Mathematik

Klasse 11

Unterrichtshilfen

Unterrichtshilfen Mathematik Klasse 11

Autoren: Dieter Geupel, Alfred Hilbert, Günter Lorenz,
Günter Pietzsch, Siegfried Schneider

Volk und Wissen Volkseigener Verlag
Berlin 1980

Verfaßt von einem Autorenkollektiv unter der Leitung von Dr. Siegfried Schneider

Autoren:
Dr. Siegfried Schneider — Einleitung und Stoffgebiet 2
Dr. Günter Lorenz und
Prof. Dr. Günter Pietzsch — Stoffgebiet 1
Dr. Alfred Hilbert — Stoffgebiet 3
Dieter Geupel — Stoffgebiet 4

Redaktion: Heinz Junge

1. Auflage
Lizenz-Nr. 203/1000/80 (E 00 21 93-1)
LSV 0645
Zeichnungen: Heinz Grothmann
Einband: Erika Kerschner
Typografische Gestaltung: Atelier vwv
Printed in the German Democratic Republic
Gesamtherstellung: INTERDRUCK
Graphischer Großbetrieb Leipzig - III/18/97
Schrift: 9/10 Times Monotype
Redaktionsschluß: 4. Januar 1980
Bestell-Nr. 707 157 8
DDR: 7,50 M

Inhalt

Stoffgebiet 2:

Grenzwerte von Zahlenfolgen und Funktionen

Stoffgebiet 3:

Differentialrechnung

Stoffabschnitt 3.2:

Stoffabschnitt 3.3:

Stoffabschnitt 3.4:

Stoffabschnitt 3.5:

Stoffgebiet 4:

Integralrechnung

Stoffabschnitt 4.1:

Stoffabschnitt 4.2:

Stoffabschnitt 4.3:

Stoffabschnitt 4.4:

Einleitung

Zum Mathematikunterricht in Klasse 11

Verbindliche Grundlage für den Mathematikunterricht in der Abiturstufe ist der Lehrplan [G 6].
Für Klasse 11 stehen folgende Hauptziele im Mittelpunkt des Unterrichts:

- **Wiederholung und Vertiefung des bis zur Klasse 10 erworbenen grundlegenden Wissens und Könnens** (↗ LP 5; 8ff.[1])
  Das erfolgt einerseits durch ständige Übung und Wiederholung wesentlicher Inhalte aus den vorangehenden Klassenstufen und andererseits durch Anwendung und Erweiterung dieses Wissens und Könnens in Verbindung mit der Behandlung neuen Stoffes und in beständiger Verfolgung wesentlicher Leitlinien des Mathematikunterrichts.
- **Einführung in Grundlagen der Analysis** (↗ LP 5ff.)
  Sie erfolgt schrittweise über die Behandlung von Zahlenfolgen, des Grenzwertbegriffs, des Differentialquotienten und des Integrals. Die Schüler werden hierbei an gegenüber dem Mathematikunterricht bis Klasse 10 qualitativ neue mathematische Denkweisen herangeführt. Nicht jedes einzelne Element der Theorie ist in der Praxis unmittelbar anzuwenden. Es wird gewissermaßen ein neues Instrumentarium entwickelt, das erst in seiner Gesamtheit von hoher praktischer Bedeutung ist. Das Interesse der Schüler muß folglich für die Entwicklung der mathematischen Grundlagen insgesamt geweckt werden, bis schließlich an „ausgewählten und erforderlichenfalls vereinfachten Sachverhalten" (↗ LP 12) Einsichten in die praktische Bedeutung der Mathematik erzielt werden können.

Aus der allgemeinen Zielstellung der Abiturstufe ergibt sich, daß in Klasse 11 in Verbindung mit den beiden speziellen Hauptzielen des Mathematikunterrichts die Schüler auch in diesem Unterrichtsfach systematisch auf ein Hochschulstudium vorzubereiten sind. Es sind hohe Anforderungen zu stellen, insbesondere hinsichtlich der Selbständigkeit der Schüler bei der Aneignung und Festigung des von ihnen zu erwerbenden Wissens und Könnens. Dazu sind geeignete Methoden erforderlich. Der Lehrplan orientiert in diesem Zusammenhang auf die große Bedeutung des vielfältigen Arbeitens mit Aufgaben und nennt eine Reihe von Schülertätigkeiten, die in Verbindung damit organisiert werden sollten (↗ LP 13 f.). Die Schüler sind schrittweise an das selbständige Arbeiten mit der Literatur heranzuführen, wofür vor allem das auf der Grundlage des Lehrplans entwickelte Lehrbuch zu nutzen ist. Der Lehrer sollte aber auch auf weitere Literatur, etwa für die Vorbereitung von Schülervorträgen, verweisen (↗ LP 11).

[1] Die in diesem Buch verwendeten Abkürzungen und Zeichen sind auf Seite 237 erläutert.

Der Mathematikunterricht in Klasse 11 ist theoretisch anspruchsvoll. Damit ist nicht allein der gegenüber dem vorangehenden Mathematikunterricht höhere Abstraktionsgrad gemeint, sondern insbesondere auch die Forderung nach einem tieferen inhaltlichen Verständnis und erhöhter Anwendungsbereitschaft des zu erwerbenden Wissens und Könnens. Es ist stets davon auszugehen, daß der Mathematikunterricht der Abiturstufe allgemeinbildenden Charakter hat und deshalb die Entwicklung grundlegenden mathematischen Könnens im Mittelpunkt steht.
In seiner Gesamtanlage ist der Mathematikunterricht so zu gestalten, daß bei der Aneignung grundlegenden mathematischen Wissens und Könnens solche Persönlichkeitseigenschaften ausgeformt werden, wie sie der Lehrplan auf Seite 12 nennt.

Zum Aufbau und zur Verwendung der Unterrichtshilfen

Die vorliegenden Unterrichtshilfen wurden auf der Grundlage des Lehrplans ausgearbeitet. Alle Aussagen dieses Buches zu der methodischen und organisatorischen Gestaltung des Unterrichts sind nicht verbindlich, sondern stellen Empfehlungen dar.
Im folgenden werden die Funktion und die Art und Weise der Nutzung der Unterrichtshilfen erläutert.
(1) Zur Unterstützung der Plankontrolle wird eine Übersicht zur **Jahresstoffverteilung** in Form eines Diagramms vorangestellt (↗ UH 10). Mit ihrer Hilfe kann der Lehrer bestimmen, bis zu welchem Zeitpunkt im Schuljahr etwa die Behandlung der einzelnen Stoffabschnitte abgeschlossen werden sollte.
(2) Jedem Stoffgebiet und jedem Stoffabschnitt sind **Vorbemerkungen** vorangestellt. Darin werden die Hauptanliegen, die mit der Behandlung des jeweiligen Stoffes verbunden sind, in knapper Form dargestellt. Der Stoff wird in die Linienführung des Lehrplans eingeordnet, und es werden wesentliche Ziele der Bildung und Erziehung genannt. *Deshalb beginnt jede richtige Verwendung der Unterrichtshilfen mit dem Studium der jeweiligen Vorbemerkungen.* Ohne Kenntnis des dort Gesagten ist eine richtige Wertung und Einordnung der Einzelhinweise, in denen nicht ständig allgemeine Zielstellungen wiederholt werden, nicht möglich.
Die in den Vorbemerkungen zu den Stoffabschnitten enthaltenen *Leitfragen* können zur Zielorientierung über den gesamten Stoffabschnitt hinweg wie auch für die einzelnen Lerneinheiten sowie für Teil- und Gesamtzusammenfassungen verwendet werden. Ferner werden Übersichten über die Struktur des zu vermittelnden Stoffes zur Orientierung für den Lehrer angegeben, die z. T. aber auch zur Systematisierung im Unterricht eingesetzt werden können.
(3) Für jedes Stoffgebiet ist eine **Stoffverteilung** angegeben. Die dort vermerkten Lerneinheiten decken sich in Abfolge und Inhalt mit denen des Lehrbuchs. Diese Stoffverteilung ist ebenfalls nur *ein* möglicher Vorschlag. Er muß durch den Lehrer in den Zeitablauf des Schuljahres unter Berücksichtigung der Zeit- und Stundenplanung an der eigenen Schule eingeordnet und ggf. auch inhaltlich ergänzt, abgewandelt oder weiter konkretisiert werden.
(4) Jedem Stoffgebiet sind **Aufgaben für tägliche Übungen und Wiederholungen** vorangestellt. Sie umfassen solche Komplexe, die zur Festigung des Grundwissens und der grundlegenden Fähigkeiten und Fertigkeiten sowie zur Sicherung des Ausgangsniveaus für die Behandlung neuen Stoffes dienen und weitgehend auch zurückliegenden Stoff einbeziehen. Sie sind nicht den einzelnen Lerneinheiten zugeordnet, damit der Lehrer selbst, entsprechend den Erfordernissen in seiner Klasse, Auswahl, Anordnung und Zeitpunkt des Einsatzes bestimmen kann. Ein erheblicher Teil der Aufgabenstellungen soll lediglich bestimmte Aufgabentypen charakterisieren; je nachdem, wie es die Klassensituation erfordert, kann der Lehrer ohne große Mühe Aufgaben aus dem Lehrbuch oder eigene Aufgaben ergänzen.

(5) Für jedes Stoffgebiet und für jede Lerneinheit sind **Kontrollaufgaben** bzw. **-fragen formuliert,** die jeweils in Einheit mit entsprechenden Lehrbuchaufgaben zu sehen sind. Damit wird mit Hilfe von Aufgaben bzw. Aufgabentypen das am Ende der Behandlung des Stoffgebiets oder der betreffenden Lerneinheit zu erreichende *Niveau* möglichst genau gekennzeichnet. Es ist dabei zu beachten, daß die Kontrollaufgaben zum Stoffgebiet nicht einfach als Summe der Kontrollaufgaben zu den einzelnen Lerneinheiten zu betrachten sind. In den Lerneinheiten werden mitunter nur Zwischenziele auf dem Weg zu den umfassenderen Zielen verfolgt, die sich in den Kontrollaufgaben zum Stoffgebiet widerspiegeln.
Die Kontrollaufgaben sind *nicht* als *Muster für Klassenarbeiten* gedacht, wohl aber können und sollten solche Aufgaben zu Kontrollen verschiedener Form verwendet werden. Ihre Hauptfunktion besteht darin, daß am Grad der Bewältigung solcher Aufgaben durch die Schüler der Lehrer „ablesen" kann, inwieweit die gestellten Ziele erreicht wurden.
(6) **Für jede Lerneinheit** sind **die wesentlichen Ziele** angegeben. Sie kennzeichnen, welcher Zuwachs an Wissen und Können und an Einsichten bei den Schülern erreicht beziehungsweise welche Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten weiter ausgeprägt werden sollen. Auch mit dem Stoff in enger Beziehung stehende Erziehungsziele werden genannt. Allgemeinere Ziele im Bereich der ideologischen Bildung und Erziehung und der Fähigkeitsentwicklung, die nur über einen größeren Zeitraum hinweg erreicht werden können, sind im allgemeinen in den Vorbemerkungen zu den Stoffgebieten und -abschnitten genannt.
(7) Im Anschluß an die Zielangaben sind **für jede Unterrichtsstunde Schwerpunkte** formuliert. Sie können dem Lehrer vor allem bei Lerneinheiten mit mehreren Unterrichtsstunden helfen, den Inhalt sinnvoll aufzuteilen und die Stunden zu gliedern.
(8) Die **methodischen Hinweise zu den Lerneinheiten** enthalten keine minutiös dargestellten Stundenabläufe. Sie beziehen sich vielmehr im allgemeinen auf die vorher angegebenen Schwerpunkte, die auch in ihrer Abfolge nicht in jedem Falle notwendigerweise einzuhalten sind. So wird man wohl zu Beginn einer Unterrichtsstunde oder in der ersten Stunde einer Lerneinheit das im Lernprozeß anzustrebende *Ziel formulieren und motivieren.* Die *Sicherung des Ausgangsniveaus* kann aber sowohl vor der Erarbeitung des neuen Stoffes als auch in unmittelbarer Verbindung damit erfolgen. In den Hinweisen wird deshalb z. B. nur gesagt, *was* an Wissen und Können vorausgesetzt werden muß und *wie* man es erneut bereitstellen könnte, aber nicht in jedem Fall, *wann* das im Unterrichtsablauf geschehen sollte.
Zeitpunkt und Umfang von Hausaufgabenkontrollen, kurzen Leistungskontrollen und dergleichen wird der Lehrer selbst festlegen.
Für die *Erarbeitung* sind mitunter logisch aufeinander folgende Schritte genannt. Entscheidet man sich für den hier jeweils vorgezeichneten Weg, so sind im allgemeinen auch diese Schritte einzuhalten.
Für *Festigungsphasen* sind häufig mehrere Möglichkeiten angegeben, aus denen der Lehrer auswählen kann. Die dort genannten Aufgaben können auch für *Hausaufgabenstellungen* genutzt werden, ohne daß das immer erwähnt wird.
Die in einigen Lerneinheiten als *Tafelbilder* bezeichneten Übersichten sind je nach Eignung und entsprechender Aufbereitung auch als *Projektionsfolien* oder *Arbeitsblätter* einsetzbar.
(9) Für die **Stoffabschnitte „Übungen und Anwendungen"** findet der Lehrer Hinweise zur Behandlung bestimmter Aufgabenkomplexe und Aufgabentypen sowie auch einzelner Lehrbuchaufgaben. Ferner sind einige „Stundenmuster" dargestellt, in denen die mögliche Abfolge einer Übungsstunde beschrieben ist.

Hinweis: Die Übersicht auf Seite UH 10 sollte unter Beachtung der Ferien, Praktika, Exkursionen, Prüfungen usw. sowie des Stundenplans in der Schule in den jeweiligen konkreten Schuljahresablauf eingeordnet werden. Dazu können unten Monats- und Wochenangaben eingetragen werden. Eine solche Jahresübersicht kann auch im Fachunterrichtsraum ausgehängt werden.

Übersicht zur Jahresstoffverteilung

	Stoffabschnitte	Std.	Geplante Unterrichtswochen																													
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1.1.	Zahlenfolgen und deren Partialsummen; das Beweisverfahren der vollständigen Induktion	19																														
1.2.	Kombinatorik	8																														
1.3.	Übungen und Anwendungen	8																														
2.1.	Schranken, Grenzen und Grenzwerte von Zahlenfolgen	12																														
2.2.	Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen	8																														
2.3.	Übungen und Anwendungen	5																														
3.1.	Ableitung einer Funktion	8																														
3.2.	Differentiationsregeln; die Differentiation von rationalen Funktionen und Wurzelfunktionen	15																														
3.3.	Kurvenuntersuchungen, Extremwertaufgaben	25																														
3.4.	Stammfunktionen	5																														
3.5.	Übungen und Anwendungen	13																														
4.1.	Bestimmtes Integral	6																														
4.2.	Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	6																														
4.3.	Flächeninhaltsberechnungen	6																														
4.4.	Übungen und Anwendungen	6																														

Stoffgebiet 1

Zahlenfolgen; das Beweisverfahren der vollständigen Induktion; Kombinatorik

Vorbemerkungen

Den Inhalt dieses Stoffgebietes, mit dem der Mathematikunterricht der Abiturstufe beginnt, bestimmen drei miteinander verbundene Ziele (LP 19). Zu behandeln sind:

- Zahlenfolgen und ihre Partialsummen;
- Beweisverfahren der vollständigen Induktion;
- Kombinatorische Problemstellungen, Begriffe, Sätze und Verfahren.

Hinzu kommt jedoch noch als vierte Komponente, daß die Begriffe „Menge" und „Funktion" und einige mit ihnen zusammenhängende Fakten, das Rechnen mit rationalen Zahlen, das Umformen von Termen, das Lösen von Gleichungen und Ungleichungen, der Logarithmusbegriff wie Logarithmengesetze systematisch zu wiederholen sind.
In gewisser Weise bilden die **Zahlenfolgen als spezielle Funktionen** den für den weiteren Mathematikunterricht besonders wichtigen Kern dieses Stoffgebiets. Bei ihnen wiederum stehen – im Hinblick auf spätere Funktionsbetrachtungen, den Grenzwertbegriff und die Integralrechnung – die Monotonie sowie Partialsummen und deren Untersuchung im Zentrum der Aufmerksamkeit. Alles andere ist dem unterzuordnen, ohne damit seine Bedeutsamkeit im einzelnen in Frage zu stellen.
Die Behandlung der **vollständigen Induktion** ist vor allem als Fortsetzung der Leitlinie „Beweisen" zu verstehen. Mit ihr ist – für den Schüler erstmalig, sieht man von Erörterungen zum indirekten Beweis in Klasse 8 ab – ein Beweisverfahren selbständiger Unterrichtsgegenstand. Dabei ist zu beachten: Diesem Verfahren haftet keine logische Besonderheit an (wie etwa dem indirekten Beweis). Vielmehr geh' es hier um die Nutzung einer spezifischen Eigenschaft der Folge der natürlichen Zahlen. So ist dieser Stoffkomplex auch im Zusammenhang mit der Leitlinie „Zahlenbereiche" zu sehen. Außerdem sind gewisse Aussagen (Summenformeln, Ungleichungen) bereitzustellen, die im weiteren Unterricht benötigt werden.
Die Behandlung der **Kombinatorik** erfolgt unter dem Aspekt einer ersten Einführung in diese mathematische Disziplin. An den Schülern verhältnismäßig leicht zugänglichen und interessanten Fakten soll eine spezifische Form des mathematischen Denkens so geschult werden, wie es für die Abiturstufe, nicht zuletzt unter fachübergreifender Sicht, notwendig erscheint. Dies ist im Zusammenhang mit der Lehrplanforderung nach verstärkter heuristischer Schulung zu sehen. Deshalb kann auch das Lösen von Aufgaben in diesem Stoffabschnitt nicht vorrangig als ein nach kurzem Einordnen des Sachverhalts erfolgendes Einsetzen in vorher abgeleitete Formeln und anschließendes Ausrechnen gestaltet werden. Die Schüler sollen vielmehr zu einem systematischen, schrittweisen Herangehen an Probleme und zum Durchdenken vollständiger Fallunterscheidungen befähigt werden. Das kann beispielsweise auch an einfachen Sachverhalten geschehen, die bei formaler Erledigung auf Kombinationen oder Variationen mit Wiederholung führen würden, für die der Lehrplan keine Behandlung von Formeln vorsieht.

Aber auch in den übrigen Teilen des ersten Stoffgebiets, insbesondere im Vermuten von Summenformeln, stecken wesentliche Potenzen, der erzieherisch bedeutsamen Lehrplanforderung zu entsprechen, „die Schüler sowohl zu befähigen, rationell, intensiv und diszipliniert nach vermittelten mathematischen Methoden und Verfahren zu arbeiten als auch selbständig, umsichtig und unter Einsatz ihres Wissens und Könnens das Lösen für sie neuer Probleme zu versuchen“ (LP 10). Neben der überall in gleichem Maße zu beachtenden Entwicklung wertvoller Persönlichkeitseigenschaften, auf die der Lehrplan an gleicher Stelle hinweist, liegen weitere erzieherische Potenzen vor allem in einer lebensverbundenen und parteilichen Behandlung von Sachverhalten und Aufgaben aus der gesellschaftlichen Praxis und anderen Wissenschaftsdisziplinen; sie bestimmen auch wesentlich den Inhalt des abschließenden Stoffabschnitts 1.3 „Übungen und Anwendungen“.

Kontrollaufgaben

Nach der Behandlung des Stoffgebietes 1 sollten alle Schüler Aufgaben folgenden Typs lösen können:

- Ermittlung von Folgengliedern aufgrund vorgegebener Zuordnungsvorschriften, graphische Darstellung;
- Angabe einer möglichen Zuordnungsvorschrift bzw. des n-ten Gliedes einer Zahlenfolge, falls ein Anfangsstück der Folge gegeben ist;
- Untersuchung einer vorgegebenen Folge auf Monotonie; Begründung der dabei getroffenen Feststellung;
- Identifizierungen hinsichtlich „arithmetische Zahlenfolge“ und „geometrische Zahlenfolge“:
  Entscheidung, ob eine gegebene Zuordnungsvorschrift eine arithmetische bzw. geometrische Folge liefert;
  Entscheidung, ob ein vorgelegtes Anfangsstück einer Folge zu einer arithmetischen bzw. geometrischen Folge gehören kann;
  Angabe der Differenz bzw. des Quotienten im betreffenden Falle;
- Realisierungen der Begriffe „arithmetische Zahlenfolge“ und „geometrische Zahlenfolge“, d. h. Angabe der ersten Glieder oder einer (expliziten) Zuordnungsvorschrift für eine arithmetische bzw. geometrische Folge
  - ohne zusätzliche Bedingungen;
  - falls Glieder oder Differenz/Quotient vorgeschrieben sind;
  - bei vorgeschriebenem Monotonieverhalten;
- Ermittlung der (ersten Glieder der) Partialsummenfolge zu einer vorgegebenen Folge; Vermutung einer (expliziten) Zuordnungsvorschrift für diese Partialsummenfolge und Beweis der Richtigkeit dieser Vermutung mittels vollständiger Induktion;
- Ermitteln der Summe einer vorgegebenen endlichen arithmetischen bzw. geometrischen Zahlenfolge unter Nutzung der betreffenden Summenformeln; umgekehrtes Vorgehen bei bekannter Summe; Lösen von Sach- und Anwendungsaufgaben, die auf eine solche Fragestellung führen;
- Entscheidung, ob es bei einer vorliegenden kombinatorischen Fragestellung um Permutationen, Variationen oder Kombinationen (ohne Wiederholung) geht, und Anwendung der betreffenden Formel für die Anzahl zur Beantwortung der Frage.

Das anzustrebende Niveau wird etwa durch folgende Aufgaben, deren selbständiges Lösen die Schüler dauerhaft beherrschen müssen, gekennzeichnet:

1. Geben Sie die ersten vier Glieder der Folge (a_k) mit $a_k = \frac{k(k+1)}{k+2}$ an! Untersuchen Sie die Folge auf Monotonie! Sind die Zahlen $\frac{90}{11}$, $\frac{21}{4}$ und $\frac{27}{7}$ Glieder der Folge (a_k)? Wenn ja, welche?
Nennen Sie die Definition der Monotonie von Zahlenfolgen!

2. Geben Sie eine (explizite) Zuordnungsvorschrift für eine Folge (a_k) an, von der ein Anfangsstück lautet: $\left(\frac{1}{2}; -\frac{4}{3}; \frac{9}{4}; -\frac{16}{5}; \frac{25}{6}\right)$!
Stellen Sie die so erhaltene Folge für $1 \leqq k \leqq 10$ in einem geeigneten Maßstab graphisch dar!

3. Bei welchen der nachstehend aufgeführten Folgen handelt es sich um eine arithmetische bzw. um eine geometrische Folge? Geben Sie in diesen Fällen die Differenz bzw. den Quotienten an, und setzen Sie die Folge entsprechend um zwei Glieder fort!

a) $\left(\frac{9}{16}; \frac{3}{4}; 1; \frac{4}{3}; \frac{16}{9}\right)$ **b)** $(-2; -6; -12; -20; -30)$ **c)** $(0{,}5; 1{,}7; 2{,}9; 4{,}1; 5{,}3)$

4. Geben Sie explizite Zuordnungsvorschriften für Folgen an, die die angegebenen Eigenschaften haben!
   a) Streng monoton fallende arithmetische Folge (a_k) mit $a_1 = 0{,}6$
   b) Geometrische Folge, die nicht monoton ist
   c) Streng monoton wachsende geometrische Folge (a_k) mit $a_3 = 5$
   Begründen Sie, warum jede arithmetische Folge monoton ist!

5. Ermitteln Sie für die Folge (a_k) mit $a_k = \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$ $(k \geqq 1)$ die ersten fünf Partialsummen!
Vermuten Sie auf Grund dessen eine allgemeine Summenformel für (a_k)! Erläutern Sie, warum die Formel noch nicht als allgemeingültig angesehen werden kann, und führen Sie einen Beweis mittels vollständiger Induktion! (↗ LB 39, Aufg. 3a))!

6. Gegeben sei eine Zahlenfolge (a_n) mit $a_n = \frac{1}{(n+2)(n+3)}$ $(n \geqq 1)$.
Ermitteln Sie die ersten drei Glieder dieser Folge und der dazugehörigen Partialsummenfolge (s_n)!
Für diese Glieder der Partialsummenfolge gilt

$$(*) \quad s_n = \frac{n}{3(n+c)} \quad (n = 1, 2, 3).$$

Ermitteln Sie den Wert der Konstanten c!
Setzen Sie diesen Wert in (*) ein, und zeigen Sie durch vollständige Induktion, daß damit eine explizite Zuordnungsvorschrift für die Partialsummenfolge (s_n) vorliegt!
Wie groß ist demzufolge die Summe $\sum_{n=1}^{60} a_n$?

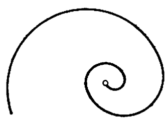


Bild 1.1

7. Bild 1.1 zeigt den Anfang einer Spirale, die sich aus Halbkreisen zusammensetzt. Der Radius des ersten Halbkreises sei r, der Radius jedes weiteren Halbkreises ist halb so groß wie der Radius seines unmittelbaren Vorgängers. Die Längen $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots$ der Halbkreisbögen bilden eine unendliche Folge (b_n).

Geben Sie das n-te Glied dieser Folge in Abhängigkeit von r an! Beweisen Sie durch vollständige Induktion, daß für die Summe s_n der ersten n Glieder der Folge (b_n) gilt:

$$s_n = 2\pi r\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \quad (n \geqq 1)!$$

8. Eine arithmetische Folge (a_k) beginne mit den Gliedern $a_1 = -2{,}5$; $a_2 = -1{,}8$. Geben Sie eine explizite Zuordnungsvorschrift für diese Folge an, und ermitteln Sie die Summe der ersten 30 Glieder dieser Folge!

9. Eine geometrische Folge beginne mit $a = 3$ und habe den Quotienten $q = 1{,}1$. Geben Sie eine explizite Zuordnungsvorschrift für diese Folge an!
Die wievielte Partialsumme dieser Folge ist (angenähert) 192?

10. LB 52, Aufg. 16

11. Beim Durchgang durch eine Glasplatte verliere ein Lichtstrahl 5% seiner Intensität (Helligkeit). Welcher Bruchteil der ursprünglichen Intensität ist nach dem Durchgang durch 12 dieser Glasplatten noch vorhanden?
Wie viele solcher Platten würden ein Absinken der Helligkeit auf ein Viertel des Ausgangswertes bewirken?

12. Wie viele Wanderwege kann man unter den folgenden Bedingungen mit vier (fünf) Farben kennzeichnen?

a) Die Kennzeichnung erfolgt durch ein Kreuz oder einen Kreis, ein Dreieck, ein Quadrat, einen waagerechten oder einen senkrechten Strich.

b) Die Kennzeichnung erfolgt durch zwei zueinander parallele Striche in verschiedenen Farben. Dabei wird die Reihenfolge beachtet (also etwa zwischen „blau–rot" und „rot–blau" unterschieden).

c) Zur Kennzeichnung dienen (wie bei b)) zwei zueinander parallele Striche. Sie dürfen aber auch gleichfarbig sein, und die Reihenfolge spielt keine Rolle. (↗ LB 71, Aufg. 11)

Lösungen:

1. $(a_0 = 0)$, $a_1 = \frac{2}{3}$; $a_2 = \frac{3}{2}$; $a_3 = \frac{12}{5}$; $a_4 = \frac{20}{3}$ $\qquad (a_k)$ ist streng monoton wachsend.

$\frac{90}{11} = a_9$; $\frac{21}{4} = a_6$; $\frac{27}{7}$ ist kein Folgenglied

2. $a_k = (-1)^{k-1}\frac{k^2}{k+1} \quad (k > 0)$

3. a) Geometrische Folge; $q = \frac{4}{3}$; $a_6 = \frac{64}{27}$; $a_7 = \frac{256}{81}$

b) Weder arithmetische noch geometrische Folge

c) Arithmetische Folge; $d = 1{,}2$; $a_6 = 6{,}5$; $a_7 = 7{,}7$

5. $s_1 = \frac{1}{3}$; $s_2 = \frac{2}{5}$; $s_3 = \frac{3}{7}$; $s_4 = \frac{4}{3}$; $s_5 = \frac{5}{11}$; $s_n = \frac{n}{2n+1}$

6. $a_1 = \frac{1}{12}$; $a_2 = \frac{1}{20}$; $a_3 = \frac{1}{30}$ $\quad s_1 = \frac{1}{12}$; $s_2 = \frac{2}{15}$; $s_3 = \frac{1}{6}$; $c = 3 \quad \sum\limits_{n=1}^{60} a_n = \frac{20}{63}$

7. $b_n = 2^{1-n}\pi r$

8. $a_k = -2{,}5 + (k-1)\cdot 0{,}7 = 0{,}7k - 3{,}2 \quad (k > 0)$

$$s_{30} = \sum_{k=1}^{30}(0{,}7k - 3{,}2) = 229{,}5$$

9. $a_k = 3 \cdot 1{,}1^{k-1}$ $(k > 0)$; $n = 21$ (d. h. $s_{21} \approx 192$)

11. $0{,}95^{12} \approx 0{,}542$, rund 54% der ursprünglichen Helligkeit; $\frac{1}{4}$ (also 25%) bei 27 Platten

12. a) $4 \cdot 6 = 24$ $(5 \cdot 6 = 30)$ b) $V_4^2 = 12$ $(V_5^2 = 20)$

c) $\binom{4}{2} + 4 = 10$ $\left(\binom{5}{2} + 5 = 15\right)$

Aufgaben für tägliche Übungen und Wiederholungen

Komplex 1: Terme – Belegungen und Variablenersetzungen

1. Für welche natürlichen (ganzen) Zahlen k liefert der Term

a) $2k - 7$; **b)** $k^2 + 3$; **c)** $20 - k^2$; **d)** $(k - 2)(k + 2)$;

e) $k^3 + 8$ positive (negative) Werte?

2. Für welche natürlichen (ganzen, reellen) Zahlen sind die folgenden Terme (im Bereich der reellen Zahlen) nicht definiert?

a) $\sqrt{3k - 5}$; **b)** $\sqrt{z^2 - 16}$; **c)** $\frac{1}{n - 2{,}5}$; **d)** $\frac{n}{(n + 3)(n - 5)}$

3. Geben Sie vier Elemente der folgenden Mengen an, und beschreiben Sie die Mengen möglichst in Worten!

a) $\{4k; k \in N\}$ **b)** $\{2n - 1; n \in N$ und $n > 0\}$

c) $\{5k + 1; k \in G\}$ **d)** $\{4m + 3; m \in N\}$

e) $\left\{\frac{1}{2k}; k \in N\right\}$ **f)** $\left\{\frac{1}{n(n - 1)}; n \in N, n > 1\right\}$

4. Beschreiben Sie folgende Mengen natürlicher Zahlen in Worten, und geben Sie sie möglichst mit Hilfe von Variablen an!

a) $\{0; 4; 8; 12; 16; 20\}$ **b)** $\{2; 12; 22; 32; 42; \ldots\}$

c) $\{2; 4; 8; 16; 32; \ldots\}$ **d)** $\{0; 1; 4; 9; 16; 25; \ldots\}$

e) $\{1; 5; 25; 125; \ldots\}$ **f)** $\{2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19\}$

5. Ersetzen Sie in	$5k + 1$	$(a - 1)(a + 1)$	$\frac{r + 3}{r + 1}$	$p^2 + p$
die Variable durch	$n + 1$	$b + 2$	$r - 1$	$2p$

Komplex 2: Termumformungen

6. Formen Sie in Summen um!

a) $3(a + 4b)$; $5u(3v - 2w)$; $(2x + y)(x - 3y)$

b) $3(2a - 5t) \cdot 2st$; $4v(0{,}25u + 0{,}8w) \cdot 5u^3w$

c) $(2m + 5n)^2$; $\left(a - \frac{1}{2}b\right)^2$; $\left(3u - \frac{1}{4}v\right)\left(3u + \frac{1}{4}v\right)$

7. Klammern Sie möglichst weitgehend gemeinsame Faktoren aus!

a) $16r - 20s$; $15a^2b + 35ab^2$; $0{,}85m^2n^3 - 1{,}7m^3n^2$

b) $\frac{2}{5}ab + 2a$; $uv^2 + 4u^2v^3$; $\frac{m^3n^4}{2} - \frac{m^2n^2}{6} + 0{,}1\,mn^2$

8. Vereinfachen Sie folgende Terme!

a) $2mn - 3m(5m - 5n) - 2(8n^2 + 3)$

b) $(a + b)^2 - (2a + 2b)(2a - 2b) + 5a(2b - a)$

c) $3(x(x + y)^2 - y(x - y)^2) - (2xy^2 + 3yx^2)$

9. Formen Sie in Produkte um!

a) $x^m + x^{m+1}$; $a^{m+n} - a^m$; $y^{k+1} - y$

b) $6a^{n+2} + 12a^2$; $u^{3k} - u^{2k}$; $a^n b^{2n} + a^n b^n$

c) $0{,}4b^{n+1} + 0{,}88b^n$; $25x^{2n+3} - 35x^{n+1}$

10. Schreiben Sie folgende Terme als Produkte!

a) $xy^4 - 4xz^2$; $a^2 + 2ab + b^2 - 25$

b) $1 - m^2 - 2mn - n^2$; $rs + rt + s^2 + 2st + t^2$

11. Vereinfachen Sie die Terme!

a) $\frac{n}{n+1} + 1$; $\frac{n}{n+1} - 1$; $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$; $\frac{n+1}{n} - \frac{n}{n+1}$

b) $\frac{1}{2n} + \frac{1}{n}$; $\frac{n-1}{n} + \frac{1}{2n}$; $\frac{n-1}{n+1} + \frac{n+1}{n-1}$

c) $\frac{3n+1}{n^2} - \frac{3}{n}$; $\frac{5}{n^2} - \frac{n+1}{n^3}$; $\frac{n+1}{n(n-1)} + \frac{1}{n}$

d) $\frac{1-k^2}{k^3+2k^2+k}$; $\frac{ab^2-16a^3}{(4a+b)^2}$; $\frac{2a+b}{3b^2-12a^2}$

Komplex 3: Teilbarkeit

12. a, k, m, n seien natürliche Zahlen. Welche der Terme
$2a, 3k, 6m, 10n, 2a + 1, 4k + 1, 5m + 3, 2n - 1,$
$10a + 2, 8k + 4, 12m + 3, 8n - 6, 3a + 7, 4k - 7, 6m + 10, 15n - 12$
kennzeichnen mit Sicherheit

a) gerade (ungerade) Zahlen, **b)** durch 3 (4, 5, 6) teilbare Zahlen,

c) Zahlen, die bei Division durch 3 (4, 5, 6) den Rest 1 (2, 3, ...) lassen?

13. Welcher der folgenden Terme liefert für jedes natürliche k (m, n) bzw. für kein natürliches k (m, n) einen ganzzahligen Wert?

a) $\frac{25k+10}{5}$; $\frac{3k+1}{9}$; $\frac{13k-1}{2k+1}$; $\frac{k}{k+1}$; $\frac{k^2-1}{k+1}$

b) $\frac{n(n+1)}{2}$; $\frac{m+n}{2}$; $\frac{(2m+1)+(2n+1)}{4}$; $\frac{(4m+1)-(2n-1)}{2}$

c) $(m + 1)(n + 1) - m \cdot n$; $\frac{n+(n+1)+(n+2)}{3}$; $\frac{n+(n+1)+(n+2)+(n+3)}{4}$

Komplex 4: Lösen von (einfachen) Gleichungen und Ungleichungen

14. Ermitteln Sie mündlich die Lösungen folgender Gleichungen im Bereich der natürlichen (ganzen) Zahlen!

a) $3n + 7 = 31$; $\frac{5}{2n+3} = \frac{35}{77}$; $\frac{6}{k-3} = 12$

b) $(n + 1)(n - 1) = n^2$; $k^2 = 9 + (k - 3)(k + 3)$

c) $n^2 - 121 = 0$; $m^2 + 25 = 0$; $a^2 - 2a = 0$; $k^2 + 2k = 8$

15. Geben Sie alle natürlichen Zahlen n an, für die folgende Ungleichungen gelten!

a) $3n < 15$; $n + 2 < 27$; $n - 5 < n + 12$

b) $7n - 3 < 7n$; $8n < 3n$; $5n + 2 > 3n + 7$

c) $9 - n < 10$; $6 - 2n > 14$; $12 - 8n < 30 - 2n$

d) $\frac{5}{n} < 3$; $\frac{1}{n} < \frac{1}{5}$; $\frac{2}{n+3} > 7$

e) $n^2 < 30$; $n^3 > 100$; $n(n + 1) < 15$

f) $\frac{n}{n+1} > 1$; $\frac{n}{n-1} > 0{,}1$; $\frac{n-8}{9-n} > 0$; $\sqrt{n} < 10$

16. Für welche ganzzahligen k werden folgende Ungleichungen zu wahren Aussagen?

a) $\frac{2}{5} < \frac{k}{35}$ b) $\frac{3}{8} < \frac{12}{k}$ c) $\frac{k}{6} < \frac{20}{23}$ d) $0{,}8 > \frac{4}{k}$

Komplex 5: Begründungen und Beweise

17. Entscheiden Sie ohne Ausrechnen, ob die folgenden Aussagen wahr sind! Begründen Sie!

a) $2{,}58 \cdot (-7{,}3) < 3{,}4 \cdot (-7{,}3)$;
$(8{,}6 - 12{,}9)^2 < (8{,}6 - 11{,}7)^2$

b) $\frac{5{,}6}{8{,}27 + 3{,}5} < \frac{5{,}6}{8{,}27 - 1{,}6}$; $\frac{4{,}5 + 8{,}3}{6{,}2} > \frac{2 \cdot 4{,}3 + 4{,}5}{6{,}2}$

c) $4{,}2 - \frac{3}{8{,}5} + 1{,}8 < 6 - \frac{3{,}7}{8{,}5}$; $2{,}5 \cdot 29{,}6 \cdot (-4) < -10 \cdot 28{,}8$

d) $0{,}84^3 > 0{,}76^3$; $0{,}681^{15} > 0{,}681^{13}$

18. Welche der folgenden Behauptungen trifft für jede (nicht für jede, für keine) reelle Zahl a (b, c, d) zu?
Erläutern und begründen Sie unter Zuhilfenahme von Beispielen!

a) Aus $a < 0$ folgt $|a| > 0$; Aus $a < -a$ folgt $a > 0$

b) Aus $a < b$ folgt $-a < -b$; Aus $a < b$ folgt $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

c) Aus $a < b$ folgt $a^2 < b^2$; Aus $a < b$ folgt $a^3 < b^3$

d) Aus $a < b$ folgt $a + c < b + c$

e) Aus $a < b$ folgt $a \cdot c < b \cdot c$

f) Aus $a < b$ und $c < d$ folgt $a - c < b - d$

19. Die folgenden Aussagen sind zu beweisen.

a) Die Differenz der Quadrate zweier unmittelbar aufeinanderfolgender ganzer Zahlen ist stets ungerade.
Die Differenz der Quadrate zweier unmittelbar aufeinanderfolgender gerader Zahlen ist stets durch 4 teilbar.

b) Die Summe von sieben unmittelbar aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist stets durch 7 teilbar.
(Überprüfen Sie, ob eine entsprechende Aussage für acht unmittelbar aufeinanderfolgende Zahlen wahr ist!)

c) Ist n eine ganze Zahl, so ist $n^2 - n$ durch 2 teilbar.
Ist n eine ganze Zahl, so ist $n^3 - n$ durch 6 teilbar.

d) Addiert man zum Produkt zweier unmittelbar aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen die größere der beiden, so erhält man deren Quadrat.
Addiert man zum Produkt dreier unmittelbar aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen die mittlere von ihnen, so erhält man die dritte Potenz dieser Zahl.

e) Die Differenz der Quadrate zweier unmittelbar aufeinanderfolgender gerader Zahlen ist stets gleich der doppelten Summe dieser Zahlen.
Untersuchen Sie die Gültigkeit der entsprechenden Aussage für ungerade Zahlen!

Stoffverteilung

Thema	**Std.**	**Zu reaktivierender Stoff**	**Zu erarbeitender Stoff**
Stoffabschnitt 1.1 Zahlenfolgen; das Beweisverfahren der vollständigen Induktion 19 Std.			
1 Zur Wiederholung von Mengen und Funktionen	3	– Menge, Element (auch Schreibweisen), leere Menge, Einermenge, Teilmenge – Mengendiagramm, Durchschnitt – Gleichungen und Ungleichungen – Lösungsmengen von Gleichungen (Ungleichungen) und ihre Darstellung auf der Zahlengeraden – Funktionsbegriff, Argument, Funktionswert, Definitionsbereich, Wertebereich – Darstellungsweisen von Funktionen, insbesondere Graphen	
2 Der Begriff der Zahlenfolge	2	– Funktion, Argument, Funktionswert – Gleichungen und Graphen von Funktionen – Term; Werte von Termen – Grundeigenschaften natürlicher Zahlen (Nachfolgerrelation)	– ▶ 1 (Zahlenfolge), Glied einer Zahlenfolge – Endliche und unendliche Zahlenfolgen – Explizite Zuordnungsvorschrift – Ermitteln von Gliedern und Zuordnungsvorschriften von Zahlenfolgen – Graphische Darstellung einer Folge – Rekursive Zuordnungsvorschrift
3 Monotonie von Folgen	3	– Monotonie von Funktionen – Äquivalentes Umformen von Termen – Eigenschaften der Kleinerrelation – Lösen einfacher Ungleichungen über äquivalente Umformungen	– ▶ 2 (Monotones Wachsen (Fallen) von Zahlenfolgen) – Strenge Monotonie – Konstante Zahlenfolgen – Untersuchen von Zahlenfolgen auf Monotonie – ▶ 3 (Arithmetische Folge), Differenz, explizite Zuordnungsvorschrift – Monotonie arithmetischer Folgen

Thema	Std.	Zu reaktivierender Stoff	Zu erarbeitender Stoff
			– ▶ 4 (Geometrische Folge), Quotient, explizite Zuordnungsvorschrift – Monotonie geometrischer Folgen (Fallunterscheidung)
4 Partialsummen	2	– Folgen, n-tes Glied, explizite Zuordnungsvorschrift, Berechnen von Gliedern – Gesetze der Addition reeller Zahlen, insbesondere Assoziativität – Vermuten expliziter Zuordnungsvorschriften	– Begriff „n-te Partialsumme“ – Aufstellen von Partialsummenfolgen – Summenzeichen – Suchen nach expliziten Zuordnungsvorschriften für Partialsummenfolgen und damit nach Summenformeln – Induktiv gewonnene Formeln als unbewiesene Vermutungen – Zusammenfassung der Kenntnisse über Zahlenfolgen
5 Der Grundgedanke des Beweisverfahrens durch vollständige Induktion	1	– Variablenbelegung und -ersetzung in Termen – Termumformungen – Vorgehen beim Beweisen mathematischer Aussagen	– Möglichkeit des Erfassens aller Elemente einer geordneten endlichen Menge durch Angabe des ersten Elements und Gewinnung jedes weiteren aus seinem (unmittelbaren) Vorgänger – Übertragbarkeit dieser Überlegung auf die Menge der natürlichen Zahlen – Führen eines Beweises durch vollständige Induktion mit ausführlicher wörtlicher Formulierung – ▷ 1 (Prinzip der vollständigen Induktion)
6 Beweise für Summenformeln mittels vollständiger Induktion	3	– Folgen, Berechnen von Gliedern – n-tes Glied, explizite Zuordnungsvorschrift – Partialsummen(folgen) – Summenzeichen – Arithmetische und geometrische Folgen	– Schritte eines Beweises durch vollständige Induktion – Beweise für einige konkrete Summenformeln mit zunehmender Verkürzung der Darstellung – Beweis der Induktionsbehauptung durch Umformen einer ihrer Seiten – Verzicht auf besondere Variable k im Induktionsschritt – ▷ 2 (Summenformeln für arithmetische Folgen) (mB) – ▷ 3 (Summenformeln für geometrische Folgen) (mB)

Thema	Std.	Zu reaktivierender Stoff	Zu erarbeitender Stoff
7 Weitere Beweise mittels vollständiger Induktion	2	– Äquivalentes Umformen von Ungleichungen – Teilbarkeit – Termumformungen – Begriff und Eigenschaften des (konvexen) n-Ecks (z. B. Diagonale, Innenwinkel) – Satz über die Innenwinkelsumme im Dreieck	– Beweis der Gültigkeit von Ungleichungen, darunter $2^n > n$ für alle natürlichen n – Beweis von Teilbarkeitsaussagen – Beweis der Induktionsbehauptung durch Umformen der Induktionsvoraussetzung – Ausführen des Induktionsschlusses von $n - 1$ auf n statt von n auf $n + 1$ – Beweis einfacher geometrischer Aussagen
8 Übungen und Anwendungen zu Folgen und ihren Partialsummen	3	– Arithmetische (geometrische) Folge, Zuordnungsvorschrift, Summenformel – Termumformungen – Lösen von Gleichungen – Logarithmusbegriff und Logarithmengesetze – Vorgehen und zu beachtende Schwerpunkte beim Lösen von Sach- und Anwendungsaufgaben	– Formale Übungen zu Folgen und ihren Partialsummen – Lösen von Gleichungen der Form $x^n = a$ und $a^x = b$ – Anwendungsaufgaben, die auf arithmetische (geometrische) Folgen führen – Zusammenfassung der Kenntnisse über das Beweisverfahren der vollständigen Induktion und seine Anwendung, speziell auf den Beweis von Summenformeln
Stoffabschnitt 1.2 Kombinatorik			8 Std.
9 Permutationen	2	– Termumformungen – Lösen von Gleichungen – Beweisverfahren der vollständigen Induktion	– Beispiele für unterschiedliche Fragestellungen in der Kombinatorik – Begriff „Geordnete Menge“ – Begriff „Permutation“ – Einführen von „$n!$“ – ▷ 4 (Anzahl P_n der Permutationen von n Elementen) (mB)
10 Variationen und Kombinationen	3	– Geordnete Mengen – Permutationen – Fakultätsschreibweise – Termumformungen, insbesondere binomische Formeln – Beweis mittels vollständiger Induktion	– Begriffe „Variation (Kombination) von n Elementen zur k-ten Klasse“ – Schreibweisen „V_n^k“ und „C_n^k“ – ▷ 5 (Variationen); ▷ 6 bis ▷ 8 (Kombinationen) (mB) – Begriff „Binomialkoeffizient“, Schreibweise „$\binom{n}{k}$“ – Beziehungen zwischen Binomialkoeffizienten

Thema	Std.	Zu reaktivierender Stoff	Zu erarbeitender Stoff
11 Einfache Anwendungen zur Kombinatorik	3	– Permutationen, Kombinationen und Variationen – Fakultätsschreibweise und Binomialkoeffizienten	– Sach- und Anwendungsaufgaben, die auf Permutationen, Kombinationen oder Variationen führen – Charakterisierung der bisher behandelten Fälle als solcher „ohne Wiederholung" – Einfaches Beispiel für einen Fall „mit Wiederholung"
Stoffabschnitt 1.3 Übungen und Anwendungen			8 Std.
Übungen	6	Komplexe Aufgaben zu Zahlenfolgen, vollständiger Induktion und Kombinatorik	
Leistungskontrolle	2		

Stoffabschnitt 1.1 (19 Std.)
Zahlenfolgen und deren Partialsummen; das Beweisverfahren der vollständigen Induktion

In diesem Stoffabschnitt geht es um drei recht unterschiedliche Zielsetzungen:

- Einige in früheren Klassenstufen behandelte und im weiteren Unterricht besonders benötigte mathematische Kenntnisse sind erneut bereitzustellen.
- Für die kommenden Stoffgebiete sind grundlegende Begriffe und Sätze über Zahlenfolgen zu erarbeiten.
- Den Schülern ist das Beweisverfahren der vollständigen Induktion nahezubringen und damit ihr Wissen und Können zum Beweisen überhaupt weiterzuentwickeln.

Dabei sollte die Behandlung der einzelnen Lerneinheiten auf die Klärung der folgenden Leitgedanken ausgerichtet sein:

- Was versteht man unter einer Zahlenfolge?
  Welche Möglichkeiten bestehen, eine solche Folge eindeutig zu kennzeichnen?
- Welche Besonderheiten bestehen bei der Spezialisierung von Begriffen wie „Funktionsgleichung", „Definitionsbereich", „Wertebereich" auf Zahlenfolgen als spezielle Funktionen?
  Welche Symbolik ist gebräuchlich?
  Wie sieht die graphische Darstellung einer Zahlenfolge aus?
- Was heißt es, daß eine Folge (streng) monoton wächst bzw. fällt?
  Wie kann man eine vorgegebene Folge auf Monotonie untersuchen?
- Was ist eine arithmetische Folge, und wie lautet ihre (explizite) Zuordnungsvorschrift?
  Was läßt sich über die Monotonie einer solchen Folge sagen?
- Was ist eine geometrische Folge, und wie lautet ihre (explizite) Zuordnungsvorschrift?
  Wie steht es mit der Monotonie einer derartigen Folge?
- Was versteht man unter der n-ten Partialsumme bzw. der Partialsummenfolge einer Zahlenfolge? Welche Möglichkeiten gibt es, zu einer Zuordnungsvorschrift für die Partialsummenfolge (s_n) und damit zu einer Summenformel für (a_n) zu gelangen?

- Wie lauten Summenformeln für arithmetische und geometrische Folgen?
  Welche für die Folgen charakteristische Größen können mit ihrer Hilfe auch berechnet werden, und wie kann das geschehen?
- Welches Prinzip liegt dem Beweisverfahren durch vollständige Induktion zugrunde?
  In welchen Schritten verläuft ein solcher Beweis?
  Welcher Art sind die Aussagen, die auf diese Weise bewiesen werden?

Lerneinheit 1 (3 Std.)
Zur Wiederholung von Mengen und Funktionen

LB 8 bis 14

Diese Lerneinheit dient – nach einer kurzen Motivierung für die Beschäftigung mit Folgen und mit einem Andeuten der Bedeutung insbesondere konvergenter Folgen – vor allem der Reaktivierung bestimmter früher behandelter Stoffe:
Da der Begriff „Folge" als spezielle Funktion definiert wird, muß der Funktionsbegriff wiederholt werden. Da dieser Begriff als Menge geordneter Paare definiert worden ist (Kl. 8), ist auch eine Wiederholung des Begriffs „Menge" und der „Elementbeziehung" notwendig; vor allem im Hinblick auf das Lösen von Gleichungen und Ungleichungen werden dann auch „Teilmenge" und „Durchschnitt" wiederholt.
Das Lösen von Gleichungen (auch solcher mit Absolutbeträgen) und Ungleichungen wird jedoch nicht nur zur Anwendung der Begriffe der Mengenlehre wiederholt. Die Schüler benötigen hier gewisse Sicherheit zumindest aus drei Gründen:

- Beim Arbeiten mit expliziten Zuordnungsvorschriften für Folgen müssen die Schüler Gleichungen, beim Untersuchen der Monotonie von Folgen Ungleichungen lösen.
- Der absolute Betrag wird bei Grenzwertuntersuchungen von Folgen und Funktionen benötigt. Deshalb sollten die Schüler beim Lösen entsprechender Gleichungen (und gegebenenfalls einfacher Ungleichungen) ihre diesbezüglichen Kenntnisse auffrischen.
- Die Funktionen, die in den späteren Stoffabschnitten zu untersuchen sind, werden fast ausschließlich in Form von Gleichungen vorgegeben. Dabei müssen die Schüler Gleichungen umformen, vor allem aber auch lösen, z. B. beim Ermitteln von Nullstellen.

Ebenfalls im Hinblick auf die spätere Untersuchung von Funktionen werden dann auch die anderen Darstellungsweisen, vor allem die graphische Darstellung, wiederholt.
Welche inhaltlichen Schwerpunkte man in dieser Lerneinheit setzt, hängt in besonderem Maße von dem in der betreffenden Klasse erreichten Niveau ab. Gegebenenfalls sind also die nachfolgend genannten Schwerpunkte abzuändern. Dabei hat allerdings der Funktionsbegriff Priorität; die Behandlung von Gleichungen mit Absolutbeträgen hingegen kann auch bis zum Beginn des Stoffgebiets 2 aufgeschoben werden. Dennoch sollte man auch hier möglichst frühzeitig eine Grundlage für die allmähliche weitere Festigung, etwa in Form täglicher Übungen, schaffen.
Um die besonderen Bedingungen der jeweiligen Klasse besser berücksichtigen zu können, enthält das LB gerade zu dieser LE mehr Aufgaben, als in 3 Stunden zu bewältigen sind; eine entsprechende Auswahl ist also geboten. Die meisten Aufgaben sind jedoch so beschaffen, daß sie in täglichen Übungen nachfolgender Stunden eingesetzt werden können.
Bei den Wiederholungen darf der Schwerpunkt nicht einseitig auf Abfragen bzw. Hersagen früher gelernter Texte (Definitionen, Sätze und auch Lösungsverfahren) liegen. Auch im LB wird durch die Gestaltung des Lehrtextes und der Aufgabenstellungen dem Schüler ein hohes Maß an Selbständigkeit abverlangt. Allgemeine Erörterungen sollten dann zusammen mit dem Beschreiben und Begründen der Schritte beim Lösen von Aufgaben erfolgen.

Ziele

Die Schüler
- haben ihr Wissen vom Begriff „Menge“ und entsprechenden Relationen gefestigt, sie können es auf einfache arithmetische und geometrische Sachverhalte anwenden,
- haben ihr Wissen vom Begriff „Funktion“ gefestigt; sie können die Funktion als Menge geordneter Paare $[x; y]$ definieren und von vorgelegten Abbildungen (Paarmengen) entscheiden, ob es sich um Funktionen handelt oder nicht,
- können Vor- und Nachteile der vier Darstellungsweisen für Funktionen und entsprechende Beispiele angeben,
- können (relativ einfache) Gleichungen und Ungleichungen lösen.

Schwerpunkte

1. Stunde
- Motivierung für die Beschäftigung mit Folgen
- Wiederholung der Begriffe „Menge“, „Element einer Menge“, „Teilmenge einer Menge“, „Durchschnitt von (zwei) Mengen“ (einschließlich der entsprechenden Schreibweisen) und Anwendung vor allem auf Zahlenmengen

2. Stunde
- Wiederholung der Begriffe „Lösung einer Gleichung“ und „Lösungsmenge einer Gleichung“
- Übungen im Lösen einfacher linearer und quadratischer Gleichungen; dabei Wdh von Regeln für das äquivalente Umformen von Gleichungen und der Lösungsformel für quadratische Gleichungen (z. B. LBA 10)
- Übungen im Lösen einfacher Ungleichungen (z. B. LBA 12); dabei Wdh von Regeln für das äquivalente Umformen von Ungleichungen

3. Stunde
- Wiederholung des Begriffs „Absoluter Betrag einer (rationalen bzw. reellen) Zahl“ und Übungen im Lösen einfacher Gleichungen mit Absolutbeträgen
- Wiederholung der Begriffe „Funktion“, „Definitionsbereich einer Funktion“, „Wertebereich einer Funktion“
- Wiederholung der Darstellungsweisen von Funktionen

Methodische Hinweise

Motivierung für die Beschäftigung mit Folgen Es wirkt sich positiv auf das interessierte und aktive Mitarbeiten der Schüler aus, wenn ihnen das Ziel ihrer Lerntätigkeit bekannt ist, sie die einzelnen Schritte ihres Lernens an diesem Ziel orientieren können. Das gilt für die einzelne Unterrichtsstunde genauso wie für ein ganzes Schuljahr.
Das Lehrbuch bietet auf Seite 7 f. Material für eine verständliche und vor allem auch zeitlich nicht zu aufwendige Motivierung, indem es die Aufmerksamkeit auf einen Grenzprozeß und ein geeignetes „Gegenbeispiel“ richtet und dabei gleichzeitig den von den Schülern

seit Klasse 6 genutzten Begriff der Folge anklingen läßt. Die Schüler sollten die Bilder A1 und A2 betrachten, die dazugehörigen Textabschnitte lesen und dann die beiden Sachverhalte und deren Gemeinsamkeiten beschreiben (UG). Unter etwas stärkerer Führung durch den Lehrer können die Unterschiede und damit die Ungenauigkeit des Wortes „anschmiegen" für die Beschreibung der beiden Sachverhalte verdeutlicht werden. Mit den unendlichen Dezimalbrüchen kann der Lehrer die Schüler an ein weiteres Beispiel erinnern: „Die Glieder der Folge 0,3; 0,33; 0,333; ... sind zwar alle kleiner als $\frac{1}{3} = 0,\overline{3}$, sie kommen aber dieser Zahl und nur ihr beliebig nahe". Damit sind die wichtigsten Inhalte der Stoffgebiete 1 und 2 angedeutet.

Als verständliche Beispiele für die Stoffgebiete 3 und 4 könnte der Lehrer nennen:

- Was versteht man unter der Augenblicksgeschwindigkeit? Wie kann man sie berechnen?
- Bei welchen Abmessungen hat ein Balken die größte Tragfähigkeit, wenn er aus einem Baumstamm vom Durchmesser d hergestellt werden soll?
- Wie kann man den Flächeninhalt von krummlinig begrenzten ebenen Figuren ermitteln?

Damit ist auch der Zusammenhang mit den Funktionen hergestellt, denn der Schüler weiß:

- Bei der Geschwindigkeit geht es um die Weg-Zeit-Funktion.
- Die Tragfähigkeit des Balkens hängt von seinen Abmessungen ab.
- Flächeninhalte werden durch Längen bestimmt.

Wiederholung einiger Begriffe der Mengenlehre Zweckmäßig ist folgende Untergliederung:

- Menge, Elementbeziehung (dabei insbesondere Schreibweise mittels geschweifter Klammern); Einermenge, die leere Menge
- Teilmenge, Durchschnitt, Mengendiagramm

Im Prinzip sollten die Schüler zunächst einen Abschnitt im Lehrbuch durchlesen und dann das dadurch Reaktivierte beim Lösen von Aufgaben anwenden. In manchen Fällen wird es die Klassensituation gebieten, eine Teilaufgabe vorab gemeinsam zu lösen, wie überhaupt ein ausgewogenes Verhältnis von mündlichem und schriftlichem Arbeiten anzustreben ist.

Im Setzen und Lesen geschweifter Klammern zum Beschreiben der Eigenschaften der Elemente einer Menge sind die Schüler am wenigsten geübt. Deshalb ist LBA 2 wichtiger als LBA 1.

Insgesamt ist auch bei der Wiederholung die richtige Schwerpunktsetzung zu beachten. So geht es bei LBA 1 nicht etwa um eine Wiederholung der Teilbarkeit oder gar von Verfahren zum Ermitteln des (ggT und) kgV. Die den Schülern relativ gut vertrauten Begriffe aus diesem Bereich sollen sie nur schnell zu einer (durch die unterschiedliche Anzahl der Elemente bedingten) Vielfalt von Mengen führen, auch dann, wenn aus Zeitgründen auf einzelne Aufgaben verzichtet wird.

Die Bearbeitung von LBA 4 und 5 bietet Gelegenheit, nicht nur die Zusammenhänge der den Schülern bekannten Zahlenbereiche zu wiederholen, sondern auch andere wichtige arithmetische Begriffe (Potenz, Logarithmus) und ausgezeichnete Winkelfunktionswerte erneut bereitzustellen, ohne jedoch hier ausführlich z. B. auf die Winkelfunktionen eingehen zu können.

Mit dem Lösen der LBA 7 sollen die Schüler zwar auch einige Rechenregeln (z. B. Addieren gebrochener Zahlen als gemeine Brüche) wiederholen, jedoch alle notwendigen Berechnungen mündlich und nur so weit, wie jeweils erforderlich, ausführen.

Nach Möglichkeit sollte man auch geometrische Beispiele einbeziehen, etwa mit Hilfe der LBA 6 (die Kreisringe sind als Flächen einschließlich der sie begrenzenden Kreise zu verstehen). Bei b) ist zu beachten: Den Schülern ist der Begriff „Vereinigung zweier Mengen" mit der entsprechenden Symbolik nicht bekannt, so daß für den von k_1 und k_2 erzeugten Kreisring R_{12} nur die Schreibweise

$R_{12} = \{x; x \in k_1 \text{ oder } x \in k_2 \text{ oder } x \in A_1 \cap I_2\}$

und nicht $R_{12} = (k_1 \cup A_1) \cap (I_2 \cup k_2)$ möglich ist.

Wiederholung von „Gleichung", „Lösung", „Lösungsmenge" Diese Begriffe sind beim Arbeiten mit Gleichungen zu wiederholen, ihre Definitionen beim Kommentieren und Begründen zu verwenden. Dabei sollen die Schüler verstehen, daß die Lösungsmenge einer Gleichung leer sein, daß sie endlich oder unendlich viele Elemente enthalten und insbesondere auch mit dem Grundbereich übereinstimmen kann. Als Grundbereich sollte vorzugsweise die Menge der reellen Zahlen gewählt und die Frage der Äquivalenz bzw. Lösbarkeit von Gleichungen in Abhängigkeit vom jeweils festgelegten Grundbereich aus Zeitgründen nicht explizite erörtert werden.

Übungen im Lösen einfacher Gleichungen und Ungleichungen Beim Lösen von Gleichungen festigen die Schüler auch ihre Fertigkeiten im Rechnen mit rationalen Zahlen, Umformen von Termen oder von Gleichungen. Hier wie auch sonst sollten sie möglichst rationell vorgehen, indem sie zunächst die Aufgabe durchdenken und erst in Abhängigkeit davon ein Lösungsverfahren einsetzen oder aber durch einfachere Überlegungen die Lösung finden. Das sei an LBA 8c) gezeigt:

- Die Schüler sollten an den Zahlen 3 und 14 (bzw. 1,5 und 7) erkennen, daß die Diskriminante (↗ Lösungsformel) negativ ist, die Gleichung demzufolge keine Lösung hat und somit auch das angegebene x nicht zur Lösungsmenge gehören kann.
- Es ist aber auch rasch erkennbar, daß x negativ ist, demzufolge für dieses x alle drei Summanden auf der linken Seite der Gleichung positiv sind, ihre Summe also nicht 0 sein kann.

Alle anderen Wege sind aufwendiger. Schüler, die z. B. den „normalen" Weg der Probe gehen, sollte man darauf hinweisen. Noch offenkundiger ist der Vorteil bei den Ungleichungen in LBA 9, z. B. bei d): Den beiden Faktoren von s ist sofort $0 < s < 1$ zu entnehmen. Demzufolge ist der Zähler des Bruches positiv, der Nenner negativ, mithin der Quotient selbst für dieses s kleiner als 0, also erst recht kleiner als 0,1.

Übungen im Lösen von Gleichungen mit Absolutbeträgen Derartige Aufgaben sind den Schülern bisher kaum begegnet. In Klasse 7 (und seitdem nicht wieder) wurden einige wenige Gleichungen, bei denen die Variable innerhalb der Absolutstriche steht, behandelt. Auch der LP Klasse 11 fordert nicht, eine Theorie, einen Kalkül für das Lösen derartiger Gleichungen zu entwickeln. Im Hinblick auf das später Benötigte kann man sich auf einfache Ausdrücke beschränken, so daß gute inhaltliche Vorstellungen vom absoluten Betrag ausreichen. Vor einer Wdh der Definition des Betrages sollten die Schüler durch das Lösen von Gleichungen der Form $|a| = x$ und $|x| = a$ $(a \in P)$ folgende Erkenntnisse reaktivieren:

- Jede Zahl hat einen Betrag; auf der Zahlengeraden gibt er ihren Abstand vom Nullpunkt an.
- Beträge sind nie negativ.
- Entgegengesetzte Zahlen haben den gleichen Betrag.

Für wenigstens eine der Gleichungen vom Typ $|x| = a$ sollten die Schüler die Lösungsschritte schriftlich fixieren, z. B.:

$$|x| = 5$$

$$x = 5 \quad \text{oder} \quad -x = 5 \qquad L = \{5; -5\} \quad \text{(nach Probe)}$$

$$x = -5$$

(bzw. $x_1 = 5$; $x_2 = -5$)

Diese Form und auch die Gedanken der Lösung sind dann leicht zu übernehmen, z. B. für

$$|x - 3| = 5$$

$$x - 3 = 5 \quad \text{oder} \quad -(x - 3) = 5 \qquad\qquad L = \{8;\ -2\}$$

$$x - 3 = -5$$

$$x_1 = 8 \qquad\qquad x_2 = -2$$

(„Wenn der Betrag einer Zahl 5 sein soll, dann muß sie selbst oder die ihr entgegengesetzte Zahl 5 sein.")
An solchen Beispielen sollte man, auch durch Veranschaulichung an der Zahlengeraden (↗ Bild 1.2), herausarbeiten, daß die Lösungen gerade diejenigen beiden Zahlen sind, die von 3 den Abstand 5 haben.

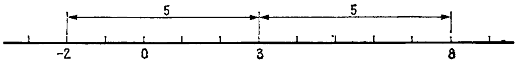


Bild 1.2

Ungleichungen mit Absolutbeträgen haben die Schüler noch nicht kennengelernt. Um hier bereits Voraussetzungen für ihre Anwendung bei der Grenzwertdefinition im Stoffgebiet 2 zu schaffen, sollte man im Zusammenhang mit den beiden besprochenen Gleichungen auf die Ungleichungen

$|x| < 5$ und $|x - 3| < 5$

eingehen. Durch inhaltliche Betrachtungen, unter Zuhilfenahme der Zahlengeraden und der Vorstellung vom Abstand wird herausgearbeitet:
Lösungen von $|x| < 5$ sind alle Zahlen zwischen -5 und 5, also alle, deren Abstand von 0 kleiner als 5 ist. Lösungen von $|x - 3| < 5$ sind alle Zahlen zwischen -2 und 8, also alle, deren Abstand von 3 kleiner als 5 ist.

Wiederholung des Funktionsbegriffs Unter Bezug auf die Motivierung (↗ UH 23 f.) sollten die Schüler in SSA zunächst den Text zwischen ● 1 und 2 durcharbeiten. Dann werden in einem kurzen UG die Begriffsdefinitionen und Erklärungen erarbeitet. ● 2 verlangt Identifizierungstätigkeiten, die gute Übungs- und Kontrollmöglichkeiten bieten.

Wiederholung der Darstellungsweisen von Funktionen Die Wdh des Funktionsbegriffs soll auch die verschiedenen Möglichkeiten umfassen, die Menge der geordneten Paare erfassen, beschreiben und mitteilen zu können. Ohne die einzelnen Darstellungsweisen, ihre Vorzüge und Grenzen zum abfragbaren Wissen machen zu wollen, sollen sich die Schüler dabei wieder vergegenwärtigen:

- Mittels einer *Tabelle* gibt man die Paare (wenn es nur relativ wenige sind) explizit an, so daß man sofort entnehmen kann, ob Eindeutigkeit vorliegt.
- Die *graphische Darstellung* zeigt auf einen Blick wichtige Funktionseigenschaften (z. B. Eineindeutigkeit und Periodizität); sie ist aber nur möglich bzw. sinnvoll, wenn die Argumente bzw. Funktionswerte Zahlen oder Größen sind, und zeigt oft nur einen Teil des Graphen. Außerdem ist immer zu bedenken, ob das Verbinden isolierter Punkte jeweils sinnvoll bzw. berechtigt ist.
- Eine *Gleichung* mit zwei Variablen kann eine Funktion dadurch angeben, daß sie als Lösungsmenge eine Menge geordneter Paare hat. Dadurch sind auch unendliche Mengen geordneter Paare zu erfassen, je nach Bedarf muß man sich einzelne Paare aber immer erst errechnen. Auch hier kommen nur Zahlenmengen bzw. Größenmengen in Frage.

Dabei kann man schon hier, unter Benutzung des einleitenden Beispiels $x + y = 3$ mit $x \in N$ bzw. $x \in R^*$ auf die Notwendigkeit einer Angabe des Definitionsbereichs hinweisen.

- Die *Wortvorschrift* ist sicher das Allgemeinste, wenn man an Art und Anzahl der Funktionswerte denkt, sicher aber auch das, womit sich mathematisch am wenigsten arbeiten läßt. Deshalb wird man bei einer derartigen Angabe versuchen, zu einer anderen Darstellungsweise überzugehen.

Die den Funktionsbegriff betreffenden LBA 13 bis 15 haben ausschließlich die zuvor besprochenen Begriffe und Darstellungsweisen zum Gegenstand. Dabei sollen durch die Aufgabe 15 die Zusammenhänge zwischen den Gleichungen, Ungleichungen und ihren Lösungsmengen einerseits und den vermöge eines kartesischen Koordinatensystems zugeordneten Punktmengen andererseits herausgearbeitet werden. Auch die umgekehrte Aufgabenstellung sollte hier Beachtung finden, indem man den Schülern mittels einer Projektionsfolie verschiedene, durch Geraden in einem x, y-Koordinatensystem erzeugte Punktmengen in einer Ebene vorstellt und sie auffordert, diese wie in Aufgabe 15 zu kennzeichnen.

Kontrollaufgaben

a) Stellen Sie die Funktion f mit $y = f(x) = (x - 3)^2 - 4$ in einem geeigneten Bereich graphisch dar!

b) Ermitteln Sie die Nullstellen x_1 und x_2 $(x_1 < x_2)$ der Funktion f! Geben Sie einige Elemente der Menge $M = \{x; x \in P \text{ und } x_1 < x < x_2\}$ an! Geben Sie den Durchschnitt dieser Menge M und der Menge N der natürlichen Zahlen an!

c) Kennzeichnen Sie in Ihrer Darstellung diejenige Menge von Punkten $Q(x; y)$, deren Koordinaten die folgenden Ungleichungen erfüllen!

$$x_1 \leqq x \leqq x_2 \quad \text{und} \quad f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leqq y \leqq 0$$

Lösung: b) $x_1 = 1$; $x_2 = 5$; $M \cap N = \{2; 3; 4\}$

Lerneinheit 2 (2 Std.)
Der Begriff der Zahlenfolge

LB 15 bis 18

Ziele

Die Schüler

- wissen, daß Zahlenfolgen spezielle Funktionen sind; sie können eine entsprechende Definition angeben,
- kennen den Unterschied zwischen endlichen und unendlichen Zahlenfolgen,
- können den Zusammenhang von Funktionsgleichung und expliziter Zuordnungsvorschrift erläutern und kennen die für Folgen übliche Terminologie und Symbolik,
- können Zahlenfolgen in einem n, a_n-Achsenkreuz graphisch darstellen,
- haben die Möglichkeit rekursiver Zuordnungsvorschriften kennengelernt,

- können in einfachen Fällen, insbesondere bei gegebener expliziter Zuordnungsvorschrift, aus gegebenem k das zugehörige a_k (und umgekehrt) berechnen,
- wissen, daß es außer expliziter und rekursiver Zuordnungsvorschrift auch noch andere Möglichkeiten zum Beschreiben von Zahlenfolgen gibt.

Schwerpunkte

1. Stunde

- Erarbeitung des Begriffs „Zahlenfolge" (▶ 1); endliche und unendliche Zahlenfolgen
- Übertragung einiger Begriffe, Symbole und Darstellungsweisen von Funktionen auf Folgen (■ 4)
- Einfache Übungen im Ermitteln von Folgengliedern und Argumenten (● 5; LBA 1 und 2)

2. Stunde

- Übungen im Ermitteln von Folgengliedern, Argumenten und wenigen expliziten Zuordnungsvorschriften (● 6; LBA 3)
- Bekanntmachen mit rekursiven Zuordnungsvorschriften, dabei Einführen und Anwenden von „rekursive (explizite) Zuordnungsvorschrift" (● 7; LBA 5)

Methodische Hinweise

Erarbeitung des Begriffs „Zahlenfolge" Bei der Begriffsbildung (nach LP 22 Zahlenfolge als spezielle Funktion) wäre ein deduktives Vorgehen durchaus möglich: Nennen der Definition (Lesen, Formulieren nach Angabe der Merkmale); zu bekannten Funktionsgleichungen entsprechende Zahlenpaare bilden und in einer Tabelle erfassen (bei solchen Realisierungen und auch Identifizierungen Rückgriff auf Beispiele aus LE 1 möglich).
Es ist jedoch zweckmäßiger, Begriff und Definition mehr induktiv, vom Beispiel ausgehend, zu erarbeiten. Den Schülern ist nämlich das Wort „Folge" gut bekannt, und Folgen sind ihnen schon häufig begegnet (z. B. bei der Behandlung der Proportionalität); sie haben von diesem Begriff aber insofern unvollkommene Vorstellungen, als sie die Folgen nur als den Wertebereich der betreffenden Funktion ansehen. Mit dem induktiven Vorgehen sollen nun die vorhandenen Vorstellungen aufgegriffen, nach Analyse des Sachverhalts ergänzt und schließlich zur Definition weitergeführt werden.
Dabei kommt es auf vielseitig ausgewählte Beispiele an (↗ ● 4). Die Schüler erkennen relativ leicht, aber mehr intuitiv, eine mögliche Zuordnungsvorschrift und vermögen so die gegebenen Anfangsstücke fortzusetzen. Schwerer fällt ihnen das Beschreiben ihres Vorgehens; in der Regel geben sie zunächst die Art des Fortsetzens an, z. B. bei c): Zähler und Nenner werden immer um 1 größer, das Vorzeichen wechselt. Ohne hier schon eine explizite Zuordnungsvorschrift anzustreben – eine rekursive wird übrigens eher versucht –, sollte man doch eine Beschreibung wie

an erster Stelle steht $\frac{1}{2}$, an zweiter Stelle steht $-\frac{2}{3}$, ...
an n-ter Stelle steht (bei ungeradem n) $\frac{n}{n+1}$, ...

anstreben. Die Schüler finden so selbst die Zuordnung zu den natürlichen Zahlen, der Funktionscharakter wird deutlicher, die selbständige Formulierung der Definition fällt leichter. Sicher werden dabei die Schüler zunächst die gesamte Menge der natürlichen Zahlen als Definitionsbereich ansehen. Das Benutzen des unbestimmten Artikels („*eine* Menge natürlicher Zahlen") wird dann durch den Hinweis auf den Unterschied „Abbrechen – nicht abbrechen" gerechtfertigt, wodurch gleichzeitig endliche und unendliche Folgen charakterisiert sind.

Besondere Bezeichnungen bei Folgen Folgendes Vorgehen ist denkbar:

- Kurzer LV gemäß ■ 4:
  Die Definition von „Folge" als spezielle Funktion legt nahe, an die Darstellungsweisen für Funktionen (↗ LE 1, 3. Std.) anzuknüpfen, zumal die Schüler bei ● 4 gemerkt haben, wie mühsam und schwierig eine verbale Formulierung der Zuordnungsvorschrift ist. Ein solches Beginnen ist nicht nur deshalb ratsam, weil dies den Schülern am meisten vertraut ist, sondern auch, weil dadurch am besten die bei Folgen üblichen Bezeichnungen eingeführt und dann weiterhin ständig benutzt werden können.
- In SSA sollte der Teil „Wertetafel" und „graphische Darstellung" von ■ 4 durchgearbeitet werden. Die Schüler erkennen dabei, daß die graphische Darstellung von Folgen aus isolierten Punkten besteht und für sie nur der 1. und 4. Quadrant benötigt werden. Dann bearbeiten sie ● 5.

In dieser Anfangsphase sollte beim Beschreiben und Antworten auf Ausführlichkeit geachtet werden, um die eingeführten Termini zu festigen.

Übungen im Ermitteln von Folgengliedern und Argumenten Hauptziel derartiger Übungen ist die Aneignung des Begriffs „Folge" und der dabei benutzten Terminologie und Symbolik. Daneben ist jedoch auch der Übungsaspekt, z. B. im Rechnen, Begründen, Analysieren und Vergleichen, zu beachten.
Bezeichnet man mit $Z(a_k)$ die explizite Zuordnungsvorschrift der betreffenden Folge, so gibt es für das Tripel $k - a_k - Z(a_k)$ drei Möglichkeiten, zu zwei gegebenen Objekten das dritte (ein drittes) zu finden; ihnen entsprechen drei Grundtypen von Aufgaben, deren Zusammenhang auch die Schüler erfassen sollten:

(1) $Z^{k}_{(a_k)} \rightarrow a_k$; (2) $Z^{a_k}_{(a_k)} \rightarrow k$; (3) $Z^{k}_{a_k} \rightarrow (a_k)$.

Das Lösen von Aufgaben des Typs (1) fällt den Schülern am leichtesten, weil es fast algorithmisch abläuft: Einsetzen – Ausrechnen. Die Schüler erkennen, daß dabei aus der gesamten durch die Zuordnungsvorschrift festgelegten Menge von Paaren $[n; a_n]$ ein einziges (bzw. einige) ermittelt wird und daß derartige Aufgaben stets eindeutig lösbar sind.
Aufgaben des Typs (2) sind als Umkehrung zu (1) aufzufassen. Sie sind im LB (↗ LBA 2) insofern etwas abgeändert worden, als nicht nur k zu ermitteln ist, sondern zuvor oder dabei zu entscheiden ist, ob es sich bei der jeweils vorgegebenen Zahl überhaupt um ein Folgenglied handelt. Das geschieht, um durch die zu verneinenden Fälle mehr Begründungsmöglichkeiten zu schaffen. Es bleibt dem Lehrer überlassen, ob er die Lösung derartiger Aufgaben mehr algorithmisch oder mehr inhaltlich verlangt.

Beispiel für das *algorithmische* Arbeiten zu LBA 2:
Ist -30 Glied der Folge $(7k - k^2)$? Wenn ja, welches?

Lösung:
$$7k - k^2 = -30$$
$$k^2 - 7k - 30 = 0$$
$$k_{1/2} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49 + 120}{4}}$$
$$k_1 = 10; \quad k_2 = -3; \quad k_2 \notin N$$

Antwort: -30 ist das 10. Glied der Folge $(7k - k^2)$; denn es gilt

$$a_{10} = 7 \cdot 10 - 10^2 = 70 - 100 = -30.$$

Das relativ einfache Aufgabenmaterial würde es auch erlauben, nur *inhaltlich* zu arbeiten, meist als systematisches Probieren:
„Wenn -30 Glied von $(7k - k^2)$ sein soll, muß k größer als 7 sein. $k = 7$ ergibt $a_7 = 0$; erst ab $k = 8$ sind die Glieder negativ. $a_9 = -18$; $a_{10} = -30$; alle weiteren Glieder sind kleiner".
Für viele Schüler bedeutet es größere Sicherheit, wenn sie auf algorithmisches Vorgehen orientiert werden. Dennoch sollte man auch inhaltliche Überlegungen fordern, wo sie vereinfachend sind.
Beim Suchen nach expliziten Zuordnungsvorschriften (Typ (3)) muß auf alle Fälle inhaltlich gearbeitet werden.
Dabei ist zunächst zu zeigen, daß es nicht immer nur eine einzige Möglichkeit zum Fortsetzen eines vorgegebenen Anfangsstücks gibt, etwa am Beispiel

$$(a_k) = (1; 2; 3; \ldots)$$

mit $(a_k) = (k)$ oder $(a_k) = (k^3 - 6k^2 + 12k - 6)$

oder $a_1 = 1;\ a_2 = 2;\ a_{k+1} = a_k + a_{k-1}$.

Für das Verständnis dieses Sachverhalts, aber auch für die nachfolgenden Übungen kann es nützlich sein, zunächst mit nur einem vorgegebenen Glied zu beginnen:
„Nennen Sie 3 Zuordnungsvorschriften, so daß gilt: *a)* $a_1 = 5 (n + 4; 10 - 5n; 4n + 1)$;
b) $a_3 = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{n+1}; \frac{n-2}{4}; \frac{n-2}{n+1} \right)$! (Es sollen keine Glieder mehrfach auftreten.)"

Die Aufgaben 3 und 4 geben meist 3 Folgenglieder vor. Hier kommt es auf ein Analysieren im einzelnen, Vergleichen von Glied zu Glied, Feststellen von Veränderungen, Abhängigkeiten, Gesetzmäßigkeiten an, auch auf Kombinationsfähigkeit und Intuition. Man muß das den Schülern sagen und auch, daß eine Hilfe durch (vorzugebende oder zu erarbeitende) Regeln nur in geringem Maße möglich ist. Sie kann nur in den Hinweisen bestehen:

- Suchen Sie nach Gemeinsamkeiten und Unterschieden von Glied zu Glied!
- Suchen Sie nach Zusammenhängen zwischen k und a_k!

Beispiel zu LBA 3a): S. 18

- Wir lassen die Minuszeichen zunächst unberücksichtigt. Dann ist der Unterschied von Glied zu Glied 6: $6k$
- So würden 6; 12; 18 entstehen, es fehlen also jeweils noch 11: $6k + 11$
- Dazu muß das Entgegengesetzte gebildet werden: $-(6k + 11)$

Bekanntmachen mit rekursiven Zuordnungsvorschriften Die Schüler sollen hier nur die Einsicht gewinnen, daß auch auf diese Weise eine Folge eindeutig festgelegt ist und daß das Wesentliche dieser Art des Festlegens in der Angabe eines Anfangsgliedes und einer Fortsetzungsvorschrift besteht. Damit wird bereits das Verständnis für das Beweisverfahren der vollständigen Induktion vorbereitet.
Beim Lösen der relativ wenigen Aufgaben erkennen die Schüler Vor- und Nachteile gegenüber den expliziten Zuordnungsvorschriften:

- Rekursive Zuordnungsvorschriften lassen oftmals die Veränderung von Glied zu Glied und damit beispielsweise eine Eigenschaft wie die Monotonie leichter erkennen.
- Die Ermittlung einzelner Glieder setzt aber voraus, daß vorangehende bereits bekannt sind; und da das für alle Glieder gilt, muß man zur Ermittlung von a_k alle Glieder von a_1 bis a_{k-1} erst errechnet haben.

Der Hinweis auf weitere Möglichkeiten des Festlegens von Folgen braucht nicht viel Zeit und soll auch nicht zu Übungen führen. Er ist aber doch wichtig zur Vertiefung des Verständnisses der Schüler von Folgen und ihrer Bedeutung.

Kontrollaufgaben

1. LBA 6a)

2. LBA 1c) und 2a) (LB 50)

Lerneinheit 3 (3 Std.)
Monotonie von Folgen

LB 18 bis 22

Ziele

Die Schüler

- haben die Begriffe „Monotonie von Zahlenfolgen" und „Arithmetische (Geometrische) Zahlenfolge" erfaßt und können entsprechende Definitionen angeben,
- können gegebene Folgen auf Monotonie untersuchen,
- können aus den Definitionen Gleichungen für die Differenz (den Quotienten) und das k-te Glied herleiten,
- können bei einfachen Folgen aus vorgegebenen Gliedern oder Differenzen (Quotienten) weitere Glieder berechnen,
- können arithmetische (geometrische) Folgen identifizieren,
- haben sich im Analysieren, Vergleichen, Abstrahieren geübt.

Schwerpunkte

1. Stunde

- Erarbeitung des Begriffs „Monotonie von Zahlenfolgen" (● 8; ▶ 2)
- Untersuchen von Folgen auf Monotonie (■ 6 bis 9; LBA 1 bis 3)

2. Stunde

- Erarbeitung des Begriffs „Arithmetische Folge" (▶ 3)
- Arbeiten mit arithmetischen Zahlenfolgen (● 9; LBA 4 bis 7)

3. Stunde

- Erarbeitung des Begriffs „Geometrische Folge" (▶ 4)
- Arbeiten mit geometrischen Folgen (● 10; LBA 8 bis 11)

Methodische Hinweise

Motivierung und Zielstellung Nach der Behandlung der LE 2 liegt es nahe, weitere Funktionseigenschaften für den Spezialfall „Folgen" zu untersuchen.

Erarbeitung des Begriffs „Monotonie von Zahlenfolgen" Beim Beschreiben des Bildes A 10a) stellen die Schüler u. a. fest, daß diese Funktion ausschließlich steigt, monoton steigt. Ein Vergleich mit den anderen Funktionen ergibt, daß keine weitere derartige Funktion dargestellt ist, daß aber e) und auch c) monoton fallen. Bei den anderen erfolgt Steigen und Fallen immer nur stückweise.
Der Begriff „Monotonie von Funktionen" wurde in Klasse 9 – und zwar im Sinne strenger Monotonie – nur eingeführt: „Die Funktionswerte ... steigen für wachsende Argumente ... man sagt, diese Funktionen sind monoton steigend" (LB Klasse 9, S. 89). Dennoch dürfte es den Schülern leichtfallen, selbständig eine einwandfreie Definition zu formulieren, etwa: „Eine Folge heißt monoton wachsend, wenn jedes Glied kleiner als das folgende ist." Die abgeschwächte Monotonie („kleiner" wird ersetzt durch „nicht größer") sollte der Lehrer vorgeben, die endgültige Formulierung dann der ▶ 2 entnommen werden.

Untersuchen von Folgen auf Monotonie Die Schüler untersuchen bei der Folge die Differenz $a_{k+1} - a_k$ (↗ ▶ 2) und überprüfen, ob sie für alle k nicht kleiner bzw. nicht größer als 0 ist. Die Schüler müssen dabei erkennen, daß es nicht um ein Lösen der Ungleichung $a_{k+1} - a_k \geqq 0$ (bzw. $\leqq 0$) geht, sondern um ein Überprüfen ihrer Allgemeingültigkeit. Zu diesem Zweck wird diese Differenz (also ein Term und keine Ungleichung) so lange umgeformt, bis eine Zahl (↗ ■ 6) oder ein Term in k (bzw. n; ↗ ■ 7) vorliegt. Nun muß noch ein Vergleich mit 0 erfolgen, der in beiden Fällen einfacher als bei der Ausgangsdifferenz ist.
Bei monotonen Folgen sind Fragen wie „Welches Glied übertrifft als erstes die Zahl 100?" sinnvoll. Sie spielen eine Rolle bei gewissen Anwendungsaufgaben, dann aber auch bei Grenzwertuntersuchungen im Zusammenhang mit dem Umgebungsbegriff. Die Schüler sollten daher die LBA 2 und 3 bearbeiten, obwohl sie keine Monotonieuntersuchungen zum Inhalt haben. Eine weitere Möglichkeit, den Grenzwertbegriff vorzubereiten, liegt im Vergleichen der beiden als monoton wachsend erkannten Folgen $\left(\frac{n-1}{n}\right)$ (↗ ■ 7) und $\left(\frac{k}{5}\right)$ (↗ LBA 1a)), wobei ein Unterschied festzustellen ist: 1 wird nicht überschritten bzw. jede beliebige Zahl wird überschritten.

Erarbeitung des Begriffs „Arithmetische Folge" LP 20 fordert für die Erarbeitung der Begriffe „Arithmetische (Geometrische) Folge" relativ weitgehende SSA. Zwei Möglichkeiten dazu, die den Schülern Gelegenheit zum Vergleichen, Beschreiben und Abstrahieren geben, seien skizziert:

- Die Schüler vergleichen diejenigen Folgen, bei denen die Monotonieuntersuchung auf eine Zahl als Differenz führte, mit denen, bei denen das nicht der Fall war. Ergebnis: Bei den ersteren existiert stets ein und dieselbe Differenz von Glied zu Glied; bei den anderen ändert sich die Differenz in Abhängigkeit von k. Der Lehrer teilt das Begriffswort „Arithmetische Folge" mit, die Schüler definieren den Begriff, etwa: „Eine Folge heißt arithmetische Folge, wenn die Differenz $a_{k+1} - a_k$ für alle k den gleichen Wert hat". Dies wird mit ▶ 3 verglichen, beide Formulierungen werden als gleichwertig erkannt.
- Die Schüler bilden die ersten 4 Glieder etwa der Folgen $\left(\frac{k}{3}\right)$; $(-2n - 1)$; $(k^2 - k)$ (↗ LBA 2 und 3) und stellen dann Gemeinsamkeiten und Unterschiede fest. Eventuell kann als Impuls gegeben werden: Die ersten beiden Folgen haben etwas gemeinsam, worin sie sich beide von der dritten unterscheiden (Differenzen von Glied zu Glied). Die Arbeit schließt wie bei der ersten Variante ab.

Arbeiten mit arithmetischen Folgen Zunächst recht einfache Übungen (↗ auch LBA 4) sollten die Schüler erkennen lassen: Eine arithmetische Folge ist durch ein Glied (samt Nummer) und die Differenz, aber auch durch zwei ihrer Glieder festgelegt, selbst wenn diese nicht benachbart sind.

Die Gleichung $a_k = a_1 + (k - 1)\,d$ sollte in SSA, gegebenenfalls mit Hilfe des LB, gefunden werden. Dabei muß die Zielstellung lauten: „a_k ist in Abhängigkeit von a_1, k, d anzugeben", weil sonst die rekursive Beschreibung $a_k = a_{k-1} + d$ genannt wird.

Von der Klassensituation wird es abhängen, ob man auch das Untersuchen des Zusammenhangs von arithmetischen Folgen und linearen Funktionen der SSA überlassen kann. Zumindest wird der Hinweis notwendig sein: „Bedenken Sie, was konstant ist und was sich durch Einsetzen verschiedener Werte verändert, was einander entspricht!".

Erarbeitung des Begriffs „Geometrische Folge" Die Erarbeitung kann wie bei den arithmetischen Folgen, ebenfalls in SSA, erfolgen. Es wird nicht ratsam sein, beim Ausgangsmaterial bereits die ganze Vielfalt geometrischer Folgen – bedingt durch unterschiedliche q und a_1 – zu berücksichtigen. Die folgenden Beispiele könnten dem Analysieren und Vergleichen dienen und Ausgang des Abstrahierens sein:

$$(2k + 5) = (7; 9; 11; 13; 15; \ldots) \tag{1}$$

$$(3^k) = (3; 9; 27; 81; 243; \ldots) \tag{2}$$

$$(k^3) = (1; 8; 27; 64; 125; \ldots) \tag{3}$$

$$\left(\frac{1}{2^k}\right) = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16}; \frac{1}{32}; \ldots\right) \tag{4}$$

$$(-2^k) = (-2; -4; -8; -16; -32; \ldots) \tag{5}$$

Um die Begriffserarbeitung nicht durch Rechenfehler zu belasten, können auch die Anfangsstücke bereits vorgegeben sein. Eventuell muß der Lehrer auffordern, nach einer Gemeinsamkeit von (2), (4) und (5) gegenüber (1) und (3) zu suchen, damit die Schüler finden: „Man muß immer mit derselben Zahl multiplizieren, um von einem Glied zum nächsten zu kommen". Nach Mitteilung des Begriffswortes „Geometrische Folge" können die Schüler auch ▶ 4 selbständig in völliger Analogie zu ▶ 3 formulieren.

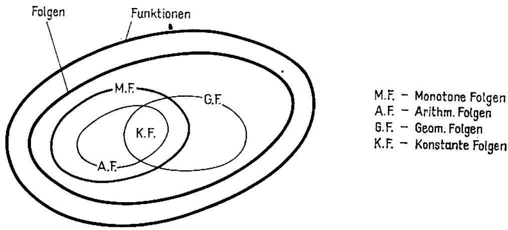
Die Schwerpunkte für LE 3 wurden so gesetzt, daß arithmetische und geometrische Folgen zunächst getrennt voneinander behandelt werden. Man kann natürlich die beiden Begriffe auch gemeinsam erarbeiten. Ausgangsmaterial könnten dann die zuvor für die getrennte Erarbeitung vorgeschlagenen arithmetischen und geometrischen Folgen und ein Gegenbeispiel sein.

Arbeiten mit geometrischen Folgen Solange Folgen im Mathematikunterricht behandelt werden, erfahren arithmetische und geometrische Folgen eine gewisse Betonung, waren mitunter sogar die einzigen behandelten Folgen. Das liegt nicht an ihrer innermathematischen Bedeutung, sondern daran, daß viele dem Schüler zugängliche und mit den Mitteln des Schulstoffs auch lösbare praktische Probleme auf arithmetische und geometrische Folgen führen und daß ohne diese Folgen das Feld praktischer Anwendungsmöglichkeiten äußerst gering wäre.

Dem trägt auch der LP Rechnung. Dennoch sieht er für die Behandlung dieser Folgen eine gewisse Einschränkung vor: Es erfolgen keine gesonderten Konvergenzuntersuchungen für die geometrischen Folgen, und für das Monotonieverhalten wird keine vollständige Fallunterscheidung erarbeitet. Auch im Hinblick auf die späteren Anwendungen sollte man sich in der SSA auf die Fälle mit $a > 0$ und $q > 0$ beschränken und dafür auch die entsprechenden Beweise führen lassen. Die anderen Fälle sollten dann in differenzierter Arbeit, eventuell auch durch differenzierte HA, nur an entsprechenden Beispielen erörtert werden.

Im übrigen sei auf das zum „Arbeiten mit arithmetischen Folgen" Gesagte verwiesen.

Bild 1.3



Im Rahmen einer systematisierenden Zusammenfassung sollte an der Tafel ein Diagramm (↗ Bild 1.3) erarbeitet werden, das das bisher behandelte Begriffssystem veranschaulicht. Für Übungen sollte es so eingesetzt werden, wie es die Aufgabe 4 auf LB 12 zeigt. Die LBA 1 bis 5, 8 und 9 können als Beispiele dazu verwendet werden.

Kontrollaufgaben

1. LBA 1 f) und 2 b)
2. Geben Sie eine explizite Zuordnungsvorschrift für eine monoton fallende arithmetische Folge (a_k) an, für die $a_2 = 5$; $a_7 > 0$ gilt!
3. Geben Sie eine explizite Zuordnungsvorschrift für eine geometrische Folge mit $a_1 = 1$; $a_4 < 5 < a_5$ an!

Lerneinheit 4 (2 Std.)
Partialsummen

LB 22 bis 27

Ziele

Die Schüler

- haben den Begriff „Partialsumme“ und seine Bedeutung für die Praxis erfaßt; sie können zu vorgegebenen Folgen (a_k) Anfangsstücke der Partialsummenfolge (s_k) bilden,
- haben die Bedeutung des Symbols „$\sum$“ erfaßt, können mit Hilfe dieses Symbols geschriebene Summen ausführlich schreiben und umgekehrt Partialsummen vorgegebener Folgen angeben,
- haben ihre Fähigkeiten im Analysieren, Vergleichen, Verallgemeinern weiterentwickelt und sind von der Beweisnotwendigkeit der induktiv gewonnenen Summenformeln überzeugt.

Schwerpunkte

1. Stunde

- Erarbeitung des Begriffs „Partialsumme"
- Arbeiten mit dem Summenzeichen (● 15, LBA 1 bis 3)

2. Stunde

- Erarbeitung einiger Summenformeln durch (unvollständige) Induktion (■ 11 bis 13; LBA 4a))
- Übungen im Vergleichen und Analysieren

Methodische Hinweise

Motivierung Es fällt den Schülern relativ leicht, den Begriff „Partialsumme" zu verstehen. Das Verständnis wird noch erhöht, wenn man das im LB gewählte Einführungsbeispiel durch eins aus der Erfahrungswelt der Schüler ersetzt oder ergänzt.

Erarbeitung des Begriffs „Partialsumme" Ausgangsfolge (a_k) und Partialsummenfolge (s_k) dürfen die Schüler nicht miteinander verwechseln. In SSA am ● 13 erzeugen sie derartige Folgen gliedweise; sie erkennen am Beispiel, daß die a_k und die s_k unterschiedlich sind, daß aber eine Folge (a_k) ihre Partialsummen festlegt, daß zu jedem k auch ein s_k gehört, daß es also berechtigt ist, von einer Folge (s_k) zu sprechen. Erst danach bearbeiten die Schüler ● 14. Eine solche Übung ist zum Erfassen des Begriffs „Partialsumme(nfolge)" notwendig, hat insgesamt allerdings geringere Bedeutung als das umgekehrte Vorgehen.

Arbeiten mit dem Summenzeichen Mit dem Symbol $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ haben viele Schüler zunächst Schwierigkeiten; es ist ihnen zu kompliziert und unübersichtlich, zu abstrakt. Das zunächst akzeptierte Motiv, Summen kürzer zu schreiben, wird unwirksam, wenn die Erleichterung mit Unverständnis erkauft wird. Um dies zu vermeiden, kann man statt einer sofortigen allgemeinen Einführung (↗ LB 23) auch von einem bereits behandelten Beispiel ausgehen.

Im UG ist zu erörtern	Als TB[1] entsteht schrittweise
Wir haben zur Folge $(a_k) = (2k - 1)$ einige Partialsummen gebildet, beispielsweise s_4.	$(a_k) = (2k - 1)$ $s_4 = (2 \cdot 1 - 1) + (2 \cdot 2 - 1)$ $+ (2 \cdot 3 - 1) + (2 \cdot 4 - 1)$
Eine Kurzschreibweise muß zum Ausdruck bringen, daß	
– es um Glieder der Zahlenfolge (a_k) mit $a_k = 2k - 1$ geht,	$2k - 1$ $\Downarrow$
– eine Summe zu bilden ist,	$\sum 2k - 1$ $\Downarrow$
– die Glieder a_1 bis a_4 Summanden sind.	$\sum\limits_{k=1}^{4} 2k - 1$ $\Downarrow$
Dabei müssen Klammern gesetzt werden.	$\sum\limits_{k=1}^{4} (2k - 1)$

[1] Das Symbol „ $\Downarrow$ " bedeutet „geht über in". Die untereinander verbundenen vier Zeilen erscheinen also schließlich als eine einzige.

Denn andernfalls wäre von $\sum_{k=1}^{4} 2k$ die Zahl 1 zu subtrahieren, und das liefert ein anderes Ergebnis:

$$\sum_{k=1}^{4}(2k - 1) = 1 + 3 + 5 + 7 = 16$$

$$\left(\sum_{k=1}^{4} 2k - 1 = 2 + 4 + 6 + 8 - 1 = 19\right)$$

Die Zeichen „+" und „$\sum$" können im TB in gleicher Farbe markiert werden, und auch die Zusammengehörigkeit der Summationsgrenzen 1 und 4 mit den Faktoren im ersten und letzten Summanden kann entsprechend hervorgehoben werden. Die Sprechweise „Summe $(2k - 1)$ über alle k von 1 bis 4" oder „Summe über $(2k - 1)$ von $k = 1$ bis 4" ist bei den letzten Zeilen einzuführen.

Man muß nun entscheiden, ob man sofort zur allgemeinen Schreibweise „$\sum_{k=1}^{n} a_k$" übergeht oder zunächst weitere Beispiele bearbeiten läßt:

- Verbleiben bei $(2k - 1)$, Ausdrücken und Berechnen bzw. Angeben von a_5, a_7, s_5, s_7
- Entsprechendes Arbeiten mit der Folge (k^2)

Dabei ist auch zu zeigen, daß das Symbol nicht nur Partialsummen zu schreiben gestattet, z. B.:

$$\sum_{k=3}^{7}(2k - 1) = 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = 45.$$

Damit die Schüler in der Handhabung des Summenzeichens eine gewisse Sicherheit erlangen, sollten sie in SSA eine Auswahl aus den LBA 1 und 3 (vorrangig vor ● 15 und LBA 2) bearbeiten.

● 15 und LBA 2 sollen die Schüler erfüllen bzw. lösen, ohne die Summen ausführlich hinzuschreiben. Dennoch muß man auch hier behutsam vorgehen, beispielsweise bei ● 15:

- Daß a) und b) einander gleich sind, sollte sofort erkannt und begründet werden. Spätestens an dieser Stelle wird man die Beliebigkeit des Summationsindex hervorheben, eventuell sogar darauf hinweisen, daß auch die Schreibweise $\sum_{k=1}^{k} a_k$ statthaft ist; ein ausführlich geschriebenes Beispiel überzeugt davon.
- Zu erkennen, daß a) und c) einander nicht gleich sind, fällt schon schwerer. Die Begründung, „c) hat einen Summanden mehr, keiner ist 0", findet bzw. versteht mancher Schüler erst, nachdem er sich 2^6 bzw. 2^7 als jeweils letzten Summanden vorgestellt hat.

Hausaufgaben Auswahl aus LBA 1 bis 3; LBA 1 aus LE 5 als vorbereitende HA für die Erarbeitung des dort zu behandelnden Grundgedankens des Beweisverfahrens durch vollständige Induktion, dabei unter Teilaufgabe c) statt nach einer allgemeinen Lösungsformel vielleicht besser nach der Mindestzahl von Umsetzungen bei 30 Scheiben fragen und das Fortschreiten in der Bearbeitung der Aufgabe verfolgen, um nötigenfalls weitere Hinweise geben zu können.

Motivierung und Zielstellung Die Schüler haben bereits nach expliziten Zuordnungsvorschriften für Folgen gesucht. In der Regel macht ihnen dieses Tüfteln und Probieren Spaß. Daran sollte man anknüpfen und zunächst nicht das gewichtige „Summenformel" als Ziel fixieren, sondern das bekannte „explizite Zuordnungsvorschrift" für die Partialsummenfolge. Daß das sinnvoll ist, haben sie bereits erfahren; denn bisher wurde diese Folge nur rekursiv ($s_1 = a_1$; $s_{n+1} = s_n + a_{n+1}$) konstruiert. Damit sollten die Schüler aber auch den Unterschied zum bisherigen Vorgehen erkennen: Durch die vorgegebene Folge (a_k) ist zugleich die Folge (s_k) bestimmt, auch wenn man zunächst nur ein Anfangsstück berechnet hat; es ist also ähnlich wie beim Ermitteln einer expliziten Vorschrift für eine rekursiv gegebene Folge. Dadurch besteht die Möglichkeit des Überprüfens einer gefundenen Vermutung, was den Reiz des Suchens noch erhöht.

Erarbeitung einiger Summenformeln Im UG zum ■ 11 können die Schüler den Zusammenhang zwischen den ermittelten s_k und den zugehörigen k leicht erkennen ($(a_k) = (2k - 1)$ mit $(s_k) = (k^2)$). Dann sollten sie in SSA die LBA 4a) in gleicher Weise durchdenken (die Folge der geraden Zahlen bietet sich aus Analogiegründen an).
Erst nach dem Steigern des Schwierigkeitsgrades bei der Arbeit an ■ 12 und 13 sollte man von den expliziten Zuordnungsvorschriften als „Summenformeln" sprechen, als Summenformeln für die Folgen (a_k).
Bei der Folge $(s_k) = (2^k)$ (■ 12) ist ein unmittelbarer Zusammenhang zwischen s_k und k nur schwer zu erkennen. Die Schüler sollten also zunächst nach einem Zusammenhang zwischen s_k und a_k suchen und (da sie einen zwischen a_k und k kennen) damit mittelbar auch einen zwischen s_k und k finden. Insofern dient das tabellarische Aufschreiben der k, a_k, s_k nicht nur dem Ermitteln der s_k, sondern auch dem Finden des gesuchten Zusammenhangs und der Erkenntnis, daß Ordnung und Übersichtlichkeit die Erfolgsaussichten beim Suchen erhöhen.

Übungen im Vergleichen und Analysieren Hinsichtlich der Entwicklung allgemeiner wissenschaftlicher Denk- und Arbeitsweisen (↗ LP 7) soll den Schülern beim Finden von Summenformeln (wieder) bewußt werden:

- Es ist ein allgemeiner Zusammenhang, eine Gesetzmäßigkeit gesucht.
- Es werden zunächst Einzelobjekte dargestellt, betrachtet und verglichen, um daraus einen Zusammenhang für diese zu finden.
- Der erkannte Zusammenhang wird verallgemeinert.
- Die so gewonnene Aussage muß bewiesen werden.

Den zweiten, schwierigsten Schritt können folgende Hinweise erleichtern helfen: Stellen Sie einen rechnerischen Zusammenhang zwischen $k = 3$ und s_3 oder zwischen a_3 und s_3 her (mit $k = 1$ zu beginnen, ist oft wenig aussichtsreich) und überprüfen Sie, ob dieser Zusammenhang analog auch für andere k gilt!
Durch den letzten Schritt wird zugleich eine Motivation für die Behandlung des Beweisverfahrens der vollständigen Induktion vorbereitet.

Kontrollaufgabe

Ermitteln Sie für $(a_k) = \dfrac{1}{(2k-1)(2k+1)}$ eine Summenformel, und schreiben Sie sie mit Hilfe des Summenzeichens!
(↗ LB A 3a) aus LE 6)

Lerneinheit 5 (1 Std.)

Der Grundgedanke des Beweisverfahrens durch vollständige Induktion

LB 28 bis 32

Es ist zu beachten: Einerseits kann volle Einsicht in das Beweisverfahren der vollständigen Induktion nur in einem verhältnismäßig lang andauernden Prozeß erzielt werden, so daß manche der nachstehend formulierten Ziele etwas vermessen erscheinen mögen. Andererseits besteht die Gefahr, gerade am Anfang den Zugang zum Verständnis dieses Verfahrens ein für allemal zu verbauen, indem logisch unsauber und oberflächlich gearbeitet oder zu schnell eine kurze, formale und mehr oder weniger normierte Darstellung angestrebt wird. Letzteres würde dazu führen, daß die Schüler sehr bald ohne Verständnis einzelne Zeilen nach einem gewissen Schema aneinanderreihen und das Wesentliche im Überwinden gewisser rechentechnischer Schwierigkeiten bei den notwendigen Umformungen sehen.

Ziele

Die Schüler
- haben den Grundgedanken des Beweisverfahrens der vollständigen Induktion („Anfang“ und „Vererbung“) erfaßt,
- können das Prinzip der vollständigen Induktion mit eigenen Worten formulieren und sich dabei einer geeigneten Symbolik bedienen.

Schwerpunkte

- Erarbeitung des Grundgedankens an einem geeigneten Beispiel und dessen Veranschaulichung an passenden „realen Beispielen“
- Beweisen einer bereits vermuteten Summenformel (■ 14)
- Formulieren des Prinzips der vollständigen Induktion (▷ 1)

Methodische Hinweise

Erarbeitung und Veranschaulichung des Grundgedankens Um zum Grundgedanken des „und so (geht es immer) weiter“ der vollständigen Induktion zu kommen, sind u. a. zwei Ausgangspunkte möglich:

- Unmittelbarer Anschluß an den Gedankengang der LE 4 mit dem Nachweis der vorher vermuteten Summenformel für die Folge der ungeraden Zahlen (↗ LB 28f.);
- Auswertung der vorbereitenden und das Interesse vieler Schüler weckenden HA zum LUCASschen Turm[1] (LBA 1; HA von LE 4).

Bei Wahl der ersten Variante wird der Lehrer die Idee der geometrischen Veranschaulichung der Quadratzahlen an die Schüler gewiß herantragen müssen, sie dann jedoch auffordern, selbst möglichst schlüssig zu argumentieren, um die Gültigkeit der vermuteten Summenformel zu begründen. Erst danach – gewissermaßen zusammenfassend – sind im UG die beiden wesentlichen Fakten – „Anfang“ und „Vererbung“ – noch einmal deutlich herauszustellen.
Bei Wahl der zweiten Variante wird jetzt in der – abschließenden – gemeinsamen Lösungsdiskussion erörtert, warum $U(n) = 2^n - 1$ mit Sicherheit die Zahl der notwendigen Umsetzungen bei n Scheiben angibt; das führt zu den gleichen Erkenntnissen wie die erste Variante. Allerdings ist ein Vorgehen nach Variante 2 insgesamt zeitaufwendiger, setzt eine aufgeschlossene Klasse voraus und erfordert viel Geschick in der Unterrichtsführung, um einerseits die Selbständigkeit der Schüler nicht zu stark einzuschränken und andererseits den Zeitbedarf in erträglichen Grenzen zu halten.

[1] Nach dem französischen Mathematiker EDOUARD LUCAS (1842–1891)

Eine Erläuterung der bereits praktizierten Schlußweise anhand „realer Sachverhalte" (z. B. „Dominoprinzip" und „Gänsemarsch" auf LB 29f.) soll eine möglichst anschauliche Vorstellung von dem Beweisverfahren durch vollständige Induktion erzeugen. Auch das Wort „Vererbung" soll vor allem ein einprägsames Bild vermitteln.
Abschließend ist darauf hinzuweisen, daß die Übertragung dieser bei endlichen (geordneten) Mengen absolut zuverlässigen Schlußweise auf unendliche Mengen nicht selbstverständlich ist (↗ LB 30). Bei der Menge N der natürlichen Zahlen ist das nur dadurch gerechtfertigt, daß bei fortgesetzter Nachfolgerbildung von 0 aus die gesamte Menge N erfaßt wird.

Beweisen einer bereits vermuteten Summenformel Ebenso wie im ■ 14 sollte hier noch auf jegliche verkürzte und irgendwie normierte Darstellung verzichtet werden. Dabei kann freilich nur ein Teil der gesamten Beweisüberlegungen, die gemeinsam im UG anzustellen sind, (als TB) schriftlich festgehalten werden. Wählt man für den Beweis den Sachverhalt aus ■ 14, so können die Schüler die ausführliche Darstellung noch einmal nachlesen.
Auch für die SSA an ● 17a) oder b) kann aus Zeitgründen eine ausführliche Formulierung in den Schülerheften nicht erwartet werden, doch kann man sie als HA (↗ dort) nachholen lassen.
Die größere Schwierigkeit beim Beweisverfahren durch vollständige Induktion besteht beim Induktionsschritt, der nicht nur im konkreten Fall am schwersten zu vollziehen, sondern auch am schwersten in seiner Bedeutung zu verstehen ist. Hier muß gezeigt werden, daß für jedes natürliche k (also für beliebiges natürliches k) aus der (vorausgesetzten) Wahrheit der Aussage für k die Wahrheit für den unmittelbaren Nachfolger $k + 1$ *folgt*. Es muß deutlich werden, daß es allein auf den Nachweis des *Folgens* ankommt, daß also die Gültigkeit der Aussage weder für k noch für $k + 1$ nachgewiesen wird. Vor allem ist einer naheliegenden falschen Formulierung und damit auch falschen Vorstellungen vorzubeugen: Es wird nicht etwa gezeigt, daß aus der Gültigkeit für beliebiges k die Gültigkeit für $k + 1$ folgt. Denn letzteres würde ja gemäß der Regel für das Schließen auf eine All-Aussage bedeuten, daß man bereits die Gültigkeit für alle natürlichen Zahlen k voraussetzt. Die Induktionsvoraussetzung wäre gleichbedeutend mit der zu beweisenden Aussage, und es gäbe gar nichts mehr zu beweisen, denn was für beliebiges natürliches k gilt, das gilt selbstverständlich auch für $k + 1$; hier läge ja lediglich eine Variablenersetzung vor. Der Tatbestand wird besonders deutlich, wenn man eine in der mathematischen Logik gebräuchliche Symbolik verwendet (nicht mit den Schülern):

Der Induktionsschritt lautet $\forall k[\mathbf{H}(k) \rightarrow \mathbf{H}(k + 1)]$,

er lautet nicht $[\forall k\ \mathbf{H}(k)] \rightarrow \mathbf{H}(k + 1)$.

Im LB wird auf den geschilderten Sachverhalt explizit erst an späterer Stelle (LB 35) aufmerksam gemacht, und so sollte man auch im Unterricht verfahren, weil volles Verständnis für die Beweisprozedur erst allmählich entwickelt werden kann.
Von Anfang an muß jedoch auf möglichst sorgfältige und saubere Formulierungen geachtet werden. Mißverständliches oder Falsches ist hier naheliegend, zumal die Beweisführung im Induktionsschritt wiederum gemäß der oben erwähnten Schlußregel erfolgen muß: Da die entscheidende „Vererbung" für *alle* natürlichen Zahlen gezeigt werden muß, zeigt man sie für *eine beliebige* natürliche Zahl. Die Verwendung einer besonderen Variablen k anstelle von n ist dafür keineswegs entscheidend; sie soll dem Schüler nur das Erlangen einer richtigen Vorstellung etwas erleichtern. Wesentlich ist jedoch, daß im Induktionsschritt k zwar *beliebig, aber fest* gewählt wird – im Grunde genau wie bei jedem anderen, dem Schüler längst vertrauten Beweis einer All-Aussage.

Formulieren des Prinzips der vollständigen Induktion (Bereits bei der Planung der Stunde bedenke man, ob die Zeit ausreicht, diese Thematik noch genügend gründlich zu behandeln, insbesondere wenn man ● 17 im Unterricht bearbeiten läßt, sonst sollte man diesen Schwerpunkt an den Anfang der LE 6 verlegen.)

Im ● 18 wird eine Problematik deutlich: Formal gesehen ist $\mathbf{H}(n)$ in der Bedeutung „$n^2 + 3n + 7$ ist durch 5 teilbar“ keine Aussage, sondern eine Aussageform, weil mit n eine freie Variable enthalten ist, und auch $\mathbf{H}(k - 1)$, $\mathbf{H}(k + 1)$, $\mathbf{H}(n - 2)$, $\mathbf{H}(2n)$, deren Bildung der Auftrag erfordert, sind Aussageformen. Man sollte das jedoch mit den Schülern *nicht* erörtern. Wir sagen ja auch sonst beispielsweise „Die Aussage $2^n > n$ gilt für alle natürlichen Zahlen“, obwohl es eigentlich heißen müßte „Die Aussage ‚*Für alle natürlichen Zahlen n gilt* $2^n > n$‘ ist wahr“ oder auch „Die Aussageform $2^n > n$ ist allgemein gültig (über der Menge der natürlichen Zahlen)“.
Beim Prinzip der vollständigen Induktion gilt Ähnliches. Es ist als Aussage über die Wahrheit von Aussagen über natürliche Zahlen formuliert.
Würde man sich der bereits oben verwandten Symbolik bedienen können, so ließe sich die im Prinzip der vollständigen Induktion beschriebene Beweisstruktur für den Fall $n_0 = 0$ kurz (gewissermaßen eine Sprachebene „tiefer“) so angeben:

$$[\mathbf{H}(0) \wedge \forall k(\mathbf{H}(k) \rightarrow \mathbf{H}(k + 1))] \rightarrow \forall n\, \mathbf{H}(n).$$

Die Notwendigkeit der Beschränkung auf umgangssprachliche Darstellungen ist vorteilhaft, weil einem bloßen mechanischen Einprägen entgegengewirkt werden kann. Deshalb sollten die Schüler den Sachverhalt mit eigenen Worten und auf möglichst unterschiedliche Weise beschreiben, auch wenn damit in Kauf genommen wird, daß beispielsweise Termini wie „wahr“, „gültig“, „richtig“ völlig synonym gebraucht werden. Im LB wird eine solche flexible Ausdrucksweise ebenfalls bevorzugt.

Hausaufgaben Ausführliche Niederschrift der im ● 17 geforderten Beweisführungen

Kontrollaufgabe
LB A 3

Lerneinheit 6 (3 Std.)
Beweise für Summenformeln mittels vollständiger Induktion
LB 32 bis 40

Durch die Beschränkung auf den Beweis von Summenformeln sollen die Schüler schrittweise an die Handhabung des Beweisverfahrens herangeführt werden. Hier führt im Induktionsschritt immer ein Vorgehen zum Ziel, bei dem die linke Seite der „Induktionsbehauptung“ unter Benutzung der „Induktionsvoraussetzung“ zur rechten Seite umgeformt wird. Gleichzeitig trägt man der Tatsache Rechnung, daß für die folgenden Stoffgebiete die Zahlenfolgen, etwa als Grundlage für Grenzbetrachtungen, das Wesentlichste sind. Man sollte jedoch bereits hier auf weitere, später zu behandelnde Anwendungsbereiche hinweisen.

Ziele

Die Schüler
- kennen die Schrittfolge beim Beweisverfahren der vollständigen Induktion, wobei insbesondere der Induktionsschritt zu beachten ist,

- können mit Hilfe dieses Beweisverfahrens Summenformeln für Zahlenfolgen, darunter allgemeine Summenformeln für arithmetische und geometrische Folgen, selbständig beweisen,
- haben erkannt, daß beim Beweisverfahren der vollständigen Induktion die zu beweisende Aussage als Vermutung bereits vorliegen muß, und haben ihre Fähigkeit, selbst zu derartigen Vermutungen zu kommen, weiterentwickelt,
- kennen die Summenformel(n) für die arithmetische (geometrische) Folge und können mit deren Hilfe Summen konkreter Folgen berechnen.

Schwerpunkte

1. Stunde

- Hervorheben der Schrittfolge für Beweise durch vollständige Induktion
- Beweise für einige Summenformeln (■ 15 und 16)

2. Stunde

- Festigen des Verfahrens (■ 17)
- Erarbeitung und Anwendung einer allgemeinen Summenformel für arithmetische Folgen (▷ 2; ● 21)

3. Stunde

- Erarbeitung einer Summenformel für geometrische Folgen (▷ 3; ● 22)
- Zusammenfassung und weitere Beweisübungen

Methodische Hinweise

Hervorheben der Schrittfolge bei Beweisen durch vollständige Induktion Hierbei sollte keinesfalls zu früh eine möglichst kurze Beweisdarstellung angestrebt werden, denn damit würde man gegen eine ausdrückliche Lehrplanforderung verstoßen (LP 20). Es ist zu beachten, daß die *Beweisprozedur aus zwei Teilen* und nicht aus vier besteht, wie mancher Schüler fälschlicherweise aus der Hervorhebung von Induktionsvoraussetzung, Induktionsbehauptung und Beweis dieser Induktionsbehauptung innerhalb des Induktionsschrittes entnehmen könnte. Eine derartige Unterteilung des Induktionsschrittes erleichtert zwar die Beweisdarstellung, ist aber nicht unproblematisch: Es geht nicht um einen „Beweis der Induktionsbehauptung", sondern um den Beweis einer Implikation, nämlich $\mathbf{H}(k) \rightarrow \mathbf{H}(k+1)$, und dafür wird die entsprechende Schlußregel angewendet. Der Lehrer sollte kurz am Beispiel des Beweises zu dem den Schülern bekannten Satz „Wenn zwei (natürliche) Zahlen a und b durch c teilbar sind, so ist auch ihre Summe durch c teilbar" verdeutlichen, daß auch hier bei der üblichen Trennung in Voraussetzung – Behauptung (– Beweis) nicht lediglich die „Behauptung", also „$a + b$ ist durch c teilbar", bewiesen wird, sondern vielmehr der ganze Satz, eine Wenn-so-Aussage.

Beweise für einige Summenformeln Man sollte zuerst die Formel für die Summe der ersten n natürlichen Zahlen (■ 15) beweisen (ein relativ einfaches Beispiel und außerdem später für ▷ 2 nötig). Gerade bei den ersten Beispielen ist es wichtig, daß die Schüler unmittelbar nach der gemeinsamen Erarbeitung oder zu Hause noch einmal eine ausführliche Darstellung

nachlesen können, die auch begründende Kommentare zu den einzelnen Umformungsschritten enthält, die an der Tafel gewiß nicht fixiert werden können. Dort sollte man allerdings die Stelle deutlich (farbig) hervorheben, an der die Induktionsvoraussetzung benutzt wird.
Man beachte auch: Da ein Beweisverfahren im Mittelpunkt der Betrachtung steht und nicht etwa der zu beweisende Satz, sind die „Beweisfeststellungen" im LB durchweg als Aussagen über die Gültigkeit (Wahrheit) von Aussagen formuliert. So lautet die Induktionsvoraussetzung im ■ 15 nicht „$1 + 3 + 5 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}$", sondern stellt voran: „Für $n = k$ gelte ...", allerdings im Konjunktiv, um den Charakter der „Annahme" deutlich zu machen. Man sollte zumindest beim mündlichen Arbeiten nicht auf derartige Formulierungen verzichten und sie auch beim schriftlichen Fixieren der Beweise bevorzugen, obwohl vom mathematischen Sachverhalt her dafür keine Notwendigkeit besteht.
● 19 sollte unbedingt bearbeitet werden [a) dient dem Vertrautwerden mit dem Summenzeichen (↗ HA); b) und – darauf aufbauend – c) läßt sich, nach kurzer Vorbereitung in SSA, rasch mündlich erledigen]. Hier sollen die Schüler vor allem an den Vergleich neu gewonnener Erkenntnisse mit dem bereits Bekannten und an das folgerichtige Weiterdenken als ein allgemeines Prinzip wissenschaftlicher Arbeit – auch im Sinne einer gewissen zusätzlichen Kontrolle der Richtigkeit des Erarbeiteten – gewöhnt werden.
Zusammenfassend sollte hervorgehoben werden: Das Beweisverfahren der vollständigen Induktion liefert keine neuen Erkenntnisse, die zu beweisende Aussage muß vielmehr als Vermutung bereits vorliegen. Dies führt zu einer Aufgabe, bei der die zu beweisende Summenformel erst durch Verallgemeinerung aus Einzelfällen gewonnen werden muß.
Die Summenformel der Folge $\left(\frac{1}{k(k+1)}\right)$ (■ 16, später im Stoffgebiet 2 benötigt) läßt sich verhältnismäßig einfach vermuten, und zwar in SSA. Danach sollte auch der Beweis in SSA erfolgen.
Abschließend kann der Lehrer darauf hinweisen, daß man die Summenformel auch durch Anwenden der Beziehung $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ herleiten kann, ohne dazu einen Beweis mittels vollständiger Induktion zu brauchen. Das darf die Schüler jedoch nicht zu der Meinung führen, die vollständige Induktion sei eine überflüssige Erschwernis.
Möglichkeiten für ähnliche Übungen bieten die LBA 2b), 3a), 4b) und 5a).

Hausaufgaben ● 19a); als Vorbereitung zur Herleitung der Summenformel für die arithmetische Folge (in der 2. Std.) LBA 1b), 3b) und c) (davon stellt LBA 3c) die größten Anforderungen, da der Term für das k-te Glied der Folge und damit eine explizite Zuordnungsvorschrift aufgestellt werden muß).

Festigung des Verfahrens Zunächst sollte noch einmal die Struktur des Induktionsschrittes hervorgehoben werden (↗ LB 35), zumal wenn Schüler in der HA den Induktionsschritt unvollständig, mißverständlich oder gar falsch formuliert haben.
Beim Hinweis, daß man auf ein besonderes Symbol k verzichten kann, sollte man an die Partialsummenfolge (s_n) einer Folge (a_k) erinnern, bei der die Benutzung zweier verschiedener Variablen n und k ebenfalls nicht notwendig ist, aber häufig der Deutlichkeit halber bevorzugt wird. Außerdem sollte den Schülern eine oftmals gewisse Willkürlichkeit und die unterschiedliche Zweckmäßigkeit des Anfangs mit 0 oder 1 bewußt werden. Dafür eignet sich die Bearbeitung von ● 20 im Anschluß an den Beweis für die Summe der ersten n Quadratzahlen (■ 17, benötigt im Stoffgebiet 4 (↗ LB 241)).
Die Beweisübungen sollten in ausreichendem Maße in SSA erfolgen.

Erarbeitung einer allgemeinen Summenformel für arithmetische Folgen Dieses Vorhaben ist unter dem Gesichtspunkt eines möglichst rationellen Arbeitens zu motivieren. Für die Erarbeitung der Formel(n) kann man vorgehen

- wie auf LB 36f. dargestellt;
- wie es in LBA 7 zur LE 4 an einem konkreten Fall erläutert ist:

$$\begin{array}{l} s_n = a + (a + d) + (a + 2d) + \ldots + (a + (n-2)\,d) + (a + (n-1)\,d) \\ s_n = (a + (n-1)\,d) + (a + (n-2)\,d) + (a + (n-3)\,d) + \ldots + (a + d) + a \\ \hline 2s_n = n(2a + (n-1)\,d) \quad \text{usw.} \end{array}$$

Dabei sieht der Schüler gewiß keine Notwendigkeit mehr, die so erhaltene Formel noch mittels vollständiger Induktion zu beweisen; denn die angestellte Überlegung bei „beliebigem, aber festem n" dürfte ihm völlig stichhaltig erscheinen. Außerdem muß der Weg als ausgesprochener Kunstgriff erscheinen, und deshalb sollte er nach Möglichkeit nicht angestrebt werden. Man muß jedoch damit rechnen, daß ein Schüler einen entsprechenden Vorschlag macht – weniger in Erinnerung an die evtl. früher bearbeitete Aufgabe als durch die Bekanntschaft mit diesem Verfahren aus populärwissenschaftlicher Literatur.
Nach dem Herleiten von ▷ 2 sollten die Schüler die Formel(n) nicht nur dadurch festigen, daß sie Formeln mit a, a_0 und auch a_1 als Anfangsglied miteinander vergleichen, sondern sie vor allem auf einfachste Fälle anwenden (● 21).

Hausaufgaben LBA 4; LBA 1a) und 4c) zur Vorbereitung der Erarbeitung von ▷ 3

Erarbeitung einer Summenformel für geometrische Folgen Zunächst sollte man den Weg der Herleitung von ▷ 2 kurz wiederholen und einige Übungen einfachster Art anschließen. Das erleichtert auch die Motivierung; ob diese, wie auf LB 37 dargestellt, ausreichend ist, ist von der Klassensituation her zu entscheiden.
Eventuell ist es zweckmäßiger, gleich zu Beginn die Herleitung der Summenformel bis $a_n = a \cdot \sum\limits_{k=0}^{n-1} q^k$ durchzuführen und daraus zu schlußfolgern, daß zunächst eine Summenformel für die Folge der n-ten Potenzen einer beliebigen (von 0 und 1 verschiedenen) Zahl zu ermitteln ist.
Bei der dem Beweisversuch zu ▷ 3 vorangehenden Überlegung, ob auch negative oder gebrochene Zahlen zu einem mit der Vermutung übereinstimmenden Ergebnis führen, kann Zeit durch Gruppenarbeit gespart werden; auch die Bezugnahme auf LBA 4c) ist möglich.
Oft wird bei geometrischen Folgen ein anderer Weg beschritten:

$$\begin{array}{l} s_n = a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots + aq^{n-2} + aq^{n-1} \\ qs_n = \phantom{a + {}} aq + aq^2 + aq^3 + \ldots + aq^{n-2} + aq^{n-1} + aq^n \\ \hline s_n - qs_n = a - aq^n \quad \text{usw.} \end{array}$$

Auch dieser „Kunstgriff" ist problematisch, selbst wenn man ihn nur für ein bestimmtes n (etwa $n = 5$) praktiziert und die durch Verallgemeinerung gewonnene Formel mittels vollständiger Induktion beweist. Der Weg auf LB 37f. ist zwar zeitaufwendiger, birgt aber größere Potenzen für die Entwicklung allgemeiner geistiger Fähigkeiten und entspricht der Forderung nach heuristischer Schulung (LP 10).

Zusammenfassung und weitere Beweisübungen Hier sollte die Zus auf LB 48ff. genutzt werden. Mit Ausnahme des Abschnittes „Weitere Summenformeln" könnten die Schüler zu zusammenfassenden Darlegungen aufgefordert werden, die dann mit denen des Lehrbuchs verglichen werden.

Kontrollaufgaben

1. LB A 2a) und 5a)
2. Eine arithmetische Folge (a_k) und eine geometrische Folge (g_k) beginnen mit $a_1 = g_1 = 2$. Die Differenz der arithmetischen Folge sei $d = 0{,}3$, der Quotient der geometrischen Folge $q = 0{,}5$.

   Ermitteln Sie $\sum_{k=1}^{50} a_k$ und $\sum_{k=1}^{10} g_k$!

   Lösung zu 2.: $\sum_{k=1}^{50} a_k = 467{,}5$ $\quad \sum_{k=1}^{10} g_k = 3{,}996$

Lerneinheit 7 (2 Std.)

Weitere Beweise mittels vollständiger Induktion

LB 40 bis 43

Zur Weiterentwicklung der Fähigkeiten der Schüler im Führen von Beweisen durch vollständige Induktion wird dieses Verfahren auf Ungleichungen, Teilbarkeitsaussagen und geometrische Sachverhalte angewandt. Das Schwergewicht sollte dabei auf Ungleichungen gelegt werden, weil sie für die weitere Arbeit sehr große Bedeutung haben.

Ziele

Die Schüler

- haben erkannt, daß der Anwendungsbereich des Beweisverfahrens der vollständigen Induktion sich nicht auf Summenformeln beschränkt,
- sind im Führen der Beweise sicherer geworden und haben erfahren, daß im Induktionsschritt auch ein anderes Vorgehen als das bisher praktizierte zweckmäßig sein kann,
- können die Gültigkeit gewisser Ungleichungen, einfacher Teilbarkeitsbeziehungen und geometrischer Aussagen beweisen.

Schwerpunkte

1. Stunde

- Sicherung des Ausgangsniveaus
- Beweis der Gültigkeit einiger Ungleichungen (■ 18, LBA 1a) oder b) oder 2), dabei Beweis der Induktionsbehauptung durch Umformen der Induktionsvoraussetzung

2. Stunde

- Beweise von Teilbarkeitsaussagen (■ 19 oder LBA 3a))
- Beweise einfacher geometrischer Aussagen (■ 20 oder LBA 4 bzw. 5)

Methodische Hinweise

Sicherung des Ausgangsniveaus Für vorbereitende tägliche Übungen zum Auffrischen des Wissens und Könnens zu Ungleichungen eignen sich die Aufgaben 15 bis 18 auf UH 17. Für eine gezielte Sicherung des Ausgangsniveaus zu Beginn dieser LE seien zwei Möglichkeiten genannt:

- Die Schüler führen – weitgehend in SSA – ein oder zwei einfache Beweise ohne vollständige Induktion für die Gültigkeit von Ungleichungen, z. B. für

  „Aus $x > 0$ folgt $x + \frac{1}{x} \geqq 2$".

  Dabei kann man auf einen wichtigen Umstand aufmerksam machen, der Gegenstand von ● 23 ist: Zwar wird man beim Finden des Beweises von $x + \frac{1}{x} \geqq 2$ zu der für alle x, also auch für $x > 0$, zutreffenden Aussage $(x - 1)^2 \geqq 0$ fortschreiten, aber damit ist der Beweis noch nicht erbracht. Man muß sich vergewissern, daß nur äquivalente Umformungen vorgenommen wurden, oder die Darstellung in umgekehrter Reihenfolge wählen (aus didaktischen Gründen zu empfehlen). Hier kommt noch hinzu: Die Frage, an welcher Stelle die Voraussetzung $x > 0$ benötigt wird, führt auf das Problem, das den Schülern beim Multiplizieren oder Dividieren beider Seiten einer Ungleichung erfahrungsgemäß die größten Schwierigkeiten bereitet.
  Andere Aufgaben gleicher Art würden Beweise für die folgenden Aussagen fordern, die eng mit der soeben erörterten zusammenhängen:

  „Wenn $x \cdot y > 0$ ist, so gilt $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geqq 2$"; „Aus $a \cdot b > 0$ folgt $(a + b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geqq 4$".

- Zum Problem des Multiplizierens bzw. Dividierens beider Seiten einer Ungleichung kann man auch unter Mitarbeit der Schüler einen Trugschluß vorführen, etwa den „Beweis" für die Aussage

  „Aus $a > b$ folgt für beliebiges $a, b > 0$ auch $a > 2b$".
  Man erhält aus $a > b$ durch Multiplikation mit b

$a \cdot b > b^2$,	daraus durch Subtraktion von a^2
$ab - a^2 > b^2 - a^2$,	daraus mittels Division durch $b - a$
$a > b + a$,	daraus durch Abschätzen wegen $a > b$
$a > b + b$,	also die Behauptung
$a > 2b$.	

  Dabei ist nicht nur die fehlerhafte Stelle dieser „Beweisführung" aufzudecken. Auch die zulässigen äquivalenten Umformungen müssen deutlich als solche erkannt und herausgestellt werden, und es ist auf das am Schluß erfolgte „Abschätzen" einzugehen, das man ja später benötigt.

Beweis von Ungleichungen Beginnen sollte man mit dem im ■ 18 dargestellten Beweis. Nach Erörterung des prinzipiellen Vorgehens im UG können die Schüler in SSA Induktionsanfang sowie Induktionsvoraussetzung und -behauptung formulieren. Nach erfolgter Zwischenauswertung ist zu entscheiden, ob der Beweis der Induktionsbehauptung im UG oder – nach einigen Hinweisen – in SSA geführt werden kann. Im letzteren Falle tritt evtl. die im oben erwähnten ● 23 dargestellte fehlerhafte Schlußweise auch bei einigen Schülern auf, was gewiß mehr Aufgeschlossenheit für die Erörterung dieser Frage schafft. Andernfalls sollten die Schüler diesen Auftrag lesen und dann – nach angemessener Zeit zum Durchdenken – diskutieren.
Zur Behandlung im Unterricht eignen sich ferner die LBA 1 a) oder b) oder auch LBA 2.

Beweis von Teilbarkeitsaussagen Sowohl im ■ 19 als auch in der LBA 3a) werden die Umformungen im Induktionsschritt von dem Bestreben diktiert, die Induktionsbehauptung anwenden zu können. Die hier angewandte Strategie des „gemischten Vorwärts- und Rückwärtsarbeitens“ bzw. des „Rückwärtsarbeitens“ sollten die Schüler im Interesse heuristischer Schulung verstehen lernen.
Bei LBA 3a) sollte der Lehrer abschließend verdeutlichen, daß die Überlegungen unabhängig von den speziellen Zahlen 9 und 8 sind, daß also $a^n - 1$ für alle natürlichen Zahlen a und n durch $a - 1$ teilbar ist, und hervorheben, daß zwar zwei natürliche Zahlen (a und n) in dieser All-Aussage auftreten, ein Beweis mittels vollständiger Induktion aber nur über n geführt wird.
LP 20f. fordert, in Übungen nicht nur von k auf $k + 1$, sondern auch von $k - 1$ auf k zu schließen. Das wird im ■ 19 berücksichtigt. Man kann ebenso bei LBA 3a) oder auch schon zu einem früheren Zeitpunkt verfahren. Ein zu frühes Bekanntmachen mit unterschiedlichen Vorgehensweisen jedoch kann bei leistungsschwächeren Schülern eher zur Verwirrung statt zur angestrebten inhaltlichen Klarheit führen.

Beweise einfacher geometrischer Aussagen Hier gibt es verhältnismäßig wenig Sachverhalte, die einerseits allen Schülern zuzumuten und andererseits nicht von der Art sind, daß man einfacher als mit einem Beweis durch vollständige Induktion zum Ziel kommen kann. Beim Lösen der LBA 4 beispielsweise würde man am einfachsten so schließen: Jeder der n Eckpunkte läßt sich mit jedem der $(n - 3)$ ihm nicht benachbarten Eckpunkte durch eine Diagonale verbinden; dabei wird allerdings jede Diagonale doppelt gezählt: $d_n = \frac{n(n-3)}{2}$.
So erhält man die gesuchte Anzahl ohne (unvollständige) Induktion und ist zugleich der Gültigkeit dieser Formel sicher.
Auch ■ 20 (Innenwinkelsumme des n-Ecks) läßt sich für den konvexen Fall relativ einfach bewältigen, entweder wie im LB angedeutet oder nach – gedanklicher – Verbindung eines innerhalb des n-Ecks gelegenen Punktes mit jedem Eckpunkt. Im Fall nicht notwendig konvexer n-Ecke hingegen erfordert der für den Induktionsschritt benutzte Umstand, daß man stets durch eine passend gewählte Diagonale das n-Eck in ein Dreieck und ein $(n - 1)$-Eck zerlegen kann, eine etwas eingehendere Überlegung. Darauf wird auch im LB, verbunden mit einem Literaturhinweis, aufmerksam gemacht, und auch der Lehrer sollte das im Unterricht nicht verschweigen.

Kontrollaufgaben

LB A 1c) und 5

Lerneinheit 8 (3 Std.)

Übungen und Anwendungen zu Folgen und ihren Partialsummen

LB 43 bis 48

LP 21 bzw. 23 fordert, geometrische Folgen und das Lösen der dabei auftretenden Exponentialgleichungen besonders zu berücksichtigen (dabei sind Logarithmen und Logarithmengesetze systematisch zu wiederholen) und orientiert in diesem Zusammenhang auch auf die Behandlung von Anwendungsaufgaben aus der Ökonomie und die Nutzung der in ihnen ruhenden erzieherischen Potenzen. Allerdings wird man sich hier im Hinblick auf die zur

Verfügung stehende Unterrichtszeit und die Komplexität derartiger Aufgaben auf sehr einfache Sachverhalte beschränken und schwierigere Aufgaben dem Stoffabschnitt 1.3 „Übungen und Anwendungen“ zuweisen müssen.

Ziele

Die Schüler

- haben ihre Fertigkeiten im Ermitteln von Summen endlicher arithmetischer und geometrischer Folgen gefestigt und können, je nach Vorgabe, Anfangs- oder Endglied, Anzahl der Glieder oder Differenz bzw. Quotient ermitteln, insbesondere eine vorgegebene Anzahl von Gliedern interpolieren,
- können ihr reaktiviertes Wissen über den Logarithmusbegriff und die Logarithmengesetze beim Lösen von Aufgaben zu geometrischen Folgen anwenden,
- haben die Anwendungsmöglichkeiten von Zahlenfolgen in verschiedenen Wissenschaftsdisziplinen, in der Technik und in der gesellschaftlichen Praxis, insbesondere die Bedeutung geometrischer Folgen für die Normung erkannt,
- können relativ einfache Anwendungsaufgaben, die auf arithmetische (geometrische) Zahlenfolgen führen, selbständig lösen.

Schwerpunkte

1. Stunde

- Lösen formaler Aufgaben zu arithmetischen Folgen (LBA 1 oder 2)
- Lösen einer Anwendungsaufgabe, die auf eine arithmetische Folge führt (■ 21 oder LBA 5)

2. Stunde

- Wiederholung des Logarithmusbegriffs und der Logarithmengesetze sowie Lösen von Gleichungen der Form $x^a = b$ und $a^x = b$ (■ 22)
- Lösen von Interpolationsaufgaben zu geometrischen Folgen (■ 23, LBA 6 oder 7)

3. Stunde

- Lösen formaler Aufgaben zu geometrischen Folgen (■ 24, ● 25, LBA 3 oder 4)
- Lösen von Anwendungsaufgaben zu geometrischen Folgen (LBA 8 oder 9)

Methodische Hinweise

Motivierung und Zielstellung Nach der allgemeinen Zielstellung, die bisherige Beschränkung auf die Summenermittlung zu überwinden, sollten die Schüler im UG möglichst rasch folgende Frage beantworten: „Bei einer arithmetischen Folge sei das fünfte Glied um 20 größer als das erste. Um wieviel ist das zehnte Glied größer als das erste?“ Die zu erwartende relativ hohe Anzahl falscher Antworten warnt die Schüler, vorschnell zu sein, und motiviert sie, Formeln für arithmetische Folgen zu wiederholen. Bei den beiden Formen der Summenformel ist zu erörtern, daß es nicht nur möglich sein muß, aufgrund bekannter a, n und d

bzw. a_n die Summe s_n zu berechnen, sondern auch bei vorgegebenen s_n und zwei anderen Werten die restlichen beiden.

Lösen formaler Aufgaben zu arithmetischen Folgen In den Übungen ist keineswegs Vollständigkeit anzustreben, und erst recht nicht sind die verschiedenen Fälle einander systematisch gegenüberzustellen. Die oben angeführte Einsicht und einige wenige Übungen, z. B. mit LBA 1 und 2, reichen völlig aus; auch LBA 12 (LB 51) ist möglich.

Lösen einer Anwendungsaufgabe zu arithmetischen Folgen Zunächst sollte, ausgehend von ■ 21 oder LBA 5, das Vorgehen beim Lösen von Anwendungsaufgaben wiederholt werden:
- Analysieren der Aufgabenstellung, Erfassen des Sachverhalts, Planen der Lösung
- Ausführen des Lösungsplanes
- Rückbeziehen des Ergebnisses auf die Aufgabenstellung
- Auswerten

Dabei ist hervorzuheben, daß es für die einzelnen Etappen kein für alle Arten von Aufgaben sinnvolles Schema gibt, sondern nur allgemeine Hinweise, die zu beachten sind, etwa bei der Analyse: Sachverhalt veranschaulichen (Skizze), Gegebenes und Gesuchtes hervorheben, geeignete Bezeichnungen (Variable) einführen, Einheiten gegebener Größen bedenken (evtl. Umrechnungen), Vorstellungen vom Ergebnis verschaffen (Abschätzen), (voraussichtlich) benötigte Formeln bereitstellen. Die Schüler sollten ferner wissen, daß das Ausführen eines Lösungsplanes auch scheitern kann, was zum erneuten Durchdenken der Aufgabe und zum Aufstellen eines neuen Planes zwingt. Außerdem sollten sie beachten, daß die letzte Etappe nicht nur im Formulieren eines Antwortsatzes besteht, sondern auch das Vergleichen der erhaltenen „innermathematischen" Ergebnisse mit dem realen Sachverhalt unter Berücksichtigung der anfangs erfolgten Abschätzung vorangehen muß und auch ein Messen an eigenen Erfahrungen nicht unterbleiben sollte.
Nach dieser Besinnung benötigen die Schüler einige Zeit, um den Lösungsweg in SSA planen zu können. Der erarbeitete Plan wird dann im UG diskutiert, Gegebenes und Gesuchtes ähnlich wie auf LB 44 an der Tafel festgehalten und durch die zur Berechnung benötigten Formeln ergänzt. Das Lösen kann wiederum in SSA erfolgen, die gemeinsame Auswertung – zumindest teilweise – durch Kontrolle anhand des LB ersetzt werden. Die zusätzliche Frage: „Wieviel Meter Papier befinden sich auf einer Rolle, wenn der Gesamtdurchmesser 50 cm beträgt?" erhöht den Übungseffekt.
Als Vorbereitung auf den nächsten Schwerpunkt ist eine Aufgabe mit „geometrischer Interpolation" empfehlenswert (HA unter Hinweis auf ihre Besonderheit), etwa – auf die Gleichung $x^5 = 29$ führend (↗ LB 44) –: „Zwischen $a_1 = 2$ und $a_6 = 58$ sind vier Zahlen a_2, a_3, a_4, a_5 so zu bestimmen, daß eine 6-gliedrige geometrische Folge entsteht".

Motivierung Hier kann an die in der 1. Std. gestellte vorbereitende HA angeknüpft werden. Daß die Frage nach der Anzahl der Glieder bei bekanntem Anfangsglied, Endglied und Quotient auf Gleichungen wie $5^x = 29$ führt (↗ LB 44), sehen die Schüler im Zusammenhang mit der Auswertung der vorbereitenden HA leicht ein, so daß bei der Motivierung auf eine dazu analoge Aufgabenstellung für $5^x = 29$ verzichtet werden kann.

Wiederholung des Logarithmusbegriffs und der Logarithmengesetze Es geht hier nicht primär um die formale Seite (Existenzaussage, Definition). Wichtig sind vielmehr einfache Übungen im Bestimmen von Logarithmen und von Numeri (auch später im Rahmen täglicher Übungen), solche Aufgabenstellungen wie $\log_3 125$ einbeziehend. Die hier naheliegende falsche Antwort „5" gibt zur Klärung Anlaß, und die richtige Antwort „Eine reelle Zahl zwischen 4 und 5" erfordert eine Bezugnahme auf die entsprechende Existenzaussage und die bereits aus Klasse 9 bekannte Monotonie der Exponentialfunktion.
Auch die Frage nach $10^{\lg 2}$ oder $3^{\log_3 17}$ müssen die Schüler ohne Zögern richtig beantworten können und Logarithmen klar als „heruntergekommene Exponenten" erfassen. Deshalb sind auch die Logarithmengesetze in enge Beziehung zu den den Schülern vertrauteren

Potenzgesetzen zu bringen, bis hin zu einer abschließenden Formulierung wie „Logarithmengesetze sind eigentlich nichts anderes als Potenzgesetze in einer anderen Schreibweise". Deren Wdh kann in SSA erfolgen (↗ LB 44f. und [8]). Schließlich sollte man die Gleichungen, die Anlaß zu der Wiederholung boten, nicht nur mittels der Logarithmentafel lösen, sondern auch auf den Rechenstab eingehen. Das Gegenüberstellen der Mantissenskale L[1] und der logarithmisch geteilten Grundskalen ist für das Verständnis des Prinzips des Stabrechnens und damit der Logarithmen überhaupt nützlich.

Lösen von Interpolationsaufgaben zu geometrischen Folgen Wurde, wie oben beschrieben, eine derartige Aufgabe als Motivation benutzt, so sollte man diese jetzt lösen. Auch ■ 23 oder LBA 6 kommen hier in Betracht.
Um praktische Fragestellungen nicht länger zurückzustellen, ist spätestens im Anschluß an die Bearbeitung von ■ 23 oder LB A 6 die technische Bedeutung einer geometrischen Stufung möglichst anschaulich zu vermitteln, indem man z. B. an einfachen Gegenständen wie Nägeln oder Schrauben, etwa von 1 cm bis 10 cm Länge, eine arithmetische und eine geometrische Stufung mit gleicher Stufenzahl einander gegenüberstellt. In diesem Zusammenhang kann auch auf die Papierformate eingegangen werden (LBA 17, LB 52).

Hausaufgabe LBA 7; LBA 8a) als vorbereitende HA zur 3. Std. (Anwendungsaufgaben zu geometrischen Folgen)

Lösen formaler Aufgaben zu geometrischen Folgen Am schwersten fällt den Schülern das Ermitteln der Gliederanzahl, außer bei so einfachen Zahlenverhältnissen wie in LBA 5, wo das Bilden der Glieder (gewissermaßen Probieren) zum Ziel führt. Probieren kann sogar genügen, wenn die Summe vorgegeben ist:
„Wie viele Glieder hat eine endliche geometrische Folge mit dem Anfangsglied 2, dem Quotienten 3 und der Summe 6560, und wie lautet ihr letztes Glied?"
Eine derartige Aufgabe kann man vor die Behandlung von ■ 24 setzen. Dabei sollten die Schüler zunächst schätzen, denn die meist zu hohen Schätzwerte helfen, das starke Anwachsen geometrischer Folgen (bei einem Quotienten größer als 1) bewußtzumachen. Nützlich dafür sind übrigens auch die bekannten Aufgaben von dem sagenhaften Erfinder des Schachspiels und seiner erbetenen Belohnung in Weizenkörnern oder von dem Pferd, bei dem man „nur" die Hufnägel – von 1 Pf für den ersten ständig den Betrag verdoppelnd bis zum letzten – zu bezahlen braucht. Der Lehrer sollte sie deshalb an passender Stelle einsetzen.
Beim Lösen der oben formulierten Aufgabe kann man das „Probieren" durch Bilden der Glieder zulassen, denn es ist nicht unökonomisch. Beim ■ 24 jedoch muß ein derartiges Vorgehen als unrationell verworfen werden (es sei denn, man benutzt einen elektronischen Taschenrechner). Vor allem aber muß den Schülern der Wert eines Verfahrens deutlich werden, das in jedem Falle mit vertretbarem Aufwand zum Ziel führt (ohne daß es deshalb stets angewandt werden müßte).
Die Aufgabenstellung im ■ 24 wirft bewußt Fragen auf, wie sie ähnlich bei Grenzwertuntersuchungen immer wieder auftreten. Von gleicher Art sind die LBA 3c) und 4b).

Lösen von Anwendungsaufgaben zu geometrischen Folgen Zwar ist LBA 9 inhaltlich gewichtiger als LBA 8, doch liefert letztere in gewisser Weise ein „Grundmodell" für derartige Vorgänge. Deshalb sollte LBA 8 – weitgehend in SSA – im Unterricht bearbeitet werden (zur Teilaufgabe a) HA in der 2. Std.) während – je nach der verfügbaren Zeit – LBA 9 im UG nur vorbesprochen werden sollte (↗ HA dieser Stunde). Dabei sollten die Schüler auch erkennen: Obwohl der mit den geometrischen Folgen entwickelte mathematische Apparat ausreicht, derartige Aufgaben zu lösen, spiegelt er in mancher Hinsicht den Sachverhalt unvollständig wider. Denn der Zuwachs des Holzbestandes erfolgt nicht wie bei

[1] Irreführend ist es, diese Skale als „Logarithmenskale" zu bezeichnen, denn L ist gerade nicht logarithmisch, sondern linear (gleichmäßig) geteilt. Ihre explizite Behandlung sieht der Lehrplan übrigens auch in Klasse 9 nicht vor.

Zinsen schlagartig nach Ablauf eines Jahres, sondern kontinuierlich, „stetig". Es liegt eine Funktion vor, deren Definitionsbereich nicht auf natürliche Zahlen beschränkt ist, und zwar eine Exponentialfunktion (wenn man davon absieht, daß Wachstums- und Reife- bzw. Ruheperioden des Holzes abwechseln).
Der Lehrer sollte auch darauf eingehen, daß die Zunahme des Holzbestandes bei einem Wald nur dann in dieser Weise zutreffend beschrieben werden kann, wenn die Bäume weder ganz jung noch überaltert sind und weitere „Nebenbedingungen" (Witterung, Düngung, Krankheiten oder Schädlingsbefall) außer Betracht bleiben.

Hausaufgabe Lösen der vorbesprochenen LBA 9

Kontrollaufgaben

1. In dem etwa 4000 Jahre alten Papyrus Rhind aus Ägypten wird die Aufgabe behandelt, 10 Maß Getreide so unter 10 Personen zu verteilen, daß die Anteile eine arithmetische Folge mit $\frac{1}{8}$ Maß als Differenz bilden. Welche Anteile erhalten demnach die einzelnen Personen?
2. Bei der „gleichmäßig temperierten Tonleiter" sind zwischen Grundton und Oktave (mit doppelter Frequenz des Grundtons) 11 Töne so eingeschaltet, daß die Frequenzen eine geometrische Folge bilden. Der Grundton habe die Frequenz 440 Hz (Kammerton a'). Welche Frequenz hat dann der vierte Ton dieser Folge (o'')?

Lösungen:

1. $\frac{25}{26}$ Maß, $\frac{23}{16}$ Maß, ..., $\frac{7}{16}$ Maß

2. 523 Hz (Rechenstabgenauigkeit)

Stoffabschnitt 1.2 Kombinatorik

(8 Std.)

LP 21 und 23f. orientieren darauf, die Schüler mit *elementaren* kombinatorischen Überlegungen vertraut zu machen und sie zu befähigen, mit Hilfe der (lediglich einzuführenden) Begriffe und Sätze entsprechende formale Übungen durchzuführen und *einfache* Anwendungsaufgaben zu Permutationen, Variationen und Kombinationen zu lösen.
Das erfordert, auch im Hinblick auf die zur Verfügung stehende geringe Stundenanzahl, den Unterrichtsprozeß so zu planen, daß die Lehrplanforderungen nicht überschritten werden und ein vertretbares Maß an Ausgewogenheit zwischen theoretischen Erörterungen und praktischen Anwendungen erreicht wird. Dabei ist insbesondere der Motivation der Schüler durch interessante Problemstellungen und Aufgabeninhalte die notwendige Aufmerksamkeit zu schenken.
Aus den Zielstellungen zur Behandlung dieses Stoffabschnitts (↗ auch UH 11) lassen sich folgende Leitgedanken ableiten:

- Bei zahlreichen praktischen Sachverhalten werden die Elemente ein und derselben Menge in ihrer unterschiedlichen Anordnung betrachtet, und es wird nach der Anzahl aller möglichen Anordnungen gefragt.
- Bei bestimmten Sachverhalten geht es um geordnete Teilmengen einer vorgegebenen Menge und deren Anzahl in Abhängigkeit von der Anzahl der Elemente, bei anderen spielt die Anordnung der Elemente in den Teilmengen keine Rolle.
- Bestimmte Überlegungen ermöglichen, bei einem vorgegebenen Sachverhalt sämtliche

Anordnungen und ihre Anzahl, sämtliche (geordnete und nicht-geordnete) Teilmengen mit einer bestimmten Anzahl von Elementen und auch die Anzahl dieser Teilmengen zu finden.
- Es gibt Sachverhalte und Probleme, die sich durch kombinatorisches Überlegen erfassen und lösen lassen, jedoch nicht mit Hilfe der erarbeiteten Begriffe „Permutation", „Variation", „Kombination" und der entsprechenden Anzahl-Aussagen.

Lerneinheit 9 **(2 Std.)**
Permutationen

LB 53 bis 56

Ziele

Die Schüler
- haben einen Einblick in kombinatorische Fragestellungen erhalten,
- haben die Begriffe „Geordnete Menge" und „Permutation von n Elementen" erfaßt und können alle Permutationen einer Menge von n Elementen ($n \leqq 4$) bilden,
- haben den Beweis für $P_n = n!$ verstanden und können bei einfachen Sachverhalten diese Formel anwenden.

Schwerpunkte

1. Stunde
- Motivierung der Behandlung kombinatorischer Fragestellungen
- Erarbeitung des Begriffs „Permutation", dazu „Geordnete Menge" und „Lexikographische Anordnung"
- Finden der Formel $P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ (■ 25, ● 27)
- Erarbeitung und Festigung des Begriffs „n-Fakultät" (LBA 4 bis 6)

2. Stunde
- Beweis für $P_n = n!$ (● 28)
- Übungen im Ermitteln von P_n (Auswahl aus LBA 1 bis 3 und 7)

Methodische Hinweise

Motivierung der Behandlung kombinatorischer Fragestellungen Kombinatorische Probleme von der Art und dem Niveau, wie sie laut LP behandelt werden können, sind relativ häufig und auch leicht zu verstehen. Sie finden das Interesse der Schüler, die Motivierung für die Beschäftigung mit solchen Fragen fällt deshalb nicht schwer. Man kann dafür das Einführungsbeispiel auf LB 52 oder einen anderen, der jeweiligen Klasse besonders vertrauten Sachverhalt benutzen.

Erarbeitung des Begriffs „Permutation" Der LP fordert sowohl für „Geordnete Menge" als auch für „Permutation" keine exakte Definition (etwa als Paar $[M; <]$ bzw. als Abbildung), sondern schreibt das anspruchslosere „Einführen" vor. Deshalb sollte man das Wesentliche der Begriffe an Beispielen erarbeiten. Bei den geordneten Mengen kann man dabei von dem bekannten „geordneten Paar" ausgehen (es zumindest einbeziehen), die Unterschiedlichkeit von $[a; b]$ und $[b; a]$ (für $b \neq a$) durch die unterschiedliche Lage der Punkte in der graphischen Darstellung veranschaulichen. Es kommt also weniger auf eine verbale Erklärung an (etwa „Eine geordnete Menge ist eine Menge, bei der die Reihenfolge der Elemente festgelegt ist") als vielmehr auf das Darstellen geordneter Mengen mit übereinstimmenden Elementen: „Nennen Sie drei unterschiedlich geordnete Mengen mit den Elementen a, b, c!". Auch die drei Merkmale einer Ordnungsrelation sollten nicht abgefragt, sondern durch (auch außermathematische) Beispiele konkretisiert werden.
● 26 dient nicht nur dem Festigen des Begriffs „Geordnete Menge", sondern auch dem Motivieren und Einführen von „Lexikographische Anordnung". Einige Schüler werden dabei zunächst weniger als 24 Permutationen finden. Das lexikographische Anordnen der gefundenen Permutationen gestattet das Finden der „Lücken". Auf diese Weise werden die an sich unterschiedlichen Aufgabenstellungen

- Ordnen vorhandener Wörter (bisher vor allem praktiziert);
- Systematisches Erzeugen neuer Wörter

miteinander verbunden, wird die erste Aufgabe in die zweite übergeführt.

Finden einer Formel für die Anzahl der Permutationen Die beim Bearbeiten von ● 26 zunächst aufgetretenen Mängel können ein (zusätzliches) Motiv für ein Ermitteln der Anzahl P_n sein. In SSA an ■ 25 kann das erforderliche systematische und planvolle Vorgehen erarbeitet werden. Spätestens hier sollte auch eine Erklärung des Wortes „Kombinatorik" versucht werden. Von der Umgangssprache her verbindet man mit „Kombination" bzw. „Kombinieren" die Vorstellung vom folgerichtigen und systematischen, alle Möglichkeiten bedenkenden Zusammenfügen einzelner Objekte. Diesbezüglich sind die Tätigkeiten der Schüler auf dem Weg zum Ergebnis ($P_n = n!$) für ihre Bildung und Erziehung von mindestens ebenso großer Bedeutung wie erworbenes Faktenwissen (Formeln) selbst.

Erarbeitung des Begriffs „n-Fakultät" Auf eine exakte (induktive) Definition auch dieses Begriffs $[0! = 1;\ n! = n \cdot (n-1)!]$ wird verzichtet. Er wird vielmehr als eine abkürzende Sprech- und Schreibweise für „Produkt aller Zahlen von 1 bis n" eingeführt. Eine gewisse Vertrautheit damit ist erforderlich, weil $n!$ im folgenden Unterricht zum Erarbeiten weiterer Begriffe und zum Formulieren von Aussagen und deren Beweisen sehr häufig benutzt wird. Dafür reicht es nicht, $n!$ für vorgegebene n berechnen zu können, es muß auch eine gewisse Sicherheit im Zerlegen, Umformen, Vereinfachen erworben werden, z. B. durch Bearbeiten der LBA 4 bis 6. Eine Motivierung dafür, $0!$ und $1!$ überhaupt zu definieren, kann mit dem Streben nach Vollständigkeit (alle natürlichen Zahlen) und in Analogie zu den Potenzen a^1 und a^0 erfolgen. Es gerade in dieser Weise zu tun, kann ebenfalls in Analogie zu den Potenzen motiviert werden. Zwar sind keine den Potenzgesetzen entsprechenden Gesetze für $n!$ bekannt, LBA 4d) liefert aber sofort $(n-1)! = \frac{n!}{n}$.

Die Schüler dürften nach einem entsprechenden Impuls in SSA für $n = 2$ bzw. $n = 1$ finden:

$$(2-1)! = 1! = \frac{2!}{2} = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1, \quad \text{also } 1! \underset{\text{Df}}{=} 1 \quad \text{bzw.}$$

$$(1-1)! = 0! = \frac{1!}{1} = \frac{1}{1} = 1, \quad \text{also } 0! \underset{\text{Df}}{=} 1.$$

Beweis für $P_n = n!$ Zunächst sollten die Schüler die Schritte eines Beweises durch vollständige Induktion und die Gedankenführung beim oben beschriebenen Kombinieren wiederholen: Zu n geordneten Objekten kann man ein weiteres an $(n + 1)$ Stellen hinzufügen. Der Beweis ist dann so einfach, daß ihn die Schüler in SSA führen können.

Übungen im Ermitteln von P_n Sie sollen vor allem als Anwendungen auf reale Sachverhalte erfolgen. Deshalb sind im LB nur wenige Aufgaben zu formalen Übungen wie LBA 2 und 3 zu finden.

Kontrollaufgaben

LBA 3b) und 5a)

Lerneinheit 10 (3 Std.)

Variationen und Kombinationen

LB 56 bis 62

Ziele

Die Schüler

- kennen die Begriffe „Variation von n Elementen zur k-ten Klasse" und „Kombination von n Elementen zur k-ten Klasse",
- haben die Anzahl V_5^k erarbeitet und den Beweis für $V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ verstanden,
- können die Formel für die Anzahl C_n^k aus den Formeln für V_n^k und P_n herleiten,
- können von einfachen Fragestellungen entscheiden, ob sie auf Variationen bzw. Kombinationen führen, und gegebenenfalls die entsprechenden Anzahlformeln anwenden,
- kennen den Begriff „Binomialkoeffizient" und die entsprechende Schreibweise,
- haben ihre Fähigkeiten im Führen von Beweisen sowie im Analysieren, Vergleichen und Verallgemeinern weiterentwickelt.

Schwerpunkte

1. Stunde

- Erarbeitung der Begriffe „Variation" und „Kombination"
- Erarbeitung der Formel für V_n^k, dabei Entwickeln allgemeingeistiger Fähigkeiten (▷ 5; ■ 26)

2. Stunde

- Beweis zu $V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$; dabei Festigen des Beweisens mittels vollständiger Induktion
- Erarbeitung der Formeln für C_n^k (▷ 6 und 7; ● 32; LBA 4)

3. Stunde

- Erarbeitung des Begriffs „Binomialkoeffizient“ und der Schreibweise $\binom{n}{k}$
- Induktive Erarbeitung und Begründung der Beziehungen in ▷ 8

Methodische Hinweise

Erarbeitung der Begriffe „Variation“ und „Kombination“ Einer erneuten Motivierung bedarf es nicht, wenn die Schüler bei Beginn des Stoffabschnitts „Kombinatorik“ die drei Fragen auf LB 52 durchdacht haben. Daß man jetzt – folgt man dem Weg des LB – beide verbliebenen Fragen aufgreift, verwundert bei ihrer Gleichartigkeit nicht. Diese gemeinsame Einführung von „Variation“ und „Kombination“ hat den Vorteil, beide Begriffe durch Gegenüberstellung besser voneinander abgrenzen und dabei die Beispiele für den einen sofort als Gegenbeispiele für den anderen nutzen zu können. Wählt man z. B. aus den zehn Grundziffern drei aus und fügt sie zu einer Ziffer zusammen, so erhält man mit 345 und 543 zwar zwei verschiedene Variationen, aber ein und dieselbe Kombination. Mit 345 und 543 entstehen zwei verschiedene Ziffern, beim Tele-Lotto aber ist es für einen „Dreier“ gleichgültig, in welcher Reihenfolge 3, 4, 5 gezogen wurde. Weitere Gegenbeispiele können durch Wiederholung von Elementen erzeugt werden: Es gibt zwar die Ziffer 343, im eingeführten Sinne ist dies aber weder eine Variation noch eine Kombination; beim Tele-Lotto könnte so etwas auch gar nicht auftreten.
Das Sichtbarmachen von Gemeinsamkeiten und Unterschieden kann in den Übungen fortgesetzt werden. Dabei sollte man sowohl Aufgaben stellen, die einige Variationen (Kombinationen) anzugeben verlangen, als auch solche, bei denen nach beiden gefragt ist:
„Bilden Sie aus der Menge aller Buchstaben 3 verschiedene Variationen (Kombinationen) zur 4. Klasse, die

- sich in allen Elementen unterscheiden,
- sich nur in einem Element unterscheiden,
- in allen Elementen übereinstimmen!

Suchen Sie dabei möglichst nach sinnvollen Wörtern!“
„Bilden Sie alle Variationen (Kombinationen) zur 2. Klasse der 4 Buchstaben S, T, A, R!“
Bei diesen Übungen sollte man auch die Permutationen der n Elemente und die Menge der n Elemente selbst als spezielle Variationen (Kombinationen) einbeziehen, ebenso die n Elemente (strenggenommen die n Einermengen) einzeln. Insbesondere der zweite Aufgabentyp kann zur Differenzierung dienen, indem beim Bilden aller Variationen gleichzeitig die Anzahlen V_4^k für $k = 1$ bis 4 ermittelt werden, dabei eine Abhängigkeit von k festgestellt und somit zum nächsten Schwerpunkt übergeleitet wird.
Das Tafelbild auf UH 55 verdeutlicht den Gedankengang und kann bei einer Zusammenfassung erarbeitet werden.

Erarbeitung der Formel für V_n^k Auch hier ist, eigentlich noch mehr als bei den Permutationen, für die Bildung und Erziehung der Schüler das *Finden* der Formel genau so wichtig wie der Beweis. Mit dem Arbeiten am ■ 26, dem Festhalten eines der beiden Parameter, dem Aufdecken von Zusammenhängen und dem Verallgemeinern werden einerseits allgemeine heuristische Regeln angewandt. Andererseits wird aber ein für die Kombinatorik typisches Denken praktiziert: Man beginnt mit dem einfachsten und am leichtesten zu überschauenden Einzelfall und versucht, aus ihm durch systematisches Kombinieren die anderen Fälle zu erzeugen, dabei stets bedenkend, ob und wie sich Art und Anzahl der entstehenden Ob-

Menge von n Elementen

↓

Permutation

Geordnete Menge von n Elementen

Variation	$1 \leq k \leq n$	Kombination
Geordnete Teilmenge mit k Elementen		Teilmenge mit k Elementen

jekte ändern. In diesem systematischen, disziplinierten, folgerichtigen Denken ist eine der wichtigsten Erziehungspotenzen des ganzen Stoffabschnitts „Kombinatorik" zu sehen. Die Schüler sollen auf diese Weise befähigt werden, einfache kombinatorische Überlegungen, z. B. an Sachverhalten aus ihrer Umwelt, anzustellen, ohne an eine Formel gebunden zu sein.

Der *Weg* zur Formel ist auch deshalb so wichtig, weil nur diejenigen Schüler den anschließenden Beweis verstehen, ihn womöglich sogar in SSA finden können, die zuvor die gleichen Gedanken am Beispiel verstanden haben.

Auch bei den Umformungen ist aus erzieherischen Gründen jeder Eindruck eines Kunstgriffs zu vermeiden. Wenn z. B. die Anzahlen

$V_5^2 = 5 \cdot 4; \qquad V_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3; \qquad V_5^4 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$

gefunden worden sind, muß noch einmal zur klaren Zielorientierung erarbeitet werden: Wir wollen

- V_5^k in Abhängigkeit von k ausdrücken und
- versuchen, die Produkte mit Hilfe der Fakultätsschreibweise auszudrücken.

Von hier kann weitergedacht werden: Bei den Produkten fehlt an 5! nicht nur irgendetwas, es fehlt eine (kleinere) Fakultät. Würden wir sie anfügen, müßten wir anschließend wieder dividieren. Der Bruch in $V_5^2 = \frac{5!}{3!} = \frac{5!}{(5-2)!}$ sieht zwar umständlicher aus als das Produkt $5 \cdot 4$, entspricht aber den beiden genannten Zielen und gestattet eine Verallgemeinerung zu $V_5^k = \frac{5!}{(5-k)!}$ und schließlich zu $V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$.

Das Auftreten von $(n-k)!$ im Nenner und das Wissen, daß $n = k$ sein kann, sollte Anlaß sein, erneut die Zweckmäßigkeit der Festsetzung $0! = 1$ zu zeigen.

Für das Verständnis des Beweises ist es ratsam, die Überlegungen zu V_5^3 und V_5^n im ■ 26 von den Schülern – in Analogie zu V_5^2 – ausführlicher darlegen zu lassen, als es auf LB 56f. aus Platzgründen geschieht.

Hausaufgabe Durcharbeiten von ■ 26 als Vorbereitung des in der 2. Std. zu führenden Beweises (das Verteilen der Erarbeitung und des Beweises von ▷ 5 auf zwei Unterrichtsstunden ist aus Zeitgründen notwendig).

Beweis der Formel für V_n^k Ein SV legt wiederholend die am ■ 26 durchgeführten Überlegungen dar (↗ HA in der 1. Std.). Im Beweis bereitet die Umformung

$$\frac{n!(n-k)}{(n-k)!} = \frac{n!(n-k)}{(n-(k+1))!\,(n-k)}$$

den Schülern oftmals Schwierigkeiten. Hier sollte im UG erörtert werden:
Die Induktionsbehauptung hat als Zähler $n!$. Der Faktor $(n-k)$ läßt sich aber kürzen, weil der Nenner ihn als den größten Faktor von $(n-k)!$ ebenfalls enthält. Was bleibt dann im Nenner? Offenbar die Fakultät derjenigen Zahl, die *vor* $(n-k)$ steht, man muß also von n noch 1 mehr subtrahieren, also $(k+1)$. Es muß dem Schüler deutlich werden, daß $(n-(k+1))$ *kleiner* als $(n-k)$ ist. Auch bei diesen allgemeinen Überlegungen ist eine Konkretisierung durch Zahlen zweckmäßig.

Erarbeitung der Formeln für C_n^k Finden und Begründen dieser Formeln sind so leicht, daß SSA möglich ist. Die Schüler können schon in den vorangegangenen Übungen für spezielle k entdecken: Es gibt $k!$-mal soviel Variationen wie Kombinationen (bei gleichen n und k). Sie können nunmehr selbst die allgemeine Überlegung „Um zur Anzahl C_n^k zu kommen, muß man die betreffende Anzahl V_n^k durch $k!$ dividieren" bis zur entsprechenden Schreibweise durchführen. Wie sich die Erkenntnis, daß es im allgemeinen weniger Kombinationen als Variationen geben muß, in ▷ 6 und ▷ 7 äußert, sollten sie durch einen Vergleich der beiden Nenner erläutern.
Diese allgemeine Gedankenführung hat den Charakter einer Herleitung, die Aussage ist also bewiesen; noch einen Beweis durch vollständige Induktion anschließen zu wollen, würde bei den Schülern auf Unverständnis stoßen.
Das Umformulieren von ▷ 6 in die numerisch zweckmäßige Form von ▷ 7 sollte in einigen einfachen Übungen (LBA 4) vorbereitet werden:

LBA 4b): $$C_7^4 = \frac{7!}{(7-4)!\,4!} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}{3!\cdot4!} = \frac{7\cdot6\cdot5\cdot4}{4!}$$

LBA 4a): $$C_9^3 = \frac{9!}{(9-3)!\,3!} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9}{6!\cdot3!} = \frac{9\cdot8\cdot7}{3!}$$

Die Schüler müssen das Zustandekommen von Zähler und Nenner gesehen und diese selbst gebildet haben, auf eine allgemeine Formulierung kann dann sogar verzichtet werden. Einfache Übungen im Berechnen verschiedener C_n^k (etwa wie ● 32) leiten dann bereits zur 3. Std. über.

Erarbeitung des Begriffs „Binomialkoeffizient" Es ist nicht zu erwarten, daß die Schüler nach dem Bearbeiten von ● 32 den Zusammenhang der gefundenen Zahlen mit den Koeffizienten des PASCALschen Dreiecks (der LP fordert nicht das Einführen dieses Wortes) selbst finden, auch wenn sie ihre Ergebnisse übersichtlich, etwa wie in Bild 1.4, anordnen.

n \ k	1	2	3	4
1	1			
2	2	1		
3	3	3	1	
4	4	6	4	1

Bild 1.4

Das Entdecken dieses Zusammenhangs mit Hilfe der Darstellung auf LB 59 sollte ein wenig Überraschung auslösen. Unter Umständen muß man diesen Zusammenhang an einem Beispiel etwas erhellen:

„Wir überlegen, wie der Koeffizient 6 von a^2b^2 in der Summe zu

$(a + b)^4 = (a + b) \cdot (a + b) \cdot (a + b) \cdot (a + b)$

zustande kommt. Dazu markieren wir (in lexikographischer Reihenfolge), wie sich das Produkt a^2b^2 insgesamt 6mal ergibt:

$(a + b) \cdot (a + b) \cdot (a + b) \cdot (a + b)$

×		×			×		×
×			×	×			×
×			×		×	×	
	×	×		×			×
	×	×			×	×	
	×		×	×		×	

Es muß ja jedes Glied der einen mit jedem Glied aller anderen Summen multipliziert werden.“ Auf diese Weise erkennt der Schüler, daß es auch hier um ein Kombinieren geht.

Bei der Einführung des Symbols $\binom{n}{k}$ kann es dadurch zu Verwechslungen kommen, daß nun „n über k“ steht, im Gegensatz zu C_n^k. Deshalb sollten die Schüler eine Kurz-Sprechweise wie „C unten n – oben k“ vermeiden, vielmehr ausführlich „Anzahl von n Elementen zur k-ten Klasse“ sprechen. Im übrigen kann man nur auf diesen historisch gewachsenen Unterschied hinweisen und zu seiner Beachtung auffordern.

Einige Beziehungen zwischen Binomialkoeffizienten Der Begriff „Binomialkoeffizient“ und auch seine Schreibweise gehören gewiß nicht zum Grundwissen, zumal der Binomische Satz nicht behandelt wird. Das trifft auch auf die in ▷ 8 formulierten Beziehungen $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ und $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ zu. Diese Aussagen sollen nicht etwa gelernt, sondern in erster Linie wiederum durch Vergleichen und Verallgemeinern gefunden und dann bewiesen werden. Dabei gelingt das Finden und verbale Beschreiben des Zusammenhangs anhand des PASCALschen Dreiecks den Schülern relativ leicht. Schwierigkeiten bereitet nur die Formulierung mit Hilfe der Symbolik. Das ist nicht verwunderlich und auch zweitrangig.

Übungen zu Kombinationen sollten nicht nur Rechenübungen wie etwa in LBA 4 sein.

■ 27 und die meisten der LBA 5 bis 9 enthalten zusätzliche Bedingungen, die dazu zwingen, vor dem Anwenden der Formel zunächst den Sachverhalt zu durchdenken. Dabei sollten die Schüler herausfinden, daß und wie diese zusätzlichen Bedingungen meist auf eine Reduzierung der Elemente der Ausgangsmenge führen. Auch das gehört zur heuristischen Schulung.

Kontrollaufgaben

1. Wie viele Variationen zur 4. Klasse kann man aus den Buchstaben K, A, S, T, E, N bilden?
   Welche davon steht in lexikographischer Reihenfolge an dritter und welche an drittletzter Stelle?
2. Wie viele Kombinationen der Elemente a, b, c, d, e, f, g zur 3. Klasse enthalten keinen Vokal (beide Vokale; genau einen Vokal)?

Lösungen:

1. 360; AEKSNT; TSNEKA
2. 10; 5; 20

Lerneinheit 11 **(3 Std.)**
Einfache Anwendungen zur Kombinatorik

LB 62 bis 65

Es erfolgt eine (weitere) Herausbildung von Fähigkeiten im systematischen Kombinieren und Analysieren von Sachverhalten. Es wäre daher verfehlt, den 3 Unterrichtsstunden schwerpunktmäßig jeweils einen der drei Begriffe zuzuordnen; den Schülern wäre dadurch die Entscheidung darüber, welches mathematische Hilfsmittel jeweils einzusetzen ist, weitgehend abgenommen. Vielmehr sollte man die Schwerpunkte nach Sachverhalten festlegen, die in den Beispielen und Aufgaben im LB enthalten sind.

Ziele

Die Schüler
- haben tiefere Einsichten in Vielfalt und Bedeutung kombinatorischer Problem- und Fragestellungen erworben,
- haben ihre Gewohnheit gefestigt, eine Aufgabenstellung erst gründlich zu durchdenken, ehe sie ihnen bekannte mathematische Hilfsmittel einsetzen,
- haben (erneut) die Nützlichkeit von Formeln eingesehen; sind sich aber dennoch bewußt, daß sie (einfache) kombinatorische Fragen auch ohne Kenntnis einer Formel lösen können,
- sind im Anwenden der eingeführten Begriffe und Sätze sicherer geworden,
- haben ihre Fähigkeiten im Analysieren, Vergleichen, systematischen Probieren und Kombinieren weiterentwickelt.

Schwerpunkte

1. Stunde
Eineindeutige Zuordnungen (■ 28; ● 35; LBA 6)

2. Stunde
Fragen der Informationsübermittlung (■ 30; LBA 2 und 5)

3. Stunde
Geometrische Probleme (■ 29; LBA 3 und 4)

Methodische Hinweise

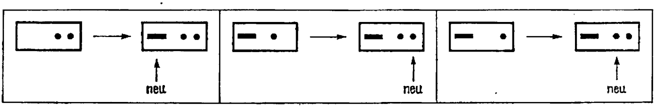
Eineindeutige Zuordnungen Innerhalb der nach den Aufgabeninhalten gebildeten Schwerpunkte sollte man sich um eine Steigerung des Schwierigkeitsgrades bemühen. Von den Beispielen und Aufgaben im LB ist LBA 1 die leichteste, ordnet sich jedoch in keinen der Schwerpunkte ein. Die Schüler sollten nicht nur die Zahlen C_{100}^{5} bzw. C_{100}^{10} errechnen, sondern auch verstehen lernen: Das Ergebnis einer solchen Stichprobenuntersuchung ist

um so zuverlässiger, je größer die Stichprobe gewählt wurde. Aus ökonomischen Gründen muß man sich aber in der Anzahl beschränken; offensichtlich ist das, wenn das Erzeugnis durch die Untersuchung zerstört wird (Brenndauer einer Glühlampe). Eine Garantie dafür, daß auch alle nicht zur Stichprobe gehörenden Erzeugnisse eines „Loses" einwandfrei sind, kann selbst dann nicht gegeben werden, wenn die Stichprobe keine Beanstandungen ergibt. Wichtig ist die Frage nach dem Zusammenhang zwischen Losgröße, Stichprobengröße und Sicherheit, mit der man aus den Ergebnissen der Untersuchung auf die Gesamtheit schließen kann (statistische Qualitätskontrolle). Ihre Untersuchung ist eine der Aufgaben der mathematischen Statistik, die sich wiederum auf Ergebnisse der Wahrscheinlichkeitsrechnung stützt.
Die Schüler sollten beim Lösen solcher Aufgaben stets die gesuchten Zahlen *vor* dem Errechnen schätzen, größenmäßig vergleichen und diesen Vergleich begründen.
Bei LBA 6 ist zunächst die praktische Bedeutung der eineindeutigen Zuordnung (Verkehrsfahndung, Übersichtlichkeit) herauszuarbeiten. Die höhere Schwierigkeit gegenüber LBA 1 besteht einmal darin, daß man für Buchstaben und Ziffern gesondert denken und dann die beiden Ergebnisse zusammenfügen muß, und dann in der Tatsache, daß es sich eigentlich um Variationen mit Wiederholung handelt. Bei den Ziffern bereitet dies keine Schwierigkeiten, wenn mitgeteilt worden ist, daß auch 0000 (bzw. 000) auftreten darf; die Zahl $26 \cdot 10000$ (Fall 1) wird dann schnell gefunden. Im Fall der 3 Buchstaben könnte folgender Trugschluß auftreten: Die dem Kennbuchstaben hinzuzufügenden beiden Buchstaben bilden Variationen von 26 Elementen zur 2. Klasse, also ist die Anzahl $V_{26}^2 \cdot 10^3 = 26 \cdot 25 \cdot 10^3$. Andererseits gibt es genügend Schüler, die von der Möglichkeit des mehrfachen Auftretens von Buchstaben wissen und die falsche Anzahl $26 \cdot 25 \cdot 10^3$ korrigieren. Je nach Klassensituation könnte man dann die Gleichartigkeit mit dem Sachverhalt bei den Ziffern feststellen und zu n^k für die Anzahl der Möglichkeiten, aus n Elementen k (evtl. auch mehrfach) auszuwählen, verallgemeinern.

Hausaufgaben Durcharbeiten von ■ 28; Bearbeiten von ● 35

Fragen der Informationsübermittlung Bei den Sachverhalten im ■ 30 und in den LBA 2 und 5 handelt es sich ebenfalls um eineindeutige Zuordnungen (Funktionen): Den Buchstaben des Alphabets werden Symbole (Morseschrift, Blindenschrift), den Teilnehmern in einem Fernsprechnetz Nummern zugeordnet. Man sollte mit LBA 2 beginnen, weil es hier tatsächlich um Kombinationen geht und es auch nicht schwer ist, diese zu erkennen und die Anzahl als Summe der C_6^k $(1 \leqq k \leqq 6)$ zu berechnen. Die Schüler sollten dabei die Fürsorge unseres Staates für Behinderte erkennen, die sich in der Sicherung von Bildung, Ausbildung und Arbeitsplatz für diese Mitmenschen äußert; man sollte aber auch darauf hinweisen, daß sie nicht unser Mitleid, wohl aber unser Verständnis, unsere Hilfe und Zuwendung brauchen.
Daß ■ 30 auf Wiederholungen führt, ist wiederum sofort ersichtlich: Es sollen 2 Zeichen zu Symbolen aus 4 Zeichen kombiniert werden. Einige Schüler werden den im LB beschriebenen Übergang von $z_2 = 4$ zu $z_3 = 4 \cdot 2 = 8$ nicht sofort nachvollziehen, weil sie meinen, das hinzukommende Zeichen könne bei jedem der vorhandenen Zeichen an 3 verschiedenen Stellen stehen. Erst das Aufzeichnen überzeugt davon, daß z. B. „– . . ." infolge der Mehrfachanwendung auf verschiedene Weise entstehen kann (↗ Bild 1.5).
Man sollte ferner erörtern, daß vernünftigerweise möglichst wenige vierstellige Symbole auftreten und die häufigsten Buchstaben die kürzesten Symbole haben sollten. Die Vorlage

Bild 1.5



eines Morse-Alphabets bestätigt das dann. Selbstverständlich wird man Kenntnisse und Erfahrungen einiger Schüler aus der GST-Ausbildung nutzen.
LBA 5 sollte in SSA gelöst werden.
Bei Frage a) sind keinerlei kombinatorische Kenntnisse nötig. Dort wird sich zeigen, ob die Schüler unbedingt eine der 3 Anzahl-Formeln anwenden wollen oder in der Lage sind, den gesunden Menschenverstand zu benutzen. Folgende völlig gleichberechtigte Lösungswege sind zu erwarten:

- Von den insgesamt möglichen 100000 Anschlüssen – nämlich den Nummern 000000 bis 99999 – ist die Anzahl für Sonderanschlüsse zu subtrahieren; das sind 20000, nämlich die Nummern 00000 bis 19999. So ergeben sich 80000 Anschlüsse.
- Betrachtet man zunächst die letzten vier Stellen, so ergeben sich mit 0000 bis 9999 dafür 10000 Möglichkeiten. Vor jede davon kann man eine 2, 3, ..., 8, 9 setzen, also $8 \cdot 10000 = 80000$.

Bei Teil b) müßte unter Umständen der Hinweis erfolgen, daß eine Verbindung durch 2 Teilnehmer, also durch 2 Nummern, gekennzeichnet ist; daß dabei die Reihenfolge ohne Belang ist, sollte eigentlich klar sein.

Geometrische Probleme Geometrische Probleme bilden nicht deshalb erst den dritten Schwerpunkt, weil ihre Lösung besonders schwierig ist, sondern weil die Schüler möglichst rasch an praktische Anwendungen herangeführt werden sollten. Sie sollen nicht nur – wie schon bei der vollständigen Induktion – erkennen, daß die zunächst für natürliche Zahlen gewonnenen Begriffe und Verfahren auch für die Geometrie von Bedeutung sind, wenn dort natürliche Zahlen eine Rolle spielen. Erkannt werden soll vor allem die gleiche abstrakte Struktur der Fragen nach

- der Anzahl von Verbindungen im Telefonnetz;
- der Anzahl von Verbindungsgeraden von Punkten;
- der Anzahl von Schnittpunkten von Geraden.

Immer geht es darum, daß zwei Objekte ein drittes eindeutig festlegen, also darum, die Anzahl von Kombinationen bzw. Variationen zur 2. Klasse zu bestimmen. Die Schüler sehen auf diese Weise deutlicher die Möglichkeit, praktische Sachverhalte geometrisch zu veranschaulichen, und bekommen eine Ahnung von der Dualität zwischen Punkt und Gerade.
An die Bearbeitung von ■ 29 kann sich nicht nur ein Vergleich mit der LBA 5b) und eine Verallgemeinerung auf n Punkte anschließen, sondern auch die Frage, welche Veränderungen sich ergeben, wenn mehr als zwei Punkte auf ein und derselben Geraden liegen.

Hausaufgaben LBA 4 (allenfalls mit dem Hinweis, mit ■ 29 zu vergleichen); LBA 3 (Hier geht es weder um Kombinationen noch um Variationen, auch nicht um solche mit Wiederholung. Die Lösung muß vielmehr durch systematisches Durchdenken aller möglichen und Ausschließen mehrfach auftretender Fälle erfolgen. Leistungsstarke Schüler können diese Frage auch für ein Siebeneck untersuchen.)

Kontrollaufgabe

5 Ehepaare treffen sich zu einem geselligen Tanzabend und nehmen an einem (runden) Tisch mit 10 Stühlen Platz.

a) Wie viele verschiedene Sitzordnungen sind möglich?
(2 Sitzordnungen gelten dann als verschieden, wenn bei mindestens einer Person an mindestens einer Seite zwei verschiedene Personen sitzen.)

b) Wie viele verschiedene Sitzordnungen sind möglich, wenn Ehegatten nebeneinandersitzen sollen, und zwar stets der Herr links von der Dame?

c) Wie viele verschiedene Sitzordnungen sind bei bunter Reihe möglich? (Es sitzen niemals Personen gleichen Geschlechts nebeneinander.)

d) Wie viele verschiedene Tanzpaare sind möglich? (Es tanzen nur Personen unterschiedlichen Geschlechts miteinander.)

e) Den ersten Tanz tanzt jeder Herr mit seiner Ehefrau. Mit ihr tanzt er dann erst wieder, wenn er mit allen anderen Damen am Tisch getanzt hat. Nach wie vielen Tänzen ist das frühestens der Fall?

Lösung: a) $9! = 362880$ b) $4! = 24$ c) $4! \cdot 5! = 2880$ d) $5^2 = 25$ e) 4

Stoffabschnitt 1.3 (6 Std.[1])
Übungen und Anwendungen

Wenn in den Formulierungen auf LP 14f. zur Bedeutung der „Übungen und Anwendungen am Ende der Behandlung der einzelnen Stoffgebiete“ vom „selbständigen Lösen komplexer Aufgaben“ gesprochen wird, so bedeutet „Komplexität“ dabei nicht, daß mathematisch schwierige Sachverhalte ins Spiel zu bringen seien. So wird beispielsweise in LBA 4 die Berechnung nach der Summenformel für arithmetische Folgen lediglich durch eine Frage aus der Prozentrechnung angereichert. Mathematisch neue Inhalte im engeren Sinn kommen im gesamten Stoffabschnitt nicht zur Sprache.
Für die Ausbildung eines anwendungsbereiten Wissens und Könnens ist vor allem wichtig, daß die Schüler zunächst entscheiden müssen, welches mathematische Rüstzeug aus einem etwas umfangreicheren Bestand für die jeweilige Aufgabe benötigt wird, daß sie also nicht allein aus dem Standort der Aufgabe entnehmen können, mit welchen Hilfsmitteln die Lösung erfolgen kann. Dies ist gerade bei dem recht unterschiedliche Teile enthaltenden Stoffgebiet 1 wertvoll, und diesen Vorteil darf der Lehrer nicht dadurch verringern, daß er etwa in einer Unterrichtsstunde ausschließlich Aufgaben zu arithmetischen Folgen lösen läßt, in einer zweiten auf geometrische Folgen führende, während er eine dritte kombinatorischen Fragestellungen vorbehält. Es liegt deshalb nahe, die Behandlung der Aufgaben nach gewissen Sachkomplexen zu ordnen (↗ auch LE 11).
Dem besonderen Anliegen dieses Stoffabschnitts kann nur entsprochen werden, wenn der SSA in genügendem Maße – mehr noch als in den Stoffabschnitten 1.1 und 1.2 – und den mit ihr verbundenen Problemen einer zugleich zeitsparenden und für *alle* Schüler wertvollen Auswertung besondere Aufmerksamkeit gewidmet wird. Möglichkeiten wie Arbeit an verdeckter Tafel oder auf einer Folie sind hier zu nutzen.
Auch zur Organisationsform der Gruppenarbeit wird der Lehrer hier eher als sonst greifen, ebenso zu Differenzierungsmaßnahmen unterschiedlicher Art. Für leistungsstarke Schüler beziehe man die besonders (durch Sternchen) gekennzeichneten Aufgaben mit ein, auch solche aus vorher behandelten LE. Das LB bietet auch für diesen Stoffabschnitt durchgerechnete Beispiele an, ergänzt durch vertiefende Schüleraufträge. Auch wenn man diese Beispiele nicht im Unterricht behandelt, hat der Schüler in ihnen doch Muster für Lösungsüberlegungen und Niederschriften. Deshalb sollten beispielsweise die Schüler auch einmal eine Aufgabe als HA unter bewußter Bezugnahme auf ein derartiges Beispiel bearbeiten. Diese Be-

[1] Von den insgesamt 8 Stunden, die laut LP zur Verfügung stehen, sollten 2 Stunden für eine LK und deren Auswertung vorgesehen werden.

zugnahme kann auch darin bestehen, daß in bestimmten Belangen von dem Beispiel im LB abgewichen wird.

Das mögliche Vorgehen in diesem Stoffabschnitt sei an der Behandlung der LBA 3 angedeutet, die man einem Komplex „Innermathematische Anwendungen" zurechnen kann. Man sollte sie möglichst nicht dem LB entnehmen, und ihre Bearbeitung kann mit einer Wdh (als HA) der LBA 5 aus LE 7 vorbereitet werden. Die gemeinsame Auswertung führt zu der Frage, was bei n nicht durch den gleichen Punkt gehenden Geraden passiert.

UG: Es wird geklärt, daß

- zunächst überlegt werden muß, welche verschiedenen Lagemöglichkeiten es für n Geraden gibt,
- die Frage nach der Anzahl der (disjunkten) Ebenenteile am leichtesten zu beantworten ist, wenn alle Geraden parallel zueinander sind,
- es sinnvoll ist, zuerst zu „probieren" und dabei fortschreitend $n = (0), 1, 2, 3, 4, \ldots$ zu betrachten.

Bei der anschließenden Darstellung der Lagemöglichkeiten für 1 bis 4 Geraden kommt es auf ein systematisches und übersichtliches Anordnen der Einzelskizzen an. Zweckmäßig ist die Benutzung einer Folie, bei der schon die Anordnung deutlich macht, wie man systematisch jeweils von einem Fall mit k Geraden zu einem Fall mit $k + 1$ Geraden fortschreitet (Bild 1.6). Die Fälle $n = 1$ und $n = 2$, evtl. auch noch $n = 3$, können daran erörtert und die Anzahl der jeweiligen Ebenenteile kann eingetragen werden.

SSA: Die Schüler bearbeiten die Fälle ($n = 3$ und) $n = 4$, bei der Auswertung wird der entsprechende Teil der Folie aufgedeckt. Hier darf der Aufmerksamkeit der Schüler nicht entgehen, daß beispielsweise der zweite Fall bei $n = 3$ sowohl aus dem ersten als auch aus dem zweiten für $n = 2$ entstehen kann. Zu beachten ist auch, daß etwa beim vierten Fall für $n = 4$ keine wesentlich andere Konfiguration entsteht, wenn der Schnittpunkt der beiden Geraden, die zu keiner anderen parallel sind, zwischen den Parallelen liegt (auch dann gibt es 2 Geraden, auf denen 2 Schnittpunkte liegen, und 2 Geraden mit 3 Schnittpunkten). Vor allem aber muß deutlich werden, daß die Überlegungen zur Anzahl der Ebenenteile auf einem begrenzten Blatt (Rechteck) erfolgen dürfen, das alle Schnittpunkte enthält.

Das **UG zur Auswertung** führt auch zu der Einsicht, daß die größte Anzahl von Ebenenteilen erzeugt wird, wenn keine Paare zueinander paralleler Geraden auftreten und durch

Bild 1.6

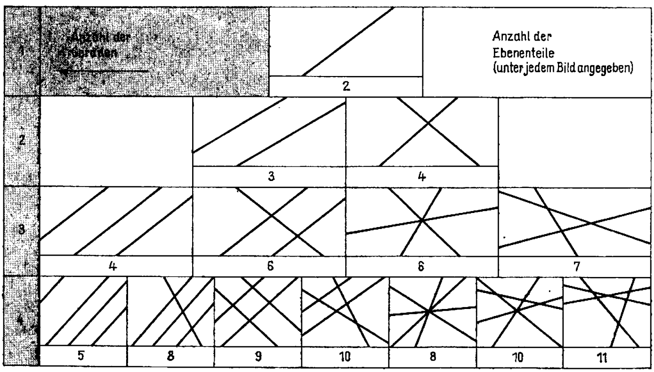


Bild 1.7

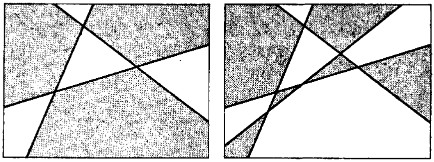
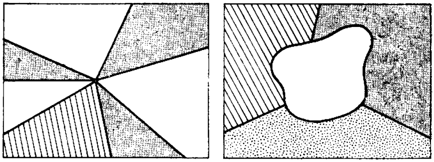


Bild 1.8



die Schnittpunkte stets nur zwei Geraden verlaufen. Auf diesen Fall wird dann die Untersuchung eingeschränkt.

Nun wird herausgestellt: Es handelt sich hier zwar um eine kombinatorische Fragestellung, diese ist aber nicht mittels einer der bekannten Formeln zu beantworten. Es kommt vielmehr darauf an, verallgemeinernd einen Zusammenhang zu vermuten und dies durch vollständige Induktion zu beweisen. Für den Induktionsschritt ist dann zu überlegen, um wie viele Teile sich die Anzahl der Ebenenteile vermehrt, wenn man zu k Geraden eine $(k + 1)$-te hinzunimmt. Leistungsstärkere Schüler können diese Überlegung in SSA anstellen, ihre Vermutung dann unter Hinzunahme einer fünften Geraden erhärten und die Richtigkeit für den allgemeinen Fall begründen. Die anderen Schüler können den Text zur LBA 3b) benutzen, der das Ergebnis bereits enthält.

Kommen die Schüler im Anschluß an die gemeinsame Auswertung nicht von selbst zur Vermutung der Formel $e_n = \frac{n(n+1)}{2} + 1$ für die Anzahl e_n der Ebenenteile, so hilft die Anregung, sich bei n Geraden diese Anzahl als Summe aufzuschreiben:

$$e_n = 1 + 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n.$$

Das hilft erkennen: Es geht eigentlich um die Summe der ersten n natürlichen Zahlen, vermehrt um 1 (die Anzahl der Ebenenteile bei 0 Geraden). Nun kann die bekannte Formel dafür bzw. die Summenformel für arithmetische Folgen wiederholt und angewandt werden. Auch wenn die Schüler hier noch rein gedächtnismäßig die Formeln reproduzieren, sollte der Lehrer empfehlen, die Zusammenfassung auf LB 65f. zu nutzen, und auf das Arbeiten mit Wissensspeichern überhaupt eingehen.

Ist man auf diese Weise zur Formel für e_n gekommen, so kann man auf den Beweis mittels vollständiger Induktion (LBA 3c)) verzichten, da im Stoffabschnitt 1.1 die Summenformel für arithmetische Folgen bewiesen wurde. (Das sollte den Schülern auch dann nicht verschwiegen werden, wenn man zur Festigung den Beweis führen lassen möchte.) Stattdessen kann man erörtern, daß eine „Landkarte", wie sie durch derartige Geraden als Grenzen entsteht, immer „zulässig" allein mit zwei Farben gefärbt werden kann („zulässig" heißt dabei, daß Gebiete mit gemeinsamer Grenzlinie unterschiedlich gefärbt sind). Die Beweisführung ist als HA für die leistungsstärkeren Schüler geeignet. Bei ihr ist wiederum das Schwierigste die Hinzunahme der $(k + 1)$-ten Geraden im Induktionsschritt, die ein „Umfärben" notwendig macht (Bild 1.7). Abschließend bieten sich hier Hinweise auf Fälle, in denen man 3 oder gar 4 Farben benötigt (Bild 1.8), und auf das „Vierfarbenproblem" an.

Wenn nachfolgend zu einigen weiteren Themen bzw. Sachkomplexen Beispiele und LBA, z. T. auch aus früheren LE und deshalb nicht der Forderung nach Komplexität entsprechend, genannt werden, so bedeutet die dabei gewählte Reihenfolge keine Wertung. Es sind auch andere Ordnungsgesichtspunkte möglich, und für manche Aufgabe ist die Zuordnung zu einem Komplex nicht eindeutig. Schließlich wird der Lehrer unter den genannten Komplexen eine Auswahl treffen müssen, ebenso unter den Aufgaben innerhalb einiger Komplexe.

Formale Übungen	
Noch nicht behandelte LBA aus den LE 2 bis 6	Verbindung zwischen „Fakultät“ und „Binomialkoeffizient“ (Stoffabschnitt 1.2) und „Folgen (Partialsummen)“ sowie „Beweisverfahren der vollständigen Induktion“ (Stoffabschnitt 1.1)
■ 31 LBA 1 2	Zu LBA 1: Starkes Anwachsen der Fakultät, im Teil c) zu beachten: Von einer bestimmten Stelle ab fällt $\left(\frac{a^n}{n!}\right)$ für jedes $a > 0$ monoton, weil dann die Fakultäten „stärker wachsen“ als die Potenzen
Glücks- und Gesellschaftsspiele, Lotto-Toto	
LBA 7	Würfeln
8 (LE 10) 9 (LE 10)	Tele-Lotto 5 aus 35 Dabei könnte die Frage auftauchen, wie es mit der Anzahl von Tipscheinen beim Fußball-Toto steht, die mit Sicherheit einen Tip mit 13 richtigen Voraussagen (ohne Zusatzspiel) oder sogar 14 richtigen Voraussagen enthalten. Die Schüler müssen erfassen, daß es hier um einen grundsätzlich anderen Sachverhalt als bei den anderen Wettarten geht: Es gibt nur 3 mögliche Spielausgänge, die sind aber für 13 bzw. 14 verschiedene Spiele in einer festgelegten Reihenfolge vorauszusagen. Mathematisch handelt es sich also um Variationen mit Wiederholung, und zwar von 3 Elementen zur 13. bzw. 14. Klasse. Bei Variationen mit Wiederholung (und ebenso bei Kombinationen) besteht also die Einschränkung $k \leqq n$ nicht mehr. Eine Beantwortung der Frage dürfte bei systematischem Vorgehen wie beim Morsealphabet (■ 30) nicht schwerfallen. Eine Formel benötigt man dafür nicht, und das sollten auch die Schüler erkennen.
Wandern, Sport und Touristik	
LBA 8	Rückennummern beim Eishockey
9	Einlauf beim Sprint
10	Übernachtung von Touristen
11	Kennzeichnung von Wanderwegen
Technik, Volkswirtschaft und „Umwelt“	
■ 32	Rotationskapselpumpe
33	Bearbeitungsreihenfolgen für ein Werkstück
LBA 18 (HA)	Arbeitsstufen einer Drehmaschine
19	Maschinenbelegungsproblem
20	Kredittilgung
21	Elektroenergieverbrauch Bei der Behandlung dieser Beispiele und LBA sollte man auf die Bedeutung der Technologie für die Erhöhung der Arbeitsproduktivität und da-

	mit auf die Erfüllung der volkswirtschaftlichen Hauptaufgabe eingehen. Dabei ist keineswegs der Umfang derartiger Erörterungen, sondern die unmißverständliche und parteiliche Stellungnahme zu konkreten Fragen, etwa auch des Neuererwesens oder der wissenschaftlich-praktischen Tätigkeit der Schüler, für den erzieherischen Effekt entscheidend. LBA 19 ist ohne jegliche Formelkenntnis, im Grunde sogar ohne jegliche spezifische Vorbildung auf dem Gebiet der Kombinatorik lösbar. Gerade darum ist sie im Sinne allgemeiner Fähigkeitsentwicklung wertvoll. Außerdem soll sie die Schüler in ganz einfacher Form zu Fragestellungen der Optimierung führen. Ihre Bearbeitung führt verhältnismäßig leicht zu der Einsicht, daß zur Bewältigung derartiger Probleme in Dimensionen, wie sie in der Praxis auftreten, besondere Verfahren und vor allem moderne Rechenanlagen unentbehrlich sind. Man sollte in diesem Zusammenhang den Schülern auch nicht verschweigen, daß durch die Lösung von Optimierungsproblemen unserer Volkswirtschaft bereits Milliardenbeträge erspart werden konnten. Bei LBA 21 ist es im Interesse optimaler erzieherischer Wirksamkeit notwendig, zeitlich und vor allem auch örtlich zu „aktualisieren". Der Lehrer sollte also nicht nur Angaben aus aktuellen staatlichen Dokumenten und Verlautbarungen (etwa die Mitteilungen der staatlichen Zentralverwaltung für Statistik) benutzen, sondern sich auch Daten aus örtlichen Planungsunterlagen und Berichten verschaffen, um auf Grund dieser Daten derartige Aufgaben bilden und behandeln zu können. Dabei soll den Schülern einerseits bewußt werden, daß die mathematische Untersuchung solcher Fragen für Planungszwecke erforderlich ist. Andererseits sollen sie erfahren, daß Abweichungen von theoretisch ermittelten Ergebnissen bis zu einem recht erheblichen Grade legitim sind, weil bei der mathematischen Bearbeitung von vielen Einzelheiten und konkreten Bedingungen in der Realität abstrahiert werden muß, eine gewisse Idealisierung erfolgt, etwa wenn man gleichmäßiges Wachstum von Jahr zu Jahr annimmt. Eine Konkretisierung auf Grund örtlicher Verhältnisse empfiehlt sich auch bei LBA 20.
■ 28	Kennzeichnung auf dem Stundenplan
LBA 4	Dachziegel (Arithmetische Folgen)
5	Lagerung von Rohren (Arithmetische Folgen)
6	Kennzeichnung von Rohren (Kombinatorik)
12	Fahrscheinentwertung (Kombinatorik)
13	Stufenweise Verdünnung (Geometrische Folgen)
14	Farbstofflösung (Geometrische Folgen)

Physikalische Anwendungen

■ 32	
LBA 15	Fallgesetz
16	Radioaktivität
17*	Luftdruck
	Bei diesen Aufgaben geht es um geometrische Folgen und eigentlich sogar um die Exponentialfunktion. Bei ihrer Behandlung ist das zu beachten, was in LE 8 zur Zunahme des Holzbestandes gesagt wurde.

Stoffgebiet 2

Grenzwerte von Zahlenfolgen und Funktionen

Vorbemerkungen

Die Behandlung dieses Stoffgebietes trägt grundlegenden und zugleich vorbereitenden Charakter für die Einführung der Schüler in die Differential- und Integralrechnung. Dazu werden Betrachtungen an unendlichen Mengen (Zahlenfolgen) angestellt. Im Mathematikunterricht von der Unterstufe an kamen die Schüler zwar immer wieder mit dem Unendlichen in verschiedener Weise in Berührung (z. B. mit der unendlichen Folge der natürlichen Zahlen, mit der Geraden als unendlicher Punktmenge, mit unendlichen Dezimalbrüchen usw.), ohne daß aber damit in Zusammenhang stehende Fragen geklärt wurden. Die Behandlung des Unendlichkeitsbegriffs in der Mathematik ist auch in Kl. 11 nicht Gegenstand des Mathematikunterrichts. Aber mit der Definition des Grenzwertbegriffes werden die Schüler an für sie völlig neue Denkweisen herangeführt. Deshalb sollte der Lehrer darauf vorbereitet sein, daß Schüler dazu auch Fragen stellen, die nicht im Unterricht behandelt werden können.
Zunächst werden das Verhalten von Zahlenfolgen (a_n), die im Stoffgebiet 1. im Mittelpunkt standen, bei unbegrenzt anwachsendem n betrachtet und der Begriff des Grenzwertes einer Zahlenfolge definiert. Damit werden handhabbare Bedingungen angegeben, unter denen eine bestimmte Zahl als **Grenzwert einer Folge** angesehen werden soll. Durch ein hohes Maß selbständiger Arbeit der Schüler und eine kluge Auswahl von instruktiven Beispielen ist zu sichern, daß die Schüler den Grenzwertbegriff und damit in Verbindung stehende Begriffe inhaltlich verstehen und sich einprägen. Gleiches trifft auf die ebenfalls grundlegenden Begriffe **Grenzwert** und **Stetigkeit einer Funktion** zu. Mit deren Hilfe werden in den folgenden Stoffgebieten die tragenden Begriffe der Infinitesimalrechnung **Differentialquotient** und **Integral** entwickelt und eine Reihe von Sätzen formuliert. Das Hauptanliegen der Behandlung des Stoffgebietes 2 ist also vor allem die Erarbeitung neuen „theoretischen Werkzeugs", mit dem die praktisch äußerst bedeutsamen Methoden der Differential- und Integralrechnung aufgebaut werden können.
Wenn das Lösen von Aufgaben auch in diesem Stoffgebiet betont wird, so deshalb, weil die Schüler gerade über weitgehend selbständig durchgeführte Untersuchungen konkreter mathematischer Objekte (Folgen, Funktionen) Verständnis für die neuen und grundlegenden Begriffe gewinnen und ihr bisheriges Wissen und Können weiterentwickeln sollen (↗ LP 25).
In die Kontrollaufgaben zum Stoffgebiet und zu den Lerneinheiten, mit denen das zu erreichende Niveau abgesteckt wird, sind folglich auch nicht Fragen etwa nach dem Wortlaut dieser oder jener Definition, dieses oder jenes Satzes aufgenommen, sondern konkrete Aufgaben, an deren Bewältigung die Anwendungsbereitschaft des von den Schülern erworbenen Wissens und Könnens abgelesen werden kann. Für die Begründung ihrer Lösungsansätze, Antworten oder Lösungen haben die Schüler den Inhalt bestimmter Definitionen und Sätze anzuwenden.
Dem interessierten Lehrer sei [17; insbesondere Abschnitt 5.3.] empfohlen; im Literatur-

verzeichnis dieses Buches sind auch weitere grundlegende Werke von Mathematikern und Philosophen zum Unendlichkeitsbegriff aufgeführt.
Interessierte Schüler können auf vergnügliche mathematische Unterhaltungsliteratur hingewiesen werden, z. B. [18], [20], [24]. Auf dieser Grundlage können auch außerhalb des Unterrichts Diskussionen geführt werden, durch die man die Schüler zum Nachdenken über philosophische Fragen und mathematische Grundfragen anregen kann.

Kontrollaufgaben

Nach der Behandlung dieses Stoffgebietes sollten die Schüler Aufgaben folgenden Typs lösen können:

1. Untersuchung von Folgen auf Monotonie und Beschränktheit sowie die Existenz von Grenzen, vor allem zur Festigung und Anwendung dieser Begriffe
- Untersuchen Sie, ob die Folge (a_n) mit $a_n = \frac{2n+1}{n}$ (nach oben oder unten) beschränkt ist! Nennen Sie gegebenenfalls Schranken und Grenzen! (LBA 5 aus LE 1)
- LBA 2c) aus LE 1; LBA 3 aus LE 2

2. Nachweis, daß eine gegebene Folge konvergent ist
Nachweis durch Anwendung der Grenzwertdefinition, daß eine gegebene Zahl Grenzwert einer gegebenen Folge ist
- Untersuchen Sie, ob die Folge (a_n) mit $a_n = \frac{n+1}{2n}$ den Grenzwert $g = \frac{1}{2}$ hat!
- Weisen Sie nach, daß die Folge (a_n) mit $a_n = \frac{1}{2n-1}$ eine Nullfolge ist!

3. Berechnung des jeweiligen Grenzwertes gegebener Folgen durch Anwendung der Grenzwertsätze für Folgen
- Ermitteln Sie $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n^2 - n + 3}{2n^2 + 1}$!
- LBA 1g) aus „Übungen und Anwendungen"; LBA 4b) aus LE 7

4. Berechnung des Grenzwertes einer Funktion an einer Stelle x_0 durch Anwendung der Grenzwertsätze für Funktionen
- Ermitteln Sie $\lim\limits_{x \to 0} \frac{(2+x)^2 - 4}{x}$!
- Ermitteln Sie den Grenzwert der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x}(x^2 + 2x)$ an der Stelle $x_0 = 0$!

Aufgaben für tägliche Übungen und Wiederholungen

Die folgenden Aufgaben beziehen sich auf bis zur Klasse 10 und im Stoffgebiet 1 in Klasse 11 behandelten Stoff. Einige Komplexe sind besonders zur Sicherung des allgemeinen Ausgangsniveaus für die Behandlung des Stoffgebietes 2 geeignet. Ferner kann man auch noch nicht verwendete Aufgaben aus den Komplexen zum Stoffgebiet 1 (↗ UH 15ff.) einbeziehen.

Komplex 1: Rechnen mit reellen Zahlen

1. Überschlagen Sie: $\frac{1835}{8{,}06 \cdot 736}$; $\frac{\sqrt{2{,}4} \cdot 1{,}62}{18{,}3}$; $\frac{1{,}214 \cdot 64{,}4}{0{,}75}$!

2. Geben Sie Näherungswerte (auf 2 Dezimalstellen nach dem Komma) für folgende reelle Zahlen an: 2π; $0{,}\overline{6}$; $\sqrt{10}$; $\sin 60°$!

3. Ermitteln Sie unter Benutzung von Rechenhilfsmitteln:
$\sqrt{15{,}36}$; $\sqrt{0{,}0586}$; $\sqrt{6840}$; $\sqrt{235}$; $\sqrt[3]{100}$; $\sqrt[3]{52{,}3}$!

4. Berechnen Sie mündlich:
$\frac{1}{3^{-4}}$; $25 \cdot 10^{-2}$; $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$; $\sqrt{50} : \sqrt{2}$; $64^{\frac{1}{3}} \cdot 64^{\frac{1}{2}}$; $8^{\frac{2}{3}}$!

Komplex 2: Berechnen und Umformen von Termen

5. Berechnen Sie $\frac{2x - y}{2y + x}$ für $x = 10$ und $y = 5$ bzw. $x = \frac{1}{4}$ und $y = \frac{3}{2}$ bzw. $x = 1{,}5$ und $y = -2{,}5$!

6. Welchen Wert nimmt der Term $\left(\frac{a}{b} - b\right)^2$ an, wenn Sie $a = 30$, $b = 15$ oder $a = \frac{2}{3}$, $b = \frac{3}{4}$ oder $a = -\frac{3}{2}$, $b = 0{,}5$ setzen?

7. Formen Sie um bzw. vereinfachen Sie:
$3(x + y) \cdot \frac{1}{x + y}$; $\frac{t - 6}{36 - t^2}(6 + t)$; $1 - \frac{a}{a + b}$; $\frac{pq - q^2}{p^2} : (p - q)^2$;
$(a^2 - b^2) : \frac{a - b}{a + b}$; $(r + s)^2 - (r^2 - s^2)$!

8. Bilden Sie die Summe, die Differenz, das Produkt und den Quotienten der Terme $\frac{n - 1}{n}$ und $\frac{2n}{n + 1}$ bzw. $\frac{x^2 + y^2}{x + y}$ und $\frac{2xy}{x + y}$!

9. Zerlegen Sie die folgenden Terme in eine Summe, eine Differenz oder ein Produkt!
$\frac{a^2 - 4}{a + 2}$; $\frac{(x + y)^2}{xy}$; $\frac{p^2 + 4p - 12}{(p + 4)(p + 6)}$; $\frac{(2r^2 + s^2) - (r^2 + 2s^2)}{2(r + s)}$

Komplex 3: Lösen von Gleichungen und Ungleichungen

10. Lösen Sie folgende Gleichungen bzw. Ungleichungen ($x \in P$; $n \in N$)!

a) $|x| < 3$ **b)** $|4 - 2n| < \frac{1}{2}$

c) $-5 < x < 5$ **d)** $x^2 - 5x = 0$

e) $x^2 - x - 42 = 0$ **f)** $\frac{1}{2} - n < 6$

g) $n - 3 < 5$ **h)** $x^2 + ax - ab = b^2$

i) $|4x + 3| = 12$ **k)** $\sin x + \cos x = 1$

l) $|n - 1| < 2$ **m)** $\left|n - \frac{1}{2}\right| < 1$

Komplex 4: Untersuchungen von Zahlenfolgen

11. Ermitteln Sie jeweils die ersten 4 Glieder der Folgen (a_n), stellen Sie die Glieder in einem Koordinatensystem dar und untersuchen Sie die Folgen auf Monotonie!

$a_n = n^3$; $\quad a_n = (-2)^n$; $\quad a_n = q^n$;

$a_n = \frac{1}{n^2}$; $\quad a_n = \frac{1}{2^n}$; $\quad a_n = \cos n\pi$

12. Geben Sie für die nachstehenden Anfangsstücke von Folgen jeweils eine Zuordnungsvorschrift an, ermitteln Sie danach je zwei weitere Glieder der Folgen und (bilden) berechnen Sie jeweils die Partialsummen bis zum 4. Glied!

a) 2; 5; 8; 11; ...

b) 1; 3; 9; 27; ...

c) $0; \frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \ldots$

d) 0,6; 0,06; 0,006; 0,0006; ...

e) 12; 7; 2; -3; ...

f) $1; -\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; -\frac{1}{8}$

Komplex 5: Untersuchungen von Funktionen

13. Ermitteln Sie Wertetafeln, und zeichnen Sie die Graphen folgender Funktionen f mit

$f(x) = \frac{x}{2} - 4$; $f(x) = 2x^2 + 1$; $f(x) = \sqrt[3]{x}$;

$f(x) = |x| - 2$; $f(x) = |x - 1| + |x + 1|$; $f(x) = \sin\frac{x}{2}$!

14. Untersuchen Sie das Monotonieverhalten und ermitteln Sie die Nullstellen der folgenden Funktionen f mit

$f(x) = x^2 - 4$; $f(x) = \tan x$; $f(x) = \frac{x}{3} + 3$;

$f(x) = 10^x$; $\quad f(x) = |2x|$; $f(x) = \frac{|x|}{x}$ $\quad (x \neq 0)$!

15. Ermitteln Sie den Anstieg der Funktion f mit
$f(x) = x - 3$; $f(x) = 0{,}75x + 10$; $f(x) = x^2 - (x + 4)^2$!

16. Ermitteln Sie die Nullstellen der Funktionen f mit

$f(x) = \frac{x - 15}{6}$; $f(x) = (x + 4)^2$; $f(x) = x^3 - x^2 + x$!

17. Bestimmen Sie $f(4)$, $f(a)$, $f(a + b)$, $f(x + h)$ für die Funktion f mit

$f(x) = \frac{x^2}{x - 1}$!

Stoffverteilung

Thema	Std.	Zu reaktivierender Stoff	Zu erarbeitender Stoff
Stoffabschnitt 2.1 Schranken, Grenzen und Grenzwerte von Zahlenfolgen 12 Std.			
– Einführung in die Grenzwertproblematik bei Zahlenfolgen	1	– Vielecks- und Kreisberechnungen oder – Berechnungen bei gleichförmig-geradlinigen Bewegungen (abhängig von der Wahl des Einführungsbeispiels)	– Inhaltliche Vorstellungen über Schranken, Grenzen und Grenzwerte von Folgen – Historische Bedeutung für die Entwicklung und Anwendung der Mathematik
1 Schranken von Zahlenfolgen	1	– Folgen (Berechnung von Gliedern) – Graph einer Folge – Geometrische Folge – Monotonie von Folgen – Ungleichungen	– ▶ 1 (Obere (untere) Schranken einer Folge); Beschränktheit einer Folge – Angeben und Begründen von Schranken – Sprechweise „für fast alle n gilt"
2 Obere und untere Grenze einer Folge	1	– Folgen – Schranken von Folgen – Ungleichungen	– ▶ 2 (Obere (untere) Grenze einer Folge) – ▷ 1 (Satz von der oberen (unteren) Grenze) – Angeben und Begründen von Schranken und Grenzen
3 Grenzwert einer Zahlenfolge	2	– Ungleichungen – Beschränktheit von Folgen – Intervall – Betrag einer reellen Zahl	– ε-Umgebung einer Zahl a – ▶ 3 (Grenzwert einer Zahlenfolge) – Konvergente (divergente) Folgen
4 Untersuchungen von Zahlenfolgen auf Konvergenz	2	– Umformen von Termen – Arbeiten mit Beträgen – Lösen von Ungleichungen	– Nachweis, daß eine gegebene Zahl Grenzwert einer gegebenen Folge ist – Nullfolge – Bezeichnung: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = g$ – Eindeutigkeit des Grenzwertes einer Folge
5 Konvergenzverhalten monotoner Folgen	2	– Monotonie, Beschränktheit und Konvergenz von Folgen – Satz von der oberen (unteren) Grenze – Partialsummenfolgen	– ▷ 2 (Satz über die Konvergenz monotoner beschränkter Folgen) (mB) – Nachweis der Konvergenz von Folgen

Thema	Std.	Zu reaktivierender Stoff	Zu erarbeitender Stoff
6 Grenzwertsätze für Zahlenfolgen	2	– Summe, Differenz, Produkt, Quotient zweier Terme – Bedingung für den Definitionsbereich eines Terms mit Variablen – Zerlegen von Termen in Summen, Differenzen, Produkte, Quotienten – Grenzwerte einfacher Folgen – Grenzwertdefinition	– Summe, Differenz, Produkt, Quotient einer Folge – Zerlegen von Folgen in Summen, Differenzen, Produkte, Quotienten von Folgen – ▷ 3, ▷ 4 (Grenzwertsätze für Folgen) (mB für den Grenzwert einer Summe von Folgen)
7 Anwendung der Grenzwertsätze	1	– Ausklammern; Kürzen; Termumformungen – Konstante Folgen; Nullfolgen	– Berechnen von Grenzwerten von Folgen durch Anwenden der Grenzwertsätze – Zusammenfassung: Beschränktheit und Konvergenz von Folgen
Stoffabschnitt 2.2 Grenzwerte von Funktionen; Stetigkeit			8 Std.
8 Beispiele für unstetige Funktionen	1	– Funktionsbegriff; Definitions- und Wertebereich – Graphen von Funktionen	– Untersuchen der Graphen von Funktionen auf Sprünge, Knicke, Lücken und Pole
9 Grenzwert einer Funktion an einer Stelle	2	– Angeben von Zahlenfolgen, die einen gegebenen Grenzwert haben – Funktionsbegriff; Zusammenhang von Argument und Funktionswert – Berechnen von Funktionswerten – Graphen von Funktionen – Darstellen von Folgen und Folgengliedern	– Betrachten von einander zugeordneten Folgen von Argumenten (in der Umgebung einer Stelle) und Funktionswerten – ▶ 4 (Grenzwert einer Funktion an einer Stelle) – Symbol: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ – Ermitteln von Grenzwerten
10 Grenzwertsätze für Funktionen	2	– Grenzwertsätze für Zahlenfolgen – Zerlegen von Termen in Summen, Differenzen, Produkte, Quotienten	– Zusammensetzen und Zerlegen von Funktionen – ▷ 5 (Grenzwertsätze für Funktionen) – Berechnung von Grenzwerten für Funktionen
11 Stetigkeit	2	– Grenzwert einer Funktion an einer Stelle – Umgebung einer Stelle – Intervall; Definitionsbereich	– ▶ 5 (Stetigkeit einer Funktion an einer Stelle) – Stetigkeit in einem Intervall und im gesamten Definitionsbereich – Untersuchung einfacher Funktionen auf Stetigkeit

Thema	Std.	Zu reaktivierender Stoff	Zu erarbeitender Stoff
12 Eigenschaften stetiger Funktionen	1	– Abgeschlossenes und offenes Intervall – Nullstellen von Funktionen	– ▷ 6 (Zwischenwertsatz) – Maximum und Minimum einer Funktion in einem Intervall – ▷ 7 (Satz vom Maximum (Minimum)) – Beispiele und Gegenbeispiele zu den Sätzen
Stoffabschnitt 2.3 Übungen und Anwendungen			5 Std.
Übungen und Anwendungen	4	Untersuchungen von Zahlenfolgen und Funktionen; Anwendungen	
Klassenarbeit	1		

Unterrichtsmittel

FO 06040/1–5 Reelle Zahlen; SKUS-Best. Nr. 06 7529 56

Stoffabschnitt 2.1 (12 Std.)
Schranken, Grenzen und Grenzwerte von Zahlenfolgen

Mit der Behandlung des Grenzwertbegriffes wird das Fundament für die in den Stoffgebieten 3 und 4 zu behandelnde Differential- und Integralrechnung gelegt. Dort lernen die Schüler die Begriffe „Differentialquotient“ und „(bestimmtes) Integral“ als Grenzwerte ausgewählter Funktionen kennen. Daher ist die Behandlung des Stoffgebietes 2 sorgfältig zu motivieren und insbesondere die Bedeutung des Grenzwertbegriffes den Schülern in einprägsamer Weise vor Augen zu führen.

Die folgende Übersicht zeigt die Struktur des im Stoffabschnitt 2.1 zu vermittelnden Stoffes. Darin ist entsprechend dem LP gekennzeichnet, welche Begriffe zu definieren oder einzuführen, welche Sätze zu beweisen und bei welchen Tätigkeiten Fähigkeiten (Fä) oder Fertigkeiten (Fe) zu entwickeln sind. Im unteren Teil der Übersicht sind solche Tätigkeiten aufgeführt, die bei der Behandlung der Begriffe, Sätze und Verfahren auftreten und an deren sicherer Ausübung gearbeitet werden muß.

Begriffe	**Sätze**	**Verfahren**
Definieren: **Obere (untere) Schranke** einer Zahlenfolge (▶ 1)		Untersuchen (unendlicher) Zahlenfolgen
Einführen: Sprechweisen – „Für fast alle natürlichen Zahlen gilt …“ (LB 79) – „beschränkt (unbeschränkt) wachsen (fallen)“ (LB 80)		Untersuchen von Zahlenfolgen auf Beschränktheit (Fä)
Definieren: **Obere (untere) Grenze** einer Zahlenfolge (▶ 2)	Satz von der oberen (unteren) Grenze (▷ 1; oB)	Ermitteln der oberen (unteren) Grenze (Fä)
Einführen: **ε-Umgebung** einer Zahl a (LB 85)		Untersuchen von Zahlenfolgen zum Hinführen auf die Grenzwertproblematik
Definieren: **Grenzwert** einer Zahlenfolge (▶ 3)		Untersuchen, ob eine gegebene Zahl Grenzwert einer gegebenen Zahlenfolge ist (Fä)
Einführen: – **Konvergente (divergente) Zahlenfolge** (LB 87) – **Nullfolge** (LB 90) – Schreibweise „$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$“ (LB 90)	Satz über die Konvergenz beschränkter monoton wachsender (fallender) Folgen (▷ 2; mB)	Untersuchen des Konvergenzverhaltens monotoner Zahlenfolgen
Einführen: **Summe (Differenz, Produkt, Quotient) zweier Zahlenfolgen** (LB 96)	Satz über den Grenzwert der Summe zweier konvergenter Zahlenfolgen (▷ 3; mB)	Übungen zum Nachweisen der Konvergenz bzw. zum Ermitteln des Grenzwertes gegebener konvergenter Zahlenfolgen in einfachen Fällen (Fe)
	Satz über den Grenzwert der Differenz (des Produktes, des Quotienten) zweier konvergenter Zahlenfolgen (▷ 4; oB)	
Definieren	Beweisen	– Beweisen, Begründen (Fä) – Termumformungen (Fe) – Lösen von Gleichungen und Ungleichungen (Fe)

Aus dieser Strukturübersicht ist erkennbar, daß im Unterricht drei wesentliche Etappen zu durchlaufen sind:

- Zunächst „wird die Behandlung der Eigenschaften von Zahlenfolgen mit Untersuchungen zu Schranken und Grenzen fortgesetzt“ (LP 25).
- Danach erfolgt die Erarbeitung des für die Einführung in die Infinitesimalrechnung fundamentalen Begriffes des Grenzwertes einer Zahlenfolge mit ersten Übungen.
- Schließlich wird nach Bedingungen, aus denen man auf die Konvergenz einer Zahlenfolge schließen kann, ohne die Definition anzuwenden, und nach Möglichkeiten für die Berechnung von Grenzwerten in einfachen Fällen gesucht.

Eng verbunden mit diesen Tätigkeiten sind das Verständnis der Schüler für das Definieren und Beweisen weiterzuentwickeln und die Fertigkeiten im Umformen von Termen und im Lösen von Gleichungen und Ungleichungen zu festigen (LP 25).

Einführung in die Behandlung der Grenzwerte von Zahlenfolgen (1 Std.)

LB 75 bis 76

Ziele

Die Schüler
- erwerben erste inhaltliche Vorstellungen von den Begriffen „Schranke ...“, „Grenze ...“ und „Grenzwert einer Zahlenfolge“,
- gewinnen erste Einsichten in die Bedeutung des Grenzwertbegriffes.

Schwerpunkte

- Sicherung des Ausgangsniveaus durch Anknüpfen an Kenntnisse über die Kreisberechnung oder irrationale Zahlen
- Erarbeitung erster inhaltlicher Vorstellungen über den Grenzwert einer Zahlenfolge anhand eines Beispiels
- Zusammenfassung der erarbeiteten Vorstellungen und Zielstellung für das Stoffgebiet insgesamt und die unmittelbar folgenden Unterrichtseinheiten

Methodische Hinweise

Einführung in die Behandlung des neuen Stoffgebietes In einem LV oder UG (je nach dem Stand der Schülerkenntnisse) könnte an früher erworbene Kenntnisse angeknüpft werden:

- In Klasse 9 wurde nachgewiesen, daß z. B. $\sqrt{2}$ (Maßzahl der Diagonale eines Einheitsquadrats) keine rationale, sondern eine irrationale Zahl ist. Irrationale Zahlen sind unendliche nichtperiodische Dezimalbrüche; sie bilden gemeinsam mit den endlichen

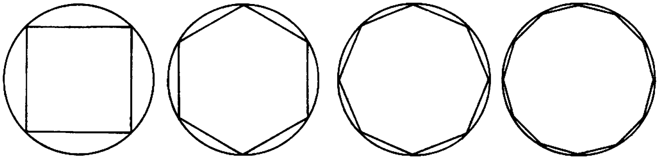


Bild 2.1

Dezimalbrüchen und unendlich-periodischen Dezimalbrüchen den Bereich der reellen Zahlen *P*. Zur Bestimmung rationaler Näherungswerte z. B. für $\sqrt{2}$ wurde die Zahl in immer kleiner werdende Intervalle eingeschachtelt (Einsatz von FO „Reelle Zahlen" möglich). Die unteren (bzw. oberen) Intervallgrenzen bilden dabei eine monoton wachsende (bzw. fallende) Folge, deren Glieder sich der Zahl, die mit dem Symbol $\sqrt{2}$ bezeichnet wird, immer mehr nähern.

- In Klasse 7 wurde experimentell eine Formel für die Berechnung der Länge des Kreisumfanges erarbeitet, ohne den entsprechenden Satz dort beweisen zu können. In Analogie zum Vorgehen beim Ermitteln des Satzes über das Volumen gerader Kreiszylinder in Klasse 7 kann man nun überlegen (↗ Bild 2.1): Wenn man einem Kreis ein regelmäßiges Vieleck einbeschreibt, so erhält man mit dem Umfang dieses Vielecks einen Näherungswert für den Kreisumfang. Beschreibt man ein regelmäßiges Vieleck mit größerer Eckenanzahl ein, so kommt man dem Kreisumfang nach folgendem Prinzip näher: Die Maßzahlen der Umfänge der n-Ecke bilden eine Zahlenfolge, deren Glieder sich mit wachsendem n der Länge des Kreisumfangs nähern (für $r = 1$ bekanntermaßen 2π). Auf LB 75 ist der gleiche Gedankengang für einen Halbkreis mit ein- und umbeschriebenen Streckenzügen beschrieben.

Erarbeitung erster inhaltlicher Vorstellungen über den Grenzwert einer Zahlenfolge Für die Wahl des Beispiels werden zwei Varianten vorgestellt.

Variante 1

Man knüpft an die Bemühungen von ARCHIMEDES zur Bestimmung des Kreisumfanges an, wie sie auf LB 76 angedeutet werden. Die Schüler sollten dann einige Schritte der Annäherung an den Kreisumfang durch eine Folge ein- und umbeschriebener regelmäßiger n-Ecke rechnerisch ausführen. Die Variante hat den Vorteil, daß man an bekanntem Stoff anknüpfen kann und die Schüler z. T. in SSA tätig werden können.

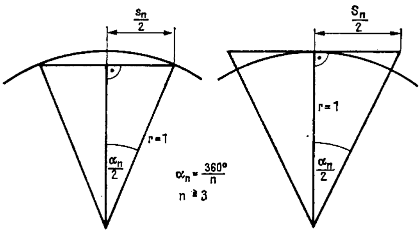
Variante 2

Man knüpft an Versuche griechischer Mathematiker an, das Problem des Unendlichen zu fassen, und erläutert das von ZENON (490 bis 430 v. u. Z.) stammende Paradoxon vom Wettlauf des ACHILLES mit einer Schildkröte. Zunächst wird nur die Frage aufgeworfen, ob ACHILLES die Schildkröte einholen kann, wenn er ihr einen Vorsprung gewährt. Die Variante hat den Vorteil, daß nach der Erarbeitung des Grenzwertbegriffes der Grenzwert der zu betrachtenden Zahlenfolge tatsächlich ermittelt werden kann. Die Schüler können mit elementaren Mitteln den Zeitpunkt des Einholens bestimmen. Sie werden zunächst kein Problem sehen. Es ist deshalb notwendig, die Schüler erst in den paradoxen Gedankengang einzuführen.

Vorgehen nach Variante 1

In den folgenden Tafelbildern sind einige Formeln und Werte zusammengestellt, die für die Betrachtungen benötigt werden.

Einbeschriebenes n-Eck	**Umbeschriebenes n-Eck**



a) Einbeschriebenes n-Eck   b) Umbeschriebenes n-Eck   Bild 2.2

Einbeschriebenes n-Eck:

$$\sin\frac{\alpha_n}{2} = \frac{s_n}{2}$$

$$s_n = 2 \cdot \sin\frac{180°}{n}$$

$$u_n = 2n \cdot \sin\frac{180°}{n}$$

Umbeschriebenes n-Eck:

$$\tan\frac{\alpha_n}{2} = \frac{S_n}{2}$$

$$S_n = 2 \cdot \tan\frac{180°}{n}$$

$$U_n = 2n \cdot \tan\frac{180°}{n}$$

n	Folge (u_n)	Folge (U_n)
3	5,196	10,392
4	5,657	8,000
5	5,878	7,265
6	6,000	6,929
⋮	⋮	⋮
12	6,211	6,430
⋮	⋮	⋮
24	6,264	6,322
⋮	⋮	⋮
48	6,278	6,298
⋮	⋮	⋮
96	6,282	6,286
⋮	⋮	⋮
	$2\pi \approx 6{,}283$	

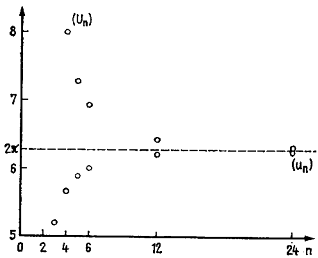


Bild 2.3

Bemerkung: ARCHIMEDES gelangte zu der auf LB 76 genannten Abschätzung durch Berechnung des Umfangs eines regelmäßigen 96-Ecks (wiederholte Teilung des 6-Ecks: 12-, 24-, 48-, 96-Eck). Im UG könnten folgende Fragen diskutiert werden:

- Sind die Folgen (u_n) bzw. (U_n) monoton, sind sie wachsend, sind sie fallend?
- Wird bei Folge (u_n) bzw. (U_n) eine bestimmte Zahl nicht überschritten (unterschritten)? Nennen Sie solche Zahlen!

Kann man mehrere angeben?
- Gibt es eine größte (kleinste) Zahl, die nicht unterschritten (überschritten) wird? Wenn ja, welche?

Folgende Teilantworten ergeben sich:

	Folge (u_n)	Folge (U_n)
Zahlen, die nicht übesrschritten werden	z. B. 7; 10; 2π	z. B. 11; 20; $6 \cdot \tan \frac{\pi}{3}$
Kleinste Zahl, die nicht überschritten wird	$\boxed{2\pi}$	$6 \cdot \tan \frac{\pi}{3}$
Zahlen, die nicht unterschritten werden	z. B. 0; 5; $6 \cdot \sin \frac{\pi}{3}$	z. B. 0; 6; 2π
Größte Zahl, die nicht unterschritten wird	$6 \cdot \sin \frac{\pi}{3}$	$\boxed{2\pi}$

Vorgehen nach Variante 2

Aufgabe: ACHILLES läuft mit einer Schildkröte um die Wette. Da er schneller läuft als sie, gibt er ihr einen Vorsprung. Holt ACHILLES die Schildkröte ein?

Die (richtige) Antwort wird nicht ausbleiben.

Der Lehrer muß nun den paradoxen Gedankengang aufbauen:

Wir nehmen an, ACHILLES (A) hat die k-fache Geschwindigkeit gegenüber der Schildkröte (S); er gibt ihr den Vorsprung a (Skizze nach Bild 2.4, zunächst ohne die gestrichelten Hilfslinien und die Hilfsbezeichnungen; P ist der „Einholepunkt").

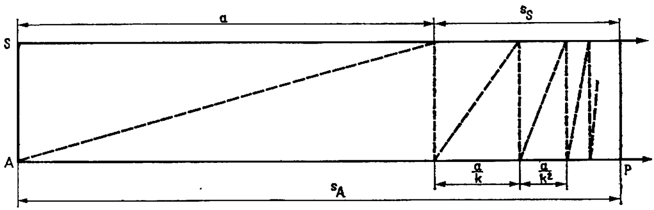


Bild 2.4

Lösung 1: Durch Anwenden der Formel für die gleichförmig geradlinige Bewegung ergibt sich $s_A = \dfrac{a \cdot k}{k - 1}$.

Lösung 2: Aus der Skizze (jetzt gestrichelte Hilfslinien und entsprechende Bezeichnungen anbringen) ist zu ersehen, daß S von A nicht eingeholt werden kann, denn immer, wenn A an die Stelle gelangt, wo S begonnen hat, ist S ein Stück weitergelaufen. Zwar werden die Strecken immer kürzer, aber der Vorgang nimmt kein Ende.

Im UG könnten sich folgende Fragen und Antworten ergeben:

– Welche Länge haben die von A zurückgelegten Einzelstrecken?	– $\left(a; \frac{a}{k}; \frac{a}{k^2}; \ldots\right)$
– Was ist das für eine Folge?	– Geometrische Folge
– Wie heißt deren n-tes Glied?	– $\frac{a}{k^{n-1}}$
– Was ist zu ermitteln?	– Die Summe der Einzelstrecken: $a + \frac{a}{k} + \frac{a}{k^2} + \ldots$
– Es sind aber unendlich viele Einzelstrecken! Welche Summe erhalten wir, wenn wir irgendwo abbrechen?	– $a + \frac{a}{k} + \frac{a}{k^2} + \ldots + \frac{a}{k^{n-1}}$
– Kann man eine Formel für diese n-te Partialsumme angeben?	– ↗ LB 39

Eventuell können diese Betrachtungen sofort mit bestimmten Werten durchgeführt werden (z. B. $a = 100$ m, $k = 100$).
Hinweis: Man kann das Zenon-Paradoxon auch „modernisieren“, z. B. durch folgende Aufgabe:
Ein Motorradfahrer und ein Radfahrer fahren morgens 6.00 Uhr von ihren Heimatorten A und B zu ihrem Arbeitsort C. Der Motorradfahrer fährt mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von 60 km h^{-1}, der Radfahrer hat den dritten Teil dieser Geschwindigkeit. B liegt am Wege von A nach C und ist 6 km von A entfernt. Wie weit ist der Arbeitsort C von A und von B entfernt, wenn beide Fahrer zum gleichen Zeitpunkt in C eintreffen?
Durch Vergleich mit Lösung 1 wird nochmals das paradox Erscheinende hervorgehoben: Obwohl es sich jeweils um einen unendlichen Prozeß handelt, strebt die betreffende Folge offenbar doch einem bestimmten Wert zu.

Zusammenfassung und Zielstellung SSA durch Lesen des Textes auf LB 75f. oder LV zur gewählten Variante.

Lerneinheit 1 (1 Std.)
Schranken von Zahlenfolgen

LB 77 bis 80

Ziele

Die Schüler

- kennen den Begriff „obere (untere) Schranke einer Zahlenfolge“ und den Sinn der Sprechweisen „Die Folge (a_n) ist nach oben (unten) beschränkt“ und „(a_n) wächst (fällt) unbeschränkt“,
- können für Zahlenfolgen existierende Schranken angeben,
- kennen den Sinn der Sprechweise „für fast alle natürlichen Zahlen n gilt“.

Schwerpunkte

- Erarbeitung der Begriffe „obere (untere) Schranke ...“ (▶ 1) und Einführung der Sprechweisen „Die Folge (a_n) ist nach oben (unten) beschränkt“ und „(a_n) wächst (fällt) nach oben (unten) unbeschränkt“ durch Untersuchen von Folgen (LB 77, Bild B 8)
- Einführung der Sprechweise „für fast alle n gilt“ (LB 79)
- Übungen im Bestimmen von Schranken für Folgen (Auswahl aus LBA 1, 3, 6, 10)

Methodische Hinweise

Erarbeitung der ▶ 1 und Einführung entsprechender Sprechweisen Die Schüler untersuchen die Folgen (1) bis (4) des Bildes B 8 auf weitere Eigenschaften von Folgen. Sie nennen weitere Glieder dieser Folgen und beantworten für jede Folge folgende Fragen.

- Ist die Folge monoton wachsend (fallend)?
- Lassen sich Zahlen angeben, die kleiner (größer) als jedes beliebige Glied der Folge sind? Nennen Sie gegebenenfalls solche Zahlen! Begründen Sie Ihre Angaben!

Die Ergebnisse können zusammenfassend in folgende Tabelle eingetragen werden:

Folge (a_n)	Nach oben beschränkt	Obere Schranke	Nach unten beschränkt	Untere Schranke
(n^2)	nein	–	ja	$0; 1; -10$
$(5-2n)$	ja	$5; 4; 3$	nein	–
$\left((-1)^n \cdot \frac{1}{n}\right)$	ja	$1; \frac{1}{2}; 5$	ja	$-1; -2; -5$
$((-2)^n)$	nein	–	nein	–

Zugleich sollten verschiedene *Sprechweisen* geübt werden, z. B.:

- Die Folge (a_n) mit $a_n = 5 - 2n$ ist nach oben beschränkt;
- sie hat obere Schranken;
- sie ist nach unten nicht beschränkt;
- sie ist nach unten unbeschränkt;
- sie fällt unbeschränkt;
- sie hat keine untere Schranke.

Bemerkungen: Auf LB 78 wird von der „Lage der Folgenglieder im Koordinatensystem“ gesprochen und für die Folge (2) formuliert: „Alle Folgenglieder liegen unterhalb der Zahl 5“. Die Folgenglieder sind dabei die Ordinaten der dargestellten Punkte. Die Folgenglieder (als Zahlen) werden auf Punkte der Ordinatenachse abgebildet. Eine Schranke ist eine Zahl, der man einen Punkt auf der Ordinatenachse zuordnen kann. In der mathematischen Literatur (↗ auch [8], S. 21f.; [25], S. 106f.) trifft man gelegentlich die Darstellung der Folgenglieder auf einer Zahlengeraden an; davon wird in LE 9 Gebrauch gemacht.

Einführung der Sprechweise „für fast alle n gilt“ In SSA sollten die Schüler die ersten 10 Glieder der Folge (a_n) mit $a_n = 2^n$ ermitteln, diese mit dem Anfangsstück der Folge (b_n) mit $b_n = (-2)^n$ vergleichen und dann die auf LB 79f. dargestellte Untersuchung der Folge (a_n) durcharbeiten.

Nach der Klärung evtl. auftretender Fragen (Hinweis darauf, daß die Achse im Bild B 9, auf der die Glieder abgetragen sind, nicht linear geteilt ist) können die Schüler noch ● 4 bearbeiten und bei ihren Formulierungen die Sprechweise „für fast alle n gilt“ verwenden.
Hinweis: Diese Sprechweise hat nur für unendliche Folgen Sinn (↗ Fußnote auf LB 76). Sie wird später in ▶ 3 (LE 3) verwendet, sollte jedoch bereits im Zusammenhang mit der Behandlung von Schranken und Grenzen eingeführt werden, obwohl sie hierfür entbehrlich wäre. Es sollten noch andere gleichwertige Formulierungen verwendet werden, z. B.:
„für alle n außer endlich vielen“;
„für alle n bis auf endlich viele“;
„für alle $n > n_1$“ (wobei die Aussage auch noch für einige $n < n_1$ gelten kann);
„für höchstens endlich viele n gilt nicht“.
Durch Gegenüberstellung der Folgen $((-2)^n)$ und (2^n) sollte vor allem der Unterschied zwischen den Formulierungen „für fast alle n“ und „für unendlich viele n“ verdeutlicht werden.

Übungen im Bestimmen von Schranken von Folgen In gleicher Weise wie in der Tabelle auf UH 79 können weitere Folgen auf Monotonie und Beschränktheit untersucht werden (Auswahl aus LBA 1 bis 4; LBA 5).
Weitere Möglichkeiten:

- Nach LP 27 sind auch geometrische Folgen in die Untersuchungen einzubeziehen. Die Schüler arbeiten ■ 2 durch und wenden es auf die Lösung von LBA 2b) an.
- Die Schüler arbeiten ■ 1 durch, erkennen dabei, daß es sich um die Partialsummenfolge der geometrischen Folge $\left(3 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^n\right)$ handelt (Glieder einzeln notieren lassen), geben analog dazu ein weiteres Beispiel an und untersuchen es.
- Konstruktion von Folgen, die vorgegebenen Bedingungen genügen (LBA 6, 7)
- Übungen zur Sprechweise „für fast alle n gilt“, z. B. beim Lösen von LBA 8 (als Vorübung), LBA 10; bei LBA 8 auch alle n nennen lassen, für die die gegebene Ungleichung nicht gilt

Kontrollaufgaben

Erläutern Sie den Begriff „obere (untere) Schranke“, und wenden Sie ihn auf die Folgen $(a_n) = (n^2 - 1)$; $(b_n) = \left(\frac{1}{10^n}\right)$ an!

Lerneinheit 2 (1 Std.)

Obere und untere Grenze einer Zahlenfolge

LB 81 bis 83

Ziele

Die Schüler
- kennen den Begriff „obere (untere) Grenze einer Zahlenfolge“,

- wissen, daß eine nach oben (unten) beschränkte Zahlenfolge eine obere (untere) Grenze hat,
- wissen, daß die kleinste obere (größte untere) Schranke die obere (untere) Grenze ist,
- können für Zahlenfolgen existierende Grenzen angeben.

Schwerpunkte

- Erarbeitung des Begriffes „obere (untere) Grenze einer Zahlenfolge" (▶ 2) und des Satzes von der oberen (unteren) Grenze (▷ 1)
- Übungen im Bestimmen von Schranken und Grenzen vorgegebener Folgen bzw. im Konstruieren von Folgen zu vorgegebenen Schranken und Grenzen

Methodische Hinweise

Erarbeitung von ▶ 2 und ▷ 1 Die Untersuchungen der Folgen, die

- in der in LE 1 erarbeiteten Tabelle (UH 79) enthalten sind oder
- in den HA bearbeitet wurden oder
- neu, z. B. in LBA 1, vorgelegt werden,

münden bei Vorhandensein von Schranken in jeweils die Frage: Läßt sich unter den Zahlen, die kleiner (größer) als jedes beliebige Glied der Folge sind, eine größte (kleinste) Zahl angeben (▶ 2)?
Ermittelte (oder vermutete) Grenzen werden hervorgehoben. Für einzelne Folgen begründen die Schüler, weshalb eine bestimmte Zahl Grenze ist. Als Anleitung können ■ 3 bis 5 dienen (SSA).
▷ 1 wird (oB) mitgeteilt und kann am Beispiel der untersuchten Folgen plausibel gemacht werden.

Übungen im Bestimmen von Schranken und Grenzen bzw. im Konstruieren von Folgen Die Übungen sollten an 3 Aufgabentypen erfolgen:

(1) Geg.: Folge	Ges.:	Obere (untere) Grenze (soweit vorhanden)
(2) Geg.: Zahl	Ges.:	Eine Folge, für die die gegebene Zahl obere (untere) Grenze ist
(3) Geg.: Folge; Zahl	Frage:	Ist die gegebene Zahl obere (untere) Grenze der gegebenen Folge?

Für die Typen (1) und (3) stehen die LBA 1 bis 4 zur Verfügung. Beim Begründen der Antworten sollten sich die Schüler im Gebrauch der definierten Begriffe und der eingeführten Sprechweisen üben. Dabei kann auch formuliert werden:
Die obere (untere) Grenze einer Folge ist zugleich eine obere (untere) Schranke dieser Zahlenfolge, aber nicht jede Schranke ist zugleich Grenze einer Zahlenfolge.

Hausaufgabe ■ 4, ● 6; in Analogie dazu Untersuchung der Folge $\left(1 + \frac{1}{n}\right)$; damit wird Vorlauf für die Untersuchungen zur Erarbeitung des Grenzwertbegriffes in LE 3 geschaffen.

Kontrollaufgaben

Geben Sie, sofern vorhanden, Schranken und Grenzen für die Zahlenfolgen $(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ und $(b_n) = \left(\frac{n}{n+1}\right)$ an!

Lerneinheit 3 **(2 Std.)**
Grenzwert einer Zahlenfolge

LB 84 bis 88

In dieser Unterrichtseinheit wird der grundlegende Begriff des Grenzwertes einer Zahlenfolge behandelt. Es geht dabei um das Erfassen einer Beziehung zwischen einer Folge und einer Zahl. Anhand repräsentativ ausgewählter, gut überschaubarer Folgen sollten sich die Schüler weitgehend selbständig die inhaltlichen Vorstellungen erarbeiten, die zur Definition des Grenzwertes führen.

Ziele

Die Schüler
- kennen den Begriff „ε-Umgebung einer Zahl a" und können in einfachen Fällen feststellen, ob ein gegebenes Glied einer Folge in einer bestimmten ε-Umgebung liegt,
- kennen die Definition des Begriffes „Grenzwert einer Zahlenfolge" und können sie anhand selbstgewählter Beispiele erläutern,
- können konvergente und divergente Folgen unterscheiden und Beispiele dafür angeben.

Schwerpunkte

1. Stunde
- Sicherung des Ausgangsniveaus
- Untersuchung von Zahlenfolgen auf Monotonie, Beschränktheit und die Existenz von Zahlen, denen sich die Folgenglieder mit wachsendem n beliebig nähern, dabei Einführung von „ε-Umgebung von a"
- Übungen im Darstellen und Untersuchen von ε-Umgebungen

2. Stunde
- Erarbeitung der Definition des Grenzwertbegriffes (▶ 3) und Einführung von „konvergente (divergente) Folge"
- Festigung des Grenzwertbegriffes

Methodische Hinweise

Sicherung des Ausgangsniveaus Die anschließenden Untersuchungen, die zur Definition des Begriffes „Grenzwert" führen werden, erfordern immer wieder das Lösen elementarer Ungleichungen, vor allem im Bereich der natürlichen Zahlen (Auswahl aus Komplex 3 der Aufgaben für tägliche Übungen und Wiederholungen, UH 68).

Untersuchungen von Zahlenfolgen und Einführung von „ε-Umgebung von a" Die Schüler sollten in SSA die Folgen (1) bis (3) aus den Bildern B 11 bis 13 untersuchen, dazu als Gegenbeispiele die Folgen (a_n) mit $a_n = 2^n$ (Bild B 9) und $a_n = (-1)^n\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ (Bild B 19) sowie eine konstante Folge, z. B. $a_n = 4$ (auch als vorbereitende HA möglich).
Die Schüler erhalten als Anleitung:

- Führen Sie die Untersuchung für jede Folge in folgenden Schritten durch!
  (Ggf. unter Verwendung der Lehrbuchbilder erst bei Schritt 5 einsetzen.)
  1. *Berechnen* Sie die ersten 10 Glieder, und tragen Sie sie in eine Wertetafel ein!
  2. *Stellen* Sie die Folge in einem Koordinatensystem *dar*!
  3. *Prüfen* Sie die Folge auf *Beschränktheit*!
  4. *Prüfen* Sie die Folge auf *Monotonie*!
  5. Stellen Sie aus dem Graph fest, ob sich die Folgenglieder vermutlich *einer Zahl* nähern!
  6. Stellen Sie fest, ob *für fast alle n* die Folgenglieder in der Nähe dieser Zahl liegen!
- *Vergleichen* Sie bzgl. der gefundenen Ergebnisse die Folgen miteinander!
- *Überprüfen* Sie ihre Ergebnisse, indem Sie sie mit entsprechenden Bildern und Darlegungen im LB vergleichen! (Einbeziehung der HA und der Ergebnisse von Untersuchungen aus vorangehenden Stunden)

In der Auswertung wird festgestellt, daß die Sprechweisen „die Folgenglieder *nähern sich* mit wachsendem *n beliebig* einer Zahl" und „für fast alle n liegen die Folgenglieder *in der Nähe einer Zahl*" nicht exakt genug sind, wenngleich sie für eine vorläufige Beschreibung ausreichten. Das ist das Motiv dafür, die Umgebung einer Zahl exakt zu beschreiben, also ein Intervall einzuführen, in dem die Zahl liegt, und das Verhalten der Folgenglieder in einem solchen Intervall zu beschreiben. Der Begriff „*ε-Umgebung von a*" wird eingeführt (Betrachtung wie Bilder B 14 und B 15 in Verbindung mit dem Lösen von ● B 7).

Übungen im Darstellen und Untersuchen von ε-Umgebungen In SSA sollten die Schüler ε-Umgebungen in einem Koordinatensystem *markieren* (LBA 1) und vor allem *überprüfen*, ob eine gegebene Zahl x in einer gegebenen ε-Umgebung einer bestimmten Zahl a liegt (LBA 3).
Dabei sollten die Schüler ε-Umgebungen einer Zahl a sowohl auf einer Zahlengeraden (↗ Bild B 16) als auch auf der Ordinatenachse in einem Koordinatensystem (↗ Bild B 18) darstellen.

Erarbeitung von ▶ 3 und Einführung von „konvergente (divergente) Folge" Der Begriff „ε-Umgebung von a" wird gefestigt (z. B. bei der Kontrolle der HA) und auf die Untersuchung von Folgen angewendet. Dazu sollten die Schüler in SSA den Text nach ● 8 durcharbeiten und ● 9 lösen. Das dort beschriebene Vorgehen kann an den in der 1. Stunde bearbeiteten Folgen nachvollzogen werden. Im Blickpunkt steht dabei immer die Frage:
Gibt es eine Zahl a derart, daß für die betrachtete Folge für fast alle n die Glieder a_n in einer ε-Umgebung von a liegen, wie klein man auch immer die positive Zahl ε wählt? In der Auswertung der Ergebnisse wird festgestellt:

- unbeschränkte Zahlenfolgen können offenbar keine Zahl mit der genannten Eigenschaft haben (Begründung),

- es gibt aber auch nicht für jede beschränkte Folge eine solche Zahl,
- die Forderung ist nur bei den Folgen (1) bis (3) (Bilder B 11 bis B 13) und bei konstanten Folgen erfüllt.

Die verschiedenen Möglichkeiten der Formulierung von ▶ 3 werden miteinander verglichen (↗ LB 87), ihre Gleichwertigkeit erläutert und etwa auf die Folge $\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ angewendet.

Anschließend werden die Begriffe „konvergente (divergente) Zahlenfolge“ eingeführt und dafür Beispiele aus den untersuchten Folgen genannt.

Festigung des Grenzwertbegriffes Im UG wird erörtert: Für die Existenz eines Grenzwertes g ist nicht entscheidend, daß für *unendlich viele n* alle zugehörigen Folgenglieder in jeder beliebig gewählten ε-Umgebung von g liegen, sondern daß das *für fast alle n* gilt. So gibt es bei Folge (a_n) mit $a_n = (-1)^n \cdot \frac{n-1}{n}$ zwar zwei Zahlen $a_1 = 1$ und $a_2 = -1$, für die gilt, daß für jedes ε unendlich viele Glieder in der ε-Umgebung von a_1 bzw. a_2 liegen, die Bedingungen für die Existenz eines Grenzwertes (nach Definition) sind jedoch damit nicht erfüllt. Das ist zu begründen (↗ ● 11, LE 4).
Die bisher verwendete unscharfe Formulierung, daß sich die Folgenglieder beliebig einer Zahl g (dem Grenzwert) nähern, darf nicht zu dem Schluß führen, daß die Zahl g notwendigerweise von einem Folgenglied erreicht wird. Der Grenzwert g ist im allgemeinen kein Folgenglied $\left(\text{Ausnahmen sind z. B. konstante Folgen oder } \left(\frac{n + (-1)^n \cdot n}{2n^2}\right), \left(\frac{1}{2^n} \cos \frac{n\pi}{2}\right)\right)$.
Beim Bearbeiten von LBA 5 können diese Überlegungen gefestigt werden.

Hausaufgabe LBA 6

Kontrollaufgaben

1. Geben Sie eine Definition des Grenzwertes einer Zahlenfolge, und führen Sie ein Beispiel dazu an!
2. Gegeben sei die Folge (a_n) mit $a_n = 2 - \frac{1}{n}$.
   a) Liegt das Glied a_{10} in der $\frac{1}{5}$-Umgebung von 2?
   b) Bestimmen Sie alle natürlichen Zahlen n, für die a_n in der 0,01-Umgebung von 2 liegt!
3. Geben Sie je ein Beispiel für eine konvergente und eine divergente Zahlenfolge an!

Lösung zu 2.: a) a_{10} liegt in der $\frac{1}{5}$-Umgebung von 2.
b) $n > 100$

Lerneinheit 4 (2 Std.)
Untersuchungen von Zahlenfolgen auf Konvergenz

LB 88 bis 92

Im Mittelpunkt der Lerneinheit steht die Anwendung der Grenzwertdefinition. In vielfältig gestalteten Übungen sollen die Schüler tiefer in die für sie neuen Denk- und Arbeitsweisen der Analysis eindringen und zugleich ihre Fähigkeiten im Beweisen und Begründen weiterentwickeln.

Ziele

Die Schüler

- können für einfache Fälle unter Verwendung der Grenzwertdefinition nachweisen, daß eine gegebene Zahl Grenzwert einer gegebenen Folge und diese somit konvergent ist,
- entwickeln somit ihre Fähigkeiten im Beweisen und Begründen weiter,
- wissen, daß eine konvergente Zahlenfolge genau einen Grenzwert hat,
- kennen den Begriff „Nullfolge“ und die Schreibweise „ $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = g$“.

Schwerpunkte

1. Stunde

- Sicherung des Ausgangsniveaus für die Untersuchungen von Zahlenfolgen auf Konvergenz
- Anwendung der Grenzwertdefinition zum Nachweis, daß eine gegebene Zahl Grenzwert einer gegebenen Zahlenfolge ist, dabei Einführung von „Nullfolge“ (■ 7 und 8)

2. Stunde

- Erarbeitung der Eindeutigkeit des Grenzwertes einer konvergenten Folge (■ 9, ● 11)
- Übungen im Nachweisen, daß gegebene Zahlen Grenzwerte gegebener Zahlenfolgen sind oder nicht, dabei Einführen der Bezeichnung $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = g$

Methodische Hinweise

Sicherung des Ausgangsniveaus für die Untersuchungen von Zahlenfolgen auf Konvergenz Die Schüler benötigen Fertigkeiten im *Umformen von Termen*, im *Arbeiten mit Beträgen*, im *Lösen von Ungleichungen* und vor allem im *Ermitteln des Wahrheitswertes von Ungleichungen* nach dem Belegen der Variablen.
Dazu sollten geeignete Beispiele aus den Komplexen 2 und 3 der Aufgaben für tägliche Übungen und Wiederholungen, UH 68, ausgewählt werden. Günstig erscheint es auch, bereits hier solche Ungleichungen lösen zu lassen, die in den nachfolgenden Untersuchungen auftreten, z. B.

$$\left|\frac{n+1}{2n} - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{20} \text{ (■ 7)}; \quad \left|\frac{7n+1}{3n} - 2\right| < \frac{1}{3} \text{ (■ 9)}; \quad \left|\frac{n+1}{n} - 1\right| < \frac{1}{10}.$$

Dadurch werden sich die Schüler dann besser auf die dort dargestellten Begründungen konzentrieren können.

Anwendung der Grenzwertdefinition auf die Untersuchungen Die ■ 7 und 8 eignen sich für die SSA. Hierfür sollten die Schüler wie folgt angeleitet werden (am ■ 7 dargestellt):

- Geben Sie einige Glieder der Folge $\left(\frac{n+1}{2n}\right)$ an (Graph zeichnen)!
- Untersuchen Sie die Folge auf Beschränktheit und Monotonie!
- Entnehmen Sie dem Graphen Schranken, vermutliche Grenzen, den vermutlichen Grenzwert!
  (Hinweis: Selbst wenn man z. B. 10 Folgenglieder veranschaulicht, ist i. a. der Grenzwert nicht eindeutig ablesbar.)
- Prüfen Sie, ob die Zahl $\frac{1}{2}$ Grenzwert der Folge ist! (Anwendung von ▶ 3: Zu zeigen, daß $|a_n - g| < \varepsilon$ bei jedem positiven ε für fast alle n gilt!)

Nunmehr sollten die Schüler beim Durcharbeiten der Beispiele jeweils die Schritte (a) bis (c) und jede Umformung zunächst selbst (im Heft) vollziehen und das LB vor allem zur Bestätigung ihres eigenen Vorgehens benutzen.
Auch ● 10 sollte in SSA bearbeitet werden. Auf den Vorteil, statt Ungleichung (1) die dazu äquivalente Ungleichung (3) zu verwenden, sollten die Schüler *nicht sofort* hingewiesen werden, sondern sie sollten ihn möglichst selbst entdecken.
In Verbindung mit ■ 8 kann der Begriff „Nullfolge"[1] eingeführt werden. Im UG kann der Lehrer darauf verweisen, daß beim weiteren Aufbau der Infinitesimalrechnung Nullfolgen benötigt werden und somit die Einführung des Begriffs begründen. Nullfolgen werden z. B. auch bereits in den LE 6 und 7 beim Berechnen von Grenzwerten konvergenter Folgen mit Hilfe der Grenzwertsätze verwendet.
Den Beispielen folgend sollten die Schüler LBA 3 und 5 lösen.

Erarbeitung der Eindeutigkeit des Grenzwertes einer konvergenten Folge Um die Konvergenz z. B. der Zahlenfolge (a_n) mit $a_n = (-1)^n\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ zu untersuchen, berechnen die Schüler die ersten 10 Glieder und zeichnen den Graph. Die Untersuchung ergibt: Die Folge ist beschränkt. Sie hat also nach ▷ 1 eine obere und eine untere Grenze (-2 bzw. $1{,}5$). Die Folgenglieder nähern sich mit wachsendem n im Wechsel den beiden Zahlen -1 und $+1$. Hat die Folge demnach zwei Grenzwerte?
Da der LP den (indirekten) Beweis für die Eindeutigkeit des Grenzwertes einer konvergenten Zahlenfolge *nicht* fordert, sollten sich die Schüler die Gedankenführung dieses Beweises lediglich am Beispiel der oben betrachteten Folge verdeutlichen und zu diesem Zweck ε-Umgebungen von 1 und von -1 in den Graph einzeichnen. Die hier durchzuführenden Überlegungen dienen der Festigung der Grenzwertdefinition, gehören jedoch nicht zum reproduzierbaren Wissen der Schüler.
Zur weiteren Vertiefung der Einsichten und in Vorbereitung auf LE 5 sollten die Beziehungen und Unterschiede zwischen den *Grenzen* und dem *Grenzwert* einer Folge an Beispielen erläutert werden: Es gibt konvergente Folgen, bei denen der Grenzwert (nicht) mit einer Grenze übereinstimmt. Die Schüler sollten weitere Beispiele anführen und überlegen: Welche Eigenschaften haben solche Folgen noch? (↗ auch ■ 6, LB 87)

Übungen im Nachweisen von Grenzwerten Zunächst sollte anhand bekannter Folgen mit bekannten Grenzwerten die Schreibweise $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$ (und auch die Sprechweise) eingeführt werden. In den Übungen können drei Typen von Aufgaben gestellt werden:
(1) Zeigen Sie, daß die Zahl a Grenzwert der Folge (a_n) ist! (■ 7 und 8; LBA 1 bis 4)
(2) Zeigen Sie, daß die Zahl a nicht Grenzwert der Folge (a_n) ist!
(■ 9; LBA 7 und 8; Hinweis nach ■ 9 beachten)
(3) Prüfen Sie, ob die Zahl a Grenzwert der Folge (a_n) ist! (LBA 5 und 6)

[1] In der Fachliteratur wird der Begriff „Nullfolge" häufig (in anderer Weise) vor dem Grenzwertbegriff eingeführt und *mit* seiner Hilfe der Grenzwert einer Zahlenfolge definiert.

Typ (3) sollte im Unterricht bevorzugt werden, jede der anderen Aufgabenstellungen läßt sich in diese Form umwandeln.
In SSA sollten sich die Schüler zunächst eine Vorstellung von der betreffenden Folge verschaffen (einige Glieder bestimmen, Graph skizzieren), eine Vermutung über die Existenz eines Grenzwertes gewinnen und dann den Nachweis führen. Dabei sind jeweils zwei Schritte zu gehen:

- Die Ungleichung $|a_n - g| < \varepsilon$ ist so umzuformen, daß man eine *überschaubare Beziehung* zwischen n und ε gewinnt.
- Es ist zu prüfen, ob diese Beziehung *für fast alle n bei jedem positiven ε* gilt (oder: ob es nur endlich viele n gibt, für die diese Beziehung nicht gilt).

Hervorzuheben ist die Erkenntnis, daß auf diese Weise keine Grenzwerte ermittelt werden können, sondern daß lediglich für vorgegebene oder angenommene Zahlen entschieden werden kann, ob sie Grenzwert der gegebenen Folge sind oder nicht.

Hausaufgabe Für bisher untersuchte Folgen fertigen die Schüler eine Übersicht nach folgendem Muster zur Vorbereitung auf die Behandlung der LE 5 an (Anwendungsmöglichkeiten auch noch in den LE 6 und 9).

Folge (a_n)	beschränkt		monoton		konvergent*
	nach oben	nach unten	wachsend	fallend	
$\left(1 - \frac{1}{n}\right)$	ja	ja	ja	nein	ja
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

* Hier kann der Schüler auch den Grenzwert eintragen, falls dieser bekannt oder offensichtlich ist.

Kontrollaufgaben

1. Weisen Sie nach: $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{n-1}{3n}\right) = \frac{1}{3}$!
2. Nennen Sie ein Beispiel für eine Nullfolge, und führen Sie den Nachweis dafür!

Lerneinheit 5 (2 Std.)
Konvergenzverhalten monotoner Folgen

LB 92 bis 95

Ziele

Die Schüler

- kennen den Satz über die Konvergenz monotoner und beschränkter Zahlenfolgen, verstehen dessen Herleitung und können sie nachvollziehen,
- können die Konvergenz gegebener Zahlenfolgen durch den Nachweis der Beschränktheit und Monotonie dieser Folgen feststellen.

Schwerpunkte

1. Stunde

- Motivierung und Zielstellung für die Untersuchung monotoner beschränkter Zahlenfolgen
- Sicherung des Ausgangsniveaus
- Erarbeitung der Herleitung des Satzes über die Konvergenz monotoner, beschränkter Folgen (▷ 2; ● 15)

2. Stunde

- Anwendung von ▷ 2 und Übungen im Nachweisen der Konvergenz von Folgen (LBA 1 bis 3)
- Zusammenfassung

Methodische Hinweise

Motivierung und Zielstellung für die Untersuchung monotoner beschränkter Zahlenfolgen Im UG wird festgestellt, daß die Schüler bisher noch kein Verfahren kennen, um die Konvergenz einer Folge festzustellen oder gar den Grenzwert zu berechnen. Beim Auswerten der Übersicht (↗ vorbereitende HA, LE 4) erhebt sich die Frage, ob es Eigenschaften von Folgen gibt, die mit Sicherheit auf deren Konvergenz schließen lassen. Hieraus resultiert die *Zielstellung:* Vermutlich spielen die Monotonie und die Beschränktheit von Folgen eine Rolle bezüglich der Konvergenz. Wir wollen daher monotone beschränkte Folgen näher untersuchen.

Sicherung des Ausgangsniveaus Für die bevorstehenden Untersuchungen brauchen die Schüler Sicherheit im Arbeiten mit Ungleichungen und in den bisher erworbenen Kenntnissen über Folgen. Daher sollten in SSA folgende Aufgaben gelöst werden:

- Unter welchen Bedingungen hat eine Folge eine Grenze (↗ ▷ 1)? Nennen Sie ein Beispiel!
- Geben Sie für die Folge $\left(\frac{n-1}{n}\right)$ einige natürliche Zahlen n an, für die die Glieder der Folge in der $\frac{1}{10}$-Umgebung von 1 liegen! Berechnen Sie diese Glieder! Wie viele Glieder der Folge liegen außerhalb der $\frac{1}{10}$-Umgebung von 1?

Erarbeitung der Herleitung von ▷ 2 In Anknüpfung an die Zielstellung sind folgende Schritte denkbar:

- Untersuchung einer beliebigen monoton wachsenden und nach oben beschränkten Folge; Einbeziehen des Bildes B 21 (LB 93)
- Herleitung von ▷ 2 in enger Anlehnung an die Darstellung auf LB 92f. (Im Bild B 21 sollten noch die Zahlen a_n, a_m und weitere Glieder eingetragen werden, die in dieser Darstellung eine Rolle spielen. Das Bild sollte an der Tafel entwickelt werden, wobei die ε-Umgebung so groß gehalten wird, daß die Zeichnung übersichtlich bleibt (↗ Bild 2.5).)
- Verdeutlichung des Gedankenganges durch Verifizierung aller Schritte der Herstellung am Beispiel einer Folge $\left(\text{etwa} \left(\frac{n-1}{n}\right)\right)$ mit bestimmten ε, m und n
- Formulierung von ▷ 2

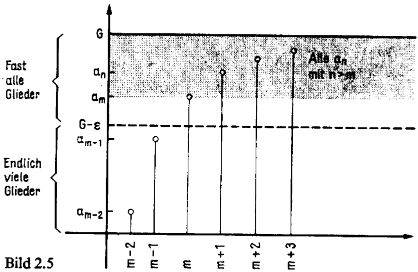


Bild 2.5

Hausaufgabe Zur Festigung von ▷ 2 und seiner Herleitung: ● 15 für alle Schüler oder als SV in einer der folgenden Unterrichtsstunden für einzelne Schüler

Anwendung von ▷ 2 Erforderlichenfalls ist das Nachweisen von Monotonie und Beschränktheit von Folgen zu wiederholen (LBA 1 aus „Übungen und Anwendungen"; ■ 1 und 2, LE 1).
Die Anwendung von ▷ 2 beim Untersuchen von Folgen auf Konvergenz wird an Beispielen erläutert.
Stets sind zwei Schritte zu gehen:

- Die Folge wird auf Monotonie geprüft.
- Die Folge wird auf Beschränktheit untersucht.

Die Schüler müssen erfassen: Untersucht man Folgen, deren Monotonie vorgegeben ist (LBA 1 und 2), so ist nur noch die Beschränktheit nachzuweisen. Weiß man hingegen noch nichts über die Monotonie der Folge, so ist es rationeller, die Schrittfolge zu vertauschen, denn wenn eine Folge nicht beschränkt ist, braucht man sie gar nicht erst auf Monotonie zu prüfen.
■ 11 kann in SSA durchgearbeitet werden (dazu Kenntnisse über das Bilden von Partialsummenfolgen reaktivieren und ● 16 erteilen). Aus dem Beispiel darf jedoch nicht geschlossen werden, daß Partialsummenfolgen stets konvergieren.

Zusammenfassung Die Schüler sollten den nach ▷ 2 stehenden Lehrbuchtext durchlesen und an selbst gewählten Beispielen erläutern. Bereits an dieser Stelle kann anhand des Textes auf LB 94 zur Zielstellung für LE 6 übergeleitet werden.

Hausaufgabe Unter Nutzung der Übersicht (↗ HA auf UH 87) alle im bisherigen Unterricht ermittelten Grenzwerte und die entsprechenden Folgen zusammenstellen lassen. Ein Schüler könnte das gesammelte Material auf eine Seitentafel oder Folie schreiben, damit stünde ein gewisses Reservoir zur Verfügung, das im folgenden Unterricht zum Ermitteln weiterer Grenzwerte genutzt werden kann.

Kontrollaufgabe

Prüfen Sie, ob die Folgen (a_n) mit $a_n = \frac{3(n-1)}{n}$ und (b_n) mit $b_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ konvergieren!

Lösung:

(a_n) monoton wachsend und beschränkt, also konvergent

(b_n) ist nicht monoton, aber beschränkt. Daraus allein läßt sich nach ▷ 2 keine sichere Schlußfolgerung für die Konvergenz ziehen. Eine nähere Untersuchung zeigt jedoch, daß die Folge offenbar gegen 0 konvergiert. Und man kann durch Anwendung der Grenzwertdefinition nachweisen, daß (b_n) eine Nullfolge ist (↗ LE 4).

Lerneinheit 6 **(2 Std.)**
Grenzwertsätze für Zahlenfolgen

LB 96 bis 98

Ziele

Die Schüler
- können die Summe, die Differenz, das Produkt und den Quotienten zweier Folgen bilden bzw. in einfachen Fällen Folgen in eine Summe, eine Differenz, ein Produkt oder einen Quotienten zweier Folgen zerlegen,
- kennen die Grenzwertsätze für Zahlenfolgen und verstehen den Beweis des Satzes über den Grenzwert einer Summe von Folgen,
- können die Grenzwertsätze auf einfache Beispiele anwenden.

Schwerpunkte

1. Stunde
- Motivierung und Zielstellung
- Erarbeitung des Zusammensetzens und Zerlegens von Folgen (■ 12; ● 18)
- Erarbeitung der Grenzwertsätze (▷ 3 und ▷ 4)

2. Stunde
- Erarbeitung von Beispielen für die Anwendung der Grenzwertsätze
- Übungen im Berechnen von Grenzwerten
- Zusammenfassung

Methodische Hinweise

Motivierung und Zielstellung Anknüpfend an LE 5 (↗ die vorbereitenden Maßnahmen in der Zus und in den HA dort) wird als *Ziel* des Unterrichts in LE 6 das *Berechnen von Grenzwerten* (nicht mehr nur das Nachweisen der Konvergenz der entsprechenden Folgen) genannt und die Frage formuliert:
Wird es unter Anwenden des Rückführungsprinzips möglich sein, Grenzwerte von Folgen aus bekannten Grenzwerten einfacherer Folgen zu berechnen?

Erarbeitung des Zusammensetzens und Zerlegens von Folgen Unter Nutzung der von den Schülern erarbeiteten Zusammenstellung (↗ vorbereitende HA der 2. Std. der LE 5) sollte an einem einfachen Beispiel der Grundgedanke herausgearbeitet werden. So ist z. B. der Grenzwert der Folge $\left(\frac{2n+1}{n}\right)$ bekannt (↗ auch LBA 4 in LE 4). Man läßt das n-te Glied der Folge in die Summe $2 + \frac{1}{n}$ umformen und notiert einige Glieder in dieser Weise:

n	1	2	3	4	5	6	...
$\frac{2n+1}{n}$	3	2,5	2,33	2,25	2,2	2,17	...
$2+\frac{1}{n}$	$2+1$	$2+\frac{1}{2}$	$2+\frac{1}{3}$	$2+\frac{1}{4}$	$2+\frac{1}{5}$	$2+\frac{1}{6}$	...

Aus der letzten Zeile der Tabelle ist sehr einfach der Grenzwert 2 abzulesen. Die ersten Summanden der Glieder bilden eine konstante Folge, die zweiten die Folge $\left(\frac{1}{n}\right)$, eine Nullfolge. Offensichtlich besteht also in diesem speziellen Fall ein Zusammenhang zwischen dem Grenzwert der Folge $\left(\frac{2n+1}{n}\right)$ und den Grenzwerten der Zerlegungsfolgen (2) und $\left(\frac{1}{n}\right)$.

Nun soll diese Frage für den allgemeinen Fall untersucht werden. Zunächst muß geklärt werden, wie sich Folgen aus einfacheren Folgen zusammensetzen bzw. in einfachere zerlegen lassen.
In weitgehend SSA sollten erarbeitet werden:

- Zur Sicherung des Ausgangsniveaus z. B. die LBA 8 und 9 aus den Aufgaben für tägliche Übungen und Wiederholungen (UH 68);
- ■ 12 in folgender Aufgabenstellung (LB erst nach der Lösung zur Kontrolle einsetzen):
  Notieren Sie jeweils die ersten 5 bis 10 Glieder der Folgen $(a_n) = \left(\frac{n-1}{n}\right)$ und $(b_n) = \left(\frac{n+1}{2n}\right)$!
  Bilden Sie eine neue Folge (c_n), indem Sie die Folgen (a_n) und (b_n) gliedweise addieren, und bestimmen Sie das n-te Glied $(a_n + b_n)$ der neuen Folge (c_n)!
- ● 18

Im Zusammenhang damit werden die Begriffe „Summe (Differenz, Produkt, Quotient) zweier Folgen" eingeführt.

Erarbeitung der Grenzwertsätze Durch Rückgriff auf das Beispiel der Folge $\left(\frac{2n+1}{n}\right)$ oder durch Bearbeitung von ● 19 und 20 sollte eine Vermutung im Sinne von ▷ 3 gewonnen werden. Für die Erarbeitung von ▷ 3 und seines Beweises gibt es verschiedene Möglichkeiten:

- SSA am Beweis im LB; ein Schüler erläutert danach nochmals den Beweisgang und belegt die einzelnen Schritte mit einem selbstgewählten Beispiel;
- LV zum Beweis (unter Einbeziehung der Schüler);
- SV zum Beweis (↗ vorbereitende HA der 2. Std. der LE 5);
- Im UG wird zunächst der Beweis für ein konkretes Beispiel erbracht, wobei die gleichen Gedankengänge wie beim allgemeinen Beweis durchlaufen werden; anschließend SSA am Beweis im LB (↗ HA).

Zur letzten Variante kann wiederum die Folge $\left(\frac{2n+1}{n}\right)$ oder ● 18 verwendet werden:

Voraussetzung: Die Folgen $(a_n) = \left(\frac{n-1}{n}\right)$ und $(b_n) = \left(\frac{n+1}{2n}\right)$ konvergieren, und es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = 1$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}$.

Behauptung: Die Folge $(a_n + b_n) = \left(\frac{3n-1}{2n}\right)$ konvergiert gegen $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

Beweis:

- Entsprechend der Grenzwertdefinition ist zu zeigen, daß bei jedem positiven ε für fast alle n gilt:

  $$\frac{3}{2} - \varepsilon < \frac{3n-1}{2n} < \frac{3}{2} + \varepsilon.$$

- Wir wählen zunächst eine beliebige positive Zahl ε. Dann gilt für die Folgen (a_n) und (b_n):

  (1) $1 - \varepsilon < \frac{n-1}{n} < 1 + \varepsilon$ für alle n von einem bestimmten n_1 ab;

  (2) $\frac{1}{2} - \varepsilon < \frac{n+1}{2n} < \frac{1}{2} + \varepsilon$ für alle n von einem bestimmten n_2 ab.

- Die Addition der Ungleichungen (1) und (2) ergibt:

  (3) $\frac{3}{2} - 2\varepsilon < \frac{3n-1}{2n} < \frac{3}{2} + 2\varepsilon.$

  Wegen der beliebigen Wahl einer positiven Zahl ε ist auch 2ε eine positive Zahl.

  Nach analogen Überlegungen zu LB 97 ergibt sich die Zahl $\frac{3}{2}$ als Grenzwert der Folge $(a_n + b_n)$.

Bemerkung: Im Lehrbuch wird mit $\frac{\varepsilon}{2}$ gearbeitet. Man kann jedoch ohne Beschränkung der Allgemeinheit auch mit ε arbeiten.

Hinweis: Die Folge $\left(\frac{3n-1}{2n}\right)$ kann auch auf andere Weise in eine Summe von zwei Folgen zerlegt werden, z. B.: $\frac{3n}{2n} - \frac{1}{2n} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2n}$.

Dem Beweis zu ▷ 3 schließt sich die Mitteilung über die Gültigkeit von ▷ 4 (oB) an.

Erarbeitung von Beispielen für die Anwendung der Grenzwertsätze Neben der Bearbeitung von LBA 1 können gegebenenfalls Beispiele aus LE 7 vorgezogen werden.

Übungen im Berechnen von Grenzwerten In weitgehend SSA sollten die Schüler (im LB finden sie verständliche Beispiele als Muster vor) die LBA 2 und eine weitere Auswahl aus den LBA zu LE 7 lösen (↗ auch HA), falls sie bereits über ausreichende Fertigkeiten im Umformen von Termen beim Zusammensetzen und Zerlegen von Folgen verfügen.

Zusammenfassung ▷ 3 und ▷ 4 werden zu einer Gesamtaussage zusammengefaßt:
Wenn es gelingt, eine Folge in eine Summe, Differenz, ein Produkt oder einen Quotienten von konvergenten Folgen zu zerlegen, und es sind die Grenzwerte der durch Zerlegung entstandenen Folgen bekannt, so läßt sich der Grenzwert der gegebenen Folge als Summe (Differenz, Produkt, Quotient) der Grenzwerte der durch die Zerlegung entstandenen Folgen berechnen.

Die Grenzwertsätze können durch Beispiele interpretiert werden (↗ auch HA) (Bedingung beim Quotienten beachten).
Es ist zu betonen, daß mit den bisher erarbeiteten Sätzen weder die Konvergenz einer beliebigen Folge nachgewiesen, noch der Grenzwert einer beliebigen konvergenten Folge berechnet werden kann. Die „Leistungsfähigkeit" der bisher erarbeiteten theoretischen „Werkzeuge" sollte man nach folgender Übersicht zusammenstellen (das kann auch erst am Schluß der Behandlung der LE 7 erfolgen):

Grenzwertdefinition	⟶	Nachweis, daß eine gegebene Zahl Grenzwert einer gegebenen Folge ist
Satz über die Konvergenz monotoner beschränkter Folgen	⟶	Nachweis der Konvergenz beschränkter monotoner Folgen
Grenzwertsätze	⟶	Berechnung von Grenzwerten, falls sich eine gegebene Folge in eine Summe, eine Differenz, ein Produkt oder einen Quotienten zweier konvergenter Folgen zerlegen läßt, deren Grenzwerte bekannt sind. Besonders günstig ist es, wenn es gelingt, gegebene Folgen in konstante Folgen oder Nullfolgen zu zerlegen.

Die genannten Möglichkeiten wurden nur an relativ einfachen Beispielen geübt. Mitunter läßt sich der Grenzwert einer Folge aus der Betrachtung des Anfangsstückes, des allgemeinen Gliedes oder des Graphen erraten oder vermuten.

Hausaufgaben Auswahl aus LBA 1 und 2 in LE 7; Interpretation der Grenzwertsätze durch selbstgewählte Beispiele; Vorbereitung mehrerer differenzierter SV für die Zus zu Stoffabschnitt 2.1 (LB 101 ff.)

Kontrollaufgaben

1. Sprechen Sie über die Bedeutung der Grenzwertsätze für die Bestimmung von Grenzwerten konvergenter Folgen!
2. LBA 2

Lerneinheit 7 (1 Std.)
Anwendung der Grenzwertsätze

LB 98 bis 100

Ziele

Die Schüler

- können Grenzwerte bestimmter Folgen durch Anwenden der Grenzwertsätze berechnen,
- beherrschen den grundlegenden Begriff des Grenzwertes einer Zahlenfolge und die damit im Zusammenhang stehenden Begriffe.

Schwerpunkte

- Erarbeitung von Beispielen für die Berechnung von Grenzwerten (Auswahl aus ■ 13 bis 16)
- Übung und Vertiefung des Berechnens von Grenzwerten (Auswahl aus LBA 1 und 2)
- Zusammenfassung (LB 101 ff.)

Methodische Hinweise

Erarbeitung von Beispielen für das Berechnen von Grenzwerten In Abhängigkeit vom Übungseffekt in LE 6 und von der Kontrolle der HA sollte eine Auswahl aus den ■ 13 bis 16 durchgearbeitet werden, mit dem zusätzlichen Auftrag: Wählen Sie jeweils eine ähnliche Folge, und erläutern Sie daran das Bestimmen des Grenzwertes!

Übung und Vertiefung Bei der weitgehend SSA ist darauf zu achten, daß eine gegebene Folge *in verschiedener Weise* zerlegt werden kann. Es gilt stets, solche Zerlegungsfolgen zu finden, deren Grenzwert im Prinzip bekannt ist, also vor allem konstante Folgen und Nullfolgen. Aufgaben vom Typ LBA 1a) bis g) und 2a) bis g) sind von *allen* Schülern zu lösen. Man sollte auch eine Aufgabe mit einer divergenten Folge einsetzen, z. B.:

Prüfen Sie, ob sich für die Folge $\left(\frac{7n^2 + 2n}{2n + 5}\right)$ ein Grenzwert bestimmen läßt!

Auch die LBA 1 und 2 können so umformuliert werden, denn es darf nicht der Eindruck entstehen, als ob jede gegebene Folge konvergent und der Grenzwert berechenbar sein müsse. Zur Festigung des erworbenen Wissens kann der Wert von Gegenbeispielen nicht hoch genug eingeschätzt werden (↗ [13], vor allem Abschnitt 1.3.).

Zur differenzierten Arbeit mit leistungsstarken Schülern seien noch folgende Möglichkeiten genannt:

- Anknüpfend an ■ 14 und ● 21 Ermitteln des Grenzwertes der Folge (a_n) mit $a_n = \left(\frac{2n + 1}{n}\right)^5$.
  Die Anwendung von ▷ 4 (Zerlegung in Faktoren) führt, wenn $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{2n + 1}{n}$ als bekannt vorausgesetzt wird, zu $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{2n + 1}{n}\right)^5 = 2^5 = 32$ und damit auf die Frage, ob eine entsprechende Beziehung allgemein gilt. Die Lösung von LBA 3 bestätigt diese Vermutung.
- Mit dem Konstruieren von Folgen nach vorgegebenen Bedingungen (LBA 4 und 5) wird zugleich die Erarbeitung des Grenzwertes einer Funktion vorbereitet, denn dort werden gewisse Folgen verwendet, die gegen eine bestimmte Zahl x_0 konvergieren.
- Hat man in der Einführung in die Probleme nach Variante 2 das Paradoxon des Zenon von Achilles und der Schildkröte verwendet (↗ UH 75), so kann nunmehr das dort aufgeworfene Problem gelöst werden:
  Die Betrachtung gipfelt in der Frage, ob für die Partialsummenfolge (a_{A_n}) mit
  $a_{A_n} = a \cdot \frac{1 - \frac{1}{k^n}}{1 - \frac{1}{k}}$ ein Grenzwert gefunden werden kann.

Lösung: a und k sind Konstanten. Wir formen um zu $a_{A_n} = \dfrac{a}{1 - \frac{1}{k}}\left(1 - \dfrac{1}{k^n}\right)$. Da $\dfrac{1}{k^n}$ für $k > 1$ eine Nullfolge ist, ergibt sich $\lim\limits_{n\to\infty} a_{A_n} = \dfrac{a}{1 - \frac{1}{k}} = \dfrac{a \cdot k}{k - 1}$. Das ist der gleiche Term, der sich bei Anwendung der Formel für die gleichförmig-geradlinige Bewegung ergibt.

Zusammenfassung Bei der Arbeit an der Zus auf LB 101ff. erfüllen die Schüler folgende Aufträge:

- Erläutern Sie jeden Begriff bzw. jeden Satz anhand eines selbstgewählten Beispiels!
- Nennen Sie andere, gleichwertige Formulierungen für die Definitionen und Sätze!

Kontrollaufgaben

1. Untersuchen Sie die Folge $(a_n) = \left(\dfrac{5n + 2}{n}\right)$ auf Beschränktheit und Monotonie (Begründung), und bestimmen Sie gegebenenfalls Schranken, Grenzen und den Grenzwert!
2. Weisen Sie nach, daß die Folge $(b_n) = \left(\dfrac{4}{n - 5}\right)$ eine Nullfolge ist!

Stoffabschnitt 2.2 (8 Std.)
Grenzwerte von Funktionen; Stetigkeit

Bisher standen Zahlenfolgen als spezielle Funktionen im Mittelpunkt der Untersuchungen. Nunmehr wird zur Betrachtung von Funktionen übergegangen, die in bestimmten Intervallen reeller Zahlen definiert sind.
Unter Verwendung konvergenter Folgen von Argumenten wird das Verhalten von Funktionen in der Umgebung bestimmter Stellen untersucht. Dabei sollte von anschaulichen Vorstellungen ausgegangen werden, indem die Schüler Graphen von Funktionen daraufhin untersuchen, ob sie Lücken, Sprünge, Knicke oder dergleichen aufweisen oder ob sie sich in einem bestimmten Intervall ohne Absetzen des Stiftes durchzeichnen lassen.
Aus solchen Betrachtungen ist das Motiv zu entwickeln, exakte Beschreibungen des Verhaltens von Funktionen an bestimmten Stellen und in bestimmten Intervallen zu finden.
Ein Hauptanliegen der Behandlung dieses Stoffabschnitts ist zwar der weitere Ausbau des theoretischen Instrumentariums für die folgenden Stoffgebiete, wobei die Definition der Begriffe „Grenzwert einer Funktion an einer Stelle" und „Stetigkeit einer Funktion an einer Stelle" sowie die Grenzwertsätze für Funktionen im Mittelpunkt stehen. Dennoch bilden auch hier vielfältige Übungen im Lösen von Aufgaben einen Schwerpunkt des Unterrichts, um die Begriffe durch Anwenden zu festigen und tiefer zu erfassen.
Es kann nicht erwartet werden, daß die Schüler beim Aneignen der Definitionen dieser weiteren fundamentalen Begriffe die tragenden Ideen selbständig finden. Deshalb sollte sich deren Erarbeitung unter starker Anleitung durch den Lehrer vollziehen.
Obwohl die zu behandelnden Sätze nicht bewiesen werden, entwickeln die Schüler ihre Fähigkeiten im Beweisen und Begründen beim Bearbeiten zahlreicher Einzelbeispiele.

In der folgenden Übersicht ist die Struktur des in diesem Unterrichtsabschnitt zu behandelnden Stoffes dargestellt.

Begriffe	**Sätze**	**Verfahren**
Definieren: **Grenzwert** einer Funktion f **an der Stelle** x_0 (▶ 4)		Bestimmen von Grenzwerten von Funktionen in einfachen Fällen (Fe)
Einführen: **Summe (Differenz, Produkt, Quotient) zweier Funktionen** (LB 111)	Satz über den Grenzwert der Summe (der Differenz, des Produktes, des Quotienten) zweier Funktionen (▷ 5; oB)	Berechnen von Grenzwerten von Summen (Differenzen, Produkten, Quotienten) von Funktionen in einfachen Fällen (Fe)
Definieren: **Stetigkeit** einer Funktion f **an der Stelle** x_0 (▶ 5)		Betrachten von Beispielen für an der Stelle x_0 stetige (unstetige) Funktionen (Fä)
Einführen: **Stetigkeit** einer Funktion f **in einem Intervall** I (LB 115)	Bemerkungen zur Stetigkeit einer Funktion in dem Randpunkt eines abgeschlossenen Intervalls I (LB 116)	Betrachten von Beispielen für Funktionen, die in einem Intervall I oder im gesamten Definitionsbereich stetig (unstetig) sind
Einführen: **Stetigkeit** einer Funktion f **im gesamten Definitionsbereich** (LB 115)	Zwischenwertsatz (▷ 6; oB)	Verstehen von Beispielen und Gegenbeispielen; näherungsweises Ermitteln von Nullstellen (Fä)
Einführen: **Maximum (Minimum)** einer Funktion f in einem Intervall I (LB 119)	Satz über die Existenz des Maximums (Minimums) einer stetigen Funktion f in einem abgeschlossenen Intervall I (▷ 7; oB)	
– Definieren		– Termumformungen (Fe) – Lösen von Gleichungen und Ungleichungen (Fe) – Beweisen, Begründen (Fe)

Lerneinheit 8 **(1 Std.)**
Beispiele für unstetige Funktionen

LB 103 bis 106

Ziele

Die Schüler
- erwerben anhand von Beispielen erste inhaltliche Vorstellungen von der Stetigkeit bzw. Unstetigkeit einer Funktion f an einer Stelle x_0,
- begreifen, daß präzise Begriffe entwickelt werden müssen, mit denen die Stetigkeit bzw. Unstetigkeit von Funktionen an bestimmten Stellen oder in bestimmten Intervallen eindeutig beschrieben werden kann.

Schwerpunkte

- Motivierung der Behandlung des Verhaltens von Funktionen an bestimmten Stellen und in bestimmten Intervallen
- Untersuchung von Funktionen (● 23 und 24)
- Weitere Übungen zur Sicherung des Ausgangsniveaus für LE 9

Methodische Hinweise

Motivierung der Behandlung des Verhaltens von Funktionen Im UG wird der im Bild B 24 dargestellte physikalische Vorgang erläutert.

Hinweis: In Lehrbüchern der Physik und Nachschlagewerken wird im allgemeinen die Temperatur als von der zugeführten Wärmemenge abhängige Größe auf der Ordinatenachse abgetragen. Im physikalischen Sinne wird mit dem Graphen ein *Vorgang* beschrieben, der darin besteht, daß bei Zuführung von Wärme die Temperatur in einem bestimmten Intervall konstant bleibt (z. B. bis alles Eis geschmolzen ist), die Kurve also in diesem Intervall parallel zur Abszissenachse verläuft (↗ z. B. [11], S. 98). Im Bild B 24 sind die variablen Größen vertauscht, womit dann auch ein anderer Vorgang beschrieben wird. Der Graph der Funktion zeigt an der Stelle T_S ein „ungewöhnliches“ Verhalten, das im bisherigen Mathematikunterricht noch nicht im Blickpunkt stand.

Sicherung des Ausgangsniveaus Erforderlich sind hinreichende Fertigkeiten im Berechnen von Wertetafeln und Zeichnen von Graphen von Funktionen (Aufgabe 13 aus den Aufgaben zur täglichen Übung und Wiederholung (UH 16) einsetzen).

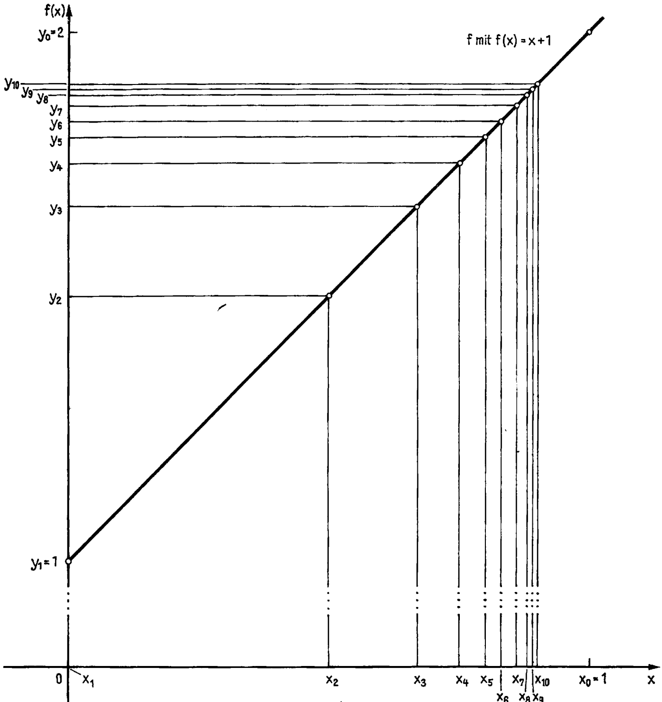
Untersuchung von Funktionen Für das Vorgehen bieten sich zwei Möglichkeiten an:

Variante 1

Die Schüler bearbeiten ● 23 und 24 und stellen die Lösungen tabellarisch zusammen. In Verbindung mit den Bildern B 25 bis 29 und dem Text auf LB 104f. können sie sich die inhaltlichen Vorstellungen aneignen, die in den folgenden Unterrichtsstunden präzisiert werden sollen. Der Einsatz des LB in dieser Weise ist rationell.

Variante 2

In SSA untersuchen die Schüler die Funktionen (1) bis (5) aus ● 23. Da die meisten dieser Funktionen den Schülern nicht geläufig sind, sollten evtl. noch zwei ihnen bekannte Funktionen einbezogen werden, z. B. eine lineare und eine quadratische Funktion. Je nachdem, wieviel Zeit zur Verfügung steht, können die Schüler Wertetafeln und Definitionsbereiche ermitteln, Graphen zeichnen und auf Monotonie und Existenz von Nullstellen untersuchen. Auf alle Fälle sind Stellen zu ermitteln, in denen die Graphen der Funktionen (ähnlich wie im Beispiel zur Motivierung) keinen stetigen Verlauf zeigen. Die Bilder B 25 bis 29 und der



Wertetabelle für $y_n = f(x_n)$ mit $(x_n) = (1 + \frac{1}{n})$:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_n	0	0,5	0,67	0,75	0,8	0,83	0,86	0,88	0,89	0,9
$f(x_n)$	1	1,5	1,67	1,75	1,8	1,83	1,86	1,88	1,89	1,9

Bild 2.6

Text auf LB 104f. sollten erst nach den eigenen Bemühungen der Schüler zur Kontrolle benutzt werden.
Bei beiden Varianten können die Untersuchungen dadurch ergänzt werden, daß die Schüler zum Vergleich ihnen bekannte lineare und quadratische Funktionen, Potenzfunktionen (z. B. mit $f(x) = x^n$, n negativ, ganz) oder Winkelfunktionen (z. B. mit $f(x) = \tan x$) betrachten (↗ [7], S. 38 bis 40; [8], Kapitel B; [4], Kapitel C 5, C 7, C 10).

Weitere Übungen zur Sicherung des Ausgangsniveaus für LE 9 In SSA bearbeiten die Schüler ● 25 (dabei die in den LE 5 und 6 erarbeiteten Übersichten nutzen) und den auf LB 106f. in LE 9 einführenden Text (dabei versuchen sie, sich dessen Inhalt am Graph einer beliebigen selbstgewählten Funktion zu verdeutlichen).

Hausaufgaben Auswahl aus den LBA 1 bis 5; Bearbeiten von ● 26

Hinweise: Die Einheiten sind möglichst groß zu wählen (10 cm), um eine übersichtliche Darstellung zu sichern (↗ Bild 2.6). Im ● 26 wird nur die Markierung der Punkte $(x_n; f(x_n))$ verlangt. Um auf ▶ 4 hinzuarbeiten, sollten auch die Glieder der Folgen (x_n) und $(f(x_n))$ dargestellt werden, so daß sichtbar wird, daß für die gegen 1 konvergierende Folge (x_n) die zugehörige Folge $(f(x_n))$ offenbar gegen 2 strebt. Um das zu erkennen, reichen 10 Glieder u. U. noch nicht aus, und man muß sich die Folgen fortgesetzt denken.
Während bisher Folgen in einem Koordinatensystem dargestellt wurden, sind hier die Glieder der Folgen (x_n) bzw. $(f(x_n))$ zweckmäßigerweise auf der Abszissen- bzw. der Ordinatenachse ein und desselben Koordinatensystems abzubilden (↗ dazu auch Bemerkung zu LE 1).
Es geht also jetzt stets um zwei Folgen:

- (x_n), die man beliebig, aber so wählt, daß x_0 ihr Grenzwert ist;
- $(f(x_n))$, deren Konvergenzverhalten interessiert.

Lerneinheit 9 (2 Std.)
Grenzwert einer Funktion an einer Stelle

LB 106 bis 110

Ziele

Die Schüler

- verstehen das Vorgehen beim Erfassen des Verhaltens einer Funktion in der Umgebung der Stelle x_0 mit Hilfe von Folgen von Funktionswerten,
- kennen die Definition des Grenzwertes einer Funktion an der Stelle x_0 und die zugehörige Symbolik,
- können die Definition unter Anleitung auf einfache Beispiele anwenden.

Schwerpunkte

1. Stunde
- Zielstellung zur Erarbeitung des Begriffs „Grenzwert einer Funktion"
- Erarbeitung der Definition des Grenzwertes einer Funktion an einer Stelle (▶ 4)
- Anwendung der ▶ 4 (■ 17 und 18)

2. Stunde
- Anwendung der ▶ 4 auf Spezialfälle (lineare und konstante Funktionen) und Gegenbeispiele (● 27 und 28; ■ 19)
- Übungen im Ermitteln von Grenzwerten von Funktionen (Auswahl aus LBA 1 bis 7)

Methodische Hinweise

Zielstellung zur Erarbeitung des Begriffs „Grenzwert einer Funktion" Nach der Wdh der Überlegungen zur Sicherung des Ausgangsniveaus für LE 9 und der Kontrolle der vorbereitenden HA in der vorangegangenen Unterrichtsstunde erfolgt ein LV mit folgenden Leitgedanken:
Bei der Erarbeitung des Begriffs „Grenzwert einer Funktion" geht es nicht um eine Erweiterung des Begriffs „Grenzwert einer Zahlenfolge" und dessen Übertragung auf beliebige Funktionen, sondern um eine grundsätzlich andere Frage. Während uns bei Zahlenfolgen deren Verhalten bei unbegrenztem Anwachsen des Arguments n interessierte, wollen wir jetzt das Verhalten einer Funktion an einer bestimmten Stelle x_0 bzw. in deren Umgebung untersuchen. (Der Frage nach dem Verhalten einer Funktion bei unbegrenztem Anwachsen des Arguments wird erst im Stoffgebiet 3 „Differentialrechnung" nachgegangen.)
Die in LE 8 betrachteten Funktionen zeigen ungewöhnliches Verhalten, häufig nur an einer einzigen Stelle. In anderen Bereichen verhalten sie sich „normal". Und besonders dort, wo sie sich „normal" verhalten, sind die Funktionen von besonderem Interesse. Die bisher benutzten Umschreibungen des Verhaltens von Funktionen an bestimmten Stellen sind unzulänglich, die dabei verwendeten Begriffe (Sprung, Lücke, Knick) nicht definiert. Wir benötigen vielmehr von der Anschauung unabhängige Mittel, um exakt feststellen zu können, wodurch sich die Funktionen in ihren „normalen" Bereichen von ihrem „ungewöhnlichen" Verhalten an bestimmten Stellen unterscheiden.
Dazu werden wir die Begriffe „Grenzwert einer Funktion an einer Stelle", „Stetigkeit einer Funktion an einer Stelle" und „Stetigkeit einer Funktion in einem Intervall" erarbeiten.

Erarbeitung der ▶ 4 Im UG wird das auf LB 107f. dargestellte Beispiel durchgearbeitet. Der Lehrer sollte die Untersuchung durch folgende Aufträge, Impulse und Hinweise führen:
1. Wir wählen zwei Funktionen f_1 und f_2 aus, die an der Stelle $x_0 = 1$ ein ungewöhnliches Verhalten zeigen (LB 107, Bilder B 25 und 27). Zeichnen Sie die Graphen in getrennte Koordinatensysteme! Wählen Sie die Einheit genügend groß (10 cm)!
2. Wie im ● 26 wählen wir Folgen von Argumenten aus, die gegen $x_0 = 1$ konvergieren. Nennen Sie solche Folgen $\left(\text{z. B. } \left(1 - \frac{1}{n}\right), \left(\frac{n}{n+1}\right), \left(\frac{n+1}{n}\right), \left(\frac{n}{2n-1}\right) \text{ u. a.}\right)$! Welche sind monoton wachsend (fallend)?
   Wir wählen zunächst eine monoton wachsende, gegen 1 konvergierende Folge, z. B. (x_n) mit $x_n = 1 - \frac{1}{n}$.

3. Bestimmen Sie die ersten 10 Glieder der Folge (x_n), stellen Sie eine Wertetafel auf und markieren Sie diese Glieder auf der Abszissenachse beider Koordinatensysteme!
4. Bilden Sie die Folgen der zugehörigen Funktionswerte $(f(x_n))$ für beide Funktionen! Wertetafeln! Markierung auf den Ordinatenachsen!
   Bestimmen Sie die Grenzwerte dieser Folgen (Grenzwertsätze anwenden)!
5. Wählen Sie eine andere gegen 1 konvergierende Folge (x_n), z. B. eine monoton fallende $\left(\text{etwa } (x_n) \text{ mit } x_n = 1 + \frac{1}{n}\right)$! Wiederholen Sie dafür die Schritte 3. und 4.!
6. Machen Sie sich am Graph der Funktion (1) verständlich, daß bei beliebiger Wahl einer gegen 1 konvergierenden Folge (x_n) die zugehörige Folge $(f(x_n))$ stets gegen 2 konvergiert (LB 108)!

Die nun einzuführende ▶ 4 und die entsprechende Symbolik sollten etwa anhand der Funktion f_1 an der Stelle $x_0 = 1$ erläutert werden. Anhand der Funktion f_2 an der Stelle $x_0 = 1$ kann ein Gegenbeispiel erörtert werden. (Welche Bedingungen sind nicht erfüllt?)

Anwendung der ▶ 4 In SSA arbeiten die Schüler die ■ 17 und 18 durch. Stets sollten sie dazu den Graph der Funktion zeichnen oder entsprechende Lehrbuchdarstellungen nutzen. Für die Bestimmung des Grenzwertes werden sofort *beliebige* Folgen (x_n) ausgewählt, die der jeweiligen Bedingung genügen.

Hausaufgaben LBA 1 (in Verbindung mit dem nochmaligen Durcharbeiten von ■ 17 und 18). Das richtige Lösen von LBA 1 kann als Nachweis für das Verstehen der Beispiele angesehen werden.

Anwendung der ▶ 4 auf Spezialfälle Die in ● 27 und 28 enthaltenen einfachen Fälle können rasch plausibel gemacht werden. Auf das Gegenbeispiel ■ 19 sollte man nicht verzichten.

Übungen im Ermitteln von Grenzwerten von Funktionen In SSA lösen die Schüler eine Auswahl aus den LBA 1 bis 7. Dabei müssen die Schüler *nicht in jedem Falle* die exakten, auf ▶ 4 fußenden Nachweise führen. Es genügt zuweilen auch für das *inhaltliche Verstehen*, wenn sie in Verbindung mit einem Graph die Existenz oder Nichtexistenz eines Grenzwertes plausibel erklären, wobei sie sich durchaus inhaltlich auf ▶ 4 stützen (z. B. auch bei LBA 7) und sich bewußt sind, daß auf diese Weise jedoch kein exakter Nachweis geführt werden kann.

Kontrollaufgaben

1. Was verstehen Sie unter dem Grenzwert einer Funktion an der Stelle x_0?
2. Ermitteln Sie den Grenzwert der Funktion $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x}$ an der Stelle $x_0 = 0$!

Lerneinheit 10 (2 Std.)
Grenzwertsätze für Funktionen

LB 111 bis 113

In Analogie zur Berechnung von Grenzwerten von Folgen werden weitere und rationelle Möglichkeiten der Berechnung von Grenzwerten von Funktionen gefunden. Übungen sollen die Schüler befähigen, in einfachen Fällen Grenzwertbestimmungen selbständig durchzuführen.

Ziele

Die Schüler

- können Funktionen in Summen, Differenzen, Produkte oder Quotienten einfacherer Funktionen zerlegen,
- kennen die Grenzwertsätze für Funktionen und können mit ihrer Hilfe Grenzwerte berechnen (↗ LP 26)

Schwerpunkte

1. Stunde

- Motivierung der Erarbeitung rationeller Verfahren zum Berechnen von Grenzwerten von Funktionen in Verbindung mit der Reaktivierung der Berechnung von Grenzwerten von Zahlenfolgen durch Anwenden der Grenzwertsätze für Zahlenfolgen
- Einführen von „Summe (Differenz, Produkt, Quotient) zweier Funktionen“ mit entsprechenden Übungen im Zusammensetzen und Zerlegen von Funktionen (■ 20; ● 29)
- Erarbeitung der Grenzwertsätze anhand von Beispielen (● 30; ▷ 5)

2. Stunde

Festigung des Berechnens von Grenzwerten von Funktionen (■ 21 bis 24; LBA 1, 3, 5, 6)

Methodische Hinweise

Motivierung der Erarbeitung rationeller Verfahren zum Berechnen von Grenzwerten von Funktionen Die Schüler lösen folgende Aufgaben, wiederholen dabei das Ermitteln von Grenzwerten von Zahlenfolgen und vergleichen die Lösungswege miteinander:

1. Ermitteln Sie den Grenzwert der Folge (a_n) mit

$$a_n = \frac{2n^2 + 1}{n^2 + 4}!$$

2. Ermitteln Sie den Grenzwert der Funktion f mit

$$f(x) = \frac{x^2 + 4x}{x^3 - 5x}$$

an der Stelle $x = 0$ (LBA 4d))!

Beim Vergleichen beantworten die Schüler die Fragen:

- Wie gehen Sie bei Aufgabe 1. vor (Anwenden der Grenzwertsätze für Folgen) und wie bei Aufgabe 2.?
- Kann man zum Ermitteln von Grenzwerten von Funktionen in ähnlicher Weise rationelle Verfahren anwenden?

Einführen von „Summe (Differenz, Produkt, Quotient) zweier Funktionen" Nach dem Durcharbeiten von ■ 20 und ● 29 bilden die Schüler selbst weitere Beispiele für das Zusammensetzen und Zerlegen von Funktionen.

Erarbeitung der Grenzwertsätze für Funktionen Zwei Schritte sind denkbar:

- Bearbeitung von ● 30 unter Einbeziehung des Textes auf LB 111
- Formulieren der Grenzwertsätze, Erläutern anhand selbstgewählter Beispiele durch die Schüler

Bemerkung: Einerseits ist die Analogie zwischen den Grenzwertsätzen für Zahlenfolgen und denen für Funktionen bewußtzumachen (ggf. tabellarisch gegenüberstellen), andererseits immer wieder auch der Unterschied zu betonen (↗ Zielstellung auf UH 100).

Festigung des Berechnens von Grenzwerten von Funktionen

- Die Schüler arbeiten in SSA die ■ 21 und 22 durch und wenden die darin vorgeführten Verfahren beim Lösen einer Auswahl aus LBA 1 und 3 an.
- Die ■ 23 und 24 dienen der Vorbereitung auf die Behandlung des Differentialquotienten, ebenso die LBA 5 und 6, auf deren Bearbeitung nicht verzichtet werden sollte.

Hausaufgaben Auswahl aus LBA 2, 4, 5 und 6

Kontrollaufgabe

Ermitteln Sie $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2 + 4x}{x^3 - 5x}$ (Aufgabe 2, UH 102) jetzt nur mit Hilfe der Grenzwertsätze!

Lerneinheit 11 (2 Std.)
Stetigkeit

LB 113 bis 116

Ziele

Die Schüler

- kennen die Definition der Stetigkeit einer Funktion an der Stelle x_0 und in einem Intervall I;
- verstehen das Vorgehen beim Untersuchen einfacher Funktionen auf Stetigkeit und können es in sehr einfachen Fällen selbst ausführen.

Schwerpunkte

1. Stunde

- Wiederholung: Definitionsbereiche und Grenzwerte von Funktionen

- Erarbeitung der ▶ 5 und Festigung (■ 25 und 26)
- Anwendung der ▶ 5 auf einfache Beispiele (LBA 1)

2. Stunde

- Festigung des Begriffs „Stetigkeit einer Funktion an einer Stelle“ durch Lösen von Aufgaben und seine Erweiterung auf die Stetigkeit einer Funktion in einem Intervall bzw. im gesamten Definitionsbereich (■ 26b))
- Untersuchungen zur Stetigkeit (Unstetigkeit) von Funktionen an einfachen Beispielen (LBA 2 bis 4)

Methodische Hinweise

Wiederholung: Definitionsbereiche und Grenzwerte von Funktionen In SSA sollte die Tabelle auf LB 113f. durchgearbeitet werden. Folgende Kontrollaufträge (auf Folie) könnten erteilt werden:

- Geben Sie für jede Funktion den Definitionsbereich an!
- Begründen Sie die in Spalte 3 enthaltenen Aussagen über die Existenz des Funktionswertes und des Grenzwertes an der Stelle $x_0 = 1$!
- Prüfen Sie, bei welchen Funktionen der Graph ohne Absetzen des Stiftes durchgezeichnet werden könnte!
- Wodurch unterscheiden sich die gegebenen Funktionen hinsichtlich der betrachteten Eigenschaften?

Erarbeitung und Festigung der ▶ 5 In SSA (auch in Gruppen) erfüllen die Schüler folgenden Auftrag:
Führen Sie wie in der Tabelle auf LB 113f. die Untersuchungen für die im ● 23 (LB 104) gegebenen Funktionen

f_2 mit $f(x) = |x|$ an der Stelle $x_0 = 0$;

f_4 mit $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ an der Stelle $x_0 = 0$;

f_5 mit $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ an der Stelle $x_0 = 1$!

Beantworten Sie dabei für jede Funktion folgende Fragen:

- Ist die Funktion an dieser Stelle definiert?
- Hat sie dort einen Grenzwert?
- Stimmen Funktionswert und Grenzwert, sofern sie existieren, dort überein?
- Kann man den Graph an dieser Stelle, ohne den Stift abzusetzen, durchzeichnen?
- Für welche Funktion können Sie diese Fragen bejahen?
- Nennen Sie andere Stellen, für die alle diese Fragen bejaht werden können!

Hinweis: Nutzen Sie den Text auf LB 104f.; die ■ 18 und 19; LBA 7 (LB 110); Bilder B 24, 26, 27!
Die Schüler bzw. Schülergruppen können die Ergebnisse ihrer Untersuchungen in einer Tabelle zusammenfassen.

Funktion $f(x)$	Stelle x_0	Bedingungen			
		$x_0 \in D$	$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existiert	$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$	Graph läßt sich bei x_0 durchzeichnen
$x^2 + 1$	1	erf.	erf.	erf.	erf.
$\frac{x^2 - 1}{x - 1}$	1	nicht erf.	erf.	nicht erf.	nicht erf.
usw.					

Man kann umgekehrt auch Bedingungen vorgeben und entsprechende Beispiele dazu suchen lassen.
Die Auswertung der Tabelle führt zu ▶ 5 und kann dem Verstehen der ■ 25 und 26 dienen.

Anwendung der ▶ 5 auf einfache Beispiele Mit Hilfe der in ▶ 5 formulierten und durch die Arbeit an der Tabelle gefestigten Schrittfolge zum Nachweis der Stetigkeit einer Funktion an einer Stelle x_0 sollten die Schüler die LBA 1 lösen und dabei die Tabellenform nutzen.

Festigung des Begriffs „Stetigkeit einer Funktion an einer Stelle“ Beim Auswerten der HA begründen die Schüler, warum eine bestimmte Funktion an einer Stelle x_0 stetig ist oder nicht. Der Stetigkeitsbegriff sollte auch im weiteren Unterricht in erster Linie durch seine Anwendung gefestigt werden.
Seine Erweiterung zu den Begriffen „Stetigkeit einer Funktion in einem Intervall“ bzw. „Stetigkeit einer Funktion im gesamten Definitionsbereich“ kann mit Hilfe der Erläuterungen zum ■ 26b) erarbeitet werden.

Hinweise:

- Zur Erläuterung der Stetigkeit in einem abgeschlossenen Intervall (↗ LB 115) eignet sich neben ■ 27 auch die Funktion f mit

  $$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 1 & \text{für } x < 1 \\ \frac{1}{2}x + 2 & \text{für } x \geqq 1 \end{cases}$$ aus der Tabelle auf LB 113f.

  Sie ist im Intervall $\langle 0; 1 \rangle$ nicht stetig, denn sie ist wohl in $x_0 = 1$ definiert, aber es existiert dort kein Grenzwert.
  Sie ist im Intervall $\langle 1; 2 \rangle$ stetig, denn sie ist in $x_0 = 1$ definiert, und für alle ganz im Intervall verlaufenden, gegen 1 konvergierenden Folgen (x_n) stimmt der Grenzwert $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n)$ mit $f(1)$ überein.

  Eine solche Folge wäre z. B. $(x_n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)$.
- Ebenso sollten für die an ■ 27 anschließende Bemerkung (↗ LB 116) weitere Beispiele angegeben werden.

Untersuchungen zur Stetigkeit (Unstetigkeit) von Funktionen Diese Übungen dienen in erster Linie der Festigung der Kenntnisse der Schüler und nicht etwa der Entwicklung von Fertigkeiten. Dennoch können die Schüler die beim Lösen der LBA 2 bis 4 erforderlichen Schritte (Bestimmen von Funktions- und Grenzwerten, Skizzieren der Graphen usw.) weitgehend in SSA gehen. Sie können auch selbst Beispiele für (an einer Stelle, einem Intervall) stetige (unstetige) Funktionen bilden.

Hausaufgaben Auswahl aus LBA 2 bis 4

Kontrollaufgaben

1. Prüfen Sie, ob $f(x) = x^3$ an der Stelle $x_0 = 2$ stetig ist!
2. Prüfen Sie, ob $f(x) = \frac{1}{x^2}$ im Intervall $(-1; 1)$ stetig ist!
3. Prüfen Sie, ob $f(x) = \frac{1}{x}$ stetig ist!

Lerneinheit 12 (1 Std.)
Eigenschaften stetiger Funktionen

LB 117 bis 120

Ziele

Die Schüler

- kennen den Zwischenwertsatz und den Satz vom Maximum (Minimum),
- verstehen die Anwendung dieser Sätze zur näherungsweisen Bestimmung von Nullstellen und Maxima (Minima) von Funktionen (in abgeschlossenen Intervallen).

Schwerpunkte

- Erarbeitung des Zwischenwertsatzes (▷ 6) und Festigung anhand von Beispielen und Aufgaben (■ 20; ● 31; LBA 1 und 7)
- Erarbeitung des Satzes vom Maximum (Minimum) (▷ 7) und Anwendung auf einfache Beispiele (● 32; ■ 30; LBA 5), ohne hier Fertigkeiten anzustreben

Methodische Hinweise

Erarbeitung und Festigung von ▷ 6 In SSA sollten sich die Schüler ▷ 6 erarbeiten (↗ LB 117f.). Dazu erhalten sie folgende Anleitung:

- Erläutern Sie anhand des Bildes B 31 den Satz über die Existenz einer Nullstelle!
- Erläutern Sie anhand des Bildes B 32 die Erweiterung dieses Satzes!
- Erläutern Sie ▷ 6 anhand des Bildes B 33!
- Begründen Sie, daß die beiden vorangehenden Aussagen im ▷ 6 mit enthalten sind (↗ auch LBA 7*)!

Zur Festigung sollte im UG geklärt werden: Wir können nicht für beliebige Funktionen Nullstellen berechnen, weil wir für die dabei auftretenden Gleichungen nicht in jedem Falle über Lösungsverfahren verfügen. In solchen Fällen kann man gegebenenfalls Nullstellen

durch systematisches Probieren näherungsweise bestimmen bzw. direkt finden. Der Zwischenwertsatz kann dazu ebenfalls verwendet werden.
Anschließend können in SSA ■ 29 und ● 31 bearbeitet werden.

Erarbeitung und Anwendung von ▷ 7 Folgende Schritte im UG sind denkbar:

- Betrachten der Bilder B 36 und 37, evtl. unter Einbeziehung des Textes auf LB 119 (Warum hat die Funktion im Bild B 36 keinen größten und keinen kleinsten Wert? – Antwort: Es gibt keine größte reelle Zahl; 1 gehört nicht zum Definitionsbereich)
- Einführen der Begriffe „Maximum (Minimum) von f in I“

  Hinweis: Diese Begriffe entsprechen den im Stoffgebiet 3 einzuführenden Begriffen „Globales Maximum (Minimum)“.
- Formulieren von ▷ 7; dazu Erörtern von ■ 30

Anschließend wird ▷ 7 in SSA beim Lösen von LBA 5 angewendet; die Schüler skizzieren dabei die Graphen.

Hausaufgaben LBA 1 und 3; ● 32

Kontrollaufgaben	
1. LBA 2a)	**2.** LBA 6a)

Stoffabschnitt 2.3 (5 Std.)
Übungen und Anwendungen

Zur Zielstellung für die Behandlung dieses Stoffabschnitts sei auf die einleitenden Ausführungen zum Stoffabschnitt 1.3 auf UH 61 verwiesen.
Die vom LP vorgesehenen Unterrichtsstunden sind auf keinen Fall zur Vermittlung neuen Stoffes, sondern zur Weiterentwicklung des Könnens der Schüler zu verwenden. Auch da, wo im Rahmen des Lösens von Aufgaben neue Erkenntnisse gewonnen werden (z. B. bei Beweisaufgaben), geht es nicht um die Erweiterung des reproduzierbaren Wissens, sondern um die Festigung der beim Lösen solcher Aufgaben zu verwendenden Begriffe, Sätze und Verfahren. Die Aufgaben sollen vorwiegend den komplexen Einsatz des erworbenen Wissens und Könnens (auch aus zurückliegenden Stoffgebieten und Klassenstufen) verlangen und weitgehend in SSA (teilweise auch in Gruppenarbeit und nach differenzierten Aufgabenstellungen) gelöst werden.
LP 26f. und 28 setzen die hier zu beachtenden **Schwerpunkte**. Die folgende Übersicht schlüsselt diese auf die 5 Unterrichtsstunden auf und ordnet ihnen Komplexe bestimmter LBA zu. Diese Aufgaben werden auf keinen Fall alle bearbeitet werden können. Der Lehrer sollte, den Bedingungen in der eigenen Klasse entsprechend, auswählen und entscheiden, welche Aufgaben im Unterricht allen Schülern zu stellen bzw. für HA vorzusehen bzw. differenziert einzelnen Schülern oder Schülergruppen zu übertragen sind.

Unterr.-Std.	Auswahl aus LBA	Zu lösende Probleme
1	1 bis 8 16 bis 18 20, 21	Untersuchen von Zahlenfolgen auf Monotonie. Beschränktheit. Grenzen und Konvergenz einschließlich Übungen im Beweisen und Begründen
2	9 bis 11 16, 19	Untersuchen vor allem geometrischer Folgen und von Partialsummenfolgen
3	12 bis 15	Lösen komplexer Aufgaben geometrischen Inhalts einschließlich einer Beweisführung durch vollständige Induktion
4	22 bis 25	Untersuchen von Funktionen (Grenzwerte, Nullstellen, Maxima, Minima)
5		Schriftliche LK zum Stoffgebiet 2

Methodische Hinweise

Im Vordergrund steht weitgehend die SSA beim Lösen von Aufgaben unter Verwendung des LB und von Nachschlagewerken im Unterricht, verbunden mit intensiver häuslicher Arbeit, insbesondere in folgenden Formen:

- Die Schüler lösen komplexe Aufgaben als HA. Bei rechtzeitiger Auftragserteilung können die Schüler kleine schriftliche Hausarbeiten (z. B. zu den LBA 11 bis 17) anfertigen und vorlegen. Zur Durchsicht dieser Arbeiten kann der Lehrer leistungsstarke Schüler (Fachhelfer) heranziehen.
- Die Schüler bereiten zu Hause einzeln oder in Gruppen zu gleichen oder unterschiedlichen Aufgaben SV vor. Unterschiedliche Lösungswege werden dann im Unterricht miteinander verglichen. Diese Form eignet sich auch für komplexe Aufgaben und Beweisaufgaben, z. B. bei den LBA 4, 5, 18 bis 21.
  Es geht hierbei nicht darum, daß vom Lehrer weitere Beweise vorgeführt werden, sondern daß sich die Schüler im Beweisen üben. Das Finden von Beweisgedanken kann nicht nach Minuten geplant werden, im Unterricht entstehen dabei zuweilen größere Differenzen im Zeitbedarf zwischen den Schülern. Deshalb sollten sich die Schüler in häuslicher, evtl. differenzierter Arbeit in Ruhe darauf vorbereiten. Beim SV im Unterricht können ergänzend bestimmte Beispiele genannt, erläutert bzw. bearbeitet werden, z. B. im Anschluß an LBA 4 bzw. 5 entsprechende Folgen (a_n) und $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ oder zu LBA 18 entsprechende Folgen (a_n) und (a_n-a) bzw. $(|a_n|)$. Oder: Zu den in den LBA 1 oder 6 angegebenen Folgen (a_n) werden, sofern sie gegen eine Zahl a konvergieren, die Folgen $(a_n - a)$ angegeben, und es wird nachgewiesen, daß diese Folgen Nullfolgen sind.
- Die Schüler legen Zusammenstellungen an, wobei sie größere Stoffbereiche wiederholen müssen und sich zugleich ein Hilfsmittel zum Lösen weiterer Aufgaben schaffen (Kataloge von Folgen: divergente, konvergente Folgen, speziell Nullfolgen und Folgen mit bestimmten anderen Grenzwerten; Kataloge von Funktionen mit Kennzeichnung von Eigenschaften; Übersichten über wichtige Definitionen und Sätze, an Beispielen verdeutlicht). Sie arbeiten dazu das LB und eigene Niederschriften durch und benutzen auch die Zusammenfassungen auf LB 101 und LB 121 f.

Zur 1. Stunde (↗ Übersicht auf UH 108)
Hier sei ein möglicher Stundenverlauf skizziert, wobei auf eine effektive, selbständige und teilweise differenzierte Schülertätigkeit orientiert werden soll.

Gliederung
(1) Kontrolle und Auswertung der HA
(2) Untersuchen einer Zahlenfolge auf Monotonie und Konvergenz
(3) Differenzierte Übung:
- Beweisen eines Satzes
- Berechnen von Grenzwerten

(4) Erteilen von HA

Zu (1) Die HA könnten sein:
- Lösen von LBA 1a)
- Geben Sie für die in der Zusammenfassung auf LB 121 genannten Grenzwertsätze je ein Beispiel an!

In Auswertung der zweiten Aufgabe nennen einzelne Schüler ihre Beispiele, andere Schüler beurteilen, ob diese Beispiele richtig gewählt wurden.

Zu (2) SSA an LBA 16a). Gegebenenfalls können der Graph der Folge gezeichnet und weitere Glieder ermittelt werden (LBA 16e) und f) für leistungsstarke Schüler).

Zu (3) – Beweis der in LBA 4 formulierten Sätze durch vom Lehrer bestimmte Schüler oder solche, die es sich selbst zutrauen
- Lösen einer Auswahl aus LBA 6 durch Schüler, die noch unsicher im Nachweisen der Konvergenz von Folgen und im Berechnen von Grenzwerten sind. Sie beginnen mit denjenigen Aufgaben, bei denen sie nach eigenem Ermessen weniger Schwierigkeiten haben. Der Lehrer leistet in diesem Stundenabschnitt individuelle Hilfe.

Zu (4) Lösen von LBA 19 zur inhaltlichen Vorbereitung der folgenden Unterrichtsstunde (↗ 2. Std. der Übersicht auf UH 108)

Zur 2. und 3. Stunde
In der 2. Std. sollte neben dem Ermitteln von Grenzwerten geometrischer Folgen und von Partialsummenfolgen (z. B. LBA 9 und 10, Auswahl aus LBA 1 und 6) insbesondere LBA 11 gelöst werden. Die dabei gefestigten Kenntnisse werden dann in der 3. Std. beim Lösen geometrisch eingekleideter Aufgaben angewendet. In die Auswahl komplexer Aufgaben sollte auch LBA 13 einbezogen werden, weil hierin auch ein Beweis durch vollständige Induktion zu führen ist.

Zur 4. Stunde
Das Untersuchen von Funktionen sollte auch mit dem Ziel erfolgen, das Ausgangsniveau zur Behandlung des Stoffgebietes 3 zu sichern. In die Übungen nach Art der LBA 24 und 25 sollten auch aus den Klassenstufen 8 bis 10 bekannte Funktionen (lineare, Potenz-, Wurzel- und Winkelfunktionen) einbezogen werden.
Zur Festigung des Arbeitens mit Termen, wie sie beim Behandeln des Differentialquotienten auftreten werden, können die ■ 23 und 24 und die LBA 5 und 6 aus LE 10 dienen.
In LBA 23 soll der Grenzwertsatz für die Summe von Funktionen (▷ 5 (a)) bewiesen werden. Dieser Beweis wird vom LP nicht gefordert. Deshalb kann er allenfalls eine Übung im Beweisen für leistungsstarke Schüler sein.

Stoffgebiet 3

Differentialrechnung

Vorbemerkungen

Die im Stoffgebiet 2 begonnene Einführung der Schüler in die Analysis wird nunmehr mit der Behandlung grundlegender Begriffe, Sätze und Verfahren der **Differentialrechnung** fortgesetzt. Die Schüler lernen damit ein wichtiges Anwendungsgebiet des Grenzwertbegriffes kennen. Zugleich werden neue Denk- und Arbeitsweisen der Mathematik entwickelt und auch solche, die in den vorangegangenen Klassenstufen erworben wurden, zur Bearbeitung von Problemen und zur Lösung von Aufgaben mit Hilfe der Differentialrechnung herangezogen, so daß die Behandlung dieses Stoffgebietes einen gewissen Höhepunkt in der mathematischen Ausbildung der Schüler darstellt.

Folgendes **Wissen und Können** soll herausgebildet werden: Die Schüler

- erfassen inhaltlich voll die zentralen Begriffe „Ableitung der Funktion f an der Stelle x_0" und „Ableitung der Funktion f im Intervall I";
- können selbständig rationale Funktionen und Wurzelfunktionen differenzieren;
- können eine Gleichung für eine Tangente an den Graph einer Funktion aufstellen;
- können Kurvendiskussionen an Beispielen der genannten Funktionen durchführen;
- können als **Hauptziel** der Behandlung dieses Stoffgebietes die erarbeiteten theoretischen Grundlagen zum rationellen Lösen entsprechender Aufgaben nutzen, dabei soll die „Behandlung ... nicht von vornherein auf das kalkülmäßig-algorithmische Vorgehen orientiert sein" (LP 31);
- können insbesondere Extremwertaufgaben lösen und die dazu erforderlichen Schritte durch Anwenden der vermittelten Begriffe, Sätze und Verfahren begründen.

Daraus ergeben sich folgende **fachlich-didaktische Schwerpunkte:**

- Erarbeiten der theoretischen Grundlagen des Ableitungsbegriffs;
- Erarbeitung der Regeln zur Differentiation einer Summe, eines Produkts, eines Quotienten zweier Funktionen und verketteter Funktionen sowie von Regeln zur Bildung der 1. Ableitung rationaler Funktionen und von Wurzelfunktionen;
- Erarbeiten der theoretischen Grundlagen und Entwickeln von Fertigkeiten bei Kurvendiskussionen und bei Extremwertaufgaben, dabei Erwerben von sicheren Fertigkeiten im Differenzieren von Vertretern der behandelten Funktionen;
- Untersuchen der Umkehrbarkeit der Differentiation und Aufsuchen von Stammfunktionen.

Die im Mathematikunterricht bisher entwickelten **geistigen Fähigkeiten** der Schüler werden in diesem Stoffgebiet zielstrebig weiter ausgeprägt, z. B. ist die sprachlich-logische Schulung konsequent weiterzubetreiben, die von ihnen zu beherrschende mathematische Terminologie und Symbolik erfährt eine wesentliche Bereicherung, Fähigkeiten im Erkennen des Wesentlichen, im Analysieren, Abstrahieren, Systematisieren werden beim Erarbeiten von Begriffen, beim Beweisen von Sätzen, beim Bearbeiten von Problemen und beim Lösen von Aufgaben

weiter ausgebaut. Durch Aufträge zur selbständigen Bearbeitung einzelner ausgewählter Lehrbuchabschnitte werden die Schüler an das Studium mathematischer Literatur herangeführt.
Zur **weltanschaulichen** und **politisch-ideologischen Bildung und Erziehung** sollten eine kurze Darstellung der geschichtlichen Entwicklung der Differentialrechnung und Wertungen der Lösungen von Extremwertaufgaben aus Technik, Ökonomie und Landesverteidigung genutzt werden. Durch weitgehend selbständige Arbeit der Schüler beim Erwerb und bei der Festigung des Wissens und Könnens werden wertvolle Charaktereigenschaften und Verhaltensqualitäten weiter ausgeprägt.
Fachübergreifende Beziehungen bestehen zum Physikunterricht (↗ LP Ph Klasse 12, Stoffgebiet 1. Mechanik II, Stoffabschnitt 1.1).

Kontrollaufgaben

1. Zeigen Sie, daß die Funktion f mit $f(x) = 2x^3$ an der Stelle $x_0 = 1{,}5$ differenzierbar ist! Erläutern Sie den Begriff „Differenzierbarkeit der Funktion f an der Stelle x_0“!

2. Bilden Sie die 1. Ableitung der Funktion f mit $f(x) = 3x^2 + 5$ an der Stelle $x_0 = 2$ durch Bestimmen des Grenzwertes des Differenzenquotienten!
Erläutern Sie die einzelnen Schritte!

3. Ermitteln Sie eine Gleichung für die Tangente an den Graph der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}$ im Punkt $P_1\left(\frac{1}{3}; f\left(\frac{1}{3}\right)\right)$!

4. Berechnen Sie diejenigen Stellen x, an denen die Tangenten an den Graph der Funktion $f(x) = 2x^2 - 1$ parallel zu der Sekante durch die Punkte $P_1(-1; f(-1))$ und $P_2(2; f(2))$ sind!
Fertigen Sie eine Skizze an!

5. Bilden Sie die 1. Ableitungen folgender Funktionen!

a) $f(x) = 2x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2{,}8x + 3 - \frac{1}{x}$

b) $f(x) = (3x + 2)^3$ **c)** $f(x) = \sqrt[3]{x}\,(x^2 - 3x)$

d) $f(x) = \frac{3x - 2}{x^2 + 1}$ **e)** $f(x) = x^2 + \sqrt{x + 1}$

f) $f(x) = \sqrt[3]{(2x - 1)^2}$ **g)** $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4}}$

Erläutern Sie die dabei benutzten Regeln!

6. LBA 5 in LE 10

7. LBA 5 in LE 12

8. **a)** LBA 8 in LE 14
b) Geben Sie eine Gleichung für die Tangente an den Graph der Funktion f mit $f(x) = \sqrt[3]{x}$ im Punkt P_1 $(2; f(x_1))$ an!

9. LBA 2, 3, 7 in LE 15

10. *Nullstellen von Funktionen und Schnittpunkte der Graphen von Funktionen*

a) Erläutern Sie den Begriff „Nullstelle der Funktion f“!
b) LBA 2, 5, 7 in LE 16
c) LBA 2, 4 in LE 17
d) LBA 1, 4 in LE 18
e) Erläutern Sie den Weg zur Lösung einer Wurzelgleichung!

11. *Verhalten rationaler Funktionen im Unendlichen*
LBA 1d), a), c), 2c) in LE 19

12. *Polstellen gebrochener rationaler Funktionen*

a) LBA 2a) in LE 20
b) Erläutern Sie den Begriff „Polstelle der rationalen Funktion f“!
c) Erläutern Sie, wie das Verhalten einer gebrochenen rationalen Funktion in einer Umgebung einer Polstelle untersucht wird!

13. *Monotonieverhalten rationaler Funktionen*
LBA 1 b) in LE 24

14. *Lokale Extrempunkte von Funktionen*

a) Erläutern Sie die Begriffe „lokales Extremum“, „globales Extremum“ der Funktion f an der Stelle x_0!
b) LBA 2a), e), f) in LE 25

15. *Kurvendiskussionen*
LBA 32b), c), d); 34 (LB 221f.)

16. *Extremwertaufgaben*
LBA 42, 48, 53, 54, 62 (LB 222ff.)

17. *Aufsuchen von Stammfunktionen*
LBA 2, 5, 9 in LE 29

Aufgaben für tägliche Übungen und Wiederholungen

Komplex 1: Übungen im Umformen von Termen

1. Für welche Zahlen sind die folgenden Terme im Bereich der reellen Zahlen *nicht* definiert?

a) $\frac{2x+3}{x+6}$ **b)** $\frac{m-5}{m^2-5}$ **c)** $\frac{a-2}{e^2-36}$

d) $\frac{3}{r}+\frac{2}{4e}-\frac{6}{e+2}$ **e)** $\frac{2k}{3k^2(k^2-3)}$ **f)** $\sqrt{x+3}$

g) $\sqrt{b^2+1}$ **h)** $\sqrt{2x^2-8}$ **i)** $\frac{1}{\sqrt{x^2-9}}$ **k)** $\frac{x}{\sqrt{2x-1}}$

2. Formen Sie die folgenden Produkte in Summen um!

a) $(3a^2+b)\cdot c\cdot(a-b)$ **b)** $(1-x)^2\cdot(1+x)$

c) $(3z+5)(2z-1)(z+1)$ **d)** $(c+d)^2(c^2-d^2)$

e) $\left(\frac{1}{2}u+\frac{1}{3}v\right)(3u-2v)$

3. Schreiben Sie die folgenden Summen als Produkte!

a) $x^2 + 18x + 81$ b) $2a^2 - \frac{2}{5}a + \frac{1}{50}$

c) $5{,}29 - y^2$ d) $6{,}2x - 93x^2$

e) $z^4 - 16$ f) $a^2 - ab + 3a - 3b$

4. Formen Sie die folgenden Summen in Quotienten um!

a) $\frac{x^2 + xy^2}{5y} + \frac{xy^2 - 2y^2}{3y} - \frac{xy + y}{2}$ b) $\frac{2a - 1}{7b - 2c} + \frac{3a + 2}{14b - 4c} - \frac{a - 3}{35b - 10c}$

c) $\frac{5m + 7n}{2m^3 + 2m^2n} - \frac{13n - 11m}{6m^2n - 6mn^2}$

Komplex 2: Lösen von Gleichungen, Ungleichungen und Gleichungssystemen

5. Lösen Sie die folgenden Gleichungen jeweils nach den in eckigen Klammern vermerkten Variablen auf!

a) $A = \frac{a + c}{2} \cdot h \quad [c; h]$ b) $A = \frac{\pi}{4}(d_1^2 - d_2^2) \quad [d_2]$

c) $A = 2\pi r^2 + 2\pi rh \quad [r; h]$ d) $A = \frac{3}{4}a^2 \cdot \sqrt{3} \quad [a]$

e) $A = \frac{\pi}{4}d(d + 2s) \quad [d; s]$

6. Ermitteln Sie die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen (Variablengrundbereich: Menge der reellen Zahlen)!

a) $(x + 4)(x - 9) - (x - 5)(x - 7) = 20$

b) $(s + b)x - a = (c + bx) - (b - a)x$ mit $b \neq 0$

c) $\frac{4}{5}(y + 3) - \frac{7y - 2}{3} = 6 - \frac{3(y + 2)}{2}$ d) $\frac{a}{b} = \frac{1 + z}{1 - z}$ mit $b \neq 0, x \neq 1, a \neq -b$

e) $\frac{r - ax}{rx + s} = \frac{r}{s}$ f) $4x^2 - 9 = 0$ g) $(x + 5)^2 = 576$

h) $\frac{3}{8}x^2 = \frac{4}{y}x$ i) $z^2 - 28z + 195 = 0$ k) $\frac{2}{3}x^2 - 4x = -\frac{9}{2}$

7. Zerlegen Sie die folgenden Terme in Linearfaktoren!

a) $x^2 - x - 6$ b) $2x^2 - 5x + 2$ c) $6x^2 + 5x - 6$

8. Geben Sie die Lösungsmenge folgender Ungleichungen an (Variablengrundbereich: Menge der reellen Zahlen)!

a) $3x + 5 < 13$ b) $9 - 2y < 11$

c) $5x - 2 < 7x + 8$ d) $2 - \frac{x}{2} > \frac{x}{3} - 2$

e) $\frac{1 - z}{2} < \frac{z - 2}{3}$

9. Lösen Sie folgende Gleichungssysteme (Variablengrundbereich: Menge der reellen Zahlen)!

a) $2x + 7y = 25$

$\quad x - 3y = -7$

b) $7x + 3y = -\frac{11}{2}$

$\quad \frac{5}{2}y = -7{,}5$

c) $\frac{2x + 3y}{4} - \frac{x - 5y}{3} = -4$

$\quad \frac{2x - y}{4} - \frac{x + y}{3} = 2$

d) $4x - 5y = 1$

$\quad 20x = 5(1 + 5y)$

e) $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 2$

$\quad 3x + 2y = 11$

Komplex 3: Arbeiten mit Potenzen und Wurzeln

10. Berechnen bzw. vereinfachen Sie (alle Basen seien reelle Zahlen)!

a) $\frac{2}{3}a^2 \cdot b \cdot x \cdot \frac{1}{2} \cdot a^{-2}b^3x^2 \cdot 5a^3b^{-1}x^0$

b) $\frac{3}{4}x^{a-1} : \left(\frac{1}{2} \cdot x^{1-2a}\right) \cdot (x^a)^{-3}$

c) $\frac{2}{3}a^{-3}b \cdot \frac{1}{2}ab^2 - \frac{1}{4}a^{-2}b^3$

d) $a^{\frac{3}{2}} \cdot b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{3}{2}} \cdot e^{\frac{1}{3}}$

e) $\sqrt{ab^3} \cdot \sqrt{ab}$

f) $\frac{2 + 3\sqrt{2}}{2 - 3\sqrt{2}}$

g) $\left(a^{-\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{4}}$

h) $\frac{a^{\frac{2}{5}}b^{-\frac{1}{3}}}{\left(a^{\frac{7}{10}}b^{-1}\right)^2}$

11. Geben Sie die Bedingungen an, unter denen die folgenden Wurzeln definiert sind!

a) $\sqrt{x}$ b) $\sqrt{3 - x}$ c) $\sqrt{2x - 3}$

Komplex 4: Übungen zu Funktionen

12. Skizzieren Sie die Graphen folgender Funktionen f!

a) $f(x) = 2x - 1$

b) $f(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}$

c) $f(x) = x^2 - 3$

d) $f(x) = (x - 1)^2$

e) $f(x) = (x - 2)^2 + 1$

f) $f(x) = x^2 + 2x - 2$

g) $f(x) = x^3$

h) $f(x) = x^4 - 1$

i) $f(x) = \frac{1}{x}\ (x \neq 0)$

k) $f(x) = \frac{1}{(x + 1)^2}\ (x \neq -1)$

l) $f(x) = \frac{1}{x^3}\ (x \neq 0)$

m) $f(x) = \sqrt{x + 2}\ (x \geqq -2)$

n) $f(x) = \sqrt{x}$

o) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

p) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

q) $f(x) = |x|$

r) $f(x) = |x| + |x - 2|$

s) $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ -1 & \text{für } x = 0 \end{cases}$

13. Eine Gerade soll durch die Punkte P_1 (2; 3) und P_2 (4; −1) gehen.

a) Ermitteln Sie eine Gleichung dieser Geraden!

b) Liegen die Punkte P_3 (1; 4) und P_4 (3; 1) auf dieser Geraden?

14. Eine Funktion f mit $f(x) = x^2 + px + q$ hat die Nullstellen $x_1 = 2$ und $x_2 = 8$.

a) Ermitteln Sie p, q, die Funktionsgleichung und die Koordinaten des Scheitelpunkts!

b) Gehören die Punkte P_1 (3; −5) und P_2 (−3; 5) dieser Parabel an?

Komplex 5: Lösen von Aufgaben aus der Geometrie

15. Im rechtwinkligen Dreieck $\triangle ABC$ ($\sphericalangle\ ABD = 90°$) (↗ Bild 3.1)

sei gegeben	Berechnen Sie
c, b	a
a, c	b
a, p	h
p, q	h
p, b	a

16. Berechnen Sie Flächeninhalt und Umfang der in Bild 3.2 dargestellten Figur!

17. Bestimmen Sie x, wenn gilt (↗ Bild 3.3):

a) $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a}{x}$; **b)** $\dfrac{c}{b} = \dfrac{x}{a}$; **c)** $\dfrac{e}{f} = \dfrac{a}{x}$!

Formulieren Sie die benötigten Sätze in Worten!

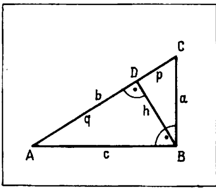


Bild 3.1

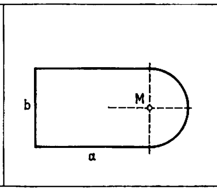


Bild 3.2

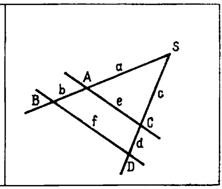
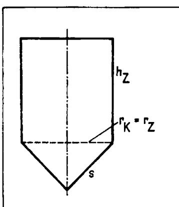


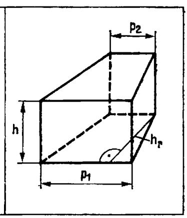
Bild 3.3

18. Berechnen Sie das Volumen und den Oberflächeninhalt folgender Körper!

a) Oben offener Zylinder (gegeben r_z, h_z) mit unten angesetztem Kegel (gegeben $r_k = r_z$; s) (↗ Bild 3.4)

b) Geschlossene Halbkugel (gegeben: r)





Bilder 3.4, 3.5

c) Prisma, dessen Grundfläche ein gleichschenkliges Trapez ist (gegeben: p_1, p_2 seien die Längen der parallelen Seiten des Trapezes mit $p_1 > p_2$, h_T sei die Länge der Höhe des Trapezes, h sei die Länge der Höhe des Prismas) (↗ Bild 3.5)

Komplex 6: Ermitteln von Grenzwerten von Funktionen

19. Bestimmen Sie folgende Grenzwerte!

a) $\lim\limits_{x \to 2} 2x^3$

b) $\lim\limits_{x \to 1} (4x^2 - 7x + 3)$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} (3x^3 - 2x^2)$

d) $\lim\limits_{x \to +\frac{1}{2}} \dfrac{4x^2 - 1}{1 + 2x}$

e) $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}} \dfrac{4x^2 - 1}{1 + 2x}$

f) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - 3x}{x^2 + 3x}$

Stoffverteilung

Thema	Std.	Zu reaktivierender Stoff	Zu erarbeitender Stoff
Stoffabschnitt 3.1 Ableitung einer Funktion			8 Std.
– Motivierungsbeispiele für das Stoffgebiet; Wiederholung	1	– Durchschnitts- und Augenblicksgeschwindigkeit (↗ Physikunterricht) – Wiederholung des Grenzwertbegriffs; Berechnen von Grenzwerten – Lineare Funktionen	– Beispiele Augenblicksgeschwindigkeit einer ungleichförmigen geradlinigen Bewegung; Extremwertaufgabe
1 Anstieg einer Kurve in einem Punkt	1	– Anstieg einer Geraden – Tangens eines Winkels	– Anstieg m einer Geraden als Tangens des Winkels, den g mit der positiven Richtung der x-Achse einschließt – Anstieg einer Sekante an eine Kurve als „mittlerer Anstieg der Kurve im Intervall $\langle x_0; x_0 + h \rangle$" – ▶ 1 (Differenzenquotient der Funktion f an der Stelle x_0) – Einführen von „Grenzwert des Differenzenquotienten" – Einführen von „Tangente an eine Kurve in einem Punkt" – Anstieg einer Kurve im Punkt P_0 als Anstieg der Tangente an den Graph der Funktion im Punkt P_0

Thema	Std.	Zu reaktivierender Stoff	Zu erarbeitender Stoff
			– Anstieg der Tangente als Grenzwert des Differenzenquotienten
2 Augenblicksgeschwindigkeit bei geradlinigen Bewegungen	1	– Gleichmäßig beschleunigte Bewegung (freier Fall)	– Durchschnittsgeschwindigkeit als Quotient von Wegdifferenz Δs und Zeitdifferenz Δt – Augenblicksgeschwindigkeit zum Zeitpunkt t_0 als Grenzwert der Durchschnittsgeschwindigkeit für $\Delta t \to 0$
3 Ableitung einer Funktion an einer Stelle	1	– Definition des Grenzwertbegriffs	– ▶ 2 (Differenzierbarkeit einer Funktion f an einer Stelle x_0) – ▶ 3 (1. Ableitung der Funktion f an der Stelle x_0) – Historische Erläuterungen zur Entstehung der Differentialrechnung
4 Beispiele für die Berechnung von Ableitungen	2	– Gleichung einer Geraden	– Schrittfolge für das Bilden der 1. Ableitung einer Funktion über den Grenzwert des Differenzenquotienten – Ermitteln des Wertes der 1. Ableitung ausgewählter Funktionen f an der Stelle x_0 – Aufstellen einer Gleichung der Tangente an den Graph einer Funktion f an der Stelle x_0 – Berechnen des Schnittwinkels der Tangente mit der x-Achse
5 Ableitung einer Funktion in einem Intervall	1		– Einführung von „Differenzierbarkeit einer Funktion f in einem Intervall I" – Einführung von „1. Ableitung einer Funktion f in einem Intervall I" – Differenzierbarkeit von Funktionen – Bilden der 1. Ableitung von Funktionen im Intervall I – Ableitung der konstanten Funktion g mit $g(x) = c$ – Berechnen von solchen Stellen, an denen die Tangenten an den Graph der Funktion f parallel zu einer Geraden sind
6 Zusammenhang zwischen Stetig-	1	– Stetigkeit einer Funktion f in x_0	– Sprechweise „Aus ... folgt ..."

Thema	Std.	Zu reaktivierender Stoff	Zu erarbeitender Stoff
keit und Differenzierbarkeit		– Differenzierbarkeit einer Funktion f in x_0	– Einführung von „notwendige Bedingung“ und „hinreichende Bedingung“ – Satz „Aus der Differenzierbarkeit von f in x_0 folgt die Stetigkeit von f in x_0“; Nichtgültigkeit der Umkehrung dieses Satzes

Stoffabschnitt 3.2 Differentiationsregeln; die Differentiation von rationalen Funktionen und Wurzelfunktionen 15 Std.

Thema	Std.	Zu reaktivierender Stoff	Zu erarbeitender Stoff
7 Ableitung einer Summe	1	– Begriffe „Summe zweier Funktionen“ und „Rationale Funktion“	– ▷ 1 (Differenzierbarkeit und Differentiation der Summe zweier in x_0 differenzierbarer Funktionen) (mB) – Summenregel, auch für mehr als zwei Summanden – Anwenden der Summenregel auf ausgewählte Funktionen
8 Ableitung eines Produkts; Ableitung von Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten	2	– Graphen von Potenzfunktionen – Begriff „Produkt zweier Funktionen“	– ▷ 2 (Differenzierbarkeit und Differentiation des Produkts zweier in x_0 differenzierbarer Funktionen) (mB) – ▷ 3 (Differenzierbarkeit und Differentiation einer Potenzfunktion mit natürlichen Exponenten) (mB) – Ableitung der Funktion $f(x) = c \cdot g(x), c \in P$ – Anwenden der Produktregel auf ausgewählte Funktionen – Aufstellen einer Gleichung für eine Funktion unter vorgegebenen Bedingungen
9 Ableitung eines Quotienten	2	– Begriff „Quotient zweier Funktionen“ – Differenzierbarkeit einer Funktion f an einer Stelle x_0	– ▷ 4 (Differenzierbarkeit und Differentiation eines Quotienten zweier in x_0 differenzierbarer Funktionen) (oB) – Quotientenregel – Erweitern der Quotientenregel für die Ableitung von Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten auf Potenzfunktionen mit negativen ganzzahligen Exponenten (Nachweis) – Anwenden der Quotientenregel und der Regel zur Differentiation von Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten

Thema	Std.	Zu reaktivierender Stoff	Zu erarbeitender Stoff
10 Differentiation rationaler Funktionen	2	– Rationale Funktionen – Nichtrationale Funktionen	– Einführung der Begriffe „Ganze rationale Funktion“ und „Gebrochene rationale Funktion“ – Übungen im Differenzieren rationaler Funktionen
11 Umkehrfunktionen	1	– Potenzfunktionen mit (nichtganzzahligen) rationalen Exponenten – Wurzelbegriff	– ▶ 4 (Umkehrfunktion einer Funktion) – Einführung der Begriffe „eineindeutige Funktion“ und „zueinander inverse Funktionen“ – Einführung von „Wurzelfunktion“; Definitionsbereich und Wertebereich von Wurzelfunktionen – Monotonie und Stetigkeit bei zueinander inversen Funktionen – Zeichnen der Graphen von zueinander inversen Funktionen
12 Differentiation von Wurzelfunktionen	2	– Grenzwertsätze für Funktionen – Wurzelbegriff – Wurzelfunktion	– Ableitung der Wurzelfunktion $g(x) = \sqrt{x}$ – ▷ 5 (Beziehung zwischen den Ableitungen beliebiger zueinander inverser Funktionen) (oB) – Erweitern der Regel für die Ableitung von Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten auf Potenzfunktionen mit Exponenten der Form $\frac{1}{n}$ $(n \in N,\ n > 1)$ – Anwenden dieser Regel auf die Differentiation von Wurzelfunktionen
13 Verkettung von Funktionen	1		– Einführung der Begriffe „verkettete Funktionen“, „innere Funktion“, „äußere Funktion“
14 Ableitung der Verkettung zweier Funktionen	2	– Ableitung von rationalen Funktionen und von Wurzelfunktionen	– Satz über die Differenzierbarkeit und die Differentiation verketteter Funktionen (oB) – Kettenregel – Erweitern der Regel für die Ableitung von Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten auf Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten $(x > 0)$ – Anwenden dieser Regeln

Thema	Std.	Zu reaktivierender Stoff	Zu erarbeitender Stoff
15 Ableitungen höherer Ordnung	2	– Differenzierbarkeit einer Funktion	– Einführung von „n-te Ableitung einer Funktion an einer Stelle x_0 bzw. in einem Intervall I“ – Zusammenfassung der Differentiationsregeln
Stoffabschnitt 3.3 Kurvenuntersuchungen, Extremwertaufgaben			25 Std.
16 Nullstellen ganzer rationaler Funktionen	1	– Nullstelle einer Funktion – Berechnen von Nullstellen von linearen und quadratischen Funktionen – Lösungsformel für die Normalform der quadratischen Gleichung – Verwenden des nichtausschließenden „oder“	– Ermitteln von Nullstellen ganzer rationaler Funktionen – Erarbeiten von Lösungsverfahren für Gleichungen 3. und höheren Grades, die auf lineare und quadratische Gleichungen zurückgeführt werden können – Berechnen der Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen zweier Funktionen
17 Nullstellen gebrochener rationaler Funktionen	2		– Definition „Nullstelle einer gebrochenen rationalen Funktion“ – Berechnen von Nullstellen gebrochener rationaler Funktionen
18 Nullstellen von Wurzelfunktionen	2	– Wurzelfunktionen; Definitionsbereich und Wertebereich	– Bestimmen der Nullstellen von Wurzelfunktionen – Lösen von Wurzelgleichungen (einmaliges Quadrieren erforderlich) – Probe bei Wurzelgleichungen
19 Verhalten rationaler Funktionen für $x \to \pm\infty$	2	– Grenzwertbegriff – Grenzwertsätze für Folgen	– Verhalten gegebener rationaler Funktionen im Unendlichen – Einführung des Begriffs „Asymptote einer Kurve“
20 Polstellen rationaler Funktionen	1	– Stellen, an denen gebrochene rationale Funktionen nicht definiert sind	– Einführung des Begriffs „Polstelle einer gebrochenen rationalen Funktion“ – Berechnen von Polstellen gebrochener rationaler Funktionen – Untersuchen des Verhaltens einer Funktion in einer Umgebung der Polstelle

Thema	Std.	Zu reaktivierender Stoff	Zu erarbeitender Stoff
21 Lokale und globale Extrema von Funktionen	1	– Begriffe „Maximum“ und „Minimum“	– ▶ 5 (Lokales Maximum (Minimum) einer Funktion an einer Stelle x_0) – Einführung von „globales Maximum (Minimum) einer Funktion in einem Intervall I“
22 Eine notwendige Bedingung für lokale Extrema	2	– Ableitungsbegriff – Notwendige Bedingung, hinreichende Bedingung	– ▷ 6 (Eine notwendige Bedingung für lokale Extrema) (mB) – Beweis, daß die Umkehrung dieses Satzes nicht gilt – Berechnen möglicher lokaler Extrema
23 Der Satz von ROLLE und der Mittelwertsatz der Differentialrechnung	1	– Tangentenproblem	– ▷ 7 (Satz von ROLLE) – ▷ 8 (Mittelwertsatz der Differentialrechnung) (oB)
24 Eine hinreichende Bedingung für die Monotonie	2	– Monotonie von Funktionen – Lösen von Ungleichungen – Zerlegen von Termen in Linearfaktoren	– ▷ 9 (Zusammenhang zwischen Monotonie und 1. Ableitung einer in einem Intervall differenzierbaren Funktion) (mB) – Fallunterscheidung beim Lösen quadratischer Ungleichungen
25 Ein hinreichendes Kriterium für lokale Extrema	2	– Satz über eine notwendige Bedingung für lokale Extrema – Satz über den Zusammenhang zwischen Monotonie und 1. Ableitung einer Funktion	– ▷ 10 (Notwendige und hinreichende Bedingung für lokale Extrema) (mB) – Rechnerisches Ermitteln lokaler Extrema – Erarbeiten eines Verfahrens zum Ermitteln lokaler Extremstellen (Schrittfolge)
26 Kurvendiskussionen	4	– Differentiationsregeln – Ermitteln von Nullstellen, Polstellen, lokalen und globalen Extrema von rationalen Funktionen und Wurzelfunktionen – Monotonieverhalten einer Funktion – Verhalten einer Funktion im Unendlichen – Beschränktheit des Wertebereichs einer Funktion – Symmetrieeigenschaften des Graphen einer Funktion	– Kurvendiskussion ganzer rationaler Funktionen, gebrochener rationaler Funktionen, von Wurzelfunktionen – Schnittpunkt des Graphen einer Funktion mit der y-Achse

Thema	Std.	Zu reaktivierender Stoff	Zu erarbeitender Stoff
27 Extremwertaufgaben	5	– Ermitteln lokaler Extrema – Flächeninhalts- und Volumenformeln geometrischer Objekte – Strahlensatz – Satzgruppe des PYTHAGORAS	– Schrittfolge: Aufstellen des Lösungsansatzes (Zielfunktion) unter Berücksichtigung der Nebenbedingungen; Untersuchen der Zielfunktion auf das Vorhandensein lokaler Extremwerte; Bestimmen des globalen Extremums der Zielfunktionen; Antwortsatz
Stoffabschnitt 3.4 Stammfunktionen	5 Std.		
28 Umkehrung der Differentiation	3	– Differentiationsregeln – Mittelwertsatz der Differentialrechnung	– Umkehrung der Differentiation von Funktionen – ▶ 6 (Stammfunktion einer gegebenen Funktion) – Ermitteln von Stammfunktionen zu einfachen gegebenen rationalen Funktionen, Wurzelfunktionen und Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten – Herleitung von ▷ 11 (Menge aller Stammfunktionen einer gegebenen Funktion) – Geometrische Bedeutung der Konstanten c
29 Regeln für das Aufsuchen von Stammfunktionen	2	– Summenregel – Regel für die Differentiation einer mit einem konstanten Faktor multiplizierten Funktion – Regel für die Differentiation von Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten	– Regeln für das Aufsuchen von Stammfunktionen: Summe zweier Stammfunktionen; eine mit einem Faktor multiplizierte Funktion; Potenzfunktion mit rationalem Exponenten ($r \neq -1$) – Beweis dieser Regeln – Ermitteln von Stammfunktionen nach diesen Regeln – Ermitteln einer Stammfunktion, die vorgegebenen Bedingungen genügt
Stoffabschnitt 3.5 Übungen und Anwendungen	13 Std.		
Übungen und Anwendungen	4	– Erfassen der Aufgabenstellung – Entwickeln des Lösungsweges	
	6	– Selbständiges Lösen von Aufgaben	
Klassenarbeit	3	3 Stunden aus 3.5	

Unterrichtsmittel

FO 013/1–5	Geometrische Bedeutung der 1. Ableitung einer Funktion [1]
FO 012/1–4	Kurvenuntersuchung mit Hilfe der Differentialrechnung
	$f(x) = \frac{1}{18}(x^3 - 18x^2 + 72x) + 1$ [2]
F 974	Geometrische Deutung der 1. Ableitung einer Funktion
F 975	Kurvenuntersuchung [3]
Hinweis:	Zum Einsatz der Filme ↗ [35]!

Stoffabschnitt 3.1 (8 Std.)
Ableitung einer Funktion

Um das Interesse der Schüler am neuen Stoff dieses umfangreichen Stoffgebiets zu wecken, sollten in einer Einführungsstunde geeignete **Motivierungsaufgaben** aus dem Erfahrungsbereich der Schüler gewählt werden, die nach Behandlung dieses Stoffgebiets auch gelöst werden. Dazu können außermathematische Probleme herangezogen werden, wie sie im Lehrbuch angegeben werden. Es wäre aber auch möglich, die Schüler an dieser Stelle auf das innermathematische Problem „Ermitteln einer Gleichung der Tangente an den Graph einer Funktion f im Punkt P_1“ hinzuweisen. Ob eine Motivierung der Schüler durch einen kurzen historischen Abriß über die Entstehung der Differentialrechnung bereits an dieser Stelle angebracht ist, kann nur der Fachlehrer auf Grund der Klassensituation entscheiden. Keinesfalls darf jedoch eine solche geschichtliche Betrachtung fehlen. Sie kann am Ende der LE 3 als LV in Anlehnung an LB 128ff. gegeben oder für den Abschluß dieses Stoffabschnitts als SV eingeplant werden. Einige Schüler könnten Jahresarbeiten über LEIBNIZ und NEWTON anfertigen (↗ [12; Seiten 31 bis 33], [10; Seiten 187ff., 206ff.]).

Nach der Reaktivierung erforderlicher Kenntnisse über den Grenzwertbegriff und den Anstieg einer Geraden (wobei jetzt der Anstieg m der Geraden g als Tangens des Winkels eingeführt wird, den g mit der positiven Richtung der x-Achse bildet) wird der Begriff „Ableitung der Funktion f an der Stelle x_0“ erarbeitet (**1. Teilziel**). Ausgehend von konkreten Problemstellungen („Anstieg einer Kurve in einem Punkt“, „Augenblicksgeschwindigkeit“), in denen das lokale Verhalten von Funktionen mit Hilfe von Grenzwerten erfaßt werden kann, wird das entsprechende mathematische Problem (Abstraktion) formuliert und untersucht. Das **2. Teilziel** dieses Stoffabschnitts besteht in der Festigung des Weges zum Berechnen der 1. Ableitung einer Funktion f an der Stelle x_0 durch Bestimmen des Grenzwertes des Differenzenquotienten. Als Anwendung ist das Problem „Aufstellen einer Gleichung für die Tangente an den Graph einer Funktion f im Punkt P_0“ zu behandeln. Anschließend wird der Begriff „Ableitung der Funktion f im Intervall I“ eingeführt.

Die Klärung des Zusammenhangs zwischen Stetigkeit und Differenzierbarkeit der Funktion f an der Stelle x_0 ist das **3. Teilziel** dieses Stoffabschnitts.

Im Folgenden wird eine Übersicht über die Stoffstruktur im Abschnitt 3.1 gegeben.

[1] Die hier mit dargestellte geometrische Bedeutung der Differentiale ist *nicht Lehrplanstoff*!

[2] Nur bedingt einsatzfähig, da „Ermitteln von Wendepunkten“ *nicht Lehrplanstoff* ist!

[3] Stofferweiterung durch Bestimmen von Wendepunkten und Aussagen über konkaves und konvexes Verhalten von Funktionen!

Begriffe	**Sätze**	**Verfahren**
Wiederholen: – **Grenzwert** der Funktion f an der Stelle x_0 (▶ B 4, LB 108)	→	Ermitteln von Grenzwerten von Funktionen
– Anstieg einer Geraden (↗ LB 130f.) ↓	→	Berechnen von Anstiegen von Geraden
Einführen: **Tangente** an eine Kurve in einem Punkt (LB 134)		
Definieren: **Differenzenquotient** der Funktion f an der Stelle x_0 (▶ 1) ↓	→	Bilden von Differenzenquotienten; *geometrische Deutung* als mittleren Anstieg der Kurve im Intervall I; Anstieg einer **Sekante** der Kurve im Intervall I (LB 132); *physikalische Anwendung:* Durchschnittsgeschwindigkeit.
Definieren: **Differenzierbarkeit** der Funktion f **an der Stelle** x_0 (▶ 2) ↓	→	Untersuchen der Existenz des Grenzwertes der Funktion f an der Stelle x_0
Definieren: **1. Ableitung (Differentialquotient)** der Funktion f **an der Stelle** x_0 (▶ 3) ↓	→	Bestimmen des Wertes der 1. Ableitung der Funktion f an der Stelle x_0 als Grenzwert des Differenzenquotienten; *geometrische Deutung* als Anstieg einer Kurve im Punkt P_0; Anstieg einer **Tangente** an den Graph der Funktion f im Punkt P_0 (LB 134); *physikalische Anwendung:* Augenblicksgeschwindigkeit ↓ Aufstellen einer Gleichung für die Tangente an die Kurve im Punkt P_0
Einführen: – **Differenzierbarkeit** der Funktion f **im Intervall** I (↗ LB 143)		

Begriffe	Sätze	Verfahren
– **1. Ableitung** der Funktion f **im Intervall** I (↗ LB 143)	1. Ableitung der konstanten Funktion f mit $f(x) = c$ ($c \in P$) (● 8)	Ermitteln der 1. Ableitung einiger ganzer rationaler Funktionen und einer gebrochenen rationalen Funktion im Intervall I unter Nutzung der 1. Ableitungen dieser Funktionen an der Stelle x_0
Einführen: – Notwendige Bedingung – Hinreichende Bedingung (↗ LB 145)	**Zusammenhang zwischen Stetigkeit und Differenzierbarkeit** der Funktion f an der Stelle x_0 (↗ LB 145)	

Motivierungsbeispiele für das Stoffgebiet; Wiederholung (1 Std.)

LB 127 bis 130

Ziele

Die Schüler

- haben einen ersten Einblick in Problemstellungen, die der Differentialrechnung zugrunde liegen, erhalten (↗ Beispiele LB 127 f.),
- reaktivieren ihre Kenntnisse über den Grenzwertbegriff,
- können Grenzwerte von Funktionen berechnen,
- haben ihre Kenntnisse über Eigenschaften linearer Funktionen gefestigt.

Schwerpunkte

- Motivierung der Schüler zur Behandlung des Stoffgebietes durch Aufgaben aus der Physik (Kinematik) und aus der Technologie/Ökonomie (Extremwertaufgabe)
- Sicherung des Ausgangsniveaus zur Behandlung des Stoffabschnitts

Methodische Hinweise

Motivierung und Zielstellung zur Behandlung des Stoffgebietes Im allgemeinen werden die Schüler durch außermathematische Problemstellungen stärker angesprochen als durch innermathematische. Deshalb sollte die Einführung in die Differentialrechnung mit den im Lehrbuch genannten Anwendungsbeispielen begonnen werden.
Je nach der Klassensituation kann

- der Lehrer diese (oder ähnliche) Beispiele den Schülern als charakteristische Problemstellungen der Differentialrechnung erläutern,
- bei differenzierter Aufgabenstellung einen Teil der Klasse das Beispiel „Augenblicksgeschwindigkeit", den restlichen Teil das Beispiel „Extremwertaufgabe Container" durchlesen lassen. Je ein Schüler dieser Gruppen gibt dann die Problemstellung mit eigenen Worten wieder.

In diesem Zusammenhang sollte der Lehrer darauf hinweisen, daß es bei solchen Funktionen wie in der Containeraufgabe nicht leicht ist, den Graph der Funktion zu skizzieren. Das Aufsuchen vieler Punkte mit Hilfe einer Wertetabelle ist sehr mühsam. Er kann an dieser Stelle schon ankündigen, daß mit Hilfe der Differentialrechnung die Untersuchung solcher „Kurven" rationell durchgeführt werden kann.
Am Ende der Motivierungsphase soll den Schülern das *Ziel* der Behandlung dieses Stoffgebiets umrissen werden: Damit Aufgaben von der Art der Motivierungsbeispiele von den Schülern selbständig gelöst werden können, müssen einige theoretische Grundlagen der Differentialrechnung erarbeitet werden. Dabei sollte den Schülern bewußtgemacht werden, daß ihr bisher erworbenes mathematisches Wissen und Können, besonders über Funktionen und Gleichungen, umfassend zur Anwendung kommt.

Sicherung des Ausgangsniveaus zur Behandlung des Stoffabschnitts Es werden die Begriffe „Grenzwert der Funktion f an der Stelle x_0" und „Anstieg einer Geraden" wiederholt und Grenzwerte von Funktionen in Aufgaben folgender Art berechnet:
Berechnen Sie die Grenzwerte

a) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h + h^2}{h}$; b) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{2h}{h}$; c) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(x + h)^2 - x^2}{h}$!

Hausaufgaben LBA 1 und 2

Lerneinheit 1 (1 Std.)
Anstieg einer Kurve in einem Punkt

LB 130 bis 134

Ziele

Die Schüler
- kennen den Zusammenhang zwischen dem Anstieg einer Geraden und dem Tangens des Winkels, den die Gerade mit der positiven Richtung der x-Achse einschließt, und können „Anstiegswinkel" von Geraden berechnen,
- können den Anstieg einer Geraden aus zwei gegebenen Punkten berechnen,
- kennen die Begriffe „mittlerer Anstieg einer Kurve in einem Intervall" und „Anstieg einer Kurve in einem Punkt", können sie geometrisch deuten und in einfachen Fällen den Anstieg des Graphen einer Funktion an vorgegebenen Stellen berechnen,
- kennen die Definition des Begriffs „Differenzenquotient der Funktion an der Stelle x_0" und können sie mit eigenen Worten wiedergeben.

Schwerpunkte

- Sicherung des Ausgangsniveaus: Berechnen des „Anstiegswinkels" einer Geraden
- Problemstellung: Anstieg einer Kurve in einem gegebenen Punkt
- Erarbeitung: Begriff „Anstieg einer Kurve in einem Punkt" (▶ 1) und Verfahren zum Berechnen des Anstiegs einer Kurve in einem Punkt
- Festigung: Berechnen des Anstiegs einer Kurve in einem Punkt

Methodische Hinweise

Sicherung des Ausgangsniveaus durch Berechnen von Anstiegswinkeln Die Schüler kennen die Begriffe „Anstieg einer Geraden" aus dem Stoffgebiet „Lineare Funktionen" der Klasse 8 und den Begriff „Anstiegsdreieck" aus dem Stoffgebiet „Ungleichungen und Gleichungssysteme" der Klasse 9, sie haben im Stoffgebiet „Winkelfunktionen" der Klasse 10 gelernt, den Tangens eines spitzen Winkels als Quotient aus der Länge der Gegenkathete und der Länge der Ankathete dieses Winkels im rechtwinkligen Dreieck auszudrücken. So finden die Schüler

$m = \tan \alpha$,

in Worten: „Der Anstieg m der Geraden g ist der Tangens des Winkels, den die Gerade g mit der positiven Richtung der x-Achse einschließt". Zur Festigung dient LBA 1.
Im UG lernen die Schüler – ausgehend von LBA 2 – das Berechnen des Anstiegs einer Geraden aus den vorgegebenen Koordinaten zweier Punkte:

$$m = \tan \alpha = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \quad (x_1 \neq x_0).$$

Problemstellung Es wird die Frage aufgeworfen, ob man auch von *dem* **Anstieg des Graphen einer nichtlinearen Funktion** sprechen kann (↗ Fußnoten 1 auf LB 131 bis 134).

Erarbeitung des Verfahrens zum Berechnen des Anstiegs einer Kurve in einem Punkt Im UG sollte dieser für das Verständnis der Differentialrechnung wichtige Abschnitt betont anschaulich und faßlich in Anlehnung an LB 130ff. schrittweise erarbeitet werden:

1. Schritt: Einführung „Mittlerer Anstieg einer Kurve in einem Intervall"; SSA in Gruppen an ● 3

2. Schritt: In Anlehnung an ■ 1 Ermittlung des Anstieges der Parabel $y = x^2$ an der Stelle $x_0 = 0{,}5$ (↗ linke Spalte der folgenden Tafelbilder)

3. Schritt: In SSA zur Festigung der Gedankengänge des 2. Schrittes Ermittlung des Anstieges der Parabel $y = x^2$ an einer *beliebigen Stelle* x_0 (im LB nicht enthalten; ↗ mittlere Spalte)

4. Schritt: Im UG weitere Verallgemeinerung, wie auf LB 133f. dargestellt, dabei besonders zu betonen, daß die Menge D der geordneten Paare $\left[h; \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}\right]$ mit $h \neq 0$ eine Funktion ist (↗ rechte Spalte)

Anstieg einer Kurve im Punkt P_0

Gegeben:

Graph der Funktion $f(x) = x^2$, Stelle $x_0 = 0{,}5$	Graph der Funktion $f(x) = x^2$, Stelle x_0	Graph der Funktion f, Stelle x_0

Gesucht:

Anstieg der Kurve im Punkt $P_0\ (0{,}5;\ 0{,}5^2)$	Anstieg der Kurve im Punkt $P_0\ (x_0;\ x_0^2)$	Anstieg der Kurve im Punkt $P_0\ (x_0;\ f(x_0))$
(1) Sekante durch $P_0\ (0{,}5;\ 0{,}5^2)$ und $P_h\ (0{,}5 + h;\ (0{,}5 + h)^2)$	**(1) Sekante** durch $P_0\ (x_0;\ x_0^2)$ und $P_h\ (x_0 + h;\ (x_0 + h)^2)$	**(1) Sekante** durch $P_0\ (x_0;\ f(x_0))$ und $P_h\ (x_0 + h;\ f(x_0 + h))$

Für jedes h ($h \neq 0$) gibt es genau eine Sekante durch P_0 und P_h.

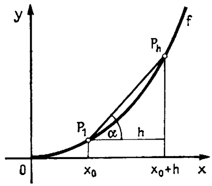


Bild 3.6

(2) Anstieg der Sekante durch P_0 und P_h ($h \neq 0$)	**(2) Anstieg der Sekante** durch P_0 und P_h ($h \neq 0$)	**(2) Anstieg der Sekante** durch P_0 und P_h ($h \neq 0$)
$m = \tan \alpha_h$ $= \dfrac{(0{,}5 + h)^2 - 0{,}5^2}{h}$	$m = \tan \alpha_h$ $= \dfrac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{h}$ $= \dfrac{x_0^2 + 2x_0h + h^2 - x_0^2}{h}$	$m = \tan \alpha_h$ $= \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$
$D(h) = 1 + h$	$D(h) = 2x_0 + h$	$D(h) = \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$
x_0 fest	x_0 fest	x_0 fest

(3) Grenzwert für $h \to 0$	**(3) Grenzwert** für $h \to 0$	**(3) Grenzwert** für $h \to 0$
$\lim\limits_{h \to 0} (1 + h) = 1$	$\lim\limits_{h \to 0} (2x_0 + h) = 2x_0$	$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$
Anstieg der Parabel $y = x^2$ an der Stelle 0,5	Anstieg der Parabel $y = x^2$ an der Stelle x_0	Anstieg der Kurve im Punkt P_0 an der Stelle x_0

Nun sollte sich ein kurzer LV anschließen:

- Definition des Begriffs „Differenzenquotient der Funktion f an der Stelle x_0" (▶ 1);
- Wenn der Grenzwert $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ existiert und für alle Nullfolgen denselben Wert hat, so heißt er der „Anstieg der Kurve im Punkt P_0";
- Die „Grenzgerade" t durch P_0, deren Anstieg gleich diesem Grenzwert ist, heißt „Tangente an den Graph der Funktion f im Punkt P_0".

Zur Veranschaulichung dieser Problematik kann auch FO 013/1 bis 5 „Geometrische Bedeutung der 1. Ableitung einer Funktion" mit der Einschränkung dienen, daß die dort eingezeichneten „Differentiale" dx, dy kein Lehrplangegenstand sind. Bei ausreichender Zeit kann noch der 1. Teil von F 974 „Geometrische Deutung der 1. Ableitung einer Funktion" vorgeführt werden (↗ [35]).

Festigung durch Lösen von Aufgaben Die Schüler sollten weitgehend selbständig bei LBA 4 und 5 den Lösungsweg und das Ergebnis jeder Aufgabe erläutern.

Hausaufgaben Berechnen des Anstieges des Graphen der Funktion $f(x) = x^2 + 2x$ an der Stelle $x_0 = 1{,}3$; als vorbereitende HA Bearbeiten von ● 4 aus LE 2

Kontrollaufgaben

1. Wie berechnet man den Winkel, den eine Gerade mit der Gleichung $y = mx + n$ mit der positiven Richtung der x-Achse bildet (Beispiel: $y = \sqrt{3}\,x + 2$)?
2. Berechnen Sie den Anstieg des Graphen der Funktion $f(x) = 2x^2 + 1$ an der Stelle $x_0 = -3$, und begründen Sie jeden Lösungsschritt!

Lerneinheit 2 (1 Std.)
Augenblicksgeschwindigkeit bei geradlinigen Bewegungen

LB 134 bis 137

Ziele

Die Schüler

- vertiefen ihre Kenntnisse über die Augenblicksgeschwindigkeit einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung (↗ Physikunterricht der Klasse 9),
- erkennen die zur Berechnung des Anstiegs einer Kurve in einem Punkt analoge Betrachtungsweise,
- kennen die mathematische Formulierung von Durchschnittsgeschwindigkeit und Augenblicksgeschwindigkeit einer beliebigen geradlinigen Bewegung,
- können einfache Aufgaben zur Berechnung der Augenblicksgeschwindigkeit gleichmäßig beschleunigter Bewegungen lösen.

Schwerpunkte

- Erarbeitung: Berechnung der Augenblicksgeschwindigkeit als Grenzwert der Durchschnittsgeschwindigkeit bei einer ungleichförmigen geradlinigen Bewegung (LB 136)
- Festigung durch Übungen im Berechnen der Augenblicksgeschwindigkeit gleichmäßig beschleunigter Bewegungen

Methodische Hinweise

Sicherung des Ausgangsniveaus durch Auswerten der Hausaufgaben Der Lehrer stellt fest, ob die Schüler die Lösung der Problematik „Anstieg des Graphen einer Funktion an einer Stelle“ verstanden haben und inwieweit sie durch die vorbereitende HA (↗ LE 1) auf das neue Problem „Berechnung der Augenblicksgeschwindigkeit einer beliebigen geradlinigen Bewegung zur Zeit t_0“ eingestimmt sind.

Erarbeitung der Berechnung der Augenblicksgeschwindigkeit Erkennt der Lehrer bei der Auswertung der HA, daß die Schüler die Problematik erfaßt haben, können sie weitgehend selbständig mit Hilfe des LB arbeiten. Anderenfalls sollte das neue Problem im UG erörtert und die analoge Vorgehensweise herausgearbeitet werden. Nach der Bearbeitung von ● 5 sollten die Schüler Vorschläge für die Lösung des Problems machen. Dabei könnten die folgenden Tafelbilder entstehen.
Schließlich sollten die Schritte zur Bildung des Grenzwertes des Differenzenquotienten herausgearbeitet werden, die sich die Schüler einprägen müssen (↗ UH 131):

Augenblicksgeschwindigkeit bei geradlinigen Bewegungen

$\bar{v}$ – Durchschnittsgeschwindigkeit
v – Augenblicksgeschwindigkeit

Gleichförmige Bewegung

$s = f(t) = vt$

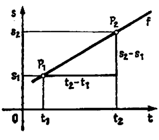


Bild 3.7

Ungleichförmige Bewegung

$s = f(t)$

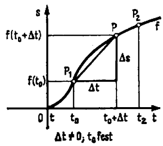


Bild 3.8

$s = f(t) = \frac{g}{2} t^2$

Spezialfall:
Gleichmäßig beschleunigte Bewegung

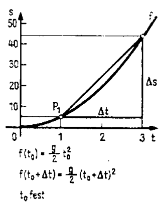


Bild 3.9

- Ermitteln der Funktionswerte für t_0 und $t_0 + \Delta t$
- Bilden der Differenz der Funktionswerte
- Bilden des Quotienten aus der Differenz der Funktionswerte und der Differenz der Argumente
- Umformen dieses Quotienten
- Bilden des Grenzwertes dieses umgeformten Quotienten

$$v = \bar{v} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$$

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}$$

$\Delta t \to 0$

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}$$

$$\boxed{v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}}$$

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{g}{2} \cdot \frac{(t_0 + \Delta t)^2 - t_0^2}{\Delta t}$$

$$= \frac{g}{2} \cdot \frac{t_0^2 + 2t_0 \cdot \Delta t + (\Delta t)^2 - t_0^2}{\Delta t}$$

$$= \frac{g}{2} \cdot \frac{\Delta t(2t_0 + \Delta t)}{\Delta t}$$

$$= \frac{g}{2} \cdot (2t_0 + \Delta t)$$

$\Delta t \to 0$

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{g}{2} \cdot (2t_0 + \Delta t)\right]$$

$$v = \frac{g}{2} \cdot 2t_0$$

$$\underline{\underline{v = g \cdot t_0}}$$

Festigung durch Übungen im Berechnen von Augenblicksgeschwindigkeiten LBA 1 sollte vollständig gelöst und ausgewertet werden.

Hausaufgabe LBA 2* mit dem Hinweis auf die besondere Form dieser Funktionsgleichung

Kontrollaufgabe

Ermitteln Sie die Augenblicksgeschwindigkeit für den senkrechten Wurf nach oben mit der Gleichung

$$s = f(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_0 t,$$

wobei g die Fallbeschleunigung auf der Erde, v_0 die Anfangsgeschwindigkeit seien!

Lerneinheit 3 **(1 Std.)**
Ableitung einer Funktion an einer Stelle

LB 138 bis 139

Im Verlauf des Abstraktionsprozesses wird das den Beispielen der LE 1 (Anstieg einer Kurve in einem Punkt) und LE 2 (Augenblicksgeschwindigkeit bei ungleichförmigen Bewegungen) zugrunde liegende *mathematische Problem* formuliert, indem von den einzelnen konkreten Sachverhalten abstrahiert wird. Insofern hat diese Stunde eine zentrale Bedeutung.

Ziele

Die Schüler
- kennen die Definitionen für die Begriffe „Differenzierbarkeit einer Funktion f an der Stelle x_0" und „1. Ableitung einer Funktion f an der Stelle x_0" und können diese Definitionen mit eigenen Worten wiedergeben,
- können die Schritte bei der Bildung der 1. Ableitung einer Funktion an einer Stelle angeben,
- kennen einfache geschichtliche Zusammenhänge über die Entstehung der Differentialrechnung.

Schwerpunkte

- Sicherung des Ausgangsniveaus: Gemeinsamkeiten beim Ermitteln des Anstiegs einer Kurve in einem Punkt und beim Bestimmen der Augenblicksgeschwindigkeit bei geradlinigen Bewegungen; Existenz eines Grenzwertes
- Motivierung und Problemstellung: Formulierung des der Differentialrechnung zugrunde liegenden mathematischen Problems
- Erarbeitung des Begriffs der 1. Ableitung einer Funktion an einer Stelle (▶ 2 und 3)
- LV: Zur Entstehung der Differentialrechnung

Methodische Hinweise

Sicherung des Ausgangsniveaus Im Rahmen einer Leistungskontrolle sprechen ein oder mehrere Schüler zu den Gemeinsamkeiten beim Ermitteln des Anstiegs einer Kurve in einem Punkt und beim Bestimmen der Augenblicksgeschwindigkeit bei geradlinigen Bewegungen. Die anderen Schüler sollten die Aussagen der zu prüfenden Schüler kritisch werten, sie ergänzen oder weitere Fragen an die „Prüflinge" stellen.
Im UG wird unter Nutzung der Erkenntnisse aus LE B 9 (besonders ■ B 17) geklärt, was es heißt: „$\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ existiert". Das in ▶ 2 benötigte Definiens sollte durch die anschließende Bemerkung (↗ LB 138) bereitgestellt werden.

Motivierung und Problemstellung Ein LV erläutert, daß noch andere Begriffe durch solche Grenzwerte, wie sie bei der Festlegung der Begriffe „Augenblicksgeschwindigkeit" und „Anstieg einer Kurve in einem Punkt" erforderlich waren, definiert werden können, z. B. die chemische Reaktionsgeschwindigkeit, die Augenblicksspannung bei der elektromagnetischen Induktion, die Stromstärke im Wechselstromkreis. Die Schüler erfahren: Zur mathematischen Bearbeitung solcher oder ähnlicher Sachverhalte muß man zunächst von den konkreten Inhalten der einzelnen Sachverhalte absehen (abstrahieren).
Es erheben sich zwei Fragen:

- Wie lautet das gemeinsame mathematische Problem?
- Wie wird es gelöst?

Erarbeitung des Begriffs der 1. Ableitung einer Funktion an einer Stelle Im UG wird zur Beantwortung der beiden Fragen geklärt:
Zur ersten Frage:

- Es muß für die mathematische Abstraktion eine Funktion f gegeben bzw. formulierbar sein. (Dabei sollte darauf hingewiesen werden, daß bei praktischen Sachverhalten die Variablen häufig Größen bezeichnen.)
- Die Funktion f muß in einer Umgebung der Stelle x_0 definiert sein.

Zur zweiten Frage:

1. Schritt: Bilden des Differenzenquotienten D der Funktion f an der Stelle x_0:

$$D(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (h \neq 0);$$

D ist eine *Funktion*!

2. Schritt: Umformen des Differenzenquotienten

3. Schritt: Überprüfen, ob der Grenzwert der Funktion D für $h \to 0$ existiert; $f'(x_0)$ ist eine *Zahl*!
Wenn $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ existiert, so heißt die Funktion f an der Stelle x_0 **differenzierbar** (▶ 2).

4. Schritt: Berechnen des Grenzwertes
Wenn die Funktion f an der Stelle x_0 differenzierbar ist, so heißt der errechnete Grenzwert die **1. Ableitung** (der **Differentialquotient**) **der Funktion f an der Stelle x_0** (▶ 3).

LV: Zur Entstehung der Differentialrechnung Der bisher zurückgelegte Weg im Erkenntnisprozeß, dabei insbesondere der Abstraktionsprozeß, ist zu verdeutlichen.
An dieser Stelle könnten auch die historischen Zusammenhänge bei der Entstehung der Differentialrechnung erläutert und dabei die Leistungen LEIBNIZ' und NEWTONS gewürdigt werden.
An mathematisch und geschichtlich interessierte Schüler könnten Jahresarbeiten über Leben und Werke von LEIBNIZ und NEWTON vergeben werden (↗ LB 128ff. und [10], [12]).

Kontrollaufgabe

Erläutern Sie die einzelnen Schritte bei der Bildung der 1. Ableitung der Funktion f an der Stelle x_0!

Lerneinheit 4 (2 Std.)
Beispiele für die Berechnung von Ableitungen

LB 139 bis 142

Ziele

Die Schüler
- können die 1. Ableitung ausgewählter Funktionen an gegebenen Stellen (auf dem Weg über die Bildung des Grenzwertes des Differenzenquotienten) berechnen; dabei festigen sie ihre theoretischen Einsichten,
- können eine Gleichung für eine Tangente an den Graph einer Funktion an einer gegebenen Stelle aufstellen.

Schwerpunkte

1. Stunde
- Sicherung des Ausgangsniveaus: Verfahren zum Nachweis der Differenzierbarkeit einer Funktion und zum Bilden der 1. Ableitung einer Funktion an einer Stelle
- Übungen im Berechnen der 1. Ableitung einer Funktion f an einer Stelle x_0, dabei Erarbeiten einer Gleichung für die Tangente an den Graph der Funktion an einer vorgegebenen Stelle

2. Stunde
Übungen im Berechnen von Ableitungen und Ermitteln von Tangentengleichungen

Methodische Hinweise

Sicherung des Ausgangsniveaus Ausgehend von der Kontrollaufgabe der LE 3 reaktivieren die Schüler ihre Kenntnisse über die Begriffe „Differenzierbarkeit", „1. Ableitung", „Differentialquotient" und über das Verfahren zum Bilden der 1. Ableitung einer Funktion an einer Stelle.
Es wird das *Ziel* dieser beiden Stunden mitgeteilt: Übungen im Berechnen der 1. Ableitung von Funktionen.

Übungen im Berechnen von Ableitungen und Aufstellen von Tangentengleichungen Im UG wird ■ 7 (ohne Benutzung des LB) bearbeitet und sofort bis zum Ermitteln der Gleichung der Tangente an den Graph der Funktion f mit $f(x) = x^3$ an der Stelle $x_0 = 1{,}5$ (↗ ■ 10) weitergeführt (Erweiterung der Zielstellung, die den Schülern erst an dieser Stelle mitgeteilt werden sollte).
Es folgt SSA am ■ 8 oder einer entsprechenden Aufgabe. Die Schüler helfen einander, notfalls können sie das LB zu Rate ziehen. Die ■ 8 abschließende Bemerkung bereitet die Behandlung der Differenzierbarkeit einer Funktion in einem Intervall vor (↗ LE 5). Für weitere Übungen eignen sich: 1. Ermitteln Sie eine Gleichung der Tangente an den Graph der Funktion $f(x) = x^3 + x^2$ (↗ ■ 8) an der Stelle $x_0 = 2$!; 2. LBA 2a).

Nach der Kontrolle gelöster Aufgaben wird über den Grad der Selbständigkeit bei der Lösung weiterer Aufgaben entschieden werden können. Erforderlichenfalls kann zunächst SSA an LBA 2b) erfolgen, denn das Umformen des Differenzenquotienten beim Bearbeiten von ■ 9 könnte Schwierigkeiten bereiten. Deshalb werden zweckmäßigerweise die einzelnen Schritte kontrolliert und erforderlichenfalls berichtigt.
■ 10 wird nach den Übungen in der 1. Stunde in SSA zu bewältigen sein (einschließlich der Berechnung des Schnittwinkels der Tangente mit der x-Achse), ebenso LBA 4a) zur weiteren Festigung.

Kontrollaufgaben

1. Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion $f(x) = 3x^2 + x$
   a) an der Stelle $x_0 = 2$; b) an der Stelle x_0!
2.* Begründen Sie folgende Konstruktion der Tangente an die quadratische Parabel $y = x^2$: „Man lege die Gerade durch den Berührungspunkt P_0 und den Mittelpunkt R der Strecke OQ, wobei Q der Fußpunkt des Lotes von P_0 auf die x-Achse ist“!

Lerneinheit 5 (1 Std.)
Ableitung einer Funktion in einem Intervall

LB 143 bis 144

Ziele

Die Schüler

- kennen die Begriffe „Differenzierbarkeit einer Funktion in einem Intervall“ und „1. Ableitung der Funktion f im Intervall I“ und wissen, daß dann f' eine Funktion ist,
- kennen den Begriff „differenzierbare Funktion“,
- können ausgewählte Funktionen (einschließlich der konstanten Funktion) auf dem Weg über das Bilden des Grenzwertes des Differenzenquotienten differenzieren.

Schwerpunkte

- Sicherung des Ausgangsniveaus: Bilden der Ableitung einer Funktion an verschiedenen Stellen des Definitionsbereichs
- Erarbeitung der Ableitung einer Funktion in einem Intervall und der Ableitung der konstanten Funktion f mit $f(x) = c$ (● 8)
- Zusammenfassung: Anlegen einer Tabelle der bisher differenzierten Funktionen

Methodische Hinweise

Sicherung des Ausgangsniveaus Im Rahmen der täglichen Übung ermitteln die Schüler die Ableitung der Funktion

$$f(x) = 2x^3 - 3x$$

an verschiedenen Stellen x_0. In der Auswertung werden noch einmal die einzelnen Schritte (Bilden des Differenzenquotienten, Umformen des Differenzenquotienten, Bilden des Grenzwertes des Differenzenquotienten) verdeutlicht und herausgearbeitet, daß die Funktion an jeder Stelle ihres Definitionsbereichs differenzierbar ist.

Erarbeitung: Ableitung einer Funktion in einem Intervall und einer konstanten Funktion In einem LV sollten die einzuführenden Begriffe „Differenzierbarkeit einer Funktion im Intervall I", „1. Ableitung von f in I" sowie „Differenzierbare Funktion" unter Hinweis auf die entsprechenden Formulierungen auf LB 143 erläutert werden. Den Schülern muß der Unterschied zwischen $f'(x_0)$, einer Zahl, und f' als Menge geordneter Paare $[x; f'(x)]$ deutlich werden.
Dann erfolgt SSA an LBA 1 a).
Um die Ableitung der konstanten Funktion f mit $f(x) = c$ zu ermitteln, sollten die Schüler folgende Tätigkeiten ausführen:

- Graph der Funktion f mit $f(x) = 2$ zeichnen;
- Vermutungen über die 1. Ableitung nennen und begründen;
- Beweis führen;
- ● 8 bearbeiten.

(Hinweis auf LE B 4 auf LB 91: Untersuchung einer konstanten Folge auf Konvergenz)

Zusammenfassung Aus ihren Aufzeichnungen sollten die Schüler eine Tabelle einiger bisher differenzierter Funktionen herausschreiben, z. B.:

f	f'
$f(x) = x^3 + x^2$	$f'(x) = 3x^2 + 2x$
$f(x) = x^{-1} \quad (x \neq 0)$	$f'(x) = -x^{-2} \quad (x \neq 0)$
$f(t) = \frac{g}{2}t^2 \quad (t \geqq 0)$	$f'(t) = gt$
$\vdots$	$\vdots$

In der Auswertung der Tabelle sollten die Schüler im UG für die Arbeit in den nächsten LE durch folgende Fragen motiviert werden:

- Das Bilden des Grenzwertes des Differenzenquotienten ist sehr aufwendig. Gibt es zum Bilden der 1. Ableitung rationellere Verfahren, etwa in Form von Regeln, z. B. für das Differenzieren rationaler Funktionen?
- Lassen sich schon solche Regeln vermuten?
- Die hier differenzierten Funktionen sind stetig (Wdh der Definition des Begriffs „stetige Funktion"). Folgt aus der Stetigkeit einer Funktion f an der Stelle x_0 stets die Differenzierbarkeit von f an dieser Stelle x_0?
  Hinweis: Diese Frage wird in LE 6 untersucht.

Hausaufgabe Zur erneuten Orientierung der Schüler auf das Tangentenproblem unter erhöhtem Schwierigkeitsgrad: Ermitteln Sie die Gleichung für die Tangente an den Graph einer Funktion unter der Bedingung, daß die Tangente parallel zur Sekante durch die Punkte P_1 und P_2 ist. (Es könnte ein Hinweis zum Erfassen dieser Bedingung erforderlich sein.)

Kontrollaufgaben

1. Differenzieren Sie die Funktion $f(x) = 4x^3 - 2x + 5$, und bestimmen Sie diejenigen Zahlen x, für die $f'(x) = 0$ ist!
2. Erläutern Sie den Begriff „differenzierbare Funktion"!

Lerneinheit 6 (1 Std.)

Zusammenhang zwischen Stetigkeit und Differenzierbarkeit

LB 144 bis 146

Ziele

Die Schüler

- wissen, daß aus der Differenzierbarkeit von f an der Stelle x_0 die Stetigkeit von f an der Stelle x_0 folgt, daß aber die Umkehrung dieses Satzes nicht gilt,
- haben die erforderliche Argumentation verstanden,
- können die Begriffe „notwendige Bedingung" und „hinreichende Bedingung" anwenden.

Schwerpunkte

- Sicherung des Ausgangsniveaus: Erläutern der Sprechweise „Aus ... folgt ..." und Nachweis der Stetigkeit der Funktion $f(x) = |x|$ an der Stelle 0 (● 9)
- Erarbeitung des Zusammenhangs zwischen Stetigkeit und Differenzierbarkeit einer Funktion f an einer Stelle x_0 (■ 12)
- Festigung durch Prüfen gegebener Aussagen über Stetigkeit und Differenzierbarkeit auf ihren Wahrheitswert
- Zusammenfassung zum Stoffabschnitt 3.1 (LB 145)

Methodische Hinweise

Sicherung des Ausgangsniveaus Die dritte der in LE 5 zur Motivation formulierten Fragen wird wieder aufgegriffen: „Folgt aus der Stetigkeit einer Funktion f an der Stelle x_0 stets die Differenzierbarkeit von f an dieser Stelle x_0?"
Es wird zunächst mitgeteilt: „Aus ... folgt ..." ist eine andere Sprechweise für „Wenn ..., so ...". Die Schüler bilden die „Wenn – so – Form" der oben formulierten Aussage: „Wenn f in x_0 stetig ist, so ist f in x_0 differenzierbar".
Zur Entscheidung über den Wahrheitswert dieser Aussage sollte als besonders „interessante" Funktion die Funktion $f(x) = |x|$ ausgewählt werden. Bei der Arbeit an ● 9 zeigen die Schüler, daß die Funktion $f(x) = |x|$ an der Stelle 0 stetig ist.

Erarbeitung des Zusammenhangs zwischen Stetigkeit und Differenzierbarkeit Im UG wird untersucht, ob die Funktion $f(x) = |x|$ an der Stelle 0 differenzierbar ist, wobei die Teiluntersuchungen der Konvergenz der Folge $\left(\frac{|h_n|}{h_n}\right)$ für eine beliebige Nullfolge (h_n) mit $h_n > 0$ bzw. $h_n^* < 0$ (für alle n) von je einer Schülergruppe der Klasse ausgeführt werden. ■ 12 sollte man an dieser Stelle nicht lesen lassen, weil dann die Schüler nicht gefordert werden, ihr Wissen und Können anzuwenden und zur Lösung von Teilaufgaben einzusetzen. Die Schüler sollten dann selbständig formulieren: „Aus der Stetigkeit von f an der Stelle x_0 folgt nicht die Differenzierbarkeit von f an dieser Stelle x_0".
Die Schüler formulieren die Umkehrung dieser Aussage. Der Lehrer teilt mit, daß sie wahr ist, auf das gemeinsame Erarbeiten ihres Beweises jedoch verzichtet werden muß.
Die Schüler formulieren den Satz „Aus der Differenzierbarkeit von f an der Stelle x_0 folgt die Stetigkeit von f an der Stelle x_0" unter Verwendung von „hinreichende Bedingung" und „notwendige Bedingung". Diese beiden Begriffe können den Schülern anhand dieses Beispiels (vom Wort her) plausibel gemacht werden:
Die Kenntnis der Wahrheit der Aussage A „reicht hin", um zu wissen, daß die Aussage B auch wahr ist.
Die Wahrheit der Aussage B ist „notwendig" für die Wahrheit der Aussage A, denn es kann A nicht wahr sein, wenn B falsch ist (weil bei wahrer Prämisse und falscher Konklusion der Wahrheitswert der Implikation „falsch" ist).

Festigung durch Untersuchen des Wahrheitswertes vorgegebener Aussagen Durch mündliches Bearbeiten von LBA 2a) und b) werden die Kenntnisse über den Zusammenhang zwischen Stetigkeit und Differenzierbarkeit einer Funktion an der Stelle x_0 vertieft.

Zusammenfassung zum Stoffabschnitt 3.1 Die Zusammenfassung auf LB 145 wird in Verbindung mit Aufgabe 2 aus dem Abschnitt „Kontrollaufgaben" erarbeitet.

Kontrollaufgaben

1. LBA 1b), 2c)
2. Ist die Funktion f (Bild 3.10) an der Stelle 2 differenzierbar? Begründen Sie!

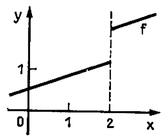


Bild 3.10

Stoffabschnitt 3.2 (15 Std.)

Differentiationsregeln; die Differentiation von rationalen Funktionen und Wurzelfunktionen

Die grundlegende Motivation für die Behandlung dieses Stoffabschnitts ist das Bestreben, das bisher bekannte und sehr aufwendige Verfahren zur Berechnung der Ableitung einer Funktion zu rationalisieren. So werden nunmehr Sätze über die Differenzierbarkeit und die Differentiation einer Summe (eines Produkts, eines Quotienten, der Verkettung) zweier differenzierbarer Funktionen erarbeitet und z. T. bewiesen. Daraus ergeben sich entsprechende Differentiationsregeln als Handlungsvorschriften. Insbesondere werden Regeln zur Differentiation von Potenzfunktionen (einschließlich Wurzelfunktionen) formuliert.
Die Schüler sollen Sätze und Regeln inhaltlich verstehen und erste Fertigkeiten im Anwenden

dieser Regeln erwerben, voll entwickelte Fertigkeiten sind erst im Stoffabschnitt 3.3 bei Kurvendiskussionen und beim Lösen von Extremwertaufgaben zu erreichen.
Von den Schülern wird geistige Disziplin gefordert, zumal Veranschaulichungen nicht möglich sind.
Im folgenden wird eine Übersicht über die Stoffstruktur im Abschnitt 3.2 gegeben.

Begriffe	**Sätze**	**Verfahren**
Wiederholen: **Summe** zweier Funktionen	Satz über die Differenzierbarkeit und die Differentiation einer Summe zweier differenzierbarer Funktionen (▷ 1; mB)	Summenregel (↗ LB 148 f.)
Wiederholen: **Produkt** zweier Funktionen	Satz über die Differenzierbarkeit und die Differentiation eines Produkts zweier differenzierbarer Funktionen (▷ 2; mB)	Produktregel (↗ LB 151)
	Satz über die Differenzierbarkeit und die Differentiation einer Funktion f mit $f(x) = c \cdot g(x); \quad c \in P$ (● 12a))	Regel zur Differentiation einer Funktion $f(x) = c \cdot g(x); \quad c \in P$ (c konstanter Faktor)
	Satz über die Differenzierbarkeit und die Differentiation einer Potenzfunktion $f(x) = x^n$ mit $n \in N$, $n \geqq 1$ (▷ 3; mB)	Regel zur Differentiation einer Potenzfunktion mit natürlichem Exponenten
Wiederholen: **Quotient** zweier Funktionen u, v mit $v(x_0) \neq 0$	Satz über die Differenzierbarkeit und Differentiation eines Quotienten zweier differenzierbarer Funktionen (▷ 4; oB)	Quotientenregel (↗ LB 154)
		Regel zur Differentiation von Potenzfunktionen mit negativen ganzzahligen Exponenten
Einführen: **Ganze (gebrochene) rationale Funktion**		Differenzieren rationaler Funktionen

Begriffe	**Sätze**	**Verfahren**
Wiederholen: **Potenzfunktion mit rationalem Exponenten;** „nichtrationale Funktion“ ↓ *Einführen:* **Wurzelfunktion**	⟶	Differenzieren von Wurzelfunktionen
Einführen: **Eineindeutige Funktion** ↓ *Definieren:* **Umkehrfunktion** (▶ 4) ↓ *Einführen:*		
Zueinander inverse Funktionen	Satz über die Beziehungen zwischen den 1. Ableitungen zueinander inverser Funktionen (▷ 5; oB)	
Einführen:		
Verkettete Funktionen	Satz über die Differenzierbarkeit und die Differentiation verketteter Funktionen (↗ LB 169; oB)	Kettenregel (↗ LB 169)
	⟶	Regel zur Differentiation von Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten
Einführen: ***n*-te Ableitung** einer Funktion an der Stelle x_0 (bzw. im Intervall I)	⟶	Bilden höherer Ableitungen von – rationalen Funktionen; – Wurzelfunktionen; – Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten

Lerneinheit 7 (1 Std.)
Ableitung einer Summe

LB 147 bis 149

In den LE 7 bis 10 lernen die Schüler Sätze und Regeln, die zur Bildung der Ableitung von rationalen Funktionen erforderlich sind, kennen. Dabei verstehen sie die erforderliche geeignete Umformung des Differenzenquotienten mit dem Ziel, Differenzenquotienten der Teilfunktionen zu bilden.

Da die Schüler die Regel für die Ableitung von Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten noch nicht kennen, muß auf die in LE 5 angefertigte Tabelle einiger bisher differenzierter Funktionen zurückgegriffen werden.

Ziele

Die Schüler

- haben erkannt, daß es nützlich wäre, über Sätze und Regeln für das Differenzieren von Summen, Produkten und Quotienten von Funktionen zu verfügen, die eine rationellere Arbeitsweise ermöglichen,
- kennen den Satz über die Differenzierbarkeit und die Differentiation der Summe zweier differenzierbarer Funktionen und können ihn weitgehend selbständig beweisen,
- können die darauf beruhende „Summenregel" auf ausgewählte Funktionen anwenden.

Schwerpunkte

- Motivierung der Erarbeitung von Differentiationsregeln
- Erarbeitung der Regel über die Differentiation einer Summe zweier differenzierbarer Funktionen (■ 13; ▷ 1)
- Festigung der Summenregel durch formale Übungen

Methodische Hinweise

Motivierung Die Schüler sind leicht davon zu überzeugen, daß es zweckmäßig ist, Regeln für die Ableitung komplizierter Funktionen zu erarbeiten (Hinweis auf die Funktionen $f(x) = ax^2 + bx + c$ oder $f(a) = a^2 + \frac{6V}{a}$ $(a > 0)$; ↗ Einführungsbeispiel auf LB 128).
Als *Ziel dieses Stoffabschnitts* wird den Schülern mitgeteilt: Es müssen Sätze über die Differenzierbarkeit bereits bekannter Funktionen erarbeitet und daraus Regeln zur Differentiation dieser Funktionen gewonnen werden. Da es hierbei vor allem darum geht, den notwendigen theoretischen Vorlauf für spätere Anwendungen zu schaffen, ist besonders konzentriertes Mitdenken erforderlich.
Die *Zielstellung für diese Unterrichtsstunde* lautet: Erarbeiten eines Satzes über die Differenzierbarkeit der Summe zweier differenzierbarer Funktionen u und v an der Stelle x_0.

Erarbeitung der Herleitung der Summenregel Zunächst werden die Grenzwertsätze für Funktionen wiederholt. Dann lesen die Schüler ■ 13, erläutern es und formulieren die Vermutung:
„Wenn die Funktionen u und v in x_0 differenzierbar sind, so ist auch die Summe $s = u + v$ in x_0 differenzierbar".
Bei der Beweisführung im UG sollte der Lehrer stark führen. Die Schüler sollten zwar die

einzelnen Schritte selbst durchführen, jedoch nach jedem Schritt diesen sofort erläutern und begründen.
Besondere Beachtung verdient das Umformen des Differenzenquotienten. Es darf dem Schüler nicht als „Kunstgriff", den er nicht von selber finden könnte, vermittelt werden.
Aus dem Satz über die Differenzierbarkeit einer Summe zweier Funktionen (▷ 1) ergibt sich sofort, wie die Ableitung an der Stelle x_0 berechnet werden kann.
Den Schülern ist zu erläutern, daß sich daraus eine Handlungsvorschrift, die „Summenregel", ergibt. Sie erfahren, daß die Summenregel gilt

- für mehr als zwei Summanden;
- für in einem Intervall differenzierbare Funktionen.

Die Schüler suchen die Summenregel im Tafelwerk auf. Dabei ist zu betonen, daß diese Regel nicht nur für die hier behandelten Funktionen, sondern für Summen *beliebiger* differenzierbarer Funktionen gilt.

Festigung der Summenregel Zum Üben dienen Aufgaben mit solchen zusammengesetzten Funktionen, deren Teilfunktionen schon abgeleitet worden sind (↗ auch die in LE 5 angefertigte Tabelle).
LBA 1 sollte unbedingt bearbeitet werden, denn darauf baut LBA 2 auf
(Hinweis: $x^2 - 3 = x^2 + (-3)$; $v(x) = -3$ ist eine konstante Funktion).
LBA 3 können die Schüler selbst mit weiteren Beispielen anreichern.

Hausaufgaben LBA 4 (erfordert komplexes Anwenden des Wissens und Könnens, deshalb u. U. kurze Hinweise durch den Lehrer); LBA 5* zusätzlich für leistungsstarke Schüler

Kontrollaufgaben

Ermitteln Sie die 1. Ableitung folgender Funktionen unter Verwendung der Ergebnisse bereits gelöster Aufgaben!

a) $f(x) = 2x^3 + 3x + \frac{1}{x}$ **b)** $f(x) = 3x^2 + x - 5$ **c)** $f(x) = x^3 + 2$

Lerneinheit 8 **(2 Std.)**
Ableitung eines Produkts, Ableitung von Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten

LB 150 bis 153

Ziele

Die Schüler

- kennen den Satz über die Differenzierbarkeit und Differentiation eines Produkts zweier in x_0 differenzierbarer Funktionen und verstehen die Herleitung dieses Satzes,
- können die auf diesem Satz beruhende „Produktregel" auf ausgewählte Funktionen anwenden,

- kennen den Satz über die Differenzierbarkeit und Differentiation der Potenzfunktion $f(x) = x^n$ mit natürlichem Exponenten n ($n \neq 0$),
- können den Beweis dieses Satzes weitgehend selbständig führen und die darauf beruhende Regel in formalen Aufgaben anwenden.

Schwerpunkte

1. Stunde

- Motivierung: Differenzierbarkeit eines Produkts zweier differenzierbarer Funktionen
- Erarbeitung der Herleitung von ▷ 2
- Festigung der Produktregel durch Lösen formaler Übungsaufgaben

2. Stunde

- Anwendung der Produktregel (● 12)
- Erarbeitung des Beweises zu ▷ 3
- Festigung der von ▷ 3 abgeleiteten Regel (LB 152)

Methodische Hinweise

Motivierung An dieser Stelle leuchtet den Schülern die Notwendigkeit, die Differenzierbarkeit eines Produkts von differenzierbaren Funktionen zu untersuchen, noch nicht recht ein, weil sie zunächst nur an (ganze) rationale Funktionen denken. Deshalb ist es nützlich, einige Beispiele von nichtrationalen Funktionen zu nennen, deren Ableitung später gebildet werden soll:

$p(x) = x \cdot \sqrt{x^2 + 1}$ oder $p(x) = x \cdot \sin x$.

Eine andere Möglichkeit der Motivierung: Es gibt eine Summenregel. Gibt es auch eine „Produktregel"? Wenn ja, wie könnte sie lauten?

Erarbeitung der Herleitung von ▷ 2 Die Schüler bearbeiten ● 11 und äußern eine Vermutung als Antwort auf das darin gestellte Problem.
Für die Erarbeitung des Satzes gibt es zwei Wege:

- Mitteilen oder Lesen von ▷ 2; anschließend im UG Beweis führen;
- Im UG Herleiten von ▷ 2; anschließend Aufsuchen im LB.

Beim Umformen des Differenzenquotienten wird in jedem Falle Hilfe durch den Lehrer erforderlich sein.
Den Schülern muß im Anschluß bewußtgemacht werden, daß

- ▷ 2 für Produkte *beliebiger* differenzierbarer Funktionen und nicht nur für die hier betrachteten speziellen Funktionen gilt;
- dieser Satz auch für in einem Intervall I differenzierbare Funktionen gilt;
- die auf diesem Satz beruhende „Produktregel" auch für Produkte mit mehr als zwei Faktoren gilt.

Festigung der Produktregel Die Schüler sollten selbst in Anlehnung an ■ 15 geeignete Beispiele für die Ableitung eines Produkts zweier differenzierbarer Funktionen unter Verwendung von Funktionen, deren Ableitung bekannt ist (↗ Tabelle in LE 5), bilden.

Anwendung der Produktregel Nach einigen Übungen im Anwenden der Produktregel und der Summenregel sollten in SSA die im ● 12 geforderten Beweisführungen folgen. Die auf diesen Sätzen beruhenden Regeln sind für die weitere Arbeit wichtig.

Erarbeitung des Beweises zu ▷ 3 Die Bearbeitung von ■ 16 führt zu der Vermutung, daß jede Potenzfunktion vom Typ $f(x) = x^n$ mit natürlichem Exponenten ($n \neq 0$) differenzierbar ist und daß deren Ableitung $f'(x) = nx^{n-1}$ ist. In SSA kann die Richtigkeit dieser Vermutung durch Beweis mittels vollständiger Induktion bestätigt werden (Hinweis auf die Anwendung der Produktregel).

Festigung der von ▷ 3 abgeleiteten Regel Durch das Lösen formaler Aufgaben sollen die Schüler sichere Fertigkeiten im mündlichen Ableiten von Potenzfunktionen (mit natürlichen Exponenten) erreichen. Bei diesen Übungen sind die bisher erarbeiteten Differentiationsregeln mit einzubeziehen (konstante Funktion, konstanter Faktor, Summenregel, Produktregel). Dazu dienen die LBA 1, 2, 5, 6. Weitere Aufgaben können die Schüler selbst bilden und anschließend lösen.

Kontrollaufgaben

1. Warum wird $n = 0$ in der Regel für die Ableitung der Potenzfunktionen $f(x) = x^n$ ($n \in N$) ausgeschlossen?
2. Bilden Sie die 1. Ableitung der folgenden Funktionen f, und geben Sie dabei die angewendete Regel an!

a) $f(x) = x^8$	**b)** $f(x) = 3x^5$
c) $f(x) = 2x^2 + 3x^3$	**d)** $f(x) = 5$
e) $f(x) = (2x^3 + 5x) \cdot 3x$	**f)** $f(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 + 2\right)(x^2 - 3x)$

Überlegen Sie, wie die Aufgabe f) auch anders gelöst werden kann! Welcher Weg ist vorteilhafter?

Lerneinheit 9 **(2 Std.)**
Ableitung eines Quotienten

LB 153 bis 155

Ziele

Die Schüler

- kennen den Satz über die Differenzierbarkeit und die Differentiation eines Quotienten zweier in x_0 differenzierbarer Funktionen und können die auf diesem Satz beruhende „Quotientenregel“ anwenden,
- wissen, daß die Regel zur Differentiation von Potenzfunktionen mit natürlichen

Exponenten auch für Potenzfunktionen mit negativen ganzzahligen Exponenten gilt, und können Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten n ($n \neq 0$) differenzieren.

Schwerpunkte

1. Stunde
- Motivierung und Zielstellung im Rahmen von Übungen zum Anwenden bekannter Differentiationsregeln
- Erarbeitung von ▷ 4 und der Quotientenregel (LB 154)
- Festigung der Quotientenregel

2. Stunde
- Übungen im Anwenden der Differentiationsregeln
- Erarbeitung der Regel für die Differentiation von Potenzfunktionen mit negativen ganzzahligen Exponenten (■ 18)
- Festigung aller bisher behandelten Differentiationsregeln

Methodische Hinweise

Motivierung und Zielstellung Nach der Kontrolle der HA werden in der täglichen Übung Aufgaben gestellt, zu deren Lösung die Schüler die bisher bekannten Differentiationsregeln anwenden müssen. Darunter sollte sich auch eine Aufgabe befinden, die eine Potenzfunktion mit negativen ganzzahligen Exponenten enthält, z. B.:

$$f(x) = 3x^4 + \frac{1}{2}x^2 - x^{-2}.$$

Möglicherweise wenden einige Schüler unbesehen die Regel für die Differentiation von Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten auch auf $w(x) = x^{-2}$ an. Eine Regel für die Differentiation von Potenzfunktionen mit negativen ganzzahligen Exponenten ist aber noch nicht hergeleitet, ein entsprechender Satz ist noch zu formulieren.

Erarbeitung von ▷ 4 und der Quotientenregel Der Lehrer teilt diesen Satz lediglich mit (oB), oder die Schüler lesen ihn im LB und erläutern die auf diesem Satz beruhende Quotientenregel einschließlich ● 14 (Hinweis auf die Gültigkeit dieser Regel für Quotienten zweier differenzierbarer Funktionen mit Nennerfunktion ungleich Null).
Die Schüler sollten sich der Beweisnotwendigkeit auch für ▷ 4 bewußt sein.
Im UG sollte ■ 17 bearbeitet werden, so daß in den Nachschriften der Schüler eine übersichtliche Darstellung entsteht.

Festigung der Quotientenregel Die Schüler lösen LBA 1a) bis c) und weitere Aufgaben, um sichere Fertigkeiten im Anwenden dieser Regel zu erwerben. Sie sollten weitere Aufgaben selbst bilden und lösen.

Übungen im Anwenden der Differentiationsregeln Dabei sollte der Lehrer die HA kontrollieren, um Schlüsse auf den weiteren Festigungsbedarf seiner Schüler ziehen zu können. Die Schüler lösen eine Auswahl aus LBA 2 mit Hilfe der Quotientenregel.

Erarbeitung der Regel für Potenzfunktionen mit negativen ganzzahligen Exponenten Nach den vorangegangenen Übungen sollten die Schüler die Ableitung der Funktion $f(x) = x^{-n}$ $(x \neq 0)$ selbständig bilden können (↗ ■ 18).
Zur Erstfestigung lösen sie die LBA 1d), e), 2d), e) mündlich. Den Schülern ist bewußtzumachen, daß die Regel zur Differentiation von Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten auch für Potenzfunktionen mit negativen ganzzahligen Exponenten gilt (↗ Folgerung auf LB 154).

Festigung aller bisher behandelten Differentiationsregeln LBA 5 wird in SSA bearbeitet, mit deren Ergebnis wird LBA 7 gelöst (Achtung bei LBA 7a)!). Überdies sollten die Schüler Aufgaben dieses Typs selbst bilden und lösen.
Zur Systematisierung könnte das folgende Tafelbild entstehen, das die Schüler in ihre Hefte übernehmen und bei der Behandlung der LE 14 ergänzen sollten (↗ UH 155).

Differentiationsregeln

	f	f'
Konstanter Faktor $c \in P$	$c \cdot g$	$c \cdot g'$
Summe	$u + v$	$u' + v'$
Produkt	$u \cdot v$	$u'v + uv'$
Quotient mit $v(x_0) \neq 0$	$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$
(speziell	$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$)

1. Ableitung von Funktionen

	f	f'
Konstante Funktion	c	0
Potenzfunktion mit $n \in G, n \neq 0$	x^n	$n \cdot x^{n-1}$

Kontrollaufgaben

1. Bilden Sie die Ableitung folgender Funktionen, und geben Sie solche Stellen an, an denen die Funktionen nicht differenzierbar sind!

   a) $f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x^3 + 2x}$ b) $f(x) = \frac{1}{2x^2 + 1}$

2. Kann die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = x^n$ $(n \in G, n < 0)$ an der Stelle x_0 gebildet werden?

   Differenzieren Sie gegebenenfalls!
   Begründen Sie anderenfalls Ihre Aussage!

Lerneinheit 10
Differentiation rationaler Funktionen

(2 Std.)

LB 155 bis 158

Ziele

Die Schüler

- kennen die Begriffe „Ganze rationale Funktion“ und „Gebrochene rationale Funktion“, können ganze und gebrochene rationale Funktionen unterscheiden und Gleichungen für rationale Funktionen aus vorgegebenen Bedingungen angeben,
- wissen, daß rationale Funktionen im gesamten Definitionsbereich differenzierbar und damit auch stetig sind,
- können rationale Funktionen differenzieren.

Schwerpunkte

1. Stunde

- Motivierung und Zielstellung: Untersuchen der Differenzierbarkeit rationaler Funktionen
- Einführung der Begriffe „Ganze rationale Funktion“ und „Gebrochene rationale Funktion“ (■ 19 und 20)
- Festigung der Begriffe und der Differentiationsregeln
- Erarbeitung: Differenzierbarkeit und Stetigkeit rationaler Funktionen (■ 21; LB 157)

2. Stunde

Übungen im Differenzieren rationaler Funktionen und im Aufstellen von Gleichungen für ganze rationale Funktionen

Methodische Hinweise

Motivierung und Zielstellung In der täglichen Übung werden Graphen von bisher differenzierten Potenzfunktionen dargestellt und diskutiert. Dabei ergeben sich als *Ziele* für diese Lerneinheit: Der in Klasse 9 eingeführte Begriff „Rationale Funktion“ ist nunmehr zu präzisieren, und rationale Funktionen sind auf Differenzierbarkeit zu untersuchen.

Einführung von „Ganze rationale Funktion“ und „Gebrochene rationale Funktion“ Die Schüler wissen, daß die Potenzfunktionen $f(x) = x^n$ $(n \in G)$ Beispiele für rationale Funktionen sind. Im Lehrbuch bis einschließlich ■ 19 erarbeiten sich die Schüler das erforderliche Wissen über ganze rationale Funktionen. Im anschließenden UG wird der Begriff „Gebrochene rationale Funktion“ erläutert. Auf die nach ■ 20 genannte ganze rationale Funktion $f(x) = \dfrac{(x^2 + 1)(x^2 - 3x + 4)}{x^2 + 1}$ ist besonders einzugehen.

Festigung der eingeführten Begriffe und der Differentiationsregeln Die Übungen sollten an den LBA 1, 2, 4 erfolgen. Die Schüler sollten auch selbst Gleichungen für rationale Funktionen bilden.

Erarbeitung: Differenzierbarkeit und Stetigkeit rationaler Funktionen Selbständig erarbeiten sich die Schüler diese Begriffe und die zwischen ihnen bestehenden Zusammenhänge. Sie erhalten den Auftrag: „Lesen Sie den Abschnitt der LE 10, beginnend mit ■ 21, aufmerksam durch, und begründen Sie, warum rationale Funktionen differenzierbar sind!"
Die Schüler können nun auch begründen, warum die rationalen Funktionen für die Anwendung der Mathematik bedeutungsvoll sind.
Hinweis: Den Schülern ist bewußtzumachen, daß der Definitionsbereich einer gebrochenen rationalen Funktion die Menge aller reellen Zahlen ist, mit Ausnahme der Nullstellen der Nennerfunktion.

Übungen im Differenzieren rationaler Funktionen Sie sollten besonders abwechslungsreich gestaltet werden, wobei die Aufgaben dem Übungsbedürfnis der einzelnen Schüler entsprechend differenziert zu stellen sind.
Die Differentiationsregeln werden mit Hilfe von LBA 3 gefestigt, bei der Kontrolle der Lösungen sind die benutzten Regeln anzugeben. Die Schüler sollten auch einmal den Graph einer Funktion und den der 1. Ableitung dieser Funktion darstellen. Am Beispiel der LBA 5 und 6 lernen die Schüler, eine Gleichung für eine ganze rationale Funktion anzugeben, wenn bestimmte Bedingungen vorgegeben sind. Es können auch solche Aufgaben bearbeitet werden, die in den LE 7 bis 10 zurückgestellt wurden (z. B. Aufgaben zum Tangentenproblem).

Kontrollaufgaben

1. Bestimmen Sie die 1. Ableitung folgender Funktionen, und geben Sie jeweils die benutzte Regel an!

a) $f(x) = 3x^3 + 4x^2 - \frac{1}{2}x + 5$

b) $f(x) = (2x + 3)(4x^2 - 5)$

c) $f(x) = \frac{2x - 3}{x^2 - 5}$

d) $f(x) = 2x^3 - 4x + \frac{1}{x}$

e) $f(x) = \frac{2}{x^2 - 4}$

2. Bilden Sie die erste Ableitung folgender Funktionen!

a) $f(x) = tx^2 + tx + m + nx^{-1}$

b) $f(t) = x^2t + xt + m + nx^{-1}$

3. Begründen Sie, warum die gebrochene rationale Funktion $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ nicht mit der ganzen rationalen Funktion $g(x) = x + 2$ übereinstimmt (↗ auch LBA 9)!

4. Gegeben sei die Funktion $f(x) = x^3 - 27x + 54$.

a) Der Graph der Funktion f schneidet die x-Achse an der Stelle -6. Berechnen Sie den Anstieg der Tangente an den Graph der Funktion f an dieser Stelle!

b) Geben Sie eine Gleichung für diese Tangente an!

c) Ermitteln Sie diejenigen Stellen x der Funktion f, für die $f'(x) = 0$ gilt!

Lerneinheit 11 **(1 Std.)**
Umkehrfunktionen

LB 158 bis 162

Ziele

Die Schüler
- kennen die Definition des Begriffs „Umkehrfunktion einer Funktion“ und können zur gegebenen eineindeutigen Funktion f die Umkehrfunktion $\bar{f}$ bilden,
- kennen den Begriff „Wurzelfunktion“,
- wissen, daß die Graphen von f und $\bar{f}$ achsensymmetrisch zur Geraden mit $y = x$ liegen und daß sich die Eigenschaften „Monotonie“ und „Stetigkeit“ von f auf $\bar{f}$ übertragen.

Schwerpunkte

- Motivierung und Zielstellung: Erarbeiten einer Regel für die Bildung der 1. Ableitung von Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten (● 15)
- Erarbeitung der Begriffe „Umkehrfunktion einer gegebenen Funktion“, „Zueinander inverse Funktionen“, „Wurzelfunktion“ (▶ 4; ● 16 bis 18; ■ 23)
- Festigung des Begriffs „Umkehrfunktion einer Funktion f“ (■ 25)

Methodische Hinweise

Motivierung und Zielstellung Im Unterricht der Klasse 9 haben die Schüler Potenzfunktionen f mit $f(x) = x^{\frac{m}{n}}$ ($x \geqq 0$; $m, n \in N$; $m > 1$, $n \geqq 2$) als Beispiele für nichtrationale Funktionen kennengelernt.
In der täglichen Übung wird u. a. auch gefordert, eine Potenzfunktion mit rationalem Exponenten, z. B. $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$, zu differenzieren. Daraus ergeben sich die Fragen:
- Können solche Funktionen differenziert werden?
- Ist es überhaupt erforderlich, solche Funktionen zu differenzieren?

Als *langfristiges Ziel* wird „Differentiation einer Potenzfunktion mit rationalem Exponenten ...“ und als *Nahziel* nach Bearbeitung von ● 15 durch die Schüler die Untersuchung des Zusammenhangs beispielsweise zwischen den Funktionen $f(x) = x^2$ und $g(y) = \sqrt{y}$ genannt.

Erarbeitung der Begriffe „Umkehrfunktion“, „Zueinander inverse Funktionen“, „Wurzelfunktion“ Nach Arbeit im Lehrbuch bis einschließlich ▶ 4 wissen die Schüler, daß nur dann die „Umkehrfunktion von f“ gebildet werden kann, wenn die Funktion f eineindeutig ist. Sie können auch ▶ 4 mit eigenen Worten wiedergeben. Bei der Arbeit an den LBA 1 bis 3

wählen die Schüler die eineindeutigen Funktionen aus. Sie werden auf die Einschränkung des Definitionsbereichs hingewiesen und erkennen den Zusammenhang zwischen strenger Monotonie und Eineindeutigkeit einer Funktion f (↗ ● 16).
Im UG wird ■ 23 bearbeitet, wobei die Umbenennung der Variablen den Schülern Verständnisschwierigkeiten bereiten könnte.
Nach SSA am ● 17 wird der Begriff „Zueinander inverse Funktionen" eingeführt.
Nun kann am Beispiel der zueinander inversen Funktionen $y = f(x) = \sqrt[n]{x}$ $(x \geqq 0)$ und $x = \bar{f}(y) = y^n$ $(y \geqq 0)$ (bzw. nach Umbenennung der Variablen: $y = \bar{f}(x) = x^n$) der Begriff „Wurzelfunktion" eingeführt werden. Durch Arbeit am ● 18 werden die Schüler die achsensymmetrische Lage der Graphen der Funktionen f und $\bar{f}$ bezüglich der Geraden mit $y = x$ „entdecken".
Schließlich teilt der Lehrer mit, daß sich die Eigenschaften „Monotonie" und „Stetigkeit" von Funktionen auf die zugehörigen Umkehrfunktionen übertragen.

Festigung des Begriffs „Umkehrfunktion" Beim Lösen einer Auswahl aus den LBA 4 und 5 sollten in Anlehnung an ■ 25 Definitionsbereich und Wertebereich der Funktionen f und $\bar{f}$ ausdrücklich angegeben werden. Diese Aufgaben dienen auch der Weiterentwicklung der zeichnerischen Fertigkeiten der Schüler.

Kontrollaufgaben

1. Welche Bedingungen müssen vorliegen, damit zwei Funktionen als „zueinander invers" bezeichnet werden dürfen?
2. LBA 4a), 5a), 5d)

Lerneinheit 12 (2 Std.)
Differentiation von Wurzelfunktionen

LB 162 bis 166

Ziele

Die Schüler

- können die Differenzierbarkeit der Funktion $g(x) = \sqrt{x}$ $(x \geqq 0)$ nachweisen und die Ableitung dieser Funktion ermitteln,
- erkennen einen Zusammenhang zwischen den Ableitungen zueinander inverser Funktionen,
- sind aufgrund von Beispielen zu der Vermutung gelangt, daß die Regel zur Differentiation von Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten auch für Wurzelfunktionen gilt,
- haben den entsprechenden Beweis verstanden,
- können Wurzelfunktionen differenzieren.

Schwerpunkte

1. Stunde

- Sicherung des Ausgangsniveaus: Wiederholen der Schrittfolge zum Ermitteln der 1. Ableitung einer Funktion, der Grenzwertsätze für Funktionen und des Begriffs „Wurzelfunktion“
- Erarbeitung von ▷ 5 (oB)
- Festigung des Bildens und des Differenzierens von Umkehrfunktionen

2. Stunde

- Erarbeitung einer Vermutung für die Ableitung einer Wurzelfunktion (■ 28)
- Nachweis der Gültigkeit der Differentiationsregeln für Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten für das Differenzieren von Wurzelfunktionen (LB 165)
- Festigung des Differenzierens von Wurzelfunktionen

Methodische Hinweise

Sicherung des Ausgangsniveaus Zur Vorbereitung des folgenden Beweises sollten
- die Schrittfolge zum Ermitteln der 1. Ableitung einer Funktion,
- die Grenzwertsätze für Funktionen,
- die Definitionen der Begriffe „n-te Wurzel“ und „Wurzelfunktion“

wiederholt werden.

Erarbeitung von ▷ 5 (oB) Im Unterrichtsgespräch wird nachgewiesen, daß die Funktion $g(x) = \sqrt{x}$ für alle $x > 0$ differenzierbar ist. Beim Umformen des Differenzenquotienten ist der Zähler rational zu machen (in Anlehnung an das bekannte Rationalmachen des Nenners), ein Schritt, den die Schüler nicht allein finden können, der deshalb unter Hinweis auf den Zusammenhang zwischen den Ableitungen zueinander inverser Funktionen vom Lehrer mitgeteilt werden sollte. Zur Motivation der Erarbeitung dieses Satzes kann der auf LB 163 genannte Rationalisierungsaspekt dienen. Tragfähiger erscheint jedoch das Bestreben, die Ableitung der Wurzelfunktion $g(x) = \sqrt[n]{x}$ $(x > 0)$ zu ermitteln und damit die erforderliche Umformung des Differenzenquotienten zu erreichen. In Anlehnung an die Darstellung im LB könnte im UG das Tafelbild auf UH 152 entstehen.
Die in der Merkregel im TB verwendete Symbolik (↗ LB 139) wird in LE 14 zur Formulierung einer Merkregel für die Kettenregel verwendet. Sie kann deshalb schon hier benutzt werden.
Der Beweis zu ▷ 5 ist nicht zu erarbeiten, den Schülern jedoch auch hier die Beweisnotwendigkeit zu verdeutlichen.

Festigung des Bildens und des Differenzierens von Umkehrfunktionen In SSA werden die LBA 1 und 2 bearbeitet. Dabei sollten die Schüler erkennen, daß man auf zwei Wegen die Ableitung der Umkehrfunktion einer gegebenen differenzierbaren Funktion bilden kann.

Erarbeitung einer Vermutung Unter Nutzung von ▷ 5 erarbeitet eine Schülergruppe die Ableitung der Funktion $y = f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ (↗ ■ 28), eine andere die Ableitung der Funktion $y = f(x) = x^{\frac{1}{4}}$. Die Ergebnisse lassen die Schüler vermuten, daß die Regel für die Differentiation der Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten auch für Potenzfunktionen f mit $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$ $(n \in N,\ n > 1)$ gilt.

Zusammenhang zwischen den Ableitungen zueinander inverser Funktionen

$y = f(x) = x^2 \quad (x \geqq 0)$	$x = \bar{f}(y) = \sqrt{y} \quad (y \geqq 0)$

$f, \bar{f}$ sind zueinander inverse Funktionen.

Es sei x_0 eine beliebige positive Zahl. Dann gilt

$y_0 = f(x_0) = x_0^2$	$x_0 = \bar{f}(y_0) = \sqrt{y_0}$

Die Ableitungen sind

$f'(x_0) = 2x_0$	$\bar{f}'(y_0) = \dfrac{1}{2\sqrt{y_0}} \quad (y_0 > 0)$

Da $x_0 = \sqrt{y_0}$ ist, gilt:

$$\bar{f}'(y_0) = \frac{1}{2x_0}. \qquad (x_0 > 0)$$

Da $f'(x_0) = 2x_0$ ist, gilt:

$$\boxed{\bar{f}'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}}$$

bzw. $f'(x_0) \cdot \bar{f}'(y_0) = 1$.

Merkregel: $\dfrac{dy}{dx} \cdot \dfrac{dx}{dy} = 1$

Nachweis der Richtigkeit der erarbeiteten Vermutung Die Vorarbeit an den oben genannten Spezialfällen ermöglicht einen SV zur Regel für die Differentiation der Potenzfunktionen $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$ mit $n \in N$, $n > 1$ (der Definitionsbereich muß stets angegeben werden).

Festigung des Differenzierens von Wurzelfunktionen Nach dem mündlichen Lösen einfacherer Aufgaben wie LBA 3a) bis c) und 4a) bis c) werden weitere Teilaufgaben aus LBA 3 und 4 in SSA bearbeitet.

Kontrollaufgaben

Ermitteln Sie die 1. Ableitung der folgenden Funktionen!

1. $f(x) = 3\sqrt{x} + 5\sqrt{a}$

2. $f(t) = \sqrt{x} + 2\sqrt[3]{t}$

3. $f(a) = (\sqrt{a} + t)(\sqrt[3]{a} - t)$

4. $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x} + 1}$

5. $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x}{2}}$ (vor dem Differenzieren umformen)

Lerneinheit 13 (1 Std.)
Verkettung von Funktionen

LB 166 bis 168

Ziele

Die Schüler
- kennen den Begriff „Verkettung von Funktionen" und können „innere Funktion" und „äußere Funktion" einer Verkettung bestimmen,
- wissen, daß Funktionen nur dann verkettet werden können, wenn der Wertebereich der inneren Funktion eine Teilmenge des Definitionsbereichs der äußeren Funktion ist.

Schwerpunkte

- Motivierung und Zielstellung zur Verkettung von Funktionen
- Erarbeitung des Verkettungsbegriffs (LB 167; ■ 30 bis 32)
- Festigung des erarbeiteten Begriffs

Methodische Hinweise

Motivierung und Zielstellung Im Rahmen der täglichen Übung zur Festigung der bisher erarbeiteten Differentiationsregeln finden sich auch Aufgaben des Typs $f(x) = (x^2 - 5)^6$ oder $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 1}$, die die Schüler mit ihren bisherigen Kenntnissen nicht lösen können. Es muß eine neue Operation eingeführt werden: die Verkettung von Funktionen.

Erarbeitung des Begriffs „Verkettung von Funktionen" *1. Schritt:* Die Schüler lesen ■ 30 und die folgende Verallgemeinerung, erläutern den Begriff „Verkettung der Funktion u mit der Funktion v" und nennen an Beispielen jeweils die äußere und die innere Funktion.
2. Schritt: Die Schüler bearbeiten ■ 31 und 32 und erkennen dabei die Bedingung, die an den Wertebereich der inneren Funktion gestellt werden muß.

Festigung des Verkettungsbegriffs In SSA werden eine Auswahl aus LBA 1, 3 und 4 und weitere selbstgebildete Aufgaben gelöst. Mathematisch besonders interessierte Schüler lösen dabei LBA 2* und erläutern anschließend deren Ergebnis.

Kontrollaufgaben

Geben Sie die äußere Funktion u und die innere Funktion v bei folgenden verketteten Funktionen an!

a) $f(x) = (2x - 3)^4$ b) $f(x) = \dfrac{4}{\sqrt{x^2 + 3}}$

c) $f(x) = \sqrt[3]{5x + 3}$

Lerneinheit 14 **(2 Std.)**
Ableitung der Verkettung zweier Funktionen

LB 168 bis 171

Ziele

Die Schüler

- kennen die Kettenregel und können sie zur Differentiation verketteter differenzierbarer Funktionen anwenden,
- erkennen, daß jede Potenzfunktion mit rationalem Exponenten für jedes positive x differenzierbar ist und daß die Regel für die Differentiation von Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten auch für Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten gilt,
- können Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten differenzieren und haben damit ein langfristig verfolgtes Ziel erreicht.

Schwerpunkte

1. Stunde

- Motivierung für das Erarbeiten der Kettenregel (● 21)
- Einführung der Kettenregel (LB 169)
- Festigung der Kettenregel (■ 33 bis 35)

2. Stunde

- Erarbeitung der Regel für das Differenzieren von Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten (● 22)
- Festigung dieser Regel

Methodische Hinweise

Motivierung für das Erarbeiten der Kettenregel In der täglichen Übung zur Festigung der Differentiationsregeln kann den Schülern bewußtgemacht werden, daß es sehr aufwendig ist, verkettete differenzierbare Funktionen (↗ ● 21) mit Hilfe der Produktregel abzuleiten. Überdies können verkettete Funktionen, deren äußere Funktion eine Wurzelfunktion ist, auch mit Hilfe der Produktregel nicht differenziert werden. Deshalb muß man untersuchen, ob die Verkettung differenzierbarer Funktionen differenzierbar ist und wie die entsprechende Regel lautet.

Einführung der Kettenregel Nach der Bearbeitung von ● 21 können die Schüler den folgenden Satz vermuten:
„Die Verkettung differenzierbarer Funktionen ist differenzierbar, und für die Ableitung der Funktion $f(x) = u(v(x))$ an der Stelle x_0 gilt $f'(x_0) = u'(v(x_0)) \cdot v'(x_0)$". Der Beweis wird lt. LP nicht geführt, auf die Beweisnotwendigkeit muß jedoch hingewiesen werden. Die auf

diesem Satz beruhende *Kettenregel* kann nun auch in Kurzform unter Verwendung der entsprechenden Symbolik (der Begriff „Differential" ist kein Behandlungsgegenstand) formuliert werden.

Festigung der Kettenregel Die ■ 33 bis 35 werden im UG bearbeitet. Dann sollte zunehmend SSA folgen, z. B. beim Lösen von LBA 1 a), b); 2 a), b); 3 a), b), c); 4 a), b), c), wobei einfache Aufgaben mündlich gelöst werden sollten. Dabei müssen zunächst solche Aufgaben ausgeschlossen werden, deren äußere Funktion eine Wurzelfunktion ist.

Erarbeitung der Regel für das Differenzieren von Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten Nach festigenden Übungen zur Kettenregel können die einzelnen Schritte beim Nachweis der Differenzierbarkeit der Potenzfunktion

$$f(x) = x^{\frac{m}{n}} \quad (x \geqq 0) \text{ mit } m, n \in N, m > 1 \text{ und } n \geqq 2$$

in SSA ausgeführt werden, möglicherweise kommentiert ein Schüler seine Arbeit. In Analogie folgt SSA an ● 22.
Damit ist das langfristig angestrebte Ziel erreicht (↗ LE 11, UH 149). Das in LE 9 (↗ UH 146) angelegte Tafelbild kann nun durch das folgende ergänzt werden.

Differentiationsregeln

	f	f'
Kettenregel	$u(v(x))$	$u'(v(x)) \cdot v'(x)$

Zusammenhang zwischen zueinander inversen Funktionen:

$$\bar{f}'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

1. Ableitung von Funktionen

	f	f'
Potenzfunktion mit r rational	x^r	$r \cdot x^{r-1}$

Beachte!
Wenn r negativ ganzzahlig, muß $x \neq 0$ sein.
Wenn r nicht ganzzahlig, muß $x > 0$ sein.

Festigung der Regel Nach dem Anwenden der Regel beim mündlichen Lösen der LBA 1 c), d), f); 2 f) sollten die LBA 1 e); 2 c), d), e), die den Einsatz der Kettenregel (äußere Funktion ist eine Wurzelfunktion) fordern, bearbeitet werden.
Schließlich sind in SSA Aufgaben zur umfassenden Anwendung der behandelten Differentiationsregeln zu lösen (Auswahl aus LBA 3, 4, 7 und 8 b)).
Im folgenden Unterricht (besonders im Stoffabschnitt 3.3) sind die Fertigkeiten der Schüler im Differenzieren von Vertretern der bisher behandelten Funktionen und im Anwenden der Differentiationsregeln systematisch weiterzuentwickeln (↗ LP 30).

Kontrollaufgaben

Differenzieren Sie!

1. $f(x) = (2x^2 + 3x + 4)^3$

2. $f(x) = \sqrt{x^3 + 2}$

3. $f(x) = \left(\frac{x^2 - 1}{2x - 1}\right)^2$

4. $f(x) = \sqrt[3]{\frac{2x^2 + 1}{x^2 + 4}}$

Lerneinheit 15 (2 Std.)

Ableitungen höherer Ordnung

LB 172 bis 173

Ziele

Die Schüler

- kennen den Begriff „*n*-te Ableitung einer Funktion an einer Stelle x_0 (bzw. in einem Intervall I)“ und können Ableitungen höherer Ordnung von gegebenen Funktionen bilden,
- können die Graphen gegebener Funktionen sowie deren 1. und 2. Ableitung in ein und demselben Koordinatensystem darstellen.

Schwerpunkte

1. Stunde

- Erarbeitung des Begriffs „*n*-te Ableitung einer Funktion“ (LB 172)
- Festigung im Bilden von Ableitungen höherer Ordnung

2. Stunde

- Übungen im Bilden von Ableitungen höherer Ordnung von rationalen Funktionen und Wurzelfunktionen
- Zusammenfassung zum Stoffabschnitt 3.2 (LB 173f.)

Methodische Hinweise

Erarbeitung des Begriffs „*n*-te Ableitung“ In SSA sollte, um die Arbeit der Schüler mit dem LB weiterzuentwickeln, die LE 15 erarbeitet werden. Die Schüler sollten sich Aufzeichnungen anfertigen, die sie befähigen, beispielsweise folgende Fragen zu beantworten:

- Unter welchen Bedingungen ist eine Funktion f an der Stelle x_0 zweimal differenzierbar?
- Was versteht man unter der „2. Ableitung der Funktion f im Intervall I“?
- Wie bezeichnet man die 2., 3., ..., *n*-te Ableitung einer Funktion noch?

Nach der Beantwortung dieser Fragen bilden die Schüler die 4. Ableitung der Funktion $f(x) = 2x^3 - 0{,}5x^2 + 3x - \sqrt{2}$.

Festigung im Bilden von Ableitungen höherer Ordnung In SSA sollte eine Auswahl aus LBA 1 bis 3 sowie 5 und 6 bearbeitet werden.

Übungen im Bilden von Ableitungen höherer Ordnung von rationalen Funktionen und Wurzelfunktionen Wenn dabei auch die Differentiation von Wurzelfunktionen im Mittelpunkt stehen wird (LBA 7 und 8), sollten die Schüler in Vorbereitung auf die anschließende Zusammenfassung auch Aufgaben zur Differentiation von rationalen Funktionen lösen, je nach dem Festigungsbedarf in der betreffenden Klasse.

Zusammenfassung zum Stoffabschnitt 3.2 Es ist zweckmäßig, die vorausgehenden Übungen mit der Zusammenfassung zu verbinden. Deshalb sollte man entweder von Beispielen ausgehen und die entsprechende Regel (auch in Worten) erläutern lassen oder von der Regel jeweils zum Bilden von Beispielen übergehen (↗ Zus auf LB 173 f.).

Kontrollaufgaben

Bilden Sie die 1. und 2. Ableitung folgender Funktionen!

1. $f(x) = (2x^2 + 5)^3$ **2.** $f(x) = (x^2 + 3)(x - 1)$

3. $f(x) = \frac{3x}{2x^2 + 1}$ **4.** $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2 + 5}}$

5. $f(x) = \sqrt{2x + 3}$

Stoffabschnitt 3.3 (25 Std.)
Kurvenuntersuchungen, Extremwertaufgaben

In diesem Stoffabschnitt werden einige Anwendungen der Differentialrechnung behandelt. Nachdem zunächst die theoretischen Grundlagen dafür erarbeitet worden sind, sollen vor allem sichere Fertigkeiten bei Kurvenuntersuchungen und im Lösen von Extremwertaufgaben erreicht werden. Dabei sind die Fertigkeiten im Differenzieren von rationalen Funktionen, Wurzelfunktionen und Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten sowie im Lösen von Gleichungen (insbesondere von solchen, die auf lineare und quadratische Gleichungen führen) voll zu entwickeln. Vielfältige Möglichkeiten der inneren Differenzierung und Schülerselbstkontrolle sollten genutzt werden.
Das Lösen von Extremwertaufgaben bereitet den Schülern erfahrungsgemäß – wie allgemein das Lösen von Sach- und Anwendungsaufgaben – oft erhebliche Schwierigkeiten. Die Ursachen dafür sind vielfach in Unsicherheiten beim Ermitteln des Lösungsansatzes zu suchen. Von besonderer Bedeutung ist deshalb die Befähigung der Schüler, die richtigen Ansätze für das Lösen solcher Aufgaben durch Erkennen der darin enthaltenen funktionalen Zusammenhänge zu finden.
Die Schüler müssen die gegebene Aufgabenstellung erfassen (z. B. durch Wiedergeben mit eigenen Worten, durch Anfertigen einer Skizze, durch Ermitteln der Größe, die ein Maximum annehmen soll usw.) und die im allgemeinen als Worttext formulierte Aufgabe in eine mathematische Form bringen können (mathematische Modellierung). Ziel ist, die Schüler zu befähigen, diese „Übersetzung“ schließlich in die Form einer „Zielfunktion mit nur *einer* unabhängigen Variablen“ zu bringen. Dabei kommt es auf eine effektive „Strategie“ an. Dieser **zentrale heuristische Aspekt** muß den Schülern deutlich gemacht werden. Sie müssen auch erkennen, daß sie dazu im umfassenden Maße ihr bisher erworbenes mathematisches Wissen und Können benötigen, das es ständig zu reaktivieren gilt (z. B. durch Bekanntgabe eines Wiederholungsplans im Fachunterrichtsraum, durch tägliche Übungen, durch differenzierte Aufgabenstellung wie Wiederholungen in den Hausaufgaben, durch Nutzen der Formelsammlung usw.). Diese langfristige Planung sollte insbesondere berücksichtigen (↗ auch „Aufgaben für tägliche Übungen und Wiederholungen“ auf UH 112 ff.):

1. Quadratische Gleichungen; Gleichungen höheren Grades, die auf quadratische und lineare Gleichungen zurückgeführt werden können; Wurzelgleichungen;

Begriffe	**Sätze**	**Verfahren**
Wiederholen: **Nullstelle einer Funktion** (↗ LB 176)	⟶	Berechnen von Nullstellen linearer und quadratischer Funktionen (Lösen von Gleichungen, die sich auf quadratische oder lineare Gleichungen zurückführen lassen) ↓ Berechnen von Nullstellen ganzer rationaler Funktionen ↓
Definieren: **Nullstelle einer gebrochenen rationalen Funktion** (↗ LB 178)	⟶	Berechnen von Nullstellen gebrochener rationaler Funktionen
Einführen: **Asymptote** (↗ LB 182)		Untersuchen des Verhaltens rationaler Funktionen im Unendlichen
Einführen: **Polstelle einer gebrochenen rationalen Funktion** (↗ LB 185)		Berechnen von Polstellen gebrochener rationaler Funktionen ↓ Untersuchen des Verhaltens einer Funktion in einer Umgebung der Pole
Definieren: **Lokales Maximum (Minimum)** einer Funktion f an einer Stelle x_0 (▶ 5) ⟶ ↓ *Einführen:* **Globales Maximum (Minimum)** einer Funktion f in einem Intervall I (LB 188)	Satz über die notwendige Bedingung für lokale Extrema (▷ 6, mB) ↓ Satz von Rolle (▷ 7, oB) ↓ Mittelwertsatz der Differentialrechnung (▷ 8, oB) ↓ Satz über den Zusammenhang von Monotonie und 1. Ableitung einer im Intervall I differenzierbaren Funktion (▷ 9, mB) ↓ Satz über die (notwendige und) hinreichende Bedingung für die Existenz eines lokalen Maximums (Minimums) (▷ 10, mB)	Berechnen möglicher lokaler Extrema Berechnen lokaler Extrema
		Kurvendiskussionen
		Extremwertaufgaben

2. Flächeninhalts- und Volumenformeln (besonders aus der Stereometrie: Quader, Pyramide, Zylinder, Kegel; Beziehungen zwischen einzelnen Größen);
3. Satzgruppe des PYTHAGORAS;
4. Strahlensatz.

Auf UH 158 wird eine Übersicht über die **Stoffstruktur** dieses Unterrichtsabschnittes gegeben.

Lerneinheit 16 (1 Std.)

Nullstellen ganzer rationaler Funktionen

LB 175 bis 178

Ziele

Die Schüler
- festigen ihre bereits in Klasse 9 erworbenen Fertigkeiten im Ermitteln der Nullstellen ganzer rationaler Funktionen, insbesondere im Lösen quadratischer Gleichungen,
- können nunmehr die Nullstellen einiger ausgewählter rationaler Funktionen dritten und höheren Grades berechnen, indem sie entsprechende Gleichungen, die auf quadratische oder lineare Gleichungen zurückgeführt werden können, lösen.

Schwerpunkte

- Motivierung: Untersuchen von Graphen von Funktionen
- Festigung im Berechnen von Nullstellen ganzer rationaler Funktionen (■ 38 bis 40)

Methodische Hinweise

Motivierung Zur Einführung in die umfangreiche Problematik dieses Stoffabschnitts sollte den Schülern anhand der Darlegungen auf LB 176 ein Überblick über mögliche Fragestellungen gegeben werden, die z. T. auch ohne Anwendung der Differentialrechnung bearbeitet werden können. Die Schüler sollten darauf hingewiesen werden, daß sie ständig ihre Fertigkeiten beim Differenzieren rationaler Funktionen und von Wurzelfunktionen weiterentwickeln.

Festigung im Berechnen von Nullstellen Die Schüler wissen, daß die Nullstellen der ganzen rationalen Funktion $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_0$ die Lösungen der Gleichung $a_n x^n + \ldots + a_0 = 0$ sind.
Es ist zweckmäßig, zunächst kurz das Lösen quadratischer Gleichungen zu üben. In ■ 38 bis 40 werden die Nullstellen solcher Funktionen berechnet, denen Sonderformen von Gleichungen höheren Grades (fehlendes Absolutglied, biquadratische Gleichung, Produktdarstellung) entsprechen. Die Schüler sollten dabei Vorschläge für das Lösen solcher Gleichungen, das wichtigste Anliegen dieser Stunde, bringen (Auswahl aus LBA 1 bis 5).

Kontrollaufgaben

Bestimmen Sie die Nullstellen folgender Funktionen!

a) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$ b) $f(x) = x^4 + 5x^2 - 126$

c) $f(x) = (x^2 - 9)(x^2 - 4)$

Lerneinheit 17 (2 Std.)
Nullstellen gebrochener rationaler Funktionen

LB 178

Ziele

Die Schüler

- kennen die Definition des Begriffs „Nullstelle einer gebrochenen rationalen Funktion" und können die Nullstellen gebrochener rationaler Funktionen berechnen,
- können die Schnittpunkte der Graphen zweier rationaler Funktionen ermitteln.

Schwerpunkte

1. Stunde

- Erarbeitung der Definition des Begriffs „Nullstelle einer gebrochenen rationalen Funktion" und von Beispielen zum Bestimmen der Nullstellen einer gebrochenen rationalen Funktion (■ 42; LB 178)
- Festigung des Bestimmens von Nullstellen gebrochener rationaler Funktionen

2. Stunde

- Übungen im Berechnen von Schnittpunkten der Graphen von Funktionen
- Übungen im Differenzieren rationaler Funktionen

Methodische Hinweise

Erarbeitung von „Nullstelle einer gebrochenen rationalen Funktion" Die den Schülern bekannte Definition des Begriffs „Nullstelle" bleibt mit der Einschränkung erhalten, daß bei gebrochenen rationalen Funktionen diejenigen Stellen auszuschließen sind, für die $v(x) = 0$ ist. Am ■ 42 wird das Ermitteln der Nullstellen gebrochener rationaler Funktionen erläutert.

Festigung des Bestimmens von Nullstellen In SSA wird eine Auswahl aus LBA 1 bis 3 zum

Bestimmen der Nullstellen rationaler Funktionen $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ bearbeitet. Besonders sind solche Aufgaben auszuwählen, bei denen v an einigen Nullstellen von u gleich Null ist. An solchen Stellen ist die Funktion f nicht definiert.

Übungen im Berechnen von Kurvenschnittpunkten und im Differenzieren rationaler Funktionen Die Schüler haben bisher noch nicht gelernt, Schnittpunkte von Graphen zweier Funktionen zu ermitteln. Sie werden jedoch nach einer Wh des Lösungsverfahrens für ein System von zwei linearen Gleichungen mit zwei Variablen (Klasse 9) selbständig finden, daß zum Bestimmen der Abszissen der Schnittpunkte der Graphen zweier Funktionen f und g gilt: $f(x) = g(x)$.
Selbständig lösen die Schüler LBA 6 bis 8 aus LE 16, LBA 4 aus LE 17, z. T. als HA, sowie einige Übungsaufgaben zum Differenzieren rationaler Funktionen, damit die im Stoffabschnitt 3.2 erworbenen Fertigkeiten erhalten und weiter gefestigt werden.

Kontrollaufgaben

1. LBA 1 b) und 2c)
2. Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Graphen der Funktionen

$$f(x) = \frac{1}{2}x - 1 \quad \text{und} \quad g(x) = \frac{1}{x-1}\,!$$

Lerneinheit 18 (2 Std.)
Nullstellen von Wurzelfunktionen

LB 179 bis 181

Ziele

Die Schüler

- können Nullstellen von Wurzelfunktionen berechnen,
- können Wurzelgleichungen durch Quadrieren auf lineare oder quadratische Gleichungen zurückführen,
- wissen, daß Quadrieren keine äquivalente Umformung einer Gleichung ist und daß deshalb die Probe erforderlich ist.

Schwerpunkte

1. Stunde

- Erarbeitung des Berechnens der Nullstellen von Wurzelfunktionen (● 26; ■ 43 bis 46)
- Festigung des Berechnens der Nullstellen von Wurzelfunktionen (LB 180)

2. Stunde

- Weitere Festigung des Berechnens der Nullstellen von Wurzelfunktionen
- Übungen im Berechnen der Schnittpunkte der Graphen zweier Wurzelfunktionen

Methodische Hinweise

Erarbeitung des Berechnens der Nullstellen von Wurzelfunktionen Zur Sicherung des Ausgangsniveaus reaktivieren die Schüler mit Hilfe von ● 26 die Begriffe „Wurzel" und „Wurzelfunktion" (LE 11). Sie prägen sich ein, daß bei Wurzelfunktionen Überlegungen zum Bestimmen des Definitionsbereiches und des Wertebereiches erforderlich sind.
Im UG sollten dann die ■ 43 bis 46 bearbeitet werden (evtl. nur bis zur Auflösung der Wurzeln durch Quadrieren), damit die Schüler sowohl das allgemeine Lösungsprinzip erkennen als auch Erfahrungen beim Lösen verschiedener konkreter Fälle sammeln können. Es muß den Schülern bewußt werden, daß das Quadrieren einer Gleichung keine äquivalente Umformung ist. Die Schüler sind auf die Notwendigkeit der Probe ausdrücklich hinzuweisen.

Festigung des Berechnens der Nullstellen Die Schüler lösen zunehmend selbständig eine Auswahl aus LBA 1 und 2. Sie nutzen dabei die auf LB 180 angegebene Schrittfolge. Lehrer und leistungsstarke Schüler leisten dabei Hilfe.

Festigung des Berechnens von Nullstellen und der Schnittpunktberechnungen In SSA wird eine weitere Auswahl aus LBA 1 und 2 bearbeitet. Stets sollten zunächst Definitionsbereich und Wertebereich festgelegt werden. Schließlich sollten alle Schüler beim Bestimmen der Nullstellen Wurzelgleichungen der im Lehrbuch angegebenen Typen in angemessener Zeit richtig lösen können. Die Schnittpunkte der Graphen zweier Wurzelfunktionen werden anhand von LBA 3 berechnet. Wenn noch Zeit vorhanden ist, können Übungen im Differenzieren von Wurzelfunktionen angeschlossen werden.

Kontrollaufgaben

LBA 1c), 2b), 4

Lerneinheit 19 (2 Std.)

Verhalten rationaler Funktionen für $x \to \pm\infty$

LB 181 bis 184

Ziele

Die Schüler

- haben die Notwendigkeit und Zweckmäßigkeit der Untersuchung des Verhaltens rationaler Funktionen für unbeschränkt wachsende (bzw. fallende) Argumente verstanden,

- können das Verhalten ganzer rationaler Funktionen und gebrochener rationaler Funktionen im Unendlichen bestimmen,
- kennen den Begriff „Asymptote einer Kurve“.

Schwerpunkte

1. Stunde
- Sicherung des Ausgangsniveaus durch Wh der Grenzwertsätze für Zahlenfolgen (● 27; LE B 6)
- Motivierung der Untersuchung des Verhaltens rationaler Funktionen im Unendlichen (● 28)
- Untersuchung des Verhaltens einer Funktion f für unbeschränkt wachsende (fallende) Argumente (LB 181 f.)
- Festigung der Untersuchung des Verhaltens ausgewählter Funktionen im Unendlichen (● 29; ■ 47)

2. Stunde
- Untersuchung des Verhaltens gebrochener rationaler Funktionen im Unendlichen (■ 48 und 49)
- Festigung der Untersuchungen (LB 184)

Methodische Hinweise

Sicherung des Ausgangsniveaus In SSA wird ● 27 bearbeitet. Anschließend sollten die Grenzwertsätze für Zahlenfolgen (LE B 6) wiederholt und einige entsprechende Aufgaben gelöst werden, z. B.:
„Bestimmen Sie mit Hilfe der Grenzwertsätze die Grenzwerte der Zahlenfolgen

a) $\left(\frac{n-5}{2n+3}\right)$; b) $\left(\frac{n^2+1}{2n^2+1}\right)$!“

Motivierung der Untersuchungen Da mit Hilfe des Ermittelns der Nullstellen einer Funktion noch keine Aussage über das Verhalten dieser Funktion (und damit auch über den Verlauf des Graphen) gemacht werden kann, ist es notwendig, das Verhalten von Funktionen für unbeschränkt wachsendes (fallendes) x zu untersuchen (Bearbeitung von ● 28).

Untersuchungen zum Verhalten einer Funktion im Unendlichen Im UG wird in Anlehnung an LB 181 f. zunächst das Verhalten einer gebrochenen rationalen Funktion untersucht. Die Schüler müssen erkennen, daß für gewisse unbeschränkt wachsende Folgen von Argumenten die Folgen der dazugehörigen Funktionswerte untersucht werden müssen. Dabei werden die Grenzwertsätze für Zahlenfolgen angewendet.
Die Schüler müssen ferner verstehen, daß die Aussage über eine spezielle Folge nicht genügt, sondern daß eine Verallgemeinerung notwendig und deshalb eine Aussage über das Verhalten der Folge der Funktionswerte für *jede* unbeschränkt wachsende Folge des Arguments zu machen ist. Diese Gedanken sind im LB ausführlich dargestellt.
Es werden die Sprechweise „f hat bei unbeschränkt wachsendem x den Grenzwert g“, die Schreibweise „$\lim_{x \to +\infty} f(x) = g$“ und der Begriff „Asymptote einer Kurve“ eingeführt.

Festigung der Untersuchungen Selbständig bearbeiten die Schüler in Analogie zu dem erarbeiteten Vorgehen ● 29. Dabei ist zu erwarten, daß die Hilfe des Lehrers von einigen Schülern in Anspruch genommen wird. Anschließend sollte das Verhalten ganzer rationaler Funktionen im Unendlichen am ■ 47 und beim Lösen von LBA 1 d) unter Hinweis auf die ungewohnte Darstellungsweise untersucht werden (in ▶ B 4 hatten die Schüler gelernt, daß der Grenzwert g eine reelle Zahl ist).

Untersuchung des Verhaltens gebrochener rationaler Funktionen im Unendlichen Es ist nun noch das Verhalten solcher gebrochenen rationalen Funktionen im Unendlichen zu untersuchen, bei denen der Grad der im Zähler stehenden Funktion größer (bzw. kleiner) als der Grad der im Nenner stehenden Funktion ist. Dazu eignen sich Aufgaben in Analogie zu ■ 48 und 49. Danach sollten sich die Schüler die Übersicht „Arbeitsschritte" auf LB 184 erarbeiten.

Festigung der Untersuchungen Selbständig lösen die Schüler eine weitere Auswahl aus LBA 1 und 2 und folgen den auf LB 184 angegebenen Arbeitsschritten, ohne jedoch diese Übersicht zu benutzen.

Hausaufgaben Auswahl aus LBA 1 und 2; zusätzlich LBA 3* für leistungsstarke Schüler

Kontrollaufgaben

Das Verhalten folgender Funktionen ist zu untersuchen.

a) $f(x) = 3x^3 + 5x^2 - 4x + 1$ **b)** $f(x) = \dfrac{2x^3 + 5}{3x^3 + 4x}$

c) $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x}{3x^2 + 1}$ **d)** $f(x) = \dfrac{3x - 2}{x^3 + 2}$

Lerneinheit 20 (1 Std.)

Polstellen rationaler Funktionen

LB 184 bis 187

Ziele

Die Schüler

- kennen den Begriff „Polstelle einer rationalen Funktion" und können Polstellen berechnen,
- können das Verhalten einer Funktion in der Umgebung einer Polstelle untersuchen,
- wissen, daß die Gerade $x = x_0$ eine Asymptote an den Graph der Funktion $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ ist, wenn x_0 eine Polstelle dieser Funktion ist.

Schwerpunkte

- Motivierung und Zielstellung zum Untersuchen von Polstellen zur weiteren Charakterisierung des Verhaltens rationaler Funktionen (● 30 und 31)
- Erarbeitung des Berechnens von Polstellen und Untersuchen einer rationalen Funktion in der Umgebung einer Polstelle (■ 50; ● 32)
- Festigung dieser Tätigkeiten durch Lösen von Aufgaben

Methodische Hinweise

Motivierung und Zielstellung zu den Untersuchungen Die Schüler machen selbst Vorschläge, wie man das Verhalten einer rationalen Funktion charakterisieren könnte.
Durch die mündliche Bearbeitung von ● C 30 und C 31 werden die Schüler auf das Verhalten der Funktionen $f(x) = \frac{1}{x}$ und $g(x) = \frac{1}{x^2}$ in einer Umgebung der Stelle 0 orientiert.
Die Graphen dieser Funktionen sind ihnen bekannt. Es erheben sich folgende Fragen:

- Wie heißt eine solche Stelle?
- Haben auch andere Funktionen solche Stellen?
- Wie kann man solche Stellen ermitteln und das Verhalten der Funktion in einer Umgebung dieser Stelle bestimmen?

Erarbeitung des Berechnens von Polstellen und des Untersuchens von Umgebungen solcher Stellen Die Schüler lesen auf LB 185 den Abschnitt über die Einführung des Begriffs „Polstelle einer rationalen Funktion". Sie können damit in Analogie zum Vorgehen beim Berechnen der Nullstellen gebrochener rationaler Funktionen formulieren, wie Polstellen gebrochener rationaler Funktionen $f = \frac{u}{v}$ berechnet werden:

1. Schritt: Ermitteln der Lösungen x_0 der Gleichung $v(x) = 0$;

2. Schritt: Überprüfen, ob $u(x_0) \neq 0$ ist;

Ergebnis: Die Polstellen von f sind jene Stellen x, für die $v(x) = 0$ und $u(x) \neq 0$ ist.

Die Schüler sollten sofort wenigstens in einem Beispiel die Polstellen einer gebrochenen rationalen Funktion bestimmen (Auswahl aus LBA 1 und 2).
Die Untersuchung des Verhaltens einer gebrochenen rationalen Funktion in der Umgebung einer Polstelle sollte zweckmäßigerweise im UG unter Einbeziehung von ■ 50 (Nutzung der Tabelle) und ● 32 erfolgen. Dabei sind die im Bild C 41 dargestellten vier Fälle der Annäherung einer Kurve an die Asymptote herauszuarbeiten, wobei die Schüler auf das Berechnen geeigneter Funktionswerte hinzuweisen sind.

Festigung der erarbeiteten Verfahren Während die Schüler im Berechnen von Polstellen *Fertigkeiten* erwerben müssen, sollten diese beim selbständigen Untersuchen des Verhaltens einer Funktion bei Annäherung an eine Polstelle nicht gefordert werden.
Selbständig sollten die Schüler die Polstellen in LBA 1 bis 3 berechnen, bei LBA 3 zunächst unter Anleitung im Unterricht auch das Verhalten der Funktionen in der Umgebung der Polstellen untersuchen.

Lerneinheit 21 **(1 Std.)**
Lokale und globale Extrema von Funktionen

LB 187 bis 190

Ziele

Die Schüler

- haben verstanden, daß lokale Extrempunkte zur Charakterisierung des Kurvenverlaufs dienen,
- kennen die Definition des Begriffes „lokales Extremum (lokales Maximum bzw. lokales Minimum) einer Funktion an einer Stelle x_0“ und können es vom „globalen Maximum (bzw. Minimum) einer Funktion in einem Intervall I“ unterscheiden,
- können die Begriffe „Extremum“ und „Extrempunkt“ richtig verwenden,
- können lokale und globale Extrempunkte des Graphen einer Funktion feststellen.

Schwerpunkte

- Motivierung und Zielstellung: Untersuchen lokaler Extrempunkte einer Kurve
- Erarbeitung der Definition des Begriffs „Lokales Maximum (Minimum) einer Funktion an einer Stelle x_0“ und Einführung des Begriffs „Globales Maximum (Minimum) einer Funktion in einem Intervall I“ (■ 52 und 53; ▶ 5; ● 33; LB 188f.)
- Festigung des Ermittelns lokaler und globaler Extrema

Methodische Hinweise

Motivierung und Zielstellung Im UG wird gefunden: Die Untersuchungen des Verhaltens von Funktionen und des Verlaufs des Graphen einer Funktion haben zwar in den vorangegangenen Lerneinheiten einige wichtige Resultate gebracht; jedoch sind die Möglichkeiten der Untersuchung des Verlaufs einer Kurve noch nicht ausgeschöpft. „Welche weiteren Punkte des Graphen einer Funktion sind für den Verlauf charakteristisch?“ Den Schülern ist bewußtzumachen, daß in den folgenden Unterrichtsstunden die theoretische Grundlage für das Ermitteln solcher lokalen Extrema bzw. Extrempunkte zu erarbeiten ist.

Erarbeitung der Begriffe „Lokales Extremum“ und „Globales Extremum“ Die Arbeit an ■ 52 und ■ 53 (verteilt auf Schülergruppen) soll auf die Begriffsbildung „lokales Maximum“ (bzw. „lokales Minimum“) hinführen und kann zur Orientierung auf das Lösen von Extremwertaufgaben dienen. Ein Schüler stellt anschließend den Sachverhalt dar. Durch ■ 53 werden die Schüler motiviert, nach einem geeigneten Verfahren zur Ermittlung solcher Stellen zu suchen, an denen die Funktion V ihr Maximum hat (evtl. Einsatz von Bild 3.11 auf FO).
Die Schüler werden einsehen, daß das Ermitteln der geordneten Paare $[x; V]$ sehr mühsam ist, abgesehen davon, daß Maximumpunkt und Minimumpunkt des Graphen der Funktion nicht mit Sicherheit bestimmbar sind.

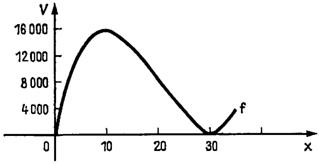


Bild 3.11

Nun sollte im UG ▶ 5 erläutert werden. Dabei wird die Formulierung „Es gibt ein $\varepsilon > 0$ derart, daß ...“ der Formulierung bei der Grenzwertdefinition (in LE B 3) „Bei jedem positiven ε gilt: ...“ gegenübergestellt und begründet. Nach der Bearbeitung von ● 33 könnten sich Umformulierungsübungen z. B. unter Verwendung von „ε-Umgebung einer Stelle“ (LE B 3) anschließen.
Zur Unterscheidung von Extremum (als lokale Eigenschaft einer Funktion) und Extrempunkt (als lokale Eigenschaft des Graphen dieser Funktion) sollte die Übersicht auf LB 189 genutzt werden.
Der in LE B 13 eingeführte Begriff „Maximum (Minimum) einer Funktion f im Intervall I“ wird jetzt präzisiert: „Globales Maximum (Minimum) einer Funktion f im Intervall I“.

Festigung des Ermittelns lokaler und globaler Extrema Selbständig sollten die Schüler sowohl lokale und globale Extrempunkte gegebener Graphen von Funktionen in einem gegebenen Intervall (LBA 1) bzw. Extrema gegebener Funktionen in einem gegebenen Intervall (LBA 2 und 3) ermitteln als auch aus entsprechenden vorgegebenen Bedingungen Graphen von Funktionen skizzieren (LBA 4).

Hausaufgaben Auswahl aus LBA 2 bis 4; evtl. Vorbereitung eines SV zur 1. Stunde der LE 22

Kontrollaufgaben

1. Unter welchen Bedingungen ist ein lokales Maximum einer Funktion zugleich ihr globales Maximum im Intervall I?
2. LBA 2b)

Lerneinheit 22 (2 Std.)
Eine notwendige Bedingung für lokale Extrema

LB 190 bis 193

Ziele

Die Schüler
- wissen, daß an jeder lokalen Extremstelle x_0 der differenzierbaren Funktion f gilt $f'(x_0) = 0$, haben den Beweis dieses Satzes verstanden und können ihn wiedergeben,

– haben erkannt, daß die Bedingung $f'(x_0) = 0$ notwendig, jedoch nicht hinreichend für die Existenz lokaler Extrema differenzierbarer Funktionen ist,
– können die Stellen berechnen, an denen die 1. Ableitung einer differenzierbaren Funktion Null ist.

Schwerpunkte

1. Stunde

– Sicherung des Ausgangsniveaus (● 34 und 35)
– Erarbeitung von ▷ 6
– Beweis zu ▷ 6
– Festigung des Ermittelns möglicher lokaler Extremstellen gegebener Funktionen (■ 53 und 55)

2. Stunde

– Bestimmen lokaler Extrema in einem Intervall (■ 57 und 56)
– Nachweis, daß die Umkehrung zu ▷ 6 nicht gilt (■ 56)
– Festigung durch Anwenden von ▷ 6

Methodische Hinweise

Sicherung des Ausgangsniveaus In SSA werden ● 34 und 35 bearbeitet.

Erarbeitung von ▷ 6 Aus dem Ergebnis von ● 34 und durch Deuten des Bildes C 47c) sollten die Schüler selbständig vermuten, daß

– $f'(x_0) = 0$ sein muß, wenn die Funktion f in x_0 ein lokales Extremum hat bzw.
– der Graph im Punkt P_0 eine Tangente haben muß, die parallel zur x-Achse ist.

Beweis zu ▷ 6 Der Lehrer muß entscheiden, ob der Beweis in einem LV (unter Nutzung der Darstellung auf LB 191), im UG oder in einem vorbereiteten SV (↗ LE 21) zu führen ist. In jedem Falle sollten die Schüler nach der Beweisführung anhand ihrer Aufzeichnungen die Beweisgedanken und die Beweisschritte wiedergeben können. Die Schüler erkennen den Inhalt von ▷ 6 in folgenden Formulierungen: „Die Bedingung $f'(x_0) = 0$ ist eine notwendige Bedingung für die Existenz eines lokalen Extremums von f an der Stelle x_0“ (↗ LE 6) und „Nur die Nullstellen der 1. Ableitung von f können Stellen lokaler Extremwerte sein“.

Festigung des Ermittelns möglicher lokaler Extremstellen Zur Erstfestigung kann ■ 53 (LE 21) dienen. Es wird im ■ 55 vollständig gelöst. Dann wird in SSA eine Auswahl aus LBA 1 und 2 bearbeitet.

Bestimmen lokaler Extrema in einem Intervall Die Schüler bearbeiten die LBA 3 und 4. Dann wird zur nochmaligen Betonung der Bedingung in ▷ 6, daß die *Funktion f an der Stelle x_0 differenzierbar* sein muß, wenn f in x_0 ein lokales Extremum haben soll, in ■ 57 gezeigt, daß die Funktion $f(x) = |x|$ an der Stelle 0 zwar ein lokales Minimum hat, das jedoch mit Hilfe von ▷ 6 nicht ermittelt werden kann, weil die Funktion f an der Stelle 0 nicht differenzierbar ist (↗ LE 6).

Nachweis, daß die Umkehrung zu ▷ 6 nicht gilt Wenn die von den Schülern selbst zu formulierende Umkehrung zu ▷ 6 wahr wäre, dann wäre $f'(x_0) = 0$ auch eine hinreichende Bedingung für die Existenz eines lokalen Maximums. Zur Entscheidung über den Wahrheitswert dieser Aussage sollten die Schüler ■ 56 bearbeiten.

Festigung durch Anwenden von ▷ 6 In SSA werden eine Auswahl aus den LBA 1 bis 6 sowie die LBA 7 und 9 (von leistungsstarken Schülern LBA 8*) gelöst.

Kontrollaufgaben

LBA 2b) und 4a)

Lerneinheit 23 (1 Std.)

Der Satz von ROLLE *und der Mittelwertsatz der Differentialrechnung*

LB 193 bis 195

Ziele

Die Schüler

- kennen den Satz von ROLLE und den Mittelwertsatz der Differentialrechnung und können beide Sätze mit eigenen Worten wiedergeben,
- wissen, daß der Satz von ROLLE ein Spezialfall des Mittelwertsatzes ist,
- können den Mittelwertsatz zur Lösung einfacher Aufgaben anwenden.

Schwerpunkte

- Motivierung der Erarbeitung einer hinreichenden Bedingung für die Existenz lokaler Extrema
- Erarbeitung von ▷ 7 und ▷ 8 (● 36)
- Festigung des Mittelwertsatzes durch einfache Anwendungen

Methodische Hinweise

Motivierung der Bedingung Beim Bearbeiten von ■ 56 in LE 22 haben die Schüler erkannt, daß $f'(x_0) = 0$ eine notwendige, aber *keine hinreichende Bedingung* für die Existenz eines lokalen Extremwertes der differenzierbaren Funktion f an der Stelle x_0 ist und damit die Frage nach einem hinreichenden Kriterium für lokale Extrema noch offen ist. Die Schüler sollten erfahren, daß über eine längere Zeit noch einige theoretische Grundlagen für ein solches Kriterium erarbeitet werden müssen und daß anschließend der erarbeitete theoretische Aufbau noch einmal rückschauend überblickt werden soll.

Erarbeitung von ▷ 7 und ▷ 8 Nach dem Bearbeiten von ● 36 (es sind Graphen unterschiedlicher Funktionen entstanden) wird mit Hilfe des folgenden Tafelbildes in einem straff geführten UG zunächst der Satz von ROLLE erarbeitet. Vorerst wird also nur die linke Spalte schrittweise aufgedeckt. Durch Einbeziehen der rechten Spalte erhält man dann den Mittelwertsatz der Differentialrechnung.
Die Schüler sollten erkennen, daß es sich hier um *Existenzsätze* handelt. Das Ziel, ein hinreichendes Kriterium für lokale Extrema zu erarbeiten, ist jedoch noch nicht erreicht.

Satz von ROLLE

Voraussetzungen

f in $\langle a; b\rangle$ stetige Funktion,
in $(a; b)$ differenzierbar,
$f(a) = f(b) = 0$

Behauptung

Es gibt (wenigstens) eine Stelle ξ in $(a; b)$, für die gilt
$f'(\xi) = 0.$

Geometrische Veranschaulichung

Tangente in ξ an den Graph der Funktion ist **parallel zur x-Achse**.

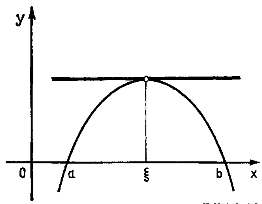


Bild 3.12

Mittelwertsatz der Differentialrechnung

f in $\langle a; b\rangle$ stetige Funktion,
in $(a; b)$ differenzierbar

Es gibt eine Stelle ξ in $(a; b)$, für die gilt

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Tangente in ξ an den Graph der Funktion ist **parallel zur Sekante** durch P_a und P_b.

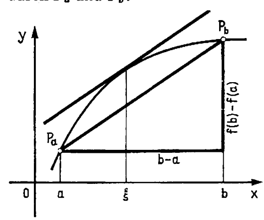


Bild 3.13

Festigung des Mittelwertsatzes In SSA sollten LBA 1 und 2 bearbeitet werden. Die Schüler erläutern anschließend ihre Lösungswege.

Kontrollaufgaben

1. Wie lautet der Mittelwertsatz der Differentialrechnung?
2. Zeigen Sie, daß der Satz von ROLLE ein Spezialfall des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung ist!

Lerneinheit 24 (2 Std.)

Eine hinreichende Bedingung für die Monotonie

LB 195 bis 197

Ziele

Die Schüler

- kennen den Satz über den Zusammenhang zwischen der Monotonie einer Funktion und Eigenschaften der 1. Ableitung dieser Funktion in einem Intervall und können ihn mit eigenen Worten wiedergeben,
- haben den Beweis dieses Satzes für monoton wachsende Funktionen verstanden und können in Analogie dazu den Beweis für monoton fallende Funktionen selbständig führen,
- haben verstanden, wie Monotonieintervalle von Funktionen ermittelt werden, und dabei erste Fähigkeiten erworben.

Schwerpunkte

1. Stunde

- Sicherung des Ausgangsniveaus (● 37; ▷ 8)
- Erarbeitung von ▷ 9 (● 38)
- Beweis zu ▷ 9 (Fall: monoton wachsend) (LB 196)

2. Stunde

- Beweis zu ▷ 9 (Fall: monoton fallend) (● 39)
- Anwenden von ▷ 9: Untersuchen des Monotonieverhaltens von Funktionen und Schlußfolgerung für die Existenz lokaler Extrema (■ 58 und 59)

Methodische Hinweise

Sicherung des Ausgangsniveaus In der täglichen Übung werden in SSA ● 37 (in Vorbereitung des Lösens quadratischer Ungleichungen in der 2. Stunde) und ● 38 (Bereitstellung des Graphen einer Funktion und deren Ableitung) bearbeitet. Bei der parallel dazu laufenden Kontrolle der HA stellt der Lehrer fest, ob diese noch zu berichtigen oder zu vervollständigen sind. Gegebenenfalls muß z. B. LBA 3b) weitergeführt werden, indem man $f(\xi)$ berechnen läßt:

Da $\xi = \frac{a+b}{2}$ ist, erhält man $f(\xi) = \frac{1}{4}(a^2 + 2ab + b^2)$. Wenn $y_1 = f(a) = a^2$ und $y_2 = f(b) = b^2$ ist, so gilt

$$f(\xi) = \frac{1}{4}\left(y_1 + y_2 + 2\sqrt{y_1 y_2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{y_1 + y_2}{2} + \sqrt{y_1 y_2}\right),$$

wobei $\frac{y_1 + y_2}{2}$ das arithmetische Mittel und $\sqrt{y_1 y_2}$ das geometrische Mittel der Funktionswerte y_1, y_2 ist.

▷ 8 ist zu wiederholen, da er zum Beweis von ▷ 9 benötigt wird.

Erarbeitung von ▷ 9 Beim Verfolgen des langfristigen Ziels, ein hinreichendes Kriterium für lokale Extrema zu erarbeiten, liegt es nahe, die Monotonie einer Funktion in einem Intervall zur Untersuchung lokaler Extrema heranzuziehen. Aus dem Graph der Funktion $f(x) = x^2 - 4x + 4$ und deren Ableitung (● 38) leiten die Schüler eine Vermutung ab, die als ▷ 9 formuliert ist.

Beweis zu ▷ 9 (Fall: monoton wachsend) Wenn der Lehrer den Hinweis gibt, was unter der Behauptung „f ist im Intervall monoton wachsend" zu verstehen ist, und auf die Anwendung des Mittelwertsatzes aufmerksam macht, müßte der Beweis in SSA erfolgen können. Anschließend sollte ein Schüler die Beweisschritte an der Tafel noch einmal erläutern.
Im UG werden nun die Bemerkungen auf LB 196 erläutert, wobei der in ● 38 erarbeitete Graph zur Veranschaulichung dienen kann.

Beweis zu ▷ 9 (Fall: monoton fallend) Es kann SSA am ● 39 erfolgen. Bei der Kontrolle sollte ein Schüler die einzelnen Schritte noch einmal erläutern.

Anwenden von ▷ 9 Im UG wird in ■ 58 und 59 das Monotonieverhalten einer ganzen und einer gebrochenen rationalen Funktion mit Hilfe der 1. Ableitung untersucht. Diese Gedankengänge sind den Schülern noch nicht vertraut. Deshalb sind hier das Verständnis der Schüler für die einzelnen Schritte und Fähigkeiten im Ermitteln von Monotonieintervallen anzustreben. Besondere Aufmerksamkeit muß dem Vorgehen beim Lösen quadratischer Ungleichungen gewidmet werden, da es nicht zum anwendungsbereiten Wissen der Schüler der Klassen 9 und 10 gehörte.
Anschließend sollten wenigstens LBA 1a) und 2b) gelöst werden.

Kontrollaufgaben

1. Erläutern Sie, inwiefern aus dem Monotonieverhalten einer Funktion in einem Intervall auf lokale Extrema dieser Funktion geschlossen werden kann!

2. Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der Funktion $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 10x$ mit Hilfe der 1. Ableitung! Geben Sie die lokalen Extremstellen an!

Lerneinheit 25 (2 Std.)

Ein hinreichendes Kriterium für lokale Extrema

LB 197 bis 199

Ziele

Die Schüler

- kennen den Satz über die notwendige und hinreichende Bedingung für das Vorhandensein lokaler Extrema,

- haben den Beweis dieses Satzes für die Existenz eines lokalen Maximums verstanden und können in Analogie dazu den Beweis für die Existenz eines lokalen Minimums selbständig führen,
- kennen den Algorithmus zum Ermitteln lokaler Extrema und können unter Anwendung der Sätze über eine notwendige und eine hinreichende Bedingung für die Existenz lokaler Extrema lokale Extremstellen ermitteln.

Schwerpunkte

1. Stunde

- Zielstellung: Erarbeiten eines rationellen Verfahrens zum Ermitteln von Extremstellen
- Erarbeitung von ▷ 10 (■ 58; ▷ 9)
- Beweis der Aussage (a) in ▷ 10 (LB 198)
- Erarbeitung einer Schrittfolge für das Ermitteln lokaler Extrema (LB 199)

2. Stunde

- Beweis der Aussage (b) in ▷ 10 (● 40)
- Übungen im Ermitteln lokaler Extrema (● 41)

Methodische Hinweise

Zielstellung Die Schüler können mit Hilfe von ▷ 6 solche Stellen differenzierbarer Funktionen ermitteln, die als Stellen lokaler Extremwerte in Betracht kommen und mit Hilfe von ▷ 9 dann auf die Existenz lokaler Extrema schließen. Da das sehr aufwendig ist, gilt es nunmehr, ein rationelleres Verfahren zu finden.

Erarbeitung von ▷ 10 Um eine Vermutung für ein hinreichendes Kriterium für lokale Extrema zu erarbeiten, sollte von der in ■ 58 untersuchten und im Bild C 51 dargestellten Funktion ausgegangen werden.
Wird der Graph der Funktion $f'(x)$ in einem neuen Koordinatensystem dargestellt, so kann noch einmal der Inhalt von ▷ 9 geometrisch veranschaulicht werden. Wird $f''(x)$ gebildet, so kann ▷ 9 auf die Funktion f' angewendet werden (Veranschaulichung durch den Graph der Funktion $f''(x)$ im Bild 3.14 auf UH 174).
Beim Betrachten der Graphen der Funktionen f und f'' liegt es nahe zu vermuten:

$$\text{Wenn} \begin{cases} f'(x_0) = 0 & \text{und} \quad f''(x_0) < 0 \\ f'(x_0) = 0 & \text{und} \quad f''(x_0) > 0, \end{cases}$$

$$\text{so hat } f \text{ an der Stelle } x_0 \begin{cases} \text{ein lokales Maximum} \\ \text{ein lokales Minimum.} \end{cases}$$

Nun kann ▷ 10 ausgesprochen oder auf LB 198 gelesen werden.
Die Schüler werden erkennen, daß mit ▷ 10 die lang gesuchte notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz lokaler Extrema gefunden ist. Rückschauend sollte noch einmal das Satzgefüge verdeutlicht werden, das durchlaufen wurde, wobei kurzgefaßt der Inhalt jedes Satzes wiedergegeben wird (↗ Tafelbild auf UH 175).

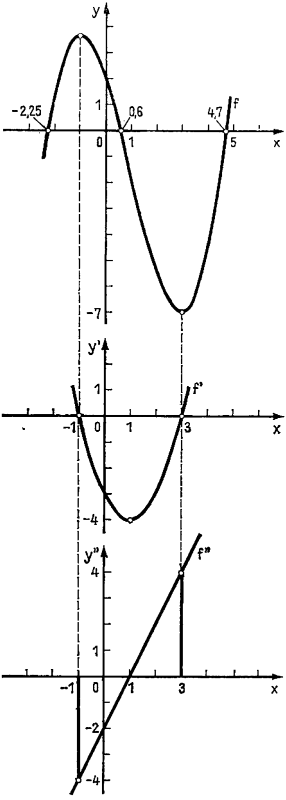


Bild 3.14

Beweis der Aussage (a) in ▷ 10 Der aus der Anschauung heraus erarbeitete ▷ 10 muß auf seinen Wahrheitsgehalt hin überprüft werden. Für die methodische Gestaltung des Beweises zur Aussage (a) sind folgende Varianten denkbar:

- SSA am Text auf LB 198 mit Niederschrift (schrittweise; nach jedem Schritt Erläuterung der Aufzeichnungen mit eigenen Worten);
- UG: Erarbeiten der „Strategie" der Beweisführung; Niederschrift der Voraussetzungen und der Behauptung; Schülervorschläge für mögliche Beweismittel, Schlußfolgerungen und Begründungen;
- LV mit Niederschrift der Gedankengänge durch die Schüler;
  Wiedergabe durch einen Schüler anhand seiner Aufzeichnungen; Ergänzungen und Fragen durch andere Schüler;
- HA für einige Schüler zur Vorbereitung eines SV in der nächsten Stunde

Erarbeitung einer Schrittfolge für das Ermitteln lokaler Extrema Im UG wird die auf LB 199 dargestellte Schrittfolge, etwa am Beispiel $f(x) = x^3 - 12x + 2$, erarbeitet. Eine Erstfestigung sollte in SSA beim Lösen der LBA 1b) erfolgen (auch die Funktionswerte an den Extremstellen, also die Extremwerte, sind zu berechnen).

Hausaufgaben LBA 1d); u. U. Variante 4 (↗ oben); Wh des Beweises zu ▷ 10 im Falle einer der ersten drei Varianten

Beweis der Aussage (b) in ▷ 10 Nach der Kontrolle der HA (↗ auch die Differenzierung oben, dann SV) sollte in SSA ● 40 bearbeitet werden.

Übungen im Ermitteln lokaler Extrema Die Schüler festigen die in der 1. Stunde erarbeitete Schrittfolge zum Ermitteln lokaler Extremstellen durch Lösen von LBA 1e) und 1f) sowie von Aufgaben, in denen für die zweimal differenzierbare Funktion f gilt: $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) = 0$ (↗ ● 41 und LBA 1c) und 2d)). Zur Entscheidung über das Vorliegen eines lokalen Extremums muß die Funktion auf ihr Monotonieverhalten untersucht werden.

▷ 6: Eine notwendige Bedingung für lokale Extrema → ▷ 7: Satz von ROLLE / ▷ 8: Mittelwertsatz

↓

▷ 9: Eine hinreichende Bedingung für Monotonie → ▷ 10: Eine (notwendige und) hinreichende Bedingung für lokale Extrema

---

Kontrollaufgaben

LBA 2a), e), f)

Lerneinheit 26 (4 Std.)

Kurvendiskussionen

LB 200 bis 205

Ziele

Die Schüler

- wissen, welche Eigenschaften einer Funktion bei einer Kurvendiskussion zu untersuchen sind,
- kennen eine Schrittfolge zur Durchführung von Kurvendiskussionen,
- können rationale Funktionen und Wurzelfunktionen untersuchen, wobei sie die neuen Elemente des Fachwortschatzes und der Symbolik verwenden.

Schwerpunkte

1. Stunde

- Motivierung und Zielstellung zum Durchführen von Kurvendiskussionen
- Erarbeitung einer Schrittfolge für Kurvendiskussionen (■ 61)
- Übungen zu Kurvendiskussionen ganzer rationaler Funktionen

2. Stunde

- Erweiterung der Schrittfolge für Kurvendiskussionen gebrochener rationaler Funktionen

- Festigung der Kurvendiskussionen gebrochener rationaler Funktionen (■ 62 und 63; Zus LB 205f.)

3. Stunde

- Anwenden der Schrittfolge auf Kurvendiskussionen von Wurzelfunktionen
- Übungen zu Kurvendiskussionen von Wurzelfunktionen (■ 64)

4. Stunde

Übungen zu Kurvendiskussionen rationaler Funktionen und von Wurzelfunktionen

Methodische Hinweise

Motivierung und Zielstellung zum Durchführen von Kurvendiskussionen Die Schüler wissen, daß viele naturwissenschaftliche und technische Erscheinungen und Prozesse durch mathematische Funktionen beschrieben werden können (Hinweis des Lehrers z. B. auf die LBA 20, 21, 45, 48, 51, 63, 64, 65, 66, ... als Auswahl aus dem Stoffabschnitt „Übungen und Anwendungen").
Im UG ist herauszuarbeiten, daß beim Lösen einer solchen Aufgabe zunächst diese funktionalen Zusammenhänge gefunden werden müssen und daß dann die betreffende Funktion und ihr Graph auf charakteristische Stellen und besondere Eigenschaften zu untersuchen sind. Die Schüler tragen dazu ihre bisher erworbenen Kenntnisse zusammen.
Ziel der Behandlung dieser Lerneinheit ist, eine Schrittfolge für systematische „Kurvendiskussionen" von rationalen Funktionen und Wurzelfunktionen zu erarbeiten und diese zum Lösen von Aufgaben anzuwenden.

Erarbeitung einer Schrittfolge für Kurvendiskussionen ganzer rationaler Funktionen Im UG werden mit Hilfe von ■ 61 die einzelnen Schritte einer Kurvendiskussion erarbeitet. Es ist zweckmäßig, zu Beginn die 1. und die 2. Ableitung der vorgegebenen Funktion von den Schülern bilden zu lassen, damit diese abgeleiteten Funktionen für die weiteren Untersuchungen zur Verfügung stehen.
Die Schüler sollten dabei ihre Niederschriften übersichtlich gliedern und sich im UG der richtigen Fachausdrücke bedienen. Im letzten Schritt werden die Ergebnisse der vorhergehenden Schritte zum Skizzieren des Graphen der Funktion herangezogen.
Die Schüler sollten die berechneten Stellen – der Bezeichnungsweise im Lehrbuch entsprechend – fortlaufend indizieren und keine Doppelindizes verwenden.

Übungen zu Kurvendiskussionen ganzer rationaler Funktionen In SSA soll wenigstens eine der LBA 1a), c), 2a), c) bearbeitet werden, dabei zur Differenzierung LBA 1c) oder 2c) durch leistungsstarke Schüler. Insbesondere sind die Bereitschaft und die Fähigkeiten der Schüler zur Selbstkontrolle der Rechnungen (vor allem beim Lösen von Gleichungen, beim Berechnen von Funktionswerten, beim Grobvergleich von Zeichnung und Rechnung) weiterzuentwickeln.

Erweiterung der Schrittfolge für Kurvendiskussionen gebrochener rationaler Funktionen Die Schüler bringen selbst Vorschläge, wie die in der 1. Stunde aufgestellte Schrittfolge zu erweitern ist. Als Beispiel sollte LBA 2b) bearbeitet werden (diese Funktion hat Nullstellen, Polstellen und Extremstellen). Um den Graph möglichst genau zeichnen zu können, sollten noch die Funktionswerte an den Stellen ± 1, ± 2, ± 3 ermittelt werden. Dabei sind die Symmetrieverhältnisse zu beachten.

Festigung der Kurvendiskussionen gebrochener rationaler Funktionen Selbständig sollten die Schüler die Graphen der in ■ 63 vorgegebenen Funktion (ohne Benutzung des Lehrbuchs) diskutieren und anschließend ihre Aufzeichnungen mit den in der Zusammenfassung auf LB 205f. dargestellten Schrittfolge vergleichen.

Anwenden der Schrittfolge auf Kurvendiskussionen von Wurzelfunktionen Anhand von LBA 2d) oder von ■ 64 sollte die in der 2. Stunde erarbeitete Schrittfolge auf den neuen Anwendungsbereich zugeschnitten werden. Dabei wird besonders betont, daß eingangs der Definitionsbereich der Funktion bestimmt werden muß.

Übungen zu Kurvendiskussionen von Wurzelfunktionen In SSA sollte LBA 1d) bearbeitet werden. Zwischenergebnisse werden nach angemessener Zeit verglichen.

Übungen zu Kurvendiskussionen rationaler Funktionen und von Wurzelfunktionen Die Aufgaben sollten differenziert gestellt werden, unter anderen auch LBA 32 und 33 aus „Übungen und Anwendungen". Es ist darauf zu achten, daß die Schüler die einzelnen Teilaufgaben zügig und in sauberer Form bearbeiten und dabei auch die Formelsammlung zur Differentialrechnung in [7] benutzen.

Kontrollaufgaben

Untersuchen Sie das Verhalten folgender Funktionen, und skizzieren Sie deren Graphen!

1. $f(x) = 25x^2 - x^4$

2. $f(x) = x^3 - 6x^2 - 16x$

3. $f(x) = \dfrac{x^4 - 10x^2 + 9}{x^3}$

4. $f(x) = \dfrac{1}{4}\sqrt{x}\,(4 - x)$

Lerneinheit 27 **(5 Std.)**
Extremwertaufgaben

LB 206 bis 212

Nach der Behandlung der LE 26 müßten nunmehr die Schüler die zum Lösen einer Extremwertaufgabe erforderlichen Schritte weitgehend selbständig gehen können.
Um die Schüler zu befähigen, den Lösungsansatz selbständig zu finden (↗ Vorbemerkungen zum Stoffabschnitt 3.3 auf UH 157), reicht die Methode des Vor- und Nachmachens anhand von Musteraufgaben nicht aus, wenn auch die möglichen Fälle (die Zielfunktion ist eine ganze rationale Funktion, eine gebrochene rationale Funktion oder eine Wurzelfunktion; die Zielfunktion soll ein Maximum oder ein Minimum annehmen; die Zielfunktion ist eine Funktion mit einer unabhängigen Variablen oder eine Funktion mit mehreren unabhängigen Variablen; die globalen Extrema liegen im Innern eines gegebenen Intervalls oder an den Intervallenden) an entsprechenden Beispielen abgehandelt werden sollten.
Es ist stets der Definitionsbereich der Zielfunktion festzulegen. Zum Lösen der Extremwertaufgabe gehört auch die Überprüfung, ob das ermittelte lokale Extremum auch das globale Extremum ist oder ob das globale Extremum an einem Intervallende liegt. Schließlich müssen die Schüler das Ergebnis der Aufgabe auf Übereinstimmung mit den in der Aufgabenstellung vorgegebenen Bedingungen überprüfen.
Das Ergebnis der Aufgabe ist inhaltlich auszuwerten und sollte, insbesondere wenn es sich um Probleme aus Bereichen der gesellschaftlichen Praxis handelt, zur Entwicklung von Einsichten und Überzeugungen genutzt werden (↗ [31]).
Die folgende Übersicht soll dem Lehrer eine Auswahl aus den in dieser LE angebotenen Beispielen, Aufträgen und Aufgaben erleichtern.

	Inhalt aus Sachgebiet	Typ der Zielfunktion	Nebenbedingungen aus Stoffbereich	Art des lokalen Extremums	globalen Extremums
■ 65	Physik	ganz rat.	–	Max.	lok. Max.
■ 66	Geometrie	gebr. rat.	Stereom.	Min.	lok. Max.
■ 67	Geometrie	gebr. rat.	Planim.	–	Max. an einem Intervallende
● 44	Geometrie	ganz rat.	Strahlensatz	Max.	lok. Max.
■ 68	Ökonomie	Wurzelfkt.	Satz d. PYTH.	Min.	lok. Max.
LBA 1	Geometrie	ganz rat.	Stereom.	Max.	lok. Max.
LBA 2	Geometrie	ganz rat.	Stereom.	Max.	lok. Max.
LBA 3	Geometrie	ganz rat.	Satz d. PYTH.	Max.	lok. Max.
LBA 4	Geometrie	ganz rat.	Stereom.	Max.	lok. Max.
LBA 5	Geometrie	ganz rat.	Kreislehre	–	Max. an einem Intervallende
LBA 6	Geometrie	ganz rat.	Planim.	Max.	lok. Max.
LBA 7	Funktion	Wurzelfunkt.	–	Max./Min.	lok. Max. /lok. Min.
LBA 8	Geometrie	Wurzelfunkt.	Satz d. PYTH.	Max.	lok. Max.

Ziele

Die Schüler

- kennen das Vorgehen beim Lösen von Extremwertaufgaben,
- haben erste Fähigkeiten im selbständigen und rationellen Suchen nach einem Lösungsansatz erworben,
- haben zum Aufstellen von Lösungsansätzen erforderliche Kenntnisse aus verschiedenen Stoffgebieten reaktiviert,
- haben erste Fertigkeiten im Abarbeiten geeigneter Lösungsschritte erworben,
- haben die Bedeutung des Lösens von Extremwertaufgaben für die gesellschaftliche Praxis erkannt.

Schwerpunkte

1. Stunde

- Motivierung und Zielstellung: Bedeutung des Lösens von Extremwertaufgaben für die gesellschaftliche Praxis, Sicherung des Ausgangsniveaus durch Bereitstellen von früher erworbenem Wissen und Können
- Erarbeitung des Vorgehens beim Lösen von Extremwertaufgaben an Beispielen, die auf ganze rationale Funktionen führen (■ 65)

2. Stunde

- Übungen im zunehmend selbständigen Aufstellen des Lösungsansatzes sowie im

zweckmäßigen Umformen von Nebenbedingungen zum Erzielen von Rechenvorteilen beim Differenzieren der Zielfunktion (■ 66)
- Übungen im selbständigen Ermitteln der Extrema der Zielfunktionen an Beispielen von rationalen Funktionen
- Auswerten der Ergebnisse von praxisbezogenen Aufgaben

3. Stunde

Übungen im zunehmend selbständigen Aufstellen des Lösungsansatzes an Beispielen von rationalen Funktionen, deren globales Extremum an einem Ende des gegebenen Intervalls liegt (■ 67)

4. Stunde

- Übungen im weitgehend selbständigen Aufstellen des Lösungsansatzes und im selbständigen Ermitteln der Extrema von Wurzelfunktionen (■ 68)
- Auswerten der Ergebnisse praxisbezogener Aufgaben

5. Stunde

- Zusammenfassung zur Schrittfolge beim Lösen von Extremwertaufgaben (LB 211 f.)
- Übungen im selbständigen Lösen von Extremwertaufgaben (● 44)

Methodische Hinweise

Motivierung und Zielstellung Die Schüler sollten im UG in Anlehnung an die Ausführungen auf LB 127f. selbst Probleme aus der gesellschaftlichen Praxis nennen, in denen ein Extremwert zu ermitteln ist. Sie sollten auch Bedingungen nennen, die es gestatten, eine praxisrelevante Extremwertaufgabe mit mathematischen Mitteln zu bearbeiten (das Problem muß durch eine Funktion beschreibbar, die Funktion zweimal differenzierbar sein).

Sicherung des Ausgangsniveaus Das für das Auffinden des Lösungsansatzes langfristig bereitzustellende Wissen und Können der Schüler ist in den Vorbemerkungen zu diesem Stoffabschnitt gekennzeichnet (↗ UH 157f.). Darüber hinaus sollten in die täglichen Übungen dieser Lerneinheit einbezogen werden:

- Lösen von quadratischen Gleichungen und Gleichungen höheren Grades, die auf quadratische Gleichungen zurückgeführt werden können;
- Bilden der Ableitungen von rationalen Funktionen und Wurzelfunktionen;
- Ermitteln globaler Extrema solcher Funktionen;
- Ermitteln von Extrempunkten im Rahmen von Kurvendiskussionen.

Erarbeitung des Vorgehens beim Lösen von Extremwertaufgaben Am ■ 65 sollte herausgearbeitet werden:

1. Es muß ein funktionaler Zusammenhang, eine „Zielfunktion", für dieses Problem gefunden werden; hier besonders einfach (Nutzen der Formelsammlung): eine ganze rationale Funktion mit einer unabhängigen Variablen;
2. Es sind die lokalen Extrema dieser „Zielfunktion" zu ermitteln;
3. Es ist zu überprüfen, ob das berechnete lokale Maximum zugleich das globale Maximum dieser Funktion in dem vorgegebenen Intervall ist;
4. Das Ergebnis ist in einem Antwortsatz zu formulieren.

Nun sollte an LBA 1 gezeigt werden, wie der Lösungsansatz aufgestellt wird, wenn die Zielfunktion (hier rational) eine Funktion mit mehreren unabhängigen Variablen ist, und wie die sich aus der Aufgabenstellung ergebenden Nebenbedingungen zum Darstellen der Zielfunktion mit nur einer unabhängigen Variablen einzubeziehen sind.

Übungen im zunehmend selbständigen Ermitteln von Lösungsansätzen, Nebenbedingungen und der Extrema Im UG zu ■ 66 wird erneut herausgearbeitet, daß die Funktion $f(a, b, c) = 2(ab + bc + ac)$ durch Einbeziehen der Nebenbedingungen in eine Funktion mit einer Variablen $g(a) = a^2 + \frac{6V}{a}$ überführt werden kann. Nun können die Schüler selbständig die Extrema dieser Zielfunktion ermitteln.
Beim Lösen der LBA 3 (die Zielfunktion $V = f(r, h) = \frac{1}{3}\pi r^2$ ist eine Funktion mit zwei unabhängigen Variablen) kann der Zusammenhang zwischen r, h und s mit Hilfe des Satzes des PYTHAGORAS erfaßt werden: $s^2 = r^2 + h^2$.
Die Schüler sollten erkennen, daß es für die weiteren Lösungsschritte einfacher ist, wenn $r^2 = s^2 - h^2$ substituiert wird. Die Substitution durch $h = \sqrt{s^2 - r^2}$ kompliziert die Arbeit.

Auswertung der Ergebnisse Im UG sollten die Schüler die Bedeutung solcher Aufgaben für die Praxis wie in ■ 65 und 66 erkennen, jedoch auch verstehen, daß in der Praxis meist noch zahlreiche andere Parameter zu beachten sind.

Übungen im zunehmend selbständigen Arbeiten mit rationalen Funktionen, deren globales Extremum am Intervallende liegt In weitgehend SSA ist der Lösungsansatz von ■ 67 zu finden. Beim Untersuchen der Zielfunktion auf das Vorhandensein lokaler Extrema ist festzustellen, daß ein lokales Maximum nicht existiert. Das globale Maximum liegt an einem Intervallende. Eine ähnliche Problematik liegt in LBA 5 vor. Das Aufstellen des Lösungsansatzes dürfte keine Schwierigkeiten bereiten (Zielfunktion $A = a \cdot b$; Nebenbedingung $2a + b\pi = 400$). Jedoch ist $b_0 = 63{,}7$ und damit außerhalb der zulässigen Breite von $b = 50$. Also ist das globale Maximum an einem Intervallende zu ermitteln.

Übungen im weitgehend selbständigen Lösen von Aufgaben mit Wurzelfunktionen In SSA wird der Lösungsansatz von ■ 68 aufgestellt. Die Zielfunktion ist eine Wurzelfunktion. Die Untersuchungen der Zielfunktion auf die Existenz lokaler Minima sind hier wesentlich aufwendiger. Deshalb sollten die Berechnungen durch Ansagen von Zwischenergebnissen kontrolliert werden.
Möglicherweise kann noch der Lösungsansatz für LBA 8 erarbeitet werden.

Auswerten des Ergebnisses von ■ 68 Im UG sollten Überlegungen zum Einsatz mathematischer Verfahren bei Rationalisierungsarbeiten in Technik und Ökonomie erfolgen.

Zusammenfassung zur Schrittfolge beim Lösen von Extremwertaufgaben Die Schüler müssen sich (Zusammenfassung auf LB 211 f.) noch einmal verdeutlichen: Der entscheidende Schritt beim Lösen einer Extremwertaufgabe ist vor allem, eine Funktion zu finden, die das vorgegebene Problem beschreibt, und ihren Definitionsbereich anzugeben (Verwenden von Skizzen!). Dabei könnten aus den bisher gelösten Aufgaben einige Zielfunktionen genannt werden. Bei Zielfunktionen mit mehr als einer unabhängigen Variablen müssen weitere Zusammenhänge als Nebenbedingungen aufgedeckt und mathematisch formuliert werden. Auch hier sollten die Schüler bereits verwendete Nebenbedingungen nennen.
Die anschließenden Schritte sind weniger problematisch. Unbedingt ist ein Antwortsatz zu formulieren, nachdem das Ergebnis an den in der Aufgabe gestellten Bedingungen überprüft worden ist.

Übungen im selbständigen Lösen von Extremwertaufgaben In SSA wird ● 44 bearbeitet. Die Nebenbedingung wird mit Hilfe des Strahlensatzes (bisher noch nicht benutzt) formuliert. (Welcher Satz könnte herangezogen werden? Richtiges Aufstellen der Verhältnisgleichung in den Schülerarbeiten beachten!)

Kontrollaufgaben

LBA 45 und 57 aus „Übungen und Anwendungen“

Stoffabschnitt 3.4 Stammfunktionen (5 Std.)

Durch Untersuchungen zur Umkehrung der Differentiation von Funktionen wird der Übergang zur Behandlung des Stoffgebiets „Integralrechnung“ geschaffen. Ohne daß der Begriff „Unbestimmtes Integral“ fällt, lernen die Schüler durch inhaltliche Überlegungen Regeln für das Bilden von Stammfunktionen zu gegebenen Funktionen kennen, die auch bewiesen werden. Auf diesen Vorgaben bauen die folgenden Ausführungen auf.
Der Lehrplan stellt dem Lehrer allerdings frei, diesen Stoffabschnitt auch erst innerhalb des Stoffabschnitts 4.2 „Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung“ als „Unbestimmtes Integral“ zu behandeln (↗ UH 209).

Lerneinheit 28 Umkehrung der Differentiation (3 Std.)

LB 213 bis 216

Ziele

Die Schüler

- haben das Problem der Umkehrung der Differentiation einer Funktion verstanden und kennen die Definition des Begriffs „Stammfunktion“,
- können zu gegebenen einfachen rationalen Funktionen, Wurzelfunktionen und Potenzfunktionen mit rationalem Exponenten Stammfunktionen angeben,
- sind zu der Einsicht gelangt, daß die Existenz einer Stammfunktion die Existenz von unendlich vielen Stammfunktionen bedeutet,
- haben die Herleitung des Satzes über die Menge aller Stammfunktionen einer Funktion f (▷ 11) verstanden,
- kennen die geometrische Bedeutung der Konstanten c,
- können die Gleichungen von Stammfunktionen zu gegebenen Funktionen, die bestimmten Bedingungen genügen, ermitteln.

Schwerpunkte

1. Stunde

- Sicherung des Ausgangsniveaus durch Wh der Sätze über die Differentiation von rationalen Funktionen, Wurzelfunktionen und Potenzfunktionen mit rationalem Exponenten sowie der entsprechenden Differentiationsregeln
- Motivierung und Zielstellung: Bilden der Umkehrung der Differentiation einer Funktion
- Erarbeitung des Begriffs „Stammfunktion" (■ 69; ● 45; ▶ 6)
- Erarbeitung einer zu ▷ 11 führenden Vermutung (● 46 und 47)

2. Stunde

- Wiederholung zum Mittelwertsatz der Differentialrechnung (▷ 8)
- Herleitung zu ▷ 11 (LB 214f.)

3. Stunde

- Übungen im Darstellen der Graphen einiger Stammfunktionen einer gegebenen Funktion f
- Übungen im Ermitteln der Gleichungen von Stammfunktionen, die gegebenen Bedingungen genügen (■ 70)

Methodische Hinweise

Sicherung des Ausgangsniveaus Im Rahmen der täglichen Übungen sollten die Sätze über die Differentiation von rationalen Funktionen, Wurzelfunktionen und Potenzfunktionen mit rationalem Exponenten sowie die entsprechenden Differentiationsregeln wiederholt werden.
Beispiel für eine tägliche Übung zur Wh der Differentiationsregeln:

$f \to f'$		$f \to f'$	
$f(x) = \frac{1}{2}x^2$	$f'(x) = x$	$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$f(x) = 2x^3$	$f'(x) = 6x^2$	$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = x + 4$	$f'(x) = 1$		
$f(x) = x + 5$	$f'(x) = 1$	$f(x) = 3x^4 - 5x$	$f'(x) = 12x^3 - 5$

Motivierung und Zielstellung Im UG sollte, von einem Beispiel (Bestimmung der Weg-Zeit-Funktion aus der Geschwindigkeits-Zeit-Funktion einer ungleichförmigen Bewegung) ausgehend das Problem der Umkehrung der Differentiation einer Funktion verdeutlicht werden.
Um die Umkehrung der Differentiation einer Funktion ausführen zu können, sind folgende *Teilziele* zu erreichen:

- Für die Funktion, deren Ableitung vorgegeben ist, ist ein neuer Begriff zu bilden;
- Die Umkehrung der Differentiation einer Funktion muß „theoretisch abgesichert" werden;
- Es müssen Regeln zum Aufsuchen der neuen Funktion erarbeitet werden.

Erarbeitung des Begriffs „Stammfunktion“ Von den in der täglichen Übung differenzierten Funktionen ausgehend werden nach Änderung der Bezeichnungen (die gegebene Funktion wird jetzt mit f, die durch Umkehrung der Differentiation gebildete Funktion mit F bezeichnet) zu gegebenen Funktionen f die Funktionen F gesucht (↗ auch ■ 69) und im ● 45 sogleich überprüft, daß $F' = f$ gilt.
Wichtig ist, daß die Schüler weitere Beispiele bilden. Dann sollten die Schüler versuchen, selbst den Begriff „Stammfunktion“ zu definieren, um anschließend mit ▶ 6 zu vergleichen.

Erarbeitung einer zu ▷ 11 führenden Vermutung Beim Bearbeiten von ● 46 sollten die Schüler erkennen:

- Zu einer Funktion kann es mehrere Stammfunktionen geben;
- Zur Funktion $f(x) = \frac{1}{x}\ (x > 0)$ (↗ ● 46c)) ist keine Stammfunktion zu finden („Ob es keine gibt oder ob wir sie nur noch nicht kennen, ist noch nicht entschieden“).

In SSA sollte dann ● 47 bearbeitet werden, um das Verstehen der geometrischen Bedeutung der Konstanten c vorzubereiten. Die Schüler erfahren dabei, daß die Existenz einer Stammfunktion der Funktion f die Existenz von unendlich vielen solcher Stammfunktionen bedeutet.

Hausaufgaben Um in der 2. Stunde die Frage „Kann es außer den ermittelten Stammfunktionen einer Funktion noch weitere Funktionen geben?“ beantworten zu können, wiederholen die Schüler:

1. den Mittelwertsatz der Differentialrechnung;
2. das Bestimmen von Konstanten (Parametern) in Funktionen (z. B.: In $f(x) = 3x^2 + ax + 2$ ist a so zu bestimmen, daß der Punkt $P_0\ (2; 1)$ auf dem Graphen der Funktion f liegt);
3. die Differentiationsregeln für die Funktionen f mit
   a) $f(x) = c \cdot u(x)$; b) $f(x) = u(x) \pm v(x)$;
4. die Regel für die Differentiation einer Potenzfunktion f mit $f(x) = x^r$, $r \in R$.

(Stattdessen gegebenenfalls nur Hinweise auf entsprechende Punkte des im Fachunterrichtsraum hängenden Wiederholungsplans)

Wiederholung zum Mittelwertsatz der Differentialrechnung Im Rahmen der Kontrolle der HA geben die Schüler ▷ 8 mit eigenen Worten wieder. Die Umformung

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$$

durch Multiplikation mit $(b - a)$ ergibt $f(b) - f(a) = f'(\xi)\,(b - a)$.
Um einen Gedanken der folgenden Herleitung vorzubereiten, könnte gefordert werden: Beschreiben Sie den Graph der Funktion f, wenn $f'(\xi) = 0$ für alle $a \leqq \xi \leqq b$ gilt!

Herleitung von ▷ 11 Die Schüler werden an die am Ende der 1. Stunde gestellte Frage erinnert (↗ auch HA der 1. Std.). Sie müssen zur Beantwortung dieser Frage die Aussagen (*) und (**) auf LB 214 verstehen lernen.
Nun wird Aussage (**) auf die Stammfunktionen F und G ein und derselben Funktion f angewendet.
Die Beweise zu den beiden Aussagen sollten

- im UG unter starker Einbeziehung der Schüler oder
- durch zwei SV (nach (*) und (**) getrennt)

geführt werden.
Rückblickend sollte noch einmal die zentrale Bedeutung des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung verdeutlicht werden.

Mit Hilfe von ▷ 11 wird gezeigt, daß die Umkehrung der Differentiation nicht eindeutig ist. Zwei Stammfunktionen der Funktion f unterscheiden sich durch eine Konstante c, die jetzt auch geometrisch als Differenz der Funktionswerte $G(x)$, $F(x)$ der Stammfunktionen G, F einer Funktion f an der gleichen Stelle x gedeutet werden kann.

Übungen im Darstellen der Graphen einiger Stammfunktionen Nach Wh von ▷ 11 und nachdem die Schüler je drei verschiedene Stammfunktionen der in den LBA 1 und 2 angegebenen Funktionen genannt haben, sollten sie die Graphen einiger Stammfunktionen farbig hervorheben und die Konstante c geometrisch deuten.

Übungen im Ermitteln der Gleichungen von Stammfunktionen, die gegebenen Bedingungen genügen In SSA wird an ■ 70 das Aufstellen einer Gleichung für eine Stammfunktion einer gegebenen Funktion f, wenn die Stammfunktion bestimmte Bedingungen erfüllen soll (oder wenn der Graph der Stammfunktion durch einen vorgegebenen Punkt verlaufen soll), erarbeitet. Anschließend lösen die Schüler eine Auswahl aus den LBA 4 und 5. Auf die dort veränderte Bezeichnungsweise ist aufmerksam zu machen.

Kontrollaufgaben

1. Geben Sie je drei verschiedene Stammfunktionen zur Funktion $f(x) = 4x^3$ an! Zeichnen Sie die Graphen dieser Stammfunktionen in ein und dasselbe Koordinatensystem ein! Geben Sie eine geometrische Deutung der Konstanten c!
2. Bestimmen Sie die Stammfunktion F der Funktion $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 5$, die an der Stelle 2 den Funktionswert 15 hat!

Lerneinheit 29 (2 Std.)
Regeln für das Aufsuchen von Stammfunktionen

LB 216 bis 217

Ziele

Die Schüler

- kennen einige Regeln für das Aufsuchen von Stammfunktionen,
- haben diese Regeln bewiesen,
- können diese Regeln zum Ermitteln von Stammfunktionen anwenden.

Schwerpunkte

1. Stunde

- Erarbeitung einiger Regeln für das Ermitteln von Stammfunktionen (mB)
- Übungen im Bilden von Stammfunktionen mit Hilfe der Regeln (a) bis (c) auf LB 216

2. Stunde
- Weitere Übungen im Bilden von Stammfunktionen
- Übungen im Ermitteln von Stammfunktionen, die vorgegebenen Bedingungen genügen

Methodische Hinweise

Beweise einiger Regeln für das Ermitteln von Stammfunktionen Bisher wurden Stammfunktionen nur zu solchen Funktionen gebildet, die als Ableitung vorgegebener Funktionen schon einmal aufgetreten waren. Für die weitere Arbeit ist es erforderlich, Regeln für das Ermitteln von Stammfunktionen zu beliebigen Vertretern der behandelten Klassen von Funktionen zu erarbeiten.
Da das Aufsuchen von Stammfunktionen die Umkehrung des Differenzierens ist, liegt es nahe, von einigen Differentiationsregeln auszugehen, und zwar von der Summenregel, der Regel für die Differentiation einer Funktion mit einem konstanten Faktor und der Regel für das Ableiten von Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten (die Produktregel, die Quotientenregel und die Kettenregel lassen sich nicht allgemein umkehren).
Die Schüler sollten die für das Ermitteln von Stammfunktionen zu erarbeitenden Regeln selbst zu formulieren versuchen und anschließend mit den Formulierungen auf LB 216 vergleichen. Beim Versuch, die Regel (a) mit eigenen Worten auszudrücken, brauchen die Schüler die Hilfe des Lehrers.
Die Durchführung der Beweise sollte methodisch abwechslungsreich gestaltet werden. Wird z. B. der Beweis der Regel (a) im UG geführt, könnte ein leistungsstarker Schüler die Regel (b) in einem SV an der Tafel beweisen, und der Beweis der Regel (c) könnte in SSA erfolgen. Als Vorbild für eine Beweisniederschrift könnte das folgende Tafelbild entstehen (hier für die Regel (a)).

Satz (a): Wenn F eine Stammfunktion von f und G eine Stammfunktion von g ist, so ist $F + G$ eine Stammfunktion von $f + g$.

Voraussetzung: $\left.\begin{aligned} F' &= f \\ G' &= g \end{aligned}\right\}$ nach ▶ 6 (Stammfunktion)

Behauptung: $(F + G)' = f + g$

Beweis:

Beweisfeststellungen	Begründungen
$(F + G)' = F' + G'$	Summenregel
$F' = f$	Voraussetzung
$G' = g$	

$(F + G)' = f + g$, w. z. b. w.

Bei Regel (c) sollten die Schüler die Einschränkungen für x, die bei unterschiedlichen Exponenten bestehen, beachten.

Übungen im Bilden von Stammfunktionen Im UG begründen die Schüler in ■ 71 das Ermitteln der Stammfunktion durch Angabe der benutzten Regel mündlich. Sie geben weitere Stammfunktionen G von f an.
In SSA werden dann die Regeln (a) bis (c) beim Lösen einer Auswahl aus den LBA 1 bis 4 angewendet, wobei einfache Aufgaben mündlich zu lösen sind.

Weitere Übungen im Bilden von Stammfunktionen Nach einer Wh der Regeln für das Aufsuchen von Stammfunktionen sollten in SSA die LBA 5 und 6 bearbeitet werden. Schüler, die ausreichend sicher im Ermitteln von Stammfunktionen von Potenzfunktionen mit rationalem Exponenten sind, sollten die LBA 7 und 8 bearbeiten und deren Lösungswege anschließend vorführen.

Übungen im Ermitteln von Stammfunktionen mit vorgegebenen Bedingungen Selbständig bearbeiten die Schüler eine Auswahl aus den LBA 9 und 10 in Anlehnung an ■ 70.

Kontrollaufgaben

1. Geben Sie zu jeder der folgenden Funktionen eine Stammfunktion an!

   a) $f(x) = 3x^2 + 5x - 7$ b) $f(x) = \dfrac{2x^3 - 1}{x^2} \quad (x \neq 0)$

   c) $f(x) = \sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$

2. Was können Sie bisher über eine Stammfunktion zu der Funktion $f(x) = \dfrac{1}{x}$ aussagen?
   (Antwort: Höchstens die Vermutung, daß sie existiert, aber keine Potenzfunktion ist)

Stoffabschnitt 3.5 (13 Std.[1])
Übungen und Anwendungen

Zur Zielstellung für die Behandlung dieses Stoffabschnitts sei auf die einleitenden Ausführungen zum Stoffabschnitt 1.3 auf UH 61 verwiesen.
Da im vorangegangenen Unterricht nach der Behandlung der Theorie stets Lösungsverfahren für bestimmte Aufgabenklassen bzw. Aufgabentypen nicht nur Behandlungs- sondern auch Übungsgegenstand waren, ist nunmehr zunächst dieses umfangreiche Instrumentarium zum Lösen von komplexen Aufgaben wiederholend erneut bereitzustellen, wobei zugleich die theoretischen Grundlagen gefestigt werden. Das kann knapp und auf Schwerpunkte bezogen geschehen, wenn man z. B. jeweils von dem betreffenden Aufgabentyp ausgeht und die Schrittfolge des Lösungsweges angeben und begründen läßt.
Von den nach Abzug der Stundenanzahl für die zu planende Klassenarbeit verbleibenden 10 Unterrichtsstunden sollten 4 Stunden für die Problemerfassung und Entwicklung von Lösungswegen und (nicht notwendig die letzten) 6 Stunden für Intensivübungen im Aufgabenlösen durch SSA (unter Berücksichtigung einer inneren Differenzierung) verwendet werden.
Diese Übungen sind so anzulegen, daß die Schüler „wendig“ werden, daß sie innerhalb einer Unterrichtsstunde schnell von einem Aufgabentyp zu einem anderen übergehen können. Dabei soll die jeweilige Thematik nicht systematisch abgehandelt werden; es werden nur

[1] Von den zur Verfügung stehenden 13 Unterrichtsstunden sollten 3 Stunden für eine abschließende Klassenarbeit verwendet werden.

kurz die benötigten Definitionen, Sätze, Regeln und Verfahren genannt und ihre Anwendung begründet.

Beim Kontrollieren der Lösungswege und der Ergebnisse ist zu berücksichtigen, daß die Schüler verschiedene Wege eingeschlagen haben können. In solchen Fällen sollte sich eine Diskussion über den rationellsten Lösungsweg anschließen.

Nützlich könnte es sein, die Lösungswege bestimmter Aufgabentypen auf Karteikarten übertragen zu lassen, so daß in der Folgezeit die Schüler ihren für das Lösen einer Aufgabe vorgesehenen Weg mit dem auf der Karteikarte aufgezeichneten vergleichen können.

In der folgenden Übersicht sind jeweils Gruppen von LBA dieses Stoffabschnitts gebildet und den beiden oben genannten Übungskomplexen zugeordnet.

Gruppe	LBA	Zu lösende Probleme
Zur Problemerfassung und Entwicklung von Lösungswegen		
1	1 (Ausw.)	Anwenden der Differentiationsregeln
	11	Ermitteln einer Gleichung für die Tangente an eine Parabel
	25	Ermitteln lokaler Extrema unter gegebenen Bedingungen
	22	Ermitteln der Polstellen einer Funktion und Untersuchen des Verhaltens der Funktion in der Umgebung dieser Polstellen
2	30	Untersuchen des Monotonieverhaltens einer Funktion
	31	Berechnen lokaler und globaler Extrema
	42	Finden des Lösungsansatzes von Extremwertaufgaben; Nebenbedingung: Strahlensatz
	49	Nebenbedingung: Satz des PYTHAGORAS
	3 (Ausw.)	Anwenden der Differentiationsregeln
3	41	Untersuchen einer Funktion auf Differenzierbarkeit an gegebenen Stellen
	65	Ermitteln des Lösungsansatzes und anschließendes Lösen von Extremwertaufgaben
	62	Ermitteln des Lösungsansatzes einer Extremwertaufgabe
4	26 bis 29 (Ausw.)	Berechnen lokaler Extremwerte
	21	Anwenden der Kurvendiskussion auf Aufgaben aus dem Militärwesen
	14	Nachweis, daß für eine Funktion eine gegebene Gleichung gilt
5	13	Untersuchen des Monotonieverhaltens einer gebrochenen rationalen Funktion
	16	Anwenden der Differentiationsregeln sowie Ermitteln von Ableitungen höheren Grades und der Nullstellen der 1. Ableitung
	17	Anwenden der Differentiationsregeln, Ermitteln von Ableitungen höheren Grades sowie Beweisführungen durch vollständige Induktion
	51	Finden des Lösungsansatzes für Extremwertaufgaben physikalischen Inhalts und Lösen solcher Aufgaben
6	36	Kurvendiskussion einer Wurzelfunktion
	45, 50	Finden des Lösungsansatzes für Extremwertaufgaben
Zu Intensivübungen im Aufgabenlösen		
7	2, 4 (Ausw.)	Anwenden der Differentiationsregeln

Gruppe	LBA	Zu lösende Probleme
	12 23 20	Untersuchen der Differenzierbarkeit einer Funktion an einer Stelle Ermitteln der lokalen und globalen Extrema einer Funktion in einem Intervall Anwenden der Kurvendiskussion auf Aufgaben aus dem Militärwesen
8	67 32b) 33a), b) (Ausw.) 18	Lösen einer Komplexaufgabe (Schwerpunkt: Tangente an den Graph einer Funktion) Kurvendiskussion ganzer rationaler Funktionen Lösen einer Anwendungsaufgabe physikalischen Inhalts
9	9 19 33 (Ausw.)	Lösen einer Aufgabe zur Tangente an den Graph einer Funktion Lösen einer Anwendungsaufgabe physikalischen Inhalts Kurvendiskussion gebrochener rationaler Funktionen
10	40, 44 43	Finden von Lösungsansätzen für Extremwertaufgaben Lösen dieser Aufgaben
11	52, 48 53	Finden von Lösungsansätzen für Extremwertaufgaben, dabei Auswahl vorteilhafter Lösungswege Lösen einiger dieser Aufgaben
12	55, 54 57	Finden von Lösungsansätzen für Extremwertaufgaben Lösen dieser Aufgaben
13	62, 63 8	Finden von Lösungsansätzen für Extremwertaufgaben Lösen dieser Aufgaben Lösen einer Aufgabe zur Tangente an den Graph einer Funktion

Stoffgebiet 4

Integralrechnung

Vorbemerkungen

Die Schüler lernen nach der Differentialrechnung nunmehr einen weiteren wichtigen Anwendungsbereich des Grenzwertbegriffs kennen.
Folgendes **Wissen und Können** soll herausgebildet werden:
Die Schüler

- erwerben feste Kenntnisse über den Begriff „Bestimmtes Integral", d. h., sie können die Überlegungen, die zu diesem Begriff führen, reproduzieren und die Definition inhaltlich wiedergeben, haben insbesondere verstanden, daß dabei bestimmte Grenzwertprozesse eine grundlegende Rolle spielen, und kennen Bedingungen für die Existenz des bestimmten Integrals in einem Intervall;
- kennen den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und können mit seiner Hilfe **bestimmte Integrale** ausgewählter Funktionen **sicher und in angemessener Zeit berechnen**; entsprechende Fertigkeiten zu erwerben, ist das **Hauptanliegen** der Behandlung dieses Stoffgebietes;
- kennen den Zusammenhang zwischen bestimmtem Integral und Flächeninhalt einer Punktmenge und wenden die gewonnenen Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten zunehmend selbständig auf die Berechnung von Flächeninhalten (↗ Fallunterscheidung LP 39f. unter Stoffabschnitt 4.3) unter Einbeziehung früher erworbenen Wissens und Könnens (Eigenschaften der genannten Funktionen, Kurvendiskussionen) an;
- können die Integralrechnung zur Lösung bestimmter physikalischer Probleme anwenden, z. B. einfache Berechnungen der physikalischen Arbeit bei einer längs eines Weges veränderlichen Kraft durchführen.

Daraus ergeben sich folgende **fachlich-didaktische Schwerpunkte**:

- Erarbeiten des Begriffs „Bestimmtes Integral" in engem Zusammenhang mit dem Problem des Berechnens von Flächeninhalten nicht allseitig geradlinig begrenzter ebener Punktmengen;
- Erarbeiten des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung und das Entwickeln von Fertigkeiten im Berechnen bestimmter Integrale (für ausgewählte Klassen von Funktionen) mit Hilfe des Hauptsatzes und davon abgeleiteter Regeln;
- Anwenden des erworbenen Wissens und Könnens auf Flächeninhaltsberechnungen unter Reaktivierung und Vertiefung der Kenntnisse und Fertigkeiten der Schüler aus der Differentialrechnung.

Hinsichtlich der Entwicklung der **geistigen Fähigkeiten** der Schüler ist verstärkt an der weiteren Ausbildung von Fähigkeiten und Fertigkeiten zur Begriffsbildung und zum Definieren zu arbeiten (LP 37). Im übrigen gelten auch hier die in den Vorbemerkungen zum Stoffgebiet 3 getroffenen Aussagen.

Begriffe	Sätze	Verfahren
Definieren: **Bestimmtes Integral** einer Funktion f in einem Intervall $\langle a; b\rangle$ (▶ 1)	Existenz des bestimmten Integrals für in $\langle a; b\rangle$ – monotone Funktionen (▷ 1; mB) – stetige Funktionen (▷ 2; oB)	
	Additivität des bestimmten Integrals (▷ 3; oB)	
	Regeln (LB 250; oB)	
(1) $\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x \underset{\mathrm{Df}}{=} -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ (LB 242) (2) $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x \underset{\mathrm{Df}}{=} 0$ (LB 242)	a) $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ b) $\int_a^b k \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = k \cdot \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$	
Einführen: **Unbestimmtes Integral** (LB 248)	**Beziehung Bestimmtes Integral – Stammfunktion** Bestimmtes Integral als Funktion der oberen Grenze (▷ 4; mB)	**Ermitteln von Stammfunktionen**
	Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (▷ 5; mB)	**Berechnen bestimmter Integrale** mittels des Hauptsatzes, dabei auch Verfahren der **Integration durch lineare Substitution**
Definieren: **Flächeninhalt** von Punktmengen (▶ 2)		**Berechnen von Flächeninhalten** (Fälle ↗ LP 39f.)
Einführen: **Physikalische Arbeit** (LB 265f.)		**Berechnen der physikalischen Arbeit** bei veränderlicher Kraft

Möglichkeiten der **weltanschaulichen** und der **politisch-ideologischen Bildung und Erziehung** bestehen im Bewußtmachen der Bedeutung der neuen Begriffe, Gesetzmäßigkeiten und Verfahren zur tieferen Erfassung und zur Lösung von Problemen aus Produktion, Technik und Wissenschaft (↗ LP 12). So gewinnen die Schüler tiefere Einsichten in die Bedeutung der Mathematik für die Praxis und damit in die Notwendigkeit, feste und umfassende mathematische Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten zu erwerben.
Hinsichtlich **fachübergreifender Aspekte** sind insbesondere Beziehungen zum Physikunterricht zu beachten (↗ LP Ph, Klasse 11, Stoffgebiet 1. Mechanik I, besonders Stoffabschnitt 1.1).
In der Übersicht auf UH 190 sind die in diesem Stoffgebiet zu behandelnden Begriffe, Sätze und Verfahren und einige Beziehungen zwischen ihnen zusammengestellt.

Kontrollaufgaben

1. Berechnen bestimmter Integrale
(LBA 1 bis 6 aus „Übungen und Anwendungen")

2. Wie ist der Begriff „Bestimmtes Integral" definiert? Gehen Sie auch auf später vorgenommene Festsetzungen ein!

3. Welche Eigenschaften einer Funktion f sichern die Existenz des bestimmten Integrals
$\int_a^b f(x)\,dx$?
Geben Sie Beispiele für solche Funktionen an!

4. Welcher wichtige Satz bildet die Grundlage für die rationelle Berechnung bestimmter Integrale?
Erläutern Sie Inhalt und Bedeutung dieses Satzes!

5. Berechnen von Flächeninhalten in Verbindung mit Elementen der Kurvendiskussionen und anderen zu reaktivierenden Stoffen
(LBA 7, 9, 10, 12a), 14, 16, 18, 23b), 25 aus „Übungen und Anwendungen")

6. Begründen Sie die Notwendigkeit, im allgemeinen zwischen „bestimmtem Integral" und „Flächeninhalt" zu unterscheiden!

7. Welche Fälle werden bei der Behandlung der Flächeninhaltsberechnung von Punktmengen berücksichtigt?
Wie erfolgt in den einzelnen Fällen die Berechnung des Flächeninhalts?
Welche Gesichtspunkte sind gegebenenfalls dabei besonders zu beachten?

8. Berechnen der physikalischen Arbeit (LBA 31 aus „Übungen und Anwendungen")

Aufgaben für tägliche Übungen und Wiederholungen

1. Wiederholende Übungen zu den Komplexen:
- Terme (Arbeiten mit Variablen; Belegungen; Umformungen)
- Operationen und Kleiner-Relation in verschiedenen Zahlenbereichen (einschließlich Rechengesetze, Teilbarkeit natürlicher Zahlen)
- Eigenschaften von Funktionen (Skizzieren der Graphen)
- Lösen von Gleichungen, Ungleichungen und Gleichungssystemen

– Geometrie (besonders Flächen- und Körperberechnung, geometrische Abbildungen) (↗ die entsprechenden Vorschläge zu den Stoffgebieten 1. bis 3.)

2. Untersuchen von Zahlenfolgen, Berechnen von Grenzwerten von Zahlenfolgen

a) Ermitteln Sie jeweils die ersten fünf Glieder der Zahlenfolgen

$$\left(\frac{n^2 + 2n - 1}{n}\right), \left(\frac{7 - k}{2k}\right), \left(\frac{12}{k^2}\right)!$$

b) Untersuchen Sie die angegebenen Zahlenfolgen hinsichtlich Monotonieverhalten und Konvergenz!

$$\left(\frac{5k - 3}{k}\right); \left(\frac{n + 1}{2n}\right); \left(\frac{17}{k^2}\right); \left(\frac{7n + 3}{n + 1}\right)$$

c) Bestimmen Sie folgende Grenzwerte!

$$\lim_{n\to\infty} \frac{13}{n - 1}; \quad \lim_{k\to\infty} \frac{k}{k^2 - k}; \quad \lim_{n\to\infty} \frac{3}{5n^2}; \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n + 7}{n^2 - 8}$$

3. Ermitteln von Grenzwerten von Funktionen

a) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}; \quad \lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{x^2 - 1}; \quad \lim\limits_{x\to -1} \frac{x}{x^2 - 1}$

b) $\lim\limits_{h\to 0} \frac{(x_0 + h)^3 - x_0^3}{h}$

4. Lösen von Aufgaben aus der Differentialrechnung (außer Kurvendiskussion)

a) Ermitteln Sie die 1. Ableitung von f an der Stelle x_0!

$f(x) = -3x^2 + 2x + 6; x_0 = 2$

$f(x) = x^3 + 3x^2 - 7x + 2; x_0 = -7$

b) Ermitteln Sie den Anstieg des Graphen der Funktion f an der Stelle x_0!

$f(x) = x^2 + 1; x_0 = \frac{1}{3}$

$f(x) = -x^2 + 2x - 7; x_0 = -\frac{5}{3}$

c) Unter welchem Winkel schneiden die Graphen folgender Funktionen die x-Achse?

$f(x) = -\frac{1}{3}x + 7$

$f(x) = -x^2 + 3$

d) Bilden Sie die 1. Ableitung folgender Funktionen!

$f(x) = -7x^2 + 3x + 9; \quad f(x) = (3x^2 - 7x + 6)^3; \quad f(x) = \sqrt{9x + 11};$

$f(x) = (2x + 5)^2; \quad f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x - 7}$

e) Ermitteln Sie je zwei Stammfunktionen von f!

$f(x) = x^3 + 7x^2 - 6x; \quad f(x) = 5x^2 + 3\sqrt{x};$

$f(x) = \frac{3}{x^4}; \quad f(x) = \frac{5}{x^4} - 7x^2 + 11\sqrt[3]{x}$

5. Übungen zu Kurvendiskussionen

(Definitions- und Wertebereich, Nullstellen, lokale Extrema, Verhalten im Unendlichen, Polstellen)

a) $f(x) = x^2 + 2x - 4$

b) $f(x) = \frac{1}{2}(x^4 - 8x^2 + 12)$

c) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$

d) $f(x) = 7 - 2\sqrt{x}$

e) $f(x) = x^4 - 10x^2 - 9$

f) $f(x) = \sqrt{5x - 2}$

g) $f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^2 + 3}$

h) $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{x + 1}$

Stoffverteilung

Thema	**Std.**	**Zu reaktivierender Stoff**	**Zu erarbeitender Stoff**
Stoffabschnitt 4.1 Bestimmtes Integral			6 Std.
1 Flächeninhalt einer Punktmenge unter der Parabel $y = x^2 + 1$	1	– Flächeninhalt von Vielecks- und Kreisflächen – Monotonie, Konvergenz und Grenzwerte von Zahlenfolgen, Partialsummen – Monotonie und Stetigkeit von Funktionen – Rechnen mit reellen Zahlen	– Problem des Berechnens von Flächeninhalten von nicht allseitig geradlinig begrenzten Punktmengen – Flächeninhalt der Punktmenge Q unter der Parabel $y = x^2 + 1$ im Intervall $\langle 0; 1\rangle$
2 Definition des bestimmten Integrals	2	– Monotonie, Beschränktheit und Grenzwerte von Zahlenfolgen – Monotonie und Stetigkeit von Funktionen, Existenz eines größten bzw. kleinsten Funktionswertes in einem Intervall	– Verallgemeinern der am Beispiel (Punktmenge unter der Parabel $y = x^2 + 1$) durchgeführten Überlegungen – ▶ 1 (Bestimmtes Integral) – ▶ 2 (Flächeninhalt einer Punktmenge)
3 Existenz des bestimmten Integrals	2	– Rationale und irrationale Zahlen – Grenzwerte von Zahlenfolgen, Nullfolgen – Monotonie und Stetigkeit von Funktionen	– Beispiel einer Funktion, für die das bestimmte Integral in $\langle a; b\rangle$ nicht existiert – ▷ 1 (mB) und ▷ 2 (oB) – Beweis von ▷ 1 – Anwendung auf ■ 3 (LE 1)
4 Erweiterung des Integralbegriffs, Additivität	1	– Rechnen mit reellen Zahlen	– Erarbeiten der Definitionen $\int_b^a f(x)\,dx \underset{\text{Df}}{=} -\int_a^b f(x)\,dx$ und $\int_a^a f(x)\,dx \underset{\text{Df}}{=} 0$ – ▷ 3 (Additivität) (oB)

Thema	Std.	Zu reaktivierender Stoff	Zu erarbeitender Stoff
Stoffabschnitt 4.2 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung 6 Std.[1]			
5 Das bestimmte Integral als Funktion der oberen Integrationsgrenze	2	– Differenzenquotient und Differentialquotient, Ableitung einer Funktion in einem Intervall – Stammfunktion, Ermitteln von Stammfunktionen gegebener rationaler und Wurzelfunktionen – Funktionsbegriff – Stetigkeit von Funktionen	– ▷ 4 (mB) (Das bestimmte Integral als Funktion der oberen Integrationsgrenze) – Begriff „Unbestimmtes Integral“
6 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung; Berechnung bestimmter Integrale	2	– Ableitung einer Funktion in einem Intervall – Ermitteln von Stammfunktionen (Rationale Funktionen, Wurzelfunktionen)	– ▷ 5 (mB) – Bezeichnung „Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung“, Bedeutung des Hauptsatzes – Anwenden des Hauptsatzes zur Berechnung bestimmter Integrale
7 Berechnung von Integralen (verketteter Funktionen)	2	– Ermitteln von Stammfunktionen – Differenzieren von Potenz- und Wurzelfunktionen – Verkettung von Funktionen, die Kettenregel der Differentiation – Rechnen mit reellen Zahlen	– Berechnen bestimmter Integrale verketteter Funktionen – Einführen und Anwenden des Verfahrens der Integration durch lineare Substitution in der Form $\int_{x_1}^{x_2} f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{a} F(ax+b)\right]_{x_1}^{x_2}$
Stoffabschnitt 4.3 Flächeninhaltsberechnungen 6 Std.			
8 Punktmengen, die oberhalb der x-Achse liegen	1	– Flächeninhalt von Vielecksflächen – ▶ 2 (Flächeninhalt einer Punktmenge) – Rationale Funktionen und Wurzelfunktionen (Eigenschaften, Skizzieren der Graphen, Ermitteln der Nullstellen)	– Berechnen des Flächeninhalts von Punktmengen, die oberhalb der x-Achse liegen (dabei Berechnen der Nullstellen und Skizzieren der Graphen der Funktionen)
9 Punktmengen, die unterhalb der x-Achse bzw. teils oberhalb, teils unterhalb der x-Achse liegen	2	wie bei 8	– Erarbeiten der Beziehung $A = \left\lvert \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right\rvert$ für den Flächeninhalt von Punktmengen unterhalb der x-Achse und Berechnen des

[1] Falls Stoffabschnitt 3.4 bereits im Stoffgebiet 3 behandelt wurde! Laut LP 32 kann 3.4 auch erst an dieser Stelle (vor LE 5) behandelt werden, dann sind für 4.2 nur 5 Std. vorgesehen (LE 5 nur 1 Std.).

Thema	Std.	Zu reaktivierender Stoff	Zu erarbeitender Stoff
			Flächeninhalts derartiger Punktmengen – Berechnen des Flächeninhalts von Punktmengen, die teils oberhalb, teils unterhalb der x-Achse liegen (dabei jeweils Berechnen der Nullstellen und Skizzieren der Graphen der Funktionen)
10 Punktmengen, die von den Graphen zweier Funktionen eingeschlossen werden	2	– Berechnen der Schnittpunkte der Graphen zweier Funktionen	– Erarbeiten und Anwenden des Verfahrens zur Berechnung des Flächeninhalts derartiger Punktmengen (zunächst ohne, dann auch mit Schnittpunkt der Graphen in $\langle a; b \rangle$)
11 Physikalische Arbeit	1	– Physikalische Arbeit bei längs eines Weges konstanter bzw. veränderlicher Kraft (↗ Physikunterricht)	– Berechnen der physikalischen Arbeit bei längs eines Weges veränderlicher Kraft – Zusammenfassender Überblick
Stoffabschnitt 4.4	Übungen und Anwendungen		6 Std.
Übungen und Anwendungen	4	Lösen komplexer Aufgaben zur Flächeninhaltsberechnung unter Reaktivierung und Vertiefung des Wissens und Könnens aus der Differentialrechnung (Differenzieren, Ermitteln von Stammfunktionen, Kurvendiskussionen) und aus der Integralrechnung (wichtige Begriffe und Sätze, Berechnen bestimmter Integrale)	
Klassenarbeit	2		

Unterrichtsmittel

R „Bestimmtes Integral und Flächeninhalt“
(Erscheinen für September 1981 vorgesehen)

Hinweis: FO „Das bestimmte Integral“ (↗ SKUS-Best. Nr. 06 7516 56) entspricht inhaltlich nicht mehr dem ab 1. 9. 1980 gültigen Lehrplan und ist deshalb nicht mehr einzusetzen.

Stoffabschnitt 4.1 (6 Std.)
Bestimmtes Integral

Es ist der Begriff „Bestimmtes Integral" im Zusammenhang mit seiner Anwendung zur Erklärung und Berechnung des Flächeninhalts nicht allseitig geradlinig begrenzter ebener Punktmengen zu erarbeiten. Das letztgenannte Problem bildet den Ausgangspunkt der Betrachtungen, deren wesentliche Inhalte durch folgende **Leitgedanken** gekennzeichnet werden können.

1. Flächeninhalt einer Punktmenge unter der Parabel $y = x^2 + 1$; Welche reelle Zahl ist dieser Punktmenge als Flächeninhalt zuzuordnen?	(LE 1; LE 3)
2. Präzisierung und Verallgemeinerung der unter 1. durchgeführten Überlegungen; Begriff „Bestimmtes Integral"	(LE 2; ▶ 1)
3. Wie läßt sich mit Hilfe des Begriffs „Bestimmtes Integral" der Flächeninhalt einer Punktmenge erklären bzw. später auch berechnen?	(LE 2; ▶ 2)
4. Welche Eigenschaften einer Funktion f sichern die Existenz des bestimmten Integrals $\int_a^b f(x)\,dx$?	(LE 3; ▷ 1 mB; ▷ 2 oB)
5. Welche Festsetzungen zum Begriff „Bestimmtes Integral" sind zweckmäßigerweise zusätzlich vorzunehmen, um eine breitere Anwendung zu ermöglichen (Festlegungen für $a = b$ und $a > b$)?	(LE 4; ▷ 3 oB)

Voraussetzungen für erfolgreiches Arbeiten in diesem Stoffabschnitt sind feste Kenntnisse der Schüler über den Grenzwertbegriff, über Grenzwerte von Zahlenfolgen und über Monotonie und Stetigkeit von Funktionen. Außerdem werden Fertigkeiten im Rechnen mit reellen Zahlen und Sicherheit im Arbeiten mit dem Summenzeichen benötigt.
Zur Sicherung des Ausgangsniveaus bei der Behandlung der LE 1 sollten die Schüler die LBA 2 bis 5 (LB 228 f.) bereits längerfristig lösen (ggf. Aushang im Fachkabinett, Orientierung auf selbständige Reaktivierung des Wissens und Könnens mit Hilfe des Lehrbuchs, Möglichkeit des Arbeitens in Lerngruppen). Die in den genannten Aufgaben enthaltenen Begriffe, Sätze und geforderten Beweisführungen sind für die Sicherung des Ausgangsniveaus ebenfalls erforderlich und deshalb in die empfohlenen Vorbereitungen einzubeziehen.
Ferner sollte ein Schüler am Beginn der Behandlung dieses Stoffabschnitts den Auftrag erhalten, einen SV über die Schwerpunkte der LE 1 bis 3 (Systematisierung) vorzubereiten und Möglichkeiten zur Konsultation erhalten; ↗ LE 3, 2. Stunde, unter „Festigung".

Lerneinheit 1 (1 Std.)
Flächeninhalt einer Punktmenge unter der Parabel $y = x^2 + 1$

LB 229 bis 231

Ziele

Die Schüler
- reaktivieren Kenntnisse über die Berechnung des Inhalts von Vielecks- und Kreisflächen,
- verstehen das Problem der Ermittlung des Flächeninhalts von nicht allseitig geradlinig begrenzten ebenen Punktmengen (die keine Kreisflächenteile sind) und durch Anstellen entsprechender Überlegungen am Beispiel des Flächeninhalts der Punktmenge unter der Parabel $y = x^2 + 1$ im Intervall $\langle 0; 1\rangle$ die Motivierung für die Behandlung des Stoffabschnitts,
- erkennen, daß dazu Grenzwerte von Zahlenfolgen herangezogen werden müssen.

Schwerpunkte

- Sicherung des Ausgangsniveaus (Inhaltsberechnung von Vielecks- und Kreisflächen) (Bild D 5)
- Motivierung, Zielstellung (Bild D 6)
- Erarbeitung: Ermitteln des Flächeninhalts der Punktmenge unter der Parabel $y = x^2 + 1$ im Intervall $\langle 0; 1\rangle$ (Bilder D 7 bis D 9)

Methodische Hinweise

Sicherung des Ausgangsniveaus durch Inhaltsberechnungen von Vielecks- und Kreisflächen Zu Beginn der Stunde berechnen die Schüler die Inhalte der im Bild D 5 dargestellten Punktmengen (↗ LBA 1 auf LB 228; ↗ auch vorbereitende HA auf UH 196).
Die Schüler sollten ihr Vorgehen kommentieren (verwendete Formeln, ggf. erforderliches Zerlegen in Teilflächen). Ein kurzer LV (oder vorbereiteter SV) könnte sich anschließen:

- Flächeninhaltsberechnung von Vielecken mit Hilfe bestimmter Formeln; ggf. Zerlegung in Teilflächen (↗ Bild D 5c));
- Formel für Kreisflächeninhalt; Erinnerung an anschauliche Überlegungen (Überdecken mit quadratischem Gitter, Ermitteln von Näherungswerten durch Auszählen von Quadraten, „Einschachteln“ der Kreisfläche, immer bessere Annäherung „von oben“ und „von unten“ durch fortgesetztes Verfeinern des quadratischen Gitters (↗ [4], S. 234; evtl. Folie verwenden)

Motivierung und Zielstellung Den Schülern ist noch kein Verfahren zur Berechnung des Flächeninhalts der im Bild D 6 dargestellten Punktmenge Q bekannt.
Der Lehrer kann diese *Motivation* durch den Hinweis auf physikalische Sachverhalte, die mit der Frage nach dem Flächeninhalt gewisser Punktmengen verbunden sind, untermauern

(LB 227f.; Bilder D 1 bis D 4). Er erinnert an den Physikunterricht (↗ LP Ph, Kl. 11, Stoffabschnitt 1.1), in dem die physikalische Arbeit bei veränderlichen Kräften durch Auszählen der Flächeneinheiten im *F-s*-Diagramm ermittelt wurde (auch dort war kein Berechnungsverfahren bekannt).
Die Berechnung derartiger Flächeninhalte ist also *eine* Aufgabe der Integralrechnung; als *Ziel* dieser Stunde werden demnach eine vorläufige Antwort auf die Frage nach dem Flächeninhalt der Punktmenge Q in Bild D 6 und entsprechende Lösungsüberlegungen angegeben.

Erarbeitung der Lösungsüberlegungen zum Problem des Flächeninhalts der Punktmenge unter der Parabel $y = x^2 + 1$ im Intervall $\langle 0; 1 \rangle$ Es empfiehlt sich sowohl aus zeitlichen Gründen als auch wegen des Schwierigkeitsgrades des Stoffes ein LV oder ein UG mit starker Führung durch den Lehrer (auf Darstellung im LB stützen).
Folgende *Schritte* sollten herausgearbeitet werden:

- Problem: Welche (reelle) Zahl ist der Punktmenge Q in Bild D 6 als Flächeninhalt zuzuordnen? (Hier evtl. kurz auf Fußnote auf LB 227 eingehen)
- Herangehen an die Lösung über Betrachtung von Vielecksflächen, die in Q hineingelegt werden bzw. die Q überdecken, damit gewissermaßen „Einschachteln" des (als existierend angenommenen) Flächeninhalts von Q (Orientierung an den vorher wiederholten Überlegungen zum Kreisflächeninhalt)
- Feststellen der Art der verwendeten Vielecke (Zusammensetzung aus bestimmten Rechteckstreifen; Vorteil dieser Wahl)
- Erörtern von Möglichkeiten des Verfeinerns bzw. Verbesserns der Annäherung an den Flächeninhalt von Q (fortgesetztes Verdoppeln der Anzahl der Teilintervalle; Vorteile dieses Vorgehens bewußtmachen, u. U. auch auf andere Möglichkeiten hinweisen; Annäherung „von oben" bzw. „von unten"; Bilder D 7 bis D 9)
- Bilden der Summen s_n und S_n; Zusammenhang Folgen (s_n) und (S_n) – fortgesetzte Halbierung der Teilintervalle; Betrachten der Tabelle (LB 230f.), dabei Nutzen der Ergebnisse der LBA 2 bis 5 (LB 228f.)
- Feststellen der Konvergenz der Zahlenfolgen (s_n) und (S_n) sowie der Existenz eines *gemeinsamen* Grenzwertes

Zusammenfassend ist bewußtzumachen:

- Zur Beantwortung der Frage nach dem Flächeninhalt von Q sind Grenzwerte gewisser Zahlenfolgen erforderlich. Der gemeinsame Grenzwert der Zahlenfolgen (s_n) und (S_n) wird der Punktmenge Q als Flächeninhalt zugeordnet.
- Der Nachweis der Konvergenz von (s_n) und (S_n) gegen ein und denselben Grenzwert und das Berechnen dieses Grenzwertes bleiben zunächst noch offen (Orientierung auf LE 3). Die zum Problem formulierte Frage ist also noch nicht endgültig beantwortet.

Hausaufgaben LE 1 im LB durcharbeiten mit dem Ziel, die wesentlichen Überlegungen wiedergeben zu können; LBA 1 (für besonders leistungsstarke Schüler evtl. LBA 2)

Kontrollaufgabe

Geben Sie die wesentlichen Gedanken zur Lösung des in LE 1 gestellten Problems mit eigenen Worten wieder!

Lerneinheit 2 (2 Std.)
Definition des bestimmten Integrals

LB 232 bis 238

Ziele

Die Schüler
- kennen den Begriff „Bestimmtes Integral“, haben die zu ihm führenden Überlegungen, die durch Verallgemeinerung der in LE 1 exemplarischen Betrachtungen anzustellen sind, verstanden und können sie einschließlich der getroffenen Voraussetzungen wiedergeben,
- kennen die Definition des Flächeninhalts gewisser Punktmengen mittels des bestimmten Integrals und können sie auf einfache Beispiele anwenden.

Schwerpunkte

1. Stunde
- Sicherung des Ausgangsniveaus: Wiederholung der am Beispiel (↗ LE 1) durchgeführten Überlegungen zur Lösung des Flächeninhaltsproblems
- Motivierung und Zielstellung
- Erarbeitung der ▶ 1 (Bestimmtes Integral)
- Zusammenfassung (LB 244 f.)

2. Stunde
- Wiederholung: Begriff des bestimmten Integrals
- Erarbeitung der ▶ 2 (Flächeninhalt) (● 2)
- Festigung: Bestimmtes Integral und Flächeninhalt

Methodische Hinweise

Sicherung des Ausgangsniveaus durch Wiederholung der in LE 1 durchgeführten Überlegungen
SV zur Frage nach dem Flächeninhalt der in Bild D 6 dargestellten Punktmenge Q (↗ dazu die in LE 1 für die Erarbeitung genannten Schritte). Die anderen Schüler ergänzen gegebenenfalls beziehungsweise stellen Fragen. In Verbindung damit werden die Ergebnisse von LBA 1 aus LE 1 verglichen (↗ die Tafelbilder auf UH 200 oben).

Motivierung und Zielstellung In LE 1 wurde, ausgehend von anschaulich-geometrischen Betrachtungen, ein Lösungsweg für die Beantwortung der Frage nach dem Flächeninhalt einer bestimmten Punktmenge gefunden.
Es ist nunmehr notwendig, die durchgeführten Überlegungen weiter zu präzisieren und zu verallgemeinern, dabei die anschaulich-geometrischen Betrachtungen durch die arithmetische Beschreibung der Grenzprozesse zu ersetzen und damit die Anwendungsmöglichkeiten zu erweitern (Beitrag zur weltanschaulichen Bildung: Streben der Mathematik nach Ab-

Welche (reelle) Zahl ist als Flächeninhalt von Q festzulegen?

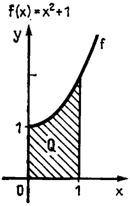


Bild 4.1

Nummer der Teilung	Vergleich s_n		S_n
0	1	<	2
1	1,125	<	1,625
2	1,21875	<	1,46875
⋮	⋮		⋮
n **wächst**	s_n wird **größer**		S_n wird **kleiner**

s_n und S_n **nähern sich einander** immer mehr.

$n \to \infty$ | $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ | $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$

$$\underline{\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} S_n}$$

- Nachweis der Konvergenz von (s_n) und (S_n) gegen ein und denselben Grenzwert in LE 3
- Berechnung dieses Grenzwertes in LE 3

Gemeinsamer Grenzwert wird Q als Flächeninhalt zugeordnet.

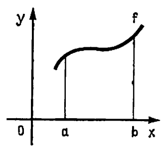
---

straktion und Verallgemeinerung, Rolle für Erfassen und Beschreiben der objektiven Realität und für Anwendung in der Praxis).
Die auf arithmetischer Grundlage vorgenommenen Betrachtungen führen zum fundamentalen **Begriff des bestimmten Integrals** (Hinweis auf zahlreiche Anwendungen in Mathematik und Naturwissenschaften).

Erarbeitung der ▶ 1 (Bestimmtes Integral) Zunächst sollte im UG eine Art „Problemliste" zusammengestellt werden. Sie soll diejenigen Fragen bzw. Schwerpunkte erfassen, die durch die nachfolgenden Überlegungen (↗ Bild 4.2) geklärt werden müssen.

- Mit welchen Funktionen arbeiten wir?
- Art der Teilung des Intervalls $\langle a; b\rangle$
- Bilden von s_n und S_n
- Eigenschaften der Zahlenfolgen (s_n) und (S_n)
- Besondere Anforderungen an die Grenzwerte von (s_n) und (S_n)

Bild 4.2



Da die Erarbeitung des Begriffs „Bestimmtes Integral" relativ hohe Forderungen an das abstrakte Denken stellt, sollte der Lehrer vom erreichten Leistungsvermögen der Klasse her entscheiden, welcher der nachfolgend genannten Wege am geeignetsten ist.

LV der Überlegungen einschließlich ▶ 1;
Schüler notieren das Wesentliche, ggf. kurze Teilzusammenfassung bzw. Beantwortung von Kontrollfragen (↗ UH 200; am Beispiel aus LE 1 orientieren) durch Schüler, dazu auch Verwendung des AB 1 [1] (UH 202) sowie Einsatz von R „Bestimmtes Integral und Flächeninhalt" (sobald ausgeliefert) zur Unterstützung der Ausführungen möglich.

UG wobei evtl. die im AB angegebene Darstellung als TB entsteht bzw. die genannte Dia-Reihe eingesetzt wird

SSA im LB;
Schriftliches Fixieren des Wesentlichen (evtl. auf dem AB, Orientierung an „Problemliste"), dieses Vorgehen zumindest in einzelnen Etappen mit dazwischengeschalteten Teilzusammenfassungen

Zusammenfassend ist

- der Inhalt der im Anschluß an ▶ 1 getroffenen Feststellungen (LB 235f.) bewußtzumachen;
- nochmals hervorzuheben, daß insbesondere jede monotone und jede stetige Funktion die in ▶ 1 gemachten Voraussetzungen bezüglich der Funktion f erfüllt (Anknüpfung in LE 3);
- mitzuteilen: die Bezeichnung „$\int\limits_a^b f(x)\,dx$" (auch die Sprechweise), die Begriffe „Integrationsgrenze", „Integrationsvariable", „Integrationsintervall" (kann auch bei Wdh in der folgenden Stunde geschehen).

Wiederholung zum Begriff des bestimmten Integrals SV zu den Überlegungen, die zum Begriff „Bestimmtes Integral" führen, und zu ▶ 1 (ggf. Ergänzungen durch andere Schüler und Beantwortung von Fragen), oder SSA am AB 1, falls in der 1. Stunde noch nicht erfolgt, mit anschließendem SV

Erarbeitung der ▶ 2 (Flächeninhalt) UG mit Verwendung des LB zur Festigung von ▶ 1 und zur Vorbereitung von ▶ 2; Wdh: $\sum\limits_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$; Übertragung auf $\sum\limits_{i=1}^{k} (i-1)$; evtl. in Verbindung mit LBA 1 Berechnung einiger Summen; SSA am ● 2.
Beim Auswerten wird, anknüpfend an ● 2c), die Frage nach dem Flächeninhalt gewisser Punktmengen wieder aufgegriffen. ▶ 2 wird vom Lehrer mitgeteilt bzw. von den Schülern durchgelesen. Zu beachten ist dabei die im Anschluß an ▶ 2 (↗ LB 237) getroffene Feststellung.
Zusammenfassend macht der Lehrer auf die in ▶ 2 enthaltenen Voraussetzungen aufmerksam und weist darauf hin, daß später (↗ LE 9) auch andere Fälle behandelt werden.

Hausaufgabe LBA 2 (LBA 3 als freiwillig zu lösende Aufgabe für leistungsstarke Schüler)

[1] Das AB 1 ist als Lückentext angelegt; die von den Schülern auszufüllenden Lücken sind hier als eingerahmte Stellen gekennzeichnet.

Das bestimmte Integral

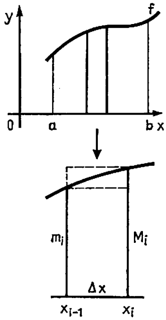


Bild 4.3

$\Delta x = x_i - x_{i-1}$

Voraussetzungen:

1. Funktion f ist definiert in $\langle a; b\rangle$.

2. f hat in jedem abgeschlossenen Teilintervall von $\langle a; b\rangle$ einen kleinsten und einen größten Funktionswert.

Überlegungen:

1. n beliebig, aber fest gewählt:

– Teilung des Intervalls $\langle a; b\rangle$ in 2^n gleich lange Teilintervalle

– Bildung der **Produkte** $m_i \cdot \Delta x$ und $M_i \cdot \Delta x$ und der **Summen**

$$s_n = \sum_{i=1}^{2^n} m_i \cdot \Delta x \quad \text{und} \quad S_n = \sum_{i=1}^{2^n} M_i \cdot \Delta x$$

2. Überlegungen für jede natürliche Zahl durchgeführt:

Folgen (s_n) und (S_n)

(s_n) nach oben beschränkt, monoton wachsend

(S_n) nach unten beschränkt, monoton fallend

Nach ⊳ B 2 konvergieren (s_n) und (S_n).

Wichtig sind die Fälle, für die

$\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$, d. h.,

$(S_n - s_n)$ eine Nullfolge ist.

$\Downarrow$

Das bestimmte Integral $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ ist nach ▶ 1

der gemeinsame Grenzwert von (s_n) und (S_n); eine reelle Zahl.

Kontrollaufgaben

1. Geben Sie die Definition des bestimmten Integrals einer Funktion f in einem Intervall $\langle a; b\rangle$ mit eigenen Worten wieder!
2. Nennen Sie Klassen von Funktionen, die die bei dieser Definition getroffenen Voraussetzungen erfüllen!
3. Wovon hängt die Existenz des bestimmten Integrals einer Funktion f in einem Intervall $\langle a; b\rangle$ gemäß ▶ 1 ab?
4. Wie kann man mittels des bestimmten Integrals den Flächeninhalt der in Bild 4.4 dargestellten Punktmengen festlegen?

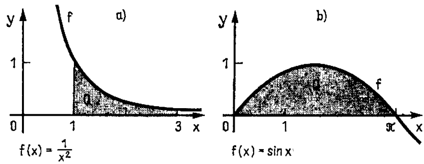


Bild 4.4

Lerneinheit 3 **(2 Std.)**
Existenz des bestimmten Integrals

LB 238 bis 242

Ziele

Die Schüler

- erkennen am Beispiel einer Funktion f, für die das bestimmte Integral nicht existiert, daß die Existenz eines größten (kleinsten) Funktionswertes von f in jedem abgeschlossenen Teilintervall von $\langle a; b\rangle$ noch nicht genügt, um die Existenz des bestimmten Integrals in $\langle a; b\rangle$ zu sichern,
- wissen, daß für im Intervall $\langle a; b\rangle$ monotone oder stetige Funktionen das bestimmte Integral existiert (▷ 1 und ▷ 2),
- verstehen den Beweis für in $\langle a; b\rangle$ monotone Funktionen und können ihn inhaltlich wiedergeben,
- können die gewonnenen theoretischen Einsichten auf ausgewählte Funktionen anwenden und somit auch die in LE 1 aufgeworfene Frage nach dem Flächeninhalt der in Bild D 6 dargestellten Punktmenge Q endgültig beantworten.

Schwerpunkte

1. Stunde
- Sicherung des Ausgangsniveaus
- Motivierung und Problemstellung: Erörtern von ■ 2
- Erarbeitung von ▷ 1 und ▷ 2, Beweis für ▷ 1

2. Stunde
- Wiederholung: Existenz des bestimmten Integrals
- Erarbeitung von ■ 3
- Festigung: Anwenden von ▷ 1 und ▷ 2, Zusammenfassung

Methodische Hinweise

Sicherung des Ausgangsniveaus durch Wiederholung zur Monotonie und Stetigkeit von Funktionen

1. Nennen Sie Beispiele für monotone bzw. für stetige Funktionen (Intervalle angeben)!
2. Geben Sie je ein Intervall an, in dem die Funktion $f(x) = 2 \cdot \sin 2x$ monoton fällt bzw. monoton wächst!
3. Es sei f eine in $\langle a; b\rangle$ monoton wachsende Funktion. $\langle a; b\rangle$ werde (beliebig) in Teilintervalle zerlegt. An welchen Stellen im i-ten Teilintervall $\langle x_{i-1}; x_i\rangle$ nimmt f den größten bzw. den kleinsten Funktionswert an?

Motivierung und Problemstellung Zur *Motivierung* sind folgende Schritte möglich:

- Wdh: ▶ 1 unter besonderer Berücksichtigung der Forderungen an die Funktion f; Betonen der Tatsache, daß die Existenz des bestimmten Integrals einer Funktion f in einem Intervall davon abhängt, ob die Grenzwerte der Folgen (s_n) und (S_n) übereinstimmen;
- Lösen von ● 3 und ● 4 (je ein Schüler an der Tafel)
- SSA am ■ 2
  Ergebnis: Es gibt Funktionen mit den in ▶ 1 geforderten Eigenschaften, für die das bestimmte Integral in einem vorgegebenen Intervall *nicht* existiert. Damit ist für die betrachteten Funktionen die Existenz des bestimmten Integrals *nicht* gesichert.
- Unter Bezugnahme auf die aufwendigen Untersuchungen zum Nachweis der Existenz des Integrals $\int_0^b x\,dx$ im ■ 1 wird erkannt, daß es zweckmäßig ist, nach Kriterien zu suchen, die eine einfachere Entscheidung über die Existenz eines bestimmten Integrals in einem vorgegebenen Intervall ermöglichen.

Als *Ziel* der Stunde ergibt sich die Beantwortung der Frage, welche Eigenschaften einer Funktion f die Existenz von $\int_a^b f(x)\,dx$ gewährleisten.

Erarbeitung von ▷ 1 (mB) und ▷ 2 (oB) Zunächst sollte auf die Zusammenfassung (1. Std. LE 2) hingewiesen werden: Zur Menge der Funktionen, die in jedem abgeschlossenen Teilintervall ihres Definitionsbereiches einen kleinsten und einen größten Funktionswert haben, gehören die **stetigen** Funktionen und die **monotonen** Funktionen.
Dann werden ▷ 1 und ▷ 2 mitgeteilt (auch kurzes Eingehen auf Fußnote zu LB 239; Mög-

lichkeit der immanenten Wiederholung zu „notwendige und hinreichende Bedingungen") und die (unmittelbar aus ■ 2 folgende) Beweisnotwendigkeit bewußtgemacht.

Im Mittelpunkt der Erarbeitung steht der **Beweis zu ▷ 1**:

Es ist zunächst zu klären (UG), *was* eigentlich bewiesen werden soll, nämlich die Existenz des bestimmten Integrals $\int_a^b f(x)\,dx$ für eine in $\langle a; b\rangle$ monotone Funktion. Da das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ nach ▶ 1 der gemeinsame Grenzwert der Folgen (s_n) und (S_n) ist, gilt es also zu zeigen, daß aus der Monotonie von f in $\langle a; b\rangle$ folgt: $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

Das ist der entscheidende, aber schwierigste Schritt des Beweises!

Im Beweisschritt (2) erfolgt ein Hinweis auf die zur Sicherung des Ausgangsniveaus vorgeschlagene Aufgabe 3.

Eventuell sollte auch darauf hingewiesen werden, daß $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ erfüllt ist, wenn gezeigt werden kann, daß die Folge $(S_n - s_n)$ eine Nullfolge ist (Beweisschritt (3)). Das Durcharbeiten des Beweises selbst sollte in SSA im LB erfolgen (auch UG möglich). In beiden Fällen gibt dann ein Schüler die wesentlichen Überlegungen des Beweises wieder.

Festigung Für die in den Bildern D 19 und D 20 dargestellten Funktionen erörtern die Schüler die Existenz von $\int_a^b f(x)\,dx$.

Hausaufgaben Wdh: Beweis zu ▷ 1; Kontrollaufgabe 2. (UH 206)

Wiederholung zur Existenz des bestimmten Integrals SV zur Hausaufgabe, Wiedergabe von ▷ 1 und ▷ 2 (↗ folgendes Tafelbild; auch schon in 1. Std. verwendbar); Übg (mdl.): LBA 1

Welche Eigenschaften von f sichern die Existenz des bestimmten Integrals?

f in $\langle a; b\rangle$ **monoton**

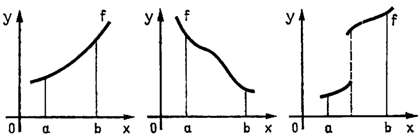


Bild 4.5

oder

f in $\langle a; b\rangle$ **stetig**

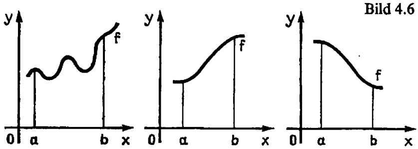


Bild 4.6

▷ 1

↓

Für derartige Funktionen existiert $\int_a^b f(x)\,dx$.

↑

▷ 2

Zu beachten: Für Funktionen, die sowohl stetig als auch monoton sind, existiert das bestimmte Integral sowohl nach ▷ 1 als auch nach ▷ 2!

Erarbeitung von ■ 3 Hierbei wird die in LE 1 gestellte Frage nach dem Flächeninhalt der in Bild D 6 dargestellten Punktmenge Q endgültig beantwortet.
Es ist bewußtzumachen, daß dort noch offen blieben
(1) der Nachweis für $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$,
(2) die Berechnung des gemeinsamen Grenzwertes und damit des Integrals $\int\limits_0^1 (x^2 + 1)\,\mathrm{d}x$ und des Flächeninhalts von Q (nach ▶ 2).
UG: Es ist zu klären

- Problem (1) ist nach ▶ 1 gelöst, denn $f(x) = x^2 + 1$ ist in $\langle 0; 1\rangle$ monoton.
- Daher genügt die Berechnung des Grenzwertes *einer* der beiden Folgen (im LB Folge S_n).
- Die Beziehung $\sum\limits_{i=1}^{k} (a_i + b_i) = \sum\limits_{i=1}^{k} a_i + \sum\limits_{i=1}^{k} b_i$ (↗ Fußnote zu LB 241) ist zu erläutern, wobei hier $b_i = 1$ ist (↗ auch ● 5).

SSA am ■ 3:
Beim Auswerten kann R „Bestimmtes Integral und Flächeninhalt“ (Teil 2: Konstruktives Erarbeiten der Flächeninhaltszahl) mit eingesetzt werden.

Festigung durch Anwenden von ▷ 1 und ▷ 2 Übg: LBA 2 und 3 (ggf. vollständige Durchführung als HA); SV über die Schwerpunkte der LE 1 bis 3 (Systematisierung); ↗ UH 196 [1]

Kontrollaufgaben

1. Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen in den angegebenen Intervallen!

   a) $f(x) = -2x^2 + 3;\ \langle -2; 5\rangle$ b) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 7; & -2 \leqq x < 1 \\ x + 1; & 1 \leqq x \leqq 4 \end{cases}$

   Begründen Sie die Existenz von $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ in den angegebenen Intervallen!

2. Führen Sie den Beweis zu ▷ 1 für in $\langle a; b\rangle$ monoton fallende Funktionen!

Lerneinheit 4 **(1 Std.)**
Erweiterung des Integralbegriffs; Additivität

LB 242 bis 243

Ziele

Die Schüler

- kennen die Festlegungen $\int\limits_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ und $\int\limits_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$,
- kennen die Eigenschaft der Additivität (▷ 3) und können sie, besonders auch später bei Flächeninhaltsberechnungen, anwenden,
- runden somit ihre Kenntnisse über den Begriff des bestimmten Integrals ab.

[1] Evtl. kann dieser SV auch erst zu Beginn der Unterrichtsstunde zu LE 4 erfolgen.

Schwerpunkte

- Motivierung des Erweiterns des Integralbegriffs, Zielstellung
- Erarbeitung der genannten Festlegungen und von ▷ 3 (● 6)
- Festigung (neuer Stoff, Integralbegriff) (LB 243; Zus 244f.)

Methodische Hinweise

Motivierung und Zielstellung Nach Auswertung der HA folgt ein SV zu bisher erarbeiteten Kenntnissen über das bestimmte Integral[1] (▶ 1; $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ ist eine reelle Zahl und Grenzwert gewisser Zahlenfolgen; Bedingungen für die Existenz des bestimmten Integrals; Anwendung zur Erklärung des Flächeninhalts gewisser Punktmengen).
Motivierung: Bisher war für die Integrationsgrenzen a und b stets $a < b$ vorausgesetzt. Es ist zweckmäßig, diese Einschränkung fallenzulassen.
Zielstellung: Wir erweitern den Integralbegriff für die Fälle $a = b$ und $a > b$ (damit Erweitern der Anwendungsmöglichkeiten) und lernen einen Satz kennen, den wir später bei Flächeninhaltsberechnungen benötigen.

Erarbeitung der (in den Zielen) genannten Festlegungen und von ▷ 3 Das Problem wird präzisiert: Wir setzen voraus, daß $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ in $\langle a; b\rangle$ existiert, also eine eindeutig bestimmte reelle Zahl ist. Nach dem Vertauschen der Integrationsgrenzen ist die obere kleiner als die untere. Die folgenden Fragen sollten die Schüler möglichst selbst finden.

- Welche Beziehung besteht zwischen

  $\int\limits_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$ und $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$?
- Wie ist (um alle Fälle zu erfassen) $\int\limits_a^a f(x)\,\mathrm{d}x$ zu erklären?

Die Schüler sollen Vermutungen äußern.
SSA mit LB 242 bis einschließlich Festsetzung (2). Die entsprechende Aufgabenstellung könnte lauten:
„Erarbeiten Sie mit Hilfe des Lehrbuches eine Antwort auf die gestellten Fragen (↗ oben), und lösen Sie anschließend die Aufgaben 1 und 3!“
Auswertung: Hinsichtlich Festsetzung (1) (LB 242) bewußtmachen: Durch Vertauschen der Integrationsgrenzen ändert sich das Vorzeichen der durch das bestimmte Integral festgelegten reellen Zahl.
Zur Erarbeitung von ▷ 3 (Additivität des bestimmten Integrals) bieten sich zwei Möglichkeiten an:

- SSA an ● 6 und am folgenden Lehrbuchtext bis „... nennt man Additivität des bestimmten Integrals“, anschließend Lösen von LBA 6
- ▷ 3 wird vom Lehrer mitgeteilt, die Schüler werden aufgefordert, ihn zu interpretieren bzw. geometrisch zu deuten, anschließend Lösen von LBA 6.

[1] SV kann entfallen, wenn bereits in der vorhergehenden Stunde eingesetzt.

Festigung SSA: LBA 2, 4, 5 (im Zusammenhang mit LBA 4 ist unbedingt auf die Ausführungen auf LB 243 einzugehen; Zusammenfassung der gewonnenen Erkenntnisse durch einen Schüler; das Wesentliche zeigt das folgende Tafelbild.

Weitere Beziehungen zum Integralbegriff;

Additivität des bestimmten Integrals

$\int_a^b f(x)\,dx$ existiert in $\langle a; b\rangle$. Dann gilt:

$\int_a^b f(x)\,dx$ ist eine **eindeutig bestimmte reelle Zahl.**

(**Grenzwert** gewisser Zahlenfolgen; ▶ 1)

Weitere Beziehungen:

(1) $\int_b^a f(x)\,dx \underset{\text{Df}}{=} -\int_a^b f(x)\,dx$ $(a < b)$

(2) $\int_a^a f(x)\,dx \underset{\text{Df}}{=} 0$

Additivität:

$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ $(c \in \langle a; b\rangle)$

Deutung:

$A = A_1 + A_2$

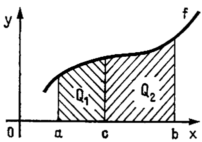


Bild 4.7

Punktmenge $Q_1(Q_2) \rightarrow$ Flächeninhalt $A_1(A_2)$

Kontrollaufgaben

1. Wovon hängt die durch das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ eindeutig festgelegte reelle Zahl ab?

2. Wegen $\int_c^b x\,dx = \frac{b^2}{2}$ (↗ ■ 1) gilt $\int_0^6 x\,dx = 18$.

   Berechnen Sie $\int_0^6 x\,dx + \int_0^3 x\,dx + \int_3^6 x\,dx + \int_{10}^{10} x\,dx + \int_6^c x\,dx$!

Stoffabschnitt 4.2 (6 Std.)
Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Es geht um folgende zwei Anliegen:

- Es werden **Zusammenhänge zwischen der Integralrechnung und der Differentialrechnung,** die ja beide den Grenzwertbegriff als fundamentalen Begriff verwenden, herausgearbeitet.
- Es sollen ein **Verfahren zur rationellen Berechnung bestimmter Integrale** erarbeitet und **erste Fertigkeiten im Anwenden** dieses Verfahrens erworben werden.

Für die Motivation der Schüler und vor allem für die Behandlung der Stoffabschnitte 4.3 und 4.4 steht zweifellos das zuletzt genannte Anliegen im Vordergrund. Es sollte jedoch auch bei der Behandlung des Hauptsatzes bewußtgemacht werden, daß die Suche nach Zusammenhängen und Verallgemeinerungen nicht nur von theoretischem Interesse ist, sondern daß gerade solche Untersuchungen oft zu Ergebnissen führen, die für die Anwendung in der Praxis höchst wichtig und vorteilhaft sind. Im Ergebnis der notwendigen Festigung des erworbenen Wissens werden in diesem Stoffabschnitt gewissermaßen die handwerklichen Voraussetzungen für die erfolgreiche Bewältigung der später zu behandelnden Probleme geschaffen.
Dazu gehört auch die Entwicklung der Fähigkeit, das Verfahren der **Integration durch lineare Substitution** auf einfache Beispiele anwenden zu können.
Der neue Stoff knüpft an die Kenntnisse aus dem Stoffabschnitt 4.1 und vor allem an das Wissen und Können aus dem Stoffgebiet 3. „Differentialrechnung“ an. Die Schüler benötigen neben der Kenntnis der Begriffe „Differenzenquotient“, „Differentialquotient“, „Ableitung“ und „Stammfunktion“ Fähigkeiten im Ermitteln von Ableitungen bzw. von Stammfunktionen gegebener Funktionen. Insbesondere sind Fertigkeiten im Rechnen mit reellen Zahlen erforderlich.
Die folgenden Ausführungen zu den LE 5 bis 7 setzen voraus, daß der Stoffabschnitt 3.4 „Stammfunktionen“ bereits im Rahmen der Differentialrechnung behandelt wurde. Entscheidet sich der Lehrer jedoch für die vom Lehrplan zugestandene Möglichkeit, den Stoffabschnitt 3.4 erst innerhalb dieses Stoffabschnitts 4.2 „Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung“ zu behandeln (↗ LP 32 und UH 181), so sind die vorgesehenen 5 Unterrichtsstunden hier einzuplanen. Das dabei zu erwerbende Wissen und Können ist dann als notwendige Grundlage für das Gewinnen einer rationellen Berechnungsmethode für bestimmte Integrale zu motivieren. In der 1. Unterrichtsstunde dieses Stoffabschnitts könnte dann sofort mit der Erarbeitung von ▷ 4 begonnen werden, was unter Umständen auch das Behandeln des Beweises zu diesem Satz noch in dieser Stunde ermöglicht (zumindest könnte das Durcharbeiten des Beweises als Hausaufgabe gründlich vorbereitet werden). Die so gegebenenfalls gewonnene Unterrichtszeit sollte für weitere festigende Übungen (im Ermitteln von Stammfunktionen bzw. von unbestimmten Integralen) verwendet werden.

Lerneinheit 5 **(2 Std.)**

Das bestimmte Integral als Funktion der oberen Integrationsgrenze

LB 245 bis 248

Ziele

Die Schüler

- erkennen, daß durch $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ eine Funktion in $\langle a; b\rangle$ definiert wird,
- wissen, daß für in $\langle a; b\rangle$ stetige Funktionen f die Funktion Φ eine Stammfunktion von f in $\langle a; b\rangle$ ist, und verstehen ▷ 4 und dessen Beweis,
- kennen den Begriff „Unbestimmtes Integral" und können unbestimmte Integrale gegebener Funktionen ermitteln.

Schwerpunkte

1. Stunde

- Sicherung des Ausgangsniveaus: Wiederholung von Grundlagen aus der Differentialrechnung (● 7)
- Motivierung und Zielstellung
- Erarbeitung: Das bestimmte Integral als Funktion der oberen Integrationsgrenze (■ 1; ▷ 4).

2. Stunde

- Erarbeitung des Beweises zu ▷ 4 (▷ B 7; ▷ 1 und 3)
- Einführen des Begriffes „Unbestimmtes Integral"
- Festigung: Ermitteln von Stammfunktionen bzw. von unbestimmten Integralen

Methodische Hinweise

Sicherung des Ausgangsniveaus durch Wiederholung von Grundlagen aus der Differentialrechnung Der Lehrer sollte in Abhängigkeit vom Festigungsbedarf eine Auswahl aus den folgenden Aufgaben 2. und 3. treffen bzw. gegebenenfalls auch ähnliche Aufgaben ergänzen.

1. Bearbeiten Sie ● 7!

2. Ermitteln Sie die 1. Ableitung der folgenden Funktionen!

a) $f(x) = (x - 2)(x^2 - 1)$ b) $f(x) = \frac{3}{x^4} + 2\sqrt{x}$

c) $f(x) = (2x - 5)^3$ d) $f(x) = \sqrt{9x - 1{,}7}$

3. Geben Sie je zwei Stammfunktionen zu folgenden Funktionen an!

a) $f(x) = x^3 - 5x^2 + \frac{1}{3}x$ b) $f(x) = \frac{13}{x^5} + 7\sqrt{x}$

c) $f(x) = \sqrt[5]{x^3}$

Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse durch anschließende Differentiation!

Durch Kommentieren der einzelnen Aufgaben bzw. durch SV werden die Kenntnisse über die Begriffe „Differenzenquotient", „Differentialquotient" bzw. „Ableitung" und „Stammfunktion" reaktiviert.

Motivierung und Zielstellung Die *Motivierung* für die Untersuchungen im Stoffabschnitt 4.2 sollte aus dem Erkennen der Notwendigkeit und Zweckmäßigkeit der Suche nach einem rationellen Verfahren zur Berechnung bestimmter Integrale erwachsen.
LV:

- Bezugnahme auf ■ 1 und 3, Bewußtmachen des hohen Aufwandes beim Berechnen bestimmter Integrale durch Zurückgehen auf die Folgen (s_n) und (S_n);
- Notwendigkeit des Erarbeitens eines rationelleren Verfahrens;
- Mitteilung, daß die Kenntnis einer beliebigen Stammfunktion F der Funktion f in $\langle a; b\rangle$ für die angestrebte rationelle Berechnung von $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ eine wesentliche Rolle spielt;
- *Zielstellung:* Finden eines Zusammenhanges zwischen bestimmtem Integral und Stammfunktion, Erarbeiten eines diesbezüglichen Satzes (notwendige „theoretische Vorarbeit" für das gesuchte Rechenverfahren)

Erarbeitung: Das bestimmte Integral als Funktion der oberen Integrationsgrenze (▷ 4) UG in Anlehnung an die Darstellung im LB:
Die Überlegungen werden zunächst an ■ 1 durchgeführt. Es wurde gefunden:

$$\int\limits_0^b x\,\mathrm{d}x = \frac{b^2}{2} \quad (b \geqq 0).$$

Über die Betrachtung der Tabelle auf LB 245 wird herausgearbeitet: Die Zuordnung zwischen b und $\int\limits_0^b x\,\mathrm{d}x$ (bzw. die Menge der geordneten Paare $\left(\left[b; \int\limits_0^b x\,\mathrm{d}x\right]\right)$ stellt eine Funktion dar, die wir mit Φ bezeichnen:

$\Phi(b) = \int\limits_0^b x\,\mathrm{d}x$ bzw. nach Umbenennung der Variablen mit

$$\Phi(x) = \int\limits_0^x t\,\mathrm{d}t.$$

Der Lehrer teilt mit: In Verallgemeinerung der obigen Überlegungen gilt, daß für eine beliebige in $\langle a; b\rangle$ stetige Funktion f auch die Funktion Φ mit $\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ eine in $\langle a; b\rangle$ stetige Funktion ist (anschauliche Deutung als Flächeninhalt für $f(x) \geqq 0$ in $\langle a; b\rangle$; Bild D 24).

Nun wird nochmals auf das Beispiel $\Phi(x) = \int\limits_0^x t\,\mathrm{d}t = \frac{x^2}{2}$ zurückgegangen, in dem $f(t) = t$ bzw. (wieder nach Umbenennung der Variablen) $f(x) = x$ gilt.

Frage: Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Funktionen Φ mit $\Phi(x) = \frac{x^2}{2}$ und f mit $f(x) = x$?

(ggf. Hinweis auf Aufgabe 3. unter ;„Sicherung des Ausgangsniveaus")
Ergebnis:
(1) Die Ableitung von Φ ergibt f, $\Phi'(x) = f(x)$;
(2) Φ ist eine Stammfunktion von f.
Die Verallgemeinerung führt auf die als ▷ 4 bezeichnete Aussage. Es ist hervorzuheben, daß damit eine Beziehung zwischen bestimmtem Integral und Stammfunktion (↗ Zielstellung) gefunden wurde.
Ergänzend ist zu erläutern, daß die in ▷ 4 genannte Stammfunktion eine Funktion ihrer oberen Grenze ist (↗ Überschrift zur LE).
Die Notwendigkeit eines Beweises der gefundenen Aussage ist bewußtzumachen, der Beweis selbst wird in der folgenden Unterrichtsstunde erarbeitet.

Erarbeitung des Beweises zu ▷ 4 Der auf LB 246ff. ausführlich dargestellte Beweis ist relativ umfangreich und deshalb für die Schüler durchaus nicht einfach zu überschauen. Daher ist zunächst Klarheit darüber zu schaffen, *was* gezeigt werden soll und in welcher **Schrittfolge** wir dabei vorgehen:

- ▷ 4 sagt aus, daß für eine in $\langle a; b\rangle$ stetige Funktion f die Funktion Φ mit $\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$ eine **Stammfunktion** von f in $\langle a; b\rangle$ ist.
- Das bedeutet (Begriff „Stammfunktion"): Für jedes x aus dem Intervall $\langle a; b\rangle$ gilt $\Phi'(x) = f(x)$.
- Es ist also zu zeigen, daß für ein **beliebiges** x aus $\langle a; b\rangle$ gilt $\Phi'(x) = f(x)$.
- Zur Berechnung von $\Phi'(x)$ ist der **Differenzenquotient** der Funktion Φ an der (beliebig gewählten) Stelle x zu bilden und der **Grenzwert dieses Differenzenquotienten** für $h \to 0$ zu berechnen. Das wird erleichtert durch eine **Abschätzung des Differenzenquotienten** nach oben und unten (dabei verwenden wir wieder ▷ B 7, nach dem jede in einem abgeschlossenen Intervall stetige Funktion f dort einen größten und einen kleinsten Funktionswert ($f(\overline{x})$ bzw. $f(\underline{x})$) hat.

Zur Erarbeitung des Beweises selbst werden folgende vier **Varianten** vorgeschlagen (ihre Auswahl ist abhängig vom Leistungsstand der Klasse bzw. von unterrichtsorganisatorischen Bedingungen, z. B. Doppelstunde oder zwei Stunden an verschiedenen Tagen).

- Die Schüler arbeiten schrittweise den Beweis im Lehrbuch durch (Bilden und Umformen des Differenzenquotienten mit Hilfe von ▷ 3, Abschätzen des Differenzenquotienten, Berechnen des Grenzwertes des Differenzenquotienten für $h \to 0$). Nach jedem Schritt wird das Ergebnis von einem Schüler kurz dargestellt bzw. werden auftauchende Fragen geklärt (Schrittfolge an Tafel festhalten, Schüler formulieren jeweils die Teilziele).
- SSA durch den gesamten Beweis (dabei Fragen notieren); anschließend wiederholt ein Schüler die wesentlichen Überlegungen.
- HA mit dem Auftrag, den Beweis bis zur nächsten Unterrichtsstunde durchzuarbeiten und gegebenenfalls Fragen zu notieren. In der folgenden Stunde wird dann der Beweis gemeinsam erörtert (UG, SV, Kommentare).
- LV und Wiederholung wichtiger Gedanken und Schritte durch die Schüler.

Besondere Aufmerksamkeit ist der Umformung des Differenzenquotienten mit Hilfe von ▷ 3 und der anschaulichen Erläuterung der Beziehung (1) (↗ LB 242) beim Abschätzen des Differenzenquotienten zu widmen (von Schülern fordern bzw. wiedergeben lassen).
Zus: Der in den Erkenntnissen der Schüler erzielte Fortschritt wird bewußtgemacht:

- Wir haben für in einem Intervall $\langle a; b\rangle$ stetige Funktionen eine Beziehung zwischen dem bestimmten Integral $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ und einer Stammfunktion von f gefunden (↗ ▷ 1).

- Damit ist auch gesichert, daß jede in $\langle a; b\rangle$ stetige Funktion dort eine Stammfunktion hat (↗ Beweis zu ▷ 4).
- Da das Aufsuchen einer Stammfunktion als Umkehrung der Differentiation aufgefaßt werden kann, ist damit auch eine Beziehung zwischen der Differential- und der Integralrechnung hergestellt.

Einführen des Begriffs „Unbestimmtes Integral" Unter Bezugnahme auf die Kenntnisse aus dem Stoffabschnitt 3.4 (↗ auch Wdh zu Beginn der 1. Stunde dieser LE) werden der Begriff „Unbestimmtes Integral" für die Menge aller Stammfunktionen einer Funktion mitgeteilt[1] sowie das Symbol „$\int f(x)\,dx$" eingeführt und an einem Beispiel erläutert.
Im Vergleich zum Begriff „Bestimmtes Integral" ist herauszustellen:
Das **bestimmte Integral** ist eine **reelle Zahl** (der gemeinsame Grenzwert gewisser Zahlenfolgen).
Das **unbestimmte Integral** ist eine **Menge von Funktionen** (die Menge der Stammfunktionen von f in einem Intervall).

Festigung Die Schüler sollten Aufgaben zum Ermitteln von Stammfunktionen bzw. von unbestimmten Integralen lösen (Benutzen der soeben eingeführten Schreibweise, Überprüfen der Ergebnisse durch Differenzieren; ↗ auch Kontrollaufgaben, die auch als vorbereitende HA zur 1. Stunde der LE 6 eingesetzt werden können).

Kontrollaufgaben

1. Welche Veränderungen am Beweis zu ▷ 4 ergeben sich für $h < 0$?

2. Geben Sie zu folgenden Funktionen jeweils drei Stammfunktionen an!

a) $f(x) = 5x - 7$ **b)** $f(x) = 3x^{-4}$ **c)** $f(x) = \sqrt[3]{x}$

3. Ermitteln Sie die folgenden unbestimmten Integrale!

a) $\int (x^5 - 2x^{-3})\,dx$ **b)** $\int (at^2 + 2t - \sqrt{b})\,dt$

4. Die folgenden Funktionen Φ sind jeweils eine Stammfunktion einer Funktion f. Ermitteln Sie f!

a) $\Phi(x) = 5x^2 + 7$ **b)** $\Phi(x) = 3\sqrt{2x}$

Lerneinheit 6 **(2 Std.)**
Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung; Berechnung bestimmter Integrale

LB 249 bis 252

Es wird ▷ 5 erarbeitet (er bildet den eigentlichen Schwerpunkt dieses Stoffabschnitts, ▷ 4 ist dagegen nur als „Durchgangswissen" zu betrachten) und zum Berechnen bestimmter Integrale angewendet. Die Erörterung der Bedeutung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung soll die mathematische Bildung der Schüler bereichern und ihr Verständnis für mathematische Arbeitsweisen vertiefen (Streben nach Verallgemeinerung, Suchen nach Gesetzmäßigkeiten und Zusammenhängen).

[1] Zu den damit verbundenen Problemen ↗ [12], S. 146f.

Ziele

Die Schüler

- verstehen die Herleitung von ▷ 5 und können sie wiedergeben,
- können Inhalt und Bedeutung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung erläutern,
- erwerben Fähigkeiten im Berechnen bestimmter Integrale mit Hilfe des Hauptsatzes.

Schwerpunkte

1. Stunde

- Sicherung des Ausgangsniveaus: Übungen im Ermitteln von Stammfunktionen gegebener rationaler und Wurzelfunktionen, Berechnen der Ableitung solcher Funktionen
- Motivierung und Zielstellung
- Erarbeiten der Herleitung von ▷ 5 (▷ C 11; ▷ 4; ■ 5 bis 8)
- Einführen der Bezeichnung „Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung", Erläutern seiner Bedeutung

2. Stunde

- Übungen im Berechnen bestimmter Integrale nach ▷ 5
- Erarbeiten der Regeln

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \text{ und}$$

$$\int_a^b k \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = k \cdot \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad (k \in P;\ k \neq 0) \qquad \text{(LB 250)}$$

- Zusammenfassung

Methodische Hinweise

Sicherung des Ausgangsniveaus Die Schüler lösen Aufgaben zum Ermitteln von Stammfunktionen gegebener rationaler und Wurzelfunktionen bzw. berechnen die Ableitung solcher Funktionen (Beispiele ↗ Kontrollaufgaben zur LE 5).
Diese Übung kann auch für eine Kurzkontrolle eingesetzt werden, oder die Aufgaben können als vorbereitende HA zu dieser Unterrichtsstunde gestellt werden, die dann mit deren Kontrolle und Auswertung beginnt, was u. U. Zeit einsparen hilft (↗ Hinweis zu Kontrollaufgaben der LE 5).

Motivierung und Zielstellung In Anknüpfung an das Ergebnis der vorangegangenen Unterrichtsstunde (▷ 4 wird wiederholt) ergibt sich die *Motivierung* durch die Feststellung: Das eigentliche Ziel, ein rationelles Verfahren zum Berechnen bestimmter Integrale zu erarbeiten, ist noch nicht erreicht.

Als *Ziel* dieser Stunde wird also formuliert: Es ist zu zeigen, wie mit Hilfe einer beliebigen Stammfunktion F der Funktion f das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ leicht berechnet werden kann (Erarbeiten eines Satzes).

Erarbeitung der Herleitung von ▷ 5 Vor dem Erarbeiten der Herleitung von ▷ 5 ist es zweckmäßig, unter Bezugnahme auf die zur Sicherung des Ausgangsniveaus empfohlenen Übungen nochmals folgende Fakten bewußtzumachen, etwa im UG:

- Die Funktion Φ mit $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ ist eine **Stammfunktion** von f in $\langle a; b\rangle$ (nach ▷ 4).
- Das bestimmte Integral ist eine **reelle Zahl.** Die reelle Zahl $\int_a^b f(x)\,dx$ ist der Funktionswert von Φ an der Stelle b, das heißt, es ist $\int_a^b f(t)\,dt = \Phi(b)$.
- Zu einer Funktion f gibt es nicht nur *eine*, sondern **unendlich viele** Stammfunktionen, die sich um eine **additive Konstante** unterscheiden (↗ ▷ C 11).
  Ist F eine weitere solche Stammfunktion (neben Φ) von f, so gilt $\Phi(x) = F(x) + c$.

▷ 5, Herleitung

Voraussetzungen: f stetig in $\langle a; b\rangle$;
F sei eine (beliebige) Stammfunktion von f in $\langle a; b\rangle$.

1. Φ mit $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ ist ebenfalls Stammfunktion von f in $\langle a; b\rangle$ (▷ 4).
   Dann gibt es ein c mit $\Phi(x) = F(x) + c$ für alle x aus $\langle a; b\rangle$.
2. $\Phi(b) = \int_a^b f(t)\,dt$
3. $\Phi(b) = F(b) + c$ (▷ C 11)

---

4. Ermitteln von c:

$$\Phi(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0 \text{ (Festlegung (2) in LE 4)}$$

$$\Phi(a) = F(a) + c$$

$$F(a) + c = 0$$

$$c = -F(a)$$

5. $\Phi(b) = \int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$

   bzw. (nach Umbenennung der Variablen):

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)}$$

– Das bestimmte Integral hängt außer von f nur von den Integrationsgrenzen a und b ab. Speziell gilt (für $a = b$) $\int_a^a f(t)\,dt = 0$ (↗ LB 242, Festlegung (2)).

Es folgt nunmehr
SSA am Text auf LB 249f., einschließlich ■ 5, zum Erarbeiten der Herleitung.
Anschließend wird die Herleitung wiedergegeben durch SV an der Tafel (↗ die Tafelbilder auf UH 215) oder UG oder Bearbeitung eines Lückentextes (AB, FO für Lichtschreiber schrittweise abdecken).
Die Beziehung 5. (↗ Tafelbild) ist von den Schülern inhaltlich zu interpretieren beziehungsweise die entsprechende Handlungsvorschrift zu formulieren:

Das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ berechnen wir, indem wir

1. irgendeine Stammfunktion F von f ermitteln,
2. die Funktionswerte von F für die Integrationsgrenzen a und b berechnen: $F(a)$, $F(b)$,
3. die Differenz $F(b) - F(a)$ berechnen.

Anhand von ■ 6 bis 8 wird die gefundene Berechnungsvorschrift sofort verdeutlicht. Die Schüler werden ohne weiteres den großen Vorteil erkennen, den ▷ 5 für das praktische Berechnen bestimmter Integrale bietet.

Festigung und Einführung von „Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung" Die Schüler bearbeiten eine Auswahl aus LBA 1 und 2. Dabei ist auf konsequente Einhaltung der Schreibweise zu achten (↗ ■ 6 bis 8).
Dann wird die Bezeichnung „Hauptsatz" eingeführt, die Bedeutung dieses Satzes wird erläutert[1].
Da schon die Wahl dieser Bezeichnung die besondere Bedeutung dieses Satzes zum Ausdruck bringt, werden die Schüler aufgefordert, aus ihrer Sicht diese Bedeutung zu erläutern. Der Lehrer faßt zusammen und ergänzt gegebenenfalls (↗ LB 251, Text nach ■ 9).

Übungen im Berechnen bestimmter Integrale nach ▷ 5 Nach Kontrolle und Auswertung der HA und Wdh von ▷ 5 erfolgt SSA an einer Auswahl aus LBA 3 bis 6.
Dabei ist auf die unterschiedliche Wahl der Integrationsvariablen zu achten. Bekannte Regeln für das Ermitteln von Stammfunktionen sind durch die Schüler zu wiederholen und anzuwenden. Die Schüler sollten auch, zumindest für einzelne Fälle, prüfen bzw. begründen, ob die Bedingungen gemäß ▷ 1 bzw. ▷ 2 für die Funktionen im Integrationsintervall erfüllt sind. Zu beachten ist ferner, daß die LBA 7 und 8 in Beziehung zu ▷ 3 stehen.

Erarbeiten der Regeln (a) und (b) (↗ LB 250) Dabei kann an vorher berechnete Integrale angeknüpft und mit ■ 9 verglichen werden. Beim Lösen von LBA 9* kann der Beweis zu Regel (a) von einem leistungsstarken Schüler vorbereitet und dann vorgetragen werden. Der Beweis zu Regel (b) wird vom LP ebenfalls nicht gefordert, er kann jedoch interessierten, leistungsstarken Schülern empfohlen werden. Die Bedeutung dieser Regeln sollte bewußtgemacht werden; z. B. wird Regel (a) im Stoffabschnitt 4.3 beim Berechnen des Inhalts von Flächen, die von den Graphen zweier Funktionen eingeschlossen sind, von „rechts nach links" benutzt.

Zusammenfassung Ein Schüler erläutert nochmals Inhalt und Bedeutung des Hauptsatzes (↗ Kontrollaufgaben). Die Begriffe „Bestimmtes Integral", „Unbestimmtes Integral" und „Stammfunktion" werden wiederholt.

[1] Diese Betrachtungen können auch in der 2. Std. im Anschluß an die Auswertung der HA und die Wdh von ▷ 5 erfolgen.

Hausaufgaben Aufgaben folgender Art sollen vor allem die Behandlung der LE 7 inhaltlich vorbereiten.

1. Ermitteln Sie die 1. Ableitung der Funktion
   $f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{(5x+3)^3}$!
2. Geben Sie eine Stammfunktion $F(x)$ der Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ an (Probe durch Differenzieren von $F(x)$)!
3. Versuchen Sie, folgende Integrale zu berechnen!

   a) $\int_0^3 \left(x^2 - \frac{1}{2}x + 6\right) dx$ b) $\int_1^3 (9x+7)^2\, dx$

   c) $\int_0^3 \sqrt{5x+3}\, dx$

> *Kontrollaufgaben*
> 1. Erläutern Sie Inhalt und Bedeutung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung!
> 2. Kennzeichnen Sie die Schritte bei der Herleitung des Hauptsatzes!

Lerneinheit 7 (2 Std.)
Berechnung von Integralen verketteter Funktionen

LB 252 bis 254

Ziele

> Die Schüler
> - kennen das Verfahren der Integration durch lineare Substitution,
> - erwerben erste Fertigkeiten im Berechnen bestimmter Integrale verketteter Funktionen, die sie dann beim Lösen der im Stoffabschnitt 4.3 zu behandelnden Aufgaben zur Flächeninhaltsberechnung mit Erfolg einsetzen können.

Schwerpunkte

> *1. Stunde*
> - Sicherung des Ausgangsniveaus durch Auswerten der HA (Übungen im Ermitteln der 1. Ableitung gegebener Funktionen, im Aufsuchen von Stammfunktionen und

im Berechnen bestimmter Integrale)
- Motivierung und Zielstellung
- Erarbeitung des Verfahrens der Integration durch lineare Substitution (■ 10; LB 253)

2. Stunde

- Festigung: Berechnen bestimmter Integrale mit Hilfe des Hauptsatzes
- Anwenden des Verfahrens der Integration durch lineare Substitution

Methodische Hinweise

Sicherung des Ausgangsniveaus durch Auswertung der vorbereitenden HA Die Schüler kommentieren ihre Arbeit beim Lösen der HA und wiederholen dabei den Begriff „Verkettung von Funktionen" und das Verfahren der Differentiation verketteter Funktionen (Kettenregel; ↗ LB 168ff.).

Motivierung und Zielstellung Für die Differentiation verketteter Funktionen steht eine besondere Regel (Kettenregel) zur Verfügung.
Für die Integration verketteter Funktionen (↗ die oben ausgewerteten Aufgaben 3b) und c)) kennen wir ein entsprechendes Verfahren bisher nicht. Während Aufgabe 3b) mit Hilfe der binomischen Formel gelöst werden kann, besteht ein ähnlicher „Ausweg" für Aufgabe 3c) nicht.
Zielstellung: Wir wollen eine Regel für die Integration verketteter Funktionen, deren „innere Funktion" jeweils eine lineare Funktion ist, erarbeiten.

Erarbeitung des Verfahrens der Integration durch lineare Substitution UG, in dem folgende Vorüberlegungen angestellt werden:

- Zum Berechnen des bestimmten Integrals einer Funktion f mit Hilfe des Hauptsatzes benötigen wir eine (beliebige) Stammfunktion F von f.
- Das eigentliche Problem besteht also darin, zu einer Funktion (in Klasse 11 Potenz- bzw. Wurzelfunktionen), die mit einer linearen Funktion verkettet ist, eine Stammfunktion zu ermitteln.
- Da das Aufsuchen einer Stammfunktion die Umkehroperation zum Differenzieren ist, könnten die vorhandenen Kenntnisse über das Differenzieren verketteter Funktionen beim Lösen des Problems von Nutzen sein.

SSA am ■ 10 (↗ auch Aufgabe 3c) von oben; Hinweis auf Verwendung der Ergebnisse der Aufgabe 1 und 2) bis einschließlich der Formel vor ■ 11.
Ein Schüler wiederholt anschließend die wesentlichen Überlegungen, auftretende Fragen werden geklärt. Analog lösen die Schüler nun mit Hilfe des AB 2 [1] (UH 219) die Aufgabe 3b).

[1] Siehe Fußnote zu AB 1 auf UH 201.

$$\int_1^3 (9x+7)^2\,dx$$

– $g(x) = \boxed{(9x+7)^2}$

– g ist die Verkettung der Funktion $f(z) = \boxed{z^2}$ mit der $\boxed{\text{linearen}}$ Funktion $z(x) = \boxed{9x+7}$.

– $F(z) = \boxed{\frac{1}{3}z^3}$ ist eine Stammfunktion zu $f(z) = \boxed{z^2}$.

– Einsetzen von $z = \boxed{9x+7}$ in $F(z)$ liefert $F(z(x)) = \boxed{\frac{1}{3}(9x+7)^3}$.

– Ableitung von F nach x ergibt

$$F'(z)\cdot z'(x) = \boxed{\frac{3}{3}(9x+7)^2\cdot 9 = 9(9x+7)^2 = 9\cdot g(x)}\ \text{[Kettenregel]}$$

– $\boxed{\frac{1}{9}}\,F'(z)\cdot z'(x) = \boxed{(9x+7)^2} = g(x)$

– Übergang zu den Stammfunktionen (konstanter Faktor bleibt erhalten):

$$\boxed{\frac{1}{9}}\,F(z(x)) = \boxed{\frac{1}{27}(9x+7)^3} = G(x)$$

Probe: $\boxed{\left(\frac{1}{27}(9x+7)^3\right)' = \frac{3}{27}(9x+7)^2\cdot 9 = (9x+7)^2}$

– Damit erhalten wir:

$$\int_1^3 (9x+7)^2\,dx = \boxed{\left[\frac{1}{27}(9x+7)^3\right]_1^{-3}} = \boxed{1304}.$$

Erstfestigung durch SSA an LBA 1a) und b)

Hausaufgaben LBA 2a), 4a); Durcharbeiten von ■ 11; Lösen von ● 10 (evtl. als SV gezielt an einzelne Schüler vergeben)

Übungen im Berechnen bestimmter Integrale mit Hilfe des Hauptsatzes unter Einbeziehung der Integration durch lineare Substitution Die zu lösenden Aufgaben sollten keineswegs nur solche Fälle enthalten, bei denen Integration durch lineare Substitution anzuwenden ist.
Nach Kontrolle der HA und (gegebenenfalls) dem SV zu ● 10 erfolgt SSA an LBA 1c), 2b) und c), 4c), 3b).
Die Schüler sollten sich dabei vor allem die Vorgehensweise, also die inhaltliche Aussage der Gleichung

$$\int_{x_1}^{x_2} f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{a}F(ax+b)\right]_{x_1}^{x_2}$$

aneignen und deshalb beim Vergleichen der Ergebnisse etwa wie folgt kommentieren:

- $f(ax+b)$ ist eine **verkettete** Funktion; wobei die innere Funktion eine **lineare** Funktion $z(x) = ax + b$ ist.
- Wir setzen (substituieren) $z = ax + b$ und erhalten $f(z)$.
- Wir ermitteln eine **Stammfunktion** $F(z)$ von $f(z)$ und ersetzen wieder z durch $ax + b$: $F(z(x)) = F(ax+b)$.
- Wir dividieren $F(ax+b)$ durch a und erhalten damit die **gesuchte Stammfunktion** G zu $f(ax+b)$:
  $G(x) = \frac{1}{a}F(ax+b).$
- Das **bestimmte Integral** berechnen wir dann mit Hilfe des Hauptsatzes:
  $$\int_{x_1}^{x_2} f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{a}F(ax+b)\right]_{x_1}^{x_2}.$$

Die Schüler sollten zunächst die einzelnen Schritte beim Lösen von Aufgaben ausführlich schriftlich fixieren, mit fortschreitender Fähigkeitsentwicklung jedoch die Niederschrift verkürzen.

Beispiel:

Ausführliche Form:

$$\int_0^5 (4x+5)^2\,\mathrm{d}x$$

$$f(z) = z^2; \qquad z = 4x + 5$$

$$F(z) = \frac{1}{3}z^3; \qquad F(ax+b) = \frac{1}{3}(4x+5)^3$$

$$\frac{1}{a}F(ax+b) = \frac{1}{12}(4x+5)^3$$

$$\int_0^5 (4x+5)^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{12}(4x+5)^3\right]_0^5 \approx 1291{,}7$$

Kurzform:

$$\int_0^5 (4x + 5)^2\,dx = \left[\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}(4x + 5)^3\right]_0^5 = \left[\frac{1}{12}(4x + 5)^3\right]_0^5 \approx 1291{,}7$$

Im zweiten Teil der Stunde sollte ein Wechsel der Aufgabentypen (z. B. mit LBA 2a), 1f), 1b), 2f) aus „Übungen und Anwendungen") stattfinden; dabei sollten Aufgaben wie $\int_{x_1}^{x_2} (ax^2 + bx + c)^2\,dx$ einbezogen werden.

Durch das Beschreiten unterschiedlicher Lösungswege sollte die „Reichweite" der Verfahren bewußtgemacht werden.

Die Schüler sollten auch stets vor jeder bestimmten Integration prüfen, ob die betreffende Funktion im Integrationsintervall überall definiert ist. Anlaß dazu können Aufgaben geben, bei denen der Integrand nicht im gesamten Integrationsintervall definiert ist, z. B.

$$\int_1^5 \sqrt{2x - 5}\,dx, \qquad \int_{-3}^2 \frac{3}{x^3}\,dx, \qquad \int_{-2}^5 \frac{5\,dx}{(2x - 4)^3}.$$

Das „Einstreuen" derartiger Aufgaben soll die Schüler zwingen, stets das Integrationsintervall mit dem Definitionsbereich zu vergleichen, um „blindes" und unkritisches Arbeiten zu vermeiden. Analog sollte auch später bei Flächeninhaltsberechnungen verfahren werden.

Hausaufgaben ● 12 und 13 als inhaltliche Vorbereitung der Behandlung der LE 8; Vorbereitung eines SV (↗ LE 8, Stundenteil „Erarbeitung")

Kontrollaufgaben

Berechnen Sie folgende bestimmte Integrale!

a) $\int_0^5 (4x + 5)^2\,dx$ b) $\int_0^5 (4x + 5)^{-2}\,dx$ c) $\int_0^5 \sqrt{4x + 5}\,dx$

d) $\int_0^5 \frac{1}{\sqrt{4x + 5}}\,dx$ e) $\int_0^5 \sqrt{3x - 4}\,dx$

Stoffabschnitt 4.3 (6 Std.)
Flächeninhaltsberechnungen

Die Schüler wenden nun die erworbenen Kenntnisse aus der Integralrechnung auf die Berechnung von Flächeninhalten nicht allseitig geradlinig begrenzter Punktmengen an. Dabei sind die Fertigkeiten im Ermitteln von Stammfunktionen und im Berechnen bestimmter Integrale weiter auszubilden. Gleichzeitig wird das Wissen und Können der Schüler bezüglich Funktionen (lineare Funktionen, quadratische Funktionen, Potenz- und Wurzelfunktionen) und ihrer Eigenschaften weiter gefestigt (Fertigkeiten im Skizzieren der Graphen). Eine besondere Rolle spielt das Berechnen der Nullstellen von Funktionen bzw. das Ermitteln der Schnittpunkte der Graphen zweier Funktionen (Weiterentwickeln von Fertigkeiten im Lösen von Gleichungen). Enge Beziehungen bestehen auch zum Stoffabschnitt 3.3.

Außer den notwendigen Erweiterungen von ▶ 2 (einzelne Fälle ↗ LP 39f.) wird wesentlich Neues nicht erarbeitet. Auf die Unterscheidung zwischen bestimmtem Integral und Flächeninhalt ist stets zu achten.
Von besonderer Bedeutung sind gerade in diesem Stoffabschnitt das selbständige, aktive, schöpferische Arbeiten der Schüler, das Auseinandersetzen mit Problemen (Erkennen der Probleme, zielstrebiges Suchen nach Lösungswegen unter Anwendung des erworbenen Wissens und Könnens), das eigenständige Reaktivieren der Kenntnisse und das immer bessere Ausbilden der Fähigkeit, sich sprachlich zusammenhängend über bestimmte Fragen zu äußern (Kommentieren, Erarbeiten und Halten von Schülervorträgen).

Lerneinheit 8 (1 Std.[1])
Punktmengen, die oberhalb der x-Achse liegen

LB 255 bis 258

Ziele

Die Schüler

- erwerben die Fähigkeit, Flächeninhalte von Punktmengen (↗ ▶ 1), die oberhalb der x-Achse liegen, zu berechnen,
- erhöhen dabei (und auch in den folgenden Unterrichtsstunden) ihre Fertigkeiten im Durchführen der dazu notwendigen Untersuchungen (Lösen von Gleichungen bzw. Ermitteln von Nullstellen von Funktionen und Skizzieren der Graphen von Funktionen bzw. entsprechender Punktmengen).

Schwerpunkte

- Sicherung des Ausgangsniveaus: Wdh „Nullstellen einer Funktion", „Flächeninhalt einer Punktmenge" (↗ LE C 16 und ▶ 2)
- Motivierung und Zielstellung
- Berechnen des Flächeninhalts von Punktmengen oberhalb der x-Achse (Funktion und Integrationsgrenzen gegeben; Funktion gegeben, Integrationsgrenzen zu ermitteln; Punktmenge mittels Graph gegeben) (■ 12)

Methodische Hinweise

Sicherung des Ausgangsniveaus durch Auswerten der HA Die Schüler kommentieren die Lösungen von ● 12 und 13 und wiederholen die Begriffe „Nullstelle einer Funktion" und „Flächeninhalt einer Punktmenge" (▶ 2) (im Bedarfsfalle SSA an weiteren Aufgaben zum Berechnen von Nullstellen (↗ LE C 16)).

[1] ↗ Variante zu LE 8 und 9 auf UH 226f.

Motivierung und Zielstellung Anknüpfend an die Problematik, den Flächeninhalt nicht allseitig geradlinig begrenzter Punktmengen zu ermitteln, die in LE 1 Motivierung und Zielstellung für die Einführung der Integralrechnung ergab, wird festgestellt, daß die Schüler nunmehr über das erforderliche Wissen und Können verfügen, um dieses Problem lösen zu können.
Anschließend empfiehlt sich, einen Überblick über die zu berücksichtigenden Fälle zu erarbeiten (↗ Zus LB 266ff.).
Als *Ziel* dieser Stunde wird dann die Erarbeitung des Falles (1) angegeben: Berechnen des Flächeninhalts von Punktmengen, die oberhalb der x-Achse liegen.

Erarbeitung: Flächeninhalt von Punktmengen oberhalb der x-Achse LV oder SV (↗ HA in LE 7, 2. Std.) als „Leitorientierung" für die Behandlung der Fälle (1) bis (4) (↗ Zus LB 266ff.) an Hand des folgenden Tafelbildes. (Dieses TB kann auch schon bei der Sicherung des Ausgangsniveaus bzw. erst zu Beginn der Behandlung der LE 9 eingesetzt werden.)

Flächeninhalt A einer Punktmenge Q

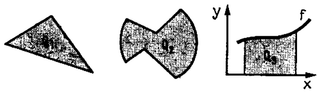
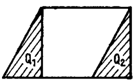


Bild 4.8

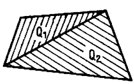
$\boxed{\text{Punktmenge } Q} \longrightarrow \boxed{\text{Flächeninhalt } A \text{ (reelle Zahl)}}$

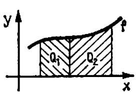
Forderungen an A

(1) $A \geqq 0$

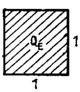


(2) Für $Q_1 \cong Q_2$ gilt $A_1 = A_2$.





(3) Additivität: $A = A_1 + A_2$
$[A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n]$



(4) $Q_E \rightarrow A = 1$

Bild 4.9

Hergestellt wird dann die Beziehung zu ▶ 2 (LB 237): Unter den dort genannten Voraussetzungen gilt $A = \int_a^b f(x)\,dx$.

SSA an LBA 1 schließt sich an.
Beim Auswerten von LBA 1 b) sollten die Schüler erkennen, daß das Verfahren der Flächeninhaltsberechnung mit Hilfe des bestimmten Integrals zum gleichen Ergebnis führt wie die Verwendung der bekannten elementar-geometrischen Formel für den Inhalt einer Trapezfläche, aber mehr leistet, indem es auch denjenigen Punktmengen einen Inhalt zuordnet, für die uns solche Formeln nicht zur Verfügung stehen (↗ LBA 1 a) oder auch Kontrollaufgabe 1).
Es folgt das Durcharbeiten von ■ 12, danach SSA an LBA 3 und evtl. LBA 2. Beim Auswerten nennen und begründen die Schüler ihre Lösungsschritte.

Kontrollaufgaben

1. ● 11, ergänzt um die Forderung, die Flächeninhalte auch mittels der Integralrechnung zu bestimmen (ggf. in Auswahl)
2. LBA 5

Lerneinheit 9 (2 Std.[1])
Punktmengen, die unterhalb der x-Achse liegen

LB 258 bis 261

Ziele

Die Schüler

- erfassen die Notwendigkeit einer Erweiterung von ▶ 2 und kennen und beachten den Unterschied zwischen bestimmtem Integral und Flächeninhalt,
- erwerben erste Fertigkeiten im Berechnen des Flächeninhalts von Punktmengen, die oberhalb oder unterhalb bzw. teils ober-, teils unterhalb der x-Achse liegen, sowie in der Durchführung der dazu gegebenenfalls erforderlichen Untersuchungen (Berechnen der Nullstellen, Skizzieren der Graphen).

Schwerpunkte

1. Stunde

- Wiederholung der Definition des Flächeninhalts (▶ 2)
- Erarbeitung der Berechnung des Flächeninhalts von unterhalb der x-Achse liegenden Punktmengen (▶ 2; ● 14; ■ 14)

[1] ↗ Variante zu LE 8 und 9 auf UH 226f.

– Festigung (Funktion und Integrationsgrenzen gegeben)

2. Stunde

– Berechnung des Flächeninhalts von Punktmengen, die teils ober-, teils unterhalb der x-Achse liegen (■ 16 und 15)

Methodische Hinweise

Wiederholung der Definition des Flächeninhalts Kontrolle der HA; Wdh der ▶ 2 und der Forderungen an den Flächeninhalt einer Punktmenge (↗ TB in LE 8, insbesondere (1) und (2)); SSA an ● 14

Erarbeitung: Flächeninhalt von Punktmengen unterhalb der x-Achse Die Schüler werden unter Orientierung auf das Ergebnis von ● 14 und die Wiederholung (↗ oben) zu Lösungsvorschlägen (mit Begründung) für das im ■ 14 gestellte Problem aufgefordert (LB zunächst nicht benutzen, Aufgabe an Tafel vorgeben). Dabei sind unterschiedliche Vorschläge möglich und im Sinne der schöpferischen Anwendung der Kenntnisse und der Entwicklung der Fähigkeiten im Definieren zu begrüßen, etwa:

$$A = \left| \int_1^4 (x^2 - 5x + 4)\,\mathrm{d}x \right|$$

$$\left.\begin{aligned} A &= \int_1^4 [-(x^2 - 5x + 4)]\,\mathrm{d}x \\ A &= -\int_1^4 (x^2 - 5x + 4)\,\mathrm{d}x \end{aligned}\right\} \nearrow \text{ LE 6, Regel (b) auf LB 250, bzw. LBA 9*}$$

$$A = \int_4^1 (x^2 - 5x + 4)\,\mathrm{d}x \qquad \nearrow \text{ LE 4, Festsetzung (1) auf LB 242}$$

Zusammenfassend arbeiten die Schüler die Lösung von ■ 14 einschließlich der Verallgemeinerung durch. Es ist bewußtzumachen, daß damit ▶ 2 erweitert wurde und im allgemeinen zwischen bestimmtem Integral und Flächeninhalt zu unterscheiden ist.
Die Erarbeitung kann auch ohne vorhergehende Lösungsdiskussion sofort am Lehrbuchtext erfolgen. Der schöpferische Beitrag der Schüler ist dabei allerdings geringer.

Festigung durch Aufgabenlösen (SSA) Die Schüler lösen LBA 1a) bis c) und sollten dabei jeweils zunächst den Graph der Funktion und die Punktmenge skizzieren (möglichst rationelle Verfahren anwenden) und prüfen, ob f überall im Integrationsintervall definiert ist (↗ UH LE 7, 2. Stunde) bzw. ob die Bedingungen der Monotonie oder der Stetigkeit erfüllt sind. Beim Erarbeiten der Lösungen festigen die Schüler ihre Kenntnisse über die charakteristischen Eigenschaften der vorgegebenen Funktionen und ihrer Graphen sowie ihre Fertigkeiten im Berechnen der Flächeninhalte.
Schließlich kommentieren die Schüler ihre Lösungen.

Hausaufgaben Durcharbeiten von ■ 16 (dazu SV für die 2. Std. vergeben); LBA 2a) und 1e)

Erarbeitung: Flächeninhalt von Punktmengen, die teils ober-, teils unterhalb der x-Achse liegen Der Kontrolle der HA folgt als Auswertung ein SV (↗ HA in 1. Std.), ausgehend von

Schlußfolgerungen aus dem Durcharbeiten von ■ 16, etwa: Stets die Existenz von Nullstellen im Integrationsintervall prüfen, gegebenenfalls in Teilintervallen unter Beachtung des Vorzeichens von f integrieren (zur Verdeutlichung kann $\int\limits_{-3}^{1} (2x + 1)\,dx$ berechnet und mit dem Ergebnis von LBA 2a) verglichen werden). Dann wird die Zusammenfassung auf LB 266f. (Fälle (1) bis (3) einschließlich der Beispiele) betrachtet.
Zur Festigung lösen die Schüler LBA 3a) und 2d) (zum Vorgehen ↗ Festigung in der 1. Std.; gegebenenfalls individuelle Hilfen durch den Lehrer oder auch leistungsstärkere Schüler).
■ 15 wird diskutiert (UG).
Die Schüler betrachten Bild D 33 (oder entsprechendes TB bzw. FO), machen Lösungsvorschläge und lesen nach gemeinsamer Ermittlung der Parabelgleichung die Lösung nach.

Hausaufgaben LBA 3b) und 2b); Aufgaben der folgenden Art als vorbereitende HA zur 1. Std. der LE 10, dazu auch Hinweis auf die LE C 16 (ggf. Aushang im Fachunterrichtsraum):
In welchen Punkten schneiden sich die Graphen der Funktionen

a) $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$ und $g(x) = \frac{1}{2}x^2$;

b) $f(x) = -x^2 + 5$ und $g(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2$;

c) $f(x) = x^3 + 1$ und $g(x) = x + 1$;

d) $f(x) = 2\sqrt{x}$ und $g(x) = \frac{1}{3}x$?

Skizzieren Sie jeweils die Graphen der Funktionen!

Variante für die Gestaltung von LE 8 und LE 9 (3 Std.)

LB 255 bis 261

Methodische Hinweise

Sicherung des Ausgangsniveaus/Motivierung und Zielstellung Hierfür sind die Vorschläge für LE 8 von UH 222 zu empfehlen.

Erarbeitung Sie beginnt mit einem LV: Forderungen an den Flächeninhalt einer Punktmenge; dann setzt die SSA an folgenden Aufgaben ein:

1. Berechnen Sie folgende Integrale!
   a) $\int\limits_{0}^{3} x^3\,dx$ b) $\int\limits_{-3}^{0} x^3\,dx$ c) $\int\limits_{-3}^{3} x^3\,dx$
2. Skizzieren Sie den Graph der Funktion $f(x) = x^3$ in $\langle -3; 3\rangle$!
3. Versuchen Sie mit Hilfe der Ergebnisse von Aufgabe 1. und unter Beachtung der Forderungen an den Flächeninhalt einer Punktmenge, die Flächeninhalte der folgenden Punktmengen zu ermitteln!

a) M_1, begrenzt vom Graph der Funktion $f(x) = x^3$, der x-Achse und der Geraden $x = 3$
b) M_2, begrenzt vom Graph der Funktion $f(x) = x^3$, der x-Achse und der Geraden $x = -3$
c) M_3, begrenzt vom Graph der Funktion $f(x) = x^3$, der x-Achse und den Geraden $x = -3$ und $x = 3$

Auswertung: Die für die Berechnung des Flächeninhalts der einzelnen Punktmengen geltenden Beziehungen werden herausgearbeitet und verallgemeinert (↗ Zus LB 266f., Fälle (1) bis (3) einschließlich der Beispiele).

Erstfestigung LBA 1 aus LE 8; LBA 1a) und 2a) aus LE 9

Intensive Festigung Die Schüler bearbeiten LBA 4, 2, 3 aus LE 8; LBA 1b), 2b), 1e) und c), 3a), 2d) aus LE 9.
Ein Teil der 3. Stunde könnte für eine LK mit Hilfe von LBA 1c) und 3b) aus LE 9 (jeweils mit Skizzieren der Graphen bzw. Punktmengen) verwendet werden.

Lerneinheit 10 (2 Std.)
Punktmengen, die von den Graphen zweier Funktionen eingeschlossen werden

LB 261 bis 265

Ziele

Die Schüler
- kennen das Vorgehen beim Berechnen des Flächeninhalts von Punktmengen, die von den Graphen zweier Funktionen eingeschlossen werden,
- erwerben erste Fertigkeiten im Berechnen des Flächeninhalts derartiger Punktmengen,
- festigen ihre Fertigkeiten im Durchführen der dazu erforderlichen Untersuchungen (in der Regel vorheriges Ermitteln der Integrationsgrenzen, d. h. der Abszissen der Schnittpunkte der Graphen, durch Lösen von linearen und quadratischen Gleichungen und solcher, die darauf zurückgeführt werden können; ↗ auch ■ C 41 und LBA 6 bis 8 aus LE C 16).

Schwerpunkte

1. Stunde
- Sicherung des Ausgangsniveaus: Übungen im Berechnen der Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen zweier Funktionen
- Problemstellung

- Erarbeitung des Vorgehens an Beispielen (■ 17 und 18)
- Festigung: Lösen von Aufgaben, die keine Schnittpunkte im Integrationsintervall ergeben

2. Stunde

- Lösen weiterer Aufgaben, auch solcher, die auf Schnittpunkte im Integrationsintervall führen
- Zusammenfassung zu Flächeninhaltsberechnungen (LB 266ff.)

Methodische Hinweise

Sicherung des Ausgangsniveaus Es werden die Lösungen der HA, auch der vorbereitenden HA (↗ 2. Std. der LE 9), kommentiert und verglichen.

Problemstellung Die Schüler betrachten Bild D 34, analysieren die Sachverhalte, machen Lösungsvorschläge und begründen sie.

Erarbeitung des Vorgehens an Beispielen SSA an ■ 17 und 18 mit anschließender Verallgemeinerung; Zusammenfassung durch einen Schüler: Problem, Interpretation der Gleichung $A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$, zu beachtende Bedingungen (↗ Tafelbild auf UH 229); Schlußfolgerungen aus ■ 18

Festigung durch Lösen von Aufgaben (keine Schnittpunkte im Integrationsintervall) SSA an LBA 1a), 2b), 3). Die Schüler sollten dabei stets die Graphen der Funktionen bzw. die Punktmengen skizzieren.

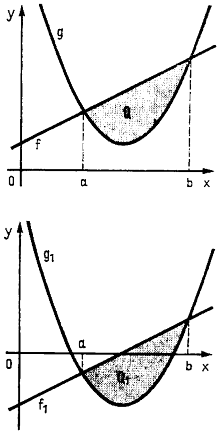
Festigung durch Lösen weiterer Aufgaben (u. a. auch mit Schnittpunkten im Integrationsintervall) Sie beginnt mit SSA an LBA 3d) (einschließlich Skizzieren der Punktmenge) und deren anschließender Auswertung.
Der Wdh der wesentlichen Erkenntnisse der 1. Stunde folgt ein UG zum Erörtern des Falles, daß die Graphen der Funktionen innerhalb des Integrationsintervalls noch einen weiteren Schnittpunkt haben, am Beispiel von LBA 9 aus „Übungen und Anwendungen" in folgenden Schritten:

- Berechnen der Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen von f und g;
- Skizzieren der Graphen bzw. der Punktmenge;
- Erörtern des Sachverhalts unter Berücksichtigung der Lage der Graphen im Integrationsintervall;
- Lösungsansatz;
- Ausführen der Berechnungen des Flächeninhalts.

Zum Vergleich kann evtl. noch $\int_{-1}^{2} (x^3 - x^2 - 2x)\,dx$ berechnet werden.

(*Hinweis:* In weniger leistungsstarken Klassen kann der in der hier vorgeschlagenen LBA 9 vorliegende Fall auch erst im Stoffabschnitt 4.4 erörtert und stattdessen an dieser Stelle LBA 3a) behandelt werden.)
Anschließend folgt: SSA an LBA 4; Zus durch einen SV, der einen kurzen Überblick über die im Stoffabschnitt 4.3 erarbeiteten Kenntnisse gibt: Behandelte Fälle, Berechnen des Flächeninhalts der jeweiligen Punktmengen, Unterscheiden zwischen bestimmtem Integral und Flächeninhalt (↗ Zus auf LB 266ff.).

Flächeninhalt von Punktmengen, die von den Graphen zweier Funktionen eingeschlossen werden



$$\boxed{A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x}$$

$f(x) \geqq g(x)$ für alle x aus $\langle a;\, b\rangle$

Rückführung auf Fall (1) durch Verschieben der Graphen parallel zur y-Achse um c (ggf. vorhandene Nullstellen von f und g in $\langle a;\, b\rangle$ brauchen *nicht* berücksichtigt zu werden).

Bild 4.10

$f(x) = f_1(x) + c$

$g(x) = g_1(x) + c$

$(Q_1 \cong Q)$

Lerneinheit 11 **(1 Std.)**

Physikalische Arbeit

LB 265 bis 266

Ziele

Die Schüler

- vertiefen ihre Kenntnisse über den Begriff der physikalischen Arbeit aus dem Physikunterricht in Anknüpfung an die in LE 1 angeführten Beispiele zu physikalischen Sachverhalten,
- können für einfache Fälle die physikalische Arbeit mittels der Integralrechnung berechnen,
- erkennen, daß die Integralrechnung über den Rahmen der Mathematik hinaus Bedeutung für die Lösung wissenschaftlicher und technischer Probleme hat.

Schwerpunkte

- Motivierung und Zielstellung (Bilder D 1 bis D 4)
- Erarbeitung der Integralschreibweise für die Definition der physikalischen Arbeit bei längs des Weges veränderlicher Kraft (■ 21; ● 16)
- Festigung: Lösen von Aufgaben
- Zusammenfassung zur Integralrechnung; historische Aspekte (LB 266ff.)

Methodische Hinweise

Motivierung und Zielstellung Die Tatsache, daß zahlreiche Zusammenhänge in den Naturwissenschaften (besonders der Physik) und in der Technik auf die Frage nach dem Flächeninhalt von (im allgemeinen nicht allseitig geradlinig begrenzten) Punktmengen zurückgeführt werden können, wurde in LE 1 mit zur Motivierung für die Behandlung der Integralrechnung genutzt. Deshalb sollte an die dort enthaltenen Beispiele (↗ Bilder D 1 bis D 4) angeknüpft werden.
Ausreichendes Wissen und Können stehen nunmehr bereit, um die Bedeutung der Integralrechnung für die Lösung physikalischer Probleme an ausgewählten Beispielen zu zeigen.

Erarbeitung der Integralschreibweise für die physikalische Arbeit Hier ist SSA möglich, da auf Vorkenntnisse (↗ LP Ph, Stoffgebiet 1, „Mechanik I", Stoffabschnitt 1.1) aufgebaut werden kann; dazu zwei Varianten:

- Die Schüler lesen den Lehrbuchtext bis einschließlich ■ 21 und bearbeiten anschließend ● 16. Dabei sollten sie das, was sie für wesentlich halten, schriftlich in übersichtlicher Form festhalten.
  Es folgt ein SV zu den wesentlichen Punkten.
- SV (vorbereitet) in Verbindung mit dem Tafelbild auf UH 231;
  UG zu ■ 21;
  SSA an ● 16

Hinweis: R „Bestimmtes Integral und Flächeninhalt" (↗ UH 195) enthält auch einen Teil „Bestimmtes Integral und physikalische Arbeit", der zur Erarbeitung bzw. Zusammenfassung eingesetzt werden kann.

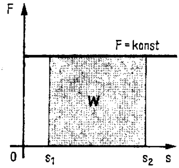
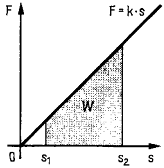
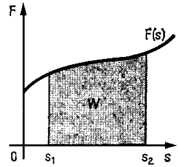
Festigung durch Lösen von Aufgaben Die Schüler lösen LBA 1 und 2 sowie LBA 31 aus „Übungen und Anwendungen".
Der Lehrer weist darauf hin, daß man auch andere physikalische Größen, die sich durch Flächen darstellen lassen, durch bestimmte Integrale erfassen und berechnen kann.

Zusammenfassung zur Integralrechnung Die Arbeit an der Zus auf LB 266ff., durch die sich die Schüler ihrer beim Behandeln des Stoffgebietes 4. erreichten Fortschritte im Wissen und Können bewußt werden sollen, verbindet der Lehrer mit knappen Darlegungen zur historischen Entwicklung der Integralrechnung bzw. der Verfahren zum Berechnen von Flächeninhalten (ARCHIMEDES, CAVALIERI, KEPLER, LEIBNIZ, NEWTON; ↗ [10]).

Kontrollaufgaben zum Stoffabschnitt 4.3

LBA 7, 8a), 10, 11, 12, 15, 27, 33 aus „Übungen und Anwendungen"

Physikalische Arbeit

F längs des Weges *s* konstant	*F* längs des Weges *s* veränderlich	
$F = \text{konst.}$	$F \sim s;\ F = k \cdot s$	$F(s)$ beliebige stetige Funktion in $\langle s_1; s_2 \rangle$
		
$W = F(s_2 - s_1)$	$W = \frac{k}{2}(s_2^2 - s_1^2)$	Nicht elementar berechenbar
$W = \int_{s_1}^{s_2} F(s)\,\mathrm{d}s$		

Stoffabschnitt 4.4 Übungen und Anwendungen

(6 Std.[1])

Zur Zielstellung der Behandlung dieses Stoffabschnitts sei auf die einleitenden Ausführungen zum Stoffabschnitt 1.3 (UH 61) verwiesen.
Die hier zur Verfügung stehenden Unterrichtsstunden sollten für das Lösen komplexer Aufgaben (einschließlich der Wiederholung von Elementen der Differentialrechnung) verwendet werden. Das Ermitteln von Stammfunktionen und Berechnen bestimmter Integrale (↗ LP 40) ist beim Lösen solcher Aufgaben in jedem Falle erforderlich. Dabei können die LBA 1 bis 6 für tägliche Übungen oder individuell für einzelne Schüler, die die entsprechenden Fertigkeiten noch festigen müssen, evtl. durch Arbeiten in Lerngruppen, eingesetzt werden.
Es beinhalten die

- LBA 7 bis 30 jeweils die Berechnung des **Flächeninhalts einer Punktmenge** (Im Zusammenhang damit sind zusätzliche Forderungen gestellt, zum Beispiel das Berechnen von Nullstellen und lokaler Extrempunkte sowie das Skizzieren der Graphen der gegebenen Funktionen bzw. der Punktmengen);
- LBA 31 bis 33 **physikalische Sachverhalte**.

[1] Von den insgesamt 6 Stunden, die lt. LP zur Verfügung stehen, sollten 2 Stunden für eine abschließende Klassenarbeit verwendet werden.

Die LBA 35* bis 39* sind **Aufgaben mit erhöhtem Schwierigkeitsgrad** und daher besonders für differenzierte Aufgabenstellungen geeignet.
Die folgende Übersicht enthält Hinweise zu einigen Aufgaben.

LBA 17	erfordert den Nachweis der Konvergenz einer Folge und das Berechnen ihres Grenzwertes.
18	Zunächst sind die Gleichungen der Parabeln aus den Angaben im Bild D 42 zu ermitteln.
19	führt auf ein bereits von ARCHIMEDES gefundenes Ergebnis. Sie bietet dem Lehrer die Möglichkeit, auf die Bedeutung von ARCHIMEDES im Zusammenhang mit der Quadratur des Parabelsegments als einem historisch wichtigen ersten Schritt zur späteren Infinitesimalrechnung hinzuweisen. Sofern nicht bereits an anderer Stelle geschehen, können hier einige weitere Informationen zur historischen Entwicklung der Integralrechnung und der Flächeninhaltsberechnungen angeschlossen werden.
20	Extremwertproblem
21	Analog zu LBA 18 bzw. LBA 26
22, 25, 28	Problemstellungen aus der Praxis (Technik, Bauwesen), geeignet zum Verdeutlichen der Bedeutung der Integralrechnung in diesen Bereichen
26	Wdh.: 1. Ableitung einer Funktion an einer Stelle als Maß für den Anstieg des Graphen dieser Funktion an dieser Stelle

Beispiel für eine Unterrichtsstunde

Ziele

Die Schüler
- erwerben in zunehmendem Maße Fertigkeiten im selbständigen Lösen komplexer Aufgaben zu Flächeninhaltsberechnungen, indem sie jeweils die Aufgabenstellung analysieren, geeignete Lösungsschritte planen, die Berechnungen ausführen,
- reaktivieren dabei Kenntnisse und Fertigkeiten im Durchführen von Kurvendiskussionen und wenden sie an.

Schwerpunkte

- Tägliche Übung
- Lösen komplexer Aufgaben
- Zusammenfassung und Einschätzung des Unterrichtsergebnisses

Methodische Hinweise

Tägliche Übung In SSA werden die LBA 1f), 5a), 6c) und 4b) gelöst, anschließend die Ergebnisse verglichen. Es folgt eine inhaltliche Wdh zur Definition des Begriffes des bestimmten Integrals $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Lösen komplexer Aufgaben Hier sind zwei Varianten denkbar.

Variante 1

Die Schüler lösen – weitgehend selbständig – die folgenden Aufgaben.

LBA	Hinweise für die Bearbeitung
11	Teilaufgaben a) bis c) in der geforderten Reihenfolge; beim Skizzieren der Parabel (unter b)) besonders auf das richtige Erkennen ihrer Lage und das rationelle Ermitteln ihres Scheitelpunktes achten
12b)	Lösungsschritte: Berechnen der Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen, Skizze, Berechnen des Flächeninhalts; dabei beachten: Rasches Erfassen der Lage der Graphen; Vergleich mit Normalparabel, Symmetrieverhältnisse
19	SV zum Lösungsweg; dazu ergänzend kurzer LV: Dieses Ergebnis fand bereits ARCHIMEDES, die „Quadratur der Parabel“ ist, historisch betrachtet, der erste Schritt zur Entwicklung der späteren Integralrechnung

Variante 2

Die Schüler lösen schrittweise die relativ umfangreiche LBA 13.
Die Planung der Lösungsschritte wird hier durch die vorliegende Gliederung in die Teilaufgaben a) bis e) wesentlich erleichtert. Sie muß sich in einer übersichtlichen Niederschrift beim Lösen widerspiegeln (Kennzeichnen des im jeweiligen Schritt zu Berechnenden; getrenntes Anordnen der Nebenrechnungen auf der rechten Seite des Blattes). Falls erforderlich, sollten die Schüler die benötigten Kenntnisse in selbständiger Arbeit auffrischen, z. B. mit Hilfe der Übersicht auf LB 199 und der Zus auf LB 205f.
Es kann auch in Gruppen gearbeitet werden. Eine Gruppe könnte z. B. die Teilaufgabe a), eine andere die Teilaufgabe b) bearbeiten (hier sind allerdings die Anforderungen etwas geringer). Die Teilaufgaben c) und d) lösen dann wieder alle Schüler gleichermaßen. Auch die Integration (zwei Integrale) unter e) kann in Gruppen erfolgen.
Zwischenkontrollen (Vergleich der Lösungen) sind besonders dann zweckmäßig, wenn bestimmte Resultate für die weitere Rechnung verwendet werden, z. B. die Abszissen der Schnittpunkte von f und g (unter c)) für die Lösung der Teilaufgabe e). Dabei sind die Schüler immer wieder zum Kommentieren und Begründen ihres Vorgehens anzuhalten.
Auf Möglichkeiten rationellen Arbeitens sollte stets besonders geachtet werden. Beispielsweise können die Schüler das lokale Minimum des Graphen von g auch ohne Hilfe der Differentialrechnung ermitteln, indem sie ihre Kenntnisse über Eigenschaften quadratischer Funktionen nutzen:

$$g(x) = 2x^2 + 2x = 2[x^2 + x]$$

$$g(x) = 2\left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right], \text{ und daraus } P_{\min}\left(-\frac{1}{2};\ -\frac{1}{2}\right).$$

Als abschließende Übung kann SSA an LBA 25 folgen.

Zusammenfassung Schüler und Lehrer schätzen die in dieser Unterrichtsstunde erzielten Arbeitsergebnisse und den dabei erreichten Stand in der Entwicklung der Fertigkeiten der Schüler ein. Der Lehrer gibt gezielte Hinweise zu Schwerpunkten der weiteren Festigung.

Hausaufgaben LBA 23 a)

Literatur

Grundsatzdokumente

[G 1] IX. Parteitag der SED, Berlin, 18. bis 22. Mai 1976. Bericht des Zentralkomitees der Sozialistischen Einheitspartei Deutschlands an den IX. Parteitag der SED. Berichterstatter: Genosse Erich Honecker. Dietz Verlag, Berlin 1976

[G 2] IX. Parteitag der SED, Berlin, 18. bis 22. Mai 1976. Programm der Sozialistischen Einheitspartei Deutschlands. Dietz Verlag, Berlin 1976

[G 3] VIII. Pädagogischer Kongreß der Deutschen Demokratischen Republik vom 18. bis 20. Oktober 1978. Protokoll. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1979

[G 4] Gesetz über das einheitliche sozialistische Bildungssystem. Vom 25. Februar 1965. Gesetzblatt der DDR, I, 1965, Nr. 6

[G 5] Lehrplan Mathematik, Klassen 5 bis 10, Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1977

[G 6] Lehrplan Mathematik, Abiturstufe, Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1979

Fachliche, didaktische und methodische Arbeiten

Abkürzungen:

VWV Volk und Wissen Volkseigener Verlag
MSch Zeitschrift „Mathematik in der Schule", VWV, Berlin
Päd Zeitschrift „Pädagogik", VWV, Berlin

Eine Ziffer in Klammern hinter der Angabe der bibliographischen Daten – z. B. (3.) – bedeutet einen speziellen Beitrag für die Gestaltung des betreffenden Stoffgebietes oder -abschnitts. Bei Titeln allgemeineren Charakters fehlt eine solche Angabe.

Bücher

[1] Autorenkollektiv: Mathematik, Lehrbuch für Klasse 11. VWV, Berlin 1980

[2] Autorenkollektiv: Mathematik, Lehrbuch für Klasse 12. VWV, Berlin (erscheint 1981)

[3] Autorenkollektive: Mathematik, Lehrbücher für die Klassen 6 bis 10. VWV, Berlin

[4] Autorenkollektiv: Mathematik in Übersichten. VWV, Berlin 1979

[5] Autorenkollektiv unter Leitung von W. Walsch und K. Weber: Methodik Mathematikunterricht. VWV, Berlin 1975

[6] Autorenkollektiv: Physik in Übersichten. VWV, Berlin 1972

[7] Autorenkollektiv: Tabellen und Formeln. VWV, Berlin 1979

[8] Autorenkollektiv: Wissensspeicher Mathematik. VWV, Berlin 1976

[9] Autorenkollektiv: Wissensspeicher Physik. VWV, Berlin 1974

[10] Biographien bedeutender Mathematiker. Eine Sammlung von Biographien. Erarbeitet von einem Autorenkollektiv, herausgegeben von Prof. Dr. sc. nat. H. Wussing und W. Arnold. 2. Auflage, VWV, Berlin 1978

[11] Bock, H./Walsch, W.: Zum logischen Denken im Mathematikunterricht (Schietrumpf, W./Walsch, W.: Logisches Schließen im Mathematikunterricht). VWV, Berlin 1975

[12] Brehmer, S. und H. Apelt: Analysis II. Differential- und Integralrechnung (Mathematik für Lehrer, Band 5). VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1974 – (3.; 4.)

[13] Erdnijew, P. M.: Übungsformen im Mathematikunterricht. VWV, Berlin 1977

[14] Flachsmeyer, J.: Kombinatorik. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1969 – (1.2)

[15] Fuhrmann, E.: Zum Definieren im Mathematikunterricht. VWV, Berlin 1973

[16] Golowina, L. J./Jaglom, J. M.: Vollständige Induktion in der Geometrie. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1973 – (1.1)

[17] Heitsch, W.: Mathematik und Weltanschauung. Akademie-Verlag, Berlin 1976

[18] Kolosow, A. A.: Kreuz und quer durch die Mathematik. Kap. I: Die Methode der vollständigen Induktion; Kap. II: Folgen und einige spezielle Reihen. VWV, Berlin 1963 – (1.1)

[19] Korowkin, P. P.: Ungleichungen. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1954 – (1.1)

[20] v. KREEK, F.: Über Zahlen und Überzahlen. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1964, S. 83 bis 113
[21] v. MANGOLDT, H./KNOPP, K.: Einführung in die höhere Mathematik, Band 3, 10. Auflage. S. Hirzel Verlag, Leipzig 1957
[22] MARX, S./KRINKE, E./TÜRKE, W.: Elementare Zahlentheorie, Gleichungen und Ungleichungen, Zahlenfolgen und Kombinatorik. VWV, Berlin 1974 – (1.1; 1.2)
[23] PERELMAN, J. I.: Unterhaltsame Algebra, Abschnitt 8.: Folgen. VWV, Berlin 1965 – (1.1)
[24] PETER, R.: Das Spiel mit dem Unendlichen, Kap. II, Abschn. 9 bis 12. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1957
[25] PIETZSCH, G.: Zum Grenzwertproblem. VWV, Berlin 1967 – (2.1; 2.2)
[26] SOMINSKI, J. S.: Die Methode der vollständigen Induktion. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1954 – (1.1)
[27] STRUIK, D. J.: Abriß der Geschichte der Mathematik. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1972
[28] WALSCH, W.: Zum Beweisen im Mathematikunterricht. VWV, Berlin 1972
[29] Zu Erfahrungen und Problemen des Unterrichts in der Abiturstufe. Von einem Autorenkollektiv unter Leitung von L. KLINGBERG (Beiträge zur Pädagogik; 2). VWV, Berlin 1975
[30] Autorenkollektiv: Kleine Enzyklopädie Mathematik. VEB Bibliographisches Institut, Leipzig 1977, S. 427 – (2.1)

Zeitschriftenartikel

[31] BAMBERGER, H.: Einige Bemerkungen zur Behandlung von Extremwertaufgaben im Unterricht der Abiturstufe. MSch Jg. 13 (1975), H. 10, S. 573 – (3.3)
[32] BEHRENS, G.: Vollständige Induktion in der 9. Klasse? Bericht über einen Versuch. MSch Jg. 3 (1965), H. 4, S. 285 – (1.1)
[33] BOCK, H./KRAUSE, R.: Aufgabenkomplexe für die Behandlung des Grenzwertes von Zahlenfolgen in Klasse 11. MSch Jg. 16 (1978), H. 5, S. 264 – (2.1)
[34] Hinweise des Ministeriums für Volksbildung zur Arbeit mit dem überarbeiteten Lehrplan Mathematik der Abiturstufe. MSch Jg. 17 (1979), H. 9, S. 496
[35] HIPPLER, J.: Zwei Filme für den Mathematikunterricht. MSch Jg. 16 (1978), H. 11, S. 628
[36] LEMKE, H./STOYE, W.: Zur Behandlung des bestimmten Integrals in der Abiturstufe. Wissenschaftliche Zeitschrift der Humboldt-Universität zu Berlin. Math.-Nat. Reihe XXVII (1978), Heft 6 – (4)
[37] LORENZ, G.: Ermittlung eines Bildungsgesetzes für endliche Zahlenfolgen. MSch Jg. 4 (1966), H. 9, S. 666 – (1.1)
[38] LORENZ, G./PIETZSCH, G.: Hinweise zum Stoffgebiet „1. Zahlenfolgen; das Beweisverfahren der vollständigen Induktion; Kombinatorik“ im überarbeiteten Lehrplan der Abiturstufe, Klasse 11 (Teile 1 und 2). MSch Jg. 18 (1980), H. 4, S. 204, H. 5, S. 269 – (1.)
[39] MAHN, G.: Einige Möglichkeiten zur Entwicklung von Fähigkeiten und Fertigkeiten in der Abiturstufe. MSch Jg. 13 (1975), H. 5/6, S. 319
[40] PAUL, S.: Mathematik und objektive Realität – Kritik idealistischer Auffassungen. MSch Jg. 1 (1980), H. 5, S. 246
[41] SUCHORUKOW, W. J.: Lösungsverfahren für Aufgaben zur Teilbarkeit von Zahlen. MSch Jg. 9 (1971), H. 4, S. 279
[42] TÜRKE, W.: Kombinatorik in einer mathematischen Arbeitsgemeinschaft. Msch Jg. 13 (1975), H. 9, S. 524 (Teil 1); Jg. 16 (1978), H. 7/8, S. 420 (Teil 2); Jg. 16 (1978), H. 12, S. 680 (Teil 3) – (1.2)
[43] VOCKENBERG, H.: Zur Einführung überarbeiteter Lehrpläne im Fach Mathematik der Abiturstufe. MSch Jg. 18 (1980), H. 2/3, S. 108
[44] VOGT, A.: Die Begründung der Differential- und Integralrechnung durch Isaac Newton und Gottfried Wilhelm Leibniz. MSch Jg. 16 (1978), H. 2/3, S. 65 – (3.; 4.)
[45] WALSCH, W.: Können vierzehnjährige Schüler die vollständige Induktion verstehen? MSch Jg. 3 (1965), H. 6, S. 427 – (1.1)
[46] ZEITZ, G.: Über einen Unterrichtsversuch zur Behandlung von Zahlenfolgen in einer Vorbereitungsklasse 9. MSch Jg. 8 (1970), H. 4, S. 279 – (1.1)
[47] Zur Führung des Unterrichts in der Abiturstufe. Päd Beiheft 2/1978

Abkürzungen und Zeichen

AB	Arbeitsblatt
F	Film
FO	Folie
FOs	Foliensatz
Fst	Festigung
HA	Hausaufgaben
Kls	Klassensatz
LB	Lehrbuch (z. B. LB 15 bedeutet: Lehrbuch Seite 15)
LBA	Lehrbuchaufgabe
LE	Lerneinheit
LK	Leistungskontrolle
LP	Lehrplan (z. B. LP 30 bedeutet: Lehrplan Seite 30)
LV	Lehrervortrag
Ma	Mathematik
mB	mit Beweis
oB	ohne Beweis
Ph	Physik
R	Lichtbildreihe
SSA	Selbständige Schülerarbeit
Stabü	Staatsbürgerkunde
SV	Schülervortrag
TB	Tafelbild
TF	Tonfilm
TR	Tonbildreihe, Ton-Diafilm
TuF	Tabellen und Formeln (Tafelwerk)
UH	Unterrichtshilfen (z. B. UH 25 bedeutet: Unterrichtshilfen Seite 25)
UG	Unterrichtsgespräch
Übg	Übung
Wdh	Wiederholung
Zus	Zusammenfassung

▶	Definition	im Lehrbuch
▷	Satz	im Lehrbuch
●	Auftrag	im Lehrbuch
■	Beispiel	im Lehrbuch
↗	siehe	