathrm{II}}} - \overbrace{\text{Trapez } P_1P_1'P_2'P_2}^{A_{\mathrm{III}}}$$

Bezeichnet man zur Abkürzung die Flächeninhalte der 3 Trapeze mit A_{I}, A_{II} und A_{III}, so ist also: $A_\triangle = A_{\mathrm{I}} + A_{\mathrm{II}} - A_{\mathrm{III}}$, wobei

$$A_{\mathrm{I}} = \frac{y_1 + y_3}{2} \cdot (x_3 - x_1)$$

$$A_{\mathrm{II}} = \frac{y_3 + y_2}{2} \cdot (x_2 - x_3)$$

$$A_{\mathrm{III}} = \frac{y_1 + y_2}{2} \cdot (x_2 - x_1).$$

Somit ergibt sich:

$$A_\triangle = \frac{1}{2} \cdot [(y_1 + y_3)(x_3 - x_1) + (y_3 + y_2)(x_2 - x_3) - \\ - (y_1 + y_2)(x_2 - x_1)].$$

Nach erfolgter Multiplikation und Zusammenfassung erhält man:

$$A_\triangle = \frac{1}{2} \cdot [(y_1x_3 - y_3x_1) + (y_3x_2 - y_2x_3) + (y_2x_1 - y_1x_2)].$$

Ein einfacher Ausdruck entsteht, wenn man die Abszissenwerte ausklammert. Dann ist bei gegebenen Eckpunktskoordinaten der

Flächeninhalt eines Dreiecks[1])

$$\boxed{A_\triangle = \frac{1}{2} \cdot [x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]} \tag{108}$$

oder in Determinantenform

$$\boxed{A_\triangle = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}} \tag{109}$$

Durch Entwicklung dieser Determinanten läßt sich leicht nachweisen, daß die Formeln (108) und (109) übereinstimmen.
Der Flächeninhalt kann positiv oder negativ sein. Das ist davon abhängig, wie man das Dreieck $P_1P_2P_3$ umläuft. Der Flächeninhalt fällt positiv aus bei einer Umfahrung der Fläche im mathematisch positiven Sinn, d. h., wenn dabei die Fläche zur Linken liegt. Beim Umfahren des Dreiecks im mathematisch negativen Sinn wird der Wert negativ.

1. Folgerung: Liegt einer der Eckpunkte des Dreiecks (z. B. P_1) im Koordinatenanfangspunkt O, vereinfacht sich (108) folgendermaßen (Bild 139):

$$A_\triangle = \frac{1}{2} \cdot (x_2y_3 - x_3y_2).$$

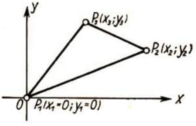


Bild 139

2. Folgerung: Liegen 3 Punkte auf einer Geraden, so ist der Inhalt des von diesen Punkten gebildeten Dreiecks gleich Null. Bei Überprüfung der Lage von 3 Punkten kann demnach Gleichung (108) verwendet werden. $A_\triangle$ muß gleich Null sein, wenn die 3 Punkte auf einer Geraden liegen.
Mit Hilfe der Gleichung (108) läßt sich eine einfache Beziehung für den Flächeninhalt von Vielecken aufstellen. Der Flächeninhalt eines Vierecks kann zum Beispiel ermittelt werden, indem es durch eine Diagonale in zwei Teildreiecke zerlegt wird (Bild 140).
Es ist:

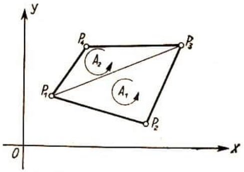


Bild 140

$$\begin{aligned} A_{\text{Viereck}} &= A_1 + A_2 = \\ &= \frac{1}{2}\,[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)] + \\ &+ \frac{1}{2}\,[x_1(y_3 - y_4) + x_3(y_4 - y_1) + x_4(y_1 - y_3)]. \end{aligned}$$

[1]) Die Reihenfolge der Indizes findet man durch „zyklische Vertauschung“

Dabei ist auf die Reihenfolge der Indizes zu achten. Jedes Teildreieck muß im mathematisch positiven Sinn umfahren werden.
Durch Ausmultiplizieren der Klammerausdrücke und Zusammenfassung wird:

$$A_{\text{Viereck}} = \frac{1}{2}\,[x_1(y_2 - y_4) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_4 - y_2) + x_4(y_1 - y_3)].$$

In Summenschreibweise wird:

$$A_{\text{Viereck}} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{4} x_k(y_{k+1} - y_{k-1}).$$

Hierbei ist zu beachten, daß $y_0 = y_4$ und $y_5 = y_1$ ist.
Obige Summenformel kann man auf das n-Eck erweitern.

Flächeninhalt eines n-Ecks

$$\boxed{A_{\text{n-Eck}} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} x_k(y_{k+1} - y_{k-1})} \qquad (110)$$

In diesem Fall ist $y_0 = y_n$ und $y_{n+1} = y_1$ zu setzen.
Von Vorteil ist bei der Berechnung des Flächeninhaltes von Vielecken ein Rechenschema, dessen Aufbau für den Fall eines Vierecks mit den Eckpunkten $P_1(-3;\,2)$, $P_2(-2;\,-4)$, $P_3(5;\,2)$ und $P_4(2;\,3)$ erläutert sein soll.

BEISPIEL

Die Lage der Eckpunkte P_1, P_2, P_3, P_4 ist bekannt. Wie groß ist der Flächeninhalt dieses Vierecks?

Lösung: Zunächst wird das Viereck skizziert und dabei festgestellt, ob die Fläche positiv orientiert ist. Dann läßt sich der Flächeninhalt mit Hilfe folgenden Schemas sehr rasch ermitteln.

k	x_k	y_k	$y_{k+1} - y_{k-1}$		$x_k(y_{k+1} - y_{k-1})$
0	2	3			
1	−3	2		−7	21
2	−2	−4	0		0
3	5	2	7		35
4	2	3	0		0
5	−3	2			
			7	−7	$\sum_{k=1}^{4} x_k(y_{k+1} - y_{k-1}) = 56$ $A = \frac{56}{2} = 28$

Der Flächeninhalt des Vierecks ist $\underline{\underline{A = 28\ \text{FE}}}$.

Damit sich die Rechnung übersichtlicher gestaltet, trägt man in das Schema zusätzlich die Werte für $k = 0$ und $k = 5$ ein. Die Werte für $k = 0$ müssen mit den Koordinaten des letzten Eckpunktes und die Werte für $k = 5$ mit den Koordinaten des ersten Eckpunktes übereinstimmen.
Die einzelnen Zahlen der Spalte $y_{k+1} - y_{k-1}$ findet man dadurch, daß jeweils vom y-Wert der nachfolgenden Zeile der y-Wert aus der vorangegangenen Zeile subtrahiert wird. Dabei faßt man die positiven Werte in einer Spalte für sich und die negativen Werte in einer zweiten Spalte zusammen. Die Summe sämtlicher Differenzen $y_{k+1} - y_{k-1}$ muß gleich Null sein.

AUFGABEN

729. Es sind die Flächeninhalte folgender Dreiecke zu berechnen:

a) $A(0; 0)$	b) $A(-2; 11)$	c) $A(-4; -3)$	d) $A(3; 1)$
$B(5; 0)$	$B(10; 6)$	$B(2; 1)$	$B(-4; -9)$
$C(8; -11)$	$C(-6; -8)$	$C(-1; -1)$	$C(9; -3)$

730. Mit Hilfe des Rechenstabes soll der Flächeninhalt eines Dreiecks mit den Ecken $A(-2{,}5; 0{,}7)$, $B(-0{,}3; -1{,}8)$, $C(3{,}5; -1{,}3)$ bestimmt werden.

731. Welchen Flächeninhalt hat das Viereck mit den Endpunkten:

$A(0; 0)$, $B(3; 0)$, $C(4; 2)$, $D(1; 2)$?

732. Wie groß ist der Flächeninhalt eines Fünfecks mit den Ecken:

$P_1(-5; -2)$, $P_2(-1; 4)$, $P_3(4; 5)$, $P_4(5; -2)$, $P_5(1; -6)$?

733. Es soll der Flächeninhalt des Sechsecks mit den Eckpunkten:

$A(-6; 3)$, $B(-4; -3)$, $C(1; -6)$, $D(4; -2)$, $E(5; 3)$, $F(2; 5)$

ermittelt werden.

734. Analytisch soll überprüft werden, ob folgende 3 Punkte auf einer Geraden liegen:

a) $P_1(-2; 1)$	b) $P_1(-2; -3)$	c) $P_1(5; -1)$	d) $P_1(-1{,}2; -0{,}2)$
$P_2(-1; -2)$	$P_2(-1/2; 0)$	$P_2(2; 3)$	$P_2(-0{,}4; 0{,}6)$
$P_3(2; 1)$	$P_3(1; 3)$	$P_3(-1{,}75; 8)$	$P_3(1{,}8; 2{,}9)$

28. Gerade

28.1. Gleichung der Geraden

Allgemeine Form der Geradengleichung

$$\boxed{Ax + By + C = 0} \tag{111}$$

Diese Gleichung gilt für den Variablenbereich $x \in (-\infty, +\infty)$ und $y \in (-\infty, +\infty)$.
In expliziter Form geschrieben lautet sie:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}.$$

Werden $-\frac{A}{B} = m$ und $-\frac{C}{B} = b$ gesetzt, ergibt sich

cartesische Form oder **Normalform der Geradengleichung**

$$\boxed{y = mx + b} \tag{111a}$$

für $x \in (-\infty, +\infty)$ und $y \in (-\infty, +\infty)$.

Der Faktor m heißt *Richtungsfaktor* oder *Anstieg* der Geraden g. Man versteht darunter den Tangens des Winkels α, den die Gerade mit der positiven Richtung der x-Achse bildet.

Es ist also $m = \tan \alpha$.

Die Größe b gibt den Abschnitt an, den die Gerade auf der y-Achse abschneidet.

Aus Gleichung (111a) ergeben sich folgende Sonderfälle:

Ist $b = 0$, dann lautet die Gleichung: $y = mx$
(Gleichung einer Geraden durch den Ursprung),

$m = 0$, dann ist $y = b$
(Gleichung einer zur x-Achse parallelen Geraden),

$m = b = 0$, dann ist $y = 0$
(Gleichung der x-Achse). Alle Punkte der x-Achse haben die Ordinate $y = 0$. Entsprechend haben alle Punkte der y-Achse die Abszisse $x = 0$. ($x = 0$ ist die Gleichung der y-Achse).

$m = 1$, dann ist $y = x + b$
(Gleichung einer Geraden, die mit der positiven x-Achse den Winkel 45° bildet),

$m = -1$, dann ist $y = -x + b$
(Gleichung einer Geraden, die mit der positiven x-Achse den Winkel 135° bildet),

$m = \pm 1$, $b = 0$, dann ist $y = \pm x$
(Gleichung der Geraden durch den Ursprung mit dem Anstiegswinkel 45° bzw. 135°).

Liegt eine Geradengleichung in der Form (111a) vor, läßt sich die Gerade auf zweierlei Weise zeichnen.
Man zieht durch $Q(0;\ b)$ eine Parallele zur x-Achse (Bild 141). Ist m eine rationale Zahl $\left(m = \frac{p}{q}\right)$, trägt man ihren Nenner q auf der Parallelen ab und errichtet im Endpunkt L das Lot. Auf diesem trägt man den Zähler p ab und verbindet den Endpunkt R mit Q. Durch Verlängerung dieser Strecke über beide Endpunkte hinaus erhält man die gesuchte Gerade.

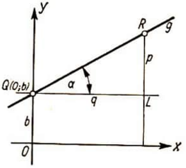


Bild 141

Für negatives m ist entweder der Zähler oder der Nenner negativ abzutragen. Ist m eine ganze Zahl, so denkt man sich diese als Bruch mit dem Nenner $q = 1$.

Da eine Gerade durch zwei Punkte bestimmt ist, läßt sich

$$y = mx + b$$

auch dadurch graphisch darstellen, daß zwei möglichst weit voneinander entfernte x-Werte gewählt und die zugehörigen Ordinaten bestimmt werden. Die beiden so erhaltenen Punkte werden miteinander verbunden. Dabei ist es empfehlenswert, als den einen dieser Punkte den Schnittpunkt dieser Geraden mit der y-Achse zu wählen; denn er kann sofort aus der Geradengleichung abgelesen werden.

BEISPIELE

1. Wie lautet die Gleichung der Geraden, die durch den Punkt $P_1(3; 2)$ verläuft und die x-Achse unter dem Winkel $\alpha = 120°$ schneidet.

Lösung: Die gesuchte Geradengleichung hat die Form

$$y = mx + b.$$

Da der Schnittwinkel $\alpha = 120°$ betragen soll, ist

$$m = \tan 120° = -\sqrt{3}.$$

Wenn die Gerade durch den Punkt $P_1(3; 2)$ gehen soll, müssen die Koordinaten dieses Punktes die Geradengleichung $y = mx + b$ erfüllen, d. h., es muß

$$2 = m \cdot 3 + b$$

sein. Da $m = -\sqrt{3}$, folgt

$$b = 2 + 3\sqrt{3} = 7{,}196 \approx 7{,}2.$$

Demnach lautet die Gleichung der Geraden

$$y = -\sqrt{3} \cdot x + 7{,}2$$

oder $y = -1{,}7x + 7{,}2.$

Die letzte Gleichung stellt eine angenäherte Form der gesuchten Geradengleichung dar. Diese Annäherung genügt im allgemeinen bei praktischen Fällen.

2. Eine Gerade schneidet die y-Achse in $Q\left(0; \frac{5}{2}\right)$ und hat den Anstieg $m = -\frac{3}{5}$. Wie lautet die Gleichung dieser Geraden, und wo schneidet sie die x-Achse?

Lösung: Die gesuchte Gleichung der Geraden hat die Form

$$y = mx + b.$$

Da der gegebene Punkt Q auf der y-Achse liegt, ist der Ordinatenabschnitt b bekannt. Ebenso ist der Anstieg m gegeben. Die Geradengleichung kann also sofort hingeschrieben werden. Sie lautet:

$$y = -\frac{3}{5}x + \frac{5}{2}$$

oder $y = -0{,}6x + 2{,}5.$

Der Schnittpunkt dieser Geraden mit der x-Achse hat die Ordinate $y = 0$.

Folglich: $0 = -0{,}6x + 2{,}5.$

Die Abszisse des Schnittpunktes der Geraden mit der x-Achse hat den Wert $x = 4\frac{1}{6} \approx 4{,}2.$

3. Es soll eine allgemeine Gleichung dafür aufgestellt werden, daß von einer Geraden der Anstieg m und ein Punkt $P_1(x_1; y_1)$ gegeben sind. Welche Gestalt nimmt die Geradengleichung dann an?

Lösung: Die gesuchte Gleichung wird die Form

$$y = mx + b \tag{I}$$

haben. Da diese Gerade durch $P_1(x_1; y_1)$ hindurchgehen soll, liegt umgekehrt P_1 auf ihr, d. h., die Koordinaten von P_1 müssen die Geradengleichung erfüllen.

Es ist: $$y_1 = mx_1 + b \tag{II}$$

Subtrahiert man (II) von (I), entsteht die gesuchte Gleichung:

Punktrichtungsgleichung der Geraden

$$\boxed{y - y_1 = m(x - x_1)}\,. \tag{111b}$$

4. Welche Gestalt nimmt die Geradengleichung an, wenn von der Geraden zwei Punkte $P_1(x_1; y_1)$ und $P_2(x_2; y_2)$ gegeben sind?

Lösung: Die gesuchte Verbindungsgerade zweier Punkte wird die Form

$$y = mx + b$$

haben. Da beide Punkte P_1 und P_2 auf der Geraden liegen, müssen die Koordinaten beider Punkte die Geradengleichung befriedigen.

Es muß sein:
$$y_1 = mx_1 + b$$
$$y_2 = mx_2 + b\,.$$

Aus beiden Gleichungen lassen sich jetzt die beiden Unbekannten m und b berechnen.
Es wird:

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

und

$$b = y_1 - \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}\, x_1\,.$$

Damit sind die Größen m und b der gesuchten Gleichung

$$y = mx + b$$

ermittelt.

Zweipunktegleichung der Geraden

$$\boxed{\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}} \tag{111c}$$

Sie braucht man z. B. beim Aufstellen der Gleichungen von Seiten und Diagonalen eines Vielecks.
Kennt man insbesondere von einer Geraden deren Schnittpunkte mit den beiden Koordinatenachsen, so ergibt sich eine weitere, häufig günstig zu verwendende Form der Geradengleichung.

Eine Gerade schneidet die x-Achse im Punkte $P_1(a; 0)$ und die y-Achse im Punkte $P_2(0; b)$ (Bild 142). Dann lautet ihre Gleichung nach (111c)

$$\frac{y-0}{x-a} = \frac{b-0}{0-a},$$

woraus nach Beseitigung des Nenners und Umordnung folgt

$$bx + ay = ab.$$

Dividiert man beide Seiten dieser Gleichung noch durch ab, so erhält man die

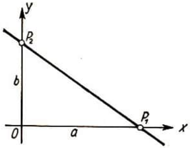


Bild 142

Abschnittsgleichung der Geraden

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1} \tag{111d}$$

AUFGABEN

735. Von einer Geraden g sind ihre Abschnitte a und b auf den Koordinatenachsen bekannt. Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Koeffizienten A, B und C und diesen Achsenabschnitten?

736. Es soll die Gleichung $3x - 4y - 12 = 0$ auf die durch die Achsenabschnitte dargestellte Geradengleichung transformiert werden.

737. Man zeichne mittels Wertetabelle für einige Punkte folgende durch ihre Gleichungen gegebenen Geraden:

a) $3y = 5x - 2$ b) $y = -\frac{1}{8}x + 3$

c) $2y + 2x + 3 = 0$ d) $20x - y + 80 = 0$

738. Es sind die Gleichungen der Geraden aufzustellen, die durch die Punkte:

a) $(4; 0)$ b) $(0; 3)$ c) $(3; 5)$ d) $(-2; -3)$

e) $(2{,}5; -1{,}5)$ f) $(^3/_2; {^5/_2})$ g) $(-^5/_4; -^1/_2)$ h) $(-^5/_8; 3)$

gehen und den Anstiegswinkel $\alpha = 45°$ bzw. $\alpha = 135°$ bzw. $\alpha = 30°$ bzw. $\alpha = 60°$ haben.

739. Wie lautet die Gleichung der Geraden, die die x-Achse unter einem Winkel $\alpha = 56°20'$ schneidet und außerdem durch den Punkt $P_1(3; -4)$ verläuft? (Rechenstab!)

740. Es soll die Gleichung der Geraden aufgestellt werden, die durch den Punkt $P_1(4; 5)$ geht und den Anstiegswinkel $\alpha = 146°10'$ hat. (Rechenstab!)

741. Folgende Geraden sind ohne Anwendung einer Tabelle zu zeichnen:

a) $y = \frac{3}{4}x + 1$ b) $y = 2x + 0{,}5$ c) $4y = 5x$

d) $y = -x + 2$ e) $y = -\frac{1}{3}x - 1{,}5$ f) $y + 3x = 0.$

742. Wie lautet die Normalform der Geraden, die auf der y-Achse den Abschnitt $b = 3$ aufweist und mit der positiven Richtung der x-Achse den Winkel $\alpha = 60°$ bildet?

743. Welches ist die Gleichung der Geraden, die auf der y-Achse den Abschnitt $b = -4$ aufweist und mit der positiven Richtung der x-Achse den Winkel $\alpha = 101°20'$ bildet? (Rechenstab!)

744. Wie lauten die Gleichungen der Geraden, die durch folgende Punkte hindurchgehen:

a) $P_1(1; 1)$ und $P_2(4; 3)$ b) $P_1(0; 0)$ und $P_2(a; 0)$
c) $P_1(2; 3)$ und $P_2(-2; -3)$ d) $P_1(2; -3)$ und $P_2(2; 3)$
e) $P_1(1; 4)$ und $P_2(-3; -4)$ f) $P_1(0; {}^3/_2)$ und $P_2(2; {}^5/_2)$?

745. Wie groß ist der Abschnitt auf der Ordinatenachse der durch die Punkte $P_1({}^3/_2; 1)$ und $P_2(3; 4)$ gehenden Geraden?

746. Es sollen die Gleichungen der Seiten und der Seitenhalbierenden des Dreiecks mit den Eckpunkten:

a) $A(-1; -1)$, $B(1; 1)$, $C(-3; 2)$ b) $A(-1; -1)$, $B(-3; 5)$, $C(7; 11)$

aufgestellt werden.

747. Ein Viereck habe die Eckpunkte:

$$P_1(3; 4),\quad P_2(7; -1),\quad P_3(-6; -5),\quad P_4(-16; 11).$$

Wie lauten die Gleichungen der Vierecksseiten und die der beiden Diagonalen?

748. Es sind die Geraden mit folgenden Achsenabschnitten zu zeichnen und die Geradengleichungen aufzustellen:

a) $a = 5,\quad b = 2$ b) $a = -3,\quad b = 4$
c) $a = -1,\quad b = -2$ d) $a = 2,\quad b = -3$.

749. Wie lauten die Abschnittsgleichungen der Geraden, die die Ordinatenachse in 2,5 bzw. $-3{,}5$ und die Abszissenachse in -4 bzw. 3 schneiden?

750. Wie lautet die allgemeine Form folgender Geradengleichungen:

a) $y = \frac{x}{2} - 3$ b) $y = -\frac{3}{4}x + 5$
c) $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$ d) $\frac{4}{5} = \frac{y-2}{x+1}$?

751. Es liege die Gleichung der Geraden in der allgemeinen Form vor. Wie lautet die Abschnittsgleichung dieser Geraden?

a) $3x + 2y - 6 = 0$ b) $4x - 3y - 12 = 0$
c) $3x - 5y + 15 = 0$ d) $x + 4y + 4 = 0$.

752. Wie lautet die Normalform folgender durch ihre allgemeine Form gegebener Geraden? Wie groß ist der Anstiegswinkel dieser Geraden und welchen Abschnitt bilden sie auf der Ordinatenachse?

a) $x - y + 3 = 0$ b) $x + y + 3 = 0$
c) $x - y\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 0$ d) $x\sqrt{3} - y + 3 = 0$
e) $4x - 3y - 18 = 0$ f) $x + 2y + 3 = 0$.

Zeichnen Sie diese Geraden in ein Koordinatensystem ein!

753. Damit ein Punkt $P_1(x_1; y_1)$ ein Element der Punktmenge (der Ebene) ist, die eine Gerade bildet, müssen die Koordinaten die Gleichung der Punktmenge erfüllen. Gegeben sei die Gerade mit der Gleichung

$$3y - 4x - 1 = 0.$$

Es soll untersucht werden, ob folgende Punkte Elemente der Punktmenge sind, die die Gerade darstellt.

a) $P_1(2; 3)$ b) $P_2(0; -1)$
c) $P_3(5; 7)$ d) $P_4(7; -9)$.

754. Welche Ordinate muß der Punkt P_1 mit $x_1 = 2$ haben, damit er auf der Geraden

$$x - y + 1 = 0$$

liegt?

28.2. Hessesche Normalform der Geradengleichung

Außer den behandelten Geradengleichungen gibt es noch eine weitere, die man vorteilhaft verwendet, wenn es sich um die Berechnung des Abstandes eines Punktes von einer Geraden handelt. Diese Geradengleichung bezeichnet man als die HESSE*sche Normalform der Geraden*[1]).

Zu diesem Zweck sei eine beliebige Gerade g vorgegeben, die auf den Koordinatenachsen die Abschnitte a und b abschneidet. Das Lot vom Ursprung auf die Gerade habe die Länge p, und es wird $p > 0$ festgelegt. Es gilt also im folgenden stets $p > 0$. Ist φ der Winkel des Lotes mit der positiven Richtung der x-Achse, so ersieht man aus Bild 143, daß:

$$a = \frac{p}{\cos\varphi} \quad \text{und} \quad b = \frac{p}{\sin\varphi},$$

wenn $\varphi \neq k \cdot 90°$ ist.

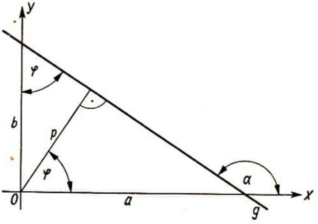


Bild 143

Durch Einsetzen dieser Werte in die Achsenabschnittsgleichung der Geraden

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

erhält man:

$$\frac{x}{\dfrac{p}{\cos\varphi}} + \frac{y}{\dfrac{p}{\sin\varphi}} = 1.$$

Bei Beseitigung der Doppelbrüche und Multiplikation der Gleichung mit dem Faktor p ergibt sich die

Hessesche Normalform der Geradengleichung

$$\boxed{x \cdot \cos\varphi + y \cdot \sin\varphi - p = 0} \qquad (112)$$

(Welche Lage wird die Gerade haben, wenn $\varphi = 0°$ oder $\varphi = 90°$ ist?)

Anwendung: Berechnung des Abstandes eines Punktes von einer Geraden.

Die HESSEsche Normalform gestattet, den Abstand d eines Punktes $P_1(x_1;\, y_1)$ von einer Geraden g zu bestimmen.

---

[1]) Die HESSEsche Normalform der Geraden hat nichts zu tun mit der gewöhnlichen Normalform (cartesische Normalform) der Geraden

Eine Geradengleichung läßt sich immer in der Hesseschen Normalform aufstellen, nur nicht, wenn die Gerade durch den Anfangspunkt hindurchgeht. In diesem Falle ist der Winkel φ nicht eindeutig bestimmt. Hat die gegebene Gerade den Abstand p vom Ursprung O, so lautet ihre Gleichung:

$$x \cdot \cos \varphi + y \cdot \sin \varphi - p = 0.$$

Die Gleichung der Parallelen zu dieser Geraden, und zwar derjenigen Parallelen, die durch den gegebenen Punkt P_1 verläuft, lautet dann:

$$x \cdot \cos \varphi + y \cdot \sin \varphi - p_1 = 0,$$

wobei p_1 der Abstand dieser Parallelen vom Ursprung O ist. Bedenkt man weiter, daß der Punkt $P_1(x_1; y_1)$ auf der genannten Parallelen liegt, so müssen dessen Koordinaten die Gleichung der Parallelen erfüllen. Es muß also sein:

$$x_1 \cdot \cos \varphi + y_1 \cdot \sin \varphi - p_1 = 0.$$

Damit ist aber der Abstand der Parallelen durch den Punkt P_1 vom Ursprung O berechnet. Aus Bild 144 ergibt sich für d:

$$d = p_1 - p.$$

Setzt man noch den Wert von p_1 ein, wird der

Abstand eines Punktes $P_1(x_1; y_1)$ von einer Geraden

$$\boxed{d = x_1 \cdot \cos \varphi + y_1 \cdot \sin \varphi - p} \qquad (113)$$

Es sind 3 Fälle zu unterscheiden:

1. Liegen der gegebene Punkt P_1 und der Ursprung O auf verschiedenen Seiten der Geraden g, so ist der gesuchte Abstand d des Punktes P_1 von der Geraden g (Bild 144)

$$d = p_1 - p = x_1 \cos \varphi + y_1 \sin \varphi - p > 0.$$

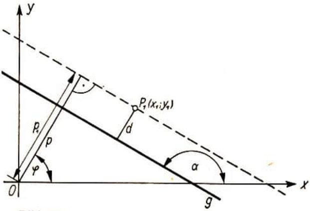


Bild 144

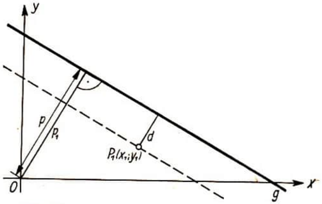


Bild 145

2. Liegen P_1 und O auf der gleichen Seite der Geraden g, so ist nach Bild 145

$$d = p - p_1 = -(p_1 - p).$$

Setzt man das ein, so wird:

$$d = -(x_1 \cos\varphi + y_1 \sin\varphi - p) < 0.$$

3. Liegt P_1 auf der Geraden selbst, so ist:

$$p = p_1,$$

d. h., $$d = p_1 - p_1 = 0.$$

Man erhält diesen Abstand, indem man die Koordinaten des Punktes P_1 in die HESSEsche Normalform der Geraden einsetzt. Ist der Wert von d positiv, so liegen der Punkt und der Ursprung auf verschiedenen Seiten der Geraden. Für negatives d liegen der gegebene Punkt und der Ursprung auf derselben Seite der Geraden.

BEISPIEL

1. Wie groß ist der Abstand des Punktes $P_1(3;4)$ von der Geraden $x\cos 45° + y \sin 45° - 1 = 0$? Auf welcher Seite der Geraden liegt dieser Punkt?

   Lösung: In diesem Fall liegt die Gerade bereits in der Hesseschen Normalform vor. Man braucht also nur die Koordinaten von P_1 in die Gleichung einzusetzen, um den gesuchten Abstand d zu erhalten.

   Also:

$$3 \cdot \cos 45° + 4 \cdot \sin 45° - 1 = d$$

$$3 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} + 4 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} - 1 = d$$

$$\underline{\underline{d \approx 3{,}95.}}$$

   Da sich für d ein positiver Wert ergibt, liegt der Punkt P auf der dem Ursprung abgekehrten Seite.

In den meisten Fällen ist jedoch die Gerade nicht in der HESSEschen Normalform gegeben. Man muß dann die Rechnung damit beginnen, daß man die Gleichung der Geraden in die HESSEsche Normalform überführt.

Transformation der allgemeinen Geradengleichung auf die Hessesche Normalform

Um die allgemeine Gleichung (111)

$$Ax + By + C = 0$$

in die Form (112)

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0$$

überzuführen, muß man die Konstanten $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ und p durch die Konstanten A, B und C von (111) ausdrücken.
Sollen die Gleichungen (111) und (112) die gleiche Gerade darstellen, so müssen die aus beiden Gleichungen sich ergebenden Achsenabschnitte einander gleich sein. Aus (111) folgt die Abschnittsgleichung

$$\frac{x}{\frac{-C}{A}} + \frac{y}{\frac{-C}{B}} = 1$$

und

$$a = \frac{-C}{A}, \quad b = \frac{-C}{B}, \quad \text{wobei } A \neq 0,\ B \neq 0 \text{ und } C \neq 0.$$

Bild 143 zeigt, daß: $a = \dfrac{p}{\cos\varphi}$, $b = \dfrac{p}{\sin\varphi}$.

Mithin muß sein:

$$\frac{p}{\cos\varphi} = \frac{-C}{A} \quad \text{und} \quad \frac{p}{\sin\varphi} = \frac{-C}{B}$$

oder

$$\cos\varphi = \frac{-Ap}{C} \quad \text{und} \quad \sin\varphi = \frac{-Bp}{C}.$$

Berücksichtigt man weiter, daß

$$\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1,$$

wird

$$\frac{A^2p^2}{C^2} + \frac{B^2p^2}{C^2} = 1$$

oder

$$\frac{p^2}{C^2}(A^2 + B^2) = 1,$$

$$p = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Von den beiden Vorzeichen der Quadratwurzel ist dasjenige zu nehmen, durch das der Wert des Bruches positiv wird, da (vgl. S. 333) $p > 0$ sein soll.

Ferner wird

$$\cos\varphi = \frac{A}{\mp\sqrt{A^2 + B^2}},$$

$$\sin\varphi = \frac{B}{\mp\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Damit sind aber die Konstanten der Gleichung (112) vollkommen ausgedrückt durch die Konstanten der Gleichung (111). Setzt man die gefundenen Werte von $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ und p in die Gleichung (112) ein, folgt

$$\frac{Ax}{\mp\sqrt{A^2 + B^2}} + \frac{By}{\mp\sqrt{A^2 + B^2}} + \frac{C}{\mp\sqrt{A^2 + B^2}} = 0.$$

Das negative Vorzeichen von p in Gleichung (112) ist hierbei in den Nenner genommen und dadurch das $\pm$ in dem oben errechneten Ausdruck von p in $\mp$ verwandelt worden. Von den beiden Vorzeichen ist das zu wählen, durch welches der Bruch $\dfrac{C}{\mp\sqrt{A^2+B^2}}$ negativ wird, denn nur dann besteht Übereinstimmung mit (111):

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0, \quad \text{wobei } p > 0.$$

Demnach läßt sich jede Geradengleichung von der Form $Ax + By + C = 0$ umwandeln in die

Hessesche Normalform der Geradengleichung

$$\boxed{\frac{Ax + By + C}{\mp\sqrt{A^2+B^2}} = 0} \tag{114}$$

BEISPIELE

2. Die Gleichung

$$4x + 3y = 48$$

soll auf die Hessesche Normalform transformiert werden.

Lösung: Aus der allgemeinen Form der Geradengleichung

$$4x + 3y - 48 = 0$$

folgt:

$$A = 4, \quad B = 3, \quad C = -48.$$

Damit das absolute Glied negativ wird, muß für die Quadratwurzel in diesem Fall das positive Vorzeichen genommen werden. Nach Formel (114) ergibt sich die Hessesche Normalform

$$\frac{4x + 3y - 48}{+\sqrt{16+9}} = 0$$

$$\underline{\underline{\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - \frac{48}{5} = 0}}$$

$$x\cos 36{,}9^\circ + y\sin 36{,}9^\circ - \frac{48}{5} = 0.$$

3. Wie lautet die Hessesche Normalform der Gleichung

$$y = \frac{8}{15}x + \frac{17}{3}?$$

Lösung: Die Geradengleichung liegt hier in der cartesischen Form vor. Um sie auf die Hessesche Normalform zu transformieren, muß die Gleichung erst auf die allgemeine Form gebracht werden.

$$8x - 15y + 85 = 0.$$

Daraus folgt:

$$A = 8, \quad B = -15, \quad C = +85.$$

Da C positiv, muß die Wurzel der Hesseschen Normalform das negative Vorzeichen erhalten.

Die HESSEsche Normalform ist dann:

$$\frac{8x - 15y + 85}{-\sqrt{64 + 225}} = 0$$

oder

$$-\frac{8}{17}x + \frac{15}{17}y - \frac{85}{17} = 0.$$

Hier ist:

$$\cos\varphi = -0{,}470\,59$$
$$\sin\varphi = +0{,}882\,35.$$

Der Winkel φ liegt demnach im 2. Quadranten.

Die trigonometrische Form der HESSEschen Normalform hat dann die Gestalt:

$$\underline{\underline{x \cdot \cos 118°4' + y \cdot \sin 118°4' - 5 = 0.}}$$

Nunmehr kann Formel (113) für die Berechnung des Abstandes d eines Punktes $P_1(x_1; y_1)$ von einer Geraden für den Fall umgeformt werden, daß die Gerade durch ihre allgemeine Gleichung gegeben ist. So wie aus Gleichung (112) die Gleichung (113) gewonnen wurde, erhält man aus Gleichung (114):

Abstand eines Punktes P_1 von einer Geraden

$$\boxed{d = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\mp\sqrt{A^2 + B^2}}} \quad \left(\text{mit } \frac{C}{\mp\sqrt{A^2 + B^2}} < 0\right), \tag{115}$$

wenn die Gleichung der Geraden in der allgemeinen Form $Ax + By + C = 0$ vorliegt.

Für die Lage von P_1 zu der Geraden und zum Ursprung gelten wieder die Kriterien von S. 334/335.

AUFGABEN

755. Wie lautet die HESSEsche Normalform folgender Geraden:

a) $3x - 4y + 7 = 0$ b) $15x + 8y - 34 = 0$

c) $x + y = 8$ d) $x - y = 2\sqrt{2}$?

756. Man berechne den Abstand des Punktes $P(-1; -1)$ von der Geraden

$$x + y = 1.$$

Welche Lage hat der Punkt P bezüglich der Geraden und dem Ursprung?

757. Man berechne ebenso den Abstand des Punktes $P(-2; 3)$ von der Geraden

$$\frac{x}{12} + \frac{y}{16} = 1.$$

Auf welcher Seite der Geraden liegt der Punkt?

758. Wie groß ist der Abstand folgender paralleler Geraden:

a) g_1: $7x + 24y + 10 = 0$ b) g_1: $4x + 3y - 6 = 0$
g_2: $7x + 24y - 35 = 0$ g_2: $4x + 3y - 16 = 0$
c) g_1: $3x - 4y - 5 = 0$ d) g_1: $12x - 5y + 36 = 0$
g_2: $3x - 4y + 20 = 0$ g_2: $12x - 5y + 78 = 0$?

Man zeichne sämtliche Parallelenpaare auf Millimeterpapier und prüfe die berechneten Abstände nach.

759. Wie lautet die Gleichung der Geraden, die durch den Punkt $P(-3; 5)$ geht und vom Ursprung den Abstand $d = 3$ besitzt?

760. Wie lautet die Gleichung der Geraden, die durch den Punkt $P_1(8; 5)$ geht und von dem Punkt $P_2(3; 7)$ den Abstand $d = 5$ hat?

761. Die Gerade $2x - 5y - 10 = 0$ soll in Polarkoordinaten mit dem Ursprung als Pol ausgedrückt werden.

762. Man stelle die Gerade $y = -x + 2$ in Polarkoordinaten dar.

763. Die Gerade $\dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{5} = 1$ ist in Polarkoordinaten darzustellen.

764. Die Gleichung einer Geraden in Polarkoordinaten ist

$$r\left(\sin\varphi + \frac{5}{3}\cos\varphi\right) - 5 = 0.$$

Durch welche Gleichung wird diese Gerade in rechtwinkligen Koordinaten ausgedrückt?

765. Die Parameterdarstellung einer Geraden g ist

$$x = a(1 + t)$$
$$y = at.$$

Wie lautet die Gleichung der Geraden in rechtwinkligen Koordinaten?

766. Eine Gerade ist darstellbar durch die Parameterdarstellung

$$x = \frac{a - t}{a + t},$$
$$y = \frac{t}{a + t}.$$

a) Wie lautet die Geradengleichung in rechtwinkligen Koordinaten?

b) Welche Abschnitte hat diese Gerade auf den Koordinatenachsen?

c) Wie groß ist der Anstiegswinkel α?

d) Welchen Abstand besitzt diese Gerade vom Ursprung?

767. Man beweise, daß die Parameterdarstellung

$$x = \cos^2 t,$$
$$y = \cos 2t$$

eine gerade Linie ergibt.

768. Welches ist die Menge aller Punkte der Ebene, die von den Punkten $P_1(-\sqrt{3}; -5)$ und $P_2(3\sqrt{3}; -1)$ gleichen Abstand haben?

769. Es soll die Menge der Mittelpunkte aller Rechtecke ermittelt werden, die in ein Dreieck so einbeschrieben sind, daß eine Rechteckseite in eine Dreieckseite fällt.

Anleitung: Man wähle die Dreieckseite AB, die mit der Grundlinie des Rechtecks zusammenfällt, als x-Achse und die Höhe CH als y-Achse.

770. Ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten $a = 4$ und $b = 3$ gleite mit den Endpunkten der Hypotenuse auf den Koordinatenachsen. Zu bestimmen ist die Menge aller Punkte der Ebene, die der Eckpunkt C beschreibt.

771. Über einer festen Strecke als Hypotenuse ist ein rechtwinkliges Dreieck gezeichnet. Auf der Verlängerung einer Kathete ist ein Punkt $P(x; y)$ so gewählt, daß das Rechteck aus dieser Kathete und der Summe aus der Kathete und ihrer Verlängerung konstant ist. Man ermittle die Menge aller Punkte der Ebene, die diese Bedingung erfüllen.

28.3. Zwei Geraden

28.3.1. Bestimmung des Schnittpunktes zweier Geraden

Werden zwei Geraden g_1 und g_2 miteinander zum Schnitt gebracht, so bedeutet das mengentheoretisch, daß man den Durchschnitt $g_1 \cap g_2$ der Punktmengen g_1 und g_2 untersucht. Nach Anschauung schneiden sich zwei Geraden in einem Punkt, d. h., $g_1 \cap g_2 = \{P_1(x_1; y_1)\}$. Für diesen Schnittpunkt gilt $P_1 \in g_1$ und $P_1 \in g_2$, also auch $P_1 \in g_1 \cap g_2$. Die Koordinaten des Schnittpunktes P_1 müssen beide Kurvengleichungen erfüllen.

$$\begin{array}{r|l|} g_1\colon & A_1x_i + B_1y_i + C_1 = 0 \\ g_2\colon & A_2x_i + B_2y_i + C_2 = 0 \end{array}$$

Dieses Gleichungssystem mit 2 Variablen kann als Lösungsmenge nur ein Koordinatenpaar $(x_i; y_i)$ enthalten. Im Falle der Bestimmung des Schnittpunktes zweier Geraden ist also $i = 1$.

Für die Koordinaten des Schnittpunktes ergibt sich:

$$x_1 = \frac{B_1C_2 - B_2C_1}{A_1B_2 - A_2B_1}, \qquad y_1 = \frac{A_2C_1 - A_1C_2}{A_1B_2 - A_2B_1}$$

oder in Determinantenform

$$x_1 = -\frac{\begin{vmatrix} C_1 & B_1 \\ C_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}},$$

$$y_1 = -\frac{\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}.$$

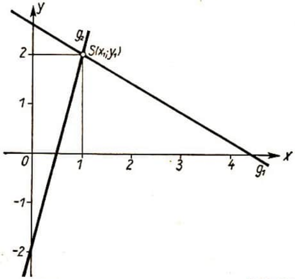


Bild 146

BEISPIEL

In welchem Punkte schneiden einander die beiden Geraden

$$3x + 5y - 13 = 0$$

und $$4x - y - 2 = 0?$$

Lösung: Aus dem Gleichungssystem

$$\begin{array}{l|rcl|} g_1: & 3x_i + 5y_i & = & 13 \\ g_2: & 4x_i - y_i & = & 2 \end{array}$$

folgt:

$$\underline{\underline{x_1 = 1}} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{y_1 = 2}} \qquad \text{(Bild 146).}$$

28.3.2. Bestimmung des Winkels, den zwei Geraden miteinander bilden

Zwei einander schneidende Geraden bilden einen Winkel miteinander. Dieser Winkel entsteht dadurch, daß man die Gerade g_1 im positiven Sinne (Gegenzeigersinn) dreht, bis sie in die Lage der anderen Geraden g_2 kommt (Bild 147).

Sind g_1 und g_2 durch ihre Gleichungen in der cartesischen Normalform gegeben:

$$g_1: \; y = m_1 x + b_1$$
$$g_2: \; y = m_2 x + b_2,$$

wobei:

$$m_1 = \tan \alpha_1$$
$$m_2 = \tan \alpha_2,$$

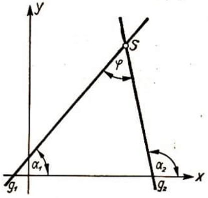


Bild 147

so ist, da $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$ (nach Außenwinkelsatz),

$$\tan \varphi = \tan(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\tan \alpha_2 - \tan \alpha_1}{1 + \tan \alpha_1 \tan \alpha_2}.$$

Winkel zwischen zwei Geraden $$\boxed{\tan \varphi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}} \qquad (116)$$

Formel (116) liefert stets den Winkel, der überstrichen wird, wenn man die zu m_1 gehörige Gerade um den gemeinsamen Schnittpunkt S im mathematisch positiven Sinn so weit dreht, bis sie mit der anderen Geraden zusammenfällt. Die beiden Geraden g_1 und g_2 können nun zwei ausgezeichnete Lagen zueinander haben.

1. Die Geraden liegen parallel. Dann ist $\varphi = 0°$ und $\tan \varphi = 0$. In Gleichung (116) muß der Zähler Null werden.

Bedingung für die Parallelität $$\boxed{m_1 = m_2} \qquad (116\text{a})$$

Satz

Zwei Geraden verlaufen zueinander parallel, wenn ihre Richtungsfaktoren gleich sind.

Die Gleichungen zweier paralleler Geraden in Normalform unterscheiden sich also nur durch ihre Absolutglieder.

2. Die Geraden stehen senkrecht aufeinander. Dann ist $\varphi = 90°$ und $\tan\varphi = \infty$ Mithin muß in Gleichung (116) der Nenner Null werden.

$$1 + m_1 \cdot m_2 = 0$$

oder es ist die

Bedingung des Senkrechtstehens $$\boxed{m_1 = -\frac{1}{m_2}} \qquad (116\,b)$$

Satz

Zwei Geraden stehen aufeinander senkrecht, wenn der Richtungsfaktor der einen gleich ist dem negativ reziproken Wert des Richtungsfaktors der anderen Geraden.

Bei einer Schnittwinkelbestimmung empfiehlt sich stets die Untersuchung, ob die beiden Geraden parallel verlaufen oder aufeinander senkrecht stehen. Erst, wenn man erkannt hat, daß dies nicht der Fall ist, benutzt man Gleichung (116).

BEISPIELE

1. Unter welchem Winkel φ schneiden sich die Geraden mit den Gleichungen

$$g_1\colon\ 7x - 4y - 8 = 0$$
$$g_2\colon\ 5x + 4y - 16 = 0\ ?$$

Lösung: Beide Gleichungen schreibt man zunächst explizit nach y.

$$g_1\colon\ y = \frac{7}{4}x - 2$$

$$g_2\colon\ y = -\frac{5}{4}x + 4$$

Die Richtungsfaktoren sind:

$$m_1 = \frac{7}{4} \quad \text{und} \quad m_2 = -\frac{5}{4}.$$

Nach (116) ist:

$$\tan\varphi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} = \frac{-\frac{5}{4} - \frac{7}{4}}{1 - \frac{7}{4}\cdot\frac{5}{4}}$$

$$\tan\varphi = \frac{48}{19} = 2{,}52632$$

$$\underline{\underline{\varphi = 68°24'}}$$

2. Unter welchem Winkel φ schneiden einander die Geraden mit den Gleichungen

$$g_1\colon\ x - 5y - 10 = 0$$
$$g_2\colon\ 5x + y - 7 = 0\,?$$

Lösung: Die explizite Form beider Geradengleichungen lautet:

$$g_1:\ y = \frac{x}{5} - 2$$

$$g_2:\ y = -5x + 7.$$

Hier sind die Richtungsfaktoren m_1 und m_2 zueinander negativ reziprok. Die beiden Geraden stehen also senkrecht aufeinander.

AUFGABEN

772. Man bestimme analytisch die Koordinaten der Schnittpunkte folgender Geradenpaare und überzeuge sich durch Zeichnung von der Richtigkeit der Rechnung:

a) $2x + 3y = 7$, $3x - y = 5$

b) $3x - 4y + 12 = 0$, $3x + 2y + 3 = 0$

c) $x - y = 4$, $3x + y = 8$

d) $\frac{x}{8} - \frac{y}{2} - 1 = 0$, $-\frac{x}{2} + \frac{y}{3} - 1 = 0$

e) $2x - 5y + 20 = 0$, $3x + 2y + 11 = 0$

f) $\frac{x}{10} + \frac{y}{7} = 1$, $2x - y = -3$

773. Wie lauten die Koordinaten der Eckpunkte eines Dreiecks, dessen Seiten durch folgende Gleichungen gegeben sind?

a) $x - 6y - 3 = 0$, $3x + 5y - 9 = 0$, $4x - y + 11 = 0$

b) $x + 7y + 11 = 0$, $x - 3y = 1$, $3x + y = 7$

c) $x + y - 2 = 0$, $x - 3y = 4$, $3x + 5y + 7 = 0$

774. Die Gleichungen der Seiten eines Vierecks sind:

$g_1:\ 2x - 3y - 10 = 0$ $\qquad$ $g_3:\ 2x - 6y + 9 = 0$

$g_2:\ x + 2y + 2 = 0$ $\qquad$ $g_4:\ 5x + 4y - 25 = 0$

Wie lauten die Koordinaten der Eckpunkte und die des Schnittpunktes der Diagonalen?

775. Welche Gerade geht durch den Schnittpunkt der Geraden:

a) $2x - 5y - 11 = 0$ und $4x + 3y - 17 = 0$

b) $x + y - 1 = 0$ und $x - y + 1 = 0$

und außerdem noch durch den Punkt $P(3;\ -5)$?

776. Ein Dreieck hat die Eckpunkte $A(-3;\ -1)$, $B(3;\ 0)$ und $C(-2;\ 3)$. Wie lauten die Gleichungen der Seitenhalbierenden?

777. Wie groß ist der Schnittwinkel der Diagonalen eines Vierecks mit den Eckpunkten $A(-2{,}7;\ 0)$, $B(-1{,}2;\ -4)$, $C(6{,}3;\ -2{,}8)$ und $D(3;\ 3{,}5)$? (Zeichnen Sie das Viereck mit den Diagonalen und messen Sie den Schnittwinkel der Diagonalen nach.)

778. Es sollen die Winkel berechnet werden, die die Geraden

a) $x - 2y + 2 = 0$ und $2x + y - 6 = 0$

b) $\frac{x}{4} + \frac{y}{5} = 1$ und $\frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 1$

c) $6x + 2{,}5y = 5$ und $y + 2{,}4x - 6 = 0$

d) $3x + 5y - 1 = 0$ und $11x - 2y = -3$

miteinander bilden.

779. Welche Winkel bilden die Seiten des Dreiecks miteinander, das durch Schnitt der 3 Geraden mit den Gleichungen

$$3x + 4y = 11, \qquad 7x - 24y = 33 \qquad \text{und} \qquad 12x - 5y = -25$$

entsteht?

780. Wie heißt die Gleichung des vom Punkt $P(-3; 4)$ auf die Gerade $y = \frac{2}{3}x + 5$ gefällten Lotes?

781. Im Punkt $P(x = 2)$ der Geraden mit der Gleichung $2x - 3y + 5 = 0$ ist die Senkrechte zu errichten. Wie heißt ihre Gleichung?

782. Durch den Punkt $P(2; 3)$ ist zu der Geraden

a) $y = x$, b) $y = -3x$, c) $y = 3x + 4$, d) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$

die Parallele gezogen. Wie lautet ihre Gleichung?

783. Durch den Punkt $P(5; -2)$ soll eine Gerade gezogen werden, die die Gerade $3x = 2y - 1$ unter einem Winkel von 45° schneidet. Wie lautet die Gleichung dieser Geraden?

784. Wie groß sind die Winkel des Dreiecks, dessen Eckpunkte die Koordinaten haben:

$A(-5; -7)$, $B(6; -5)$ und $C(2; 3)$?

785. Wie groß sind die Winkel in dem Viereck, dessen Eckpunkte die Koordinaten haben:

$P_1(6; 2)$, $P_2(8; 7)$, $P_3(0; 9)$ und $P_4(+1; -1)$?

Welchen Winkel bilden die Vierecksdiagonalen miteinander?

786. Ohne Anwendung der Hesseschen Normalform ist der Abstand des Ursprungs von den Geraden mit den Gleichungen:

a) $y = \frac{4}{7}x + 3$ b) $\frac{x}{2} - \frac{y}{4} = 1$

c) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ d) $y = mx + b$

zu ermitteln.

787. Wie lauten die Gleichungen der Höhen in dem Dreieck, dessen Seiten die Gleichungen

$$2x + y = 6, \qquad 5x - 2y + 3 = 0, \qquad x + 5y + 6 = 0$$

haben, und wie kann nachgewiesen werden, daß die 3 Höhen einander in einem Punkte schneiden?

788. Die Ecken eines Dreiecks haben die Koordinaten

$A(2; 3)$, $B(4; -5)$ und $C(-3; -6)$.

Bestimme die Gleichungen der Mittellote auf den Seiten dieses Dreiecks und die Koordinaten des Schnittpunktes der Mittellote.

789. Von einem Dreieck kennt man die Eckpunkte $P_1(-5; -1)$, $P_2(3; -2)$ und $P_3(-3; 8)$. Ermittle:

a) die Längen der 3 Seiten des Dreiecks (Benutzung des Rechenstabes)
b) die Gleichungen der 3 Seiten
c) die Gleichungen der 3 Seitenhalbierenden
d) die Längen der Seitenhalbierenden (mit Rechenstab)
e) die Längen der Dreieckshöhen (mittels Hessescher Normalform)

f) die Gleichungen der Höhen
g) die Innenwinkel des Dreiecks
h) die Gleichungen der Mittellote (oder Mittelsenkrechten)
i) den Mittelpunkt und den Radius des dem Dreieck umbeschriebenen Kreises
k) die Koordinaten des Schwerpunktes S des Dreiecks
l) den Flächeninhalt des Dreiecks.

Anleitung: Man zeichne das Dreieck zunächst in Millimeterpapier ein und bezeichne die einzelnen Strecken mit den entsprechenden Buchstaben, z. B. $\overline{P_1P_2} = c$, $\overline{P_2P_3} = a$, $\overline{P_1P_3} = b$!

28.3.3. Gleichungen der Winkelhalbierenden zweier Geraden

Zwei einander schneidende Geraden besitzen zwei Winkelhalbierende. Diese stehen aufeinander senkrecht.
Die Gleichungen für die beiden Winkelhalbierenden w_1 und w_2 lassen sich aufstellen, wenn man von der allgemeinen Definition der Winkelhalbierenden ausgeht.

Definition

Die Halbierende eines Winkels ist die Menge aller Punkte einer Ebene, die von den Schenkeln des Winkels gleichen Abstand haben.

Es gilt also, eine Gleichung aufzustellen, die für jeden Punkt $P(x; y)$ der Halbierenden identisch erfüllt wird. Dabei ist die jeweilige Lage von $P(x; y)$ zu den Schenkeln und zum Ursprung zu beachten. (Siehe die Kriterien von 28.2.)
Die beiden einander schneidenden Geraden sollen durch die allgemeine Form

$$g_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0$$
$$g_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

gegeben sein.
Weiter soll vorausgesetzt sein, daß die Gerade g_2 den größeren Anstiegswinkel besitzt, d. h.

$$\alpha_2 > \alpha_1.$$

Ferner sei $P(x; y)$ der variable Punkt von w_1 bzw. w_2 (Bild 148).

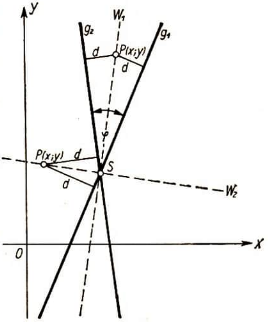


Bild 148

Die Herleitungen der Gleichungen lauten dann

für w_1:
Lt. Definition ist $|d_1| = |d_2|$
Für g_1 liegt P auf derselben Seite wie der Ursprung. Nach 28.2., Fall 2 ist also $d_1 < 0$.
Für g_2 liegt P auf der anderen Seite wie der Ursprung. Es ist (28.2., Fall 1)

$$d_2 > 0.$$

für w_2:
Lt. Definition ist $|d_1| = |d_2|$
Für g_1 und g_2 liegt in diesem Falle P auf derselben Seite wie der Ursprung. Nach 28.2., Fall 2 ist somit $d_1 < 0$ und auch $d_2 < 0$.

Folglich gilt für w_1:

$$-d_1 = d_2$$

oder

$$d_1 + d_2 = 0.$$

Folglich gilt für w_2:

$$d_1 = d_2$$

oder

$$d_1 - d_2 = 0.$$

d_1 und d_2 können mittels Formel (115) bestimmt werden.
Es gilt demnach:

$$w_1:\quad \frac{A_1x + B_1y + C_1}{\mp\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} + \frac{A_2x + B_2y + C_2}{\mp\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} = 0$$

$$w_2:\quad \frac{A_1x + B_1y + C_1}{\mp\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} - \frac{A_2x + B_2y + C_2}{\mp\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} = 0.$$

Da *alle* Glieder der linken Seiten dieser beiden Gleichungen im Nenner das aus der HESSEschen Normalform herrührende doppelte Vorzeichen besitzen und die rechten Seiten jeweils *Null* sind, braucht hier die Vorzeichenfestlegung nach (115) nicht zu erfolgen.

Gleichungen der Winkelhalbierenden zweier Geraden

$$\boxed{w_{1;2}:\quad \frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} \pm \frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} = 0} \qquad (117)$$

Folgen g_1, w_1, g_2 und w_2 im positiven Drehsinn aufeinander, gilt in Formel (117) das Vorzeichen $+$ für w_1, das Vorzeichen $-$ für w_2.
Bei der Aufstellung der Gleichungen der Winkelhalbierenden eines Vielecks gelangt man am schnellsten zu der richtigen Gleichung, wenn man sich zu Beginn der Rechnung eine Analysisfigur entwirft.

BEISPIEL

1. Wie lauten die Gleichungen der Winkelhalbierenden w_1 und w_2 für die Geraden:

$$g_1:\quad x - 2y - 1 = 0$$
$$g_2:\quad 19x + 20y - 76 = 0?$$

Lösung: Nach (117) ist:

$$w_{1;2}:\quad \frac{x - 2y - 1}{\sqrt{5}} \pm \frac{19x + 20y - 76}{\sqrt{761}} = 0.$$

Vom Rechenstab liest man ab:

$$\sqrt{761} = 27{,}6 \quad \text{und} \quad \sqrt{5} = 2{,}24.$$

Somit ergibt sich:

$$w_1:\quad 27{,}6(x - 2y - 1) + 2{,}24(19x + 20y - 76) = 0.$$

Die Gleichung lautet demnach in der Normalform:

$$\underline{\underline{w_1:\quad y = 6{,}75x - 19{,}0.}}$$

$$w_2:\quad 27{,}6x - 55{,}2y - 27{,}6 - 42{,}56x - 44{,}8y + 170{,}24 = 0$$

oder in der Normalform geschrieben:

$$\underline{\underline{w_2:\quad y = -0{,}15x + 1{,}43.}}$$

(Als Probe seien die Geraden und die Winkelhalbierenden auf Millimeterpapier gezeichnet.)

AUFGABEN

790. Wie lauten die Gleichungen der Winkelhalbierenden folgender einander schneidender Geraden:

a) g_1: $9x - 12y - 7 = 0$
g_2: $3x + 4y + 5 = 0$

b) g_1: $7x + y - 32 = 0$
g_2: $x + y - 2 = 0$

c) g_1: $3y - x + 2 = 0$
g_2: $y - 3x + 2 = 0$

d) g_1: $2x - 7y + 14 = 0$
g_2: $2x + 7y = 0$?

Zeichnen Sie nach der analytischen Berechnung die beiden Geraden und ihre Winkelhalbierenden?

791. Ein Dreieck habe die Eckpunkte $A(-1;\ 0{,}5)$, $B\left(\frac{5}{4};\ -\frac{1}{4}\right)$ und $C(0;\ 3{,}5)$. Es sind zu bestimmen:

a) die Gleichungen der Seiten dieses Dreiecks
b) die Gleichungen der 3 Winkelhalbierenden
c) der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden
d) der Radius des dem Dreieck einbeschriebenen Kreises.

Die Ergebnisse sind durch Zeichnung nachzuprüfen.

29. Parallelverschiebung und Drehung eines rechtwinkligen Koordinatensystems

Die Gleichung einer Kurve ist nicht nur von ihrer Form, sondern auch von der Lage abhängig, die die Kurve bezüglich des zugrunde gelegten Koordinatensystems besitzt. Bei bestimmten speziellen Lagen gestaltet sich die Kurvengleichung einfacher als bei anderen Lagen. Man geht deshalb bei der analytischen Untersuchung von Kurven häufig von einem bereits gegebenen Koordinatensystem zu einem anderen, günstiger gelegenen System über. Den Übergang von einem System zu einem anderen bezeichnet man als **Koordinatentransformation**. Dieser Übergang ist stets in zwei Schritten möglich. Das gegebene System läßt sich durch eine **Parallelverschiebung** und durch eine **Drehung** um seinen Ursprung in jede beliebige andere Lage bezüglich der Kurve überführen.

29.1. Parallelverschiebung des Systems

Nach Bild 149 sind ein $x;y$-System mit dem Ursprung O und ein $\xi;\eta$-System mit dem Ursprung O' gegeben. Die entsprechenden Achsen beider Systeme sind zueinander parallel, und O' besitze im $x;y$-System die Koordinaten a und b. Das $x;y$-System läßt sich also durch eine Parallelverschiebung in Richtung der x-Achse um die Strecke a und durch eine Parallelverschiebung in Richtung der y-Achse um die Strecke b in das $\xi;\eta$-System überführen. Es sollen x und y als alte, ξ und η als neue Koordinaten bezeichnet werden. Den Zusammenhang zwischen beiden Koordinatensystemen, d. h. die **Transformationsgleichungen der Parallelverschiebung**, liest man aus Bild 149 ab:

$$\boxed{\begin{aligned} \xi &= x - a \\ \eta &= y - b \end{aligned}} \tag{118}$$

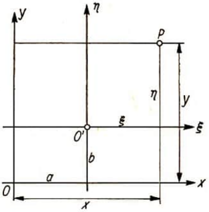


Bild 149

Nach (118) lassen sich für einen gegebenen Punkt aus den alten Koordinaten die neuen Koordinaten berechnen. Soll aber die Gleichung $F(x; y) = 0$ einer Kurve im neuen System dargestellt werden, dann ist (118) nach den alten Koordinaten aufzulösen

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \xi + a \\ y &= \eta + b \end{aligned}} \tag{119}$$

und diese Werte sind in die gegebene Kurvengleichung einzusetzen. Mit $F(\xi + a; \eta + b) = 0$ ergibt sich die Kurvengleichung in den neuen Koordinaten.

BEISPIELE

1. Wie lauten die Koordinaten der folgenden Punkte im $\xi; \eta$-System $O'(3; 2)$, die im ursprünglichen System $O(0; 0)$ die Werte $P_1(6; 3)$, $P_2(1; 4)$, $P_3(2; 1)$, $P_4(-1; 3)$, $P_5\left(-\frac{3}{4}; \frac{1}{2}\right)$ haben.

   Lösung: Mittels Formel (118) ist:

   $$\xi = x - a = x - 3$$
   $$\eta = y - b = y - 2.$$

   Man zeichne beide Koordinatensysteme und überzeuge sich von der Lage dieser 5 Punkte.

alt	neu
$P_1\ (6; 3)$	$P_1'\ (3; 1)$
$P_2\ (1; 4)$	$P_2'\ (-2; 2)$
$P_3\ (2; 1)$	$P_3'\ (-1; -1)$
$P_4\ (-1; 3)$	$P_4'\ (-4; 1)$
$P_5\left(-\frac{3}{4}; \frac{1}{2}\right)$	$P_5'\left(-\frac{15}{4}; -\frac{3}{2}\right)$

2. Es ist die Gleichung der Geraden

   $$y = -3x + 5$$

   aufzustellen, wenn die Gerade auf ein parallel zum alten System gelegenes neues System $(\xi; \eta)$ mit dem Ursprung $O'(-2; 3)$ bezogen ist.

   Lösung: Mittels Formel (119) wird

   $$x = \xi + a = \xi - 2$$
   $$y = \eta + b = \eta + 3.$$

   Durch Einsetzen dieser beiden Transformationsgleichungen in die gegebene Geradengleichung erhält man:

   $$\eta + 3 = -3(\xi - 2) + 5$$
   $$\eta + 3 = -3\xi + 11$$

   und schließlich

   $$\underline{\underline{\eta = -3\xi + 8.}}$$

29.2. Drehung des Systems um den Winkel φ

Die beiden Koordinatensysteme sollen einen gemeinsamen Ursprung, aber keine parallelen Achsen haben. φ sei der Winkel, um den das $x;y$-System im positiven Sinn gedreht werden muß, um mit dem $\xi;\eta$-System zusammenzufallen. In Bild 150 sind die Koordinaten eines Punktes in beiden Systemen eingezeichnet und das Lot von A auf $\overline{PQ}$ bis B gefällt. Es ist Winkel $APQ = \varphi$. Nach Bild 150 folgt

$$x = \overline{OQ} = \overline{OR} - \overline{QR} = \overline{OR} - \overline{BA}$$
$$y = \overline{PQ} = \overline{PB} + \overline{BQ} = \overline{PB} + \overline{AR}$$

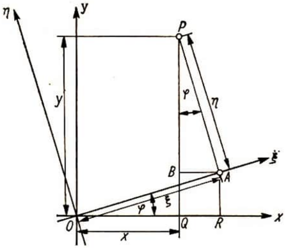


Bild 150

und man erhält für die

Transformationsgleichungen der Drehung

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \xi \cos\varphi - \eta \sin\varphi \\ y &= \xi \sin\varphi + \eta \cos\varphi \end{aligned}} \qquad (120)$$

Anmerkung: In dieser Gleichung stehen rechts die neuen, links die alten Koordinaten. Entsprechend (119) kann man (120) verwenden, um eine Kurvengleichung $F(x;\, y) = 0$ auf die Form $G(\xi;\eta) = 0$ zu bringen. Für die Berechnung der Koordinaten $\xi;\eta$ einzelner Punkte aus deren Koordinaten $x;y$ ist (120) nach ξ und η aufzulösen:

$$\xi = x \cos\varphi - y \sin\varphi$$
$$\eta = -x \sin\varphi - y \cos\varphi .$$

Einfacher ist es aber, entsprechend (120) zu schreiben

$$\overrightarrow{\xi = x} \cos\varphi' - y \sin\varphi'$$
$$\eta = x \sin\varphi' + y \cos\varphi',$$

wobei φ' jetzt der positiv gemessene Drehwinkel von der ξ-Achse zur x-Achse ist (formal durch einen Pfeil angegeben). Unter Beachtung dieser Wahl des Drehwinkels kann man also unabhängig von der Bezeichnung der Achsen stets die Gleichungen (120) verwenden.

Die Formeln (120) gelten auch für den Fall, daß φ ein negativer oder stumpfer Winkel ist oder daß P in einem anderen Quadranten liegt.

BEISPIELE

1. Es liege vor die Gleichung einer Geraden in der Normalform

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{3}\, x + \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

Zu ermitteln ist die Gleichung derselben Geraden, bezogen auf ein Koordinatensystem, das durch Drehung um (-30°) aus dem ursprünglichen $x;y$-System entsteht.

Lösung: Nach (120) ist:

$$x = \xi \cos(-30^\circ) - \eta \sin(-30^\circ) = \xi \cos 30^\circ + \eta \sin 30^\circ$$
$$y = \xi \sin(-30^\circ) + \eta \cos(-30^\circ) = -\xi \sin 30^\circ + \eta \cos 30^\circ$$

oder

$$x = \xi \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\eta = \frac{1}{2}(\xi\sqrt{3} + \eta)$$
$$y = -\frac{1}{2}(\xi - \eta\sqrt{3}).$$

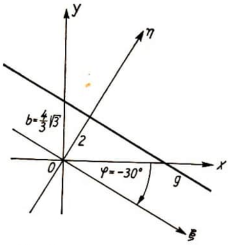


Bild 151

Diese Transformationen sind in die gegebene Geradengleichung einzusetzen.

$$-\frac{1}{2}\xi + \frac{\sqrt{3}}{2}\eta = -\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{1}{2}\xi\sqrt{3} - $$
$$-\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{1}{2}\eta + \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

Die Glieder mit ξ lassen sich streichen. Dann bleibt:

$$\eta\cdot\frac{4\sqrt{3}}{6} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

d. h.,

$$\underline{\underline{\eta = 2.}}$$

Im neuen $\xi;\eta$-System verläuft die Gerade parallel zur ξ-Achse im Abstand 2 (Bild 151).

2. Die Gerade $y = 3x + 5$ soll auf ein um 45° gedrehtes Koordinatensystem mit dem Mittelpunkt $O'(-3;\ 2)$ bezogen werden. Wie lautet die Gleichung der Geraden bezüglich des neuen $\xi';\eta'$-Systems?

Lösung: Da der Mittelpunkt des gedrehten Systems nicht mit dem Ursprung des alten $x;y$-Systems zusammenfällt, sind in diesem Falle zwei Transformationen, nämlich eine Parallelverschiebung und eine Drehung des Koordinatensystems, erforderlich.

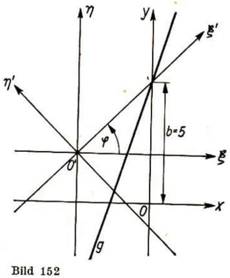


Bild 152

Für die Parallelverschiebung ist nach Formel (119):

$$\begin{aligned} x &= \xi + a = \xi - 3 \\ y &= \eta + b = \eta + 2. \end{aligned} \qquad \text{(I)}$$

Für die Drehung gilt nach Formel (120):

$$\begin{aligned} \xi &= \xi' \cos\varphi - \eta' \sin\varphi \\ \eta &= \xi' \sin\varphi + \eta' \cos\varphi. \end{aligned} \qquad \text{(II)}$$

Da die Drehung um den Punkt O' des parallel verschobenen Systems mit den Achsen ξ und η stattfindet, muß hier auf der linken Seite statt x und y ξ und η gesetzt werden.

Setzt man die Werte für ξ und η von (II) noch in (I) ein, so erhält man die Transformationsgleichungen für die gegebene Gerade.

$$\begin{aligned} x &= -3 + \frac{\sqrt{2}}{2}(\xi' - \eta') \\ y &= +2 + \frac{\sqrt{2}}{2}(\xi' + \eta') \end{aligned} \qquad \text{(III)}$$

(III) wird nunmehr in die Geradengleichung

$$y = 3 \cdot x + 5$$

eingesetzt. Nach Zusammenfassung lautet die gesuchte Gleichung

$$\underline{\underline{\eta' = \frac{1}{2}\xi' - \frac{3}{2}\sqrt{2}.}}$$

Man prüfe die Lage dieser Geraden in den einzelnen Koordinatensystemen anhand Bild 152 nach.

AUFGABEN

792. Man bestimme die Koordinaten im $\xi;\eta$-System mit dem Ursprung O', der im ursprünglichen System die Koordinaten $x = -4$, $y = 3$ hat, für die Punkte

$$P_1(-4; 2); \quad P_2(5; 3); \quad P_3(0; 6); \quad P_4(2; -5); \quad P_5(-1; 7).$$

793. Welche Koordinaten haben die Punkte $P_1(3; 1)$; $P_2(-1; 2)$; $P_3(-4; 1)$ des Systems $O(0; 0)$ in einem neuen, parallel verschobenen System $O'(-2; 3)$?

794. Man bestimme die Gleichung der Geraden $y = 2x + 2$, wenn sie auf ein parallel zum alten System gelegenes System $\xi;\eta$ mit dem Ursprung $O'(-3; 2)$ bezogen werden soll.

795. Die Koordinaten der Eckpunkte eines Dreiecks sind $A(3; 4)$; $B(5; 4)$ und $C(4; 6)$. Wie müssen die Koordinaten für diese Punkte lauten für ein neues $\xi;\eta$-System, dessen Ursprung die Mitte von $\overline{AB}$ bei Parallelität der entsprechenden Achsen ist. Man ermittle ferner die Gleichungen der Dreieckseiten im alten und neuen System.

796. Welche Koordinaten haben die Eckpunkte eines Dreiecks mit den Ecken $A(-8; 3)$; $B(2; 4)$; $C(-3; -4)$ in einem neuen, zum alten parallelen System, wenn der Schwerpunkt $S(x_s; y_s)$ des Dreiecks Ursprung des neuen Systems ist?

797. Wie ändert sich die Gleichung $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 2$ bei Drehung des Koordinatensystems um $60°$?

798. Wie lautet die Gleichung der Geraden $y = \frac{x}{5} + 1$ in einem Koordinatensystem, das um den Winkel $\varphi = 42°$ gedreht ist und den Ursprung $O'\left(1; -\frac{3}{2}\right)$ hat? (Bestimmung der Funktionswerte mittels Rechenstab!)

30. Kreis

30.1. Gleichung des Kreises

Definition

Der Kreis ist die Menge aller Punkte einer Ebene, die von einem Punkt, den diese Menge nicht enthält, gleichen Abstand haben.

Um die Gleichung eines Kreises vom Radius r analytisch darzustellen, muß man eine Bedingung suchen, der die variablen Koordinaten x und y eines Punktes der Menge genügen. Denkt man sich den Mittelpunkt M des Kreises mit dem Radius r im Ursprung, und wählt man auf der Peripherie einen beliebigen Punkt $P(x; y)$, so gilt nach Bild 153 für diesen variablen Punkt die Beziehung:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

(nach dem pythagoreischen Lehrsatz).

Mittelpunktsgleichung des Kreises $\boxed{x^2 + y^2 = r^2}$ **(121)**

Die Gleichung (121) gilt für alle Lagen von P, auch dann, wenn x oder y oder beide Koordinaten negative Werte annehmen.

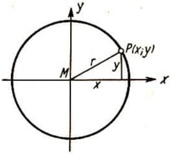


Bild 153

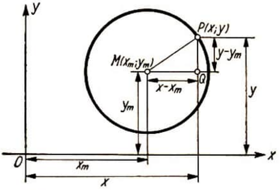


Bild 154

Schreibt man (121) explizit, so erhält man die Kurvengleichung für den Kreis in expliziter Form, also:

$$\boxed{y = \pm \sqrt{r^2 - x^2}} \qquad (121\,\mathrm{a})$$

Hieraus ist ersichtlich:

Für $x < r$ existieren zwei reelle y-Werte, die sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden. Die Kurve verläuft symmetrisch zur x-Achse.

Für $x > r$ nimmt y imaginäre Werte an. Derartige Kurvenpunkte existieren nicht in unserem reellen Koordinatensystem.

Für $x = \pm r$ ergibt sich die Ordinate $y = 0$. Die Kurve schneidet an diesen beiden Stellen die Abszissenachse.

Für $x = 0$ erhält man die Ordinatenwerte $y_{1;2} = \pm r$. Diese Punkte sind die Schnittpunkte mit der Ordinatenachse.

Die Menge aller Punkte der Ebene, die innerhalb des Kreises liegen, ist gegeben durch

$$x^2 + y^2 < r^2.$$

Für alle Punkte außerhalb des Kreises ist $x^2 + y^2 > r^2$. Ist der Kreismittelpunkt nicht im Koordinatenanfangspunkt gelegen, sondern hat er die Koordinaten x_m; y_m (Bild 154), so erhält man eine neue Gleichung.

Allgemeine Gleichung des Kreises $\boxed{(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 = r^2}$ (122)

Die Gleichung (122) stellt einen Kreis in allgemeiner Lage dar. (122) entsteht dabei durch Koordinatentransformation aus (121).
Gleichung (121) ist also ein Spezialfall von Gleichung (122). Liegt M in einem der übrigen Quadranten, so haben x_m und y_m die entsprechenden Vorzeichen.
So heißt z. B. die Gleichung des Kreises mit dem Radius $r = 4$, dessen Mittelpunkt die Koordinaten $x_m = -2$ und $y_m = 3$ hat:

$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 16.$$

Liegt M auf der x-Achse, so ist $y_m = 0$; die Kreisgleichung lautet dann:

$$(x - x_m)^2 + y^2 = r^2.$$

Liegt M auf der y-Achse, so ist $x_m = 0$; die Kreisgleichung lautet dann:

$$x^2 + (y - y_m)^2 = r^2.$$

Liegt M auf der x-Achse und geht der Kreis durch den Ursprung, so lautet die Kreisgleichung:

$$(x \pm r)^2 + y^2 = r^2$$

$$x \pm 2xr + r^2 + y^2 = r^2$$

oder

$$x^2 + y^2 \pm 2xr = 0. \tag{I}$$

Die Gleichung (I) heißt **Scheitelgleichung des Kreises** für die Berührung mit der y-Achse.
Die Scheitelgleichung für die Berührung mit der x-Achse lautet entsprechend:

$$x^2 + y^2 \pm 2ry = 0. \tag{II}$$

Das doppelte Vorzeichen des linken Gliedes deutet an, daß die Berührung der Koordinatenachsen sowohl von links als auch von rechts bzw. von unten als auch von oben erfolgen kann.
Beim Quadrieren der Gleichung (122) ergibt sich:

$$x^2 - 2x_m x + x_m^2 + y^2 - 2y_m y + y_m^2 = r^2.$$

Daraus erkennt man:

Satz

Ein Kreis wird dargestellt durch eine Gleichung zweiten Grades, die kein Glied mit xy enthält und bei x^2 und y^2 denselben Faktor hat.

Da eine Gleichung durch Multiplikation mit einem Faktor gültig bleibt, können wir die allgemeine Kreisgleichung in der Form schreiben:

$$\boxed{Ax^2 + Ay^2 + Bx + Cy + D = 0} \tag{123}$$

wobei $A \neq 0$ ist. Der Fall $A = 0$ ist ausgeschlossen, da die Gleichung dann nicht vom 2. Grade ist und keinen Kreis mehr darstellt.
Ist in Gleichung (123) $B = 0$ oder $C = 0$, so hat der Kreis seinen Mittelpunkt auf der Ordinaten- oder Abszissenachse [siehe (I) bzw. (II)]. Ist $B = C = 0$, liegt M im Ursprung. Ist $B = C = 0$ und gleichzeitig $D = 0$, dann ergibt sich $y = \pm \sqrt{-x^2}$. Das ist aber keine reelle Kurve wegen $y = \pm\, \mathrm{j}x$. Ist schließlich nur $D = 0$, verläuft der Kreis durch den Ursprung.
Für eine gegebene Gleichung (123) soll jetzt die zugehörige Kurve untersucht werden. Dividiert man die Gleichung (123) durch A, lautet sie:

$$x^2 + y^2 + \frac{B}{A}x + \frac{C}{A}y + \frac{D}{A} = 0. \tag{III}$$

Da $\frac{B}{A}$, $\frac{C}{A}$ und $\frac{D}{A}$ als Quotienten ebenfalls Konstanten sind, läßt sich die Gleichung in der vereinfachten Form angeben:

$$x^2 + y^2 + mx + ny + k = 0. \tag{IV}$$

Durch quadratische Ergänzung der x- und y-Glieder geht die Gleichung (IV) über in:

$$x^2 + mx + \frac{m^2}{4} + y^2 + ny + \frac{n^2}{4} = \frac{m^2 + n^2}{4} - k$$

oder

$$\left(x + \frac{m}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{n}{2}\right)^2 = \frac{m^2 + n^2 - 4k}{4}. \tag{V}$$

Das ist die Gleichung eines Kreises in allgemeiner Lage, sofern $m^2 + n^2 > 4k$ ist. Sein Mittelpunkt ist $M\left(-\frac{m}{2}; -\frac{n}{2}\right)$ und sein Radius $r = \frac{1}{2}\sqrt{m^2 + n^2 - 4k}$.
Die Diskriminante $m^2 + n^2 - 4k$ ist also ausschlaggebend, ob die Gleichung (V) einen Kreis mit reellem oder imaginärem Radius wiedergibt.
(V) läßt die *Umkehrung des Satzes* über die Darstellung eines Kreises zu, so daß ausgesagt werden kann:

> Liegt eine Gleichung vom 2. Grade in x und y vor, in der die Koeffizienten der quadratischen Glieder einander gleich sind und das Glied mit xy fehlt, so stellt diese Gleichung einen Kreis dar und kann auf die Form (122) gebracht werden, sofern $m^2 + n^2 > 4k$ ist.

BEISPIELE

1. Die Gleichung eines Kreises lautet:

$$x^2 + y^2 + 4x + 6y - 12 = 0.$$

Es sind der Mittelpunkt M und der Radius r dieses Kreises zu ermitteln.

Lösung: Die gegebene Gleichung wird mittels quadratischer Ergänzung auf die Form (122) gebracht.

$$(x^2 + 4x + 4) + (y^2 + 6y + 9) - 12 = 4 + 9 = 13$$

oder

$$(x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 25.$$

Hieraus ergibt sich: $r = 5$ und $M(-2; -3)$. Der Mittelpunkt dieses Kreises liegt also im 3. Quadranten.

2. Wie lautet die Gleichung des Kreises, der durch den Punkt $P_1\ (-\sqrt{2}; 0)$ geht und die beiden Geraden

$$g_1\colon\ x - y + 2 = 0$$

und

$$g_2\colon\ 17x - 7y - 26 = 0$$

berührt?

Lösung: Dieses Beispiel zeigt einen Fall, der eine gründliche Vorüberlegung erfordert. Ratsam ist es stets, in solchen Fällen mit einer Analysisfigur sich den Aufgabentext optisch klarzulegen. Dabei wird die Figur für einen ganz allgemeinen Fall angelegt.

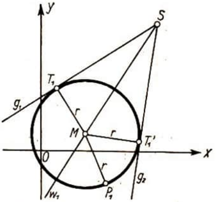


Bild 155

Analysisfigur: Aus Bild 155 ist ersichtlich, daß:

1. $M(x_m; y_m)$ auf der Winkelhalbierenden w_1 des Schnittwinkels von g_1 und g_2 und daß P_1 innerhalb dieses Schnittwinkels liegen.
2. Die Lote von M auf g_1 und g_2 haben die gleiche Länge. (Die Winkelhalbierende enthält ja die Menge aller Punkte der Ebene, die alle der Bedingung unterworfen sind, daß sie von den Schenkeln des Winkels stets beide den gleichen Abstand haben.)
3. Der Kreis, der in allgemeiner Lage angenommen wird, geht durch P_1; also ist P_1 als Peripheriepunkt ein Element der den Kreis darstellenden Punktmenge der Ebene.

Das sind 3 Bedingungen, die analytisch formuliert werden müssen.

Die Gleichung der Winkelhalbierenden ist nach (117)

$$w_1\colon\quad \frac{x - y + 2}{\sqrt{2}} + \frac{17x - 7y - 26}{13 \cdot \sqrt{2}} = 0$$

und somit

$$w_1\colon\quad y = \frac{3}{2}\,x.$$

Die Länge des Lotes von M auf g_1 ist:

$$|r| = \frac{x_m - y_m + 2}{\sqrt{2}}.$$

Wenn $P_1(x_1; y_1)$ auf dem gesuchten Kreis liegt, so müssen die Koordinaten von P_1 die Kreisgleichung befriedigen.

Es muß gelten:

$$(x_1 - x_m)^2 + (y_1 - y_m)^2 = r^2.$$

Auf die vorgeschriebenen Größen bezogen, ergeben sich also die 3 Bedingungsgleichungen:

$$\left| \begin{aligned} y_m &= \frac{3}{2} x_m && \text{(VI)} \\ (x_m - y_m + 2)^2 &= 2r^2 && \text{(VII)} \\ (-\sqrt{2} - x_m)^2 + (0 - y_m)^2 &= r^2. && \text{(VIII)} \end{aligned} \right|$$

Aus diesem Gleichungssystem mit 3 Unbekannten lassen sich x_m, y_m und r bestimmen. Durch Ausquadrieren bzw. Umstellen der Glieder erhält man:

$$\left| \begin{aligned} y_m &= \frac{3}{2} x_m && \text{(IX)} \\ x_m^2 + y_m^2 + 4x_m - 4y_m - 2x_m y_m + 4 &= 2r^2 && \text{(X)} \\ x_m^2 + y_m^2 + 2\sqrt{2}\, x_m \qquad\qquad + 2 &= r^2 && \text{(XI)} \end{aligned} \right|$$

Multipliziert man (XI) mit dem Faktor 2 und subtrahiert man (XI) von (X), so ergibt sich:

$$-x_m^2 - y_m^2 + 4x_m(1 - \sqrt{2}) - 4y_m - 2x_m y_m = 0.$$

Diese Gleichung (-1) multipliziert und für $y_m = \frac{3}{2} x_m$ gesetzt, liefert die quadratische Gleichung:

$$25x_m^2 + 8x_m(1 - 2\sqrt{2}) = 0$$

oder

$$x_m(25x_m + 8 \cdot 3{,}828) = 0.$$

Daraus ergibt sich:

$$\begin{aligned} x_{m1} &= 0 \quad \text{und} \quad y_{m1} = 0 \\ x_{m2} &= -1{,}225 \approx -1{,}2 \\ y_{m2} &= -1{,}838 \approx -1{,}8. \end{aligned}$$

Die quadratische Gleichung besagt, daß es zwei Wurzeln gibt, daß also zwei Kreise existieren müssen, die die gestellte Forderung erfüllen.
Die gesuchten Radien ergeben sich durch Einsetzen der Mittelpunktskoordinaten in (VII).

$$|r_1| = \frac{0 - 0 + 2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \approx 1{,}41$$

$$|r_2| = \frac{-1{,}2 + 1.8 + 2}{\sqrt{2}} = 1{,}3 \cdot \sqrt{2} \approx 1{,}84.$$

Die beiden Kreise k_1 und k_2 haben somit die Gleichungen:

$$k_1\colon\ \underline{\underline{x^2 + y^2 = 2}} \quad \text{und} \quad k_2\colon\ \underline{\underline{(x + 1{,}2)^2 + (y + 1{,}8)^2 = 3{,}39}}.$$

Analytische Probe: Werden die beiden Geraden mit den Kreisen zum Schnitt gebracht, so ergeben sich für die Abszissen der Schnittpunkte Doppelwurzeln. Das bedeutet aber, daß die Geraden die Kreise berühren.

$$T_1(-1;\ 1);\quad T_1'\left(\frac{17}{13};\ -\frac{7}{13}\right);\ T_2\left(-\frac{5}{2};\ -\frac{1}{2}\right);\ T_2'\left(+\frac{1}{2};\ -\frac{5}{2}\right).$$

Konstruktive Lösung dieser Aufgabe

Neben dem rein analytischen Weg kann man die Mittelpunkte und die Radien der beiden Kreise k_1 und k_2 auch geometrisch ermitteln mit Hilfe des Sekanten-Tangentensatzes (vgl. El. math. 23.3.).
Der Tangentenabschnitt ist die mittlere Proportionale zwischen der ganzen Sekante und ihrem äußeren Abschnitt.
Bei der Konstruktion der Kreise zeichnet man zunächst die Winkelhalbierende w_1 (Bild 156).

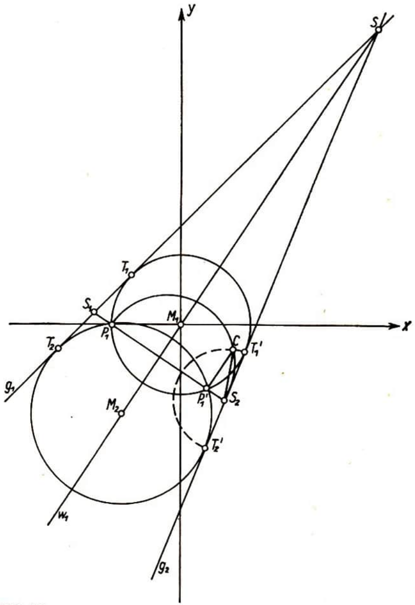


Bild 156

Weiter fällt man von P_1 auf w_1 das Lot und verlängert es bis zum Schnittpunkt S_2 mit g_2. Auf dieser Verlängerung wird der Spiegelpunkt P_1' angegeben. Der Schnittpunkt des in P_1' auf $\overline{P_1 P_1'}$ errichteten Lotes mit dem THALESkreis zu $\overline{P_1 S_2}$ sei C. Dann stellt $\overline{CS_2}$ die mittlere Proportionale zu $\overline{P_1 S_2}$ und $\overline{P_1' S_2}$ dar. Der Kreis mit $\overline{CS_2}$ um S_2 schneidet die Gerade g_2 in den gesuchten Tangentialpunkten T_1' und T_2'. Auf gleiche Art lassen sich die Berührungspunkte T_1 und T_2 der Geraden g_1 mit den Kreisen k_1 und k_2 konstruieren. Die Mittelpunkte M_1 und M_2 sind schließlich Schnittpunkte der auf g_1 und g_2 in den Tangentialpunkten errichteten Lote mit der Winkelhalbierenden w_1.
(Man zeichne die beiden Geraden und P_1 einmal selbst in Millimeterpapier ein und führe die Konstruktion sauber durch!)

AUFGABEN

799. Wie lautet die Gleichung des Kreises, der den Radius $r = 6$ und den Mittelpunkt $M(-3; 4)$ hat?

800. Wie groß sind Mittelpunkt und Radius des Kreises

$$x^2 + (y - 5)^2 = 3\,?$$

801. Es sind Radius und Mittelpunkt folgender Kreise zu bestimmen:

a) $x^2 + y^2 - 8x - 10y + 32 = 0$

b) $2x^2 + 2y^2 + 24x - 10y = 0$

c) $x^2 + y^2 - 8x = 9$

d) $x^2 + y^2 + 10y = 0$

e) $x^2 + y^2 + 14x - 10y + 48 = 0$

f) $9x^2 + 9y^2 - 9x - 6y - 53 = 0$.

802. Es soll die Gleichung des Kreises aufgestellt werden, der den Mittelpunkt $M(15; 8)$ besitzt und durch den Ursprung verläuft.

803. Wie lautet die Gleichung des Kreises, der den Mittelpunkt $M(-8; 6)$ hat und durch den Punkt $P(-5; 2)$ geht?

804. Man ermittle die Gleichung des Kreises, auf dem der Punkt $P(-2; 4)$ liegt und der die y-Achse im Punkte $T(0; 8)$ berührt.

805. Ein Kreis soll beide Koordinatenachsen berühren und außerdem durch den Punkt $P(1; 2)$ verlaufen. Wie lautet die Gleichung dieses Kreises?

806. Ein Kreis, dessen Mittelpunkt auf der Geraden $y = 3x - 19$ liegt, soll durch die Punkte $P_1(11; 2)$ und $P_2(7; -2)$ hindurchgehen. Wo liegt der Kreismittelpunkt und welches ist der Radius dieses Kreises?

807. Wie lautet die Gleichung des Kreises, der durch die Punkte $P_1(25; 10)$, $P_2(-10; 15)$ und $P_3(29; 2)$ hindurchgeht?

808. Die Peripheriepunkte eines Kreises seien $A(17; 12)$, $B(-7; -6)$ und $C(14; -9)$. Man bestimme die Koordinaten des Kreismittelpunktes sowie den Radius.

809. Ein Kreis berührt die y-Achse und die Gerade $y = -\dfrac{3}{4}x + 11$ und geht durch den Punkt $P(10; 1)$. Wie lautet die Kreisgleichung?

810. Es soll die Gleichung des Kreises aufgestellt werden, der die x-Achse in $T(3; 0)$ berührt und auf der y-Achse die Sehne $s = 2$ Längeneinheiten abschneidet.

30.2. Kreis und Gerade

Bei Betrachtung des Kreises k und einer Geraden g zeigt sich, daß beide 3 verschiedene Lagen zueinander haben können.

a) Die Gerade schneidet den Kreis, ist also eine Sekante und hat mit ihm 2 Punkte gemeinsam: $k \cap g = \{P_1; P_2\}$.

b) Die Gerade berührt den Kreis, ist also Tangente und hat mit ihm einen Punkt gemeinsam: $k \cap g = \{P_0\}$.

c) Die Gerade schneidet oder berührt den Kreis überhaupt nicht und hat infolgedessen mit ihm keinen Punkt gemeinsam: $k \cap g = \varnothing$.

Zur Untersuchung dieser 3 Möglichkeiten sei die Gerade mit dem Kreis zum Schnitt gebracht. Sind Schnittpunkte vorhanden, müssen ihre Koordinaten sowohl die Gleichung der Geraden als auch die des Kreises erfüllen. Beide Gleichungen können also als ein Gleichungssystem hingeschrieben werden.

$$x_i^2 + y_i^2 = r^2 \tag{I}$$

$$y_i = mx_i + b \qquad (i = 1, 2, \ldots) \tag{II}$$

Der Kreis ist dabei in Mittelpunktslage angenommen. Durch Einsetzen von (II) in (I) ergibt sich:

$$x_i^2 + (mx_i + b)^2 = r^2$$

oder

$$x_i^2 + m^2x_i^2 + 2mbx_i + b^2 - r^2 = 0$$

$$x_i^2 + \frac{2mb}{1 + m^2}\,x_i + \frac{b^2 - r^2}{1 + m^2} = 0.$$

Da eine quadratische Gleichung zwei Wurzeln hat, ergeben sich allgemein zwei Werte x_1 und x_2 bzw. y_1 und y_2.
Es ist

$$x_1 = \frac{-mb + \sqrt{r^2(1 + m^2) - b^2}}{1 + m^2}, \quad y_1 = \frac{b + m\sqrt{r^2(1 + m^2) - b^2}}{1 + m^2};$$

$$x_2 = \frac{-mb - \sqrt{r^2(1 + m^2) - b^2}}{1 + m^2}, \quad y_2 = \frac{b - m\sqrt{r^2(1 + m^2) - b^2}}{1 + m^2}.$$

Den Radikanden $r^2(1 + m^2) - b^2$ bezeichnet man als *Diskriminante* Δ.

$$\Delta = r^2(1 + m^2) - b^2$$

Für die Beschaffenheit dieser 2 Lösungspaare ist der Ausdruck unter der Wurzel ausschlaggebend. Es kann sein:

$$\Delta \gtreqless 0.$$

a) Ist $\Delta > 0$, so erhält man zwei reelle, voneinander verschiedene Lösungen. Die Gerade schneidet den Kreis (Fall der Sekante).

b) Ist $\Delta = 0$, so sind die Werte von x_1 und x_2 bzw. y_1 und y_2 reell und einander gleich. Die Schnittpunkte fallen zusammen, d. h., die Gerade berührt den Kreis im Punkt $P_1 = P_2 = P_0$ (Fall der Tangente). Die Koordinaten des Berührungspunktes sind dann:

$$x_0 = \frac{-mb}{1+m^2} \quad \text{und} \quad y_0 = \frac{b}{1+m^2}.$$

Den Anstieg m der Tangente im Kurvenpunkt P_0 erhält man durch Division der beiden Ausdrücke:

$$m = -\frac{x_0}{y_0}.$$

c) Ist $\Delta < 0$, so sind die Werte von x_1 und x_2 bzw. y_1 und y_2 komplex. Es existiert also kein reeller Schnittpunkt. Die Gerade liegt völlig außerhalb des Kreises.

Geometrische Betrachtung:

Da $m = \tan\alpha$, wobei α der Winkel ist, den die Gerade $y = mx + b$ mit der positiven x-Achse bildet, so folgt:

$$r^2(1+m^2) = r^2(1+\tan^2\alpha) = \\ = \frac{r^2}{\cos^2\alpha}.$$

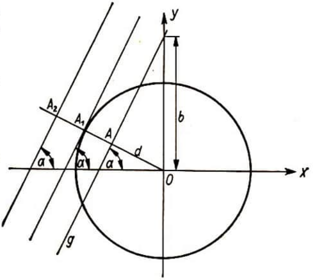


Bild 157

Mithin können die 3 Bedingungen folgendermaßen geschrieben werden:

$$\frac{r^2}{\cos^2\alpha} - b^2 \gtreqless 0$$

oder

$$\left|\frac{r}{\cos\alpha}\right| \gtreqless |b|$$

oder

$$r \gtreqless |b\cos\alpha|.$$

Fällt man vom Ursprung das Lot $OA = d$ auf die Gerade g (Bild 157), ist

$$d = |b\cos\alpha|.$$

Mithin lautet die Bedingung dafür, daß die Gerade den Kreis entweder in zwei Punkten schneidet oder in einem Punkte berührt oder keinen Punkt mit dem Kreis gemeinsam hat:

$$r \gtreqless d.$$

Dieses Ergebnis ist aus der Elementargeometrie bekannt.

AUFGABEN

811. In welchen Punkten schneidet die Gerade $x - y = 4$ den Kreis $x^2 + y^2 = 250$?

812. Man berechne die Schnittpunkte der Geraden $2x + 3y - 21 = 0$ mit dem Kreis $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 50 = 0$.

813. In welchen Punkten schneidet der Kreis

$$x^2 + y^2 + 22x - 18y + 57 = 0$$

die Koordinatenachsen.

814. Welche Lage hat die Gerade $4x + 3y = 25$ zu dem Kreis $x^2 + y^2 = 25$?

815. Welche Lage hat die Gerade $9x - 4y + 36 = 0$ zu dem Kreis $x^2 + y^2 = 9$?

816. Ein Kreis mit der Gleichung $4x^2 + 4y^2 + 12x = 19{,}36$ wird von der Geraden $5{,}5x - 9y + 19{,}8 = 0$ geschnitten. Man bestimme mit Hilfe des Rechenstabes auf eine Dezimale die Koordinaten der beiden Schnittpunkte.

817. Ein Kreis mit dem Radius $r = 5$ berührt die Gerade $3x + 4y - 9 = 0$ im Punkt $P_0(-1; 3)$. Welche Koordinaten hat der Mittelpunkt des Kreises? (Wieviel Lösungen muß es für M geben?)

818. Ein Kreis in Mittelpunktslage berührt die Gerade $y = 1{,}33x + 4{,}16$ in einem Punkte $P_0(x_0; y_0)$. Wie groß sind der Radius r des Kreises und die Koordinaten des Berührungspunktes P_0? (Benutzung des Rechenstabes!)

819. Die Gerade $y = -\dfrac{4}{3}x + 7$ wird von einem Kreis mit dem Mittelpunkt $M(-1{,}5; 0{,}75)$ berührt. Zu bestimmen sind die Koordinaten des Tangentialpunktes und der Radius des Kreises.

820. Wie lautet die Gleichung des Kreises, der die beiden Geraden $g_1: y - 1 = 0$ und $g_2: 135x - 84y + 84 = 0$ berührt und dessen Mittelpunkt auf der Geraden $g_3: x - y + 3 = 0$ liegt?

821. Es sollen die Mittelpunkte und die Radien der beiden Kreise bestimmt werden, die die Gerade $g: 4x + 3y - 3 = 0$ berühren und gleichzeitig durch die Punkte $P_1(-2{,}99; -0{,}95)$ und $P_2(-1{,}05; 1)$ verlaufen.

a) Analytische Berechnung der Koordinaten der Mittelpunkte (Benutzung des Rechenstabes, Angabe auf eine Dezimale).

b) Konstruktive Ermittlung der Mittelpunkte (siehe hierzu Beispiel 2, S. 357.

822. In einem Kreis vom Radius r bewegt sich eine Sehne von konstanter Länge l. Es soll die Menge aller Punkte der Ebene bestimmt werden, die diese Sehne im Verhältnis $m:n$ teilen. Wie lautet die Gleichung dieser Punktmenge für den Fall, daß die Punkte gerade Mittelpunkte der Sehne sind?

823. Welche Punktmenge der Ebene hat die Eigenschaft, daß der Quotient aus den Abständen eines jeden Punktes dieser Menge von den Endpunkten einer festen Strecke $AB = 6$ cm stets denselben Wert aufweist, also konstant ist?

824. Gegeben sind eine Gerade g und ein fester Punkt P außerhalb der Geraden im Abstand a. Von P aus seien nach der Geraden Strahlen gezogen. Zu ermitteln ist die Punktmenge der Ebene, deren Punkte alle die Bedingung erfüllen, daß sie auf den Strahlen liegen und ihre Entfernung von P umgekehrt proportional dem Radiusvektor nach der Geraden g ist.

825. Eine Kreissekante dreht sich um einen außerhalb des Kreises gegebenen Punkt P. Es soll die Menge der Mittelpunkte der auf den Sekanten von dem Kreis abgeschnittenen Sehnen bestimmt werden.

826. Gegeben ist ein Kreis vom Radius $r = 4$ cm und auf seiner Peripherie ein variabler Punkt P sowie ein fester Punkt A. Zu bestimmen ist die Menge der Fußpunkte des von A auf $\overline{MP}$ jeweils gefällten Lotes.

827. In einem Dreieck mit der festen Seite $BC = a$ ist die Summe der Quadrate der beiden anderen Seiten gleich s^2. Wie lautet die Gleichung der Punktmenge für den sich bewegenden dritten Eckpunkt A? (B sei Koordinatenanfangspunkt).

828. Zu welcher Punktmenge der Ebene gehören alle Punkte, für die die Quadrate ihrer Entfernungen von den 3 Eckpunkten eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seite a eine konstante Summe s^2 haben?

30.3. Gleichung der Kreistangente

30.3.1. Gleichung der Tangente in einem Punkt des Kreises

Die Gleichung der Tangente in einem Punkt $P_0(x_0; y_0)$ des Kreises läßt sich auf verschiedene Weise herleiten.

1. Lösungsweg: (Analytische Herleitung der Tangentengleichung)

Eine Gerade hat mit einem Kreis nur einen Punkt gemeinsam, wenn die Diskriminante $\Delta = 0$ ist. Dieser Punkt ist dann der Berührungspunkt der Geraden mit dem Kreis. Seine Koordinaten lauten (vgl. 30.2):

$$x_0 = \frac{-mb}{1 + m^2} \quad \text{und} \quad y_0 = \frac{b}{1 + m^2}. \tag{I}$$

Durch Kombination der beiden Gleichungen läßt sich m durch die Koordinaten x_0 und y_0 ausdrücken; nämlich:

$$\frac{-x_0(1 + m^2)}{m} = y_0(1 + m^2)$$

und somit

$$m = -\frac{x_0}{y_0}. \tag{II}$$

Damit kennt man den Anstieg der Geraden, die Tangente an den Kreis im Punkt $P_0(x_0; y_0)$ ist. Mithin läßt sich die Tangentengleichung mittels der Punktrichtungsgleichung aufstellen.

Es ist

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = m = -\frac{x_0}{y_0}.$$

Durch Umformung erhält man:

$$yy_0 - y_0^2 = -xx_0 + x_0^2$$

oder

$$xx_0 + yy_0 = x_0^2 + y_0^2.$$

Da P_0 auf dem Kreis liegt, müssen seine Koordinaten die Kreisgleichung erfüllen. Es muß also sein:

$$x_0^2 + y_0^2 = r^2.$$

Demnach lautet die zum Kreispunkt $P_0(x_0; y_0)$ bei Lage des Mittelpunktes M im Ursprung gehörige

Gleichung der Kreistangente

$$\boxed{xx_0 + yy_0 = r^2} \qquad (124)$$

2. Lösungsweg: Sind m_r der Anstieg des Berührungsradius und m_t derjenige der Tangente, so muß, da der Kreisradius senkrecht auf der Tangente steht,

$$m_t = -\frac{1}{m_r}$$

sein.

Wegen $m_r = \tan\varphi$ ist also:

$$m_t = -\frac{1}{\tan\varphi}.$$

Aus Bild (158) ist ersichtlich, daß

$$\tan\varphi = \frac{y_0}{x_0}.$$

Mithin ist

$$m_t = -\frac{x_0}{y_0}.$$

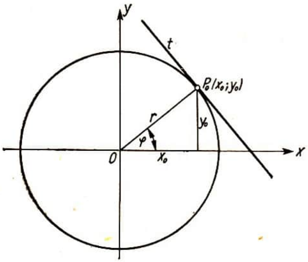


Bild 158

Das ergab sich auch rein analytisch aus der Diskriminantendiskussion für den Fall $\Delta = 0$.
Setzt man den Berührungspunkt $P_0(x_0; y_0)$ als bekannt voraus, so läßt sich wieder (wie bei Weg 1) mittels der Punktrichtungsgleichung die Tangentengleichung aufstellen.

Die Gleichung der Kreistangente kann auch mit Hilfe der Differentialrechnung aufgestellt werden. Dieser 3. Weg wird im Teil Differentialrechnung (vgl. Band „Analysis", Abschnitt 4.) aufgezeigt.

Liegt ein Kreis in allgemeiner Lage $(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 = r^2$ vor, so findet man die Gleichung der Kreistangente dadurch, daß man durch den Mittelpunkt M ein neues ξ, η-Koordinatensystem legt, dessen Achsen zu denen des alten Systems parallel verlaufen. Dann lautet die Gleichung des Kreises in dem neuen System:

$$\xi^2 + \eta^2 = r^2.$$

Sind ξ_0 und η_0 die Koordinaten des gegebenen Berührungspunktes der Tangente in bezug auf das ξ,η-System, so lautet die Tangentengleichung im neuen System:

$$\xi\xi_0 + \eta\eta_0 = r^2.$$

Aus Bild (159) sieht man, daß

$$\xi = x - x_m \quad \text{und} \quad \xi_0 = x_0 - x_m,$$
$$\eta = y - y_m \quad \text{und} \quad \eta_0 = y_0 - y_m.$$

Werden diese Werte für ξ und η bzw. ξ_0 und η_0 in die Tangentengleichung eingesetzt, so erhält man, bezogen auf das alte $x;y$-System:

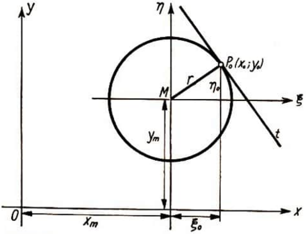


Bild 159

Gleichung der Kreistangente bei allgemeiner Lage des Kreises

$$\boxed{(x - x_m)(x_0 - x_m) + (y - y_m)(y_0 - y_m) = r^2} \tag{125}$$

BEISPIEL

An den Kreis $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 = 0$ werden in den Punkten P_1 und P_2 mit der Abszisse $x_{1;2} = +2$ die Tangenten gezogen.
Wie lauten die Gleichungen dieser Tangenten?

Lösung: Da die Kreisgleichung in allgemeiner Form vorliegt, wird sie zunächst auf die Form (122) transformiert.

$$(x^2 - 6x + 9) + (y^2 - 2y + 1) + 6 = 0 + 9 + 1$$
$$(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 4.$$

Aus dieser Gleichung ist ersichtlich, daß der Radius des Kreises $r = 2$ ist und der Mittelpunkt M die Koordinaten $x_m = 3, y_m = 1$ besitzt.
Da von den Berührungspunkten P_1 und P_2 nur die Abszisse angegeben ist, muß die Ordinate erst berechnet werden. Dies geschieht, indem man den Abszissenwert $x_{1;2} = 2$ in die gegebene Kreisgleichung einsetzt. Dadurch erhält man eine quadratische Gleichung für y, die die beiden Ordinaten y_1 und y_2 liefert. Für $x = 2$ ergibt sich:

$$4 + y^2 - 12 - 2y + 6 = 0$$
$$y_{1;2} = 1 \pm \sqrt{3}.$$

Unter Anwendung von Formel (125) ist dann:

$$(x - 3)(2 - 3) + (y - 1)(1 + \sqrt{3} - 1) = 4$$

$$\underline{\underline{y = \frac{\sqrt{3}}{3}\,x + \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}}.}}$$

Das ist die Gleichung der Tangente in $P_1(2; 1 + \sqrt{3})$.
Ferner erhält man:

$$(x - 3)(2 - 3) + (y - 1)(1 - \sqrt{3} - 1) = 4$$

$$\underline{\underline{y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{1 - \sqrt{3}}{\sqrt{3}}.}}$$

Das ist die Gleichung der Tangente in $P_2(2; 1 - \sqrt{3})$.

30.3.2. Gleichungen der Tangenten von einem Punkt an den Kreis

Da man von einem Punkt $P_0(x_0; y_0)$ an den Kreis $x^2 + y^2 = r^2$ zwei Tangenten legen kann, ist es zunächst erforderlich, daß man die unbekannten Berührungspunkte $P_1(x_1; y_1)$ und $P_2(x_2; y_2)$ ermittelt (Bild 160).

Die beiden Tangentengleichungen in P_1 und P_2 werden lauten:

$$\begin{aligned} xx_1 + yy_1 &= r^2 \\ xx_2 + yy_2 &= r^2. \end{aligned} \qquad \text{(I)}$$

Da der Punkt P_0 auf beiden Tangenten liegt, müssen seine Koordinaten die Gleichungen erfüllen.

Es muß demnach gelten:

$$\begin{aligned} x_0x_1 + y_0y_1 &= r^2 \\ x_0x_2 + y_0y_2 &= r^2. \end{aligned} \qquad \text{(II)}$$

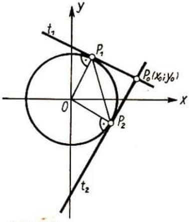


Bild 160

Eine Gleichung von der Gestalt $x_0x + y_0y = r^2$ wird befriedigt durch die Koordinaten von P_1 und P_2, was aus den Gleichungen (II) hervorgeht. Da durch zwei Punkte eine — und nur eine — Gerade gelegt werden kann, muß die Gleichung $xx_0 + yy_0 = r^2$ die Gleichung der durch P_1 und P_2 gelegten Geraden sein. Man bezeichnet die zu dieser Gleichung gehörende Gerade als die *Berührungssehne* oder *Polare* zum Punkt P_0. Sie ist die Sekante des Kreises, die die beiden Berührungspunkte P_1 und P_2 miteinander verbindet.

Zu jedem Punkt P_0 außerhalb eines Kreises $x^2 + y^2 = r^2$ gehört eine Gerade $xx_0 + yy_0 = r^2$, die Polare des Poles P_0 mit der Berührungssehne P_1P_2.

Liegt P_0 auf dem Kreis selbst, so ist

$$xx_0 + yy_0 = r^2$$

zugleich Tangente und Polare.

Liegt P_0 innerhalb des Kreises, so läßt sich mit Hilfe der HESSEschen Normalform (114) feststellen, daß die Polare außerhalb des Kreises liegt. Befindet sich nämlich P_0 innerhalb des Kreises, so lautet die Gleichung der Polare in der HESSEschen Normalform:

$$\frac{xx_0 + yy_0 - r^2}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} = 0$$

oder

$$\frac{xx_0 + yy_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} - \frac{r^2}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} = 0.$$

Dabei bedeutet

$$\frac{r^2}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}$$

den Abstand der Geraden vom Ursprung, der hier zugleich Kreismittelpunkt ist. Da nun $P_0(x_0; y_0)$ innerhalb des Kreises liegt, so ist

$$\sqrt{x_0^2 + y_0^2} < r,$$

also

$$\frac{r^2}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} > r.$$

In Worten heißt das aber, die Gerade liegt außerhalb des Kreises.

BEISPIEL

Wie lauten die Gleichungen der Tangenten, die man von dem Punkt $P_0(6; 7)$ aus an den Kreis $x^2 + y^2 = 4$ legen kann?

Lösung: Zuerst wird die Gleichung der Berührungssehne aufgestellt.

$$xx_0 + yy_0 - r^2 = 0$$
$$6x + 7y - 4 = 0$$

Die Schnittpunkte dieser Geraden mit dem Kreis sind die Berührungpunkte der von P_0 an den Kreis gelegten Tangenten und werden wie folgt berechnet:

$$x^2 + y^2 = 4 \tag{III}$$
$$6x + 7y = 4 \tag{IV}$$

$$x = \frac{4 - 7y}{6}$$

In (III) eingesetzt:

$$(4 - 7y)^2 + 36y^2 = 144$$
$$85y^2 + 56y - 128 = 0$$
$$y^2 - \frac{56}{85}y - \frac{128}{85} = 0$$
$$y_{1;2} = \frac{28 \pm \sqrt{784 + 10880}}{85} = \frac{28 \pm \sqrt{11664}}{85}$$
$$y_{1;2} = \frac{28 \pm 108}{85},$$

also:

$$y_1 = \frac{8}{5}, \quad y_2 = -\frac{16}{17}.$$

Durch Einsetzen erhält man die Abszissen:

$$x_1 = -\frac{6}{5} \quad \text{und} \quad x_2 = +\frac{30}{17}.$$

Somit haben die Berührungspunkte die Koordinaten:

$$P_1\left(-\frac{6}{5};\ \frac{8}{5}\right), \quad P_2\left(\frac{30}{17};\ -\frac{16}{17}\right).$$

Setzt man schließlich diese Koordinatenwerte in die Kreistangentengleichungen

$$xx_1 + yy_1 = 4 \quad \text{und} \quad xx_2 + yy_2 = 4$$

ein, so lauten die Gleichungen der beiden gesuchten Tangenten:

$$\begin{aligned} t_1\colon\quad & -6x + 8y - 20 = 0 \\ & \underline{\underline{3x - 4y + 10 = 0}} \\ t_2\colon\quad & 30x - 16y - 68 = 0 \\ & \underline{\underline{15x - 8y - 34 = 0.}} \end{aligned}$$

Will man sich von der Richtigkeit der Gleichungen überzeugen, so braucht man die beiden Tangenten nur zum Schnitt zu bringen. Die Koordinaten des Schnittpunktes müssen wieder die des Punktes P_0 sein.

AUFGABEN

829. Wie lauten die Gleichungen der Tangenten in den Kreispunkten
a) $P_0(5; 0)$, b) $P_1(3; 4)$
an den Kreis $x^2 + y^2 = 25$?

830. Wie lauten die Gleichungen der Tangenten in den Punkten
a) $P_1(5; 12)$, b) $P_2(12; -5)$ des Kreises $x^2 + y^2 = 169$?
c) Wo schneiden einander die beiden Tangenten?
d) Welchen Winkel bilden sie miteinander?

831. An den Kreis $x^2 + y^2 + 4x + 10y - 140 = 0$ werden in den Punkten mit der Abszisse $x_1 = -7$ die Tangenten gezogen.
a) Wie lauten die beiden Tangentengleichungen?
b) Welchen Winkel schließen sie ein?

832. Es sollen die Gleichungen der beiden Tangenten an den Kreis aufgestellt werden:
a) $(x - 5)^2 + (y + 8)^2 = 113$ im Punkte $P_0(13; y_0 < 0)$
b) $(x - 7)^2 + (y - 2)^2 = 58$ im Punkte $P_0(x_0 > 0; -5)$

833. Wie lauten die Gleichungen der beiden Tangenten an den Kreis $x^2 + y^2 = 6{,}25$, die parallel zu der Geraden $4x - 3y + 6 = 0$ verlaufen?

834. Wie lauten die Gleichungen der Tangenten an den Kreis $x^2 + y^2 + 4x - 8y - 80 = 0$, die auf der Geraden $4x - 3y = 0$ senkrecht stehen?

835. Ein Kreis habe die Gleichung $x^2 + y^2 = 100$.
Man bestimme die Gleichungen der Tangenten, die sich von dem Punkt $P_0(-14; 2)$ an diesen Kreis legen lassen.

836. Vom Punkt $P_0(-4; 2)$ werden an den Kreis

$$5x^2 + 5y^2 - 20x - 60y + 136 = 0$$

die Tangenten gelegt. Wie lauten ihre Gleichungen?

837. Vom Punkte $P_0\left(\frac{22}{3}; \frac{16}{3}\right)$ sollen an den Kreis

$$x^2 + y^2 - 8x - 4y = 0$$

die Tangenten gelegt werden. Wie lauten ihre Gleichungen?

Anleitung: Ist ein Kreis in verschobener Lage gegeben, so muß er mittels Parallelverschiebung auf ein Koordinatensystem bezogen werden, das den Ursprung in seinem Mittelpunkt hat. Die Gleichung im $\xi; \eta$-System lautet dann:

$$\xi^2 + \eta^2 = r^2$$

und damit die Gleichung der Berührungssehne

$$\xi\xi_0 + \eta\eta_0 = r^2.$$

Dabei setzt man:

$$\xi = x - x_m \quad \text{und} \quad \xi_0 = x_0 - x_m$$
$$\eta = y - y_m \quad \text{und} \quad \eta_0 = y_0 - y_m$$

und erhält als Gleichung der Berührungssehne im x, y-System:

$$(x - x_m)(x_0 - x_m) + (y - y_m)(y_0 - y_m) = r^2.$$

838. Man ermittle die Gleichungen der Tangenten, die vom Punkt $P_0\left(0; -\frac{5}{2}\right)$ an den Kreis mit dem Mittelpunkt $M(-3; 0)$ und dem Radius $r = 2$ gelegt werden können. (Man benutze hierbei den Rechenstab und gebe die auftretenden Faktoren auf eine Dezimale genau an.) Zu berechnen ist der Winkel, den die beiden Tangenten miteinander bilden.

839. Zu welcher Punktmenge der Ebene gehören alle Punkte, für die der Tangentenabschnitt PT der von ihnen an den Kreis $x^2 + y^2 = r^2$ gelegten Tangente die mittlere Proportionale zu ihrer Ordinate und dem Radius des Kreises ist?

840. Ein um den Ursprung mit Radius r beschriebenener Kreis schneidet die y-Achse in B. Auf der in B an den Kreis gelegten Tangenten bewegt sich der Punkt P. Von ihm sei an den Kreis die zweite Tangente gelegt, die ihn in Q berührt. Es soll die Menge aller Höhenschnittpunkte H der Dreiecke BPQ ermittelt werden.

30.3.3. Schnittpunkte und Schnittwinkel zweier Kreise

Für die Lage zweier Kreise zueinander ergeben sich wie bei der Lage von Kreis und Gerade 3 Hauptfälle.

a) Die beiden Kreise k_1 und k_2 schneiden einander und haben somit zwei Punkte gemeinsam:

$$k_1 \cap k_2 = \{P_1; P_2\}.$$

b) Die beiden Kreise berühren einander und haben somit einen Punkt gemeinsam:

$$k_1 \cap k_2 = \{P_1\}.$$

c) Die beiden Kreise schneiden einander nicht und berühren einander auch nicht, haben somit keine Punkte gemeinsam.

$$k_1 \cap k_2 = \varnothing\,.$$

Die Bestimmung der evtl. vorhandenen Schnittpunkte beider Kreise sei an folgendem Beispiel erläutert.

BEISPIEL

1. Zu ermitteln sind die Schnittpunkte der beiden Kreise:

$$k_1\colon\quad \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = \frac{81}{4} \qquad \text{(I)}$$

$$k_2\colon\quad \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{2} \qquad \text{(II)}$$

Lösung: Es liegen zwei Kreise in allgemeiner Lage vor. Durch Ausquadrieren der Klammern sind beide Gleichungen zunächst auf die allgemeine Form zurückzuführen.

$$x^2 + y^2 + 3x - 2y - 17 = 0 \qquad \text{(III)}$$
$$x^2 + y^2 + x - y - 12 = 0 \qquad \text{(IV)}$$

Subtrahiert man diese Gleichungen voneinander, dann fallen die quadratischen Glieder weg, und es entsteht die Gleichung:

$$2x - y = 5$$

oder $\quad y = 2x - 5. \qquad$ (V)

Diese lineare Gleichung stellt eine gerade Linie dar, die als *Potenzlinie*[1]) bezeichnet wird. Durch Kombination der Gleichungen (III/V) oder (IV/V) ergeben sich die Koordinaten der fraglichen Schnittpunkte.

$$x^2 + (2x-5)^2 + 3x - 2(2x-5) - 17 = 0$$
$$5x^2 - 21x + 18 = 0$$
$$x^2 - \frac{21}{5}x + \frac{18}{5} = 0.$$

Hieraus ergibt sich:

$$\underline{\underline{x_1 = 3;}} \qquad \underline{\underline{x_2 = 1{,}2}}$$

und $\quad \underline{\underline{y_1 = 1;}} \qquad \underline{\underline{y_2 = -2{,}6.}}$

Beide Koordinatenpaare müssen die Gleichungen (I) und (II) befriedigen.

---

[1]) Die Potenzlinie steht stets senkrecht auf der Zentralen, d. h. auf der Verbindungsstrecke der beiden Kreismittelpunkte. Sie geht durch die beiden Kreisschnittpunkte, falls solche existieren

Die Berührung zweier Kreise

Ergibt sich nur ein Wert für x und y, so fallen die beiden Schnittpunkte zusammen, d. h. die Kreise berühren einander. Diese Berührung kann von innen oder von außen stattfinden. Im Falle der inneren Berührung ist der Abstand der beiden Mittelpunkte M_1 und M_2 gleich der Differenz, bei äußerer Berührung gleich der Summe der beiden Radien. Berühren zwei Kreise

$$(x - x_{m1})^2 + (y - y_{m1})^2 = r_1^2$$

und

$$(x - x_{m2})^2 + (y - y_{m2})^2 = r_2^2$$

einander, so ergeben sich die Bedingungsgleichungen für die Art der Berührung aus der Abstandsformel für zwei Punkte:

$$(x_{m1} - x_{m2})^2 + (y_{m1} - y_{m2})^2 = (r_1 - r_2)^2 \quad \text{für innere Berührung}$$
$$(x_{m1} - x_{m2})^2 + (y_{m1} - y_{m2})^2 = (r_1 + r_2)^2 \quad \text{für äußere Berührung.}$$

BEISPIEL

2. Es soll lediglich festgestellt werden, ob die beiden Kreise

$$k_1:\ x^2 + y^2 - 8x + \ 4y + 11 = 0$$
$$k_2:\ x^2 + y^2 - 2x + 12y - 27 = 0$$

einander berühren. Zufolge der vorangegangenen allgemeinen Betrachtung kann man die mögliche Berührung auch ohne Bestimmung der gemeinsamen Punkte erkennen.

Lösung: Durch quadratische Ergänzung der x- und y-Glieder ergibt sich:

$$k_1:\ (x - 4)^2 + (y + 2)^2 = \ 9$$
$$k_2:\ (x - 1)^2 + (y + 6)^2 = 64.$$

Demnach ist:

$$x_{m1} = 4;\quad y_{m1} = -2;\quad r_1 = 3$$
$$x_{m2} = 1;\quad y_{m2} = -6;\quad r_2 = 8$$

Nun bildet man:

$$(x_{m1} - x_{m1})^2 + (y_{m1} - y_{m2})^2 = (r_1 \pm r_2)^2$$
$$(4 - 1)^2 + (-2 + 6)^2 = 25 = (r_1 - r_2)^2.$$

Es liegt also eine Berührung beider Kreise von innen vor.

Unter dem *Schnittwinkel* zweier Kreise k_1 und k_2 versteht man den Winkel, den die beiden Tangenten in den Schnittpunkten miteinander bilden.

Da die Sehne zwischen den beiden Schnittpunkten P_1 und P_2 senkrecht auf $\overline{MP_0}$ steht, wobei P_0 der Schnittpunkt der Tangenten von k_1 (oder k_2) ist, so sind die Schnittwinkel bei P_1 und P_2 gleich groß.

Soll der Schnittwinkel der Geraden g mit einem Kreise k bestimmt werden, so bringt man die Gerade zunächst mit dem Kreis zum Schnitt und stellt die Tangentengleichung für den Schnittpunkt P_1 (oder P_2) auf. Dann bestimmt man den Winkel, den die Tangente mit der Geraden g bildet, nach Formel (116):

$$\tan\varphi = \frac{m_t - m_g}{1 + m_t \cdot m_g}.$$

Dabei bedeuten:

- m_t Richtungsfaktor der Tangente,
- m_g Richtungsfaktor der Geraden,
- φ den Winkel, um den die Gerade g im positiven Sinn gedreht werden muß, um mit der Tangente t zur Deckung gebracht zu werden.

BEISPIEL

3. Unter welchem Winkel schneiden die beiden Kreise einander:

$$k_1:\ x^2 + y^2 - 22x + 4y + 25 = 0$$
$$k_2:\ x^2 + y^2 - 25 = 0 \quad ?$$

Lösung: Durch Subtraktion beider Kreisgleichungen ergibt sich:

$$-22x + 4y + 50 = 0$$

oder:

$$y = \frac{11x - 25}{2} \quad \text{(Gleichung der Potenzlinie).}$$

Quadriert man diese Gleichung und setzt man

$$y^2 = \frac{(11x - 25)^2}{4}$$

in die Gleichung von k_2 ein, erhält man nach Zusammenfassung der Glieder:

$$125x^2 - 550x + 525 = 0$$

oder

$$x^2 - \frac{22}{5}x + \frac{21}{5} = 0.$$

Hieraus ergeben sich die Abszissen der beiden Schnittpunkte

$$P_1 \text{ und } P_2: \qquad x_1 = 3 \quad \text{und} \quad x_2 = 1{,}4.$$

Die zugehörigen Ordinatenwerte erhält man durch Einsetzen von x_1 und x_2 in die Gleichung von k_1 (oder auch k_2):

$$y_1 = 4 \quad \text{und} \quad y_2 = -4{,}8.$$

Nunmehr genügt es, in einem der beiden Schnittpunkte die Gleichungen der Kreistangenten aufzustellen.
Die Schnittpunkte sind: $P_1(3;4)$ und $P_2(1;4;-4{,}8)$.
Die Gleichungen der beiden Tangenten in P_1 lauten dann:

$$t_1:\ 4x - 3y = 0 \quad \text{(Tangente an Kreis } k_1\text{)}$$
$$t_2:\ 3x + 4y - 25 = 0 \quad \text{(Tangente an den Kreis } k_2\text{)}$$

Die Richtungsfaktoren sind:

$$m_1 = \frac{4}{3} \quad \text{und} \quad m_2 = -\frac{3}{4}.$$

In diesem Fall ist:

$$m_{t1} = -\frac{1}{m_{t2}}.$$

Die beiden Tangenten stehen also aufeinander senkrecht. Beide Kreise schneiden einander unter dem Winkel von 90°.
(Die Formel für $\tan\varphi$ ist hier gar nicht erforderlich.)

AUFGABEN

841. Welche Lage haben die Kreise k_1 und k_2 gegeneinander, wenn

a) k_1: $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 5 = 0$,
k_2: $x^2 + y^2 - 14x - 16y + 97 = 0$;

b) k_1: $x^2 + y^2 + 10x - 14y - 47 = 0$,
k_2: $x^2 + y^2 - 6x + 16y + 37 = 0$;

c) k_1: $x^2 + y^2 + 6x + 4y - 36 = 0$,
k_2: $x^2 + y^2 - 8x + 10y + 5 = 0$;

d) k_1: $x^2 + y^2 + 16x + 14y + 77 = 0$,
k_2: $x^2 + y^2 + 10x + 22y + 145 = 0$.

842. Unter welchem Winkel schneidet die Gerade

$$y = x \cdot \sqrt{3} - 10$$

den Kreis $x^2 + y^2 = 100$?

843. Wie groß ist der Schnittwinkel der Kreise

$$k_1:\quad 4x^2 + 4y^2 + 20x - 75 = 0$$
$$k_2:\quad 4x^2 + 4y^2 - 36x - 24y + 81 = 0 \quad ?$$

844. Die Mittelpunkte zweier Kreise mit den Radien $r_1 = 6{,}5$ cm und $r_2 = 4{,}3$ cm haben einen Abstand von 9,5 cm. Unter welchem Winkel schneiden die Kreise einander?

845. Es sollen der Mittelpunkt und der Radius eines Kreises angegeben werden, der durch die Schnittpunkte der beiden Kreise

$$k_1:\quad (x + 4{,}5)^2 + (y - 1{,}5)^2 = 13$$
$$k_2:\quad x^2 + y^2 + 3x - 3y + 0{,}5 = 0$$

und durch den Punkt $P\,(5{,}5;\, 4{,}5)$ geht.
(Rechenstabbenutzung)

846. Wie lang ist die Sehne eines Kreises in Mittelpunktslage mit dem Durchmesser $d = 5{,}6$, die durch Schnitt der Geraden mit der Gleichung $3x - 5y + 10{,}5 = 0$ gebildet wird?

847. Wie lauten die Koordinaten des Mittelpunktes eines Kreises mit dem Radius $r = 2$, der die beiden Kreise mit den Gleichungen

$$x^2 + y^2 + 2x - 6y + 3{,}75 = 0$$

und $\quad x^2 + y^2 - 11x + 17{,}29 = 0 \quad$ berührt?

848. Wo liegt der Mittelpunkt eines Kreises, der einen zweiten Kreis in den Punkten $P_1(-2;\,-3)$ und $P_2(1;\,0)$ schneidet und auf der Geraden mit der Gleichung $9x - 14y - 63 = 0$ liegen soll?
(Rechenstabbenutzung)

31. Definitionen der Kegelschnitte, Bezeichnungen

31.1. Erklärung des Begriffes „Kegelschnitt“

Nach der Geraden und dem Kreis werden drei Kurven untersucht, die für Naturwissenschaft und Technik von besonderer Bedeutung sind. Es handelt sich um die Ellipse, die Parabel und die Hyperbel. Diese drei Kurven werden auch als Kegelschnitte bezeichnet. Sie entstehen, wenn ein Doppelkegel von verschieden geneigten Ebenen geschnitten wird. Der Doppelkegel selbst sei folgendermaßen entstanden: In einer Ebene Π liege ein Kreis k und senkrecht zu Π über der Kreismitte M ein Punkt S. Die Menge aller Geraden durch S und durch die Punkte von k bilden einen Doppelkegel, der nach oben und unten unbegrenzt ist (Bild 161).

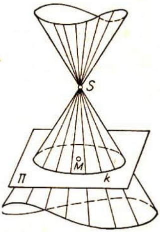


Bild 161

Die Geraden heißen Mantellinien des Kegels und schließen mit Π einen Winkel β ein. α sei der Neigungswinkel der Schnittebene E (Espilon) gegen Π. Die Art der Schnittkurve ist von der Relation zwischen α und β abhängig. Die Schnittkurve heißt für

$\alpha < \beta$ Ellipse (Bild 162),

$\alpha = \beta$ Parabel (Bild 163),

$\alpha > \beta$ Hyperbel (Bild 164).

Diese drei Gruppen enthalten einige *Sonderfälle*. Für $\alpha = 0 < \beta$ folgt der *Kreis* als Sonderfall der Ellipse. Geht die Schnittebene E durch S, dann entartet die Schnittkurve

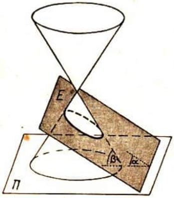


Bild 162

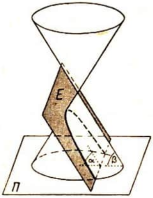


Bild 163

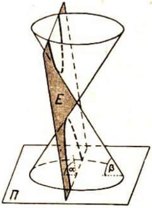


Bild 164

für $\alpha < \beta$ zu einem *Punkt*, für $\alpha = \beta$ zu einer *Geraden* (Berührungsmantellinie zwischen Kegel und E) und für $\alpha > \beta$ zu *zwei sich schneidenden Geraden*.
Aus den Erklärungen als ebene Schnitte eines Kegels folgen Eigenschaften für Ellipse, Parabel und Hyperbel als Punktmengen der Ebene, die in den folgenden Abschnitten

abgeleitet werden. In der analytischen Geometrie der Ebene werden diese Eigenschaften als Definitionen herausgestellt. Sie gestatten es, nach Einführung eines Koordinatensystems die Kurvengleichungen aufzustellen und ermöglichen damit die analytische Untersuchung der Kegelschnitte.

31.2. Ellipse

Wie Bild 162 zeigt, entsteht eine Ellipse, wenn $\alpha < \beta$ ist. Es lassen sich dann dem Kegel zwei Kugeln einbeschreiben, die die Schnittebene E in je einem Punkt F_1 bzw. F_2

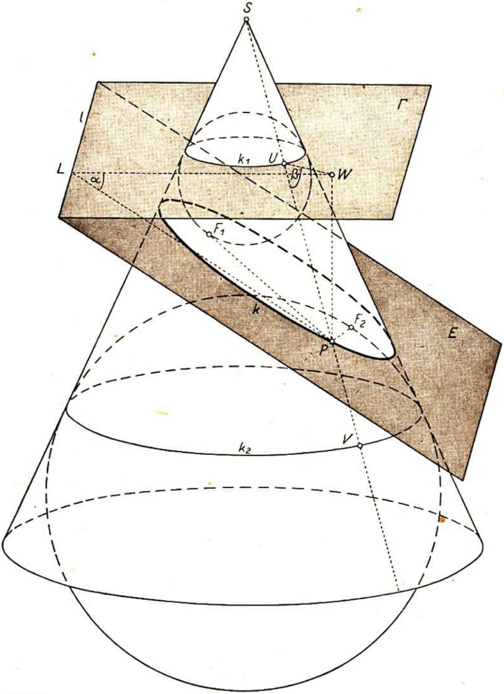


Bild 165

und den Kegel in je einem Kreis k_1 bzw. k_2 berühren (Bild 165). Man bezeichnet sie als *Dandelinsche Kugeln.*[1])
Eine beliebige Mantellinie des Kegels schneide k_1 in U, k_2 in V und die Ellipse k in einem Punkt P. Dreht sich die Mantellinie um S, dann läuft P auf der Ellipse k entlang. $\overline{PU}$ und $\overline{PF_1}$ sind Tangenten von P an die obere Kugel und entsprechend $\overline{PV}$ und $\overline{PF_2}$ Tangenten von P an die untere Kugel. Da Tangenten von einem Punkt an eine Kugel gleich lang sind, folgt:

$$\overline{PU} = \overline{PF_1} \tag{I}$$

und

$$\overline{PV} = \overline{PF_2}. \tag{II}$$

Die Ebenen der Kreise k_1 und k_2 sind parallel. Daher gilt für jede Mantellinie

$$\overline{UV} = \overline{PU} + \overline{PV} = \text{konstant}$$

oder mit (I) und (II):

$$\boxed{\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = \text{konstant}} \tag{126}$$

Die Bedingung (126) stellt eine Eigenschaft der Ellipse dar, die hier als Definition verwendet wird.

Definition

Die **Ellipse** ist die Menge aller Punkte der Ebene, für die die Summe ihrer Ab
von zwei festen Punkten konstant ist.

Die beiden festen Punkte F_1 und F_2 heißen **Brennpunkte** der Ellipse.
Erklärung der Ellipse als ebener Schnitt eines Kreiskegels ein räumli
beschränkt sich diese Definition auf Betrachtungen in der Ebene
Aus Bild 165 läßt sich noch eine weitere wichtige Eigenschaft
Durch k_1 wird eine Ebene Γ[2]) gelegt, die die Schnittebene E i
l heißt **Leitlinie** der Ellipse. Von dem beliebigen Ellipsenp
W und das Lot auf l bis L gefällt. Das rechtwinklige D
Winkel α, das rechtwinklige Dreieck PWU bei U der

Nun gilt: $\overline{PW} = \overline{PL} \cdot \sin\alpha,$

$\overline{PW} = \overline{PU} \cdot \sin\beta = \overline{PF_1} \cdot \sin\beta$ we

Durch Gleichsetzen erhält man

$$\overline{PF_1} \cdot \sin\beta = \overline{PL} \cdot \sin\alpha \quad \text{oder}$$

$$\frac{\overline{PF_1}}{\overline{PL}} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}.$$

[1]) Nach dem belgischen Mathematiker DANDELI

[2]) Γ kann auch durch k_2 gelegt werden

Dieses Verhältnis ist unabhängig von der speziellen Lage von P und wird nur durch den gewählten Kegel und die Neigung der Schnittebene E bestimmt. Es ist eine charakteristische Größe für die Form der Ellipse und wird mit ε bezeichnet:

$$\boxed{\varepsilon = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}} \qquad (127)$$

Wegen $\alpha < \beta$ ist die Konstante ε stets kleiner als eins und aus (III) folgt

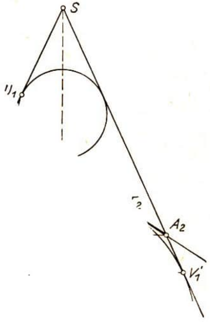
$$\boxed{\frac{\overline{PF_1}}{\overline{PL}} = \varepsilon < 1} \qquad (128)$$

Die in (128) ausgedrückte Eigenschaft lautet als

Satz

Die Ellipse ist die Menge aller Punkte der Ebene, für die das Verhältnis ihrer Abstände von einem festen Punkt und einer festen Geraden konstant, und zwar kleiner als eins ist.

Für die in (127) definierte Größe ε gibt es noch eine andere geometrische Deutung. Bild 166 stellt einen Schnitt durch den in Bild 165 gezeigten Kegel sowie die Ebene E und die Kugeln dar, und zwar liegen in dieser Schnittebene die Kegelachse und die Punkte F_1 und F_2. Bild 167 zeigt die Ellipse in der Ebene E. Allgemein setzt man



$$\overline{F_1F_2} = 2e \qquad \text{(IV)}$$

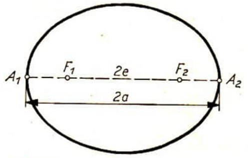


Bild 167

(V)

Fällt nun der Ellipsenpunkt P mit A_1 bzw. A_2 zusammen, dann ergibt sich nach (V)

$$\overline{A_1F_1} + \overline{A_1F_2} = 2a,$$
$$\overline{A_2F_1} + \overline{A_2F_2} = 2a$$

und addiert

$$(\overline{A_1F_1} + \overline{F_1A_2}) + (\overline{A_1F_2} + \overline{F_2A_2}) = 4a$$

oder

$$\overline{A_1A_2} + \overline{A_1A_2} = 4a,$$
$$\overline{A_1A_2} = 2a. \tag{VI}$$

Nun ist

$$\overline{A_1F_1} = \overline{A_1U_1},$$
$$\overline{A_2F_2} = \overline{A_2V_1'} = \overline{A_2'V_1},$$

und man erhält

$$\overline{A_1A_2'} = \overline{U_1V_1} - \overline{U_1A_1} - \overline{A_2'V_1} = 2a - \overline{A_1F_1} - \overline{A_2F_2} = 2e.$$

Auf das Dreieck $A_1A_2'A_2$ wird der Sinussatz angewandt und ergibt

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\overline{A_1A_2'}}{\overline{A_1A_2}} = \frac{2e}{2a} = \frac{e}{a},$$

und mit (127) folgt

$$\boxed{\varepsilon = \frac{e}{a}} \tag{129}$$

Die Definition und die Eigenschaften der Ellipse sowie der Konstanten ε werden bei der analytischen Behandlung der Ellipse angewendet.

31.3. Parabel

Wegen $\alpha = \beta$ ist die Schnittebene E parallel zu einer Mantellinie des Kegels (Bild 168). Hier kann nur eine Kugel dem Kegel einbeschrieben werden, die E in einem Punkt, dem **Brennpunkt** F, und den Kegel in einem Kreis k_1 berührt. Eine Mantellinie s durch die Kegelspitze S schneidet k_1 in U und die Schnittebene E in einem Punkt P der Schnittkurve k, d. h. in einem Parabelpunkt. Dreht sich die Mantellinie um S, dann läuft P auf der Parabel entlang. Wenn sich dabei die Mantellinie immer mehr einer zu E parallelen Lage nähert, entfernt sich P immer weiter von F. Die Parabel ist also keine im Endlichen geschlossene Kurve.

$\overline{PF}$ und $\overline{PU}$ sind Tangenten von P an die Kugel, und es gilt:

$$\overline{PF} = \overline{PU}. \tag{I}$$

k_1 bestimmt eine Ebene Γ, die E in der Geraden l, der Leitlinie der Parabel, schneidet. Das Lot von P auf Γ ergibt W und das Lot von P auf l den Punkt L. Die Dreiecke

PUW und PWL sind wegen $\alpha = \beta$ kongruent, also ist auch

$$\overline{PU} = \overline{PL}$$

und mit (I):

$$\boxed{\overline{PF} = \overline{PL}} \tag{130}$$

Diese Beziehung wird hier als Parabeldefinition verwendet.

Definition

Die **Parabel** ist die Menge aller Punkte der Ebene, deren Abstände von einer festen Geraden und einem festen Punkt gleich sind.

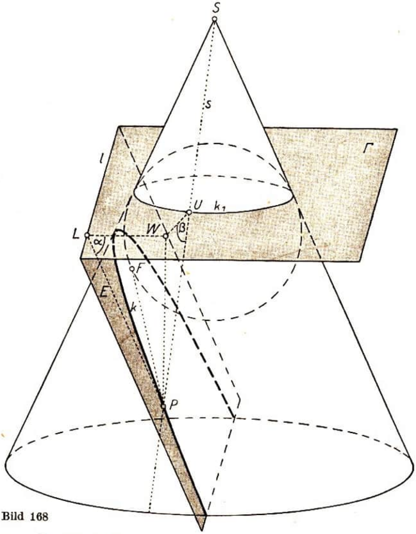


Bild 168

Bezeichnet man das Verhältnis der Abstände wieder mit ε, dann erhält man analog zur Formel (128) der Ellipse

$$\boxed{\frac{\overline{PF}}{\overline{PL}} = \varepsilon = 1} \tag{131}$$

31.4. Hyperbel

Für $\alpha > \beta$ erhält man eine in Bild 169 angegebene Lage der Schnittebene E. Wie bei der Ellipse lassen sich 2 Kugeln in den Kegel legen, die E in den **Brennpunkten** F_1 und F_2 und den Kegel in den Kreisen k_1 und k_2 berühren. Eine Mantellinie s durch S ergibt die Schnittpunkte U und V mit k_1 bzw. k_2 und den Hyperbelpunkt P als Schnittpunkt mit E. Bei einer vollständigen Drehung der Mantellinie um S beschreibt P

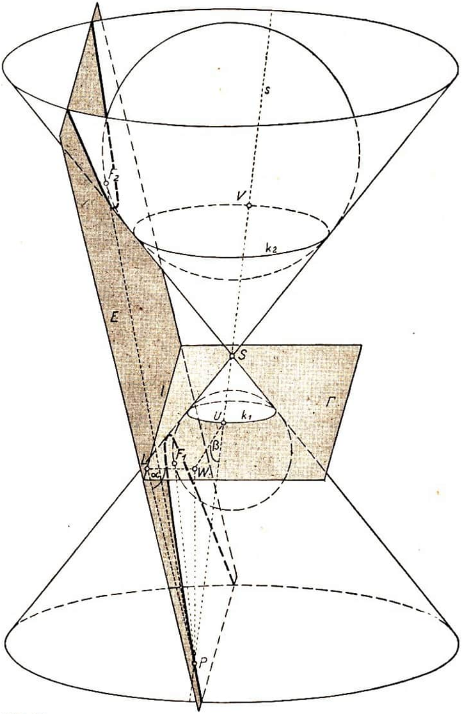


Bild 169

zwei getrennte Äste. Dabei nimmt die Mantellinie zweimal eine zu E parallele Lage ein, für die es im Endlichen keinen Kurvenpunkt gibt. Beim Durchgang durch eine dieser Lagen wechselt P von einem Ast zum anderen über. Der Leser verfolge selbst den Weg von P bei einer Drehung der Mantellinie.
Für die Tangenten von P an die Kugeln gilt

$$\overline{PU} = \overline{PF_1}$$
$$\overline{PV} = \overline{PF_2},$$

und da die Kreise k_1 und k_2 parallel sind, also

$$\overline{UV} = \overline{PV} - \overline{PU} = \text{konstant}$$

ist, erhält man

$$\boxed{\overline{PF_2} - \overline{PF_1} = \text{konstant}} \tag{132}$$

Definition

Die **Hyperbel** ist die Menge aller Punkte der Ebene, für die die Differenz ihrer Abstände von zwei festen Punkten konstant ist.

Eine Ebene Γ durch k_1 schneide E in l[1]). Das Lot von P auf Γ ergebe W, und das Lot von W auf l ergebe L. Dann folgt

$$\overline{PW} = \overline{PL} \cdot \sin\alpha$$
$$\overline{PW} = \overline{PU} \cdot \sin\beta = \overline{PF_1} \cdot \sin\beta$$

oder

$$\overline{PL} \cdot \sin\alpha = \overline{PF_1} \cdot \sin\beta$$
$$\frac{\overline{PF_1}}{\overline{PL}} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}.$$

Dieses konstante Verhältnis wird wieder gleich ε gesetzt und ist wegen $\alpha > \beta$ größer als eins:

$$\boxed{\frac{\overline{PF_1}}{\overline{PL}} = \varepsilon > 1} \tag{133}$$

Wie bei der Ellipse gibt man der Konstanten in (132) den Wert $2a$ und setzt außerdem $\overline{F_1F_2} = 2e$ (Bild 170). Dann lassen sich wieder die Beziehungen

$$\overline{A_1A_2} = 2a \tag{I}$$

und

$$\varepsilon = \frac{e}{a} \tag{II}$$

nachweisen.

---

[1]) Γ kann auch durch k_2 gelegt werden

Durch Zusammenfassung der Gleichungen (128), (131) und (133) ergibt sich der

Satz

Ein Kegelschnitt ist die Menge aller Punkte der Ebene, deren Abstände von einer festen Geraden (Leitlinie) und einem festen Punkt (Brennpunkt) ein konstantes Verhältnis besitzen. Der Kegelschnitt ist für

$\varepsilon < 1$ eine Ellipse,

$\varepsilon = 1$ eine Parabel,

$\varepsilon > 1$ eine Hyperbel.

Die Kegelschnitte sind also durch den Abstand zwischen Leitlinie und Brennpunkt und durch die Größe ε eindeutig bestimmt. Legt man den Abstand zwischen Leitlinie und Brennpunkt fest, dann kann man ε noch beliebig wählen. Den unendlich vielen Werten von ε entspricht eine Schar von unendlich vielen Ellipsen und eine Schar von unendlich vielen Hyperbeln, aber nur eine

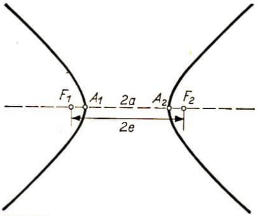


Bild 170

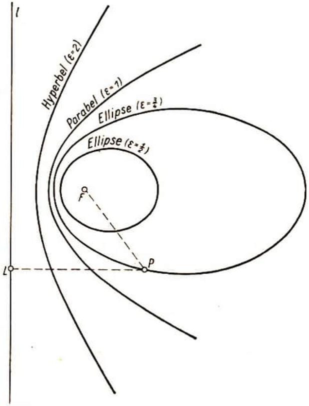


Bild 171

Parabel. Diese trennt beide Kurvenscharen. Bild 171 zeigt derartige Kegelschnitte mit gemeinsamer Leitlinie und einem gemeinsamen Brennpunkt.
Umgekehrt kann ein bestimmter Wert für ε festgehalten und der Abstand zwischen Brennpunkt und Leitlinie variiert werden. Ist z. B. $\varepsilon < 1$, dann erhält man eine Schar von Ellipsen, von denen sich nachweisen läßt, daß sie einander ähnlich sind. Das gleiche gilt für eine Schar von Hyperbeln mit dem gemeinsamen Wert $\varepsilon > 1$. Für die Parabel darf nur $\varepsilon = 1$ sein. Hier kann gezeigt werden, daß *alle* Parabeln einander ähnlich sind. Sie lassen sich also durch Vergrößern oder Verkleinern (etwa mit einem fotografischen Vergrößerungsgerät) zur Deckung bringen.

AUFGABE

849. Man beweise die Beziehungen (I) und (II) aus 31.4. (Hierzu zeichne man für $\alpha > \beta$ einen Vertikalschnitt durch den Kegel analog zu Bild 166.)

32. Parabel

32.1. Definition und Konstruktion

In 31.3. wurde aus der Erklärung der Parabel als Kegelschnitt die folgende Definition abgeleitet:

Die **Parabel** ist die Menge aller Punkte der Ebene, deren Abstände von einer festen Geraden und von einem festen Punkt gleich sind.

Die feste Gerade wird **Leitlinie** (Direktrix), der feste Punkt **Brennpunkt** (Fokus) genannt. Eine Parabel ist durch den Abstand des Brennpunktes F von der Leitlinie l eindeutig bestimmt. Dieser Abstand wird als **Halbparameter**[1]) p bezeichnet (Bild 172). Das Lot PL von einem beliebigen Parabelpunkt P auf die Leitlinie heißt **Leitstrahl**, die Strecke PF Brennstrahl dieses Punktes. Der Menge der Parabelpunkte kann die Gleichung $\overline{PL} = \overline{PF}$ zugeordnet werden.

Aus der Definition folgt unmittelbar eine *Konstruktion* für die Parabel:

Zu einem vorgegebenen Halbparameter p werden zunächst l und F und anschließend eine Schar von Parallelen zu l gezeichnet (Bild 173). Wählt man nun eine der Parallelen aus, nimmt ihren Abstand d von der Leitlinie in den Zirkel und schlägt mit d um F einen Kreisbogen, dann schneidet dieser die Parallele in zwei Parabelpunkten, falls $d > \frac{p}{2}$ ist. Für $d = \frac{p}{2}$ führt die Konstruktion nur zu einem Berührungspunkt. Ist $d < \frac{p}{2}$, so gibt es keine Parabelpunkte. Der Berührungspunkt, der also den Abstand p zwischen Brennpunkt und Leitlinie halbiert, wird **Scheitelpunkt** S, die Strecke $SF = \frac{p}{2} = f$ *Brennweite* der Parabel ge-

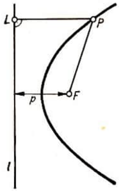


Bild 172

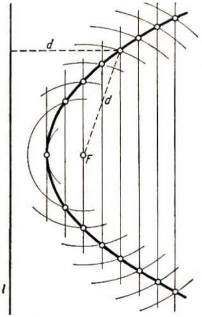


Bild 173

1) Der hier verwendete Begriff „Parameter“ ist von dem Begriff „Parameter = Hilfsvariable“ aus 26.3.2. zu unterscheiden

nannt (Bild 174). Der Scheitelpunkt liegt von allen Parabelpunkten der Leitlinie am nächsten. Die durch den Scheitelpunkt parallel zur Leitlinie gezogene Gerade berührt daher die Parabel und heißt **Scheiteltangente**. Die Parabel ist in S am stärksten gekrümmt[1]). Wie die Konstruktion veranschaulicht, liegt die Parabel symmetrisch zu der Geraden SF, die deshalb als **Parabelachse** bezeichnet wird.

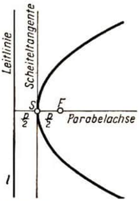


Bild 174

32.2. Scheitelgleichungen

Die Gleichung für die Parabel soll zunächst unter Verwendung cartesischer Koordinaten aufgestellt werden. Eine einfache Kurvengleichung ergibt sich durch geschickt gewählte Lage des Koordinatensystems. Der Koordinatenursprung liege im Scheitelpunkt, die x-Achse falle mit der Parabelachse zusammen (Bild 175). Damit wird die Symmetrie der Parabel ausgenützt. Die y-Achse ist Scheiteltangente. Ist $P(x; y)$ ein variabler Punkt der Parabel, dann gilt für Brenn- und Leitstrahl:

$$\overline{PF} = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$$

$$\overline{PL} = x + \frac{p}{2}.$$

Aus der Definitionsgleichung $\overline{PF} = \overline{PL}$ folgt

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}$$

$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}.$$

Scheitelgleichung der Parabel

$$\boxed{y^2 = 2px} \qquad (134)$$

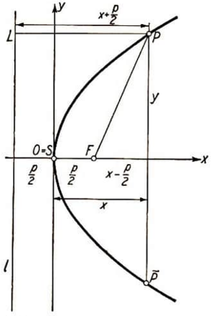


Bild 175

Durch die Kurvengleichung (134) sind auch die verschiedenen geometrischen Eigenschaften der Parabel erfaßt, und es ist die Aufgabe der folgenden Abschnitte, einige dieser Eigenschaften auf analytischem Weg mit Hilfe der Kurvengleichung zu erhalten. Grundlegendes über die Gestalt der Parabel, das man teilweise auch schon aus der angeführten Konstruktion erkennt, liefert die

Diskussion der Scheitelgleichung

Die Scheitelgleichung enthält als einzige Konstante den Halbparameter p. Dieser bestimmt allein die Parabel.

[1]) Krümmung (vgl. Band „Analysis“, Abschnitt 13.)

Der Halbparameter sei stets positiv. Aus $y^2 \geqq 0$ folgt also $x \geqq 0$, d. h., die Punkte der zu (134) gehörenden Parabel liegen nur im I. und IV. Quadranten.
Aus (134) folgt

$$y = \pm \sqrt{2px}. \tag{I}$$

Zu jedem Wert $x > 0$ gilt es zwei y-Werte, die sich nur um das Vorzeichen unterscheiden. Das drückt die bereits bei der Konstruktion erkannte Symmetrie der Parabel bezüglich der x-Achse als Parabelachse aus.
Betrachtet man einen Parabelpunkt $P(x; y)$, $y > 0$ im I. Quadranten und läßt x unbegrenzt größer werden, dann wird auch y unbegrenzt größer, d. h., für $x \to \infty$ folgt $y \to \infty$. Schwierigkeiten können sich aus dem Bild der Kurve ergeben. Wegen des immer geringer werdenden Zuwachses der Ordinaten könnte man annehmen, daß sich die Parabel einer Parallelen zur x-Achse nähert. Das ist aber nicht der Fall. Wählt man einen beliebig großen Wert für y, dann gibt es hierzu nach (134) stets einen Wert $x = y^2 : 2p$, so daß $P(x; y)$ ein Parabelpunkt ist. Das heißt aber, jede Parallele zur x-Achse, möge sie auch beliebig weit von ihr entfernt sein, wird von der Parabel geschnitten.

Für $x = \frac{p}{2}$ wird $y = \pm p$. Nennt man das Stück einer die Parabel schneidenden Geraden, das zwischen den Schnittpunkten liegt, in Analogie zum Kreise eine Sehne, dann folgt:

> Die Parabelsehne, die im Brennpunkt auf der x-Achse senkrecht steht, ist gleich dem Parameter $2p$.

Mit Hilfe der fünf Punkte $P_1(0:0)$, $P_{2;3}\left(\frac{p}{2}; \pm p\right)$, $P_{4;5}(2p; \pm 2p)$ läßt sich die Parabel schnell und annähernd genau skizzieren (Bild 176). Es soll untersucht werden, welche Parabel die Gleichung

$$\boxed{y^2 = -2px} \tag{135}$$

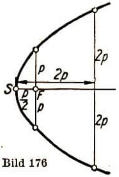


Bild 176

besitzt. Wegen $y^2 \geqq 0$ muß auch die rechte Seite der Gleichung stets positiv sein. Aus der Voraussetzung $p > 0$ folgt daher $x \leqq 0$. Zur Gleichung (135) gehört also eine in Bild 177 gezeigte nach links geöffnete Parabel. Vertauschung der Koordinaten x und y in (134) und (135) führt zu den Gleichungen

$$\boxed{x^2 = 2py} \tag{136}$$

und

$$\boxed{x^2 + -2py} \tag{137}$$

Jeweils zugehörige nach oben bzw. nach unten geöffnete Parabeln zeigen die Bilder 178 und 179.
Die Gleichungen (136) und (137) haben zusammengefaßt die Form

$$y = ax^2 \quad \text{mit} \quad a = \pm \frac{1}{2p}.$$

Entsprechend kann man (134) und (135) in der Form

$$x = cy^2 \quad \text{mit} \quad c = \pm \frac{1}{2p}$$

schreiben.

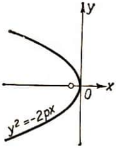


Bild 177

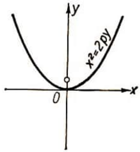


Bild 178

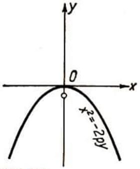


Bild 179

BEISPIEL

1. Ein an zwei Punkten A, B befestigtes und frei durchhängendes Seil hat näherungsweise die Form einer nach oben geöffneten quadratischen Parabel. C sei der tiefste Punkt des Seiles, l die Spannweite und h die Pfeilhöhe (Bild 180). Wie heißt die Scheitelgleichung der Parabel?

   Lösung:

   Wählt man $O = C$ und legt die x-Achse parallel zu $\overline{AB}$, dann heißt die Gleichung allgemein

   $$x^2 = 2py.$$

   Die Koordinaten $x_a = -\frac{l}{2}$, $y_a = h$ des Punktes A müssen die Parabelgleichung erfüllen. Das ergibt

   $$\frac{l^2}{4} = 2ph \quad \text{bzw.} \quad 2p = \frac{l^2}{4h}$$

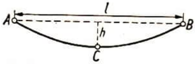


Bild 180

und als Scheitelgleichung folgt:

$$x^2 = \frac{l^2}{4h} y \quad \text{bzw.} \quad \underline{\underline{y = \frac{4h}{l^2} x^2}}.$$

AUFGABEN

850. Es sind Parabeln mit den Halbparametern $p = 0{,}5$ cm, 1 cm, 3 cm und 5 cm zu konstruieren.

851. Man zeichne mit Hilfe von Wertetabellen die folgenden, durch ihre Scheitelgleichungen gegebenen Parabeln:

a) $y^2 = \frac{3}{2}x$ b) $y^2 = 4x$ c) $y^2 = -3x$

d) $y = x^2$ e) $x^2 = -5y$

852. Es ist graphisch und rechnerisch festzustellen, welche von den Punkten $P_1(4;4)$, $P_2(1;-2)$, $P_3(9;6)$, $P_4\left(\frac{1}{2}; -\frac{7}{5}\right)$, $P_5\left(6; \frac{25}{9}\right)$, $P_6\left(\frac{9}{5}; \frac{6}{25}\right)$ auf den folgenden Parabeln liegen:

$$k_1\colon\ y^2 = 4x, \qquad k_2\colon\ x^2 = \frac{27}{2}y, \qquad k_3\colon\ x^2 = -\frac{1}{2}y.$$

853. Welche Koordinaten haben die Brennpunkte der folgenden Parabeln:

a) $y^2 = 10x$ b) $x^2 = -16y$ c) $y^2 + 0{,}8x = 0$

d) $y = 0{,}5x^2$ e) $4y^2 + 20x = 0$ f) $\frac{2}{3}y - \frac{1}{6}x^2 = 0$?

854. a) Eine Parabel geht durch den Punkt $P_1(9;6)$, ihr Scheitelpunkt liegt in O und ihre Achse fällt mit der x-Achse zusammen. Wie heißt die Scheitelgleichung?

Desgleichen b) $P_1\left(-\frac{5}{8}; \frac{5}{2}\right)$ c) $P_1(2{,}75; -1{,}42)$

855. a) Eine Parabel geht durch den Punkt $P_1\left(-1; \frac{1}{4}\right)$, ihr Scheitelpunkt liegt in O und ihre Achse fällt mit der y-Achse zusammen. Wie heißt die Scheitelgleichung?

Desgleichen b) $P_1(1{,}20; -0{,}24)$ c) $P_1(3{,}34; 7{,}25)$

856. Eine Parabel geht durch den Punkt $P_1\left(-\frac{3}{2}; \frac{5}{4}\right)$, ihr Scheitelpunkt liegt in O und ihre Achse fällt mit einer Koordinatenachse zusammen. Wie heißt die Scheitelgleichung?

857. Welchen Abstand d hat der Brennpunkt der Parabel

$y = 0{,}125x^2$ von dem Kreis $x^2 + y^2 - 10x + 20y + 116 = 0$?

858. Um ein gleichseitiges Dreieck mit der Seite a ist eine Parabel zu legen, deren Scheitelpunkt in einer Ecke des Dreieckes liegt. Wie groß ist der Halbparameter p?

859. In ein gegebenes Trapez (Bild 181) ist eine Parabel zu legen, die durch die Punkte C und D geht und deren Scheitelpunkt S auf $\overline{AB}$ liegt. Man berechne $\overline{AS}$.

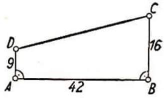


Bild 181

860. Man beweise die folgende *Konstruktion*:
Von einer Parabel sind der Scheitelpunkt S, die Parabelachse und ein Parabelpunkt P_1 gegeben. Man zeichne eine beliebige Parallele g zur Parabelachse. Die Parallele g schneidet $\overline{SP_1}$ in R. Die Senkrechte zu g durch R schneidet die Parallele zu g durch P_1 in Q. Dann ist der Schnittpunkt P_2 zwischen SQ und g ein weiterer Parabelpunkt.

32.3. Allgemeine Parabelgleichungen

Die Lage der Parabel gegenüber dem Koordinatensystem wird jetzt verallgemeinert. Die Parabelachse soll noch parallel zu einer Koordinatenachse liegen, aber der Scheitelpunkt S muß nicht mehr mit dem Ursprung zusammenfallen. Er kann beliebige Koordinaten x_s und y_s besitzen.
Man legt dann, wie es in Bild 182 für die nach rechts geöffnete Parabel angegeben ist, durch S ein neues Koordinatensystem mit den Achsen x' und y' parallel zur x- bzw. y-Achse.

In diesem hat die Parabel die Gleichung:

$$y'^2 = 2px'. \qquad \text{(I)}$$

Durch die Gleichungen

$$x' = x - x_s$$
$$y' = y - y_s$$

ist der Übergang zum x,y-System gegeben, und man erhält

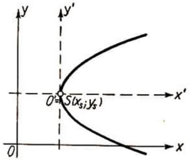


Bild 182

$$\boxed{(y - y_s)^2 = 2p(x - x_s)} \qquad (138)$$

Analog ergeben sich für die nach links; oben oder unten geöffneten Parabeln mit allgemeiner Lage des Scheitelpunktes die Gleichungen

$$\boxed{(y - y_s)^2 = -2p(x - x_s)} \qquad (139)$$

$$\boxed{(x - x_s)^2 = 2p(y - y_s)} \qquad (140)$$

$$\boxed{(x - x_s)^2 = -2p(y - y_s)} \qquad (141)$$

Aus den Gleichungen (138) bzw. (139) erhält man durch Ausmultiplizieren der Klammern und Auflösen nach x [das obere Vorzeichen folgt aus (138), das untere aus (139)]:

$$x = \pm \frac{y_s^2 \pm 2px_s}{2p} \mp \frac{y_s}{p} y \pm \frac{1}{2p} y^2$$

oder mit allgemeinen Koeffizienten

$$\boxed{x = a_0 + a_1 y + a_2 y^2} \qquad (142)$$

Aus (140) bzw. (141) folgt entsprechend

$$\boxed{y = b_0 + b_1 x + b_2 x^2} \qquad (143)$$

Aus den letzten beiden Formeln ergibt sich die Parabel als Bild der ganzen rationalen Funktion 2. Grades. Jede der Gleichungen enthält drei Konstanten. Eine Parabel, deren Achse parallel zu einer Koordinatenachse ist, wird daher durch die Angabe von drei Punkten eindeutig bestimmt.

Noch allgemeinere Parabelgleichungen folgen aus (142) und (143) durch Multiplikation mit einem beliebigen Faktor in der Form

$$Ay^2 + Bx + Cy + D = 0 \qquad \text{(II)}$$
$$Ax^2 + Bx + Cy + D = 0. \qquad \text{(III)}$$

In (142) und (II) liegt die Parabelachse parallel zur x-Achse, in (143) und (III) parallel zur y-Achse. In jeder Gleichung kommt nur eine Veränderliche in der zweiten Potenz vor.

BEISPIELE

1. Eine Parabel geht durch die drei Punkte $P_1(0; -2)$, $P_2(3; {}^1/_2)$, $P_3(-12; -2)$ und hat eine zur y-Achse parallele Achse. Man bestimme die Koordinaten des Scheitelpunktes und des Brennpunktes.

   Lösung: Wegen der vorgeschriebenen Lage der Parabelachse verwendet man die Gleichung (143)
   $$y = b_0 + b_1 x + b_2 x^2.$$
   Die Koordinaten von jedem der drei Punkte müssen die Gleichung erfüllen:
   $$-2 = b_0$$
   $$\frac{1}{2} = b_0 + 3b_1 + 9b_2$$
   $$-2 = b_0 - 12b_1 + 144b_2.$$
   Aus diesem Gleichungssystem lassen sich die Konstanten b_0, b_1, b_2 berechnen:
   $$b_0 = -2, \quad b_1 = \frac{2}{3}, \quad b_2 = \frac{1}{18}.$$
   Die Gleichung der Parabel lautet
   $$y = -2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{18}x^2.$$
   Zur Ermittlung der Scheitelpunktkoordinaten und des Parameters ist die Gleichung auf eine der Formen (140) bzw. (141) zu bringen. Nach der Multiplikation mit 18 und dem Ordnen folgt:
   $$x^2 + 12x = 18y + 36.$$
   Durch Addition von 36 auf beiden Seiten der Gleichung wird die linke Seite zum Binom ergänzt:
   $$x^2 + 12x + 36 = 18y + 72$$
   $$(x + 6)^2 = 18(y + 4).$$
   Der Scheitelpunkt ist $S(-6; -4)$, der Halbparameter $p = 9$. Die Parabel ist nach oben geöffnet. Damit ergibt sich für den Brennpunkt $F(-6; {}^1/_2)$.

2. Ein parabolischer Brückenbogen hat die Spannweite $l = 32$ m und die Pfeilhöhe $h = 6$ m. In Abständen von je 4 m sind Vertikalstäbe angebracht. Man berechne deren Längen.

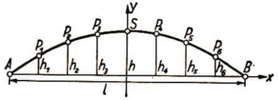


Bild 183

   Lösung: Die x-Achse wird durch die Auflagepunkte A und B gelegt, die y-Achse durch den Scheitelpunkt S (Bild 183). Die Parabel ist nach unten geöffnet und hat die Gleichung
   $$x^2 = -2p(y - 6).$$

Da $A(-16; 0)$ auf der Parabel liegt, gilt

$$256 = 12p \quad \text{oder} \quad 2p = \frac{128}{3}.$$

Die Parabelgleichung lautet

$$x^2 = -\frac{128}{3}(y-6) \quad \text{bzw.} \quad y = 6 - \frac{3}{128}x^2.$$

Für $x_1 = -12$ und $x_6 = 12$ erhält man $y_1 = y_6 = \frac{21}{8}$.

Für $x_2 = -\ 8$ und $x_5 = \ 8$ erhält man $y_2 = y_5 = \frac{9}{2}$.

Für $x_3 = -\ 4$ und $x_4 = \ 4$ erhält man $y_3 = y_4 = \frac{45}{8}$.

Die Längen der Vertikalstäbe betragen

$$\underline{\underline{h_1 = h_6 = 2{,}625\ \text{m}}}, \qquad \underline{\underline{h_2 = h_5 = 4{,}500\ \text{m}}}, \qquad \underline{\underline{h_3 = h_4 = 5{,}625\ \text{m}}}.$$

3. Man bestimme die Menge aller Punkte der Ebene, für die ihre Entfernung von einer festen Geraden g gleich dem Tangentenabschnitt an einen festen Kreis k ist.

Lösung: Wie bei allen derartigen Aufgaben ist auch hier die Wahl eines geeigneten Koordinatensystemes von Bedeutung. Je günstiger es gewählt wird — es sei dabei nur an die Berücksichtigung vorhandener Symmetrieeigenschaften erinnert —, um so einfacher wird sich die Gleichung für die gesuchte Punktmenge ergeben. Im vorliegenden Fall kann man die x-Achse mit der Geraden g zusammenfallen lassen und die y-Achse durch den Kreismittelpunkt M legen (Bild 184).

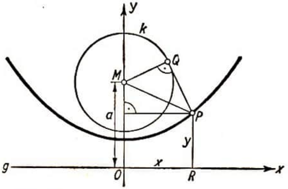


Bild 184

Der Abstand des Punktes M von g sei a. P sei ein beliebiger Punkt der Punktmenge, $\overline{PR}$ das Lot von P auf g und $\overline{PQ}$ die Tangente von P an den Kreis k. Die Aufgabenstellung verlangt

$$\overline{PR} = \overline{PQ}. \tag{IV}$$

Nun ist $\overline{PR} = y$ und $\overline{PQ}$ ergibt sich durch zweimalige Anwendung des pythagoreischen Satzes:

$$\overline{PQ} = \sqrt{(a-y)^2 + x^2 - r^2}.$$

Damit folgt aus (IV) nach Quadrieren

$$y^2 = (a-y)^2 + x^2 - r^2$$

oder

$$\underline{\underline{x^2 = 2a\left(y - \frac{a^2 - r^2}{2a}\right)}}.$$

Die gesuchte Punktmenge ist eine nach oben geöffnete Parabel mit dem Scheitelpunkt $S\left(0; \frac{a^2 - r^2}{2a}\right)$ und dem Halbparameter $p = a$.

Der Leser wähle sich a und r beliebig, konstruiere die zugehörige Parabel und prüfe die Bedingung für die Punktmenge an einigen Parabelpunkten nach.

AUFGABEN

861. Man ermittle die Gleichung einer Parabel aus

a) $S(-2; -5), p = 4$, Parabel nach rechts geöffnet,
b) $S(3; 0)$, $p = 0{,}5$, „ „ unten „ ,
c) $S(-1; 10)$, $p = \frac{3}{2}$, „ „ links „ ,
d) $S(6; -6)$, $p = 7$, „ „ oben „ .

862. Von den folgenden Parabeln sind die Koordinaten des Scheitelpunktes und des Brennpunktes zu bestimmen.

a) $2y^2 - 24x - 12y - 6 = 0$
b) $5x^2 + 40x + 25y + 230 = 0$
c) $y^2 + 4x + 20y + 100 = 0$
d) $3x^2 - 21x - 3y + 36 = 0$

863. Für die Parabel $y = b_0 + b_1x + b_2x^2$ sind die Scheitelpunktkoordinaten zu bestimmen.

864. Eine Parabel ist durch drei Punkte und ihre Achsenrichtung bestimmt. Gesucht werden die Scheitel- und die Brennpunktkoordinaten.

a) $P_1(10; 15)$, $P_2(1; -3)$, $P_3(-{}^5/_4; 6)$, Parabelachse parallel zur x-Achse.
b) $P_1(1; {}^{23}/_6)$, $P_2(2; {}^{10}/_3)$, $P_3({}^8/_3; {}^4/_3)$, Parabelachse parallel zur y-Achse.
c) $P_1(-2{,}15; 0{,}60)$, $P_2(-2{,}60; 1{,}20)$, $P_3(-3{,}35; 1{,}80)$, Parabelachse parallel zur x-Achse.

865. Welche Gleichung besitzt die durch $y^2 = 2px$ gegebene Parabel in einem neuen Koordinatensystem mit den Achsen x' und y', das aus dem $x; y$-System durch Parallelverschiebung hervorgeht und dessen Ursprung

a) im Brennpunkt,
b) im Schnittpunkt Q von Leitlinie und Parabelachse liegt?

866. Der parabolische Träger einer Brücke mit aufgehängter Fahrbahn CD hat die Spannweite l und die zugehörige Pfeilhöhe $h + a$ (Bild 185).

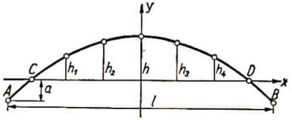


Bild 185

a) Für das Verhältnis $(h + a):l = 1:6$ ist die Gleichung der Parabel im angegebenen System aufzustellen.
b) Es sei in a) speziell $a = h$. Wie groß ist die Länge CD der Fahrbahn?
c) Für $l = 36$ m, $h = 6$ m, $a = 3$ m berechne man die Länge der Fahrbahn CD sowie die Längen der Vertikalstäbe, die 5 m bzw. 10 m von der Brückenmitte entfernt angebracht sind.

867. Gesucht wird die Menge der Mittelpunkte aller Kreise, die einen Halbkreis mit dem Radius r und den zugehörigen Kreisdurchmesser berühren.

868. Man bestimme die Menge der Mittelpunkte aller Kreise, die die Gerade $y = +3$ und den Kreis $x^2 + y^2 - 12x - 14y + 81 = 0$ außen berühren.

869. Man bestimme die Menge aller Punkte der Ebene, für die die Summe ihrer Entfernungen von einer festen Geraden g und einem festen Punkt A konstant gleich c ist.

870. Durch den variablen Punkt $Q(y_Q \neq 0)$ des Kreises $x^2 + y^2 = 36$ wird eine Parallele zur x-Achse gezogen, die die y-Achse in R trifft, $\overline{RQ}$ über Q um die Strecke RQ verlängert ergibt T. A ist der Schnittpunkt zwischen dem Kreis und der x-Achse mit positiver Abszisse. Auf welcher Kurve bewegt sich der Schnittpunkt P von $\overline{OQ}$ und $\overline{AT}$?

32.4. Parameterdarstellung

Für die Parabel, die durch die Gleichung $y^2 = 2px$ gegeben ist, soll eine Parameterdarstellung

$$x = x(t)$$

$$y = y(t)$$

gefunden werden. Wird die erste Gleichung $x = x(t)$ beliebig gewählt, etwa

$$x = t,$$

und dieser Wert für x in die Scheitelgleichung eingesetzt, dann folgt

$$y^2 = 2pt$$

und somit die Parameterdarstellung

$$x = t \qquad y = \pm\sqrt{2pt}. \tag{I}$$

Um eine Wurzel zu vermeiden, kann auch

$$x = t^2$$

und $\sqrt{2p} = c$ gesetzt werden. Die Parameterdarstellung lautet dann

$$x = t^2 \qquad y = \pm ct. \tag{II}$$

BEISPIELE

1. Aus der Parameterdarstellung einer Parabel

$$x = 4 + 2t \qquad y = 3 + t^2 \tag{III}$$

ist die parameterfreie Gleichung abzuleiten.

Lösung: Um t zu eliminieren, kann dessen Wert aus der ersten Gleichung mit

$$t = \frac{x-4}{2}$$

berechnet und in die zweite Gleichung eingesetzt werden:

$$y = 3 + \frac{(x-4)^2}{4}.$$

Die Umformung zu

$$\underline{\underline{(x-4)^2 = 4(y-3)}}$$

zeigt, daß (III) eine nach oben geöffnete Parabel mit dem Scheitelpunkt $S\,(4;\,3)$ und dem Halbparameter $p = 2$ darstellt.

2. Ein Körper wird mit der Geschwindigkeit v unter einem Winkel α gegen die Horizontalebene abgeworfen. Der Abwurfort liegt in dieser Horizontalebene.
   a) Für die Bahnkurve des Schwerpunktes sollen eine Parameterdarstellung sowie eine parameterfreie Gleichung angegeben werden.
   b) Die erreichte Wurfhöhe h und die Wurfweite w sind zu bestimmen.
   c) Für welchen Winkel α ergibt sich eine maximale Wurfweite? (Der Luftwiderstand soll unberücksichtigt bleiben.)

Lösung:

a) Entsprechend Bild 186 wird ein Koordinatensystem gewählt, dessen Ursprung in dem Abwurfort liegt. Ohne den Einfluß der Schwerkraft würde sich der Körper auf der Geraden $y = mx$ bewegen, wobei $m = \tan\alpha$ ist. Nach der Zeit t würde er die Strecke $OQ = vt$ zurückgelegt haben und sich im Punkte Q befinden. Durch die Einwirkung der Schwerkraft fällt er aber gleichzeitig um die Strecke $QP = g/2\,t^2$. Also ist P der Punkt der gesuchten Bahnkurve, in dem sich der Schwerpunkt des Körpers nach der Zeit t befindet.

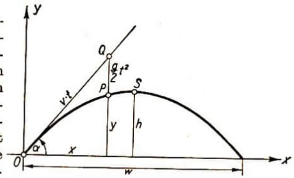


Bild 186

Aus dem Bild ist eine Parameterdarstellung der Bahnkurve mit der Zeit t als Parameter abzulesen:

$$x = vt\cos\alpha = x(t) \qquad y = vt\sin\alpha - \frac{g}{2}t^2 = y(t). \tag{IV}$$

Nach Eliminierung des Parameters erhält man die parameterfreie Gleichung:

$$y = x\tan\alpha - \frac{g}{2v^2\cos^2\alpha}x^2. \tag{V}$$

Da nur die Variable x den Exponenten 2 besitzt, ist die Bahnkurve eine Parabel. Sie läßt sich auf die Form (141) bringen:

$$\left(x - \frac{v^2\sin 2\alpha}{2g}\right)^2 = -\frac{2v^2\cos^2\alpha}{g}\left(y - \frac{v^2\sin^2\alpha}{2g}\right).$$

b) Die Wurfhöhe ist

$$h = y_s = \frac{v^2\sin^2\alpha}{2g}$$

und die Wurfweite ist wegen der Symmetrie der Parabel bezüglich ihrer Achse

$$w = 2x_s = \frac{v^2\sin 2\alpha}{g}. \tag{VI}$$

Die Wurfweite w ergibt sich auch aus (V) als eine Lösung der Gleichung $y = 0$.

c) w erreicht nach (VI) ihren maximalen Wert, wenn $\sin 2\alpha$ am größten, d. h. gleich Eins ist. Das tritt für $2\alpha = 90°$ und damit für $\alpha = 45°$ ein.

AUFGABEN

871. Aus der gegebenen Parameterdarstellung einer Parabel ist deren parameterfreie Gleichung herzuleiten.

a) $x = 1 + 4t$
$y = -4 - t^2$

b) $x = t^2 - \frac{5}{2}$
$y = \frac{2}{3}t + \frac{5}{2}$

c) $x = \frac{t}{2}$
$y = -\frac{1}{6}t^2 + 5$

d) $x = 4t^2 + 12t + 20$
$y = 2t - 10$

e) $x = a_0 + a_1 t$
$y = b_0 + b_1 t + b_2 t^2$

872. Die Aufgabe a) des Beispiels 2 ist für $\alpha = 0$ (waagerechter Wurf) unter Verwendung des in Bild 186 angegebenen Koordinatensystems zu lösen. (Der Abwurfort liegt über der Horizontalebene).

873. Durch einen Punkt $A\,(0;\,a)$ der y-Achse wird eine beliebige Gerade g gelegt, die die x-Achse in Q schneidet, und es wird der Punkt P der Geraden betrachtet, dessen Ordinate gleich x_Q ist. Für die von P durchlaufene Kurve ist eine Parameterdarstellung mit $x_Q = t$ als Parameter sowie eine parameterfreie Gleichung anzugeben.
Man konstruiere für einen gewählten Wert a die Kurve.

32.5. Darstellung in Polarkoordinaten

Die Parabelgleichung soll unter Verwendung von Polarkoordinaten r und φ aufgestellt werden. Die Wahl des Systems ist zwar beliebig, jedoch läßt sich eine besonders einfache Kurvengleichung entwickeln, wenn der Pol mit dem Brennpunkt und die Polarachse mit der Parabelachse zusammenfallen. Zunächst wird, wie in Bild 187 angegeben, durch F ein rechtwinkliges Koordinatensystem gelegt, in dem die Parabel die Gleichung

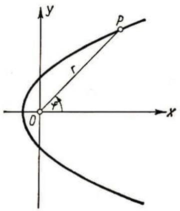


Bild 187

$$y^2 = 2p\left(x + \frac{p}{2}\right) \qquad \text{(I)}$$

hat. Mit Hilfe der Formeln

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$

folgt aus (I) die Kurvengleichung in Polarkoordinaten:

$$r^2\sin^2\varphi = 2p\left(r\cos\varphi + \frac{p}{2}\right).$$

Um die quadratische Gleichung nach r aufzulösen, ist die Umstellung auf die Normalform

$$r^2 - 2\,\frac{p\cos\varphi}{\sin^2\varphi}\,r - \frac{p^2}{\sin^2\varphi} = 0$$

erforderlich. Unter Beachtung der Beziehung $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$ wird

$$r_{1;2} = \frac{p\cos\varphi \pm p}{\sin^2\varphi}.$$

Da der Radiusvektor r immer positiv sein soll und $p\cos\varphi < p$ ist, darf nur das obere Vorzeichen verwendet werden:

$$r = \frac{p\cos\varphi + p}{\sin^2\varphi} = \frac{p(\cos\varphi + 1)}{1 - \cos^2\varphi} = \frac{p(1+\cos\varphi)}{(1+\cos\varphi)(1-\cos\varphi)}.$$

Polargleichung der Parabel $$\boxed{r = \frac{p}{1-\cos\varphi}} \qquad (144)$$

Für φ dürfen alle Werte aus dem Intervall $0° < \varphi < 360°$ eingesetzt werden. Für $\varphi = 0°$ wird der Nenner Null. Strebt φ gegen Null, dann wird der Radiusvektor unbegrenzt größer, d. h. aus $\varphi \to 0°$ folgt $r \to \infty$.
Für $\varphi = 90°$ und $\varphi = 270°$ erhält man $r = p$ und für $\varphi = 180°$ den Wert $r = \frac{p}{2}$.

Der Leser überprüfe, daß auch in (144) die Symmetrie der Parabel wegen $\cos\varphi = \cos(-\varphi)$ zum Ausdruck kommt.

BEISPIEL

Ein Komet bewegt sich auf einer Bahn, die in der Nähe der Sonne mit guter Annäherung eine Parabel ist. Im Brennpunkt der Parabel steht die Sonne. Im *Perihel*, d. i. der Punkt größter Sonnennähe, betrug der Abstand zwischen Sonne und Komet $88 \cdot 10^6$ km. Am 21.2.1896 hatte die *wahre Anomalie*, d. h. der Winkel Komet — Sonne — Perihel, den Wert $v = 54°48'$. Wie groß war zu diesem Zeitpunkt die Entfernung des Kometen von der Sonne?

Lösung: Der Perihel liegt im Scheitelpunkt der Parabel. Zwischen v und dem Polarwinkel φ besteht die Beziehung

$$\varphi = 180° - v$$

und aus (144) folgt

$$r = \frac{p}{1 - \cos(180° - v)} = \frac{p}{1 + \cos v}.$$

Für $v = 54°48'$ ergibt sich die gesuchte Entfernung mit

$$\underline{\underline{r = 111{,}4 \cdot 10^6\ \text{km}.}}$$

AUFGABEN

874. Unter Verwendung der Parabeldefinition ist die Gleichung (144) abzuleiten.
875. Man berechne nach (144) für $p = 2$ und $\varphi = 30°, 40°, \ldots, 320°, 330°$ die Werte für r und zeichne die Parabel punktweise mit Hilfe der Polarkoordinaten.

876. Es ist die Polargleichung der Parabel $x^2 = 2py$ für den Fall aufzustellen, daß der Pol im Scheitelpunkt liegt und die Polarachse mit der y-Achse zusammenfällt.

877. Man gehe in den folgenden Kurvengleichungen zu rechtwinkligen Koordinaten über:

a) $r = \dfrac{6 \sin \varphi}{\cos^2 \varphi}$ b) $r - r \sin \varphi + 4 = 0$

32.6. Parabel und eine Gerade

Die Lagebeziehungen zwischen einer Parabel und einer Geraden sollen allgemein untersucht werden. Aus den erhaltenen Ergebnissen lassen sich dann Tangentengleichungen sowie geometrische Eigenschaften der Parabel herleiten.
Die Parabel c_p hat die Gleichung $y^2 = 2px$, während die Gerade g durch $y = mx + b$ gegeben ist. Die Parabel soll mit der Geraden zum Schnitt gebracht, d. h. der Durchschnitt $c_p \cap g$ der Punktmengen c_p und g untersucht werden. Die Bedingung für die Punkte $P_i \in c_p \cap g$ ergibt sich durch Einsetzen von y aus der Geradengleichung in die Parabelgleichung:

$$(mx_i + b)^2 = 2px_i.$$

Daraus folgt die quadratische Gleichung

$$x_i^2 + 2\frac{mb - p}{m^2}x_i + \frac{b^2}{m^2} = 0 \qquad (m \neq 0)$$

mit den Lösungen

$$x_{1;2} = \frac{-mb + p \pm \sqrt{p(p - 2mb)}}{m^2}. \tag{I}$$

Aus der Geradengleichung ergeben sich die zugehörigen Ordinaten der Schnittpunkte

$$y_{1;2} = \frac{p \pm \sqrt{p(p - 2mb)}}{m}. \tag{II}$$

Diskussion:

Die Anzahl der Schnittpunkte ist vom Radikand abhängig, und zwar, da $p > 0$ ist, nur von $p - 2mb$. Diese Diskriminante enthält die 3 Größen p, m und b, welche die Parabel und die Gerade festlegen.

1. Zunächst gelte: $0 < |m| < \infty$.

Dann ergeben sich je nach der Größe der Diskriminanten 3 Fälle:

a) $p - 2mb > 0$: $c_p \cap g = \{P_1; P_2\}$,
denn (I) und (II) liefern je 2 reelle Werte. Die Gerade schneidet also die Parabel in zwei Punkten P_1 und P_2.

b) $p - 2mb = 0$: $c_p \cap g = \{P_0\}$.
(I) und (II) ergeben durch den Wegfall des Wurzelausdrucks nur je einen Wert. Die Gerade hat daher mit der Parabel nur einen

Punkt gemeinsam. Sie ist Tangente an die Parabel und der Berührungspunkt P_0 hat die Koordinaten

$$x_0 = \frac{-mb + b}{m^2} \quad \text{(III)}; \qquad y_0 = \frac{p}{m} \quad \text{(IV)}.$$

c) $p - 2mb < 0$: $c_p \cap g = \varnothing$.
Aus (I) und (II) erhält man für x und y komplexe Zahlen. Da alle vorliegenden Untersuchungen auf reelle Koordinaten beschränkt sind, schneidet die Gerade die Parabel nicht.

Das Ergebnis der bisherigen Diskussion läßt sich planimetrisch deuten. Man erhält für die 3 Fälle a) bis c) zusammengefaßt:

$$mb \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} \frac{p}{2} \quad \begin{matrix} \text{zwei gemeinsame Punkte (Schnittpunkte)} \\ \text{einen gemeinsamen Punkt (Berührungspunkt)} \\ \text{keine gemeinsamen Punkte.} \end{matrix}$$

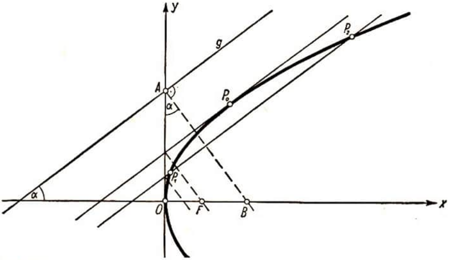


Bild 188

Dieses Ergebnis läßt sich geometrisch deuten. Bild 188 zeigt, daß eine beliebige Gerade g die y-Achse im Punkt A schneidet. Die Senkrechte zu g durch den Punkt A schneidet die x-Achse im Punkt B. Es ist $\overline{OA} = |b|$ und $\overline{OB} = |b \cdot \tan \alpha| = |bm|$. Liegt also der Punkt B links vom Brennpunkt, dann existieren 2 Schnittpunkte, liegt er rechts von F, gibt es keinen gemeinsamen Punkt. Für $B = F$ ist die Gerade eine Tangente.

Satz

Die auf einer Parabeltangente im Schnittpunkt mit der Scheiteltangente errichtete Senkrechte geht durch den Brennpunkt.

Die Umkehrung dieses Satzes liefert eine *Hüllkonstruktion der Parabel:*
Scheiteltangente und Brennpunkt einer Parabel seien gegeben. Legt man durch F beliebige Geraden und errichtet zu ihnen in den jeweiligen Schnittpunkten mit der Scheiteltangente Senkrechte, dann hüllen diese als Tangenten die Parabel ein (Bild 189).

2. Es sei $m = 0$.

Die Gleichungen (I) und (II) sind nicht anwendbar. Die Gerade ist parallel zur x-Achse und hat die Gleichung $y = c$. Durch Einsetzen in die Parabelgleichung erhält man $c^2 = 2px_1$ oder

$$x_1 = \frac{c^2}{2p}, \qquad y_1 = c.$$

Es existiert nur ein Schnittpunkt.

3. Die Gerade sei parallel zur y-Achse.

Auch hier versagen die Gleichungen (I) und (II), da m keinen endlichen Wert hat. Die Geradengleichung lautet $x = c$. Dann folgt aus der Parabelgleichung $y_i^2 = 2pc$ oder

$$y_{1;2} = \pm\sqrt{2pc}, \quad x_{1;2} = c.$$

Es ergeben sich zwei Schnittpunkte, die symmetrisch zur x-Achse liegen.

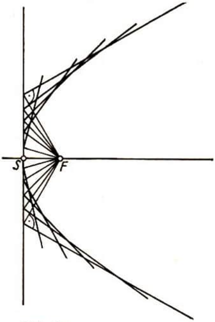


Bild 189

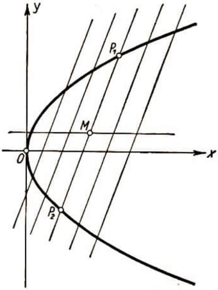


Bild 190

Schneidet nach Fall 1. a) die Gerade die Parabel in den Punkten P_1 und P_2, dann ist $\overline{P_1P_2}$ eine Sehne der Parabel, und der Sehnenmittelpunkt M hat die Koordinaten

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Mit Formel (II) erhält man für die Ordinate

$$y_m = \frac{p}{m}. \tag{V}$$

Wird zu einer Parabel eine Schar von parallelen Geraden gegeben (Bild 190), dann haben diese einen gemeinsamen Richtungsfaktor m, und folglich haben wegen (V) alle Sehnenmittelpunkte die gleiche Ordinate y_m.

Satz

Die Mittelpunkte paralleler Sehnen liegen auf einer Parallelen zur x-Achse mit der Gleichung $y = \frac{p}{m}$. (VI)

Die Parallele heißt **Durchmesser** der Parabel. Jeder Schar paralleler Sehnen ist ein Durchmesser *zugeordnet* oder *konjugiert*. Für $m \to \infty$ folgt $y_m \to 0$. Ist also die Sehnenschar senkrecht zur Parabelachse, dann fällt der konjugierte Durchmesser mit der Parabelachse zusammen.

AUFGABEN

878. Welche Lagebeziehungen bestehen zwischen der Parabel $y^2 = 7x$ und den Geraden

a) $y = 3x - 8$ b) $3x - 4y + 16 = 0$ c) $y = -\frac{3}{4}x - \frac{7}{3}$

d) $x - 4y + 5 = 0$ e) $x + 5 = 0$?

879. Man berechne die Schnittpunkte zwischen der Parabel $y^2 = 1{,}6x$ und den Geraden

a) $2x - 9y + 16 = 0$ b) $y = \frac{1}{6}x + 2{,}4$ c) $y = 4x + 10{,}1$

d) $y = 0{,}4x$ e) $x - 2 = 0$ f) $y + 1{,}2 = 0$

880. Gegeben sind je eine Parabel und eine Gerade. Gesucht wird die Gleichung des zugeordneten Durchmessers.

a) $y^2 = 18x, \quad 6x - 2y + 10 = 0$ b) $y^2 = 3{,}6x, \quad y = -\frac{3}{7}x + 12$

881. Für die Parabel $x^2 = 2py$ und die Gerade $y = mx + b$ ist die Gleichung des zugeordneten Durchmessers anzugeben.

882. Eine Parabel und einer ihrer Durchmesser sind bekannt. Man bestimme die Gleichung der Sehnenschar, die von dem Durchmesser halbiert wird?

a) $y^2 = 8{,}4x, \quad y = 4$ b) $y^2 = \frac{9}{4}x, \quad y = -\frac{1}{3}$

883. Gegeben sind eine Parabel durch $y^2 = 12x$ und ein Punkt $M\,(5; -3)$. Welche Parabelsehne wird durch M halbiert?

884. Gegeben sind eine Parabel durch $y^2 = 15x$, ein Durchmesser durch $y = 2{,}5$ und ein Punkt $A\,(6; 1)$. Welche durch A gehende Parabelsehne wird vom Durchmesser halbiert?

885. Durch den Scheitelpunkt O der Parabel $y^2 = 2px$ wird eine beliebige Sehne OP gezogen. Der konjugierte Durchmesser schneidet die Leitlinie in L. Man bestimme die Menge aller Fußpunkte der von L auf $\overline{OP}$ gefällten Lote.

32.7. Tangente und Normale

Gegeben sind eine Parabel durch $y^2 = 2px$ und ein Parabelpunkt $P_0(x_0; y_0)$. Es soll die Gleichung der Parabeltangente durch P_0 aufgestellt werden.
Nach der Punktrichtungsgleichung erhält man für die Tangente t:

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = m. \tag{I}$$

Der Richtungsfaktor m ergibt sich aus der für den Tangentenberührungspunkt P_0 gültigen Formel (VI) aus 32.6. mit

$$m = \frac{p}{y_0}. \tag{II}$$

Damit folgt

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{p}{y_0}$$

oder

$$y y_0 - y_0^2 = p x - p x_0. \tag{III}$$

Für den Parabelpunkt P_0 gilt

$$y_0^2 = 2 p x_0. \tag{IV}$$

Die Addition von (III) und (IV) führt schließlich zur **Gleichung der Parabeltangente im Parabelpunkt $P_0(x_0; y_0)$**

$$\boxed{y y_0 = p(x + x_0)} \tag{145}$$

Anmerkung: Mit der Differentialrechnung erhält man aus der Funktion $y = \sqrt{2px} = f(x)$, die den im 1. Quadranten liegenden Parabelteil darstellt, die Ableitung $y' = \frac{p}{\sqrt{2px}} = \frac{p}{y}$. Für P_0 folgt in Übereinstimmung mit (II) $f'(x_0) = \frac{p}{y_0} = m$ als Richtungsfaktor der Parabeltangente in P_0.

Als *Normale* der Parabel im Punkt P wird die durch P gehende Senkrechte zur Tangente bezeichnet. Die Normale n besitzt die Gleichung

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = -\frac{y_0}{p}. \tag{V}$$

Die Tangente und die Normale werden mit der x-Achse geschnitten. T und N seien die Schnittpunkte (Bild 191). Ihre Abszissen ergeben sich aus (145) bzw. (V), wenn dort $y = 0$ gesetzt wird:

$$0 = p(x_t + x_0) \qquad \frac{-y_0}{x_N - x_0} = -\frac{y_0}{p}$$

$$x_t = -x_0 \quad \text{(VI)} \qquad x_N = x_0 + p \quad \text{(VII)}$$

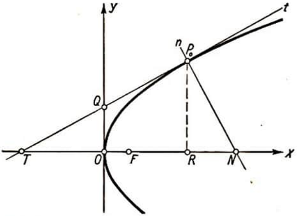


Bild 191

Die Projektion $\overline{TR}$ des Tangentenabschnittes $\overline{TP_0}$ auf die x-Achse, d. h. auf die Parabelachse, wird *Subtangente* genannt, die entsprechende Projektion $\overline{RN}$ des Normalenabschnittes $\overline{P_0N}$ heißt *Subnormale*. Nach Formel (VI) wird $\overline{TR} = 2x_0$ und nach (VII) ergibt sich $\overline{RN} = p$. Für die Parabel $y^2 = 2px$ folgt also der

Satz

Die Subtangente ist gleich der doppelten Abszisse des Berührungspunktes. Die Subnormale ist konstant gleich p.

Zur Kontrolle erhält man nach dem Satz von Euklid aus dem rechtwinkligen Dreieck P_0TN

$$\overline{P_0R}^2 = \overline{TR} \cdot \overline{RN} \quad \text{oder} \quad y_0^2 = 2px_0,$$

also wieder Gleichung (IV).
Für den Schnittpunkt Q zwischen der Tangente und der y-Achse ergibt sich aus (145) mit $x_Q = 0$

$$y_Q = \frac{px_0}{y_0} = \frac{py_0^2}{y_0 2p} = \frac{y_0}{2}.$$

Satz

Die Ordinate des Schnittpunktes zwischen Tangente und y-Achse ist halb so groß wie die Ordinate des Berührungspunktes.

Die obigen Sätze ermöglichen die Konstruktion einer Parabeltangente, wenn die Parabelachse, der Scheitelpunkt und ein Berührungspunkt P_0 gegeben sind.

Bild 192 zeigt die Parabel $y^2 = 2px$ und den Punkt P_0 außerhalb der Parabel. Von P_0 sind an die Parabel die Tangenten anzulegen. Der Anschauung entnimmt man, daß zwei Tangenten, t_1 und t_2, die Aufgabe lösen. Ihre noch unbekannten Berührungspunkte seien P_1 und P_2. Dann gelten nach (145) die Gleichungen:

$$t_1\colon\ yy_1 = p(x + x_1)$$
$$t_2\colon\ yy_2 = p(x + x_2)$$

Der Schnittpunkt P_0 liegt auf beiden Tangenten:

$$y_0y_1 = p(x_0 + x_1) \tag{VIII}$$

$$y_0y_2 = p(x_0 + x_2). \tag{IX}$$

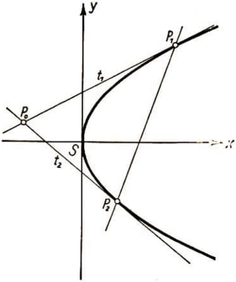


Bild 192

Es soll die geometrische Bedeutung der Gleichung

$$yy_0 = p(x + x_0) \tag{X}$$

für den außerhalb der Parabel liegenden Punkt P_0 untersucht werden. Zunächst stellt (X) als lineare Gleichung eine Gerade dar. Wegen Gleichung (VIII) liegt Punkt P_1 und wegen Gleichung (IX) auch Punkt P_2 auf dieser Geraden. Also ist (X) die Gleichung der durch beide Berührungspunkte gehenden Parabelsehne. Sie heißt **Berührungssehne.**

Die Tangentengleichung (145) und die Gleichung der Berührungssehne stimmen in der Form überein. Die verschiedene inhaltliche Bedeutung ergibt sich daraus, daß für die Tangente P_0 auf der Parabel, für die Berührungssehne P_0 außerhalb der Parabel liegt. Mit Hilfe der Berührungssehne ist die obige Aufgabe nun leicht zu lösen.

BEISPIEL

1. Vom Punkt $P_0(-4/_3;\ 1)$ sind an die Parabel $y^2 = 6x$ die Tangenten zu legen. Wie heißen ihre Gleichungen?

Lösung: Die Gleichung der Berührungssehne ist nach (X):

$$y = 3\left(x - \frac{4}{3}\right) = 3x - 4.$$

Dann werden die Schnittpunkte von Parabel und Berührungssehne ermittelt:

$$(3x_i - 4)^2 = 6x_i$$

$$x_i^2 - \frac{10}{3}x_i + \frac{16}{9} = 0$$

$$x_1 = \frac{8}{3} \qquad x_2 = \frac{2}{3}$$

$$y_1 = 4 \qquad y_2 = -2.$$

Die Koordinaten der Schnittpunkte P_1 und P_2 setzt man in (145) ein und erhält die gesuchten Tangentengleichungen:

$$t_1:\ 4y = 3\left(x + \frac{8}{3}\right) \qquad\qquad t_2:\ -2y = 3\left(x + \frac{2}{3}\right)$$

$$\underline{\underline{y = \frac{3}{4}x + 2}} \qquad\qquad \underline{\underline{y = -\frac{3}{2}x - 1.}}$$

Zur Kontrolle kann man beide Tangenten zum Schnitt bringen und muß wieder den Punkt P_0 erhalten.

Löst man die Gleichung der Berührungssehne nach y auf, dann folgt

$$y = \frac{p}{y_0}x + \frac{px_0}{y_0}. \tag{XI}$$

Der Richtungsfaktor ist $m = \dfrac{p}{y_0}$. Daher lautet die Gleichung des zugeordneten Durchmessers

$$y = \frac{p}{m} = \frac{p}{\dfrac{p}{y_0}} = y_0.$$

P_0 liegt also auf dem Durchmesser, der seiner Berührungssehne zugeordnet ist (Bild 193).

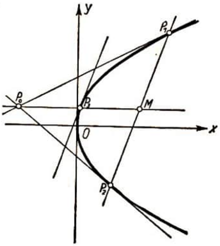


Bild 193

Für den Schnittpunkt P_3 von dem Durchmesser und der Parabel ergeben sich die Koordinaten

$$x_3 = \frac{y_0^2}{2p}; \quad y_3 = y_0.$$

Die Gleichung der Tangente in P_3 an die Parabel lautet dann

$$y = \frac{p}{y_0}\,x + \frac{y_0}{2}.$$

Ein Vergleich mit (XI) zeigt, daß die Tangente den gleichen Richtungsfaktor wie die Berührungssehne hat.

Die Tangente im Schnittpunkt eines Durchmessers mit der Parabel ist der zugeordneten Sehnenschar parallel.

Dieses Ergebnis kann man sich auch leicht veranschaulichen. Nähert sich in Bild 194 der Punkt P_0 auf einem Durchmesser unbegrenzt der Parabel, dann bewegt sich die Berührungssehne parallel zu sich in entgegengesetzter Richtung. Im Grenzfall liegt P_0 auf der Parabel und die Sehne geht in die Tangente über. Das macht auch die Übereinstimmung zwischen der Tangentengleichung und der Gleichung der Berührungssehne plausibel. Abschließend wird der Fall betrachtet, daß die Parabel eine allgemeinere Lage im Koordinatensystem hat, daß sie z. B. durch (138) gegeben ist. In dem x'; y'-System (Bild 182) hat die Parabeltangente dann die Gleichung

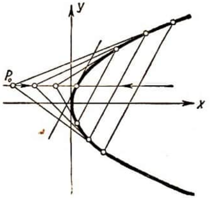


Bild 194

$$y' y_0' = p\,(x' + x_0'),$$

und mit $x' = x - x_s$, $y' = y - y_s$ erhält man die Gleichung einer Parabeltangente in P_0 im x; y-System:

$$(y - y_s)\,(y_0 - y_s) = p\,(x + x_0 - 2x_s). \tag{XII}$$

BEISPIELE

2. Welcher Punkt P_0 der Parabel $y^2 = 12x$ besitzt von der Geraden $y = \frac{3}{4}\,x + 8$ den kleinsten Abstand und wie groß ist dieser?

Lösung: Man legt parallel zur Geraden g eine Parabeltangente, deren Berührungspunkt P_0 von g den geforderten minimalen Abstand besitzt (Bild 195). Die Tangentengleichung lautet:

$$t\colon\ y y_0 = 6\,(x + x_0) \quad \text{bzw.} \quad y = \frac{6}{y_0}\,x + \frac{6x_0}{y_0}.$$

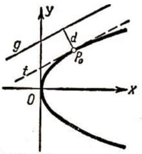


Bild 195

Die Richtungsfaktoren von t und g müssen wegen der Parallelität beider Geraden übereinstimmen:

$$\frac{6}{y_0} = \frac{3}{4}.$$

Daraus folgt $y_0 = 8$ und mit diesem Wert aus der Parabelgleichung $x_0 = \frac{16}{3}$. Der gesuchte minimale Abstand des Punktes P_0 von g ergibt sich mit Hilfe der HESSEschen Normalform von g:

$$d = \frac{3x_0 - 4y_0 + 32}{-5} = -\frac{16}{5}.$$

3. Wie groß ist der Halbparameter der Parabel $x^2 = 2py$, die die Gerade $y = \frac{3}{4}x - \frac{9}{2}$ als Tangente hat?

Lösung: Die Parabel ist nach oben geöffnet. An die Stelle der Tangentengleichung (145) tritt jetzt die Gleichung:

$$xx_0 = p(y + y_0)$$

und nach y aufgelöst:

$$y = \frac{x_0}{p}x - y_0.$$

Durch Vergleich mit der gegebenen Geraden folgt:

$$\frac{x_0}{p} = \frac{3}{4}; \quad y_0 = \frac{9}{2}.$$

Für P_0 gilt

$$x_0^2 = 2py_0.$$

Aus diesen 3 Gleichungen läßt sich p berechnen:

$$\underline{\underline{p = 16.}}$$

4. Unter welchem Winkel schneiden einander die Parabel $x^2 - 16y = 0$ und der Kreis $x^2 + y^2 - 225 = 0$?

Lösung: Unter dem Schnittwinkel zweier Kurven versteht man den Winkel, der von den Tangenten, die im Schnittpunkt beider Kurven an diese angelegt sind, gebildet wird. Man erhält für die Schnittpunkte zwischen Kreis und Parabel

$$P_1(12; 9), \quad P_2(-12; 9).$$

Wegen der Symmetrie beider Kurven zur y-Achse kann man sich auf P_1 beschränken. Die Tangentengleichungen lauten (Bild 196):

$$t_K\colon 12x + 9y = 225 \qquad \text{oder} \qquad y = -\frac{4}{3}x + 25$$

$$t_P\colon 12x = 8(y + 9) \qquad \text{oder} \qquad y = \frac{3}{2}x - 9.$$

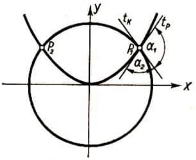


Bild 196

Für den Schnittwinkel erhält man

$$\tan\alpha_1 = \frac{\frac{3}{2} + \frac{4}{3}}{1 - \frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}} = -\frac{17}{6}, \quad \underline{\underline{\alpha_1 = 109°26'}}$$

$$\text{bzw.} \quad \underline{\underline{\alpha_2 = 70°34'.}}$$

AUFGABEN

886. Man bestimme die Gleichung der Tangente an eine bekannte Parabel in einem gegebenen Parabelpunkt P_0.

a) $y^2 = 32x, \quad P_0(8; y > 0)$

b) $x^2 = -\frac{32}{15}y, \quad P_0(3{,}2; \ldots)$

c) $(y-3)^2 = -20(x+1), \; P_0(\ldots; 5)$

d) $5x^2 - 40x - 12y - 40 = 0, \quad P_0(2; \ldots)$

e) $y = -\frac{3}{10}x^2 - \frac{9}{5}x + \frac{33}{10}, \quad P_0(\ldots; 4)$

887. Wie heißt die Gleichung der Normalen der Parabel

$$y^2 - 10x - 4y + 14 = 0 \quad \text{im Punkt} \quad P_0(3{,}5; y < 0)?$$

888. Gegeben sind die Parabel $x^2 = -18y$ und die Gerade $y = -\frac{1}{3}x - 4$. In den Schnittpunkten P_1 und P_2 von Parabel und Gerade sind die Tangenten an die Parabel anzulegen. Man berechne

a) den Schnittpunkt P_0 der Parabeltangenten,

b) den Tangentenschnittwinkel,

c) die Fläche des Dreiecks $P_0P_1P_2$.

889. Durch den Brennpunkt einer Parabel wird eine Gerade gelegt und durch deren Schnittpunkte mit der Parabel werden die Tangenten gezogen. Es ist analytisch zu beweisen, daß die Tangenten senkrecht aufeinanderstehen.

890. An eine gegebene Parabel ist eine Tangente mit bekannter Richtung zu legen. Man bestimme den Berührungspunkt und die Tangentengleichung.

a) $x^2 = 9y$, Steigung der Tangente: $\frac{8}{3}$;

b) $y^2 = 4x$, die Tangente steht senkrecht auf der Geraden $y = -3x - 5$;

c) $y^2 = 4x$, die Tangente bildet mit der Geraden $y = 2x - 3$ einen Winkel von 45°;

d) $y^2 - 9x + 6y + 81 = 0$, die Tangente ist senkrecht zur Geraden $4x - 3y - 25 = 0$;

e) $(y-8)^2 = -\frac{25}{2}x$, die Tangente ist parallel zur Geraden $5x - 4y = 0$.

891. Eine nach oben geöffnete Parabel enthält die drei Punkte

$$P_1\left(1; -\frac{3}{2}\right), \quad P_2\left(8; \frac{15}{4}\right), \quad P_3\left(0; -\frac{1}{4}\right).$$

a) Welche Parabeltangente und welche Parabelnormale gehen durch den Punkt $P_4\left(\frac{11}{2}; \ldots\right)$ der Parabel?

b) In welchem Punkt P_5 berührt die Tangente mit der Steigung $-\frac{5}{2}$ die Parabel?

892. Eine an die Parabel $y^2 = 24x$ gelegte Tangente schneidet auf der y-Achse die Strecke 4 ab. Wie lautet die Tangentengleichung und wo liegt der Berührungspunkt?

893. a) Wie groß ist der Halbparameter der Parabel $y^2 = 2px$, die die Gerade $y = 0{,}26x + 1{,}20$ als Tangente besitzt?

b) Desgleichen für $y^2 = 2px$ und $y = -3x + 8$.

894. Für welchen Parabelpunkt ist die Subtangente genauso lang wie die Subnormale?
895. Für welchen Parabelpunkt ist die Normale genauso lang wie der Parameter $2p$?
896. Zu einem Parabelpunkt mit der Abszisse $x_0 = \frac{16}{5}$ gehört die Subnormale von der Länge 10. Welchen Winkel bildet die Tangente dieses Punktes mit der x-Achse?
897. Wie groß ist die Fläche eines gleichseitigen Dreiecks, dessen 3 Seiten auf Tangenten der Parabel $y^2 = 6x$ liegen?
898. Welche Tangente an die Parabel $y^2 = 12x$ hat vom Brennpunkt den Abstand $d = 5$?
899. In einem Punkt P_0 der Parabel $y^2 = 2px$ ist die Tangente angelegt. Sie schneidet die y-Achse in R. Man bestimme die Menge der Umkreismittelpunkte der Dreiecke OP_0R.
900. Die Normale in einem Parabelpunkt P_0 der Parabel $y^2 = 2px$ schneidet die x-Achse im Punkt Q. Auf der Senkrechten zur x-Achse in Q wird $\overline{P_0Q}$ von Q aus bis R abgetragen. Auf welcher Kurve bewegt sich R, wenn P_0 die Parabel durchläuft?
901. Wie heißen die Gleichungen der gemeinsamen Tangenten an die Parabel $y^2 = \frac{75}{2}x$ und den Kreis $x^2 + y^2 = 100$.
Welches sind die Berührungspunkte?
902. An eine gegebene Parabel sind von einem gegebenen Punkt P_0 die Tangenten zu legen. Wie heißen ihre Gleichungen?

a) $y^2 = 10x, \quad P_0\left(-5;\ \frac{5}{2}\right)$
b) $x^2 = 24y, \quad P_0(3;\ -3)$
c) $y^2 = -13x, \quad P_0(10;\ 2)$
d) $x^2 - 8x + 8y + 64 = 0, \quad P_0(0;\ 0)$

903. Eine Parabel ist durch die Leitlinie und den Brennpunkt F gegeben. Von einem Punkt P_0 sind an die Parabel die Tangenten zu legen. Man beweise die folgende Konstruktion:
Um P_0 ist ein Kreis mit $\overline{P_0F}$ als Radius zu zeichnen. Der Kreis schneidet die Leitlinie in den Punkten R und Q. Die Mittelsenkrechten von $\overline{RF}$ und $\overline{QF}$ sind die gesuchten Tangenten. Die Tangentenberührungspunkte ergeben sich als Schnittpunkte zwischen den Tangenten und den in R und Q errichteten Senkrechten zur Leitlinie.
904. Zwei Tangenten und die zugehörige Berührungssehne einer Parabel bilden ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge $s = 12$. Wie groß ist der Halbparameter der Parabel?
905. Die Parabel $y^2 = 24x$ ist mit der Geraden $y = 3x - 6$ zum Schnitt zu bringen, und in den Schnittpunkten P_1 und P_2 sind an die Parabel die Tangenten zu legen. Man zeige, daß der zur Sehne konjugierte Durchmesser durch den Tangentenschnittpunkt P_0 geht. Im Schnittpunkt P_3 von Durchmesser und Parabel ist eine Tangente anzulegen und zu zeigen, daß der Durchmesser den Abschnitt dieser Tangente zwischen den beiden anderen Tangenten halbiert.
906. Unter welchen Winkeln schneiden sich die folgenden Kurven:

a) $y^2 = \frac{9}{4}x, \qquad x^2 + y^2 = 25$
b) $y^2 = 12x, \qquad x^2 = \frac{32}{9}y$
c) $x^2 - 4y = 0, \qquad y^2 + 8x - 10y - 7 = 0$

32.8. Weitere Eigenschaften der Parabel

Zunächst soll eine Brennpunkteigenschaft der Parabel auf planimetrischem Weg abgeleitet werden. In Bild 197 sind zu einem Parabelpunkt P_0 der Brennstrahl P_0F und der Leitstrahl P_0L eingetragen. Nach der Parabeldefinition ist $\overline{P_0F} = \overline{P_0L}$ und damit das Dreieck P_0LF gleichschenklig. Die Scheiteltangente schneidet $\overline{FL}$ in Q. Nach dem Strahlensatz ist $\overline{FQ} = \overline{QL}$, also $\overline{QP_0}$ die Höhe im Dreieck P_0LF, die sowohl den Winkel FP_0L halbiert als auch senkrecht auf $\overline{FL}$ steht. Wegen $\sphericalangle FQP_0 = 1^{\llcorner}$ muß dann aber nach dem Satz auf Seite 396 QP_0 eine Parabeltangente sein.

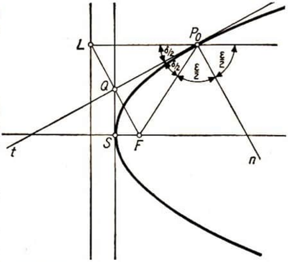


Bild 197

Satz

Die Parabeltangente halbiert den Winkel zwischen Brennstrahl und Leitstrahl. Die Normale halbiert den zugehörigen Nebenwinkel.

Den zweiten Teil des Satzes beweist man durch einfache planimetrische Überlegung.
Rotiert eine Parabel um ihre Achse, dann entsteht ein *Rotationsparaboloid.* Ein Parabolspiegel ist ein Stück des Paraboloids, seine Innenfläche trägt einen Spiegelbelag. Parallel zur Achse einfallende Lichtstrahlen werden nach dem obigen Satz wegen des Reflexionsgesetzes so zurückgeworfen, daß sie durch F gehen. Hieraus erklärt sich auch für F der Name „Brennpunkt".
Legt man von einem Punkt P_0 die Tangenten an die Parabel und projiziert die Tangentenabschnitte $\overline{P_0P_1}$ und $\overline{P_0P_2}$ auf eine Parallele zur Scheiteltangente, dann sind nach dem Strahlensatz unter Verwendung der Ergebnisse der vorigen Abschnitte die Projektionen gleich (Bild 198):

$$\overline{P_0'P_1'} = \overline{P_0'P_2'} = c.$$

Eine beliebige dritte Tangente schneidet die beiden anderen Tangenten in R und Q, und es gilt entsprechend:

$$\overline{R'P_1'} = \overline{R'P_3'} = d$$
$$\overline{Q'P_2'} = \overline{Q'P_3'} = e.$$

Wegen $2c = 2d + 2e$ folgt außerdem

$$c = d + e.$$

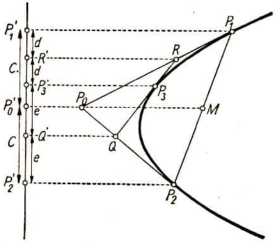


Bild 198

Damit erhält man

$$\frac{\overline{P_1R}}{\overline{RP_0}} = \frac{d}{c-d} = \frac{d}{e}, \qquad \frac{\overline{P_0Q}}{\overline{QP_2}} = \frac{c-e}{e} = \frac{d}{e},$$

$$\frac{\overline{P_1R}}{\overline{RP_0}} = \frac{\overline{P_0Q}}{\overline{QP_2}}. \tag{I}$$

Werden also von einem Punkt an eine Parabel die Tangenten gelegt und mit einer beliebigen dritten Tangente zum Schnitt gebracht, dann verhalten sich die Abschnitte auf der ersten Tangente umgekehrt proportional wie die entsprechenden Abschnitte auf der zweiten.

Diese Eigenschaft kann für eine *Hüllkonstruktion* ausgenützt werden, wenn von der Parabel zwei Tangenten mit den Berührungspunkten P_1 und P_2 gegeben sind. Man teilt $\overline{P_1P_0}$ und $\overline{P_0P_2}$ in eine gleiche Anzahl von Teilen und verbindet entsprechende Punkte, wie es in Bild 199 angegeben ist. Wählt man die Teile genügend klein, dann braucht die Parabel kaum noch mit einem Kurvenlineal nachgezogen zu werden.

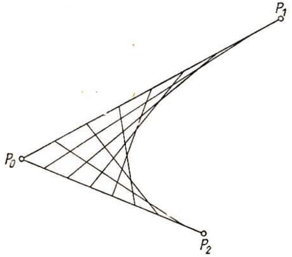


Bild 199

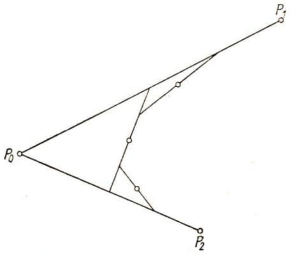


Bild 200

In (I) kann speziell $\overline{P_1R} = \overline{RP_0}$, also auch $\overline{P_0Q} = \overline{QP_2}$ sein.

Werden also die Mittelpunkte zweier Tangentenabschnitte verbunden, dann entsteht wieder eine Parabeltangente, deren Berührungspunkt auf der Mitte dieses Tangentenabschnittes liegt. Durch Fortsetzung des Verfahrens ergeben sich weitere Tangenten und Parabelpunkte (Bild 200).

AUFGABEN

907. Man beweise den Satz aus 32.8. auf analytischem Wege.

908. Der parabolische Hohlspiegel eines Scheinwerfers hat einen Durchmesser $d = 26{,}4$ cm und eine Tiefe $h = 12{,}0$ cm. In welcher Entfernung vom Scheitelpunkt ist eine als punktförmig anzunehmende Lichtquelle zu befestigen, damit die Lichtstrahlen parallel zur Spiegelachse reflektiert werden?

909. Zwei Parabeltangenten mit den Berührungspunkten P_1 und P_2 und den Abschnitten $\overline{P_0P_1} = 7$ cm, $\overline{P_0P_2} = 13$ cm schneiden sich in P_0 unter dem Winkel $\alpha = 50°$.
   a) Man bestimme die Parabel mit Hilfe der Hüllkonstruktion entsprechend Bild 199 unter Verwendung von mindestens 10 Tangenten.
   b) Weitere Parabeltangenten und Parabelpunkte sind entsprechend Bild 200 zu konstruieren.

910. Die folgende Konstruktion ist zu beweisen: Von P_0 sind an eine Parabel bis P_1 bzw. P_2 die Tangenten gelegt. Zieht man durch einen beliebigen Punkt T der Sehne P_1P_2 eine Parallele zu $\overline{P_0P_2}$, die $\overline{P_0P_1}$ in R schneidet, und eine Parallele zu $\overline{P_0P_1}$, die $\overline{P_0P_2}$ in Q schneidet, dann ist $\overline{RQ}$ eine Parabeltangente.

911. Durch den Scheitelpunkt der Parabel $y^2 = 2px$ ist ein Geradenbüschel gelegt. Man bestimme die Menge aller Punkte der Ebene, welche die von den Geraden ausgeschnittenen Parabelsehnen im Verhältnis $n_1 : n_2$ teilen.

912. Die Parabel $y = \frac{x^2}{18}$ wird von der Geraden $y = -\frac{1}{6}x + 10$ geschnitten. Welchen Winkel schließen die zu den Schnittpunkten P_1 und P_2 führenden Brennstrahlen miteinander ein? Wie groß ist die Fläche des Dreiecks P_1P_2F?

33. Ellipse

33.1. Definition und Konstruktionen

In 31.2. wurde für die Ellipse neben der Erklärung als Kegelschnitt die folgende Definition angegeben:

> Die Ellipse ist die Menge aller Punkte der Ebene, für die die Summe ihrer Abstände von zwei festen Punkten konstant ist.

Die festen Punkte F_1 und F_2 werden **Brennpunkte** der Ellipse genannt. Außerdem wird für die konstante Abstandssumme

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a \qquad \text{(I)}$$

und für den Abstand der Brennpunkte

$$\overline{F_1F_2} = 2e \qquad \text{(II)}$$

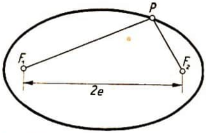


Bild 201

gesetzt (Bild 201). e heißt **lineare Exzentrizität** der Ellipse. Durch die Größen e und a ist die Ellipse eindeutig bestimmt, und zwar muß $e < a$ sein. Das Verhältnis $\varepsilon = \frac{e}{a} < 1$ heißt **numerische Exzentrizität**. $\overline{PF_1}$ und $\overline{PF_2}$ nennt man die **Brennstrahlen** von P. Aus der obigen Definition folgen unmittelbar zwei *Ellipsenkonstruktionen*. Die Größen $2a$ und $2e$ seien gegeben.

1. *Punktweise Konstruktion*

Auf der gegebenen Strecke $CD = 2a$ wählt man R beliebig und schlägt mit $\overline{CR} = r_1$ um F_1 und mit $\overline{DR} = r_2$ um F_2 Kreisbogen, die sich in zwei Ellipsenpunkten P_1 und P_2 schneiden. Durch Vertauschen von r_1 und r_2 ergeben sich zwei weitere Punkte P_3 und P_4. Man beachte bei der Wahl von R, daß $r_1 \geqq a - e$ bzw. $r_2 \geqq a - e$ sein muß. Die Konstruktion beweist die Existenz von zwei Symmetrieachsen der Ellipse (Bild 202). Ihr Schnittpunkt heißt *Mittelpunkt M* der Ellipse. Die durch die Brennpunkte gehende Symmetrieachse heißt **Hauptachse** der Ellipse, die dazu senkrechte Symmetrieachse heißt **Nebenachse**.

2. *Fadenkonstruktion* (*Gärtnerkonstruktion*)

Um zwei Reißzwecken im Abstand $2e$ wird ein Faden gelegt, der zu einer Schlinge verknüpft ist und den Umfang $2a + 2e$ besitzt (Bild 203). Mit einem in die Schlinge gesteckten Bleistift wird der Faden gespannt und die Kurve umfahren.

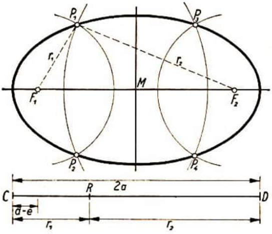


Bild 202

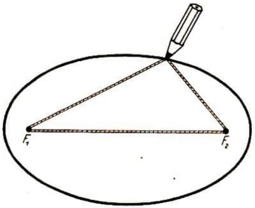


Bild 203

33.2. Ellipsengleichungen

Um zunächst die Kurvengleichung der Ellipse in rechtwinkligen Koordinaten aufzustellen, wird unter Ausnutzung der Symmetrie ein geeignetes Koordinatensystem gewählt. Der Ursprung liegt im Ellipsenmittelpunkt, die Koordinatenachsen fallen mit den Symmetrieachsen zusammen (Bild 204). Die Brennpunkte erhalten die Koordinaten $F_1(-e; 0)$, $F_2(e; 0)$. Für einen variablen Ellipsenpunkt $P(x; y)$ gilt nach der Definitionsgleichung:

$$r_1 + r_2 = 2a \quad \text{oder}$$

$$\sqrt{(e+x)^2 + y^2} + \sqrt{(e-x)^2 + y^2} = 2a.$$

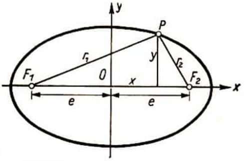


Bild 204

Umgestellt und quadriert ergibt

$$e^2 + 2ex + x^2 + y^2 = 4a^2 - 4a \times$$
$$\times \sqrt{(e-x)^2 + y^2} + e^2 - 2ex + x^2 + y^2$$

und vereinfacht folgt

$$ex - a^2 = -a\sqrt{(e-x)^2 + y^2}.$$

Hier wird nochmals quadriert und zusammengefaßt:

$$(a^2 - e^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - e^2). \qquad \text{(I)}$$

Zur Abkürzung setzt man

$$\boxed{a^2 - e^2 = b^2} \qquad (146)$$

wobei b später auch geometrisch erklärt wird. Aus (I) folgt

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2, \tag{II}$$

und Division durch a^2b^2 ergibt die

Mittelpunktsgleichung der Ellipse

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} \tag{147}$$

Diskussion der Mittelpunktsgleichung

Die Ellipse ist abhängig von den Größen a und b oder allgemeiner wegen (146) von zwei der drei Größen a, b und e. Die Mittelpunktsgleichung (147) ist rein quadratisch in x und y, was wieder die Symmetrie der Ellipse bezüglich der x-Achse und der y-Achse bestätigt.

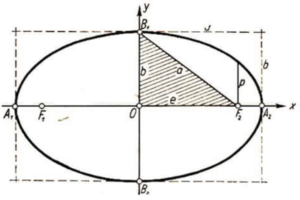


Bild 205

Setzt man in (147) $y = 0$, dann wird $x = \pm a$. Die Ellipse schneidet die x-Achse in zwei Punkten $A_1(-a; 0)$ und $A_2(a; 0)$. Wird in (147) $x = 0$, dann ist $y = \pm b$, d. h., die Ellipse schneidet die y-Achse in den Punkten $B_1(0; b)$ und $B_2(0; -b)$ (Bild 205). In der Differentialrechnung wird gezeigt, daß die Ellipse in den Punkten A_1 und A_2 am stärksten und in den Punkten B_1 und B_2 am schwächsten gekrümmt ist.[1)] Man nennt daher A_1 und A_2 die **Hauptscheitelpunkte**, B_1 und B_2 die **Nebenscheitelpunkte**. Die Strecken $A_1A_2 = 2a$ und $B_1B_2 = 2b$ bezeichnet man auch als große bzw. kleine Achse der Ellipse und a als **große Halbachse**, b als **kleine Halbachse**. Die in den Scheitelpunkten an die Ellipse gelegten Tangenten heißen **Scheiteltangenten**.
Aus (147) erhält man durch Auflösen nach y

$$\boxed{y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}} \tag{147a}$$

Für jeden Wert $x \in [-a; a]$ ist die Wurzel reell. Es lassen sich für diese x-Werte, bis auf $x = \pm a$, zwei y-Werte berechnen, die sich nur um das Vorzeichen unterscheiden (Symmetrie zur x-Achse). Wandert x von $-a$ über 0 bis $+a$, dann ändert y seine Werte von 0 bis $\pm b$ und wieder bis 0. Für die Ordinaten gilt deshalb $y \in [-b; b]$. Für $|x| > a$ ist die Wurzel imaginär, also gibt es in Übereinstimmung mit der Anschauung keine Ellipsenpunkte mehr. Die Ellipse liegt völlig in dem von den Scheiteltangenten gebildeten Rechteck. Die Gleichung (146) wird nun auch unmittelbar aus Bild 205 ab-

1) Vgl. Band „Analysis", Abschnitt 4

gelesen. Für den Ellipsenpunkt B_1 gilt z. B. die Gleichung $\overline{F_1B_1} + \overline{F_2B_1} = 2a$ und wegen der Symmetrie wird $\overline{F_2B_1} = a$. Aus dem Dreieck B_1F_2O folgt nach dem pythagoreischen Satz die Gleichung (146).

Für $x = \pm e$ folgt $y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - e^2} = \pm \frac{b^2}{a}$. Wie bei der Parabel heißt die durch den Brennpunkt senkrecht zur x-Achse gelegte Sehne Parameter und wird mit $2p$ bezeichnet. Es ist $2p = \frac{2b^2}{a}$, und man findet für den **Halbparameter**:

$$p = \frac{b^2}{a}. \tag{III}$$

Ist speziell $a = b$, dann folgt aus (147) durch Multiplikation mit a^2 die Kreisgleichung $x^2 + y^2 = a^2$. Der Kreis ergibt sich als Sonderfall der Ellipse, beide Brennpunkte fallen wegen $e = 0$ im Kreismittelpunkt zusammen.

Die Gleichung (147a) führt zu einer oft verwendeten *Ellipsenkonstruktion*:

Gegeben sind die Halbachsen a und b der Ellipse. Man schlägt um den Ellipsenmittelpunkt einen Kreis mit dem Radius a, den **Hauptscheitelkreis**, und einen Kreis mit dem Radius b, den **Nebenscheitelkreis**. Ein beliebiger Strahl durch O schneidet den Hauptscheitelkreis in R und den Nebenscheitelkreis in Q (Bild 206). Die Parallele zur Hauptachse durch Q schneidet die Parallele zur Nebenachse durch R in dem Ellipsenpunkt P.

Beweis: Nach Bild 206 ist

$$\overline{OS} = x, \quad \overline{PS} = y$$

und

$$\overline{RS} = \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Aus der Proportion

$$\frac{\overline{PS}}{\overline{RS}} = \frac{b}{a}$$

folgt

$$\overline{PS} = y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

d. i. Gleichung (147a).

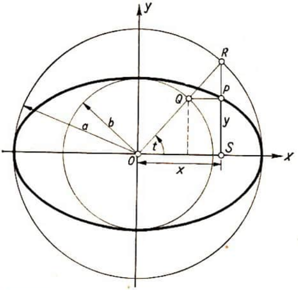


Bild 206

Außerdem wird aus Bild 206 noch eine wichtige Parameterdarstellung der Ellipse abgelesen. Mit $\sphericalangle\, ROS = t$ gilt

$$\boxed{\begin{aligned} x &= a\cos t \\ y &= b\sin t \end{aligned}} \qquad t \in [0; 360°). \tag{148}$$

Der Winkel t heißt *exzentrische Anomalie*. Dividiert man die erste Parametergleichung durch a, die zweite durch b, quadriert und addiert die so erhaltenen Gleichungen, dann folgt wieder die Mittelpunktsgleichung (147).

BEISPIEL

1. Die Endpunkte R und Q einer Strecke konstanter Länge gleiten auf zwei zueinander senkrechten Geraden. Welche Kurve durchläuft ein Punkt P der Strecke, dessen Entfernung von R gleich m und von Q gleich n ist?

   Lösung: Die zueinander senkrechten Geraden werden als Koordinatenachsen gewählt, und es wird $\sphericalangle\, OQP = t$ gesetzt. Aus Bild 207 liest man sofort die Gleichungen

$$x = m \cos t$$

$$y = n \sin t$$

   ab. Nach Gleichung (148) beschreibt also P einen Ellipsenbogen. Für $m > n$ gilt $m = a$, $n = b$, für $m < n$ wird $n = a$, $m = b$. Im zweiten Fall fällt die Hauptachse der Ellipse mit der y-Achse zusammen.
   Auf dieser Eigenschaft beruht erstens die *Papierstreifenkonstruktion* der Ellipse — die Strecke RQ wird durch einen Papierstreifen realisiert, auf dem P markiert ist — und zweitens die Wirkungsweise des *Ellipsenzirkels.*

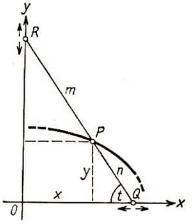


Bild 207

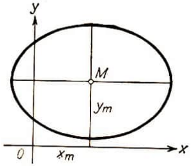


Bild 208

Schließlich werden noch die Kurvengleichungen für allgemeinere Lagen der Ellipse angegeben. Der Ellipsenmittelpunkt M habe die Koordinaten x_m, y_m, die Hauptachse sei parallel zur x-Achse (Bild 208). Die Gleichung der Ellipse lautet (vgl. 32.3.)

$$\boxed{\frac{(x - x_m)^2}{a^2} + \frac{(y - y_m)^2}{b^2} = 1} \qquad (149)$$

Ist die Hauptachse parallel zur y-Achse, d. h. die Ellipse gegenüber den bisherigen Lagen um 90° gedreht, dann sind in den Gleichungen (147) bis (149) die Koordinaten x und y zu vertauschen.
Die letzte Gleichung ergibt nach Multiplikation mit dem Hauptnenner, Auflösen der Klammern, Ordnen und nach entsprechender Bezeichnung der Koeffizienten von x und y

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0. \qquad \text{(IV)}$$

Dabei ist $A \neq B$ und $A \cdot B > 0$, d. h., A und B haben gleiches Vorzeichen. Jede Gleichung von der Form (IV), deren Koeffizienten A und B beide Bedingungen erfüllen, bestimmt eine Ellipse.

BEISPIEL

2. Die Kurve mit der Gleichung

$$4x^2 + 25y^2 - 32x + 50y - 11 = 0$$

ist zu untersuchen.

Lösung: Die Gleichung hat die Form (IV). Es ist $A = 4$, $B = 25$. Wegen $A \neq B$ und $AB = 4 \cdot 25 > 0$ stellt die Gleichung eine Ellipse dar. Man bringt die Gleichung auf die Form von Gleichung (149), um die Koordinaten des Mittelpunktes und die Halbachsen ablesen zu können.

Man erhält zunächst

$$4(x^2 - 8x) + 25(y^2 + 2y) = 11.$$

Dann werden die Klammerausdrücke zu Binomen ergänzt:

$$4(x^2 - 8x + 16) + 25(y^2 + 2y + 1) = 100.$$

Division durch 100 ergibt

$$\frac{(x-4)^2}{25} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1.$$

Für den Ellipsenmittelpunkt wird $M(4; -1)$ und für die Halbachsen $a = 5$, $b = 2$ abgelesen.

3. Auf der Ellipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ werden zwei beliebige, symmetrisch zur x-Achse gelegene Punkte P_1 und P_2 gewählt (Bild 209). Durch P_1 wird eine Parallele g_1 zur x-Achse und durch P_2 und A_2 eine Gerade g_2 gelegt. Man bestimme analytisch die Gleichung der vom Schnittpunkt P beider Geraden durchlaufenen Kurve.

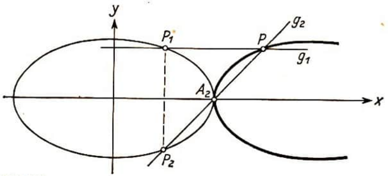


Bild 209

Lösung: Die Gleichungen der Geraden lauten:

$$g_1\colon \quad y = y_1$$

$$g_2\colon \quad \frac{y + y_1}{x - x_1} = \frac{-y_1}{x_1 - a}.$$

Daraus ergibt sich für den Schnittpunkt $P(x;\, y)$:

$$x = 2a - x_1 \tag{V}$$

$$y = y_1. \tag{VI}$$

Für den variablen Ellipsenpunkt P_1 gilt

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1.$$

x_1 und y_1 werden nach (V) bzw. (VI) ersetzt und ergeben

$$\underline{\underline{\frac{(x - 2a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.}}$$

Die gesuchte Kurve ist eine Ellipse, die der ursprünglichen kongruent ist und den Mittelpunkt $M(2a;\, 0)$ besitzt.

4. Es ist die Gleichung der Ellipse in Polarkoordinaten aufzustellen, wenn der Brennpunkt F_1 als Pol und die Richtung von F_1 nach F_2 als Polarachse gewählt werden.

Lösung: Man wählt nach Bild 210 ein rechtwinkliges Koordinatensystem mit dem Ursprung in F_1 und erhält für die Ellipse die Gleichung

$$\frac{(x - e)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

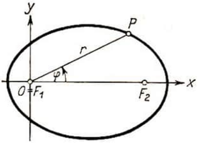


Bild 210

Dann geht man mittels der Gleichungen $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ zu Polarkoordinaten über:

$$\frac{(r\cos\varphi - e)^2}{a^2} + \frac{(r\sin\varphi)^2}{b^2} = 1.$$

Nach r aufgelöst, ergibt unter Verwendung von $a^2 - e^2 = b^2$:

$$r^2 - 2\,\frac{eb^2\cos\varphi}{a^2 - e^2\cos^2\varphi}\,r - \frac{b^4}{a^2 - e^2\cos^2\varphi} = 0$$

$$r = \frac{eb^2\cos\varphi}{a^2 - e^2\cos^2\varphi} + \sqrt{\frac{e^2b^4\cos^2\varphi}{(a^2 - e^2\cos^2\varphi)^2} + \frac{b^4}{a^2 - e^2\cos^2\varphi}}.$$

Wegen $r > 0$ wurde vor der Wurzel nur das Pluszeichen verwandt. Weitere Vereinfachung ergibt

$$r = \frac{eb^2\cos\varphi + ab^2}{a^2 - e^2\cos^2\varphi} = \frac{b^2(a + e\cos\varphi)}{(a + e\cos\varphi)(a - e\cos\varphi)} = \frac{b^2}{a - e\cos\varphi}$$

$$r = \frac{\dfrac{b^2}{a}}{1 - \dfrac{e}{a}\cos\varphi}.$$

Mit $\frac{b^2}{a} = p$ und $\frac{e}{a} = \varepsilon$ folgt die

Polargleichung der Ellipse $$\boxed{r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi}} \tag{150}$$

Speziell wird für

$$\varphi = \quad 0°: \; r = \frac{p}{1-\varepsilon} = \frac{b^2}{a-e} = \frac{a^2 - e^2}{a-e} = a + e$$

$$\varphi = \; 90°: \; r = p$$

$$\varphi = 180°: \; r = \frac{p}{1+\varepsilon} = \frac{b^2}{a+e} = \frac{a^2 - e^2}{a+e} = a - e.$$

Der Leser berechne sich mit $a = 6$ cm, $b = 4$ cm für $\varphi = 0°, 15°, 30°, 45°, \ldots, 345°$ die zugehörigen Radien mit dem Rechenstab und trage die entsprechenden Ellipsenpunkte $P(r; \varphi)$ auf.

AUFGABEN

913. Man bestimme die Mittelpunktsgleichung der Ellipse aus

a) $a = 11$; $e = 8$ b) $a = 8$; $\varepsilon = \frac{1}{4}\sqrt{7}$ c) $a = 18$; $p = 3$

d) $b = 2{,}4$; $\varepsilon = 0{,}6$ e) $e = 12$; $\varepsilon = 0{,}75$ f) $e = 3\sqrt{2}$; $p = 3$

914. Man bestimme die Halbachsen, die Brennpunkte, ε und p der Ellipsen:

a) $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$ b) $\frac{x^2}{4{,}41} + \frac{y^2}{8{,}41} = 1$ c) $27x^2 + 43y^2 - 1161 = 0$

915. Man berechne aus je zwei der Größen a, b, e, ε, p die fehlenden.

916. Von einer Ellipse in Mittelpunktslage sind die große Halbachse $a = 5$ sowie ein Punkt $P(4; -1{,}8)$ gegeben. Wie heißt ihre Gleichung?

917. Die Ellipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ hat die numerische Exzentrizität $\varepsilon = 4/5$ und geht durch den Punkt $P_1(12; 27/5)$. Wie groß sind ihre Halbachsen?

918. a) Von der Ellipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ sind die Punkte $P_1(8; 3{,}6)$, $P_2(6; 4{,}8)$ gegeben. Wie groß sind ihre Halbachsen?
b) Desgl. für $P_1(10; 5)$, $P_2(6; 13)$.

919. Von der Ellipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ sind die Punkte $P_1(-3{,}6; 4)$ und $P_2(4{,}8; -3)$ gegeben. Man bestimme die numerische Exzentrizität ε und die Länge der Brennstrahlen von P_1 und P_2.

920. In die Ellipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ ist ein Quadrat einzuzeichnen, dessen Eckpunkte auf der Ellipse liegen und dessen Seiten parallel zu den Ellipsenachsen sind. Wie groß ist seine Fläche?

921. In die Ellipse $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} = 1$ ist ein Rechteck einzuzeichnen, dessen Ecken auf der Ellipse liegen, während seine Seiten parallel zu den Achsen sind und sich wie 5:3 verhalten. Wie groß ist die Rechtecksfläche?

922. Für die Länge der Brennstrahlen eines Ellipsenpunktes $P(x, y)$ gelten die Formeln:

$$r_1 = a + \varepsilon x, \qquad r_2 = a - \varepsilon x.$$

Man entwickle die Formeln.

923. Gesucht wird die Gleichung einer Parabel, die die Ellipse $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$ im Nebenscheitel B_1 berührt und durch die Brennpunkte geht.

924. Man bestimme a) konstruktiv, b) durch Rechnung die Ellipsenpunkte, deren beide Brennstrahlen aufeinander senkrecht stehen. Wann ist die Aufgabe nur lösbar?

925. In welchen Punkten schneiden sich die Ellipsen

$$4x^2 + 16y^2 = 64 \quad \text{und} \quad x^2 + 64y^2 = 64?$$

926. Man berechne die numerische Exzentrizität der elliptischen Erdbahn, wenn sich die Entfernungen der Erde von der im Brennpunkt stehenden Sonne in Sonnennähe (Perihel) und in Sonnenferne (Aphel) näherungsweise wie 29:30 verhalten.

927. Von dem Planeten Merkur ist die numerische Exzentrizität $\varepsilon = 0{,}2056$ der Bahn sowie die Periheldistanz $d_1 = 46$ Mill. km gegeben. Man berechne die Apheldistanz d_2.

928. Es ist zu zeigen, daß die in Beispiel 1 angegebene Bewegung auch die Ellipse liefert, wenn P außerhalb der Strecke RQ auf deren Verlängerung liegt. Wie groß sind a und b, wenn wieder $\overline{RP} = m$, $\overline{QP} = n$ und $m > n$ ist?

929. Gesucht werden der Mittelpunkt, die Halbachsen und die Brennpunkte für jede der folgenden Ellipsen:

a) $2x^2 + 5y^2 + 24x - 20y - 8 = 0$

b) $3x^2 + 4y^2 - 24x = 0$

c) $4x^2 + y^2 + 40x + 20y + 100 = 0$

d) $x^2 + 16y^2 - 96y = 0$

930. Eine Ellipse, deren Achsen parallel zu den Koordinatenachsen sind, berührt die x-Achse in $P_1(24; 0)$ und schneidet die y-Achse in $P_2(0; -8)$, $P_3(0; -18)$.
Wie heißt die Ellipsengleichung?

931. Ein Kreis um O mit dem Radius r schneidet die x-Achse in den Punkten A und B, in denen die Tangenten t_1 bzw. t_2 gezogen sind. Eine beliebige, in Q berührende Kreistangente schneidet t_1 in T und t_2 in R. Welche Kurve durchläuft bei variablem Q der Schnittpunkt der Geraden AR und BT?

932. Zwei Stäbe $\overline{OR} = m$ und $\overline{RP} = n$ sind in R durch ein Gelenk miteinander verbunden. $\overline{OR}$ dreht sich um O linksläufig mit der Winkelgeschwindigkeit ω gegen die Ebene, während sich $\overline{RP}$ um R mit der Winkelgeschwindigkeit 2ω gegen $\overline{OR}$ rechtsläufig dreht. Welche Bahn beschreibt Punkt P?

933. Gesucht wird die parameterfreie Gleichung der Kurve

$$x = a\,\frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \qquad y = \frac{2bt}{1 + t^2}.$$

934. Man stelle die Gleichung der Ellipse in Polarkoordinaten auf, wenn der Mittelpunkt als Pol und die Hauptachse als Polarachse gewählt wird.

935. Wie groß ist die Entfernung Dresdens ($\varphi = 51°02'$) vom Erdmittelpunkt, wenn die Erde als Rotationsellipsoid betrachtet wird, mit dem Äquatordurchmesser 12756 km und dem Poldurchmesser 12714 km?

33.3. Ellipse und eine Gerade

Entsprechend dem Vorgehen bei der Parabel werden eine beliebige Ellipse mit der Gleichung $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ und eine beliebige Gerade mit der Gleichung $y = mx + n$ betrachtet, und es wird der Durchschnitt der Punktmengen c_e (Ellipse) und g (Gerade) untersucht. Die Koordinaten der Punkte $P_i \in c_e \cap g$ müssen die Bedingungsgleichungen beider Kurven erfüllen. Setzt man den Wert von y aus der Geradengleichung in die Ellipsengleichung ein, dann ergibt sich die quadratische Gleichung

$$x_i^2 + 2\,\frac{a^2mn}{a^2m^2 + b^2}\,x_i - \frac{a^2(b^2 - n^2)}{a^2m^2 + b^2} = 0 \tag{I}$$

mit den Lösungen

$$x_{1;2} = \frac{-a^2mn \pm ab\sqrt{a^2m^2 + b^2 - n^2}}{a^2m^2 + b^2}, \tag{II}$$

und aus der Geradengleichung folgt

$$y_{1;2} = \frac{b^2n \pm abm\sqrt{a^2m^2 + b^2 - n^2}}{a^2m^2 + b^2}. \tag{III}$$

Diskussion

1. Es sei $0 \leqq |m| < \infty$.
   Nach dem Wert der Diskriminante $D = a^2m^2 + b^2 - n^2$, in der alle Größen enthalten sind, die die Ellipse und die Gerade festlegen, werden drei Fälle unterschieden:
   a) $a^2m^2 + b^2 - n^2 > 0$: $c_e \cap g = \{P_1;\ P_2\}$, die Gerade schneidet die Ellipse in zwei Punkten P_1 und P_2.
   b) $a^2m^2 + b^2 - n^2 = 0$: $c_e \cap g = \{P_0\}$, die Gerade ist Tangente an die Ellipse. Für den Berührungspunkt folgen aus (II) und (III) die Koordinaten

$$x_0 = \frac{-a^2mn}{a^2m^2 + b^2} = \frac{-a^2m}{n} \tag{IV}$$

$$y_0 = \frac{b^2n}{a^2m^2 + b^2} = \frac{b^2}{n}. \tag{V}$$

   c) $a^2m^2 + b^2 - n^2 < 0$: $c_e \cap g = \varnothing$, die Gerade schneidet die Ellipse nicht.
2. Ist die Gerade parallel zur y-Achse, dann hat sie die Gleichung $x = c$, und in Verbindung mit der Ellipsengleichung ergeben sich für die Schnittpunkte die Koordinaten $x_{1;2} = c$, $y_{1;2} = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - c^2}$. Für $a > c$ folgen zwei Schnittpunkte, für $a = c$ folgt ein Schnittpunkt und für $a < c$ keiner.

Mit der *Tangentenbedingung* $D = a^2m^2 + b^2 - n^2 = 0$ läßt sich der folgende Satz beweisen:

Satz

Der Fußpunkt des Lotes, das von einem Brennpunkt auf eine Ellipsentangente gefällt ist, liegt auf dem Hauptscheitelkreis.

Beweis: Man wählt neben der Ellipse zunächst eine beliebige Gerade $g: y = mx + n$, fällt von F_1 das Lot l auf g und berechnet den Lotfußpunkt Q (Bild 211). Die Gleichung des Lotes ergibt sich nach der Punktrichtungsgleichung mit

$$l\colon \; y = -\frac{1}{m}x - \frac{e}{m}.$$

Q ist der Schnittpunkt von g und l:

$$x_Q = \frac{-e - mn}{1 + m^2}; \qquad y_Q = \frac{n - me}{1 + m^2}.$$

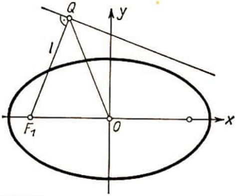


Bild 211

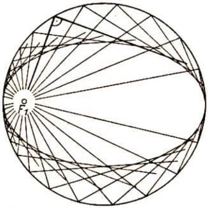


Bild 212

Für die Strecke OQ folgt:

$$\overline{OQ} = \sqrt{x_Q^2 + y_Q^2} = \sqrt{\frac{(-e - mn)^2 + (n - me)^2}{(1 + m^2)^2}}$$

und nach Vereinfachen unter Verwendung von $e^2 = a^2 - b^2$:

$$\overline{OQ} = \sqrt{\frac{a^2 - b^2 + n^2}{1 + m^2}}. \tag{VI}$$

Ist aber g eine Tangente, dann führt $D = 0$ zu der Beziehung $n^2 = a^2m^2 + b^2$, die in (VI) eingesetzt wird:

$$\overline{OQ} = \sqrt{\frac{a^2 - b^2 + a^2m^2 + b^2}{1 + m^2}} = \sqrt{\frac{a^2(1 + m^2)}{1 + m^2}} = a,$$

d. h., Q liegt auf dem Hauptscheitelkreis.

Aus obigem Satz folgt eine einfache *Hüllkonstruktion* der Ellipse: Man legt durch F_1 (oder F_2) beliebige Geraden und errichtet zu ihnen in den Schnittpunkten mit dem Hauptscheitelkreis Senkrechten. Diese sind Tangenten der Ellipse (Bild 212).

AUFGABEN

936. Man bestimme die Schnittpunkte von der Ellipse und der Geraden:

a) $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1; \quad y = -\frac{1}{2}x + 3$ b) $\frac{x^2}{42} + \frac{y^2}{21} = 1; \quad y = -x + 9$

c) $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{32} = 1; \quad y = -\frac{\sqrt{6}}{2}x + 8\sqrt{2}$ d) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1; \quad y = 2x$

937. Wie lang ist die Sehne, die durch die Ellipse $100x^2 + 625y^2 = 62500$ aus der Geraden $y = -\frac{2}{5}x + \frac{34}{5}$ herausgeschnitten wird?

938. Durch den Brennpunkt F_1 und den Nebenscheitel B_1 der Ellipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ ist eine Gerade gelegt. Wie lang ist die zugehörige Ellipsensehne und welchen Abstand hat der Brennpunkt F_2 von der Geraden?

33.4. Tangente der Ellipse

Die Ellipsentangente soll in P_0 berühren. Als Gerade durch P_0 hat sie die Gleichung

$$y - y_0 = m(x - x_0). \tag{I}$$

Die Tangenteneigenschaft wird durch geeignete Wahl von m erfüllt. Division der Gleichung (V) durch Gleichung (IV) in 33.3. ergibt

$$\frac{y_0}{x_0} = -\frac{b^2}{a^2m} \quad \text{bzw.} \quad m = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}. \tag{II}$$

Damit folgt aus (I)

$$y - y_0 = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}(x - x_0)$$

oder umgeformt

$$b^2xx_0 + a^2yy_0 = b^2x_0^2 + a^2y_0^2$$

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}. \tag{III}$$

Die rechte Seite von (III) ist aber Eins, da die Koordinaten von P_0 die Ellipsengleichung erfüllen müssen.

Gleichung der Ellipsentangente im Ellipsenpunkt P_0

$$\boxed{\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1} \tag{151}$$

Liegt P_0 nicht wie in Bild 213 auf der Ellipse, sondern außerhalb (Bild 214), dann stellt (151) die Gleichung der Berührungssehne s dar. Der Beweis wird ähnlich wie bei der Parabel geführt.

Anmerkung: Mit Hilfe der Differentialrechnung folgt für den Richtungsfaktor einer Ellipsentangente

$$m = y' = \left(\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\right)' = \frac{b(-2x)}{2a\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{b^2 x}{a^2\left(\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\right)} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$$

und speziell für P_0 wieder die Gleichung (II).

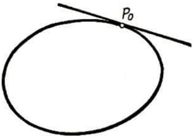


Bild 213

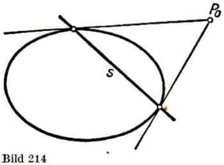


Bild 214

BEISPIELE

1. Welche Tangenten der Ellipse $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{36} = 1$ bilden mit der x-Achse Winkel von 45°?

   Lösung: Aufgaben, bei denen die Tangentenneigungen vorgegeben sind, lassen sich auf zwei Wegen lösen. Im ersten Fall geht man von der Gleichung $y = mx + n$ der Tangente aus, in der $m = 1$ bekannt ist, und berechnet sich aus der Tangentenbedingung $a^2 m^2 + b^2 - n^2 = 0$ die Größe n:

$$n = \pm\sqrt{a^2 m^2 + b^2} = \pm\sqrt{144 + 36} = \pm\sqrt{180} = \pm 6\sqrt{5}.$$

   Man erhält zwei Tangenten als Lösungen:

$$\underline{\underline{t_1:\ y = x + 6\sqrt{5}}} \qquad \underline{\underline{t_2:\ y = x - 6\sqrt{5}.}}$$

   Der zweite Weg wird zweckmäßig beschritten, wenn auch der Berührungspunkt gesucht wird. Die Tangentengleichung (151) wird nach y aufgelöst:

$$y = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0} x + \frac{b^2}{y_0} = -\frac{x_0}{4y_0} x + \frac{36}{y_0}$$

   und der Richtungsfaktor gleich Eins gesetzt:

$$-\frac{x_0}{4y_0} = 1.$$

   Da P_0 auf der Ellipse liegt, gilt außerdem

$$\frac{x_0^2}{144} + \frac{y_0^2}{36} = 1.$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergeben sich die Koordinaten der zwei möglichen Berührungspunkte

$$P_0\left(-\frac{24}{5}\sqrt{5};\ \frac{6}{5}\sqrt{5}\right);\quad P_0'\left(\frac{24}{5}\sqrt{5};\ -\frac{6}{5}\sqrt{5}\right).$$

Nach (151) folgen dann die Tangentengleichungen.

2. Es ist zu beweisen: Das Produkt der Abstände der Brennpunkte von einer Ellipsentangente ist konstant gleich b^2.

Lösung: Die HESSEsche Normalform der Tangentengleichung (151) lautet

$$\frac{b^2 x_0 x + a^2 y_0 y - a^2 b^2}{\sqrt{b^4 x_0^2 + a^4 y_0^2}} = 0.$$

Für die Abstände d_1 bzw. d_2 der Brennpunkte $F_1(-e; 0)$, $F_2(e; 0)$ folgt (Bild 215)

$$d_1 = \frac{-b^2 x_0 e - a^2 b^2}{\sqrt{b^4 x_0^2 + a^4 y_0^2}} \qquad d_2 = \frac{b^2 x_0 e - a^2 b^2}{\sqrt{b^4 x_0^2 + a^4 y_0^2}}$$

und für das Produkt

$$d_1 \cdot d_2 = -\frac{b^4 x_0^2 e^2 - a^4 b^4}{b^4 x_0^2 + a^4 y_0^2}.$$

Mit den Formeln $a^2 y_0^2 = a^2 b^2 - b^2 x_0^2$ und $e^2 = a^2 - b^2$ vereinfacht sich der Ausdruck zu

$$\underline{\underline{d_1 \cdot d_2 = b^2.}}$$

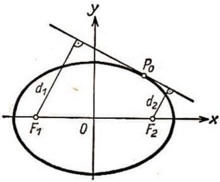


Bild 215

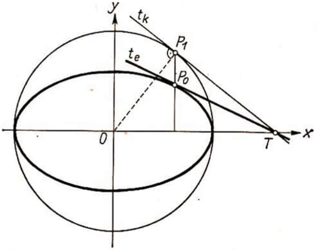


Bild 216

Eine *Tangentenkonstruktion*

An eine Ellipse ist im Punkt P_0 die Tangente anzulegen. Man zeichnet den Hauptscheitelkreis und verlängert die zu P_0 gehörende Ordinate bis P_1 (Bild 216). Die Kreistangente t_k in P_1 schneidet die Verlängerung der Hauptachse in T. $TP_0 = t_e$ ist dann die gesuchte Ellipsentangente.

Beweis: Die Tangentengleichungen lauten wegen $x_0 = x_1$:

$$t_e\colon \quad \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1, \qquad\qquad t_k\colon \quad xx_0 + yy_1 = a^2.$$

Um beide Tangenten mit der x-Achse zu schneiden, setzt man in den obigen Gleichungen $y = 0$ und erhält beidemal den gleichen Wert

$$x_T = \frac{a^2}{x_0}.$$

AUFGABEN

939. Wie heißt die Gleichung der Tangente an eine gegebene Ellipse in einem gegebenen Punkt:

a) $\dfrac{x^2}{60} + \dfrac{y^2}{45} = 1; \quad P_0\left(\dfrac{4}{3}\sqrt{15};\ y_0 > 0\right)$

b) $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{4} = 1; \quad P_0\left(x_0 > 0;\ y_0 = -\dfrac{8}{5}\right)$?

940. a) Wie heißt die Gleichung der Tangente an die Ellipse

$$\frac{(x - x_m)^2}{a^2} + \frac{(y - y_m)^2}{b^2} = 1 \quad \text{in } P_0?$$

b) desgl. für $M(4; -1)$, $a = 5$, $b = 4$, $P_0(7; y > 0)$.

941. Welche Gleichung besitzt die Normale der Ellipse

$45x^2 + 60y^2 = 2700$ durch $P_0(2\sqrt{3};\ y_0 < 0)$?

942. An die Ellipse $9x^2 + 100y^2 - 900 = 0$ ist im Punkt $P_0(6; y_0 > 0)$ die Tangente anzulegen. Welchen Abstand hat der linke Hauptscheitelpunkt von der Tangente?

943. Der Scheitel einer nach rechts geöffneten Parabel, deren Achse mit der x-Achse zusammenfällt und die den Halbparameter $p = 9/25$ hat, liegt im linken Hauptscheitel der Ellipse $9x^2 + 25y^2 = 225$. Wie lauten die Gleichungen der in den Schnittpunkten beider Kurven an die Ellipse gelegten Tangenten?

944. Man bestimme die Fläche des Parallelogrammes, das die vier Tangenten der Ellipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ in den Endpunkten der Parameter $2p$ miteinander bilden.

945. In den Schnittpunkten zwischen der Geraden $y = -\dfrac{14}{27}x - \dfrac{2}{3}$ und der Ellipse $4x^2 + 9y^2 = 36$ sind die Tangenten gezogen. Welchen Winkel bilden sie miteinander?

946. Unter welchen Winkeln schneiden einander die Kurven

a) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ und $\dfrac{y^2}{a^2} + \dfrac{x^2}{b^2} = 1$

b) $16x^2 + 112y^2 = 256$ und $x^2 = 9y$

c) $\dfrac{x^2}{40} + \dfrac{y^2}{15} = 1$ und $\dfrac{x^2}{20} + \dfrac{y^2}{45} = 1$

d) $16x^2 + 25y^2 = 400$ und der Kreis durch die Endpunkte der Ellipsenparameter?

947. Welche Tangenten der Ellipse $13x^2 + 52y^2 = 676$ sind a) parallel, b) senkrecht zu der Geraden $y = -\dfrac{3}{4}x + 10$?

948. Man lege um die Ellipse $25x^2 + 100y^2 = 2500$ ein Tangentenrechteck, dessen eine Seite in $P_0(8;\ y_0 < 0)$ berührt. Wie heißen die Gleichungen seiner Seiten?

949. a) Man bestimme die Tangenten von $P_0(5; 6)$ an die Ellipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

b) Desgl. für $\frac{(x-2)^2}{10} + \frac{(y-3)^2}{2{,}5} = 1, \quad P_0(-2; 4)$.

950. Die Ellipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ berührt die Gerade $x + 3y - 18 = 0$ in $P_0(3; 5)$. Wie groß sind die Halbachsen?

33.5. Weitere Eigenschaften der Ellipse

33.5.1. Konjugierte Durchmesser

Eine Gerade $y = m_1x + n$ schneide die Ellipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ in den Punkten P_1 und P_2. P_m sei der Mittelpunkt der Sehne P_1P_2 (Bild 217). Die Koordinaten von P_m ergeben sich aus

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

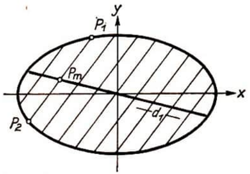


Bild 217

Für die Koordinaten der Schnittpunkte P_1 und P_2 werden die Werte aus den Formeln (II) und (III) aus 33.3. eingesetzt:

$$x_m = -\frac{a^2m_1n}{a^2m_1^2 + b^2} \tag{I}$$

$$y_m = \frac{b^2n}{a^2m_1^2 + b^2}. \tag{II}$$

(II) durch (I) dividiert ergibt

$$\frac{y_m}{x_m} = -\frac{b^2}{a^2m_1} \quad \text{oder} \quad y_m = -\frac{b^2}{a^2m_1}x_m. \tag{III}$$

Man betrachtet nun eine Schar paralleler Sehnen, die folglich einen gemeinsamen Richtungsfaktor m_1 besitzen. In (III) ist daher außer a und b auch m_1 konstant. Die Mittelpunktskoordinaten jeder Sehne der Parallelenschar erfüllen dieselbe Gleichung (III), d. h., die Sehnenmittelpunkte P_m liegen auf der Geraden d_1:

$$y = -\frac{b^2}{a^2m_1}x. \tag{IV}$$

Die Gerade geht durch den Ellipsenmittelpunkt und heißt deshalb **Durchmesser** der Ellipse.

Satz

Die Mittelpunkte einer Schar paralleler Sehnen liegen auf einem Durchmesser der Ellipse.

Der Durchmesser heißt der Sehnenschar, die er halbiert, *zugeordnet* oder *konjugiert*. Zu einem gewählten Richtungsfaktor m_1 der Sehnenschar gehört der Richtungsfaktor $m_2 = -\frac{b^2}{a^2 m_1}$ des zugeordneten Durchmessers.

Wird parallel zu dem Durchmesser d_1 eine zweite Schar paralleler Sehnen mit dem Richtungsfaktor m_2 gelegt, dann ist ihnen nach (IV) ein Durchmesser d_2 mit der Gleichung

$$y = -\frac{b^2}{a^2 m_2}\,x = -\frac{b^2}{a^2\left(-\frac{b^2}{a^2 m_1}\right)}\,x = m_1 x$$

zugeordnet. d_2 ist also parallel zur ersten Sehnenschar (Bild 218).

Definition

Zwei Durchmesser der Ellipse heißen einander *zugeordnet* oder *konjugiert*, wenn jeder die dem anderen Durchmesser parallelen Sehnen halbiert.

Ihre Richtungsfaktoren m_1 und m_2 erfüllen die Bedingung

$$\boxed{m_1 \cdot m_2 = -\frac{b^2}{a^2}} \tag{152}$$

Ähnlich wie bei der Parabel läßt sich beweisen, daß die Tangenten in den Schnittpunkten eines Durchmessers mit der Ellipse parallel zu dem konjugierten Durchmesser sind. Die einzigen senkrecht aufeinanderstehenden konjugierten Durchmesser sind die Haupt- und die Nebenachse der Ellipse. Der Durchmesser wurde als Gerade definiert. Je nach dem Problem versteht man darunter auch die Strecke, die die Ellipse von der Geraden ausschneidet.

BEISPIEL

Es ist zu beweisen: Sind $d_1 = 2a_1$ und $d_2 = 2b_1$ zwei konjugierte Durchmesser der Ellipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, die den Winkel β miteinander einschließen, dann gilt

a) $a_1^2 + b_1^2 = a^2 + b^2$ (V) b) $a_1 \cdot b_1 \cdot \sin\beta = a \cdot b$. (VI)

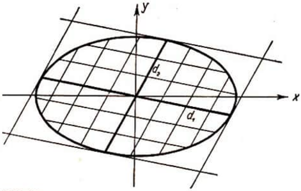


Bild 218

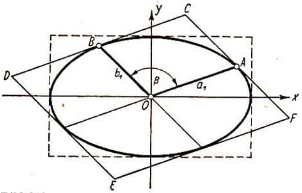


Bild 219

Lösung:

a) Sind $y = m_1 x$ und $y = m_2 x$ die Gleichungen beider Durchmesser, dann gilt $m_2 = -b^2/a^2 m_1$. Für die Koordinaten der Punkte A und B (Bild 219) erhält man nach (II) und (III) aus 33.3. wegen $n = 0$:

$$x_a = \frac{ab}{\sqrt{a^2 m_1^2 + b^2}}; \quad x_b = \frac{ab}{-\sqrt{a^2 m_2^2 + b^2}} = \frac{-a^2 m_1}{\sqrt{a^2 m_1^2 + b^2}}$$

$$y_a = \frac{abm_1}{\sqrt{a^2 m_1^2 + b^2}}; \quad y_b = \frac{abm_2}{-\sqrt{a^2 m_2^2 + b^2}} = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 m_1^2 + b^2}}.$$

Für die Halbmesser folgt:

$$a_1^2 = x_a^2 + y_a^2 = \frac{a^2 b^2 (1 + m_1^2)}{a^2 m_1^2 + b^2} \tag{VII}$$

$$b_1^2 = x_b^2 + y_b^2 = \frac{a^4 m_1^2 + b^4}{a^2 m_1^2 + b^2} \tag{VIII}$$

$$a_1^2 + b_1^2 = \frac{a^2 b^2 + a^2 b^2 m_1^2 + a^4 m_1^2 + b^4}{a^2 m_1^2 + b^2} = \frac{(a^2 + b^2)(a^2 m_1^2 + b^2)}{a^2 m_1^2 + b^2} = a^2 + b^2.$$

b) Man berechnet zunächst

$$\tan\beta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1} = \frac{-\dfrac{b^2}{a^2 m_1} - m_1}{1 - \dfrac{b^2}{a^2 m_1} m_1} = -\frac{b^2 + a^2 m_1^2}{(a^2 - b^2)\, m_1}$$

und erhält damit nach Vereinfachung:

$$\sin^2\beta = \frac{\tan^2\beta}{1 + \tan^2\beta} = \frac{(a^2 m_1^2 + b^2)^2}{(a^4 m_1^2 + b^4)(1 + m_1^2)}. \tag{IX}$$

Schließlich folgt mit (VII), (VIII) und (IX) sofort durch Kürzen

$$a_1^2 \cdot b_1^2 \cdot \sin^2\beta = a^2 b^2 \quad \text{oder} \quad a_1 b_1 \sin\beta = ab.$$

Die linke Seite der Gleichung (VI) ist die Fläche des Parallelogramms $OACB$, die also konstant ist. Folglich ist auch die Fläche des Parallelogrammes $CDEF$, das von den Tangenten in den Schnittpunkten zwischen Durchmesser und Ellipse gebildet wird, konstant gleich $4ab$, d. h. gleich dem aus den Scheiteltangenten gebildeten Rechteck.

33.5.2. Konstruktion und Brennpunkteigenschaft

Zur Bestimmung eines Ellipsenpunktes P_0 und der zugehörigen Tangente t gilt die folgende *Konstruktion:*

Man schlägt um einen Brennpunkt, etwa F_1, einen Kreis mit dem Radius $2a$ und verbindet einen beliebigen Punkt R dieses Kreises mit F_1 und F_2. Die Mittelsenkrechte von $\overline{F_2R}$ ist eine Ellipsentangente und schneidet F_1R in dem Ellipsenpunkt P_0 (Bild 220).

Der *Beweis* soll planimetrisch geführt werden. Nach der Konstruktion ist $\triangle F_2RP_0$ gleichschenklig, also

$$\overline{P_0R} = \overline{P_0F_2}. \tag{I}$$

Weiterhin gilt

$$\overline{F_1R} = \overline{F_1P_0} + \overline{P_0R} = 2a$$

und mit (I):

$$\overline{F_1P_0} + \overline{P_0F_2} = 2a,$$

d. h., P_0 erfüllt die Definition für einen Ellipsenpunkt. Nun verbindet man einen von P_0 verschiedenen Punkt Q auf der Mittelsenkrechten t mit F_1, F_2 und R. Im Dreieck F_1RQ gilt dann:

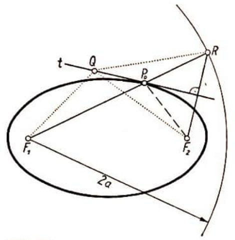


Bild 220

$$\overline{F_1Q} + \overline{QR} > \overline{F_1R} = 2a$$

und wegen

$$\overline{QR} = \overline{F_2Q}$$

folgt

$$\overline{F_1Q} + \overline{F_2Q} > 2a.$$

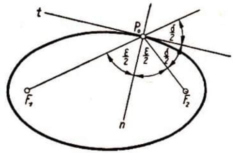


Bild 221

Q ist also kein Ellipsenpunkt. Da somit P_0 der einzige Punkt von t ist, der auf der Ellipse liegt, muß t eine Ellipsentangente sein.

Aus Bild 220 liest man außerdem ab: t halbiert als Höhe im gleichschenkligen Dreieck P_0F_2R den Winkel F_2P_0R und folglich die Normale durch P_0 den Winkel $F_1P_0F_2$ (Bild 221).

Satz

Die Normale in einem beliebigen Ellipsenpunkt P_0 halbiert den Winkel ε zwischen den zugehörigen Brennstrahlen, die Tangente durch P_0 den Nebenwinkel δ.

Nach diesem Satz lassen sich die Normale und die Tangente in einem gegebenen Ellipsenpunkt konstruieren, wenn die Brennpunkte bekannt sind.

Anmerkung: An einer Mauer mit elliptischem Grundriß werden nach dem obigen Satz alle von einem Brennpunkt ausgehenden Schallwellen so reflektiert, daß sie sich im anderen Brennpunkt vereinigen (Flüstergalerie). Da sie alle den gleichen Weg $2a$ durchlaufen, treten keine Interferenzerscheinungen auf. Das gleiche gilt für die von einem Brennpunkt eines elliptischen Spiegels ausgehenden Lichtstrahlen. Hieraus erklären sich auch die Bezeichnungen Brennpunkt und Brennstrahl.

33.5.3. Ellipse als senkrechte Parallelprojektion des Kreises

Abschließend wird noch eine Ellipsendefinition besprochen, die einige der angegebenen Ellipseneigenschaften anschaulich erklärt. Die Ebene eines Kreises k ist gegen eine waagerechte Ebene Γ unter dem Winkel α geneigt. Durch Projektionsstrahlen, die senkrecht zu Γ sind, wird der Kreis auf Γ projiziert und ergibt dann eine Ellipse k' (Bild 222).

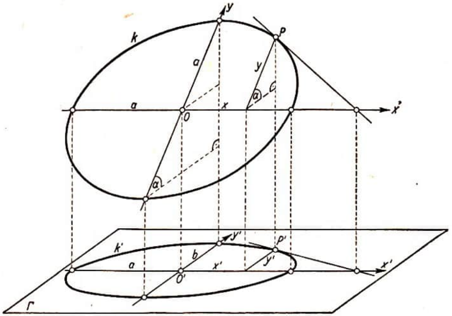


Bild 222

Beweis: Der waagerechte Kreisdurchmesser $2a$ projiziert sich in wahrer Länge. Der dazu senkrechte Kreisdurchmesser wird in der Projektion am stärksten verkürzt und hat dort die Länge $2b = 2a \cos \alpha$.
Hieraus folgt

$$\cos \alpha = \frac{b}{a}.$$

Nun wird in die Kreisebene ein Koordinatensystem gelegt, dessen x-Achse im horizontalen Durchmesser liegt. Die Projektion dieses Systems ist das $x'; y'$-System. Für einen Kreispunkt P und seine Projektion P' gilt

$$x' = x, \qquad \text{(I)} \qquad\qquad y' = y \cos \alpha = y \cdot \frac{b}{a}. \qquad \text{(II)}$$

Die Koordinaten von P erfüllen die Kreisgleichung:

$$k\colon\; x^2 + y^2 = a^2.$$

Mittels (I) und (II) kann man zur Gleichung der Kurve k' übergehen:

$$x'^2 + \frac{a^2}{b^2}\, y'^2 = a^2 \qquad\qquad \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1.$$

k' ist also eine Ellipse. Wie (II) zeigt, wird jede Kreisordinate im gleichen Verhältnis verkürzt, während die Abszissen gleich bleiben. Das ist aber der in Bild 206 dargestellte Sachverhalt. Man braucht nur Kreis und Ellipse von Bild 222 so in eine Ebene zu bringen, daß die x- und x'-Achse zusammenfallen. Wegen dieser Beziehung wird die Ellipse auch das *affine Bild* des Kreises genannt.
Von zwei beliebigen, aufeinander senkrecht stehenden Kreisdurchmessern halbiert bekanntlich jeder die zu dem anderen Durchmesser parallelen Sehnen. Die gleiche Eigenschaft findet man bei den konjugierten Durchmessern der Ellipse wieder. Da bei der Parallelprojektion die Parallelität von Strecken sowie ihre Teilverhältnisse (hier speziell für $\lambda = +1$) erhalten bleiben, bilden sich also zueinander senkrechte Kreisdurchmesser auf konjugierte Durchmesser der Ellipse ab.
Nur die auf der x- bzw. y-Achse liegenden Kreisdurchmesser haben auch zueinander rechtwinklige Projektionen, und zwar die Ellipsenachsen.
Weiterhin ist die in Bild 216 angegebene Tangentenkonstruktion mit Bild 222 anschaulich zu erklären.

AUFGABEN

951. Gegeben sind die Ellipse $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{36} = 1$ und der Durchmesser d_1: $y = -\frac{2}{5}x$. Man bestimme den konjugierten Durchmesser d_2 und die Gleichungen der Tangenten in den Schnittpunkten der Durchmesser mit der Ellipse.
952. Man beweise, daß die Tangente im Schnittpunkt zwischen Durchmesser und Ellipse parallel zu der zugeordneten Sehnenschar ist.
953. Man beweise, daß ein Punkt P_0 außerhalb der Ellipse auf dem Durchmesser liegt, der seiner Berührungssehne zugeordnet ist.
954. Der Punkt $P_1(4; 2)$ liegt innerhalb der Ellipse $\frac{x^2}{60} + \frac{y^2}{24} = 1$. Welche Sehne wird von P_1 halbiert?
955. Welcher Durchmesser der Ellipse $8{,}4x^2 + 12y^2 = 100{,}8$ halbiert die Sehne $y = -2x + 1$?
956. Die Gleichung eines Durchmessers der Ellipse $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$ ist $y = \frac{4}{3}x$. Welchen Winkel bildet sein konjugierter Durchmesser mit ihm?
957. Welche konjugierten Durchmesser der Ellipse sind gleich lang und wie groß ist ihre Länge?
958. Von einer Ellipse sind zwei konjugierte Halbmesser $a_1 = 2{,}4$, $b_1 = 6{,}4$ und der eingeschlossene Winkel $\beta = 150°$ gegeben. Wie groß sind die Halbachsen a und b?
959. Der ebene Schnitt durch die Achse eines elliptischen Hohlspiegels ist durch die Gleichung $\frac{x^2}{676} + \frac{y^2}{169} = 1$, $x \geqq 0$ gegeben. Ein Lichtstrahl mit der Gleichung $2x - 3y - 16 = 0$ wird am Spiegel reflektiert. In welchem Punkt R trifft der reflektierte Strahl wieder die Achse?

34. Hyperbel

34.1. Definition und Konstruktion

Definition

Die Hyperbel ist die Menge aller Punkte der Ebene, für die die Differenz ihrer Abstände von zwei festen Punkten konstant ist. (Vgl. 31.4.)

In die Definition der Ellipse tritt bei der Hyperbel nur an die Stelle der konstanten Abstandssumme die konstante Differenz. Zwischen den Sätzen bzw. Gleichungen und Formeln für beide Kurven gibt es daher auch nur geringe Unterschiede; meist tritt nur eine Änderung in den Vorzeichen ein. Es kann deshalb in den folgenden Abschnitten auf verschiedene Ableitungen verzichtet werden. Ausführlicher wird auf einige Eigenschaften eingegangen, die für die Hyperbel typisch sind.

Für die konstante Differenz wird

$$|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = 2a \qquad \text{(I)}$$

und für den Abstand der **Brennpunkte** F_1 und F_2

$$\overline{F_1F_2} = 2e$$

gesetzt (Bild 223). e ist die **lineare Exzentrizität** der Hyperbel, und zwar muß $e > a$ sein. $\varepsilon = \frac{e}{a} > 1$ ist die **numerische Exzentrizität** der Hyperbel.

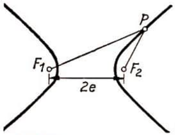


Bild 223

Punktweise Konstruktion

a und e seien gegeben. Die Konstruktion entspricht der in 33.1. angegebenen ersten Ellipsenkonstruktion. Nur ist jetzt R auf der Verlängerung von $\overline{CD}$ beliebig zu wählen, aber so, daß r_2 (bzw. r_1) $> e - a$ wird (Bild 224). Die Konstruktion beweist die Existenz von zwei Symmetrieachsen, die sich im Mittelpunkt M der Hyperbel schneiden. Die Symmetrieachse durch F_1 und F_2 heißt **Hauptachse**, die dazu senkrechte Symmetrieachse heißt **Nebenachse**.

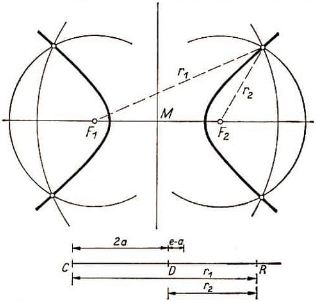


Bild 224

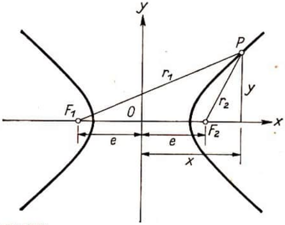


Bild 225

34.2. Hyperbelgleichungen

Man läßt die Koordinatenachsen wieder mit den Symmetrieachsen zusammenfallen (Bild 225). Aus der Bedingung

$$|r_1 - r_2| = 2a$$

folgt

$$\left|\sqrt{(x+e)^2+y^2}-\sqrt{(x-e)^2+y^2}\right|=2a.$$

Durch ähnliche Umformung wie bei der Ellipse erhält man die Gleichung

$$(e^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(e^2-a^2). \tag{I}$$

Sie stimmt mit der Ellipsengleichung (I) aus 33.2. formal überein. Weil aber für die Hyperbel $e > a$ ist, setzt man jetzt abkürzend

$$\boxed{e^2-a^2=b^2} \tag{153}$$

Aus (I) folgt dann

$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$$

oder die

Mittelpunktsgleichung der Hyperbel

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1} \tag{154}$$

Diskussion der Mittelpunktsgleichung

Die Hyperbel ist durch zwei der drei Größen a, b und e bestimmt. Die Mittelpunktsgleichung ist rein quadratisch in x und y, wodurch die Symmetrie der Kurve bezüglich der x- und der y-Achse ausgedrückt wird. Für $y = 0$ folgt aus (154) $x = \pm a$. Die Hyperbel schneidet die x-Achse in den **Hauptscheitelpunkten** $A_1(-a;\ 0)$ und $A_2(a;\ 0)$. Mit $x = 0$ erhält man aus (154) $y = \pm b\,\mathrm{j}$. Es existieren also keine Schnittpunkte mit der y-Achse, d. h., die Hyperbel besteht aus zwei getrennten *Ästen* (Bild 226).

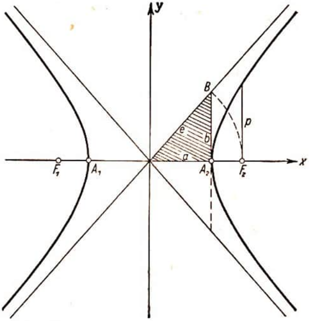


Bild 226

a heißt die **reelle Halbachse**, b die **imaginäre Halbachse**. Diese Bezeichnungen werden auch beibehalten, wenn die Brennpunkte auf der y-Achse liegen. In (154) sind dann x und y zu vertauschen. Im Gegensatz zur Ellipse kann jetzt auch $a > b$ sein. Explizit in y lautet (154)

$$\boxed{y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}} \tag{154a}$$

Für jeden Wert $|x| \geqq a$ ist die Wurzel reell. Zu diesen x-Werten kann man, bis auf $x = \pm a$, je zwei y-Werte berechnen, die sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden (Symmetrie zur x-Achse).

Aus $|x| \to \infty$ folgt auch $|y| \to \infty$. Für $x \in (-a, a)$ wird die Wurzel imaginär, also existieren für dieses Intervall keine Hyperbelpunkte. Die beiden Äste der Hyperbel erstrecken sich von A_1 bzw. A_2 nach beiden Seiten bis in das Unendliche. Bei $|x| \to \infty$ zeigt die Hyperbel ein für sie typisches, von der Parabel abweichendes Verhalten, das untersucht werden soll. Wegen der Symmetrie der Hyperbel bezüglich beider Koordinatenachsen kann die Untersuchung auf den im ersten Quadranten liegenden Kurventeil beschränkt bleiben. Die Gleichung (154a) wird in der Form

$$y = \frac{b}{a} x \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} \qquad (x \geqq 0) \tag{II}$$

geschrieben. Für $x \to \infty$ folgt $\frac{a^2}{x^2} \to 0$ oder $\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} \to 1$ und damit für (II)

$$y = \frac{b}{a} x \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} \to \bar{y} = \frac{b}{a} x \qquad (x \geqq 0) \tag{III}$$

Die rechte Kurvengleichung in (III) stellt den im 1. Quadranten liegenden Teil einer Geraden durch den Ursprung dar. Weil der Wurzelausdruck für jedes x kleiner als 1 wird, ist die Ordinate y eines Hyperbelpunktes stets kleiner als die zur gleichen Abszisse gehörende Ordinate $\bar{y}$ des entsprechenden Geradenpunktes. Durch Vergrößern von x läßt sich diese Ordinatendifferenz beliebig verkleinern. Entsprechendes gilt für die anderen Quadranten. Die Hyperbel nähert sich also von der x-Achse her immer mehr zwei durch den Ursprung gehenden Geraden, ohne sie aber je zu berühren oder zu schneiden.

Die Geraden

$$\boxed{y = \pm \frac{b}{a} x} \tag{155}$$

heißen **Asymptoten**[1]) der Hyperbel.

Mit den Richtungsfaktoren $\pm \frac{b}{a}$ der Asymptoten und der Beziehung (153) ergibt sich das in Bild 226 dargestellte rechtwinklige Dreieck OA_2B. Es zeigt, wie aus den gegebenen Größen a und b die Asymptoten und die Brennpunkte konstruiert werden können. Sind Scheitelpunkte und Asymptoten bekannt, dann läßt sich die Hyperbel leicht angenähert zeichnen.

Für $x = \pm e$ folgt aus (154)

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{e^2 - a^2} = \pm \frac{b^2}{a}.$$

---

[1]) griechisch: asymptotos, nicht zusammenfallend

Die Hyperbelsehne $2p$ durch F_1 bzw. F_2 senkrecht zur Hauptachse heißt Parameter und $p = \frac{b^2}{a}$ **Halbparameter** der Hyperbel. Der gleiche Ausdruck ergab sich für den Halbparameter der Ellipse.

Während der Sonderfall $a = b$ bei der Ellipse den Kreis lieferte, ergibt sich hier für $a = b$ die **gleichseitige Hyperbel** mit der Gleichung

$$x^2 - y^2 = a^2. \tag{IV}$$

Ihre Asymptoten $y = \pm x$ schneiden die Koordinatenachsen unter 45° und einander unter 90° (Bild 227).

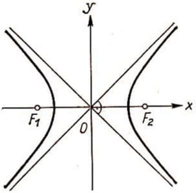


Bild 227

BEISPIELE

1. Eine Ellipse hat die Gleichung $19x^2 + 64y^2 = 76$. Welche Hyperbel hat mit der Ellipse die Brennpunkte gemeinsam und geht durch den Punkt $P_1(^5/_4; 2)$?

Lösung: Die linearen Exzentrizitäten von Ellipse und Hyperbel müssen gleich sein:

$$e_E = e_H.$$

Nach (146) gilt $\quad e_E^2 = a_E^2 - b_E^2 = 4 - \frac{19}{16} = \frac{45}{16}$

und nach (153) $\quad e_H^2 = \frac{45}{16} = a_H^2 + b_H^2$

oder $\quad b_H^2 = \frac{45}{16} - a_H^2.$

P_1 liegt auf der Hyperbel:

$$\frac{25}{16a_H^2} - \frac{4}{b_H^2} = 1.$$

Ersetzt man b_H^2 nach (V) und formt um, dann folgt

$$a_H^4 - \frac{134}{16}a_H^2 + \frac{1125}{256} = 0$$

oder $\quad a_H^2 = \frac{67 \pm 58}{16}.$

Da $a_H < e_H$ sein muß, gilt nur das Minuszeichen:

$$a_H^2 = \frac{9}{16}, \quad a_H = \frac{3}{4},$$

und nach (V) ist $b_H = 3/2$.

Die Hyperbelgleichung lautet:

$$\underline{\underline{\frac{x^2}{\frac{9}{16}} - \frac{y^2}{\frac{9}{4}} = 1.}}$$

2. Die folgende Hyperbelkonstruktion ist zu beweisen: Um O werden zwei Kreise mit den Radien a bzw. b gezogen, Eine beliebige Gerade durch O schneidet die Kreise in Q und R. Die Kreistangenten in Q und R treffen die x-Achse in S bzw. T. Wird $\overline{QS}$ in T senkrecht zur x-Achse abgetragen, dann ergeben sich die Hyperbelpunkte P und P' (Bild 228).

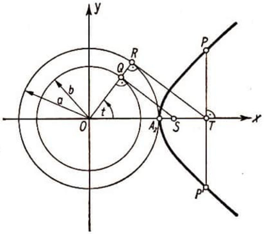


Bild 228

Lösung: Der beliebig gewählte Radiusvektor OR bilde mit der x-Achse den Winkel t. Aus Bild 228 wird für die Koordinaten von P abgelesen:

$$x = \overline{OT} = \frac{a}{\cos t};$$

$$y = \overline{PT} = \overline{QS} = b \tan t.$$

Dividiert man die erste Gleichung durch a, die zweite durch b, quadriert beide Gleichungen und subtrahiert sie voneinander, dann folgt

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{\cos^2 t} - \tan^2 t = 1,$$

da $\frac{1}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t$ ist. Die Gleichungen

$$x = \frac{a}{\cos t}, \qquad y = b \tan t$$

ergeben also eine *Parameterdarstellung* der Hyperbel mit t als Parameter (Häufiger wird die Parameterdarstellung $x = a \cosh t$, $y = b \sinh t$ angewendet. Vgl. Band „Analysis").

Ist allgemein $M(x_m; y_m)$ der Hyperbelmittelpunkt und ist die Hauptachse parallel zur x-Achse, dann lautet die Hyperbelgleichung

$$\boxed{\frac{(x - x_m)^2}{a^2} - \frac{(y - y_m)^2}{b^2} = 1} \tag{156}$$

oder umgeformt mit entsprechender Bezeichnung der Koeffizienten

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0, \tag{VI}$$

wobei $A \cdot B < 0$ sein muß.

AUFGABEN

960. Man bestimme die Mittelpunktsgleichung der Hyperbel aus

a) $b = 2,\ e = \frac{17}{4}$ b) $e = \frac{13}{6},\ \varepsilon = \frac{13}{12}$ c) $\varepsilon = \frac{5}{3},\ p = 1{,}6$

961. Eine Hyperbel hat ihre Scheitelpunkte in den Brennpunkten der Ellipse $\frac{x^2}{52} + \frac{y^2}{36} = 1$ und die gleiche Nebenachse wie die Ellipse. Wo schneiden sich beide Kurven?

962. Eine Hyperbel geht durch die Punkte $P_1(15; {}^9/_2)$, $P_2(13; -{}^5/_2)$, ihre Hauptachse fällt mit der x-Achse zusammen. Wie heißt die Hyperbelgleichung?

963. Man bestimme die Halbachsen, die Brennpunkte und die Asymptotengleichungen der folgenden Hyperbeln:

a) $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{144} = 1$ b) $225x^2 - 64y^2 + 14400 = 0$

c) $x^2 - y^2 - 196 = 0$

964. Welchen Winkel schließen die Asymptoten der Hyperbel $16x^2 - 36y^2 = 576$ miteinander ein?

965. Eine Hyperbel besitzt die Asymptoten $y = \pm {}^{45}/_{28}\,x$ und den Brennpunkt $F_1(-{}^{53}/_{18}; 0)$. Wie groß sind die Halbachsen?

966. Eine Hyperbel $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ geht durch den Punkt $P(2; 3)$, ihre Asymptoten schließen den Winkel $2\alpha = 120°$ ein. Man berechne die Halbachsen.

967. Gesucht wird der Abstand des Punktes $P_1(6; -4)$ von den Asymptoten der Hyperbel $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1$.

968. Man bestimme die Mittelpunkte, die Halbachsen und die Brennpunkte der folgenden Hyperbeln:

a) $9x^2 - 16y^2 - 36x - 128y - 364 = 0$

b) $144x^2 - 25y^2 - 288x - 150y + 144 = 0$

c) $4x^2 - 4y^2 + 32x + 20y - 25 = 0$

969. P ist ein variabler Punkt der Hyperbel $\frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{36} = 1$. Welche Bahn durchläuft der Schwerpunkt S des Dreiecks A_1A_2P?

970. Welches ist die Menge aller Punkte der Ebene, deren Entfernung von dem Mittelpunkt M der Strecke $AB = 2a$ die mittlere Proportionale zwischen ihren Entfernungen von A und B ist?

971. Die Seite $BC = a$ eines Dreiecks liegt fest, während die Spitze A sich so bewegt, daß $\gamma = 2\beta$ ist. Auf welcher Bahnkurve bewegt sich der Punkt A des Dreiecks?

972. Von einem variablen Punkt R der gleichseitigen Hyperbel $x^2 - y^2 = 4$ wird das Lot auf die y-Achse bis Q gefällt und zugleich über R hinaus um sich selbst verlängert bis T. Auf welcher Kurve liegt der Schnittpunkt P von $\overline{A_1Q}$ und $\overline{A_2T}$?

973. Es ist die Gleichung der Hyperbel $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ in Polarkoordinaten aufzustellen.

34.3. Tangenten und Durchmesser der Hyperbel

Die Mittelpunktsgleichung (147) der Ellipse geht in die Mittelpunktsgleichung (154) der Hyperbel über, wenn b^2 durch $-b^2$ ersetzt wird. Auf dem gleichen Weg kann man aus den anderen Formeln der Ellipse, die nur b^2 enthalten, sofort entsprechende Formeln für die Hyperbel bekommen. Es wird deshalb allgemein auf die Untersuchung der Lagebeziehungen zwischen Hyperbel und Gerade verzichtet. Sie verläuft wie bei der Ellipse und wird dem Leser zur Übung empfohlen. Speziell sollen aber die Geraden durch den Hyperbelmittelpunkt betrachtet werden. Sie heißen **Durchmesser** der Hyperbel. Während alle Durchmesser der Ellipse diese schneiden, gilt das nicht mehr für die Hyperbel. Sie liegt völlig in denjenigen von den Asymptoten gebildeten Quadranten, die die Brennpunkte enthalten. Daher schneiden nur solche Durchmesser $y = mx$ die Hyperbel, für die $|m| < \frac{b}{a}$ ist. Sie heißen *Hauptdurchmesser* (Bild 229). Durchmesser mit $|m| > \frac{b}{a}$ heißen *Nebendurchmesser* und schneiden die Hyperbel nicht. Die Asymptoten trennen beide Durchmesserscharen.

Der Leser veranschauliche sich, daß die Parallele zu einem Hauptdurchmesser die Hyperbel stets in zwei Punkten schneidet, die Parallele zu einem Nebendurchmesser die Hyperbel schneiden, berühren und meiden kann, während die Parallele zu einer Asymptote die Hyperbel nur in einem (endlichen) Punkt schneidet.

Die Tangentenbedingung für die Hyperbel lautet (vgl. 33.3. Diskussion, 1.b)

$$a^2m^2 - b^2 - n^2 = 0. \qquad \text{(I)}$$

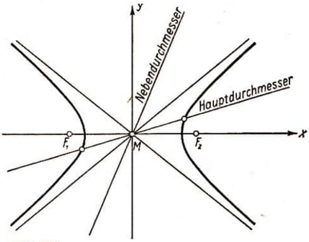


Bild 229

Für die Asymptoten ist $n = 0$ und $|m| = \frac{b}{a}$. Mit diesen Größen ist Gleichung (I) erfüllt. Da die Asymptote aber mit der Hyperbel im Endlichen keinen Punkt gemeinsam hat, sagt man: die Asymptote berührt die Hyperbel im Unendlichen. Für den Richtungsfaktor einer Tangente folgt aus (I):

$$|m| = \frac{\sqrt{b^2 + n^2}}{a} > \frac{b}{a}.$$

Die Tangenten können also nur parallel zu Nebendurchmessern sein.
Entsprechend (151) erhält man die

Gleichung der Hyperbeltangente im Hyperbelpunkt P_0

$$\boxed{\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1} \qquad (157)$$

Für einen Punkt P_0, der zwischen den beiden Hyperbelästen liegt, bedeutet (157) die Gleichung der Berührungssehne. Wie bei der Ellipse beweist man auch für die Hyperbel die folgenden

Sätze

Die Mittelpunkte einer Schar paralleler Sehnen liegen auf einem Durchmesser der Hyperbel. Zwei Durchmesser der Hyperbel heißen einander *zugeordnet* oder *konjugiert*, wenn jeder die dem anderen Durchmesser parallelen Sehnen halbiert. Ihre Richtungsfaktoren m_1 und m_2 erfüllen die Bedingung

$$\boxed{m_1 \cdot m_2 = \frac{b^2}{a^2}} \qquad (158)$$

m_1 und m_2 haben gleiche Vorzeichen, d. h., zwei konjugierte Durchmesser bilden im Gegensatz zur Ellipse mit der x-Achse entweder zwei spitze oder zwei stumpfe Winkel. Zu einem Hauptdurchmesser d_1 ist stets ein Nebendurchmesser d_2 konjugiert und umgekehrt (Bild 230).

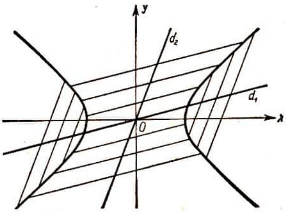


Bild 230

BEISPIEL

1. Es ist zu beweisen, daß sich Ellipse und Hyperbel mit gemeinsamen Brennpunkten stets rechtwinklig schneiden. (Derartige Kegelschnitte heißen *konfokal.*)

Lösung: Es seien a, b bzw. a', b' die Halbachsen der Ellipse bzw. der Hyperbel. Dann gilt

$$e^2 = a^2 - b^2 = a'^2 + b'^2. \tag{II}$$

Die Kurvengleichungen lauten

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \qquad b'^2x^2 - a'^2y^2 = a'^2b'^2. \qquad \text{(III) u. (IV)}$$

Aus beiden Gleichungen folgt für die Abszissen der Schnittpunkte

$$x^2 = \frac{a^2a'^2(b^2 + b'^2)}{a'^2b^2 + a^2b'^2}$$

und unter Verwendung von (II):

$$x^2 = \frac{a^2a'^2(a^2 - a'^2)}{a'^2(a^2 - e^2) + a^2(e^2 - a'^2)} = \frac{a^2a'^2(a^2 - a'^2)}{e^2(a^2 - a'^2)} = \frac{a^2a'^2}{e^2}$$

$$x = \pm \frac{aa'}{e}.$$

Entsprechend ergeben sich die Ordinaten der Schnittpunkte:

$$y = \pm \frac{bb'}{e}.$$

Für die Richtungsfaktoren der Ellipsen- bzw. Hyperbeltangente z. B. in $P_0\left(\frac{aa'}{e}; \frac{bb'}{e}\right)$ folgt

$$m = -\frac{x_0b^2}{y_0a^2} = -\frac{a'b}{ab'}; \qquad m' = \frac{x_0b'^2}{y_0a'^2} = \frac{ab'}{a'b}.$$

Wegen $m' = -\frac{1}{m}$ schneiden sich beide Kurven rechtwinklig.

AUFGABEN

974. Man berechne die Schnittpunkte zwischen der Hyperbel $4x^2 - 9y^2 = 36$ und den folgenden Geraden und veranschauliche sich die Ergebnisse an einer Skizze.

a) $y = 2x - 8$ b) $x - 2y - 1 = 0$ c) $y = 2x + 3$
d) $5x + 6y + 9 = 0$ e) $2x + 3y + 15 = 0$

975. a) Wie heißen die Gleichungen der Tangente und der Normalen durch den Punkt $P_0(^{10}/_9;\ y > 0)$ der Hyperbel

$$\frac{x^2}{\frac{64}{81}} - \frac{y^2}{\frac{25}{9}} = 1?$$

b) Desgleichen für $x^2 - 4y^2 - 12x - 16y - 16 = 0$, $P_0(16; y > 0)$

976. Wo und unter welchen Winkeln schneiden einander die Kurven

a) $64x^2 - 3y^2 = 16$ und $16x^2 + 3y^2 = 64$

b) $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{16} = 1$ und $x^2 - 24y + 28 = 0$

c) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ und der Kreis durch F_2 mit dem Mittelpunkt im Scheitel A_2

d) $x^2 + y^2 = 9$ und $36x^2 - 5y^2 = 180$?

977. Welche Tangenten der Hyperbel $9x^2 - 4y^2 = 36$ sind zur Geraden $15x + 8y = 16$ parallel?

978. Gesucht werden die Gleichungen der von $P_0(5; 6)$ an die Hyperbel $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$ gelegten Tangenten.

979. Eine Hyperbel $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ besitzt die lineare Exzentrizität $e = \frac{5}{12}\sqrt{5}$ und wird von der Geraden $68x - 16y - 25 = 0$ berührt. Wie groß sind ihre Achsen? (Man verwende die Tangentenbedingung!)

980. Welche gleichseitige Hyperbel $x^2 - y^2 = a^2$ wird durch den Kreis $x^2 + (y + 10)^2 = 100$ von außen berührt? (Man bringe beide Kurven zum Schnitt und setze die Diskriminante der quadratischen Gleichung gleich Null.)

981. Welche Parabel $x^2 = 2py$ berührt die Hyperbel $x^2 - y^2 = 36$? Wie groß ist das von den gemeinsamen Tangenten und der Berührungssehne gebildete Dreieck?

982. Die Parabel $y^2 = 2px$ hat mit der Hyperbel $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ einen Brennpunkt gemeinsam. Wie heißen die Gleichungen der gemeinsamen Tangenten beider Kurven und wo liegen die Berührungspunkte? (Skizze)

983. Eine Hyperbel hat mit der Ellipse $x^2 + 4y^2 = 100$ die Hauptscheitelpunkte gemeinsam. Die Asymptoten sind die Diagonalen in dem Rechteck, das von den Scheiteltangenten der Ellipse gebildet wird. Man bestimme die Berührungssehne der Hyperbel, die zum Ellipsenpunkt $P_1(x = 6)$ gehört. Welche Lage hat die Sehne zur Ellipse?

984. Welcher Durchmesser der Hyperbel $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ ist zur Asymptote $y = \frac{b}{a}x$ konjugiert?

34.4. Eigenschaften der Hyperbel

Für die Hyperbel gilt der folgende

Satz

Die Fläche des Dreiecks, das von den Asymptoten und einer Hyperbeltangente gebildet wird, ist konstant und zwar gleich $a \cdot b$ (Bild 231).

Beweis: Die in P_0 berührende Hyperbeltangente

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1 \tag{I}$$

wird mit den Asymptoten

$$y = \pm \frac{b}{a} x \tag{II}$$

zum Schnitt gebracht. Gleichung (II) in (I) eingesetzt und nach x aufgelöst ergibt

$$x_{1;2} = \frac{a^2 b}{b x_0 \mp a y_0}. \tag{III}$$

Die Ordinaten der Schnittpunkte folgen aus (II):

$$y_{1;2} = \pm \frac{a b^2}{b x_0 \mp a y_0}. \tag{IV}$$

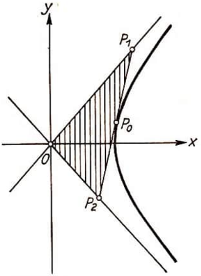


Bild 231

Für die Fläche des Dreiecks $O P_2 P_1$ erhält man:

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(x_2 y_1 - y_2 x_1) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{a^2 b}{b x_0 + a y_0} \cdot \frac{a b^2}{b x_0 - a y_0} - \frac{-a b^2}{b x_0 + a y_0} \cdot \frac{a^2 b}{b x_0 - a y_0}\right) =$$

$$= \frac{a^3 b^3}{b^2 x_0^2 - a^2 y_0^2} = \frac{a^3 b^3}{a^2 b^2} = ab.$$

Weiterhin gilt der

Satz

Das zwischen den Asymptoten gelegene Stück einer Hyperbeltangente wird von dem Berührungspunkt P_0 halbiert.

Zum *Beweis* bildet man mit (III):

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2 b}{b x_0 - a y_0} + \frac{a^2 b}{b x_0 + a y_0}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2 b^2 x_0 + a^3 b y_0 + a^2 b^2 x_0 - a^3 b y_0}{b^2 x_0^2 - a^2 y_0^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2 a^2 b^2 x_0}{a^2 b^2} = x_0.$$

P_0 ist also der Mittelpunkt der Strecke $P_1 P_2$, was zu zeigen war. Die durch P_0 gelegten Parallelen zu den Asymptoten schneiden die letzteren in den Punkten Q und R (Bild 232). Nach dem Strahlensatz ist $\overline{OQ} = \overline{QP_1}$ und $\overline{OR} = \overline{RP_2}$.
Daraus folgt eine einfache *Tangentenkonstruktion*, wenn die Asymptoten und der Berührungspunkt P_0 gegeben sind. Man zieht durch P_0 zu einer Asymptote, z. B. zu

$y = \frac{b}{a}x$, eine Parallele bis R und trägt $\overline{OR}$ von R aus bis P_2 ab. Dann ist P_0P_2 die Tangente in P_0. Ebenso kann man natürlich die Punkte Q und P_1 verwenden.
Nach entsprechenden Sätzen der Planimetrie sind die vier Dreiecke ORQ, RP_0Q, RP_2P_0 und QP_0P_1 kongruent. Daher ist die Fläche des Parallelogramms ORP_0Q gleich der halben Fläche des Dreiecks OP_2P_1, also $\frac{ab}{2}$ und damit ebenfalls konstant. Diese Eigenschaft führt bei der gleichseitigen Hyperbel zu einer einfachen Kurven-

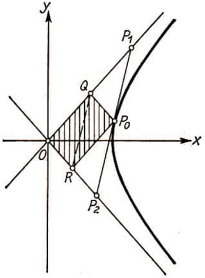


Bild 232

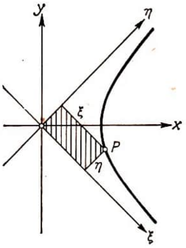


Bild 233

gleichung. Da die Asymptoten senkrecht aufeinander stehen, geht das Parallelogramm in ein Rechteck über, dessen konstante Fläche wegen $a = b$ den Wert $\frac{a^2}{2}$ hat. Werden die Asymptoten als Achsen eines Koordinatensystems gewählt und hat ein beliebiger Hyperbelpunkt in diesem System die Koordinaten ξ und η (Bild 233), dann ist

$$\xi\eta = \frac{a^2}{2}, \tag{V}$$

oder wenn die Koordinaten wieder mit x, y bezeichnet werden und $\frac{a^2}{2} = c$ setzt wird:

$$\boxed{y = \frac{c}{x}} \tag{159}$$

(159) ist die Gleichung einer gleichseitigen Hyperbel, bezogen auf ihre Asymptoten als Koordinatenachsen.

BEISPIEL

Die Gleichung (V) der gleichseitigen Hyperbel soll durch Koordinatentransformation aus der Mittelpunktsgleichung $x^2 - y^2 = a^2$ hergeleitet werden.

Lösung: Der Winkel φ in den Transformationsgleichungen [vgl. (120), S. 349] ist der positiv gemessene Winkel von der x- zur ξ-Achse, d. h. $\varphi = 315°$. Die Gleichungen lauten

$$x = \xi \cos 315° - \eta \sin 315°$$

$$y = \xi \sin 315° + \eta \cos 315°,$$

$$x = \xi \frac{1}{2}\sqrt{2} + \eta \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,(\xi + \eta) \qquad \text{(VI)}$$

$$y = -\xi \frac{1}{2}\sqrt{2} + \eta \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,(\eta - \xi). \qquad \text{(VII)}$$

Die Gleichungen (VI) und (VII), in die Mittelpunktsgleichung $x^2 - y^2 = a^2$ eingesetzt, ergeben:

$$\frac{1}{2}(\xi^2 + 2\xi\eta + \eta^2) - \frac{1}{2}(\xi^2 - 2\xi\eta - \eta^2) = a^2,$$

$$\underline{\underline{\xi\eta = \frac{a^2}{2}}}.$$

Abschließend wird noch ein Satz angegeben, der analog zur Ellipse bewiesen wird:

Satz

Die Tangente in einem beliebigen Hyperbelpunkt P_0 halbiert den Winkel zwischen den zugehörigen Brennstrahlen, die Normale durch P_0 den Nebenwinkel.

AUFGABEN

985. Die in 33.5.2. angegebene Ellipsenkonstruktion gilt analog auch für die Hyperbel. Man konstruiere danach für $a = 2{,}5$ cm, $b = 3$ cm Hyperbelpunkte mit den zugehörigen Tangenten.
986. Es ist zu beweisen, daß das Produkt der Abstände eines Hyperbelpunktes von den Asymptoten konstant ist.
987. Man beweise den Satz: Der Fußpunkt des Lotes, das von einem Brennpunkt auf eine Hyperbeltangente gefällt ist, liegt auf dem Hauptscheitelkreis. Danach ist eine Hüllkonstruktion der Hyperbel durchzuführen. (Man beachte 33.3.)
988. Es ist zu beweisen: Wenn eine Gerade die Hyperbel in den Punkten P_1, P_2 und die Asymptoten in den Punkten P_3, P_4 scheidet, dann sind die Strecken P_1P_3 und P_2P_4 gleich lang (Bild 234).
Man konstruiere nach diesem Satz aus den Asymptoten und einem Hyperbelpunkt P_1 weitere Hyperbelpunkte.

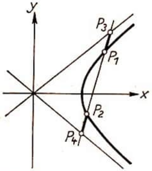


Bild 234

35. Verwandtschaft der Kegelschnitte

Die drei Kurven Ellipse, Parabel und Hyperbel wurden in Abschnitt 31. als ebene Schnitte eines geraden Kreiskegels definiert. Diese Gemeinsamkeit in der Definition kam auch bei der analytischen Behandlung der Kurven zum Ausdruck. Bei Verwendung rechtwinkliger Koordinaten wird jeder Kegelschnitt, dessen Achsen parallel zu den Koordinatenachsen sind, durch eine Gleichung 2. Grades der Form

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0 \qquad \text{(I)}$$

beschrieben.

Es wurde gezeigt, daß (I) für

$$
\begin{array}{ll}
AB > 0 \text{ eine Ellipse} & (A = B\text{: Kreis}) \\
AB = 0 \text{ eine Parabel} & (A = 0\text{: Achse parallel zur } x\text{-Achse,} \\
 & B = 0\text{: Achse parallel zur } y\text{-Achse)} \\
AB < 0 \text{ eine Hyperbel} & (A = -B\text{: gleichseitige Hyperbel)}
\end{array}
$$

darstellt. (Von weiteren Sonderfällen wurde bisher abgesehen.) Eine Verallgemeinerung von (I) ergibt sich daraus, daß die Kegelschnittachsen nicht mehr parallel zu den Koordinatenachsen liegen, und wird in Abschnitt 36. behandelt.

Die Verwandtschaft zwischen den drei Kurven kommt auch besonders in ihren *Scheitelgleichungen* zum Ausdruck. Für die Parabel ist die Scheitelgleichung bereits mit (134) gegeben. Für die Ellipse folgt sie, wenn der Koordinatenursprung in den linken Scheitelpunkt A_1 entsprechend Bild 235 gelegt wird. Die Gleichung lautet:

$$\frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$y^2 = \frac{2b^2}{a}x - \frac{b^2}{a^2}x^2$$

$$y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2.$$

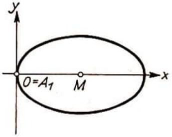


Bild 235

Bei der Hyperbel soll der rechte Scheitel A_2 in den Ursprung gelegt werden (Bild 236):

$$\frac{(x+a)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$y^2 = 2px + \frac{p}{a}x^2.$$

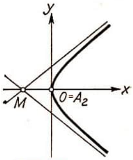


Bild 236

Zusammengefaßt lauten die

Scheitelgleichungen der Kegelschnitte:

$$\boxed{\begin{array}{ll}
\text{Ellipse:} & y^2 = 2px - \dfrac{p}{a}x^2 \\[2ex]
\text{Parabel:} & y^2 = 2px \\[2ex]
\text{Hyperbel:} & y^2 = 2px + \dfrac{p}{a}x^2
\end{array}} \qquad (160)$$

Für die Ellipse ist das Quadrat aus der Ordinate kleiner als das Rechteck aus dem Parameter $2p$ und der Abszisse x.

Für die Parabel tritt Gleichheit ein, während für die Hyperbel das Quadrat größer als das Rechteck ist. Danach wurden von den Griechen die Namen für die Kegelschnitte eingeführt, denn Ellipse bedeutet Mangel[1]), Parabel Gleichheit[2]), und Hyperbel Überschuß[3]).

[1]) (griech.) ἔλλειψις [2]) (griech.) παραβολή [3]) (griech.) ὑπερβολή

Für die Ellipse wird

$$\frac{p}{a} = \frac{b^2}{a^2} = \frac{a^2 - e^2}{a^2} = 1 - \varepsilon^2 \tag{II}$$

und für die Hyperbel

$$\frac{p}{a} = \frac{b^2}{a^2} = \frac{e^2 - a^2}{a^2} = \varepsilon^2 - 1\,. \tag{III}$$

Für die Parabel ist $\varepsilon = 1$, also $\varepsilon^2 - 1 = 0$. Die drei Scheitelgleichungen (160) können deshalb zu der gemeinsamen Scheitelgleichung

$$\boxed{y^2 = 2px + (\varepsilon^2 - 1)\,x^2} \tag{161}$$

zusammengefaßt werden.

In (161) soll p konstant, ε variabel angenommen werden. Gleichung (161) bestimmt dann eine *Schar von Kegelschnitten* mit gemeinsamem Scheitelpunkt (Bild 237). Zu je-

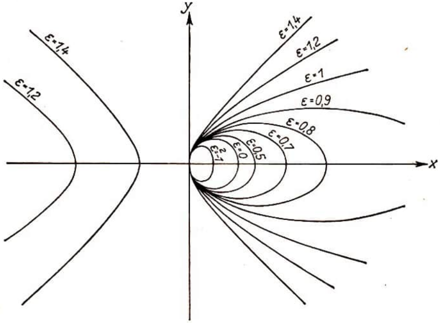


Bild 237

dem Wert $0 < \varepsilon < 1$ gehört eine Ellipse. Für $\varepsilon \to 1$ folgt $1 - \varepsilon^2 \to 0$ und nach (II) $a \to \infty$. Die Ellipsen werden also immer langgestreckter, es treten *quantitative* Veränderungen auf. Erreicht ε den Wert 1 oder wird $\varepsilon > 1$, dann erfolgt sprunghaft eine *qualitative* Veränderung. Aus der geschlossenen wird eine offene Kurve. Die Ellipse geht in eine Parabel oder in eine Hyperbel über. Für $\varepsilon = 0$ wird aus der Ellipse ein Kreis. Gleichung (161) hat sogar noch einen Sinn, wenn $\varepsilon^2 < 0$ ist, obgleich dazu kein reeller Wert ε existiert. Wegen $\varepsilon^2 = \dfrac{a^2 - b^2}{a^2} < 0$ ist $a < b$, d. h., die große

Halbachse der Ellipse ist parallel zur y-Achse und wird hier ausnahmsweise mit b bezeichnet. Bild 238 zeigt die zu verschiedenen Werten von ε^2 gehörigen Kurven.

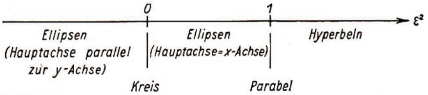


Bild 238

Auch bei Verwendung von Polarkoordinaten kann allen Kegelschnitten eine in der Form übereinstimmende Kurvengleichung zugeordnet werden [vgl. (144), (150) und Aufgabe 973):

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi}. \tag{IV}$$

Man erhält wieder für $\varepsilon = 0$ einen Kreis (Radius p),

$0 < \varepsilon < 1$ eine Ellipse,

$\varepsilon = 1$ eine Parabel,

$\varepsilon > 1$ eine Hyperbel.

Für konstantes p und variables ε stellt (IV) eine Schar von Kegelschnitten mit einem gemeinsamen Brennpunkt dar (Bild 171).

AUFGABE

989. In 31.4. wurden alle drei Kegelschnitte mit Hilfe einer Leitlinie und eines Brennpunktes definiert. Man berechne für die Ellipse bzw. Hyperbel den Abstand u der Leitlinie vom Mittelpunkt M des Kegelschnittes.

36. Kegelschnitte in allgemeiner Lage

36.1. Allgemeine Kegelschnittgleichung

Bisher wurden nur Kegelschnitte betrachtet, deren Achsen parallel zu den Koordinatenachsen sind. Die zugehörigen Kurvengleichungen in rechtwinkligen Koordinaten sind durch (I) aus Abschnitt 35. gegeben. Jetzt werden allgemeine Lagen der Kegelschnitte angenommen, d. h., ihre Achsen können beliebige Winkel mit den Koordinatenachsen bilden. Die entsprechenden Kurvengleichungen sollen untersucht werden.

BEISPIEL

1. Wie heißt die Gleichung der in Bild 239 gezeigten Ellipse im $x; y$-System?

Lösung: Zur gesuchten Gleichung gelangt man in zwei Schritten. Man geht von dem $x''; y''$-System, dessen Achsen mit den Ellipsenachsen zusammenfallen, durch *Parallelverschiebung* zum $x'; y'$-System und anschließend durch *Drehung* zum $x; y$-System über.

Im $x''; y''$-System lautet die Ellipsengleichung

$$\frac{x''^2}{16} + \frac{y''^2}{4} = 1 \qquad \text{(I)}$$

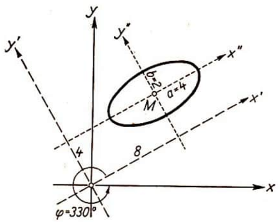


Bild 239

und im $x'; y'$-System nach Gleichung (149)

$$\frac{(x'-8)^2}{16} + \frac{(y'-4)^2}{4} = 1. \qquad \text{(II)}$$

Für den Übergang zum $x; y$-System gelten die Transformationsformeln (vgl. 29.2.):

$$x' = x\cos 330° - y \sin 330° = $$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{3}x + \frac{1}{2}y$$

$$y' = x \sin 330° + y \cos 330° = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sqrt{3}y,$$

und es folgt aus (II):

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}x + \frac{1}{2}y - 8\right)^2}{16} + \frac{\left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sqrt{3}y - 4\right)^2}{4} = 1.$$

Die weitere Vereinfachung ergibt schließlich

−10,4 8,57 −142,8

$$7x^2 - 6\sqrt{3}xy + 13y^2 + 32(2 - \sqrt{3})x - 32(1 + 2\sqrt{3})y + 448 = 0.$$

Der Vergleich dieses Ergebnisses mit Gleichung (I) aus Abschnitt 35. zeigt, daß noch ein Glied mit xy, das *gemischtquadratische Glied*, hinzugekommen ist. Das gilt auch in allen anderen Fällen, bei denen die Achsen eines Kegelschnittes mit den Koordinatenachsen einen beliebigen von Null verschiedenen Winkel bilden (vgl. 34.4.).
Die **allgemeine Gleichung eines Kegelschnittes in rechtwinkligen Koordinaten** lautet also

$$\boxed{Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0} \qquad (162)$$

Jeder Kegelschnitt mit beliebiger Lage im Koordinatensystem wird durch eine Gleichung der Form (162) dargestellt. Der Beweis wird wie im obigen Beispiel, aber allgemein geführt. Man schreibt die Kegelschnittgleichung (I) aus Abschnitt 35. in der Form

$$A'x'^2 + B'y'^2 + C'x' + D'y' + E' = 0 \qquad \text{(III)}$$

und geht mit Hilfe der Transformationsformeln

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ y' &= x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{aligned} \qquad \text{(IV)}$$

zu einem $x; y$-System über, in dem der Kegelschnitt dann die allgemeinste Lage hat. Einsetzen von (IV) in (III), ausmultiplizieren und zusammenfassen ergibt Gleichung (162).

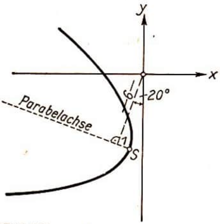


Bild 240

AUFGABE

990. Welche Gleichung besitzt die in Bild 240 dargestellte Parabel ($p = 3$) im $x;y$-System?

36.2. Transformation der allgemeinen Kegelschnittgleichung auf die reduzierte Form

Es soll nun das umgekehrte Problem behandelt werden. Gegeben ist die allgemeine Gleichung 2. Grades in x und y

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

und es ist für bestimmte Koeffizienten A, B, ... zu untersuchen, welcher Kegelschnitt durch diese Gleichung beschrieben wird, wie groß seine Achsen sind bzw. welchen Parameter er besitzt und welche Lage er im Koordinatensystem einnimmt.

BEISPIEL

1. Man untersuche den Kegelschnitt, der durch die Gleichung

$$3x^2 - 10xy + 3y^2 + 28\sqrt{2}x - 4\sqrt{2}y + 32 = 0 \tag{I}$$

39,6 5,7

gegeben ist.

Lösung: Das Glied $-10xy$ gibt an, daß die Achsen des Kegelschnittes mit den Koordinatenachsen von Null verschiedene Winkel bilden. Durch Drehung um einen vorläufig noch unbekannten Winkel φ geht man zu einem $x';y'$-System über, dessen Achsen parallel zu den Koordinatenachsen sind, so daß also kein gemischtquadratisches Glied mehr in der Gleichung enthalten ist. Die Transformationsformeln, in denen x jetzt auf der linken Seite stehen muß, lauten:

$$x = x' \cos\varphi - y' \sin\varphi \qquad y = x' \sin\varphi + y' \cos\varphi.$$

Sie werden in (I) eingesetzt:

$$3(x' \cos\varphi - y' \sin\varphi)^2 - 10(x' \cos\varphi - y' \sin\varphi)(x' \sin\varphi + y' \cos\varphi) +$$
$$+ 3(x' \sin\varphi + y' \cos\varphi)^2 + 28\sqrt{2}(x' \cos\varphi - y' \sin\varphi) -$$
$$- 4\sqrt{2}(x' \sin\varphi + y' \cos\varphi) + 32 = 0.$$

Ausmultipliziert und zusammengefaßt ergibt [man beachte (65) und (66a)]:

$$(3 - 5\sin 2\varphi)x'^2 - 10\cos 2\varphi x'y' + (3 + 5\sin 2\varphi)y'^2 +$$
$$+ 4\sqrt{2}(7\cos\varphi - \sin\varphi)x' - 4\sqrt{2}(7\sin\varphi + \cos\varphi)y' + 32 = 0. \tag{II}$$

Damit das gemischtquadratische Glied verschwindet, wird

$$10\cos 2\varphi = 0$$

gesetzt, und man erhält für den Drehwinkel im I. Quadranten

$$2\varphi = 90°, \quad \varphi = 45°.$$

Damit folgt aus (II):

$$x'^2 - 4y'^2 + 12x' + 16y' - 16 = 0. \tag{III}$$

Die Koeffizienten der quadratischen Glieder sind ungleich Null und haben verschiedene Vorzeichen. (III) ist also die Gleichung einer Hyperbel. Mit Hilfe der quadratischen Ergänzung kann leicht die Form

$$\frac{(x'-6)^2}{36} - \frac{(y'-2)^2}{9} = 1$$

hergestellt werden, und aus dieser lassen sich die Achsen $a = 6$, $b = 3$ sowie die Mittelpunktskoordinaten $x'_m = 6$, $y'_m = 2$ ablesen. Mit diesen Werten und dem Drehwinkel kann die Hyperbel in das $x; y$-System eingezeichnet werden (Bild 241).

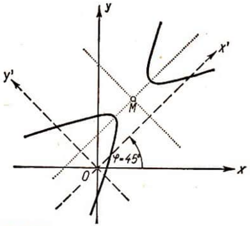


Bild 241

Die Rechnungen des Beispiels 1 werden allgemein für die Gleichung

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + \\ + Ey + F = 0$$

durchgeführt. Mit den Transformationsgleichungen

$$x = x' \cos \varphi - y' \sin \varphi$$

$$y = x' \sin \varphi + y' \cos \varphi$$

geht man zum $x'; y'$-System über, das gegen das ursprüngliche um den Winkel φ gedreht ist. Dann folgt

$$A(x' \cos \varphi - y' \sin \varphi)^2 + B(x' \cos \varphi - y' \sin \varphi)(x' \sin \varphi + y' \cos \varphi) + \\ + C(x' \sin \varphi + y' \cos \varphi)^2 + D(x' \cos \varphi - y' \sin \varphi) + \\ + E(x' \sin \varphi + y' \cos \varphi) + F = 0.$$

Zusammengefaßt ergibt sich

$$(A \cos^2 \varphi + B \sin \varphi \cos \varphi + C \sin^2 \varphi)x'^2 + [B(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) - \\ - 2(A - C) \sin \varphi \cos \varphi]x'y' + (A \sin^2 \varphi - B \sin \varphi \cos \varphi + C \cos^2 \varphi)y'^2 + \\ + (D \cos \varphi + E \sin \varphi)x' + (E \cos \varphi - D \sin \varphi)y' + F = 0. \qquad \text{(IV)}$$

Der Winkel φ, über den noch frei verfügt werden kann, wird so gewählt, daß das gemischtquadratische Glied verschwindet, d. h. der Koeffizient von $x'y'$ Null wird:

$$B(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) - 2(A - C) \sin \varphi \cos \varphi = 0$$

$$(A - C) \sin 2\varphi = B \cos 2\varphi$$

$$\boxed{\tan 2\varphi = \frac{B}{A - C}} \qquad (163)$$

Bei der Lösung kann 2φ auf die ersten beiden Quadranten, φ also auf den ersten Quadranten beschränkt werden, denn durch Drehung des $x; y$-Systems um einen Winkel $\varphi \in [0°, 90°)$ läßt sich stets eine zu den Kegelschnittachsen parallele Lage erreichen. Im $x'; y'$-System besitzt der Kegelschnitt die *reduzierte Gleichung*

$$A'x'^2 + B'y'^2 + C'x' + D'y' + E' = 0, \tag{V}$$

deren Koeffizienten mit dem nach (163) bestimmten Winkel φ aus

$$\begin{aligned}
A' &= A\cos^2\varphi + B\sin\varphi\cos\varphi + C\sin^2\varphi \\
B' &= A\sin^2\varphi - B\sin\varphi\cos\varphi + C\cos^2\varphi \\
C' &= D\cos\varphi + E\sin\varphi \\
D' &= E\cos\varphi - D\sin\varphi \\
E' &= F
\end{aligned}$$

berechnet werden. Auch ohne Verwendung von φ können diese neuen Koeffizienten unmittelbar durch die ursprünglichen ausgedrückt werden. Mit (163) ergibt sich zunächst

$$\sin 2\varphi = \frac{\tan 2\varphi}{\sqrt{1+\tan^2 2\varphi}} = \frac{B}{\sqrt{(A-C)^2+B^2}},$$

$$\cos 2\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 2\varphi}} = \frac{A-C}{\sqrt{(A-C)^2+B^2}}.$$

Wird zur Abkürzung

$$\sqrt{(A-C)^2+B^2} = \varDelta \tag{VI}$$

gesetzt, so folgt

$$\sin 2\varphi = \frac{B}{\varDelta}, \quad \cos 2\varphi = \frac{A-C}{\varDelta}.$$

Wegen $2\varphi \in [0°, 180°)$ gilt $\sin 2\varphi = \dfrac{B}{\varDelta} > 0$, d. h., $\varDelta$ muß stets das Vorzeichen von B erhalten. Man bildet nun

$$\begin{aligned}
A' + B' &= A(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + C(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) = A + C \\
A' - B' &= A(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + 2B\sin\varphi\cos\varphi + C(\sin^2\varphi - \cos^2\varphi) = \\
&= A\cos 2\varphi + B\sin 2\varphi - C\cos 2\varphi = \\
&= (A-C)\frac{A-C}{\varDelta} + B\frac{B}{\varDelta} = \frac{(A-C)^2+B^2}{\varDelta} = \frac{\varDelta^2}{\varDelta} = \varDelta.
\end{aligned}$$

Durch Addition und Subtraktion dieser Gleichungen und Division durch 2 folgt

$$A' = \frac{A+C+\varDelta}{2} \tag{VII}$$

$$B' = \frac{A+C-\varDelta}{2}. \tag{VIII}$$

Berechnet man unter Verwendung von (163) die Werte für $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ und setzt sie in die Formeln für C' und D' ein, so ergibt sich

$$C' = D\sqrt{\frac{\Delta + (A - C)}{2\Delta}} + E\sqrt{\frac{\Delta - (A - C)}{2\Delta}} \tag{IX}$$

$$D' = E\sqrt{\frac{\Delta + (A - C)}{2\Delta}} - D\sqrt{\frac{\Delta - (A - C)}{2\Delta}}. \tag{X}$$

BEISPIEL

2. Man untersuche den durch die Gleichung

$$16x^2 + 24xy + 9y^2 - 180x - 260y + 1300 = 0$$

gegebenen Kegelschnitt.

Lösung: Der Drehwinkel wird nach (163) berechnet:

$$\tan 2\varphi = \frac{24}{16 - 9} = \frac{24}{7} = 3{,}4286,$$

$$2\varphi = 73°\,44', \qquad \varphi = 36°\,52'.$$

Mit den Formeln (VI) bis (X) ergeben sich die Koeffizienten der reduzierten Gleichung:

$$\Delta = \sqrt{7^2 + 24^2} = 25$$

$$A' = \frac{16 + 9 + 25}{2} = 25; \qquad B' = \frac{16 + 9 - 25}{2} = 0$$

$$C' = -180\sqrt{\frac{25 + 7}{50}} - 260\sqrt{\frac{25 - 7}{50}} = -180 \cdot \frac{4}{5} - 260 \cdot \frac{3}{5} = -300$$

$$D' = -260 \cdot \frac{4}{5} + 180 \cdot \frac{3}{5} = -100$$

$$E' = 1300.$$

Die reduzierte Gleichung lautet

$$x'^2 - 12x' - 4y' + 52 = 0$$

und stellt nach 32.3., Gleichung (III) oder Abschnitt 35. wegen $A'B' = 0$ eine Parabel dar. Aus der durch Umformung erhaltenen Gleichung

$$(x' - 6)^2 = 4(y' - 4)$$

liest man die Koordinaten $x'_s = 6$, $y'_s = 4$ des Scheitelpunktes und den Halbparameter $p = 2$ ab. Der Leser fertige sich eine Zeichnung an.

36.3. Diskussion der allgemeinen Gleichung 2. Grades

Während in 36.1. festgestellt wurde, daß jeder Kegelschnitt durch eine Gleichung der Form (162) beschrieben wird, soll jetzt umgekehrt untersucht werden, welche Kurven bei beliebigen Koeffizienten A bis F durch eine allgemeine Gleichung 2. Grades dargestellt werden.

Nach den Ergebnissen des vorigen Abschnittes kann von der gegebenen Gleichung

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{I}$$

stets zur reduzierten Gleichung

$$A'x'^2 + B'y'^2 + C'x' + D'y' + E' = 0 \tag{II}$$

übergegangen werden. Um noch die linearen Glieder möglichst zu beseitigen, wird eine Parallelverschiebung des Koordinatensystems durchgeführt. In den zugehörigen Gleichungen

$$x' = x'' + m \qquad\qquad y' = y'' + n \tag{III}$$

seien m und n vorläufig noch nicht festgelegt. (III) in (II) eingesetzt ergibt:

$$A'(x'' + m)^2 + B'(y'' + n)^2 + C'(x'' + m) + D'(y'' + n) + E' = 0$$

$$A'x''^2 + B'y''^2 + (2A'm + C')x'' + (2B'n + D')y'' + A'm^2 +$$
$$+ B'n^2 + C'm + D'n + E' = 0. \tag{IV}$$

Nun lassen sich die folgenden Fälle unterscheiden:

1. $A'B' \neq 0$ (d. h. $A' \neq 0$ und $B' \neq 0$)

Man wählt m und n so, daß in (IV) die linearen Glieder verschwinden:

$$2A'm + C' = 0 \quad \text{bzw.} \quad m = -\frac{C'}{2A'}$$

$$2B'n + D' = 0 \quad \text{bzw.} \quad n = -\frac{D'}{2B'}.$$

Mit diesem Wert für m und n folgt aus (IV)

$$A'x''^2 + B'y''^2 = \frac{C'^2}{4A'} + \frac{D'^2}{4B'} - E' = G. \tag{V}$$

1.1. $G = 0$

1.1.1. $A'B' > 0$ (A' und B' haben gleiches Vorzeichen).

Gleichung (V) ist nur durch $x'' = 0, y'' = 0$ erfüllt, stellt also einen **Punkt** (O'') dar.

1.1.2. $A'B' < 0$ (A' und B' haben verschiedene Vorzeichen).

Aus (V) folgt

$$y'' = \pm\sqrt{-\frac{A'}{B'}}\,x''.$$

(V) stellt **zwei einander schneidende Geraden** dar, deren Schnittpunkt der Ursprung O'' ist.

1.2. $\boldsymbol{G \neq 0}$

1.2.1. $\boldsymbol{A'B' > 0, A'G > 0}$ (A' und B' haben das gleiche Vorzeichen wie G). (V) stellt eine **Ellipse** bzw. für $A' = B'$ einen **Kreis** dar.

1.2.2. $\boldsymbol{A'B' > 0, A'G < 0}$ (A' und B' haben gleiches Vorzeichen, das dem von G entgegengesetzt ist. (V) ist für kein reelles Wertepaar $(x''; y'')$ erfüllt, stellt also **keine reelle Kurve** dar.

1.2.3. $\boldsymbol{A'B' < 0}$ (A' und B' haben entgegengesetzte Vorzeichen)

(V) stellt eine **Hyperbel** dar.

2. $\boldsymbol{A'B' = 0}$ (d. h. $A' = 0$ oder $B' = 0$)

2.1. $\boldsymbol{A' = 0, B' \neq 0}$

2.1.1. $\boldsymbol{C' = 0}$ Gleichung (IV) lautet

$$B'y''^2 + (2B'n + D')y'' + B'n^2 + D'n + E' = 0$$

und nach y'' aufgelöst

$$y'' = \frac{-2B'n - D' \pm \sqrt{2B'^2n^2 + D'^2 - 2B'E'}}{2B}$$

oder kurz: $y'' = k_1$ und $y'' = k_2$.

Für reelle k_1 und k_2 sind das die Gleichungen von **zwei** zur x''-Achse **parallelen Geraden**, für $k_1 = k_2$ erhält man **zwei zusammenfallende Geraden** und für komplexe k_1 und k_2 **keine reelle Kurven.**

2.1.2. $\boldsymbol{C' \neq 0}$ (IV) lautet

$$B'y''^2 + C'x'' + (2B'n + D')y'' + B'n^2 + C'm + D'n + E' = 0. \tag{VI}$$

Man kann m und n stets so wählen, daß

$$2B'n + D' = 0$$
$$B'n^2 + C'm + D'n + E' = 0$$

wird. Dann ist

$$n = -\frac{D'}{2B'}, \qquad m = -\frac{B'n^2 + D'n + E'}{C'} = \frac{D'^2 - 4E'B'}{4B'C'}.$$

(VI) geht über in

$$B'y''^2 + C'x'' = 0 \qquad \text{oder} \qquad y''^2 = -\frac{C'}{B'}x''.$$

Das ist die Gleichung einer **Parabel**.

2.2. $\boldsymbol{A' \neq 0, B' = 0}$

Man zeigt analog zum Fall 2.1., daß Gleichung (IV) für

2.2.1. $\boldsymbol{D' = 0}$ zwei zur y''-Achse **parallele Gerade, zwei zusammenfallende Gerade** oder **keine reelle Kurve** darstellt und für

2.2.2. $\boldsymbol{D' \neq 0}$ eine **Parabel** beschreibt.

Anmerkung: Bei der Untersuchung einer gegebenen Gleichung 2. Grades ist im allgemeinen der Übergang vom x', y'-System zum x'', y''-System nicht notwendig (vgl. Beispiel 2. aus 36.2.)

Auch aus den Koeffizienten A, B, C der ursprünglichen Gleichung (I) kann schon etwas über die dargestellte Kurve ausgesagt werden. Man bildet

$$A'B' = \frac{A + C + \Delta}{2} \cdot \frac{A + C - \Delta}{2} = \frac{(A + C)^2 - \Delta^2}{4} = \frac{4AC - B^2}{4}.$$

Den drei Fällen $A'B' \gtreqless 0$ entspricht $4AC - B^2 \gtreqless 0$ und unter Verwendung der obigen Diskussion ergibt sich die Einteilung

$4AC - B^2 > 0$:	**Ellipse**,	Kreis, Punkt oder keine reelle Kurve
$4AC - B^2 = 0$:	**Parabel**,	2 parallele, zusammenfallende oder komplexe Geraden
$4AC - B^2 < 0$:	**Hyperbel**	oder zwei sich schneidende Geraden.

AUFGABEN

991. Man untersuche die Kurven, die durch folgende Gleichungen 2. Grades gegeben sind:

a) $3x^2 + 2xy + 3y^2 + 2x - 2y = 0$
b) $x^2 + xy + y^2 = 7$
c) $x^2 - 2xy + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$
d) $313x^2 + 120xy + 194y^2 + 234x + 1196y + 1859 = 0$
e) $4x^2 - 24xy + 11y^2 + 144x - 92y - 140 = 0$
f) $5x^2 + 4xy + 2y^2 - 18x - 12y + 30 = 0$
•g) $3x^2 + 12xy + 3y^2 + 6x + 18y + 2 = 0$
h) $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 240x + 180y = 0$
i) $x^2 + 4xy + y^2 - 8 = 0$
k) $4x^2 + 4xy + y^2 + 4x + 2y + 1 = 0$
•l) $x^2 + xy + y^2 = 0$
m) $16x^2 + 24xy + 9y^2 - 40x - 30y - 75 = 0$
n) $4{,}45x^2 - 2{,}40xy + y^2 - 5{,}54x + 3{,}46y - 2{,}20 = 0$
o) $2{,}00x^2 + 3{,}20xy + 1{,}28y^2 + 6{,}10x - 4{,}60y + 10{,}00 = 0$

992. Welche Kurve wird durch die Linsenformel $\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$ bei variablen g und b dargestellt?

993. Ein Zweistabgetriebe ORP mit dem Drehpunkt O und dem Gelenk R besitzt die in Bild 242 gezeigte Ausgangsstellung. Welche Bahn beschreibt P, wenn sich $\overline{OR} = 2$ mit der Winkelgeschwindigkeit ω linksläufig, $\overline{RP} = 4$ mit der Winkelgeschwindigkeit $-\omega$, also rechtsläufig dreht?

994. a) Die Parametergleichungen einer Kurve lauten

$$x = t^2 + 2t; \qquad y = t^2 - 2t - 1.$$

Man stelle die Kurvengleichung in cartesischen Koordinaten auf und untersuche die Kurve.

b) Desgleichen für $x = \dfrac{t}{1-t}$; $y = \dfrac{1}{t}$.

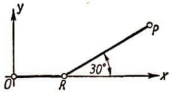


Bild 242

37. Technisch wichtige Kurven

37.1. Allgemeine Bemerkungen

Unter „Analytischer Geometrie" versteht man vielfach nur die analytische Geometrie der Kegelschnitte (Gerade, Kreis, Ellipse und Hyperbel). Dies ist jedoch eine sehr einseitige Auffassung, da in diesem Teilgebiet der Mathematik die Eigenschaften sämtlicher Kurven, sowohl der Ebene als auch des Raumes, behandelt werden können.
In diesem Abschnitt soll nun noch eine Auswahl von Kurven besprochen werden, die insbesondere den Techniker interessieren. Die Auswahl kann sich naturgemäß nur auf eine geringe Anzahl von Kurven beschränken, da bei der Konstruktion von Maschinenteilen, Getrieben usw. derartig viele Kurven verschiedenster Art auftreten, so daß eine ausführliche Behandlung aller möglichen Kurvenformen weit über den Rahmen dieses Buches hinausgehen würde.
Bei den Kurvengleichungen wird keine bestimmte Darstellungsart bevorzugt. Es wird in jedem Falle diejenige Darstellungsmöglichkeit gewählt, die die geometrischen Eigenschaften der jeweiligen Kurve am deutlichsten hervortreten läßt.

37.2. Kubische und semikubische Parabel

Die Gleichung der kubischen Parabel lautet

$$\boxed{y^3 = ax}, \quad (a \neq 0). \tag{164}$$

Aus ihr folgt

$$y = \sqrt[3]{ax}.$$

Daraus erkennt man, daß es im Falle $a > 0$ Parabelpunkte nur für $x \in [0; \infty)$ gibt, und daß die zugehörigen y-Werte positiv sind. Die Kurve verläuft demnach vollständig im ersten Quadranten. (Bild 243).
Aus $x \to \infty$ folgt $y \to \infty$, d. h., daß jede Parallele zur x-Achse $y = c$ mit $c > 0$ von der kubischen Parabel $y^3 = ax$ geschnitten wird, auch wenn sie noch so weit von der x-Achse entfernt liegt.

Aus der Gleichung der **semikubischen Parabel**

$$\boxed{y^3 = ax^2} \quad (a > 0) \tag{165}$$

geht hervor, daß die semikubische Parabel für alle $x \in (-\infty; +\infty)$ Kurvenpunkte hat und daß auch bei ihr aus $x \to \pm\infty$ $y \to \infty$ folgt (Bild 244). Da die Variable x nur quadratisch auftritt, verläuft die semikubische Parabel symmetrisch zur y-Achse. Die Parabel $y^3 = ax^2$ wird auch NEILsche Parabel genannt.

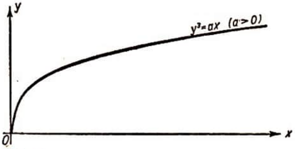


Bild 243

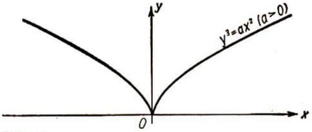


Bild 244

Eine Anwendung findet die kubische Parabel beim Gleis- bzw. Autobahnbau. Dort läßt man eine Kurve nicht unmittelbar aus der Kreisbahn in die Gerade übergehen, sondern man schaltet als Übergangsbogen einen geeigneten Teil einer kubischen Parabel zwischen Kreis und Gerade.

Für die kubische und die semikubische Parabel gibt es eine sehr einfache Konstruktionsvorschrift für den Fall, daß der Scheitel S, die Parabelachse und ein Punkt $P_0(x_0; y_0)$ der Parabel gegeben sind. Diese Konstruktionsvorschrift soll für die kubische Parabel $y^3 = ax$ $(a > 0)$ erläutert werden (Bild 245).

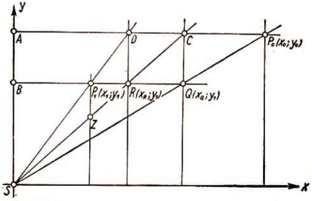


Bild 245

Durch den gegebenen Punkt P_0 der Parabel zeichnet man eine Parallele zur Parabelachse, die die y-Achse in A schneidet, sowie die Verbindungslinie SP_0. Auf $\overline{SP_0}$ greift man einen *beliebigen* Punkt Q heraus und zeichnet durch ihn die Parallelen zu den beiden Achsen. Die Parallele zur x-Achse schneide die y-Achse in B, die Gerade AP_0 wird von der Parallelen zur y-Achse in C geschnitten. C verbindet man durch eine Gerade mit S und erhält als Schnittpunkt mit der Geraden BQ den Punkt R. Durch R zeichnet man erneut eine Parallele zur y-Achse, die AP_0 in D schneidet.

Behauptung: Der Schnittpunkt $P_1(x_1; y_1)$ der Verbindungsgeraden SD mit der Geraden BQ ist ein neuer Parabelpunkt.

Beweis: Nach dem Strahlensatz gelten die Verhältnisse

$$y_1 : x_1 = y_0 : x_R \qquad y_1 : x_R = y_0 : x_Q \qquad y_1 : x_Q = y_0 : x_0,$$

woraus

$$y_1 = \frac{y_0}{x_R} \cdot x_1 \qquad y_1 = \frac{y_0}{x_Q} \cdot x_R \qquad y_1 = \frac{y_0}{x_0} \cdot x_Q$$

folgt.

Multipliziert man die letzten drei Gleichungen miteinander, so ergibt sich

$$y_1^3 = \frac{y_0^3}{x_0} \cdot x_1. \tag{I}$$

Da nun $P_0(x_0; y_0)$ ein Punkt der kubischen Parabel $y^3 = ax$ sein soll, muß $y_0^3 = ax_0$ gelten, womit (I) übergeht in

$$y_1^3 = ax_1.$$

Die Koordinaten des Punktes P_1 erfüllen demnach ebenfalls die Kurvengleichung. Daraus folgt, daß auch P_1 ein Punkt der kubischen Parabel sein muß, w. z. b. w.
Durch die geeignete Wahl mehrerer Punkte $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$ auf der Geraden SP_0 erhält man einige Parabelpunkte, durch die man die Kurve dann gut zeichnen kann.
Es sei vermerkt, daß der im Bild 245 eingezeichnete Punkt Z ein Punkt der semikubischen Parabel $y^3 = ax^2$ ist, falls $P_0(x_0; y_0)$ ebenfalls dieser semikubischen Parabel angehört.

AUFGABEN

995. Man untersuche die Lage der Parabel $y^3 = ax$ im Koordinatensystem für den Fall, daß $a < 0$ ist.
996. Wie ist die Lage der NEILschen Parabel $y^2 = ax^3$ im Koordinatensystem im Falle a) $a > 0$ und b) $a < 0$?
997. In welchen Punkten schneiden einander die kubische Parabel $y^3 = ax$ und die semikubische Parabel $y^3 = bx^2$ $(a > 0, b > 0)$?

Es sei besonders darauf hingewiesen, daß die Kurven $y^n = ax$ zwar *Parabeln n-ter Ordnung* genannt werden, daß diese Kurven aber im Falle $n \neq 2$ die im Abschnitt 32. behandelten Parabeleigenschaften (Brennpunkts-, Leitlinieneigenschaften usw.) nicht mehr haben.

37.3. Rollkurven

Eine Rollkurve wird von einem mit einer in sich geschlossenen beweglichen Kurve fest verbundenen Punkt P beschrieben, wenn diese bewegliche Kurve entlang einer festen Linie abrollt, ohne dabei zu gleiten.

37.3.1. Zykloiden

Rollt ein Kreis in der Ebene ohne zu gleiten auf einer Geraden entlang, so beschreibt ein fest mit diesem Kreis verbundener Punkt P eine Zykloide (Radlinie). (Beispiel: Zahnrad auf Zahnstange.)
Der Radius des abrollenden Kreises sei r, die Entfernung des die Zykloide erzeugenden Punktes P vom Kreismittelpunkt sei c (Bild 246). Der Kreis möge auf der x-Achse entlangrollen, wobei der Beginn der Bewegung so erfolgen soll, daß sowohl der Kreismittelpunkt M als auch der Punkt P ihre Ausgangsstellung auf der y-Achse haben. Der Punkt B, in dem der Kreis im jeweiligen Augenblick die x-Achse berührt, heißt *Momentanpol*, während der Winkel PMB, dessen Maßzahl t sei, *Wälzwinkel* genannt wird.
Als Kurvengleichung eignet sich besonders die Parameterdarstellung mit dem Wälzwinkel t als Parameter.

Da der Kreis ohne zu gleiten auf der x-Achse abrollen soll, muß

$$\overline{OB} = \widehat{AB} = rt$$

sein. Aus Bild 246 folgt dann für die Koordinaten des Punktes $P(x; y)$

$$x = \overline{OQ} = \overline{OB} - \overline{QB} = \overline{OB} - \overline{PC} = rt - c \cdot \sin t$$

und

$$y = \overline{QP} = \overline{BC} = \overline{BM} - \overline{CM} = r - c \cdot \cos t .$$

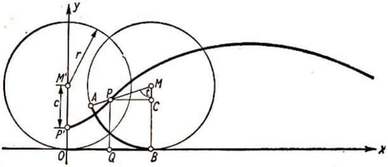


Bild 246

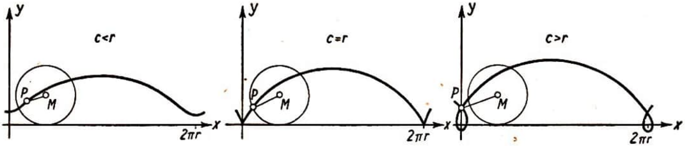


Bild 247

Die **Parameterdarstellung der Zykloide** lautet demnach

$$\boxed{\begin{aligned} x &= rt - c \cdot \sin t \\ y &= r \quad - c \cdot \cos t \end{aligned}} \tag{166}$$

Je nachdem, ob der die Zykloide erzeugende Punkt P innerhalb, auf oder außerhalb des abrollenden Kreises liegt, unterscheidet man (Bild 247)

die *gestreckte Zykloide* $(c < r)$

die *gewöhnliche Zykloide* $(c = r)$ und

die *verschlungene Zykloide* $(c > r)$.

Aus der Parameterdarstellung (166) und der Erzeugungsweise der Zykloide geht hervor, daß es Zykloidenpunkte für alle Parameterwerte $t \in (-\infty; +\infty)$ gibt. Während dabei x beliebig aus $x \in (-\infty; +\infty)$ gewählt werden kann, liegen die zugehörigen y-Werte nur im Intervall $[r - c; r + c]$.

Es sei vermerkt, daß es nicht möglich ist, die Parameterdarstellung (166) in eine Kurvengleichung der Form $y = f(x)$ aufzulösen, daß aber dagegen die Auflösung in der Form $x = g(y)$ durchgeführt werden kann (vgl. Aufgabe 998!).
Schließlich sei noch ohne Beweis angeführt, daß jede Normale einer Zykloide durch den zugehörigen Momentanpol hindurchgeht.

Eine Konstruktionsbeschreibung für die Zykloide und für die weiteren Kurven soll hier nicht gegeben werden. Es wird hierzu auf die einschlägige Literatur (z. B.: „Das Grundwissen des Ingenieurs", VEB Fachbuchverlag Leipzig) verwiesen.

AUFGABE

998. Wie lautet die Zykloidengleichung (166), wenn sie in der Form $x = g(y)$ angegeben werden soll?

37.3.2. Epizykloiden

Rollt ein Kreis in der Ebene ohne zu gleiten *außen* auf einem festen Kreis ab, so beschreibt ein fest mit dem abrollenden Kreis verbundener Punkt P eine Epizykloide. (Beispiel: zwei aufeinander abrollende Zahnräder.)
Der Radius des festen Kreises sei R, der des abrollenden Kreises r. Der Abstand des die Epizykloide erzeugenden Punktes P vom Mittelpunkt des abrollenden Kreises sei c. Das Abrollen soll so erfolgen, daß der Mittelpunkt M des abrollenden Kreises sowie der Punkt P zu Beginn der Bewegung auf der x-Achse liegen (Bild 248). Der Winkel $BMP = t$ wird auch hier *Wälzwinkel* genannt und unter dem *Momentanpol* versteht man den Berührungspunkt B der beiden Kreise. Der Winkel $BOC = \varphi$ heißt *Drehwinkel*.
Bezeichnet man den Winkel NMP mit ε, so erhält man für die Koordinaten des Punktes $P(x; y)$

$$x = \overline{OQ} = \overline{OD} + \overline{DQ} = \overline{OD} + \overline{NP} = (R + r)\cos\varphi + c \cdot \sin\varepsilon \qquad \text{(I)}$$

und

$$y = \overline{QP} = \overline{ND} = \overline{DM} - \overline{NM} = (R + r) \cdot \sin\varphi - c \cdot \cos\varepsilon. \qquad \text{(II)}$$

φ und ε lassen sich noch durch den Wälzwinkel t ausdrücken, denn da die beiden Kreise ohne zu gleiten aufeinander abrollen, muß

$$\widehat{BA_0} = \widehat{BA},$$

d. h., $$R\varphi = rt$$

sein. Hieraus folgt

$$\varphi = \frac{r}{R}\,t,$$

und wegen

$$t - \varepsilon = \frac{\pi}{2} - \varphi$$

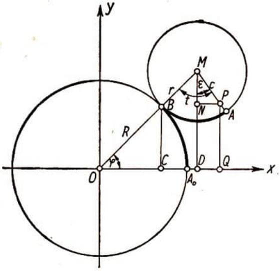


Bild 248

gilt

$$\varepsilon = t + \varphi - \frac{\pi}{2} = t + \frac{r}{R}\,t - \frac{\pi}{2} = \frac{R+r}{R}\,t - \frac{\pi}{2}.$$

Damit erhält man schließlich aus (I) und (II):

Parameterdarstellung der Epizykloide

$$\boxed{\begin{aligned} x &= (R+r)\cdot\cos\frac{r}{R}\,t - c\cdot\cos\frac{R+r}{R}\,t \\ y &= (R+r)\cdot\sin\frac{r}{R}\,t - c\cdot\sin\frac{R+r}{R}\,t \end{aligned}} \qquad (167)$$

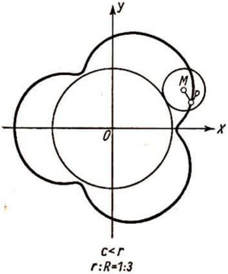


Bild 249 a

Ist das Verhältnis $\frac{r}{R} = m$ der beiden Kreisradien eine rationale Zahl, so ergibt sich eine Kurve, die sich nach einer gewissen Anzahl von Umdrehungen des beweglichen Kreises in sich schließt. Ist m dagegen eine irrationale Zahl, so kommt der Punkt P auch bei noch so viel Umdrehungen des beweglichen Kreises nie an seinen Ausgangspunkt zurück. In diesem Falle ergibt sich ein Kurvenzug, der nicht in sich geschlossen ist.

Auch bei den Epizykloiden unterscheidet man $\left\{\begin{matrix}\textit{gestreckte}\\ \textit{gewöhnliche}\\ \textit{verschlungene}\end{matrix}\right\}$ *Epizykloiden*, je nachdem ob $c \lesseqgtr 0$ ist (Bild 249).

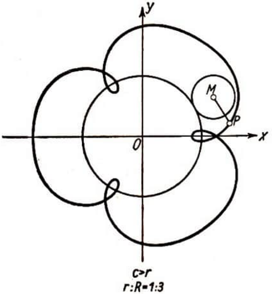


Bild 249 b

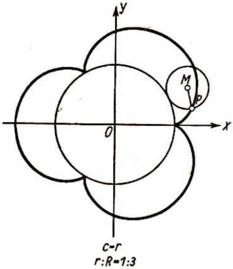


Bild 249 c

Ist insbesondere $R = r = c$, so ergibt sich als Sonderfall einer Epizykloide die **Kardioide** (Herzkurve). Ihre Gleichung lautet

$$\boxed{\begin{aligned} x &= R(2\cos t - \cos 2t) \\ y &= R(2\sin t - \sin 2t) \end{aligned}} \tag{168}$$

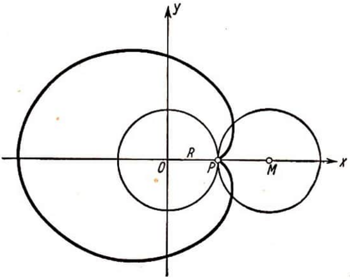


Bild 250

Aus dieser Gleichung läßt sich der Parameter t eliminieren, so daß man die Gleichung der Kardioide auch in der Form

$$\boxed{(x^2 + y^2 - R^2)^2 = 4R^2[(x - R)^2 + y^2]} \tag{169}$$

schreiben kann. — Bild 250 zeigt eine Kardioide.

AUFGABEN

999. Durch Elimination von t ist nachzuweisen, daß die Gleichung (169) der Kardioide aus ihrer Parameterdarstellung (168) hervorgeht.

1000. Gegeben sind ein fester Kreis K_1 und ein beweglicher Kreis K_2 in der durch Bild 251 dargestellten Lage. K_2 soll im mathematisch positiven Sinne ohne zu gleiten auf K_1 abrollen. Dabei beschreibt der auf der Peripherie von K_2 liegende Punkt P eine Kardioide. Wie lautet die Gleichung dieser Kardioide a) in Parameterdarstellung, b) in cartesischen Koordinaten und c) in Polarkoordinaten?

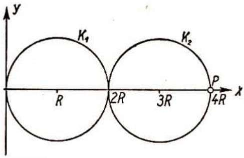


Bild 251

1001. Aus der Gleichung der Kardioide in Polarkoordinaten $r = 2R \cdot (1 + \cos\varphi)$ ist eine Konstruktionsvorschrift für diese Kurve zu entwickeln.

37.3.3. Hypozykloiden

Rollt ein Kreis in der Ebene ohne zu gleiten *innen* auf einem festen Kreis ab, so beschreibt ein fest mit dem abrollenden Kreis verbundener Punkt P eine Hypozykloide (Bild 252).

Verwendet man die gleichen Bezeichnungen wie bei der Epizykloide, so folgt aus der Bedingung, daß $\widehat{A_0B} = \widehat{AB}$ sein muß, wieder

$$\varphi = \frac{r}{R}\,t.$$

Außerdem liest man aus Bild 252 ab, daß

$$t = \varepsilon + \frac{\pi}{2} + \varphi$$

ist, woraus

$$\varepsilon = \frac{R-r}{R}\,t - \frac{\pi}{2}$$

folgt.

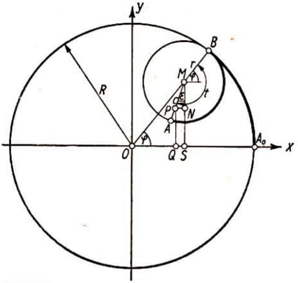


Bild 252

Mit diesen Werten erhält man:

Parameterdarstellung der Hypozykloide

$$\boxed{\begin{aligned} x &= (R-r)\cdot\cos\frac{r}{R}\,t + c\cdot\cos\frac{R-r}{R}\,t \\ y &= (R-r)\cdot\sin\frac{r}{R}\,t - c\cdot\sin\frac{R-r}{R}\,t \end{aligned}} \qquad (170)$$

Auch hier ergibt sich eine in sich geschlossene Kurve, wenn das Verhältnis der beiden Radien $\frac{r}{R} = m$ eine rationale Zahl ist. Ist m dagegen irrational, so schließt sich die Kurve nie.

Ist $c \lesseqgtr r$, so ergibt sich eine $\left\{\begin{array}{l}\textit{gestreckte}\\ \textit{gewöhnliche}\\ \textit{verschlungene}\end{array}\right\}$ *Hypozykloide* (Bild 253).

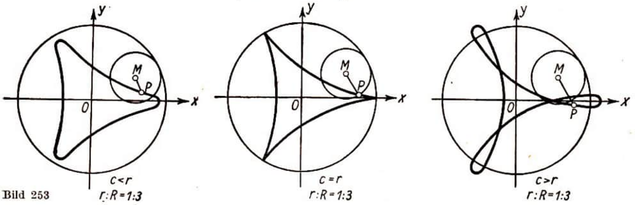


Bild 253

Für $r = \frac{R}{2}$ erhält man als Sonderfall einer Hypozykloide die Ellipse $x = \left(\frac{R}{2} + c\right) \times$ $\times \cos\frac{t}{2}$, $y = \left(\frac{R}{2} - c\right) \cdot \sin\frac{t}{2}$ mit den Halbachsen $a = \frac{R}{2} + c$ und $b = \frac{R}{2} - c$ [vgl. Formel (148)]. Ist schließlich außer $r = \frac{R}{2}$ auch $c = r = \frac{R}{2}$, so geht die Parameterdarstellung (170) der Hypozykloide über in $x = R \cdot \cos\frac{t}{2}$, $y = 0$; das bedeutet, daß der Punkt P sich periodisch auf der x-Achse hin- und herbewegt. Der Diametralpunkt A zu P auf dem abrollenden Kreis vollführt dabei eine entsprechende Hin- und Herbewegung auf der y-Achse (Bild 254).

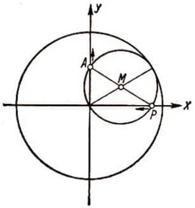


Bild 254

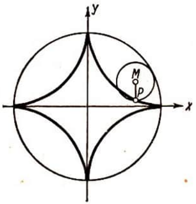


Bild 255

Man benutzt diese spezielle Eigenschaft der Hypozykloide beim Planetengetriebe, um Drehbewegungen in eine elliptische bzw. geradlinige Bewegung überzuführen.

Als weiterer Sonderfall einer Hypozykloide ergibt sich für $r = c = \frac{R}{4}$ die **Astroide** (Sternkurve) (Bild 255). Ihre Parameterdarstellung ergibt sich aus (170) nach einigen Umformungen zu

$$\boxed{x = R \cdot \cos^3\frac{t}{4}, \quad y = R \cdot \sin^3\frac{t}{4}} \tag{171}$$

woraus sich durch Elimination von t die Gleichung

$$\boxed{x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = R^{\frac{2}{3}}} \tag{172}$$

herstellen läßt.

Zykloiden spielen in der Verzahnungstheorie bei Zahnrädern eine große Rolle.

AUFGABEN

1002. An Hand von Bild 252 ist die Gleichung der Hypozykloide in Parameterdarstellung herzuleiten.

1003. Aus der Gleichung (170) ist für $r = c = \frac{R}{4}$ die Gleichung der Astroide in Parameterdarstellung sowie in cartesischen Koordinaten zu entwickeln.
Hinweis: Es sind die Formeln $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$ und $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$ zu verwenden.

37.4. Kreisevolvente

Wird ein um einen festen Kreis herumgelegter Faden straff abgewickelt, so beschreibt der Endpunkt dieses Fadens eine Kreisevolvente (Bild 256).
Aus Bild 256 folgt

$$\varepsilon = \frac{\pi}{2} - t.$$

Da der Faden straff abgewickelt werden soll, muß, falls die Abwicklung in $A\,(t = 0)$ beginnt,

$$\overline{BP} = \widehat{BA} = Rt$$

sein.
Damit ergibt sich für die Koordinaten des Punktes P die Darstellung

$$x = \overline{OQ} = \overline{OC} + \overline{CQ} = \overline{OC} + \overline{SP} = R \cdot \cos t + Rt \cdot \cos \varepsilon$$

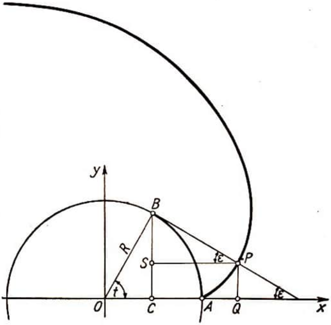


Bild 256

und

$$y = \overline{QP} = \overline{CS} = \overline{CB} - \overline{SB} = R \cdot \sin t - Rt \cdot \sin \varepsilon,$$

woraus wegen $\varepsilon = \frac{\pi}{2} - t$ folgt:

Parameterdarstellung der Kreisevolvente

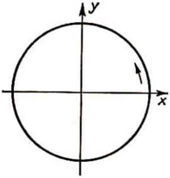
$$\boxed{\begin{aligned} x &= R \cdot (\cos t + t \cdot \sin t) \\ y &= R \cdot (\sin t - t \cdot \cos t) \end{aligned}} \qquad (173)$$

37.5. Überlagerung von harmonischen Schwingungen bei verschiedenen Schwingungsrichtungen

Überlagern einander zwei harmonische Schwingungen, deren Schwingungsrichtungen senkrecht aufeinanderstehen, so läßt sich der Verlauf der Überlagerungskurve beider Schwingungen durch die Parameterdarstellung

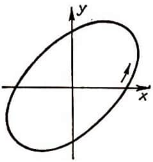
$$\boxed{\begin{aligned} x &= A_1 \cdot \sin(\omega_1 t - \varphi_1) \\ y &= A_2 \cdot \sin(\omega_2 t - \varphi_2) \end{aligned}} \qquad (174)$$

erfassen[1]) (Überlagerungsschwingungen beim Oszillographen). Es entstehen dabei Schwingungsfiguren, deren Aussehen sehr wesentlich vom Frequenzverhältnis $\omega_1 : \omega_2$ der beiden Schwingungen und von deren Phasenlage abhängt.



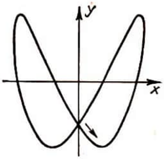
$x = a \cdot \sin t$
$y = a \cdot \sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$
$\omega_1 : \omega_2 = 1 : 1$

Bild 257



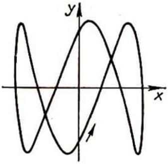
$x = a \cdot \sin t$
$y = a \cdot \sin\left(t - \frac{\pi}{3}\right)$
$\omega_1 : \omega_2 = 1 : 1$

Bild 258



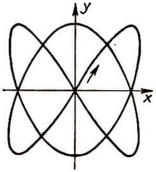
$x = a \cdot \sin t$
$y = a \cdot \sin\left(2t - \frac{\pi}{4}\right)$
$\omega_1 : \omega_2 = 1 : 2$

Bild 259



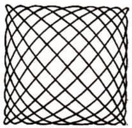
$x = a \cdot \sin t$
$y = a \cdot \sin\left(3t - \frac{\pi}{3}\right)$
$\omega_1 : \omega_2 = 1 : 3$

Bild 260



$x = a \cdot \sin 2t$
$y = a \cdot \sin 3t$
$\omega_1 : \omega_2 = 2 : 3$

Bild 261



$\omega_1 : \omega_2 = 8 : 9$

Bild 262

Die Bilder 257 bis 262 zeigen einige derartige Überlagerungsschwingungen für gleiche Amplituden, aber verschiedene Frequenzverhältnisse und Phasenlagen.
Derartige Überlagerungskurven zweier harmonischer Schwingungen werden auch LISSAJOUS-Figuren genannt.

AUFGABE

1004. Welche Bedingungen müssen erfüllt sein, wenn als Überlagerungsfiguren a) Kreise, b) Ellipsen entstehen sollen?

---

[1]) vgl. 22.10.

37.6. Spiralen

37.6.1. Archimedische Spirale

Bei einer Archimedischen Spirale ändert sich die Länge des Leitstrahles OP proportional zu dem von einem festen Anfangsstrahl OX aus gemessenen Drehwinkel φ (Bild 263).
Ihre Gleichung lautet demnach in Polarkoordinaten

$$\boxed{r = a \cdot \varphi} \tag{175}$$

Man kann sich eine Archimedische Spirale auch dadurch entstanden denken, daß sich ein Punkt P mit konstanter Geschwindigkeit auf dem Strahl OP von O fortbewegt, während der Strahl sich gleichförmig um O dreht (Bewegung der Laufkatze eines Drehkranes).

Bei einer vollen Umdrehung des Leitstrahles ($\varphi = 2\pi$) hat der bewegliche Punkt P eine Entfernung $r_1 = 2\pi a$ vom Nullpunkt erreicht. Für $\frac{1}{n}$ Umdrehung ist auf Grund der Kurvengleichung die Länge des zugehörigen Leitstrahles $r = a \cdot \frac{2\pi}{n} = \frac{r_1}{n}$. Hieraus ergibt sich eine einfache Konstruktionsmöglichkeit der Archimedischen Spirale.

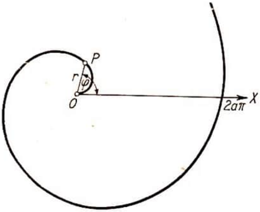


Bild 263

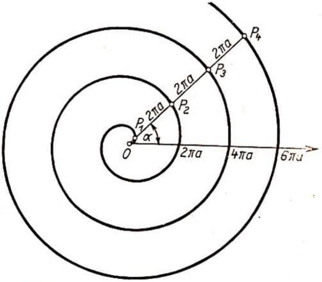


Bild 264

Aus der Proportionalität zwischen der Länge des Leitstrahles und dem Drehwinkel φ folgt auch, daß der „Gangunterschied“ zweier aufeinanderfolgender Spiralbögen den konstanten Wert $2\pi a$ besitzt, denn es gilt für die Entfernung zweier Spiralenpunkte P_n und P_{n+1}, deren Drehwinkel sich um 2π voneinander unterscheiden (Bild 264).

$$\overline{P_{n+1}P_n} = r_{n+1} - r_n = a \cdot [\alpha + 2\pi(n+1)] - a \cdot [\alpha + 2\pi n]$$

$$\overline{P_{n+1}P_n} = 2\pi a.$$

37.6.2. Hyperbolische Spirale

Bei einer hyperbolischen Spirale ist die Länge des Leitstrahles OP umgekehrt proportional zum Drehwinkel φ (Bild 265).

Ihre Gleichung lautet demnach

$$\boxed{r = \frac{a}{\varphi}} \tag{176}$$

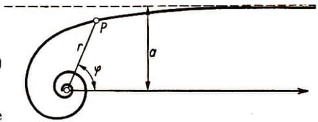


Bild 265

Mit wachsendem Winkel φ wird die Länge des zugehörigen Leitstrahles immer kleiner:

$$\lim_{\varphi \to \infty} r = 0.$$

Damit ist der Nullpunkt ein *asymptotischer Punkt* der hyperbolischen Spirale, dem sich die Kurve mit wachsendem φ immer mehr nähert.

Dagegen nähert sich die Spirale mit $\varphi \to 0$ immer mehr der Geraden $y = a$, denn aus

$$y = r \cdot \sin \varphi$$

folgt mit $r = \dfrac{a}{\varphi}$

$$y = \frac{\sin \varphi}{\varphi} \cdot a$$

und hieraus

$$\lim_{\varphi \to 0} y = \lim_{\varphi \to 0} a \cdot \frac{\sin \varphi}{\varphi} = a \cdot \lim_{\varphi \to 0} \frac{\sin \varphi}{\varphi} = a.$$

37.6.3. Logarithmische Spirale

Die Gleichung der logarithmischen Spirale lautet

$$r = e^{a\varphi}, \tag{177}$$

wobei $a > 0$.

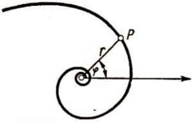


Bild 266

Auch hier ist der Nullpunkt ein *asymptotischer Punkt* der Spirale, dem sich die Kurve immer mehr nähert, wenn der Winkel $\varphi \to -\infty$ strebt.

Allerdings unterscheidet sich die logarithmische Spirale in ihrem weiteren Kurvenverlauf sehr wesentlich von der hyperbolischen Spirale. Während sich die hyperbolische Spirale für $\varphi \to 0$ der Geraden $y = a$ nähert, ist die Länge des zu $\varphi = 0$ gehörenden Leitstrahles der logarithmischen Spirale $r = 1$ und für $\varphi \to \infty$ geht auch $r \to \infty$ (Bild 266).

37.7. Lemniskate

Eine Lemniskate wird von der Menge aller derjenigen Punkte der Ebene gebildet, für die das Produkt der Abstände r_1 und r_2 von zwei festen Punkten F_1 und F_2 den konstanten Wert e^2 besitzt, wenn $\overline{F_1F_2} = 2e$ ist.
Verwendet man zur Herleitung der Kurvengleichung Polarkoordinaten und legt dabei den Pol des Polarkoordinatensystems in den Mittelpunkt O der Strecke F_1F_2 und die Polarachse durch den Punkt F_1, so folgt aus dem Cosinussatz (Bild 267)

$$r_1^2 = r^2 + e^2 - 2re \cdot \cos\varphi \qquad \text{(I)}$$

und

$$r_2^2 = r^2 + e^2 - 2re \cdot \cos(180° - \varphi),$$

woraus wegen $\cos(180° - \varphi) = -\cos\varphi$

$$r_2^2 = r^2 + e^2 + 2re \cdot \cos\varphi \qquad \text{(II)}$$

folgt.

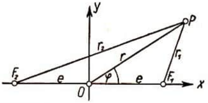


Bild 267

Multipliziert man die beiden Gleichungen miteinander, so erhält man

$$r_1^2 \cdot r_2^2 = (r^2 + e^2)^2 - 4r^2e^2\cos^2\varphi.$$

Da nach der Definition der Lemniskate $r_1 \cdot r_2 = e^2$ sein soll, ergibt sich hieraus

$$e^4 = r^4 + 2r^2e^2 + e^4 - 4r^2e^2\cos^2\varphi,$$

woraus schließlich für $r \neq 0$

$$r^2 = 2e^2 \cdot (2\cos^2\varphi - 1)$$

folgt. Mit Hilfe der Formel $\cos 2\varphi = 2\cos^2\varphi - 1$ ergibt sich

Gleichung der Lemniskate in Polarkoordinaten

$$\boxed{r^2 = 2e^2 \cdot \cos 2\varphi} \qquad \textbf{(178)}$$

Löst man diese Kurvengleichung nach r auf:

$$r = e \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{\cos 2\varphi},$$

so erkennt man, daß die Lemniskate Kurvenpunkte nur für solche Winkel φ besitzt, für die $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{4}; +\frac{\pi}{4}\right]$ bzw. $\varphi \in \left[\frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right]$ gilt. Als maximalen Wert für r erhält man bei $\varphi = 0$ bzw. $\varphi = \pi$ $r_{\max} = e \cdot \sqrt{2}$. Die Lemniskate muß demzufolge vollständig innerhalb des in Bild 268 schraffiert gezeichneten Flächenstückes verlaufen.
Konstruiert man die Lemniskate punktweise an Hand der Funktionsgleichung (178), so ergibt sich die in Bild 269 dargestellte Kurve.
Durch Übergang zu cartesischen Koordinaten erhält man die Gleichung der Lemniskate in der Form

$$x^2 + y^2 = 2e^2\left(\frac{x^2}{x^2 + y^2} - \frac{y^2}{x^2 + y^2}\right)$$

oder als **Gleichung der Lemniskate in cartesischen Koordinaten**

$$\boxed{(x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2) = 0} \tag{179}$$

mit

$$a^2 = 2e^2,$$

aus der die Symmetrie der Kurve zur x- und y-Achse noch einmal deutlich ersichtlich wird.

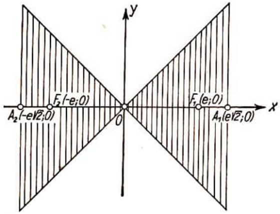


Bild 268

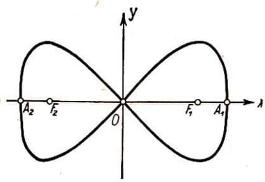


Bild 269

In der Meßtechnik werden Lemniskatenlenker verwendet, durch die eine Geradführung des Schreibstiftes bei Meßgeräten erreicht wird.

Wird wie bisher $\overline{F_1F_2} = 2e$, jedoch allgemeiner als oben $r_1r_2 = k^2$ gefordert, so erhält man als Verallgemeinerungen der Lemniskate die sogenannten *Cassinischen Kurven*. Sie bestehen, wenn $e^2 > k^2$ ist, aus zwei voneinander getrennten, eiförmigen Kurventeilen, die jeweils einen der beiden Punkte F_1 bzw. F_2 umschließen. Im Falle $e^2 < k^2$ erhält man einen in sich geschlossenen Kurvenzug (Bilder 270 und 271).

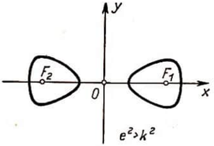


Bild 270

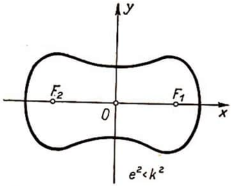


Bild 271

Die Gleichung der Cassinischen Kurven lautet

$$(x^2 + y^2)^2 - 2e^2(x^2 - y^2) + e^4 - k^4 = 0.$$

38. Grundbegriffe der Vektorrechnung

38.1. Vektor, Skalar

Bei Betrachtung der in den Naturwissenschaften und in der Technik auftretenden Größen erkennt man:

Ein Teil dieser Größen ist bei festgelegter Maßeinheit durch die Angabe einer (reellen) Maßzahl vollständig bestimmt. Zu diesen Größen gehören: Länge, Zeit, Masse, Arbeit, Energie, Temperatur, Potential. Diese Größen können auf einer Zahlenleiter, einer Skale[1]), dargestellt werden. Sie heißen deshalb *skalare Größen* oder **Skalare**.

Größen, wie z. B. Geschwindigkeit, Beschleunigung, Kraft, elektrische und magnetische Feldstärke benötigen zu ihrer eindeutigen Bestimmung neben der Angabe einer Maßzahl noch die einer Richtung. Diese Größen heißen *vektorielle Größen* oder **Vektoren**[2]) und werden durch gerichtete Strecken im Raum (Pfeile) dargestellt.

Aber auch rein geometrische Sachverhalte, wie z. B. eine *Translation* (Verschiebung eines Körpers im Raum, bei der alle Punkte des Körpers um die gleiche Länge in der gleichen Richtung verschoben werden) lassen sich durch einen Vektor darstellen (Bild 272). Die Verschiebung aller Punkte kann nämlich durch ein und dieselbe Größe, einen Pfeil mit bestimmter Länge und Richtung, gekennzeichnet werden. Die die Translation beschreibende Größe ist demnach ein Vektor.

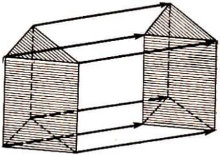


Bild 272

Bekanntlich kann bei Verwendung eines räumlichen cartesischen Koordinatensystems eine eineindeutige Zuordnung der Punkte des Raumes zur Menge aller Zahlentripel $(x; y; z)$ erfolgen. Jeder Punkt $P(x; y; z)$ des Raumes wird aber auch eindeutig durch eine vom Ursprung des Koordinatensystems zum Punkt P hinführende gerichtete Strecke — also wiederum durch einen Vektor — festgelegt und umgekehrt (Bild 273). Folglich besteht auch (bei Vorgabe eines Koordinatensystems) eine eineindeutige Zuordnung eines Vektors zu einem Zahlentripel.

---

[1]) scalae (lat.) die Leiter

[2]) Eigentlich müßte zwischen den rein algebraischen Größen Skalar und Vektor einerseits und der physikalischen Größe, d. h. der skalaren oder vektoriellen Größe, sowie ihrer geometrischen Veranschaulichung durch einen Pfeil andererseits unterschieden werden. Da aber im folgenden die Gesetze für das Rechnen mit Vektoren am geometrischen Bild hergeleitet werden, soll — wie allgemein üblich — die gerichtete Strecke selbst als Vektor bezeichnet werden

Zusammengefaßt: Ein Vektor kann zur Darstellung

a) einer vektoriellen Größe (aus Naturwissenschaft oder Technik),
b) einer Translation,
c) eines Zahlentripels

verwendet werden.

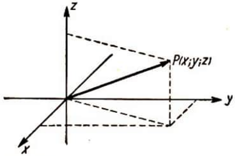


Bild 273

Bei der Beschreibung einer Translation durch einen Vektor ist dieser an keinen bestimmten Ort gebunden, er kann beliebig parallel verschoben werden. Ein solcher Vektor heißt ein *freier Vektor*. (Unter Vektor schlechthin soll im folgenden stets ein freier Vektor verstanden werden.)
Eine andere Art von Vektoren stellt man z. B. bei der Betrachtung von Kräften an einem starren Körper fest. Hier darf man eine angreifende Kraft zwar längs ihrer Wirkungslinie, keinesfalls aber parallel verschieben, ohne daß ihre Wirkung sich ändert. Die Kraft wird deshalb durch einen *liniengebundenen Vektor* dargestellt.
Greift eine Kraft an einem nichtstarren Körper an, so ist die Wirkung im allgemeinen abhängig vom Angriffspunkt der Kraft. Auch andere physikalische Größen, wie z. B. die elektrische und die magnetische Feldstärke sind zwar durch Betrag und Richtung gekennzeichnet (also Vektorgrößen), aber jeweils an einen bestimmten Ort gebunden. Das gleiche gilt für die Darstellung eines Zahlentripels durch einen Vektor. In allen genannten Fällen handelt es sich um *ortsgebundene Vektoren*. Speziell nennt man die an den Ursprung eines Koordinatensystems gebundenen Vektoren *Ortsvektoren*.

Vektoren bezeichnet man

durch (kleine oder große) Frakturbuchstaben, z. B. $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{r}, \mathfrak{v}, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{H}$ usw.,
oder durch Anfangs- und Endpunkt und einen darübergesetzten Pfeil, z. B. $\overrightarrow{AB}$,
oder (insbesondere bei Verwendung griechischer Buchstaben) durch einen übergesetzten Pfeil, z. B. $\vec{\omega}$.

Die Maßzahl der Länge des Pfeiles, der die Vektorgröße darstellt, heißt der **Betrag des Vektors**. Er wird durch Setzen des Vektorsymboles in Betragsstriche oder durch den entsprechenden lateinischen Buchstaben gekennzeichnet.
Für den Betrag des Vektors $\overrightarrow{AB} = \mathfrak{a}$ (Bild 274) schreibt man z. B. $|\overrightarrow{AB}| = |\mathfrak{a}| = a$. Die Lage des Pfeiles im Raum und der Durchlaufungssinn (durch Pfeilspitze gegeben) bestimmen die **Richtung des Vektors**.

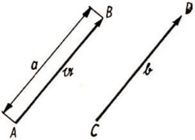


Bild 274

Es ist zweckmäßig zu definieren:

Zwei Vektoren heißen genau dann gleich, wenn sie in Betrag und Richtung übereinstimmen.

So ist z. B. in Bild 274 $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$.

Will man Vektoren zum Rechnen geometrischer, physikalischer oder technischer Aufgaben verwenden, so muß vorher untersucht werden, welche Rechenoperationen sinnvoll auf Vektoren angewendet werden können und welche Gesetze hierbei gelten. Wie noch gezeigt wird, lassen sich für das Rechnen mit Vektoren einfache Rechengesetze aufstellen, die in Analogie zu denen für reelle Zahlen stehen. Hierin ist ein Vorteil bei der Benutzung von Vektoren zu sehen. Ein weiterer Vorzug ist die kurze, übersichtliche Darstellungsweise von Vorgängen und Zusammenhängen in Naturwissenschaft und Technik mittels Vektoren. Auch geometrische Gebilde, wie Punkte, Linien und Flächen im Raum, lassen sich gut durch Vektoren beschreiben. In allen genannten Fällen ist zur numerischen Auswertung die Einführung eines Koordinatensystems erforderlich. Die folgenden Abschnitte werden deshalb neben technischen Anwendungen der Vektorrechnung eine Analytische Geometrie des Raumes zum Inhalt haben. Von den Rechenoperationen sollen nur die elementaren behandelt werden, d. h. eine *Vektoralgebra.* Die Differentiation und Integration von Vektoren erfolgt im Rahmen der Differential- und Integralrechnung.[1])

38.2. Addition und Subtraktion von Vektoren

Da zwei nacheinander ausgeführte Translationen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ einer resultierenden Translation $\mathfrak{s}$ entsprechen (Bild 275), definiert man die Addition zweier Vektoren wie folgt:

> Um zwei Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ zu addieren, verschiebt man den Vektor $\mathfrak{b}$ parallel zu sich, so daß sein Anfangspunkt auf den Endpunkt des Vektors $\mathfrak{a}$ fällt. Der vom Anfangspunkt von $\mathfrak{a}$ zum Endpunkt von $\mathfrak{b}$ führende Vektor $\mathfrak{s}$ heißt der Summenvektor oder die Summe der Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$:
>
> $$\mathfrak{s} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}.$$

Dieser Definition genügen auch — wie leicht nachzuprüfen ist — Vektorgrößen wie Kraft, Geschwindigkeit, Beschleunigung usw.

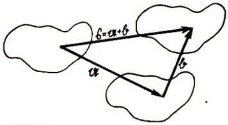


Bild 275

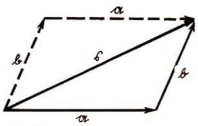


Bild 276

Für die Addition von Vektoren gelten — genauso wie beim Rechnen mit reellen Zahlen — das Kommutations- und das Assoziationsgesetz.
Trägt man nämlich (Bild 276) vom gleichen Anfangspunkt aus zunächst den Vektor $\mathfrak{b}$ ab und dann in dessen Endpunkt den Vektor $\mathfrak{a}$ an, d. h., wird die Vektorsumme mit umgekehrter Reihenfolge der Summanden gebildet, so erhält man wiederum den Summenvektor $\mathfrak{s}$. Da also sowohl $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{s}$ als auch $\mathfrak{b} + \mathfrak{a} = \mathfrak{s}$ ist, gilt für die Addition von Vektoren das

Kommutationsgesetz $$\boxed{\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{b} + \mathfrak{a}} \qquad (180)$$

[1]) Vgl. Band „Analysis“, 16.2.

Addiert man drei Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$, so werden diese im allgemeinen Falle nicht in einer Ebene liegen; denn jeder der drei Vektoren ist eine gerichtete Strecke im Raum.
Es sei (Bild 277)

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{s}_1.$$

Dann ist

$$(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) + \mathfrak{c} = \mathfrak{s}_1 + \mathfrak{c} = \mathfrak{s}.$$

Addiert man zum Vektor $\mathfrak{a}$ den Summenvektor $\mathfrak{s}_2$ der Vektoren $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$, so kommt man zum gleichen Ergebnis:

$$\mathfrak{a} + (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = \mathfrak{a} + \mathfrak{s}_2 = \mathfrak{s}.$$

Also gilt für die Addition von Vektoren auch das

Assoziationsgesetz $$\boxed{(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) + \mathfrak{c} = \mathfrak{a} + (\mathfrak{b} + \mathfrak{c})} \tag{181}$$

Da es gleichgültig ist, in welcher Reihenfolge die Additionen ausgeführt werden, sind die Klammern entbehrlich, und man schreibt

$$\mathfrak{s} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c}.$$

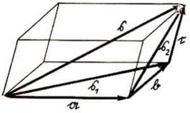


Bild 277

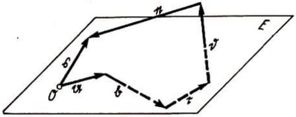


Bild 278

Wie aus Bild 277 weiterhin zu ersehen ist, bilden die Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ die Kanten eines Parallelflächners, auch *Spat*[1]) genannt, dessen Raumdiagonale der Summenvektors $\mathfrak{s}$ ist.
Die Summe beliebig vieler Vektoren erhält man, indem man die zu addierenden Vektoren zu einem Vektoreck zusammensetzt, wobei der Anfangspunkt eines Vektors immer der Endpunkt des vorhergehenden ist. Der Summenvektor ist dann der vom Anfangspunkt des ersten zum Endpunkt des letzten Vektors gezogene Vektor.
In Bild 278 ist

$$\mathfrak{s} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c} + \mathfrak{d} + \mathfrak{e}.$$

(Zur besseren Veranschaulichung wurde der Anfangspunkt O des Vektors $\mathfrak{a}$ in eine Ebene E gelegt.)

[1]) Von den Kristallformen des Fluß- und Feldspats herrührend

Von besonderem Interesse ist in den technischen Anwendungen der Fall, daß die Addition der Vektoren ein geschlossenes (räumliches) Vektoreck ergibt. Dann muß der Endpunkt des letzten Vektors mit dem Anfangspunkt des ersten Vektors zusammenfallen und der Summenvektor somit den Betrag Null besitzen. Ein solcher Vektor heißt **Nullvektor** und wird mit $\mathfrak{o}$ bezeichnet[1]).
In Bild 279 z. B. ist der Summenvektor ein Nullvektor:

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c} + \mathfrak{d} + \mathfrak{e} = \mathfrak{o}.$$

Man ordnet dem Nullvektor keine bestimmte Richtung zu.
Die Subtraktion zweier Vektoren wird — wie beim Rechnen mit reellen Zahlen — als Umkehrung der Addition erklärt, d. h., aus

$$\mathfrak{b} + \mathfrak{c} = \mathfrak{a}$$

soll folgen

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{a} - \mathfrak{b}.$$

Der Differenzvektor $\mathfrak{c}$ muß demnach der Vektor sein, der zum Vektor $\mathfrak{b}$ addiert den Vektor $\mathfrak{a}$ ergibt. Er geht (Bild 280) vom Endpunkt von $\mathfrak{b}$ zum Endpunkt von $\mathfrak{a}$ (also vom Endpunkt des zu subtrahierenden Vektors aus!).

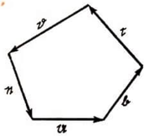


Bild 279

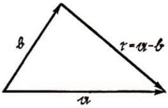


Bild 280

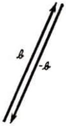


Bild 281

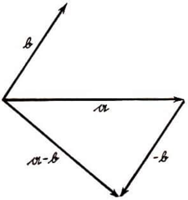


Bild 282

Ist in der Differenz $\mathfrak{a} - \mathfrak{b}$ der Vektor $\mathfrak{a}$ ein Nullvektor, so erhält man

$$\mathfrak{o} - \mathfrak{b} = -\mathfrak{b} \quad \text{(Bild 281)}.$$

Der Vektor $-\mathfrak{b}$ führt vom Endpunkt des Vektors $\mathfrak{b}$ zu seinem Anfangspunkt zurück, ist also ein gleich langer, entgegengesetztgerichteter Vektor. Man nennt ihn auch den zu $\mathfrak{b}$ *entgegengesetzten Vektor*.
Mit dieser Feststellung kann die Subtraktion eines Vektors durch die Addition des entgegengesetzten Vektors ersetzt werden. Es ist (Bild 282)

$$\boxed{\mathfrak{a} - \mathfrak{b} = \mathfrak{a} + (-\mathfrak{b})} \tag{182}$$

---

[1]) Die manchmal in der Literatur verwendete Kennzeichnung des Nullvektors durch die arabische Ziffer (0) ist abzulehnen. Da die Summe mehrerer Vektoren wieder ein Vektor ist, muß auch im Fall der Summe Null ein Vektorzeichen ($\mathfrak{o}$) gesetzt werden

In Bild 276 war der Summenvektor $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ die eine Diagonale des von den Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ aufgespannten Parallelogramms. Wie Bild 283 zeigt, ist der Differenzvektor die andere Diagonale. Für die Betragsabschätzung gilt[1])

$$\boxed{|\mathfrak{a} + \mathfrak{b}| \leqq |\mathfrak{a}| + |\mathfrak{b}|} \tag{183a}$$

und

$$\boxed{|\mathfrak{a} - \mathfrak{b}| \geqq |\mathfrak{a}| - |\mathfrak{b}|} \tag{183b}$$

Weiterhin ist aus Bild 283 zu erkennen, daß der Betrag der Summe zweier Vektoren kleiner sein kann als der Betrag ihrer Differenz, nämlich dann, wenn der von den Vektoren eingeschlossene Winkel größer als 90° ist.

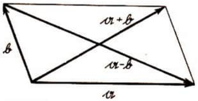


Bild 283

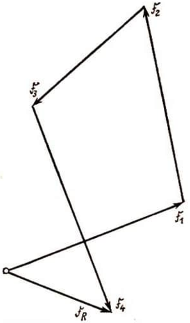


Bild 284

BEISPIEL

An einem Verteilermast greifen in einem Punkt vier Kräfte $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{F}_3$ und $\mathfrak{F}_4$ an, die in einer Ebene liegen sollen.
$F_1 = |\mathfrak{F}_1| = 380\,\mathrm{kp}$; $F_2 = |\mathfrak{F}_2| = 400\,\mathrm{kp}$; $F_3 = |\mathfrak{F}_3| = 300\,\mathrm{kp}$; $F_4 = |\mathfrak{F}_4| = 440\,\mathrm{kp}$;
$\sphericalangle(\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2) = 80°$; $\sphericalangle(\mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3) = 120°$; $\sphericalangle(\mathfrak{F}_3, \mathfrak{F}_4) = 70°$.
Es sind zeichnerisch Betrag und Richtung der Resultierenden $\mathfrak{F}_R = \mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2 + \mathfrak{F}_3 + \mathfrak{F}_4$ zu ermitteln!

Lösung: Die Resultierende ergibt sich als Summenvektor im Vektorvieleck. Zur Darstellung der einzelnen Kräfte als Vektoren muß ein Maßstab festgelegt werden. In Bild 284 wurde gewählt $m_F = \dfrac{1\,\mathrm{cm}}{100\,\mathrm{kp}} \left(\text{Maßstab} = \dfrac{\text{Zeichengröße}}{\text{Physikalische Größe}}\right)$.
Man liest ab: $F_R = |\mathfrak{F}_R| \approx \underline{\underline{220\,\mathrm{kp}}}$; $\sphericalangle(\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_R) \approx \underline{\underline{-40°}}$.

Eine rechnerische Nachprüfung mit Hilfe trigonometrischer Funktionen ergibt $F_R = 224\,\mathrm{kp}$; $\sphericalangle(\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_R) = -41{,}6°$.

38.3. Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar

Gemäß der Erklärung für die Addition von Vektoren in 38.2. muß ein Vektor

$$\mathfrak{b} = \underbrace{\mathfrak{a} + \mathfrak{a} + \mathfrak{a} + \ldots + \mathfrak{a}}_{k \text{ Summanden}}$$

[1]) Vgl. Aufg. 1010, S. 478

dem Vektor $\mathfrak{a}$ gleichgerichtet sein (geschrieben: $\mathfrak{b} \uparrow\uparrow \mathfrak{a}$) und den k-fachen Betrag des Vektors $\mathfrak{a}$ besitzen:

$$\mathfrak{b} \uparrow\uparrow \mathfrak{a}; \quad |\mathfrak{b}| = k\,|\mathfrak{a}|.$$

Man schreibt hierfür

$$\mathfrak{b} = k\mathfrak{a}.$$

Für eine Summe von k gleichen Vektoren $(-\mathfrak{a})$ gilt dann

$$\underbrace{(-\mathfrak{a}) + (-\mathfrak{a}) + (-\mathfrak{a}) + \ldots + (-\mathfrak{a})}_{k \text{ Summanden}} = k(-\mathfrak{a}),$$

wobei $k(-\mathfrak{a})$ und $k\mathfrak{a}$ entgegengesetztgerichtet sind (geschrieben: $k(-\mathfrak{a}) \uparrow\downarrow k\mathfrak{a}$) und die gleichen Beträge besitzen, d. h., $|k(-\mathfrak{a})| = |k\mathfrak{a}|$. Also ist $k(-\mathfrak{a})$ der zu $k\mathfrak{a}$ entgegengesetzte Vektor:

$$k(-\mathfrak{a}) = -k\mathfrak{a}.$$

Es ist sinnvoll, in Verallgemeinerung des eben dargelegten für die Multiplikation eines Skalars n (einer reellen Zahl n) mit einem Vektor $\mathfrak{a}$ zu definieren:

Definition

Ein Vektor $\mathfrak{b} = n\mathfrak{a}$ ist ein Vektor, der parallel zu $\mathfrak{a}$ verläuft und dessen Betrag das $|n|$-fache des Betrages von $\mathfrak{a}$ ist:

$$|n \cdot \mathfrak{a}| = |n| \cdot |\mathfrak{a}|.$$

Dabei ist:

$$\mathfrak{b} = n\mathfrak{a} \uparrow\uparrow \mathfrak{a} \text{ für } n > 0,$$

$$\mathfrak{b} = n\mathfrak{a} \uparrow\downarrow \mathfrak{a} \text{ für } n < 0,$$

$$\mathfrak{b} = n\mathfrak{a} = \mathfrak{o} \text{ für } n = 0.$$

Vektoren, zwischen denen eine Beziehung von der Form $\mathfrak{b} = n\mathfrak{a}$ besteht, heißen auch kollineare Vektoren, weil sie durch Pfeile veranschaulicht werden können, die in ein und derselben Geraden liegen.

Viele Gesetze der Physik sind Beispiele für die Multiplikation eines Skalars mit einem Vektor, z. B.

das Grundgesetz der Dynamik	$\mathfrak{F} = m \cdot \mathfrak{a}$,
das Grundgesetz für die Drehbewegung	$\mathfrak{M} = \Theta \cdot \vec{\varepsilon}$,
der Impulssatz	$\mathfrak{J} = \mathfrak{F} \cdot t = m \cdot \mathfrak{v}$,
der Drehimpulssatz	$\mathfrak{D} = \mathfrak{M} t = \Theta \cdot \vec{\omega}$

(mit $\mathfrak{F}$ Kraft, m Masse, $\mathfrak{M}$ Drehmoment, Θ Massenträgheitsmoment, t Zeit, $\mathfrak{v}$ Geschwindigkeit, $\vec{\omega}$ Winkelgeschwindigkeit, $\mathfrak{a}$ Beschleunigung, $\vec{\varepsilon}$ Winkelbeschleunigung, $\mathfrak{J}$ Impuls, $\mathfrak{D}$ Drehimpuls).

Ein Produkt eines Vektors $\mathfrak{a}$ und eines Skalars n in der Form $\mathfrak{a}n$ ist zunächst nicht erklärt. Vereinbart man, daß $\mathfrak{a}n$ und $n\mathfrak{a}$ gleichwertige Schreibweisen sein sollen, so gilt dadurch das

Kommutationsgesetz $$\boxed{n\mathfrak{a} = \mathfrak{a}n} \tag{184}$$

Ferner gilt das

Assoziationsgesetz $$\boxed{m(n\mathfrak{a}) = n(m\mathfrak{a}) = mn\mathfrak{a}} \tag{185}$$

wobei allerdings nur einer der Faktoren ein Vektor sein darf, da die Multiplikation von Vektoren noch nicht erklärt wurde.
Wie die Bilder 285 und 286 zeigen, existieren und gelten zwei Distributionsgesetze[1]):

1. Distributionsgesetz $$\boxed{m(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = m\mathfrak{a} + m\mathfrak{b}} \tag{186a}$$

2. Distributionsgesetz $$\boxed{(m + n)\mathfrak{a} = m\mathfrak{a} + n\mathfrak{a}} \tag{186b}$$

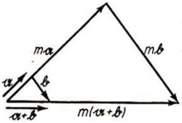


Bild 285

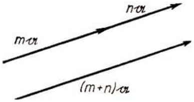


Bild 286

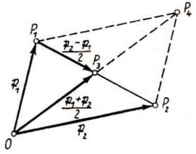


Bild 287

BEISPIELE

1. Gesucht ist die Entfernung des Halbierungspunktes P_3 der Strecke P_1P_2 vom Punkte O, wenn P_1 der Endpunkt des Vektors $\mathfrak{P}_1$ und P_2 der Endpunkt des Vektors $\mathfrak{P}_2$ ist und die Vektoren $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ vom Punkte O ausgehen (Bild 287).

   Lösung: Der von P_1 nach P_2 führende Vektor wird dargestellt durch den Differenzvektor $\overrightarrow{P_1P_2} = \mathfrak{P}_2 - \mathfrak{P}_1$. Die Hälfte des Differenzvektors zum Vektor $\mathfrak{P}_1$ addiert, ergibt den Vektor $\overrightarrow{OP_3}$:

   $$\overrightarrow{OP_3} = \mathfrak{P}_1 + \frac{\mathfrak{P}_2 - \mathfrak{P}_1}{2} = \frac{\mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_2}{2}$$

   $$\overline{OP_3} = \frac{1}{2}\,|\mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_2|.$$

   Da aber $\overrightarrow{OP_4} = \mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_2$ ist, muß P_3 auch der Halbierungspunkt von $\overline{OP_4}$ sein. Damit ist bewiesen, daß im Parallelogramm die Diagonalen durch ihren Schnittpunkt halbiert werden.

2. Es soll bewiesen werden: In einem beliebigen (nicht notwendigerweise ebenen) Viereck bilden die Verbindungslinien der Mittelpunkte je zweier benachbarter Seiten ein Parallelogramm.

[1]) Distribution (lat.), Verteilung

Lösung: Stellen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{d}$ mit der in Bild 288 angegebenen Orientierung die Seiten des Vierecks dar, so können zwei Verbindungen der Seitenmitten durch

$$\mathfrak{v}_1 = \frac{1}{2}\,\mathfrak{a} + \frac{1}{2}\,\mathfrak{b} = \frac{1}{2}\,(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})$$

und

$$\mathfrak{v}_2 = -\frac{1}{2}\,\mathfrak{c} - \frac{1}{2}\,\mathfrak{d} = \frac{1}{2}\,(-\mathfrak{c} - \mathfrak{d})$$

beschrieben werden.

Da $\quad \mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c} + \mathfrak{d} = \mathfrak{o},$

also $\quad \mathfrak{a} + \mathfrak{b} = -\mathfrak{c} - \mathfrak{d},$

ergibt sich auch

$$\mathfrak{v}_2 = \frac{1}{2}\,(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}).$$

Aus $\mathfrak{v}_1 = \mathfrak{v}_2$ folgt aber, daß $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{v}_2$ den gleichen Betrag und die gleiche Richtung besitzen. Da der eben für zwei Verbindungslinien geführte Beweis geführt wurde, ohne daß an die Seiten besondere Bedingungen gestellt wurden, muß auch für die anderen zwei Verbindungslinien der Seitenmitten (dargestellt durch $\mathfrak{v}_3$ und $\mathfrak{v}_4$) die Gleichheit nachgewiesen werden können. Das durch die Verbindungslinien der Mittelpunkte je zweier Seiten gebildete Viereck ist demnach ein Parallelogramm.

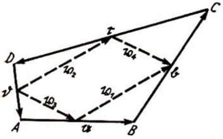


Bild 288

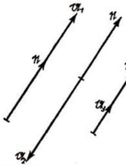


Bild 289

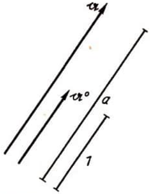


Bild 290

38.4. Grund- und Einsvektoren

Aus der Erklärung des Produktes $n\,\mathfrak{a}$ (vgl. 38.3.) folgt, daß alle zueinander parallelen Vektoren $\mathfrak{a}$ (Bild 289) durch einen von ihnen, den *Grundvektor* $\mathfrak{e}$, und einen Skalar n (positiven oder negativen Zahlfaktor) ausgedrückt werden können:

$$\mathfrak{a} = n\,\mathfrak{e}.$$

Liegt der Sonderfall vor, daß dieser Grundvektor zu $\mathfrak{a}$ gleichgerichtet und sein Betrag eins ist (Bild 290), so nennt man ihn den zu $\mathfrak{a}$ gehörenden *Einsvektor* (*Einheitsvektor*) $\mathfrak{a}^0$ (gelesen „$\mathfrak{a}$ hoch Null“). Ein Vektor ist durch die Angabe seiner Länge (seines Betrages) und des Einsvektors eindeutig bestimmt:

$$\mathfrak{a} = |\mathfrak{a}|\,\mathfrak{a}^0 = a \cdot \mathfrak{a}^0.$$

Hieraus folgt

$$\boxed{\mathfrak{a}^0 = \frac{\mathfrak{a}}{|\mathfrak{a}|}} \tag{187}$$

BEISPIEL

Gesucht ist ein Vektor in Richtung der Winkelhalbierenden des von den Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ gebildeten Winkels.

Lösung: Die zu $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ gehörenden Einsvektoren $\mathfrak{a}^0 = \frac{\mathfrak{a}}{|\mathfrak{a}|}$ und $\mathfrak{b}^0 = \frac{\mathfrak{b}}{|\mathfrak{b}|}$ bestimmen einen Rhombus, dessen Diagonalvektor $\mathfrak{a}^0 + \mathfrak{b}^0$ den von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ gebildeten Winkel halbiert (Bild 291).

Jeder Vektor

$$\mathfrak{w} = m(\mathfrak{a}^0 + \mathfrak{b}^0),$$

der durch Multiplikation des Diagonalvektors mit einem Skalar gebildet wird, liegt in Richtung der Winkelhalbierenden. Die Winkelhalbierende des Nebenwinkels wird beschrieben durch

$$\mathfrak{w}' = n(\mathfrak{a}^0 - \mathfrak{b}^0).$$

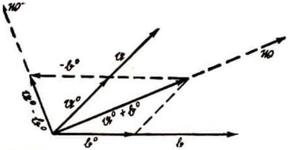


Bild 291

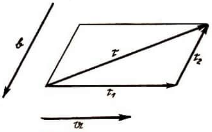


Bild 292

38.5. Zerlegung von Vektoren in Komponenten

In der Mechanik ist oft die Aufgabe zu lösen, die längs zweier vorgegebener Richtungen wirkenden Komponenten einer Kraft zu bestimmen (z. B. bei der Ermittlung der Längs- und Querkräfte eines belasteten Trägers).

Die Zerlegung eines Vektors in zwei Summanden mit vorgegebenen Richtungen stellt die Umkehrung der in Bild 276 gelösten Aufgabe dar, zwei Vektoren zu addieren. Ist z. B. (Bild 292) $\mathfrak{c}$ der zu zerlegende Vektor und geben die Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ die Zerlegungsrichtungen an, so zieht man durch Anfangs- und Endpunkt von $\mathfrak{c}$ Parallelen zu den gegebenen Richtungen. Die Seiten des entstehenden Parallelogramms bestimmen Länge (Betrag) und Richtung der gesuchten Summanden $\mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{c}_2$, der Durchlaufungssinn folgt aus der Bedingung $\mathfrak{c} = \mathfrak{c}_1 + \mathfrak{c}_2$.

$\mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{c}_2$ heißen die **Komponenten** des Vektors $\mathfrak{c}$ längs $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$. (Wie Bild 292 zeigt, brauchen die gegebenen Vektoren und die Komponenten nicht gleichgerichtet zu sein.)

Mittels der in die Richtung von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ fallenden Grundvektoren $\mathfrak{e}_\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{e}_\mathfrak{b}$ läßt sich die Zerlegung in der Form

$$\mathfrak{c} = c_1\mathfrak{e}_\mathfrak{a} + c_2\mathfrak{e}_\mathfrak{b}$$

schreiben mit $\mathfrak{c}_1 = c_1\mathfrak{e}_\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{c}_2 = c_2\mathfrak{e}_\mathfrak{b}$.

Die Zerlegung des Vektors $\mathfrak{c}$ in Komponenten längs $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ ist nur dann eindeutig möglich, wenn $\mathfrak{c}$ in der durch $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ festgelegten Ebene liegt und $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ nicht einander parallel sind. Vektoren, die in einer Ebene liegen, nennt man *komplanar*[1]). Da sowohl $\mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{a}$ als auch $\mathfrak{c}_2$ und $\mathfrak{b}$ kollinear sind, kann man für sie auch die folgenden Beziehungen ansetzen:

$$\mathfrak{c}_1 = m\mathfrak{a}; \quad \mathfrak{c}_2 = n\mathfrak{b}.$$

Wegen $\mathfrak{c} = \mathfrak{c}_1 + \mathfrak{c}_2$ folgt daraus:

> Sind drei komplanare Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ nicht sämtlich kollinear, dann lassen sich stets zwei Skalare m und n bestimmen, so daß gilt
>
> $$\mathfrak{c} = m\mathfrak{a} + n\mathfrak{b}.$$

Wird insbesondere ein Vektor $\mathfrak{c}$ in zwei senkrecht zueinander stehende Komponenten zerlegt, von denen eine parallel zu einem vorgegebenen Vektor $\mathfrak{a}$ verläuft, so bezeichnet man die *Parallelkomponente* mit $\mathfrak{c}_{\mathfrak{a}}$ und die (senkrecht zu $\mathfrak{a}$ stehende) *Normalkomponente*[2]) mit $\mathfrak{c}'_{\mathfrak{a}}$ (Bild 293).

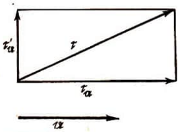


Bild 293

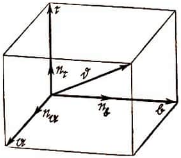


Bild 294

Sind drei Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ nicht komplanar, dann ist

$$\mathfrak{d} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c}$$

die Diagonale des von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ aufgespannten Parallelflächners (vgl. 38.2. und Bild 277). Umgekehrt kann ein Vektor $\mathfrak{d}$ immer durch drei nicht komplanare Vektoren dargestellt werden. Sind z. B. die Richtungen der drei gesuchten Komponenten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ durch drei Grundvektoren $\mathfrak{e}_{\mathfrak{a}}$, $\mathfrak{e}_{\mathfrak{b}}$ und $\mathfrak{e}_{\mathfrak{c}}$ gegeben (Bild 294) und ist $\mathfrak{a} = a\,\mathfrak{e}_{\mathfrak{a}}$, $\mathfrak{b} = b\,\mathfrak{e}_{\mathfrak{b}}$ sowie $\mathfrak{c} = c\,\mathfrak{e}_{\mathfrak{c}}$, so lautet die Komponentendarstellung des Vektors

$$\mathfrak{d} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c} = a\,\mathfrak{e}_{\mathfrak{a}} + b\,\mathfrak{e}_{\mathfrak{b}} + c\,\mathfrak{e}_{\mathfrak{c}}.$$

BEISPIEL

Eine Straßenleuchte von 2 kp Gewicht ist über der Straßenmitte an zwei Drähten aufgehängt. Diese sind in gleicher Höhe beiderseits an Häusern verankert, die einen Abstand von 18 m voneinander haben. Welche Spannkräfte treten in den Drähten auf, wenn der Draht mit der Lampe 1,5 m durchhängt?

---

1) planus, (lat.) eben

2) Die Schreibweise $\mathfrak{c}'_{\mathfrak{a}}$ darf nicht verwechselt werden mit der eines Vektors als Zeilenmatrix, z. B. $\mathfrak{c}' = (c_x, c_y, c_z)$. Die Tatsache, daß es sich hier um eine Komponente — und zwar die Normalkomponente — eines Vektors handelt, geht aus dem als Index geschriebenen Bezugsvektor hervor

Lösung: Das Gewicht $\mathfrak{G}$ der Lampe muß in zwei Komponenten $\mathfrak{F}_{S1}$ und $\mathfrak{F}_{S2}$, die zwei Spannkräfte, zerlegt werden, deren Richtungen durch die der Spanndrähte bestimmt sind. Es ist $\mathfrak{F}_{s1} + \mathfrak{F}_{s2} = \mathfrak{G}$. Zeichnerisch können die Beträge der Spannkräfte nach Bild 295 ermittelt werden $\left(m_F = \dfrac{1\ \text{cm}}{1\ \text{kp}}\right)$:

$$F_{s1} = F_{s2} \approx 6{,}1\ \text{kp}.$$

Rechnerisch ergibt sich

$$F_{s1} : \frac{G}{2} = \sqrt{83{,}25}\ \text{m} : 1{,}5\ \text{m}$$

$$F_{s1} = F_{s2} = 6{,}08\ \text{kp} \approx \underline{\underline{6{,}1\ \text{kp}}}.$$

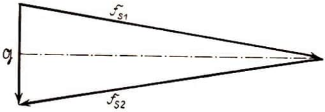


Bild 295

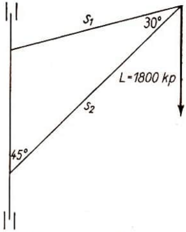


Bild 296

AUFGABEN

1005. Wie groß sind die in den Stäben s_1 und s_2 (Schließe und Strebe) eines Drehkrans (Bild 296) auftretenden Kräfte, wenn der Kran eine Last von 1800 kp trägt?

1006. Welchen Winkel müssen zwei am gleichen Punkt angreifende Kräfte von gleicher Größe miteinander bilden, damit ihre Resultierende wiederum die gleiche Größe besitzt?

1007. Für drei Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ gilt $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c} = \mathfrak{o}$. Zu bestimmen ist der Vektor $\mathfrak{s}$, der in dem von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ gebildeten Vektoreck Seitenhalbierende der Seite $\mathfrak{b}$ ist.

1008. Zu bestimmen sei der Vektor $\mathfrak{r}$ von einem gegebenen Punkt O nach dem Schwerpunkt S eines Dreiecks, wenn dessen Eckpunkte P_1, P_2 und P_3 durch die Vektoren $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ und $\mathfrak{P}_3$, die von O ausgehen, gegeben sind.

1009. In einem von drei Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ gebildeten Dreieck gilt

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c} = \mathfrak{o},$$

und

$$|\mathfrak{b}|^2 + |\mathfrak{c}|^2 = |\mathfrak{a}|^2.$$

Zu bestimmen ist der vom Eckpunkt A des Vektorecks aus zur gegenüberliegenden Seite $\mathfrak{a}$ gerichtete Höhenvektor.

1010. Wann gelten in (183) die Gleichheitszeichen? Welche Lehrsätze der Planimetrie werden durch die Ungleichungen (183) ausgedrückt (vgl. Bild 283)?

39. Vektoren in einem rechtwinkligen Koordinatensystem

39.1. Grundvektoren eines rechtwinkligen Koordinatensystems

Für das praktische Rechnen mit Vektoren ist es oft nützlich, die Vektoren auf einen bestimmten Punkt zu beziehen und durch Parallelverschiebung im Raum ihre Anfangspunkte in diesen Punkt zu verlegen. Man nennt diese Vektoren mit festgelegtem, gemeinsamem Anfangspunkt **Ortsvektoren**. Im besonderen Fall, wenn der gemeinsame Anfangspunkt der Koordinatenanfangspunkt ist, bezeichnet man die Ortsvektoren auch als *Radiusvektoren*. Den folgenden Betrachtungen soll ein räumliches cartesisches Koordinatensystem zugrunde gelegt werden. Dieses entsteht aus dem ebenen cartesischen Koordinatensystem durch Hinzunehmen einer dritten Achse, der z-Achse, die senkrecht auf der $x;y$-Ebene steht und nach oben weist (Bild 297). Man nennt ein solches System auch ein *Rechtssystem*, weil x-, y- und z-Achse wie gespreizter Daumen, Zeige- und Mittelfinger der rechten Hand zueinander liegen. Bei diesem System stellt eine Drehung der x-Achse auf kürzestem Wege in Richtung der y-Achse und eine gleichzeitige Bewegung in Richtung der z-Achse die Bewegung einer rechtsgängigen Schraube dar.

Einen Ortsvektor (Radiusvektor) $\mathfrak{a} = \overrightarrow{OP}$ stellt man mit Hilfe der drei **Grundvektoren** $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$ und $\mathfrak{k}$ dar, die die positive Richtung der x-, bzw. y-, bzw. z-Achse und jeder die Länge *eins* besitzen, also Einsvektoren sind. Das von $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$ und $\mathfrak{k}$ gebildete „Dreibein" wird *Basis* genannt. Der Vektor $\mathfrak{a}$ besitzt in Richtung der Koordinatenachsen die Komponenten $\mathfrak{a}_x$, $\mathfrak{a}_y$ und $\mathfrak{a}_z$, so daß gilt:

$$\boxed{\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_x + \mathfrak{a}_y + \mathfrak{a}_z} \tag{188a}$$

Da die Grundvektoren $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$ und $\mathfrak{k}$ Einsvektoren sind und damit zugleich die Einheiten auf den drei Koordinatenachsen bestimmen, gilt sowohl

$$\mathfrak{a}_x = a_x\mathfrak{i},\ \mathfrak{a}_y = a_y\mathfrak{j},\ \mathfrak{a}_z = a_z\mathfrak{k},$$

als auch

$$\mathfrak{a}_x = x\mathfrak{i},\ \mathfrak{a}_y = y\mathfrak{j},\ \mathfrak{a}_z = z\mathfrak{k},$$

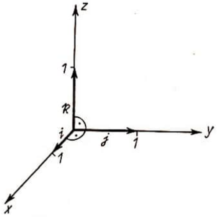


Bild 297

wenn x, y und z die Koordinaten des Punktes P sind.
Also kann der Vektor $\mathfrak{a} = \overrightarrow{OP}$ auch dargestellt werden durch

$$\boxed{\mathfrak{a} = a_x\mathfrak{i} + a_y\mathfrak{j} + a_z\mathfrak{k}} \tag{188b}$$

oder

$$\boxed{\mathfrak{a} = x\mathfrak{i} + y\mathfrak{j} + z\mathfrak{k}} \tag{188c}$$

$\mathfrak{a}_x$, $\mathfrak{a}_y$ und $\mathfrak{a}_z$ heißen die *Komponenten* des Vektors $\mathfrak{a}$ in bezug auf die drei Grundvektoren $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$ und $\mathfrak{k}$, $a_x = x$, $a_y = y$ und $a_z = z$ die *Koordinaten* des Vektors $\mathfrak{a}$ in bezug auf diese Grundvektoren[1]).

Durch eine der drei Gleichungen (188), d. h. durch Angabe der Komponenten oder der Koordinaten, ist ein Ortsvektor eindeutig bestimmt. Da aber die Koordinaten eines Ortsvektors $\mathfrak{a} = x\mathfrak{i} + y\mathfrak{j} + z\mathfrak{k}$ mit denen seines Endpunktes $P(x;\ y;\ z)$ übereinstimmen, gilt der

Satz

Bei vorgegebener Basis kann jedem Punkt des Raumes ein Ortsvektor und umgekehrt jedem Ortsvektor ein Punkt zugeordnet werden.

Bild 298 zeigt die Bestimmung des zum Punkt P gehörenden Ortsvektors: Man legt durch P parallele Ebenen zu den drei Koordinatenebenen, deren Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen die Koordinaten des Punktes P darstellen und damit den

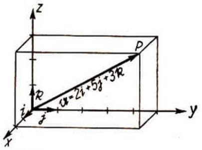


Bild 298

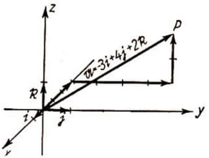


Bild 299

Vektor $\mathfrak{a}$ bestimmen $(\mathfrak{a} = 2\mathfrak{i} + 5\mathfrak{j} + 3\mathfrak{k})$. Umgekehrt bestimmt man den Endpunkt eines Ortsvektors, indem man nacheinander jeweils soviel Einheiten in den Richtungen der drei Grundvektoren voranschreitet, wie deren Koordinaten angeben. Ist die Koordinate negativ, so hat man die zum Grundvektor entgegengesetzte Richtung zu wählen. Im Bild 299 ist der zum Ortsvektor $\mathfrak{a} = -3\mathfrak{i} + 4\mathfrak{j} + 2\mathfrak{k}$ gehörende Punkt P bestimmt worden.

Ähnlich wie man bei einer komplexen Zahl (d. i. ein Zahlenpaar) definiert, daß $a + b\mathrm{j} = 0$ identisch ist mit $a = 0$ und $b = 0$, soll für einen Vektor (d. i. ein Zahlentripel) die Aussage $\mathfrak{a} = a_x\mathfrak{i} + a_y\mathfrak{j} + a_z\mathfrak{k} = \mathfrak{o}$ identisch sein mit $a_x = 0$, $a_y = 0$ und $a_z = 0$, d. h., es gilt die

Definition

Ein Ortsvektor ist genau dann ein Nullvektor, wenn seine drei Koordinaten gleich Null sind.

---

[1]) Ein Vektor kann auch als Spaltenmatrix $\mathfrak{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$ oder Zeilenmatrix $\mathfrak{a} = (a_x, a_y, a_z)$ geschrieben werden. Diese Schreibweise ist erweiterungsfähig auf n-dimensionale Vektoren, die sich zwar einer anschaulichen geometrischen Darstellung entziehen, nichtsdestoweniger aber eine große Bedeutung für praktische Anwendungen besitzen

Nach Definition (vgl. 38.1.) sind zwei Vektoren genau dann gleich, wenn sie in Betrag und Richtung übereinstimmen. Sind $\mathfrak{a} = a_x\mathfrak{i} + a_y\mathfrak{j} + a_z\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{b} = b_x\mathfrak{i} + b_y\mathfrak{j} + b_z\mathfrak{k}$ zwei Ortsvektoren, so folgt aus $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$, daß $a_x = b_x, a_y = b_y$ und $a_z = b_z$ sein müssen, d. h., es gilt der

Satz

Zwei Ortsvektoren sind (bei gleicher Basis) gleich, wenn ihre Koordinaten paarweise gleich sind.

Die Gleichung $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ ist eine einfache *Vektorgleichung.* Allgemein versteht man unter einer Vektorgleichung die Gleichheit zweier Terme $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$, die vektorielle Ausdrücke darstellen: $\mathfrak{T}_1 = \mathfrak{T}_2$.
Die Vektorgleichung

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b} + \lambda\mathfrak{c},$$

in der $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ Ortsvektoren und λ ein Skalar sein sollen, kann man auch in der Form

$$\begin{aligned} a_x\mathfrak{i} + a_y\mathfrak{j} + a_z\mathfrak{k} &= b_x\mathfrak{i} + b_y\mathfrak{j} + b_z\mathfrak{k} + \lambda(c_x\mathfrak{i} + c_y\mathfrak{j} + c_z\mathfrak{k}) = \\ &= (b_x + \lambda c_x)\mathfrak{i} + (b_y + \lambda c_y)\mathfrak{j} + (b_z + \lambda c_z)\mathfrak{k} \end{aligned}$$

schreiben.
Die linke und die rechte Seite dieser Gleichung stellen (für jeden Wert von λ) je einen Vektor dar. Da aber zwei Vektoren genau dann gleich sind, wenn ihre Koordinaten paarweise gleich sind, folgen aus der Vektorgleichung durch *Koeffizientenvergleich* die drei skalaren Gleichungen

$$\begin{aligned} a_x &= b_x + \lambda c_x \\ a_y &= b_y + \lambda c_y \\ a_z &= b_z + \lambda c_z. \end{aligned}$$

Satz

Eine Vektorgleichung enthält drei skalare Gleichungen.

Von der Schlußweise des Koeffizientenvergleichs, die es ermöglicht, eine Vektorgleichung durch die drei in ihr zusammengefaßten skalaren Gleichungen zu ersetzen, wird in der Vektorrechnung sehr oft Gebrauch gemacht.
Für Vektorgleichungen gelten die gleichen Rechenregeln wie für gewöhnliche Gleichungen (soweit die jeweiligen Rechenoperationen für Vektoren erklärt sind). So darf man z. B. zwei Vektorgleichungen addieren, subtrahieren usw.
Besondere Bedeutung besitzt auch die Vektorgleichung als Bestimmungsgleichung für einen unbekannten Vektor oder Skalar.

BEISPIEL

Von einem Parallelogramm seien die Diagonalen durch zwei Vektoren $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{f}$ gegeben. Wie heißen die das Parallelogramm aufspannenden Vektoren?

Lösung: Seien $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ die Vektoren der Parallelogrammseiten, so gilt nach Bild 283

$$\left| \begin{array}{l} \mathfrak{x} + \mathfrak{y} = \mathfrak{e} \\ \mathfrak{x} - \mathfrak{y} = \mathfrak{f} \end{array} \right|.$$

Hieraus folgt

$$\underline{\underline{\mathfrak{x} = \frac{1}{2}(\mathfrak{e} + \mathfrak{f})}}$$

$$\underline{\underline{\mathfrak{y} = \frac{1}{2}(\mathfrak{e} - \mathfrak{f}).}}$$

39.2. Rechengesetze für Vektoren in Koordinatendarstellung

Die Schreibweise von Vektoren durch verschiedene Vektorsymbole gestattet, Ableitungen und Gesetzmäßigkeiten (Formeln) kurz und übersichtlich darzustellen. Für das praktische Rechnen wird man jedoch meist die Darstellung eines Vektors durch seine Koordinaten verwenden. In 38.2. konnten die Addition und die Subtraktion von Vektoren nur graphisch durchgeführt werden. (Nur im Sonderfalle komplanarer Vektoren war eine rechnerische Nachprüfung möglich.) Durch das Einführen einer Basis ist jetzt die Voraussetzung für die rechnerische Behandlung der Vektoraddition und -subtraktion geschaffen.

Sind

$$\mathfrak{r}_1 = x_1\mathfrak{i} + y_1\mathfrak{j} + z_1\mathfrak{k}$$

und

$$\mathfrak{r}_2 = x_2\mathfrak{i} + y_2\mathfrak{j} + z_2\mathfrak{k}$$

zwei Ortsvektoren[1]), so folgt aus

$$\mathfrak{r}_1 \pm \mathfrak{r}_2 = (x_1\mathfrak{i} + y_1\mathfrak{j} + z_1\mathfrak{k}) \pm (x_2\mathfrak{i} + y_2\mathfrak{j} + z_2\mathfrak{k})$$

durch Anwenden des Kommutations- und des 2. Distributionsgesetzes

$$\boxed{\mathfrak{r}_1 \pm \mathfrak{r}_2 = (x_1 \pm x_2)\mathfrak{i} + (y_1 \pm y_2)\mathfrak{j} + (z_1 \pm z_2)\mathfrak{k}} \qquad (189)$$

Die Koordinaten der Summe (Differenz) zweier Vektoren sind gleich den Summen (Differenzen) der entsprechenden Koordinaten der beiden Vektoren.

Durch Anwenden des 1. Distributionsgesetzes folgt

$$\boxed{n\mathfrak{r} = n(x\mathfrak{i} + y\mathfrak{j} + z\mathfrak{k}) = nx\mathfrak{i} + ny\mathfrak{j} + nz\mathfrak{k}} \qquad (190)$$

Das Produkt eines Vektors mit einem Skalar ergibt einen Vektor, dessen Koordinaten die Produkte der entsprechenden Koordinaten des ursprünglichen Vektors mit dem Skalar sind.

[1]) Im folgenden sollen durch den Buchstaben $\mathfrak{r}$ Orts- bzw. Radiusvektoren gekennzeichnet werden

BEISPIELE

1. Für zwei Vektoren $\mathfrak{r}_1 = 2\mathfrak{i} - 2\mathfrak{j} - \mathfrak{k}$ und $\mathfrak{r}_2 = \mathfrak{i} + 4\mathfrak{j} + 2\mathfrak{k}$ wird (Bild 300)

$$\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_2 = (2-1)\mathfrak{i} + (-2-4)\mathfrak{j} + (-1-2)\mathfrak{k} = \mathfrak{i} - 6\mathfrak{j} - 3\mathfrak{k}$$

und

$$2\mathfrak{r}_1 + 3\mathfrak{r}_2 = (4+3)\mathfrak{i} + (-4+12)\mathfrak{j} + (-2+6)\mathfrak{k} = 7\mathfrak{i} + 8\mathfrak{j} + 4\mathfrak{k}.$$

2. Sind für $\mathfrak{a} = 2\mathfrak{i} - \mathfrak{j} + 3\mathfrak{k}$, $\mathfrak{b} = 3\mathfrak{i} + 2\mathfrak{j} - 2\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{c} = -4\mathfrak{i} - 2\mathfrak{j} + \mathfrak{k}$ drei andere Vektoren $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{w}$ bestimmt durch $\mathfrak{u} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c}$, $\mathfrak{v} = \mathfrak{a} - \mathfrak{b} + 2\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{w} = 2\mathfrak{a} - 3\mathfrak{b} + \mathfrak{c}$, so ergibt sich nach Formel (189) und (190)

$$\begin{aligned} \mathfrak{u} &= (2+3-4)\mathfrak{i} + (-1+2-2)\mathfrak{j} + (3-2+1)\mathfrak{k} = \mathfrak{i} - \mathfrak{j} + 2\mathfrak{k}; \\ \mathfrak{v} &= -9\mathfrak{i} - 7\mathfrak{j} + 7\mathfrak{k}; \\ \mathfrak{w} &= -9\mathfrak{i} - 10\mathfrak{j} + 13\mathfrak{k}. \end{aligned}$$

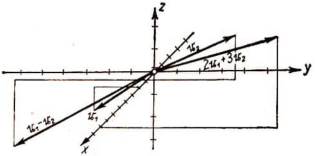


Bild 300

39.3. Betrag und Richtungscosinus eines Vektors

Nach Bild 298 bilden ein vom Koordinatenursprung ausgehender Vektor $\mathfrak{a}$ und seine Komponenten $\mathfrak{a}_x$, $\mathfrak{a}_y$ und $\mathfrak{a}_z$ die Hauptdiagonale und die Kanten eines Quaders. Die Länge der Hauptdiagonale ist $|\mathfrak{a}| = a$, die Kantenlängen sind $|\mathfrak{a}_x| = |a_x| = |x|$, $|\mathfrak{a}_y| = |a_y| = |y|$, $|\mathfrak{a}_z| = |a_z| = |z|$.
Nach dem pythagoreischen Lehrsatz erhält man somit für die *Länge* oder den

Betrag eines Ortsvektors

$$\boxed{a = |\mathfrak{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \qquad (191)$$

Soll der Abstand zweier Punkte P_1 und P_2 im Raum berechnet werden, die durch ihre Koordinaten $(x_1;\, y_1;\, z_1)$ und $(x_2;\, y_2;\, z_2)$ gegeben sind, so kann zunächst jedem der beiden Punkte ein Ortsvektor zugeordnet werden:

$$\overrightarrow{OP}_1 = \mathfrak{r}_1 = x_1\mathfrak{i} + y_1\mathfrak{j} + z_1\mathfrak{k}, \qquad \overrightarrow{OP}_2 = \mathfrak{r}_2 = x_2\mathfrak{i} + y_2\mathfrak{j} + z_2\mathfrak{k}.$$

Es ist dann $\overrightarrow{P_1P_2} = \mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_1 = (x_2 - x_1)\mathfrak{i} + (y_2 - y_1)\mathfrak{j} + (z_2 - z_1)\mathfrak{k}$ und damit der

Abstand zweier Punkte P_1 und P_2 im Raum:

$$\boxed{\overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}} \qquad (192)$$

Außer dem Betrag (der Länge) eines Ortsvektors gehört zu seiner eindeutigen Bestimmung noch die Richtung. Diese kann durch die Winkel angegeben werden, die der

Vektor mit den Grundvektoren $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$ und $\mathfrak{k}$ der Basis bildet. Werden diese Winkel mit α, β und γ bezeichnet, so gilt (Bild 301)

$$\boxed{\begin{aligned} \cos(\mathfrak{a}, \mathfrak{i}) &= \cos\alpha = \frac{a_x}{|\mathfrak{a}|} = \frac{a_x}{a} = \frac{x}{a} \\ \cos(\mathfrak{a}, \mathfrak{j}) &= \cos\beta = \frac{a_y}{|\mathfrak{a}|} = \frac{a_y}{a} = \frac{y}{a} \\ \cos(\mathfrak{a}, \mathfrak{k}) &= \cos\gamma = \frac{a_z}{|\mathfrak{a}|} = \frac{a_z}{a} = \frac{z}{a} \end{aligned}} \tag{193}$$

$\cos\alpha$, $\cos\beta$ und $\cos\gamma$ heißen die **Richtungscosinus** von $\mathfrak{a}$. Die Winkel $\alpha = \sphericalangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{i})$, $\beta = \sphericalangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{j})$ und $\gamma = \sphericalangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{k})$ sind spitz oder stumpf, je nachdem a_x, a_y und a_z positiv oder negativ sind, d. h., je nachdem die Komponenten $\mathfrak{a}_x$, $\mathfrak{a}_y$ und $\mathfrak{a}_z$ den Grundvektoren $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$ und $\mathfrak{k}$ gleich oder entgegengesetzt gerichtet sind.

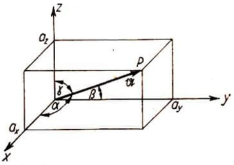


Bild 301

Wegen $\quad a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = a^2$

gilt $\quad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma =$

$$= \frac{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1,$$

$$\boxed{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1} \tag{194}$$

Die Quadratsumme der Richtungscosinus ist immer 1.

Daraus folgt:

a) *Die drei Richtungscosinus sind voneinander abhängig.*

Bei vorgegebenen α und β ist z. B.

$$\cos\gamma = \pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta};$$

b) *Von den drei Winkeln kann immer nur einer kleiner als 45° sein.*

Wären nämlich zwei Winkel kleiner als 45°, z. B. α und β, so wäre $\cos^2\alpha > \frac{1}{2}$ und $\cos^2\beta > \frac{1}{2}$ und somit

$$\cos\gamma = \pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta} \quad \text{imaginär.}$$

Aus $\quad \cos\alpha = \dfrac{a_x}{|\mathfrak{a}|}, \ \cos\beta = \dfrac{a_y}{|\mathfrak{a}|} \quad$ und $\quad \cos\gamma = \dfrac{a_z}{|\mathfrak{a}|}$

folgt für die Koordinaten des Vektors $\mathfrak{a}$

$$a_x = |\mathfrak{a}| \cos\alpha, \quad a_y = |\mathfrak{a}| \cos\beta, \quad a_z = |\mathfrak{a}| \cos\gamma.$$

Damit ist es nunmehr möglich, einen Vektor $\mathfrak{a}$ mit Hilfe seiner Bestimmungsgrößen Betrag und Richtung (die letztere dargestellt durch die Richtungscosinus) zu schreiben:

$$\mathfrak{a} = a_x\mathfrak{i} + a_y\mathfrak{j} + a_z\mathfrak{k} = |\mathfrak{a}|\mathfrak{i}\cos\alpha + |\mathfrak{a}|\mathfrak{j}\cos\beta + |\mathfrak{a}|\mathfrak{k}\cos\gamma;$$

$$\boxed{\mathfrak{a} = |\mathfrak{a}|(\mathfrak{i}\cos\alpha + \mathfrak{j}\cos\beta + \mathfrak{k}\cos\gamma)} \tag{195}$$

Im besonderen Falle eines Einsvektors gilt wegen $|\mathfrak{a}^0| = 1$

$$\boxed{\mathfrak{a}^0 = \mathfrak{i}\cos\alpha + \mathfrak{j}\cos\beta + \mathfrak{k}\cos\gamma} \tag{195a}$$

Die Koordinaten eines Einsvektors sind seine Richtungscosinus.

BEISPIELE

1. Gesucht sind Länge, Einsvektor und die mit den Grundvektoren gebildeten Winkel des Vektors $\mathfrak{r} = 2\mathfrak{i} - \mathfrak{j} - 2\mathfrak{k}$.

   Lösung: Länge (Betrag): $|\mathfrak{r}| = \sqrt{4+1+4} = \underline{\underline{3}};$

   Einsvektor: $\mathfrak{r}^0 = \dfrac{\mathfrak{r}}{|\mathfrak{r}|} = \dfrac{2}{3}\mathfrak{i} - \dfrac{1}{3}\mathfrak{j} - \dfrac{2}{3}\mathfrak{k};$

   Winkel: Die Richtungscosinus sind gleich den Koordinaten des Einsvektors, also sind

   $$\cos\alpha = \frac{2}{3}, \qquad \cos\beta = -\frac{1}{3}, \qquad \cos\gamma = -\frac{2}{3},$$

   $$\underline{\underline{\alpha = 48°11'}}, \qquad \underline{\underline{\beta = 109°28'}}, \qquad \underline{\underline{\gamma = 130°49'}}.$$

2. Gesucht sei der Ortsvektor von der Länge $2\sqrt{2}$, der mit der x-Achse einen Winkel von 60°, mit der y-Achse einen Winkel von 135° und mit der z-Achse einen spitzen Winkel einschließt.

   Lösung: Mit $\alpha = 60°$ und $\beta = 135°$ wird $\cos\gamma = \pm\sqrt{1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}} = \pm\frac{1}{2}$, und, da γ spitz sein soll, $\gamma = 60°$.

   Der Einsvektor ist

   $$\mathfrak{r}^0 = \frac{1}{2}\mathfrak{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathfrak{j} + \frac{1}{2}\mathfrak{k}$$

   und der Vektor selbst

   $$\mathfrak{r} = |\mathfrak{r}|\,\mathfrak{r}^0 = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\mathfrak{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathfrak{j} + \frac{1}{2}\mathfrak{k}\right),$$

   $$\underline{\underline{\mathfrak{r} = \sqrt{2}\,\mathfrak{i} - 2\mathfrak{j} + \sqrt{2}\,\mathfrak{k}}}.$$

AUFGABEN

1011. Wie heißt der zu $\mathfrak{a} = \frac{11}{15}\mathfrak{i} - \frac{2}{3}\mathfrak{j} + \frac{2}{15}\mathfrak{k}$ gehörige Einsvektor?

1012. Vom Vektor $\mathfrak{r} = -3\mathfrak{i} + 8\mathfrak{j} + 5\mathfrak{k}$ sollen Länge, Einsvektor und die Winkel, die er mit den Grundvektoren bildet, bestimmt werden.

1013. Wie heißt ein Ortsvektor und in welcher Entfernung vom Nullpunkt liegt sein Endpunkt, wenn er mit der x-Achse einen Winkel von 135°, mit der y-Achse einen Winkel von 60° und mit der z-Achse einen stumpfen Winkel bildet, und wenn $a_z = -2$ sein soll?

1014. Welche Winkel bildet der Vektor $\mathfrak{r} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c}$ für $\mathfrak{a} = \mathfrak{i} + 2\sqrt{2}\mathfrak{j} - 3\mathfrak{k}$, $\mathfrak{b} = \mathfrak{j} + 2\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{c} = -2\mathfrak{i} - \mathfrak{j} + 5\mathfrak{k}$ mit den Koordinatenachsen?

1015. Ein Oktaeder (regelmäßiger Körper, begrenzt von acht kongruenten gleichseitigen Dreiecken) habe die Kantenlänge 2, alle seine Eckpunkte liegen auf den Koordinatenachsen. Die Kanten sollen als Vektoren betrachtet werden, wobei die in der $x;y$-Ebene liegenden Kanten eine Orientierung im positiven Umlaufsinn erhalten sollen, während die anderen Kanten in Richtung nach den auf der z-Achse liegenden Eckpunkten orientiert werden sollen. Wie heißen die Vektoren?

1016. Wie heißen die Vektoren, wenn das Oktaeder der Aufg. 1015. so um die z-Achse gedreht wird, daß die in der $x;y$-Ebene liegenden Kanten parallel zur x- und y-Achse verlaufen?

1017. Ein Tetraeder (regelmäßiger Körper, begrenzt von vier kongruenten gleichseitigen Dreiecken) von der Kantenlänge 2 liegt mit einer Seitenfläche in der $x;y$-Ebene derart, daß ein Eckpunkt im Ursprung und eine Kante auf der positiv gerichteten x-Achse liegt. Wie heißen die Vektoren für die Kanten? (Orientierung wie in Aufgabe 1015.)

39.4. Lineare Abhängigkeit und lineare Unabhängigkeit

Wie in 38.4. dargelegt wurde, verläuft eine Vektor $\mathfrak{b} = \lambda\mathfrak{a}$ parallel zum Vektor $\mathfrak{a}$. Die Gleichung $\mathfrak{b} = \lambda\mathfrak{a}$ stellt eine lineare Beziehung zwischen den Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ dar.

Satz

Zwei Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, für die

$$\mathfrak{b} = \lambda\mathfrak{a}$$

gilt, heißen **linear abhängig**. Zwei linear abhängige Vektoren sind **kollinear**.

Im Falle der Kollinearität (linearen Abhängigkeit) zweier Vektoren läßt sich aus einer der drei skalaren Gleichungen, die die Vektorgleichung $\mathfrak{b} = \lambda\mathfrak{a}$ enthält, ein Wert λ errechnen, der *alle drei* Gleichungen erfüllt.
Für drei komplanare Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ gilt (vgl. 38.5.) eine lineare Beziehung

$$\mathfrak{c} = \lambda\mathfrak{a} + \mu\mathfrak{b}.$$

Sind $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, und $\mathfrak{c}$ drei Ortsvektoren, so folgen aus der Vektorgleichung die drei skalaren Gleichungen

$$c_x = \lambda a_x + \mu b_x$$
$$c_y = \lambda a_y + \mu b_y$$
$$c_z = \lambda a_z + \mu b_z.$$

Dieses Gleichungssystem enthält drei Gleichungen für nur zwei Variable λ und μ. Es ist nur dann lösbar, wenn — wie im vorliegenden Falle — eine Gleichung von den anderen beiden linear abhängig ist. In diesem Falle muß die aus den Koordinaten der drei Vektoren gebildete Determinante gleich Null sein. Daraus folgt:

Satz

Drei Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$, für die

$$\mathfrak{c} = \lambda\mathfrak{a} + \mu\mathfrak{b}$$

bzw.
$$D = \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix} = 0$$

gilt, heißen **linear abhängig**. Drei linear abhängige Vektoren sind **komplanar.**

Der Vektor $\mathfrak{c}$ kann dann durch die Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ (sofern diese nicht kollinear sind) dargestellt werden, d. h., er kann eindeutig in Richtung dieser beiden Vektoren zerlegt werden.

Das Wertepaar λ, μ läßt sich aus zweien der drei skalaren Gleichungen, die der Vektorgleichung $\mathfrak{c} = \lambda\mathfrak{a} + \mu\mathfrak{b}$ entsprechen, berechnen. Da $D = 0$ sein soll, erfüllt dieses Wertepaar auch die dritte Gleichung.

Sind drei Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ nicht komplanar, so läßt sich keine lineare Beziehung für sie herstellen, sie sind linear unabhängig. Verschiebt man ihre Anfangspunkte in einen Punkt, so ergeben sie ein räumliches Dreibein, eine Basis. Jeder weitere Vektor $\mathfrak{d}$ des Raumes kann nun nach diesen drei Basisvektoren zerlegt werden, d. h., es muß eine lineare Beziehung von der Form

$$\mathfrak{d} = \lambda\mathfrak{a} + \mu\mathfrak{b} + \nu\mathfrak{c}$$

bestehen.

Handelt es sich insbesondere um drei Ortsvektoren, so kann die Bedingung für lineare Unabhängigkeit wie folgt angegeben werden:

Satz

Drei Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$, für die

$$D = \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix} \neq 0$$

gilt, heißen **linear unabhängig**. Die Vektoren liegen nicht in einer Ebene (sind nicht komplanar).

Soll ein Vektor $\mathfrak{d}$ in Richtung dreier nicht komplanarer Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ zerlegt werden, so können aus dem der Vektorgleichung $\mathfrak{d} = \lambda\mathfrak{a} + \mu\mathfrak{b} + \nu\mathfrak{c}$ entsprechenden System von drei skalaren Gleichungen die Werte von λ, μ und ν bestimmt werden.

Zusammenfassend kann also festgestellt werden:

> In der Ebene gibt es nur zwei linear unabhängige Vektoren, im Raum gibt es nur drei linear unabhängige Vektoren.

BEISPIELE

1. Der Vektor $\mathfrak{r} = \mathfrak{i} + \frac{4}{7}\mathfrak{j} - \mathfrak{k}$ soll in Richtung der Vektoren $\mathfrak{a} = \mathfrak{i} + 2\mathfrak{j} - 3\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{b} = 2\mathfrak{i} - \mathfrak{j} + \mathfrak{k}$ zerlegt werden.

Lösung: Die aus den Koordinaten von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{r}$ gebildete Determinante errechnet sich zu

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & \frac{4}{7} \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Die drei Vektoren sind komplanar, und es kann angesetzt werden

$$\mathfrak{r} = \lambda\mathfrak{a} + \mu\mathfrak{b}$$

$$\mathfrak{i} + \frac{4}{7}\mathfrak{j} - \mathfrak{k} = \lambda(\mathfrak{i} + 2\mathfrak{j} - 3\mathfrak{k}) + \mu(2\mathfrak{i} - \mathfrak{j} + \mathfrak{k}) =$$
$$= (\lambda + 2\mu)\,\mathfrak{i} + (2\lambda - \mu)\,\mathfrak{j} + (-3\lambda + \mu)\,\mathfrak{k}.$$

Der Koeffizientenvergleich liefert die skalaren Gleichungen

$$1 = \lambda + 2\mu$$
$$\frac{4}{7} = 2\lambda - \mu$$
$$-1 = -3\lambda + \mu.$$

Aus zwei Gleichungen lassen sich

$$\lambda = \frac{3}{7} \quad \text{und} \quad \mu = \frac{2}{7}$$

errechnen, die auch die dritte Gleichung erfüllen.
Die Zerlegung lautet somit

$$\underline{\underline{\mathfrak{r} = \frac{3}{7}\mathfrak{a} + \frac{2}{7}\mathfrak{b}.}}$$

Die Richtigkeit des Ergebnisses überprüfe man durch Einsetzen von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$.

2. Der Vektor $\mathfrak{r} = 2\mathfrak{i} - 3\mathfrak{j} + 9\mathfrak{k}$ sei in Richtung der drei Vektoren $\mathfrak{a} = 2\mathfrak{i} - \mathfrak{j} + \mathfrak{k}$, $\mathfrak{b} = \mathfrak{i} + 2\mathfrak{j} - 2\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{c} = \mathfrak{i} + \mathfrak{j} + 2\mathfrak{k}$ zu zerlegen.

Lösung: Da

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 15 \neq 0,$$

sind die Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ linear unabhängig und die Zerlegung von $\mathfrak{r}$ nach diesen Vektoren ist möglich.

Aus $\mathfrak{r} = \lambda\mathfrak{a} + \mu\mathfrak{b} + \nu\mathfrak{c}$ folgt das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2\lambda + \mu + \nu &= 2 \\ -\lambda + 2\mu + \nu &= -3 \\ \lambda - 2\mu + 2\nu &= 9 \end{aligned}$$

mit $\lambda = 1,\ \mu = -2,\ \nu = 2.$

Also ist $\underline{\underline{\mathfrak{r} = \mathfrak{a} - 2\mathfrak{b} + 2\mathfrak{c}}}.$

Auch bei diesem Beispiel möge der Leser die Probe selbst durchführen.

AUFGABEN

1018. Sind die Vektoren

a) $\mathfrak{r}_1 = -3\mathfrak{i} + 2\mathfrak{k}$ b) $\mathfrak{u} = \mathfrak{i} - 2\mathfrak{j} + \mathfrak{k}$

$\mathfrak{r}_2 = \mathfrak{i} + 5\mathfrak{j} + \mathfrak{k}$ $\mathfrak{v} = 2\mathfrak{i} + 2\mathfrak{j} - \mathfrak{k}$

$\mathfrak{r}_3 = 2\mathfrak{i} + 3\mathfrak{j} - 2\mathfrak{k}$ $\mathfrak{w} = -\mathfrak{i} + 4\mathfrak{j} - 2\mathfrak{k}$

linear abhängig oder unabhängig?

1019. Der Vektor $\mathfrak{t} = 3\mathfrak{i} - 2{,}7\mathfrak{j}$ soll in Richtung der beiden Vektoren $\mathfrak{r} = -2\mathfrak{i} + 3\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{s} = 3\mathfrak{j} - 5\mathfrak{k}$ zerlegt werden.

1020. Der Vektor $\mathfrak{s} = \mathfrak{i} + 4\mathfrak{j} - 2\mathfrak{k}$ soll

a) in Richtung der Vektoren $\mathfrak{a} = -3\mathfrak{i} + \mathfrak{j} - 2\mathfrak{k}$,
$\mathfrak{b} = 2\mathfrak{i} + 3\mathfrak{j} - \mathfrak{k},\ \mathfrak{c} = \mathfrak{i} - 2\mathfrak{j} - 3\mathfrak{k}$;

b) in Richtung der Vektoren $\mathfrak{a} = -3\mathfrak{i} + \mathfrak{j} + 2\mathfrak{k}$.
$\mathfrak{b} = -2\mathfrak{i} + 3\mathfrak{j} - \mathfrak{k},\ \mathfrak{c} = \mathfrak{i} + 2\mathfrak{j} - 3\mathfrak{k}$

zerlegt werden.

1021. Der Vektor $\mathfrak{r} = 5\mathfrak{i} + \mathfrak{j} + \frac{1}{2}\mathfrak{k}$ soll mittels der Grundvektoren $\mathfrak{a} = \mathfrak{i} + \mathfrak{j},\ \mathfrak{b} = \mathfrak{k},\ \mathfrak{c} = \mathfrak{i} + \mathfrak{k}$ einer neuen Basis dargestellt werden. Wie groß sind die Beträge der neuen Komponenten?

39.5. Vektorgleichung einer Geraden im Raum

Punktrichtungsgleichung der Geraden

Eine Gerade soll durch einen Punkt P_0 gehen und in Richtung eines Vektors $\mathfrak{a}$ verlaufen.
Der Punkt P_0 kann durch einen Ortsvektor $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_0$ (Bild 302) festgelegt werden. Eine Gerade, die die gleiche Richtung wie $\mathfrak{a}$ hat, wird durch $\lambda\mathfrak{a}$ mit λ als Parameter $(-\infty < \lambda < +\infty)$ beschrieben. Legt man den zu $\lambda = 0$ gehörenden Punkt der Geraden in P_0, so erhält man als

Punktrichtungsgleichung der Geraden $\boxed{\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_0 + \lambda\mathfrak{a}}$ (196)

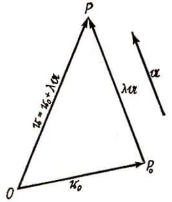


Bild 302

Die Vektorgleichung (196) lautet in Koordinatendarstellung geschrieben:

$$\begin{aligned}\mathfrak{r} = x\mathfrak{i} + y\mathfrak{j} + z\mathfrak{k} &= x_0\mathfrak{i} + y_0\mathfrak{j} + z_0\mathfrak{k} + \lambda(a_x\mathfrak{i} + a_y\mathfrak{j} + a_z\mathfrak{k}) = \\ &= (x_0 + \lambda a_x)\mathfrak{i} + (y_0 + \lambda a_y)\mathfrak{j} + (z_0 + \lambda a_z)\mathfrak{k}.\end{aligned}$$

Ihr entsprechen drei skalare Gleichungen

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \lambda a_x, \quad \text{bzw.} \quad x - x_0 = \lambda a_x; \\ y &= y_0 + \lambda a_y, \quad \text{bzw.} \quad y - y_0 = \lambda a_y; \\ z &= z_0 + \lambda a_z, \quad \text{bzw.} \quad z - z_0 = \lambda a_z. \end{aligned}$$

Aus diesen ergeben sich nach Eliminieren von λ die drei Gleichungen:

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{a_y}{a_x}, \quad \frac{z - z_0}{x - x_0} = \frac{a_z}{a_x}, \quad \frac{z - z_0}{y - y_0} = \frac{a_z}{a_y}.$$

Sie stellen die Punktrichtungsgleichungen der Projektionen der Geraden in die $x;y$-Ebene, $x;z$-Ebene und $y;z$-Ebene mit den Richtungsfaktoren $m_{xy} = \frac{a_y}{a_x}$, $m_{xz} = \frac{a_z}{a_x}$ und $m_{yz} = \frac{a_z}{a_y}$ dar.

Zweipunktegleichung der Geraden

Eine Gerade soll durch zwei gegebene Punkte P_1 und P_2 gehen. Der von P_1 nach P_2 führende Vektor $\overrightarrow{P_1P_2} = \mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_1$ legt, wenn $\overrightarrow{OP_1} = \mathfrak{r}_1$ und $\overrightarrow{OP_2} = \mathfrak{r}_2$ ist (Bild 303), die Richtung der Geraden fest und entspricht somit dem in Formel (196) mit $\mathfrak{a}$ bezeichneten Vektor. Damit heißt die

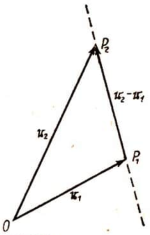


Bild 303

Zweipunktegleichung der Geraden $\boxed{\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_1 + \lambda(\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_1)}$ (197)

Diese Gleichung ist gleichwertig den drei skalaren Gleichungen

$$\begin{aligned} x &= x_1 + \lambda(x_2 - x_1), \quad \text{bzw.} \quad x - x_1 = \lambda(x_2 - x_1); \\ y &= y_1 + \lambda(y_2 - y_1), \quad \text{bzw.} \quad y - y_1 = \lambda(y_2 - y_1); \\ z &= z_1 + \lambda(z_2 - z_1), \quad \text{bzw.} \quad z - z_1 = \lambda(z_2 - z_1). \end{aligned}$$

Die Elimination von λ liefert die Gleichungen

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}; \quad \frac{z - z_1}{x - x_1} = \frac{z_2 - z_1}{x_2 - x_1}; \quad \frac{z - z_1}{y - y_1} = \frac{z_2 - z_1}{y_2 - y_1}.$$

Die erste gibt den Sachverhalt bei Beschränkung auf die $x;y$-Ebene an, nämlich die Zweipunktegleichung der Geraden.

BEISPIELE

1. Eine Gerade geht durch $P_1(-1; 8; 6)$ und $P_2(11; -1; -9)$. Es soll untersucht werden, ob die Punkte $P_3(3; 5; 1)$ und $P_4(-5; 11; 8)$ auf der Geraden liegen.

   Lösung: Die Gleichung der Geraden lautet gemäß (197)

   $$\mathfrak{r} = -\mathfrak{i} + 8\mathfrak{j} + 6\mathfrak{k} + \lambda(12\mathfrak{i} - 9\mathfrak{j} - 15\mathfrak{k}).$$

   Liegt P_3 auf der Geraden, so muß der Vektor

   $$\mathfrak{r}_3 = 3\mathfrak{i} + 5\mathfrak{j} + \mathfrak{k}$$

   die Gleichung der Geraden für einen bestimmten Wert von λ erfüllen. Aus $3\mathfrak{i} + 5\mathfrak{j} + \mathfrak{k} = -\mathfrak{i} + 8\mathfrak{j} + 6\mathfrak{k} + \lambda(12\mathfrak{i} - 9\mathfrak{j} - 15\mathfrak{k})$ folgt $4\mathfrak{i} - 3\mathfrak{j} - 5\mathfrak{k} = \lambda(12\mathfrak{i} - 9\mathfrak{j} - 15\mathfrak{k})$.
   Die Gleichung wird durch

   $$\lambda = \frac{1}{3}$$

   erfüllt. Der Punkt P_3 liegt somit auf der Geraden durch P_1 und P_2.
   Für P_4 erhält man analog $\mathfrak{r}_4 = -5\mathfrak{i} + 11\mathfrak{j} + 8\mathfrak{k}$.
   Die Gleichung

   $$-5\mathfrak{i} + 11\mathfrak{j} + 8\mathfrak{k} = -\mathfrak{i} + 8\mathfrak{j} + 6\mathfrak{k} + \lambda(12\mathfrak{i} - 9\mathfrak{j} - 15\mathfrak{k}),$$

   wird aber für keinen Wert von λ erfüllt. P_4 liegt also nicht auf der Geraden durch P_1 und P_2.

2. In welchem Punkt durchstößt die Gerade $\mathfrak{r} = 3\mathfrak{i} - 4\mathfrak{j} + \mathfrak{k} + \lambda(\mathfrak{i} + 2\mathfrak{j} - 3\mathfrak{k})$

   a) die $x;y$-Ebene

   b) die zur $x;z$-Ebene im Abstand $y = 2$ parallele Ebene?

   Lösung: Der Durchstoßpunkt muß einerseits die Geradengleichung erfüllen, anderseits muß er im Fall a) die Koordinate $z = 0$ besitzen, im Fall b) die Koordinate $y = 2$.
   Die Vektorgleichung der Geraden liefert die drei skalaren Gleichungen

   $$x = 3 + \lambda; \quad y = -4 + 2\lambda; \quad z = 1 - 3\lambda.$$

   a) Für $z = 0$ wird $\lambda = \dfrac{1}{3}$ und damit $x = \dfrac{10}{3}$, $y = -\dfrac{10}{3}$.

   b) Für $y = 2$ wird $\lambda = 3$ und damit $x = 6$, $z = -8$.

   Die Durchstoßpunkte sind $\underline{\underline{\left(\frac{10}{3};\ -\frac{10}{3};\ 0\right)}}$ 8 und $\underline{\underline{(6;\ 2;\ -8)}}$.

3. Es soll untersucht werden, ob die beiden Geraden einander schneiden, die durch die Punktepaare $P_{11}(3; -2; 8)$, $P_{12}(1; 7; -1)$ und $P_{21}(3; 3; 1)$, $P_{22}(-2; 0{,}5; 13{,}5)$ bestimmt sind.

   Lösung: Die Gerade $P_{11}P_{12}$ hat die Gleichung

   $$\mathfrak{r}_1 = 3\mathfrak{i} - 2\mathfrak{j} + 8\mathfrak{k} + \lambda(-2\mathfrak{i} + 9\mathfrak{j} - 9\mathfrak{k}),$$

   die Gerade $P_{21}P_{22}$

   $$\mathfrak{r}_2 = 3\mathfrak{i} + 3\mathfrak{j} + \mathfrak{k} + \mu\left(-5\mathfrak{i} - \frac{5}{2}\mathfrak{j} + \frac{25}{2}\mathfrak{k}\right).$$

   Für den Schnittpunkt muß gelten $\mathfrak{r}_1 = \mathfrak{r}_2$ bzw. $\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_2 = \mathfrak{o}$:

   $$-5\mathfrak{j} + 7\mathfrak{k} + \lambda(-2\mathfrak{i} + 9\mathfrak{j} - 9\mathfrak{k}) - \mu\left(-5\mathfrak{i} - \frac{5}{2}\mathfrak{j} + \frac{25}{2}\mathfrak{k}\right) = \mathfrak{o}.$$

Die Vektorgleichung liefert die 3 skalaren Gleichungen

$$\left|\begin{aligned} -2\lambda + 5\mu &= 0 \\ -5 + 9\lambda + \frac{5}{2}\mu &= 0 \\ 7 - 9\lambda - \frac{25}{2}\mu &= 0 \end{aligned}\right|$$

Das Gleichungssystem wird erfüllt durch $\lambda = \frac{1}{2}$, $\mu = \frac{1}{5}$. Die Geraden schneiden einander. Den Schnittpunkt erhält man durch Einsetzen von λ und μ in einer der Geradengleichungen: $2\mathfrak{i} + \frac{5}{2}\mathfrak{j} + \frac{7}{2}\mathfrak{k}$. Seine Koordinaten sind $\underline{\underline{(2;\ 2{,}5;\ 3{,}5)}}$.

Hinweis: Da die Geraden als Schnittpunkt einen Punkt des Raumes gemeinsam haben sollen, müssen die aus zwei Gleichungen errechenbaren Werte von λ und μ alle drei Gleichungen erfüllen; denn nur dann erfüllen sie die Vektorgleichung. Genügen ihre Werte z. B. nur den ersten beiden Gleichungen, so besagt das nur, daß sich die *Projektionen* der Geraden auf die $x;y$-Ebene in einem Punkt dieser Ebene schneiden.

AUFGABEN

1022. Gesucht ist die Gleichung der Winkelhalbierenden der beiden Ortsvektoren

$$\mathfrak{r}_1 = 4\mathfrak{i} - 4\mathfrak{j} - 2\mathfrak{k} \quad \text{und} \quad \mathfrak{r}_2 = -2\mathfrak{i} + 6\mathfrak{j} - 3\mathfrak{k}.$$

1023. Es ist die Vektorgleichung der Geraden durch den Punkt $(-2;3;5)$ in Richtung des Vektors $\mathfrak{r}_1 = 3\mathfrak{i} - \mathfrak{j} + 2\mathfrak{k}$ aufzustellen. Welche Punkte ergeben sich für $\lambda = 0, \pm 1, \pm 3$?

1024. Eine Gerade soll durch den Punkt $(1;\ -3;\ 2)$ parallel zu einem Vektor verlaufen, der durch $\cos\alpha = \cos\beta = \frac{1}{3}\sqrt{3}$, $\cos\gamma > 0$ bestimmt sei. In welchen Punkten durchstößt die Gerade die Koordinatenebenen?

1025. Wie lauten die Gleichungen der Seiten P_1P_2, P_2P_3 und P_3P_1 des Dreiecks mit den Eckpunkten $P_1(-1;3;7)$, $P_2(-5;4;3)$ und $P_3(6;\ -5;\ -4)$?

1026. Welche geometrischen Gebilde beschreiben die Vektorgleichungen

a) $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_1 + n\mathfrak{a}$, b) $\mathfrak{r} = m\mathfrak{r}_1 + \mathfrak{a}$, c) $\mathfrak{r} = m\mathfrak{r}_1 + n\mathfrak{a}$,

worin $\mathfrak{r}_1$ einen Ortsvektor, $\mathfrak{a}$ einen freien Vektor und m und n skalare Parameter $(-\infty < m < +\infty;\ -\infty < n < +\infty)$ darstellen sollen?

40. Skalares Produkt

40.1. Definition des skalaren Produktes

Wie aus der Physik bekannt sein wird, ist beim Verschieben eines Körpers längs eines geradlinigen Weges $\mathfrak{s}$ durch eine dem Weg gleich gerichtete Kraft $\mathfrak{F}$ eine Arbeit

$$W = F \cdot s = |\mathfrak{F}| \cdot |\mathfrak{s}|$$

aufzuwenden. Die Kraft $\mathfrak{F}$ und der Weg $\mathfrak{s}$ sind hierbei vektorielle Größen, die Arbeit W ist eine skalare Größe.

Die Beziehung $W = |\mathfrak{F}| \cdot |\mathfrak{s}|$ ist aber nur ein spezieller Fall des allgemeineren Falles, daß $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{s}$ nicht gleichgerichtet sind, sondern einen Winkel $\varphi = \sphericalangle(\mathfrak{F}, \mathfrak{s})$ miteinander bilden (Bild 304).

Dann ist $\quad W = F_s \cdot s = |\mathfrak{F}_s| \cdot |\mathfrak{s}|$.

Für den Betrag der Komponente von $\mathfrak{F}$ in Richtung von $\mathfrak{s}$, der *Projektion* von $\mathfrak{F}$ auf die Richtung $\mathfrak{s}$, gilt aber

$$F_s = F \cdot \cos\varphi = F \cdot \cos(\mathfrak{F}, \mathfrak{s}) = |\mathfrak{F}| \cdot \cos(\mathfrak{F}, \mathfrak{s}).$$

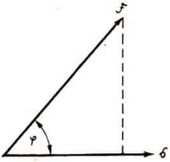


Bild 304

Damit erhält man für die Arbeit der Kraft $\mathfrak{F}$ längs des Weges $\mathfrak{s}$ ein Produkt von der Form

$$W = |\mathfrak{F}| \cdot |\mathfrak{s}| \cdot \cos(\mathfrak{F}, \mathfrak{s}).$$

Für dieses Produkt schreibt man kurz nur $\mathfrak{F} \cdot \mathfrak{s}$, und man nennt

$$\mathfrak{F} \cdot \mathfrak{s} = |\mathfrak{F}| \cdot |\mathfrak{s}| \cdot \cos(\mathfrak{F}, \mathfrak{s})$$

das **skalare Produkt** der beiden Vektoren $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{s}$ (weil das Ergebnis ein Skalar ist) oder auch das *innere Produkt* der beiden Vektoren.

Definition

Unter dem skalaren Produkt zweier Vektoren versteht man das Produkt aus ihren Beträgen und dem Cosinus des von den beiden Vektoren eingeschlossenen Winkels:

$$\boxed{\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = |\mathfrak{a}| \cdot |\mathfrak{b}| \cdot \cos(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})} \tag{198}$$

Der Punkt zwischen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ kann auch weggelassen werden. Es ist daher $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$; gelesen: „$\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$" oder auch „$\mathfrak{a}$ Punkt $\mathfrak{b}$". Eine veraltete, nicht mehr standardgerechte Schreibweise für das Skalarprodukt ist $(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$.

Es ist also z. B. die Arbeit das skalare Produkt der Vektoren Kraft und Weg: $W = \mathfrak{F} \cdot \mathfrak{s} = |\mathfrak{F}| \cdot |\mathfrak{s}| \cdot \cos(\mathfrak{F}, \mathfrak{s})$. Wenn $\mathfrak{F} \uparrow\uparrow \mathfrak{s}$, ist $\cos(\mathfrak{F}, \mathfrak{s}) = 1$, und es liegt der eingangs betrachtete Spezialfall vor: $W = |\mathfrak{F}| \cdot |\mathfrak{s}| = F \cdot s$.
Bei allen Produktbildungen von Vektoren darf nicht übersehen werden, daß es sich nicht um Produkte im Sinne des Zahlenrechnens handelt, sondern daß Produkte von Vektoren aus Gründen der Zweckmäßigkeit eingeführt und definiert werden. Daß Produkte von Vektoren andere Eigenschaften aufweisen als Produkte von Skalaren, erkennt man z. B. beim Untersuchen der Frage, wann $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$ gleich Null sein kann. Zwar gilt auch hier, wie bei jedem Produkt von Zahlen, $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = 0$, wenn $\mathfrak{a} = \mathfrak{o}$ oder $\mathfrak{b} = \mathfrak{o}$ oder $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} = \mathfrak{o}$. Weiterhin folgt aber aus der Definitionsgleichung, daß $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = 0$, wenn $\cos(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = 0$, d. h. $\sphericalangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = 90°$ oder $\sphericalangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = 270°$.

Ein skalares Produkt zweier Vektoren wird gleich Null, wenn wenigstens einer der beiden Vektoren der Nullvektor ist oder wenn die beiden Vektoren senkrecht aufeinander stehen.

Für die skalare Multiplikation zweier gleicher Vektoren folgt

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a} = |\mathfrak{a}| \cdot |\mathfrak{a}| \cdot \cos 0^\circ = a \cdot a \cdot 1 = a^2.$$

Damit kann mit Hilfe des skalaren Produktes der

Betrag eines Vektors $$\boxed{a = |\mathfrak{a}| = \sqrt{\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a}} = \sqrt{\mathfrak{a}^2}} \qquad (199)$$

dargestellt werden, wenn man die (sinnvolle) Vereinbarung $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a} = \mathfrak{a}^2$ verwendet.

Es soll nun noch die Frage der Umkehrbarkeit der skalaren Multiplikation, d. h. die Möglichkeit der Division eines Skalars durch einen Vektor untersucht werden. Alle Vektoren $\mathfrak{b}_n$, die die gleiche Komponente $\mathfrak{b}_\mathfrak{a}$ längs eines Vektors $\mathfrak{a}$ besitzen (Bild 305), haben wegen

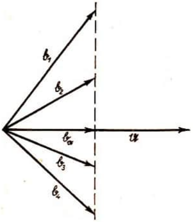


Bild 305

$$|\mathfrak{b}_\mathfrak{a}| = |\mathfrak{b}_1| \cdot \cos \varphi_1 = |\mathfrak{b}_2| \cdot \cos \varphi_2 = \ldots$$

das gleiche Skalarprodukt

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}_\mathfrak{a} = |\mathfrak{a}| \cdot |\mathfrak{b}_\mathfrak{a}| \cdot \cos 0^\circ = |\mathfrak{a}| \cdot |\mathfrak{b}_1| \cdot \cos \varphi_1 = \\ = |\mathfrak{a}| \cdot |\mathfrak{b}_2| \cdot \cos \varphi_2 = \ldots$$

Also kann aus einem vorgegebenen Skalarprodukt $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$ und einem vorgegebenen Vektor $\mathfrak{a}$ der Vektor $\mathfrak{b}$ nicht eindeutig bestimmt werden:

Die skalare Multiplikation läßt sich nicht eindeutig umkehren.

Weiterhin folgt aus den vorstehenden Betrachtungen:

$$\boxed{\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}_\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{b}.} \qquad (200)$$

Der Wert des skalaren Produktes zweier Vektoren ändert sich nicht, wenn man einen der Vektoren durch seine Komponente längs des anderen ersetzt.

AUFGABEN

1027. Wann ergibt das Skalarprodukt einen negativen Wert?
1028. Welchen Wert besitzt das Skalarprodukt zweier Vektoren, deren Beträge 3 und 4 sind und die einen Winkel von a) 30°, b) 60°, c) 90°, d) 150° miteinander bilden?
1029. Wie kann der Winkel $\varphi = \sphericalangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ berechnet werden, wenn $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ bekannt sind?
1030. Was folgt aus $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{a}\mathfrak{c}$ für die Vektoren $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$?
1031. Es soll bewiesen werden, daß $|\mathfrak{a}_\mathfrak{b}| = \dfrac{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}{b}$ und $|\mathfrak{b}_\mathfrak{a}| = \dfrac{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}{a}$ ist.

40.2. Rechengesetze für skalare Produkte

Vertauscht man in einem skalaren Produkt $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ die Reihenfolge der Faktoren, so erhält man zunächst

$$\mathfrak{b}\mathfrak{a} = ba \cos(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}).$$

Setzt man wiederum $\sphericalangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \doteq \varphi$, so ist $\sphericalangle(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}) = -\varphi$; denn der Drehsinn von $\sphericalangle(\mathfrak{b}, \mathfrak{a})$ ist dem des Winkels $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ entgegengesetzt gerichtet. Da aber $\cos(-\varphi) = \cos\varphi$ ist und damit $\cos(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}) = \cos(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$, bekommt man, wenn man noch die Reihenfolge der Skalare b und a vertauscht,

$$\mathfrak{b}\mathfrak{a} = ab\cos(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}).$$

Es gilt demnach das

Kommutationsgesetz $$\boxed{\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{b}\mathfrak{a}} \tag{201}$$

Wie aus dem bisherigen leicht zu folgern ist, gilt für die Multiplikation von zwei Vektoren und einem Skalar das

Assoziationsgesetz $$\boxed{(n\mathfrak{a})\mathfrak{b} = \mathfrak{a}(n\mathfrak{b}) = n(\mathfrak{a}\mathfrak{b})} \tag{202}$$

Hingegen gibt es kein Assoziationsgesetz für die skalare Multiplikation mehrerer Vektoren, da im allgemeinen Falle

$$\mathfrak{a}(\mathfrak{b}\mathfrak{c}) \neq (\mathfrak{a}\mathfrak{b})\mathfrak{c} \quad \text{ist};$$

denn $\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ sind Skalare, so daß $\mathfrak{a}(\mathfrak{b}\mathfrak{c})$ ein zu $\mathfrak{a}$ paralleler, $(\mathfrak{a}\mathfrak{b})\mathfrak{c}$ ein zu $\mathfrak{c}$ paralleler Vektor ist. Es gibt also keine skalare Multiplikation von mehr als zwei Vektoren. Auch ist eine Schreibweise $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c}$ ohne Zusammenfassen von zwei Vektoren in einer Klammer (als Zeichen für die Produktbildung) sinnlos.

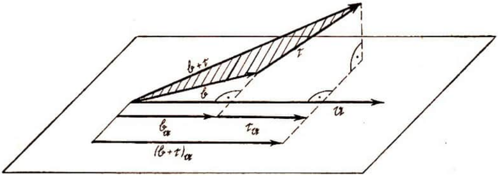


Bild 306

Es soll nun noch gezeigt werden, daß bei der skalaren Multiplikation auch das Distributionsgesetz Gültigkeit besitzt, d. h., daß

$$\mathfrak{a}(\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = \mathfrak{a}\mathfrak{b} + \mathfrak{a}\mathfrak{c} \quad \text{ist.}$$

Zwei der drei Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ bestimmen eine Ebene, während der dritte Vektor im allgemeinen Fall nicht in dieser Ebene liegen wird. In Bild 306 liegen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ in der Ebene, $\mathfrak{c}$ außerhalb. Wie aus Bild 306 zu erkennen ist, ist die Komponente von $\mathfrak{b} + \mathfrak{c}$ in der Richtung $\mathfrak{a}$ gleich der Summe der Komponenten von $\mathfrak{b}$ in der Richtung $\mathfrak{a}$ und von $\mathfrak{c}$ in der Richtung $\mathfrak{a}$:

$$(\mathfrak{b} + \mathfrak{c})_{\mathfrak{a}} = \mathfrak{b}_{\mathfrak{a}} + \mathfrak{c}_{\mathfrak{a}}.$$

Multipliziert man diese Gleichung skalar mit $\mathfrak{a}$, so erhält man

$$\mathfrak{a} \cdot (\mathfrak{b} + \mathfrak{c})_\mathfrak{a} = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}_\mathfrak{a} + \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{c}_\mathfrak{a}.$$

Wegen der Beziehung (200) ist aber

$$\mathfrak{a} \cdot (\mathfrak{b} + \mathfrak{c})_\mathfrak{a} = \mathfrak{a}(\mathfrak{b} + \mathfrak{c}), \quad \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}_\mathfrak{a} = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}, \; \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{c}_\mathfrak{c} = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{c}.$$

Diese Beziehungen in die zuletzt erhaltene Form eingesetzt, ergibt das

Distributionsgesetz $$\boxed{\mathfrak{a}(\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = \mathfrak{a}\mathfrak{b} + \mathfrak{a}\mathfrak{c}} \tag{203}$$

BEISPIELE

1. Zu berechnen seien
   a) $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})^2$;
   b) $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c})^2$.

   Lösung:

   a) Unter Verwendung des Distributionsgesetzes und der Beziehung $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a} = \mathfrak{a}^2 = a^2$ erhält man
   $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = \mathfrak{a}^2 + \mathfrak{a}\mathfrak{b} + \mathfrak{a}\mathfrak{b} + \mathfrak{b}^2 = \mathfrak{a}^2 + 2\mathfrak{a}\mathfrak{b} + \mathfrak{b}^2 = a^2 + 2ab \cos(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) + b^2.$

   b) $$\begin{aligned}(\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c})(\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c}) &= \mathfrak{a}^2 + \mathfrak{a}\mathfrak{b} + \mathfrak{a}\mathfrak{c} + \mathfrak{a}\mathfrak{b} + \mathfrak{b}^2 + \mathfrak{b}\mathfrak{c} + \mathfrak{a}\mathfrak{c} + \mathfrak{b}\mathfrak{c} + \mathfrak{c}^2 = \\ &= \mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2 + \mathfrak{c}^2 + 2\mathfrak{a}\mathfrak{b} + 2\mathfrak{a}\mathfrak{c} + 2\mathfrak{b}\mathfrak{c} = \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2[ab\cos(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) + ac\cos(\mathfrak{a}, \mathfrak{c}) + bc\cos(\mathfrak{b}, \mathfrak{c})].\end{aligned}$$

2. Es soll der Cosinussatz der ebenen Trigonometrie hergeleitet werden.

   Lösung: Nach Bild 307 ist $\mathfrak{c} = \mathfrak{a} - \mathfrak{b}.$

   Werden beide Seiten der Gleichung skalar mit sich selbst multipliziert, so ergibt sich

   $$\mathfrak{c}^2 = (\mathfrak{a} - \mathfrak{b})^2 = \mathfrak{a}^2 - 2\mathfrak{a}\mathfrak{b} + \mathfrak{b}^2 = a^2 - 2ab\cos(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) + b^2.$$

   Setzt man noch $\sphericalangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \gamma$, so erhält man, da $\mathfrak{c}^2 = c^2$, den Cosinussatz

   $$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

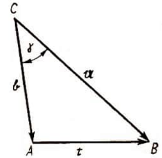


Bild 307

3. Gegeben seien zwei Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$. Gesucht ist $\mathfrak{b}_\mathfrak{a}$.

   Lösung: Es ist

   $$\mathfrak{b}_\mathfrak{a} = |\mathfrak{b}_\mathfrak{a}| \cdot \mathfrak{a}^0.$$

   In Aufgabe 1031 wurde gezeigt, daß

   $$|\mathfrak{b}_\mathfrak{a}| = \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}{a} \text{ ist.}$$

   Weiterhin gilt

   $$\mathfrak{a}^0 = \frac{\mathfrak{a}}{a},$$

   so daß

   $$\mathfrak{b}_\mathfrak{a} = \frac{\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}}{a^2}\,\mathfrak{a}$$

wird, oder wegen

$$\mathfrak{a}^2 = a^2,$$

$$\underline{\underline{\mathfrak{b}_\mathfrak{a} = \frac{\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}}{\mathfrak{a}^2}\,\mathfrak{a}.}}$$

Da die Summe von Parallelkomponente $\mathfrak{b}_\mathfrak{a}$ und Normalkomponente $\mathfrak{b}'_\mathfrak{a}$ den Vektor $\mathfrak{b}$ ergeben muß, läßt sich nun auch die Normalkomponente errechnen: $\mathfrak{b}'_\mathfrak{a} = \mathfrak{b} - \mathfrak{b}_\mathfrak{a}$.

Für das praktische Rechnen mit Vektoren verwendet man die Koordinatendarstellung. Die skalare Multiplikation zweier Vektoren

$$\mathfrak{r}_1 = x_1\mathfrak{i} + y_1\mathfrak{j} + z_1\mathfrak{k}$$
$$\mathfrak{r}_2 = x_2\mathfrak{i} + y_2\mathfrak{j} + z_2\mathfrak{k}$$

liefert zunächst durch Anwenden des Distributionsgesetzes:

$$\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2 = x_1x_2\mathfrak{i}^2 + y_1x_2\mathfrak{j}\mathfrak{i} + z_1x_2\mathfrak{k}\mathfrak{i} + x_1y_2\mathfrak{i}\mathfrak{j} + y_1y_2\mathfrak{j}^2 + \\ + z_1y_2\mathfrak{k}\mathfrak{j} + x_1z_2\mathfrak{i}\mathfrak{k} + y_1z_2\mathfrak{j}\mathfrak{k} + z_1z_2\mathfrak{k}^2.$$

Nach dem Kommutationsgesetz gilt aber

$$\mathfrak{j}\mathfrak{i} = \mathfrak{i}\mathfrak{j}, \quad \mathfrak{k}\mathfrak{i} = \mathfrak{i}\mathfrak{k}, \quad \mathfrak{k}\mathfrak{j} = \mathfrak{j}\mathfrak{k},$$

und, da die jeweils ein Produkt bildenden Einsvektoren aufeinander senkrecht stehen:

$$\boxed{\mathfrak{i}\mathfrak{j} = \mathfrak{j}\mathfrak{i} = \mathfrak{i}\mathfrak{k} = \mathfrak{k}\mathfrak{i} = \mathfrak{j}\mathfrak{k} = \mathfrak{k}\mathfrak{j} = 0} \qquad (204)$$

Da $\mathfrak{i}^2$, $\mathfrak{j}^2$ und $\mathfrak{k}^2$ jeweils das Quadrat des Betrages liefern und der Betrag eines Einsvektors gleich *eins* ist, gilt weiterhin:

$$\boxed{\mathfrak{i}^2 = \mathfrak{j}^2 = \mathfrak{k}^2 = 1} \qquad (205)$$

Damit fallen in dem obenstehenden Ausdruck für $\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2$ alle Produkte zweier verschiedener Grundvektoren weg, die Produkte zweier gleicher Grundvektoren ergeben jeweils 1. Man erhält also

$$\boxed{\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2} \qquad (206)$$

Das Skalarprodukt zweier Vektoren in Koordinatendarstellung ist gleich der Summe der Produkte der gleichartigen Koordinaten der beiden Vektoren.

BEISPIELE

4. Es soll der Winkel zwischen den Vektoren $\mathfrak{r}_1 = -6\mathfrak{i} + 8\mathfrak{j}$ und $\mathfrak{r}_2 = 3\mathfrak{i} - 4\mathfrak{j} + 12\mathfrak{k}$ berechnet werden.

Lösung: Aus

$$\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2 = |\mathfrak{r}_1|\,|\mathfrak{r}_2| \cos(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2)$$

folgt

$$\cos(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2) = \frac{\mathfrak{r}_1 \cdot \mathfrak{r}_2}{|\mathfrak{r}_1| \cdot |\mathfrak{r}_2|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

$$\cos(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2) = \frac{-50}{10 \cdot 13} = -\frac{5}{13} = -0{,}3846$$

$$\sphericalangle(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2) = 112°37'.$$

5. Eine Kraft vom Betrag $F = 6$ kp, die einen Körper von $P_1(2\text{ m}; -2\text{ m}; 1\text{ m})$ nach $P_2(3\text{ m}; 4\text{ m}; 5\text{ m})$ bewegt, besitzt die Richtung des Vektors $\mathfrak{r} = -\mathfrak{i} + 3\mathfrak{j} + 2\mathfrak{k}$. Welche Arbeit wird von der Kraft verrichtet?

Lösung: Die Kraft ist

$$\mathfrak{F} = F \cdot \mathfrak{r}^0 = F\,\frac{\mathfrak{r}}{r}.$$

Der Weg $\mathfrak{s} = \overrightarrow{P_1P_2}$ ist $\mathfrak{s} = \mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_1$.

Damit erhält man als Arbeit der Kraft $\mathfrak{F}$ längs des Weges $\mathfrak{s}$

$$W = \mathfrak{F} \cdot \mathfrak{s} = \frac{F}{r}\,\mathfrak{r}(\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_1),$$

$$W = \frac{6}{\sqrt{14}}(-1 + 18 + 8)\text{ kpm} = \underline{\underline{40{,}2\text{ kpm}.}}$$

AUFGABEN

1032. Es ist zu zeigen, daß die dritte binomische Formel auch für die skalare Multiplikation von Summe und Differenz zweier Vektoren gilt, indem man $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})(\mathfrak{a} - \mathfrak{b})$ berechnet.

1033. $|\mathfrak{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ soll mittels Formel (199) bewiesen werden, desgleichen $\overline{P_1P_2} = |\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

1034. Der Vektor $\mathfrak{r}_1 = 2\mathfrak{i} - 3\mathfrak{j} + \mathfrak{k}$ soll skalar mit
a) $\mathfrak{r}_2 = -\mathfrak{i} + 2\mathfrak{j} + 4\mathfrak{k}$, b) $\mathfrak{r}_2 = -2\mathfrak{i} - 4\mathfrak{j} - 8\mathfrak{k}$, c) $\mathfrak{r}_2 = -4\mathfrak{i} + 6\mathfrak{j} - 2\mathfrak{k}$
multipliziert werden. Welche Lage zueinander haben die beiden Vektoren im Fall b) und im Fall c)?

1035. Gesucht ist die Komponente des Vektors $\mathfrak{a} = 2\mathfrak{i} - 3\mathfrak{j} - \mathfrak{k}$ in der Richtung des Vektors $\mathfrak{b} = -3\mathfrak{i} + 5\mathfrak{j} - 2\mathfrak{k}$.

1036. Welchen Winkel schließen die beiden Vektoren $\mathfrak{r}_1 = 4\mathfrak{i} - 3\mathfrak{j} + 10\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{r}_2 = -3\mathfrak{i} + 6\mathfrak{j} + 5\mathfrak{k}$ ein?

1037. Für drei komplanare Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ gilt $\mathfrak{c} = \lambda\mathfrak{a} + \mu\mathfrak{b}$. λ und μ sind aus $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ zu berechnen.
Anleitung: Man stelle zunächst durch skalares Multiplizieren der Vektorgleichung mit $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ zwei skalare Gleichungen her.

40.3. Anwendungen des Skalarproduktes

Abstand eines Punktes von einer Geraden

Die Gerade sei durch ihren Richtungsvektor $\mathfrak{a}$ und einen Punkt P_0 auf ihr gegeben. Gesucht ist der Abstand eines vorgegebenen Punktes P_1 von der Geraden.

Ist P der Fußpunkt des von P_1 auf die Gerade gefällten Lotes, und ist $\overrightarrow{P_1P} = \mathfrak{x}$ (Bild 308), so ist $|\mathfrak{x}|$ die Lösung der Aufgabe.

Es gilt sowohl

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_1 + \mathfrak{x}$$

als auch

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_0 + \lambda_0 \mathfrak{a},$$

worin λ_0 der dem Fußpunkt P entsprechende Wert des Parameters λ der Geradengleichung ist. Durch Gleichsetzen folgt

$$\mathfrak{r}_1 + \mathfrak{x} = \mathfrak{r}_0 + \lambda_0 \mathfrak{a}. \qquad \text{(I)}$$

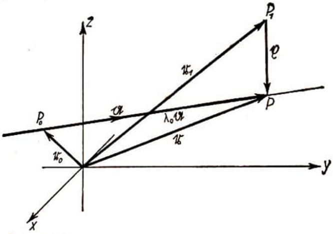


Bild 308

Dieser Vektorgleichung entsprechen drei skalare Gleichungen. Aus diesen allein können aber die vier in der Vektorgleichung enthaltenen Unbekannten (die drei Koordinaten von $\mathfrak{x}$ und der Parameterwert λ_0) nicht bestimmt werden, man benötigt noch eine Gleichung. Diese kann auf Grund der Bedingung des Senkrechtstehens von $\mathfrak{x}$ auf der Geraden aufgestellt werden:

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{x} = 0. \qquad \text{(II)}$$

Multipliziert man Gleichung (I) skalar mit $\mathfrak{a}$ und setzt darin Gleichung (II) ein, so erhält man eine Gleichung, die nur noch λ_0 enthält:

$$\mathfrak{a}\mathfrak{r}_1 + \mathfrak{a}\mathfrak{x} = \mathfrak{a}\mathfrak{r}_0 + \lambda_0 \mathfrak{a}^2$$

$$\mathfrak{a}\mathfrak{r}_1 + 0 \ = \mathfrak{a}\mathfrak{r}_0 + \lambda_0 \mathfrak{a}^2$$

$$\lambda_0 = \frac{\mathfrak{a}(\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_0)}{\mathfrak{a}^2}.$$

Das Einsetzen dieses Wertes in (I) ergibt

$$\boxed{\mathfrak{x} = \mathfrak{r}_0 - \mathfrak{r}_1 + \frac{(\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_0)\mathfrak{a}}{\mathfrak{a}^2}\mathfrak{a}} \qquad (207)$$

Der gesuchte Abstand errechnet sich dann als $|\mathfrak{x}|$.

BEISPIEL

1. Eine Gerade verlaufe durch den Punkt $P_0(-1; -1; -1)$ in Richtung des Vektors $\mathfrak{a} = \mathfrak{i} + 2\mathfrak{j} - 2\mathfrak{k}$. Welchen Abstand besitzt der Punkt $P_1(-2; 3; 4)$ von der Geraden?

   Lösung: Der zum Fußpunkt P_1 des Lotes von P_0 ausgehende Vektor ist

   $$\mathfrak{x} = \mathfrak{r}_0 - \mathfrak{r}_1 + \lambda_0 \mathfrak{a}$$

   mit $$\lambda_0 = \frac{\mathfrak{a}(\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_0)}{\mathfrak{a}^2} = \frac{(\mathfrak{i} + 2\mathfrak{j} - 2\mathfrak{k})(-\mathfrak{i} + 4\mathfrak{j} + 5\mathfrak{k})}{1 + 4 + 4} = \frac{-1 + 8 - 10}{9} = -\frac{1}{3}.$$

Damit wird

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{i} - 4\mathfrak{j} - 5\mathfrak{k} - \frac{1}{3}(\mathfrak{i} + 2\mathfrak{j} - 2\mathfrak{k}) = \frac{2}{3}\mathfrak{i} - \frac{14}{3}\mathfrak{j} - \frac{13}{3}\mathfrak{k}$$

und $\underline{\underline{|\mathfrak{x}| = \sqrt{41} \approx 6{,}40.}}$

Schnittwinkel zweier Geraden

Die beiden Geraden seien in der Parameterdarstellung gegeben. Gesucht ist der Schnittwinkel der beiden Geraden.

Unter dem Schnittwinkel zweier einander nicht schneidender Geraden versteht man den Schnittwinkel der Parallelen zu den beiden Geraden durch einen beliebigen Punkt des Raumes. Die Rechnung gestaltet sich am einfachsten, wenn man für diesen beliebigen Punkt den Nullpunkt wählt.

Sind $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_1 + \lambda_1 \mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_2 + \lambda_2 \mathfrak{a}_2$ die beiden Geraden, so bestimmt man nur den Winkel zwischen den Richtungsvektoren $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ der beiden Geraden.

Es ist dann

$$\cos(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2) = \frac{\mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{a}_2}{|\mathfrak{a}_1| \cdot |\mathfrak{a}_2|},$$

$$\boxed{\sphericalangle(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2) = \operatorname{arc\,cos} \frac{\mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{a}_2}{|\mathfrak{a}_1| \cdot |\mathfrak{a}_2|}} \tag{208}$$

BEISPIEL

2. Der Schnittwinkel zwischen der Geraden g_1 durch die Punkte $P_{11}(-3; -1; 1)$ und $P_{12}(4; 3; 2)$ und der Geraden g_2 durch die Punkte $P_{21}(2; 1; -2)$ und $P_{22}(5; -1; 1)$ ist zu bestimmen.

   Lösung: Die Richtungsvektoren der beiden Geraden können ermittelt werden:

   $$\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{r}_{12} - \mathfrak{r}_{11} = 7\mathfrak{i} + 4\mathfrak{j} + \mathfrak{k}$$

   $$\mathfrak{a}_2 = \mathfrak{r}_{22} - \mathfrak{r}_{21} = 3\mathfrak{i} - 2\mathfrak{j} + 3\mathfrak{k}.$$

   Nach Formel (208) wird

   $$\cos(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2) = \frac{21 - 8 + 3}{\sqrt{49 + 16 + 1} \cdot \sqrt{9 + 4 + 9}} = \frac{8}{33}\sqrt{3} = 0{,}4199;$$

   $$\underline{\underline{\sphericalangle(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2) = 65°10'.}}$$

Gleichung der Ebene durch einen Punkt senkrecht zu einem Vektor

Gegeben seien ein Vektor $\mathfrak{n}$ und ein Punkt P_0. Gesucht ist die Gleichung der Ebene, die senkrecht auf $\mathfrak{n}$ steht und in der P_0 liegt.

$\mathfrak{n}$ nennt man den *Normalenvektor* der Ebene. Ein Normalenvektor braucht weder auf der Ebene zu beginnen oder zu enden noch vom Ursprung auszugehen. Es gibt also unendlich viele Normalenvektoren einer Ebene. Im Bild 309 wurde der Normalenvektor $\mathfrak{n}$ nach P_0 verschoben und der Ortsvektor $\mathfrak{r}$ eines beliebigen Ebenenpunktes P gezeichnet.

Alle Vektoren $\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_0$ liegen in der gesuchten Ebene und stehen damit auf $\mathfrak{n}$ senkrecht. Also ist das Skalarprodukt von $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_0$ gleich Null:

$$\mathfrak{n} \cdot (\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_0) = 0, \quad \text{oder} \quad \mathfrak{n} \cdot \mathfrak{r} = \mathfrak{n} \cdot \mathfrak{r}_0 .$$

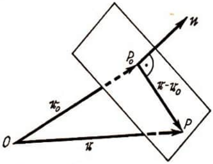


Bild 309

Die Gleichung der Ebene durch P_0 senkrecht zu $\mathfrak{n}$ heißt somit

$$\boxed{\mathfrak{n}\mathfrak{r} = \mathfrak{n}\mathfrak{r}_0} \tag{209}$$

Setzt man $\mathfrak{n} = A\mathfrak{i} + B\mathfrak{j} + C\mathfrak{k}$, so wird mit $\mathfrak{r} = x\mathfrak{i} + y\mathfrak{j} + z\mathfrak{k}$ die linke Seite von (209) zu

$$\mathfrak{n}\mathfrak{r} = Ax + By + Cz .$$

Da $\mathfrak{n}\mathfrak{r}_0$ eine Konstante ist, kann man sie ersetzen durch

$$\mathfrak{n}\mathfrak{r}_0 = -D .$$

Damit erhält man die Gleichung der Ebene in cartesischen Koordinaten

$$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0} \tag{209a}$$

Als Schnittgerade dieser Ebene mit der $x;y$-Ebene erhält man mit $z = 0$ die bekannte allgemeine Gleichung einer Geraden.

BEISPIEL

3. Ein Punkt $P_0(2; -3; -1)$ liegt in einer Ebene, die senkrecht zum Vektor $\mathfrak{n} = \mathfrak{i} - 2\mathfrak{j} + 4\mathfrak{k}$ steht. Gesucht ist die Gleichung der Ebene.

   Lösung: Es wird

   $$\mathfrak{n}\mathfrak{r} = x - 2y + 4z$$

   und $$\mathfrak{n}\mathfrak{r}_0 = 2 + 6 - 4 = 4.$$

   Die Gleichung der Ebene heißt

   $$\underline{\underline{x - 2y + 4z = 4.}}$$

Parameterdarstellung einer Ebene

a) Eine Ebene soll durch einen Punkt P_1 gehen und parallel zu zwei nicht kollinearen Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ liegen.

   Für jeden weiteren Punkt P, der in der Ebene liegt, muß gelten, daß der Vektor $\overrightarrow{P_1P} = \mathfrak{r} - \mathfrak{r}_1$ und die Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ komplanar sind, d. h., es muß

   $$\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_1 = \lambda\mathfrak{a} + \mu\mathfrak{b} \text{ sein.}$$

   Somit lautet die Parameterdarstellung einer Ebene im Raum

$$\boxed{\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_1 + \lambda\mathfrak{a} + \mu\mathfrak{b}} \tag{210}$$

Wegen der zweidimensionalen Ausdehnung müssen in der Gleichung einer Ebene zwei Parameter auftreten. Bei der Gleichung einer Geraden hingegen genügte einer.

b) Die Ebene soll durch drei Punkte P_1, P_2 und P_3 gehen.
Die Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ der Gleichung (210) können auch durch $\mathfrak{a} = \overrightarrow{P_1P_2} = \mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_1$ und $\mathfrak{b} = \overrightarrow{P_1P_3} = \mathfrak{r}_3 - \mathfrak{r}_1$ bestimmt werden. Dann erhält die Gleichung der Ebene wegen (210) die Form

$$\boxed{\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_1 + \lambda(\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_1) + \mu(\mathfrak{r}_3 - \mathfrak{r}_1)} \qquad (210\,\text{a})$$

BEISPIEL

4. Gesucht ist die Gleichung der Ebene durch $P_1(-1; 4; 1)$, $P_2(3; -2; 2)$ und $P_3(2; 7; -3)$.

Lösung: Mit $\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_1 = 4\mathfrak{i} - 6\mathfrak{j} + \mathfrak{k}$ und $\mathfrak{r}_3 - \mathfrak{r}_1 = 3\mathfrak{i} + 3\mathfrak{j} + 4\mathfrak{k}$ heißt die Gleichung der Ebene

$$\mathfrak{r} = -\mathfrak{i} + 4\mathfrak{j} + \mathfrak{k} + \lambda\,(4\mathfrak{i} - 6\mathfrak{j} + \mathfrak{k}) + \mu\,(3\mathfrak{i} + 3\mathfrak{j} - 4\mathfrak{k}),$$
$$\mathfrak{r} = (-1 + 4\lambda + 3\mu)\,\mathfrak{i} + (4 - 6\lambda + 3\mu)\,\mathfrak{j} + (1 + \lambda - 4\mu)\,\mathfrak{k}.$$

Parameterfreie Darstellung der Ebene

a) Die Ebene soll durch drei Punkte P_1, P_2 und P_3 gehen.
Stellt man Gleichung (210a) um und schreibt

$$\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_1 = \lambda(\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_1) + \mu(\mathfrak{r}_3 - \mathfrak{r}_1),$$

so erkennt man die in 39.4. in der Form $\mathfrak{c} = \lambda\mathfrak{a} + \mu\mathfrak{b}$ geschriebene lineare Beziehung zwischen drei Vektoren wieder. Die drei Vektoren $\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_1$ und $\mathfrak{r}_3 - \mathfrak{r}_1$ liegen in der darzustellenden Ebene. Dann muß die aus den Koordinaten der drei Vektoren gebildete Determinante gleich Null sein:

$$D = \begin{vmatrix} x - x_1 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y - y_1 & y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \\ z - z_1 & z_2 - z_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Der Wert der Determinante ändert sich durch sogenanntes *Rändern* nicht:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & x - x_1 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_1 & y - y_1 & y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \\ z_1 & z - z_1 & z_2 - z_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

(Entwickelt man die Determinante nach den Elementen der ersten Zeile, so erhält man wieder die ungeränderte Determinante.)
Wie man erkennt, haben die in die erste Spalte gesetzten Elemente x_1, y_1 und z_1 keinen Einfluß auf den Wert der Determinante. Sie ermöglichen allerdings eine Vereinfachung. Addiert man die Elemente der 1. Spalte zu den entsprechenden

der 2., 3. und 4. Spalte und vertauscht noch Zeilen und Spalten miteinander, so bekommt man die Gleichung einer Ebene durch drei Punkte in Determinantenschreibweise

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{211}$$

b) Abschnittsform der Gleichung einer Ebene:
Sind die Abschnitte, die die Ebene auf x-, y- und z-Achse abschneidet, durch a, b und c gegeben, so nimmt Gleichung (211) die einfache Form

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & 0 & c \end{vmatrix} = 0$$

an. Entwickelt man die Determinante nach den Elementen der ersten Zeile, so erhält man

$$abc - bcx - acy - abz = 0$$

oder

$$bcx + acy + abz = abc.$$

Sind a, b und c verschieden von Null, so ergibt sich hieraus nach Division durch abc die Abschnittsform der Gleichung einer Ebene

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \tag{211a}$$

Auch Gleichung (209a) liefert die Abschnittsform, wenn man dort durch D dividiert und $\frac{D}{A} = a$, $\frac{D}{B} = b$ und $\frac{D}{C} = c$ setzt.

Abstand eines Punktes von einer Ebene

a) Eine Ebene sei gegeben durch

$$\mathfrak{n}\mathfrak{r} = \mathfrak{n}\mathfrak{r}_0.$$

Zu bestimmen ist der Abstand d eines Punktes P_1 von dieser Ebene.
Der Vektor des von P_1 auf die Ebene gefällten Lotes sei $\overrightarrow{P_1P} = \mathfrak{d}$. $\mathfrak{d}$ ist die Parallelkomponente des Vektors $\overrightarrow{P_1P_0} = \mathfrak{r}_0 - \mathfrak{r}_1$ längs des Normalenvektors $\mathfrak{n}$ (Bild 310).

Nach Formel (200) gilt deshalb

$$\mathfrak{n}(\mathfrak{r}_0 - \mathfrak{r}_1) = \mathfrak{n}\mathfrak{d},$$

und, da $\mathfrak{n} \parallel \mathfrak{d}$,

$$\mathfrak{n}(\mathfrak{r}_0 - \mathfrak{r}_1) = \pm |\mathfrak{n}| \cdot |\mathfrak{d}|.$$

Hieraus bestimmt sich der Abstand d des Punktes P_1 von einer Ebene

$$\boxed{d = \left| \frac{\mathfrak{n}(\mathfrak{r}_0 - \mathfrak{r}_1)}{|\mathfrak{n}|} \right|} \tag{212}$$

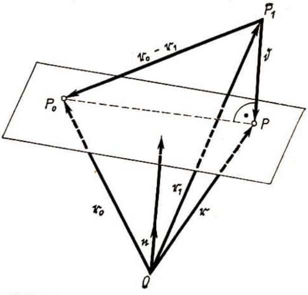


Bild 310

b) Die Ebene sei gegeben durch die Gleichung

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Es ist (vgl. S. 501) $\mathfrak{n} = A\mathfrak{i} + B\mathfrak{j} + C\mathfrak{k}$ mit $|\mathfrak{n}| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$, $\mathfrak{n}\mathfrak{r}_0 = -D$, $\mathfrak{n}\mathfrak{r}_1 = Ax_1 + By_1 + Cz_1$. Damit ist der Abstand eines Punktes P_1 von der Ebene $Ax + By + Cz + D = 0$

$$\boxed{d = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|} \tag{212a}$$

BEISPIEL

5. Welchen Abstand hat der Punkt $(2; -1; -4)$ von der Ebene $2x - 2y - z - 1 = 0$?

Lösung: Nach Formel (212a) ist

$$d = \frac{4 + 2 + 4 - 1}{\sqrt{4 + 4 + 1}} = \underline{\underline{3}}.$$

Durchstoßpunkt einer Geraden durch eine Ebene

a) Gerade und Ebene seien in Parameterdarstellung gegeben:

$$\mathfrak{r}_G = \mathfrak{r}_1 + \lambda_1 \mathfrak{a}_1, \quad \mathfrak{r}_E = \mathfrak{r}_2 + \lambda_2 \mathfrak{a}_2 + \mu \mathfrak{b}.$$

Der Durchstoßpunkt ist der Geraden und der Ebene gemeinsam, d. h., es muß $\mathfrak{r}_G = \mathfrak{r}_E$ sein.
Die durch das Gleichsetzen erhaltene Gleichung

$$\mathfrak{r}_1 + \lambda_1 \mathfrak{a}_1 = \mathfrak{r}_2 + \lambda_2 \mathfrak{a}_2 + \mu \mathfrak{b}$$

liefert drei skalare Gleichungen. Aus diesem Gleichungssystem können die drei Parameter λ_1, λ_2 und μ bestimmt werden. Es genügt bereits, λ_1 zu berechnen und in die Geradengleichung einzusetzen, um den Ortsvektor des Durchstoßpunktes zu erhalten. Durch das Bestimmen von λ_2 und μ und Einsetzen dieser Werte in die Gleichung der Ebene kann die Probe gemacht werden.

b) Die Gerade sei in der Form $\mathfrak{r}_G = \mathfrak{r}_1 + \lambda\mathfrak{a}$, die Ebene in der Form $\mathfrak{n}\mathfrak{r}_E = \mathfrak{n}\mathfrak{r}_0$ oder $Ax + By + Cz + D = 0$ gegeben.
Aus der Bedingung für den Durchstoßpunkt $\mathfrak{r}_G = \mathfrak{r}_E$ folgt die Gleichung

$$\mathfrak{n}(\mathfrak{r}_1 + \lambda\mathfrak{a}) = \mathfrak{n}\mathfrak{r}_0.$$

Hieraus kann λ berechnet werden. Das Einsetzen des Wertes von λ in die Geradengleichung liefert den Ortsvektor des Durchstoßpunktes.

BEISPIEL

6. Die Gleichung der Geraden sei $\mathfrak{r} = \mathfrak{i} + 3\mathfrak{j} - 2\mathfrak{k} + \lambda(2\mathfrak{i} + 2\mathfrak{j} - \mathfrak{k})$; die Ebene sei bestimmt durch den Punkt $P_0(1; -3; 1)$ in ihr und einen Normalenvektor $\mathfrak{n} = 2\mathfrak{i} - \mathfrak{j} - 4\mathfrak{k}$, bzw. gegeben durch ihre Gleichung $2x - y - 4z - 1 = 0$.

Lösung: Die skalare Schreibweise der Geradengleichung

$$x = 1 + 2\lambda, \quad y = 3 + 2\lambda, \quad z = -2 - \lambda$$

in die Gleichung der Ebene eingesetzt, liefert

$$\lambda = -1$$

und damit den Durchstoßpunkt $\underline{\underline{P(-1; 1; -1)}}$.

Neigungswinkel einer Geraden gegen eine Ebene

Es soll der Winkel φ berechnet werden, den eine Gerade $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_1 + \lambda\mathfrak{a}$ mit einer Ebene $\mathfrak{n}\mathfrak{r} = \mathfrak{n}\mathfrak{r}_0$ bildet.
Der im Durchstoßpunkt der Geraden durch die Ebene errichtete Normalenvektor $\mathfrak{n}$ (Bild 311) bildet mit dem Richtungsvektor $\mathfrak{a}$ der Geraden einen Winkel $\psi = 90° \pm \varphi$, je nachdem, auf welcher Seite der Ebene $\mathfrak{n}$ angetragen wird.
Dann gilt zunächst

$$|\cos\psi| = |\sin\varphi|.$$

Es ist aber

$$\mathfrak{n}\mathfrak{a} = |\mathfrak{n}| \cdot |\mathfrak{a}| \cdot \cos\psi$$

und damit

$$|\sin\varphi| = |\cos\psi| = \left|\frac{\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{a}}{|\mathfrak{n}|\cdot|\mathfrak{a}|}\right|.$$

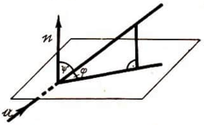


Bild 311

Da aber $0° \leqq \varphi \leqq 90°$, können auf der linken Gleichungsseite die Betragsstriche wegfallen und man erhält als Neigungswinkel

$$\boxed{\varphi = \arcsin\left|\frac{\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{a}}{|\mathfrak{n}|\cdot|\mathfrak{a}|}\right|} \qquad (213)$$

In Koordinatendarstellung lautet das Ergebnis

$$\boxed{\varphi = \arcsin \left| \frac{A a_x + B a_y + C a_z}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} \right|} \tag{213a}$$

BEISPIEL

7. Die Gleichung der Ebene sei $2x - y - 4z - 1 = 0$, die Gleichung der Geraden sei $\mathfrak{r} = \mathfrak{i} + 3\mathfrak{j} - 2\mathfrak{k} + \lambda(2\mathfrak{i} + 2\mathfrak{j} - \mathfrak{k})$.

   Lösung: Dann ist

$$\sin\varphi = \left| \frac{4 - 2 + 4}{\sqrt{21} \cdot \sqrt{9}} \right| = \frac{2}{21}\sqrt{21} = 0{,}4364$$

$$\underline{\underline{\varphi = 25^\circ 52'.}}$$

Winkel zwischen zwei Ebenen

Es soll der Winkel zwischen den beiden Ebenen

$$E_1\colon\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

und

$$E_2\colon\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

bestimmt werden.

Der Winkel zwischen den Ebenen ist gleich dem Winkel zwischen zwei Normalenvektoren dieser beiden Ebenen (Bild 312).

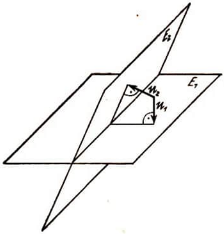


Bild 312

$$\mathfrak{n}_1 = A_1\mathfrak{i} + B_1\mathfrak{j} + C_1\mathfrak{k} \quad \text{und}$$

$$\mathfrak{n}_2 = A_2\mathfrak{i} + B_2\mathfrak{j} + C_2\mathfrak{k}$$

sind die beiden Normalenvektoren.

Der Winkel ergibt sich aus

$$\cos\varphi = \cos(\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2) = \frac{\mathfrak{n}_1 \cdot \mathfrak{n}_2}{|\mathfrak{n}_1| \cdot |\mathfrak{n}_2|},$$

$$\boxed{\varphi = \arccos \frac{\mathfrak{n}_1 \cdot \mathfrak{n}_2}{|\mathfrak{n}_1| \cdot |\mathfrak{n}_2|}} \tag{214}$$

oder in Koordinatendarstellung

$$\boxed{\varphi = \arccos \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}} \tag{214a}$$

AUFGABEN

1038. Welche Winkel besitzt das Dreieck der Aufgabe 1025?
1039. Welchen Abstand hat der Punkt $P_1(2; 1; -3)$ von der Geraden durch $P_2(-3; 3; 5)$ und $P_3(1; -4; -2)$?
1040. Welchen Abstand hat der Punkt $P_1(2; -3; -1)$ von einer Ebene, deren Schnittgerade mit der $x;y$-Ebene $2x + 3y = 6$ und mit der $x;z$-Ebene $x + 2z = 3$ ist?
1041. Unter welchem Winkel schneidet die Gerade $\mathfrak{r} = 2\mathfrak{i} - 3\mathfrak{k} + \lambda(-2\mathfrak{i} + 5\mathfrak{j} + \mathfrak{k})$ die Ebene der Aufgabe 1040? Wie heißen die Koordinaten des Durchstoßpunktes?
1042. Unter welchem Winkel schneidet die Ebene der Aufgabe 1040 eine zweite Ebene E_2: $3x - 2y - z + 4 = 0$?
1043. Wie heißt die Gleichung der Geraden, die senkrecht auf der Ebene E_2 der Aufgabe 1042 steht und durch den Punkt $(2; 1; -2)$ geht?

41. Vektorielles Produkt

41.1. Definition des vektoriellen Produkts

Neben dem skalaren Produkt tritt in der Physik und in der Technik noch eine andere Kombination zweier Vektoren auf, die man ebenfalls als Produkt bezeichnet und für die man ein eigenes Symbol eingeführt hat.

Als Beispiel soll das Drehmoment eines um einen Punkt O frei drehbaren Körpers betrachtet werden (Bild 313). Auf den Körper wirke im Punkt P eine Kraft $\mathfrak{F}$. Der Punkt P ist in bezug auf den Drehpunkt O durch einen Vektor $\mathfrak{r} = \overrightarrow{OP}$ festgelegt. Wie aus der Physik bekannt ist, bewirkt die Kraft $\mathfrak{F}$ ein Drehmoment, dessen Betrag gleich dem Produkt aus Abstand der Wirkungslinie der Kraft vom Drehpunkt und Betrag der Kraft ist:

$$M = a \cdot F = a \cdot |\mathfrak{F}|,$$

oder, wegen $a = |\mathfrak{r}| \sin \varphi = |\mathfrak{r}| \sin (\mathfrak{r}, \mathfrak{F})$

$$M = |\mathfrak{r}| \cdot |\mathfrak{F}| \sin (\mathfrak{r}, \mathfrak{F}).$$

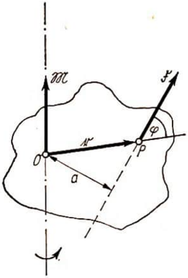


Bild 313

Damit ist aber noch nichts über die Lage der Drehachse und die Drehrichtung gesagt, die doch bei vorgegebenem $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{F}$ festliegt. Um diese noch mit zu erfassen, stellt man das Drehmoment als Vektor $\mathfrak{M}$ dar, der in Richtung der Drehachse liegt und so orientiert ist, daß, von seiner Spitze aus betrachtet, die Drehung im mathematisch positiven Drehsinn erfolgt. Die Drehachse selbst steht, wie aus den physikalischen Zusammenhängen folgt, senkrecht zu der Ebene, in der $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{F}$ liegen. Diesen durch $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{F}$ bestimmten Vektor schreibt man

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{r} \times \mathfrak{F}$$

und nennt ihn das **vektorielle Produkt** oder **Vektorprodukt** (weil das Ergebnis ein Vektor ist) oder auch das *äußere Produkt* der beiden Vektoren.
Diese Erkenntnisse können verallgemeinert und auf zwei beliebige Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ angewendet werden.

Definition:

> Unter dem vektoriellen Produkt zweier Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ versteht man einen Vektor $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$, der charakterisiert ist durch die Bedingungen
>
> 1. $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ steht senkrecht auf $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$,
> 2. $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem,
> 3. $|\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}| = |\mathfrak{a}| \cdot |\mathfrak{b}| \cdot \sin(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$, wobei $0 \leqq \sphericalangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \leqq \pi$.

$\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ wird gelesen: „Vektorprodukt $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$" oder auch „$\mathfrak{a}$ Kreuz $\mathfrak{b}$". Eine veraltete Schreibweise ist $[\mathfrak{a}\mathfrak{b}]$.
Aus der 3. Bedingung der Definition folgt, daß das Vektorprodukt Null wird, wenn entweder $\mathfrak{a} = \mathfrak{o}$ oder $\mathfrak{b} = \mathfrak{o}$ oder $\sin(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = 0$. Der letztgenannte Fall liegt vor, wenn $\sphericalangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = 0°$ oder $\sphericalangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = 180°$, d. h., wenn $\mathfrak{a} \parallel \mathfrak{b}$.

> Das vektorielle Produkt zweier Vektoren hat den Wert Null, wenn wenigstens einer der beiden Vektoren der Nullvektor ist oder wenn die beiden Vektoren parallel sind:
>
> $$\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} = \mathfrak{o}, \quad \text{wenn} \quad \mathfrak{a} \parallel \mathfrak{b}.$$

Wichtig für die Anwendungen ist auch die Umkehrung:

> Ist das Vektorprodukt zweier Vektoren, von denen keiner der Nullvektor ist, gleich Null, so sind sie parallel.

Zum Beispiel liefert eine Kraft $\mathfrak{F}$, die in Richtung von $\mathfrak{r}$ wirkt, kein Drehmoment ($\mathfrak{M} = \mathfrak{o}$); denn die Wirkungslinie der Kraft geht durch den Drehpunkt.
Weiterhin ergibt sich aus der 3. Bedingung der Definition, daß das Vektorprodukt seinen größten Wert, nämlich $|\mathfrak{a}| \cdot |\mathfrak{b}|$, annimmt, wenn $\sin(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = 1$, also wenn $\sphericalangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = 90°$:

$$|\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}| = ab, \quad \text{wenn } \mathfrak{a} \perp \mathfrak{b}.$$

ab ist der Flächeninhalt eines Rechtecks mit den Seiten a und b. $ab \sin\varphi$ ist der Flächeninhalt eines Parallelogramms mit den Seiten a und b und einem von diesen eingeschlossenen Winkel φ (Bild 314). Demnach kann man das Vektorprodukt auch wie folgt deuten:

> $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ ist ein Vektor, der auf $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ senkrecht steht, derart, daß $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ ein Rechtssystem bilden. Sein Betrag ist gleich dem Flächeninhalt des von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ aufgespannten Parallelogramms.

Zur Untersuchung der Umkehrbarkeit der vektoriellen Multiplikation betrachte man Bild 315. Alle Vektoren $\mathfrak{b}_n$, die in der gleichen Ebene wie $\mathfrak{a}$ liegen und deren Endpunkte sich auf einer Parallelen zu $\mathfrak{a}$ befinden, besitzen die gleiche Normalkomponente $\mathfrak{b}'_{\mathfrak{a}}$. Sie alle spannen deshalb Parallelogramme vom gleichen Flächeninhalt auf. Es ist also

$$\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}_1 = \mathfrak{a} \times \mathfrak{b}_2 = \ldots = \mathfrak{a} \times \mathfrak{b}'_{\mathfrak{a}}.$$

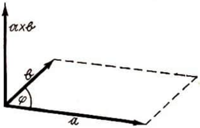


Bild 314

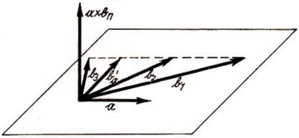


Bild 315

Da alle Vektoren $\mathfrak{b}_n$, die die gleiche Normalkomponente $\mathfrak{b}'_{\mathfrak{a}}$ besitzen, mit $\mathfrak{a}$ das gleiche Vektorprodukt ergeben, kann aus $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ und dem Vektor $\mathfrak{a}$ der Vektor $\mathfrak{b}$ nicht eindeutig bestimmt werden.
Die vektorielle Multiplikation läßt sich nicht eindeutig umkehren.
Da die gleichen Betrachtungen auch für $\mathfrak{a}'_{\mathfrak{b}}$ und $\mathfrak{b}$ gelten, folgt

$$\boxed{\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} = \mathfrak{a} \times \mathfrak{b}'_{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}'_{\mathfrak{b}} \times \mathfrak{b}} \qquad (215)$$

Der Wert des vektoriellen Produktes zweier Vektoren ändert sich nicht, wenn man einen der Vektoren durch seine Normalkomponente längs des anderen ersetzt.

AUFGABEN

1044. Man berechne $\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}$.
1045. Wie groß ist der Flächeninhalt eines Dreiecks, das durch zwei Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, die die Schenkel eines Winkels γ bilden, festgelegt ist?
1046. Man berechne $(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b})^2 + (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})^2$.

41.2. Rechengesetze für vektorielle Produkte

Beim Skalarprodukt galt, wie bei einem Produkt reeller Zahlen, das Kommutationsgesetz. Das ist durchaus nicht selbstverständlich und muß beim vektoriellen Produkt erneut überprüft werden. Bildet man gemäß der Definition auf Seite 508 das Produkt $\mathfrak{b} \times \mathfrak{a}$, so findet man, daß $\mathfrak{b} \times \mathfrak{a}$ wegen der 1. und 2. Bedingung dem Vektor $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ entgegengerichtet ist (Bild 316). Da sich nach der 3. Bedingung der gleiche Betrag ergibt, ist

$$\boxed{\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} = -(\mathfrak{b} \times \mathfrak{a})} \qquad (216)$$

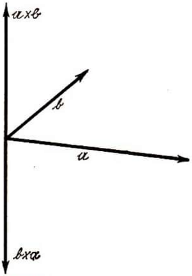


Bild 316

Die vorstehende Beziehung nennt man **Alternativgesetz**. Damit ist zugleich festgestellt:
Für die vektorielle Multiplikation gilt das Kommutationsgesetz nicht.
Hingegen gilt für die Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar das

Assoziationsgesetz

$$\boxed{n(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) = (n\mathfrak{a}) \times \mathfrak{b} = \mathfrak{a} \times (n\mathfrak{b})} \tag{217}$$

Die Richtigkeit von Formel (217) erkennt man, wenn man das Vektorprodukt als Parallelogrammfläche deutet. Formel (217) besagt dann: Der Flächeninhalt eines Parallelogramms wächst auf das n-fache, wenn eine Seite den n-fachen Betrag annimmt. Für die vektorielle Multiplikation von mehr als zwei Vektoren gilt das *Assoziationsgesetz* nicht, denn es ist im allgemeinen

$$\mathfrak{a} \times (\mathfrak{b} \times \mathfrak{c}) \neq (\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \times \mathfrak{c}.$$

Zur Erklärung diene Bild 317, in dem der Einfachheit halber drei komplanare Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ gewählt wurden (denn die Allgemeingültigkeit eines Satzes ist ja hinfällig, wenn der Satz in einem Spezialfall versagt).

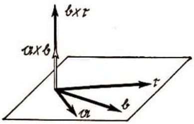


Bild 317

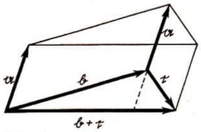


Bild 318

Sowohl $\mathfrak{b} \times \mathfrak{c}$ als auch $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ stehen dann auf dieser Ebene senkrecht. $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b} \times \mathfrak{c}$ liegen aber in einer anderen Ebene als $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$, also müssen auch ihre Vektorprodukte voneinander verschieden sein. Als letztes bleibt noch das Distributionsgesetz

$$\mathfrak{a} \times (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = \mathfrak{a} \times \mathfrak{b} + \mathfrak{a} \times \mathfrak{c}$$

auf seine Gültigkeit zu untersuchen.
Nimmt man zunächst $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ als komplanar an (Bild 318), so gilt in der Ebene der drei Vektoren: Das Parallelogramm mit den Seiten $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b} + \mathfrak{c}$ ist inhaltsgleich der Summe der beiden Parallelogramme mit den Seiten $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ und den Seiten $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{c}$, Linke und rechte Seite der Gleichung stimmen also in den Beträgen überein. Da $\mathfrak{b} + \mathfrak{c}$ in derselben Ebene liegt wie $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$, haben die links und rechts stehenden Vektoren auch die gleiche Richtung.
Es gilt also das

Distributionsgesetz

$$\boxed{\mathfrak{a} \times (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = \mathfrak{a} \times \mathfrak{b} + \mathfrak{a} \times \mathfrak{c}}. \tag{218}$$

Allgemein wird die Gültigkeit des Distributionsgesetzes mittels der Koordinatendarstellung am Ende dieses Abschnittes bewiesen. Beim Anwenden des Distributionsgesetzes ist die Reihenfolge der Faktoren innerhalb der Teilprodukte streng zu beachten, denn es ist

$$\mathfrak{a} \times (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = \mathfrak{a} \times \mathfrak{b} + \mathfrak{a} \times \mathfrak{c},$$

aber

$$(\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) \times \mathfrak{a} = \mathfrak{b} \times \mathfrak{a} + \mathfrak{c} \times \mathfrak{a} = -(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) - (\mathfrak{a} \times \mathfrak{c}).$$

BEISPIEL

1. Zu berechnen sind

   a) $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \times (\mathfrak{a} + \mathfrak{b})$;

   b) $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \times (\mathfrak{a} - \mathfrak{b})$.

   Lösung:

   a) $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \times (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = \mathfrak{a} \times \mathfrak{a} + \mathfrak{b} \times \mathfrak{a} + \mathfrak{a} \times \mathfrak{b} + \mathfrak{b} \times \mathfrak{b} = \mathfrak{o} - (\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) + \mathfrak{a} \times \mathfrak{b} + \mathfrak{o} = \underline{\underline{\mathfrak{o}}}.$

   Das Ergebnis folgt auch direkt aus dem Resultat von Aufgabe 1044, wonach das Kreuzprodukt eines Vektors mit sich selbst Null ergibt.

   b) $$\begin{aligned}(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \times (\mathfrak{a} - \mathfrak{b}) &= \mathfrak{a} \times \mathfrak{a} + \mathfrak{b} \times \mathfrak{a} - (\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) - (\mathfrak{b} \times \mathfrak{b}) = \\ &= \mathfrak{o} + \mathfrak{b} \times \mathfrak{a} + \mathfrak{b} \times \mathfrak{a} - \mathfrak{o} = \underline{\underline{2(\mathfrak{b} \times \mathfrak{a})}}.\end{aligned}$$

Bildet man von zwei Ortsvektoren

$$\mathfrak{r}_1 = x_1\mathfrak{i} + y_1\mathfrak{j} + z_1\mathfrak{k}$$

und

$$\mathfrak{r}_2 = x_2\mathfrak{i} + y_2\mathfrak{j} + z_2\mathfrak{k}$$

das Vektorprodukt, so erhält man durch Anwenden des Distributionsgesetzes

$$\begin{aligned}\mathfrak{r}_1 \times \mathfrak{r}_2 = {} & x_1x_2(\mathfrak{i} \times \mathfrak{i}) + y_1x_2(\mathfrak{j} \times \mathfrak{i}) + z_1x_2(\mathfrak{k} \times \mathfrak{i}) + x_1y_2(\mathfrak{i} \times \mathfrak{j}) + \\ & + y_1y_2(\mathfrak{j} \times \mathfrak{j}) + z_1y_2(\mathfrak{k} \times \mathfrak{j}) + x_1z_2(\mathfrak{i} \times \mathfrak{k}) + y_1z_2(\mathfrak{j} \times \mathfrak{k}) + \\ & + z_1z_2(\mathfrak{k} \times \mathfrak{k}).\end{aligned}$$

Von den hierbei auftretenden Vektorprodukten sind die mit gleichen Einsvektoren gleich dem Nullvektor:

$$\boxed{\mathfrak{i} \times \mathfrak{i} = \mathfrak{j} \times \mathfrak{j} = \mathfrak{k} \times \mathfrak{k} = \mathfrak{o}} \tag{219}$$

Die Produkte zweier verschiedener Einsvektoren ergeben einen Vektor, der wiederum den Betrag *eins* besitzt und in Richtung des dritten Einsvektors fällt, wenn die Vektoren in der Reihenfolge $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}, \mathfrak{i} \ldots$ in dem Vektorprodukt auftreten. Sie sind dem dritten Einsvektor entgegengerichtet, wenn die Reihenfolge vertauscht ist.

Man erhält

$$\boxed{\begin{array}{lll}\mathfrak{i} \times \mathfrak{j} = \mathfrak{k}, & \mathfrak{j} \times \mathfrak{k} = \mathfrak{i}, & \mathfrak{k} \times \mathfrak{i} = \mathfrak{j} \\ \mathfrak{j} \times \mathfrak{i} = -\mathfrak{k}, & \mathfrak{k} \times \mathfrak{j} = -\mathfrak{i}, & \mathfrak{i} \times \mathfrak{k} = -\mathfrak{j}\end{array}} \tag{220}$$

Damit wird

$$\mathfrak{r}_1 \times \mathfrak{r}_2 = x_2 y_1(-\mathfrak{k}) + x_2 z_1 \mathfrak{j} + x_1 y_2 \mathfrak{k} + y_2 z_1(-\mathfrak{i}) + x_1 z_2(-\mathfrak{j}) + y_1 z_2 \mathfrak{i},$$

$$\mathfrak{r}_1 \times \mathfrak{r}_2 = (y_1 z_2 - y_2 z_1)\mathfrak{i} + (x_2 z_1 - x_1 z_2)\mathfrak{j} + (x_1 y_2 - x_2 y_1)\mathfrak{k}.$$

Die rechte Seite läßt sich übersichtlicher als dreireihige Determinante darstellen. Man erhält

$$\boxed{\mathfrak{r}_1 \times \mathfrak{r}_2 = \begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}} \tag{221}$$

Bei der Handhabung dieser Formel empfiehlt es sich nicht, die Determinante nach der Regel von SARRUS auszurechnen, sondern durch Entwickeln nach den Elementen der ersten Zeile.

In dieser Determinantenschreibweise kann auch die Allgemeingültigkeit des Distributionsgesetzes gezeigt werden. Nach den Rechenregeln für Determinanten ist

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 + u_1 & z_2 + u_2 & z_3 + u_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix}.$$

Damit wird

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & b_3 + c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

oder nach (221)

$$\mathfrak{a} \times (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = \mathfrak{a} \times \mathfrak{b} + \mathfrak{a} \times \mathfrak{c}.$$

BEISPIELE

2. Zu berechnen sei $\mathfrak{r}_1 \times \mathfrak{r}_2$ für $\mathfrak{r}_1 = 3\mathfrak{i} - 2\mathfrak{j} + 4\mathfrak{k}$, $\mathfrak{r}_2 = -\mathfrak{i} + 3\mathfrak{j} - 3\mathfrak{k}$.

   Lösung:

$$\mathfrak{r}_1 \times \mathfrak{r}_2 = \begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ 3 & -2 & 4 \\ -1 & 3 & -3 \end{vmatrix} = \mathfrak{i}(6 - 12) - \mathfrak{j}(-9 + 4) + \mathfrak{k}(9 - 2),$$

$$\underline{\underline{\mathfrak{r}_1 \times \mathfrak{r}_2 = -6\mathfrak{i} + 5\mathfrak{j} + 7\mathfrak{k}.}}$$

3. Es soll der Wert der Tangensfunktion des von zwei Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ gebildeten Winkels angegeben werden.

   Lösung: Aus $\sin(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \dfrac{|\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}|}{a \cdot b}$ und $\cos(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \dfrac{\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}}{a \cdot b}$

   folgt $\underline{\underline{\tan(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \dfrac{|\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}|}{\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}}}}.$

AUFGABEN

1047. Zu berechnen sei $\mathfrak{r}_1 \times \mathfrak{r}_2$, wenn

a) $\mathfrak{r}_1 = 2\mathfrak{i} + \frac{1}{2}\,\mathfrak{j} - \mathfrak{k}$, $\qquad$ b) $\mathfrak{r}_1 = 3\mathfrak{i} + 2\mathfrak{j} - \frac{1}{2}\,\mathfrak{k}$,

$\mathfrak{r}_2 = \frac{1}{2}\,\mathfrak{i} - 2\mathfrak{j} + \mathfrak{k}$; $\qquad$ $\mathfrak{r}_2 = -3\mathfrak{i} - 2\mathfrak{j} + \frac{1}{2}\,\mathfrak{k}$ ist.

1048. Für die Vektoren der Aufgabe 1034 sind die Vektorprodukte $\mathfrak{r}_1 \times \mathfrak{r}_2$ zu berechnen.

1049. Es ist ein Normalenvektor der Ebene zu berechnen, in der eine Gerade $\mathfrak{r} = \mathfrak{i} - 2\mathfrak{j} + \lambda(-2\mathfrak{i} - \mathfrak{j} + 3\mathfrak{k})$ und ein Punkt $P_0(-1; 3; 2)$ liegen.

1050. Für das Ergebnis des Beispiels 3 ist die Koordinatendarstellung anzugeben und daraus die Schnittwinkelformel zweier Geraden in der Ebene herzuleiten, indem man $a_z = b_z = 0$ setzt.

41.3. Anwendungen des Vektorproduktes

Tangentialgeschwindigkeit

Es soll die Tangentialgeschwindigkeit eines Körpers bestimmt werden, der sich um die Achse mit einer Winkelgeschwindigkeit ω dreht und von einem beliebigen Punkt der Drehachse die Entfernung r besitzt.
Man kann die Winkelgeschwindigkeit als Vektor $\vec{\omega}$ darstellen, dessen Betrag gleich dem Betrag der Winkelgeschwindigkeit ist, der in Richtung der Drehachse liegt und so orientiert ist, daß von seiner Spitze aus betrachtet die Drehung im mathematisch positiven Drehsinn erfolgt (Bild 319). Die Lage des Körpers bezüglich eines beliebigen Punktes der Drehachse kann durch den Ortsvektor $\mathfrak{r}$ angegeben werden.
Dann ist der Betrag der Tangentialgeschwindigkeit

$$v = \omega r \sin(\vec{\omega}, \mathfrak{r})$$

und die Tangentialgeschwindigkeit als Vektorgröße wird

$$\mathfrak{v} = \vec{\omega} \times \mathfrak{r}.$$

Die Summe zweier Winkel- oder Tangentialgeschwindigkeiten kann durch Addition der sie darstellenden Vektoren ermittelt werden.

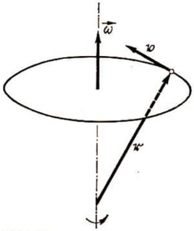


Bild 319

Abstand zweier windschiefer Geraden

Zwei Geraden seien gegeben durch $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_1 + \lambda_1 \mathfrak{a}_1$ und $\bar{\mathfrak{r}} = \mathfrak{r}_2 + \lambda_2 \mathfrak{a}_2$. Gesucht ist der Abstand d.
Die zwei Richtungsvektoren $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ bestimmen eine Schar paralleler Ebenen, von denen zwei je eine der beiden Geraden ganz enthalten (Bild 320). Der Abstand dieser beiden Ebenen ist zugleich der Abstand der beiden Geraden, da die beiden Ebenen parallel zueinander liegen.
Die Richtung des Lotvektors ist bestimmt durch den Vektor

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2.$$

Nun besitzen alle Vektoren, die zwei Punkte — z. B. P_1 und P_2 — der beiden Ebenen miteinander verbinden, die gleiche Komponente $\mathfrak{d}$ mit $|\mathfrak{d}| = d$ in der Richtung des Vektors $\mathfrak{n}$:

$$(\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_1)_\mathfrak{n} = \mathfrak{d}.$$

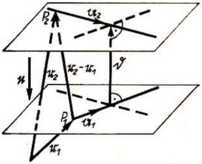


Bild 320

Nach Formel (200) ist

$$\mathfrak{n}(\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_1)_\mathfrak{n} = \mathfrak{n}(\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_1) = \mathfrak{n} \cdot \mathfrak{d}$$

und da $\mathfrak{n} \parallel \mathfrak{d}$

$$\mathfrak{n}(\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_1) = \pm |\mathfrak{n}| \cdot |\mathfrak{d}|.$$

Hieraus ergibt sich der Abstand zweier windschiefer Geraden zu

$$d = \left| \frac{\mathfrak{n}(\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_1)}{|\mathfrak{n}|} \right|$$

und mit $\mathfrak{n} = \mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2$

$$\boxed{d = \left| \frac{(\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2)(\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_1)}{|\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2|} \right|} \qquad (222)$$

BEISPIEL

1. Der Abstand zweier durch ihre Parameterdarstellung gegebenen Geraden

$$\mathfrak{r} = 5\mathfrak{i} + 2\mathfrak{j} - \mathfrak{k} + \lambda_1(3\mathfrak{i} - 4\mathfrak{j} + 12\mathfrak{k}), \quad \bar{\mathfrak{r}} = \mathfrak{i} + \mathfrak{j} - 3\mathfrak{k} + \lambda_2(2\mathfrak{i} - 2\mathfrak{j} - \mathfrak{k})$$

ist zu bestimmen.

Lösung: Man wendet Gleichung (222) an und erhält

$$\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2 = 28\mathfrak{i} + 27\mathfrak{j} + 2\mathfrak{k}; \quad \mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_1 = -4\mathfrak{i} - \mathfrak{j} - 2\mathfrak{k}; \quad |\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2| \approx 38{,}95$$

$$d = \left| \frac{-112 - 27 - 4}{38{,}95} \right| \approx \underline{\underline{3{,}67}}.$$

Gleichung der Schnittgeraden zweier Ebenen

Es soll die Gleichung der Schnittgeraden zweier Ebenen E_1 und E_2 ermittelt werden, die entweder in Parameterdarstellung durch $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_1 + \lambda_1\mathfrak{a}_1 + \mu_1\mathfrak{b}_1$ und $\bar{\mathfrak{r}} = \mathfrak{r}_2 + \lambda_2\mathfrak{a}_2 + \mu_2\mathfrak{b}_2$ oder in Koordinatendarstellung durch $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ und $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ gegeben sind.

Die Gleichung der Schnittgeraden kann aufgestellt werden, wenn

a) ein Punkt der Geraden und der Richtungsvektor,

b) zwei Punkte der Geraden

bekannt sind.

a) Der Richtungsvektor $\mathfrak{a}$ steht auf den Normalenvektoren beider Ebenen senkrecht, also muß gelten

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{n}_1 \times \mathfrak{n}_2,$$

wobei

$$\mathfrak{n}_1 = \mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{b}_1 \quad \text{und} \quad \mathfrak{n}_2 = \mathfrak{a}_2 \times \mathfrak{b}_2$$

ist.

Ein Punkt P_0 der Schnittgeraden erfüllt, da er in beiden Ebenen liegt, die Bedingungen

$$\mathfrak{r} = \bar{\mathfrak{r}}$$

$$\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_1 = \lambda_1 \mathfrak{a}_1 + \mu_1 \mathfrak{b}_1 - \lambda_2 \mathfrak{a}_2 - \mu_2 \mathfrak{b}_2. \tag{I}$$

Diese Vektorgleichung enthält drei skalare Gleichungen mit vier Parametern, d. h., eine Variable mehr als Gleichungen zu ihrer Bestimmung vorhanden sind. In Gleichung (I) steht links ein Differenzvektor, rechts stehen vier Vektoren. Da es aber nur drei linear unabhängige Vektoren im Raum gibt, muß jeder dieser vier von den anderen drei linear abhängig sein. Man kommt am einfachsten zum Ziel, wenn man für einen der vier Parameter (von denen jeder den Wertebereich $-\infty \ldots +\infty$ durchlaufen kann) den Wert Null ansetzt und die zugehörigen Werte der anderen Parameter errechnet. Durch Einsetzen der Parameterwerte in eine der Ebenengleichungen erhält man die Koordinaten eines Punktes der Schnittgeraden. (Man braucht also eigentlich nur noch für eine Ebenengleichung den anderen, nicht gleich Null gesetzten Parameter aus dem Gleichungssystem auszurechnen.)

Wird die Koordinatendarstellung der Ebenen verwendet, so erhält man aus dem Gleichungssystem der beiden Ebenengleichungen den Durchstoßpunkt der Schnittgeraden durch die $x;y$-Ebene, indem man $z = 0$ setzt und den x- und y-Wert aus

$$A_1 x + B_1 y + D_1 = 0$$

$$A_2 x + B_2 y + D_2 = 0$$

errechnet.

Man kann natürlich auch im System der beiden Ebenengleichungen y oder x gleich Null setzen und dann aus dem Gleichungssystem mit zwei Unbekannten die Koordinaten des Durchstoßpunktes der Geraden durch die $x;z$- oder $y;z$-Ebene ausrechnen. Mittels eines auf diesem Wege ermittelten Punktes P_0 und des Richtungsvektors $\mathfrak{a}$ kann die Gleichung der Schnittgeraden in der Form $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_0 + \lambda \mathfrak{a}$ aufgestellt werden.

b) Bestimmt man auf dem zuletzt angegebenen Weg zwei Punkte P_1 und P_2 der Schnittgeraden, so kann deren Gleichung in der Form $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_1 + \lambda(\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_1)$ angesetzt werden.

Ein weiterer möglicher Weg, die Gleichung der Schnittgeraden aufzustellen, ist folgender:

Man benutzt die drei der Vektorgleichung (I) entsprechenden skalaren Gleichungen, um drei der vier Parameter λ_1, μ_1, λ_2 und μ_2 durch ein und denselben vierten darzustellen, und setzt die erhaltenen Ausdrücke in die Parametergleichungen der Ebenen ein. Dadurch erhält man jeweils eine Gleichung mit nur noch einem Parameter, also eine Geradengleichung. Diese ist die Gleichung der Schnittgeraden. (Auch hier genügt es natürlich, wenn man eine der beiden Ebenengleichungen verwendet.)

BEISPIELE

2. Wie heißt die Gleichung der Schnittgeraden der Ebenen

$$E_1\colon\ 3x - 2y + z - 5 = 0; \quad E_2\colon\ 2x - y + 4z + 2 = 0?$$

Lösung: Man ermittelt mittels der beiden Normalenvektoren den auf diesen senkrecht stehenden Richtungsvektor der Schnittgeraden sowie einen Punkt der Schnittgeraden.

$$\mathfrak{n}_1 = 3\mathfrak{i} - 2\mathfrak{j} + \mathfrak{k}; \quad \mathfrak{n}_2 = 2\mathfrak{i} - \mathfrak{j} + 4\mathfrak{k};$$

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{n}_1 \times \mathfrak{n}_2 = -7\mathfrak{i} - 10\mathfrak{j} + \mathfrak{k}; \quad P_0(-9; -16; 0).$$

Damit erhält man als Gleichung der Schnittgeraden

$$\underline{\underline{\mathfrak{r} = -9\mathfrak{i} - 16\mathfrak{j} + \lambda(-7\mathfrak{i} - 10\mathfrak{j} + \mathfrak{k}).}}$$

3. Die Schnittgerade der Ebenen E_1: $\mathfrak{r} = 3\mathfrak{i} + 2\mathfrak{j} - \mathfrak{k} + \lambda_1(\mathfrak{i} - 2\mathfrak{j} + 2\mathfrak{k}) + \mu_1(3\mathfrak{i} - 4\mathfrak{j} + 4\mathfrak{k})$ und E_2: $\bar{\mathfrak{r}} = 2\mathfrak{i} + \mathfrak{j} - 6\mathfrak{k} + \lambda_2(-\mathfrak{i} - 3\mathfrak{j} + \mathfrak{k}) + \mu_2(-\mathfrak{i} - 2\mathfrak{j} + 2\mathfrak{k})$ ist zu bestimmen.

Lösung:

1. Weg: Die Normalvektoren der beiden Ebenen sind

$$\mathfrak{n}_1 = (\mathfrak{i} - 2\mathfrak{j} + 2\mathfrak{k}) \times (3\mathfrak{i} - 4\mathfrak{j} + 4\mathfrak{k}) = 2\mathfrak{j} + 2\mathfrak{k}$$

$$\mathfrak{n}_2 = (-\mathfrak{i} - 3\mathfrak{j} + \mathfrak{k}) \times (-\mathfrak{i} - 2\mathfrak{j} + 2\mathfrak{k}) = -4\mathfrak{i} + \mathfrak{j} - \mathfrak{k}.$$

Daraus ergibt sich der Richtungsvektor der Schnittgeraden

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{n}_1 \times \mathfrak{n}_2 = -4\mathfrak{i} - 8\mathfrak{j} + 8\mathfrak{k}$$

oder vereinfacht

$$\mathfrak{a}' = \mathfrak{i} + 2\mathfrak{j} - 2\mathfrak{k}.$$

$\mathfrak{r} = \bar{\mathfrak{r}}$ liefert die Vektorgleichung

$$-\mathfrak{i} - \mathfrak{j} - 5\mathfrak{k} = \lambda_1(\mathfrak{i} - 2\mathfrak{j} + 2\mathfrak{k}) + \mu_1(3\mathfrak{i} - 4\mathfrak{j} + 4\mathfrak{k})$$
$$-\lambda_2(-\mathfrak{i} - 3\mathfrak{j} + \mathfrak{k}) - \mu_2(-\mathfrak{i} - 2\mathfrak{j} + 2\mathfrak{k}).$$

Aus den zugehörigen drei skalaren Gleichungen erhält man mit $\mu_1 = 0$ gesetzt: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -3$, $\mu_2 = 3$.
Durch Einsetzen von λ_1 und μ_1 in die Gleichung für E_1 (oder von λ_2 und μ_2 in die Gleichung für E_2) bekommt man als Punkt der Schnittgeraden $P_0(2; 4; -3)$.
Somit lautet die Gleichung der Schnittgeraden

$$\underline{\underline{\mathfrak{r}_s = 2\mathfrak{i} + 4\mathfrak{j} - 3\mathfrak{k} + \lambda_s(\mathfrak{i} + 2\mathfrak{j} - 2\mathfrak{k}).}}$$

2. Weg: Die Gleichung der Schnittgeraden erhält man direkt (nur der Richtungsvektor kann sich um einen Zahlenfaktor unterscheiden), wenn man aus den drei skalaren Gleichungen beispielsweise λ_2 und μ_2 eliminiert und die entstehende Gleichung

$$2\lambda_1 + 5\mu_1 = -2$$

verwendet, um λ_1 durch μ_1 (oder umgekehrt) in der Gleichung für E_1 zu ersetzen. Die nur noch einen Parameter enthaltende Gleichung ist die obenstehende Gleichung der Schnittgeraden. Dieser Weg ist mit geringerem Rechenaufwand verbunden.

AUFGABEN

1051. Aus Formel (222) soll die Bedingung für den Schnitt zweier Geraden im Raum hergeleitet werden.

1052. Warum versagt Formel (222), wenn die beiden Geraden einander parallel sind?

1053. Es sollen der Schnittwinkel und die Gleichung der Schnittgeraden der durch die Punkte $P_1(1;2;3)$, $P_2(2;3;1)$, $P_3(-3;0;2)$ und $Q_1(3;2;1)$, $Q_2(-1;-2;-3)$, $Q_3(0;1;2)$ bestimmten Ebenen ermittelt werden.

1054. Es soll der Abstand der durch die Punkte P_1 und P_2 der Aufgabe 1053 gehenden Geraden von der Geraden durch Q_1 und Q_2 bestimmt werden.

1055. Eine Ebene schneidet die Koordinatenachsen in $x = 2$, $y = 3$, $z = -1$. Eine zweite Ebene schneidet die x-Achse in $x = -1$, die y-Achse in $y = 1$ und steht auf der ersten Ebene senkrecht. Der Schnittpunkt der zweiten Ebene mit der z-Achse und die Gleichung der Schnittgeraden der beiden Ebenen sind zu ermitteln.

42. Mehrfache Produkte von Vektoren

42.1. Möglichkeiten der Produktbildung

Die multiplikative Verknüpfung zweier Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ kann als

Skalarprodukt $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$

oder als

Vektorprodukt $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$

erfolgen.
Da das Ergebnis einer skalaren Multiplikation ein Skalar ist, erfordern Produktbildungen mehrerer Vektoren, sofern sie auf neue Formen führen sollen, als ersten Schritt eine vektorielle Multiplikation.
Demnach interessieren bei drei Faktoren nur

das gemischte Produkt (auch Spatprodukt genannt) $$(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \cdot \mathfrak{c} \tag{I}$$

und das vektorielle Produkt dreier Vektoren (auch vektorielles Tripelprodukt genannt) $$(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \times \mathfrak{c}. \tag{II}$$

Bei vier Faktoren können folgende Verknüpfungen auftreten, die keine skalaren Zwischenprodukte nach dem ersten Schritt liefern:

$$(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \cdot (\mathfrak{c} \times \mathfrak{d}) \tag{III}$$

$$(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \times (\mathfrak{c} \times \mathfrak{d}) \tag{IV}$$

$$[(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \times \mathfrak{c}] \cdot \mathfrak{d} \tag{V}$$

$$[(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \times \mathfrak{c}] \times \mathfrak{d} \tag{VI}$$

Im folgenden wird gezeigt werden, daß die Produkte (III) ... (VI) und auch Produkte von mehr als vier Faktoren sich auf Produkte der Form (I) und (II) sowie einfache Skalar- und Vektorprodukte zurückführen lassen.

42.2. Gemischtes Produkt

Das gemischte Produkt $(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \cdot \mathfrak{c}$ besitzt eine anschauliche geometrische Deutung. $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ ist ein Vektor, der auf $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ senkrecht steht und dessen Betrag den Flächeninhalt des von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ aufgespannten Parallelogramms angibt(Bild 321).
Setzt man

$$\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} = \mathfrak{A},$$

so wird

$$(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{c}.$$

Im Skalarprodukt $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{c}$ kann aber $\mathfrak{c}$ durch seine Komponente $\mathfrak{c}_{\mathfrak{A}}$ ersetzt werden, ohne daß sich der Wert des Skalarproduktes ändert. Da $\mathfrak{A} \parallel \mathfrak{c}_{\mathfrak{A}}$, ist

$$\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{c}_{\mathfrak{A}} = \pm |\mathfrak{A}| \cdot |\mathfrak{c}_{\mathfrak{A}}|.$$

$|\mathfrak{c}_{\mathfrak{A}}|$ stellt in dem von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ aufgespannten Spat die Höhe dar. Das gemischte Produkt gibt demnach das *Volumen V des Spates* an. Es heißt deshalb auch *Spatprodukt*. Es ist also

$$\boxed{(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \cdot \mathfrak{c} = V} \tag{223}$$

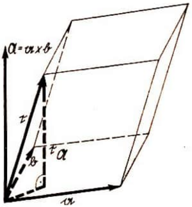


Bild 321

V ist je nach der Orientierung der drei Vektoren positiv oder negativ. Bilden $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ ein Rechtssystem, so ergibt sich ein positiver Wert des Spatproduktes, bei einem Linkssystem erhält man einen negativen Wert für V.
Da sich das gleiche Volumen ergibt, wenn man das durch $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ oder das durch $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{a}$ aufgespannte Parallelogramm als Grundfläche nimmt, muß gelten

$$\boxed{(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b})\mathfrak{c} = (\mathfrak{b} \times \mathfrak{c})\mathfrak{a} = (\mathfrak{c} \times \mathfrak{a})\mathfrak{b}} \tag{224a}$$

Ändert man die Reihenfolge so, daß ein Linkssystem entsteht, so muß auch das Vorzeichen wechseln:

$$\boxed{(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b})\mathfrak{c} = -(\mathfrak{b} \times \mathfrak{a})\mathfrak{c} = -(\mathfrak{c} \times \mathfrak{b})\mathfrak{a} = -(\mathfrak{a} \times \mathfrak{c})\mathfrak{b}} \tag{224b}$$

Da für das skalare Produkt das Kommutationsgesetz gilt, kann man für die erste Gleichung in Formel (224a) auch

$$\boxed{(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b})\mathfrak{c} = \mathfrak{a}(\mathfrak{b} \times \mathfrak{c})} \tag{225}$$

schreiben. Wie man erkennt, ist es im Spatprodukt erlaubt, Punkt und Kreuz miteinander zu vertauschen. Man hat deshalb für das Spatprodukt in TGL 0—1303 das Symbol $[\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}]$ zugelassen.

Für das Spatprodukt dreier Ortsvektoren $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$ und $\mathfrak{r}_3$ erhält man zunächst

$$\mathfrak{r}_1 \times \mathfrak{r}_2 = \begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \mathfrak{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \mathfrak{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \mathfrak{k}$$

und daraus

$$(\mathfrak{r}_1 \times \mathfrak{r}_2) \cdot \mathfrak{r}_3 = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} x_3 - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} y_3 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} z_3.$$

Dieses ist aber eine nach den Elementen x_3, y_3 und z_3 entwickelte dreireihige Determinante, so daß folgt

$$\boxed{(\mathfrak{r}_1 \times \mathfrak{r}_2)\mathfrak{r}_3 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}} \qquad (226)$$

Neben der Volumenberechnung eines Spates besitzt das Spatprodukt weitere Anwendungsmöglichkeiten in der analytischen Geometrie des Raumes.
Bekanntlich ist das Volumen eines Tetraeders ein Drittel von dem eines Prismas und dessen Volumen wiederum die Hälfte vom Volumen eines Spates. Für ein *Tetraeder* mit den Eckpunkten O, P_1, P_2 und P_3 gilt deshalb

$$V_{\mathrm{T}} = \frac{1}{6}\,(\mathfrak{r}_1 \times \mathfrak{r}_2)\mathfrak{r}_3.$$

Ein Spatprodukt kann den Wert Null annehmen, wenn entweder einer der Vektoren Nullvektor ist, oder wenn die drei Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ komplanar sind; denn dann steht $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ auf $\mathfrak{c}$ senkrecht, und die Projektion von $\mathfrak{c}$ auf $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$, also die Höhe des Spates, ist Null.

$$\boxed{(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b})\mathfrak{c} = 0} \qquad (227)$$

ist demnach die Bedingung dafür, daß *drei Vektoren komplanar* sind.
Ist z. B. P ein beliebiger Punkt der durch P_1, P_2 und P_3 bestimmten Ebene, so müssen $\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_1$ und $\mathfrak{r}_3 - \mathfrak{r}_1$ Vektoren in dieser Ebene sein. Auf sie kann die Formel (227) angewendet werden.
Es gilt dann $[(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_1) \times (\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_1)] \cdot (\mathfrak{r}_3 - \mathfrak{r}_1) = 0$,

bzw. $$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Durch Rändern (vgl. 40.3.) kann man hieraus die vierreihige Determinante

$$\boxed{\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0} \tag{228}$$

gewinnen. Durch Entwickeln dieser Determinante nach den Elementen der ersten Zeile erhält man die Gleichung der Ebene durch drei Punkte P_1, P_2 und P_3 (die nicht in einer Geraden liegen).
Auch der Schnittpunkt dreier Ebenen läßt sich mittels Spatprodukte ermitteln.
Sind drei Ebenen

$$\begin{aligned} E_1&: \; A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ E_2&: \; A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \\ E_3&: \; A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0 \end{aligned}$$

gegeben, so kann man diese drei skalaren Gleichungen zu einer Vektorgleichung

$$\mathfrak{A}x + \mathfrak{B}y + \mathfrak{C}z + \mathfrak{D} = \mathfrak{o} \tag{I}$$

mit $\mathfrak{A} = A_1\mathfrak{i} + A_2\mathfrak{j} + A_3\mathfrak{k}$, $\mathfrak{B} = B_1\mathfrak{i} + B_2\mathfrak{j} + B_3\mathfrak{k}$, $\mathfrak{C} = C_1\mathfrak{i} + C_2\mathfrak{j} + C_3\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{D} = D_1\mathfrak{i} + D_2\mathfrak{j} + D_3\mathfrak{k}$ zusammenfassen.
Da drei Ebenen im allgemeinen Fall nur einen Punkt, nämlich ihren Schnittpunkt, gemeinsam haben, gilt Gleichung (I) für diesen. Multipliziert man Gleichung (I) skalar mit $\mathfrak{B} \times \mathfrak{C}$, so erhält man

$$(\mathfrak{B} \times \mathfrak{C})\mathfrak{A} \cdot x + (\mathfrak{B} \times \mathfrak{C})\mathfrak{B} \cdot y + (\mathfrak{B} \times \mathfrak{C})\mathfrak{C} \cdot z + (\mathfrak{B} \times \mathfrak{C})\mathfrak{D} = 0. \tag{II}$$

$(\mathfrak{B} \times \mathfrak{C})\mathfrak{B}$ und $(\mathfrak{B} \times \mathfrak{C})\mathfrak{C}$ sind Spatprodukte komplanarer Vektoren und demnach gleich Null.
Gleichung (II) nach x aufgelöst ergibt

$$x = -\frac{(\mathfrak{B} \times \mathfrak{C})\mathfrak{D}}{(\mathfrak{B} \times \mathfrak{C})\mathfrak{A}} = -\frac{\mathfrak{D}(\mathfrak{B} \times \mathfrak{C})}{\mathfrak{A}(\mathfrak{B} \times \mathfrak{C})} = -\frac{[\mathfrak{D}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}]}{[\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}]}.$$

In gleicher Weise bekommt man nach skalarer Multiplikation von Gleichung (I) mit $\mathfrak{C} \times \mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ die Koordinate y bzw. z des Schnittpunktes. Die Koordinaten des Schnittpunktes dreier Ebenen sind

$$\boxed{x = -\frac{[\mathfrak{D}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}]}{[\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}]}; \quad y = -\frac{[\mathfrak{A}\,\mathfrak{D}\,\mathfrak{C}]}{[\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}]}; \quad z = -\frac{[\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{D}]}{[\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}]}} \tag{229}$$

AUFGABEN

1056. Die Gleichungen der Ebenen der Aufgabe 1053 sind mittels Formel (228) zu bestimmen.

1057. Das Volumen des Tetraeders der Aufgabe 1017 ist zu berechnen.

1058. In welchem Punkt durchstößt die z-Achse die durch die Punkte $P_1(2; 1; -2)$, $P_2(-3; 2; -1)$ und $P_3(-1; -2; 3)$ bestimmte Ebene?

1059. Wann versagt Formel (229)? Welche Schlußfolgerungen können dann gezogen werden?

42.3. Vektorielles Produkt dreier Vektoren

Im Gegensatz zu den bisher behandelten Produkten von Vektoren besitzt das vektorielle Produkt dreier Vektoren keine anschauliche geometrische oder physikalische Deutung.
$(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \times \mathfrak{c}$ liefert einen Vektor, der mit $\mathfrak{x}$ bezeichnet werden soll. Es sei $(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) = \mathfrak{f}$. Der Vektor $\mathfrak{f}$ steht senkrecht auf der Ebene von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{x} = (\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \times \mathfrak{c} = \mathfrak{f} \times \mathfrak{c}$ senkrecht auf der Ebene von $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{c}$. Damit liegt $\mathfrak{x}$ wieder in der Ebene von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ (Bild 322).
Da der Vektor $\mathfrak{x}$ in der gleichen Ebene wie $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ liegt, muß er in Richtung der Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ zerlegt werden können, oder anders ausgedrückt, zwischen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{x}$ muß eine lineare Beziehung von der Form

$$\mathfrak{x} = \lambda \mathfrak{a} + \mu \mathfrak{b} \tag{I}$$

bestehen.
Die Bestimmung der skalaren Faktoren λ und μ in Gl. (I) ist sehr kompliziert. Sie soll deshalb hier unter Zugrundelegen eines Koordinatensystems durchgeführt werden. Legt man die x-Achse in Richtung des Vektors $\mathfrak{a}$ und die y-Achse in die Ebene der Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, so lautet die Koordinatendarstellung

$$\begin{aligned} \mathfrak{a} &= a_x \mathfrak{i} \\ \mathfrak{b} &= b_x \mathfrak{i} + b_y \mathfrak{j} \\ \mathfrak{c} &= c_x \mathfrak{i} + c_y \mathfrak{j} + c_z \mathfrak{k}. \end{aligned}$$

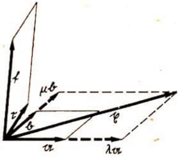


Bild 322

Dann wird

$$\mathfrak{f} = \mathfrak{a} \times \mathfrak{b} = \begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ a_x & 0 & 0 \\ b_x & b_y & 0 \end{vmatrix} = a_x b_y \mathfrak{k}$$

und

$$\mathfrak{x} = (\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \times \mathfrak{c} = \mathfrak{f} \times \mathfrak{c} = \begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ 0 & 0 & a_x b_y \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = -a_x b_y c_y \mathfrak{i} + a_x b_y c_x \mathfrak{j}. \tag{II}$$

(Man erkennt, daß der Vektor $\mathfrak{x}$ wieder in der x;y-Ebene liegt, also mit $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ komplanar ist.)
Durch Koeffizientenvergleich der Gleichungen (I) und (II) können nun λ und μ bestimmt werden

$$\begin{aligned} \lambda a_x + \mu b_x &= -a_x b_y c_y \\ \mu b_y &= a_x b_y c_x \end{aligned}$$

Man erhält

$$\begin{aligned} \lambda &= -(b_x c_x + b_y c_y) \\ \mu &= a_x c_x . \end{aligned}$$

Dafür kann man die Skalarprodukte der Vektoren $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$, bzw. $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{c}$ schreiben:

$$\lambda = -\mathfrak{b}\mathfrak{c} \qquad \mu = \mathfrak{a}\mathfrak{c}.$$

Nach Einsetzen in Gleichung (I) bekommt man eine wichtige Beziehung:

Entwicklungssatz

$$\boxed{\mathfrak{x} = (\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \times \mathfrak{c} = (\mathfrak{a}\mathfrak{c})\mathfrak{b} - (\mathfrak{b}\mathfrak{c})\mathfrak{a}} \tag{230}$$

Der Entwicklungssatz besitzt deshalb besonders große Bedeutung, weil er es ermöglicht, mehrfache Produkte Schritt für Schritt auf einfachere Produkte zurückzuführen.

Für den nach (230) errechneten Vektor $\mathfrak{x}$ kann die Probe durchgeführt werden: wegen $\mathfrak{x} \perp \mathfrak{c}$ muß $\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{c} = 0$ gelten.

Mit Hilfe des Entwicklungssatzes kann die Zerlegung eines Vektors $\mathfrak{b}$ in Parallel- und Normalkomponente bezüglich eines Vektors $\mathfrak{a}$ erfolgen. Für das Produkt $(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \times \mathfrak{a}$ ergibt sich nach (230)

$$(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \times \mathfrak{a} = (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a})\mathfrak{b} - (\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{a})\mathfrak{a}.$$

Die Auflösung dieser Gleichung nach $\mathfrak{b}$ liefert die *Zerlegung des Vektors* $\mathfrak{b}$ *in Parallel- und Normalkomponente zu* $\mathfrak{a}$

$$\boxed{\mathfrak{b} = \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}{a^2}\,\mathfrak{a} + \frac{1}{a^2}\,(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \times \mathfrak{a}} \tag{231}$$

$\dfrac{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}{a^2}\,\mathfrak{a}$ hat die Richtung von $\mathfrak{a}$, $\dfrac{1}{a^2}\,(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \times \mathfrak{a}$ steht senkrecht auf $\mathfrak{a}$, denn $\mathfrak{a}$ ist ein Faktor des Vektorproduktes. Die beiden Summanden stellen also $\mathfrak{b}_\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}'_\mathfrak{a}$ dar.

Die Nachprüfung einer rechnerisch durchgeführten Zerlegung kann durch Bilden des Skalarproduktes von Parallel- und Normalkomponenten erfolgen. Wegen $\mathfrak{b}_\mathfrak{a} \perp \mathfrak{b}'_\mathfrak{a}$ muß $\mathfrak{b}_\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}'_\mathfrak{a} = 0$ sein.

AUFGABEN

1060. Das vektorielle Produkt der Vektoren $\mathfrak{a} = 2\mathfrak{i} - \mathfrak{j}$, $\mathfrak{b} = 2\mathfrak{j} + 3\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{c} = 3\mathfrak{i} - \mathfrak{k}$ soll berechnet werden.

1061. Parallel- und Normalkomponente des Vektors $\mathfrak{b} = 3\mathfrak{i} - 2\mathfrak{j} + \mathfrak{k}$ bezüglich a) $\mathfrak{a} = 2\mathfrak{i} - 7\mathfrak{j} + \mathfrak{k}$, b) $\mathfrak{a} = \mathfrak{j} + 2\mathfrak{k}$ sind zu bestimmen.

42.4. Produkte von vier Vektoren

Wie in 42.1. dargelegt wurde, sind mehrfache Produkte von Vektoren nur dann sinnvoll, wenn als erster Schritt jeweils eine vektorielle Multiplikation durchzuführen ist. Als mögliche Produkte von vier Vektoren wurden dort aufgeführt

$$(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \cdot (\mathfrak{c} \times \mathfrak{d}) \quad \text{(III)} \qquad (\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \times (\mathfrak{c} \times \mathfrak{d}) \quad \text{(IV)}$$

$$[(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \times \mathfrak{c}] \cdot \mathfrak{d} \quad \text{(V)} \qquad [(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \times \mathfrak{c}] \times \mathfrak{d}. \quad \text{(VI)}$$

Das Produkt (V) kann auf das Spatprodukt $(\mathfrak{f} \times \mathfrak{c}) \cdot \mathfrak{d}$ zurückgeführt werden, wenn als erster Schritt $\mathfrak{f} = \mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ berechnet wird. Auf die drei anderen Produkte kann der Entwicklungssatz (230) angewendet werden.

Das skalare Produkt zweier Vektorprodukte

Setzt man in $(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \cdot (\mathfrak{c} \times \mathfrak{d})$ zunächst $\mathfrak{c} \times \mathfrak{d} = \mathfrak{g}$, so kann in $(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \cdot \mathfrak{g}$ gemäß (225) vektorielle und skalare Multiplikation miteinander vertauscht werden:

$$(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \cdot \mathfrak{g} = \mathfrak{a}(\mathfrak{b} \times \mathfrak{g}) = \mathfrak{a}[\mathfrak{b} \times (\mathfrak{c} \times \mathfrak{d})].$$

Auf

$$\mathfrak{b} \times (\mathfrak{c} \times \mathfrak{d}) = -(\mathfrak{c} \times \mathfrak{d}) \times \mathfrak{b}$$

den Entwicklungssatz (230) angewendet, ergibt

$$\mathfrak{b} \times (\mathfrak{c} \times \mathfrak{d}) = (\mathfrak{b}\mathfrak{d})\mathfrak{c} - (\mathfrak{b}\mathfrak{c})\mathfrak{d}.$$

Multipliziert man noch skalar mit $\mathfrak{a}$, so erhält man

$$(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \cdot (\mathfrak{c} \times \mathfrak{d}) = \mathfrak{a}[\mathfrak{b} \times (\mathfrak{c} \times \mathfrak{d})] = (\mathfrak{a}\mathfrak{c})(\mathfrak{b}\mathfrak{d}) - (\mathfrak{a}\mathfrak{d})(\mathfrak{b}\mathfrak{c}).$$

Den rechts stehenden Term kann man als zweireihige Determinante schreiben. Damit wird

$$\boxed{(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \cdot (\mathfrak{c} \times \mathfrak{d}) = \begin{vmatrix} \mathfrak{a}\mathfrak{c} & \mathfrak{a}\mathfrak{d} \\ \mathfrak{b}\mathfrak{c} & \mathfrak{b}\mathfrak{d} \end{vmatrix}} \tag{232}$$

Das vektorielle Produkt zweier Vektorprodukte

Setzt man in $(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \times (\mathfrak{c} \times \mathfrak{d})$

$$\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} = \mathfrak{f} \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{c} \times \mathfrak{d} = \mathfrak{g},$$

so ergibt sich nach (230)

$$\begin{aligned} \mathfrak{f} \times (\mathfrak{c} \times \mathfrak{d}) &= (\mathfrak{f}\mathfrak{d})\mathfrak{c} - (\mathfrak{f}\mathfrak{c})\mathfrak{d} & \text{bzw.} \quad (\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \times \mathfrak{g} &= (\mathfrak{a}\mathfrak{g})\mathfrak{b} - (\mathfrak{b}\mathfrak{g})\mathfrak{a} = \\ &= [(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b})\mathfrak{d}]\mathfrak{c} - [(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b})\mathfrak{c}]\mathfrak{d} & &= \mathfrak{a}[(\mathfrak{c} \times \mathfrak{d})]\mathfrak{b} - [\mathfrak{b}(\mathfrak{c} \times \mathfrak{d})]\mathfrak{a} = \\ &= [\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{d}]\mathfrak{c} - [\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}]\mathfrak{d} & &= [\mathfrak{a}\mathfrak{c}\mathfrak{d}]\mathfrak{b} - [\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}]\mathfrak{a} \end{aligned}$$

Also ist

$$\boxed{\begin{aligned} (\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \times (\mathfrak{c} \times \mathfrak{d}) &= [\mathfrak{a}\mathfrak{c}\mathfrak{d}]\mathfrak{b} - [\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}]\mathfrak{a} = \\ &= [\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{d}]\mathfrak{c} - [\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}]\mathfrak{d} \end{aligned}} \tag{233}$$

Aus der Gleichung (233) folgt

$$\boxed{\mathfrak{a}[\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}] - \mathfrak{b}[\mathfrak{a}\mathfrak{c}\mathfrak{d}] + \mathfrak{c}[\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{d}] - \mathfrak{d}[\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}] = 0} \tag{233a}$$

oder in Determinantenschreibweise

$$\boxed{\begin{vmatrix} \mathfrak{a} & a_x & a_y & a_z \\ \mathfrak{b} & b_x & b_y & b_z \\ \mathfrak{c} & c_x & c_y & c_z \\ \mathfrak{d} & d_x & d_y & d_z \end{vmatrix} = 0} \tag{233b}$$

Die Übereinstimmung von (233a) und (233b) kann durch Entwickeln der vierreihigen Determinante nach den Elementen der ersten Spalte und Verwendung der Formel (226) nachgeprüft werden. Gleichung (233) stellt, da alle Spatprodukte Skalare ergeben, eine lineare Beziehung zwischen den vier Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{d}$ dar. Wendet man auf die Spatprodukte noch die Beziehung (224a) und (224b) an und löst (233a) nach $\mathfrak{d}$ auf, so erhält man die Zerlegung des Vektors $\mathfrak{d}$ nach den Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$:

$$\boxed{\mathfrak{d} = \frac{\mathfrak{a}[\mathfrak{d}\mathfrak{b}\mathfrak{c}] + \mathfrak{b}[\mathfrak{a}\mathfrak{d}\mathfrak{c}] + \mathfrak{c}[\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{d}]}{[\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}]}} \tag{234}$$

Dieser Ausdruck ist insofern recht übersichtlich, als im Zähler der zu zerlegende Vektor $\mathfrak{d}$ der Reihe nach $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ aus dem Spatprodukt $[\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}]$ verdrängt hat.

Das vektorielle Produkt von vier Vektoren

Im Vektorprodukt $[(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \times \mathfrak{c}] \times \mathfrak{d}$ kann zunächst nach (230)

$$(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \times \mathfrak{c} = (\mathfrak{a}\mathfrak{c})\mathfrak{b} - (\mathfrak{b}\mathfrak{c})\mathfrak{a}$$

errechnet werden. Wegen des Distributionsgesetzes (218) wird dann

$$[(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \times \mathfrak{c}] \times \mathfrak{d} = (\mathfrak{a}\mathfrak{c})\,(\mathfrak{b} \times \mathfrak{d}) - (\mathfrak{b}\mathfrak{c})\,(\mathfrak{a} \times \mathfrak{d}).$$

Setzt man erst $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} = \mathfrak{f}$, so folgt nach (230)

$$[(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \times \mathfrak{c}] \times \mathfrak{d} = [\mathfrak{f} \times \mathfrak{c}] \times \mathfrak{d} = (\mathfrak{f}\mathfrak{d})\mathfrak{c} - (\mathfrak{c}\mathfrak{d})\mathfrak{f} = [\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{d}]\mathfrak{c} - (\mathfrak{c}\mathfrak{d})\,(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}).$$

Es ist also

$$\boxed{\begin{aligned} [(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \times \mathfrak{c}] \times \mathfrak{d} &= (\mathfrak{a}\mathfrak{c})\,(\mathfrak{b} \times \mathfrak{d}) - (\mathfrak{b}\mathfrak{c})\,(\mathfrak{a} \times \mathfrak{d}) \\ &= [\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{d}]\mathfrak{c} - (\mathfrak{c}\mathfrak{d})\,(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \end{aligned}} \tag{235}$$

AUFGABEN

1062. Der Vektor $\mathfrak{x} = 0{,}5\mathfrak{i} - \mathfrak{j} - \mathfrak{k}$ soll mittels Formel (234) in Komponenten längs der Vektoren $\mathfrak{a} = \mathfrak{i} + 2\mathfrak{j} - \mathfrak{k}$, $\mathfrak{b} = 2\mathfrak{i} - \mathfrak{j} - 3\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{c} = 3\mathfrak{i} - 3\mathfrak{j} - 3\mathfrak{k}$ zerlegt werden.

1063. Welche der folgenden Produkte sind sinnvoll und können demnach gebildet werden und welche nicht? Man versuche, die sinnvollen Produktbildungen anschaulich zu deuten.

a) $a \cdot \mathfrak{b}$	b) $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$	c) $a \times \mathfrak{b}$	d) $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$
e) $a \times b$	f) $a \cdot (\mathfrak{b} \times \mathfrak{c})$	g) $\mathfrak{a} \cdot (\mathfrak{b} \times \mathfrak{c})$	h) $\mathfrak{a} \times (\mathfrak{b} \times \mathfrak{c})$
i) $\mathfrak{a} \times (b \cdot \mathfrak{c})$	k) $\mathfrak{a} \times (b \times \mathfrak{c})$	l) $\mathfrak{a} \cdot (\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c})$	m) $\mathfrak{a} \cdot (b \cdot \mathfrak{c})$

43. Vektorielle Darstellung von Kurven und Flächen im Raum

Wie in 26.3.2. gezeigt wurde, kann bei der analytischen Darstellung einer Funktion oder in der Gleichung einer Kurve die Zuordnung über eine Hilfsvariable t, den *Parameter*, erfolgen.
Jedem Parameterwert $t \in T$ wird durch

$$x = x(t) \quad (x \in X) \tag{I}$$

und

$$y = y(t) \quad (y \in Y) \tag{II}$$

ein Wertepaar $(x; y)$ und damit ein Punkt der $x; y$-Ebene zugeordnet. Der Parameter t kann z. B. ein Winkel oder auch eine Zeit sein, er muß aber nicht eine eigene Bedeutung besitzen.
Ordnet man noch eine dritte Variable z durch

$$z = z(t) \quad (z \in Z) \tag{III}$$

dem jeweiligen Parameterwert zu, so ist durch die Gleichungen (I) ... (III) eine Teilmenge der Punkte des Raumes bestimmt. Zu einem Wertetripel

$$x_0 = x(t_0);\ y_0 = y(t_0);\ z_0 = z(t_0)$$

gibt es einen Punkt P_0 des Raumes, der bei Zugrundelegen eines Koordinatensystems auch durch einen Ortsvektor $\mathfrak{r}_0$ bestimmt ist:

$$\mathfrak{r}_0 = x_0\mathfrak{i} + y_0\mathfrak{j} + z_0\mathfrak{k} = x(t_0)\mathfrak{i} + y(t_0)\mathfrak{j} + z(t_0)\mathfrak{k}.$$

Dieser Ortsvektor ist dem Parameterwert t_0 zugeordnet.
Sind x, y und z ein und demselben Parameter t zugeordnet, so durchläuft bei Änderung des Parameterwertes t die Spitze eines ihm zugeordneten Vektors $\mathfrak{r}$ eine Raumkurve, $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(t)$ ist eine Vektorfunktion des Parameters t:

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(t) = x(t)\mathfrak{i} + y(t)\mathfrak{j} + z(t)\mathfrak{k}.$$

Auch der Vektorgleichung (236) entsprechen wieder drei skalare Gleichungen, die die Koordinatendarstellung der Raumkurve heißen:

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(t) \to \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t). \end{cases}$$

Durch Eliminieren des Parameters aus der Koordinatendarstellung kann man gegebenenfalls die Gleichung der Raumkurve in cartesischen Koordinaten erhalten.
Zur Veranschaulichung des Dargelegten denke man sich einen Beobachter (im Punkt O eines Koordinatensystems), der das Training eines Flugzeuges mit den Augen verfolgt.

Zu verschiedenen Zeiten $t_0, t_1, t_2, \ldots$ erblickt er das Flugzeug in den Punkten P_0, P_1, $P_2, \ldots$ (Bild 323).
Eine einfache Raumkurve, die Gerade, wurde bereits in 39.5. behandelt. Ersetzt man in Gleichung (196) λ durch t, so erhält man

$$\mathfrak{r}(t) = \mathfrak{r}_0 + t\mathfrak{a} = (x_0 + ta_x)\mathfrak{i} + (y_0 + ta_y)\mathfrak{j} + (z_0 + ta_z)\mathfrak{k}$$

bzw. in Koordinatendarstellung

$$x(t) = x_0 + ta_x; \quad y(t) = y_0 + ta_y; \quad z(t) = z_0 + ta_z.$$

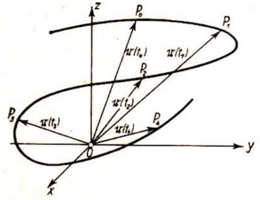


Bild 323

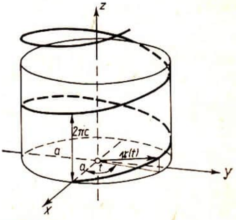


Bild 324

BEISPIELE

1. Welche Raumkurve beschreibt

$$\mathfrak{r}(t) = (a \cos t)\,\mathfrak{i} + (a \sin t)\,\mathfrak{j} + ct\mathfrak{k}?$$

Lösung: Die Koordinatenstellung lautet.

$$x(t) = a \cos t; \quad y(t) = a \sin t; \quad z(t) = ct.$$

$x(t) = a \cos t$ und $y(t) = a \sin t$ ist die Parameterdarstellung eines Kreises in der $x;y$-Ebene. $z(t) = ct$ besagt, daß sich die z-Koordinate proportional dem Parameter t ändert. Wächst t von $0 \ldots 2\pi$, so durchläuft die Projektion der Raumkurve in die $x;y$-Ebene einen Kreis, gleichzeitig hebt sich die Kurve von der $x;y$-Ebene ab und erreicht für $t = 2\pi$ eine Höhe von $2\pi c$ (Bild 324). Die Raumkurve ist eine Schraubenlinie mit der Ganghöhe $2\pi c$, die sich auf dem Mantel eines Zylinders mit dem Radius a befindet.

2. Welche Raumkurve beschreibt

$$\mathfrak{r}(t) = (a \cos t)\,\mathfrak{i} + (b \sin t)\,\mathfrak{j} \pm \left(\sqrt{a^2 - b^2} \sin t\right)\mathfrak{k} \quad \text{mit} \quad a > b > 0, \ 0 \leqq t < 2\pi,$$
$$z(t) \geqq 0?$$

Lösung: Die Projektion in die $x;y$-Ebene ist eine Ellipse mit den Halbachsen a und b, denn $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ ist nach (148) eine Parameterdarstellung der Ellipse.

In der $y;z$-Ebene ergibt sich ein Geradenpaar $z = \dfrac{\pm\sqrt{a^2 - b^2}}{b}\,y$. Die Projektion auf die $x;z$-Ebene ist (wegen $z \geqq 0$) eine Halbellipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{a^2 - b^2} = 1$.

Berechnet man $|\mathfrak{r}(t)| = \sqrt{[x(t)]^2 + [y(t)]^2 + [z(t)]^2} = a$, so erkennt man, daß die Raumkurve auf der Oberfläche einer Kugel mit Radius a liegen muß. Es ist die Schnittkurve eines elliptischen Zylinders[1]) mit einer Halbkugel (Bild 325).

Ist der Ortsvektor $\mathfrak{r}$ zwei skalaren, voneinander unabhängigen Parametern s und t zugeordnet, so beschreibt seine Spitze eine Fläche im Raum: $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(s, t)$. Die Ebene als einfachste Raumfläche ist in vektorieller Darstellung bereits bekannt: $\mathfrak{r}(t) = \mathfrak{r}_0 + s\mathfrak{a} + t\mathfrak{b}$. Die Koordinatendarstellung der Ebene lautet:

$$x(t) = x_0 + sa_x + tb_x, \quad y(t) = y_0 + sa_y + tb_y, \quad z(t) = z_0 + sa_z + tb_z.$$

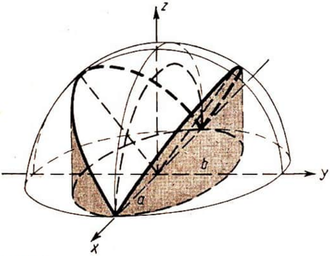


Bild 325

BEISPIEL

3. Welche Fläche im Raum stellt $\mathfrak{r}(t) = (s\cos t)\,\mathfrak{i} + (s\sin t)\,\mathfrak{j} + ct\mathfrak{k}$ mit $0 \leqq s \leqq a$, $0 \leqq t \leqq 2\pi$ dar?

   Lösung: Setzt man $s = \text{const.} = k$, so bekommt man mit $\mathfrak{r}(t) = (k\cos t)\,\mathfrak{i} + (k\sin t)\,\mathfrak{j} + ct\mathfrak{k}$ die Gleichung einer Schraubenlinie (vgl. Beispiel 1).
   Für $t = \text{const.} = k$ erhält man die Raumkurve $\mathfrak{r}(s) = (\cos k)\,s\,\mathfrak{i} + (\sin k)\,s\,\mathfrak{j} + ck\mathfrak{k}$, deren Projektionen in die

   x, y-Ebene Geraden durch den Ursprung,
   x, z-Ebene Geraden parallel zur x-Achse,
   y, z-Ebene Geraden parallel zur y-Achse

   ergeben. Die Raumfläche ist eine Wendelfläche.

AUFGABEN

1064. Welche Raumkurve wird durch $\mathfrak{r}(t) = (a\,t\cos t)\,\mathfrak{i} + (a\,t\sin t)\,\mathfrak{j} + ct\mathfrak{k}$ dargestellt?

1065. Was für eine Fläche im Raum beschreibt

   a) $\mathfrak{r}(s, t) = (a\,s\cos t)\,\mathfrak{i} + (a\,s\sin t)\,\mathfrak{j} + cs\mathfrak{k}$;

   b) $\mathfrak{r}(s, t) = (s\,t\cos t)\,\mathfrak{i} + (s\,t\sin t)\,\mathfrak{j} + ct\mathfrak{k}$?

---

[1]) Ein Zylinder, dessen Grundfläche eine Ellipsenfläche ist

LÖSUNGEN

zu den Aufgaben 1 bis 1065

1. In allen mit Ausnahme von c).

2. Allen mit Ausnahme von c), f) und g).

3. $\{i, l, s, e\}$, $\{i, l, s\}$, $\{i, l, e\}$, $\{i, s, e\}$, $\{l, s, e\}$, $\{i, l\}$, $\{i, s\}$, $\{i, e\}$, $\{l, s\}$, $\{l, e\}$, $\{s, e\}$, $\{i\}$, $\{l\}$, $\{s\}$, $\{e\}$, $\varnothing$.

4. a), b) und d) sind symmetrisch, reflexiv und transitiv. c) ist symmetrisch, aber nicht reflexiv und nicht transitiv.

5.

$A \cap B$		B				
		T	S	R	P	D
A	T	T				
	S	S	S			
	R	R	Q	R		
	P	P	S	R	P	
	D	S	S	Q	S	D

6. a) $\{a, u, t, o, m, s\}$, $\{a, u\}$, $\{t, o\}$.
   b) $\{0, 2, 4, 5, 6, 8, 10, \ldots\}$, $\{0, 10, 20, \ldots\}$, $\{2, 4, 6, 8, 12, \ldots\}$.
   c) Menge aller russisch oder englisch sprechenden Menschen,
   Menge aller russisch und englisch sprechenden Menschen,
   Menge aller russisch sprechenden Menschen, die nicht englisch sprechen.

7. $K \setminus (E \cup U) = (K \setminus E) \setminus U$ 8. $A \cup B \cup C$ 9. $A \cap B \cap C$

10. a) $\varnothing$ b) A c) $\varnothing$ 11. a) A b) A

12. a) Richtig. Transitivität des Enthaltenseins.
    b) Falsch, wenn $a \in B$.
    c) Falsch, wenn $a \notin B$.
    d) Falsch, wenn B echte Teilmenge von A ist.
    e) Falsch. Es folgt nur $A \subset B$.
    f) Richtig. Aus $A \cap B = A \cup B$ folgt $A \subset A \cap B$ und daraus $A \subset B$. Analog ergibt sich $B \subset A$. Also ist $A = B$.

13. a) $a \in B$ b) $a \notin B$ 14. $\varnothing$

15. Zwei elementfremde Mengen (vgl. Aufgabe 14) können nur gleich sein, wenn beide leer sind. $A \setminus B = \varnothing \Rightarrow A \subset B$, $B \setminus A = \varnothing \Rightarrow B \subset A$, $\Rightarrow A = B$.

16. a) $A = B$ [vgl. Aufgabe 12.f)] b) $\Rightarrow A \setminus B = \varnothing \Rightarrow A \subset B$

17. Vgl. Bild 326.

18. Auf beiden Seiten ergibt sich: bei a) $\{g, e, i, s, t, n, l\}$, bei b) $\{e, i, s\}$ und bei c) $\{g, t\}$.

19. a) wenn jeder Studierende genau ein Zimmer bewohnt. (Dabei können mehrere Studenten in demselben Zimmer wohnen.)
    b) wenn jeder Studierende genau ein Zimmer bewohnt und nicht mehrere Studenten das gleiche Zimmer bewohnen.

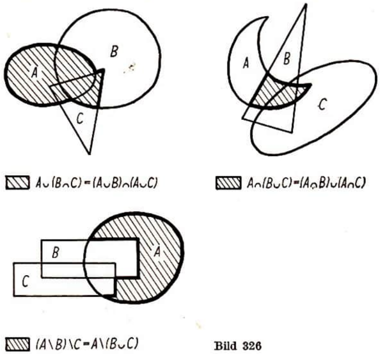


Bild 326

20. Die Abbildung muß eineindeutig sein.

21. Die eineindeutige Zuordnung der Punkte kann etwa wie in Bild 327 geschehen.

22. Ja: Indem man zum Beispiel jeder Zahl der Menge $\{0, 1, 2, \ldots\}$ die um eins größere zuordnet, erhält man eine eineindeutige Abbildung dieser Menge auf ihre echte Teilmenge $\{1, 2, 3, \ldots\}$.

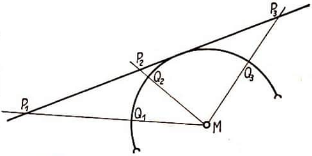


Bild 327

23. Nein. Vgl. Aufgabe 22.

24. Ja 25. $N \setminus \{0\}$

26. Sie ist reflexiv und transitiv, aber nicht symmetrisch.

27. Das Quadrat q der natürlichen Zahl a ist die Elementezahl des aus der endlichen Menge A mit der Elementezahl a gebildeten Mengenprodukts $A \times A$:

$$\begin{aligned} Q &= A \times A, \\ q &= a^2. \end{aligned}$$

28. Rechts steht die Zahl, die zu ac addiert ab ergibt. Es ist zu prüfen, ob die linke Seite ebenfalls diese Bedingung erfüllt:

$$\begin{aligned} a(b-c) + ac &= a[(b-c) + c] \qquad \text{(Distributionsgesetz)} \\ &= ab; \end{aligned}$$

denn $b - c$ ist die Zahl, die zu c addiert b ergibt.

29. $$\begin{aligned} (a+b)(a-b) &= (a-b)(a+b) && \text{(Kommutationsgesetz)} \\ &= (a-b)\,a + (a-b)\,b && \text{(Distributionsgesetz)} \\ &= a(a-b) + b(a-b) && \text{(Kommutationsgesetz)} \\ &= a^2 - ab + ba - b^2 && \text{(Regel aus Aufgabe 28)} \\ &= a^2 - b^2 && \text{(Kommutationsgesetz).} \end{aligned}$$

30. a) Vereinigung und Durchschnitt,
b) Vereinigung und Durchschnitt.

31. Reflexiv, transitiv, aber nicht symmetrisch.

32. Die eineindeutige Abbildung wird durch die Zuordnung $n \to 2n$ $(n \in N)$ bewirkt.

33.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	2	2	3	2	4	2	4	3	4	2	6	2	4	4	5	2	6	2	6

34. Der Fehler liegt in der stillschweigenden Voraussetzung, daß es eine größte natürliche Zahl gäbe.

35. a) L00 0LL b) L LLL LL0 c) L 0L0 000 d) L0 000 000 000

36. a) 17 b) 85 c) 127 d) 365

37. Die zu übertragende Dezimalzahl wird rechts in die unterste Zeile geschrieben. Ist die Zahl ungerade (gerade), so wird 1 (0) subtrahiert, der Subtrahend in die oberste, die Differenz in die mittlere Zeile geschrieben. Die Differenz wird durch 2 dividiert und in die unterste Zeile links neben die gegebene Zahl geschrieben. Dieser Vorgang wiederholt sich, bis das Verfahren abbricht. In der ersten Zeile steht dann die Zahl in dualer Schreibweise.

38. Gerade Zahlen haben die Endziffer 0, ungerade die Endziffer L.

39. Indem man eine, zwei, drei, . . . Nullen am Ende abstreicht.

40. a) L0 000 b) L LL0 c) LLL L00 d) L LLL L0L 000 e) L L00.

41. Induktionsanfang: $n = 1$: $1^2 = \frac{3 \cdot 1 \cdot 2}{6} = 1.$

Schluß von k auf $k + 1$:

$$\begin{aligned}(1^2 + 2^2 + \ldots + k^2) + (k+1)^2 &= \frac{(2k+1)\,k\,(k+1)}{6} + (k+1)^2 = \\ &= (k+1)\left(\frac{(2k+1)k}{6} + k + 1\right) = \\ &= (k+1)\cdot\frac{(2k+1)\,k + 6(k+1)}{6} = \\ &= \frac{(2k^2 + 7k + 6)\,(k+1)}{6}.\end{aligned}$$

Dies erhält man aber auch, wenn man in die Formel

$$\frac{(2n+1)\,n\,(n+1)}{6}$$

für n den Wert $k + 1$ einträgt.

42. a) Die erste Stelle des Paares kann mit m Objekten, die zweite mit jedem der verbleibenden $m - 1$ Objekte besetzt werden: $m(m-1)$ Möglichkeiten.
b) Die ersten beiden Stellen können nach a) auf $m(m-1)$ Weisen besetzt werden. Für die dritte Stelle verbleiben $m - 2$ Elemente: $m(m-1)(m-2)$ Möglichkeiten.
c) Die ersten drei Stellen können nach b) auf $m(m-1)(m-2)$ Weisen besetzt werden. Für die vierte Stelle verbleiben $m - 3$ Objekte: $m(m-1)(m-2)(m-3)$ Möglichkeiten.

43. Der Induktionsanfang ist in Aufgabe 42 geliefert.
Schluß von k auf $k + 1$: Die ersten k Stellen lassen sich nach Induktionsvoraussetzung auf $m(m-1)\ldots(m-k+1)$ Weisen besetzen. Für die $(k+1)$-te Stelle verbleiben $m - k$ Objekte. Also ergeben sich $m(m-1)\ldots(m-k+1)(m-k)$ Möglichkeiten, Gruppen aus $k + 1$ Elementen zu bilden.

44. a) Von zwei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist stets eine gerade. b) Von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist mindestens eine gerade und stets eine durch 3 teilbar. c) Von vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist stets eine durch 4 teilbar, eine weitere durch 2 und mindestens eine durch 3. Verallgemeinerung:

$$\frac{n(n+1)\dots(n+k-1)}{k!} \in N.$$

45. a) $x^8 - 8x^7 + 28x^6 - 56x^5 + 70x^4 - 56x^3 + 28x^2 - 8x + 1$

b) $\frac{1}{16}u^4 + \frac{1}{6}u^3v + \frac{1}{6}u^2v^2 + \frac{2}{27}uv^3 + \frac{1}{81}v^4$

c) $32a^5 - 240a^4b + 720a^3b^2 - 1080a^2b^3 + 810ab^4 - 243b^5$

46. a) $(x^2+1)^3$ b) $(a+2)^4$ c) $(u-2v)^3$
d) $(b^3+3)^3$ e) $(2a+3b)^3$

47. a) 1 092 727 b) 994 011 992 als $(1000-2)^3$
c) 96 059 601 d) 10 510 100 501

48. $2a^6 + 30a^4 + 30a^2 + 2$

49. $a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3b^2a + 3b^2c + 3c^2a + 3c^2b + 6abc$

50. a) 455 b) 252 c) 330 d) 2002 e) 171

51. $\binom{6}{1}$, $\binom{6}{5}$ und $\binom{4}{2}$.

52. n und k müssen natürliche Zahlen sein, die der Bedingung $n \geqq k$ genügen.

53. Eindeutig, aber nicht eineindeutig.

54.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & L & & & & & \\
 & & & & L & & L & & & & \\
 & & & L & & L0 & & L & & & \\
 & & L & & LL & & LL & & L & & \\
 & L & & L00 & & LL0 & & L00 & & L & \\
L & & L0L & & L0L0 & & L0L0 & & L0L & & L
\end{array}$$

55. Mit Berücksichtigung der Reihenfolge wären es nach Aufgabe 43 $m(m-1)\dots(m-n+1)$ Möglichkeiten. Dabei werden aber immer $n!$ Möglichkeiten aus den gleichen Elementen, nur verschieden angeordnet, gebildet. Also gibt es ohne Berücksichtigung der Reihenfolge

$$\frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} = \binom{m}{n}$$

Möglichkeiten.

56. a) $\frac{(n+2)(n+1)}{2}$ b) $\frac{(n+k)(n+k-1)\dots(n+1)}{k!}$

c) $\frac{(n+k)(n+k-1)\dots(n+1)n}{(k+1)!}$ d) 1

57. a) $\binom{n}{k+1} = \frac{n(n-1)\dots(n-k)}{(k+1)!}$ b) $\binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{(k-1)!}$

c) $\binom{n+1}{k+1} = \frac{(n+1)n(n-1)\dots(n-k+1)}{(k+1)!}$

58. $\dfrac{n(n-1)\ldots(n-k+1)(n-2k-1)}{(k+1)!} = \binom{n}{k}\dfrac{n-2k-1}{k+1}$

59. Induktionsanfang: $n = p$: $\binom{p}{p} = \binom{p+1}{p+1}$ $(= 1)$.

Schluß von k auf $k+1$:

$$\left[\binom{p}{p} + \cdots + \binom{k}{p}\right] + \binom{k+1}{p} = \binom{k+1}{p+1} + \binom{k+1}{p} = \binom{k+2}{p+1} = \binom{(k+1)+1}{p+1}.$$

Für a) ist $p = 2$ zu setzen.

60. a) $(1+a)^{50} = 1 + 50a + 1225a^2 + \cdots$

b) $(a-1)^{10} = a^{10} - 10a^9 + 45a^8 - 120a^7 + 210a^6 - 252a^5 + - \cdots$

61. a) $47x + 365x^2 + 4935x^3 + \cdots$

b) $128 + 1984x + 14496x^2 + 66352x^3 + \cdots$

c) $-1 - 2x + 14x^2 + 30x^3 + \cdots$

d) $729 + 11664x + 85050x^2 + 369900x^3 + \cdots$

62. a) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$

b) $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + - \cdots + (-1)^n\binom{n}{n} = 0$

63. a) $G = N \cup \overline{N}$ b) $N = G \setminus \overline{N}$

64. Bezüglich g und h sind 6 Fälle denkbar, die im Folgenden mit Hilfe zweier natürlicher Zahlen m und n dargestellt werden:

1. $g = m,\quad h = n,\quad m \geqq n:\quad g - h = m - n \in N,$
2. $g = m,\quad h = n,\quad m < n:\quad g - h = -(n - m) \in \overline{N},$
3. $g = m,\quad h = -n,\quad :\quad g - h = m + n \in N,$
4. $g = -m,\quad h = n,\quad :\quad g - h = -(m + n) \in \overline{N},$
5. $g = -m,\quad h = -n,\quad n \geqq m:\quad g - h = n - m \in N,$
6. $g = -m,\quad h = -n,\quad n < m:\quad g - h = -(m - n) \in \overline{N}.$

65.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	473	148	73	8	1	-2	-7	4	73

66. a) -4 b) 210 c) -1 d) -126

67. $\binom{-n+1}{2} = \dfrac{(-n+1)(-n)}{2} = \dfrac{(-1)^2(n-1)n}{2} = \binom{n}{2}$

68. Ja. Dies ist aus folgender Zuordnung zu erkennen:

$1 \to 501$	$0 \to -500$
$2 \to 502$	$-1 \to -501$
$3 \to 503$	$-2 \to -502$
....	....

69. Die Reihenfolge gibt eine Ordnung. a) Das Monotoniegesetz der Addition gilt nicht: Im Sinne dieser Ordnung ist $2 < -4$, aber die durch Addition von 2 auf beiden Seiten erhaltene Ungleichung $4 < -2$ ist falsch, weil 4 nach -2 kommt. b) Das Monotoniegesetz der Multiplikation gilt.

70. a) 21 b) 14 71. a) 9 b) 19 c) 4

72. $-7,\ -3,\ 3,\ 7$ 73. $4a + 20$ 74. a) $5a - 3b$ b) $-a + 3b + 2$

75. Für gerade n; oder für ungerade n, wenn $a \geqq 3$ ist.

76. $|a| + |b| + |c|$

77. a) $+1$ für $a > 0$, -1 für $a < 0$. Für $a = 0$ ist $a/|a|$ nicht definiert,
 b) a für $a > 0$, 0 für $a \leqq 0$,
 c) die größte der beiden Zahlen a und b. Ist nämlich $a \geqq b$, so folgt $|a - b| = a - b$, ist aber b die größte, so gilt $|a - b| = -(a - b) = b - a$,
 d) die kleinste der beiden Zahlen a und b.

78. Eindeutig, aber nicht eineindeutig.

79. a) $3a^2 + 5\,|a|\,|b|$ b) $a^2 + |a|\,|b| + b^2$ c) $3 + |a| + 4\,|a|\,|b| + 2b^2$

80. $|a|^3 + 3a^2\,|b| + 3\,|a|\,b^2 + |b|^3$

81. Bernoulli: $(1 + m)^n \geqq 1 + m \cdot n = 13$

82. a) Bei $a \cdot b = 0$ oder $n = 1$ b) bei $a = 0$ oder $n = 1$

83. $(1 + a)(1 + b) = 1 + a + b + ab$. Wenn a und b gleiches Vorzeichen haben, ist $a \cdot b \geqq 0$, also der berechnete Ausdruck nicht kleiner als $1 + a + b$.

84. $|a|^2 + |b|^2 - 2\,|a|\,|b| = (|a| - |b|)^2 \geqq 0$

85. Man setzt in der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung
$$(a_1b_1 + a_2b_2)^2 \leqq (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)$$
$$a_1 = a, \qquad a_2 = b, \qquad b_1 = b_2 = 1.$$

86. Induktionsanfang: $n = 0:\ \ 2^0 > 0$.
 Schluß von k auf $k + 1$: Wegen $2^k \geqq 1$ folgt aus $2^k > k$
$$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k = 2^k + 2^k > k + 1.$$

87. $2a_1b_1a_2b_2 + 2a_1b_1a_3b_3 + 2a_2b_2a_3b_3 \leqq a_1^2b_2^2 + a_1^2b_3^2 + a_2^2b_1^2 + a_2^2b_3^2 + a_3^2b_1^2 + a_3^2b_2^2$,
$$0 \leqq (a_1b_2 - a_2b_1)^2 + (a_1b_3 - a_3b_1)^2 + (a_2b_3 - a_3b_2)^2.$$

88. Es wird durch $x - x = 0$ dividiert.

89. Eindeutig, aber nicht eineindeutig: $(2; 1)$ und $(4; 2)$ werden demselben Bruch zugeordnet.

90. Das Gleichheitskriterium fordert:
$$gkuu' + gluv' + hkvu' + hlvv' = gkuu' + glu'v + hkuv' + hlvv'.$$
 Wegen $u/v = u'/v'$ ist aber $uv' = u'v$.

91. a) a b) a c) $-a$ d) 0 e) 0

92. Ja, die Menge $\{0\}$ bildet den einzigen solchen Zahlenkörper.

93. Unendlich viele, zum Beispiel alle Zahlen $^3/_2$, $^4/_3$, $^5/_4$, $\ldots$.

94. Es gibt keine kleinste positive rationale Zahl. Die Hälfte einer jeden positiven rationalen Zahl ist wieder eine positive rationale Zahl. Sie ist aber noch kleiner.

95. $0,\ 1,\ -1,\ ^1/_2,\ -^1/_2,\ 2,\ -2,\ ^1/_3,\ -^1/_3,\ 3,\ -3,\ ^1/_4,\ -^1/_4,\ ^2/_3,\ -^2/_3,\ ^3/_2,\ -^3/_2,\ 4,\ -4,\ ^1/_5$.

96. a) 1,9487 b) 0,9039

97. a) $^1/_2$ b) $^1/_{16}$ c) $-^{10}/_{243}$ d) $-^{35}/_{16}$

98. Wegen $a < b$ hat man $ma + na < ma + nb < mb + nb$. Durch Division durch $m + n \neq 0$ erhält man die Behauptung.

99. a)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-179	-19	1	1	5	61	361

b)

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	51	8	1	0	-1	16	93	296

100. a) zum Beispiel $3T_1 - 2T_2$ b) zum Beispiel $T_1 + 5T_2$

101. a) die falsche Aussage $13 = 5$ b) eine Identität bezüglich K

102. Ja: jede unerfüllbare Gleichung ist zugleich Identität bezüglich der leeren Menge.

103. Die Zahl heißt 27.

104. Ist $\bar{x}$ eine Erfüllung der Gleichung $T_1(x) = T_2(x)$, so folgt nach dem Eindeutigkeitsgesetz der Addition (vgl. 2.2.) aus

$$T_1(\bar{x}) = T_2(\bar{x}) \tag{I}$$

und

$$T(\bar{x}) = T(\bar{x}) \tag{II}$$

$$T_1(\bar{x}) + T(\bar{x}) = T_2(\bar{x}) + T(\bar{x}). \tag{III}$$

Umgekehrt ergibt sich wegen der Eindeutigkeit der Subtraktion aus (III) und (II) die Wahrheit von (I).

105. a) $^{97}/_{17}$ b) 5 c) 5 d) 1

106. 5 und 7

107. a) $\{-4, -3, \ldots, 7\}$ b) $\{-1, 0, \ldots, 4\}$
c) $\{-4, -3, -2\}$ d) $\{5, 6, 7\}$

108. a) 3,15 b) 72

109. 3,0

110. Aus $T_1(\bar{x}) < T_2(\bar{x})$ folgt nach dem Monotoniegesetz der Multiplikation (vgl. 2.2.) $T_1(\bar{x})\,T(\bar{x}) < T_2(\bar{x})\,T(\bar{x})$. Ebenso folgt aus der zweiten Ungleichung durch Multiplikation mit $1/T(\bar{x})$, was wegen $T(\bar{x}) > 0$ wieder eine positive endliche Zahl ist, die Wahrheit der ersten.

111. a) $x < 1$ b) $x < {}^{16}/_{3}$ c) $\varnothing$

112. Ja. Zwischen je zwei Zahlen der Menge liegt stets noch eine dritte.

113. Der Beweis entspricht dem in 8.1. geführten, daß es keine rationale Zahl mit dem Quadrat 2 gibt. Statt „gerade" heißt es jedesmal „durch 13 teilbar".

114. a) $^{2}/_{45}$ b) $^{5708}/_{999}$ c) $^{2314570}/_{999999}$

115. Die Differenz beträgt $0{,}000\ldots = 0$. Die beiden unendlichen Dezimalbrüche sind gleich.

116. a) 1,414 b) 1,732 c) 4,123 d) 1,171

117. Die Folge konvergiert gegen Null.

118. a) Konvergiert gegen 0,
b) divergiert,
c) konvergiert gegen 1.

119. a) $(-1; 2]$ b) $[0; 1)$ c) $(-1; 2) \setminus \{0\}$ d) $\varnothing$

120. a) $\{0\}$ b) $\{0\}$ c) $(-1; 2)$

121. a) $^{13}/_{8}$ b) $^{3}/_{8}$ c) $^{25}/_{8}$ d) $^{17}/_{16}$

122.	a) 0,000L	b) 0,LL	c) L0,LLL	d) 0,L000L
123.	a) $0{,}0\overline{\mathrm{L0L}}\ldots$	b) $0{,}\overline{\mathrm{LL00}}\ldots$	c) $\mathrm{L},\overline{0\mathrm{LL}}\ldots$	d) $\mathrm{L},\overline{00\mathrm{LLL0}}\ldots$
124.	a) $^4/_7$	b) $^8/_{15}$	c) $^{44}/_{15}$	d) 1

125. L,0LL ...

126. $-0{,}0572$

127. Genau dann, wenn die Basis negativ und der Exponent eine ungerade Zahl ist.

128.

x	$-^3/_2$	-1	$-^1/_2$	0	$^1/_2$	1	$^3/_2$	2
2^x	0,35	0,50	0,71	1,00	1,41	2,00	2,83	4,00
3^x	0,19	0,33	0,58	1,00	1,73	3,00	5,19	9,00
4^x	0,12	0,25	0,50	1,00	2,00	4,00	8,00	16,00

129. Der Beweis entspricht genau dem in 9.1 erbrachten Beweis, daß das dritte Potenzgesetz für rationale Exponenten gilt. Es sind lediglich die Multiplikationszeichen durch Divisionszeichen zu ersetzen.

130. a) Für natürliche Exponenten:

$$(a^n)^m = \underbrace{\underbrace{(a\cdot\cdots\cdot a)}_{n}\ \underbrace{(a\cdot\cdots\cdot a)}_{n}\cdots\underbrace{(a\cdot\cdots\cdot a)}_{n}}_{m} = a^{nm}.$$

b) Für ganze Exponenten mit verschiedenen Vorzeichen:

$$(a^n)^{-m} = \frac{1}{(a^n)^m} = \frac{1}{a^{nm}} = a^{-nm}; \qquad (a^{-n})^m = \left(\frac{1}{a^n}\right)^m = \frac{1}{(a^n)^m} = a^{-nm}.$$

c) Für zwei negative ganze Exponenten:

$$(a^{-n})^{-m} = \frac{1}{(1/a^n)^m} = a^{nm}.$$

d) Für zwei gebrochene Exponenten:

Behauptung: $(a^{g/n})^{h/m} = a^{gh/nm}$.

Die rechte Seite ist die nicht negative Zahl, deren nm-te Potenz a^{gh} ist. Diese Eigenschaft kann von der linken Seite leicht durch Ausrechnen bestätigt werden.

131. Da beide Seiten der behaupteten Ungleichung nicht negativ sind, ist diese gleichwertig mit

$$(a+b)^2 \geqq 4ab.$$

Daraus ergibt sich durch Umformen die äquivalente Ungleichung

$$(a-b)^2 \geqq 0,$$

die sicher richtig ist, weil Quadrate reeller Zahlen nicht negativ sein können.

132. Induktionsanfang: $a < b \quad (n = 1)$.
Schluß von k auf $k+1$: Aus $a^k < b^k$ folgt $a^k b < b^k b$, aus $a < b$ folgt $a \cdot a^k \leqq b a^k$. Beides zusammen ergibt $a^{k+1} < b^{k+1}$.

133. Die zu beweisende Abschätzung ist nach Aufgabe 132 gleichwertig mit $1 + z < (1 + z/n)^n$. Diese Ungleichung aber gilt auf Grund der BERNOULLIschen Ungleichung.

134. 1

135.	a) 2	b) 1	c) $3^{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$	d) 7

136. Weil alle Potenzen von 1 wieder 1 sind und deshalb $s \to 1^s$ keine eineindeutige Abbildung darstellt.

137. a) -3 b) $^2/_3$ c) -2 d) $-^3/_4$

138. Es sei $r = \log_a u$, also $u = a^r$. Daraus folgt: $u^s = (a^r)^s$, das heißt $u^s = a^{rs}$. In Logarithmenschreibweise heißt dies $rs = \log_a u^s$. Durch Einsetzen von $r = \log_a u$ wird der Beweis vollendet.

139. a) $3 \log_a u + \frac{1}{2} \log_a (u + v) - 1$ b) $\log_a(a^3 - 1) - \log_a b + 4$

c) $\log_2 u + \frac{1}{2} \log_2 v - \log_2 w + 6$

140. a) 135,4 b) 2,5894 c) 0,003639

141. a) 6,2094 b) 6,0224 c) $-3,7783$

142. 2,7182818

143. a) 3,14159 und $-2,06091$ b) 3,1416 und $-2,0609$

144. a) 1,19405, logarithmisch 1,1941
b) 0,85076, logarithmisch 0,85082

145. a) reflexiv, transitiv und symmetrisch
b) transitiv, nicht reflexiv, nicht symmetrisch

146. Zwischen zwei verschiedenen Zahlen a und b gilt nicht stets entweder $a \ll b$ oder $b \ll a$.

147. a) 0,95 b) 1,004 c) 1,007 d) 1,04 e) $-0,013$

148. a) 0,96 b) 1,13 c) 1,00 d) 0,96

149. a) 11,7 b) 0,32

150. $\ln(1 + \varepsilon)^n \approx -n\varepsilon$

151. $(1 + \varepsilon)^4 + 3(1 + \varepsilon)^3 - 5(1 + \varepsilon)^2 + 1 \approx 3\varepsilon$

x	0,95	0,96	0,97	0,98	0,99	1,00	1,01	1,02	1,03	1,04	1,05
$P(x)$ genähert	$-0,15$	$-0,12$	$-0,09$	$-0,06$	$-0,03$	0,00	0,03	0,06	0,09	0,12	0,15
exakt	$-0,12$	$-0,10$	$-0,08$	$-0,06$	$-0,03$	0,00	0,03	0,06	0,10	0,13	0,17

152. a) $2\sqrt[3]{1 + 5\varepsilon/8} \approx 2 + 5\varepsilon/12$ b) $2\varepsilon/(6 + 5\varepsilon) \approx \varepsilon/3$

c) $5 - 10\varepsilon$ d) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1 + \varepsilon}{1 + \varepsilon/2} \approx \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{4}$

153. Guthaben nach n Jahren:
a) 500 $(1 + 0,03\,n)$ Mark; b) 500 $(1 + 0,02955\,n + 0,00045\,n^2)$ Mark

154. $P_\mathrm{i} = P_\mathrm{e}/\eta = P_\mathrm{e}/(1 - \varepsilon) \approx P_\mathrm{e}(1 + \varepsilon)$

155. $1,10 P_\mathrm{e}$, $1,08 P_\mathrm{e}$, $1,06 P_\mathrm{e}$, $1,04 P_\mathrm{e}$, $1,02 P_\mathrm{e}$.

156. $\sqrt{2}$ ist die nicht negative Erfüllung der Gleichung $x^2 = 2$ und dadurch eindeutig definiert. j ist als eine Erfüllung der Gleichung $x^2 = -1$ schlechthin definiert.

157. Als eine Zahl, deren Quadrat ebenfalls -1 ist, hätte $-\mathrm{j}$ das gleiche Recht wie j auf die Bezeichnung $\sqrt{-1}$. Das Symbol $\sqrt{-1}$ wäre also nicht eindeutig.

158. a) $3 + 4\mathrm{j}$, $3 - 4\mathrm{j}$ b) $1 + \mathrm{j}\sqrt{2}$, $1 - \mathrm{j}\sqrt{2}$ c) $a + b\mathrm{j}$, $a - b\mathrm{j}$

159. a) $8 + 15\mathrm{j}$ b) -1 c) $3 - 3\mathrm{j}$

160. a) $7 + j$ b) $49 + 41j$ c) 78
d) $-14 + 6j$ e) 17 f) $7 + 6j\sqrt{2}$

161. a) $\frac{11}{29} - \frac{16}{29}j$ b) $3 + 2j$ c) $-1 + 2j$ d) $1 + 2j$
e) $\frac{3}{11} - \frac{\sqrt{2}}{11}j$ f) $\frac{1}{5}(1 + 2j\sqrt{6})$ g) $\frac{2}{3} - j$

162. Genau dann, wenn sie reell ist.

163. a) $14 + 8j$ und $14 - 8j$ b) $\frac{1}{10} + \frac{4}{5}j$ und $\frac{1}{10} - \frac{4}{5}j$
Die Ergebnisse sind wiederum konjugiert.

164. a) $(2x + 3yj)(2x - 3yj)$ b) $(\sqrt{a} + j\sqrt{b})(\sqrt{a} - j\sqrt{b})$ c) $(4 + j)(4 - j)$

165. a) -1 b) j c) $-j$ d) 1

166. a) $-j$ b) 1 c) 1 d) 0

167. a) -4 b) $-38 - 41j$
c) $29 + 278j$ d) $= 3^4(1 - 2j)^4 = -567 + 1944j$

168. a) $\frac{j}{8}$ b) $-\frac{7}{625} + \frac{24}{625}j$ c) $-\frac{1}{8}$ d) $\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}j\sqrt{2}$

169. a) $-\frac{240}{1369} + \frac{31}{2738}j$ b) 632 c) $\frac{5}{17} - \frac{48}{17}j$
d) $\frac{25}{13} - \frac{5}{13}j$ e) $-\frac{5}{17} + \frac{3}{17}j$

170. $122 - 597j$ und $122 + 597j$. Die Ergebnisse sind wieder konjugiert.

171. $-2 + 3j$ und $3 + j$ erfüllen die Gleichung.

172. a) $\sqrt{13}$ b) $\sqrt{13}$ c) 3 d) $a\sqrt{2}$ e) 5 f) $\sqrt{2}$

173. a) Auf einem Kreis um den Ursprung mit dem Radius 1,
b) im Innern dieses Kreises,
c) außerhalb dieses Kreises,
d) auf einem Kreis um den Ursprung mit dem Radius r.

174. Als Abstand der Zahlen z_1 und z_2.

175. a) Auf einem Kreis um die Zahl 2 mit dem Radius 1,
b) im Innern und auf dem Rand eines Kreises um die Zahl -3 mit dem Radius 2,
c) außerhalb eines Kreises um die Zahl $1 + j$ mit dem Radius 1.

176. a) $|z + 2 - j| = 4$
b) $|z - j| < 1$
c) $|z - z_0| = r$

177. Vgl. Bild 328.

178. a) $\sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2} \leqq$
$\leqq \sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2} \Longleftrightarrow$
$(a_1 a_2 + b_1 b_2)^2 \leqq (a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)$.
Diese Ungleichung ist auf Grund der CAUCHY-SCHWARZschen Ungleichung stets richtig (vgl. 5.2.).

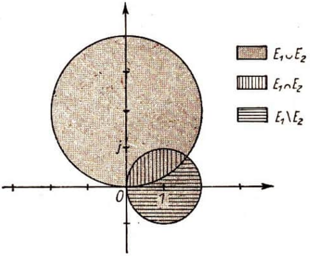


Bild 328

b) $\sqrt{(a_1a_2 - b_1b_2)^2 + (a_1b_2 + a_2b_1)^2} = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2}$
Dies wird durch Quadrieren und Vergleichen leicht bestätigt.

179. a) Eineindeutig. Spiegelung an der reellen Achse.
b) Eineindeutig. Drehung um den Ursprung, 180°.

180. a) $2(\cos 300° + \mathrm{j}\sin 300°)$ b) $\sqrt{2}\,(\cos 225° + \mathrm{j}\sin 225°)$
c) $17(\cos 61°56' + \mathrm{j}\sin 61°56')$ d) $\cos 270° + \mathrm{j}\sin 270°$
e) $2(\cos 0° + \mathrm{j}\sin 0°)$

181. a) $\frac{3}{2}(\sqrt{3} + \mathrm{j})$ b) $2\sqrt{2}\,(-1 + \mathrm{j})$ c) $\frac{9}{2}(\sqrt{3} - \mathrm{j})$ d) $1 + \mathrm{j}$ e) -5

182. a) $r[\cos(-\varphi) + \mathrm{j}\sin(-\varphi)]$
b) $r[\cos(\varphi + 180°) + \mathrm{j}\sin(\varphi + 180°)]$

183. Zwei komplexe Zahlen sind konjugiert, wenn sie den gleichen Betrag haben, während ihre Argumente entgegengesetzt gleich sind.

184. a) $\frac{1}{20}(\cos 345° + \mathrm{j}\sin 345°)$
b) $\frac{1}{45}(\cos 15° + \mathrm{j}\sin 15°)$
c) $\frac{5}{16}(\cos 105° + \mathrm{j}\sin 105°)$

185. $5{,}03 - 0{,}29\mathrm{j}$

186. a) $-64 + 64\mathrm{j}$ b) 16 c) $-512\mathrm{j}$ d) $-512 - 512\mathrm{j}\sqrt{3}$ e) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{j}\sqrt{3}$

187. Die Summe der Argumente der Faktoren muß ein ganzzahliges Vielfaches von 180° sein.

188. $z = r(\cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi)$,
$z^n = r^n(\cos n\varphi + \mathrm{j}\sin n\varphi)$,
$\overline{z^n} = r^n(\cos n\varphi - \mathrm{j}\sin n\varphi)$,

$\bar{z} = r\,[\cos(-\varphi) + \mathrm{j}\sin(-\varphi)]$,
$\bar{z}^n = r^n[\cos(-n\varphi) + \mathrm{j}\sin(-n\varphi)] =$
$= r^n(\cos n\varphi - \mathrm{j}\sin n\varphi)$.

189. Eineindeutig. Das Innere des Kreises um den Ursprung mit dem Radius 1 wird auf das Äußere abgebildet und umgekehrt (Spiegelung am Einheitskreis).

190. a) $x_0 \approx 0{,}707 + 0{,}707\mathrm{j}$, $x_1 \approx -0{,}966 + 0{,}259\mathrm{j}$, $x_2 \approx 0{,}259 - 0{,}966\mathrm{j}$
b) $x_0 = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,(1 + \mathrm{j}\sqrt{3})$, $x_1 = -\frac{1}{2}\sqrt{2}\,(1 + \mathrm{j}\sqrt{3})$
c) $x_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{j}\sqrt{3}$, $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{j}\sqrt{3}$
d) $x_0 = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,(1 + \mathrm{j})$, $x_1 = -\frac{1}{2}\sqrt{2}\,(1 + \mathrm{j})$
e) $x_0 = 1$, $x_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\mathrm{j}\sqrt{2}$, $x_2 = \mathrm{j}$, $x_3 = -\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\mathrm{j}\sqrt{2}$,
$x_4 = -1$, $x_5 = -\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\mathrm{j}\sqrt{2}$, $x_6 = -\mathrm{j}$, $x_7 = \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\mathrm{j}\sqrt{2}$.
f) $x_0 = 1{,}000 + 1{,}000\mathrm{j}$, $x_1 \approx -0{,}259 + 0{,}966\mathrm{j}$, $x_2 \approx -0{,}966 + 0{,}259\mathrm{j}$,
$x_3 = -1{,}000 - 1{,}000\mathrm{j}$, $x_4 \approx 0{,}259 - 0{,}966\mathrm{j}$, $x_5 \approx 0{,}966 - 0{,}259\mathrm{j}$.
g) $x_0 \approx -0{,}957 - 1{,}430\mathrm{j}$, $x_1 \approx -0{,}760 + 1{,}544\mathrm{j}$, $x_2 \approx 1{,}712 - 0{,}113\mathrm{j}$

191. $x_k = \cos\frac{k \cdot 360°}{n} + \mathrm{j}\sin\frac{k \cdot 360°}{n}$, $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$

192. Auf dem Einheitskreis, den sie von der Zahl 1 aus in n gleiche Abschnitte teilen.

193. a) Bei der Ausführung der vier Grundrechnungsarten,
b) bei der Multiplikation, der Division, beim Potenzieren und beim Radizieren.

194. Addition, Subtraktion, Multiplikation (Division nur durch Konstanten).

195. a) $x_1 = 2, \quad x_2 = \mathrm{j}, \quad x_3 = -2, \quad x_4 = -\mathrm{j}$

b) $x_1 = \sqrt{3} + \mathrm{j}, \quad x_2 = -\sqrt{3} + \mathrm{j}, \quad x_3 = -\sqrt{3} - \mathrm{j}, \quad x_4 = \sqrt{3} - \mathrm{j}$

c) $x_1 = \frac{1}{2}\sqrt{6} + \frac{1}{2}\mathrm{j}\sqrt{2}, \quad x_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\mathrm{j}\sqrt{6}, \quad x_3 = -\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\mathrm{j}\sqrt{6},$

$x_4 = -\frac{1}{2}\sqrt{6} + \frac{1}{2}\mathrm{j}\sqrt{2}, \quad x_5 = -\frac{1}{2}\sqrt{6} - \frac{1}{2}\mathrm{j}\sqrt{2}, \quad x_6 = -\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\mathrm{j}\sqrt{6},$

$x_7 = \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\mathrm{j}\sqrt{6}, \quad x_8 = \frac{1}{2}\sqrt{6} - \frac{1}{2}\mathrm{j}\sqrt{2}$

196. a) $\ln 2 + \frac{\pi}{6}\mathrm{j} \approx 0{,}693 + 0{,}524\mathrm{j}$ b) $-\frac{3}{2}\ln 2 + \frac{3}{4}\pi\mathrm{j} \approx -1{,}040 + 2{,}356\mathrm{j}$

c) $\frac{5}{3}\pi\mathrm{j} \approx 5{,}236\mathrm{j}$ d) $1{,}609 + 5{,}358\mathrm{j}$ e) $1{,}282 + 0{,}983\mathrm{j}$ f) $\frac{3}{2}\pi\mathrm{j} \approx 4{,}712\mathrm{j}$

197. a) Sei $z = r(\cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi), \quad z' = r'(\cos\varphi' + \mathrm{j}\sin\varphi')$.

$\Rightarrow \frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}[\cos(\varphi - \varphi') + \mathrm{j}\sin(\varphi - \varphi')]$

$\Rightarrow \ln\frac{z}{z'} = \ln\frac{r}{r'} + (\varphi - \varphi')\mathrm{j} =$ (Definition der Logarithmen)

$= (\ln r + \varphi\mathrm{j}) - (\ln r' + \varphi'\mathrm{j}) = \ln z - \ln z' \quad \left(\ln\frac{r}{r'} = \ln r - \ln r'\right)$

b) Sei $z = r(\cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi)$.

$\Rightarrow z^n = r^n(\cos n\varphi + \mathrm{j}\sin n\varphi)$

$\Rightarrow \ln z^n = \ln r^n + n\varphi\mathrm{j} =$ (Definition der Logarithmen)

$= n\ln r + n\varphi\mathrm{j} = n(\ln r + \varphi\mathrm{j}) = n\ln z$.

198. Auf einem Kreis um den Nullpunkt der Gaussschen Zahlenebene mit dem Radius 1.

199. Sei $z = a + b\mathrm{j}, \quad z' = a' + b'\mathrm{j}$.

$\mathrm{e}^z \cdot \mathrm{e}^{z'} = \mathrm{e}^a(\cos b + \mathrm{j}\sin b) \cdot \mathrm{e}^{a'}(\cos b' + \mathrm{j}\sin b') =$

$= \mathrm{e}^{a+a'}[\cos(b + b') + \mathrm{j}\sin(b + b')] = \mathrm{e}^{(a+a')+(b+b')\mathrm{j}} = \mathrm{e}^{z+z'}$.

200. a) $\mathrm{e}^{\ln 3 + \frac{\pi}{12}\mathrm{j}} \approx \mathrm{e}^{1{,}099+0{,}262\mathrm{j}}$ b) $\mathrm{e}^{\ln 2 + \pi\mathrm{j}} \approx \mathrm{e}^{0{,}693+3{,}142\mathrm{j}}$ c) $\mathrm{e}^{0{,}112+2{,}017\mathrm{j}}$

201. a) $-\frac{\mathrm{j}}{\mathrm{e}} \approx -0{,}368\mathrm{j}$ b) $\sqrt{\mathrm{e}}\cos 45° + \mathrm{j}\sqrt{\mathrm{e}}\sin 45° \approx 1{,}167 + 1{,}167\mathrm{j}$ c) $0{,}476 + 0{,}589\mathrm{j}$

202. a) $\mathrm{e}^{-6+8\mathrm{j}}$ b) 1 c) $\mathrm{e}^{\frac{15}{2}\pi + \frac{20}{3}\pi\mathrm{j}}$

203. a) Auf Grund der Formeln (20) ist:

$$\sin(\varphi + \psi) = \frac{\mathrm{e}^{(\varphi+\psi)\mathrm{j}} - \mathrm{e}^{-(\varphi+\psi)\mathrm{j}}}{2\mathrm{j}},$$

$$\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi = \frac{\mathrm{e}^{\varphi\mathrm{j}} - \mathrm{e}^{-\varphi\mathrm{j}}}{2\mathrm{j}}\,\frac{\mathrm{e}^{\psi\mathrm{j}} + \mathrm{e}^{-\psi\mathrm{j}}}{2} + \frac{\mathrm{e}^{\varphi\mathrm{j}} + \mathrm{e}^{-\varphi\mathrm{j}}}{2}\,\frac{\mathrm{e}^{\psi\mathrm{j}} - \mathrm{e}^{-\psi\mathrm{j}}}{2\mathrm{j}}.$$

Durch Ausmultiplizieren und Zusammenfassen läßt sich der zweite Ausdruck in den ersten umformen.

b) Nach (20) gilt:

$$\cos 2\varphi = \frac{\mathrm{e}^{2\varphi\mathrm{j}} + \mathrm{e}^{-2\varphi\mathrm{j}}}{2},$$

$$1 - 2\sin^2\varphi = 1 - 2\left(\frac{\mathrm{e}^{\varphi\mathrm{j}} - \mathrm{e}^{-\varphi\mathrm{j}}}{2\mathrm{j}}\right)^2 = \frac{2 + \mathrm{e}^{2\varphi\mathrm{j}} - 2\mathrm{e}^{\varphi\mathrm{j}}\mathrm{e}^{-\varphi\mathrm{j}} + \mathrm{e}^{-2\varphi\mathrm{j}}}{2}.$$

Der letzte Ausdruck stimmt mit dem für $\cos 2\varphi$ überein, indem $\mathrm{e}^{\varphi\mathrm{j}}\mathrm{e}^{-\varphi\mathrm{j}} = 1$ ist.

204. $\{(4; -2)\}$
205. $\{(11; 10)\}$
206. $\{(-1; 3)\}$
207. $\{(0; 2)\}$
208. $\{(1{,}2; 0{,}8)\}$
209. $\{(-1{,}3; 1{,}1)\}$
210. $\{(3; 4)\}$
211. $\{(x; 2-3x) \mid x \in R\}$
212. $\varnothing$
213. $\{(0{,}8; -4{,}3)\}$
214. $\{(1{,}60; 0{,}75)\}$
215. $\left\{\left(x; \dfrac{1{,}42x-4{,}1}{1{,}16}\right) \mid x \in R\right\}$
216. $\{(3; -4)\}$
217. $\{(1{,}5; -3)\}$
218. $\{(0; 0)\}$
219. $\{(1; 1)\}$
220. $\{(3; -2)\}$
221. $\varnothing$
222. $\{(14; 2)\}$
223. $\{(x; 0) \mid x \in R\}$
224. $\{(1; 1)\}$
225. $\{(7a-4b; 3a+b)\}$
226. $\{(3a-4b; 7a+10b)\}$
227. $\left\{\left(\dfrac{a}{a+b}; \dfrac{a}{a+b}\right)\right\}$
228. $\left\{\left(\dfrac{a+b}{a}; \dfrac{a-b}{b}\right)\right\}$
229. $\{(1; 1)\}$
230. $\{(b(a+b); a(b-a))\}$
231. $\{(2a(a+b); 2b(a-b))\}$
232. $\left\{\left(\dfrac{a^2-b^2}{2a}; \dfrac{a^2-b^2}{2a}\right)\right\}$
233. $\left\{\left(\dfrac{a+b}{2}; \dfrac{a-b}{2}\right)\right\}$
234. $\{((a+b)^2; a^2-b^2)\}$
235. $\{(3; 6)\}$
236. $\{(3; 3)\}$
237. $\varnothing$
238. $\{(3; 6)\}$
239. $\{(2; 3)\}$
240. $\{(^1/_3; ^1/_4)\}$
241. $\{(0; 1)\}$
242. $\varnothing$
243. $\left\{\left(x; \dfrac{3}{4}x\right) \mid x \in R \setminus \{-^4/_7; -^8/_{15}\}\right\}$
244. $\{(-1; 0)\}$
245. $\{(5; 6)\}$
246. A: 90 Tage
B: 45 Tage
247. 12 min
9 min
$\dfrac{36}{7}$ min
248. Vorjahrsproduktion: 800 Maschinen, Produktionsauflage des neuen Jahres 960 Maschinen.
249. 28 Tage, 21 Tage
250. B_1: $\dfrac{\varrho_1(\varrho_2-\varrho)}{\varrho(\varrho_2-\varrho_1)}$ 100 %
B_2: $\dfrac{\varrho_2(\varrho-\varrho_1)}{\varrho(\varrho_2-\varrho_1)}$ 100 %
Misch.-Verh.: $\dfrac{\varrho_1(\varrho_2-\varrho)}{\varrho_2(\varrho-\varrho_1)}$
251. F_1: $\dfrac{\varrho_2-\varrho}{\varrho_2-\varrho_1}$ 100 %
F_2: $\dfrac{\varrho-\varrho_1}{\varrho_2-\varrho_1}$ 100 %
Misch.-Verh.: $\dfrac{\varrho_2-\varrho}{\varrho-\varrho_1}$
252. 39,216 kg Cu
7,809 kg Zn
253. 36 dm³ ($\varrho = 1{,}15$ kg/dm³)
24 dm³ ($\varrho = 1{,}20$ kg/dm³)
254. 20 cm
15 cm
255. 34 cm
50 cm
256. 17 cm
7 cm
257. Ein derartiges Rechteck existiert nicht.
258. $\dfrac{\Delta A - a^2}{b-a}$; $\dfrac{\Delta A - b^2}{b-a}$
Ist $b > a$, so muß $\Delta A > b^2$ sein,
ist $b < a$, so muß $\Delta A < b^2$ sein.
259. Es existieren unbegrenzt viele Rechtecke mit den Seiten $x > 2a$ und $y = x - 2a$, wenn $\Delta A = a^2$ ist.

260. 55 cm/min; 33 cm/min
261. 5 km/h; 3 km/h
262. 72 kp; 40 cm
263. 18 kp; 13 kp
264. 28 Zähne; 44 Zähne
265. 16 Ω; 9 A
266. $\{(-19t; 11t; 2t) \mid t \in R\}$
267. $\{(-5{,}31t; 4{,}18t; 6{,}17t) \mid t \in R\}$
268. $\{(2t; 0; t) \mid t \in R\}$
269. $\left\{\left(x; y; \dfrac{25y-26x}{48}\right) \mid x, y \in R\right\}$
270. $\{(3t+2; 2t-1; t) \mid t \in R\}$
271. $\left\{\left(x; y; \dfrac{1-3x-4y}{2}\right) \mid x, y \in R\right\}$
272. $\varnothing$
273. $\{(13; 15; 17)\}$
274. $\{[{}^1/_2(b+c-a); {}^1/_2(a+c-b); {}^1/_2(a+b-c)]\}$
275. $\{(a; b; c)\}$
276. $\{(15; 12; 10)\}$
277. $\{(5; 2; 8)\}$
278. $\{(5; 3; 1)\}$
279. $\{({}^5/_6; {}^3/_2; {}^2/_3)\}$
280. $\{({}^1/_{14}(2a+b-c); {}^1/_{14}(2b+c-a); {}^1/_{14}(2c+a-b))\}$
281. $\{(-1; 3; 2{,}5)\}$
282. $\{(20; 30; 40)\}$
283. $\{(11; 13; 17)\}$
284. $\{(30; 20; 70)\}$
285. $\{(0; 0; 0)\}$
286. $\{(2t; 3t; 6t) \mid t \in R\} = \left\{\left(\dfrac{z}{3}; \dfrac{z}{2}; z\right) \mid z \in R\right\}$
287. $\left\{\left(\dfrac{2y-4z}{3}; y; z\right) \mid y, z \in R\right\}$
288. $\{(t; 0; 2t) \mid t \in R\} = \left\{\left(\dfrac{z}{2}; 0; z\right) \mid z \in R\right\}$
289. $\{(t; t; -t) \mid t \in R\} = \{(-z; -z; z) \mid z \in R\}$
290. $\{(5{,}2; 4{,}1; -2{,}8)\}$
291. $\{(1{,}7; 2{,}2; 1{,}6)\}$
292. $\varnothing$
293. $\{(3t-2; 4t+1; t) \mid t \in R\}$
294. $\{(2{,}78; 1{,}76; -3{,}11)\}$
295. $\{(1{,}48; 8{,}73; 3{,}15)\}$
296. $\{(4; 5; -3; 1)\}$
297. $\{(1{,}2; 2{,}2; 2{,}5; 1{,}7)\}$
298. $\{(2{,}3; 1{,}5; 1{,}2; 1{,}9)\}$
299. $\{(1{,}5; 2{,}5; 3{,}25; 1{,}75)\}$
300. $\{(4; 7; 3; 9; -1)\}$
301. $\{(4; -4; 13; -6; 8)\}$
302. $\{(1{,}25; 2{,}34; 1{,}19; 2{,}11)\}$
303. $\{(3; 4; 5)\}$
304. $\{(2; 3; 1)\}$
305. $\{(5; 4; 3)\}$
306. $\{(1/t; 1/2t; 1/t) \mid t \in R\setminus\{0\}\}$
307. $\varnothing$
308. $\{({}^1/_2; {}^1/_3; {}^1/_4)\}$
309. 45 Zähne, 25 Zähne, 10 Zähne
310. 315 km; $v_S = 70$ km/h; $v_P = 45$ km/h; $v_G = 30$ km/h
311. 6 m³, 12 m; 9 m³, 8 m; 4 m³, 18 m
312. 140 hl; 100 hl; 30 hl
313. 405
314. $\{12; -12\}$
315. $\{16; -16\}$
316. $\{3j; -3j\}$
317. $\{3; -3\}$
318. $\{2\sqrt{5}; -2\sqrt{5}\}$
319. $\{3\sqrt{2}; -3\sqrt{2}\}$
320. $\left\{\dfrac{2}{5}\sqrt{30}; -\dfrac{2}{5}\sqrt{30}\right\}$
321. $\left\{\dfrac{5}{2}j\sqrt{2}; -\dfrac{5}{2}j\sqrt{2}\right\}$
322. $\left\{\dfrac{j}{a}\sqrt{ab}; -\dfrac{j}{a}\sqrt{ab}\right\}$
323. $\left\{\dfrac{1}{a}\sqrt{-ab}; -\dfrac{1}{a}\sqrt{-ab}\right\}$
324. $\{a-b; b-a\}$
325. $\{aj; -aj\}$
326. $\{ab; -ab\}$
327. $\{b(a+1); -b(a+1)\}$
328. $\{3; -4\}$
329. $\{5; 2\}$
330. $\{9; -10\}$
331. $\{3+2j; 3-2j\}$

332. $\{1 + j; 1 - j\}$ 333. $\{0{,}1; 0{,}2\}$ 334. $\{-1{,}8 + 2{,}1j; -1{,}8 - 2{,}1j\}$
335. $\{-2{,}35 + 2{,}4j; -2{,}35 - 2{,}4j\}$ 336. $\{^3/_2; -^1/_2\}$ 337. $\{^1/_4; ^1/_2\}$
338. $\{-1 + {}^1/_2 j\sqrt{6}; -1 - {}^1/_2 j\sqrt{6}\}$ 339. $\{5; ^7/_3\}$ 340. $\{11{,}83; 5{,}47\}$
341. $\{0{,}91 + 0{,}89j; 0{,}91 - 0{,}89j\}$ 342. $\{1{,}4; 1{,}4\}$ 343. $\{3{,}1; 2{,}1\}$
344. $\{a + b; -2b\}$ 345. $\{^1/_2(a + b); ^1/_2(a - b)\}$
346. $\{2a + 3b; a - 4b\}$ 347. $\left\{\frac{a+b}{a}; -\frac{a}{a-b}\right\}$
348. $a > b : \{a + \sqrt{a-b};\ a - \sqrt{a-b}\}$ $a < b :\ \{a + j\sqrt{b-a}; a - j\sqrt{b-a}\}$
349. $\left\{\frac{m}{n} + j\sqrt{\frac{m}{n}}; \frac{m}{n} - j\sqrt{\frac{m}{n}}\right\}$ 350. $\{0; a + b\}$
351. $\{13; -4\}$ 352. $\{1{,}75; 1\}$ 353. $\{2; -^{45}/_7\}$ 354. $\{5; -3\}$
355. $\{2; ^{29}/_{24}\}$ 356. $\{4; -10\}$ 357. $\varnothing$ 358. $\{1; -28\}$
359. $\{7; ^{18}/_7\}$ 360. $\left\{0; \frac{2ab}{a+b}\right\}$ 361. $(x - 3)(x + 5)$ 362. $x(x - 4)$
363. $(x - 3 + 4j)(x - 3 - 4j)$ 364. $(2x - 1)(2x + 5)$ 365. $2(x - 3)^2$
366. $(2x - 1 + 3j)(2x - 1 - 3j)$ 367. $(x - a)(x - b)$
368. $(x - a + bj)(x - a - bj)$ 369. $(ax + b)(x + d)$
370. $x^2 - x - 6 = 0$ 371. $x^2 - 5x = 0$ 372. $x^2 + 8x + 16 = 0$
373. $x^2 - a^2 = 0$ 374. $x^2 + a^2 = 0$ 375. $x^2 = 0$
376. $x^2 - 6x + 13 = 0$ 377. $x^2 - 2ax + 2a^2 = 0$
378. $x^2 - 3(a + b)x + 2a^2 + 5ab + 2b^2 = 0$
379. $x^2 - 4ax + 4a^2 + 9b^2 = 0$ 380. $\{3; -3; 2; -2\}$
381. $\{1; -1; 2; -2\}$ 382. $\{0; 0; 2\sqrt{2}; -2\sqrt{2}\}$
383. $\{1; -1; 2j; -2j\}$ 384. $\{4; -4; j\sqrt{3}; -j\sqrt{3}\}$
385. $\{0; 0; j\sqrt{5}; -j\sqrt{5}\}$ 386. $\{\sqrt{3}; -\sqrt{3}; j\sqrt{3}; -j\sqrt{3}\}$
387. $\{9\}$ 388. $\{9; 25\}$ 389. $\varnothing$ 390. $\{-1\}$ 391. $\{9\}$
392. $\{0; 25\}$ 393. $\{(a + b)^2\}$ 394. $\{5; -3\}$ 395. $\{1; 0{,}5\}$ 396. $\{2; 4\}$
397. $\{5; -3\}$ 398. $\{11\}$ 399. $\{-1\}$ 400. $\{5; 13\}$ 401. $\varnothing$
402. $\{1\}$ 403. $\varnothing$ 404. $\{5\}$
405. $\{2\}$ 406. $\{a; b\}$ 407. $\{1\}$ 408. $\{^{201}/_{41}\}$ 409. $\{3\}$
410. $\{10\}$ 411. $\{4\}$ 412. $\{15\}$ 413. $\varnothing$ 414. $\{6\}$
415. $\{2{,}5\}$
416. Vor der Preissenkung 1,20 Mark bzw. 0,67 Mark, nach der Preissenkung 1,00 Mark bzw. 0,60 Mark
417. 60 Stück; 0,05 Mark 418. 10% größer 419. 12 Tg; 15 Tg
420. 30 cm; 40 cm 421. 0,494 m; 0,192 m 422. 8 cm; 6 cm
423. 8 cm 424. 40 cm; 21 cm 425. 7,24 cm
426. 17,960 m 427. 133,5 m; 81,5 m 428. 10 cm; 6 cm; 14 cm

429. 28 cm; 21 cm
430. 36 Tg; 45 Tg
431. 84 min
432. 15 h; 10 h
433. 4 h
434. Eilzug: 56,25 km/h; 4 h
Personenzug: 30 km/h; 7,5 h
435. 15 km
436. 13 cm/s
437. 35 m/min; 60 m/min
438. 4 s
439. 5 s; 100 m; 125 m
440. 52,8 km
441. 91 s
442. 151 m
443. 113,098 cm³
444. 160 m
445. $d_1 = 40$ cm; $h_1 = 30$ cm
$d_2 = 30$ cm; $h_2 = 40$ cm
446. 678,6 cm²
1018 cm³
447. $R = 14$ cm; $r = 7$ cm
448. $D = 26$ cm; $d = 20$ cm
449. 15 kp; 8 kp
450. 4 A; 30 Ω
451. 0,5 Ω; 1,5 Ω
452. 18 kp; 24 kp
453. 8 Ω; 12 Ω; 2,4 Ω
454. 26,8 Ω; 226,8 Ω
455. 40 Ω; 10 Ω
456. $R_1 = R_2 = 110\,\Omega$
457. ≈ 22500 Fl.
458. 80 cm
459. 0,67 mm
460. 4; −71
461. 0; 44
462. 8; 62
463. 24,16; 92,34
464. 0,908; 11,737
465. 8,9402; −142,7198
466. 3,838; −10,4538
467. 21,9792; 716,7460
468. 0; 10,31264

469.

x	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
y	19	29	21	1	−25	−51	−71	−79	−69

470.

x	−1	0	1	2	3	4	5	6	7
y	−35	−1	15	19	17	15	19	35	69

471.

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	47	0	−3	2	3	12	65

472. $(x^2 - 3x + 2)(x - 2)$
473. $(x^3 - 5x^2 + 2x + 3)(x + 3)$
474. $(x^3 - 2x^2 + x + 1)(x + 2)$
475. $3(x-2)^3 + 5(x-2)^2 - 2(x-2) + 1$
476. $4(x-3)^3 - 5(x-3)^2 + 2(x-3)$
477. $2(x+2)^4 - 3(x+2)^2 + 5$
478. $(x-1)^4 + 4$
479. $3x^3 + 13x^2 + 18x + 12$
480. $2x^3 - 15x^2 + 36x - 23$
481. $2x^3 + 9{,}2x^2 + 16{,}44x + 14{,}936$
482. $x^4 + 12x^3 + 54x^2 + 108x + 81$
483. $z^3 - 2z + 3$ mit $z = x - 1$
484. $2z^3 - 5z$ mit $z = x + 2$
485. $z^3 + 5$ mit $z = x - 3$
486. $z^3 + 1{,}35z + 2{,}2$ mit $z = x - 0{,}5$
487. $z^3 + 0{,}88z + 1{,}484$ mit $z = x - 1{,}2$
488. Einfache Nullstelle, $(x-2)(x^2 + 3x - 4)$
489. Zweifache Nullstelle, $(x+1)^2(x-3)$
490. Zweifache Nullstelle, $(x-2)^2(x^2-9)$
491. x_1 dreifache Nullstelle, x_2 zweifache Nullstelle, $(x-1)^3(x-2)^2$
492. $\{2; -1 + \mathrm{j}\sqrt{3}; -1 - \mathrm{j}\sqrt{3}\}$
493. $\{-2; 1 - \mathrm{j}\sqrt{3}; 1 + \mathrm{j}\sqrt{3}\}$
494. $\{\sqrt[3]{5}; \sqrt[3]{5}(-{}^1/_2 + {}^1/_2\,\mathrm{j}\sqrt{3}); \sqrt[3]{5}(-{}^1/_2 - {}^1/_2\,\mathrm{j}\sqrt{3})\}$
495. $\{0; 1; 2\}$

496. $\{0; 3 + 2j; 3 - 2j\}$ 497. $\{0; 0; -5\}$ 498. $\{0; 2; -2\}$

499. $\{3; 5; -7\}$ 500. $\left\{4; -\frac{5}{2} + \frac{j}{2}\sqrt{31}; -\frac{5}{2} - \frac{j}{2}\sqrt{31}\right\}$

501. $\{-6; 4 + 3j; 4 - 3j\}$ 502. $\{4; 5j; -5j\}$ 503. $\{7; 3j; -3j\}$

504. $\{5; 3 + 4j; 3 - 4j\}$ 505. $\{-1; 2 + j\sqrt{3}; 2 - j\sqrt{3}\}$

506. $\{-2; -0{,}9; -3{,}1\}$ 507. $\{-1{,}1; -1{,}1 - 1{,}5j; -1{,}1 + 1{,}5j\}$

508. $\{1{,}5; 3; 3\}$ 509. $\{2{,}32; 1 + 3j; 1 - 3j\}$ 510. $\{1{,}097\}$ 511. $\{2{,}915\}$

512. $\{5{,}467; 0{,}5195; -5{,}987\}$ 513. $\{1{,}672; -1{,}469; -0{,}2033\}$

514. $\{4{,}098\}$ 515. $\{6{,}958\}$ 516. $\{3{,}979\}$ 517. $\{1{,}5\}$ 518. $\{-2{,}8\}$

519. $\{1{,}44\}$ 520. $\{0{,}456; 6{,}866; 12{,}679\}$ 521. $\{0{,}936; 3{,}305; 7{,}75\}$

522. $\{1{,}5; 1{,}5; 2{,}345\}$ 523. $\{6{,}542\}$ 524. 8 cm; 6 cm; 12 cm

525. 2 cm; 4 cm; 6 cm 526. 6 cm 527. 8 cm 528. 10 cm

529. 21,604 cm 530. $\{2{,}5; 3{,}6\}$ 531. $\{0{,}4142; -2{,}4142\}$

532. $\{1{,}5; 1{,}5; 5{,}23606; 0{,}76393\}$ 533. $\{2; 2{,}5; 3; 3{,}5\}$

534. $\{4{,}73205; 1{,}26795; 5{,}44948; 0{,}55051\}$ 535. $\{1{,}639; -1{,}667\}$

536. $\{3{,}149; 2{,}279; -0{,}418; -4{,}997\}$ 537. $\{2; 3{,}48\}$

538. $\{3{,}137\}$ 539. $\{66{,}701\}$ 540. $\{1{,}831; -2{,}406\}$

541. $\{0{,}471\}$ 542. $\{0{,}75\}$ 543. $\{3{,}244 \cdot 10^{-8}; 8{,}414\}$ 544. $\{20{,}135\}$ 545. $\{0{,}0525; 2{,}0908\}$

546. $\{1{,}7017\}$ 547. $\{4{,}3605\}$ 548. $\{7{,}9816\}$ 549. $\{0{,}8639\}$ 550. $\{0; 4{,}615\}$

551. $\{7{,}65\}$ 552. $\{5{,}25\}$ 553. $\{7\}$ 554. $\{-5\}$ 555. $\{-4\}$

556. $\{2\}$ 557. $\{1\}$ 558. $\{4\}$ 559. $\{0\}$ 560. $\{-7; 1\}$

561. $\{-5\}$ 562. $\{-7/3\}$ 563. $\left\{\frac{\lg a}{\lg m + \lg n}\right\}$ 564. $\{-0{,}4\}$

565. $\left\{\frac{\lg c}{\lg a + m \lg b}\right\}$ 566. $\left\{\frac{n \lg a - \lg 2}{\lg a + \lg b}\right\}$ 567. $\left\{\frac{p \lg a - q \lg b}{m \lg a - n \lg b}\right\}$

568. $\{2{,}0959\}$ 569. $\{2{,}8613\}$ 570. $\{-1{,}8726\}$ 571. $\{0{,}9691\}$

572. $\{6{,}3524\}$ 573. $\{1{,}3368\}$ 574. $\{6{,}5937\}$ 575. $\{0{,}2233\}$

576. $\{-1{,}2301\}$ 577. $\{0{,}44094\}$ 578. $\{3{,}4571\}$ 579. $\{4{,}7424\}$

580. $\{-1{,}4823\}$ 581. $\{31{,}974\}$ 582. $\{1{,}3194\}$ 583. $\{2{,}1401\}$

584. $\{-0{,}16774\}$ 585. $\{0{,}22813\}$ 586. $\{-5{,}1286\}$ 587. $\{-2{,}7382\}$

588. $\{0{,}43544\}$ 589. $\{1{,}1358\}$ 590. Bei der 919. Periode

591. 210° 592. 7 Rollen 593. $\{2{,}5119\}$ 594. $\{6{,}651 \cdot 10^{-5}\}$

595. $\{820{,}9\}$ 596. $\{212{,}31\}$ 597. $\{1{,}0252\}$ 598. $\{1\frac{3}{8}\}$

599. $\{100\}$ 600. $\{5{,}026\}$ 601. $\{22{,}746\}$ 602. $\{4\}$

603. $\{8\}$ 604. $\{-8; 8\}$ 605. $\emptyset$ 606. $\{-3; 3\}$ 607. $\{ae^b\}$

608. $A = \frac{F}{B^{C \lg D + E}}$ $B = \left(\frac{F}{A}\right)^{\frac{1}{C \lg D + E}}$ $C = \frac{\lg F - \lg A - E \lg B}{\lg B \cdot \lg D}$

$D = 10^{\frac{\lg F - \lg A - E \lg B}{C \lg B}}$ $E = \frac{\lg F - \lg A - C \lg B \lg D}{\lg B}$

609. a) $48{,}0043^g$ b) $31{,}9277^g$ c) $19°17'52''$ d) $38°11'46''$
e) $32{,}8068°$ f) $81{,}3764°$

610. a) 2,617 99 rad b) 5,258 48 rad c) 2,411 91 rad d) 0,092 40 rad

611. a) $17°11'19''$ b) $57°17'45''$ c) $15°$

612. a) 111,20 km b) 27,800 km c) 1853,3 m ($\approx$ 1 Seemeile)
d) 30,89 m

613. $A/\mathrm{m}^2 = \frac{1}{2}(r/\mathrm{m})^2 \cdot \varphi/\mathrm{rad} = \frac{1}{2}(r/\mathrm{m})^2 \cdot \frac{\pi}{180} \cdot \varphi/° = \frac{1}{2}(r/\mathrm{m})^2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \varphi/\llcorner$

614. a) 120,96 cm² b) 19,25 cm² 615. 0,1477 mm

617. (45): $\varphi/\mathrm{rad} \in (-\infty; +\infty)$

(46): $\varphi/\mathrm{rad} \in (-\infty; +\infty) \setminus \left\{k \cdot \frac{\pi}{2} \,\middle|\, k \in G\right\}$

(47): $\varphi/\mathrm{rad} \in (-\infty; +\infty) \setminus \left\{(2k+1) \cdot \frac{\pi}{2} \,\middle|\, k \in G\right\}$

(48): $\varphi/\mathrm{rad} \in (-\infty; +\infty) \setminus \{k\pi \mid k \in G\}$

619. a) $\cos\varphi = \frac{24}{25}$; $\tan\varphi = \frac{7}{24}$; $\cot\varphi = \frac{24}{7}$

b) $\sin\varphi = 0{,}8$; $\tan\varphi = 1{,}\overline{3}$; $\cot\varphi = 0{,}75$

c) $\sin\varphi = \frac{12}{13}$; $\cos\varphi = \frac{5}{13}$; $\cot\varphi = \frac{5}{12}$

620. a) $\cos\varphi = \frac{1-4m}{1+4m}$; $\tan\varphi = \frac{4\sqrt{m}}{1-4m}$; $\cot\varphi = \frac{1-4m}{4\sqrt{m}}$

b) $\sin\varphi = \frac{2q}{1+q^2}$; $\tan\varphi = \frac{2q}{1-q^2}$; $\cot\varphi = \frac{1-q^2}{2q}$

621. a) $\frac{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}{\cos^2\varphi} = \frac{1}{\cos^2\varphi}$ b) $\frac{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi}{\sin^2\varphi} = \frac{1}{\sin^2\varphi}$

622. a) $\cos\varphi$ b) $\frac{1}{\sin\varphi}$ c) 1 623. $A' = A\cos\alpha = 56{,}25\ \mathrm{cm}^2$

624. $V_u = 563{,}81\ \mathrm{cm}^3$; $V_0 = 1389{,}33\ \mathrm{cm}^3$ 625. $E = 160$ lx

626. $F_Z = 346{,}4$ kp; $\alpha = 60°$

627. a) $\alpha = 30°31'$; $\beta = 59°29'$; $c = 65$ cm; $A = 924\ \mathrm{cm}^2$; $h_c = 28{,}4$ cm
b) $\alpha = 18°55'$; $\beta = 71°05'$; $b = 70$ cm; $A = 840\ \mathrm{cm}^2$; $h_c = 22{,}7$ cm
c) $\beta = 46°24'$; $b = 42$ cm; $c = 58$ cm; $A = 840\ \mathrm{cm}^2$
d) $\beta = 50°12'$; $c = 78{,}1$ cm; $a = 50$ cm; $A = 1500\ \mathrm{cm}^2$
e) $\alpha = 36°52'$; $a = 30$ cm; $b = 40$ cm; $A = 600\ \mathrm{cm}^2$

628. a) $\alpha = 74{,}85°$; $c = 21{,}63$ m; $h_c = 39{,}89$ m; $A = 431{,}3\ \mathrm{m}^2$
b) $\gamma = 89{,}40°$; $a = 12{,}88$ m; $h_c = 9{,}15$ m; $A = 82{,}9\ \mathrm{m}^2$
c) $\alpha = 64{,}60°$; $a = 32{,}69$ m; $h_c = 29{,}53$ m; $A = 414{,}0\ \mathrm{m}^2$
d) $\alpha = 10{,}39°$; $\gamma = 159{,}22°$; $c = 120$ cm; $A = 660\ \mathrm{cm}^2$
e) $c = 24$ cm; $a = 37$ cm; $\alpha = 71{,}076°$; $\gamma = 37{,}848°$

629. $r_i = 9{,}93$ cm; $r = 22{,}41$ cm 630. $b - s = 0{,}196$ m

631. $A = 4190\ \text{cm}^2$; $U = 268{,}7\ \text{cm}$

632. $V = 9{,}79\ \text{cm}^3$

633. $\beta = 70{,}16°$; $\gamma = 79{,}77°$; $\alpha = 72{,}91°$; $\delta = 63{,}08°$

634. $A = 14{,}633\ \text{m}^2$

635. $M = 154{,}8\ \text{dm}^2$; $V = 181{,}8\ \text{dm}^3$

636. $\tan\alpha' = \tan\alpha \cos\varphi$; $\alpha' = 28{,}15°$

637. a)

p in %	5	10	20	40	60	80	100
α	2,86°	5,71°	11,31°	21,80°	30,96°	38,66°	45°

b) $\alpha = 4{,}57°$; $h = 5{,}98\ \text{m}$

638. a) $15\% \mathrel{\hat{=}} 8{,}53°$; $h_1 = 3{,}1\ \text{m}$ b) $\overline{AD} = 8{,}38\ \text{m}$; $\overline{BC} = 2{,}54\ \text{m}$
c) $\overline{AB} = 19{,}67\ \text{m}$ d) $ABCD = 36{,}50\ \text{m}^2$

639. $A = 202{,}7\ \text{m}^2$; $\alpha_1 = 50{,}19°$; $\alpha_2 = 60{,}10°$

640. $A = 15{,}4\ \text{m}^2$

641. $\Delta h = 15{,}86\ \text{m}$; $x = 54{,}36\ \text{m}$

642. $\alpha = 24{,}11°$

643. $A = 1{,}6089\,r^2$

644. $\alpha = 11{,}5°$; $h = 979\ \text{m}$

645. a) $F_1 = 38{,}1\ \text{kp}$; $F_2 = 22{,}0\ \text{kp}$ b) $F_1 = 377{,}5\ \text{kp}$; $F_2 = 345{,}9\ \text{kp}$
c) $F_1 = F_2 = 100{,}0\ \text{kp}$

646. a) $F_1 = F_2 = 257{,}8\ \text{kp}$ b) $F_1 = F_2 = 148{,}8\ \text{kp}$

647. $F_\text{H} = 806{,}4\ \text{kp}$; $F_\text{V} = 591{,}3\ \text{kp}$

648. $F_\text{H} = 81{,}8\ \text{kp}$; $F_\text{N} = 207{,}7\ \text{kp}$; $F_\text{R} = 62{,}3\ \text{kp}$

650. a) $-0{,}20507$ b) $-0{,}67880$ c) $1{,}69766$ d) $0{,}28046$
e) $0{,}96923$ f) $0{,}98836$ g) $2{,}09654$ h) $-0{,}12987$

651. a) $9{,}69739 - 10$ b) $9{,}52594 - 10$ c) $9{,}76323 - 10$ (n) d) $9{,}16074 - 10$

652. a) $\varphi_1 = 19°24'$; $\varphi_2 = 160°36'$ b) $\varphi_1 = 139°32'$; $\varphi_2 = 319°32'$

653. a) $\varphi_1 = 58{,}0875°$; $\varphi_2 = 301{,}9125°$; b) $\varphi_1 = 116{,}8679°$; $\varphi_2 = 296{,}8679°$

654. a) $y = -\cos x$ b) $y = \tan x$ c) $y = \sin 2x$ d) $y = -\sin x$

Durch Grenzwertuntersuchung ergibt sich bei d), daß die vereinfachte Funktion sogar für die in der Aufgabenstellung ausgenommenen Winkel x gilt.

655. a) $r = 129{,}79$; $\varphi = 75{,}6713°$ b) $r = 280{,}11$; $\varphi = 303{,}4700°$
c) $u = -110{,}41$; $v = -112{,}35$ d) $u = -44{,}97$; $v = 51{,}33$

656.

Aufgabe	t		ωt		$y_0 = a \sin\varphi$	Spiegelung
	Periode	Versch.	Periode	Versch.		
a)	4π	$-\pi$	2π	$-\frac{\pi}{2}$	$-0{,}3$	nein
b)	π	$\frac{\pi}{3}$	2π	$\frac{2\pi}{3}$	$-2{,}598$	ja
c)	2π	$\frac{\pi}{4}$	2π	$\frac{\pi}{4}$	$1{,}414$	nein
d)	6π	$-\frac{\pi}{2}$	2π	$-\frac{\pi}{6}$	$-0{,}125$	nein

Die Funktion d) läßt sich in $y = \frac{1}{4} \sin\left(\frac{t}{3} - \frac{\pi}{6}\right)$ umformen.

658. a) $8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1$ b) $16\cos^5\alpha - 20\cos^3\alpha + 5\cos\alpha$

659. a) $\frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{3}}$; $\frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{3}}$;

$2 + \sqrt{3}$; $2 - \sqrt{3}$

b) $\frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}}$; $\frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$; $\sqrt{2} - 1$; $\sqrt{2} + 1$

c) $\frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1)$; $\frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$; $\frac{1}{5}\sqrt{25 - 10\sqrt{5}}$; $\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$

d) $\frac{1}{4}(\sqrt{5} + 1)$; $\frac{1}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$; $\frac{1}{5}\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}$; $\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$

660. a) $\cos\alpha$ b) $\sin\alpha$ c) $\sqrt{2}\cos\alpha$ d) 1 e) $\tan\alpha$

f) $\frac{\sqrt{3}}{3}\tan\alpha$ g) $\cos\alpha\sin 2\alpha$ h) $\tan\frac{\alpha}{2}$

662. a) $\cot(\alpha - 45^\circ)$ b) $\tan\frac{\alpha + \beta}{2}\cot\frac{\alpha - \beta}{2}$

c) $\sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta)$ d) $\sin(\beta + \alpha)\sin(\beta - \alpha)$

e) $4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$

663. a) $p = 2r\sin^2\frac{\alpha}{4}$ b) $A = \frac{a^2}{2}\sin 2\alpha$ c) $A = \frac{n}{2}r^2\sin\frac{360^\circ}{n}$

664. $24{,}36\ \mathrm{m}^2$ 665. $M = 42{,}7\ \mathrm{dm}^2$; $V = 32{,}6\ \mathrm{dm}^3$

666. $M = 31437 \cdot 10^3\ \mathrm{km}^2$; $r_1 = 4880{,}6\ \mathrm{km}$; $r_2 = 4095{,}4\ \mathrm{km}$

667. $\tan\gamma' = -\frac{(a^2 + b^2)\cot\varphi}{ab\sin\varphi}$ 668. $x = 496{,}92\ \mathrm{m}$; $\nu = 2^\circ 39' 23''$

669. $h_T = 435{,}09\ \mathrm{m}$ 670. $v = d\sin\alpha\left(1 - \frac{\cos\alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}\right) = 0{,}194\ \mathrm{cm}$

671. $\sin(\alpha + \Delta\alpha) \approx \sin\alpha + \Delta\alpha\cos\alpha$; $\sin(\alpha + \Delta\alpha) - \sin\alpha \approx \Delta\alpha\cos\alpha$

672. $p \approx \frac{s^2}{8r}$ 676. $r = \frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$

677. a) $\beta = 128{,}950^\circ$; $a = 135{,}75\ \mathrm{m}$; $c = 73{,}86\ \mathrm{m}$; $r = 122{,}81\ \mathrm{m}$

b) $\alpha = 55{,}034^\circ$; $b = 34{,}90\ \mathrm{m}$; $c = 3{,}30\ \mathrm{m}$; $h_a = 2{,}85\ \mathrm{m}$; $A = 47{,}19\ \mathrm{m}^2$

c) $\beta = 105{,}999^\circ$; $a = 178{,}98\ \mathrm{m}$; $b = 208{,}30\ \mathrm{m}$; $r_i = 25{,}73\ \mathrm{m}$

d) $\gamma = 79{,}287^\circ$; $b = 55{,}30\ \mathrm{m}$; $c = 107{,}59\ \mathrm{m}$; $A = 2802{,}1\ \mathrm{m}^2$

e) $\gamma = 17{,}482^\circ$; $\alpha = 32{,}351^\circ$; $a = 78{,}97\ \mathrm{m}$; $s_a = 76{,}04\ \mathrm{m}$

f) $\gamma = 76{,}417^\circ$; $\beta = 27{,}166^\circ$; $b = 39{,}04\ \mathrm{m}$; $r_i = 15{,}37\ \mathrm{m}$; $w_\alpha = 41{,}75\ \mathrm{m}$

g) $\beta_1 = 73{,}297^\circ$; $\gamma_1 = 57{,}975^\circ$; $c_1 = 385{,}56\ \mathrm{m}$;

$\beta_2 = 106{,}703^\circ$; $\gamma_2 = 24{,}569^\circ$; $c_2 = 189{,}08\ \mathrm{m}$

h) nicht lösbar i) nicht lösbar

j) $\alpha = 21{,}709°$; $\beta = 100{,}086°$; $c = 86{,}40$ m; $h_a = 85{,}06$ m; $A = 1599{,}1$ m²
k) $\gamma = 32{,}192°$; $\alpha = 106{,}800°$; $b = 92{,}68$ m; $r = 70{,}62$ m
l) $\beta = 158{,}240°$; $\gamma = 1{,}421°$; $a = 112{,}68$ m; $r_i = 1{,}39$ m; $w_\alpha = 14{,}84$ m
m) $\alpha = 53{,}012°$; $\beta = 79{,}448°$; $\gamma = 47{,}540°$; $r_i = 59{,}12$ m; $A = 19148$ m²
n) $\alpha = 32{,}854°$; $\beta = 46{,}222°$; $\gamma = 100{,}924°$; $r = 63{,}58$ m; $s_a = 104{,}01$ m
o) $\alpha = 42{,}552°$; $\beta = 119{,}356°$; $\gamma = 18{,}092°$; $A = 379{,}58$ m²

678. a) $a = 32$ cm $b = 20$ cm; $c = 28$ cm; $\alpha = 81{,}8°$; $\beta = 38{,}2°$
b) $a = 28{,}7$ m; $\alpha = 33{,}1°$; $\gamma = 51{,}7°$; $c = 41{,}2$ m
c) $a = 23{,}6$ m; $b = 26{,}1$ m; $c = 32{,}2$ m; $\beta = 53{,}1°$; $\gamma = 80{,}7°$
d) $\gamma = 64{,}2°$; $a = 22{,}2$ m; $b = 33{,}2$ m; $c = 30{,}9$ m
e) nicht lösbar
f) $\gamma = 59{,}3°$; $a = 219$ m; $b = 101$ m; $c = 188$ m
g) $\gamma = 52{,}7°$; $\alpha = 75{,}3°$; $\beta = 52{,}0°$; $a = 29{,}4$ m; $b = 23{,}9$ m
h) $\gamma = 97{,}4°$; $a = 79{,}7$ m; $b = 74{,}7$ m; $c = 116$ m
i) $\alpha = 90{,}1°$; $\beta = 38{,}7°$; $a = 70{,}8$ m; $b = 44{,}2$ m; $c = 55{,}2$ m

681. $\alpha = 47{,}908°$; $\beta = 61{,}281°$; $\gamma = 70{,}812°$; $A = 6{,}07$ cm²

682. $a = 65$ cm; $b = 35$ cm; $c = 53$ cm; $A = 926{,}3$ cm²
$\alpha = 92{,}951°$; $\beta = 32{,}531°$; $\gamma = 54{,}518°$

683. $V_z = 1072{,}8$ cm³

684. $h_T = 180{,}422$ m

685. $\delta = 6'53''$; $h = 6{,}00$ m

686. $h = 120{,}68$ m

687. $x = 147{,}14$ m

688. $\overline{LS} = 14{,}0$ km $\approx 7{,}5$ sm; Kurs = S 72,12° W

689. 7,352 sm

690. N 38,211° W; $11^{\mathrm{h}}12^{\mathrm{min}}24^{\mathrm{s}}$; 250,7 km

691. S 58,14° W (wahrer Kurs); S 69,53° W (Eigenkurs); 53,5 km von A bzw. 93,6 km von B entfernt; $15^{\mathrm{h}}37^{\mathrm{min}}$

692. 141,79°; 120,00°; 98,21°

693. 841,7 N

694. $F_1 = 247{,}5$ N; $F_2 = 179{,}1$ N

695. $F_{S1} = 4933$ kp; $F_{S2} = 6958$ kp; $F_Z = 3991$ kp; $F_N = 2900$ kp

696. $\varepsilon = 76{,}523°$; $\beta = 9{,}421°$

697. $e_G = 0{,}16785a = 0{,}19381\,h$; $d = 2e - e_G$; $\varepsilon = 47{,}095°$

698. $\tan\psi = \dfrac{a\sin\varphi_a + b\sin\varphi_b}{a\cos\varphi_a + b\cos\varphi_b}$; $c = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\varphi}$

699. a) $\{20° + k\cdot 180°; 140° + k\cdot 180°\}$
b) $\{105° + k\cdot 180°\}$
c) $\{204° + k\cdot 360°; 336° + k\cdot 360°\}$
d) $\{-22{,}5° + k\cdot 180°\}$
e) $\{120° + k\cdot 720°; 240° + k\cdot 720°\}$
f) $\{62° + k\cdot 180°\}$
g) $\{-36° + k\cdot 540°\}$
h) $\{172{,}2° + k\cdot 360°; 187{,}8° + k\cdot 360°\}$
i) $\{\pm 10° + k\cdot 180°\}$
j) $\{\pm 34° + k\cdot 180°\}$
k) $\{\pm 77° + k\cdot 180°\}$
l) $\{\pm 67{,}1° + k\cdot 180°\}$
Es gilt stets $k \in G$.

700. a) $\{30° + k\cdot 180°\}$
b) $\{\pm 60° + (12k + 1)\cdot 30°\}$
c) $\{k\cdot 360°; 90° + k\cdot 360°\}$
d) $\{74{,}322° + k\cdot 360°; 208{,}358° + k\cdot 360°\}$
e) $\{17{,}031° + k\cdot 360°; 162{,}969° + k\cdot 360°\}$
f) $\{30° + k\cdot 360°; 150° + k\cdot 360°\}$
g) $\{51{,}33° + k\cdot 360°; 128{,}67° + k\cdot 360°\}$

h) $\{199{,}471° + k \cdot 360°;\ 340{,}529° + k \cdot 360°\}$
i) $\{\pm 45° + k \cdot 180°\}$
j) $\{90° + k \cdot 180°;\ 194{,}478° + k \cdot 360°;\ 345{,}522° + k \cdot 360°\}$
k) $\{90° + k \cdot 180°;\ \pm 60° + k \cdot 180°\}$ l) $\{90° + k \cdot 180°\}$
m) $\{k \cdot 180°;\ 45° + k \cdot 180°\}$ n) $\{48{,}719° + k \cdot 360°;\ 258{,}281° + k \cdot 360°\}$
o) $\{45° + k \cdot 180°\}$ p) $\{k \cdot 180°\}$
Es gilt stets $k \in G$.

701. a) $\{(240° + k_1 \cdot 360°;\ 210° - k_1 \cdot 360°);\ (120° + k_2 \cdot 360°;\ 330° - k_2 \cdot 360°)\}$
b) $\{(51{,}324° + k_1 \cdot 180°;\ 18{,}676° - k_1 \cdot 180°);\ (198{,}676° + k_2 \cdot 180°;\ -128{,}676° - k_2 \cdot 180°)\}$
c) $\{(67{,}5° + k \cdot 180°;\ -22{,}5° + k \cdot 180°)\}$
d) $\{(64{,}541° + k \cdot 180°;\ 23{,}659° - k \cdot 180°)\}$
e) $\{(44{,}498° + k_1 \cdot 180°;\ 14{,}498° + k_1 \cdot 180°);\ (75{,}502° + k_2 \cdot 180°;\ 45{,}502° + k_2 \cdot 180°)\}$
Es gilt stets $k, k_1, k_2 \in G$.

702. $b_1 = 106{,}46$ m; $c_1 = 38{,}56$ m; $\beta_1 = 119{,}311°$; $\gamma_1 = 18{,}409°$
$b_2 = 38{,}56$ m; $c_2 = 106{,}46$ m; $\beta_2 = 18{,}409°$; $\gamma_2 = 119{,}311°$

703. $\mu = 38°07'42''$; $\varphi = 48°29'18''$; $\psi = 72°33'38''$
$x = 844{,}48$ m; $y = 620{,}21$ m; $z = 635{,}76$ m

704. $\varphi = 40°04'15''$; $\psi = 55°18'15''$; $x = 98{,}78$ m

705. $\alpha = 71°06'26''$; $\delta = 60°58'16''$; $\delta_e = 37°31'26''$; $\delta_f = 23°26'50''$
$\beta = 62°35'47''$; $\varepsilon = 59°59'23''$; $\varepsilon_f = 39°08'57''$; $\varepsilon_d = 20°50'26''$
$\gamma = 46°17'43''$; $\varphi = 59°02'16''$; $\varphi_d = 25°27'17''$; $\varphi_e = 33°34'59''$
$x = 139{,}35$ m; $y = 105{,}79$ m; $z = 118{,}45$ m

706. $\alpha_1 = 84{,}143°$; $\alpha_2 = 37{,}457°$; $F_1 = 83{,}62$ kp; $F_2 = 51{,}12$ kp

707. Bild 329

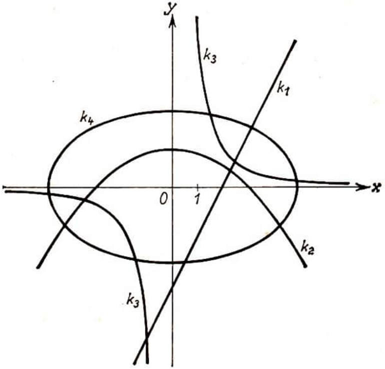


Bild 329

708. $P_1 \in k_1$, $P_1 \in k_3$, $P_2 \in k_2$, $P_2 \in k_3$, $P_3 \in k_2$, $P_3 \in k_4$, $P_4 \in k_1$, $P_4 \in k_4$

709. a) $P_1(-5; 2)$ b) $P_1(6; 0)$, $P_2(2; 4)$ c) kein Schnittpunkt

710. a) $x_1 = 3$ b) $x_{1;2} = \pm 10$ c) $x_1 = 1$, $x_2 = 4$
d) kein Schnittpunkt

711. a) $y_1 = 3$ b) $y_{1;2} = \pm 5$; c) $y_1 = 1$
d) kein Schnittpunkt

712. a) $\frac{1}{2}x^2 + x - y - \frac{5}{2} = 0$ b) $2x - y + 1 = 0$ c) $x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$
d) $4x^2 - 9y^2 + 36 = 0$ (Bild 330)

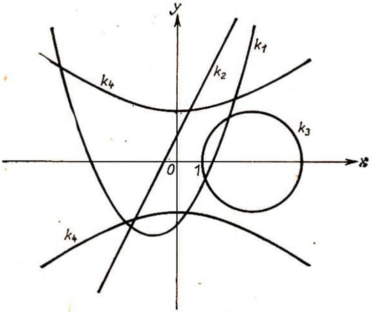


Bild 330

713. s. Kurve k_2 in Bild 329

714. a) $r = \frac{8 \cot^2\varphi}{\sin \varphi}$ b) $r = \frac{1}{2 \cos \varphi - \sin \varphi}$ c) $r = \sqrt{\frac{1}{\cos 2\varphi}}$

715. a) $y^2 - 4x - 4 = 0$ b) $x + y - 4 = 0$
c) $x^2 + y^2 - 4y + x = 0$

716. a) $\overline{P_1P_2} = 5$; $\alpha = 36°50'$ b) $\overline{P_1P_2} = 13$; $\alpha = 112°35'$
c) $\overline{P_1P_2} = 17{,}5$; $\alpha = 59°$ d) $\overline{P_1P_2} = 17$; $\alpha = 61°55'$
e) $\overline{P_1P_2} = 10{,}63$; $\alpha = 138°49'$ f) $\overline{P_1P_2} = 5{,}64$; $\alpha = 115°12'$

717. $P_0(0;\,1)$ (Bild 331) 718. $P(0;\,-12{,}5)$

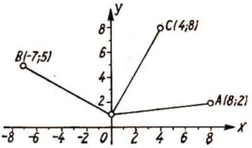


Bild 331

719. a) $\overline{AB} = 13{,}34$; $\overline{AC} = 14{,}87$; $\overline{BC} = 8{,}54$

$\alpha = 34°45'$; $\beta = 82°25'$; $\gamma = 62°50'$

b) $\overline{P_1P_2} = 7{,}28$; $\overline{P_2P_3} = 9{,}22$; $\overline{P_1P_3} = 5{,}19$

$\varphi_1 \approx 95°$; $\varphi_2 \approx 33°$; $\varphi_3 \approx 52°$

c) $\overline{EF} = 3{,}54$; $\overline{FD} = 7{,}43$; $\overline{DE} = 7{,}57$

$\sphericalangle EFD \approx 78°$; $\sphericalangle FDE \approx 27°$;

$\sphericalangle DEF \approx 75°$

720. $\overline{AC} = 5{,}1$ und $\overline{BD} = 8{,}06 \approx 8{,}1$

721. $P_1(-a;\,0)$; $P_2\left(-\frac{a}{2};\,-\frac{a}{2}\sqrt{3}\right)$; $P_3\left(\frac{a}{2};\,-\frac{a}{2}\sqrt{3}\right)$; $P_4(a;\,0)$;

$P_5\left(\frac{a}{2};\,\frac{a}{2}\sqrt{3}\right)$; $P_6\left(-\frac{a}{2};\,\frac{a}{2}\sqrt{3}\right)$

722. a) $M\left(-\frac{1}{2};\,\frac{3}{2}\right)$ b) $M(2;\,0)$

c) $M\left(1;\,-\frac{1}{2}\right)$ d) $M(0{,}35;\,1{,}65)$

723. $T_{\mathrm{i}}\left(0;\,\frac{5}{8}\right)$ und $T_{\mathrm{a}}\left(-3;\,\frac{7}{4}\right)$ 724. $T_{\mathrm{i}}(1;\,-4)$ und $T_{\mathrm{i}}(2;\,-3)$

725. a) $S\left(\frac{10}{3};\,\frac{8}{3}\right)$ b) $S(2;\,2)$ c) $S\left(-\frac{4}{3};\,-\frac{5}{3}\right)$

726. $P_3(-3;\,-1)$; $\overline{P_1P_2} \approx 6{,}1$; $\overline{P_2P_3} \approx 5{,}9$; $\overline{P_1P_3} \approx 5{,}5$

727. $P_3(x_3 = 2x_2 - x_1;\, y_3 = 2y_2 - y_1)$ 728. $D(0;\,4)$

729. a) $A_\triangle = 27{,}5$ b) $A_\triangle = 124$ c) $A_\triangle = 0$ d) $A_\triangle = 44$

730. $A_\triangle = 5{,}3$ 731. $A_{\text{Viereck}} = A_1 + A_2 = 3 + 3 = 6$

732. $A_{\text{Fünfeck}} = A_1 + A_2 + A_3 = 13 + 35 + 20 = 68$ 733. $A_{\text{Sechseck}} = 78$

734. a) $A_\triangle = 6$ Die 3 Punkte liegen nicht auf einer Geraden.

b) $A_\triangle = 0$ Die 3 Punkte liegen auf einer Geraden.

c) $A_\triangle = 0$ Die 3 Punkte liegen auf einer Geraden.

d) $A_\triangle = 0{,}04$ Die 3 Punkte liegen nicht auf einer Geraden.

735. $a = -\frac{C}{A}$; $b = -\frac{C}{B}$

736. $\frac{x}{4} - \frac{y}{3} = 1$

737. (Bild 332)

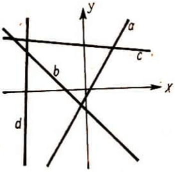


Bild 332

738.

	$\alpha = 45°$	$\alpha = 135°$	$\alpha = 30°$	$\alpha = 60°$
a)	$y = x - 4$	$y = -x + 4$	$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{4\sqrt{3}}{3}$	$y = \sqrt{3}\cdot x - 4\sqrt{3}$
b)	$y = x - 3$	$y = -x - 3$	$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{\sqrt{3}-5}{2}$	$y = \sqrt{3}\cdot x - 3$
c)	$y = x + 2$	$y = -x + 8$	$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + (5 - \sqrt{3})$	$y = \sqrt{3}\cdot x - (3\sqrt{3} - 5)$
d)	$y = x - 1$	$y = -x - 5$	$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{2\sqrt{3}-9}{3}$	$y = \sqrt{3}\cdot x + (2\sqrt{3} - 3)$
e)	$y = x - 4$	$y = -x + 1$	$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{5\sqrt{3}+9}{6}$	$y = \sqrt{3}\cdot x - \frac{5\sqrt{3}+3}{2}$
f)	$y = x + 1$	$y = -x + 4$	$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{3\sqrt{3}-15}{6}$	$y = \sqrt{3}\cdot x - \frac{3\sqrt{3}-5}{2}$
g)	$y = x + \frac{3}{4}$	$y = -x - \frac{7}{4}$	$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{5\sqrt{3}-6}{12}$	$y = \sqrt{3}\cdot x + \frac{5\sqrt{3}-2}{4}$
h)	$y = x + \frac{29}{8}$	$y = -x + \frac{19}{8}$	$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{5\sqrt{3}+72}{24}$	$y = \sqrt{3}\cdot x + \frac{5\sqrt{3}+24}{8}$

739. $y = 1{,}5x - 8{,}5$ **740.** $y = -0{,}67x + 7{,}68$

741. Bild 333

742. $y = \sqrt{3}\,x + 3$ **743.** $y = -4{,}99x - 4$

744. a) $y = \frac{2x+1}{3}$ b) $y = 0$ c) $y = \frac{3}{2}x$

d) $x = 2$ e) $y = 2x + 2$ f) $y = \frac{x+3}{2}$

745. $b = -2$

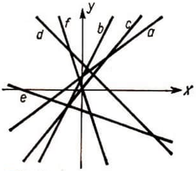


Bild 333

746. a) $\overline{AB}$: $y = x$; $\overline{BC}$: $y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$; $\overline{CA}$: $y = -\frac{3}{2}x - \frac{5}{2}$

s_c: $y = -\frac{2}{3}x$; s_b: $y = \frac{x}{6} + \frac{5}{6}$; s_a: $x = -1$

b) $\overline{AB}$: $y = -3x - 4$; $\overline{BC}$: $y = \frac{3}{5}x + \frac{34}{5}$; $\overline{CA}$: $y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$

s_c: $y = x + 4$; s_b: $y = 5$; s_a: $y = 3x + 2$

747. $\overline{P_1P_2}$: $y = -\frac{5}{4}x + \frac{31}{4}$; $\overline{P_2P_3}$: $y = \frac{4}{13}x - \frac{41}{13}$

$\overline{P_3P_4}$: $y = -\frac{8}{5}x - \frac{73}{5}$; $\overline{P_4P_1}$: $y = -\frac{7}{19}x + \frac{97}{19}$

$\overline{P_1P_3}$: $y = x + 1$; $\overline{P_2P_4}$: $y = -\frac{12}{23}x + \frac{61}{23}$

748. a) $y = -\frac{2}{5}x + 2$ b) $y = \frac{4}{3}x + 4$

c) $y = -2x - 2$ d) $y = \frac{3}{2}x - 3$

749. $\frac{x}{-4} + \frac{y}{2{,}5} = 1$; $\frac{x}{3} + \frac{y}{-3{,}5} = 1$

750. a) $x - 2y - 6 = 0$ b) $3x + 4y - 20 = 0$
c) $2x + 3y - 6 = 0$ d) $4x - 5y + 14 = 0$

751. a) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ b) $\frac{x}{3} + \frac{y}{-4} = 1$

c) $\frac{x}{-5} + \frac{y}{3} = 1$ d) $\frac{x}{-4} + \frac{y}{-1} = 1$

752. a) $y = x + 3$; $\alpha = 45°$; $b = 3$ b) $y = -x - 3$; $\alpha = 135°$; $b = -3$

c) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - 2$; $\alpha = 30°$; $b = -2$ d) $y = \sqrt{3}\,x + 3$; $\alpha = 60°$; $b = 3$

e) $y = \frac{4}{3}x - 6$; $\alpha = 53°10'$; $b = -6$

f) $y = -\frac{x}{2} - \frac{3}{2}$; $\alpha = 153°25'$; $b = -1{,}5$

753. a) P_1 liegt auf der Geraden. b) P_2 liegt nicht auf der Geraden.
c) P_3 liegt auf der Geraden. d) P_4 liegt nicht auf der Geraden.

754. $y_1 = 3$

755. a) $-\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - \frac{7}{5} = 0$ b) $\frac{15}{17}x + \frac{8}{17}y - 2 = 0$

c) $\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y - 4\sqrt{2} = 0$ d) $\frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y - 2 = 0$

756. $|d| = 2{,}121$; $d < 0$ Der Punkt P liegt auf derselben Seite der Geraden wie der Ursprung.

757. $|d| = 9{,}4$; $d < 0$ Der Punkt P liegt auf derselben Seite der Geraden wie der Ursprung.

758. a) $|d| = 1{,}8$ b) $|d| = 2$ c) $|d| = 5$ d) $|d| = 3\frac{3}{13} \approx 3{,}23$

759. g_1: $x + 3 = 0$; g_2: $8x + 15y - 51 = 0$

760. g_1: $x - 8 = 0$; g_2: $1{,}05x - y - 3{,}4 = 0$

761. $r = \frac{5}{\cos\varphi - 2{,}5 \cdot \sin\varphi} = \frac{5}{\cos\varphi\,(1 - 2{,}5 \cdot \tan\varphi)}$

762. $r = \frac{2}{\sin\varphi + \cos\varphi} = \frac{2}{\sin\varphi(1 + \cot\varphi)}$

763. $r = \frac{4}{\cos\varphi + 0{,}8 \cdot \sin\varphi} = \frac{4}{\cos\varphi(1 + 0{,}8 \cdot \tan\varphi)}$

764. $5x + 3y - 15 = 0$ **765.** $x - y - a = 0$

766. a) $x + 2y - 1 = 0$ oder $y = -\frac{x}{2} + \frac{1}{2}$

Gerade, deren Anstiegswinkel α stumpf ist.

b) $\frac{x}{1} + \frac{y}{0{,}5} = 1$; $a = 1$; $b = 0{,}5$

c) $m = \tan\alpha = -\frac{1}{2}$; $\alpha = 153°26'$ d) $p \approx 0{,}45$ Abstand der Geraden vom Ursprung

767. Mit Hilfe der Winkelrelation $\cos 2t = 1 - 2\sin^2 t$ kann der Parameter t eliminiert werden.

$x = \cos^2 t$ oder $x = \cos^2 t$

$y = 1 - 2\sin^2 t$ $\frac{1-y}{2} = \sin^2 t$

Durch Addition beider Gleichungen ergibt sich:

$2x - y - 1 = 0$ oder $y = 2x - 1$ Gerade mit spitzem Anstiegswinkel

768. $\sqrt{3}\cdot x + y = 0$ oder $y = -\sqrt{3}\cdot x$ Gerade durch den Ursprung mit Anstiegswinkel $\alpha = 120°$

769. Man wählt ein beliebiges Dreieck und legt $\overline{AB} = c$ auf die x-Achse. Die Höhe h_c legt man in die y-Achse (Bild 334).

$2hx - 2\left(c - 2\sqrt{b^2 - h^2}\right)y + h\left(c - 2\sqrt{b^2 - h^2}\right) = 0$

g Grundlinie des einbeschriebenen Rechtecks

$b = \overline{AC}$ (Bild 334)

770. $y = \pm\frac{4}{3}x$ (Bild 335)

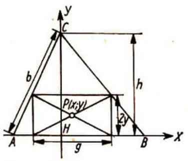


Bild 334

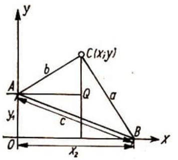


Bild 335

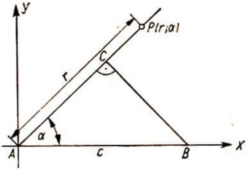


Bild 336

771. $x = \frac{p^2}{c}$, wobei die Hypotenuse $\overline{AB} = c$ in der x-Achse liegt und A mit dem Ursprung zusammenfällt. Es soll sein: $\overline{AC}\cdot\overline{AP} = \text{const} = p^2$. Setzt man $\overline{AP} = r$ und bedenkt man, daß $\overline{AC} = c\cdot\cos\alpha$ und $\overline{AP} = \frac{p^2}{\overline{AC}}$, also: $r = \frac{p^2}{c\cdot\cos\alpha}$, so wird: $r\cdot\cos\alpha = \frac{p^2}{c}$ und bei Übergang zu rechtwinkligen Koordinaten: $x = \frac{p^2}{c}$. Die gesuchte Punktmenge stellt eine zur Hypotenuse senkrechte Gerade dar (Bild 336).

772. a) $S(2;\,1)$ b) $S\left(-2;\,\frac{3}{2}\right)$ c) $S(3;\,-1)$

d) $S(-4;\,-3)$ e) $S(-5;\,2)$ f) $S(1{,}49;\,5{,}97)$

773. a) $P_1(3; 0)$ $P_2(-2; 3)$ $P_3(-3; -1)$
b) $P_1(-2,6; -1,2)$ $P_2(3; -2)$ $P_3(2,2; 0,4)$
c) $P_1(2,5; -0,5)$ $P_2\left(-\frac{1}{14}; -\frac{19}{14}\right)$ $P_3(8,5; -6,5)$

774. $P_1(2; -2)$ $P_2\left(-3; \frac{1}{2}\right)$ $P_3(3; 2,5)$ $P_4(5; 0)$

$e\colon 9x - 2y - 22 = 0$
$f\colon x + 16y - 5 = 0$

Diagonalschnittpunkt: $R\left(2\frac{35}{73}; \frac{23}{146}\right)$

775. a) $y = 3x - 14$ b) $y = -2x + 1$

776. $s_a\colon 5x - 7y + 8 = 0$ $s_b\colon 2x + 11y - 6 = 0$ $s_c\colon 7x + 4y + 2 = 0$

777. $\varphi = 102^\circ 5'$

778. a) $\varphi = 90^\circ$ b) $\varphi = 95^\circ$ c) $\varphi = 0^\circ$ d) $\varphi = 69^\circ 20'$

779. $\varphi_1 = 53^\circ 10'$; $\varphi_2 = 51^\circ 10'$; $\varphi_3 = 75^\circ 40'$

780. $3x + 2y + 1 = 0$ **781.** $3x + 2y - 12 = 0$

782. a) $y = x + 1$ b) $y = -3x + 9$ c) $y = 3x - 3$ d) $y = -\frac{3}{2}x + 6$

783. $y = -5x + 23$ und $y = \frac{1}{5}x - 3$

784. $\alpha = 44^\circ 40'$ $\beta = 73^\circ 40'$ $\gamma = 61^\circ 40'$

785. $\alpha = 82^\circ 20'$ $\beta = 70^\circ 20'$ $\gamma = 64^\circ 40'$ $\delta = 142^\circ 40'$ $\varphi = 81^\circ 48'$

786. a) $d = 2,6$ b) $d = 1,78$ c) $d = 1,66$ d) $d = \frac{b}{\sqrt{1 + m^2}}$

787. $x - 2y - 1 = 0$; $2x + 5y + 2 = 0$; $5x - y - 1 = 0$
$S(^1/_9; -^4/_9)$ Schnittpunkt der Höhen.
Je zwei Höhen müssen sich in ein und demselben Punkte S schneiden.

788. $m_a\colon 7x + y + 2 = 0$
$m_b\colon 5x + 9y + 16 = 0$
$m_c\colon x - 4y - 7 = 0$

Schnittpunkt der Mittellote: $M\,(-^1/_{29}; -^{51}/_{29})$

789. a) $a = 11,7$; $b = 9,2$; $c = 8,1$
b) $a\colon 5x + 3y - 9 = 0$; $b\colon 9x - 2y + 43 = 0$
$c\colon x + 8y + 13 = 0$
c) Mittelpunkte der Seiten: $M_a(0; 3)$; $M_b(-4; 3,5)$; $M_c(-1; -1,5)$
$s_a\colon 4x - 5y + 15 = 0$; $s_b\colon 11x + 14y - 5 = 0$
$s_c\colon 19x + 4y + 25 = 0$
d) $s_a = 6,4$; $s_b = 8,9$; $s_c = 9,7$
e) $h_a = 6,3$; $h_b = 8,0$; $h_c = 9,2$
f) $h_a\colon 3x - 5y + 10 = 0$; $h_b\colon 2x + 9y + 12 = 0$; $h_c\colon 8x - y + 32 = 0$
g) $\alpha = 84^\circ 36'$; $\beta = 51^\circ 55'$; $\gamma = 43^\circ 29'$
h) $m_a\colon 3x - 5y + 15 = 0$; $m_b\colon 4x + 18y - 47 = 0$; $m_c\colon 16x - 2y + 13 = 0$
i) $M(-0,5; 2,7)$; $r = 5,8$
k) $S(-1,7; 1,7)$ (gerundeter Wert!)
l) $A = 37$ (FE) (gerundeter Wert!)

790. a) w_1: $12y + 11 = 0$ (Parallele zur x-Achse)
w_2: $9x + 4 = 0$ (Parallele zur y-Achse)
b) w_1: $2x + y - 7 = 0$
w_2: $x - 2y - 11 = 0$
c) w_1: $x + y = 0$ (Gerade durch 0 unter $\alpha = 135°$)
w_2: $x - y - 1 = 0$ Zu w_1 senkrechte Gerade
d) w_1: $2x + 7 = 0$ (Parallele zur y-Achse)
w_2: $y - 1 = 0$ (Parallele zur x-Achse)

791. a) $\overline{AB} = c$: $2x + 6y - 1 = 0$
$\overline{BC} = a$: $6x + 2y - 7 = 0$
$\overline{AC} = b$: $6x - 2y + 7 = 0$
b) w_α: $x - 2y + 2 = 0$
w_β: $x + y - 1 = 0$
w_γ: $12x = 0$, d. h. $x = 0$ (Ordinatenachse)
c) Mittelpunkt : $M(0; 1)$
d) $|\varrho| = 0{,}79$, d. h. $\varrho \approx 0{,}8$

792. $O'(-4; 3)$
$\xi = x + 4$
$\eta = y - 3$

$P_1(-4; 2)$	im alten System	$P_1'(0; -1)$	im neuen System
$P_2(5; 3)$		$P_2'(9; 0)$	
$P_3(0; 6)$		$P_3'(4; 3)$	
$P_4(2; -5)$		$P_4'(6; -8)$	
$P_5(-1; 7)$		$P_5'(3; 4)$	

793. $O'(-2; 3)$
$\xi = x + 2$
$\eta = y - 3$

$P_1(3; 1)$	im alten System	$P_1'(5; -2)$	im neuen System
$P_2(-1; 2)$		$P_2'(1; -1)$	
$P_3(-4; 1)$		$P_3'(-2; -2)$	

794. $\eta = 2\xi - 6$

795. $O'(4; 4)$ $A(-1; 0)$ $B(1; 0)$ $C(0; 2)$
$\overline{AB}$: $y = 4$; $\eta = 0$
$\overline{AC}$: $y = 2x - 2$; $\eta = 2\xi + 2$
$\overline{BC}$: $y = -2x + 14$; $\eta = -2\xi + 2$

796. $\begin{cases} \text{Schwerpunkt } S(-3; 1) \\ A(-5; 2) \quad B(5; 3) \quad C(0; -5) \end{cases}$

797. $\xi = \sqrt{3} \approx 1{,}7$

798. $y = \dfrac{x}{5} + 1$ (gegebene Geradengleichung im x, y-System)

$\eta = \dfrac{\xi}{5} + 2{,}7$ (Gleichung im Parallelsystem ξ, η)

$\eta' = -0{,}59\xi + 3{,}1$ (Gleichung im gedrehten System mit gerundeten Werten)

$\tan\alpha = \dfrac{1}{5} = 0{,}2$; $\tan\alpha' = -0{,}59$ (gerundeter Wert)!

$\alpha \approx 11°20'$; $\alpha' \approx 149°$

799. $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 36$

800. $M(0; 5)$ $r = \sqrt{3} = 1{,}732$

801. a) $M(4;\,5)$ $r = 3$ b) $M\left(-6;\,\frac{5}{2}\right)$ $r = 6{,}5$

c) $M(4;\,0)$ $r = 5$ d) $M(0;\,-5)$ $r = 5$

e) $M(-7;\,5)$ $r = 5{,}1$ f) $M\left(\frac{1}{2};\,\frac{1}{3}\right)$ $r = 2{,}5$

802. $(x-15)^2 + (y-8)^2 = 289$

803. $(x+8)^2 + (y-6)^2 = 25$

804. $(x+5)^2 + (y-8)^2 = 25$

805. $\begin{cases}(x-5)^2 + (y-5)^2 = 25\\(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1\end{cases}$

806. $(x-7)^2 + (y-2)^2 = 16$

807. $(x-5)^2 + (y+5)^2 = 625$

808. $\begin{cases}(x-5)^2 + (y-3)^2 = 225\\M(5;\,3) \qquad r = 15\end{cases}$

809. Es ergeben sich zwei Kreise:

$\begin{cases}(x-10)^2 + (y+9)^2 = 100\\(x-5)^2 + (y-1)^2 = 25\end{cases}$

810. $(x-3)^2 + \left(y \pm \sqrt{10}\right)^2 = 10$

811. $P_1(13;\,9)$; $P_2(-9;\,-13)$

812. $P(3;\,5)$ Die Gerade ist Tangente an den Kreis.

813. $P_1(-3;\,0)$; $P_2(-19;\,0)$; $P_3(0;\,13{,}9)$; $P_4(0;\,4{,}1)$

814. Die Gerade berührt den Kreis in $P(4;\,3)$.

815. $x_{1;2} =$ imaginär. Die Gerade liegt außerhalb des Kreises.

816. $P_1(-4{,}1;\,-0{,}3)$; $P_2(0;\,2{,}2)$

817. Es gibt für M zwei Lösungen.

Da $\overline{MP_0} = r$ auf der Tangente senkrecht steht, hat r den Anstieg $m_r = -\frac{1}{m_t} = \frac{4}{3}$.
Gleichung des Lotes zu der Tangente in P_0: $y = \frac{4}{3}x + \frac{13}{3}$.
Der Kreis um P_0 mit $r = 5$ schneidet das Lot in

$$M_1(2;\,7) \text{ und } M_2(-4;\,-1)$$

818. Da der Kreis in Mittelpunktslage vorliegt, so ist seine Gleichung

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Wenn der Kreis die gegebene Gerade berührt, so wird nur ein gemeinsamer Punkt vorhanden sein, d. h., die Diskriminante Δ der Schnittpunktskoordinaten muß verschwinden.

$$r^2(1+m^2) - b^2 = \Delta = 0$$

$$r = 2{,}5; \quad P_0(-2;\,1{,}5).$$

819. M hat den Abstand $|d| = r$ von der gegebenen Geraden. Mittels der Hesseschen Normalform der Geraden ergibt sich:

$$d = \frac{16x_m + 12y_m - 84}{\sqrt{256+144}} = \frac{-24+9-84}{20} = -4{,}95$$

$$|d| = r = 4{,}95; \quad (x+1{,}5)^2 + (y-0{,}75)^2 = 4{,}95^2; \quad P_0(2{,}46;\,3{,}72).$$

820. k_1: $(x + 4{,}5)^2 + (y + 1{,}5)^2 = 6{,}25$; k_2: $(x + 0{,}715)^2 + (y - 2{,}285)^2 = 1{,}65$

821. $M_1(-1;\ -1)$; $M_2(-3{,}5;\ 1{,}5)$; $r_1 = 2$; $r_2 = 2{,}5$

822. $x^2 + y^2 - r^2 + \dfrac{l^2 \cdot n \cdot m}{(n+m)^2} = 0$ bei: $\dfrac{m}{n} = \lambda$ $x^2 + y^2 = r^2 - \dfrac{\lambda \cdot l^2}{(1+\lambda)^2} = \bar{r}^2$

Sonderfall: Liegt $P(x;\ y)$ auf der Sehnenmitte, so ist $\lambda = 1$, und obige Gleichung lautet:

$$x^2 + y^2 = r^2 - \frac{l^2}{4} = \bar{r}^2$$

Der Sehnenpunkt $P(x;\ y)$ bewegt sich in jedem Falle auf einem Kreis in konzentrischer Lage.

823. Man lege $\overline{AB}$ in die Abszissenachse und den Ursprung des Koordinatensystems in die Mitte von $\overline{AB}$ Ist $P(x;\ y)$ ein Punkt der gesuchten Menge, so ist:

$$\overline{AP} = \sqrt{(x+3)^2 + (y-0)^2}$$

$$\overline{BP} = \sqrt{(x-3)^2 + (y-0)^2}$$

$$\overline{AP} : \overline{BP} = \text{const} = \lambda$$

Die Punktmenge stellt einen Kreis dar mit der Bedingungsgleichung:

$$\left[x + \frac{3(1+\lambda^2)}{1-\lambda^2}\right]^2 + y^2 = \frac{36\lambda^2}{(1-\lambda^2)^2}$$

Für $\lambda = \dfrac{3}{2}$ lautet die Kreisgleichung:

$$(x - 7{,}8)^2 + y^2 = \frac{1296}{25}; \quad \text{also: } M(7{,}8;\ 0) \quad \text{und} \quad r = \frac{36}{5} = 7{,}2$$

824. Wähle P als Pol eines Polarkoordinatensystems und zeichne senkrecht zur Polarachse im Abstand a die Gerade g. Ist r der Radiusvektor nach einem Punkt der Geraden und r' der Radiusvektor nach einem Punkt der gesuchten Menge, so gilt:

$$r : p = p : r',$$

wobei p Proportionalitätsfaktor

$$r' = \frac{p^2}{r} \quad \text{und} \quad r = \frac{a}{\cos\varphi}, \quad \text{also:} \quad r' = \frac{p^2\cos\varphi}{a}$$

oder in rechtwinkligen Koordinaten:

$$\left(x - \frac{p^2}{2a}\right)^2 + y^2 = \frac{p^4}{4a^2}$$

Die Punktmenge stellt einen Kreis dar mit dem Radius $\varrho = \dfrac{p^2}{2a}$ und dem Mittelpunkt $M\left(\dfrac{p^2}{2a};\ 0\right)$.

825. $x^2 + y^2 - ax - by = 0$ Kreis durch den Mittelpunkt des gegebenen Kreises

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Gegebener Punkt: $P(a;\ b)$.

Rascher gelangt man zum Ziel, wenn der feste Punkt P auf die x-Achse gelegt wird, also $P(a;\,0)$. Den Kreis wählt man in Mittelpunktslage. Dann lautet die Gleichung der gesuchten Punktmenge

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\frac{a^2}{4}$$

Es ist ein Kreis in Scheitellage mit dem Mittelpunkt $M'\left(\frac{a}{2};\,0\right)$ und dem Radius $\varrho=\frac{a}{2}$.

826. $x^2+y^2-4x=0;\quad M'(2;\,0);\quad \varrho=2\text{ cm}$

827. $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\frac{2s^2-a^2}{4};\quad M\left(\frac{a}{2};\,0\right);\quad r=\frac{1}{2}\sqrt{2s^2-a^2}$

828. $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(y-\frac{a}{6}\sqrt{3}\right)^2=\frac{s^2-a^2}{3};\quad M\left(\frac{a}{2};\,\frac{a}{6}\sqrt{3}\right);\quad r=\sqrt{\frac{s^2-a^2}{3}}$

829. a) $x=5$ b) $3x+4y-25=0$

830. a) $5x+12y-169=0$ b) $12x-5y+169=0$
c) $P_0(17;\,7)$ d) $\varphi=90°$

831. a) $5x-12y+119=0;\quad 5x+12y+239=0$
b) $\varphi=134{,}7°=134°42';\quad y_1=7;\quad y_2=-17$

832. a) $8x+7y-97=0;\quad 8x-7y-209=0;\quad y_1=-1;\quad y_2=-15$
b) $3x-7y-65=0;\quad 3x+7y+23=0;\quad x_1=10;\quad x_2=4$

833. $m_g=m_{t_1}=m_{t_2}=\frac{4}{3};\quad P_1\left(2;\,-\frac{3}{2}\right)$ und $P_2\left(-2;\,\frac{3}{2}\right)$
t_1: $8x-6y-25=0;\quad t_2$: $8x-6y+25=0$

834. $m_g=-\frac{1}{m_{t_1}}=-\frac{1}{m_{t_2}}=-\frac{3}{4};\quad P_1(4;\,12)$ und $P_2(-8;\,-4)$
t_1: $3x+4y-60=0;\quad t_2$: $3x+4y+40=0$

835. $3x-4y+50=0;\quad 4x+3y+50=0$

836. $2x-29y+66=0;\quad 2x-y+10=0$

837. $2x+y-20=0;\quad x+2y-18=0$

838. $1{,}9x+0{,}7y+1{,}7=0;\quad 0{,}3x+2y+5=0;\quad \varphi=61°10'$

839. $x^2+\left(y-\frac{r}{2}\right)^2=\frac{5r^2}{4};\quad M'\left(0;\,\frac{r}{2}\right);\quad \varrho=\frac{r}{2}\sqrt{5}$

840. $x^2+(y-r)^2=r^2;\quad M'(0;\,r);\quad \varrho=r$

841. a) $M_1(2;\,-4)\quad M_2(7;\,8)\quad r_1=5\quad r_2=4$
Die Kreise meiden einander.
b) $M_1(-5;\,7)\quad M_2(3;\,-8)\quad P_B\left(\frac{3}{17};\,-\frac{46}{17}\right)\quad r_1=11\quad r_2=6$
Die Kreise berühren einander von außen.
c) $M_1(-3;\,-2)\quad M_2(4;\,-5)\quad r_1=7\quad r_2=6$
$P_1\left(\frac{10}{3};\,0{,}96\right)\quad P_2(-0{,}77;\,-8{,}63)$
Die Kreise schneiden einander.

d) $M_1(-8;\ -7)$ $M_2(-5;\ -11)$ $P_B(-4{,}4;\ -11{,}8)$ $r_1 = 6$ $r_2 = 1$

Die Kreise berühren einander von innen.

842. $\varphi = 60°$

843. $14x + 6y - 39 = 0$ (Potenzlinie)

$P_1\left(\frac{141}{58};\ \frac{24}{29}\right)$; $P_2\left(\frac{3}{2};\ 3\right)$; $\varphi = 36°52'$

844. $\varphi = 58°9'$

845. Schnittpunkte von k_1 und k_2: $P_1(-0{,}9;\ 1{,}2)$; $P_2(-2{,}1;\ -1{,}2)$

Gleichung der Potenzlinie: $2x - y + 3 = 0$

Gleichung des Kreises durch P_1, P_2 und P_3:

$(x - 5{,}7)^2 + (y + 3{,}6)^2 = 66{,}6$ (bei Rechenstabbenutzung)

$r_1 \approx 3{,}6$; $r_2 = 1{,}32 \approx 1{,}3$; $r = 8{,}15 \approx 8{,}2$

$x_m \approx 5{,}7$; $y_m \approx -3{,}6$

846. $P_1(-2{,}77;\ 0{,}44)$ $P_2(0{,}91;\ 2{,}65)$ Länge der Sehne: $s = 4{,}29$

847. $M(3;\ 5)$ und $M'(0{,}1;\ -1{,}4)$

848. $x_m = \frac{35}{23} \approx 1{,}52$ $y_m = -\frac{81}{23} \approx -3{,}52$ $r \approx 3{,}55$

851. Parabel nach a), b) rechts, c) links, d) oben, e) unten geöffnet.

852. $P_1 \in k_1$, $P_2 \in k_1$, $P_2 \in k_3$, $P_3 \in k_1$, $P_3 \in k_2$, $P_6 \in k_2$.

853. a) $F\left(\frac{5}{2};\ 0\right)$ b) $F(0;\ -4)$ c) $F(-0{,}2;\ 0)$

d) $F(0;\ 0{,}5)$ e) $F\left(-\frac{5}{4};\ 0\right)$ f) $F(0;\ 1)$

854. a) $y^2 = 4x$ b) $y^2 = 10x$ c) $y^2 = 0{,}734x$

855. a) $x^2 = 4y$ b) $x^2 = -6y$ c) $x^2 = 1{,}54y$

856. 2 Lösungen: $y^2 = -\frac{25}{24}x$; $x^2 = \frac{9}{5}y$

857. $d = 10$ 858. $p = \frac{a}{12}\sqrt{3}$ 859. $\overline{AS} = 18$

860. Für das in Bild 337 eingezeichnete Koordinatensystem gilt die Parabelgleichung $y^2 = 2px$. P_1 ist ein Parabelpunkt:

$$y_1^2 = 2px_1 \quad \text{oder} \quad 2p = \frac{y_1^2}{x_1}.$$

Für die Parabelgleichung gilt daher

$$y^2 = \frac{y_1^2}{x_1}x. \tag{I}$$

Aus ähnlichen Dreiecken folgen die Proportionen:

$$\frac{y_1}{u} = \frac{y_2}{x_2} \qquad \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{u}.$$

Die Gleichungen miteinander multipliziert und umgeformt ergeben:

$$y_2^2 = \frac{y_1^2}{x_1} x_2,$$

d. h., die Koordinaten von P_2 erfüllen die Gleichung (I).

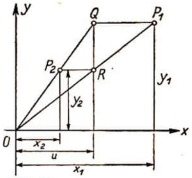


Bild 337

861. a) $(y+5)^2 = 8(x+2)$ b) $(x-3)^2 = -y$
c) $(y-10)^2 = -3(x+1)$ d) $(x-6)^2 = 14(y+6)$

862. a) $S(-1; 3)$; $F(2; 3)$ b) $S(-4; -6)$; $F\left(-4; -\frac{29}{4}\right)$
c) $S(0; -10)$; $F(-1; -10)$ d) $S\left(\frac{7}{2}; -\frac{1}{4}\right)$; $F\left(\frac{7}{2}; 0\right)$

863. $x_s = -\frac{b_1}{2b_2}$, $y_s = \frac{4b_0b_2 - b_1^2}{4b_2}$

864. a) $S(-2; 3)$, $F(1; 3)$ b) $S\left(\frac{4}{3}; 4\right)$, $F\left(\frac{4}{3}; \frac{23}{6}\right)$
c) $S(-2; 0)$, $F(-2{,}6; 0)$

865. a) $y'^2 = 2px' + p^2$ b) $y'^2 = 2px' - p^2$

866. a) $x^2 = -9(a+h)(y-h)$ bzw. $x^2 = -\frac{l^2}{4(a+h)}(y-h)$ b) $\overline{CD} = \frac{l}{2}\sqrt{2}$
c) $\overline{CD} = 29{,}4$ m; $h_1 = h_4 = 3{,}22$ m; $h_2 = h_3 = 5{,}31$ m

867. Parabel mit $p = r$, zum Durchmesser hin geöffnet.

868. Parabel: $(x-6)^2 = 12(y-4)$

869. Wählt man die Gerade g als x-Achse, die Senkrechte dazu durch A als y-Achse, dann ergeben sich die Kurvengleichungen

$$\sqrt{x^2 + (y-y_a)^2} \pm y = c \quad \text{für} \quad \begin{cases} y > 0 \\ y < 0 \end{cases}$$

$$\text{bzw.} \quad x^2 = \mp 2(c \mp y_a) \cdot \left(y \mp \frac{c \pm y_a}{2}\right).$$

Das obere Vorzeichen ergibt einen nach unten geöffneten, das untere Vorzeichen einen nach oben geöffneten Parabelbogen.

870. Parabel: $y^2 = 12(x+3)$ Wegen der Voraussetzung $y_Q \neq 0$ gehört $S(-3; 0)$ nicht zur Kurve. Jedoch gilt für $y_Q \to 0$ $P \to S$

871. a) $(x-1)^2 = -16(y+4)$ b) $\left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{4}{9}\left(x + \frac{5}{2}\right)$
c) $x^2 = -\frac{3}{2}(y-5)$ d) $(y+13)^2 = x - 11$
e) $\left(x^2 + \frac{a_1b_1 - 2a_0b_2}{2b_2}\right)^2 = \frac{a_1^2}{b_2}\left(y - b_0 + \frac{b_1^2}{4b_2}\right)$

872. $\left.\begin{array}{l} x = vt \\ y = -\frac{g}{2}t^2 \end{array}\right\}$ oder $y = -\left(\frac{g}{2v^2}\right)x^2$

873. $\left.\begin{array}{l} y = t \\ x = \frac{t(a-t)}{a} \end{array}\right\}$ und $\left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = -a\left(x - \frac{a}{4}\right)$

874. Nach Bild 175 gilt: $\overline{PL} = p + \overline{PF}\cos\varphi$ (φ ist der positive Winkel von der positiven Richtung der x-Achse bis zur Geraden FP), woraus mit $\overline{PL} = \overline{PF} = r$ und Auflösen nach r die Gleichung (144) folgt.

876. $r = \frac{2p\cot\varphi}{\sin\varphi}$

877. a) $x^2 = 6y$ b) $x^2 = -8(y-2)$

878. a) Schneiden b) meiden c) berühren d) schneiden e) meiden.

879. a) $P_1(10; 4)$, $P_2(6{,}4; 3{,}2)$ b) $P_0(14{,}4; 4{,}8)$, g ist Tangente
c) g schneidet die Parabel nicht. d) $P_1(0; 0)$, $P_2(10; 4)$
e) $P_1(2; 1{,}79)$, $P_2(2; -1{,}79)$ f) $P_1(0{,}9; -1{,}2)$

880. a) $y = 3$ b) $y = -4{,}2$

881. $x = pm$

882. a) $y = 1{,}05x + c$ b) $y = -\frac{27}{8}x + c$

883. $y = -2x + 7$

884. $y = 3x - 17$

885. Kreis: $\left(x - \frac{p}{4}\right)^2 + y^2 = \frac{p^2}{16}$

886. a) $y = x + 8$ b) $y = -3x + 4{,}8$ c) $y = -5x - 1$
d) $y = -\frac{5}{3}x - 5$ e) $y = -1{,}55x + 3{,}35$
$y = 1{,}55x + 12{,}64$

887. $y = x - \frac{13}{2}$

888. a) $P_0(3; 4)$ b) 86°49′ c) $A = 81$

890. a) $P_0(12; 16)$, $y = \frac{8}{3}x - 16$ b) $P_0(9; 6)$, $y = \frac{1}{3}x + 3$
c) 1. Lösung: $P_0\left(\frac{1}{9}; -\frac{2}{3}\right)$, $y = -3x - \frac{1}{3}$
2. Lösung: $P_0(9; 6)$, $y = \frac{1}{3}x + 3$
d) $P_0(12; -9)$, $y = -\frac{3}{4}x$ e) $P_0(-2; 3)$, $y = \frac{5}{4}x + \frac{11}{2}$

891. a) t: $y = \frac{5}{4}x - \frac{125}{16}$; n: $y = -\frac{4}{5}x + \frac{277}{80}$ b) $P_5\left(-2; \frac{15}{4}\right)$

892. t: $y = \frac{3}{2}x + 4$, $P_0\left(\frac{8}{3}; 8\right)$

893. a) $p = 0{,}624$ b) nicht lösbare Aufgabe

894. $P_1\left(\frac{p}{2}; p\right)$, $P_2\left(\frac{p}{2}; -p\right)$

895. $P_1\left(\frac{3}{2}p; p\sqrt{3}\right)$, $P_2\left(\frac{3}{2}p; -p\sqrt{3}\right)$

896. $\alpha_1 = 51°20'$ bzw. $\alpha_2 = 128°40'$

897. $A = \frac{27}{2}\sqrt{3}$

898. $y = \frac{3}{4}x + 4$

$y = -\frac{3}{4}x - 4$

899. $y^2 = \frac{p}{4}\left(x - \frac{p}{2}\right)$

900. $y^2 = 2p\left(x - \frac{p}{2}\right)$

901. Aus den Tangentenbedingungen für Kreis und Parabel:

$r^2(1 + m^2) - b^2 = 0$; $\frac{p}{2} - 2mb = 0$ ergeben sich m und b.

t_1: $y = \frac{3}{4}x + \frac{25}{2}$, t_2: $y = -\frac{3}{4}x - \frac{25}{2}$

Berührungspunkte auf t_1: $P_1\left(\frac{50}{3}; 25\right)$, $P_2(-6; 8)$

Berührungspunkte auf t_2: $P_3\left(\frac{50}{3}; -25\right)$, $P_4(-6; -8)$

902. a) $y = \frac{1}{2}x + 5$, $y = -x - \frac{5}{2}$ b) $y = x - 6$, $y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$

c) $y = 0{,}678x - 4{,}78$, $y = -0{,}479x + 6{,}80$ d) $y = -x$, $y = 3x$

903. Man beachte den Satz auf Seite 396

904. $p = 2\sqrt{3}$

905. $P_0(-2; 4)$, $P_3\left(\frac{2}{3}; 4\right)$

906. a) $\alpha_1 = \alpha_2 = 106°19'$ b) $\alpha_1 = 90°$, $\alpha_2 = 34°42'$ c) $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 6°08'$, $\alpha_3 = 52°51'$

907. Brennstrahl: $y = \dfrac{y_0}{x_0 - \frac{p}{2}}x - \dfrac{y_0 p}{2x_0 - p}$ Leitstrahl: $y = y_0$

Tangente: $y = \frac{px}{y_0} + \frac{px_0}{y_0}$

$\tan(\sphericalangle FP_0Q) = \tan(\sphericalangle QP_0L) = \frac{p}{y_0}$

908. 3,63 cm

910. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke P_1RT und TQP_2 folgt die Proportion (I) aus 32.8.

911. $y^2 = 2\dfrac{n_1}{n_1 + n_2}px$

912. $\delta = 135°40'$, $A = \frac{297}{4}$

913. a) $\frac{x^2}{121} + \frac{y^2}{57} = 1$ b) $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} = 1$ c) $\frac{x^2}{324} + \frac{y^2}{54} = 1$

d) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5{,}76} = 1$ e) $\frac{x^2}{256} + \frac{y^2}{112} = 1$ f) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{18} = 1$

914. a) $a = 10;\quad b = 6;\quad F_1(-8;\,0);\quad F_2(8;\,0);\quad \varepsilon = 0{,}8;\quad p = 3{,}6$

b) $a = 2{,}9;\quad b = 2{,}1;\quad F_1(0;\,2);\quad F_2(0;\,-2);\quad \varepsilon = 0{,}69;\quad p = 1{,}52$

c) $a = \sqrt{43};\quad b = 3\sqrt{3};\quad F_1(-4;\,0);\quad F_2(4;\,0)\quad \varepsilon = 0{,}61;\quad p = 4{,}12$

915. Gegeben a, b: $e = \sqrt{a^2 - b^2},\quad \varepsilon = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a},\quad p = \dfrac{b^2}{a}$

„ a, e: $b = \sqrt{a^2 - e^2},\quad \varepsilon = \dfrac{e}{a},\quad p = \dfrac{a^2 - e^2}{a}$

„ a, ε: $b = a\sqrt{1 - \varepsilon^2},\quad e = a\varepsilon,\quad p = a(1 - \varepsilon^2)$

„ a, p: $b = \sqrt{ap},\quad e = \sqrt{a^2 - ap},\quad \varepsilon = \dfrac{\sqrt{a^2 - ap}}{a}$

„ b, e: $a = \sqrt{b^2 + e^2},\quad \varepsilon = \dfrac{e}{\sqrt{b^2 + e^2}},\quad p = \dfrac{b^2}{\sqrt{b^2 + e^2}}$

„ b, ε: $a = \dfrac{b}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}},\quad e = \dfrac{\varepsilon b}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}},\quad p = b\sqrt{1 - \varepsilon^2}$

„ b, p: $a = \dfrac{b^2}{p},\quad e = \dfrac{b}{p}\sqrt{b^2 - p^2},\quad \varepsilon = \dfrac{1}{b}\sqrt{b^2 - p^2}$

„ e, ε: $a = \dfrac{e}{\varepsilon},\quad b = \dfrac{e}{\varepsilon}\sqrt{1 - \varepsilon^2}\quad p = \dfrac{e}{\varepsilon}(1 - \varepsilon^2)$

„ e, p: $a = \dfrac{p}{2} + \sqrt{\left(\dfrac{p}{2}\right)^2 + e^2},\quad b = \sqrt{\dfrac{p^2 + p\sqrt{p^2 + 4e^2}}{2}},$

$$\varepsilon = \frac{e}{\dfrac{p}{2} + \sqrt{\left(\dfrac{p}{2}\right)^2 + e^2}}$$

„ ε, p: $a = \dfrac{p}{1 - \varepsilon^2},\quad b = \dfrac{p}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}},\quad e = \dfrac{p\varepsilon}{1 - \varepsilon^2}$

916. $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

917. $a = 15,\quad b = 9$

918. a) $a = 10,\quad b = 6$ b) $a = \dfrac{10\sqrt{10}}{3},\quad b = 5\sqrt{10}$

919. $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{11}}{6} \approx 0{,}553,\quad P_1\colon r_1 = 4{,}01,\quad r_2 = 7{,}99,$

$P_2\colon r_1 = 8{,}66,\quad r_2 = 3{,}34$

920. $A = \dfrac{4a^2b^2}{a^2 + b^2}$

921. 1. Lösung: $A \approx 93{,}66$; 2. Lösung: $A \approx 71{,}85$

922. Es ist $r_1 + r_2 = 2a$

und $r_1^2 - r_2^2 = [y^2 + (e + x)^2] - [y^2 + (e - x)^2] = 4ex$

also $r_1 - r_2 = \dfrac{2ex}{a} = 2\varepsilon x$

923. $x^2 = -\dfrac{25}{12}(y - 12)$

924. a) Der THALES-Kreis um O mit $r = e$ schneidet die Ellipse in den gesuchten Punkten.

b) $x = \pm \frac{a}{e} \sqrt{e^2 - b^2}$, $y = \pm \frac{b^2}{e}$, nur lösbar für $e \geqq b$

925. $x = \pm \frac{8}{5} \sqrt{5}$, $y = \pm \frac{2}{5} \sqrt{5}$

926. $\varepsilon = \frac{1}{59} \approx 0{,}017$

927. $d_2 = 70$ Mill. km

928. $a = m$, $b = n$

929. a) $M(-6; 2)$, $a = 5\sqrt{2}$, $b = 2\sqrt{5}$, $F_1(-11{,}48; 2)$, $F_2(-0{,}52; 2)$

b) $M(4; 0)$, $a = 4$, $b = 2\sqrt{3}$, $F_1(2; 0)$, $F_2(6; 0)$

c) $M(-5; -10)$, $a = 10$, $b = 5$, $F_1(-5; -1{,}34)$, $F_2(-5; -18{,}66)$

d) $M(0; 3)$, $a = 12$, $b = 3$, $F_1(-11{,}62; 3)$, $F_2(11{,}62; 3)$

930. $\frac{(x - 24)^2}{26^2} + \frac{(y + 13)^2}{13^2} = 1$

931. Aus den Gleichungen der Geraden AR und BT und der Bedingung $x_Q^2 + y_Q^2 = r^2$ sind x_Q, y_Q zu eliminieren. Man erhält

$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{r}{2}\right)^2} = 1$$

932. $x = (m + n) \cos \omega t$

$y = (m - n) \sin \omega t$ Ellipse mit $a = m + n$, $b = m - n$

933. $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$

934. $r^2 = \frac{b^2}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi}$

935. 6365 km

936. a) $P_1(4; 1)$, $P_2(2; 2)$

b) kein Schnittpunkt

c) $P_0\left(4\sqrt{3}; 2\sqrt{2}\right)$, g ist Tangente

d) $P_1\left(\frac{3}{5}\sqrt{10}; \frac{6}{5}\sqrt{10}\right)$, $P_2\left(-\frac{3}{5}\sqrt{10}; -\frac{6}{5}\sqrt{10}\right)$

937. $s \approx 33{,}39$

938. $s = \frac{2a^3}{2a^2 - b^2}$, $|d| = \frac{2be}{a}$

939. a) $y = -\frac{\sqrt{15}}{5}x + 9$ b) $y = \frac{3}{10}x - \frac{5}{2}$

940. a) $\frac{(x - x_m)(x_0 - x_m)}{a^2} + \frac{(y - y_m)(y_0 - y_m)}{b^2} = 1$

b) $y = -\frac{3}{5}x + \frac{32}{5}$

941. $y = -\frac{4}{\sqrt{3}}x + 2$

942. $|d| = \frac{240}{41} \approx 5{,}85$

943. $y = \mp \frac{9}{20}x \pm \frac{15}{4}$, $x = -5$

944. $A = \frac{2a^3}{e}$

945. $\alpha = 31°26'$

946. a) $\alpha = \arctan \dfrac{a^4 - b^4}{2a^2b^2}$ b) $\alpha = 56°53'$
c) $\alpha = 45°$ d) $\alpha = 12°11'$

947. a) $y = -\dfrac{3}{4}x \pm \dfrac{13}{2}$ b) $y = \dfrac{4}{3}x \pm \sqrt{\dfrac{949}{9}}$

948. $y = \dfrac{2}{3}x \pm \dfrac{25}{3}$, $y = -\dfrac{3}{2}x \pm 5\sqrt{10}$

949. a) $y = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{13}{3}$, $x = 5$

b) $y = \dfrac{1}{6}x + \dfrac{13}{3}$, $y = -\dfrac{3}{2}x + 1$

950. $a = \sqrt{54}$, $b = \sqrt{30}$

951. d_2: $y = \dfrac{90}{49}x$, $y = \dfrac{90}{49}x \pm \dfrac{6}{7}\sqrt{274}$, $y = -\dfrac{2}{5}x \pm \dfrac{2}{5}\sqrt{274}$

952. Durchmesser: $y = m_1 x$

Schnittpunkt: $x_0 = \dfrac{ab}{\sqrt{a^2m_1^2 + b^2}}$, $y_0 = \dfrac{abm_1}{\sqrt{a^2m_1^2 + b^2}}$

Anstieg der Tangente: $m_2 = -\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0} = -\dfrac{b^2}{a^2m_1}$

953. Anstieg der Berührungssehne: $m_1 = -\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}$

Zugeordneter Durchmesser: $y = -\dfrac{b^2}{a^2m_1}x = \dfrac{y_0}{x_0}x$

Die Koordinaten von $P_0(x_0; y_0)$ erfüllen diese Gleichung.

954. $y = -\dfrac{4}{5}x + \dfrac{26}{5}$ 955. $y = \dfrac{7}{20}x$ 956. $\beta = 71°34'$

957. $y = \pm\dfrac{b}{a}x$, $2a_1 = 2b_1 = \sqrt{2(a^2 + b^2)}$

958. Man verwendet (V) und (VI) aus 33.5.1.
$a \approx 6{,}74$, $b \approx 1{,}14$

959. $R(17{,}7; 0)$

960. a) $\dfrac{16x^2}{225} - \dfrac{y^2}{4} = 1$ b) $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{36y^2}{25} = 1$ c) $\dfrac{x^2}{0{,}81} - \dfrac{y^2}{1{,}44} = 1$

961. $x = \pm 4\sqrt{\dfrac{26}{17}} = \pm 4{,}95$, $y = \pm\dfrac{18}{\sqrt{17}} = \pm 4{,}36$

962. $\dfrac{x^2}{144} - \dfrac{y^2}{36} = 1$

963. a) $a = 6$, $b = 12$, $F_1\left(-6\sqrt{5}; 0\right)$, $F_2\left(6\sqrt{5}; 0\right)$, $y = \pm 2x$

b) $a = 15$, $b = 8$, $F_1\ (0; 17)$, $F_2(0; -17)$, $y = \pm\dfrac{15}{8}x$

c) $a = b = 14$, $F_1\left(-14\sqrt{2}; 0\right)$, $F_2\left(14\sqrt{2}; 0\right)$, $y = \pm x$

964. $2\alpha = 67°23'$

965. $a = \frac{14}{9}, \quad b = \frac{5}{2}$

966. $a = 1, \quad b = \sqrt{3}$

967. $d_1 = 6; \quad d_2 = -\frac{18}{13}$

968. a) $M(2; -4), \quad a = 4, \quad b = 3, \quad F_1(-3; -4), \quad F_2(7; -4)$

b) $M(1; -3), \quad a = 3, \quad b = \frac{5}{4}, \quad F_1\left(1; \frac{1}{4}\right), \quad F_2\left(1; -\frac{25}{4}\right)$

c) $M\left(-4; \frac{5}{2}\right), \quad a = b = 4, \quad F_1(-9{,}66; 2{,}5), \quad F_2(1{,}66; 2{,}5)$

969. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$

970. Es sei $O = M: x^2 - y^2 = \frac{a^2}{2}$

971. Man wähle B als Ursprung: $\frac{\left(x - \frac{a}{3}\right)^2}{\frac{a^2}{9}} - \frac{y^2}{\frac{a^2}{3}} = 1$

972. Parabel: $y^2 = -4(x + 1)$

973. $r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi}$

974. a) $P_1(3{,}44; -1{,}12), \quad P_2(5{,}56; 3{,}12)$,

b) $P_1(3{,}56; 1{,}27), \quad P_2(-6{,}13; -3{,}57)$

c) kein Schnittpunkt

d) Tangente: $P_0\left(-5; \frac{8}{3}\right)$

e) $P_1(-4{,}35; -2{,}1)$

975. a) $t: \; y = \frac{25}{8}x - \frac{20}{9}; \quad n: \; y = -\frac{8}{25}x + \frac{289}{180}$

b) $t: \; y = \frac{5}{8}x - 8, \quad n: \; y = -\frac{8}{5}x + \frac{138}{5}$

976. a) $x = \pm 1; \quad y = \pm 4, \quad \delta = 47°29'$,

b) $x = \pm 10; \quad y = \frac{16}{3}, \quad \delta = 0°$ (Berührung)

c) $x \approx 2{,}19; \quad y \approx \pm 0{,}98, \quad \delta = 74{,}2°$,

d) $x = \pm \frac{15}{\sqrt{41}}; \quad y = \pm \frac{12}{\sqrt{41}}, \quad \delta = 45°$

977. $y = -\frac{15}{8}x \pm \frac{9}{4}$

978. $y = \frac{13}{15}x + \frac{5}{3}, \quad x = 5$

979. $a = \frac{5}{12}, \quad b = \frac{5}{6}$

980. $x^2 - y^2 = 50$

981. $x^2 = 12y, \quad A = 72\sqrt{2}$

982. Aus $p = 2e, p - 2mn = 0, \quad a^2m^2 - b^2 - n^2 = 0$ berechnet man unter Beachtung von $b^2 = e^2 - a^2$ die Werte m und n.

$t_{1;2}: \; y = \pm \varepsilon x \pm a$

Hyperbel: $P_{1;2}(-e; \pm p)$, Parabel: $P_{3;4}\left(\frac{a^2}{e}; \pm 2a\right)$

983. Die zu $P_1(6;4)$ gehörende Berührungssehne $y = \frac{3}{8}x - \frac{25}{4}$ berührt die Ellipse in $P_2(6;-4)$.

984. $m_1 = \frac{b}{a}$, $m_2 = \frac{b^2}{a^2 m_1} = \frac{b}{a}$. D. h. die Asymptoten sind zu sich selbst konjugiert.

986. $d_1 \cdot d_2 = \frac{a^2 b^2}{e^2}$

988. Beweis: Man berechnet die Mittelpunkte P_m der Strecken P_1P_2 und P_3P_4 und erhält in beiden Fällen:

$$x_m = \frac{a^2 mn}{b^2 - a^2 m^2}, \quad y_m = \frac{b^2 n}{b^2 - a^2 m^2}$$

Konstruktion: Man legt beliebige Geraden durch P_1 und trägt die jeweiligen Strecken P_1P_3 von P_4 bis P_2 ab. Die Gerade kann auch beide Hyperbeläste schneiden.

989. $u = \frac{a^2}{e}$

990. $0{,}117x^2 + 0{,}643xy + 0{,}883y^2 + 9{,}742x + 9{,}224y + 30 = 0$

991. a) Ellipse: $\frac{x'^2}{\frac{1}{4}} + \frac{\left(y' - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2}{\frac{1}{2}} = 1; \quad \varphi = 45°$

b) Ellipse: $\frac{x'^2}{\frac{14}{3}} + \frac{y'^2}{14} = 1; \quad \varphi = 45°$

c) Parabel: $y'^2 = 2\sqrt{2}\left(x' - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right); \quad \varphi = 45°$

d) Punkt: $P(x' = -1; \quad y' = -3); \quad \varphi = 22°37'$

e) Hyperbel: $-\frac{(x'-6)^2}{56} + \frac{(y'-4)^2}{14} = 1; \quad \varphi = 36°52'$

f) Imaginäre Ellipse: $\frac{\left(x' - \frac{4}{5}\sqrt{5}\right)^2}{\frac{3}{2}} + \frac{\left(y' - \frac{3}{5}\sqrt{5}\right)^2}{9} = -1; \quad \varphi = 26°34'$

g) zwei einander schneidende Geraden

$$y'' = \pm\sqrt{3}\,x''; \quad \varphi = 45°; \quad m = -\frac{2}{3}\sqrt{2}; \quad n = \sqrt{2}$$

h) Parabel: $x'^2 = 12y'; \quad \varphi = 53°08'$

i) Hyperbel: $\frac{x'^2}{\frac{8}{3}} - \frac{y'^2}{8} = 1; \quad \varphi = 45°$

k) Zwei zusammenfallende Geraden: $x' = -\frac{1}{5}\sqrt{5}; \quad \varphi = 26°34'$

l) Imaginäres Geradenpaar: $y' = \pm \mathrm{j}\sqrt{3}\,x'; \quad \varphi = 45°$

m) Zwei parallele Geraden: $x' = 3; \quad x' = -1$

n) Ellipse: $\dfrac{(x' + 1{,}32)^2}{2{,}94^2} + \dfrac{(y' + 0{,}66)^2}{1{,}05^2} = 1;\quad \varphi = 72°35'$

o) Parabel: $(x' + 0{,}36)^2 = 2{,}26(y' - 1{,}29);\quad \varphi = 38°40'$

992. Gleichseitige Hyperbel: $\left(g' - f\sqrt{2}\right)^2 - b'^2 = 2f^2;\quad \varphi = 45°$

993. Ellipse: $\dfrac{x'^2}{36} + \dfrac{y'^2}{4} = 1;\quad \varphi = 15°$

994. a) $x^2 + y^2 - 2xy - 10x - 6y - 7 = 0$

Parabel: $\left(y' + \dfrac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2 = 4\sqrt{2}\left(x' + \dfrac{1}{2}\sqrt{2}\right);\quad \varphi = 45°$

b) $xy - x - 1 = 0$

Gleichseitige Hyperbel: $\left(x' - \dfrac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2 - \left(y' - \dfrac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2 = 1;\quad \varphi = 45°$

995. Vgl. Bild 338. Hier muß $x \in (-\infty; 0]$ sein.

996. a) Vgl. Bild 339. Hier muß $x \in [0; +\infty)$ sein,

b) vgl. Bild 340. Hier muß $x \in (-\infty; 0]$ sein.

997. $P_1(0; 0)$, $P_2\left(\dfrac{a}{b}; \sqrt[3]{\dfrac{a^2}{b}}\right)$

998. $x = r \cdot \arccos\dfrac{r - y}{c} - \sqrt{c^2 - (r - y)^2}$

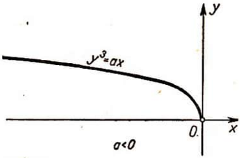


Bild 338

999. Vgl. Formel (169)!

1000. a) $x = R \cdot (1 + 2\cos t + \cos 2t) \quad y = R \cdot (2\sin t + \sin 2t)$

b) $(x^2 + y^2 - 2Rx)^2 - 4R^2(x^2 + y^2) = 0$ c) $r = 2R \cdot (1 + \cos\varphi)$

1001. In den Kreis $x^2 + y^2 = R^2$ wird ein beliebiger Radiusvektor eingezeichnet, der den Kreis in B schneiden möge. Der Fußpunkt des Lotes von B auf die x-Achse sei C. Die Strecke AC (vgl. Bild 341) hat die Länge $\overline{AC} = R \cdot (1 + \cos\varphi)$. Diese Strecke zweimal vom Nullpunkt aus auf dem Radiusvektor abgetragen ergibt einen Kardioidenpunkt P.

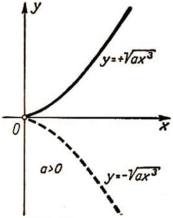


Bild 339

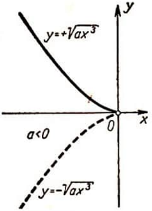


Bild 340

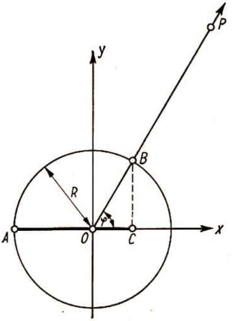


Bild 341

1002. Vgl. Formel (170)

1003. Vgl. Formeln (171) und (172)

1004. a) $A_1 = A_2$, $\omega_1 = \omega_2$ und $|\varphi_1 - \varphi_2| = \dfrac{\pi}{2}$

b) $\omega_1 = \omega_2$.

1005. Kraft in S_1: $F_{S1} = 2540$ kp; Kraft in S_2: $F_{S2} = 3480$ kp

1006. $\sphericalangle(\mathfrak{F}_1; \mathfrak{F}_2) = 120°$

1007. $\mathfrak{s} = \mathfrak{a} + \dfrac{1}{2}\mathfrak{b} = -\left(\mathfrak{c} + \dfrac{1}{2}\mathfrak{b}\right)$

1008. $\mathfrak{r} = \dfrac{1}{3}(\mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_2 + \mathfrak{P}_3)$

1009. (Bild 342) $|\mathfrak{q}| = \dfrac{|\mathfrak{c}|^2}{|\mathfrak{a}|}$ (Kathetensatz);

$$\mathfrak{q} = |\mathfrak{q}| \cdot \mathfrak{q}^0 = |\mathfrak{q}| \frac{\mathfrak{a}}{|\mathfrak{a}|} = \frac{|\mathfrak{c}|^2}{|\mathfrak{a}|^2}\mathfrak{a}$$

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{c} + \mathfrak{q} = \mathfrak{c} + \frac{|\mathfrak{c}|^2}{|\mathfrak{a}|^2}\mathfrak{a}$$

1010. Die Gleichheitszeichen gelten, wenn $\mathfrak{a} \uparrow\uparrow \mathfrak{b}$, wobei in (183) sein muß: $|\mathfrak{a}| > |\mathfrak{b}|$. In jedem Dreieck ist die Summe zweier Seiten stets größer, die Differenz zweier Seiten stets kleiner als die dritte Seite.

1011. $|\mathfrak{a}| = 1$; $\mathfrak{a}$ selbst ist bereits Einsvektor.

1012. $|\mathfrak{r}| = 9{,}90$; $\mathfrak{r}^0 = -0{,}303\,\mathfrak{i} + 0{,}808\,\mathfrak{j} + 0{,}505\,\mathfrak{k}$;

$\alpha = 107°38'$; $\beta = 36°05'$; $\gamma = 59°40'$.

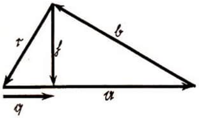


Bild 342

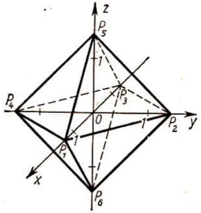


Bild 343

1013. $\mathfrak{r} = -2\sqrt{2}\,\mathfrak{i} + 2\mathfrak{j} - 2\mathfrak{k}$; $|\mathfrak{r}| = 4$

1014. $\alpha = 101°32'$; $\beta = 55°33'$; $\gamma = 36°52'$

1015. Bild 343

$\overrightarrow{P_1P_2} = -\sqrt{2}\,\mathfrak{i} + \sqrt{2}\,\mathfrak{j}$; $\overrightarrow{P_2P_3} = -\sqrt{2}\,\mathfrak{i} - \sqrt{2}\,\mathfrak{j}$; $\overrightarrow{P_3P_4} = \sqrt{2}\,\mathfrak{i} - \sqrt{2}\,\mathfrak{j}$;

$\overrightarrow{P_4P_1} = \sqrt{2}\,\mathfrak{i} + \sqrt{2}\,\mathfrak{j}$; $\overrightarrow{P_1P_5} = -\sqrt{2}\,\mathfrak{i} + \sqrt{2}\,\mathfrak{k}$; $\overrightarrow{P_2P_5} = -\sqrt{2}\,\mathfrak{j} + \sqrt{2}\,\mathfrak{k}$;

$\overrightarrow{P_3P_5} = \sqrt{2}\,\mathfrak{i} + \sqrt{2}\,\mathfrak{k}$; $\overrightarrow{P_4P_5} = \sqrt{2}\,\mathfrak{j} + \sqrt{2}\,\mathfrak{k}$; $\overrightarrow{P_1P_6} = -\sqrt{2}\,\mathfrak{i} - \sqrt{2}\,\mathfrak{k}$;

$\overrightarrow{P_2P_6} = -\sqrt{2}\,\mathfrak{j} - \sqrt{2}\,\mathfrak{k}$; $\overrightarrow{P_3P_6} = \sqrt{2}\,\mathfrak{i} - \sqrt{2}\,\mathfrak{k}$; $\overrightarrow{P_4P_6} = \sqrt{2}\,\mathfrak{j} - \sqrt{2}\,\mathfrak{k}$

1016. $\overrightarrow{P_1P_2} = -2\mathfrak{i}$; $\overrightarrow{P_2P_3} = -2\mathfrak{j}$; $\overrightarrow{P_3P_4} = 2\mathfrak{i}$; $\overrightarrow{P_4P_1} = 2\mathfrak{j}$;
$\overrightarrow{P_1P_5} = -\mathfrak{i} - \mathfrak{j} + \sqrt{2}\,\mathfrak{k}$; $\overrightarrow{P_2P_5} = \mathfrak{i} - \mathfrak{j} + \sqrt{2}\,\mathfrak{k}$; $\overrightarrow{P_3P_5} = \mathfrak{i} + \mathfrak{j} + \sqrt{2}\,\mathfrak{k}$;
$\overrightarrow{P_4P_5} = -\mathfrak{i} + \mathfrak{j} + \sqrt{2}\,\mathfrak{k}$; $\overrightarrow{P_1P_6} = -\mathfrak{i} - \mathfrak{j} - \sqrt{2}\,\mathfrak{k}$; $\overrightarrow{P_2P_6} = \mathfrak{i} - \mathfrak{j} - \sqrt{2}\,\mathfrak{k}$;
$\overrightarrow{P_3P_6} = \mathfrak{i} + \mathfrak{j} - \sqrt{2}\,\mathfrak{k}$; $\overrightarrow{P_4P_6} = -\mathfrak{i} + \mathfrak{j} - \sqrt{2}\,\mathfrak{k}$

1017. (Bild 344) $\overrightarrow{OP_1} = 2\,\mathfrak{i}$; $\overrightarrow{P_1P_2} = -\mathfrak{i} + \sqrt{3}\,\mathfrak{j}$;

$\overrightarrow{P_2O} = -\mathfrak{i} - \sqrt{3}\,\mathfrak{j}$; $\overrightarrow{OP_3} = \mathfrak{i} + \frac{1}{3}\sqrt{3}\,\mathfrak{j} + \frac{2}{3}\sqrt{6}\,\mathfrak{k}$;

$\overrightarrow{P_1P_3} = -\mathfrak{i} + \frac{1}{3}\sqrt{3}\,\mathfrak{j} + \frac{2}{3}\sqrt{6}\,\mathfrak{k}$;

$\overrightarrow{P_2P_3} = -\frac{2}{3}\sqrt{3}\,\mathfrak{j} + \frac{2}{3}\sqrt{6}\,\mathfrak{k}$

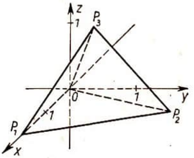


Bild 344

1018. a) $D = 25$. Die Vektoren sind linear unabhängig.
b) $D = 0$. Die Vektoren sind linear abhängig.

1019. $\mathfrak{t} = -1{,}5\,\mathfrak{r} - 0{,}9\,\mathfrak{s}$

1020. a) $\mathfrak{s} = \frac{1}{52}(23\mathfrak{a} + 61\mathfrak{b} - \mathfrak{c})$

b) Die Zerlegung ist nicht möglich, da $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ linear abhängig sind.

1021. $\mathfrak{r} = \mathfrak{a} - \frac{7}{2}\mathfrak{b} + 4\mathfrak{c}$; $|\mathfrak{r}_\mathfrak{a}| = \sqrt{2}$; $|\mathfrak{r}_\mathfrak{b}| = \frac{7}{2}$; $|\mathfrak{r}_\mathfrak{c}| = 4\sqrt{2}$

1022. $\mathfrak{w} = \lambda\left(\frac{8}{21}\mathfrak{i} + \frac{4}{21}\mathfrak{j} - \frac{16}{21}\mathfrak{k}\right) = \mu(2\mathfrak{i} + \mathfrak{j} - 4\mathfrak{k})$ mit $\mu = \frac{4}{21}\lambda$

1023. $\mathfrak{r} = -2\mathfrak{i} + 3\mathfrak{j} + 5\mathfrak{k} + \lambda(3\mathfrak{i} - \mathfrak{j} + 2\mathfrak{k})$
$\lambda = 0$: $(-2; 3; 5)$; $\lambda = 1$: $(1; 2; 7)$; $\lambda = -1$: $(-5; 4; 3)$;
$\lambda = 3$: $(7; 0; 11)$; $\lambda = -3$: $(-11; 6; -1)$

1024. $\cos\gamma = \frac{1}{3}\sqrt{3}$; $\mathfrak{r} = \mathfrak{i} - 3\mathfrak{j} + 2\mathfrak{k} + \lambda(\mathfrak{i} + \mathfrak{j} + \mathfrak{k})$

Durchstoßpunkte: $(-1; -5; 0)$; $(4; 0; 5)$; $(0; -4; 1)$

1025. $\overrightarrow{P_1P_2} = -\mathfrak{i} + 3\mathfrak{j} + 7\mathfrak{k} + \lambda(-4\mathfrak{i} + \mathfrak{j} - 4\mathfrak{k})$
$\overrightarrow{P_2P_3} = -5\mathfrak{i} + 4\mathfrak{j} + 3\mathfrak{k} + \mu(11\mathfrak{i} - 9\mathfrak{j} - 7\mathfrak{k})$
$\overrightarrow{P_3P_1} = 6\mathfrak{i} - 5\mathfrak{j} - 4\mathfrak{k} + \nu(-7\mathfrak{i} + 8\mathfrak{j} + 11\mathfrak{k})$

1026. a) Gerade durch P_1 parallel zum Vektor $\mathfrak{a}$
b) Parallele zum Vektor $\mathfrak{r}_1$
c) Ebene durch den Ursprung und P_1, zu der der Vektor $\mathfrak{a}$ parallel verläuft

1027. Wenn der von den beiden Vektoren eingeschlossene Winkel ein stumpfer ist.

1028. a) $6\sqrt{3}$ b) 6 c) 0 d) $-6\sqrt{3}$

1029. Aus $\cos(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}{ab} = \frac{\mathfrak{a}}{a}\frac{\mathfrak{b}}{b} = \mathfrak{a}^0 \cdot \mathfrak{b}^0$

1030. $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ haben die gleiche Komponente längs $\mathfrak{a}$: $\mathfrak{b}_\mathfrak{a} = \mathfrak{c}_\mathfrak{a}$.

1031. $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{a}_{\mathfrak{b}}\mathfrak{b} = |\mathfrak{a}_{\mathfrak{b}}| \cdot |\mathfrak{b}| \cdot \cos 0^0 = |\mathfrak{a}_{\mathfrak{b}}| \cdot b; \quad |\mathfrak{a}_{\mathfrak{b}}| = \dfrac{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}{b}$

$\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{a}\mathfrak{b}_{\mathfrak{a}} = |\mathfrak{a}| \cdot |\mathfrak{b}_{\mathfrak{a}}| \cdot \cos 0^0 = a \cdot |\mathfrak{b}_{\mathfrak{a}}|; \quad |\mathfrak{b}_{\mathfrak{a}}| = \dfrac{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}{a}$

1032. $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})(\mathfrak{a} - \mathfrak{b}) = \mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}\mathfrak{a} - \mathfrak{a}\mathfrak{b} - \mathfrak{b}^2 = a^2 + ba \cdot \cos(\mathfrak{b}; \mathfrak{a}) - ab \cdot \cos(\mathfrak{a}; \mathfrak{b}) - b^2 =$
$= a^2 + ab \cdot \cos(\mathfrak{a}; \mathfrak{b}) - ab \cdot \cos(\mathfrak{a}; \mathfrak{b}) - b^2 = a^2 - b^2$

1033. $|\mathfrak{r}| = \sqrt{(x\mathfrak{i} + y\mathfrak{j} + z\mathfrak{k})(x\mathfrak{i} + y\mathfrak{j} + z\mathfrak{k})} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$|\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_1| = \sqrt{[(x_2 - x_1)\mathfrak{i} + (y_2 - y_1)\mathfrak{j} + (z_2 - z_1)\mathfrak{k}]^2} =$
$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

1034. a) $\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2 = -4$ b) $\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2 = 0 \quad \mathfrak{r}_1 \perp \mathfrak{r}_2$ c) $\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2 = -28$
$\mathfrak{r}_1 \parallel \mathfrak{r}_2 \quad (\mathfrak{r}_2 = -2\mathfrak{r}_1)$

1035. $\mathfrak{a}_{\mathfrak{b}} = \dfrac{\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}}{\mathfrak{b}^2}\mathfrak{b} = 1{,}5\mathfrak{i} - 2{,}5\mathfrak{j} + \mathfrak{k}$

1036. $\sphericalangle(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2) = 77°39'$

1037. $\lambda = \dfrac{\mathfrak{b}^2(\mathfrak{c}\mathfrak{a}) - (\mathfrak{a}\mathfrak{b})(\mathfrak{c}\mathfrak{b})}{\mathfrak{a}^2\mathfrak{b}^2 - (\mathfrak{a}\mathfrak{b})^2}; \qquad \mu = \dfrac{\mathfrak{a}^2(\mathfrak{c}\mathfrak{b}) - (\mathfrak{a}\mathfrak{b})(\mathfrak{c}\mathfrak{a})}{\mathfrak{a}^2\mathfrak{b}^2 - (\mathfrak{a}\mathfrak{b})^2}$

1038. $\sphericalangle\left(\overrightarrow{P_1O_2}, \overrightarrow{P_2P_3}\right) = 74°3'; \quad \sphericalangle\left(\overrightarrow{P_2P_3}, \overrightarrow{P_3P_1}\right) = 21°10'; \quad \sphericalangle\left(\overrightarrow{P_3P_1}, \overrightarrow{P_1P_2}\right) = 84°47'$

1039. $|\mathfrak{r}| = \dfrac{1}{57}\sqrt{71305} \approx 4{,}7$

1040. $E\colon\ 2x + 3y + 4z - 6 = 0 \quad d = \dfrac{15}{\sqrt{29}} \approx 2{,}8$

1041. $\varphi = 30°34' \quad P\left(\dfrac{2}{15}; \dfrac{14}{3}; -\dfrac{31}{15}\right)$

1042. $\varphi = 101°27'$

1043. $\mathfrak{r} = 2\mathfrak{i} + \mathfrak{j} - 2\mathfrak{k} + \lambda(3\mathfrak{i} - 2\mathfrak{j} - \mathfrak{k})$

1044. $\mathfrak{a} \times \mathfrak{a} = \mathfrak{o}$

1045. $A = \dfrac{1}{2}|\mathfrak{a}| \cdot |\mathfrak{b}| \cdot \sin\gamma$

1046. a^2b^2

1047. a) $\mathfrak{r}_1 \times \mathfrak{r}_2 = -\dfrac{3}{2}\mathfrak{i} - \dfrac{5}{2}\mathfrak{j} - \dfrac{17}{4}\mathfrak{k}$ b) $\mathfrak{r}_1 \times \mathfrak{r}_2 = \mathfrak{o}$

1048. a) $\mathfrak{r}_1 \times \mathfrak{r}_2 = -14\mathfrak{i} - 9\mathfrak{j} + \mathfrak{k}$ b) $\mathfrak{r}_1 \times \mathfrak{r}_2 = 28\mathfrak{i} + 14\mathfrak{j} - 14\mathfrak{k}$ c) $\mathfrak{r}_1 \times \mathfrak{r}_2 = \mathfrak{o}$

1049. $\mathfrak{n} = -17\mathfrak{i} - 2\mathfrak{j} - 12\mathfrak{k}$

1050. $\tan(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \dfrac{|a_xb_y - b_xa_y|}{a_xb_x + a_yb_y} = \dfrac{|m_{\mathfrak{b}} - m_{\mathfrak{a}}|}{1 + m_{\mathfrak{a}}m_{\mathfrak{b}}}$ mit $\dfrac{a_y}{a_x} = m_{\mathfrak{a}}$ und $\dfrac{b_y}{b_x} = m_{\mathfrak{b}}$

1051. $(\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2)(\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_1) = \mathfrak{o}$, mit $\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2 \neq \mathfrak{o}$, d. h., $(\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2) \perp (\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_1)$

1052. Für $\mathfrak{a}_1 \parallel \mathfrak{a}_2$ wird $\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2 = \mathfrak{o}$ und es entsteht ein Ausdruck von der Form $\dfrac{0}{0}$

1053. $E_1\colon 5x - 9y - 2z + 19 = 0; \quad E_2\colon x - 2y + z = 0;$
$\mathfrak{r} = -38\mathfrak{i} - 19\mathfrak{j} + \lambda(13\mathfrak{i} + 7\mathfrak{j} + \mathfrak{k}); \quad \varphi = 35°10'$

1054. $\mathfrak{r} = \mathfrak{i} + 2\mathfrak{j} + 3\mathfrak{k} + \lambda(\mathfrak{i} + \mathfrak{j} - 2\mathfrak{k}); \quad \bar{\mathfrak{r}} = 3\mathfrak{i} + 2\mathfrak{j} + \mathfrak{k} + \mu(\mathfrak{i} + \mathfrak{j} + \mathfrak{k});$
$d = \sqrt{2} \approx 1{,}4$

1055. E_1: $3x + 2y - 6z - 6 = 0$; E_2: $6x - 6y + z + 6 = 0$;
Schnittpunkt: $z = -6$; $\mathfrak{x} = 0{,}8\mathfrak{i} + 1{,}8\mathfrak{j} + \lambda(34\mathfrak{i} + 39\mathfrak{j} + 30\mathfrak{k})$

1056. s. Lösung zu Aufg. 1053

1057. $V_T = \frac{2}{3}\sqrt{2} \approx 0{,}94$

1058. $E: 4x + 11y + 9z - 1 = 0$; $P_0\left(0; 0; \frac{1}{9}\right)$

1059. Wenn $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}] = 0$, dann sind die Normalenvektoren der drei Ebenen komplanar, d. h., alle drei Ebenen sind einander parallel, oder zwei Ebenen sind einander parallel, oder zwei Ebenen schneiden einander in einer Geraden, die parallel zur dritten Ebene verläuft, oder alle drei Ebenen schneiden einander in ein und derselben Geraden.

1060. $6\mathfrak{i} + 9\mathfrak{j} + 18\mathfrak{k}$

1061. a) $\mathfrak{b}_\mathfrak{a} = \frac{7}{9}\mathfrak{i} - \frac{49}{18}\mathfrak{j} + \frac{7}{18}\mathfrak{k}$; $\mathfrak{b}'_\mathfrak{a} = \frac{20}{9}\mathfrak{i} + \frac{13}{18}\mathfrak{j} + \frac{11}{18}\mathfrak{k}$

b) $\mathfrak{b}_\mathfrak{a} = \mathfrak{o}$; $\mathfrak{b}'_\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ ($\mathfrak{b}$ steht senkrecht auf $\mathfrak{a}$)

1062. $\mathfrak{x} = -\frac{1}{3}\mathfrak{a} + \frac{1}{2}\mathfrak{b} - \frac{1}{18}\mathfrak{c}$

1063. Alle Produktbildungen außer c), e) und k) sind sinnvoll

1064. Konische Schraubenlinie

1065, a) Doppelkegel b) Konische Wendelfläche

Verwendete Symbole

Symbol	Beispiel	Erklärung
Symbole der Logik		
$\Rightarrow$	$S_1 \Rightarrow S_2$	Aus der Aussage S_1 folgt die Aussage S_2
$\Leftrightarrow$	$S_1 \Leftrightarrow S_2$	Die Aussagen S_1 und S_2 sind gleichwertig
$\wedge$		und
Symbole der Mengenlehre		
$\in$	$a \in A$	a ist Element der Menge A
$\notin$	$a \notin A$	a ist nicht Element der Menge A
$\{.,.,\ldots\}$	$\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$	Menge der Elemente $a_1, a_2, a_3, \ldots$
$\subset$	$A \subset B$	Menge A ist in Menge B enthalten
$\varnothing$		leere Menge
$\cup$	$A \cup B$	Vereinigung der Mengen A und B
$\cap$	$A \cap B$	Durchschnitt der Mengen A und B
$\setminus$	$A \setminus B$	Differenz der Mengen A und B
$\times$	$A \times B$	Produkt der Mengen A und B
Symbole für Zahlenbereiche		
N		Bereich der natürlichen Zahlen
G		Bereich der ganzen Zahlen
K		Körper der rationalen Zahlen
R		Körper der reellen Zahlen
C		Körper der komplexen Zahlen

Sachwortverzeichnis

Literaturhinweis

Müller: Fünfstellige Logarithmen- und andere mathematische Tafeln. VEB Fachbuchverlag Leipzig

Küstner: Fünfstellige Logarithmen der natürlichen Zahlen und der Winkelfunktionen für dezimal geteilten Altgrad. VEB Fachbuchverlag Leipzig/Verlag Konrad Wittwer, Stuttgart

Gauß: Fünfstellige vollständige logarithmische Tafeln (sexagesimal unterteilter Altgrad). Verlag Konrad Wittwer, Stuttgart