Mathematik

Klasse 9

Unterrichtshilfen

Unterrichtshilfen Mathematik, Klasse 9

Autoren: Oskar Mader, Rudolf Fritz, Dietrich Kind,
Jochen Kreusch, Ernst Zoll

7. Auflage

Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
1980

Verfaßt von einem Autorenkollektiv unter der Leitung von Prof.Dr.Oskar Mader

Autoren: Prof. Dr. Oskar Mader – Vorwort und Allgemeine Bemerkungen
Dr. Dietrich Kind – Kapitel 1.1, 1.2 und 5
Ernst Zoll – Kapitel 1.3 und 2
Oberlehrer Rudolf Fritz – Kapitel 3
Oberlehrer Jochen Kreusch – Kapitel 4

Redaktion: Heinz Junge

7. Auflage
Lizenz Nr. 203. 1000/79 (DN 00 21 38-7)
LSV 0645
Zeichnungen: Jutta Wolff
Einband und typographische Gestaltung: Atelier vwv
Printed in the German Demokratic Republic
Gesamtherstellung: Graphischer Großbetrieb INTERDRUCK Leipzig–III/18/97
Schrift: 9-10 Times Antiqua
Redaktionsschluß: 18. Mai 1979
Bestell-Nr. 706 069 2
DDR 5,25 M

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Mit der vorliegenden Schrift wird die Reihe der Unterrichtshilfen für die zehnklassige allgemeinbildende polytechnische Oberschule, Fach Mathematik, fortgesetzt. Ihre Aufgabe besteht – wie bei jeder Unterrichtshilfe – vor allem darin, Hinweise für die Verwirklichung der Bildungs- und Erziehungsziele des Fachunterrichts nach den gegenwärtig gültigen Lehrplänen [G 9] [G 10] zu unterstützen, entsprechend den Forderungen des IX. Parteitages der SED [G 1] [G 2] und den Ergebnissen des VIII. Pädagogischen Kongresses der DDR [G 3]. Das betrifft sowohl die Planung der Bildungs- und Erziehungsarbeit als auch die didaktisch-methodische Gestaltung des Unterrichts.

Aus dieser allgemeinen Aufgabe einer Unterrichtshilfe leitet sich ab, daß die Hinweise zur Gestaltung des Unterrichts in den Stoffgebieten und Stoffeinheiten – wie auch in den anderen Unterrichtshilfen – den Hauptteil der Ausführungen bilden müssen, ergänzt durch eine kurzgefaßte Darstellung wesentlicher theoretischer und ideologischer Grundpositionen der sozialistischen Bildungs- und Erziehungskonzeption, die ihren Ausdruck im gegenwärtig gültigen Lehrplanwerk und in zentralen Publikationen, vor allem im Buch „Allgemeinbildung – Lehrplanwerk – Unterricht“ [2] gefunden haben.

Eine weitere Aufgabe einer Unterrichtshilfe ist darin zu sehen, den Lehrer zu einem zweckvollen Studium der staatlichen Dokumente und zur rationellen Nutzung der vorhandenen, in Form von Monographien oder Zeitschriftenartikeln vorliegenden fachmethodischen Literatur anzuregen. Der Gebrauch der Unterrichtshilfen darf keinesfalls ein gründliches Studium des Lehrplans und der anderen staatlichen Dokumente für die Bildungs- und Erziehungsarbeit ersetzen. Das bedingt, daß die Unterrichtshilfen in ihren Abschnitten theoretischen Inhalts den Charakter eines Kommentars oder einer Interpretation bestimmter Ausführungen in den staatlichen Dokumenten tragen und auf Angaben in den Dokumenten verweisen, nicht aber – in der Regel – diese Aussagen wiederholen.

In ihrer Gliederung und in ihrem äußeren Aufbau entspricht die vorliegende Schrift nur zum Teil den Unterrichtshilfen für das Fach Mathematik, Klassen 4 bis 6. Unterschiede ergeben sich besonders in den Abschnitten theoretischen Inhalts und in den Ausführungen zu den einzelnen Stoffgebieten und -einheiten.

Die Darlegungen zu den einzelnen Stoffgebieten des Unterrichts sind so aufgebaut, daß in einem grundsätzlichen Teil („Vorbemerkungen“) auf die spezifischen Ziele des Unterrichts über dieses Stoffgebiet hingewiesen und dabei auch gezeigt wird, welche Leitlinien des Mathematikunterrichts besonderen Bezug zum Stoff und zur methodischen Gestaltung haben.

An diese Ausführungen schließt sich eine Übersicht über den zeitlichen Ablauf des Unterrichts an, die den Zusammenhang zwischen dem Stoff und den wichtigsten didaktischen Funktionen erkennen läßt. Sie gibt in der Spalte „Wiederholung“ Stoff an, der im vorangegangenen Unterricht (vor allem im Unterricht vorangegangener

Klassenstufen) eingeführt wurde und nunmehr zur Vorbereitung auf das Neue ins Gedächtnis der Schüler zurückgerufen werden muß. Die Spalte „Festigung", die der Spalte „Einführung" folgt, nennt jenen Stoff, der unmittelbar im Anschluß an seine Einführung (oder nur wenig später) gründlich und nachhaltig gefestigt werden sollte. Die Übersicht ist nicht als „Stoffverteilungsplan" oder als fertige thematische Planung des Stoffgebietes zu betrachten.
Es wurde von einer Zuordnung allgemeiner oder spezieller Ziele – aber auch der methodischen Formen des Unterrichts sowie der Unterrichtsmittel – zum Stoff abgesehen, denn die Ziele sind in den Vorbemerkungen zu den Stoffgebieten genannt. Der logische Aufbau und die didaktisch-methodische Gestaltung des Unterrichts werden in den Ausführungen zu den einzelnen Stoffeinheiten erörtert, diese Ausführungen sind in Unterrichtseinheiten gegliedert (den Unterrichtseinheiten werden die Lerneinheiten des Lehrbuchs zugeordnet). Zweck der Übersicht ist es, lediglich eine Grundlage, ein „Skelett" für die thematische Planung, die jedem Lehrer selbst obliegt, zu vermitteln. Allgemeine Ausführungen zur Planung des Unterrichts muß sich eine Unterrichtshilfe ebenso versagen wie allgemeine didaktische Hinweise zur Unterrichtsgestaltung; bezüglich der Unterrichtsplanung sei auf die Bücher „Allgemeinbildung – Lehrplanwerk – Unterricht" [2] und „Lehrplanwerk und Unterrichtsgestaltung" [37] sowie auf die Arbeiten von GOMM [18] [19] verwiesen.
Der Aufbau der Schrift bringt mit sich, daß grundsätzliche und allgemeingültige Aussagen, die im Teil „Allgemeine Bemerkungen zum Mathematikunterricht in Klasse 9" oder in den Vorbemerkungen zu den Ausführungen über die Stoffgebiete gemacht werden, im allgemeinen nicht mehr in den Hinweisen zu den Stoffeinheiten und Unterrichtseinheiten wiederkehren. Das gilt z. B. für viele Aussagen zur allgemeinen geistigen Bildung und zur ideologischen Bildung und Erziehung, aber auch für didaktische und methodische Erläuterungen.
Ein Problem bei der Anwendung dieser Schrift ist darin zu sehen, daß eine Unterrichtshilfe allgemein anwendbar sein muß und deshalb auf lokale Besonderheiten nicht eingehen kann, ja von diesen bewußt abzusehen hat. In der vorliegenden Schrift wurde versucht, für den Unterrichtsablauf einen Weg vorzuzeichnen, der allgemein gangbar ist und in der Regel nur geringer lokaler Modifikationen bedarf. Dieser Weg soll auch von Lehrern beschritten werden können, die über eine nur geringe Berufserfahrung verfügen; andererseits soll er auch dem erfahrenen Lehrer als Richtschnur dienen können und zu schöpferischer Initiative anregen. In didaktisch-methodischer Hinsicht lehnt sich dieser Weg eng an die Konzeption des didaktisch gut durchgearbeiteten Lehrbuchs an. In diesem Zusammenhang sei nochmals besonders betont, daß die Ausführungen und Hinweise in einer Unterrichtshilfe Empfehlungen und Ratschläge, nicht aber obligatorische Vorgaben sind.
Die vorliegende Schrift enthält Angaben zu allen Stoffgebieten der Klasse 9. Im Unterschied zu den Unterrichtshilfen für die Klassen 4 bis 6 werden nicht alle Unterrichtsstunden inhaltlich beschrieben oder in Form von Stundenentwürfen dargelegt. Auch muß beachtet werden, daß über die Behandlung einiger Stoffgebiete der Klasse 9 noch keine umfassenden praktischen Erfahrungen vorliegen und deshalb manche Aussagen durch Übertragung von Ergebnissen, die bei der Behandlung anderer, „verwandter" Gebiete erzielt wurden, gewonnen werden mußten.
Abschließend sei noch bemerkt, daß eine Unterrichtshilfe von der Voraussetzung ausgehen muß, daß der Unterricht in den vorangegangenen Klassenstufen das vom Lehrplan geforderte Ziel erreicht hat, es also nicht mehr notwendig ist, mehr als die zum Erfassen des neuen Stoffes erforderlichen, im Lehrplan gekennzeichneten Wiederholungen vorzusehen (oder gar Stoffe aus vorangegangenen Klassenstufen neu

einzuführen). Ebenso kann eine Unterrichtshilfe keine besonderen Hinweise für den Unterrichtsablauf geben, wenn für ein Stoffgebiet aus zwingenden Gründen nicht die vom Lehrplan geforderte Unterrichtszeit zur Verfügung steht. In solchen Fällen sollte geprüft werden, ob bei der Behandlung anderer Stoffgebiete Bildungs- und Erziehungsaufgaben gelöst werden können, die der Lehrplan dem von der Kürzung betroffenen Stoffgebiet zuordnet; das bezieht sich vor allem auf die nicht eng stoffgebundenen übergreifenden Aufgaben und Ziele des Unterrichts. Im übrigen kommt es in solchen Fällen darauf an, sich auf die – in den Ausführungen der Unterrichtshilfe, vor allem in den Vorbemerkungen zu den Stoffgebieten gekennzeichneten – erzieherischen und didaktischen Schwerpunkte zu konzentrieren.

0. Allgemeine Bemerkungen zum Mathematikunterricht in Klasse 9

0.1. Grundgedanken zur Ziel- und Aufgabenstellung

Die Ziele und Aufgaben des Mathematikunterrichts in Klasse 9 leiten sich aus der Zielstellung des Faches Mathematik an der zehnklassigen allgemeinbildenden polytechnischen Oberschule ab, die im Lehrplan 1970 ihren Ausdruck gefunden hat. Sie entsprechen den besonderen Aufgaben und Bedingungen, die – im Rahmen der allgemeinen, von den gesellschaftlichen Anforderungen bestimmten Zielstellung – für die Abschlußklassen der Oberschule gelten (vgl. [G 4]).

Zu diesen besonderen Aufgaben und Bedingungen gehört, daß das **Wissen der Schüler,** aufbauend auf den in den vorangegangenen Klassenstufen erworbenen Kenntnissen und Einsichten, zu einem relativ abgeschlossenen, aber erweiterungs- und ausbaufähigen System integriert wird. Der Stoff der Klassen 9 und 10 ist nicht zuletzt unter diesem Gesichtspunkt ausgewählt worden. Ebenso wird in den Abschlußklassen die **wissenschaftliche Weltanschauung der Schüler**, ihre Auffassung über die Natur, die Gesellschaft und das Denken ergänzt, abgerundet und verallgemeinert. Auf dieser Stufe zeigen die Schüler erfahrungsgemäß ein reges Interesse an philosophischen Fragen; vielfach reift auch erst auf dieser Stufe eine tiefere Einsicht in die gesellschaftliche Rolle einer Wissenschaft.

Vervollkommnet wird auch die **Befähigung der Schüler zum selbständigen Bildungserwerb**, verbunden mit der **Erziehung zu einem positiven, sozialistischen Verhältnis zum Lernen und Arbeiten.**

Die Schüler müssen nach Beendigung des Oberschulbesuchs in der Lage sein, sich auch unter den veränderten Bedingungen der weiterführenden Ausbildung erfolgreich Bildung anzueignen und ihre Lern- und Arbeitskultur ständig zu erhöhen (die Voraussetzungen, die die Schüler aus dem Unterricht der vorangegangenen Klassenstufen mitbringen, sind individuell oft sehr verschieden). Im Zusammenhang damit werden die Schüler zu der Überzeugung geführt, daß ihre Bildung niemals „abgeschlossen“ sein kann, sondern während der ganzen Lebenszeit der Erweiterung und des Ausbaus bedarf.

Beim Unterricht in den Abschlußklassen müssen die **Lebensentscheidungen** der jungen Menschen besonders beachtet werden. In der Regel fällt zu dieser Zeit bereits die definitive Berufswahl oder zumindest eine Entscheidung über die allgemeine Berufsrichtung; es festigen sich die Interessen und Neigungen, auch im Hinblick auf die anderen Lebensbereiche der Gesellschaft. Der Unterricht soll dazu beitragen, daß die Entscheidungen der jungen Menschen mit den gesellschaftlichen Bedürfnissen möglichst gut übereinstimmen, ebenso soll er individuelle Talente, die auf dieser Stufe sich herausbilden oder in Erscheinung treten, erkennen und fördern helfen.

Mit dieser Frage hängt die Notwendigkeit zusammen, im Unterricht der Abschlußklassen das **allgemein Grundlegende eng mit einer differenzierten Tätigkeit der einzelnen Schüler oder Schülergruppen über den obligatorischen Unterricht hinaus zu verbinden** und im Unterricht selbst vielseitigen Anregungen für selbständige wissenschaftliche, technische, politische und kulturelle Tätigkeiten zu geben. Für den Mathematikunterricht bezieht sich das vor allem auf mathematische Spezialgebiete, z. B. im Bereich der digitalen Rechentechnik, der Datenverarbeitung, der Statistik und der Geometrie sowie auf die Anwendungen der Mathematik im Bereich der Technik, der Ökonomie und des Militärwesens (vgl. Seite 38).

In den folgenden Ausführungen zu den Zielen und Aufgaben des Mathematikunterrichts der Klasse 9 wird, entsprechend dem Lehrplan, vor allem auf

- die mathematische Grundlagenbildung,
- die allgemeine geistige Bildung,
- die ideologische Bildung und Erziehung,
- die polytechnische Bildung

eingegangen. Weitere Bildungs- und Erziehungsaufgaben, z. B. die ästhetische Bildung und Erziehung, werden hier nicht näher erörtert, zumal kaum Spezifisches für den Unterricht in Klasse 9 – im Vergleich mit dem Mathematikunterricht insgesamt – ausgesagt werden könnte.

Die mathematische Grundlagenbildung

Bei den Zielen, die der Fachunterricht an den allgemeinbildenden Schulen erreichen muß, unterscheidet die pädagogische Theorie zwischen einem *enger facheigenen* und einem *übergreifenden* (d. h. mehrere oder alle Unterrichtsfächer betreffenden) *Aspekt* (vgl. [27]). Der enger facheigene Aspekt bezieht sich auf das Eindringen in den sachlichen Gegenstand des Unterrichts und auf die Aneignung von Wissen, Können, Bewußtseins- und Verhaltenseigenschaften, die unmittelbar mit diesem Gegenstand zusammenhängen; der übergreifende Aspekt bezieht sich auf den Beitrag des Unterrichts zur Formung der verschiedenen Seiten der Persönlichkeit, wie zur Entwicklung geistiger Fähigkeiten, der Weltanschauung, des moralischen Antlitzes, der emotionalen und charakterlichen Qualitäten sowie des Willens. Diesen Aspekten der Ziele – Ziele sind in der Regel komplex, deshalb ist hier von ihren Aspekten und nicht von besonderen Einzelzielen die Rede – entsprechen die Aufgaben, die der Unterricht zu erfüllen hat; aus diesem Grunde werden auch enger facheigene und übergreifende Aufgaben des Unterrichts unterschieden.
Die wesentlichste enger facheigene Aufgabe des Mathematikunterrichts besteht in der Klasse 9 in einer Erweiterung, Ergänzung, Vertiefung und Abrundung der mathematischen Grundlagenbildung als Vorbereitung für die weitere (allgemeine oder spezielle) Bildung und für die Tätigkeit in den hauptsächlichen Lebensbereichen der sozialistischen Gesellschaft. Eine fundierte und solide mathematische Bildung ist ein notwendiger Teil der sozialistischen Allgemeinbildung; denn die Mathematik findet heute nicht nur in den Naturwissenschaften, der Technik und der Produktion Anwendung, sondern durchdringt immer mehr auch die gesellschaftswissenschaftliche Forschung sowie die verschiedenen Bereiche und Formen der gesellschaftlichen Kommunikation. Gegenwärtig hängen das Tempo der wissenschaftlich-technischen Revolution unter den Bedingungen der entwickelten sozialistischen Gesellschaft, die Effektivitätssteigerung der Volkswirtschaft und der weitere Fortschritt in der wissenschaftlichen Erkenntnis in hohem Maße von der zunehmenden Anwendung mathematischer Methoden und Verfahren ab.
Mathematische Bildung dient aber nicht allein dem Zweck ihrer unmittelbaren Anwendung und Umsetzung in der gesellschaftlichen Praxis, sondern ist gleich-

zeitig ein wesentlicher Faktor der allseitigen Entwicklung sozialistischer Persönlichkeiten, der Formung ihres geistigen Profils und der Bereicherung ihrer Individualität.
In der Klasse 9 wird die mathematische Grundlagenbildung der vorangegangenen Klassenstufen nach den in den Klassen 6 bis 8 angewendeten bzw. im Ansatz erkennbaren Prinzipien systematisch vertieft und erweitert. Die diesbezüglichen Ziele werden vom Lehrplan im Vorwort, Teil „Ziele und Aufgaben“, in allgemeiner Weise gekennzeichnet. Sie betreffen die fünf Stoffgebiete der Klasse 9:

1. Reelle Zahlen; Arbeiten mit Variablen;
2. Ungleichungen und Gleichungssysteme;
3. Potenzen und Potenzfunktionen;
4. Quadratische Funktionen und quadratische Gleichungen;
5. Exponential- und Logarithmusfunktionen; Rechenhilfsmittel.

Weiter konkretisiert werden die Angaben zu den Zielen der mathematischen Grundlagenbildung im Lehrplanteil „Inhalt des Unterrichts“, und zwar in den Vorbemerkungen zu den einzelnen Stoffgebieten (1. bis 5.) und in den Angaben zum Stoff, die nach Stoffeinheiten (1.1. bis 5.2.) unterteilt sind. Aus den Vorbemerkungen zu den Stoffgebieten sind vor allem die Schwerpunkte, aus den Angaben zu den Stoffeinheiten Umfang und Abgrenzungen zu ersehen.
Beim Studium der Lehrpläne sollte beachtet werden, daß sich – aus Zweckmäßigkeitsgründen – eine Darstellungsform entwickelt hat, bei der die Einzel*ziele* des Wissens und des Könnens durch *Stoff*angaben gekennzeichnet werden. Theoretisch gesehen muß zwischen Ziel und Stoff (Inhalt) unterschieden werden; in einem Lehrplan, der sowohl die Ziele als auch den Stoff nennen soll, würde eine Trennung von Ziel- und Stoffangaben zwangsläufig zu Wiederholungen führen. Deshalb wird in den Lehrplänen für die Oberschule auf eine besondere Angabe der genannten Einzelziele neben dem Stoff verzichtet. Da die bloße Nennung eines Stoffes noch nichts über Qualität oder Niveau des zu erreichenden Zieles (d. h. des Wissens oder Könnens, der Überzeugungen und Einstellungen) auszusagen vermag, sind zusätzliche Angaben notwendig. Im Lehrplan für Mathematik geht z. B. die genauere qualitative Bestimmung des Wissens und Könnens einmal aus den Vorbemerkungen zum Stoffgebiet, zum anderen aus einzelnen „didaktischen“ Hinweisen im Rahmen der Stoffangaben (z. B. „Einführung von ...“, „Wiederholen von ...“, „Veranschaulichen von ...“) hervor. Besonders zu beachten ist unter diesem Gesichtspunkt, daß bestimmte Stoffe nur „zur Information“ zu behandeln sind. Im Lehrplan sind solche Stoffe durch Überschrift, Kleindruck und Einzug gekennzeichnet (im Lehrbuch und in diesen Unterrichtshilfen durch Kleindruck mit vorangestelltem Symbol „*“).

Wesentliche Aspekte der mathematischen Grundlagenbildung – und auch der fachspezifischen geistigen Bildung der Schüler – kommen in den **inhaltlichen Leitlinien** zum Ausdruck. Es sind dies hauptsächlich die Leitlinien

– Anwenden der Erkenntnisse der Mengentheorie („Mengen“)
– Arbeiten mit Variablen („Variable“)
– Aufbau und Erweiterung der Zahlenbereiche („Zahlenbereichserweiterungen“)
– Arbeiten mit Gleichungen und Ungleichungen („Gleichungen und Ungleichungen“)
– Anwenden des Prinzips der Abbildung („Abbildungen“).

Nähere Erläuterungen zu diesen Leitlinien (im Hinblick auf die Ziele und den Stoff der Klasse 9) enthält der Lehrplan im Vorwort, Teil „Ziele und Aufgaben“; vgl.

Übersicht über die inhaltlichen Leitlinien des Mathematikunterrichts in Klasse 9

Stoffeinheit	Mengen	Variable
1.1. Wiederholung und Systematisierung	„Menge", „Element von", „Teilmenge von" (Wdhg.) Teilmengenrelationen zwischen den Mengen der natürlichen Zahlen, der gebrochenen Zahlen, der ganzen Zahlen, der rationalen Zahlen Mengendiagramme	
1.2. Reelle Zahlen	Menge der rationalen Zahlen und Menge der irrationalen Zahlen als Teilmengen der Menge der reellen Zahlen	Beschreiben von Mengen mit Hilfe von Variablen
1.3. Arbeiten mit Variablen	Grundbereiche von Variablen	„Variable", „Term", „Grundbereiche von Variablen" (Wdhg.) Umformen von Termen; Umformen von Summen in Produkte Binomische Formeln Quadratische Ergänzung Umformen von Gleichungen Formulieren von Sachverhalten, die in Textform gegeben sind, mit Hilfe von Variablen und umgekehrt Verwenden von Variablen in anderen Wissenschaften (z. Inf.)
2.1. Lineare Ungleichungen	Lösungsmengen von linearen Gleichungen mit einer Variablen (Wdhg.) Lösungsmengen von linearen Ungleichungen mit einer Variablen	Variable als Koeffizienten bei Gleichungen und Ungleichungen Formulieren von Sachverhalten, die in Textform gegeben sind, mit Hilfe von Variablen

Zahlenbereichs-erweiterungen	Gleichungen und Ungleichungen	Abbildungen
Übersicht über die Zahlenbereiche von den natürlichen bis zu den rationalen Zahlen		Zuordnung Zahl – Punkt der Zahlengeraden (Wdhg.) Existenz irrationaler Punkte auf der Zahlengeraden
Bereich der reellen Zahlen Hinweis auf den Bereich der komplexen Zahlen (z. Inf.)		Eindeutige Abbildung der reellen Zahlen auf die Zahlengerade
	Umformen von Gleichungen Isolieren einer der in der Gleichung enthaltenen Variablen	
	„Aussage", „Gleichung", „Ungleichung", „erfüllen", „Lösung", „Lösungsmenge", „einander äquivalente Gleichungen" (Wdhg.) Regeln für das Umformen von Gleichungen (Wdhg.) „Einander äquivalente Ungleichungen", „lineare Ungleichungen" Regeln für das Umformen von Ungleichungen	„Funktion" (Wdhg.) Lineare Funktionen (Wdhg.) „Nullstelle einer Funktion" (Wdhg.) Nullstellen linearer Funktionen (Wdhg.)

Stoffeinheit	Mengen	Variable
2.2. Systeme aus zwei linearen Gleichungen	Lineare Funktionen als Mengen geordneter Zahlenpaare (Wdhg.) Lösungsmengen von linearen Gleichungen mit zwei Variablen als Mengen von Zahlenpaaren (Wdhg.) „Durchschnitt zweier Mengen“ Lösungsmenge eines Gleichungssystems als Durchschnitt von Mengen	Variable als Koeffizienten bei Gleichungen Formulierung von Sachverhalten, die in Textform gegeben sind, mit Hilfe von Variablen
3.1. Potenzen		Variablenbindung (Wdhg.)
3.2. Potenzfunktionen	Grundbegriffe der Mengenlehre (Wdhg.) „Funktion“, „Argument“, „Funktionswert“, „Definitionsbereich“, „Wertebereich“ (Wdhg.)	Grundbereiche von Variablen bei Potenzfunktionen
4.1. Quadratische Funktionen	Mengentheoretische Grundlagen der Lehre von den Funktionen (Wdhg.)	Grundbereiche von Variablen bei quadratischen Funktionen
4.2. Quadratische Gleichungen	Lösungsmengen von Gleichungen (Wdhg.)	Grundbereiche von Variablen bei quadratischen Gleichungen Binomische Formeln, quadratische Ergänzung, Umformen von Summen in Produkte (Wdhg.) Variable als Koeffizienten bei Gleichungen Formulieren von Sachverhalten, die in Textform gegeben sind, mit Hilfe von Variablen

Zahlenbereichs-erweiterungen	Gleichungen und Ungleichungen	Abbildungen
	Systeme aus zwei linearen Gleichungen mit zwei Variablen Lösungsverfahren für Gleichungssysteme Gleichungssysteme mit mehr als zwei Variablen (z. Inf.) Einfache Systeme aus Ungleichungen und aus Gleichungen und Ungleichungen (z. Inf.)	Lineare Funktionen (Wdhg.) Graphen von linearen Funktionen (Wdhg.)
Zahlenbereichserweiterungen bis zum Bereich der reellen Zahlen (Wdhg.)	Ungleichungen zum Kennzeichnen von Intervallen	
		Mehrdeutige, eindeutige, eineindeutige Abbildungen (Whdg.) „Potenzfunktion“ „Rationale Funktion“ Darstellungsarten der Abbildungsvorschrift bei Funktionen „Nichtrationale Funktion“ „Umkehrfunktion“ (z. Inf.) Graphen von Potenzfunktionen
		„Quadratische Funktion“ „Nullstelle einer Funktion“ (Wdhg.) Graphen quadratischer Funktionen
Hinweis auf den Bereich der komplexen Zahlen (z. Inf.)	Verfahren zum Ermitteln von Nullstellen einer Funktion (Wdhg.) „Quadratische Gleichung“ Fallunterscheidungen beim Lösen quadratischer Gleichungen Allgemeine Lösungsformel für quadratische Gleichungen Diskriminantenuntersuchungen Wurzelsatz von Vieta (z. Inf.)	Quadratische Funktionen (Wdhg.) Nullstellen quadratischer Funktionen (Wdhg.)

Stoffeinheit	Mengen	Variable
5.1. Exponential- und Logarithmusfunktionen	Mengentheoretische Grundlagen der Lehre von den Funktionen	Grundbereiche von Variablen bei Exponential- und Logarithmusfunktionen
5.2. Rechenhilfsmittel		Formulieren von Sachverhalten, die in Textform gegeben sind, mit Hilfe von Variablen Umformen von Termen (entsprechend den Erfordernissen des Rechnens mit dem logarithmischen Rechenstab)

Lp 7f[1]). Über die Realisierung der Leitlinien im Unterricht der Klassen 6 bis 8 informiert der Lehrplan für diese Klassen; vgl. [G 8], Seiten 9f. In der beigefügten Tabelle (Uh 12 bis 16) wird skizzenhaft darzustellen versucht, welcher Bezug zwischen den hauptsächlichen inhaltlichen Leitlinien des Mathematikunterrichts der Oberschule und den einzelnen Stoffeinheiten der Klasse 9 besteht.

In den Tabellen auf Uh 12ff und Uh 20ff bedeutet:

Wdhg. – Wiederholung von Stoff aus vorangegangenen Klassenstufen;

z. Inf. – Stoff zur Information, vgl. Uh 11.

[1]) Verweise auf bestimmte Seiten oder Abbildungen dieses Buches bzw. auf andere Unterrichtsmaterialien (Lehrplan, Lehrbuch usw.) sind durch Abkürzungen vermerkt. deren Bedeutung durch die folgenden Beispiele erläutert seien.

Uh 115	– (Diese) Unterrichtshilfen, Seite 115
Bild 85/2	– (Diese) Unterrichtshilfen, Seite 85, Bild 2
Uh 6/10	– Unterrichtshilfen für Klasse 6, Seite 10
Lp 31	– Lehrplan für die Klassen 9 und 10, Seite 31
Lb 50	– Lehrbuch für Klasse 9, Seite 50
Lb 30/Satz A 9	– Lehrbuch für Klasse 9, Seite 30, Satz A 9
Lb 100/30, 31	– Lehrbuch für Klasse 9, Seite 100, Aufgaben 30 und 31

Alle diese Beispiele beziehen sich auf Materialien für das Fach Mathematik.

Zahlenbereichs-erweiterungen	Gleichungen und Ungleichungen	Abbildungen
	Gleichungen höheren Grades, Existenz von Lösungsformeln (z. Inf.) Quadratische Ungleichungen (z. Inf.)	
Reelle Zahlen (Wdhg.)	Ermitteln des Logarithmus einer Zahl a als Lösung der entsprechenden Gleichung $b^x = a$ nach x Einfache Exponentialgleichungen	„Nichtrationale Funktion" (Wdhg.) „Exponentialfunktion" „Logarithmusfunktion" Graphen von Exponential- und Logarithmusfunktionen Logarithmusfunktionen als Umkehrungen von Exponentialfunktionen (z. Inf.)
	Lösen von Gleichungen verschiedener Art	Ermitteln von Funktionswerten mit Hilfe des Rechenstabes, von Tafeln u. ä.

Die allgemeinbildende Funktion des Mathematikunterrichts, die Orientierung auf eine sichere, anwendbare und erweiterungsfähige Grundlagenbildung, drückt sich sowohl in Stoffauswahl und Stoffbegrenzung als auch in Behandlungsweise, Auffassung und Interpretation des Stoffes aus. Im Lehrplan sind diesbezügliche konkrete Hinweise in den Vorbemerkungen zu den einzelnen Stoffgebieten enthalten.
Im Vergleich mit früheren Lehrplänen für die Klasse 9 ist im Lehrplan 1970 vor allem eine Konzentration auf das Mathematisch-Grundlegende erfolgt. Neu aufgenommen wurden lineare Ungleichungen sowie als Prinzip für die Behandlung aller Stoffgebiete gewisse allgemeine Methoden und Verfahren des mathematischen Arbeitens; vgl. Uh 20ff. Demgegenüber wurde auf manches traditionelle Bildungsgut verzichtet, z. B. auf Stoffe aus dem Bereich der Gleichungslehre, aus der Wurzelrechnung und auf das schriftliche logarithmische Rechnen. Daraus zu folgern, daß die Forderung an das Niveau des Mathematikunterrichts gesunken sei, wäre falsch; denn das Niveau des Unterrichts wird nicht allein oder in erster Linie von der Menge des aufzunehmenden oder zu verarbeitenden Stoffes bestimmt, sondern von der Tiefe, der Exaktheit und der Gründlichkeit seiner Behandlung, der wissenschaftlichen Auffassung, der Verbindung und Verflechtung mit anderen Stoffen, nicht zuletzt vom allgemeinen intellektuellen Anspruch an die Schüler. So gesehen, stellt der Lehrplan 1970 sogar wesentlich höhere Niveauforderungen [2] [37].

In diesem Zusammenhang erscheint noch eine Bemerkung angebracht. „Modernität“ des Mathematikunterrichts darf nicht mißverstanden werden, etwa in dem Sinne, als ob nur die neuesten Erkenntnisse wissenschaftlicher Forschung und Lehre unterrichtet werden dürfen. Auch in Zukunft werden im Unterricht der allgemeinbildenden Schule mathematische Erkenntnisse behandelt werden müssen, die schon in einem historisch frühen Stadium der Wissenschaftsentwicklung entstanden sind. Allerdings wird dabei die Betrachtungsweise des Stoffes „modern“ sein und im allgemeinen nicht den historischen Denkweisen folgen. Das betrifft besonders die Einordnung in größere Zusammenhänge und das Verhältnis zu anderen Stoffgebieten. Die moderne Mathematik zeichnet sich – bei ständig fortschreitender Differenzierung – durch eine immer enger werdende Verflechtung der Einzelgebiete und durch die Ausarbeitung allgemeiner, über die Einzelgebiete hinausgreifender Systeme aus. Eine solche Modernisierung des Stoffes ist im Lehrplan auch bei jenen Gebieten vorgesehen, die sich in ihrem sachlichen Inhalt (oder Umfang) nicht wesentlich von früheren Lehrplänen (z. B. den Lehrplänen von 1959, den älteren präzisierten Lehrplänen oder den früher gültigen Lehrplänen für die Vorbereitungsklassen zum Besuch der Erweiterten Oberschule) unterscheiden; vgl. RITTER [53].

Der Beitrag zur allgemeinen geistigen Bildung

Die geistige Bildung, besonders die Entwicklung der geistigen Fähigkeiten der Schüler, ist eine Aufgabe des Mathematikunterrichts, die sowohl eine enger facheigene als auch eine übergreifende Seite hat. Die staatlichen Dokumente für die Bildungs- und Erziehungsarbeit, vor allem das Gesetz über das einheitliche sozialistische Bildungssystem [G 4], weisen nachdrücklich auf die große Bedeutung der Mathematik als Quelle geistiger Disponibilität hin.
Die speziellen, unmittelbar fachbezogenen Fähigkeiten, die im Unterricht der Klasse 9 zu entwickeln sind, betreffen besonders die Anwendung von Denkweisen, Arbeitsverfahren, Methoden und Operationsvorschriften; solche Vorschriften werden zu einem Teil auch in algorithmischer Form gegeben.
Auch für diesen Bereich der speziellen unmittelbar fachbezogenen geistigen Bildung gelten Leitlinien, die im folgenden als **Leitlinien der mathematischen Methode** bezeichnet werden sollen. Zu beachten sind hierbei vor allem die Leitlinien

- Definieren mathematischer Begriffe („Definieren“)
- Beweisen oder Herleiten mathematischer Sätze („Beweisen“)
- Anwenden spezieller Verfahren zur Lösung mathematischer Probleme (z. B. Rückführung auf bereits gelöste Probleme, Anwenden von Regeln und Algorithmen – „Verfahren zur Problemlösung“)
- Verwendung von Hilfsmitteln mathematischen Arbeitens („Rechentechnik“, „graphisches Arbeiten“).

Diese Leitlinien werden gleichfalls in den Lehrplänen genauer dargestellt und erläutert; vgl. Lp 9f; [G 8] S. 11f. Die Tabelle (Uh 20 bis 23) skizziert wesentliche Beziehungen zwischen diesen Leitlinien des Mathematikunterrichts der Oberschule und den einzelnen Stoffeinheiten der Klasse 9.
Der Lehrplan weist besonders darauf hin (Lp 9), daß die Ausbildung spezieller, unmittelbar fachbezogener Fähigkeiten ein wesentliches Mittel und ein wesentlicher Beitrag zur Entwicklung des schöpferischen Denkens und der allgemeinen geistigen Fähigkeiten der Schüler ist (vgl. [47]). Das bezieht sich besonders auf das logische Folgern, auf Vergleichen, Ordnen, Gliedern, Klassifizieren, Abstrahieren, Konkreti-

sieren, auf das funktionale und das konstruktive Denken. Im Bereich der intellektuellen Operationen kommt es in den Abschlußklassen der Oberschule darauf an, die Verlaufsqualitäten wie Sicherheit, Geschwindigkeit und Zuverlässigkeit der hauptsächlichen Operationen weiter zu verbessern.
Im Lehrplan sind nicht nur im Teil „Ziele und Aufgaben" des Vorworts, sondern auch im Teil „Hinweise zur methodischen und organisatorischen Gestaltung des Unterrichts" des Vorworts wichtige Bemerkungen zu den Zielen und Aufgaben der geistigen Bildung enthalten. Das erklärt sich aus der Tatsache, daß viele der speziellen – und erst recht der allgemeinen – geistigen Fähigkeiten nicht so sehr an bestimmte Stoffe, sondern in höherem Maße an bestimmte Methoden ihrer Behandlung gebunden sind.

Eine rein dozierende Behandlung der einzelnen Schritte eines mathematischen Beweises z. B. würde kaum erreichen, daß die Schüler das Beweisen mathematischer Sätze erlernen, ebensowenig wie das bloße Vorzeigen der verschiedenen Rechengänge beim Arbeiten mit dem logarithmischen Rechenstab die Schüler zu einem sicheren und schnellen Umgehen mit diesem Hilfsmittel befähigen kann.

Weitere Angaben zur Entwicklung geistiger Fähigkeiten gehen aus den Vorbemerkungen zu den verschiedenen Stoffgebieten hervor; auch die Angaben bei den einzelnen Stoffeinheiten (z. B. Hinweise über Einführung oder Festigen einer bestimmten geistigen Operation) lassen Schlüsse auf diesbezügliche Zielstellungen zu.
Eine Aufgabe, die besonders in den Abschlußklassen der Oberschule an Bedeutung gewinnt, betrifft die Vervollkommnung der mathematischen Fachsprache der Schüler. Das bezieht sich sowohl auf den Gebrauch der richtigen sprachlichen Ausdrucksweise und der fachlichen Terminologie (für Begriffe, Größen, Zusammenhänge und Relationen) als auch auf den Gebrauch der Symbolik.
Wie bei allen übergreifenden Aufgaben der Bildung und Erziehung ist bei der Entwicklung allgemeiner geistiger Fähigkeiten eine Koordinierung des Mathematikunterrichts mit anderen Unterrichtsfächern erforderlich. Das betrifft in hohem Maße die Entwicklung der Fähigkeit, dialektisch zu denken und die Prinzipien der Logik – die sogar zu einem Teil im Mathematikunterricht vermittelt oder bewußt gemacht werden – anzuwenden. Gleichfalls ist eine Koordinierung im Hinblick auf die Anforderungen an die Verlaufsqualitäten der intellektuellen Operationen und an die geistige Konzentration (auch an die „geistige Disziplin") notwendig. Sehr eng – von der Sache her – sind in dieser Hinsicht die Beziehungen zu den naturwissenschaftlichen Unterrichtsfächern; nicht unbeachtet bleiben sollten auch die Beziehungen zum Sprachunterricht, die vor allem die Logik der Gedankenführung und die Wahl einer sachgerechten Ausdrucksweise betreffen.

Der Beitrag zur ideologischen Bildung und Erziehung

Zu den bedeutsamsten übergreifenden Aufgaben des Mathematikunterrichts gehört die ideologische, besonders die weltanschauliche Bildung und Erziehung der Schüler. Wie aus dem Lehrplan und den anderen schulpolitischen Dokumenten deutlich wird, ist ein hohes Niveau der ideologischen Bildung und Erziehung der Schüler in den allgemeinbildenden Schulen ein entscheidendes Element der kommunistischen Erziehung der Heranwachsenden. Die ideologische Erziehung schafft grundlegende Voraussetzungen für die Entwicklung sozialistischer Persönlichkeiten, die sich bei der weiteren Gestaltung der entwickelten sozialistischen Gesellschaft und im Kampf gegen den Imperialismus und seine Einflüsse bewähren [G 1] [G 2] [G 3].

Übersicht über die Leitlinien der mathematischen Methode im Mathematikunterricht in Klasse 9

Stoffeinheit	Definieren	Beweisen
1.1. Wiederholung und Systematisierung	Definition der natürlichen, gebrochenen, ganzen und rationalen Zahlen (Wdhg.)	
1.2. Reelle Zahlen	Definition „reelle Zahl" Erweiterte Definition des Wurzelbegriffs	Beweis des Satzes über die Dichtheit des Bereichs der rationalen Zahlen Indirekter Beweis der Irrationalität der Zahl x für $x^2 = 2$
1.3. Arbeiten mit Variablen		Einfache Beweisaufgaben unter Verwenden von Variablen
2.1. Lineare Ungleichungen		
2.2. Systeme aus zwei linearen Gleichungen	Definition „Lösungsmenge eines Gleichungssystems"	
3.1. Potenzen	Erweiterung des Potenzbegriffs durch Definition (Exponent: 0; negative ganze Zahlen; rationale Zahlen) Zweckmäßigkeit einer Definition, Verträglichkeit mit anderen Definitionen	Potenzgesetze (Beweis oder Herleitung) Notwendigkeit von Fallunterscheidungen bei gewissen Beweisen
3.2. Potenzfunktionen	Definition des Funktionsbegriffs (Wdhg.)	

Verfahren zur Problemlösung	Rechentechnik	Graphisches Arbeiten
	Rechenoperationen mit rationalen Zahlen (Wdhg.)	Mengendiagramme
Rückführen auf bekannte Fälle bei Umformungen	Berechnen der Werte von Termen mit Hilfe des logarithmischen Rechenstabes	
Regeln für das Lösen von Sachaufgaben, die auf lineare Gleichungen und Ungleichungen führen (Wdhg.)		Graphische Lösung von linearen Gleichungen mit einer Variablen (Wdhg.)
Rückführen des Lösens von Systemen aus zwei linearen Gleichungen mit zwei Variablen auf das Lösen von linearen Gleichungen mit einer Variablen Regeln für das Lösen von Sachaufgaben, die auf Systeme von zwei Gleichungen führen	Anwenden des logarithmischen Rechenstabes beim Lösen von Systemen linearer Gleichungen	Zeichnen von Graphen linearer Funktionen (Wdhg.) Graphische Lösung von Systemen aus zwei Gleichungen mit zwei Variablen
	Rechnen unter Abtrennen von Potenzen der Zahl 10 Anwenden des logarithmischen Rechenstabes beim Rechnen mit Potenzen	
	Aufstellen von Wertetabellen für Potenzfunktionen mit Hilfe von Rechenstab und Zahlentafel	Zeichnen von Graphen von Potenzfunktionen mit Hilfe von Kurvenlinealen und Schablonen für ausgewählte Parabeln und Hyperbeln

Übersicht über die Leitlinien der mathematischen Methode im Mathematikunterricht in Klasse 9

(Fortsetzung)

Stoffeinheit	Definieren	Beweisen
4.1. Quadratische Funktionen		
4.2. Quadratische Gleichungen	Definition des Begriffs der Lösung (Lösungsmenge) einer Gleichung (Wdhg.)	
5.1. Exponential- und Logarithmusfunktionen	Definition „Logarithmus“	Indirekter Beweis des Satzes, daß es Gleichungen $a^x = b$ gibt, die für positive rationale Zahlen a und b keine rationale Lösung x haben Beweis der Irrationalität von $\log_{10}2$ Herleiten der Logarithmengesetze aus den Potenzgesetzen
5.2. Rechenhilfsmittel		

Mit dem Begriff der ideologischen Bildung und Erziehung werden hier – entsprechend dem Gebrauch in der überwiegenden Mehrzahl der neueren pädagogischen Arbeiten in der DDR – zwei praktisch untrennbare Komponenten der Persönlichkeitsentwicklung zusammengefaßt: die weltanschauliche und die politisch-moralische Bildung und Erziehung (Weltanschauung und Moral gehören, philosophisch betrachtet, zu den ideologischen Formen des – gesellschaftlichen wie individuellen – Bewußtseins).

Verfahren zur Problemlösung	Rechentechnik	Graphisches Arbeiten
		Verschiebung, Stauchung, Streckung, Spiegelung am Beispiel der Graphen für $f(x) = x$ und $f(x) = x^2$
	Aufstellen von Wertetabellen für quadratische Funktionen mit Hilfe von Rechenstab und Zahlentafel	Zeichnen von Graphen quadratischer Funktionen mit Hilfe von Parabelschablonen
Rückführen der allgemeinen Form der quadratischen Gleichung auf die Normalform (Fallunterscheidungen) Zerlegen eines Polynoms zweiten Grades in Linearfaktoren Regeln für das Lösen von Sachaufgaben, die auf quadratische Gleichungen führen	Anwenden des Rechenstabs und der Zahlentafel beim Lösen quadratischer Gleichungen	Graphische Lösung von quadratischen Gleichungen
	Aufstellen von Wertetabellen für Exponential- und Logarithmusfunktionen mit Hilfe von Rechenstab und Zahlentafel	Zeichnen von Graphen von Exponential- und Logarithmusfunktionen
Aufstellen von Lösungsplänen für Aufgaben verschiedener Art	Mathematische Begründung des Arbeitens mit dem logarithmischen Rechenstab Überschlagsrechnungen, Rechnen unter Abtrennen von Potenzen der Zahl 10 Ausblick auf weitere Rechenhilfsmittel	

In den Abschlußklassen der Oberschule steht im Bereich der ideologischen Bildung und Erziehung im Mathematikunterricht an hervorragender Stelle die Aufgabe, die Schüler zu der Einsicht zu führen, daß eine hohe mathematische Bildung für die Erfüllung der gesellschaftlichen Anforderungen in der entwickelten sozialistischen Gesellschaft unerläßlich ist. In Zusammenhang damit ist es notwendig, das Interesse der Schüler für die Mathematik und ihre Anwendung zu wecken und den Willen der

Schüler zur weiteren Aneignung der Mathematik zu festigen. Ebenso muß die Einsicht der Schüler in die Beziehungen zwischen mathematischen Erkenntnissen, ihrer technisch-ökonomischen Nutzung und den gesellschaftlichen Verhältnissen vertieft werden. Die Erfüllung dieser Aufgaben muß gleichzeitig dazu beitragen, den Blick der Schüler für die Perspektiven der internationalen Entwicklung des sozialistischen Weltsystems zu öffnen, die Schüler zum proletarischen Internationalismus, zum sozialistischen Patriotismus und Staatsbewußtsein zu erziehen und sie mit Optimismus und Schaffenskraft für die Lösung der gesellschaftlichen Aufgaben beim Aufbau der entwickelten sozialistischen Gesellschaft zu erfüllen.
Als ein wichtiges Mittel zum Erreichen dieses Zieles nennt der Lehrplan Text- und Anwendungsaufgaben aus der Volkswirtschaft, der Technik und den anderen Lebensbereichen der sozialistischen Gesellschaft sowie historische und aktualisierende Betrachtungen zu den Beziehungen zwischen Mathematik und Gesellschaft.
Bei der Formung der wissenschaftlichen Weltanschauung der Schüler durch den Mathematikunterricht erhalten in den Abschlußklassen philosophische Fragen der Mathematik, ihrer Begriffe, Gesetze, Arbeitsweisen und Methoden besonderes Gewicht. Viele Fragen der Mathematik und ihrer Geschichte (z. B. der Ursprung der Mathematik; die Widerspiegelung der objektiven Realität in mathematischen Begriffen und Gesetzen; die mathematische Axiomatik; Induktion und Deduktion in der Mathematik) eröffnen oder erleichtern den Zugang zur dialektisch-materialistischen Philosophie, besonders zur materialistischen Erkenntnistheorie. Die Möglichkeit, die Schüler an solche Fragen heranzuführen und die mathematischen Sachverhalte philosophisch zu interpretieren, ergeben sich in Klasse 9 an vielen Stellen, z. B. bei der Erörterung der Zahlenbereichserweiterungen (Erweiterung des Bereichs der rationalen Zahlen zum Bereich der reellen Zahlen, Hinweis auf den Bereich der komplexen Zahlen), beim Definieren und Beweisen, weiterhin beim Herausarbeiten des mathematischen Inhalts von Sachaufgaben aus der gesellschaftlichen Praxis.
Bei solchen philosophischen Interpretationen muß den Schülern auch bewußt werden, daß ihr mathematisches Wissen und Können – ebenso wie die Erkenntnis der mathematischen Wissenschaft – nichts Vollendetes und Abgeschlossenes ist, sondern ständiger Ergänzung und Fortführung bedarf.
Weitere Beiträge zur allseitigen Entwicklung sozialistischer Persönlichkeiten, die in gewisser Weise mit der ideologischen Bildung und Erziehung verbunden sind, werden im Lehrplan in unmittelbarem Anschluß an die genannten grundlegenden Aufgaben der Bewußtseinsformung angeführt; vgl. Lp 14. Es sind dies im besonderen

- sorgfältiges und verantwortungsbewußtes Arbeiten;
- Zielstrebigkeit, Willensstärke, Beharrlichkeit;
- Sauberkeit und Ordnung (Übersichtlichkeit) beim Arbeiten;
- kritische und selbstkritische Denkhaltung.

Die anderen schulpolitischen Dokumente weisen in diesem Zusammenhang gleichfalls auf die Herausbildung von Aktivität, Schöpferkraft und auf die Entwicklung einer politisch-ideologischen Motivation für das Lernen und für die gesellschaftlich-nützliche und produktive Arbeit hin [2].
Da die Aufgaben der ideologischen Bildung und Erziehung und der oben genannten weiteren Bereiche der Persönlichkeitsentwicklung vielfach nicht eindeutig an bestimmte Stoffe oder Methoden gebunden sind, wiederholt der Lehrplan die allgemeinen Angaben in den Vorbemerkungen zu den verschiedenen Stoffgebieten in der Regel nicht mehr. Es muß beachtet werden, daß die übergreifenden Aufgaben und

die ihnen entsprechenden Ziele des Unterrichts, darunter selbstverständlich auch die Ziele der ideologischen Bildung und Erziehung, im Vorwort des Lehrplans, Teil „Ziele und Aufgaben“, in einer verallgemeinerten, vom *einzelnen* sachlichen Inhalt des Unterrichts abstrahierten Form dargestellt sind. Diese Darstellungsweise soll vor allem ihre Verbindlichkeit für den *gesamten* Fachunterricht der Klasse zum Ausdruck bringen. Ergänzt werden diese Angaben in den Vorbemerkungen zu den Stoffgebieten und in Bemerkungen zu Einzelstoffen (im Lehrplanteil: „Inhalt des Unterrichts“), vor allem im Hinblick auf jene speziellen Aufgaben und Ziele, die eine engere Stoff- oder Methodenbindung erkennen lassen.
Allgemeine Ausführungen zu Fragen der ideologischen, vor allem der weltanschaulichen Bildung und Erziehung im Mathematikunterricht sind in dem Buch „Weltanschaulich-philosophische Bildung und Erziehung im mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht (Beiträge)“ [39] sowie in den betreffenden Teilen des Buches „Allgemeinbildung – Lehrplanwerk – Unterricht“ [2] enthalten.
Weitere Hinweise zur ideologischen Bildung und Erziehung der Schüler im Mathematikunterricht können z. B. den Arbeiten von Fanghänel/Weber [14], Langer/Träger [36], Rentner [49], Schulz [58] und Vogel [63] entnommen werden.

Bei einem Vergleich zwischen den Zielen und Aufgaben der ideologischen Bildung und Erziehung und den Zielen und Aufgaben der geistigen Bildung wird auch deutlich, daß sich diese beiden Bereiche zu einem Teil decken; die ideologische Bildung und Erziehung besteht beispielsweise in hohem Maße in der Vermittlung von Kenntnissen und Einsichten, also in Elementen der geistigen Bildung (einschließlich der mathematischen Grundlagenbildung). Dies macht deutlich, daß die geistige Bildung und die ideologische Bildung und Erziehung, logisch betrachtet, nicht auf der gleichen Ebene liegen und sich das gesamte, seinem Wesen nach – entsprechend der Einheit der Persönlichkeit – einheitliche Ziel der allseitigen Formung der Persönlichkeit unter verschiedenen Aspekten betrachten lassen muß, und zwar [40]:

- unter dem Aspekt des Sachinhalts, d. h. nach den Bereichen der verallgemeinerten und sytematisierten gesellschaftlichen Erfahrung bzw. der Erkenntnis und Veränderung der objektiven Realität (Wissenschaften, Künste, technologische und technische Disziplinen ...);
- unter dem Aspekt der gesellschaftlichen Tätigkeit des Menschen, d. h. nach den Bereichen der gesellschaftlichen Praxis bzw. des gesellschaftlichen Seins (materielle Produktion, politische Tätigkeit, gesellschaftliche Reproduktion ...);
- unter dem Aspekt der integralen, das Verhältnis des Individuums zur Umwelt bestimmenden Züge der Persönlichkeit, d. h. nach den Formen des gesellschaftlichen bzw. individuellen Bewußtseins (Weltanschauung, Moral, nichtideologische Formen ...);
- unter dem Aspekt der Struktur der Persönlichkeit, d. h. nach ihren von der marxistischen Persönlichkeitstheorie und Psychologie unterscheidbaren Seiten (Intellekt, Charakter, Willen, physische Eigenschaften ...).

Je nach dem Aspekt ergeben sich verschiedene Möglichkeiten der Aufgliederung des Zieles; es wird deutlich, daß die geistige Bildung einer Gliederung nach den psychologisch und persönlichkeitstheoretisch unterscheidbaren Seiten der Persönlichkeit, die ideologische Bildung und Erziehung jedoch einer Gliederung nach den Formen des Bewußtseins entspricht.

Bei der Koordinierung der Aufgaben der ideologischen Bildung und Erziehung zwischen dem Mathematikunterricht und den anderen Unterrichtsfächern sollte beachtet werden, daß im Fach Staatsbürgerkunde, das bei der ideologischen Bildung und Erziehung eine besonders wichtige Funktion ausübt, Themen behandelt werden, die mit den erzieherischen Aufgaben des Mathematikunterrichts in enger Verbindung stehen.

Im besonderen gibt es einen Zusammenhang zwischen den Überlegungen zum Wesen und zur gesellschaftlichen Funktion der Mathematik (sowie zur Verantwortung des Wissenschaftlers in der sozialistischen Gesellschaft) und der Behandlung des Stoffgebietes „Der Kommunismus – das Ziel des Kampfes der internationalen Arbeiterbewegung. Der Leninismus – der Marxismus unserer Epoche" ([G 11], Lehrplanabschnitt 2.).
Wie auch aus dem Verhältnis und den Beziehungen zwischen der Mathematik und der Philosophie des dialektischen Materialismus geschlossen werden kann, hat der Mathematikunterricht bei der ideologischen Bildung und Erziehung der Schüler in erster Linie die Aufgabe, zu den philosophischen und politisch-ideologischen Verallgemeinerungen heranzuführen, nicht aber „Philosophie" zu lehren. Zum anderen muß er jedoch die Möglichkeiten nutzen, die im Fach Staatsbürgerkunde (und in anderen gesellschaftswissenschaftlichen Fächern oder Disziplinen) erworbenen oder zumindest angebahnten philosophischen Erkenntnisse aufzugreifen. Dazu gehört besonders das Anwenden der dialektischen Methode auf den fachlichen Gegenstand des Mathematikunterrichts; nicht nur die gesellschaftswissenschaftlichen Fächer, in denen diese Methode vielfach an historischen Beispielen dargelegt wurde, sondern auch die naturwissenschaftlichen Fächer haben auf verschiedene Weise, z. B. durch die Verbindung von Experiment und Theorie (bzw. Hypothese) den Schülern bereits in den vorangegangenen Klassenstufen Grundzüge dieser Methode bewußt gemacht. Allerdings darf dabei der grundlegende wissenschaftstheoretische Unterschied zwischen der Mathematik als einer Wissenschaft, die sich auf bestimmte Eigenschaften des Gesamtbereichs der Natur, der Gesellschaft und des Denkens bezieht, und den Naturwissenschaften nicht übersehen werden; vgl. Uh 28.

Der Beitrag zur polytechnischen Bildung

Eine weitere wichtige übergreifende Aufgabe des Mathematikunterrichts ist die polytechnische Bildung der Schüler. Die Meisterung des wissenschaftlich-technischen Fortschritts in der entwickelten sozialistischen Gesellschaft erfordert eine schärfere Ausprägung des polytechnischen Charakters der Oberschule, auch im Bereich des Mathematikunterrichts [G 2] [G 3].
Zu den wesentlichen Elementen der polytechnischen Bildung im Mathematikunterricht in der Klasse 9 gehört die Entwicklung der Fähigkeit der Schüler, reale Sachverhalte aus den verschiedenen Bereichen von Produktion und Technik zu analysieren, das mathematische Problem herauszufinden, zu formulieren und zu lösen, sowie die mathematische Lösung auf den realen Sachverhalt wieder zu übertragen. Aus den Stoffgebieten über lineare Ungleichungen, lineare Gleichungssysteme und quadratische Gleichungen sowie über Funktionen ergeben sich vielfältige Sachaufgaben und Anwendungsprobleme aus Produktion, Technik und anderen Bereichen der gesellschaftlichen Praxis, die der Entwicklung dieser Fähigkeiten dienlich sein können. Der Lehrplan fordert ausdrücklich die Behandlung solcher Aufgaben (Lp 13f). Das Arbeiten an solchen Aufgaben und Anwendungsproblemen muß auch helfen, die Einsicht der Schüler in die Bedeutung der wissenschaftlich-technischen Revolution unter den Bedingungen der entwickelten sozialistischen Gesellschaft zu vertiefen.
Mit der polytechnischen Bildung ist die Erziehung der Schüler zu einer positiven, sozialistischen Einstellung zur Arbeit – und zum weiteren Bildungserwerb im Interesse eines höheren Effekts der Arbeit – unmittelbar verbunden.

Als weitere Zielstellungen, in denen ein Beitrag zur polytechnischen Bildung der Schüler zum Ausdruck kommt, sind anzusehen:

- Sicherheit und Schnelligkeit im Rechnen, einschließlich des Rechnens unter Abtrennen von Potenzen der Zahl 10 und unter Anwenden praktisch gebräuchlicher Hilfsmittel (logarithmischer Rechenstab, Tafeln, Graphen);
- Genauigkeit im graphischen Arbeiten, verbunden mit Sicherheit in der Anwendung gebräuchlicher Zeichenhilfsmittel (Zirkel, Zeichendreiecke, Schablonen);
- analytisches und technisch-konstruktives Denken;
- funktionales Denken;
- Raumvorstellungs- und Raumdarstellungsfähigkeit;
- kritische Einstellung zu den Ergebnissen der eigenen Arbeit.

Aus dieser Übersicht geht hervor, daß die Elemente der polytechnischen Bildung zum überwiegenden Teil Elemente der mathematischen Grundlagenbildung, der geistigen Bildung und der ideologischen Bildung und Erziehung betreffen und sich mit Aufgaben und Zielen in diesen Bereichen weitgehend decken. Das ist aus dem Umstand zu erklären, daß die polytechnische Bildung eine Aufgabe ist, die sich aus der Forderung nach allseitiger Formung der Persönlichkeit unter einem anderen Aspekt ergibt als die geistige oder die ideologische Bildung und Erziehung: aus dem Aspekt der gesellschaftlichen Tätigkeit des Menschen bzw. der Bereiche des gesellschaftlichen Seins.

Im Lehrplan für die Klassen 9 und 10 sind – im Unterschied zum Lehrplan für die Klassen 6 bis 8 [G 8] – die Aufgaben und Ziele der polytechnischen Bildung nicht in einem gesonderten Kapitel oder Abschnitt des Vorworts genannt, sondern in die Aussagen zur mathematischen Grundlagenbildung, zur geistigen Bildung und zur ideologischen Bildung und Erziehung eingearbeitet. Viele dieser Aussagen sind nicht im Vorwort (in Teil „Ziele und Aufgaben"), sondern im Teil „Inhalt des Unterrichts", in den Vorbemerkungen zu den Stoffgebieten und in den Angaben zu den Stoffeinheiten formuliert. Es wäre falsch, aus dem Fehlen eines besonderen Abschnitts über die polytechnische Bildung im Teil „Ziele und Aufgaben" des Lehrplanvorworts zu folgern, daß diese wichtige Aufgabe des Unterrichts der allgemeinbildenden Schule in den Klassen 9 und 10 nur von untergeordneter Bedeutung sei.
Das Erreichen der Ziele der polytechnischen Bildung ist sowohl vom Stoff als auch von der Methode wesentlich abhängig. Daraus ergibt sich, daß sich auch in den Vorbemerkungen zu den einzelnen Stoffgebieten, in den Angaben zum Stoff und im Teil des Vorworts „Hinweise zur methodischen und organisatorischen Gestaltung des Unterrichts" Bemerkungen zu den Zielen und Aufgaben der polytechnischen Bildung finden.
In den Abschlußklassen der Oberschule treten auch im Mathematikunterricht Fragen der Berufsorientierung und Berufslenkung der Schüler in den Vordergrund. Wenngleich der Mathematikunterricht in dieser Hinsicht keine solchen Möglichkeiten wie der polytechnische Unterricht hat, so besteht doch eine wesentliche Aufgabe des Mathematikunterrichts darin, alle Schüler auf die Bedeutung der Mathematik und ihre Anwendung in den vielfältigen technischen Berufen und in anderen Arbeitsbereichen hinzuweisen, die mathematisch talentierten und interessierten Schüler aber für eine „mathematikintensive" spezielle Ausbildung zu gewinnen. Das betrifft sowohl Berufe, für die das Abitur und ein Mathematikstudium erforderlich sind (dabei sollte auch an den Nachwuchs an Mathematiklehrern für die verschiedenen Einrichtungen des Bildungssystems gedacht werden), als auch Berufe auf dem Niveau des Facharbeiters (technische Rechner, andere Funktionen im Bereich der Datenverarbeitung, technische Zeichner). Besondere Aufmerksamkeit ist dabei den Mädchen zuzuwenden. Erfahrungsgemäß gibt es mehr mathematisch begabte

Mädchen als oftmals angenommen wird; manchmal ist bei Mädchen das Interesse für die Mathematik stärker mit dem Interesse für Philosophie, Logik und Ökonomie als mit naturwissenschaftlich-technischen Interessen verbunden. Der Schluß, daß eine Neigung für Naturwissenschaften und Technik „automatisch" ein positives Verhältnis zur Mathematik nach sich zieht (oder umgekehrt), wäre unberechtigt. Erfahrungen besagen ferner, daß nicht selten die Interessen für Mathematik und Musik korrelieren.
Die Koordinierung des Mathematikunterrichts mit anderen Unterrichtsfächern im Hinblick auf die polytechnische Bildung betrifft natürlich in erster Linie den polytechnischen Unterricht. Außer den genannten erzieherischen Aufgaben sollten dabei die Fragen beachtet werden, die sich aus der Anwendung mathematischer Erkenntnisse und Methoden im polytechnischen Unterricht ergeben, oftmals folgt aus dem Gegenstand des polytechnischen Unterrichts ein Ansatzpunkt für die Einführung in ein neues Stoffgebiet der Mathematik. Hinsichtlich der polytechnischen Bildung ist auch eine Koordinierung zwischen dem Mathematikunterricht und den naturwissenschaftlichen Unterrichtsfächern, vor allem dem Physikunterricht, erforderlich. Im Physikunterricht z. B. werden in der Klasse 9 Mechanik und Elektrizitätslehre behandelt; der Lehrplan für dieses Fach sieht das Lösen verschiedenartiger quantitativer Aufgaben aus den Anwendungsbereichen der Physik, in erster Linie aus Produktion und Technik, vor.

0.2. Allgemeine didaktische und methodische Probleme

Vom *fachlich-mathematischen Aspekt* ist für den Unterricht in den Klassen 9 und 10 – wie auch in den anderen Klassen – bedeutsam, daß die Mathematik als Wissenschaft in den letzten Jahrzehnten ihr Antlitz wesentlich geändert hat. Die Mathematik erfuhr vor allem in ihren philosophischen und logischen Grundlagen sowie in ihren Methoden eine tiefgreifende Wandlung. Sie wurde „abstrakter" und „allgemeiner". Diese Tendenz sollte sich auch in der Methode des Mathematikunterrichts in den allgemeinbildenden Schulen widerspiegeln. Das bedeutet unter anderem, bei den Schülern schon frühzeitig das Verständnis für mathematische Definitionen und Beweise zu wecken und im Unterricht der Anschauung sowie der (unvollständigen) Induktion eine nur heuristisch-vorbereitende Funktion (besonders als Quelle für Vermutungen oder Behauptungen) zuzuerkennen; vgl. Leitlinien der mathematischen Methode, Uh 20 bis 23. Zweifellos sind heute in Theorie und Praxis des Mathematikunterrichts ein „naturwissenschaftlich-induktivistisches" Vorgehen und Methoden, welche sich auf mechanische manuelle Tätigkeiten ohne entsprechende gedankliche Durchdringung gründen, im Prinzip überwunden; die Erkenntnis, daß sich die Mathematik von den Naturwissenschaften nicht nur in ihrem Gegenstand, sondern auch in ihren Methoden *wesentlich* unterscheidet, dürfte sich aber noch nicht überall voll durchgesetzt haben [39].
Vom *pädagogischen Aspekt* aus zeigt der Unterricht in den Klassen 9 und 10 jedoch gewisse Besonderheiten, die ihn sowohl vom Unterricht in den vorangegangenen Klassenstufen, auch in den Klassen 7 und 8, als auch von den Lehrveranstaltungen in den weiterführenden Bildungseinrichtungen – einschließlich der Erweiterten Oberschule – unterscheiden. Diese Besonderheiten sind nicht nur von den speziellen Zielen und vom konkreten Inhalt der Bildung und Erziehung in den Abschlußklassen der Oberschule, sondern auch von den Bedingungen, die den Absolventen der Oberschule in den verschiedenen Lebensbereichen der sozialistischen Gesellschaft ent-

gegentreten, und von den allgemeinen und individuellen Entwicklungseigentümlichkeiten der jungen Menschen abhängig.
Der Lehrplan widmet den Gestaltungsfragen des Unterrichts einen besonderen Abschnitt des Vorworts („Hinweise zur methodischen und organisatorischen Gestaltung des Unterrichts“). In diesem Abschnitt werden vor allem die grundlegenden, für alle Stoffgebiete der Klassen 9 und 10 gültigen Hinweise gegeben. Weitere, in der Regel speziellere methodische Bemerkungen enthält der Lehrplanteil „Inhalt des Unterrichts“ in den Vorbemerkungen zu den Stoffgebieten. Außer diesen Ausführungen lassen auch die Angaben zu den einzelnen Stoffeinheiten Schlüsse auf die methodische Gestaltung des Unterrichts zu. Bei den Stoffangaben wurde im Lehrplan für Mathematik vielfach eine „didaktisierte“ Form gewählt, z. B. „Einführung in ...“, „Wiederholung von ...“. Wenn dort nur eine thematische Angabe getroffen wird, so bedeutet das in der Regel die Neueinführung des Stoffes, verbunden mit jenem Grad der Festigung, der unmittelbar im Anschluß an die Neueinführung – und zwar in der verfügbaren Zeit – erreicht werden kann.
Besondere Bedeutung mißt der Lehrplan der **Kontinuität der Bildungs- und Erziehungsarbeit**, und damit auch der Kontinuität der methodischen Gestaltung des Unterrichts, bei; vgl. Lp 16. Er fordert ein Aufgreifen, Verarbeiten, Systematisieren und Anwenden früher erworbenen Wissens und dessen Verknüpfung mit dem neu zu erwerbenden. Eine wertvolle Hilfe, die methodische Kontinuität des Mathematikunterrichts zu sichern, geben die inhaltlichen Leitlinien (vgl. Uh 12 bis 17) sowie die Leitlinien der mathematischen Methode (vgl. Uh 20 bis 23). Diese Leitlinien nennen wichtige Aspekte, unter denen auch Wiederholung und Systematisierung früher behandelten Stoffes effektiv gestaltet werden können. Über didaktisch-methodische Grundsätze des Unterrichts (z. T. mit dem Charakter von Leitlinien) geben spezielle Arbeiten (z. B. KAISER [29], SCHULZ [59] und WIESEMANN [70]) Auskunft.
Das besondere Gewicht der Verarbeitung früher behandelten Stoffes und der Systematisierung des Wissens in den Abschlußklassen spiegelt sich auch in der Auswahl der Stoffgebiete und Einzelstoffe für diese Klassen wider.
Ebenso wichtig wie die Systematisierung innerhalb der einzelnen Stoffgebiete ist das **Aufdecken der Zusammenhänge zwischen den größeren Gebieten der Mathematik und anderen Wissenschaften.** Dabei spielen Probleme der Anwendbarkeit und der Anwendung der Mathematik eine wesentliche Rolle. Der Gesichtskreis der Schüler muß sich in den Klassen 9 und 10 in bezug auf die Zusammenhänge zwischen den einzelnen Teildisziplinen der Mathematik ebenso wie zwischen der Mathematik und den anderen Wissensbereichen entscheidend erweitern; der Unterricht in den Klassen 9 und 10 hat eine alle Fächer erfassende integrative Funktion. Bei den Schülern darf nicht der Eindruck entstehen (oder bestehen bleiben), als ob zwischen den Unterrichtsfächern und den entsprechenden Wissenschaften Trennwände beständen.
Besonderes Gewicht legt der Lehrplan auf die Anwendung von Unterrichtsmethoden, welche die **Aktivität und Selbsttätigkeit der Schüler** bei der Aneignung und Anwendung des Wissens und Könnens fördern und die Schüler zu schöpferischem Denken, zu produktiver geistiger Tätigkeit befähigen (Lp 16). Hierzu gehören sowohl „forschende“ Methoden (Aufsuchen des Lösungsweges bei Problemen verschiedener Art, einschließlich mathematischer Beweisgänge, Überprüfung von Problemlösungen, Anwenden heuristischer Methoden und Regeln) als auch das Aufsuchen des rationellsten Weges beim Lösen von Aufgaben (dazu gehören auch Fälle, bei denen das Verfahren abgekürzt werden kann). Über die Entwicklung schöpferischer geistiger Fähigkeiten beim Lösen von Aufgaben informiert z. B. eine Arbeit von POLLOK [47].

In diesem Zusammenhang sei auf die Notwendigkeit hingewiesen, die Schüler an die **didaktischen und methodischen Eigenheiten der Arbeit in den anschließenden Bildungseinrichtungen und an die gesellschaftlich allgemein gebräuchlichen Methoden des Bildungserwerbs** heranzuführen. Das bedeutet vor allem, die Schüler zu befähigen, dem Unterricht und der praktischen Ausbildung in den berufsbildenden Einrichtungen, dem Unterricht an der Erweiterten Oberschule sowie den betrieblichen und öffentlichen Bildungsveranstaltungen (z. B. in der Betriebsakademie, der Volkshochschule und im Rahmen der Urania) nutzbringend folgen zu können.
Dabei wäre unbedingt zu beachten, daß im Berufs-, Fach- und Hochschulwesen sowie in der Erwachsenenqualifizierung (einschließlich der Ausbildung in den Streitkräften) der **programmierte Unterricht** bzw. programmierte (eigentlich programmierende) Studienmaterialien an Bedeutung gewinnen und in den nächsten Jahrzehnten wahrscheinlich weit verbreitet sein werden. Auch Anlagen der Datenverarbeitung werden in Zukunft voraussichtlich in größerem Umfang im Dienst der Bildung und des Lernens in den genannten Einrichtungen stehen (zum Beispiel „Tutoren" und „Examinatoren"). Dafür sollten im Unterricht der allgemeinbildenden Schule heute schon gewisse Voraussetzungen geschaffen werden. Sie können z. B. in der Arbeit nach (z. T. algorithmischen) Vorschriften oder im Bewußtmachen der logischen Struktur eines fachlichen Wissensgegenstandes bestehen. Beispiele für einfach und übersichtlich aufgebaute Buch- und Heftprogramme geben zahlreiche Materialien für die Qualifizierung der Werktätigen. Auf Einzelheiten soll hier nicht eingegangen werden, es sei auf die diesbezügliche Fachliteratur verwiesen.
An dieser Stelle wäre auch zu bemerken, daß manche Schüler mehr an gewohnte Lehr- und Lernmethoden gebunden sind als andere; jene können sich oft nur langsam neuen Methoden anpassen, bei diesen ist nicht selten eine gewisse „Methodenresistenz" festzustellen, d. h., bei ihnen hängen Lernergebnis und Lernerfolg allgemein nur wenig von den Unterrichtsmethoden ab (dafür aber mehr von den persönlichen Interessen am Gegenstand und von der Logik der Stoffolge).
Dieser Umstand ist für den Unterricht in den Klassen 9 und 10 sehr bedeutsam, denn die Vorbereitung auf den weiterführenden Bildungserwerb macht es erforderlich, allen Schülern eine gewisse „Methodenresistenz" anzuerziehen, d. h. sie zu befähigen, nach verschiedenen Methoden zu lernen, zu arbeiten und sich rasch in ungewohnte Methoden einzufinden. Ein Mittel für diese Befähigung ist ein vernünftiger Wechsel aller jener Methoden im Unterricht, die Aktivität und Selbständigkeit von Schülern erfordern und die die Realisierung der Ziele der betreffenden Unterrichtseinheit am besten ermöglichen (nicht aber ein Methodenwechsel „um jeden Preis" oder mit dem einzigen Ziel, den Unterricht „kurzweilig" zu gestalten).
Ein wesentliches Merkmal des Unterrichts in den Klassen 9 und 10 ist die im Vergleich mit den Klassen 7 und 8 **höhere Selbständigkeit und Eigenverantwortlichkeit der Schüler** beim Lernen und Arbeiten. Selbständigkeit und Eigenverantwortlichkeit der Schüler setzen entsprechende Forderungen, aber auch Anleitung und Hilfe durch den Lehrer voraus. Ohne Anleitung und Befähigung können auch ältere Schüler – bei bestem Willen – den Ansprüchen an das weitgehend selbständige Lernen nicht gerecht werden; Forderungen allein – und die Feststellung, daß das Ergebnis nicht erreicht wurde – sind nutzlos, sie führen höchstens zu Konflikten und können negative erzieherische Auswirkungen haben. Die Erziehung zu Selbständigkeit macht notwendig, die Schüler mit den Methoden und Mitteln der geistigen Arbeit, vor allem mit Elementen der systematischen Heuristik und mit dem Gebrauch von Wissensspeichern verschiedener Art (Nachschlagewerke, Tabellen, Formel-

sammlungen u. ä.) vertraut zu machen. Ebenso ist es notwendig, den Schülern die Methoden und Verfahren der **Selbstkontrolle** ihrer Lern- und Arbeitsergebnisse nahezubringen; dies bietet sich im Mathematikunterricht vom Stoff her unmittelbar an (Rechenproben durch Umkehroperationen, Proben durch andere Rechenwege oder Rückrechnung, geometrische Überprüfung arithmetischer, algebraischer und analytischer Operationen, Zeichenkontrollen und Genauigkeitsproben in der Geometrie u. a. m.; vgl. HERZOG [25]).
Weiterhin orientiert der Lehrplan auf die Einbeziehung **vielfältiger Übungen** in den Unterricht, darunter auch auf die „täglichen Übungen" (meist zu Beginn der Unterrichtsstunde). Diese „täglichen Übungen" sollten keinesfalls gering geschätzt oder als für die Oberstufe unangemessen angesehen werden; vgl. RÖSEL [54].
Zu den methodischen Problemen, denen im Mathematikunterricht der Abschlußklassen besondere Aufmerksamkeit gewidmet werden sollte, gehört die **Arbeit mit dem Lehrbuch** (genauer: dem Lehrteil des Lehrbuchs) und mit Formelsammlungen; vgl. [32], [41], [62]. Das Lehr- bzw. Fachbuch gewinnt in den weiterführenden Bildungseinrichtungen auch für die mathematische Ausbildung an Bedeutung; es ergänzt in diesen Einrichtungen die – vielfach als Vorlesung gestaltete – Darbietung des Stoffes und ermöglicht dessen Wiederholung und Festigung. Die Vorbereitung der Schüler auf den Besuch weiterführender Schulen ist zu einem wesentlichen Teil als Befähigung zum Lernen bzw. Studieren nach Lehr- und Fachbüchern zu verstehen.
Bei der Einführung der Schüler in das selbständige Arbeiten mit dem Lehrbuch sollte beachtet werden, daß sich ein Lehrbuch in seinem logischen Aufbau oft sehr stark von einer mündlichen Darlegung des Stoffes im Unterricht unterscheiden kann. Selbst wenn die Lehrbuchtexte weitgehend „methodisiert" sind, bleibt der Unterschied, der besonders in der hohen Informationsdichte und in der geringen Redundanz eines Lehrbuchtextes („kein Wort zuviel") begründet ist, bestehen. Auch ist ein Lehrbuch stellenweise in „mathematischer Kurzschrift" geschrieben, d. h. die Niederschrift des Sachverhalts mittels standardisierter Wendungen, Symbole und Kurzzeichen herrscht vor. Daraus folgt, daß ein mathematisches Werk schwerer zu studieren ist als eine Publikation einer anderen Wissenschaft – wenn die mathematische Fachsprache und die „mathematische Kurzschrift" nur ungenügend beherrscht werden. Die Einführung in die Arbeit mit dem (mathematischen) Buch steht also in enger Verbindung mit dem Üben von Ausdruck, Terminologie und Symbolik der Mathematik. Einen wesentlichen Zugang zum Verständnis der mathematischen Ausdrucksweise bildet der Variablenbegriff. Über den in Anbetracht dieser Problematik bedeutsamen Zusammenhang zwischen der logischen und der sprachlichen Bildung im Mathematikunterricht gibt z. B. eine Arbeit von WALSCH [64] Auskunft; vgl. auch BOCK und WALSCH [6].
Das Vorwort des Lehrplans enthält im Teil „Hinweise zur methodischen und organisatorischen Gestaltung des Unterrichts" auch Angaben über die Durchführung von **mündlichen Kontrollen, schriftlichen Kurzkontrollen und Klassenarbeiten**; vgl. Lp 17. Besonderes Augenmerk verdient der Hinweis des Lehrplans, daß bei solchen Arbeiten nicht nur Einzelwissen und einzelne Fertigkeiten kontrolliert, sondern auch die Beherrschung komplexer Arbeitsverfahren, das Vermögen, ein mathematisches Problem zu lösen, und das Verständnis für mathematische Zusammenhänge überprüft werden müssen.
Grundsätzlich sollte bei jeder Kontrolle – und das gilt auch für die Klassen 9 und 10 – beachtet werden, daß sie nicht nur der Bewertung der Leistung oder des erreichten Standes der Persönlichkeitsentwicklung dienen, sondern auch den Ansatzpunkt für

die weitere Bildungs- und Erziehungsarbeit genauer bestimmen soll. Ihre Ergebnisse sind damit wichtige „Führungsgrößen“ im Unterricht. Damit ist auch gesagt, daß nicht jedes Resultat einer Kontrolle mit einer Zensur bewertet werden muß. Eine Vielzahl von „Zensierungssituationen“ im Unterricht wäre ebenso schädlich wie das andere Extrem; sie verleitet die Schüler leicht zu Spekulationen.
Bei Prüfungen, die in erster Linie der Bewertung der Leistungen der Schüler dienen, sollte konsequent der Grundsatz gelten, daß vor allem festzustellen ist, was der Schüler weiß und kann, und in welchem Verhältnis das zu den Anforderungen im Lehrplan steht. Bei den Kontrollen, deren Hauptaufgabe die genauere Präzisierung des Ansatzpunktes für die weitere Bildungsarbeit ist und deren Ergebnis nicht zensiert wird, kann und soll vor allem ermittelt werden, wo noch Mängel im Wissen oder in der Beherrschung bestimmter Operationen bestehen. Die weit verbreitete Praktik, bei Prüfungen in erster Linie Lücken aufzuspüren und vor allem diese (negativ) zu bewerten, führt stets zu erzieherisch unliebsamen Folgen für die betreffenden Schüler und in der Regel auch für das Klassenkollektiv.
Über Probleme der Kontrolle und Bewertung von Schülerleistungen unterrichten die Arbeiten von KEGEL und NEIGENFIND [30] sowie von WENDT [68] und ZOLL [74]. Besondere Angaben zum Inhalt und zu den Formen der Kontrolle bei der Behandlung der einzelnen Stoffgebiete enthalten die Ausführungen über die Stoffgebiete.
Zur häuslichen Arbeit der Schüler macht der Lehrplan keine speziellen Aussagen. Wenn auch das Fach Mathematik zu jenen Unterrichtsfächern gehört, in denen häusliche Arbeiten der Schüler unerläßlich sind, so sollten doch diese Arbeiten, besonders die schriftlichen, in den Klassen 9 und 10 umfangsmäßig begrenzt werden, so daß die Schüler für die Ausführung nur ein Minimum an Zeit aufzuwenden brauchen. Die falsche Auffassung, daß die Unterrichtsstunde der Vermittlung und der Kontrolle, die häusliche Arbeit aber der Festigung des Stoffes dienen sollte, dürfte in der Praxis weitgehend überwunden sein. Über die Festigung des Gelernten informieren zahlreiche spezielle Arbeiten, darunter der Aufsatz von RÖSEL [54].
Bei der Planung des Unterrichts ist auch zu beachten, daß Schüler Arbeitsgemeinschaften nach Rahmenprogrammen mathematischen Inhalts besuchen können; solche Schüler sollten im Interesse des Unterrichtserfolgs der ganzen Klasse spezielle Aufträge erhalten (vgl. Uh 38).
Zum Schluß sei noch darauf hingewiesen, daß – wie auch im Vorwort des Lehrplans bemerkt wird – die zeitliche Gliederung des Unterrichtsstoffs im Lehrplanteil „Inhalt des Unterrichts“ für die Klasse 9 auf **30 Wochen als Berechnungsgrundlage** bezogen ist. Das bedeutet, daß im Rahmen dieses Zeitvolumens auch Festigung, Wiederholung und Systematisierung des Stoffes sowie die Kontrollen geplant werden müssen (im Unterschied zum Lehrplan für die Klasse 10 gibt der Plan für die Klasse 9 keine besonderen Stunden für spezielle Maßnahmen der Festigung und Systematisierung des in dieser Klasse neu einzuführenden Stoffes an). Die restliche Unterrichtszeit, die nach den lokalen Gegebenheiten und von Schuljahr zu Schuljahr verschieden sein kann (sie beträgt in der Regel etwa 3 bis 5 Wochen), steht zur Verfügung des Lehrers. Sie dient in erster Linie der weiteren Festigung des Stoffes, dem Ausfüllen von Lücken im Wissen und Können der Schüler (z. B. durch Krankheit von Schülern oder Lehrern verursacht) sowie dem Anwenden des erworbenen Wissens und Könnens auf lokale Probleme (z. B. Anwendungen in der örtlichen Wirtschaft). Es ist zu empfehlen, die Zeit zur Verfügung des Lehrers nach den Erfordernissen der Schule oder Klasse den einzelnen Stoffgebieten zuzuteilen, nicht aber „en bloc“ an das Schuljahresende zu legen. Vielfach wird in dieser Verfügungszeit eine differenzierte Tätigkeit der Schüler ratsam sein.

0.3. Übersicht über den Mathematiklehrgang der zehnklassigen allgemeinbildenden polytechnischen Oberschule

Der Mathematikunterricht der zehnklassigen allgemeinbildenden polytechnischen Oberschule umfaßt Stoff aus verschiedenen Gebieten und Disziplinen der Mathematik, vor allem aus

- der Arithmetik,
- der elementaren Algebra,
- den Elementen der Analysis,
- der synthetischen Geometrie,
- der darstellenden Geometrie,
- der ebenen Trigonometrie,
- der Flächen- und Rauminhaltsberechnung.

In den weiterführenden allgemeinbildenden Schulen, speziell in der Erweiterten Oberschule, treten

- die Differential- und Integralrechnung,
- die Vektorrechnung,
- die analytische Geometrie der Ebene

hinzu.

Die ordnenden und systematisierenden Prinzipien für die Behandlung des Stoffes aus allen Gebieten des Oberschulunterrichts lassen sich durch folgende inhaltlichen Leitlinien kennzeichnen (vgl. Uh 12 bis 17):

- Mengen
- Variable
- Zahlenbereichserweiterungen
- Gleichungen und Ungleichungen
- Abbildungen (einschließlich Funktionen).

Für den Unterricht in der Erweiterten Oberschule sind außerdem noch zu nennen

- Grenzwerte
- Vektorraum.

Es geht aus dieser Aufzählung unmittelbar hervor, daß zwischen den genannten Bereichen der Mathematik und den hauptsächlichen inhaltlichen Leitlinien vielfältige Beziehungen bestehen, daß einige Leitlinien in bestimmten Bereichen sozusagen ihren Konzentrationspunkt haben.

Von einigen Leitlinien (z. B. Mengen und Variable) werden fast alle Gebiete durchdrungen.

Die dem folgenden Text beigegebenen Übersichten sollen dem Leser helfen, sich über die Vorkenntnisse zu informieren, über welche die Schüler verfügen, wenn sie in die Klasse 9 eintreten; Lehrplanerfüllung ist dabei natürlich vorausgesetzt. Allerdings kann eine Stoffübersicht solcher Art allein nichts über die geforderte Qualität des Wissens und Könnens aussagen, jedoch läßt die Angabe der Unterrichtszeit für die Stoffgebiete und -einheiten darauf gewisse Schlüsse zu.

Nach den Lehrplänen, die im Jahre 1967 oder später eingeführt wurden ([G 5] bis [G 10]), umfaßt der Mathematikunterricht der Oberschule die folgenden Stoffgebiete und Stoffeinheiten.

Klasse 1

1. Die natürlichen Zahlen bis 10	**30 Stunden**
1.1. Die natürlichen Zahlen von 1 bis 5; ihre Ordnung	
1.2. Die natürlichen Zahlen von 6 bis 10; die Ordnung der natürlichen Zahlen bis 10	
2. Addition und Subtraktion bis 10	**30 Stunden**
2.1. Einführung der Addition und Subtraktion	
2.2. Die Grundaufgaben der Addition und Subtraktion bis 10	
2.3. Addition mehrerer Summanden, Subtraktion mehrerer Subtrahenden	
3. Die natürlichen Zahlen von 0 bis 20	**10 Stunden**
4. Addition und Subtraktion bis 20	**30 Stunden**
4.1. Addition und Subtraktion bis 20 ohne Überschreiten der Zahl 10	
4.2. Grundaufgaben der Addition und Subtraktion, in denen die Summe bzw. der Minuend eine zweistellige natürliche Zahl ist	
5. Multiplikation und Division bis 20	**20 Stunden**
5.1. Einführung der Multiplikation und Division	
5.2. Übungen zur Multiplikation und Division	
6. Die natürlichen Zahlen von 0 bis 100	**20 Stunden**
6.1. Die natürlichen Zahlen von 21 bis 100	
6.2. Die Ordnung der natürlichen Zahlen bis 100	
7. Geometrische Vorübungen	**10 Stunden**

Klasse 2

1. Addition und Subtraktion bis 100	**72 Stunden**
1.1. Wiederholung der Addition und Subtraktion bis 20 und Wiederholung der natürlichen Zahlen bis 100	(10)
1.2. Addition und Subtraktion einstelliger natürlicher Zahlen zu bzw. von zweistelligen natürlichen Zahlen ohne Überschreiten eines Vielfachen von 10	(8)
1.3. Addition und Subtraktion einstelliger natürlicher Zahlen zu bzw. von zweistelligen natürlichen Zahlen mit Überschreiten eines Vielfachen von 10	(15)
1.4. Addition und Subtraktion zweistelliger natürlicher Zahlen ohne Überschreiten	(15)
1.5. Addition und Subtraktion zweistelliger natürlicher Zahlen mit Überschreiten	(24)
2. Multiplikation und Division bis 100	**88 Stunden**
2.1. Multiplikation und Division mit den Zahlen 2 und 10	(18)
2.2. Multiplikation und Division mit den Zahlen 3, 4, 5, 1 und 0	(30)
2.3. Multiplikation und Division mit den Zahlen 6, 7, 8 und 9	(30)
2.4. Zusammenfassende Übungen und Wiederholungen	(10)
3. Geometrie	**20 Stunden**
3.1. Lagebeziehungen zwischen Punkten und Geraden; Dreieck und Viereck	(5)
3.2. Strahl, Winkel, Kreis	(3)
3.3. Lagebeziehungen zwischen Geraden; Streifen	(5)
3.4. Parallelogramm, Rechteck und Quadrat	(5)
3.5. Würfel und Quader	(2)

Klasse 3

1. Wiederholung der natürlichen Zahlen bis 100 und Wiederholung der Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division bis 100	**10 Stunden**
2. Die natürlichen Zahlen bis 10000; ihre Ordnung	**20 Stunden**
2.1. Die Vielfachen von 100 und von 1000	(5)
2.2. Die natürlichen Zahlen von 100 bis 1000; ihre Ordnung	(7)
2.3. Die natürlichen Zahlen von 1000 bis 10000; die Ordnung der natürlichen Zahlen bis 10000	(8)

3. Addition und Subtraktion bis 10000	**58 Stunden**
3.1. Addition und Subtraktion bis 10000 (mündliches Rechnen)	(28)
3.2. Das schriftliche Verfahren der Addition	(12)
3.3. Das schriftliche Verfahren der Subtraktion	(18)
4. Multiplikation und Division bis 10000	**72 Stunden**
4.1. Multiplikation und Division bis 10000 (mündliches Rechnen)	(38)
4.2. Das schriftliche Verfahren der Multiplikation	(14)
4.3. Das schriftliche Verfahren der Division	(20)
5. Geometrie	**20 Stunden**
5.1. Wiederholung der Lagebeziehungen von Geraden; Zeichnen mit Lineal und Zeichendreieck	(5)
5.2. Zeichnen von Vierecken; Trapez und Trapezfläche	(6)
5.3. Kreis	(3)
5.4. Quader und Würfel, Zylinder, Pyramiden und Kegel	(6)

Klasse 4

1. Die Folge der natürlichen Zahlen	**35 Stunden**
1.1. Aufbau der Folge der natürlichen Zahlen bis 1000000	(15)
1.2. Weiterer Aufbau der Folge der natürlichen Zahlen, Positionssysteme	(20)
2. Weiteres Arbeiten mit natürlichen Zahlen	**25 Stunden**
2.1. Näherungswerte, Runden und Abschätzen natürlicher Zahlen	(15)
2.2. Graphisches Darstellen natürlicher Zahlen	(10)
3. Die vier Grundrechenarten mit natürlichen Zahlen	**90 Stunden**
3.1. Addieren und Subtrahieren natürlicher Zahlen	(15)
3.2. Multiplizieren natürlicher Zahlen	(25)
3.3. Dividieren und Teilbarkeit natürlicher Zahlen	(50)
4. Geometrische Grundbegriffe	**30 Stunden**
4.1. Punkte und Geraden	(18)
4.2. Verschiebung	(12)

Klasse 5

1. Die vier Grundrechenarten mit natürlichen Zahlen	**55 Stunden**
1.1. Zusammenstellen von bedeutsamen Gesetzen für das Rechnen mit natürlichen Zahlen	(10)
1.2. Formale Aufgaben	(15)
1.3. Sachaufgaben und Anwendungsaufgaben	(30)
2. Messen und Maßeinheiten	**60 Stunden**
2.1. Längenmessung, Längenmaße	(9)
2.2. Flächeninhaltsbestimmung, Flächenmaße, Berechnungen an Rechtecken	(15)
2.3. Rauminhaltsbestimmung, Raummaße, Berechnungen an Quadern	(18)
2.4. Maßeinheiten der Masse, Geld- und Zeitmaße	(8)
2.5. Winkel und Winkelmessung	(10)
3. Einführung der gebrochenen Zahlen; Bruchrechnung	**35 Stunden**
3.1. Bruchbegriff	(5)
3.2. Addieren und Subtrahieren gleichnamiger Brüche	(10)
3.3. Dezimalbrüche, dezimale Schreibweise	(10)
3.4. Begriff der gebrochenen Zahl	(10)
4. Geometrische Grundbegriffe und Konstruktionen	**30 Stunden**
4.1. Drehung	(15)
4.2. Spiegelung	(15)

Klasse 6

1. Teilbarkeit natürlicher Zahlen	**20 Stunden**
1.1. Wiederholung	(3)
1.2. Teilbarkeitssätze	(11)
1.3. Gemeinsame Vielfache; gemeinsame Teiler	(6)
2. Gebrochene Zahlen	**60 Stunden**
2.1. Ordnung gebrochener Zahlen	(8)
2.2. Addition und Subtraktion gebrochener Zahlen	(14)
2.3. Multiplikation und Division gebrochener Zahlen	(20)
2.4. Gemeine Brüche und Dezimalbrüche; Division von gebrochenen Zahlen in Dezimalbruchdarstellung	(10)
2.5. Übung des Rechnens mit gebrochenen Zahlen	(8)
3. Einführung in die Gleichungslehre; Proportionalität	**30 Stunden**
3.1. Einführung in die Gleichungslehre	(7)
3.2. Proportionalität und Verhältnisgleichungen	(23)
4. Planimetrie	**70 Stunden**
4.1. Wiederholung und systematische Zusammenfassung	(6)
4.2. Bewegung und Kongruenz	(7)
4.3. Beziehungen zwischen Winkeln	(7)
4.4. Dreiecke	(8)
4.5. Kongruenz von Dreiecken	(18)
4.6. Vierecke und Vielecke	(13)
4.7. Flächeninhalt und Umfang von Vielecken	(11)

Klasse 7

1. Rechenstab; Anwendung von Verhältnisgleichungen	**38 Stunden**
1.1. Einführung in den Gebrauch des Rechenstabs und Wiederholung des Rechnens mit Verhältnisgleichungen	(15)
1.2. Prozentrechnung	(23)
2. Rationale Zahlen	**37 Stunden**
2.1. Der Begriff „rationale Zahl“	(6)
2.2. Ordnung rationaler Zahlen	(4)
2.3. Addition und Subtraktion rationaler Zahlen	(10)
2.4. Multiplikation und Division rationaler Zahlen	(7)
2.5. Isomorphiebetrachtungen; ganze Zahlen	(5)
2.6. Einige Grundbegriffe der Fehlerrechnung	(5)
3. Gleichungen	**21 Stunden**
3.1. Äquivalente Gleichungen	(6)
3.2. Übungen im Lösen von Gleichungen und Ungleichungen	(15)
4. Quadratzahl und Quadratwurzel	**13 Stunden**
4.1. Quadrieren	(3)
4.2. Die Quadratwurzel	(6)
4.3. Übungen	(4)
5. Darstellende Geometrie	**30 Stunden**
5.1. Projektionsbegriff; Projektionsarten; Kavaliersperspektive	(6)
5.2. Senkrechte Eintafelprojektion	(10)
5.3. Senkrechte Zweitafelprojektion	(14)
6. Der Kreis	**29 Stunden**
6.1. Definition des Kreises; Sätze über den Kreis	(20)
6.2. Kreisberechnung	(9)

7. Stereometrie	**12 Stunden**
7.1. Prismen	(4)
7.2. Kreiszylinder	(4)
7.3. Übungen und Anwendung	(4)

Klasse 8

1. Arbeiten mit Variablen	**18 Stunden**
1.1. Grundlagen für das Arbeiten mit Variablen	(3)
1.2. Rechenoperationen unter Verwendung von Variablen	(15)
2. Ähnlichkeit	**52 Stunden**
2.1. Der Strahlensatz	(10)
2.2. Zentrische Streckung	(7)
2.3. Ähnliche Figuren	(17)
2.4. Die Satzgruppe des Pythagoras	(18)
3. Lineare Funktionen	**28 Stunden**
3.1. Der Funktionsbegriff	(3)
3.2. Lineare Funktionen	(10)
3.3. Nullstellen linearer Funktionen; lineare Gleichungen	(4)
3.4. Lösung linearer Gleichungen	(11)
4. Flächen- und Rauminhaltsberechnung	**22 Stunden**
4.1. Volumenvergleiche	(3)
4.2. Pyramiden	(8)
4.3. Kreiskegel	(6)
4.4. Kugel	(5)

Klasse 9

1. Reelle Zahlen; Arbeiten mit Variablen	**43 Stunden**
1.1. Wiederholung und Systematisierung	(9)
1.2. Reelle Zahlen	(9)
1.3. Arbeiten mit Variablen	(25)
2. Ungleichungen und Gleichungssysteme	**25 Stunden**
2.1. Lineare Ungleichungen	(13)
2.2. Systeme aus zwei linearen Gleichungen	(12)
3. Potenzen und Potenzfunktionen	**32 Stunden**
3.1. Potenzen	(18)
3.2. Potenzfunktionen	(14)
4. Quadratische Funktionen und quadratische Gleichungen	**30 Stunden**
4.1. Quadratische Funktionen	(12)
4.2. Quadratische Gleichungen	(18)
5. Exponential- und Logarithmusfunktionen; Rechenhilfsmittel	**20 Stunden**
5.1. Exponential- und Logarithmusfunktionen	(8)
5.2. Rechenhilfsmittel	(12)

Klasse 10

1. Winkelfunktionen	**62 Stunden**
1.1. Die Funktion $y = \sin x$	(10)
1.2. Die Funktionen $y = \cos x$, $y = \tan x$ und $y = \cot x$	(8)
1.3. Beziehungen zwischen Winkelfunktionswerten	(14)
1.4. Anwendung der Winkelfunktionen bei Dreiecksberechnungen	(30)
2. Körperdarstellung und Körperberechnung	**30 Stunden**
2.1. Wiederholung und Ergänzung	(16)
2.2. Pyramiden- und Kreiskegelstümpfe	(14)
3. Festigung und Systematisierung; Prüfungsvorbereitung	**20 Stunden**

Vom Schuljahr 1979/80 an sind Arbeitsgemeinschaften nach Rahmenprogrammen zu folgenden mathematischen beziehungsweise mit Mathematik unmittelbar verbundenen Disziplinen möglich:

- Praktische Mathematik;
- Arbeiten mit Mengen;
- Elementare Statistik;
- Elektronische Datenverarbeitung.

Vom Ministerium für Volksbildung bestätigte Rahmenprogramme liegen vor, dazu entsprechende Lehrmaterialien [15] [16] [61].

1. Reelle Zahlen; Arbeiten mit Variablen

1.0. Vorbemerkungen

Das Stoffgebiet 1. „Reelle Zahlen; Arbeiten mit Variablen“ gliedert sich in zwei inhaltlich – und damit auch in der besonderen Zielstellung – verschiedenartige Teile, und zwar

– in eine Einführung in den Bereich der reellen Zahlen, der eine Zusammenfassung und Systematisierung der den Schülern bereits bekannten Zahlenbereiche – in Verbindung mit den grundlegenden Begriffen und Relationen der Mengenlehre – vorausgeht (Stoffeinheiten 1.1. „Wiederholung und Systematisierung“ und 1.2. „Reelle Zahlen“), und
– in eine Weiterführung des Arbeitens mit Variablen, die durch eine Wiederholung und Festigung der Vorkenntnisse der Schüler über Variable, ihre Anwendung und über Grundbereiche von Variablen eingeleitet wird (Stoffeinheit 1.3. „Arbeiten mit Variablen“).

Der Lehrplan nennt dementsprechend für die Behandlung dieses Stoffgebiets eine *zweifache Aufgabe* im Bereich der **mathematischen Grundlagenbildung** (Lp 21):

– Vertrautmachen der Schüler mit dem Begriff „reelle Zahl“ und mit der Art und Weise, wie mit reellen Zahlen gerechnet wird;
– Vertiefen und Festigen der Fertigkeiten der Schüler im Arbeiten mit Variablen.

Der Unterricht im Rahmen dieses Stoffgebiets muß wichtige *Voraussetzungen für die Behandlung aller weiteren Stoffgebiete der Klasse 9* schaffen. Das betrifft, wenn der praktische Aspekt betrachtet wird, besonders das Rechnen im dekadischen Positionssystem und das Arbeiten mit Variablen (Umformen von Termen, Operationen mit Binomen und Polynomen). Ebenso bedeutsam sind jedoch die Grundlagen, welche die Schüler für die mengentheoretische Betrachtung des Stoffes und für die Anwendung wichtiger mathematischer Methoden im weiteren Verlauf des Mathematikunterrichts benötigen. Im übrigen werden durch eine umfassende und gründliche Einführung in das Arbeiten mit Variablen auch Vorleistungen für andere Unterrichtsfächer und für die Lebenspraxis der Heranwachsenden geschaffen. Beispiele aus der Physik und anderen Wissensbereichen, die diesem Zweck dienen, hebt der Lehrplan besonders hervor; vgl. Lp 22, 23.

Inhalt und Aufgabe des Unterrichts lassen erkennen, daß die Stoffeinheiten 1.1. und 1.2. einen besonders engen Bezug zu den *fachlichen Leitlinien* „Mengen“ und „Zahlenbereichserweiterungen“ – in gewisser Weise auch zur Leitlinie „Abbildungen“ – haben; die Stoffeinheit 1.3. zeigt eine unmittelbare Verbindung mit der Leitlinie „Variable“; vgl. Uh 12. Von den *Leitlinien der mathematischen Methode* ist für die Stoffeinheiten 1.1. und 1.2. vor allem die Leitlinie „Definieren“ ,für die Stoffeinheit 1.3. die Leitlinie „Hilfsmittel mathematischen Arbeitens“ (Rechentechnik) bedeutsam; vgl. Uh 20f. Die Bemerkung, daß in den Stoffeinheiten 1.1. und 1.2. andere Leit-

linien hervortreten als in der Stoffeinheit 1.3., und der Hinweis auf die zweifache Zielstellung des Unterrichts in diesem Stoffgebiet sollen nicht den Eindruck entstehen lassen, als ob es keine inhaltlich verbindenden Aspekte im gesamten Stoffgebiet gäbe.
Zu solchen Aspekten gehören die mengentheoretische Betrachtungsweise (zur Leitlinie „Mengen“ hat auch die Stoffeinheit 1.3. Bezug, z. B.: Grundbereiche von Variablen) und allgemeine Prinzipien des mathematischen Arbeitens (z. B. das Rückführen eines Problems auf ein bereits gelöstes).

Im Hinblick auf die **ideologische Bildung und Erziehung** ergeben sich bei der Erweiterung der Zahlenbereiche von den natürlichen Zahlen bis zu den reellen Zahlen zwanglos philosophische Betrachtungen über das Wesen und den Ursprung der Mathematik, ihrer Begriffe, Gesetze und Methoden. Das Arbeiten mit Variablen vermittelt darüber hinaus noch einen Einblick in die Notwendigkeit und Zweckmäßigkeit, sich in der Mathematik einer spezifischen Terminologie und Symbolik zu bedienen. In diesem Zusammenhang sollen die Schüler auch erkennen, daß man mit Variablen nicht „rechnen“ kann, sondern daß sich die Operationen auf die Elemente des gewählten Grundbereichs der Variablen, also auf Zahlen (oder Größen) beziehen.

Bei der **methodischen Gestaltung** des Unterrichts in diesem Stoffgebiet darf nicht übersehen werden, daß in der Klasse zunächst ein möglichst einheitliches Ausgangsniveau und eine möglichst einheitliche Grundlage für den weiteren Unterricht zu schaffen sind. Alle Unterrichtseinheiten dieses Stoffgebietes erfassen Stoff aus dem Unterricht vorangegangener Klassenstufen, der wiederholt, gefestigt und – was besonders bedeutsam ist – unter neuen Gesichtspunkten systematisiert werden muß; vgl. Lp 16, 24. Die Kenntnisse, über die die Schüler beim Eintritt in Klasse 9 verfügen, können unter Umständen nach Inhalt und Niveau individuell erheblich differieren.

Bei der Behandlung der Stoffeinheit 1.1. „Wiederholung und Systematisierung“ ist zu beachten, daß der Unterricht hauptsächlich der Vorbereitung auf die *Einführung der reellen Zahlen* dient und sich deshalb umfangreiche und zeitraubende Erörterungen über die Eigenschaften der einzelnen Zahlenbereiche – von den natürlichen bis zu den rationalen Zahlen – verbieten. Die notwendigen Vergleiche zwischen den Zahlenbereichen dürfen nicht Selbstzweck sein. Wichtig ist eine zwingende Motivation für die Erweiterung des Bereichs der rationalen Zahlen zum Bereich der reellen Zahlen, da diese Erweiterung kaum so sinnfällig, z. B. durch Verweis auf praktische Aufgaben des Lebens, begründet werden kann wie z. B. die Erweiterung des Bereichs der natürlichen Zahlen zum Bereich der gebrochenen Zahlen. Diese Motivation ergibt sich – traditionell – aus dem Beweis, daß die Gleichung $x^2 = 2$ im Bereich der rationalen Zahlen keine Lösung hat. Auf die begrifflichen Unterschiede zwischen den rationalen und den reellen Zahlen kommt der Mathematikunterricht der Klasse 9 im Rahmen anderer Stoffgebiete noch mehrfach zurück. Klarheit im Erfassen dieser Unterschiede ist unbedingt notwendig, zumal beim praktischen Rechnen (Ziffernrechnen) nur mit rationalen Zahlen (bei Irrationalzahlen mit rationalen Näherungswerten) operiert wird.
Die vom Lehrplan geforderte Definition der reellen Zahlen als unendliche Dezimalbrüche (Lp 25) weicht von dem Prinzip ab, das die Schüler bisher bei der Erweiterung von Zahlenbereichen kennen und anwenden gelernt haben: der Definition durch Klassen äquivalenter Zahlenpaare.

Im Tafelwerk [62] und auch im Buch „Mathematik in Übersichten" [41] werden die reellen Zahlen als Klassen äquivalenter Intervallschachtelungen gekennzeichnet. Eine besondere Erklärung, wie diese Definition mit der Definition der reellen Zahlen als unendliche Dezimalbrüche zusammenhängt, wird vom Lehrplan ebensowenig wie die Definition äquivalenter Schachtelungen gefordert. Das Prinzip der Intervallschachtelung (durch fortgesetzte Zehnteilung der Intervalle) kennen die Schüler jedoch schon aus dem Unterricht der Klasse 7, sie haben es bei der Ermittlung rationaler Näherungswerte für irrationale Quadratwurzeln benutzt. Im weiteren Unterricht der Klasse 9 wird es wiederum angewendet.

Zur Vorbereitung auf die Definition der reellen Zahlen– sie ist in der Stoffeinheit 1.2. „Reelle Zahlen" vorgesehen – sollte den Schülern bewußtgemacht werden:

- Jede rationale Zahl hat eine eindeutig bestimmte Darstellung als endlicher oder als unendlicher periodischer Dezimalbruch ohne Neunerperiode.
- Jeder endliche oder unendliche periodische Dezimalbruch läßt sich auf genau eine Weise als Quotient $\frac{a}{b}$, in dem a und b teilerfremde ganze Zahlen sind ($b > 0$), darstellen.
- Jeder unendliche periodische Dezimalbruch läßt sich durch eine Folge von Doppelungleichungen beschreiben. Jede dieser Doppelungleichungen grenzt den Dezimalbruch durch zwei endliche Dezimalbrüche ein. Die Differenz dieser zwei endlichen Dezimalbrüche kann – durch Vergrößerung der Anzahl der Dezimalstellen – beliebig klein gemacht werden.
- Jeder rationalen Zahl ist ein Punkt der Zahlengeraden eindeutig zugeordnet, es ist jedoch nicht jedem Punkt der Zahlengeraden eine rationale Zahl zugeordnet.

Die Existenz irrationaler Punkte auf der Zahlengeraden motiviert die Forderung, den Zahlenbereich so zu erweitern, daß jedem Punkt der Zahlengeraden eine Zahl derart zugeordnet werden kann, daß eine eineindeutige Zuordnung zwischen den Zahlen und den Punkten der Zahlengeraden besteht.
Bei der Wiederholung und Systematisierung der Zahlenbereiche (Stoffeinheit 1.1.) wäre hervorzuheben, daß der Bereich der rationalen Zahlen schrittweise aus dem Bereich der natürlichen Zahlen aufgebaut wird. Wesentliche Eigenschaften des Bereichs der natürlichen Zahlen gelten auch in den weiteren Bereichen. Gewisse Eigenschaften, wie die Existenz eines Nachfolgers, werden durch andere Eigenschaften, wie das Dichtliegen, ersetzt.
Obgleich, wie aus dem eben Dargelegten hervorgeht, bei der Motivation der Erweiterung des Zahlenbereichs zum Bereich der reellen Zahlen und bei der Erläuterung der Definition der reellen Zahlen vielfach geometrische Vorstellungen herangezogen werden (vgl. Lp 24, 25; Lb 12f), ist es notwendig, logisch streng zwischen den arithmetischen und den geometrischen Beziehungen zu trennen und dies den Schülern auch bewußtzumachen. Weltanschaulich bedeutsam ist dabei die Erkenntnis, daß die Gesetzmäßigkeiten eines Zahlenbereichs allein auf der Grundlage entsprechender Definitionen und Axiome beweisbar sind und der Bezug zur Geometrie nur heuristischen Wert hat. Eine klare Unterscheidung zwischen arithmetischen und geometrischen Zusammenhängen ist auch bei der Behandlung von Funktionen und Gleichungen unerläßlich; vgl. Vorbemerkungen zu den Stoffgebieten 2. bis 5.
Beim *Arbeiten mit Variablen* (Stoffeinheit 1.3.) wird ausdrücklich gefordert (Lp 23), die Übungen im Umformen von Termen möglichst so zu gestalten, daß entweder wichtige Vorleistungen für nachfolgende Stoffgebiete erbracht werden oder die Zweckmäßigkeit, die erzielte Vereinfachung im Hinblick auf die weitere Verwendung des jeweiligen Terms offensichtlich ist. Eine entsprechende Konzentration des

Übungsstoffs soll bewirken, daß die Schüler das für ihre weitere Bildung Wesentliche auch sicher beherrschen und sich nicht vielerlei nur formal aneignen.
Die Schüler sind in der Regel bereits seit dem Unterricht in Klasse 1 an das Arbeiten mit Variablen gewöhnt. Die Schüler wissen auch schon, daß für die Variablen nur Zahlen eines bestimmten – des vorgegebenen – Bereichs eingesetzt werden. Ebenso haben die Schüler auch in anderen Unterrichtsfächern– Physik, Chemie, polytechnischer Unterricht – mit Variablen gearbeitet (dort waren die Elemente des Grundbereichs der Variablen z. T. Größen). Hier kommt es vor allem auf folgendes an:

- Den Schülern muß bewußt werden, daß das Verwenden von Variablen nur bei Angabe des jeweiligen Grundbereichs der Variablen sinnvoll ist.
- Die Schüler müssen die Veränderung des Wertes eines Terms bei Veränderungen in der Belegung der Variablen richtig einschätzen lernen.
- Die Schüler müssen die Struktur vorgegebener Terme richtig deuten lernen, unabhängig von der Belegung der einzelnen Variablen.
- Die Schüler müssen die für die einzelnen Zahlenbereiche geltenden Rechengesetze sinnvoll beim Umformen von Termen anwenden und feststellen können, ob ein Term im vorgegebenen Bereich definiert ist.

Um die Anwendbarkeit der im Mathematikunterricht gewonnenen Erkenntnisse zu sichern, sind Aufgaben mit Größen aus der Geometrie, der Physik, aus anderen Unterrichtsfächern und aus der Lebenspraxis in die Betrachtungen einzubeziehen; vgl. Lp 22f, 26. Durch das Übertragen verbal vorgegebener Sachverhalte in mathematische Symbole und umgekehrt, durch die verbale Darstellung mathematischer Ausdrücke, kann einer Überbetonung des formalen Arbeitens mit Variablen wirkungsvoll begegnet werden.

Übersicht zum Stoffgebiet 1. Reelle Zahlen; Arbeiten mit Variablen (43 Stunden – 27 Lerneinheiten)

Unterrichtseinheit	Std.	Seiten Lb	Seiten Uh	Wiederholung	Einführung	Festigung
1.1.1. Grundbegriffe der Mengenlehre (LE 1)	1	4	47	Begriffe „Menge“, „Element von“ Mengengleichheit Teilmengenrelation Mengendiagramme		Begriffe „Menge“, „Element von“ Mengengleichheit Teilmengenrelation Mengendiagramme
1.1.2. Der Aufbau der Zahlenbereiche bis zum Bereich der rationalen Zahlen (LE 2 und 3)	4	6	47	Grundgesetze der Arithmetik natürlicher Zahlen Definition der gebrochenen Zahlen Regeln für das Rechnen mit gebrochenen Zahlen Definition der rationalen Zahlen Regeln für das Rechnen mit rationalen Zahlen Definition der ganzen Zahlen Teilmengenrelationen in den Zahlenbereichen Abbildung rationaler Zahlen auf die Zahlengerade		Teilmengenrelationen in den Zahlenbereichen Abbildung rationaler Zahlen auf die Zahlengerade
1.1.3. Ergänzungen zum Bereich der rationalen Zahlen (LE 4 und 5)	4	9	51	Dezimalbruchdarstellung rationaler Zahlen Rechnen mit Dezimalbrüchen Rechnen mit Näherungswerten Dichtheit des Bereichs der rationalen Zahlen		Dezimalbruchdarstellung rationaler Zahlen Dichtheit des Bereichs der rationalen Zahlen

Unterrichtseinheit	Std.	Seiten Lb	Uh	Wiederholung	Einführung	Festigung
1.2.1. Irrationale Zahlen; unendliche Dezimalbrüche (LE 6 bis 10)	5	12	54	Bereich der rationalen Zahlen Eindeutigkeit der Primzahlzerlegung Begriff der Strecke Menge, echte Teilmenge Definition periodischer Dezimalbrüche Entgegengesetzte Zahlen	Beweis des Satzes: Es gibt kein $x \in R$ mit $x^2 = 2$ Konstruktion irrationaler Punkte auf der Zahlengeraden; Intervallänge, Intervallschachtelung durch Zehnteilung Satz: Jede auf der Zahlengeraden gegebene Schachtelung enthält genau einen Punkt Definition der positiven unendlichen Dezimalbrüche; Ausschluß der Neunerperiode Definition negativer Dezimalbrüche	Verfahren des indirekten Beweises Intervall Beschreibung von Punkten auf der Zahlengeraden Schachtelung durch fortgesetzte Zehnteilung
1.2.2. Der Bereich der reellen Zahlen (LE 11 bis 14)	4	21	56	Definition der gebrochenen Zahlen und der rationalen Zahlen Ordnung im Bereich der gebrochenen Zahlen 2. und 3. Potenzen und Wurzeln	Definition der reellen Zahlen Teilmengen in der Menge der reellen Zahlen Begriffliche Unterscheidung verschiedener Zahlenmengen Definition der Ordnung in der Menge der reellen Zahlen Rationale Zahlen als Teilbereich der reellen Zahlen Erklärung der Addition und der Multiplikation reeller Zahlen Definition der Wurzel Lösbarkeit der Gleichungen $x^n = a$ mit $n \in N$, $a \neq 0$	Definition der reellen Zahlen Beziehungen zwischen den Zahlenbereichen Rechnen mit Näherungswerten

Unterrichtseinheit	Std.	Seiten Lb	Uh	Wiederholung	Einführung	Festigung
1.3.1. Variable; Grundbereiche von Variablen; Terme (LE 15)	1	27	58	Variable: Grundbereiche von Variablen; Terme Einsetzen von Zahlen und Größen für Variable Rechnen mit rationalen Zahlen		Beispiele für Grundbereiche von Variablen Kurzes und übersichtliches Angeben von Sachverhalten mit Hilfe von Variablen
1.3.2. Einige Umformungen von Termen (LE 16)	3	29	59	Summe, Summand, Differenz, Minuend, Subtrahend; Produkt, Faktor Distributivität von Addition und Multiplikation		Auflösen (und Setzen) von Klammern Ausmultiplizieren und Ausklammern
1.3.3. Die Struktur von Termen (LE 17)	1	32	61	Summe, Differenz, Produkt, Quotient Ausführbarkeit der Division durch Null Grundbereiche von Variablen	Struktur von Termen	Struktur von Termen Umformen von Termen Rechenoperationen nach dem Belegen der Variablen von Termen
1.3.4. Binomische Formeln (LE 18)	3	33	62	Multiplikation von Summen Rechnen mit rationalen Zahlen Belegen von Variablen mit Elementen des Grundbereichs der Variablen	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ $(a, b \in P)$ Vollständiges Quadrat	Bedeutung von Formeln Anwenden der binomischen Formeln Erkennen der Strukturen von Termen
1.3.5. Die quadratische Ergänzung (LE 19)	1	34	64	Zerlegen von Termen	Quadratische Ergänzung	Anwenden der binomischen Formeln Umformen von Termen in vollständige Quadrate
1.3.6. Erweitern und Kürzen von Quotienten (LE 20)	1	35	65	Erweitern und Kürzen von Brüchen Ausmultiplizieren und Ausklammern	Erweitern und Kürzen von Quotienten mit Hilfe von Variablen	Ausklammern und Anwenden der binomischen Formeln Schreiben von Termen als Produkte

Unterrichtseinheit	Std.	Seiten Lb	Uh	Wiederholung	Einführung	Festigung
1.3.7. Division von Summen (LE 21 und 22*)	2	36	66	Zurückführen der Division auf die Multiplikation Schreibweisen von Divisionsaufgaben	Division einer Summe durch einen eingliedrigen Ausdruck	Kürzen von Quotienten Division einer Summe durch einen eingliedrigen Ausdruck Beschreiben der Strukturen von Termen
1.3.8. Addieren und Subtrahieren von Quotienten (LE 23 und 24)	4	39	66	K. g. V. von natürlichen Zahlen Ausklammern, Ausmultiplizieren Umwandeln einer Summe in ein Produkt mit Hilfe der binomischen Formeln Vergleichen von rationalen Zahlen	Gemeinsame Vielfache Gemeinsame Nenner von Quotienten mit Variablen	Beachten des Grundbereichs von Variablen (besonders beim Vergleichen von Quotienten) Erkennen der Strukturen von Termen Ermitteln eines gemeinsamen Nenners und von Erweiterungsfaktoren
1.3.9. Multiplizieren und Dividieren von Quotienten (LE 25 und 26)	4	40	69	Multiplikation und Division von rationalen Zahlen Vorzeichenregeln	Multiplizieren und Dividieren von Quotienten mit Variablen Doppelbrüche	Kürzen von Quotienten Multiplizieren und Dividieren von Quotienten Zurückführung der Division auf die Multiplikation
1.3.10. Anwendungen des Umformens von Termen (LE 27)	3	41	70	Regeln für das Umformen von Termen Wiedergeben eines Textes mit Hilfe von Variablen Darstellen von Zahlen Regeln für das Umformen von Gleichungen		Wiedergeben eines Textes als Term und umgekehrt Begründen von Umformungen
1.3.11. Klassenarbeit	2		71			

1.1. Wiederholung und Systematisierung
(LE 1 bis 5; 9 Std.)

1.1.1. Grundbegriffe der Mengenlehre (LE 1; 1 Std.)

In dieser Unterrichtseinheit muß den Schülern bewußt werden, daß die Begriffe „Menge“ und „Element“ als Grundbegriffe aufgefaßt werden und weitere Begriffe dann unter Verwenden der Grundbegriffe erklärt werden können.
Eine systematische Wiederholung – mit Beispielen für Mengen aus verschiedenen Sachbereichen, vor allem mit Mengen von Zahlen und geometrischen Objekten – soll helfen, besonders folgende Erkenntnisse der Schüler zu festigen.

- Die Menge A heißt Teilmenge von B genau dann, wenn gilt: Jedes Element von A ist Element von B.
- Die Menge A heißt echte Teilmenge von B genau dann, wenn gilt:
  1. Jedes Element von A ist Element von B;
  2. Es gibt mindestens ein Element von B, das nicht Element von A ist.
- Sind A und B beliebige Mengen, so ist $A = B$ genau dann, wenn gilt:
  1. Jedes Element von A ist Element von B;
  2. Jedes Element von B ist Element von A.

Die Beziehungen zwischen Mengen und ihren Teilmengen werden zweckmäßigerweise mit Hilfe von Mengendiagrammen veranschaulicht. Die Schüler müssen„ Teilmenge“ und „echte Teilmenge“ begrifflich exakt unterscheiden können.

In dieser Unterrichtseinheit werden auch – als eine Grundvoraussetzung für den weiteren Mathematikunterricht – häufig gebrauchte Wendungen der mathematischen Fachsprache wiederholt, und es wird, soweit notwendig, deren Bedeutung erläutert. Besonderes Augenmerk erfordert die Unterscheidung von „Es gibt *ein* Objekt“ (Bedeutung: mindestens ein), „... *höchstens ein* ...“, „... *genau ein* ...“ (Bedeutung: ein und nur ein). Außer Zahlenbeispielen für solche Aussagen (Lb 5) sollten auch Beispiele aus anderen Bereichen der Mathematik herangezogen werden. Bei diesen wiederholenden Betrachtungen kann man den Schülern auch bewußtmachen, daß gewisse Redewendungen in der Mathematik in einer klar abgegrenzten Bedeutung verwendet werden, die sich von der Umgangssprache mehr oder weniger unterscheidet.
Nützlich ist es, die Schüler den Inhalt von Aussagen, die Wendungen der mathematischen Fachsprache enthalten, kommentieren zu lassen. Der Kommentar zur Frage, ob die Aussage „Es gibt eine natürliche Zahl x mit $3 < x < 10$“ wahr sei (Lb 161/14a), könnte z. B. lauten:
Es gibt eine natürliche Zahl, die die gegebene Bedingung erfüllt. Das ist die Zahl 5. Es können noch weitere Zahlen, die die gegebene Bedingung erfüllen, existieren. In diesem Fall sind 4, 6, 7, 8 und 9 jene Zahlen.
Man sollte sich aber auf wenige Beispiele dieser Art beschränken.

1.1.2. Der Aufbau der Zahlenbereiche bis zum Bereich der rationalen Zahlen
(LE 2 und 3; 4 Std.)

Zu Beginn der Unterrichtseinheit, in der *1. Stunde*, werden die *Rechenoperationen* und die *Ordnung im Bereich der natürlichen Zahlen* wiederholt. Dabei wird ersicht-

Es gilt für alle Zahlen a, b, c		N	R^*	R	G
(1) Entweder $a < b$ oder $a = b$ oder $a > b$ Ordnung		×	×	×	×
(2) Wenn $a < b$ und $b < c$, so $a < c$ Transitivität der Ordnung		×	×	×	×
Addition	**Multiplikation**				
(3a) $a + b = b + a$	(3b) $a \cdot b = b \cdot a$ Kommutativität	×	×	×	×
(4a) $a + (b + c) = (a + b) + c$	(4b) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ Assoziativität	×	×	×	×
(5) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ Distributivität		×	×	×	×
(6a) $a + 0 = a$	(6b) $a \cdot 1 = a$ Operationen mit neutralen Elementen	×	×	×	×
(7a) Wenn $a < b$, so $a + c < b + c$	(7b) Wenn $a < b$, so $a \cdot c < b \cdot c$, für $c > 0$	×	×	×	×
	Wenn $a < b$, so $a \cdot c > b \cdot c$, für $c < 0$ Monotonie			×	×
(8a) Es gibt genau eine Zahl x mit $a + x = b$.				×	×
	(8b) Es gibt genau eine Zahl x mit $a \cdot x = b$, wenn $a \neq 0$.		×	×	
	(9) Es gibt zu jeder nicht ganzen Zahl a ganze Zahlen p und q mit $q \neq 0$ und $a = \frac{p}{q}$.		×	×	
	(10) Es gilt $a \cdot b = 0$ genau dann, wenn $a = 0$ oder $b = 0$ ist.	×	×	×	×

lich, daß Subtraktion und Division in diesem Zahlenbereich nicht uneingeschränkt ausführbar sind. Aus der Forderung, auch diese Operationen uneingeschränkt ausführen zu können, erwächst die Motivation für die Erweiterungen des Zahlenbereichs.

Auf den Unterschied zwischen den Begriffen „Menge der natürlichen Zahlen" und „Bereich der natürlichen Zahlen" sollten die Schüler besonders aufmerksam gemacht werden. Ein Zahlenbereich ist die jeweilige Menge von Zahlen, für die die Operationen Addition und Multiplikation sowie eine Ordnungsrelation definiert sind.

Als methodisches Mittel zur Festigung der Kenntnisse der Schüler über die Zahlenbereiche ist eine Karteikarte mit dem auf Uh 48 dargestellten Inhalt gut geeignet. Die Karte wird bei der Wiederholung des Bereichs der natürlichen Zahlen angelegt und später durch das Eintragen der Angaben zu den weiteren Zahlenbereichen ergänzt. Durch eine farbige Markierung am Rande z. B. kann leicht der Bereich gekennzeichnet werden, für den die Aussagen gültig sind.

In der *2. Stunde* dieser Unterrichtseinheit wird dargestellt, daß durch die *Erweiterung des Zahlenbereichs zum Bereich der gebrochenen Zahlen* die Einschränkung der Ausführbarkeit der Division beseitigt ist, die Tabelle wird entsprechend ergänzt bzw. abgeändert.
Bei der Wiederholung des Bereichs der gebrochenen Zahlen sollte nicht versäumt werden, die Fertigkeiten der Schüler im Rechnen mit gebrochenen Zahlen zu überprüfen, damit für den folgenden Unterricht der Umfang der notwendigen Übungen – auch der täglichen Übungen über einen längeren Zeitraum – richtig bemessen werden kann; vgl. auch Lb 161/17 bis 20 und Lb 162/29, 30.

In der *3. Stunde* dieser Unterrichtseinheit steht der *Bereich der rationalen Zahlen* im Mittelpunkt des Unterrichts. Eine ausführliche – und gründliche – Erörterung der Eigenschaften der rationalen Zahlen ist eine wichtige Voraussetzung für die erfolgreiche Behandlung der reellen Zahlen. Wesentlich sind vor allem die Gesetze und Regeln des Rechnens mit rationalen Zahlen sowie das Festigen der Fertigkeiten im Rechnen mit diesen Zahlen. Auf die Definition der rationalen Zahlen durch das Bilden „differenzgleicher" Paare gebrochener Zahlen sollte nicht ausführlich eingegangen werden.
Für diese Stunde ist der folgende methodische Ablauf zu empfehlen.

(1) Die Schüler lösen Gleichungen der Form $a + x = b$, mit $a, b \in R^*$. Die Bedingung $b \geqq a$ für die Lösbarkeit der Gleichung wird betont. Die Lösungen werden in der Form $x = b - a$ angegeben.
(2) Die Bedingung $b \geqq a$ wird fallengelassen. Die Lösung einer Gleichung $a + x = b$ mit $a > b$ wird gefordert und unter Bezugnahme auf die Vorkenntnisse der Schüler (aus Klasse 7) ausgeführt. Die Schüler formulieren die Erkenntnis, daß zur Lösung von Gleichungen des zweiten Typs die Erweiterung des Bereichs der gebrochenen Zahlen zum Bereich der rationalen Zahlen notwendig ist.
(3) Nach der Charakterisierung der positiven und der negativen rationalen Zahlen, verbunden mit entsprechenden Übungen, werden die Definitionen der Addition, der Multiplikation und des Größenvergleichs, einschließlich der Rechengesetze sowie des Begriffs „entgegengesetzte Zahlen", wiederholt.
(4) Da die Monotoniegesetze für das systematische Behandeln der Gleichungslehre von besonderer Bedeutung sind, wird auf das Monotoniegesetz der Multiplikation besonders eingegangen.

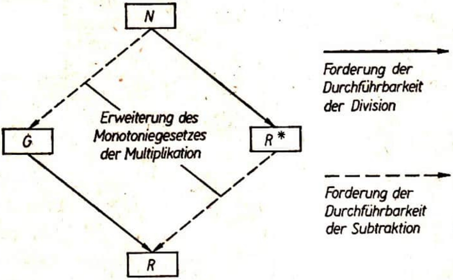
Den Ausgangspunkt für die Betrachtungen kann der aus dem Unterricht in Klasse 7 bekannte Satz über die Ordnung im Bereich der rationalen Zahlen bilden.

– Jede negative rationale Zahl ist kleiner als Null und damit kleiner als jede positive rationale Zahl.

– Für nichtnegative rationale Zahlen a und b gilt:
  $a < b$ genau dann, wenn $|a| < |b|$.
– Für negative rationale Zahlen a und b gilt:
  $a < b$ genau dann, wenn $|a| > |b|$.

Unter Anwendung des Monotoniegesetzes für rationale Zahlen lassen sich die Rechenregeln leicht gewinnen. Man kann eine Fallunterscheidung durchführen. Einfacher erscheint aber folgende Überlegung: Die Tatsache, daß der Betrag eines Produktes von den Vorzeichen der Faktoren unabhängig ist und bei einer Multiplikation einer beliebigen rationalen Zahl mit einer positiven Zahl das Vorzeichen jener Zahl nicht verändert, dagegen bei einer Multiplikation mit einer negativen Zahl umgekehrt wird, impliziert bereits das Monotoniegesetz. Dieser allgemein zu formulierende Gedankengang kann durch die Behandlung einiger Beispiele vorbereitet und dann von den Schülern weitgehend selbständig dargelegt werden.

In der *4. Stunde* wird die *Erweiterung der Zahlenbereiche zusammenfassend* wiederholt; vgl. Lb 9, Auftrag A 12. Dabei sollten die Isomorphiebeziehungen zwischen dem Bereich der natürlichen Zahlen und einem Teilbereich der gebrochenen (ganzen, rationalen) Zahlen, dem Bereich der gebrochenen Zahlen und einem Teilbereich der rationalen Zahlen und dem Bereich der ganzen Zahlen und einem Teilbereich der rationalen Zahlen herausgearbeitet werden. Mit Hilfe einer anschaulichen Darstellung (Bild 50/1) lassen sich diese Beziehungen leicht erfassen.



50/1

Im zweiten Teil der Stunde ist die Abbildung der rationalen Zahlen auf die Zahlengerade Unterrichtsgegenstand. Dabei ist folgendes Vorgehen zu empfehlen.

(1) Nach beliebiger Wahl eines Nullpunktes und eines Einheitspunktes werden die den natürlichen Zahlen zugeordneten Punkte durch Streckenabtragung gewonnen.
(2) Durch Streckenteilung werden die den gebrochenen Zahlen zugeordneten Punkte konstruiert.
(3) Unter Bezugnahme auf die Definition der einer Zahl entgegengesetzten Zahl werden die Punkte, die den negativen rationalen Zahlen zugeordnet sind, durch Spiegelung am Nullpunkt konstruiert.

Im Anschluß daran kann festgestellt werden, daß das Prinzip der Spiegelung am Nullpunkt, angewendet auf die den natürlichen Zahlen $n > 0$ zugeordneten Punkte, zu jenen Punkten führt, die den negativen ganzen Zahlen zugeordnet sind. Solche

Überlegungen können – nach Einleitung durch einen Impuls – von den Schülern weitgehend selbständig vorgenommen werden. Sie geben Gelegenheit, die Beziehungen zwischen den einzelnen Zahlenbereichen nochmals deutlich zu machen.

Abschließend werden als Zusammenfassung die folgenden Feststellungen hervorgehoben.

1. Die den natürlichen bzw. den ganzen Zahlen zugeordneten Punkte liegen diskret.
2. Die den gebrochenen bzw. den rationalen Zahlen zugeordneten Punkte liegen überall dicht.

Das Dichtliegen der rationalen Zahlen wurde bereits in Klasse 7 propädeutisch behandelt. Den Schülern wird jetzt mitgeteilt, daß in den folgenden Stunden dieser Begriff ausführlich untersucht wird.

1.1.3. Ergänzungen zum Bereich der rationalen Zahlen (LE 4 und 5; 4 Std.)

In dieser Unterrichtszeit werden wesentliche *Voraussetzungen für die Behandlung der reellen Zahlen* geschaffen.
Anknüpfend an die Kenntnisse der Schüler aus dem Unterricht der Klassen 6 und 7 wird die Dezimalbruchdarstellung der rationalen Zahlen wiederholt und schließlich die Darstellung rationaler Zahlen durch Folgen („Ketten") von Doppelungleichungen zur Begründung des Rechnens mit Näherungswerten herangezogen. Als weitere wesentliche Voraussetzung werden die Dichtheit des Bereichs der rationalen Zahlen und insbesondere die Dichtheit gewisser Teilbereiche der rationalen Zahlen betrachtet; vgl. Lb 12, Auftrag A 15.

Die zur Verfügung stehenden Unterrichtsstunden können wie folgt grob aufgegliedert werden.

1. Stunde: Darstellung der rationalen Zahlen als Dezimalbrüche
2. Stunde: Das Rechnen mit periodischen Dezimalbrüchen und ihren Näherungswerten
3. Stunde: Der Bereich der rationalen Zahlen als dicht bezüglich der Ordnungsrelation
4. Stunde: Zusammenfassung und Systematisierung

In der *1. Stunde* wird die *Umwandlung rationaler Zahlen*, die in der Form $\frac{p}{q}$ mit $p, q \in G$; $q \neq 0$ gegeben sind, *in Dezimalbrüche* wiederholt.
Dabei wird die Tatsache, daß nur diejenigen rationalen Zahlen, deren Nenner nur die Primfaktoren 2 oder 5 enthalten, als endliche Dezimalbrüche dargestellt werden können, hervorgehoben (auf nichtdekadische Systeme kann dabei kurz hingewiesen werden).

Daß der Divisionsalgorithmus nicht abbricht, wenn der Divisor Primfaktoren enthält, die verschieden von 2 und 5 sind, berechtigt nicht dazu, die durch diesen Algorithmus gewonnene Darstellung dem Quotienten gleichzusetzen. Erst eine Grenzwertbetrachtung würde diese Berechtigung schaffen. Da der Grenzwertbegriff für den Unterricht in Klasse 9 noch nicht zur Verfügung steht, müssen die Betrachtungen an einer Folge von Ungleichungen durchgeführt werden; vgl. Lb 10.
Bei der Anwendung des Divisionsalgorithmus im Dezimalsystem treten Reste auf, die gleich Null oder verschieden von Null sind. Ist der Rest gleich Null, so bricht der Algorithmus ab, und das Ergebnis ist gleich dem Quotienten. Ist der Rest größer als Null, so ist das Ergebnis kleiner als der Quotient. Führt man dagegen den Algorithmus so aus, daß in diesem Falle ein negativer Rest auftritt, so ist das Ergebnis größer als der Quotient. Diese Überlegungen können leicht durch zwei Beispiele erläutert werden.

Beispiel 1:

$x = \frac{3}{8}$

$3:8 = 0{,}37$	$3:8 = 0{,}375$	$3:8 = 0{,}38$
0	0	0
30	30	30
24	24	24
60	60	60
56	56	64
4	40	−4
	40	
	0	

Es ist $0{,}37 < \frac{3}{8}$, $0{,}375 = \frac{3}{8}$, $0{,}38 > \frac{3}{8}$, und es folgt $0{,}37 < \frac{3}{8} < 0{,}38$.

Beispiel 2: *d*

$a = \frac{1}{3}$

$1:3 = 0{,}33$	$1:3 = 0{,}34$
0	0
10	10
9	9
10	10
9	12
1	−2

Es ist $0{,}33 < a$, $0{,}34 > a$, und es folgt $0{,}33 < a < 0{,}34$.

Da hierbei unabhängig davon, an welcher Stelle abgebrochen wird, stets der Rest 1 bzw. der Rest −2 auftritt, kann durch Verallgemeinerung die Gültigkeit der aufzustellenden Kette von Ungleichungen gefolgert werden.

$$\begin{array}{rcl} 0 & < a < & 1 \\ 0{,}3 & < a < & 0{,}4 \\ 0{,}33 & < a < & 0{,}34 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0{,}33\ldots3 & < a < & 0{,}3\ldots34 \end{array}$$

usw.

Da in dieser Folge von Doppelungleichungen die Differenzen immer kleiner werden, kann man folgern, daß die Quotienten immer besser angenähert werden.

In der *2. Stunde* wird nochmals die *Gleichwertigkeit der Darstellung der rationalen Zahlen als gewöhnliche Brüche und der Darstellung als endliche bzw. unendliche periodische Dezimalbrüche* herausgearbeitet. Dabei sollte jedoch darauf hingewiesen werden, daß für das mündliche und schriftliche Rechnen unter Umständen die Bruchschreibweise günstiger als die Darstellung durch einen Dezimalbruch sein kann.
Wird anschließend Lb 10, Auftrag A 13, behandelt, so sollte deutlich gemacht werden, daß die Subtrahenden in a) bzw. die Minuenden in b) die links bzw. die rechts stehenden Zahlen einer Doppelungleichung (Lb 10, Doppelungleichung) sind und daß die Annäherung an die Zahl $\frac{1}{3}$ um so besser ist, je größer die Anzahl der Stellen ist.

Im Anschluß an ein entsprechendes Beispiel (etwa Lb 10, Beispiel A 2) wären dann die aus dem Unterricht in Klasse 6 bekannten Regeln für das Rechnen mit Näherungswerten zu wiederholen. Besonders ist dabei die Multiplikation zu beachten.

Die *3. Stunde* der Unterrichtseinheit knüpft an die letzte Stunde der Unterrichtseinheit 1.1.2. an, in der auf Grund der Konstruktion der den rationalen Zahlen zugeordneten rationalen Punkte der Zahlengeraden das Dichtliegen der rationalen Punkte und damit das *Dichtliegen der rationalen Zahlen* vermutet worden war.
Die Schüler können in selbständiger Arbeit feststellen, daß die Begriffe „Vorgänger" und „Nachfolger" nicht auf den Bereich der rationalen Zahlen übertragen werden können.
Nach Lösung der Aufgabe, zehn verschiedene (rationale) Zahlen zwischen 0,01 und 0,02 zu nennen (vgl. Lb 11, Auftrag A 14) ist von den Schülern die Frage zu beantworten, ob man *beliebig* viele Zahlen zwischen 0,01 und 0,02 angeben kann. Ein Verfahren zum Auffinden derartiger Zahlen wird erarbeitet, z. B. das Hinzufügen weiterer Dezimalstellen. (Dabei ist hervorzuheben, daß nur endlich viele Stellen ergänzt werden bzw. daß diese endlich vielen Stellen als Periode auftreten können.)
Um den Beweis vorzubereiten, daß die rationalen Zahlen überall dicht liegen, d. h. daß zwischen zwei beliebigen rationalen Zahlen stets eine weitere rationale Zahl liegt, wird eine entsprechende Übung mit rationalen Zahlen, die in der Form $\frac{p}{q}$ $(q \neq 0)$ dargestellt sind, durchgeführt, z. B.: *Ermitteln Sie rationale Zahlen zwischen* $\frac{1}{3}$ *und* $\frac{1}{2}$!
Durch Erweitern auf $\frac{4}{12}$ und $\frac{6}{12}$ ergibt sich $\frac{5}{12}$ als eine Lösung. Diese Lösung ist das arithmetische Mittel der beiden gegebenen Zahlen. Auf die gleiche Weise läßt sich eine rationale Zahl, die zwischen $\frac{4}{12}$ und $\frac{5}{12}$ bzw. $\frac{5}{12}$ und $\frac{6}{12}$ liegt, ermitteln usw.
Besonderer Wert ist darauf zu legen, daß der „Begriff dicht liegen" richtig erfaßt und nicht im umgangssprachlichen Sinne mißdeutet wird.
Zur Vorbereitung auf die Behandlung der reellen Zahlen muß deutlich hervorgehoben werden, daß zwar jeder rationalen Zahl eindeutig ein Punkt der Zahlengeraden zugeordnet werden kann, jedoch andererseits Punkte auf der Zahlengeraden existieren können, denen keine rationale Zahl zugeordnet werden kann. Eine ausführliche Behandlung einer Aufgabe wie Lb 12, Auftrag A 15a), erscheint zweckmäßig, da im nachfolgenden Unterricht darauf Bezug genommen wird. Darüber hinaus wird die Kenntnis des Begriffs „dicht liegen" nochmals gesichert. Die in Lb 12, Auftrag A 15a) genannte Menge ist eine Teilmenge der Menge der rationalen Zahlen. Das bedeutet aber „Lücken" in der dicht geordneten Teilmenge.
Bei der Lösung dieser Aufgabe geht man am besten von der Ungleichung $a < \frac{a+b}{2} < b$ aus und zeigt nur noch, daß mit $a, b \in \left\{\frac{m}{10^n}\right\}$ auch $\frac{a+b}{2} \in \left\{\frac{m}{10^n}\right\}$ gilt. Durch Erweitern ist dieser Nachweis leicht zu führen, denn

$$\frac{a+b}{2} = \frac{5}{10}(a+b) = \frac{5}{10} \cdot \left(\frac{m_1}{10^{n_1}} + \frac{m_2}{10^{n_2}}\right) = \frac{5m_1 \cdot 10^{n_2} + 5m_2 \cdot 10^{n_1}}{10 \cdot 10^{n_1} \cdot 10^{n_2}}.$$

Mit $m_1, m_2 \in G$ ist $5m_1 \,.\, 10^{n_2} + 5m_2 \,.\, 10^{n_1}$ eine ganze Zahl.

Die abschließende *4. Stunde* dieser Stoffeinheit sollte der *Systematisierung* des Gelernten dienen.

1.2. Reelle Zahlen

(LE 6 bis 14; 9 Std.)

1.2.1. Irrationale Zahlen; unendliche Dezimalbrüche (LE 6 bis 10; 5 Std.)

Bereits in Klasse 7 wurden die Schüler auf die Existenz nichtrationaler Zahlen bei der Behandlung von Quadratwurzeln hingewiesen. Es wurde erläutert, daß jede Quadratwurzel mit beliebiger Genauigkeit durch einen endlichen Dezimalbruch angenähert werden kann und dieser Näherungswert bei irrationalen Wurzeln für die praktische Anwendung genügt.

Nunmehr ist die Existenz irrationaler Zahlen exakt nachzuweisen. Deshalb steht im Mittelpunkt der *1. Stunde* dieser Unterrichtseinheit der Beweis, daß es keine rationale Zahl x gibt, für die $x^2 = 2$ gilt.
Aus der Tatsache, daß der Bereich der rationalen Zahlen dicht geordnet ist und jeder rationalen Zahl eindeutig ein Punkt der Zahlengeraden entspricht, folgt nicht, daß auch umgekehrt jedem Punkt der Zahlengeraden eine rationale Zahl zugeordnet werden kann. Das ist den Schülern bereits bekannt, sollte aber vor Beginn der Erarbeitung des Beweises nochmals betont werden. Von Betrachtungen über die Kommensurabilität von Strecken ist abzusehen.
Zur Vorbereitung des Beweises wird ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck benutzt, dessen Kathetenlängen und Flächeninhalt mit Hilfe von rationalen Zahlen meßbar sind. Nach Vervierfachung dieser Fläche entsteht ein Quadrat, dessen Flächeninhalt durch eine rationale Zahl meßbar ist. Aus der Definition der Flächenmessung folgt nun unmittelbar die Gleichung $x^2 = 2$.

Es erhebt sich bei diesem Vorgehen die Frage, ob als Maßzahlen für geometrische (und andere) Größen nur rationale Zahlen zugelassen werden dürfen. Sie muß für die Seitenlänge geometrischer Figuren verneint werden, wenn die Irrationalität von x für $x^2 = 2$ bewiesen werden kann.

Der Beweis des Satzes, daß es keine rationale Zahl x gibt, die die Gleichung $x^2 = 2$ erfüllt, ist – entsprechend dem Lehrplan – methodisch einfach zu gestalten. Bevor er ausgeführt wird, sollte jedoch der Satz über die Eindeutigkeit der Zerlegung einer natürlichen Zahl in Primzahlen wiederholt werden. Das kann ohne wesentlichen Zeitaufwand z. B. in den täglichen Übungen geschehen.
Das indirekte Beweisverfahren ist den Schülern bereits aus dem Unterricht in Klasse 8 bekannt. Es ist jedoch notwendig, hier hervorzuheben, in welchen Fällen indirekte Beweisverfahren zweckmäßig sind.
Nach der Durchführung des Beweises der Irrationalität von x für $x^2 = 2$ wird ein Verfahren für die Konstruktion irrationaler Punkte auf der Zahlengeraden mit den Schülern erarbeitet. Es schließen sich diesbezügliche Beispiele und Übungen an, z. B.: Lb 14, Auftrag A 17, Lb 164/42, 43.

Der zentrale Begriff der *2. Stunde* ist der Begriff „Intervall". Dabei ist hervorzuheben, daß für jedes Paar rationaler Zahlen a und b mit $a < b$ eine Menge $I = \{x\}$ existiert, wobei $a \leqq x \leqq b$ gilt. Ein Intervall kann auf die Zahlengerade abgebildet werden. Die Punkte der Zahlengeraden, die den rationalen Zahlen a und b zugeordnet sind, legen eine Strecke auf der Zahlengeraden fest.
Da den Schülern bereits bekannt ist, daß die rationalen Zahlen

$$\frac{m}{10^n} \quad (m \in G;\, n \in N)$$

eine dicht geordnete Menge bilden (vgl. Uh 53), ist es möglich, die Intervallgrenzen aus dieser Menge zu wählen. Nach diesen Betrachtungen wird das System der Intervalle entsprechend Lb 14f aufgebaut.
In einer kurzen Übung nach einem vorbereiteten Tafelbild werden einige Intervalle näher untersucht; z. B. Lb 164/45.

In der *3. Stunde* wird eingangs am konkreten Beispiel ein irrationaler Punkt durch eine Folge von Intervallen beschrieben (dabei sollte nicht nur das im Lehrbuch gegebene Beispiel nachgerechnet, sondern noch ein weiteres gewählt werden).
Wesentliches Element dieses Stundenteils ist das Stetigkeitsaxiom von CANTOR und DEDEKIND; vgl. Lb 17, Satz A 3. Zur Vertiefung der Erkenntnisse sollten von den Schülern auch Aufgaben über die Ordnung irrationaler Punkte gelöst werden; vgl. Lb 16, Auftrag A 19.
Zusammenfassend sollte in dieser Stunde betont werden, daß durch dieses Verfahren keine neuen Zahlen bestimmt wurden, sondern lediglich die Lage von irrationalen Punkten auf der Zahlengeraden beschrieben wurde. Den Schluß der Stunde sollten Übungen im Lösen von Aufgaben über Intervalle bilden; vgl. Lb 18, Auftrag A 23. Als Hausaufgabe sind Lb 164/47, 48 zu empfehlen.

In der *4. Stunde* wird die Beschreibung eines rationalen Punktes auf der Zahlengeraden wiederholt, wobei jeder Teilschritt von den Schülern ausführlich kommentiert wird. Dabei ist herauszuarbeiten, daß eine formale Übereinstimmung des durch Anwendung des Divisionsalgorithmus im Dezimalsystem gewonnenen mit dem periodischen Dezimalbruch besteht, der auf Grund der im Unterricht der vorangegangenen Stunde behandelten Intervallschachtelung durch fortgesetzte Zehnteilung gewonnen wurde („Folge der Intervallnummern“).
Zunächst wird – in einem Unterrichtsgespräch oder in weitgehend selbständiger Arbeit der Schüler – eine Übersicht über die Intervalle bei der Beschreibung eines rationalen Punktes durch eine Intervallschachtelung (z. B. Lb 18, Tabelle zu Beispiel A 3) entwickelt und die Zahlenfolge zur Beschreibung des Punktes angegeben. Nach der Lösung einer weiteren Aufgabe durch einen Schüler (z. B. Lb 18, Auftrag A 24) wird die Folge

$$a_0;\ a_1;\ a_2;\ a_3;\ \ldots$$

dann formal in die Schreibweise

$$a_0,\ a_1 a_2 a_3 \ldots$$

überführt.
Danach werden die auf diese Weise gewonnenen „Dezimalbrüche“ mit den (periodischen) Dezimalbrüchen, die durch Anwendung des Divisionsalgorithmus entstehen, verglichen.

In der *5. Stunde* bieten sich viele günstige Gelegenheiten, die Schüler selbständig arbeiten zu lassen. Zum Beispiel kann ein Schüler zu Beginn der Stunde die Beschreibung eines irrationalen Punktes der Zahlengeraden wiederholen; vgl. Lb 16, Auftrag A 19. Die notwendigen Zahlenangaben werden ihm dabei vom Lehrer an entsprechender Stelle mitgeteilt, so daß nur unwesentliche Rechenarbeit von ihm geleistet werden muß. Der Schüler kommentiert das Verfahren, ein anderer Schüler kann, ausgehend vom Begriff „einander entgegengesetzte Zahlen“, die Konstruktion der den negativen rationalen Zahlen zugeordneten Punkte der Zahlengeraden beschreiben; vgl. Unterrichtseinheit 1.1.2.

Der folgende Stundenteil dient dann dem Lösen von Aufgaben zur Festigung des neu eingeführten Stoffes; vgl. Lb 164/46.
Abschließend wird – im Interesse der unmittelbaren Vorbereitung auf die Definition der reellen Zahlen – an die Definition der unendlichen Dezimalbrüche (LE 9 und 10) angeknüpft und gezeigt, daß durch die getroffenen Festlegungen eine eineindeutige Zuordnung zwischen den Punkten der Zahlengerade und den unendlichen Dezimalbrüchen ohne Neunerperiode besteht.
Für das volle Verständnis der Definition der reellen Zahlen erscheint besonders die Kenntnis folgender Aussagen notwendig; vgl. Unterrichtseinheit 1.1.3., Uh 53.

- Der Bereich der rationalen Zahlen ist dicht geordnet.
- Jeder rationalen Zahl ist ein Punkt der Zahlengeraden eindeutig zugeordnet.
- Diese Zuordnung ist nicht umkehrbar. Auf der Zahlengeraden gibt es Punkte, die nicht einer rationalen Zahl zugeordnet sind.
- Die Menge der rationalen Zahlen $\left\{\frac{m}{1}; \frac{m}{10}; \frac{m}{10^2}; \frac{m}{10^3}; \ldots\right\}$ mit $m \in G$ ist dicht geordnet.

Durch die Zahlen dieser Menge lassen sich Folgen von Intervallen erklären, durch die alle Punkte der Zahlengeraden arithmetisch beschrieben werden können. Die Folgen der Intervallnummern bestimmen unendliche Dezimalbrüche. Damit ist jedem Punkt der Zahlengeraden ein unendlicher Dezimalbruch zugeordnet (um Eindeutigkeit zu erreichen, werden Neunerperioden ausgeschlossen).

1.2.2. Der Bereich der reellen Zahlen (LE 11 bis 14; 3 Std.)

Zu Beginn dieser Unterrichtseinheit, in der *1. Stunde*, wird – anknüpfend an die in der 4. Stunde der Unterrichtseinheit 1.1.3. (vgl. Uh 53) und in der 3. Stunde der Unterrichtseinheit 1.2.1. (Uh 55f) erarbeitete Systematisierung – die *Definition der reellen Zahlen als unendliche Dezimalbrüche* (ohne Neunerperiode) vermittelt. Die Schüler können aus dem in den vorangegangenen Stunden Gelernten ohne weiteres folgern, daß auf Grund der Definition der reellen Zahlen eine eineindeutige Zuordnung zwischen diesen Zahlen und den Punkten der Zahlengeraden besteht.
Dieser Überlegung schließt sich ein Hinweis auf die Unterscheidung von rationalen reellen und irrationalen reellen Zahlen, die disjunkte Teilmengen der Menge der reellen Zahlen bilden, an; vgl. Lb 21, LE 11.
Weiterhin müssen sich die Schüler die Definition der natürlichen, der gebrochenen, der ganzen und der rationalen Zahlen – sie sind aus dem Unterricht vorangegangener Klassenstufen bekannt – ins Gedächtnis zurückrufen und zueinander sowie zu der Definition der reellen Zahlen in Beziehung setzen.
An der hier dargelegten Definition der rationalen Zahlen wird den Schülern deutlich, daß der Bereich der rationalen Zahlen auf verschiedene Weise aufgebaut werden kann. Im Unterricht der vorangegangenen Klassenstufen wurde der Weg von den natürlichen Zahlen über die gebrochenen Zahlen zu den rationalen Zahlen beschritten; der Weg über die ganzen Zahlen wird nur angedeutet.
Der begriffliche Unterschied, der zwischen den rationalen Zahlen und den reellen Zahlen auf Grund der Definitionen besteht, ist zwar für die Anwendungen der Mathematik, vor allem für das Rechnen, praktisch irrelevant; er ist jedoch für die Untersuchung weiterer mathematischer Zusammenhänge und die Begriffsbildung in anderen Bereichen der Mathematik wesentlich. Die Bemerkung, daß für Zahlen aus den verschiedenen Bereichen im allgemeinen die gleichen Symbole (Variable) ver-

wendet werden, sollte mit dem Hinweis verbunden werden, daß es beim Arbeiten mit Variablen notwendig ist, den Grundbereich der Variablen anzugeben; vgl. Stoffeinheit 1.3.
Die Zusammenhänge zwischen den Mengen der natürlichen, der gebrochenen, der ganzen, der rationalen und der reellen Zahlen lassen sich einfach durch die den Schülern bereits vertrauten Mengendiagramme veranschaulichen.

In der *2. Stunde*, in der die *Ordnung im Bereich der reellen Zahlen* erörtert wird, sollten die Schüler erkennen, daß es notwendig ist, die Ordnungsrelation und die Rechenoperationen im Bereich der reellen Zahlen zu definieren, und daß die Definitionen für den Bereich der reellen Zahlen mit den Definitionen, die für die im Bereich der reellen Zahlen enthaltenen Teilbereiche gelten, verträglich sein müssen. Dies ist ohne Schwierigkeit möglich, wenn die Stunde mit einer Wiederholung aus dem Stoff der Klasse 6 begonnen wird.

Für zwei gebrochene Zahlen $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ $(b \neq 0;\ d \neq 0)$ gilt stets eine der Beziehungen

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}; \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}; \quad \frac{a}{b} > \frac{c}{d}.$$

Es gilt $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ genau dann, wenn $ad < bc$;

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ genau dann, wenn $ad = bc$;

$\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ genau dann, wenn $ad > bc$.

Es wird dann gezeigt, daß für $b = d = 1$ kein Widerspruch zur Ordnung im Bereich der natürlichen Zahlen besteht.

Die Definition der Gleichheit zweier reeller Zahlen folgt aus der Überlegung, daß jede auf der Zahlengeraden gegebene Schachtelung genau einen Punkt enthält (Lb 17, Satz A 3) und daß jedem Punkt der Zahlengeraden eindeutig eine reelle Zahl zugeordnet ist.
Nachdem die Erklärung für die Gleichheit reeller Zahlen gewonnen ist, können die Bedingungen für die Kleiner-als-Relation festgelegt werden. Dabei ist es zweckmäßig, die Beziehungen auf der Zahlengeraden zu veranschaulichen, und zwar zunächst an einem einfachen Beispiel, wie

$$a = 0{,}13425\ldots \quad \text{und} \quad b = 0{,}14425\ldots;$$

vgl. Lb 22.

Auf Millimeterpapier können die Intervalle verhältnismäßig genau angegeben und die für die Unterscheidung wesentlichen Intervalle besonders gekennzeichnet werden; es ist ohne weiteres möglich, daß a links von b liegt. Durch eine einfache Überlegung wird den Schülern dann auch klar, daß von einer bestimmten Stelle an verschiedene Intervalle auftreten.
Das Hervorheben der zur Definition der reellen Zahlen benutzten Begriffe ist sehr wichtig; es muß der falschen Vorstellung vorgebeugt werden, daß die Relationen aus dem Bereich der gebrochenen Zahlen für den Bereich der als unendliche Dezimalbrüche definierten reellen Zahlen einfach übernommen werden können.

Im Anschluß an die Definition der reellen Zahlen wurde festgestellt, daß die Menge der reellen Zahlen aus den disjunkten Teilmengen der rationalen reellen Zahlen und der irrationalen reellen Zahlen besteht. Auf Grund der Beziehungen, die zwischen den rationalen Zahlen und den rationalen reellen Zahlen bestehen, kann die Isomorphie bezüglich der Ordnungsrelation zwischen beiden Mengen gefolgert werden. Erst aus dieser Betrachtung folgt, daß es möglich ist, irrationale reelle Zahlen durch rationale Zahlen anzunähern.

In der *3. Stunde* der Unterrichtseinheit werden die *Rechenoperationen im Bereich der reellen Zahlen* behandelt. Eine Definition der Operationen ist nicht vorgesehen. Im Lehrbuch wird an einzelnen Beispielen gezeigt, wie man dabei vorgehen könnte; vgl. Lb 23f.
Im Unterricht wird mit den Schülern lediglich erarbeitet, daß Summen und Produkte reeller Zahlen durch Folgen von Doppelungleichungen dargestellt und daß durch das Addieren bzw. Multiplizieren der Näherungswerte der Summanden bzw. Faktoren wiederum Näherungswerte für die Summen bzw. Produkte gewonnen werden können.
Entsprechende Aufgaben sollten im wesentlichen unter Anleitung durch den Lehrer im Unterricht gelöst und von den Schülern kommentiert werden; vgl. Lb 165/56 bis 61.

In der *4. Stunde* der Unterrichtseinheit wird die *Definition der Wurzel* (Exponent $n \in N$, $n \geqq 1$) behandelt. Ausgangspunkt der Überlegungen ist der – ohne Beweis mitzuteilende – Satz, daß für nichtnegative reelle Zahlen a und b und für natürliche Zahlen n ($n \geqq 1$) die Gleichung $b^n = a$ genau eine Lösung b hat; vgl. Lb 25, Satz A 5. Die Erläuterung dieses Satzes knüpft an die Kenntnisse der Schüler aus dem Stoff der Klasse 7 an, in der die Quadratwurzel (zweite Wurzel) eingeführt und auch festgestellt wurde, daß nicht für alle rationalen Zahlen rationale Quadratwurzeln existieren.
Es ist nicht Aufgabe des Unterrichts in dieser Stunde, das Operieren mit Wurzeln zu üben. Das Rechnen mit Wurzeln ist – soweit es überhaupt zum Stoff der Klasse 9 gehört – in Zusammenhang mit der Behandlung von Potenzen im Stoffgebiet 3. „Potenzen und Potenzfunktionen" vorgesehen.

* Der Ausblick auf den Bereich der komplexen Zahlen läßt sich zwanglos an die Diskussion der Lösbarkeit der Gleichung $b^n = a$ anschließen, wenn die Einschränkung, daß a eine nichtnegative Zahl sein müsse, aufgehoben wird. Mit dem Ausblick auf die komplexen Zahlen sollte auch der Hinweis verbunden sein, daß zur Abbildung der komplexen Zahlen die Zahlengerade nicht mehr ausreicht, sondern eine Zahlenebene gewählt werden muß (die Begründung dafür ist von den Schülern zu fordern).

1.3. Arbeiten mit Variablen

(LE 15 bis 26; 25 Std.)

1.3.1. Variable, Grundbereiche von Variablen, Terme (LE 15; 1 Std.)

In dieser Unterrichtsstunde steht der Begriff „Variable" im Mittelpunkt. Seine Definition wird wiederholt, an Beispielen festigen die Schüler die Erkenntnis, welchen Vorteil die Verwendung von Variablen bei der Darstellung mathematischer Sachverhalte bietet. Besonders ist darauf hinzuweisen, daß vielfach verschiedene Sach-

verhalte durch Terme gleicher Struktur beschrieben werden können; vgl. Lb 27, Beispiel A 15. Das ist den Schülern nicht allgemein geläufig, da es üblich ist, für verschiedene Sachverhalte auch verschiedene Zeichen (Buchstaben) zu verwenden; z. B. $v \cdot t$; $I \cdot R$; $p \cdot A$. An dieser Stelle könnte darauf eingegangen werden, daß durch das Verwenden von Zeichen, deren Bedeutung allgemein bekannt ist, schnell ein großer Informationsgehalt übermittelt werden kann.
Bei den Übungen wird im einzelnen festgelegt (mündlich oder schriftlich), für welche Zahlen bzw. Größen die Variablen stehen (das ist den Schülern auch vom Unterricht in anderen Fächern her bekannt). Es schließen sich Einsetzübungen an; z. B.: $2x - 5$, $x \in N$ bzw. $x \in G$. *Liegt die entstehende Zahl wieder im Grundbereich der Variablen?*
Die Grundbereiche der Variablen sind soweit wie möglich zu veranschaulichen, z. B. durch Mengendiagramme oder auf der Zahlengeraden. Bei den Übungen sollten auch Variable mit geometrischen Grundbereichen verwendet werden; vgl. [50].
Es ist wichtig, die Schüler zur Einsicht zu führen, daß Variable „an sich" kein Untersuchungsobjekt der Mathematik darstellen, daß man nicht mit Variablen, sondern nur mit den Elementen des Grundbereichs, für den die Variablen gelten, rechnen kann; vgl. Lp 23. Allerdings ist es zweckmäßig, für den Unterricht die Vereinbarung zu treffen, daß immer dann der Bereich der reellen Zahlen Grundbereich für die Variablen ist, wenn kein anderer Bereich angegeben ist.
Der Begriff „Term" ist den Schülern aus dem Unterricht in Klasse 6 bekannt. Er wird an dieser Stelle an Beispielen, die sich auf verschiedene Grundbereiche von Variablen beziehen, wiederholt und inhaltlich angereichert. Der Festigung der Kenntnisse über Variable und Grundbereiche von Variablen dienen auch Beispiele für Lösungsmengen von Gleichungen und Ungleichungen in verschiedenen Grundbereichen. Außerdem wird für einige Terme festgestellt, für welche Elemente eines vorgegebenen Grundbereichs sie nicht erklärt sind (eine Begründung dafür ist von den Schülern zu verlangen).

Vorschlag für den methodischen Ablauf der Stunde:

(1) Einige Aufgaben zum Beschreiben vorgegebener Mengen natürlicher Zahlen mit Hilfe von Variablen (z. B. Lb 166/66 bis 69) werden mündlich gelöst, anschließend von jedem Typ eine Aufgabe schriftlich.
(2) Die Definition der Variablen (Lb 27, Definition A 7) wird von den Schülern gelesen. Übungen im Nennen von Grundbereichen von Variablen schließen sich an; vgl. Lb 27, Beispiele A 14 und A 15.
(3) Nach der Erläuterung eines weiteren Beispiels für das Erfassen verschiedenartiger Sachverhalte durch gleiche Variablen und Terme (z. B. Lb 28, Beispiel A 16) werden entsprechende Aufgaben gestellt; vgl. Lb 166/70.
(4) Es werden von den Schülern Aufgaben gelöst, bei denen zu entscheiden ist, auf welche Grundbereiche sich die auftretenden Variablen beziehen; vgl. Lb 166/74.
(5) Im Rahmen einer Schlußzusammenfassung wird eine Hausaufgabe zur Festigung des neu eingeführten Stoffes gestellt; Auswahl aus Lb 166/68, 69, 71, 72.

1.3.2. Einige Umformungen von Termen (LE 16; 3 Std.)

Ziel dieser Unterrichtseinheit muß sein, bei den Schülern, ausgehend von dem im Unterricht in Klasse 8 erworbenen Können, Sicherheit im *Auflösen und Setzen von Klammern,* vor denen ein Plus- oder ein Minuszeichen steht, sowie im *Multiplizieren* *von Summen miteinander* und im *Ausklammern eines* (*im allgemeinen eingliedrigen*) *gemeinsamen Faktors bei mehreren Summanden* zu erreichen. Ebenso müssen die Schüler die Erkenntnis festigen, daß die Umformungen von Termen mit Variablen Operationen mit den Elementen des jeweiligen Grundbereichs sind.

Am Anfang sollten Übungen im Zusammenfassen von Summen unter Verwenden von Variablen stehen, z. B.:

$$5r - 2s + 4r - 3r; \quad 4x^2 + 9x - 2x^2 + x; \quad 8{,}4a + 5{,}3a - 6{,}9a.$$

Wie das Zusammenfassen ausgeführt wird und wann es überhaupt möglich ist, wird von den Schülern erfragt.
Die Regeln über das Auflösen von Klammern werden wiederholt und jeweils beim Lösen einer Aufgabe (vgl. Tabelle Lb 29) von den Schülern mit eigenen Worten genannt.
Aufgaben, bei denen vor dem ersten Glied in der Klammer ein Minuszeichen steht, sollten nicht fehlen, z. B.: $7{,}3n - (-0{,}7m + 3{,}7n) + 1{,}3m$, da manche Schüler beim Ermitteln des Vorzeichens unsicher sind, obwohl sie die entsprechende Regel nennen können. Es ist zu empfehlen, geschachtelte Klammern „von innen nach außen" auflösen zu lassen.

Bei der Unterweisung der Schüler im Auflösen von Klammern wäre das Prinzip der dabei vorzunehmenden Umformungen gründlich zu erläutern; keinesfalls sollte die (algorithmische) Vorschrift zu Beginn der Unterweisung ohne Erklärung dargeboten werden. Statt des Auflösens „von innen nach außen" kann auch umgekehrt vorgegangen werden; auf einer höheren Stufe der Beherrschung werden die Schüler selbst erkennen, welches Vorgehen bei einer Aufgabe sicherer oder rationeller ist.

Als Koeffizienten der Variablen sollten bei den Aufgaben häufig gebrochene Zahlen auftreten, damit neben dem Arbeiten mit Klammern das Rechnen mit diesen Zahlen geübt werden kann und die Fertigkeiten der Schüler auf diesem Gebiet gefestigt werden können. Hauptzweck ist aber, Sicherheit im Auflösen – und auch im Setzen – von Klammern zu erreichen.
Es ist zweckmäßig, nach einer kurzen Anleitung den Schülern entsprechende Aufgaben zum selbständigen Üben zu übertragen; vgl. Lb 167/80, 81.
Die Multiplikation einer mehrgliedrigen Summe mit einem eingliedrigen Ausdruck wird auf die Multiplikation zweigliedriger Summen mit einem eingliedrigen Ausdruck zurückgeführt. Das kann nach entsprechender Anleitung ein Schüler der Klasse vorführen. Wird es den Schülern zur Gewohnheit, beim Ausklammern zunächst alle Summanden so als Produkte niederzuschreiben, daß der gemeinsame Faktor deutlich zu erkennen ist (vgl. Lb 30, Beispiele A 21 a), b), c)), dann ist die Gefahr, daß bei komplizierteren Aufgaben Fehler auftreten, geringer. Wichtig ist eine angemessene Stufung der Schwierigkeiten bei den Übungen.
Bei einigen Aufgaben sollte von den Schülern aus erzieherischen Erwägungen gefordert werden, das Ergebnis durch Multiplizieren zu überprüfen. Als weitere Kontrollmöglichkeit sei an das Einsetzen von Zahlen aus dem Grundbereich der Variablen erinnert. Die Aufgabenstellung könnte lauten:

Überprüfen Sie die Umformung für $a = 3,\ b = -5,\ c = \frac{1}{2}$!

(Die Formulierung „Überprüfen Sie die Umformung, indem Sie für $a = 3,\ b = -5$ $c = \frac{1}{2}$ einsetzen!" ist unkorrekt.)

Es muß den Schülern klar sein, daß aus einer oder auch aus mehreren wahren Aussagen noch nicht die Richtigkeit der Umformung gefolgert werden kann, aber aus einer falschen Aussage auf eine fehlerhafte Umformung zu schließen ist.
Das Multiplizieren von Summen miteinander wird in selbständiger Arbeit durch die Schüler begründet; vgl. Lb 31, Auftrag A 31. Zum Beispiel können sie beauftragt werden, die Gleichung

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

in Worten wiederzugeben.
Bei den Übungen der Schüler an der Tafel sollte stets eine bestimmte Reihenfolge beim Bilden der Produkte eingehalten werden, um Fehlerquellen auszuschalten, z. B.: Erstes Glied der ersten Summe multiplizieren mit dem ersten (zweiten ...) Glied der zweiten Summe, dann zweites Glied der ersten Summe multiplizieren mit dem ersten (zweiten ...) Glied der zweiten Summe usw.
Die Schüler merken im allgemeinen selbst, daß für das Vergleichen der Ergebnisse eine einheitliche Reihenfolge der Summanden angebracht ist. Es empfiehlt sich, den Schülern das Prinzip der lexikographischen Anordnung zu erläutern. Besondere Übungen im Ordnen der Summanden sind nicht erforderlich, da die Richtigkeit des Ergebnisses nicht von der Reihenfolge abhängt (Kommutativität der Addition).
Bei der Multiplikation von mehr als zwei Summen miteinander sollte auf die Assoziativität der Multiplikation verwiesen werden, etwa an dem folgenden Beispiel.

$$\begin{aligned} 8 \cdot 5 \cdot 3 &= (8 \cdot 5) \cdot 3 \\ &= 40 \cdot 3 \\ &= 120 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 8 \cdot 5 \cdot 3 &= 8 \cdot (5 \cdot 3) \\ &= 8 \cdot 15 \\ &= 120 \end{aligned}$$

Aufgaben der Form

$S_1 \cdot S_2 - S_3 \cdot S_4$ (S_i sind Summen)

erfordern eine Erläuterung. Wird das Produkt $S_3 \cdot S_4$ in eine Summe umgeformt, so steht ein Minuszeichen vor der Summe, d. h., die Summe muß in Klammern geschrieben werden. Das Minuszeichen auf andere Weise zu berücksichtigen (z. B. die Zeichen vor den Summanden von S_3 oder S_4 zu verändern), ist nicht ratsam, denn das kann die Schüler verwirren.

Das mehrfache Ausklammern zum Umformen einer Summe in ein Produkt von zwei Summen sollte nicht bis zur Fertigkeit geübt werden. Es genügt, den Schülern zu zeigen, daß als gemeinsamer Faktor von Summanden auch eine Summe auftreten kann.
Um die Sicherheit der Schüler im Anwenden des (aus dem Unterricht in Klasse 8 bekannten) Umformens von Termen zu überprüfen, ist es ratsam, vermischte Aufgaben zu stellen. Dabei sollten bei einigen Aufgaben Terme vorgegeben werden, für die die Schüler selber die Art der Umformung ermitteln müssen.

1.3.3. **Die Struktur von Termen** (LE 17; 1 Std.)

Obwohl bereits in den vorangegangenen Stunden die Struktur von Termen von den Schülern erkannt werden mußte, ist es notwendig, nunmehr etwas umfassender auf die Struktur von Termen einzugehen. Die Fehler der Schüler beim Umformen von Termen haben zum größten Teil ihre Ursache darin, daß die Struktur der Terme nicht richtig erkannt wird.

Es ist sinnvoll, diese Stunde mit der vorangegangenen eng zu verknüpfen und sie wie folgt methodisch zu gliedern.

(1) Am Beginn der Stunde sollte eine kurze Betrachtung stehen, aus der die Schüler die Unterschiede zwischen den Rechenoperationen zweiter Stufe und den Rechenoperationen erster Stufe erkennen. Zur Festigung dieser Einsicht können die Schüler z. B. die ersten zwei Abschnitte von Lb 32, LE 17, lesen und entsprechende Aufgaben lösen; vgl. Lb 32, Auftrag A 33.

(2) Zur weiteren Übung und Festigung sollten die Schüler folgende Aufgabe schriftlich lösen:
Beschreiben Sie die Struktur der folgenden Terme!

$$(a + b) \cdot (c + d); \quad (a + b) \cdot c + d; \quad a + b \cdot (c + d); \quad a + b \cdot c + d$$

Die Schüler müßten z. B. schreiben: $(a + b) \cdot (c + d)$ ist ein Produkt aus zwei zweigliedrigen Summen.

(3) Nun erfolgt die umgekehrte Aufgabenstellung. Die Struktur eines Terms ist in einem Text gegeben, der Term ist mit Hilfe von Variablen aufzuschreiben; vgl. Lb 32, Beispiel A 25b). Bei jeder derartigen Aufgabe muß der Grundbereich der verwendeten Variablen angegeben werden!

(4) Im Verlauf der Stunde sollte ein Diktat von Termen nicht fehlen, z. B.:
$\frac{2}{3}a$; $2a$ dividiert durch 3; 2 dividiert durch $3a$;
die Summe aus a und dem Quotienten b durch a;
der Quotient aus der Summe $a + b$ und a.
Beim Vergleichen erklären die Schüler die Struktur der Terme.

(5) Zur Verbindung der Übungen dieser Stunde mit den Übungen im Umformen von Termen der vorangegangenen Unterrichtsstunden könnten einige Aufgaben wie Lb 32, Beispiel 25a), gestellt werden.

(6) Zum Abschluß der Stunde sollte eine kombinierte mündliche und schriftliche Übung durchgeführt werden; vgl. Lb 169/103.

1.3.4. Binomische Formeln (LE 18; 3 Std.)

Es muß erreicht werden, daß die Schüler die *binomischen Formeln* als einen wichtigen *Spezialfall der Multiplikation zweier zweigliedriger Summen* erkennen. Es sollte deshalb auch darauf geachtet werden, daß die Produkte der Form $(a + b)(a - b)$ und die zweiter Potenzen von Binomen nicht durch Ausmultiplizieren, sondern durch Anwenden der binomischen Formeln berechnet werden.
Da die binomischen Formeln im weiteren Unterricht häufig benötigt werden, ist ein sicheres Beherrschen durch alle Schüler erforderlich; vgl. Lp 23. Besonders werden die binomischen Formeln zum Umwandeln einer Summe in ein Produkt (eine Potenz) bei der Behandlung der quadratischen Funktionen und Gleichungen benötigt.
Die Schüler lernen *zwei* binomische Formeln kennen.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2; \quad (a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

In der Vergangenheit wurden vielfach *drei* Formeln hervorgehoben. Da eine Differenz stets formal als Summe geschrieben werden kann, ist die Beschränkung auf zwei Formeln gerechtfertigt.

Die Schüler können die binomischen Formeln in selbständiger Arbeit (eventuell mit Hilfe des Lehrbuchs) gewinnen. Beim Angeben der Formeln darf der Grundbereich der Variablen nicht vergessen werden. Das Veranschaulichen der beiden

Formeln (durch Tafelzeichnungen oder durch eine Seitenfläche des zerlegbaren Plastewürfels für $(a + b)^3$) trägt zum Festigen der Kenntnisse bei.
Bei den ersten Anwendungen dieser Formeln werden die Schüler veranlaßt, anzugeben, welchen Term sie für a und welchen Term sie für b einsetzen. Es sollten bereits für die ersten Übungen Terme gewählt werden, vor denen ein Minuszeichen steht $\left(\text{z. B.: } a = -3,\ b = 7x;\ a = 0{,}9r,\ b = -2;\ \text{aber auch } a = -\frac{4}{5}x,\ b = -5y\right)$.
Im Zusammenhang mit den binomischen Formeln wird das Rechnen mit gemeinen Brüchen und Dezimalbrüchen durch eine entsprechende Auswahl der Aufgaben geübt. Empfehlenwert ist auch, daß die Schüler die Quadrate der „kleineren" natürlichen Zahlen (etwa bis 25) auswendig kennen.

Im Anschluß an die Behandlung der binomischen Formeln wird das Erkennen der Struktur eines Terms und der Reihenfolge der auszuführenden Operationen beim Umformen von Termen wiederholt; vgl. Lb 169/103. Dabei sollten auch Aufgaben zur Überprüfung der Wahrheit einer Aussage (z. B. Lb 33, Auftrag A 36) gestellt werden, da hierbei die Bedeutung der Quantifikatoren „Für jede ..." und „Es gibt eine ..." besonders bewußtgemacht werden kann. Es wird wiederholt, daß ein Gegenbeispiel genügt, eine Aussage wie „Für jede ... gilt: ..." zu widerlegen.
Solche Betrachtungen tragen zur logischen Schulung und zur Erziehung zu einer exakten Ausdrucksweise bei.
Während für das Umformen eines Produktes (einer Potenz) von Summen in Summen nicht unbedingt eine Formel benötigt wird, braucht man sie für das Umformen spezieller Summen in ein Produkt schon eher.
Auf die Möglichkeiten des Zerlegens eines Summanden einer dreigliedrigen Summe in zwei geeignete Summanden wird nicht eingegangen. Es wird nur mit den binomischen Formeln gearbeitet. Den Schülern muß bewußt werden, daß nur spezielle dreigliedrige Summen mit Hilfe der Formel $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ in eine Potenz und daß nur Differenzen zweier Quadrate mit Hilfe von $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ in ein Produkt umgeformt werden können. Hat eine gegebene dreigliedrige Summe dieselbe Struktur wie $a^2 + 2ab + b^2$, so kann diese Summe durch Einsetzen der Ausdrücke, die den Variablen a und b in $(a + b)^2$ entsprechen, als Potenz geschrieben werden. Die diesbezügliche Untersuchung der Struktur einer dreigliedrigen Summe ist in folgenden Schritten denkbar.

(1) Vor zwei Summanden muß ein Pluszeichen stehen (das ist eventuell durch Ausklammern von -1 zu erreichen); diese Summanden müssen Quadrate sein.
(2) Der dritte Summand wird mit dem doppelten Produkt der Basen der beiden Quadrate verglichen.

Zur schriftlichen Darstellung vgl. Lb 33, Beispiel A 27. Beim Ermitteln der Terme, die den Variablen a und b in $(a + b)^2$ entsprechen, sind jeweils zwei Möglichkeiten zu beachten.

Beispiel: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$$\begin{array}{rl} (3 + 5y^2)^2 & \leftarrow 9 + 30y^2 + 25y^4 \\ (-3 - 5y^2)^2 & \swarrow \\ (3 - 5y^2)^2 & \leftarrow 9 - 30y^2 + 25y^4 \\ (-3 + 5y^2)^2 & \swarrow \end{array}$$

Als eine Kontrollmöglichkeit sollte das Berechnen der ermittelten Potenz und das Vergleichen mit der gegebenen Summe angewandt werden. Vor allem ist dieses Verfahren dann geeignet, wenn die Schüler die Aufgabe im Kopf lösen. In die Aufgaben sollten auch Summen einbezogen werden, die keine vollständigen Quadrate eines Binoms sind; vgl. Lb 34, Auftrag 37b), c), e).
Das Umformen einer Differenz zweier Quadrate in ein Produkt sollte nur an einfachen Beispielen geübt werden; vgl. Lb 34, Beispiel A 28. Das Berechnen des Flächeninhalts eines Kreisrings (des Volumens bzw. der Masse eines Hohlzylinders) kann in diesem Zusammenhang wiederholt werden. Die Schüler erkennen in der Umformung $d_1^2 - d_2^2 = (d_1 + d_2)(d_1 - d_2)$ einen Vorteil für das Rechnen mit Hilfe des Rechenstabs. Weitere Aufgaben bereiten das Lösen von quadratischen Gleichungen im Stoffgebiet 4. „Quadratische Funktionen und quadratische Gleichungen" vor; vgl. Lb 34f.

Beim Anwenden der binomischen Formeln (in beiden Richtungen) wird das Rechnen mit rationalen Zahlen geübt. Das geschieht, wenn rationale Zahlen als Koeffizienten auftreten, aber auch, wenn zur Überprüfung der Umformung für die Variablen Zahlen eingesetzt werden.
Im Anschluß an das Erarbeiten des Stoffs könnte eine kurze schriftliche Kontrolle mit Aufgaben der folgenden Art durchgeführt werden.

Formen Sie die Summen in Produkte (Potenzen) um!

$$102a^2b - 17a + 51ab - 170ab^2; \quad 49x^2 + 28xy + 4y^2;$$
$$0{,}09 - 25b^4; \quad 39r^2 - 26rs + 169s^2$$

Eine spätere umfangreichere Kontrollarbeit sollte sich über etwa 30 Minuten erstrekken und Aufgaben zu den Unterrichtseinheiten 1.3.2. bis 1.3.4. enthalten. Die Aufgaben können dem Lehrbuch entnommen werden, damit keine Zeit für das Anschreiben benötigt wird (außerdem wird dadurch das Schreiben in Gruppen erleichtert).

1.3.5. Die quadratische Ergänzung (LE 19; 1 Std.)

Mit der Behandlung der quadratischen Ergänzung werden wesentliche Vorleistungen für die Behandlung quadratischer Funktionen und Gleichungen erbracht.
Die Ergänzung einer zweigliedrigen Summe durch das Quadrat eines Gliedes (quadratische Ergänzung) zu einem vollständigen Quadrat ist hauptsächlich als Vorübung gedacht, denn diese Aufgabenstellung wird später nur noch selten wieder auftreten, da quadratische Gleichungen dann in erster Linie mit Hilfe der Lösungsformel zu lösen sind.
Die Schüler ermitteln durch Vergleichen der gegebenen Summe mit der Form $a^2 + 2ab$ die Terme, die a und b entsprechen, und ergänzen dann das zum vollständigen Quadrat fehlende Glied b^2. Es reicht im allgemeinen der im Lehrbuch angegebene Weg; jedoch kann auch ausführlicher verfahren werden, z. B.:

$$r^2 - \frac{1}{2}r \qquad\qquad r^2 + 2 \cdot r \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) + \left(-\frac{1}{4}\right)^2 = r^2 - \frac{1}{2}r + \frac{1}{16}$$
$$a^2 + 2ab \qquad\qquad = \left(r - \frac{1}{4}\right)^2$$

$$a^2 = r^2 \qquad 2ab = -\frac{1}{2}r$$
$$2rb = -\frac{1}{2}r$$
$$b = -\frac{1}{4}r$$

Die quadratische Ergänzung ist $\left(-\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$

Im Mittelpunkt der Übungen stehen Aufgaben, die verlangen, *eine gegebene Summe mit Hilfe der quadratischen Ergänzung so umzuformen, daß sie ein vollständiges Quadrat enthält*. Den Schülern ist das Addieren und das gleichzeitige Subtrahieren einer Zahl (zum Zwecke einer geeigneten Umformung) bereits bekannt.
Es ist zu empfehlen, möglichst nur solche Aufgaben zu stellen, die später, vor allem im Stoffgebiet 4. „Quadratische Funktionen und quadratische Gleichungen", im Prinzip wieder vorkommen. Das bezieht sich besonders auf den Schwierigkeitsgrad und die Wahl der Variablen; vgl. Lp 34. Damit alle Schüler inhaltlich erfassen, wie man eine Summe so umformt, daß sie ein vollständiges Quadrat enthält, sollten die Schüler diese Umformung an dieser Stelle noch nicht formelmäßig ausführen.
Wird z. B. die Aufgabe gestellt, $x^2 + px + q$ in eine Summe, die ein vollständiges Quadrat enthält, umzuformen, so sollte nur bis zu $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q$ umgeformt werden.

1.3.6. Erweitern und Kürzen von Quotienten (LE 20; 1 Std.)

Das Erweitern und Kürzen von Quotienten ist im Verlaufe des Unterrichts bis Klasse 10 häufig auszuführen, z. B. beim Vergleichen von Quotienten, bei der Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division von Quotienten. Sicherheit müssen alle Schüler im Erweitern und Kürzen mit eingliedrigen Faktoren erreichen. Das Erweitern und Kürzen mit zweigliedrigen Faktoren bleibt auf einfache Fälle beschränkt.
Die Begriffe „Erweitern" und „Kürzen" wurden in der Klasse 5 für Brüche $\frac{a}{b}$ mit $a, b \in N$ und $b \neq 0$ definiert. Es treten nun Erweiterungs- und Kürzungsfaktoren auf, die nicht notwendig natürliche Zahlen sind. Das Erweitern und Kürzen ist für Quotienten mit beliebigen Zahlen als Kürzungs- und Erweiterungsfaktoren zu erklären. Daß die Erweiterungs- und Kürzungsfaktoren stets von Null verschieden sein müssen, ist durch die Angabe von Bedingungen zu sichern; vgl. Lb 36, Beispiel A 31.

In den täglichen Übungen wird das Rechnen mit gemeinen Brüchen wiederholt; vgl. Lb 173/141 bis 146. Besonders beim Erweitern ist häufig die Definition dieser Operation zu wiederholen, damit die Schüler von selbst die notwendigen Klammern setzen, wenn Zähler, Nenner oder Erweiterungsfaktor Summen sind. Im Zusammenhang mit dem Erweitern bieten sich Betrachtungen über die Struktur von Termen an.
Beim Kürzen von Quotienten werden bei den ersten Beispielen und immer dann, wenn Zähler und Nenner Summen sind, der Zähler und der Nenner als Produkt aus dem Kürzungsfaktor und einem weiteren Faktor geschrieben (Ausklammern oder Zerlegen mit Hilfe der binomischen Formeln).

Aufgaben zum Kürzen und Erweitern können auch als Textaufgaben gestellt werden; vgl. Lb 174/153.
Es sollte bereits in dieser Unterrichtseinheit auf das Vergleichen von Brüchen (mit Variablen) eingegangen werden; vgl. Lb 175/171, 172.

1.3.7. Division von Summen (LE 21; 2 Std.)

Die Division einer Summe durch eine Zahl wird auf die Multiplikation dieser Summe mit dem Reziproken der betreffenden Zahl zurückgeführt. Dabei wird die Distributivität von Addition und Multiplikation reeller Zahlen wiederholt. Bei der Verwendung der Bruchstrichschreibweise wird der Hinweis gegeben, daß der Bruchstrich die Klammer und das Divisionszeichen ersetzt.
Durch Erweitern oder Kürzen der Quotienten kann erreicht werden, daß die Koeffizienten der Variablen teilerfremde natürliche Zahlen sind. Deshalb sollten z. B. solche Quotienten nicht im Ergebnis stehenbleiben:

$$\frac{0{,}02x}{3a}; \quad \frac{a}{\frac{1}{2}h}; \quad \frac{25rs}{0{,}4t}.$$

Die Formulierung der Aufgabenstellung kann variiert werden, z. B.:
Berechnen Sie! Formen Sie folgende Quotienten in Summen um!

Da in den Übungen auch Größen aus der Physik verwandt werden, ist eine kurze Bemerkung (eventuell als Frage) angebracht, z. B.: Mit Hilfe des Quotienten $\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ wird der elektrische Widerstand von zwei parallelgeschalteten Verbrauchern berechnet; der Gesamtwiderstand ist kleiner als der kleinste Teilwiderstand. (Die Linsengleichung z. B. ist den Schülern noch nicht bekannt.)

* Der Algorithmus für die Division einer Summe durch eine Summe wird den Schülern ohne Begründung an Beispielen erläutert. Dabei sollten in den Beispielen Dividend und Divisor stets lexikographisch geordnet sein. Dadurch ist eine einfache Formulierung des Divisionsalgorithmus möglich. Die Vorschrift könnte dann lauten:

Der erste Summand des Dividenden wird durch den ersten Summanden des Divisors dividiert. Das Produkt aus diesem Quotienten und dem Divisor wird vom Dividenden subtrahiert ...
Einfache Aufgaben sind z. B. $(a^2 + 2ab + b^2) : (a + b)$, $(x^2 - 8x + 16) : (x - 4)$.
Fertigkeiten in der Anwendung dieses Algorithmus sind nicht anzustreben.

1.3.8. Addieren und Subtrahieren von Quotienten (LE 23 und 24; 4 Std.)

Ein sicheres Beherrschen der Addition und der Subtraktion von Quotienten unter Verwendung von Variablen ist für den gesamten weiteren Unterricht notwendig. Das Rechnen mit Quotienten wird in nahezu allen Stoffeinheiten und darüber hinaus auch in anderen Fächern angewendet. Lp 23 fordert, daß der Divisor im allgemeinen eingliedrig sein soll. Es dürfen also nur sehr einfache Beispiele mit zweigliedrigem Divisor ausgewählt werden, sie dienen zur Information der Schüler.

Die *1. Stunde* dieser Unterrichtseinheit könnte etwa folgendermaßen aufgebaut sein.

(1) In den täglichen Übungen nach dem Vergleich und der Kontrolle der Hausaufgaben werden die Begriffe „Teiler", „Vielfaches", „Primzahl", „eindeutige Zerlegung in Primfaktoren" wiederholt. Die Schüler geben jeweils Beispiele an.

(2) Die Schüler erarbeiten, daß für die Addition und Subtraktion von Quotienten das *Ermitteln eines gemeinsamen Nenners* ein wesentlicher Schritt ist. Es wird das Ermitteln des k. g. V. von natürlichen Zahlen wiederholt. Dabei sollten die Zahlen so gewählt werden, daß das k. g. V. nicht sofort zu erkennen ist.

(3) Es werden gemeinsame Vielfache unter Verwenden von Variablen an die Tafel geschrieben, z. B.:

	gemeinsame Vielfache
a^2b abc b^2c	a^2b^2c; $a^2b^2c^2$; $5a^2b^2c$
$3x$ $6xy$ $4y^2$	$12xy^2$; $24x^2y^2$; $72xy^2$

Es wird den Schülern mitgeteilt, daß man den Begriff „gemeinsame Vielfache" auch beim Arbeiten mit Termen mit Variablen benutzt. Es ist aber nicht möglich, bei Termen, die Variable enthalten, das k. g. V. ermitteln zu wollen.

Das kann mit Hilfe eines einfachen Beispiels erläutert werden.
Für die Terme a^2b, abc, b^2c ist a^2b^2c ein gemeinsames Vielfaches. Werden für a, b, c teilerfremde natürliche Zahlen gesetzt, so ist a^2b^2c das k. g. V. Für die Zahlen $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$ ist $a^2b^2c = 144$ zwar ein gemeinsames Vielfaches von $2^3 \cdot 3$, $2 \cdot 3 \cdot 4$, $3^2 \cdot 4$, aber nicht das k. g. V. (das ist 36).

(4) Die Schüler bearbeiten selbständig entsprechende Aufgaben, z. B. Lb 175/165 bis 170. Zur Vorbereitung des Berechnens der Erweiterungsfaktoren und zur Kontrolle schreiben die Schüler das gemeinsame Vielfache als Produkt, bei dem ein Faktor jeweils mit Hilfe eines gegebenen Terms beschrieben ist, z. B.:

$$\begin{array}{ll} 30a^2b = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot a^2 \cdot b & 90a^2bc = 30a^2b \cdot 3c \\ \underline{18ac \;= 2 \cdot 3^2 \cdot a \cdot c} & 90a^2bc = 18ac \cdot 5ab \end{array}$$

gemeinsames Vielfaches: $2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot a^2 \cdot b \cdot c = 90a^2bc$

(5) Als erste Anwendung werden einige Vergleiche von Quotienten, die durch Variable (mit der Menge der natürlichen Zahlen als Grundbereich der Variablen) ausgedrückt sind, durchgeführt. Dazu müssen die gegebenen Quotienten auf einen gemeinsamen Nenner erweitert werden.

(6) Die Hausaufgaben werden aus Lb 175/171, 172 sowie aus Aufgaben zur Addition und Subtraktion gebrochener Zahlen ausgewählt.

Ein weiterer wesentlicher Inhalt dieser Unterrichtseinheit ist das *Addieren (Subtrahieren) von Quotienten mit gleichen Divisoren (Nennern)*.
Ist bei Aufgaben ein gemeinsamer Nenner nicht sofort zu erkennen, so empfiehlt sich für das Ermitteln eines gemeinsamen Nenners und der Erweiterungsfaktoren ein Schema; vgl. Lb 38, Beispiel A 35c).

Summen wie $\frac{x}{y} - \frac{y}{z} + z$ sollten die Schüler zunächst so schreiben, daß gemeinsamer Nenner und Erweiterungsfaktoren sicher ermittelt werden können (hier $\frac{x}{y} - \frac{y}{z} + \frac{z}{1}$).

Stehen in einzelnen Zählern Summen, so setzen die Schüler selbständig auch die notwendigen Klammern, wenn sie gewöhnt sind, Strukturen von Termen zu erkennen.

Beispiel $(x \neq 0; y \neq 0)$:

$$\frac{x+y}{15x} - \frac{x-y}{x} + \frac{x}{5y} = \frac{(x+y)\,y - (x-y)\,15y + x \cdot 3x}{15xy}$$
$$= \frac{xy + y^2 - 15xy + 15y^2 + 3x^2}{15xy}$$
$$= \frac{3x^2 - 14xy + 16y^2}{15xy}$$

Man kann auch so vorgehen, daß die einzelnen Quotienten (Summanden) zunächst erweitert, die Zähler ausmultipliziert und dann auf einen Bruchstrich geschrieben werden. Dieser Weg ist besonders für noch unsichere Schüler geeignet.

Beispiel:

$$\frac{x+y}{15x} - \frac{xy}{x} + \frac{x}{5y} = \frac{(x+y)\,y}{15xy} - \frac{(x-y)\cdot 15y}{x \cdot 15y} + \frac{x \cdot 3x}{5y \cdot 3x}$$
$$= \frac{xy + y^2}{15xy} - \frac{15xy - 15y^2}{15xy} + \frac{3x^2}{15xy}$$
$$= \frac{xy + y^2 - (15xy - 15y^2) + 3x^2}{15xy}$$
$$= \frac{xy + y^2 - 15xy + 15y^2 + 3x^2}{15xy}$$
$$= \frac{3x^2 - 14xy + 16y^2}{15xy}$$

Von Aufgaben, bei denen im Nenner eine Summe steht, lernen die Schüler nur einfache Beispiele kennen. Leicht lösbar sind Aufgaben, die das Anwenden der binomischen Formeln erfordern.

Beispiele:

a) $$\frac{a}{a^2 - b^2} + \frac{1}{a-b} = \frac{a}{(a+b)(a-b)} + \frac{1}{a-b}$$
$$= \frac{a + 1(a+b)}{(a+b)(a-b)} = \frac{2a+b}{a^2 - b^2}$$

b) $$\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{xy + (x+y)\,y - (x+y)\,x}{(x+y)\,xy}$$
$$= \frac{xy + xy + y^2 - x^2 - xy}{(x+y)\,xy} = \frac{-x^2 + xy + y^2}{x^2y + xy^2}$$

Mit diesen beiden Beispielen dürfte der höchste geforderte Schwierigkeitsgrad angegeben sein; zum Lösungsschema vgl. Lb 38, Beispiel A 35c).

Im Anschluß an diese Unterrichtseinheit wird eine *Kontrollarbeit* mit folgender Thematik empfohlen (Dauer etwa 30 bis 45 min).

1. Ermitteln eines gemeinsamen Vielfachen (auch Aufgaben unter Verwendung von Variablen)
2. Addieren von Quotienten und Lösen von Aufgaben in Bruchform unter Verwenden von Variablen, z. B.:

$$\frac{2x + y}{23x} - \frac{x^2 - y^2}{46xy} \quad (x \neq 0;\, y \neq 0)$$

3. Berechnen des Wertes eines Terms (2 Variable) und Ermitteln jener Werte der Variablen, für die der Term nicht definiert ist
4. Kürzen von Brüchen, auch Umformen von Quotienten in Summen unter Verwenden von Variablen, z. B.

$$\frac{30abc - 20ac^2 + 80bc^2}{40abc} \quad (a \neq 0;\, b \neq 0;\, c \neq 0)$$

1.3.9. Multiplizieren und Dividieren von Quotienten (LE 25 und 26; 4 Std.)

Das Multiplizieren und Dividieren von Quotienten unter Verwenden von Variablen wird ebenso wie das Addieren und Subtrahieren im weiteren Mathematikunterricht und in anderen Fächern häufig angewendet. Sicheres Beherrschen des Stoffes ist somit notwendig.

Ausgehend vom Produkt gebrochener Zahlen wird das *Multiplizieren von Quotienten* unter Verwenden von Variablen erklärt. Von Anfang an ist darauf zu achten, daß die Schüler erst dann kürzen, wenn sie den Quotienten aus dem Produkt der Zähler und dem Produkt der Nenner gebildet haben. Auch sollten die Schüler daran gewöhnt werden, erst zu kürzen und dann die Produkte in Zähler und Nenner auszurechnen.
Da jeder Term formal als Quotient mit dem Nenner 1 geschrieben werden kann, falls er nicht bereits ein Quotient ist, braucht keine weitere Vorschrift für die Multiplikation formuliert zu werden.
Steht vor einzelnen Zählern oder Nennern von Quotienten, die multipliziert werden, ein Minuszeichen, so empfiehlt sich folgendes Umformen; vgl. Lb 40, Beispiel A 38c).

Beispiel ($a \neq 0;\, b \neq 0;\, x \neq 0$):

$$\frac{-32x^2y}{-0{,}3ab} \cdot \frac{9ac}{-80bx} = \frac{32x^2y}{0{,}3ab} \cdot \left(-\frac{9ac}{80bx}\right)$$

$$= -\frac{32x^2y \cdot 9ac}{0{,}3ab \cdot 80bx} = -\frac{12cxy}{b^2}$$

Es können nun Aufgaben gewählt werden, bei denen die Multiplikation einer Summe mit einem eingliedrigen Ausdruck oder mit einer Summe und die binomischen Formeln wiederholt werden. Auch das Beschreiben der Struktur von Termen wird hierbei geübt; vgl. Lb 177/187a), b) und 188a), b).
Besonders wichtig ist das Erkennen der Struktur der Terme, wenn in den Zählern oder Nennern Summen stehen. Diese Aufgaben sollten aber nicht wesentliche Teile der Übungen bilden. Zur Kontrolle des sicheren Erkennens der Struktur von Termen werden Aufgaben wie $\frac{1}{a+b} \cdot (a - b)$ und $\frac{1}{a+b} \cdot a - b$ gestellt.

Den Abschluß der Übungen zur Multiplikation von Quotienten könnte eine Kontrollarbeit bilden.

Die Aufgaben werden gleichzeitig von einem Schüler an der möglichst verdeckten Tafel gerechnet. Der Lehrer achtet darauf, daß dieser Schüler richtig rechnet und alle notwendigen Schritte aufschreibt. Nach Ablauf der vorgegebenen Zeit (etwa 5 min vor Ende der Stunde) legen alle Schüler die Schreibgeräte weg und vergleichen ihre Rechnungen mit denen an der Tafel, an der ja nur vollständig richtige Lösungen stehen. Mit einem anderen Schreibgerät (z. B. Bleistift) schreiben die Schüler nun an ihre Lösungen „richtig“ oder das richtige Endresultat (nicht den Lösungsweg). Dadurch haben die Schüler, die noch Fehler gemacht haben, Aufgaben für ihre zusätzlichen häuslichen Übungen.

Daß die Division durch eine Zahl gleichbedeutend ist mit der Multiplikation mit dem Reziproken dieser Zahl, wird nun bei der *Division durch einen Quotienten* angewandt. Es ist zu empfehlen, zunächst eine Übung zum Bilden der Reziproken von Zahlen durchzuführen, z. B.: $\frac{4}{7}$; $3\frac{3}{4}$; a; $\frac{1}{2b}$; $\frac{a^2b}{cd^2}$ $1\frac{1}{2}a$; $-7x$; $\frac{2}{3}a$.

Auf Doppelbrüche bei der Division von Quotienten braucht nur kurz hingewiesen zu werden. Die Schüler erfahren dabei, daß man auch diese Aufgaben auf die Multiplikation von Quotienten zurückführt. Spezielle Übungen verbieten sich. Nach einer Einführung (vgl. Lb 41) können die Schüler einige Divisionsaufgaben, die in Doppelbruchform gegeben sind, selbständig lösen; vgl. Lb 41, Beispiel A 40.

Im Rahmen dieser Unterrichtseinheit sollte noch eine Übung durchgeführt werden, in der Aufgaben aus dem Gesamtbereich der Stoffeinheit 1.3. „Arbeiten mit Variablen“ enthalten sind. Um einen Überblick über die Sicherheit der Schüler beim Lösen von Aufgaben aus diesem Bereich zu erhalten, wird eine kurze *Kontrollarbeit* durchgeführt. Dadurch können die Schüler eventuell vorhandene Schwächen erkennen und sich zielgerichtet auf die Klassenarbeit zum Abschluß der Behandlung des Stoffgebietes vorbereiten.

Vorschlag für eine kurze Kontrollarbeit:

1. Schreiben Sie folgende Produkte (Potenzen, Quotienten) als Summen!

   a) $5a\,[0{,}4b - (2a + 0{,}3b)]$ b) $(1{,}3x - 5y^2)^2$
   c) $(57ab - 3{,}8b^2) : (-1{,}9a^2b)$

2. Formen Sie die folgenden Summen in Produkte um!

   a) $x^2 - 20x + 25$ b) $0{,}49 - 64z^2$ c) $b^2c - bc$

3. Ermitteln Sie die quadratische Ergänzung zu der folgenden Summe!

   $x^2 + 26x$

4. Formen Sie in Quotienten um ($a \neq 0$; $b \neq 0$)!

   a) $\frac{7}{9a} - \frac{3}{ab} + \frac{4}{3b}$ b) $a - \frac{a - ab}{b}$ c) $\frac{a - ab}{b} \cdot a$ d) $\frac{a - ab}{b} : a$

1.3.10. Anwendungen des Umformens von Termen (LE 27; 3 Std.)

Diese Unterrichtseinheit verfolgt vor allem das Ziel, die Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten der Schüler im Arbeiten mit Variablen, vor allem im Umformen von Termen, zu festigen und Voraussetzungen für die Behandlung von Gleichungen

und Ungleichungen (Stoffgebiet 2.) zu schaffen. Gegenstand des Unterrichts sind *Anwendungsaufgaben aus verschiedenen Teilbereichen der Mathematik (vor allem Planimetrie und Stereometrie), der Physik, der Technik, der Ökonomie und aus weiteren Wissensbereichen*, die zum Inhalt des Oberschulunterrichts gehören.
Aufgaben dieser Art, vor allem im Zusammenhang mit dem Lösen von Gleichungen, haben die Schüler bereits im Unterricht der vorangegangenen Klassenstufen bearbeitet. Sie haben auch Hinweise erhalten, wie ein realer Sachverhalt mit Hilfe von Symbolen mathematisch formuliert werden kann. Auf diese Vorleistungen muß hier aufgebaut werden.
Ein entscheidender Schritt beim Auflösen einer Gleichung nach einer in ihr enthaltenen Variablen ist das *Analysieren der Struktur der Terme*, die auf beiden Seiten der Gleichung stehen. Erst das Ergebnis dieser Analyse entscheidet über die Art der notwendigen Umformungen bzw. über das Anwenden des Lösungskalküls; vgl. Lb 41, Beispiel A 40a), b).
Die Regeln für das Umformen von Gleichungen, die die Schüler aus dem Unterricht in Klasse 7 kennen, werden hier nur kurz wiederholt. Ausführlicher wird auf die Regeln für das Umformen von Gleichungen im Stoffgebiet 2. „Ungleichungen und Gleichungssysteme" noch eingegangen.
In die Übungen zum Anwenden des Umformens von Termen sollten auch Gleichungen einbezogen werden, in denen die Variablen mit Indizes behaftet sind. Solche Fälle sind in allen Bereichen der Mathematik und in der Praxis häufig anzutreffen. Die Schüler müssen dabei besonders sorgfältig arbeiten, damit nicht allein durch eine nachlässige Schreibweise Fehler gemacht werden. Ebenso sollten auch Gleichungen gewählt werden, in denen die zu isolierende Variable mehrfach vorkommt; vgl. Lb 42, Beispiel A 41b).
An einer Aufgabe (z. B.: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bcd$ ist nach b aufzulösen) wäre zu zeigen, daß mit den vorhandenen Kenntnissen der Schüler manche Gleichungen nicht nach allen darin enthaltenen Variablen aufgelöst werden können. Damit wird auf die Behandlung der Stoffeinheit 4.2. „Quadratische Gleichungen" im Unterricht in Klasse 9 hingewiesen.

Beweise unter Verwenden von Variablen (Lp 26) können bereits bei der Behandlung der einzelnen Umformungsregeln durchgeführt werden. Es sollten dabei vorwiegend Aufgaben zur Teilbarkeit von Zahlen gestellt werden. (In diesem Zusammenhang werden auch Zahlen als Summen von Vielfachen der Zehnerpotenzen dargestellt.)
Bei den Beweisen ist wie bei allen anderen Aufgaben eine gründliche und ausführliche Erörterung wichtiger als das Lösen einer Vielzahl von Aufgaben. Den Schülern ist ausführlich zu zeigen, wie ein Text in mathematische Zeichen „übersetzt" wird.

1.3.11. Hinweise zur Leistungskontrolle (Klassenarbeit)

Die Hausaufgabe zu dem Tage, an dem die Klassenarbeit geschrieben wird, trägt zur Erziehung der Schüler zur Selbständigkeit bei, wenn sie folgendermaßen gestellt wird.
Die Schüler wählen aus ihren Aufzeichnungen (Hausheft, Übungsheft, Kontrollarbeiten) eine vom Lehrer bestimmte Anzahl von Aufgaben aus, lösen diese und vergleichen anschließend mit den in den Aufzeichnungen enthaltenen richtigen Lösungen. Vor Beginn oder während der Arbeit ist eine Kontrolle der Hausaufgaben leicht möglich. Die Kontrollarbeit sollte sich über 90 min erstrecken und Aufgaben folgender Art umfassen.

1. Multiplikation und Division von Summen, z. B.:

   $(6r - 9s)(9r + 0{,}6s)$; $(36x^2z - 4xy^2 + 0{,}12yz):(-1{,}2xyz)$

2. Umformen von Summen in Produkte, z. B.:

   $24a^2b - 56ab^2 - 104ab$; $d_1^2 - d_2^2$

3. Ermitteln der quadratischen Ergänzung (für einfache Fälle), z. B.: $x^2 - 10x$

4. Niederschreiben einer Aufgabe mit Hilfe von Variablen, z. B.: Die Summe aus dem Fünffachen einer Zahl und einer anderen Zahl wird um die fünffache Summe der beiden Zahlen vermindert.

5. Auflösen von Gleichungen nach vorgegebenen Variablen, z. B.:

   $a = \frac{a + c}{2} \cdot h$ nach c; $R_1R_2 = RR_1 + RR_2$ nach R und nach R_2

6. Beweis eines Satzes; Niederschrift des Beweisganges mit Hilfe von Variablen, z. B.:

   Die Differenz aus einer dreistelligen Zahl und ihrer Quersumme ist durch 9 teilbar.

2. Ungleichungen und Gleichungssysteme

2.0. Vorbemerkungen

Dieses Stoffgebiet dient der Befähigung der Schüler, Gleichungen und Ungleichungen systematisch zu lösen. Im Hinblick auf die **mathematische Grundlagenbildung** der Schüler wird im besonderen das Ziel verfolgt, die Kenntnisse durch eine *systematische Erörterung von Umformungs- und Lösungsverfahren für Ungleichungen und für einfache Gleichungssysteme* (*Systeme linearer Gleichungen mit zwei Variablen*) zu erweitern sowie *sichere Fertigkeiten im Anwenden dieser Verfahren* zu entwickeln; vgl. Lp 26, 27.
Ein wesentlicher Teil des Wissens und Könnens, das die Schüler im Rahmen dieses Stoffgebiets erwerben, bildet eine notwendige Voraussetzung für das Erfassen der Zusammenhänge zwischen Funktion und Gleichung und der Lösungsverfahren für Gleichungen, vor allem im Stoffgebiet 4. „Quadratische Funktionen und quadratische Gleichungen".
Ziel und Stoff des Unterrichts machen den Zusammenhang dieses Stoffgebiets besonders mit den inhaltlichen Leitlinien „Mengen" und „Gleichungen und Ungleichungen" sichtbar; vgl. Uh 12f. Ebenso besteht zu den Leitlinien der mathematischen Methode „Verfahren zur Problemlösung" und „Hilfsmittel mathematischen Arbeitens" (Rechentechnik und graphisches Arbeiten) eine enge Verbindung; vgl. Uh 20f.

Im Hinblick auf die **ideologische Bildung und Erziehung** gibt es unmittelbare Anknüpfungspunkte an das Stoffgebiet 1. „Reelle Zahlen; Arbeiten mit Variablen" (Einsicht in das Wesen der Mathematik, ihrer Begriffe, Gesetze und Methoden). Einen erzieherisch besonders bedeutsamen Beitrag muß die Behandlung von Sachaufgaben aus der Praxis erbringen (das betrifft in diesem Stoffgebiet Aufgaben, die auf lineare Ungleichungen oder auf Systeme linearer Gleichungen führen). Bei Aufgaben dieser Art bildet das Eingehen auf den sachlichen Inhalt, nicht die philosophische Betrachtung der mathematischen Abstraktionen den Schwerpunkt (im Unterschied zur Behandlung von Variablen und Termen in der Stoffeinheit 1.3.).

Bei der **methodischen Gestaltung** des Unterrichts sollte beachtet werden, daß im Mathematiklehrgang der Oberschule *Ungleichungen* erstmals in der Stoffeinheit 2.1. „Lineare Ungleichungen" Gegenstand *systematischer* Behandlung sind (allerdings kennen die Schüler bereits den Begriff der Ungleichung, sie haben auch schon verschiedenartige lineare Ungleichungen durch inhaltliche Überlegungen gelöst). Im Unterricht der Oberschule werden Ungleichungen – wenn man von einer Information über Systeme mit linearen Ungleichungen und über quadratische Ungleichungen absieht – später nicht mehr weiter erörtert, sondern nur noch bei der Kennzeichnung von Intervallen (z. B. bei Definitions- und Wertebereichen von Funktionen, beim Annähern von Potenzen mit irrationalen Exponenten durch Potenzen mit rationalen Exponenten) angewendet. In weiterführenden Bildungseinrichtungen wird das Lösen von Ungleichungen im allgemeinen jedoch häufig, z. B. bei Optimierungsproblemen, angewendet. Am Beispiel der Ungleichungen kann den Schülern anschaulich gezeigt werden, daß der im Unterricht behandelte Stoff nur ein kleiner Teil des gesamten Gebiets ist, daß aber mit dem erworbenen Wissen und Können tiefer in dieses Gebiet eingedrungen werden kann. Alle Schüler sollten zu der inneren Bereitschaft geführt werden, später, nach dem Abschluß der Oberschule, ständig weiterzulernen. Bei solchen Überlegungen können gewisse Aufgaben, zusammenfassende Überblicke, nur zur Information bestimmte Stoffe den Ausgangspunkt bilden.

In der Stoffeinheit über lineare Ungleichungen ist es zweckmäßig, für die Behandlung von Sachaufgaben (aus anderen Disziplinen der Mathematik, aus anderen Unterrichtsfächern und aus der gesellschaftlichen Praxis) eine besondere Unterrichtseinheit (2.1.5.) vorzusehen.

Bei der Behandlung der Stoffeinheit 2.2. „Systeme aus zwei linearen Gleichungen" sollte entsprechend der Empfehlung auf Lp 27 als allgemeines Lösungsverfahren das *Einsetzungsverfahren* (Substitutionsverfahren) gewählt werden, zumal es in der Regel auch beim Lösen nichtlinearer Gleichungssysteme mit zwei Variablen vorteilhaft ist. Auch ermöglicht das Einsetzungsverfahren den Schülern einen übersichtlichen Lösungsalgorithmus.

Bei zahlreichen Anwendungsaufgaben, besonders aus der Geometrie, wurde dieses Verfahren von den Schülern bereits in den Klassen 7 und 8 „stillschweigend" benutzt, z. B. beim Lösen der Aufgabe: Die längere Seite eines Rechtecks unterscheidet sich von der kürzeren um 2 cm. Vergrößert man jede Seite um 4 cm, so wächst der Flächeninhalt des Rechtecks um 72 cm^2. Berechne die Länge der Seiten!

Das graphische Lösen von Gleichungen, Ungleichungen und Gleichungssystemen ist zwar zu behandeln; die Lösungsschritte sind aber nicht bis zur Fertigkeit zu üben. Die graphischen Verfahren haben in erster Linie den Zweck, die Zusammenhänge zwischen Funktion und Gleichung sichtbar zu machen. Weiterhin sollen sie die Lösungsdiskussionen – die von den Schülern auf dieser Stufe schon weitgehend selbständig geführt werden können – wirkungsvoll unterstützen. Grundsätzlich liefern die graphischen Verfahren nur Näherungswerte für die Lösungen der Gleichungen, manchmal sogar unbrauchbare. Für lineare Gleichungssysteme kann man jedoch mit Hilfe der graphischen Darstellung rasch entscheiden, ob die Lösungsmenge die leere Menge, eine Einermenge oder eine unendliche Menge ist.

Für den Unterricht im Rahmen der Stoffeinheit über Gleichungssysteme (2.2.) wird eine Gliederung vorgeschlagen, nach der für die Behandlung von Sachaufgaben ebenfalls eine spezielle Unterrichtseinheit (2.2.5.) zur Verfügung steht.

Da die Schüler zwar – schon von Klasse 1 an – vielfältige *Sachaufgaben*, die auf Gleichungen oder Ungleichungen führen, gelöst haben, aber noch nicht mit einem allgemeinen Verfahren zur Lösung solcher Aufgaben vertraut sind, kommt es hier darauf an, nicht nur Lösungsweg und Richtigkeit der Lösung zu beachten, sondern auch das Lösungsverfahren den Schülern bewußt zu machen. Spezielle Hinweise dazu werden in den Bemerkungen zur Unterrichtseinheit 2.2.5. gegeben; vgl. Uh 92ff.

Für die Behandlung von Sachaufgaben in Textform ist von großem Nutzen, wenn vor dem Aufstellen der Gleichung die für das Lösen der Aufgabe erforderlichen Größen klar und eindeutig bezeichnet werden (z. B.: Statt: „Ich bezeichne mit x die erste Lampe." muß es heißen: „Ich bezeichne mit x den Wert der Leistungsaufnahme der ersten Lampe."). Bei einigen Textaufgaben kann die Behandlung im Unterricht auch nach dem Erarbeiten der Gleichung bzw. Ungleichung abgebrochen werden. Solche gründlich analysierten, aber nicht durchgerechneten Aufgaben eignen sich später als Wiederholungsaufgaben. Nachdrücklich muß jedoch davor gewarnt werden, in solchen Fällen die Ausrechnung der häuslichen Arbeit der Schüler zu überlassen. Ein solches Vorgehen wäre für die Bildung und Erziehung der Schüler praktisch wertlos. Nützlich dagegen ist es, den Gedankengang beim Aufsuchen der Lösung einer solchen Aufgabe zu einem späteren Zeitpunkt von den Schülern wiederholen und kommentieren zu lassen.

Übersicht zum Stoffgebiet 2. „Lineare Ungleichungen und Gleichungssysteme (25 Stunden – 19 Lerneinheiten)

Unterrichtseinheit	Std.	Seiten Lb	Seiten Uh	Wiederholung	Einführung	Festigung
2.1.1. Lineare Gleichungen mit einer Variablen (LE 1 und 2)	2	44	79	Begriffe „Gleichung", „Ungleichung", „erfüllen", „Aussage", „Lösung", „Lösungsmenge", „einander äquivalente Gleichungen" Regeln für das Umformen von Gleichungen Lösen von Sachaufgaben	Schreibweise für Lösungsmengen	Regeln für das Umformen von Gleichungen Lösen von Sachaufgaben
2.1.2. Einander äquivalente Ungleichungen (LE 3)	1	47	81	Ungleichungen Lösungsmengen von Ungleichungen Veranschaulichen von Lösungen an einer Zahlengeraden	Einander äquivalente Ungleichungen	Einander äquivalente Ungleichungen
2.1.3. Regeln für das Umformen von Ungleichungen (LE 4)	2	48	81	Monotoniegesetze für rationale Zahlen Intervalle Struktur und Umformungen von Termen Berechnen von Nullstellen linearer Funktionen	Regeln für das Umformen von Ungleichungen Formulieren der Monotoniegesetze für reelle Zahlen mit Hilfe von Variablen Lineare Ungleichungen Veranschaulichen von Lösungsmengen von Ungleichungen an Zahlengeraden	Regeln für das Umformen von Ungleichungen Lösen von linearen Ungleichungen mit einer Variablen bei verschiedenen Grundbereichen der Variablen
2.1.4. Lösen von linearen Ungleichungen (LE 5 bis 7)	5	49	83	Umformen von Termen Darstellen von Zahlen	Proben bei Ungleichungen Darstellen von Zahlen als Summen	Lösen von linearen Ungleichungen Proben bei linearen Ungleichungen

Unterrichtseinheit	Std.	Seiten Lb	Seiten Uh	Wiederholung	Einführung	Festigung
2.1.5. Lösen von Sachaufgaben (LE 8 und 9*)	3	53	86	Analysieren eines Textes	Information: Lineare Ungleichungen mit zwei Variablen	Aufstellen und Lösen von linearen Gleichungen und Ungleichungen aus mathematischen und praktischen Sachverhalten
2.2.1. Lineare Gleichungen mit zwei Variablen (LE 10 und 11)	1	55	87	Lineare Funktionen; ihre graphische Darstellung im rechtwinkligen Koordinatensystem Einfluß von *m* und *n* auf die Lage der entsprechenden Geraden im Koordinatensystem	Graphische Darstellung der Lösungsmenge einer linearen Gleichung mit zwei Variablen	Funktionsbegriff Graphische Darstellung linearer Funktionen Lösen linearer Gleichungen mit zwei Variablen
2.2.2. Durchschnitt zweier Mengen (LE 12)	1	57	87	Mengen, Teilmengen, Elementbeziehung Angeben der Elemente einer Menge	Durchschnitt zweier Mengen	Beschreiben und Veranschaulichen von Mengen
2.2.3. Systeme aus zwei linearen Gleichungen mit zwei Variablen; Lösungsmengen; Näherungslösungen (LE 13 bis 15)	2	58	88	Lösen von linearen Gleichungen mit zwei Variablen Veranschaulichen von Lösungsmengen Durchschnitt zweier Mengen Umformen von Gleichungen Lagemöglichkeiten zweier Geraden zueinander	Gleichungssysteme Lösungsmengen von Gleichungssystemen Näherungslösungen Proben bei Gleichungssystemen	Begriff „Gleichungssystem" Übersicht über Lösungsmengen von Gleichungssystemen Ermitteln von Näherungslösungen von Systemen aus den graphischen Darstellungen
2.2.4. Lösungsverfahren für Gleichungssysteme (LE 16)	3	63	91	Regeln für das Umformen von Gleichungen	Einsetzungsverfahren Information: Additionsverfahren	Einsetzungsverfahren Proben

Unterrichtseinheit	Std.	Seiten Lb	Uh	Wiederholung	Einführung	Festigung
2.2.5. Lösen von Sachaufgaben (LE 17)	3	66	92	Analysieren von Texten		Aufstellen von Gleichungen aus praktischen Sachverhalten Lösen von Gleichungssystemen Proben an den Sachverhalten
2.2.6. Kontrollarbeit	1		94			
2.2.7* Systeme aus drei Gleichungen; Systeme aus Gleichungen und Ungleichungen (LE 18* und 19*)	1	67	94	Ungleichungen mit zwei Variablen	Information: Gleichungssysteme mit mehr als zwei Variablen; Systeme aus Gleichungen und Ungleichungen	

2.1. Lineare Ungleichungen
(LE 1 bis 9; 13 Std.)

2.1.1. Lineare Gleichungen mit einer Variablen (LE 1 und 2; 2 Std.)

Die Stunden dieser Unterrichtseinheit sollen der *Wiederholung* von Stoff aus dem Unterricht vorangegangener Klassenstufen *und* der *Kontrolle* dienen, ob alle Schüler über die Grundlagen verfügen, die für das Verständnis des neuen Stoffes (Ungleichungen und Gleichungssysteme) erforderlich sind.
Obwohl von Klasse 6 an Gleichungen systematisch (und nicht nur durch inhaltliche Betrachtungen) gelöst wurden (vgl. [G 8], S. 10), ist ein gründliches Wiederholen der Regeln für das Umformen von Gleichungen ratsam. Ebenso sollte an das Umformen von Termen, mit dem die Schüler in vorangegangenen Unterrichtseinheiten (Stoffeinheit 1.3.) vertraut gemacht wurden, angeknüpft werden. Im weiteren Verlauf des Unterrichts müssen den Schülern die Gemeinsamkeiten, aber auch die Unterschiede zwischen den Regeln für das Umformen von Gleichungen und denen für das Umformen von Ungleichungen voll bewußt werden.

Zu Beginn dieser Unterrichtseinheit werden die Begriffe „Gleichung“, „Ungleichung“, „erfüllen“, „Aussage“, „Lösung“, „Lösungsmenge“, „einander äquivalente Gleichungen“ wiederholt. Die Abhängigkeit der Lösungsmenge vom Grundbereich der Variablen wird herausgearbeitet (z. B. an Lb 180/5 bis 8; hier ist für die Variablen der Grundbereich festzulegen).
Die *Regeln für das Umformen einer Gleichung* in eine äquivalente Gleichung müssen von den Schülern sicher beherrscht werden. Das läßt sich erreichen, indem z. B.

- die Umformungsregeln beim Kommentieren des Lösungsgangs vollständig genannt,
- jeweils nur wenige Operationen auf beiden Seiten der Gleichung ausgeführt werden.

Wenn auch die Untersuchung der Struktur der Terme auf beiden Seiten der Gleichung eine wichtige Voraussetzung für das Lösen einer Gleichung ist, so braucht sie nicht bei jeder Aufgabe in aller Ausführlichkeit zu erfolgen. In den meisten Fällen sollte man sich damit begnügen, daß die Schüler den jeweils gewählten Umformungsschritt begründen. Das könnte z. B. beim Umformen der Gleichung $cx + b = 0$ folgendermaßen geschehen: Ich subtrahiere auf beiden Seiten b, da b additiv mit cx verbunden ist, und dividiere danach beide Seiten der Gleichung durch die von Null verschiedene Zahl c, da c multiplikativ mit x verbunden ist. Bei Gleichungen mit Parametern sollten Fallunterscheidungen vorgenommen werden, damit alle Lösungen der Gleichung erfaßt werden (vgl. [21]).

Beispiel: $c(x + b) = a$

Fall 1.1.: $c = 0$; $a = 0$; b beliebig
Die Lösungsmenge enthält alle Zahlen des Grundbereichs.

Fall 1.2.: $c = 0$; $a \neq 0$; b beliebig
Die Lösungsmenge ist leer.

Fall 2: $c \neq 0$; a, b beliebig
Die Lösungsmenge enthält nur $\frac{a - bc}{c}$.

Die Übungen, einen Sachverhalt mit Hilfe von Variablen als Term zu schreiben (Stoffeinheit 1.3. „Arbeiten mit Variablen“), werden jetzt weitergeführt; vgl. Lb 181/14,

15. In einen Text eingekleidete formale Aufgaben können den Schülern den Zugang zu komplizierteren Sachaufgaben erleichtern. Die Schüler lernen bereits an den eingekleideten Aufgaben, daß es notwendig ist, vor dem Niederschreiben einer Gleichung eine eindeutige Bezeichnung festzulegen. Die zu ermittelnde Zahl (Größe) muß nicht immer x genannt werden. Man sollte bei Aufgaben aus der Geometrie, Physik, Chemie usw. die in dem jeweiligen Fach üblichen Symbole verwenden (auch eine nachträgliche Umbenennung der gesuchten Größe in x ist nicht empfehlenswert). Für einige Aufgaben ist es sinnvoll, zunächst eine Ungleichung aufzustellen und daraus eine Gleichung zu entwickeln (vgl. [4]).

Beispiel:

Ein Fünftel einer Zahl ist um 6 kleiner als ein Viertel der gleichen Zahl. Ermitteln Sie die gesuchte Zahl mit Hilfe einer Gleichung!
Die gesuchte Zahl sei x.

$$\frac{x}{5} < \frac{x}{4}$$

$$\frac{x}{5} + 6 = \frac{x}{4} \quad \text{oder} \quad \frac{x}{5} = \frac{x}{4} - 6$$

Mancher Sachverhalt läßt sich in einer Skizze oder einer einfachen Zeichnung leicht und faßlich veranschaulichen. Dadurch wird das Begreifen des Textes erleichtert. Grundsätzlich sollten bei Sachaufgaben die Lösungen unter Verwenden von Variablen ermittelt und erst am Schluß die entsprechenden Zahlen oder Größen eingesetzt werden, so daß bei gleichartigen Aufgaben lediglich die anderen Zahlen oder Größen zu berücksichtigen sind. An dieser Stelle kann man wiederum auf den Sinn des Aufstellens einer Formel (Lösungsformel) verweisen.
Da in den vorangegangenen Klassenstufen häufig Gleichungen umgeformt und gelöst werden, kann man bei manchen Textaufgaben, besonders bei komplizierteren Sachaufgaben, auf eine vollständige Lösung der Gleichung verzichten; oft kann man bereits nach dem Analysieren des Textes und dem Aufstellen der Gleichung abbrechen. Es ist besonders in solchen Fällen zweckmäßig, daß Schüler das Aufstellen der Gleichung wiederholend mit eigenen Worten kommentieren; vgl. Uh 75.
Beim Behandeln der Probe bei formalen Aufgaben sollte man wie auf Lb 46, Beispiel B 3, vorgehen. Bei Sachaufgaben muß das Ergebnis mit dem Aufgabentext konfrontiert werden. Da dies manchen Schülern Schwierigkeiten bereiten kann, sollte man mit den Schülern etwa für zwei oder drei (verschiedenartige) Sachaufgaben die Proben erarbeiten und schriftlich festhalten.
Wegen der Vielfalt der Sachverhalte ist es nicht sinnvoll, ein Musterbeispiel für Proben am Text zu geben. Die Schüler sind anzuhalten, die errechneten Ergebnisse nicht nur formal zu überprüfen, sondern auch mit ihren Erfahrungen zu vergleichen (z. B.: Bei der Parallelschaltung von Widerständen ist der Gesamtwiderstand kleiner als der kleinste Einzelwiderstand; die Konzentration einer Lösung sinkt, wenn Lösung geringerer Konzentration hinzugegeben wird). Oft ist auch eine Überlegung (Schätzung, Überschlag) zur Größenordnung des Ergebnisses nützlich.

Vorschlag für den Aufbau der Stunden:

1. Stunde: Wiederholung von „Gleichung“, „Ungleichung“, „Aussage“, „erfüllen“, „Lösung“, „Lösungsmenge“, „einander äquivalente Gleichungen“; Übungen im Lösen von linearen Gleichungen mit einer Variablen;

Ordnen der einzelnen Regeln zu einem System von Regeln für das Umformen von Gleichungen

2. Stunde: Übungen im Lösen von Sachaufgaben aus verschiedenen Bereichen (besonderer Wert ist auf die Probe am Text zu legen)

2.1.2. Einander äquivalente Ungleichungen (LE 3; 1 Std.)

Ungleichungen sind den Schülern bereits aus dem vorangegangenen Unterricht – von Klasse 1 an – bekannt. Zum Stoff der Klassen 6 und 7 gehört das Lösen von Ungleichungen, in Klasse 8 werden Ungleichungen im Zusammenhang mit der Angabe bestimmter Bedingungen (z. B. Definitionsbereich, Wertebereich, Streckungsfaktor) verwendet [G 8].

Es empfiehlt sich, in dieser Unterrichtseinheit mit einer gründlichen Wiederholung des Begriffs „Ungleichung" zu beginnen und zunächst solche Ungleichungen zu behandeln, in denen keine Variablen vorkommen; von den Aussagen werden die Wahrheitswerte ermittelt.

Im Anschluß daran werden Ungleichungen mit Variablen betrachtet, die erst zu Aussagen werden, wenn für alle vorkommenden Variablen Elemente des betreffenden Grundbereichs der Variablen eingesetzt werden (dabei sollten vorwiegend Ungleichungen mit nur einer Variablen gewählt werden). Zahlen des Grundbereichs der Variablen einer Ungleichung, die als Lösung erkannt wurden, werden auf einem Zahlenstrahl bzw. einer Zahlengeraden dargestellt. Auf diese Weise kann man das Finden weiterer Lösungen (und das Aufstellen einer anderen Ungleichung mit der gleichen Lösungsmenge) erleichtern. Hierbei bietet sich die Gelegenheit, die Begriffe „erfüllen", „Lösung", „Lösungsmenge" anzuwenden und zu festigen und den Begriff „einander äquivalente Ungleichungen" einzuführen. Motiv für das Umformen von Ungleichungen kann die Forderung sein, zu einer gegebenen Ungleichung eine äquivalente zu finden, deren Lösungsmenge leichter ermittelt werden kann. Es wird an die Regeln für das Umformen von Gleichungen angeknüpft und das Erarbeiten eines entsprechenden Systems von Regeln für das Umformen von Ungleichungen als Ziel für die nächsten Stunden angegeben.

Daß sich die Lösungsmengen einer Ungleichung im allgemeinen unterscheiden, wenn verschiedene Grundbereiche der Variablen gewählt werden, wird bereits in dieser Stunde gezeigt; z. B. mit Hilfe von Lb 182/37, 38.

Sind die Lösungsmengen von Ungleichungen endliche Mengen, so gibt man sie in der Regel durch Aufweisen der Elemente (etwa in geschweiften Klammern) an. Unendliche Mengen beschreibt man häufig verbal, gegebenenfalls auch durch die übliche Bezeichnung für ein Intervall. Zur Veranschaulichung der Lösungsmengen kann ebenfalls die Zahlengerade benutzt werden.

2.1.3. Regeln für das Umformen von Ungleichungen (LE 4; 2 Std.)

Die Schüler werden in dieser Unterrichtseinheit erstmalig mit Methoden des systematischen Lösens von Ungleichungen vertraut gemacht. Es ist gefordert, die Regeln zum Umformen von Ungleichungen (in zu diesen äquivalente Ungleichungen) anhand von Beispielen zu erarbeiten und die Unterschiede zu den Regeln für das Umformen von Gleichungen deutlich herauszuarbeiten; vgl. Lp 26.

Bei den Übungsaufgaben sollte der Schwierigkeitsgrad nicht zu hoch sein. Es werden ausschließlich lineare Ungleichungen gelöst. Das Multiplizieren (Dividieren) beider Seiten einer Ungleichung unter Verwenden von Variablen sollte der Vollständigkeit halber erwähnt werden, aber nicht unbedingt in die Übungen einbezogen werden.

Zu Beginn der Unterrichtseinheit ist es ratsam, die Schüler mit dem Lösen von zwei Ungleichungen zu beauftragen, deren Lösungsmengen gleich sind und leicht durch inhaltliche Überlegungen aufgefunden werden können. Die Schüler erkennen dabei selber, daß die Ungleichungen zueinander äquivalent sind. An entsprechenden Aufgaben wird herausgearbeitet, daß man die zueinander äquivalenten Ungleichungen durch *Addition bzw. Subtraktion der gleichen Zahl auf beiden Seiten* ineinander umformen kann; vgl. Lb 48, Beispiel B 7. Den Schülern wird mitgeteilt, daß dies für alle Ungleichungen gilt. Es wird noch darauf hingewiesen, daß das Relationszeichen unverändert bleibt.
Da diese Feststellung für reelle Zahlen zutrifft, wird nun das *Monotoniegesetz der Addition reeller Zahlen* mit Hilfe von Variablen formuliert; vgl. Lb 48, Satz B 1. Die Monotoniegesetze der Addition und Multiplikation rationaler Zahlen wurden in der Unterrichtseinheit 1.1.3. wiederholt.
Die erarbeitete Umformungsregel wird im weiteren Verlauf der Stunde beim Lösen von Ungleichungen angewandt. Die Schüler werden veranlaßt, bei jeder Umformung diese Regel zu formulieren; z. B. an der Aufgabe:

Ermitteln Sie alle natürlichen Zahlen x, die die Ungleichung $7x - 3 < 6x + 2$ erfüllen!

$$7x - 3 < 6x + 2 \quad | -6x$$

(Schüler: Man erhält zur gegebenen Ungleichung durch Subtraktion von $6x$ auf beiden Seiten eine äquivalente Ungleichung. Das Relationszeichen bleibt unverändert.)

$$x - 3 < 2 \quad | +3$$

(Schüler: Auf beiden Seiten der Ungleichung wird 3 addiert. Das Relationszeichen bleibt unverändert.)

$$x < 5$$

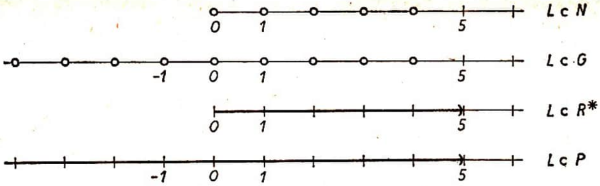
Die Ungleichungen $7x - 3 < 6x + 2$ und $x < 5$ sind einander äquivalent. Also wird die gegebene Ungleichung von allen natürlichen Zahlen erfüllt, die kleiner als 5 sind.

$$L = \{0; 1; 2; 3; 4\}$$

Die Lösungsmenge wird an einem Zahlenstrahl durch Kennzeichnen der Punkte, die den Zahlen der Lösungsmenge entsprechen, dargestellt. Mit allen Lösungen wird die Probe durchgeführt.
Ist die Lösungsmenge eine unendliche Menge, so wird die Probe später nachgeholt; vgl. Unterrichtseinheit 2.1.4., Uh 83. Auf keinen Fall darf das Überprüfen nur einiger Lösungen als Probe für die gesamte Lösungsmenge betrachtet werden.
Schon an dieser Stelle sollten zur Festigung des Gelernten bei wenigstens einer Ungleichung verschiedene Grundbereiche für die Variable vorgegeben werden. Besonders deutlich sehen die Schüler an der graphischen Darstellung der Lösungsmengen, daß sich mit der Änderung des Grundbereichs im allgemeinen auch die Lösungsmenge verändert.
So könnte bei der Ungleichung $7x - 3 < 6x + 2$ als Grundbereich für x außer den natürlichen Zahlen noch der Bereich der ganzen Zahlen, der Bereich der gebrochenen Zahlen und der Bereich der reellen Zahlen gegeben werden (die Veranschaulichung der einzelnen Lösungsmengen könnte nach Bild 83/1 erfolgen).

Den Schülern muß bewußt werden, daß bei der *Multiplikation (Division) einer Ungleichung mit einer (durch eine) Zahl* das Relationszeichen erhalten bleibt, wenn die

83/1



Zahl positiv ist, und das Relationszeichen umgekehrt wird, wenn die Zahl negativ ist. Dazu kann folgende Übung mit rationalen Zahlen durchgeführt werden.
Beide Seiten der Ungleichungen

$$2 < 5; \quad 4{,}3 > -2; \quad -0{,}7 < -\frac{1}{2}$$

werden mit (durch) a) $\frac{1}{2}$, *b)* -2 *multipliziert (dividiert). Schreiben Sie zwischen die Paare von Produkten (Quotienten) das Relationszeichen, so daß wieder eine wahre Aussage entsteht!*
Im Anschluß an diese Übung wird das *Monotoniegesetz der Multiplikation reeller Zahlen* wiederholt und unter Verwenden von Variablen formuliert.
Die Feststellung, daß bei den betrachteten Beispielen die Multiplikation mit einer von Null verschiedenen Zahl bzw. die Division durch eine von Null verschiedene Zahl beider Seiten einer Ungleichung auf eine äquivalente Ungleichung führt (wobei allerdings zwei Fälle – positive und negative Faktoren bzw. Divisoren – zu unterscheiden sind), wird nun verallgemeinert. Die Umformungsregeln werden bei einigen einfachen Beispielen angewendet und auch in einem vollständigen Satz formuliert.

Die Schüler erarbeiten das System der Regeln für das Umformen von Ungleichungen (Lb 48f) und stellen die Gemeinsamkeiten und die Unterschiede zu den Regeln für das Umformen von Gleichungen fest; vgl. Lb 49, Auftrag B 3.
Zur Sicherung der Kenntnisse über die Umformungsregeln (eventuell als Hausaufgabe) wird das Lösen von Ungleichungen gefordert, für die festgestellt werden soll, ob sie einander äquivalent sind; z. B. Lb 184/53, 54.

2.1.4. Lösen von linearen Ungleichungen (LE 5 bis 7; 5 Std.)

Die folgenden Übungen dienen der weiteren Festigung der Umformungsregeln. Außerdem werden die Schüler mit Proben bei Ungleichungen vertraut gemacht.
Wenn die Lösungsmenge einer linearen Ungleichung unmittelbar durch eine zu ihr äquivalente Ungleichung der Form $x < a$ bzw. $x > a$ gegeben ist, so erübrigt sich die Probe. Ist allgemein die Lösungsmenge einer Ungleichung eine endliche Menge, so kann mit jeder einzelnen Lösung die Probe durchgeführt werden, im Falle einer unendlichen Menge kann die Probe nicht mehr durch Einsetzen jeder einzelnen Lösung ausgeführt werden; vgl. [23].
Für den Unterricht werden zweckmäßigerweise Ungleichungen ausgewählt, bei denen die *Struktur der Terme* auf einer Seite oder auf beiden Seiten *verändert* werden muß (Zusammenfassen, Setzen oder Auflösen von Klammern). Der Schwierigkeitsgrad der Übungen sollte allmählich gesteigert werden, indem

– die Anzahl der Operationen vergrößert,
– die Struktur der Terme komplizierter (weniger leicht überschaubar) gemacht

werden.

Beispiele:

$$2 - \frac{1}{2}(4x + 3) < x - \frac{1}{4}; \quad \frac{8}{9}(3x - 6) > \frac{5}{3}(7 - x)$$

Für die Variablen werden verschiedene Zahlenbereiche als Grundbereiche festgelegt. Das Rechnen mit rationalen Zahlen wird bei allen Übungen gefestigt (z. B. Lb 183/45 bis 52).

Es sollten den Schülern auch *formale Aufgaben*, die *in Texte eingekleidet* sind, gestellt werden, um das Analysieren von Texten zu üben.

Beispiele:

a) *Welche ganze Zahl ist, um 3 vermindert, größer als das Doppelte der Summe aus dieser Zahl und 5?*
b) *Ermitteln Sie alle positiven Zahlen, deren dritter Teil, vermindert um ein Viertel, größer ist als ein Fünftel!*

Zur Vorbereitung auf das Lösen von *Sachaufgaben* wird bei einigen Aufgaben nicht ein ganzer Zahlenbereich, sondern nur ein Intervall als Grundbereich festgelegt. Dabei wird der Begriff „Intervall“ vertieft, die Kennzeichnung von Intervallen mit Hilfe von Ungleichungen gefestigt. Von einer Kennzeichnung von Intervallen wie „$-\infty < x < 1$; $(x \in P)$“ oder „$0 \leqq x < +\infty$; $(x \in P)$“ ist abzuraten ($-\infty$ und $+\infty$ sind keine Zahlen), statt dessen sollte die Schreibweise „$x < 1$; $(x \in P)$“ bzw. „$0 \leqq x$; $(x \in P)$“ verwendet werden; vgl. Lb 49f.

Beispiel:

Ermitteln Sie alle reellen Zahlen x des Intervalls $0 < x \leqq 1$, die die Ungleichung $4(2x - 3) < -8$ erfüllen!
Die Ungleichung $4(2x - 3) < -8$ wird zunächst im Bereich der reellen Zahlen gelöst.

$$\begin{aligned} 4(2x - 3) &< -8 & & \\ 8x - 12 &< -8 & &\mid +12 \\ 8x &< 4 & &\mid :8 \\ x &< \frac{1}{2} & & \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge der Ungleichung $4(2x - 3) < -8$ enthält alle reellen Zahlen des Intervalls $0 < x \leqq 1$, die kleiner als $\frac{1}{2}$ sind, d. h.: die Lösungsmenge ist gleich dem Intervall $0 < x < \frac{1}{2}$ mit $x \in P$.

Die Lösungsmenge ist bei derartigen Aufgaben gleich dem Durchschnitt zweier Mengen. Die Bildung dieses Durchschnitts nehmen die Schüler, ohne daß der Begriff „Durchschnitt“ an dieser Stelle eingeführt wird (vgl. Lp 28, Uh 87f), selbständig vor. Die Formulierung „sowohl ... als auch“ sollte jedoch bereits benutzt werden.

Gefordert wird auch die Behandlung von Ungleichungen, in denen *Variable als Koeffizienten* auftreten; vgl. Lp 27. Der Schwierigkeitsgrad ist durch das folgende Beispiel gekennzeichnet; vgl. auch Lb 184/8. In jedem Falle wird eine Lösungsdiskussion angeschlossen.

Beispiel:

Ermitteln Sie alle gebrochenen Zahlen x, die die Ungleichung $a + ax < b$ *mit* $a, b \in N$ *und* $a \neq 0$ *erfüllen!*

$$\begin{aligned} a + ax &< b & &|-a \\ ax &< b - a & &|:a \\ x &< \frac{b-a}{a} \end{aligned}$$

Im Falle $a > b$ ist der Zähler und damit der Quotient $\frac{b-a}{a}$ negativ, die Lösungsmenge ist leer.
Im Falle $a = b$ ist der Quotient $\frac{b-a}{a}$ gleich Null, d. h., die Lösungsmenge ist leer.
Im Falle $a < b$ stehen im Zähler und Nenner bei $\frac{b-a}{a}$ von Null verschiedene natürliche Zahlen. Die Lösungsmenge enthält alle gebrochenen Zahlen des Intervalls $0 \leqq x < \frac{b-a}{a}$.

Lösungsdiskussionen sind für die Schüler der Klasse 9 noch relativ ungewohnt; es ist deshalb notwendig, ihnen besonderes Augenmerk beizumessen. Es empfiehlt sich, von den Schülern Lösungsdiskussionen zunächst nur bei Aufgaben zu verlangen, die bereits gelösten Aufgaben analog sind. Dabei kann die Diskussion der Lösungen bereits durch den Aufgabentext gefordert werden, z. B.:

Unter welcher Bedingung für a und b sind die Lösungen der Ungleichung $a + ax < b$ *mit* $a, b \in N$ und $a \neq 0$ *natürliche Zahlen?*

Damit Lösungen im geforderten Bereich existieren, muß die Bedingung $a < b$ erfüllt sein, denn nur in diesem Falle ist der Quotient $\frac{b-a}{a}$ größer als Null, d. h., es gehört wenigstens die Zahl Null zur Lösungsmenge.

Im Rahmen dieser Unterrichtseinheit sollte das Lösen von linearen Ungleichungen auch mit Hilfe einer *Kontrollarbeit* gefestigt werden.

Folgende Themen erscheinen geeignet.

1. Prüfen gegebener Ungleichungen auf Äquivalenz, z. B.:

   $5 - x < x + \frac{1}{2}$ und $4x + 1 > 10$

2. Nennen von Zahlen eines gegebenen Intervalls, die eine gegebene Ungleichung erfüllen, z. B.:
   Geben Sie alle ganzen rationalen Zahlen des Intervalls $5 < x < 20$ an, die die Ungleichung $x + 3 > \frac{5x + 36}{6}$ erfüllen!

3. Lösen einer Ungleichung und Veranschaulichen der Lösungsmenge, z. B.:

$$3 - 2\left(x - \frac{3}{2}\right) < 14 + 3x$$

Vorschlag für eine Unterteilung der Unterrichtseinheit

1. Stunde: Lösen von formalen Aufgaben – Anwenden und Festigen der Umformungsregeln (die Lösungsmengen werden an der Zahlengeraden veranschaulicht); Einführen von „lineare Ungleichung"; Proben bei endlichen Lösungsmengen
Aufgaben: Lb 183/45; Lb 51, Aufträge B 6, B 7; Lb 52, Beispiel B 12, Auftrag B 8

2. Stunde: Lösen von formalen Aufgaben; Proben bei unendlichen Lösungsmengen
Aufgaben: Lb 183/49; Lb 53, Auftrag B 9

3. Stunde: Lösen von formalen Aufgaben mit einem Intervall als Grundbereich; vgl. Uh 84; Wiederholung des Begriffs „Intervall" und der Kennzeichnung von Intervallen durch Ungleichungen, Proben; Lösen formaler Textaufgaben; Lösen von linearen Gleichungen
Aufgaben: Lb 183/47; Lb 49f; Lb 181/24; Lb 182/31

4. Stunde: Ungleichungen mit Variablen als Koeffizienten; Aufgaben: Lb 184/8
Kontrollarbeit (Uh 85f)

5. Stunde: Auswerten der Kontrollarbeit; Zusammenfassende Übungen
Aufgaben: Lb 183/51

2.1.5. Lösen von Sachaufgaben (LE 8 und 9*; 3 Std.)

Beim Lösen von Sachaufgaben, die auf Ungleichungen führen, sollten folgende Schritte eingehalten werden.

a) **Erfassen des Sachverhalts und Festlegen geeigneter Bezeichnungen** (Variable für die Zahlen bzw. Größen)
Es erfolgt wie bei jeder Textaufgabe.

b) **Aufstellen einer Ungleichung**
Es bildet das Ergebnis einer eingehenden Analyse des Sachverhalts, vor allem der für die Lösung der Aufgabe wesentlichen Beziehungen zwischen den auftretenden Zahlen oder Größen. Diese Analyse kann auch zeigen, ob der Sachverhalt richtig erfaßt und die zur Lösung notwendigen Daten richtig ermittelt wurden.

c) **Lösen der Ungleichung**
Es erfolgt unter Anwendung der Umformungsregeln für Ungleichungen nach einer Analyse der auftretenden Terme.

d) **Durchführen der Probe**
Nach der Überprüfung, ob die ermittelte Ungleichung richtig umgeformt wurde (falls erforderlich), wird das Ergebnis mit dem Sachverhalt konfrontiert. Auch können die Lösungen auf Grund der Erfahrungen der Schüler aus dem betreffenden Bereich beurteilt werden (offensichtlich sinnlose Ergebnisse können auf diese Weise ausgeschaltet werden).

e) **Formulieren eines Antwortsatzes**

* Im Rahmen dieser Unterrichtseinheit wird den Schülern an einigen Beispielen erläutert, woraus die Lösungsmenge einer linearen Ungleichung mit zwei Variablen besteht und wie – im Vergleich

mit der Lösungsmenge einer linearen Gleichung mit zwei Variablen – diese Lösungsmenge graphisch dargestellt werden kann; vgl. Lb 54, Beispiel B 17. Dabei handelt es sich um Stoff nur zur Information, d. h., es werden von den Schülern keine selbständigen Übungen und keine reproduzierbaren Kenntnisse verlangt; vgl. Lp 18, 28. Wie allgemein, so ist auch hier auf eine präzise Ausdrucksweise beim Beschreiben der Lösungen zu achten. (*Beispiel:* Nicht die Punkte, sondern die Koordinaten der Punkte, d. h. Zahlenpaare, sind Lösungen einer linearen Ungleichung mit zwei Variablen.)

2.2. Systeme aus zwei linearen Gleichungen
(LE 10 bis 19; 12 Std.)

2.2.1. Lineare Gleichungen mit zwei Variablen (LE 10 und 11; 1 Std.)

In dieser Unterrichtseinheit werden Begriffe und Verfahren wiederholt oder neu eingeführt, die für den weiteren Unterricht bereitstehen müssen.
Die linearen Funktionen werden wiederholend als Mengen geordneter Zahlenpaare gekennzeichnet, die lineare Gleichungen der Form $y = mx + n$ (d. h. lineare Gleichungen mit zwei Variablen) erfüllen.

Bei dieser Wiederholung kann man von einer linearen Gleichung mit zwei Variablen ausgehen, Lösungen dieser Gleichung in einer Tabelle niederschreiben und durch Punkte in einem Koordinatensystem darstellen. Zum Ermitteln von Lösungen wird die gegebene Gleichung nach einer Variablen (z. B. nach y) aufgelöst. Die Schüler müssen erkennen, daß eine *Lösung einer Gleichung mit zwei Variablen* nicht eine Zahl, sondern *ein Zahlenpaar* ist. Die Wertetabelle, die nach einer Variablen aufgelöste Gleichung und die graphische Darstellung der Lösungsmenge der Gleichung erinnern die Schüler an die linearen Funktionen.
Nun wird die graphische Darstellung von linearen Funktionen wiederholt und geübt, und zwar mit dem Ziel, daß die Schüler sicher, z. B. mit Hilfe eines Anstiegsdreiecks, eine lineare Funktion $y = mx + n$ graphisch darstellen können (man wählt beim Zeichnen der Geraden zweckmäßigerweise ein Anstiegsdreieck mit möglichst langer Hypotenuse, d. h., die beiden Punkte, durch die die Gerade gelegt wird, sollen einen für das sichere Zeichnen angemessenen Abstand haben; vgl. Lb 56, Bild B 10).
Im Unterricht müssen – durch entsprechende Übungen – die Schüler befähigt werden, Aufgaben folgender Art zu lösen.
Zeichnen Sie die Gerade g durch den Punkt P $(2;\ -1)$ *mit dem Anstieg* 1,5*! Geben Sie die Gleichung der Funktion an, deren Graph g ist!*
Die Aufgabenstellung kann auch dahingehend variiert werden, daß eine Gerade durch zwei gegebene Punkte gelegt wird und die Zahlen m und n zu bestimmen sind. Durch solche Aufgaben kann auch ermittelt werden, ob die Schüler die Bedeutung von m und n für die Lage der Geraden im Koordinatensystem erfaßt haben.
Beim Lösen von linearen Gleichungen mit zwei Variablen sollten die Lösungen so niedergeschrieben werden, daß der gewählte Bereich (z. B. der Bereich der reellen Zahlen) als Grundbereich der Variablen zum Ausdruck kommt; vgl. Lb 57, Beispiel B 20, Zahlenpaar $\left[\sqrt{3};\ \frac{4}{5}\sqrt{3}\right]$.

2.2.2. Durchschnitt zweier Mengen (LE 12; 1 Std.)

Der Lehrplan sieht die *Einführung* (nicht die Definition) des Begriffs „Durchschnitt zweier Mengen" mit Hilfe von Beispielen aus verschiedenen Sachbereichen vor.

Die Schüler sollen durch die Erläuterung und Veranschaulichung verschiedener Beispiele eine Vorstellung vom Durchschnitt zweier Mengen erhalten; sie sollen in der Lage sein, von zwei gegebenen Mengen den Durchschnitt zu ermitteln. Das Bilden des Durchschnitts zweier Mengen wird im weiteren Unterricht oftmals angewandt. Bei der Erörterung der Beispiele aus verschiedenen Sachgebieten darf nicht versäumt werden, erzieherisch auf die Schüler einzuwirken.
Bei den Beispielen für den Durchschnitt zweier Mengen – die Mengen werden auch aus außermathematischen Bereichen ausgewählt – wird von Anfang an die Ausdrucksweise „sowohl ... als auch" verwendet. Nach einigen Aufgaben wird die Bedeutung von „und" im Sinne von „sowohl ... als auch" bewußt gemacht.
Der Durchschnitt zweier Mengen wird mit Hilfe von *Mengendiagrammen*, möglichst auch an mehreren Beispielen, veranschaulicht. Bei den Übungen zur Bildung des Durchschnitts wird die gemeinsame Eigenschaft der Elemente des Durchschnitts hervorgehoben. In Lb 58, Beispiel B 23, enthält die Menge M alle Vierecke, deren Seiten gleich lang sind und bei denen zwei Seiten einen rechten Winkel bilden.
Bei diesen Übungen wird auch der Begriff „Teilmenge" wiederholt, indem bei einigen Beispielen der Durchschnitt M von M_1 und M_2 zu einer der Mengen (M_1; M_2) in Beziehung gesetzt wird. Das trägt dazu bei, daß „Durchschnitt" und „Teilmenge" nicht verwechselt werden.
Einige Schüler können untersuchen, wie der Durchschnitt M von M_1 und M_2 und eine Menge M_3, die Teilmenge von M_1 und Teilmenge von M_2 ist, zueinander in Beziehung stehen.
An geeigneter Stelle, z.B. bei Lb 58, Auftrag B 11a), sollte wieder darauf aufmerksam gemacht werden, daß die leere Menge und $M = \{0\}$ verschiedene Mengen sind.

2.2.3. Systeme aus zwei linearen Gleichungen mit zwei Variablen; Lösungsmengen; Näherungslösungen (LE 13 bis 15; 2 Std.)

In dieser Unterrichtseinheit sollen die Schüler gründliche Kenntnisse über ein System aus zwei linearen Gleichungen mit zwei Variablen, über dessen Lösung (Zahlenpaar bzw. Größenpaar) und über die möglichen Lösungsmengen eines Systems aus zwei linearen Gleichungen mit zwei Variablen (leere Menge, Einermenge, unendliche Menge) erwerben. Das graphische Lösen eines linearen Gleichungssystems mit zwei Variablen erlaubt einen raschen Überblick über die Lösungsmenge. Es dient im wesentlichen der Vorbereitung auf die rechnerische Lösung. Fertigkeiten im graphischen Lösen von Gleichungssystemen werden von den Schülern nicht gefordert.
Die Kenntnisse, die die Schüler über das Lösen von Systemen linearer Gleichungen erwerben, können später in den weiterführenden Bildungseinrichtungen auch auf nichtlineare Systeme angewendet werden.

In der *1. Stunde* dieser Unterrichtseinheit verwenden die Schüler ein Arbeitsblatt nach dem Muster auf Uh 89.
Eventuell können die Schüler selber das Arbeitsblatt nach diesem Muster außerhalb des Unterrichts einteilen. Es wird der folgende methodische Weg für diese Stunde empfohlen.

(1) Zweckmäßigerweise geht man von einer Fragestellung aus, die so einfach ist, daß die Schüler ohne Schwierigkeiten die Gleichungen aufstellen können; vgl. Lb 58, Beispiel B 25.

1. (I) ...
(II) ...

L = ...

L_I

						...
						...

L_{II}

						...
						...

2. (I) ...
(II) ...

L = ...

L_I

						...
						...

L_{II}

						...
						...

3. (I) ...
(II) ...

L = ...

L_I

						...
						...

L_{II}

						...
						...

(Es folgt ein vorgezeichnetes Koordinatensystem.)

An der Tafel stehen die Gleichungen (mit Numerierung I; II und waagerechtem Strich unter der zweiten Gleichung). Außerdem wird festgestellt, daß – im Beispiel – die Längen eines Streckenpaares $[d_1; d_2]$ zu ermitteln sind.

(2) Unter aktiver Beteiligung aller Schüler werden für Gleichung (I) und Gleichung (II) je eine Tabelle mit Lösungen entwickelt. Dabei wird – im Beispiel – betont, daß eine Lösung ein Zahlenpaar (Größenpaar) ist. Es ist darauf zu achten, daß das gesuchte Paar in beiden Tabellen enthalten ist.
Nachdem die Lösung gefunden ist, wird den Schülern mitgeteilt, daß es keine weiteren Lösungen gibt.

(3) Die Schüler führen mündlich die Probe durch und formulieren einen Ergebnissatz.
Der Lehrer stellt abschließend nochmals fest, daß zur Lösung dieses Problems zwei Gleichungen mit zwei Variablen aufgestellt wurden.

(4) Bei einem zweiten Beispiel führen die Schüler einige Lösungsschritte bereits selbständig aus; vgl. Lb 59, Beispiel B 26. Dabei ist für das selbständige Ausführen von Lb 60, Auftrag B 12, vorteilhaft, die Gleichung (II) in der Form $l_1 : l_2 = F_2 : F_1$ zu schreiben.

(5) Während die Schüler an einer entsprechenden Aufgabe (nach dem gewählten Beispiel an Lb 60, Auftrag B 12) arbeiten, erscheinen an der Tafel die Gleichungen. Außerdem werden zwei Tabellen vorbereitet, in die einige von den Schülern vorgelesene Lösungen eingetragen werden. Die Schüler formulieren die Probe und einen Ergebnissatz.

(6) Unter Hinweis auf die beiden an der Tafel stehenden Paare von Gleichungen wird die Bezeichnung „System aus zwei linearen Gleichungen mit zwei Variablen“ eingeführt.

(7) Es folgt nun das Lösen einer formalen Aufgabe, z. B. Lb 60, Beispiel B 27. Bei der Aufgabenstellung wird bereits der neue Begriff angewandt. In selbständiger Arbeit schreiben die Schüler einige Lösungen der Gleichung (I) und der Gleichung (II) auf. Für je eine Gleichung arbeitet ein Schüler an der Tafel. Das in beiden Lösungsmengen vorkommende Zahlenpaar wird farbig hervorgehoben und die Lösungsmenge des Systems aufgeschrieben $L = \{[\ldots; \ldots]\}$. Die Lösungsmengen der beiden Gleichungen werden in einem Koordinatensystem graphisch dargestellt.

(8) In einem kurzen Lehrervortrag unter Bezugnahme auf die in dieser Stunde gelösten Gleichungssysteme wird die Definition der Lösungsmenge eines Gleichungssystems motiviert und als Durchschnitt der Lösungsmengen der Einzelgleichungen gekennzeichnet.

(9) Als Hausaufgabe könnten Durchschnitte von zwei Mengen gebildet und Lösungen (in Tabellenform) der Gleichungen eines Gleichungssystems ermittelt und in einem rechtwinkligen Koordinatensystem dargestellt werden.

In den täglichen Übungen der *2. Stunde* werden die Lagemöglichkeiten zweier Geraden in der Ebene zueinander erörtert (mit Fallunterscheidungen). Anknüpfend an die Darstellung der Lösungsmengen der Gleichungen eines Systems (Hausaufgabe) erfolgt die Deutung der Lösungsmenge eines Systems aus zwei linearen Gleichungen mit zwei Variablen als Menge von Koordinatenpaaren der gemeinsamen Punkte der entsprechenden zwei Geraden.
Aus der Lage zweier Geraden zueinander wird auf die Menge der gemeinsamen Punkte dieser beiden Geraden geschlossen. Die dabei getroffenen Feststellungen werden auf die Lösungsmenge des Systems aus den Gleichungen übertragen, deren Lösungsmengen durch die beiden Geraden dargestellt sind.
Zu jeder Feststellung über die Lösungsmenge eines Gleichungssystems wird ein Beispiel betrachtet und in die Hefte eingetragen; vgl. Lb 61, Beispiel B 28. Die Schüler haben die Koordinatensysteme bereits zu Hause gezeichnet (drei Koordinatensysteme auf der rechten Seite des Blattes untereinander). Ebenfalls sollten auf Millimeterpapier einige Koordinatensysteme vorbereitet sein.
Ein großer Teil der Schüler müßte nach diesen Erörterungen bereits erklären können, wie man die Lösungen von Systemen aus zwei linearen Gleichungen mit zwei Variablen graphisch ermittelt.
Nun werden Lösungen von solchen Gleichungssystemen graphisch ermittelt. Die Schüler verwenden für die Darstellung Millimeterpapier. Ausgehend von einem geeignet gewählten Beispiel wird erläutert, daß mit diesem Lösungsverfahren im allgemeinen nur Näherungslösungen ermittelt werden.

An dieser Stelle sollte darauf hingewiesen werden, daß durch geeignete Wahl der Einheiten auf den Koordinatenachsen der Schnittpunkt der beiden Geraden (falls sie sich überhaupt schneiden) stets auf das Zeichenblatt gebracht werden kann.

2.2.4. Lösungsverfahren für Gleichungssysteme (LE 16; 3 Std.)

Die *graphische Darstellung* der Lösungsmengen der einzelnen Gleichungen eines Systems aus zwei linearen Gleichungen mit zwei Variablen in einem Koordinatensystem gibt Aufschluß über die Lösungsmenge des Gleichungssystems. Das Erkennen der Lösungen eines Gleichungssystems mit Hilfe eines graphischen Verfahrens kann den Schülern besonders bei Aufgaben aus der Praxis (mit einem begrenzten Grundbereich der Variablen) unter Umständen eine eventuell längere Rechnung ersparen.

Der Lehrplan fordert die Erarbeitung eines Lösungsverfahrens, das die Schüler vollinhaltlich verstehen und sicher anwenden können. Empfohlen wird, wie bereits bemerkt, das *Einsetzungsverfahren*; vgl. Lp 28.
Zunächst wird – im Anschluß an die im vorangegangenen Unterricht erörterte graphische Lösung – die rechnerische Lösung von Systemen aus zwei linearen Gleichungen mit zwei Variablen gezeigt, und zwar zweckmäßigerweise an zwei bis drei Beispielen, die von den Schülern unter Anleitung durch den Lehrer gelöst werden; vgl. Lb 63, Beispiel B 30. Danach wird der Lösungsalgorithmus erarbeitet. Es wird den Schülern bewußt gemacht, daß mit dem Einsetzungsverfahren ein ungelöstes Problem (Lösung eines Systems aus zwei linearen Gleichungen mit zwei Variablen) auf ein bereits gelöstes Problem (Lösung einer linearen Gleichung mit einer Variablen) zurückgeführt wird.
Die Vorschrift für das Anwenden des Einsetzungsverfahrens kann z. B. wie folgt lauten.

1. Eine Gleichung wird nach einer Variablen, z. B. nach x, aufgelöst, d. h., sie wird in eine äquivalente Gleichung umgeformt, bei der diese Variable auf einer Seite isoliert steht.
2. Der erhaltene Term für diese Variable (x) wird in die andere Gleichung eingesetzt, die jetzt nur noch eine Variable, im Beispiel y, enthält.
3. Die Gleichung wird nach dieser Variablen (y) aufgelöst.
4. Die ermittelte Zahl (bzw. Größe) wird in die unter 1. erhaltene Gleichung eingesetzt.
5. Die beiden unter 3. und 4. ermittelten Zahlen (bzw. Größen) bilden die Lösung des Gleichungssystems (die Lösung ist ein Zahlenpaar bzw. ein Größenpaar).
6. Mit beiden Gleichungen wird die Probe gemacht.

Weitere Übungen (selbständiges Arbeiten der Schüler) schließen sich an.
Vom ersten Beispiel an wird von den Schülern eine übersichtliche Schreibweise verlangt; vgl. Lb 64, Beispiel B 32.

Für die *1. Stunde* dieser Unterrichtseinheit wird der folgende methodische Weg vorgeschlagen.

(1) Vergleichen der Hausaufgabe (ein System graphisch, zwei Systeme rechnerisch lösen lassen)
(2) In der folgenden Übung wird von den Schülern ein genaues Erkennen des Inhalts der Frage und die Entscheidung für ein geeignetes Verfahren zum Finden der Antwort verlangt.

Beispiel:

Haben die folgenden Gleichungssysteme im Bereich der reellen Zahlen Lösungen?

a) (I) $x - y = 1$ b) (I) $2x + y = 5$
(II) $y - x = 3$ (II) $x - 3y = 6$

Nachdem im Unterrichtsgespräch der Lösungsplan entwickelt wurde, entscheidet jeder Schüler die gestellte Frage. Zwei Schüler arbeiten an der Tafel (in der Pause vor der Stunde wurden bereits zwei Koordinatensysteme an die Tafel gezeichnet). Während der selbständigen Arbeit der Schüler kann die Kontrolle der Hausaufgaben erfolgen.

(3) Das Gleichungssystem b) aus (2) löst ein Schüler an der (verdeckten) Tafel, die anderen Schüler lösen es im Heft (individuelle Kontrolle und Hilfe durch den Lehrer).

(4) Das folgende Beispiel wird nur an der Tafel gelöst [das Beispiel aus (2) steht noch an der Tafel] und anschließend in die Hefte übertragen.

Beispiel:

(I) $3x - y = a$
(II) $x - 2y = 3a$

Nach dem Ermitteln der Lösung dieses Systems wird die Frage erörtert, unter welcher Bedingung für a die Lösung ein Paar ganzer (natürlicher) Zahlen ist.

(5) In selbständiger Arbeit lösen die Schüler ein Gleichungssystem, bei dem Variable als Koeffizienten auftreten, z. B. aus Lb 188/89, 90.

(6) Hausaufgabe: 1. Selbständiges Durcharbeiten von Lb 65, Beispiel B 33;
2. Graphische Darstellungen zu dem unter 1. genannten Beispiel;
3. Lösen zweier Gleichungssysteme

Die *folgenden Stunden* dienen der Wiederholung und Festigung des Stoffs. Empfohlen wird dazu auch eine schriftliche Kurzkontrolle, denn über ein weiteres Lösungsverfahren sollte erst dann informiert werden, wenn alle Schüler das Einsetzungsverfahren sicher beherrschen. Das sichere Beherrschen dieses Verfahrens ist auch eine notwendige Voraussetzung für das Lösen von Sachaufgaben.

* Als weiteres Verfahren zum Lösen von Gleichungssystemen kann den Schülern das *Additionsverfahren* (bzw. Verfahren der gleichen Koeffizienten) an einem Beispiel mitgeteilt werden. Die Schüler werden darauf hingewiesen, daß auch bei diesem Verfahren wie beim Einsetzungsverfahren das Problem auf ein bereits gelöstes zurückgeführt wird.

2.2.5. Lösen von Sachaufgaben (LE 17; 3 Std.)

Für das Lösen von *Sachaufgaben, die auf ein System aus zwei linearen Gleichungen mit zwei Variablen führen,* gelten die Bemerkungen zur Unterrichtseinheit 2.1.5. (Sachaufgaben, die auf lineare Ungleichungen mit einer Variablen führen).

Bei allen Aufgaben, die im Unterricht behandelt werden, sollte die Analyse des Textes gründlich und in kleinen Schritten erfolgen. Da das Lösen eines Gleichungssystems in den vorangegangenen Stunden bereits geübt wurde, kann sich das Bearbeiten mancher Textaufgaben auf das Aufstellen der Gleichungen bzw. den Lösungsansatz beschränken. Bei vollständig, d. h. auch rechnerisch bis zu Ende gelösten Aufgaben sollte das Ergebnis stets mit dem Text konfrontiert werden; vgl. Lb 66, Beispiel B 35.

Anhand einiger Aufgaben wird die Verbindung zu früher behandeltem Stoff (z. B. Prozentrechnung) und zu anderen Fächern (Physik, Chemie, polytechnischer Unterricht) hergestellt. Aus dem Physikunterricht werden Kenntnisse über das Berechnen der Geschwindigkeit, über den Auftrieb und die Gesetze des verzweigten Stromkreises vorausgesetzt. Es werden auch Aufgaben gestellt, die von den Schülern durch Überlegen gelöst werden können; vgl. Lp 27.

Wie bei der *Analyse von Texten* im Unterricht vorgegangen werden kann, sei an den folgenden Beispielen gezeigt.

Beispiel 1 (Lb 189/101):

Zwei Freunde umrunden die 400 m *lange Aschenbahn eines Sportplatzes. Der eine benötigt für zwei Runden dieselbe Zeit wie der andere für drei Runden.*
Laufen sie von einem Punkt dieser Aschenbahn gleichzeitig in entgegengesetzter Richtung los, so begegnen sie sich alle 40 s. *Mit welcher Geschwindigkeit läuft jeder der beiden Freunde?*

Zunächst wird untersucht, ob die Angaben vollständig sind, d. h. zur Lösung ausreichen. In diesem Zusammenhang wird auch festgestellt, daß der Dauerlauf als gleichförmige Bewegung zu sehen ist. Aus der entsprechenden Gleichung $\left(v = \frac{s}{t}\right)$ folgt, daß sich die Geschwindigkeiten wie die in gleicher Zeit zurückgelegten Wege verhalten.
Bedeutet v_1 die Geschwindigkeit des ersten Läufers, v_2 die Geschwindigkeit des zweiten Läufers, so ergibt sich

$$v_1 : v_2 = 2 : 3.$$

Die Angabe, daß sich die beiden Sportler beim Laufen in entgegengesetzten Richtungen alle 40 s treffen, werden die Schüler wahrscheinlich nicht ohne Hilfe in einer Gleichung allein mit den Variablen v_1 und v_2 ausdrücken können. Es liegt nahe, als Hilfsvariable (die entsprechende Größe braucht nicht ermittelt zu werden) den Weg des ersten Sportlers (s_1) in der Zeit $t = 40$ s zu wählen. Für die Länge der Laufbahn wird ebenfalls ein Symbol (l) gewählt.
Die Gleichungen $v_1 \cdot t = s_1$ und $v_2 \cdot t = l - s_1$ führen auf $v_2 \cdot t = l - v_1 \cdot t$.
Damit ist das Gleichungssystem zum Ermitteln der Geschwindigkeiten v_1 und v_2 aufgestellt.

Beispiel 2 (Lb 189/105):

Ein ganz mit Quecksilber ($\varrho = 13{,}6 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$) *gefülltes und verschlossenes Gefäß aus Gußeisen* ($\varrho = 7{,}2 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$), *das beim Eintauchen in Wasser* 20 kg *Wasser verdrängt, habe eine Masse von* 250 kg.
Wie groß ist die Masse des Quecksilbers, wie groß ist die des Gefäßes?

Bevor die Aufgabe gestellt wird, sollte in einem Unterrichtsgespräch (eventuell vorbereitet durch eine entsprechende Hausaufgabe) das Archimedische Prinzip, die Dichte von Wasser und das Berechnen der Masse eines Körpers wiederholt werden.
Die Schüler lesen nun die Aufgabe, legen Bezeichnungen für die gesuchten Größen fest (schriftlich; z. B. m_1 und m_2 in kg) und diskutieren die Angabe „Beim Eintauchen in Wasser werden 20 kg Wasser verdrängt". Das Volumen des Gefäßes mit Quecksilber ist 20 dm³ und kann durch $\frac{m_1}{\varrho_{Hg}} + \frac{m_2}{\varrho_{Fe}}$ ausgedrückt werden.

$$\text{(I)}\ \frac{m_1}{\varrho_{Hg}} + \frac{m_2}{\varrho_{Fe}} = 20 \text{ dm}^3$$

Als Einheit für die Dichte ist $\text{kg} \cdot \text{dm}^{-3}$ zu verwenden.

Die zweite Gleichung bilden die Schüler, nachdem sie den ersten Satz der Aufgabe noch einmal gelesen haben.

(I) $m_1 + m_2 = 250\,\mathrm{kg}$

Als Aufgaben zur Übung empfehlen sich besonders Lb 189/92, 94, 96, 97, 98, 101, 105; Lb 190/106.

2.2.6. Kontrollarbeit (1 Std.)

Für eine einstündige Kontrollarbeit (Klassenarbeit) eignet sich eine Thematik in der folgenden Art. Zu ihrer Vorbereitung ist das Lösen von Lb 183/51c); Lb 185/64d); Lb 187/76b), c); Lb 189/99, 101 zu empfehlen.

1. Lösen einer Gleichung oder Ungleichung mit einer Variablen und Veranschaulichen der Lösungsmenge an einer Zahlengeraden, z. B.:

   a) $\frac{x}{3} + 3 = 5 - \frac{x}{2}$

   b) $2(x - 3) > 4x + 5$ (Probe nicht verlangt)

2. Angaben einzelner Lösungen einer Gleichung mit zwei Variablen, z. B.:

   $5a - 6b = 15$

3. Ermitteln der Lösungsmenge eines Gleichungssystems, z. B.:

   (I) $2x + y = 3$
   (II) $\underline{x + y = 2}$

4. Lösen von Sachaufgaben, die auf ein System von zwei Gleichungen mit zwei Variablen führen, z. B.:
   Wieviel Liter 96%ige Schwefelsäure und wieviel Liter 26%ige Schwefelsäure sind zu mischen, damit man 5 l 40%ige Schwefelsäure erhält?
   Oder:
   Ein Ausflugsdampfer benötigt für eine Strecke von 66 km *auf einem Fluß stromauf* 6 h *und für die gleiche Strecke stromab* 4 h 24 min. *Berechnen Sie die Geschwindigkeit des Schiffes und die des Stromes!*

2.2.7.* Systeme aus drei Gleichungen; Systeme aus Gleichungen und Ungleichungen (LE 18* und 19*; 1 Std.)

Der Stoff dieser Unterrichtseinheit dient nur zur Information; vgl. Lp 29. Den Schülern sollte am Beispiel eines ausgewählten *Systems aus drei linearen Gleichungen mit drei Variablen* gezeigt werden, wie das Lösen eines solchen Systems auf ein bereits gelöstes Problem (Lösen eines Systems aus zwei linearen Gleichungen mit zwei Variablen) zurückgeführt werden kann. Die Schüler sollen keine Gleichungssysteme mit drei Variablen selbständig lösen.
Im Unterricht wird mitgeteilt, daß praktische Probleme häufig auf Gleichungssysteme führen und daß dabei die Anzahl der Gleichungen nicht immer mit der Anzahl der Variablen übereinstimmt.
Zur Wiederholung werden einige Ungleichungen und deren Lösungsmengen (z. B. Lb 54, Beispiel B 17) betrachtet. Die Definition der Lösungsmenge eines Gleichungssystems wird auf *Systeme mit Ungleichungen* erweitert. Zur Demonstration sollte ein System aus einer Gleichung und einer Ungleichung gewählt werden und die Lösungsmenge graphisch dargestellt werden; vgl. Lb 68, Beispiel B 37.
Die Schüler beteiligen sich an der Erarbeitung des Tafelbildes und übertragen dieses anschließend in ihre Hefte.

3. Potenzen und Potenzfunktionen

3.0. Vorbemerkungen

Im Stoffgebiet 3. „Potenzen und Potenzfunktionen" werden die Schüler – nach einer Wiederholung und Vertiefung des Funktionsbegriffs – mit einer neuen Funktionsklasse, den *Potenzfunktionen*, bekannt gemacht; eine weitere wesentliche Aufgabe des Unterrichts ist die Einführung der Schüler in das *Rechnen mit Potenzen.*

Ziele der **mathematischen Grundlagenbildung** im Rahmen dieses Stoffgebiets sind vor allem eine Festigung und Erweiterung der Kenntnisse der Schüler über den Funktionsbegriff, auch durch Einführung weiterer Funktionsklassen, und sichere Fertigkeiten im Rechnen mit Potenzen bei praktischen Aufgaben; vgl. Lp 29.
Die Vorleistungen, die im Unterricht für die Behandlung der nachfolgenden Stoffgebiete geschaffen werden, betreffen vor allem die mengentheoretische Betrachtungsweise und die Anwendung mathematischer Methoden. Die tiefere Einsicht in das Wesen einer Funktion, das vermehrte Verständnis für Definitionen und Beweise und die erweiterten Kenntnisse über Definitions- und Beweisverfahren erleichtern vor allem das Erfassen des Stoffes in den Stoffeinheiten 4.1. „Quadratische Funktionen" und 5.1. „Exponential- und Logarithmusfunktionen". Das Rechnen unter Abtrennen von Potenzen der Zahl 10 bereitet nicht nur das logarithmische Rechnen – mit Hilfe des Rechenstabs –, sondern auch das Operieren mit Maßzahlen in den naturwissenschaftlichen Fächern, im polytechnischen Unterricht und in der technischen Praxis vor.
Im Unterricht dieses Stoffgebiets werden, wie der Inhalt erkennen läßt, im besonderen die *inhaltlichen Leitlinien* „Mengen" und „Abbildungen" – die letztgenannte Leitlinie beschränkt sich hier auf Funktionen – verfolgt; ebenso besteht ein Bezug zur Leitlinie „Gleichungen und Ungleichungen"; vgl. Uh 14f. Von den *Leitlinien der mathematischen Methode* treten besonders die Leitlinien „Definieren", „Beweisen" (speziell in der Stoffeinheit 3.1.) und „Hilfsmittel mathematischen Arbeitens" (Rechentechnik und graphisches Arbeiten) hervor; vgl. Uh 20ff.

Im Hinblick auf die **ideologische Bildung und Erziehung** der Schüler muß der Unterricht vor allem die Einsicht weiterentwickeln, daß *Vorgänge und Gesetzmäßigkeiten in Natur, Technik und Gesellschaft mit mathematischen Mitteln erfaßt und praktische Probleme* aus diesen Bereichen *einer Lösung mit Hilfe der Mathematik zugeführt* werden können.
Dazu eignen sich vor allem Anwendungsbeispiele, die Bezug zum polytechnischen Unterricht und zur Lebenspraxis der Schüler haben. Lp 29ff und Lb 80f machen die Art dieser Aufgaben kenntlich. An solchen Aufgaben, aber auch bei der Behandlung und beim Üben des Rechnens mit Potenzen (unter Anwendung des logarithmischen Rechenstabs, des Abtrennens von Potenzen der Zahl 10 beim Multiplizieren und Dividieren) muß den Schülern ebenfalls bewußt werden, welche Bedeutung die mathematische Bildung für die Praxis der sozialistischen Gesellschaft, für jeden Bürger eines sozialistischen Staates hat.

Bei der **methodischen Gestaltung** des Unterrichts sollte berücksichtigt werden, daß – wie auch in den vorangegangenen Stoffgebieten – am Anfang eine Wiederholung und Systematisierung von Stoff aus dem Unterricht vorhergehender Klassenstufen steht. Außerdem knüpft der Unterricht an die Betrachtungen über lineare Funktionen, die im Rahmen der Stoffeinheit 2.2. „Systeme aus zwei linearen Gleichungen" erfolgt sind, unmittelbar an.
Allgemein ist in diesem Stoffgebiet dem Herausarbeiten mathematischer Gesetzmäßigkeiten größeres Gewicht als den Übungen im Lösen schwieriger formaler Aufgaben zuzuerkennen. Übungen im Beschreiben, Vergleichen und Systematisieren wesentlicher Merkmale der Funktionsklassen an Hand der Graphen ausgewählter Funktionen der Form $y = x^n$ $(n \in R)$ können das *Verständnis der Schüler für den Funktionsbegriff* sehr fördern.
Bei der Untersuchung von Potenzfunktionen sollte besonderer Wert auf eine einwandfreie mengentheoretische Begründung, auf Klarheit des Begriffs „geordnetes Paar" [unter Verwendung der Begriffe „Elemente des Definitionsbereichs (Argumente)" und „Elemente des Wertebereichs (Funktionswerte)"] gelegt werden. Auf eine *logisch einwandfreie Erweiterung des Potenzbegriffs* sollte auch im Hinblick auf die Behandlung ausgewählter Funktionen in den nachfolgenden Stoffgebieten 4. „Quadratische Funktionen und quadratische Gleichungen" und 5. „Exponential- und Logarithmusfunktionen; Rechenhilfsmittel" geachtet werden. Zur Vorbereitung auf den Unterricht über quadratische Funktionen (Stoffeinheit 4.1.) dienen auch Untersuchungen der Graphen von Potenzfunktionen, einschließlich der Überlegung, welchen Einfluß der Faktor a in $g(x) = a \cdot f(x)$ und der Summand e in $g(x) = f(x) + e$ auf den Graphen – verglichen mit $f(x)$ – haben.
Das Herausarbeiten gemeinsamer und spezifischer Merkmale der Funktionen und Funktionsklassen trägt ebenso wie das Definieren von Begriffen und das Beweisen von Sätzen zur Einsicht in die *Logik mathematischer Strukturen* bei. In der Regel werden die Schüler bei der Behandlung dieses Stoffgebiets bereits in der Lage sein, die zu fordernden Vergleiche zwischen Funktionen und Funktionsklassen weitgehend selbständig auszuführen; auch werden sie ohne wesentliche Hilfe durch den Lehrer erkennen können, was – vom mathematischen Standpunkt aus – definiert und was bewiesen werden müßte (über die Möglichkeit, ob ein bestimmter Beweis auch mit den vorhandenen Vorkenntnissen und Mitteln geführt werden kann, dürften sich aber nicht alle Schüler von vornherein im klaren sein). Der Lehrplan fordert im Interesse eines rationellen und effektiven Unterrichts, sich auf ausgewählte Definitionen und Beweise zu beschränken und nennt diese Definitionen und Beweise auch; vgl. Lp 31. Diese Definitionen und Beweise werden genutzt, um die Schüler mit dem Wesen der mathematischen Methode gründlich vertraut zu machen (im übrigen können einige der in diesem Stoffgebiet zu behandelnden Sätze mit den vorhandenen Voraussetzungen nicht – oder nicht auf einfache Weise, z. B. ohne Hilfssätze – bewiesen werden). Dieser allgemeine methodische Grundsatz für die Arbeit an Definitionen und Beweisen gilt auch für die weiteren Stoffgebiete (4. „Quadratische Funktionen und quadratische Gleichungen" und 5. „Exponential- und Logarithmusfunktionen; Rechenhilfsmittel").
Weiterhin ist beim Unterricht im Rahmen dieses Stoffgebiets auf den *richtigen Gebrauch der Fachsprache und Symbolik* besonders zu achten. Aufgaben aus Bereichen, deren sachlicher Inhalt den Schülern bekannt oder zumindest verständlich ist, z. B. aus der Geometrie, den Naturwissenschaften und der Technik, können den Schülern helfen, die Prinzipien für das Erfassen, Analysieren und Formulieren eines Sachverhalts mit mathematischen Mitteln zu erkennen und anzuwenden.

Beim *Üben des Rechnens mit Potenzen* tritt das Lösen schwieriger formaler Aufgaben zurück. Wichtiger sind Aufgaben mit praktischer Bedeutung, die beim Arbeiten mit physikalischen Größen, beim Abtrennen von Zehnerpotenzen und beim Darstellen von Zahlen als Summe von Potenzvielfachen zu einer bestimmten Basis auftreten können. Die üblichen Rechenhilfsmittel (logarithmischer Rechenstab, Tafelwerk) sollten allgemein so in den Unterricht einbezogen werden, daß das rationelle Arbeiten mit ihnen für jeden Schüler zur Selbstverständlichkeit wird. Ähnliches gilt für Zeichenhilfsmittel.

Beim Gebrauch von Schablonen ist den Schülern bewußt zu machen, daß einer Schablone für Graphen von Funktionen eine bestimmte Teilung der Achsen im Koordinatensystem zugrunde liegt.

Die folgende Übersicht über die Unterrichtseinheiten der Stoffeinheiten 3.1. „Potenzen" und 3.2. „Potenzfunktionen" geht von der Voraussetzung aus, daß diese Stoffeinheiten zeitlich nacheinander behandelt werden. Der Lehrplan räumt aber auch eine Parallelbehandlung ein; vgl. Lp 32. Sollte dieser Weg gewählt werden, so empfiehlt sich folgende Anordnung der Unterrichtseinheiten.

3.1.1. (LE 1)	
3.1.2. (LE 2)	
	3.2.1. (LE 10)
	3.2.2. (LE 11)
3.1.3. (LE 3)	
	3.2.3. (LE 12)
3.1.4. (LE 4)	
3.1.5. (LE 5)	
	3.2.4. (LE 13)
	3.2.5. (LE 14 und 15)
3.1.6. (LE 6 bis 9)	
	3.2.6. (LE 16)

Die Hinweise zu den einzelnen Unterrichtseinheiten gelten im Prinzip und in den hauptsächlichen Einzelheiten auch für diesen Weg. Auf eine Erörterung seiner Vor- und Nachteile soll hier verzichtet werden.

Übersicht zum Stoffgebiet 3. Potenzen und Potenzfunktionen (32 Stunden – 16 Lerneinheiten)

Unterrichtseinheit	Std.	Seiten Lb	Seiten Uh	Wiederholung	Einführung	Festigung
3.1.1. Wiederholung (LE 1)	1	70	101	Rechengesetze der Grundrechenoperationen Grundbereiche von Variablen Potenz, Basis, Exponent	Basis und Potenzvorzeichen Das Potenzieren	Kommutativität und Assoziativität Betrachten von Strukturen Angeben von Grundbereichen von Variablen
3.1.2. Potenzen mit natürlichen Zahlen n ($n \geqq 1$) als Exponenten (LE 2)	3	71	102	Arbeiten mit Variablen	Potenzgesetze für Potenzen mit natürlichen Zahlen n($n \geqq 1$) als Exponenten	Multiplizieren bzw. Dividieren von Potenzen mit gleicher Basis durch Addieren bzw. Subtrahieren der Exponenten
3.1.3. Potenzen mit ganzen Zahlen als Exponenten (LE 3)	3	73	104	Reziproke Rechnen mit der Zahl Null	Definition von a^0 Erweiterung der Potenzgesetze auf Potenzen mit ganzzahligen Exponenten	Fallunterscheidungen Arbeiten mit Größen
3.1.4. Potenzen mit rationalen Zahlen als Exponenten (LE 4)	3	75	105	Potenzgesetze Definition der Wurzel	Potenzen mit rationalen Exponenten Beweis der Gültigkeit von zwei Potenzgesetzen	Beweisführung Umformung Wurzel in Potenz mit rationalen Exponenten
3.1.5. Wurzelgesetze als Spezialfälle der Potenzgesetze (LE 5 und 9)	3	77	106	Operationen mit rationalen Zahlen Quadratzahlen Zerlegen in Faktoren Genauigkeitsbetrachtungen	Das Rechnen mit Wurzeln als speziellen Potenzen Rationalmachen von Nennern	Arbeiten mit Quadrat- und Kubiktafel und Rechenstab Teilweises Radizieren

Unterrichtseinheit	Std.	Seiten Lb	Uh	Wiederholung	Einführung	Festigung
3.1.6. Das Abtrennen von Zehnerpotenzen; das Rechnen mit physikalischen Größen; Positionssysteme (LE 6 bis 8)	5	79	107	Darstellen von Zahlen im Dezimalsystem Arbeiten mit physikalischen Größen	Abtrennen von Zehnerpotenzen Rechnen mit physikalischen Größen Positionssysteme Darstellen von Zahlen als Summen von Potenzvielfachen	Lesen und Schreiben großer (kleiner) Zahlen Überschlagen Beispiel für Leistungskontrolle
3.2.1. Wiederholung des Funktionsbegriffs (LE 10)	2	84	110	Einige Grundbegriffe der Mengenlehre Abbildung, geordnetes Paar, Eindeutigkeit, Koordinatensystem	Darstellungsmöglichkeiten für Funktionen	Definitions- und Wertebereich Argument und Funktionswert Abbildungsvorschriften Graphische Darstellungen
3.2.2. Potenzfunktionen mit Gleichungen der Form $y = x^n$ (I) (LE 11)	2	87	113	Achsenteilungen Achsen- und Zentralsymmetrie Benutzung von Zahlentafel und Rechenstab	Potenzfunktionen mit Gleichungen der Form $y = x^n$ ($n \in G$; $n \geqq 2$) Begriffe „Parabel", „Achse der Parabel", „Scheitelpunkt der Parabel"	Gemeinsames und Unterschiedliches der Potenzfunktionen mit geraden und ungeraden Exponenten Monotoniebetrachtungen Arbeiten mit Schablonen
3.2.3. Potenzfunktionen mit Gleichungen der Form $y = x^n$ (II) (LE 12)	2	90	114	Anführbarkeit der Division Reelle Zahlen Funktionen mit den Gleichungen $y = x$; $y = a$	Potenzfunktionen mit Gleichungen der Form $y = x^n$ ($n \in G$; $n \leqq 1$) Begriff „Hyperbel"	Rationale Funktionen Verhalten der Funktionen für beliebig große bzw. kleine x Zusammenfassung Sachaufgaben

Unterrichtseinheit	Std.	Seiten Lb	Uh	Wiederholung	Einführung	Festigung
3.2.4. Potenzfunktionen mit Gleichungen der Form $y = x^n$ (III) (LE 13)	2	92	118	Symmetrische Graphen Unterschiedlich geteilte Achsen Definition der Wurzel Quadrattafel, Rechenstab	Potenzfunktionen mit Gleichungen der Form $y = x^n$ ($n \in R$)	Beachten der Wurzeldefinition bei Definitions- und Wertebereich Sachliche Bezüge (sprachliches Erfassen und Darstellen)
3.2.5. Graphen von Funktionen (LE 14 und 15)	2	94	120	Graphen der Funktionen $y = x$ und $y = x^2$ Lineare Funktionen $y = mx + n$	Verschiebung, Streckung, Stauchung und Spiegelung der Graphen der Funktionen $y = x$ und $y = x^2$	Fallunterscheidungen Einfluß von Summand e und Faktor a bei $y = a \cdot f(x)$ und $y = f(x) + e$
3.2.6. Beispiele für rationale Funktionen (LE 16)	2	99	123	Begriffe „Proportionalitätsfaktor", „proportional", „umgekehrt proportional", „Diagramm"	Ausgewählte rationale Funktionen	Lesen und Zeichnen von Diagrammen Bedeutung der Mathematik für andere Fächer
3.2.7. Klassenarbeit	2		125			

3.1. Potenzen

(LE 1 bis 9; 18 Std.)

3.1.1. Wiederholung (LE 1; 1 Std.)

In dieser Unterrichtsstunde wird der *Potenzbegriff* wiederholt. Bei der Wiederholung wird auf die Operationen Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division eingegangen. Es ist zu untersuchen, ob die Gesetzmäßigkeiten (Kommutativität, Assoziativität) auch beim Potenzieren bestehen bleiben.
Die Stunde läßt sich, von der fachlichen Thematik aus betrachtet, in drei Teile aufgliedern.

(1) *Es werden die Begriffe „Kommutativität" und „Assoziativität" der Addition und Multiplikation reeller Zahlen wiederholt.*

Sind in einer Aufgabe zwei oder mehr als zwei voneinander verschiedene Operationen auszuführen, so ist die Reihenfolge der Operationen zu beachten. Dabei wird das Setzen von Klammern wiederholt.
In diesem Stundenteil sollen die Schüler in erster Linie selbst tätig sein, z. B. durch das Erfüllen von entsprechenden Aufträgen.

Beispiel:

Schreiben Sie die folgenden Terme um, so daß nur noch das Zeichen „+" enthalten ist!

$2 + 4 \cdot 3$

$(2 + 4) \cdot 3$

(2) Für das Potenzieren gilt (vgl. Lb 70):

Multiplikation gleicher Faktoren: $\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren } a} = a^n$

Es ist sehr wichtig, daß an dieser Stelle bereits deutlich auf die Notwendigkeit der Angabe der Grundbereiche für *alle* in der Definition auftretenden Variablen hingewiesen wird, z. B. a^n für $a \in P$, $n \in N$, $n \geqq 1$.

An dieser Stelle kann man die Begriffe „Potenz", „Basis", „Exponent" wiederholen.
Nun werden einzelne Zahlenbeispiele untersucht, um die Gültigkeit von Kommutativität und Assoziativität auch beim Potenzieren festzustellen. Mit den Schülern ist zu wiederholen, daß ein einziges Gegenbeispiel die Gültigkeit einer Allaussage aufhebt. Es läßt sich dann besser die Einschränkung „im allgemeinen" in einer mit Variablen formulierten Aussage erklären.
Die folgenden Beispiele sollten als Aufträge von den Schülern selbständig bearbeitet werden.

$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8 \qquad 3^2 = 3 \cdot 3 = 9 \qquad 2^3 \neq 3^2$

$4^2 = 4 \cdot 4 = 16 \qquad 2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16 \qquad 2^4 = 4^2$

Es wird festgestellt: Im allgemeinen gilt: $a^b \neq b^a$.

2^{3^2} wird untersucht: 1. $(2^3)^2 = 8^2 = 64$

2. $2^{(3^2)} = 2^9 = 512$

4^{2^2} wird untersucht: 1. $(4^2)^2 = 16^2 = 256$

2. $4^{(2^2)} = 4^4 = 256$

Es wird festgestellt: Im allgemeinen gilt: $(a^b)^c \neq a^{(b^c)}$

Hier sollte auch sofort vereinbart werden: Unter a^{b^c} versteht man stets $a^{(b^c)}$.
An dieser Stelle sollte auf die Vorzeichen von Potenz oder Basis noch nicht eingegangen werden. Daher empfiehlt es sich, nur nichtnegative Basen (und Potenzen) zu verwenden.

Beispiele:

$5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5;\quad c^4 = c \cdot c \cdot c \cdot c;\quad \left(\frac{a}{4}\right)^3 = \frac{a}{4} \cdot \frac{a}{4} \cdot \frac{a}{4}$

$(3a)^2 = 3a \cdot 3a;$ dagegen $3a^2 = 3 \cdot a^2 = 3 \cdot a \cdot a$

$(x + y)^2 = (x + y) \cdot (x + y);$ dagegen $x + y^2 = x + y \cdot y$

Strukturbetrachtungen sind anschließend zu üben; vgl. Lb 70, Beispiel C 1.

(3) *Unterscheidung von Basisvorzeichen und Potenzvorzeichen*
Systematisierung als Ergebnis von Lb 70, Auftrag C 2:

Basis	Exponent	Potenz
positiv	beliebig	positiv
negativ	gerade	positiv
negativ	ungerade	negativ

Eine Wiederholung der im Unterricht in Klasse 7 behandelten Multiplikation rationaler Zahlen kann das Erarbeiten dieser Erkenntnisse unterstützen.
Die Unterscheidung z. B. zwischen $(-3)^2$ und -3^2 könnte mit Hilfe des Faktors (-1) erfolgen.

$(-3)^2 = (-1 \cdot 3)^2$, aber $-3^2 = (-1) \cdot 3^2$

Die Hausaufgaben sollten vorrangig aus Lb 191/7 bis 10 entnommen werden.

3.1.2. Potenzen mit natürlichen Zahlen n ($n \geqq 1$) als Exponenten (LE 2; 3 Std.)

In dieser Unterrichtseinheit werden die *Potenzgesetze* induktiv gewonnen. An einfachen Beispielen werden Untersuchungen angestellt. Nach dem Formulieren der Potenzgesetze mit Hilfe von Variablen muß den Schülern verdeutlicht werden:

1. Die Potenzgesetze müssen bewiesen werden.
2. Beispiele sind noch keine Beweise, es sei denn, man erfaßt alle Möglichkeiten.
3. Zum Beweisen der Potenzgesetze reichen die bisherigen Kenntnisse noch nicht aus.

Wichtig ist das Lesen der gewonnenen Gleichungen in beiden Richtungen; vgl. Lb 72, Erläuterungen zu Satz C 2.
Das Arbeiten mit Variablen (Addition, Subtraktion) sollte hier wiederholt werden, um das Addieren und Subtrahieren der Exponenten, die Variable enthalten, zu erleichtern.

Es ist zu beachten, daß der Lehrplan nur *einfache* Übungen im Anwenden der Potenzgesetze fordert.

Der Stoff kann auf die drei Unterrichtsstunden wie folgt verteilt werden.

1. Stunde: Addition und Subtraktion von Potenzen

Dabei können die Kenntnisse der Schüler aus dem Unterricht in Klasse 8 genutzt werden. In Ergänzung zum Lehrbuch könnte an den folgenden Beispielen vorbereitet werden, daß es oft keine Möglichkeit gibt, die Summe zweier Potenzen sinnvoll als Potenz darzustellen.

$$3^2 + 2^3 = 9 + 8 = 17$$

$$2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$$

$$3^2 + 3^2 = 9 + 9 = 2 \cdot 9 = 2 \cdot 3^2$$

Hieran schließt sich eine entsprechende Aufgabe – z. B. Lb 71, Beispiel C 2 – an. Es ist deutlich herauszuarbeiten, daß man das Multiplizieren (Dividieren) von Potenzen gleicher Basis auf das Addieren (Subtrahieren) der Exponenten zurückführt.
In die Übung könnten Aufgaben folgender Art einbezogen werden (nur für Multiplikation gezeigt).

$$3^4 \cdot 3^5; \quad a^7 \cdot a^2; \quad 5^n \cdot 5^{3n}; \quad x^s \cdot x^{s+1}; \quad 3a^4 \cdot 2a^5 \quad (n, s \in N;\, n, s \geqq 1)$$

2. Stunde: Produkte und Quotienten von Potenzen mit gleichen Exponenten

Beim Erarbeiten der Potenzgesetze für das Multiplizieren und Dividieren von Potenzen mit gleichen Exponenten sind in Beispielen

a) der in vielen Fällen sehr deutlich werdende rechnerische Vorteil,
b) die Tatsache, daß man eine Gleichung von beiden Seiten lesen und entsprechend deuten kann,

mit den Schülern zu betrachten.

Zu a) $2{,}5^4 \cdot 4^4 = 39{,}0625 \cdot 256 \quad = 10000$

$$2{,}5^4 \cdot 4^4 = (2{,}5 \cdot 4)^4 = 10^4 = 10000$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^3 = \frac{8}{27} \cdot \frac{729}{64} = \frac{27}{8}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^3 = \left(\frac{2 \cdot 9}{3 \cdot 4}\right)^3 = \left(\frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 2}\right)^3 = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}$$

Zu b) $(3a)^2 = 3^2 \cdot a^2 = 9a^2$

In dieser Stunde sollten auch Übungen wie Lb 72, Beispiel C 4b), durchgeführt werden.

3. Stunde: Potenzieren von Potenzen, Zusammenfassung, Übung

Die Schüler müssen lernen, daß man für die drei möglichen Fälle

$$(a^n)^m; \quad a^{(n^m)}; \quad a^{n^m} \quad (a \in P;\, n, m \in N;\, n, m > 1)$$

festlegt: $a^{n^m} = a^{(n^m)}$, daß $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$ ist und daß im allgemeinen gilt: $(a^n)^m \neq a^{(n^m)}$.

In der ersten Unterrichtsstunde dieser Unterrichtseinheit wurde bereits erarbeitet, daß die Assoziativität im allgemeinen nicht gilt. Nun folgt nur noch die entsprechende Definition laut Lb 72.
An einigen Beispielen sollte gezeigt werden, daß für $n, m > 1$ gilt:

$$(a^n)^m \leqq a^{(n^m)} \quad \text{für} \quad a \geqq 1 \qquad \text{und}$$

$$(a^n)^m \geqq a^{(n^m)} \quad \text{für} \quad 0 < a < 1.$$

Beispiele:

$$(3^2)^4 = 9^4 = 6561$$

$$3^{(2^4)} = 3^{16} = 43046721$$

$$\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^4 = \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{1}{64}$$

$$\left[\frac{1}{2}\right]^{(2^4)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{16} = \frac{1}{65536}$$

Die Zusammenfassung erfolgt am besten nach den Tabellen auf Lb 71f. Dabei sollte das Gesetz (6) unbedingt an Beispielen erläutert werden.

$$2^3 < 2^4, \quad \text{aber} \quad 0{,}2^3 > 0{,}2^4$$

$$0{,}5^3 > 0{,}5^4; \quad 5^3 < 5^4; \ldots$$

Es erscheint auch sinnvoll, Potenzen mit verschiedener Basis, aber gleichen Exponenten zu vergleichen (a^n mit b^n).
Es gilt: $3^5 < 4^5$; $0{,}3^5 < 0{,}4^5$; ...

3.1.3. Potenzen mit ganzen Zahlen als Exponenten (LE 3; 3 Std.,

In dieser Unterrichtseinheit gilt es, bei der *Erweiterung des Potenzbegriffs* auf Potenzen mit dem Exponenten 0 und mit negativen ganzzahligen Exponenten die Zweckmäßigkeit der Definitionen für den erweiterten Potenzbegriff an ihrer Verträglichkeit mit den Potenzgesetzen zu zeigen. Dabei ist den *Fallunterscheidungen* großer Wert beizumessen. Bei den Übungen im Lösen formaler Potenzrechenaufgaben kann recht gut das Rechnen mit ganzen (rationalen) Zahlen wiederholt werden. Dabei ist auf die Forderung des Lehrplans zu achten, daß zum Üben vorrangig *einfache* Aufgaben zu wählen sind. Beispiele für Festlegungen, die bei der Erweiterung des Potenzbegriffs zu Widersprüchen mit den Potenzgesetzen führen würden, sind nur in begrenztem Umfang möglich. Sie sollten, wenn sie überzeugen sollen, *vor* den gültigen Definitionen behandelt werden.

Die *1. Stunde* dient in der Hauptsache der *Definition von* a^0. Dabei kann entsprechend Lb 73f verfahren werden.

(1) Beispiele für widersprüchliche Festsetzungen
(2) Definition
(3) Nachweis der Verträglichkeit dieser Definitionen an den Potenzgesetzen für die Multiplikation und Division
(4) Darstellung an Folgen von Multiplikations- und Divisionsaufgaben

Daran schließt sich die Definition von Potenzen mit negativ ganzzahligen Exponenten an.

Beim *Üben* sollten Aufgaben folgender Art besonders beachtet werden.

a) 2^{-3}; $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$; $3 \cdot 2^{-3}$; $\frac{2^{-3}}{3}$ sind so umzuformen, daß nur positive Exponenten auftreten.

b) $\frac{1}{2^3}$; $\frac{5}{3^2}$; $\frac{1}{2 \cdot 3^2}$ sind als Produkte von Potenzen zu schreiben.

c) $5^3 : 5$; $5^0 : 5^2$; $5^0 : 5^{-2}$; $(5^3)^0$; $(5^{-2})^3$

Zur Festigung können auch Aufgaben der folgenden Art genutzt werden.

Berechnen Sie! $\left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} \cdot 17^0$; $\frac{4^2}{3^2} : \left(\frac{2}{5}\right)^2$

An den Schluß dieser Unterrichtseinheit sollte eine *Zusammenfassung der Potenzgesetze* treten; vgl. die Darstellung auf Lb 71 f.
Werden in die Übungen Terme einbezogen, die als mathematische Formulierungen für naturwissenschaftliche Gesetzmäßigkeiten gedeutet werden können, so muß unbedingt darauf geachtet werden, daß die betreffenden Gesetzmäßigkeiten auch in den entsprechenden Unterrichtsfächern behandelt worden sind.

3.1.4. Potenzen mit rationalen Zahlen als Exponenten (LE 4; 3 Std.)

In dieser Unterrichtseinheit muß ausgehend von der Kenntnis des Begriffs „n-te Wurzel" die *Festlegung für Potenzen mit rationalen Exponenten* $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ und deren Zweckmäßigkeit gezeigt werden.
Auf Lp 29 ist ausdrücklich vermerkt: „Die Verträglichkeit der verwendeten Definitionen mit allen vorher behandelten Gesetzen für das Rechnen mit Potenzen (Exponent natürlich) ist nur für zwei geeignet gewählte Beispiele zu beweisen, für alle anderen Fälle ist diese Tatsache den Schülern lediglich mitzuteilen."

In der *1. Stunde* wird es notwendig sein, die Darlegungen auf Lb 75 für die Schüler weiter aufzubereiten. Es könnte wie folgt vorgegangen werden.

$$\sqrt[n]{a} = b, \quad \text{wenn } b^n = a \quad \text{(nach Definition)} \quad (a \geqq 0;\ b \geqq 0)$$
$$\sqrt[n]{a^m} = b, \quad \text{wenn } b^n = a^m \quad \text{(nach Definition)} \quad (a > 0;\ b > 0)$$
$$\sqrt[n \cdot c]{a^{m \cdot c}} = b, \quad \text{wenn } b^{n \cdot c} = a^{m \cdot c} \quad \text{(dazu indirekter Beweis)}$$

Es wird abgeleitet, daß $\sqrt[n]{a^m}$ außer von a nur von dem Verhältnis $\frac{m}{n}$ abhängt.

Man kann also Wurzel- und Radikandenexponenten einer Wurzel mit gleichen natürlichen, von Null verschiedenen Zahlen multiplizieren oder durch gleiche natürliche, von Null verschiedene Zahlen dividieren.
Außer Beispielen wie $\sqrt[3]{2^2} = \sqrt[6]{2^4}$; $\sqrt[4]{3^6} = \sqrt{3^3}$ sollten auch Aufgaben wie $\sqrt[3]{5^6} = \sqrt[1]{5^2} = 5^2$ behandelt werden.
Hierauf folgt Lb 76, Definition C 6. Es schließen sich die ersten Übungen in der Art von Lb 76, Beispiel C 10, an.

Nachdem die Potenzgesetze für die Potenzen mit ratioalen Exponenten zusammengefaßt wurden, gilt es, eines dieser Gesetze zu beweisen. Dies geschieht in der *2. Stunde* dieser Unterrichtseinheit; vgl. Lb 77.

Vor allem ist herauszuarbeiten, daß die Umformungen erfolgen, um mit ganzzahligen Exponenten zu arbeiten und somit die bereits bewiesenen Potenzgesetze für diese Exponenten nutzen zu können.
Die Wechselbeziehung zwischen Wurzelschreibweise und Potenzen mit rationalen Exponenten zu beachten ist Voraussetzung, die Gesetzmäßigkeiten beim Rechnen mit Wurzeln voll erfassen zu können. Es kommt also mehr auf die Aneignung dieser Beziehung an als etwa auf Übungen zum Teil (1) oder (3) aus Satz C 7, Lb 76.

3.1.5. Wurzelgesetze als Spezialfälle der Potenzgesetze (LE 5 und 9; 3 Std.)

Die Wurzelgesetze werden als Spezialfälle der Potenzgesetze betrachtet; es werden besonders die Gesetze mit gleichen Wurzelexponenten behandelt. Hierbei sollte wiederum darauf geachtet werden, daß die Schüler die entsprechenden Gleichungen in beiden Richtungen lesen und anwenden lernen; z. B.:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b} \quad \text{und} \quad \sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b};$$

vgl. Lb 195/59. Das ist für die Aufgaben, in denen eine Vereinfachung durch teilweises Radizieren erfolgen kann, wichtig.
Das Rationalmachen des Nenners wird nur an einigen einfachen Termen mit eingliedrigen Nennern gezeigt. Ausführliche Übungen sollen nicht erfolgen.

Die *1. Stunde* sollte dem Formulieren der Wurzelgesetze an Hand der Beispiele des Lehrbuchs dienen. Es empfiehlt sich zu erarbeiten, daß in einigen Fällen, die nicht auf Quadratzahlen im Radikanden führen, Vereinfachungen und Erhöhungen der Genauigkeit der Ergebnisse möglich sind.

Beispiel 1: $\sqrt{8} \cdot \sqrt{50} = \sqrt{8 \cdot 50} = \sqrt{400} = 20$

Beispiel 2: $\sqrt{5} \cdot \sqrt{13} = \sqrt{5 \cdot 13} = \sqrt{65} \approx 8{,}06$

Dieser Rechenweg ist einfacher und genauer als etwa:

$$\sqrt{5} \approx 2{,}24; \quad \sqrt{13} \approx 3{,}61; \quad \sqrt{5} \cdot \sqrt{13} \approx 2{,}24 \cdot 3{,}61 \approx 8{,}09.$$

Für kompliziertere Aufgaben wären einige Beispiele im Unterricht rechnen zu lassen, um Fehlüberlegungen vorzubeugen; vgl. Lb 195/61 b).

$$\sqrt[3]{0{,}00004} = \sqrt[3]{\frac{40}{1000000}} = \frac{1}{100} \cdot \sqrt[3]{40}$$

Das hier gezeigte Zerlegen des Radikanden in Faktoren ermöglicht, den Faktor, der herausgehoben werden kann, zu finden. Anschließend kann man die Zahlentafel bzw. den Rechenstab einsetzen. Solche Übungen werden in der *2. Stunde* fortgesetzt.

Für das Rationalmachen eingliedriger Nenner steht die *3. Stunde* zur Verfügung. Die Schüler sollten dabei lernen, Möglichkeiten zum Vereinfachen beim Berechnen von Näherungswerten zu erkennen.

Beispiel: $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

a) Irrationaler Nenner: Division schwierig bei größerer Stellenzahl im Nenner

$$\frac{1}{1{,}4} = 0{,}71428\ldots; \qquad \frac{1}{1{,}41} = 0{,}70920\ldots$$

$$\frac{1}{1,414} = 0{,}70721\ldots; \quad \frac{1}{1,4142} = 0{,}70711\ldots$$

b) Rationaler Nenner: Division einfach durch begrenzte Stellenzahl im Nenner

$$\frac{1}{2} \cdot 1{,}4 = 0{,}7; \qquad \frac{1}{2} \cdot 1{,}41 = 0{,}705;$$

$$\frac{1}{2} \cdot 1{,}414 = 0{,}707; \quad \frac{1}{2} \cdot 1{,}4142 = 0{,}7071$$

Auf diese Art läßt sich am Beispiel $\frac{1}{\sqrt{2}}$ die Bedeutung des Rationalmachens von Nennern demonstrieren.

Lb 83, Beispiel C 30, zeigt den Umfang der bei der Behandlung des Rationalmachens von Nennern auszuwählenden Aufgaben.

3.1.6. Das Abtrennen von Zehnerpotenzen; das Rechnen mit physikalischen Größen; Positionssysteme (LE 6 bis 8; 5 Std.)

Die Schüler sollen die Vorzüge erkennen, die das *Abtrennen von Zehnerpotenzen* bietet.
Dabei wird neben der Anwendung für den Überschlag (Verwendung des Rechenstabs) und für das Erarbeiten von Größenvorstellungen auch der Nutzen für die Lesbarkeit großer Zahlen betont. Entsprechende Übungen sollen zu Fertigkeiten führen.
Das *Rechnen mit physikalischen Größen* bietet Möglichkeiten zur Koordinierung der Fächer Mathematik und Physik.
Dabei ist besonders auf die richtige Wahl der Einheiten für die physikalschen Größen zu achten; vgl. die Tabelle der gesetzlich festgelegten Einheiten.
Das Anwenden der Potenzrechnung bei der *Darstellung von Zahlen als Summen von Vielfachen von Potenzen* (insbesondere zur Basis 2 und 10) erübrigt eine besondere Behandlung der Dualzahlen (nach dem alten Lehrplan für Klasse 10).
Dabei sind Bezüge bis zum Unterricht in Klasse 4 möglich. Der Hinweis auf Rechenoperationen im Dualsystem ist als Demonstration der Vereinfachung gegenüber dem dekadischen System zu werten. Besondere Übungen im Rechnen mit Dualzahlen erfolgen nicht.

Die *1. Stunde* (LE 6) sollte folgende methodische Schritte enthalten.

(1) Lesen großer Zahlen und Klassifizierungen wie:

... illionen: 10^6; 10^{12}; 10^{18}; ...;
... illiarden: 10^9; 10^{15}; 10^{21}; ...

Hinweis darauf, daß in einigen Ländern andere Sprechweisen üblich sind (UdSSR, Frankreich, USA: z. B. 10^9 als Billion)

(2) Erleichtertes Lesen durch Abtrennen von Zehnerpotenzen, z. B.:

$$1000000 = 1 \cdot 10^6$$
$$3000000 = 3 \cdot 10^6$$
$$3200000 = 32 \cdot 10^5 \quad \text{oder} \quad 3{,}2 \cdot 10^6$$

An solchen Beispielen kann die Zweckmäßigkeit der Festlegung $1 \leqq a_0 < 10$ für das Darstellen rationaler Zahlen a in der Form $a = a_0 \cdot 10^p (a_0 \in R;\ 1 \leqq a_0 < 10;\ p \in G)$ erläutert werden; vgl. Lb 79.

(3) Erste Übungen im Abtrennen von Zehnerpotenzen und im Lesen derart geschriebener Zahlen, z. B.:

$$61\,000 = 6{,}1 \cdot 10^4; \quad 2{,}3 \cdot 10^5 = 230\,000$$

(4) Übertragen des Verfahrens des Abtrennens von Zehnerpotenzen auf echte Dezimalbrüche, z. B.:

$$0{,}1 = \frac{1}{10} = \frac{1}{10^1} = 1 \cdot 10^{-1}, \text{ entsprechend für } 0{,}01;\ 0{,}001$$

Daraus werden die Regeln für die praktische Verfahrensweise abgeleitet.

(5) Übungen formaler Art, z. B.:

$$0{,}00047 = 4{,}7 \cdot 10^{-4}; \quad 3{,}5 \cdot 10^{-3} = 0{,}0035$$

(6) Anwenden des Abtrennens von Zehnerpotenzen beim Überschlag und beim Verwenden von Vorsätzen für Einheiten (Lb 79)

In der *2. Stunde* (LE 7) werden Aufgaben, in denen physikalische Größen enthalten sind, gelöst. Diese Größen müssen den Schülern vom Physikunterricht her bekannt sein. Vor allem ist auf den richtigen Gebrauch der Einheiten zu achten. Das Abtrennen von Zehnerpotenzen wird wieder geübt und das Darstellen von Potenzen mit negativen Exponenenten wiederholt (die Beschränkung der Aufgabenauswahl auf einige Sachgebiete erscheint unter dem Gesichtspunkt der zeitlichen Begrenzung der Behandlung gerechtfertigt).

Bei der Wiederholung des Dezimalsystems (als Positionssystem bereits im Unterricht der Klassen 4 und 5 behandelt) sind Zerlegungen denkbar wie

$$321 = 3 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 1 = 3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0$$

und $4 \cdot 10^5 + 3 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 = 403\,800.$

Eine Tabelle für die Potenzen der Basis 2 können die Schüler sicher weitgehend selbständig aufstellen.
Zum Vergleichen mit Potenztabellen für größere Basen sollten die Schüler unter Anleitung des Lehrers die Potenztabelle für die Basis 7 anlegen.

Faktor	7^0	7^1	7^2	7^3
1	1	7	49	343
2	2	14	98	686
3	3	21	147	1029
4	4	28	196	1372
5	5	35	245	1715
6	6	42	294	2058

Man sollte auch gemeinsam mit den Schülern Aufgaben der Darstellung von Dualzahlen als Dezimalzahlen durchrechnen; vgl. Lb 197/89.
Im Zusammenhang mit den Darlegungen zu den Vorzügen des *Dualsystems*, insbesondere hinsichtlich der Anwendung in der Rechentechnik und in der elektronischen Datenverarbeitung, sollte den Schülern der Aufwand im Dezimalsystem nochmals bewußt gemacht werden. Dabei können folgende Gegenüberstellungen für die Addition entstehen.

	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9	100 Aufgaben 55 Aufgaben bei Nutzung der Kommutativität

	0 L
0 L	4 Aufgaben 3 Aufgaben bei Nutzung der Kommutativität

Für die Multiplikation wird analog verfahren. Die Bedeutung des Dualsystems für den Einsatz bei der elektronischen Datenverarbeitung sollte vor allem von der rechentechnischen Seite her begründet werden. Auf keinen Fall sollte der Lehrer den Eindruck erwecken, daß die Übertragung von einem System in das andere schwierig sei.

Zu diesem Zeitpunkt bietet sich die Durchführung einer *Leistungskontrolle* mit folgender Thematik an.

1. Aufgaben zur Potenzrechnung nach folgenden Beispielen

   $a^3 \cdot a^5$ $\quad$ $6^3 : 6$ $\quad$ $5^3 \cdot 2^3$ $\quad$ $(y^{-2})^4 \; (y \neq 0)$

   $x^{-4} \cdot x^3 \; (x \neq 0)$ $\quad$ $r^5 : r^2$ $\quad$ $a^n \cdot y^n \; (n \in R)$ $\quad$ $(4^0)^{-2}$

   $b^0 \cdot b^4$ $\quad$ $a^{-4} : a^2 \; (a \neq 0)$ $\quad$ $r^5 \cdot 3^5$ $\quad$ $(-a^5)^2$

   $3^{a+2} \cdot 3^{-2a} \; (a \in R)$ $\quad$ $x^0 : x^{-3} \; (x \neq 0)$

2. Vereinfachen von Produkten und Quotienten und Niederschreiben des Ergebnisses entweder ohne Bruchstrich oder ohne Potenzen mit negativen Exponenten, z. B.:

   $$\frac{a^{-2} \cdot x^4}{b^3 \cdot y^{-4}} \cdot \frac{a^2 \cdot y^{-5}}{b^{-1} \cdot x^7} \; (a, b, x, y \neq 0)$$

3. Niederschreiben einer Zahl ohne abgetrennte Zehnerpotenzen, z. B.:

   $3{,}5 \cdot 10^{-3}$; $\quad 1{,}8 \cdot 10^5$

4. Niederschreiben von Zahlen mit abgetrennten Zehnerpotenzen, z. B.:

   $0{,}00564$; $\quad 243\,800$; $\quad \dfrac{87 \cdot 1022}{0{,}04}$

5. Umformen von Zahlenangaben aus dem Dualsystem in das Dezimalsystem und umgekehrt, z. B.:

   LOOLLOL; 3295

3.2. Potenzfunktionen

(LE 10 bis 16; 14 Std.)

3.2.1. Wiederholung des Funktionsbegriffs (LE 10, 2 Std.)

Über geordnete Paare werden die Begriffe „Abbildung" und „eindeutige (mehrdeutige, eineindeutige) Abbildung" wiederholt. Lp 31 f geben genau an, welche Begriffe im Zusammenhang mit dem Funktionsbegriff zu verwenden sind.
Große Bedeutung kommt auch der Unterscheidung zwischen „Funktion" und „Gleichung einer Funktion" zu. Für die Schüler ist wichtig zu wissen, daß die Vorschrift zum Bilden einer Menge geordneter Paare einer Funktion auf verschiedene Weise gegeben sein kann.
Es bedarf eines straffen Unterrichts, um die Fülle der zu wiederholenden Begriffe systematisch, vollständig, fachlich einwandfrei und verständlich zu behandeln.
Für die zwei Stunden ist folgende thematische und methodische Gliederung zu empfehlen.

(1) *Bilden von Mengen*

Die Vorschrift zum Bilden einer Menge sollte in verschiedener Form gegeben werden, damit sich die Schüler an die Vielfalt gewöhnen.

Beispiel:

M_1 sei die Menge aller Teiler von 8.

$M_1 = \{1; 2; 4; 8\}$

(2) *Abbildungen von einer Menge auf eine Menge*

Dabei ist zu beachten, daß die Abbildung jedes Element von M_1 und jedes Element von M_2 erfaßt. Lb 84, Beispiel C 31, läßt sich dazu nutzen.

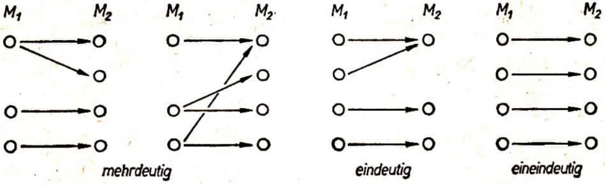
(3) *Eindeutige, mehrdeutige und eineindeutige Abbildungen*

Hier sollten neben den Worterklärungen und der Definition auf Lb 85 nochmals verschiedene Abbildungen von Mengen auf Mengen veranschaulicht werden; vgl. Bild 110/1.

(4) *Definition des Funktionsbegriffs*

Bei der Definition des Begriffs „Funktion" sollte mit den Schülern zunächst die Formulierung aus dem Unterricht in Klasse 8 (vgl. Lb 86, Definition C 8), in der der Begriff „eine Menge geordneter Paare" enthalten ist, wiederholt werden. Dann erst kann die damit inhaltlich gleichwertige neue Definition auf Lb 86 angeschlossen werden.

110/1



Wichtig ist es auch, die Schüler mit der Schreibweise $f(x_0)$ für den zu einem Argument x_0 gehörenden Funktionswert vertraut zu machen.

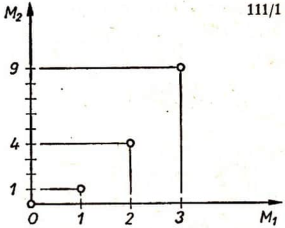
(5) *Formen der Abbildungsvorschrift*

Für die möglichen Formen der Abbildungsvorschrift (vgl. Lb 86) sollte ein Beispiel gewählt werden, auf das sich alle angeführten Formen anwenden lassen.

Wortvorschrift: M_1 sei die Menge der natürlichen Zahlen, die kleiner als 4 sind. M_2 sei die Menge der Quadrate dieser natürlichen Zahlen. Es ist die Menge geordneter Zahlenpaare zu bilden, bei denen als zweite Zahl das Quadrat der ersten steht.

Angabe der geordneten Paare:

M_1	0	1	2	3
M_2	0	1	4	9



111/1

Graphische Darstellung: Vgl. Bild 111/1

Gleichung: $y = x^2$; $x \in N$ und $x < 4$

Unbedingt notwendig ist es, den Definitionsbereich deutlich zu kennzeichnen. Dadurch kann der falschen Vorstellung vorgebeugt werden, daß eine Funktion stets unendlich viele Zahlenpaare umfaßt und immer durch eine Kurve dargestellt werden kann.

(6) *Unterscheiden zwischen Funktion und Gleichung einer Funktion*

Es sollte unter Rückgriff auf die behandelten Beispiele deutlich der Unterschied zwischen der Menge der geordneten Paare (Funktion) und einer entsprechenden Vorschrift (z. B. Gleichung) zum Bilden solcher geordneter Paare herausgearbeitet werden.

Es gilt auch, damit gleichzeitig der Vorstellung entgegenzuwirken, daß eine Funktion vom Vorhandensein einer Gleichung abhängt.

Es sollten an dieser Stelle auch folgende Schreibweisen behandelt werden.

$y = x + 2$; $f(x) = x + 2$

$s = vt$; $f(t) = vt$ $s(t) = vt$

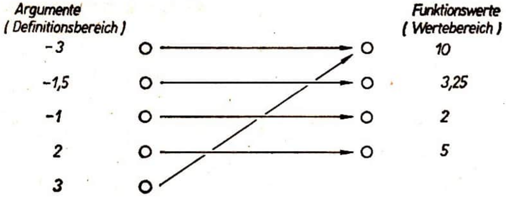
Als Vorleistung für die kommenden Stunden kann man zu einigen durch ihre Gleichungen gegebenen Funktionen zu vorgegebenen Argumenten die Funktionswerte berechnen lassen, z. B.:

$f(x) = -2x + 3$ *Berechnen Sie* $f(2); f(-1); f(1{,}5)$!

$f(b) = a \cdot b$ *Berechnen Sie* $f(3); f(-1); f(a)$!

$f(t) = 10t^2$ *Berechnen Sie* $f(1); f(0{,}5); f(3)$!

Zur Festigung dieses Stoffes sind Lb 197/93 bis Lb 198/101 gut geeignet. Sind zur Untersuchung einer Funktion (z. B. auf Eineindeutigkeit) geordnete Zahlenpaare vorgegeben (z. B.: $f = \{[-3; 10], [-1{,}5; 3{,}25], [-1; 2], [2; 5], [3; 10]\}$), so könnte die Entscheidung durch eine Darstellung wie im Bild 112/1 erleichtert werden.



Eindeutige Abbildung (Funktion) 112/1

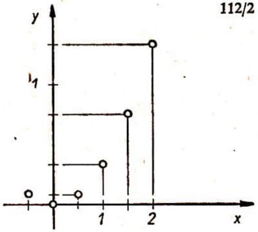
Für die graphische Darstellung einer Funktion, deren Definitionsbereich nur diskrete Zahlen umfaßt (vgl. Lb 197/95), dürfen nur diskrete Punkte zur Veranschaulichung der geordneten Zahlenpaare verwendet werden.

Beispiel:

Die Menge $f = \left\{\left[-\frac{1}{2};\ \frac{1}{12}\right],\ [0; 0],\ \left[\frac{1}{2};\ \frac{1}{12}\right],\ \left[1;\ \frac{1}{3}\right];\ \left[\frac{3}{2};\ \frac{3}{4}\right],\ \left[2;\ \frac{4}{3}\right]\right\}$ ist eine Funktion.

$f(x) = \frac{1}{3}x^2$ mit $x \in \left\{-\frac{1}{2};\ 0;\ \frac{1}{2};\ 1;\ \frac{3}{2};\ 2\right\}$ ist die Darstellung der gegebenen Funktion durch eine Gleichung. Das Bild 112/2 zeigt die graphische Darstellung der gegebenen Funktion.

112/2



Zuletzt sei auf die Notwendigkeit der Auflösung der Gleichung für eine Abbildung nach y hingewiesen und an die exakte Darstellung der geforderten Lösungen erinnert.

Beispiel (vgl. Lb 197/96a):

$$y = -\frac{1}{4}x + 5 \quad \text{mit} \quad x \in N \quad \text{und} \quad 0 \leqq x \leqq 20 \quad \text{und} \quad y \in N$$

$$f = \{[0; 5], [4; 4], [8; 3], [12; 2], [16; 1], [20; 0]\}$$

Die Schüler müssen in der Aufgabenstellung unbedingt den Hinweis auf y als natürliche Zahl erfassen. Daraus ergibt sich eine Einschränkung für den Definitionsbereich, die die Schüler durch Überlegen ermitteln können (Wertebereich $0 \leqq y \leqq 5$; Graph vgl. Bild 113/1).

113/1

Zusammenfassend sei auf die *fachlichen Schwerpunkte* dieser Unterrichtseinheit hingewiesen.

- Eine Abbildung kann durch geordnete Zahlenpaare gegeben sein.
  Ermitteln, ob die Abbildung eindeutig, mehrdeutig oder eineindeutig ist
- Eine Abbildung kann durch eine Abbildungsvorschrift und die Festlegung eines Definitionsbereichs gegeben sein.
  a) Ermitteln des Wertebereiches der Abbildung
  b) Ermitteln der zugehörigen Menge geordneter Zahlenpaare
  c) Graphische Darstellung der Abbildung

3.2.2. Potenzfunktionen mit Gleichungen der Form $y = x^n (n \in G, n \geqq 2)$
(LE 11; 2 Std.)

In dieser Unterrichtseinheit wird der Begriff „Potenzfunktion" eingeführt. Das *Verhalten* der Potenzfunktionen in bestimmten Intervallen und die Symmetrieverhältnisse der entsprechenden Graphen werden untersucht.
Besondere Beachtung erfährt das Zeichnen der Graphen in der Umgebung des Koordinatenursprungs. Die Begriffe „Parabel", „Achse der Parabel" und „Scheitelpunkt der Parabel" werden eingeführt. Die Gemeinsamkeiten der Graphen der Funktionen $y = x^{2n}(n \in G; n \geqq 1)$ und ihre Unterschiede bei unterschiedlichen Exponenten werden systematisch untersucht. Das gilt auch für die Funktionen $y = x^{2n+1}$ $(n \in G; n \geqq 1)$.

In der *1. Stunde* werden alle Untersuchungen an den Funktionen $y = x^{2n}(n \in G; n \geqq 1)$, beginnend bei $y = x^2$, durchgeführt. Das Ermitteln von Zahlenpaaren sollte sofort systematisch erfolgen, dabei aber nicht auf ganze Zahlen als Argumente beschränkt werden. Zum Zeichnen ist Millimeterpapier zu verwenden. Große Bedeutung kommt dem Untersuchen der Symmetrieverhältnisse der Graphen zu. Nach einer exakten Untersuchung des Kurvenverlaufs im Intervall $-1 \leqq x \leqq 1$ werden die Begriffe „Parabel", „Achse der Parabel" und „Scheitelpunkt der Parabel" eingeführt.
Monotoniebetrachtungen werden erst nach der Untersuchung der Funktionen $y = x^{2n+1}$ $(n \in G; n \geqq 1)$ durchgeführt.
Nun folgen entsprechende Überlegungen wie auf Lb 87, Beispiel C 32, für die Funktionen $y = x^{2n}(n \in G; n \geqq 1)$, um Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen den Graphen dieser Funktionen und denen der Funktionen $y = x^{2n+1}$ $(n \in G; n \geqq 1)$ zu ermitteln. Da die Symmetrieverhältnisse bereits behandelt wurden, liefert eine Zusammenstellung der Funktionswerte zu einigen ausgewählten Argumenten einen guten Überblick.

x	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{3}{2}$	2	3
$f(x) = x^2$	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{4}{9}$	1	$\frac{9}{4}$	4	9
$f(x) = x^4$	0	$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{16}{81}$	1	$\frac{81}{16}$	16	81
$f(x) = x^6$	0	$\frac{1}{4096}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{64}{729}$	1	$\frac{729}{64}$	64	729

Das Berechnen wird durch die Auswahl der Argumente erleichtert, da sich die Potenzen einiger Zahlen wiederholen. Die Funktionswerte lassen die folgenden Schlußfolgerungen zu.
Für alle Funktionen $y = x^{2n}$ ($n \in G$; $n \geqq 1$) gilt:

$$f(0) = 0; \quad f(1) = 1.$$

Wird im Intervall $0 < x < 1$ der Exponent größer, so wird $f(x)$ kleiner.
Wird für Werte $x > 1$ der Exponent größer, so wird $f(x)$ größer.
Zum Veranschaulichen wird Lb 87, Bild C 7, verwendet. Zeichnungen der Schüler sind relativ zeitaufwendig und haben nur geringen Wert.

Die *2. Stunde* beginnt mit dem Behandeln von Lb 88, Beispiel C 33. Hierbei ist der Gegensatz im Verhalten der Funktionswerte bei einander entgegengesetzten Argumenten gegenüber der Funktion $y = x^2$ zu beachten. Der Begriff „zentralsymmetrisch" muß wahrscheinlich wiederholt werden. Der Ablauf dieser Stunde gleicht weitgehend dem Ablauf der vorangegangenen. Er kann allerdings etwas gestrafft werden, da gewisse Teile Analogiebetrachtungen, andere Wiederholungen darstellen. So ist es sicher möglich, am Ende der Stunde zusätzlich einige Monotoniebetrachtungen durchzuführen. Die Schüler müssen erkennen, daß man beim Verhalten der Funktionswerte für wachsende Argumente folgendes unterscheiden kann.
Monoton steigend: In einem Intervall gilt für $x_1 < x_2$ stets

$$f(x_1) < f(x_2).$$

Monoton fallend: In einem Intervall gilt für $x_1 < x_2$ stets

$$f(x_1) > f(x_2).$$

Lb 90, Bilder C 11 und C 12, unterstützen diese Erkenntnis.
Zum Abschluß dieser Unterrichtseinheit werden die Schüler mit der Parabelschablone als Zeichenhilfsmittel bekanntgemacht.

3.2.3. Potenzfunktionen mit Gleichungen der Form $y = x^n$ ($n \in G$, $n \leqq 1$)
(LE 12; 2 Std.)

In dieser Unterrichtseinheit werden zunächst *zwei Sonderfälle der Potenzfunktionen,* und zwar $y = x^1$ und $y = x^0$, behandelt. Daran schließt sich die von den Schülern weitgehend selbständig zu führende Untersuchung einiger *Potenzfunktionen mit negativen ganzzahligen Exponenten* an. Die Selbständigkeit erstreckt sich vor allem auf die Anwendung der entsprechenden Potenzgesetze, die Berechnung der Funk-

tionswerte für ausgewählte Argumente, die Untersuchung des Verhaltens der Funktionswerte für sehr große bzw. sehr kleine Argumente oder bei Annäherung der Argumente an Null. Der Begriff „Hyperbel" wird eingeführt, die Monotonie der Funktionen und die Symmetrieeigenschaften der Graphen werden untersucht.
Eine Verallgemeinerung bestimmter Erkenntnisse für alle Potenzfunktionen $y = x^n$ ($n \in G$) sollte in systematisierender Form erfolgen; vgl. Lb 199/112 bis 114.

In der *1. Stunde* sollten die Untersuchungen der entsprechenden Funktionen bereits zum Abschluß kommen und alle Begriffe eingeführt werden. Es empfiehlt sich folgende Gliederung dieser Unterrichtsstunde.

(1) $y = x^2$ — Wiederholung durch Schüler
(2) $y = x^1$ — Wiederholung durch Schüler
(3) $y = x^0$; $x \neq 0$; für alle übrigen x gilt: $f(x) = 1$
(4) $y = x^n$ ($n \in G$; $n < 0$) Nach Definition: $y = \frac{1}{x^{-n}}$

Bei geraden Exponenten: Symmetrie zur y-Achse
Bei ungeraden Exponenten: Zentralsymmetrie bezüglich des Koordinatenursprungs

Für einige ausgewählte Argumente der Funktionen $y = x^n$ ($n \in G$; $n < 0$) werden die Funktionswerte berechnet, um aus der Tabelle eine Skizze der Graphen dieser Funktionen entwickeln und weitere Eigenschaften der Kurven ablesen zu können.

x	−10	−2	−1	−0,5	−0,1	0,1	0,5	1	2	10
$y = x^{-1} = \frac{1}{x}$	−0,1	−0,5	−1	−2	−10	10	2	1	0,5	0,1
$y = x^{-3} = \frac{1}{x^3}$										
$y = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$										
$y = x^{-4} = \frac{1}{x^4}$										

Wenn die zugehörigen Funktionswerte ausgerechnet sind, vermittelt die Tabelle folgende Erkenntnisse; vgl. Lb 91f.

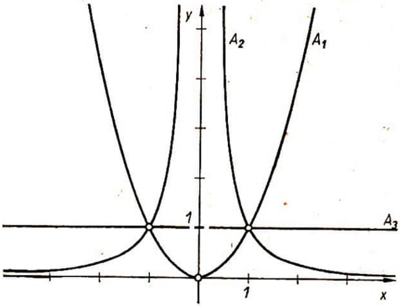
Exponenten	Argumente	Funktionswerte
gerade	beliebig groß bzw. klein	Annäherung an 0
	Annäherung an Null	beliebig groß
ungerade	beliebig groß bzw. klein	Annäherung an 0
	positiv, Annäherung an 0	beliebig groß
	negativ, Annäherung an 0	beliebig klein

Für die Graphen dieser Funktionen wird der Begriff „Hyperbel“ eingeführt. Die zwei Teile einer Hyperbel sollten als „Hyperbeläste“ bezeichnet werden.

Bevor in der *2. Stunde* Anwendungen aus dem Aufgabenteil des Lehrbuchs gelöst werden, sollte die folgende übersichtliche Zusammenstellung zu allen Potenzfunktionen $y = x^n$ $(n \in G)$ und ihren Graphen erfolgen.

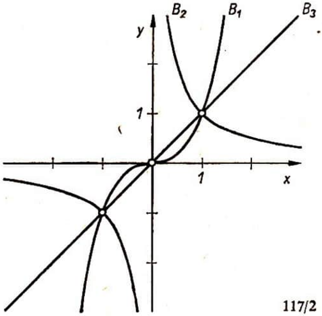
Gerade Potenzfunktionen			
Gleichung	$y = x^{2n}$		
	$(n \in G; n > 0)$	$(n \in G; n < 0)$	$n = 0$
Argumente	$x \in P$	$x \in P; x \neq 0$	$x \in P; x \neq 0$
Funktionswerte	$y \in P; 0 \leqq y$	$y \in P; 0 < y$	$\{1\}$
monoton steigend	$0 \leqq x$	$0 > x$	konstant
monoton fallend	$0 \geqq x$	$0 < x$	
Graphen			
Name	Parabel	Hyperbel	
Lage	Symmetrisch zur y-Achse		
Bild 117/1	A 1	A 2	A 3
Ungerade Potenzfunktionen			
Gleichung	$y = x^{2n+1}$		
	$n \in G; n > 0$	$n \in G; n < 0$	$n = 0$
Argumente	$x \in P$	$x \in P; x \neq 0$	$x \in P$
Funktionswerte	$y \in P$	$y \in P; y \neq 0$	$y \in P$
monoton steigend	x beliebig reell	–	x beliebig reell
monoton fallend	–	$x \in P; x \neq 0$	–
Graphen			
Name	Parabel	Hyperbel	Gerade
Lage	Zentralsymmetrisch zum Koordinatenursprung		
Bild 117/2	B 1	B 2	B 3

117/1



Eine solche Zusammenstellung hilft, die Forderung des Lehrplans, nach der die Schüler auf anschauliche Weise mit wichtigen Eigenschaften dieser Funktionen vertraut zu machen sind und sich im Beschreiben, Vergleichen und Systematisieren wesentlicher Merkmale der einzelnen Funktionsklassen üben sollen, zu erfüllen; vgl. Lp 30.

Hierbei könnte die Frage nach dem Zeitaufwand gestellt werden. Es ist möglich, diese Zusammenstellung unter Vorgabe der Zeilenbeschriftung als Hausarbeit anfertigen zu lassen. Den Schülern muß dann eine Vergleichsmöglichkeit, z. B. durch ein Tafelbild, gegeben werden; vgl. Bedarfsplan für Unterrichtsmittel Mathematik, Foliensätze „Potenzfunktionen".



117/2

Die Übersicht kann man nach verschiedenen Gesichtspunkten zusammenstellen. Z. B. kann an Stelle der vorliegenden Einteilung nach geraden und ungeraden Exponenten eine Einteilung nach Potenzfunktionen mit positiven und negativen Exponenten erfolgen. Eine andere Einteilung wäre nach bestimmten Eigenschaften der Graphen denkbar.

Beim Lösen von Sachaufgaben (z. B. Lb 199/116, 117) muß stets auch der Zusammenhang zu den behandelten Potenzfunktionen deutlich sein. Die Schüler sollen bewußt ihre erworbenen mathematischen Kenntnisse und Fertigkeiten auf andere Sachbereiche anwenden können; vgl. Lp 30f.

Beispiel (Lb 199/116):

Zeichnen Sie in ein R, I-Koordinatensystem den Graph der Funktion $I = \frac{U}{R}$ (I = *Stromstärke*, $U = 220\,\text{V}$, R = *Widerstand*) für $0\,\Omega < R < 1000\,\Omega$! *Geben Sie* *den Wertebereich für I an! Charakterisieren Sie das Verhalten der Stromstärke bei steigendem Widerstand! Geben Sie das Intervall an, für das* $0\ \mathrm{A} < I \leqq 6\ \mathrm{A}$ *gilt!*

Aus dem Text der Aufgabe ist zu entnehmen, daß es sich um eine Zuordnung der Stromstärke I zu den wechselnden Werten des Widerstandes R handelt: $I = f(R) = \frac{U}{R}$ analog zu $f(x) = \frac{a}{x} = ax^{-1}$.

Daraus sollte gefolgert werden:
Der Graph dieser Funktion ist eine Hyperbel, bei der auf Grund der vorgegebenen physikalischen Gesetzmäßigkeit und des daraus sich ergebenden Definitionsbereichs der Funktion nur der Hyperbelast im 1. Quadranten interessiert. Man weiß, daß für diesen Ast gilt: Mit wachsenden Argumenten nähern sich die Funktionswerte immer mehr Null.
Also: Bei steigendem Widerstand nimmt die Stromstärke ab.
Der Wertebereich der Funktion läßt sich aus diesen Überlegungen mit Hilfe einer Wertetafel leicht ermitteln.

R in Ω	1	100	500	1000	
$I = \frac{U}{R}$ in A					6

Ergebnisse:

Definitionsbereich: $0 < R < 1000\,\Omega$ $\quad \frac{110}{3}\,\Omega \leqq R$

Wertebereich: $\frac{11}{50}\ \mathrm{A} < I$ $\quad 0 < I \leqq 6\ \mathrm{A}$

Ebenso sollte man bei Lb 199/117 vorgehen.

$$R = f(A) = \frac{\varrho \cdot l}{A}, \quad \text{analog zu} \quad f(x) = \frac{ab}{x} = abx^{-1}$$

Das Behandeln dieser Sachaufgaben kann auch erst nach dem Erarbeiten des Stoffes der Lerneinheiten C 14 und C 15 erfolgen.

3.2.4. Potenzfunktionen mit Gleichungen der Form $y = x^n$

$$\left(n = \frac{p}{q};\ p, q \in G;\ p \neq q;\ q > 0\right) \quad \text{(LE 13; 2 Std.)}$$

Am Beginn dieser Unterrichtseinheit werden die Begriffe „rationale Funktion“ und „nichtrationale Funktion“ eingeführt. In einer Gegenüberstellung zu den Potenzfunktionen $y = x^n$ ($n \in G$), die als Beispiele für rationale Funktionen anzusehen sind, muß den Schülern deutlich werden, daß es sich bei den nunmehr zu behandelnden Funktionen $y = x^n \left(n = \frac{p}{q}; p, q \in G; p \neq q; q > 0\right)$ deshalb um Beispiele für *nichtrationale Funktionen* handelt, weil die betreffende Zuordnungsvorschrift zwar durch einen Rechenausdruck angebbar ist, in dem aber nicht nur rationale Rechenoperationen (Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division) auftreten.

In der *1. Stunde* sollte, ausgehend von der Definition der Wurzel, über mögliche Definitions- und Wertebereiche gesprochen werden.

Aus $y = x^{\frac{p}{q}}$ folgt nach Definition

$$y = \sqrt[q]{x^p} \quad \text{oder} \quad y = \left(\sqrt[q]{x}\right)^p;$$

aus der Wurzeldefinition folgt (ohne Beachtung von p), daß für x alle nichtnegativen reellen Zahlen im Definitionsbereich auftreten können.

Es ergibt sich nach Definitionen für $p < 0$:

$$y = \sqrt[q]{x^p} = \sqrt[q]{\frac{1}{x^{-p}}} = \frac{1}{\left(\sqrt[q]{x}\right)^{-p}}.$$

Zusätzlich zu den Formulierungen auf Lb 92f sollte die folgende Darstellung treten.

Für $y = x^{\frac{p}{q}}$ ($p, q \in G, p, q$ teilerfremd; $q > 0$) gilt für $\begin{cases} p > 0: & 0 \leqq x; \quad 0 \leqq y \\ p < 0: & 0 < x; \quad 0 < y \end{cases}$

Für die folgende graphische Darstellung wird nur der 1. Quadrant benötigt. Bei der Berechnung der Wertetafel ist der erneute Hinweis auf die Potenzschreibweise von Wurzeln und die Berechnung von Wurzeln mit Hilfe der Quadrattafel oder des Rechenstabs (Genauigkeit für Zeichnung ausreichend) erforderlich. Dann kann Lb 93, Beispiel C 34, bearbeitet werden.

Beim Bearbeiten von Lb 93, Auftrag C 19, muß den Schülern deutlich werden, daß es sich bei $y = -x^{\frac{1}{2}}$ und $y = -x^{\frac{1}{3}}$ gegenüber $y = x^{\frac{1}{2}}$ und $y = x^{\frac{1}{3}}$ um neue Funktionen handelt. Günstig ist, auch im Hinblick auf die Berechnung, zu schreiben:

$$y = -\sqrt{x}; \quad y = -\sqrt[3]{x}.$$

* Der Begriff „Umkehrfunktion" ist nur informatorisch zu vermitteln; vgl. Lp 32 und Lb 94. Zur Behandlung dieser Problematik sollten keine vollen Unterrichtsstunden von vornherein eingeplant werden. Hier ergeben sich auch Möglichkeiten für Differenzierungen im Unterricht. Sollten diese Voraussetzungen ein kurzes Eingehen auf die Beziehungen zwischen Funktionen, die zueinander Umkehrfunktionen sind, erlauben, so empfiehlt sich u. a., mit Hilfe der folgenden Wertetafeln an den Beispielen

$y = x^2$ $(x \geqq 0)$; $\quad y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ $(x \geqq 0)$

die Umkehrung der Reihenfolge der Zahlen bei allen geordneten Zahlenpaaren zu zeigen.

Elemente aus			
Definitionsbereich x	Wertebereich y	Definitionsbereich x	Wertebereich y
2	4	4	2
3	9	9	3
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
$\sqrt{2}$	2	2	$\sqrt{2}$
1	1	1	1

Man kann auch die zur Geraden $y = x$ symmetrische Lage der beiden Graphen betrachten lassen.
Zu Lb 200/118*, 119* seien folgende Hinweise gegeben.

- Das Zeichnen der Graphen der angegebenen Funktionen sollte weitgehend mit Hilfe von Zeichenhilfsmitteln (Schablonen) erfolgen.
- Es dürfte notwendig sein, die Konstruktion einer Spiegelung zu wiederholen.
- Den Schülern muß die Technik des Ermittelns des Wertebereichs einer Funktion gezeigt werden, wenn der Definitionsbereich ein offenes Intervall ist.

Es sollte auch entsprechend der Forderung auf Lp 30f auf Beispiele aus der Planimetrie und Stereometrie eingegangen werden, z. B.:

$$A = f(a) = a^2; \qquad a = f(A) = \sqrt{A}; \qquad V = f(a) = a^3; \qquad a = f(A) = \sqrt{A}.$$

3.2.5. Graphen von Funktionen (LE 14 und 15; 2 Std.)

Lp 30 fordert, Erkenntnisse über die *Veränderung von Lage und Form der graphischen Darstellung einer Funktion in Abhängigkeit von einem Summanden bzw. einem Faktor* zu vermitteln. Z. B. müssen die Schüler den Einfluß des Faktors a auf die Form des Graphen einer Funktion voll erfassen, da nicht nur Vorleistungen für die Behandlung der quadratischen Funktionen, der Sinusfunktionen und für den Physikunterricht (Klasse 10: Schwingungen) geschaffen werden müssen (Lp 30), sondern bereits die nächste Unterrichtseinheit Kenntnisse darüber bei der Behandlung von Beispielen für Potenzfunktionen aus anderen Bereichen der Mathematik und der Physik voraussetzt.
Bei der Behandlung dieses Stoffes kommt *Fallunterscheidungen* eine wesentliche Bedeutung zu. Der Unterricht kann Lb 94ff folgen, d. h., jeweils in paralleler Behandlung werden die Untersuchungen für $y = x$ und $y = x^2$ durchgeführt.

Folgender Weg ist möglich.

(1) $f(x) = x; \quad x \in P$

Die Menge aller geordneten Paare $[x; x]$ wird durch diese Gleichung dargestellt. Der Graph dieser Funktion ist eine Gerade durch den Koordinatenursprung.

(2) $f(x) = x + e; \quad x, e \in P$

Die Menge aller geordneten Paare $[x; x + e]$ wird durch diese Gleichung dargestellt. Der Graph dieser Funktion ist eine Gerade, die in Richtung der y-Achse gegenüber der Geraden für $y = x$ um e Einheiten verschoben ist.

(3) Wertetafel und Graph für $f(x) = x^2$

(4) Erkenntnis, daß durch den Summanden e aus den geordneten Paaren $[x; x^2]$ die geordneten Paare $[x; x^2 + e]$ werden.

Beispiel:

x	x^2	$x^2 + e$ $e = 2$	$x^2 + e$ $e = -3$	$x^2 + e$ $e = 0,7$	$x^2 + e$ $e = 0$
0	0	2	−3	0,7	0
1	1	3	−2	1,7	1
2	4	6	1	4,7	4
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.

Jeder Punkt des Graphen von $y = x^2$ wird um e in Richtung der y-Achse verschoben.

Die Weiterverwendung der Schablone für $y = x^2$ zur graphischen Darstellung der Funktionen $y = x^2 + e$ kann an der obigen Übersicht ebenfalls erklärt werden.

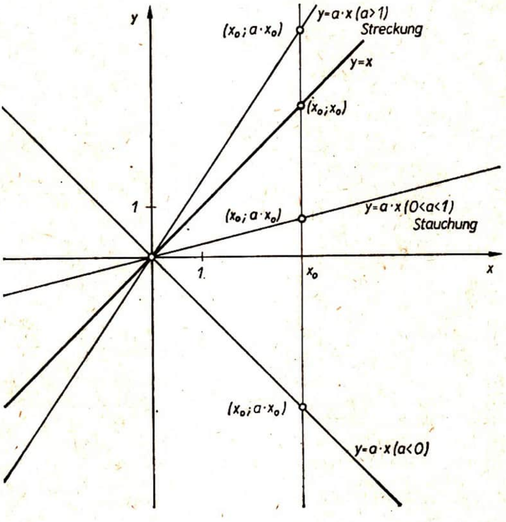
(5) $f(x) = ax; \quad a, x \in P$

Zu untersuchen sind folgende Fälle:

$a > 1$:	Steilerer Anstieg als $f(x) = x$; Streckung
$0 < a < 1$:	Flacherer Anstieg als $f(x) = x$; Stauchung
$a < 0$:	Spiegelung an der x-Achse; für $a \neq -1$ verbunden mit Streckung oder Stauchung entsprechend $\lvert a \rvert$
$a = 1$:	$f(x) = x$
$a = 0$:	Abszissenachse

Neben den Einzeldarstellungen jedes Falles (Lb 96, Bild C 19; Lb 97, Bilder C 22, C 24) sollte eine Übersicht alle Fälle in ein und demselben Bild erfassen; vgl. Bild 121/1. Dabei sei auf Lp 30 verwiesen.

121/1



Für alle Funktionen

$f(x) = ax$ mit $a < 0$

können die Graphen durch Spiegleung der Graphen der entsprechenden Funktionen

$f(x) = bx$ mit $b = -a$

an der x-Achse gewonnen werden.

(6) $f(x) = ax^2$

Die Fälle $a = 1$ und $a = 0$ sollten die Schüler selbständig untersuchen; vgl. Lb 98, Auftrag C 20.

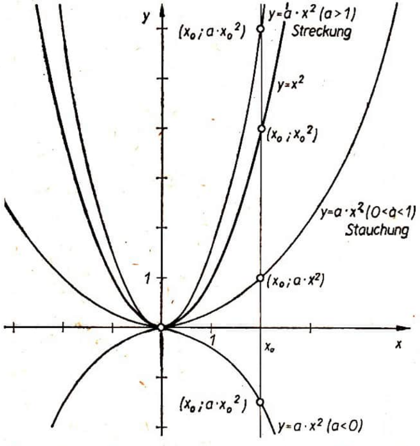
Wichtig ist, daß bei der Wahl der Achsenteilungen der Faktor a berücksichtigt wird. Ist als Einheit für die x-Achse e gewählt, so wäre als Einheit auf der y-Achse

a) bei einer Streckung mit Faktor a die Einheit $\frac{e}{a}$;

b) bei einer Stauchung mit Faktor a die Einheit $a \cdot e$

vorteilhaft.

Wie bei den Geraden ist eine Übersicht zu empfehlen; vgl. Bild 122/1.



122/1

An Hand dieser Übersichten erscheint folgende Fragestellung angebracht.
Wie wirkt sich das gleichzeitige Auftreten des Summanden e und des Faktors a auf die Graphen der Funktionen aus?

Die Behandlung des Falles $a < 0$ sollte besonders interessierten Schülern vorbehalten bleiben, da das Erläutern durch das gleichzeitige Verschieben und Spiegeln an einer Parallelen zur Abszissenachse viel Zeit beansprucht.
Auch Lb 200/120 bis 123 sollten sehr differenziert im Unterricht eingesetzt werden.

- Verschiebung eines bereits verschobenen Graphen:
  $y = x^2 - 2$ *Der Graph ist um $e = -3$ in Richtung der y-Achse zu verschieben;* vgl. Lb 200/120.
- Streckung oder Stauchung eines bereits gestreckten oder gestauchten Graphen:
  $y = 2x$ *Der Graph ist mit dem Faktor $a = \frac{3}{4}$ zu stauchen;* vgl. Lb 200/122.

Solche Aufgaben bereiten oftmals Schwierigkeiten. Die Schüler können sie z. B. mit Hilfe folgender Gegenüberstellungen lösen.

Gegebene Funktion: $y = x^2 - 2$; *Verschiebung um $e = -3$*
Neue Funktion: $y = x^2 - 2 + e = x^2 - 2 - 3 = x^2 - 5$

Gegebene Funktion: $y = 2x$; *Stauchung mit $a = \frac{3}{4}$*

Neue Funktion: $y = a \cdot 2x = \frac{3}{4} \cdot 2x = \frac{3}{2}x$

3.2.6. Beispiele für rationale Funktionen (LE 16; 2 Std.)

Die behandelten Potenzfunktionen werden an *speziellen Potenzfunktionen aus physikalischen und geometrischen Bereichen* verdeutlicht. Dabei sind die Begriffe „proportional“ und „umgekehrt proportional“ zu verwenden. Die Schüler sollen erkennen, daß viele in der Praxis auftretende Funktionen Proportionalitäten darstellen. Das *Lesen* (Auswerten) *und* das *Zeichnen von Diagrammen* werden vor allem im Hinblick auf die praktische Bedeutung für die Fächer Physik, Chemie und für den polytechnischen Unterricht behandelt.

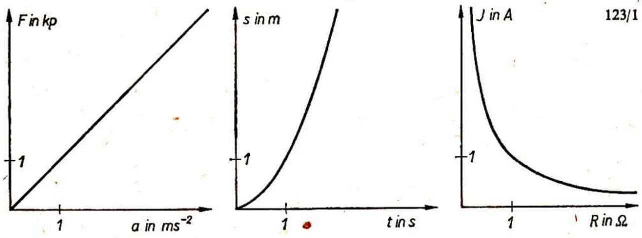
Zu Beginn dieser Unterrichtseinheit werden zweckmäßigerweise die wesentlichen Begriffe aus dem Unterricht in Klasse 6, Stoffeinheit 3.2. „Proportionalität und Verhältnisgleichungen“, wiederholt; vgl. Lp 6/30 und Lb 6/67 bis 82.
Nun kann man zeigen, daß viele in der Praxis und in den verschiedenen Wissensbereichen auftretende Funktionen mit Gleichungen von der Form

$$f(x) = a \cdot x^n \qquad (n \in N;\ n > 1;\ a \neq 0)$$

und

$$f(x) = a \cdot \frac{1}{x^n} = a \cdot x^{-n} \quad (n \in N;\ n > 1;\ a \neq 0)$$

als Proportionalitäten bzw. umgekehrte Proportionalitäten in bezug auf $g(x) = x^n$ aufgefaßt werden können.



123/1

Für die auf Lb 99ff, Beispiele C 39 bis C 41, auftretenden Funktionen sollten Skizzen der Graphen verlangt werden. Die Schüler können dadurch ihre Kenntnisse über die Graphen der Potenzfunktionen anwenden und ihr Wissen festigen. Solche Skizzen sind für die Funktionen aus Lb 99, Beispiel C 39c), Lb 101, Beispiel C 41d), Lb 100, Beispiel C 40a), in den Bildern 123/1 dargestellt.
Bei diesen Skizzen kann bereits die Frage der Achsenteilung (Wahl der Einheiten) erörtert werden. Es schließen sich Lb 100, Aufträge C 22, C 23, zwanglos an. Die Schüler sind anzuleiten, bei der Wahl der Achsenteilungen systematisch vorzugehen.

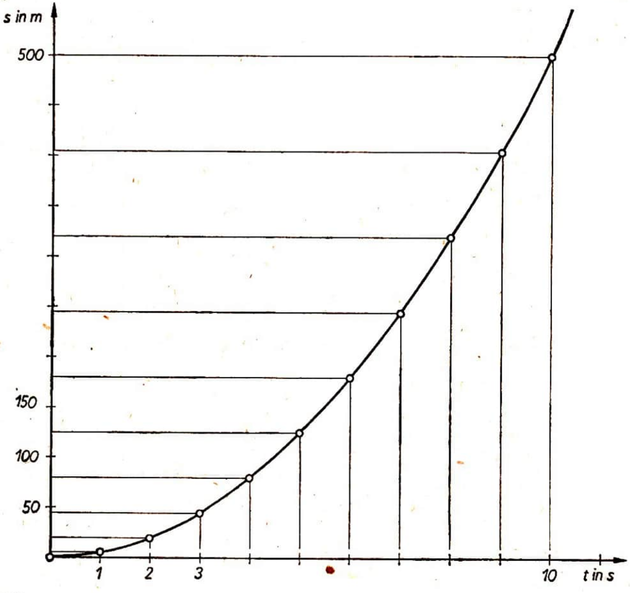
Beispiel (vgl. Bild 124/1):

Stellen Sie die Funktion $s(t) = \frac{g}{2} \cdot t^2$ *graphisch dar!*

Überlegen Sie sich die Achsenteilung so, daß die Wege für Fallzeiten bis 10 s *abgelesen werden können!*

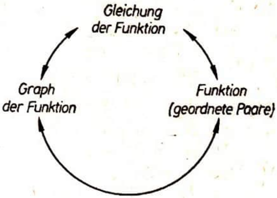
a) Definitionsbereich: $0\text{ s} \leqq t \leqq 10\text{ s}$
b) Teilung auf der Abszissenachse: $1\text{ s} \mathrel{\widehat{=}} 1\text{ cm}$
c) Wertebereich: $s \leqq 500\text{ m}$ (für $g \approx 10\text{ ms}^{-2}$)
d) Teilung auf der Ordinatenachse: $50\text{ m} \mathrel{\widehat{=}} 1\text{ cm}$

124/1



Es sollten verschiedenartige Sachverhalte auf diese Weise untersucht und dargestellt werden.
In diesem Rahmen können auch die Untersuchungen über die Einflüsse der Veränderungen des Arguments auf die Veränderungen des Funktionswerts durchgeführt werden; vgl. Lb 101, Beispiel C 42, Auftrag C 24.
Auf Lb 201/132 sind Aufgabenstellungen enthalten, die auch einmal vom Wertebereich ausgehend den Definitionsbereich beschreiben lassen. An dieser Aufgabe läßt sich z. B. die Abhängigkeit des Volumens V von Pyramiden (mit konstanter Höhe h) von der Seitenlänge a der Grundfläche behandeln.
Beim Lösen von Aufgaben sollte man ständig die verschiedenen Möglichkeiten der Darstellung einer Funktion nutzen; vgl. Bild 125/1.

3.2.7. Bemerkungen zu Leistungskontrollen



125/1

Lp 17 fordert, daß neben kurzen mündlichen und schriftlichen Leistungskontrollen auch mehrstündige Klassenarbeiten zu schreiben sind.
Auch beim Behandeln der Stoffeinheit 3.2. „Potenzfunktionen“ sollten unter Beachtung des benötigten Zeitaufwandes systematisch schriftliche und mündliche Kurzkontrollen durchgeführt werden. Die Bedeutung des Stoffes rechtfertigt eine *zweistündige Klassenarbeit*. Es empfiehlt sich die folgende Thematik.

1. Angabe der Struktur von Termen, z. B.:
   a) $\frac{b^2}{3}$ b) $2 \cdot (x + y)^3$
2. Einfache Aufgaben zum Rechnen mit Potenzen, z. B.:
   a) $2 \cdot 4^2 - 4 \cdot 4^{-1} + 3 \cdot (-4)^3$ b) $(1{,}8r - 0{,}1s)^3$
3. Berechnungen mit Hilfe des Rechenstabes (vorher ein Überschlag), z. B.:
   a) $\frac{5{,}27}{0{,}358}$ b) $\frac{0{,}763 \cdot 12{,}4}{318}$
4. Zerlegen einer Zahl in eine Summe aus Vielfachen von Zehnerpotenzen, z. B.:
   a) 3172 b) 4009030
5. Rechnen mit Wurzeln (Anwenden des Rechenstabes), z. B.:
   $5\sqrt{28} - 2\sqrt{175} + 3\sqrt{112}$
6. Aufgaben über Funktionen, z. B.:
   a) Der Definitionsbereich einer Funktion sei $X = \left\{-2; -\frac{1}{2}; 0; \frac{4}{5}; 1\right\}$.
   Man erhält die Funktionswerte, indem man die Argumente quadriert und dann durch -2 dividiert.
   Stellen Sie die so gegebene Funktion
   – als Menge geordneter Paare,
   – durch eine Gleichung,
   – graphisch dar!

b) Ermitteln Sie den Wertebereich der Funktion $y = \frac{1}{3}x^2 - 2$

für den Definitionsbereich

$X = \left\{2; \frac{3}{2}; 0; -1; -3\right\};$

$0 \leqq x; \quad x \in P.$

7. Lösen von Sachaufgaben, z. B.:
Die Seitenlänge b eines Rechtecks ist bei gleichbleibendem Flächeninhalt A abhängig von der Seitenlänge a.
– Erfassen Sie die Abhängigkeit in einer Gleichung!
– Stellen Sie die Abhängigkeit in einem a,b-Koordinatensystem graphisch dar!
Berechnen Sie dazu einige geordnete Paare $[a; b]$!

$A = 24\ \text{cm}^2; \quad 0{,}5\ \text{cm} \leqq a \leqq 8{,}0\ \text{cm}$

Höhere Anforderungen stellen Aufgaben der folgenden Art:

1. Welche Bedingungen müssen für die Variablen im folgenden Term gelten, wenn die Basen rational und die Exponenten ganze Zahlen (kleiner als 0) sein sollen?

   $a^{2m-3} \cdot b^m$

2. Das Volumen V eines geraden Kreiszylinders ist bei gleichbleibendem Durchmesser abhängig von der Länge der Höhe h. Berechnen Sie einige geordnete Paare $[h; V]$!

   $d = 6\ \text{cm}; \quad 0 < h \quad \text{und} \quad V < 90\pi \quad (h \text{ in cm}; V \text{ in cm}^3)$

4. Quadratische Funktionen und quadratische Gleichungen

4.0. Vorbemerkungen

Mit dem Stoffgebiet 4. „Quadratische Funktionen und quadratische Gleichungen“ wird die Behandlung ausgewählter Funktionen fortgesetzt, und zwar wird – im Anschluß an die im Rahmen des Stoffgebiets 3. „Potenzen und Potenzfunktionen“ eingeführten Potenzfunktionen – *eine weitere spezielle Funktionsklasse* untersucht (Stoffeinheit 4.1. „Quadratische Funktionen“). Ebenso wird mit diesem Stoffgebiet das Entwickeln der Fähigkeiten der Schüler im Lösen von Gleichungen und Ungleichungen weitergeführt, im besonderen durch das *Arbeiten mit quadratischen Gleichungen* und einen Ausblick auf Gleichungen höheren Grades und auf quadratische Ungleichungen.
Die Behandlung quadratischer Funktionen und quadratischer Gleichungen hat im Unterricht in Klasse 9 langjährige Traditionen. Im Lehrplan 1970 jedoch ist dieses Stoffgebiet nach den folgenden neuen Aspekten konzipiert.

1. Das Stoffgebiet nimmt gegenüber den früheren Lehrplänen *eine veränderte Stellung* im Lehrgang der Klasse 9 ein.
2. Daraus ergeben sich *Veränderungen im Inhalt* des Unterrichtsgegenstandes.
3. Aus 1. und 2. folgen notwendigerweise *Veränderungen in der Behandlungsweise* des Unterrichtsstoffs; vgl. auch die Einordnung des Stoffgebiets in den Übersichten zu den Leitlinien auf Uh 12ff und Uh 20ff.

Eine wesentliche Aufgabe des Unterrichts im Hinblick auf die **mathematische Grundlagenbildung** besteht darin, die Schüler mit den neu eingeführten Begriffen und Methoden vertraut zu machen, die Einsicht in die Zusammenhänge zwischen den Nullstellen einer Funktion und den Lösungen der entsprechenden Gleichung zu vertiefen und sichere Fertigkeiten in der Anwendung von Lösungskalkülen für quadratische Gleichungen zu entwickeln; vgl. Lp 33.
In diesem Stoffgebiet werden Vorleistungen aus dem Unterricht über die lineare Funktion – die Schüler kennen z. B. $f(x) = mx$ und $f(x) = mx + b$ –, über den Zusammenhang zwischen linearer Funktion und linearer Gleichung mit einer Variablen und über die Potenzfunktionen aufgegriffen und bei der Erarbeitung des neuen Stoffes genutzt.
Die Stoffeinheit 4.1. „Quadratische Funktionen“ nimmt vor allem auf die *inhaltlichen Leitlinien* „Mengen“ und „Abbildungen“ Bezug, die Stoffeinheit 4.2. „Quadratische Gleichungen“ auf die inhaltlichen Leitlinien „Mengen“ und „Gleichungen und Ungleichungen“; vgl. Uh 14 bis 17. Ebenso bestehen enge Verbindungen zu den *Leitlinien der mathematischen Methode* „Verfahren zur Problemlösung“ und „Hilfsmittel mathematischen Arbeitens“ (Rechentechnik und graphisches Arbeiten), in gewissem Umfang auch zur Leitlinie „Definieren“; vgl. Uh 22f.

Im Hinblick auf die **ideologische Bildung und Erziehung** dominiert bei der Behandlung der quadratischen Funktionen und Gleichungen der Beitrag, der sich aus dem *sachlichen Inhalt der Anwendungsaufgaben aus der Praxis der sozialistischen Gesellschaft* ergibt; vgl. Uh 144ff. Hinzu kommt, daß mit dem Hinweis auf den Bereich der komplexen Zahlen erneut die Frage nach dem *Verhältnis von Mathematik und objektiver Realität* gestellt werden kann. Die Information über weitere Typen von Gleichungen und Ungleichungen gibt Ansatzpunkte für Erörterungen über Aufgabe und Entwicklung der mathematischen Wissenschaft und über die Begrenztheit des mathematischen Schulstoffs im Vergleich mit dem Inhalt der mathematischen Wissenschaft.

Für die **methodische Gestaltung** des Unterrichts im Rahmen dieses Stoffgebietes ist bestimmend, daß sich die Schüler zunehmend *selbständig* mit dem Gegenstand und den Arbeitsweisen der Mathematik auseinandersetzen müssen. Spezielle Akzente sind dabei durch das Prinzip der *Fallunterscheidungen* bei verschiedenartigen Untersuchungen sowie durch die *Verbindung von arithmetischer und geometrischer Betrachtung* (Funktion – Wertetabelle – Graph) gesetzt. In dieser Hinsicht schließt der Unterricht unmittelbar an die Behandlung der Potenzfunktionen (Stoffeinheit 3.2.) an und führt die Untersuchungen der Graphen bis zu dem Fall $g(x) = f(x + d) + e$ – im Vergleich mit $f(x)$ – weiter, vgl. Uh 133ff.
Unter solchen Aspekten ist auch das Vorgehen zu betrachten, wie die *allgemeine Lösungsformel für quadratische Gleichungen* gefunden wird. Die Vorarbeiten dafür beginnen bereits in der Stoffeinheit 4.1. bei der Untersuchung der Existenz von Nullstellen. Mit Hilfe weniger Schritte kann die allgemeine Lösungsformel für quadratische Gleichungen gefunden werden. Die Schüler sollten in wiederholenden Übungen das Herleiten dieser Formel weitgehend selbständig nachvollziehen können.

Eine Schwierigkeit besteht allerdings in der etwas komplizierten Darstellung der einander äquivalenten Gleichungen

$$x^2 + px + q = 0;$$

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p^2}{4} - q\right) = 0;$$

$$\left(x + \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)\left(x + \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right) = 0.$$

Bei einem solchen Vorgehen stehen die einzelnen Lösungsmöglichkeiten für $x^2 + q = 0$, $x^2 + px = 0$ und $x^2 + px + q = 0$ nicht mehr isoliert nebeneinander. In diesem Zusammenhang ist es wichtig zu zeigen, daß die allgemeine Lösungsformel die zu erörternden Spezialfälle erfaßt.

Die Schüler sind mit *allgemeineren mathematischen Aspekten* (Funktion – Nullstelle – Gleichung; Lösungskalkül für quadratische Gleichungen) bei der Behandlung des Stoffes vertraut zu machen. Sie müssen sich jedoch in ebenso starkem Maße *sichere Fertigkeiten* im Anwenden der Lösungsformel, im Rechnen und im graphischen Arbeiten erwerben. In dieser Hinsicht wird die methodische Linie, die für die Stoffgebiete 2. „Ungleichungen und Gleichungssysteme“ und 3. „Potenzen und Potenzfunktionen“ gilt, weiter verfolgt. Das Aufstellen von Wertetabellen für Funktionen und das Lösen von Gleichungen bieten reichhaltige Möglichkeiten für das Rechnen mit Hilfe des logarithmischen Rechenstabs und für die Benutzung des Tafelwerkes.
Auch bei der Behandlung dieses Stoffgebiets, speziell der Stoffeinheit 4.2. „Quadratische Gleichungen“, empfiehlt es sich, für die Arbeit an Sachaufgaben aus der gesellschaftlichen Praxis eine besondere Unterrichtseinheit vorzusehen (Unterrichtseinheit 4.2.5.). Für das Lösen von Sachaufgaben in dieser Unterrichtseinheit gelten im Prinzip die Hinweise, die in den Ausführungen zum Stoffgebiet 2. „Ungleichungen und Gleichungssysteme“ enthalten sind; vgl. Uh 86. Einige besondere Aspekte werden in den Ausführungen zur Unterrichtseinheit 4.2.5. kenntlich gemacht.

Übersicht zum Stoffgebiet 4. „Quadratische Funktionen und quadratische Gleichungen“ (30 Stunden – 17 Lerneinheiten)

Unterrichtseinheit	Std.	Seiten Lb	Seiten Uh	Wiederholung	Einführung	Festigung
4.1.1. Einführung des Begriffs „quadratische Funktion“; Untersuchung von $y = ax^2 + c$ (LE 1 und 2)	2	104	132	Eigenschaften der Potenzfunktionen – besonders der geraden Funktionen Stauchung, Streckung Graphen linearer Funktionen Bedeutung von m und n bei $y = mx + n$	Begriff „quadratische Funktion“ Fallunterscheidungen bei quadratischen Funktionen Untersuchungen zu $y = ax^2 + c$	Darstellen der Funktion $y = ax^2 + c$ im Koordinatensystem Deuten von a und c Aussagen über a und c aus dem Graph der Funktion Fallunterscheidungen Ermitteln von Funktionswerten Berechnen von a bzw. c mit Hilfe vorgegebener Zahlenpaare
4.1.2. Untersuchung von $y=(x+d)^2+e$ als Voraussetzung für $y=x^2+px+q$ (LE 3 bis 5)	3	106	133	Nullstellen linearer Funktionen	Untersuchungen zu $y = (x + d)^2 + e$ durch Rückführen auf $y = (x + d)^2$ Scheitelpunktskoordinaten der Parabel Nullstellen	Graphische Darstellung der Funktionen über das Ermitteln der Scheitelpunktskoordinaten der Parabel Ermitteln der Funktionsgleichung aus der graphischen Darstellung bzw. vorgegebenen Scheitelpunktskoordinaten der Parabel
4.1.3. Die Normalform der quadratischen Funktion; die Diskriminante (LE 6 und 7)	3	111	135	Quadratische Ergänzung	Normalform der quadratischen Funktion Diskriminante Ermitteln der Normalform aus vorgegebenen Scheitelpunktskoordinaten der Parabel	Umformungen Begriff „Diskriminante“ Diskriminantenuntersuchungen

Unterrichtseinheit	Std.	Seiten Lb	Uh	Wiederholung	Einführung	Festigung
4.1.4. Darstellung von Funktionen der Form $y = ax^2 + bx + c$; Beispiele für die Anwendung; Zusammenfassung (LE 8 und 9)	2	113	137	Graphen von $y = x^2$ und $y = ax^2$	$y = ax^2 + bx + c$ Zurückführen auf $y = a(x^2 + px + q)$ Graphen der Funktionen Anwendungsbeispiele Zusammenfassung	Einfluß von a, b und c auf die Graphen der Funktionen
4.2.1. Begriff „quadratische Gleichung" (LE 10)	1	116	139	Umformen von Summen in Produkte Produkte, die gleich Null sind Quadratische Ergänzung Nullstellen	Begriff „quadratische Gleichung" Motivieren durch Berechnen von Nullstellen Äquivalenz zwischen allgemeiner Form und Normalform Zerlegen in Linearfaktoren Zielstellung	Bedingungen, unter denen ein Produkt gleich Null ist Zerlegen in Linearfaktoren
4.2.2. Untersuchung der Gleichungen $x^2 + q = 0$ und $x^2 + px = 0$ (LE 11 und 12)	3	118	140	Tafel der Quadrate Graphische Darstellung der entsprechenden quadratischen Funktionen	$x^2 + q = 0$ mit Fallunterscheidungen Lösen von $x^2 + px = 0$ Übungen	Fallunterscheidungen für q Zerlegen in Linearfaktoren

Unterrichtseinheit	Std.	Seiten Lb	Uh	Wiederholung	Einführung	Festigung
4.2.3. Die Gleichung $x^2+px+q=0$; ihre allgemeine Lösungsformel (LE 13 und 14)	4	121	142	Diskriminante Bedingungen für die Existenz von Nullstellen	Allgemeine Lösungsformel Diskriminante und deren Bedeutung Spezielle Lösungen als Sonderfälle	Umformen in die Normalform
4.2.4. Beispiele für das Lösen quadratischer Gleichungen; Ausblick (LE 15 und 16)	3	124	143		Beispiele für das Lösen quadratischer Gleichungen Einbeziehen von Variablen als Koeffizienten Fallunterscheidungen	Fallunterscheidungen mit der Diskriminante
4.2.5. Lösen von Sachaufgaben (LE 17)	4	127	144		Lösen von Sachaufgaben, die auf quadratische Gleichungen führen	Lösungsdiskussionen
4.2.6. Zusammenfassung	3		147	Gesamtstoff aus dem Stoffgebiet 4.		Gesamtstoff aus dem Stoffgebiet 4.
4.2.7. Klassenarbeit	2		147			

4.1. Quadratische Funktionen

(LE 1 bis 9; 12 Std.[1])

4.1.1. Einführung des Begriffs „quadratische Funktion"; Untersuchung von $y = ax^2 + c$ (LE 1 und 2; 2 Std.)

Die Unterrichtseinheit 4.1.1. umfaßt zwei Stunden. Zu Beginn der *1. Stunde* sollte die Behandlung der quadratischen Funktionen von mathematischen Sachverhalten und von den Erfordernissen der technischen und naturwissenschaftlichen Praxis her motiviert werden; vgl. Lb 104.
Die Schüler suchen anschließend selbständig weitere Beispiele auf. Die Auswertung ermöglicht eine erste Aussage darüber, in welchem Maße die Schüler die Zielstellung dieser Unterrichtseinheit erfaßt haben.
Lp 33 fordert, von der allgemeinen Form der Gleichung einer quadratischen Funktion (einer ganzen rationalen Funktion zweiten Grades)

$$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad (a, b, c \in P;\ a \neq 0)$$

auszugehen und anschließend Fallunterscheidungen bezüglich der Koeffizienten a, b, c durchzuführen; vgl. Lb 104f.
Auf diese Art ist es möglich, die bereits im Stoffgebiet 3. „Potenzen und Potenzfunktionen" behandelten Fälle ($y = ax^2$ mit $a \neq 0$ und $y = x^2 + c$) auszusondern und den in der Tabelle auf Lb 105 mit (4) bezeichneten Fall herauszugreifen, ihn als besonders bedeutsam hervorzuheben und als neu zu bearbeitendes mathematisches Problem zu kennzeichnen.
Bei den Fällen (3) und (5) auf Lb 105 erkennen die Schüler leicht, daß sie sich auf die Fälle (1) und (2) bzw. auf den Fall (4) zurückführen lassen.

In der *2. Stunde* wird der Graph von $f(x) = x^2$ als „Normalparabel" gekennzeichnet. Die Wiederholung der Eigenschaften der Funktionen $f(x) = ax^2$ $(a \neq 0)$ und $f(x) = x^2 + c$ kann man durch das Bearbeiten von Lb 106, Beispiel D 1 und Auftrag D 3, unterstützen.
Diese Arbeiten münden in eine Untersuchung und Darstellung von Funktionen des Typs $f(x) = ax^2 + c$. Entsprechende Übungen festigen die bisher gewonnenen Erkenntnisse.

1. Gegeben sei die Funktion $f(x) = -3x^2 + 1$ mit $-4 \leqq x \leqq 5$.
   a) *Geben Sie den Wertebereich an!*
   b) *Machen Sie Aussagen über den Graph der Funktion (gestaucht oder gestreckt gegenüber der Normalparabel, Schnittpunkt mit der y-Achse, usw.)!*
   c) *Skizzieren Sie den Graph der Funktion!*

Wichtig ist jetzt auch die Umkehrung der Problemstellung.

2. Die im Bild 133/1 vorgegebene Darstellung sei der Graph einer Funktion mit der Gleichung $f(x) = ax^2 + c$.
   Machen Sie an Hand des Graphen Aussagen über die Koeffizienten a und c!

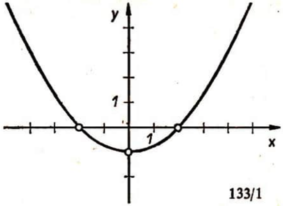
Die Zeit, die noch zur Verfügung steht, wird zu Übungen im Ermitteln von Funktionswerten genutzt. Diese Operation spielt in der nächsten Unterrichtseinheit eine

[1] Davon 2 Std. für die unter 4.2.7. genannte Klassenarbeit zum Stoffgebiet 4.

gewisse Rolle. Z.B. können die Schüler für

$$f(x) = 0{,}5x^2 + 2$$

die Funktionswerte $f(0)$, $f(-2)$ usw. ermitteln.



133/1

In dieser Unterrichtszeit ist zu beachten:

- Eine wohldurchdachte und gut vorbereitete Motivierung unter den dargelegten Aspekten hat wesentlichen Anteil an der weltanschaulichen Bildung und Erziehung der Schüler und nicht zu unterschätzende Bedeutung für die Stellung der Schüler zu diesen Problemen.
- Alle betrachteten Einzelfälle sind als Sonderfälle von $f(x) = ax^2 + bx + c$ mit bestimmten Werten für a, b und c aufzufassen.
- Die beim Behandeln des Stoffgebietes 3.2. „Potenzfunktionen" erworbenen Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten sind zu festigen und zu nutzen.
- Fallunterscheidungen haben für die mathematische Bildung der Schüler große Bedeutung. Bei der Ausführung sollen die Schüler weitgehend selbständig arbeiten.
- Die gewonnenen Erkenntnisse über die Bedeutung von a bei $f(x) = ax^2$ und von c bei $f(x) = x^2 + c$ werden zur Darstellung von $f(x) = ax^2 + c$ genutzt.

4.1.2. Untersuchung von $y = (x + d)^2 + e$ als Voraussetzung für $y = x^2 + px + q$ (LE 3 bis 5; 3 Std.)

Es wäre ungünstig, die Darstellungsformen quadratischer Funktionen, z. B. $f(x) = x^2 + e$, $f(x) = (x + d)^2$, $f(x) = (x + d)^2 + e$, zu sehr zu typisieren und nebeneinander in gleicher Weise zu behandeln. Die Schüler sollen die *Spezialfälle in den allgemeinen Fall richtig einordnen* und rationell mit diesen Funktionen arbeiten können.

Zu Beginn der *1. Stunde* wird den Schülern eine Aufgabe zu selbständiger Lösung gestellt, z. B. Lb 108, Auftrag D 8. Nachdem die Graphen der betreffenden Funktionen gezeichnet wurden, äußern die Schüler Vermutungen über die Scheitelpunktskoordinaten der Parabel. Es folgt der Beweis; vgl. Lb 108.
An einem weiteren Beispiel werden weitere Eigenschaften der Funktionen und ihrer Graphen (Monotonie, Lage der Achsen, usw.) untersucht.

Es schließen sich folgende Übungen an.
- Gleichung der Funktion gegeben, Scheitelpunktskoordinaten der Parabel gesucht
- Scheitelpunktskoordinaten der Parabel gegeben, Gleichung der Funktion gesucht

Die Beispiele und Übungen führen zu einer Aussage über die Lage des Scheitelpunktes der Parabeln $y = (x + d)^2 + e$. Dabei ist zu erklären: e entspricht c bei $f(x) = x^2 + c$. Wurde zuvor gezeigt, daß der kleinste Funktionswert von $f(x) = (x + d)^2$ die Zahl 0 ist, so gilt jetzt entsprechend bei $f(x) = (x + d)^2 + e$ die Aussage: $f(-d) = e$ ist der kleinste Funktionswert von f.

Zu Beginn der *2. Stunde* erfolgt eine wiederholende Zusammenfassung, etwa durch eine Auswertung der Hausaufgaben. In einer Übung zeichnen die Schüler unter Ermitteln der Scheitelpunktskoordinaten und unter Verwenden der Schablone der Normalparabel die Graphen ausgewählter Vertreter folgender Klassen von Funktionen: $f(x) = x^2 + e$, $f(x) = (x + d)^2$ und $f(x) = (x + d)^2 + e$.

Es schließen sich formale Übungen in der oben dargestellten Art an. Sie haben das Ziel, die erworbenen Kenntnisse zu festigen. Dabei sollten auch Variable als Koeffizienten und als Argumente auftreten.

Beispiel:

	Gleichung	Scheitelpunktskoordinaten der Parabel
1.	$f(x) = x^2 - 2$	
2.	$f(x) = (x - 5b)^2$	
3.		$(+3; 0)$
4.		$(0; -2c)$ $c > 0$
5.	$f(x) = (x - 3)^2 + 2$	
6.		$(+4; -7)$
7.	$f(x) = (x - m)^2 + n$	

Mit Hilfe solcher Aufgaben wäre auch eine erste Kontrolle darüber denkbar, in welchem Maße alle Schüler die einführenden Betrachtungen zu wesentlichen Eigenschaften der quadratischen Funktionen verstanden haben.

Das Lösen weiterer Aufgaben der folgenden Art hängt davon ab, ob noch genügend Zeit zur Verfügung steht.

- Aufstellen einer Wertetafel einer quadratischen Funktion unter Beachtung des vorgegebenen Definitionsbereiches
- Graphische Darstellung einiger Funktionen
- Berechnen von Funktionswerten

Nach einer wiederholenden Erörterung der Nullstellen linearer Funktionen ergibt sich die Frage nach den Nullstellen quadratischer Funktionen.
An ein oder zwei ausgewählten Beispielen werden die Nullstellen quadratischer Funktionen erst geometrisch ermittelt und dann arithmetisch überprüft. Die Schüler dürfen auf keinen Fall die Nullstellen der Funktionen mit den Schnittpunkten der entsprechenden Graphen mit der Abszissenachse identifizieren.
Weitere Übungen befähigen die Schüler zu einer Aussage über den Zusammenhang zwischen der Lage des Scheitelpunktes des Graphen und der Existenz von Nullstellen der Funktion.

Die *3. Stunde* dient abschließenden Untersuchungen, vor allen Dingen aber der Übung, Festigung und Wiederholung. Dabei sollte folgendes besonders berücksichtigt werden.

- Darstellen der Graphen mit Hilfe der Schablone nach Ermitteln der Scheitelpunktskoordinaten
- Untersuchungen und Aussagen über Wertebereich, Monotonie u. ä.
- Ermitteln der Gleichung aus vorgegebenen Graphen von Funktionen (Tafelbild, Arbeitsblätter)
- Formale Übungen ohne graphische Darstellung unter Verwenden von Variablen für die Koeffizienten
- Fallunterscheidungen über die Existenz von Nullstellen

Insgesamt sollten in dieser Unterrichtseinheit folgende *Schwerpunkte* beachtet werden.

- Nachweis der Kongruenz der Graphen von $f(x) = x^2$, $f(x) = (x + d)^2$, $f(x) = (x + d)^2 + e$

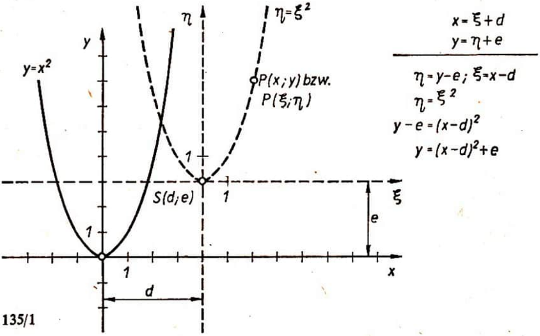
  Die Zusammenhänge könnte man durch folgende Darstellung veranschaulichen.

$$\begin{array}{lllll} y = f(x) = x^2 & S(0;\,0) & \xrightarrow{\text{Nachweis}} & y = f(x) = (x + d)^2 & S(-d;\,0) \\ \quad\downarrow & & & \quad\downarrow & \\ y = f(x) = x^2 + e & S(0;\,e) & \longrightarrow & y = f(x) = (x + d)^2 + e & S(-d;\,e) \end{array}$$

- Die Schüler müssen aus der Gleichung einer Funktion ohne Schwierigkeiten die Koordinaten des Scheitelpunkts der Parabel ermitteln können und umgekehrt.
- Sicherer und exakter Gebrauch der Schablone
- Die Bedeutung des absoluten Gliedes (e) für die Existenz von Nullstellen
- Die Fälle $f(x) = x^2 + e$ und $f(x) = (x + d)^2$ sind als Sonderfälle von $f(x) = (x + d)^2 + e$ aufzufassen.

In dieser Unterrichtseinheit empfiehlt sich das Verwenden von Arbeitsblättern. Wenn jedesmal die Angabe der Daten durch ein Tafelbild während der Stunde erfolgen müßte, dürfte die vorgegebene Unterrichtszeit kaum ausreichen. Solche Blätter können leicht selbst hergestellt werden; vgl. Anregungen auf Uh 149f.

Ein anderer, vielleicht eleganterer, aber auch anspruchsvollerer Weg, der den Zusammenhang zwischen der Normalparabel (Graph von $f(x) = x^2$) und einem Graphen von $f(x) = (x + d)^2 + e$ erkennen läßt, ist mit Hilfe einer Koordinatentransformation möglich. Man erhält dabei sofort den allgemeinen Fall. Alle anderen Fälle ergeben sich daraus anschaulich als Sonderfälle.
Dieser Weg, der vom Lehrplan nicht gefordert wird, sei hier nur durch eine Skizze prinzipiell erläutert; vgl. Bild 135/1.



135/1

4.1.3. Die Normalform der quadratischen Funktionen; die Diskriminante (LE 6 und 7; 3 Std.)

Es empfiehlt sich, die *1. Stunde* mit frontalen Übungen im Aufsuchen der quadratischen Ergänzung zu beginnen. Man kann die nachfolgenden Überlegungen zunächst mit der für die Schüler nicht ohne weiteres lösbaren Aufgabe motivieren, die Scheitelpunktskoordinaten der Parabel $f(x) = x^2 - 6x + 7$ anzugeben. Die Schüler er-

halten jetzt den Auftrag, diese Gleichung mit Hilfe der quadratischen Ergänzung umzuformen [in $f(x) = (x - 3)^2 - 2$], um daraus die Scheitelpunktskoordinaten unmittelbar ablesen zu können.
Um diesen relativ umständlichen Weg abzukürzen, erarbeitet man mit den Schülern die auf Lb 111 dargestellten Schritte bis zum Anwenden der Bildungsvorschrift $S\left(-\frac{p}{2}; -D\right)$ für die Scheitelpunktskoordinaten einer Parabel im Beispiel D 6.
Die wichtigsten Überlegungen und Erkenntnisse werden zusammengefaßt. Es wird der Begriff „Normalform einer quadratischen Funktion" eingeführt.

Es können sich Übungen folgenden Inhalts anschließen.

- Umformen von $f(x) = (x + d)^2 + e$ in $f(x) = x^2 + px + q$ und umgekehrt
- Vorgeben der Scheitelpunktskoordinaten der Parabel und daraus Ermitteln von p und q in der Gleichung $f(x) = x^2 + px + q$
- Überprüfen, ob ein gegebenes Zahlenpaar einer gegebenen Funktion angehört

Bei den genannten Umformungen sollte darauf geachtet werden, daß die Schüler ihr Wissen und Können zunächst an zahlenmäßig einfachen Beispielen festigen. Ein höheres Anforderungsniveau stellen Beispiele, bei denen die Koeffizienten Variable sind; über solche Beispiele kann man dann zu

$$f(x) = x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p^2}{4} - q\right)$$

gelangen. Das Zustandekommen dieser Darstellung von $f(x)$ sollte eingehend erklärt werden.
In dieser Unterrichtseinheit lernen die Schüler die Diskriminante in der Form $D = -e = \frac{p^2}{4} - q$ kennen.

In der *2. Stunde* gilt es zunächst, die bisherigen Kenntnisse zu festigen. Mit Hilfe eines geeigneten Beispiels (z. B. Lb 112, Beispiel D 7) wird die Einsicht in den Zusammenhang zwischen D, e und der Existenz von Nullstellen vertieft und erweitert (Benutzen der Tabelle Lb 113).
Für die Festigung der erkannten Zusammenhänge sind Übungen folgender Art besonders geeignet.

Für welche reellen Zahlen q hat die Funktion $f(x) = x^2 - 2x + q$

a) *zwei verschiedene Nullstellen;*
b) *eine Nullstelle;*
c) *keine Nullstellen?*

In der *3. Stunde* wird durch vielfältige Übungen der bisher behandelte Stoff zusammengefaßt und geordnet. Es geht dabei um das Vertiefen und Systematisieren der Begriffe „quadratische Funktion", „Parabel", „Normalparabel", „Scheitelpunkt der Parabel", „Scheitelpunktskoordinaten", „Nullstellen quadratischer Funktionen", „Normalform quadratischer Funktionen", „Diskriminante".

Folgende Fertigkeiten müssen weiterentwickelt und gefestigt werden.

- Skizzieren des Graphen einer Funktion $f(x) = ax^2 + c$ aus den Koeffizienten a und c

- Zeichnen des Graphen einer Funktion $f(x) = x^2 + px + q$ über das Umformen in $f(x) = (x + d)^2 + e$; Angeben der Scheitelpunktskoordinaten; Verwenden der Schablone
- Ermitteln der Koeffizienten p und q aus bekannten Scheitelpunktskoordinaten einer Parabel mit der Gleichung $y = x^2 + px + q$
- Sinnvolles Nutzen der Diskriminante zur Entscheidung über die Existenz von Nullstellen

Den Abschluß kann eine kurze schriftliche Leistungskontrolle bilden.

4.1.4. Darstellung von Funktionen der Form $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 1)$; Beispiele für die Anwendung; Zusammenfassung (LE 8 und 9; 2 Std.)

Den Anfang der *1. Stunde* kann eine Zusammenfassung der wichtigsten Eigenschaften der Funktionen $y = ax^2$ bilden, wobei Fallunterscheidungen bezüglich a im Vordergrund stehen.
Nach dem Durcharbeiten von Lb 113f, auf das sich die Schüler evtl. in häuslicher Arbeit mündlich vorbereiten können, beantworten sie z. B. folgende Fragen bzw. lösen folgende Aufgaben.

1. *Welcher konstante Faktor könnte bei* $y = -x^2 - 1$ *auf der rechten Seite der Gleichung ausgeklammert werden?*
2. *Welche Aussagen kann man über den Verlauf des Graphen der in 1. genannten Funktion machen?*
   a) *Scheitelpunktskoordinaten*
   b) *Öffnung der Parabel (nach welcher Seite)*
   c) *Stauchung oder Streckung gegenüber der Normalparabel*
3. *Klammern Sie in* $y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$ *auf der rechten Seite der Gleichung* 0,25 *aus!*
   Zeichnen Sie den Graph der Funktion und verfahren Sie dabei wie auf Lb 114, Bild D 8!

Im Anschluß daran sollte eine Zusammenfassung und Systematisierung der Funktionen $f(x) = ax^2$ für die Fälle $a > 1$, $0 < a < 1$, $-1 < a < 0$, $a < -1$, sowie $a = -1$ und $a = 1$ erfolgen.
Beim Zeichnen der Graphen weiterer Funktionen des Typs $y = ax^2 + bx + c$ sollten relativ einfache Koeffizienten vorgegeben werden.

Die in der 1. Stunde dieser Unterrichtseinheit erworbenen Kenntnisse und Fertigkeiten ermöglichen es, in der *2. Stunde* quadratische Funktionen sinnvoll anzuwenden und praxisnahe Aufgaben zu lösen.
Bei der mathematischen Auswertung physikalischer oder geometrischer Gesetzmäßigkeiten steht die graphische Darstellung und deren Deutung (Diskussion) im Mittelpunkt der Untersuchungen und Übungen. Dieses Anliegen soll an einem Beispiel aus der Geometrie verdeutlicht werden.
Man kann z. B. den Flächeninhalt A eines rechtwinkligen Dreiecks ABC, dessen Katheten a und b sich um 1 Längeneinheit unterscheiden ($a > 1$; $b = a - 1$), mit Hilfe der Gleichung

$$A = f(a) = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{a(a-1)}{2}$$

berechnen.

Es ist wichtig, diese Phase des Vertrautmachens mit dem sachlichen Inhalt der Aufgabe nicht zu unterschätzen; das gilt auch für die meisten Aufgaben des Lehrbuches.

Man erkennt im Beispiel: $A = f(a) = \frac{1}{2} \cdot g(a)$ mit $g(a) = a^2 - a$. Aus der graphischen Darstellung von $g(a)$ wird dann auf die bekannte Weise der Graph von $f(a)$ gewonnen.

Interessant ist dabei, daß sich der Definitionsbereich dieser Funktion, formal gesehen, über den gesamten Bereich der reellen Zahlen erstreckt; es muß nun ermittelt werden, welcher Definitionsbereich vom Sachverhalt her sinnvoll ist.

Weiterhin wird man zu einigen Größen a ($a = 12{,}0$ LE; $a = 4{,}4$ LE; ...) den zugehörigen Funktionswert ermitteln, als Strecke in der graphischen Darstellung abmessen und mit der Berechnung vergleichen lassen.

Wichtig sind somit in diesem Teil der Unterrichtseinheit folgende Überlegungen.

- Erkennen des funktionalen Zusammenhangs bei geometrischen, physikalischen und anderen Formeln (das ist eine Seite, die man beim täglichen Gebrauch dieser Formeln nicht übersehen darf)
- Auseinanderhalten von Konstanten und Variablen
- Graphische Darstellung der Funktionen
- Auswertung und Deutung der Graphen unter Beachtung des Definitionsbereiches der Funktion und u. U. des Grundbereichs der Variablen

Für derartige Untersuchungen eignet sich z. B. auch die Formel für die Anzahl der Diagonalen des konvexen n-Ecks sowie andere im Lehrbuch in großer Auswahl vorhandene Beispiele.

Werden solche Aufgaben als Hausaufgaben gestellt, dann ist besonders bei den Aufgaben mit physikalischem Inhalt eine vorausgehende Erläuterung des Sachverhalts anzuraten.

Den Abschluß sollte eine Zusammenfassung über die quadratischen Funktionen bilden. Die folgende Übersicht kann helfen, zu systematisieren.

$\boldsymbol{y = f(x) = ax^2 + bx + c}$ (allgemeine Form)

a) $a = 1$: $\quad y = x^2 + bx + c = x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p^2}{4} - q\right)$

Existenz von Nullstellen für $D = \frac{p^2}{4} - g \geqq 0$

Scheitelpunktskoordinaten: $\left(-\frac{p}{2}; -D\right)$

b) $b = c = 0$: $\quad y = ax^2$

Nullstellen: $(0; 0)$

Scheitelpunktskoordinaten: $(0; 0)$

c) $b = 0$; $c \neq 0$: $y = ax^2 + c$

Anzahl der Nullstellen $\begin{cases} \text{für } a < 0 \text{ stets 2, wenn } c > 0 \\ \text{für } a > 0 \text{ stets 2, wenn } c < 0 \end{cases}$

Scheitelpunktskoordinaten: $(0; c)$

d) $y = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a \cdot g(x)$; vgl. Fall a)

4.2. Quadratische Gleichungen

(LE 10 bis 17; 18 Std.[1])

4.2.1. Der Begriff „quadratische Gleichung" (LE 10; 1 Std.)

Es ist zu empfehlen, die Unterrichtsstunde wie folgt zu beginnen.

1. Übungen, in denen die Schüler ihre im vorangegangenen Unterricht erworbenen Kenntnisse im Umformen von Summen in Produkte wiederholen und festigen. Dabei wenden sie vor allem das Ausklammern sowie speziell die binomischen Formeln an.

   Beispiele:

   $$2x^2 - 3x = 2x(x - 1{,}5)$$
   $$x^2 - 5 = (x + \sqrt{5})(x - \sqrt{5})$$
   $$x^2 - 8x + 16 = (x - 4)^2$$

   Weitere Beispiele vgl. Lb 117, Auftrag D 18.

2. Wiederholung der Bedingungen, unter denen ein Produkt aus zwei Faktoren Null ist, und des Unterschiedes zwischen „oder" und „entweder ... oder".

   Beispiele:

   $a(b - c) = 0$, wenn $a = 0$ oder $b - c = 0$, d. h. $b = c$

   $(x - 1)(x + 3) = 0$, wenn $x - 1 = 0$, d. h. $x = 1$ oder $x + 3 = 0$, d. h. $x = -3$

3. Wiederholung des Begriffs „Nullstellen einer Funktion", anschließend einige einfache Übungen zum Ermitteln von Nullstellen linearer Funktionen; vgl. Lb 117, Auftrag D 16.

Die unter 1. bis 3. vermerkten Übungen sollten nicht mehr als 20 min in Anspruch nehmen. Sie sollten auch in den täglichen Übungen der folgenden Unterrichtsstunden enthalten sein, damit die Schüler dann die entsprechenden Fertigkeiten beim Lösen quadratischer Gleichungen sicher einsetzen können.
Ausgehend von den unter 3. bearbeiteten Beispielen werden die Schüler aufgefordert, die Nullstellen der Funktion $y = 2x^2 + 4x - 6$ zu ermitteln.
Aus dieser Forderung, die die Schüler zunächst nicht erfüllen können, ergibt sich der Schwerpunkt dieser Unterrichtsstunde; vgl. Lp 33, 35 und Lb 116f.
Analog zum Vorgehen bei der Einführung des Begriffs „quadratische Funktion" in der Unterrichtseinheit 4.1.1. geht man *von der allgemeinen Form der quadratischen Funktion* $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0;\ a, b, c \in P)$ *zur allgemeinen Form der quadratischen Gleichung* $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ *und* mit Hilfe der Division durch a $(a \neq 0)$ *zur Normalform der quadratischen Gleichung* $x^2 + px + q = 0$ $\left(p, q \in P;\ p = \frac{b}{a};\ q = \frac{c}{a}\right)$ über; vgl. Lb 116.
Fallunterscheidungen (hier ein Beispiel für eine vollständige Fallunterscheidung) bezüglich p und q *führen* dann *zum Herausstellen der Spezialfälle quadratischer Gleichungen*; vgl. Lp 35 und Lb 117.

[1] Ohne Zeit für die unter 4.2.7. genannte Klassenarbeit.

Ziel der Unterrichtsstunde ist es also, daß die Schüler zur Problematik des Lösens quadratischer Gleichungen folgendes erfassen.

- Die Beziehungen zwischen den Nullstellen quadratischer Funktionen und den Lösungen der entsprechenden quadratischen Gleichungen
- Die Analogie des Untersuchens der quadratischen Gleichungen zum Vorgehen beim Untersuchen der quadratischen Funktionen (von der allgemeinen Form zu den Spezialfällen mit Hilfe von Fallunterscheidungen)
- Die Notwendigkeit und Möglichkeit, im vorangegangenen Unterricht erworbene Kenntnisse und Fertigkeiten (z. B. Ermitteln von Nullstellen von Funktionen, Regeln für das Umformen von Gleichungen zu äquivalenten Gleichungen, Zerlegen von Summen in Faktoren) beim Erarbeiten des neuen Unterrichtsstoffs anzuwenden

Die Unterrichtsstunde sollte mit einem Ausblick auf die in den folgenden Unterrichtsstunden zu behandelnden Spezialfälle schließen. Der Lehrer sollte damit auch Hinweise auf das Bereitstellen der benötigten Zeichenhilfsmittel (Geräte, Papiere und Schablonen) verbinden. Evtl. kann als „technische Hausaufgabe" das Vorzeichnen von Koordinatensystemen auf Millimeterpapier usw. erteilt werden.

4.2.2. Untersuchung der Gleichungen $x^2 + q = 0$ und $x^2 + px = 0$ (LE 11 und 12; 3 Std.)

Die *1. Stunde* dieser Unterrichtseinheit sollte mit einer Wiederholung beginnen.

Bedingung für $a \cdot b = 0$; Zerlegung $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$;

vgl. Unterrichtseinheit 4.2.1.
Anschließend könnte man von der Funktion $y = x^2 - 2{,}25$ als Repräsentant der Funktionen $y = x^2 + c$ ausgehen. Als Ziel nennt der Lehrer das Untersuchen von Gleichungen des Typs $x^2 + q = 0$.
Der Graph der Funktion $y = x^2 - 2{,}25$ wird in ein Koordinatensystem auf Millimeterpapier gezeichnet, die Nullstellen dieser Funktion werden abgelesen. Der näherungsweisen zeichnerischen Lösung folgt die rechnerische Lösung; sie führt zu der quadratischen Gleichung (Gleichung zweiten Grades) $x^2 - 2{,}25 = 0$.
Da die entsprechende quadratische Funktion zwei voneinander verschiedene Nullstellen hat, sind zwei voneinander verschiedene Lösungen zu erwarten.
Die Produktdarstellung führt zu den Ergebnissen

$$\begin{aligned}(x + 1{,}5)(x - 1{,}5) = 0, \quad &\text{wenn} \quad x + 1{,}5 = 0, \quad \text{d. h.} \quad x = -1{,}5 \quad \text{oder} \\ &\text{wenn} \quad x - 1{,}5 = 0, \quad \text{d. h.} \quad x = 1{,}5.\end{aligned}$$

Eine Übung mit weiteren entsprechenden Beispielen sollte sich anschließen. Zunächst sollten die Koeffizienten so ausgewählt werden, daß auch schwächere Schüler die Aufgabe leicht überblicken können.
Später werden Aufgaben gestellt, die zunächst auf die Form $x^2 + q = 0$ gebracht werden müssen.
Bewußt gibt der Lehrer dabei auch Gleichungen der Form $x^2 + q = 0$ mit $q > 0$ vor. Das ist der Anlaß, auf die Notwendigkeit einer weiteren Zahlenbereichserweiterung hinzuweisen, da solche Gleichungen keine reellen Lösungen haben; vgl. Lp 36.
Schließlich erfolgen die Verallgemeinerung (vgl. Lb 118, Satz D 2) und der Beweis des betreffenden Satzes.

In den täglichen Übungen zur *2. Stunde* sollten Aufgaben als Beispiele für

$$x^2 + ax = x(x + a) \quad \text{und} \quad x(x + a) = 0$$

enthalten sein; vgl. Unterrichtseinheit 4.2.1.
Anschließend geht man von der Funktion $y = x^2 - 3x$ aus. Es ergeben sich die Nullstellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 3$. Die rechnerische Lösung führt über $x^2 - 3x = 0$ und $x(x - 3) = 0$ zum gleichen Ergebnis.
Nach einigen weiteren Übungen erfolgt die Verallgemeinerung; vgl. Lb 120. Aus $x^2 + px = 0$ ($p \neq 0$) erhält man $x(x + p) = 0$ und daraus

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 + p &= 0 \\ x_2 &= -p \quad (p \neq 0 \text{ nach Voraussetzung}) \end{aligned}$$

ohne Beschränkung der Allgemeinheit.
Beim Lösen derartiger Gleichungen mit Variablen als Koeffizienten sollte man nicht versäumen, auf den senkrechten Wurf nach oben einzugehen. Aus

$$s = f(t) = v_0 t - \frac{g}{2} t^2$$

erhält man für den Ausgangspunkt ($s = 0$) die Gleichungen

$$v_0 t - \frac{g}{2} t^2 = 0;$$

$$t\left(v_0 - \frac{g}{2} t\right) = 0.$$

Die Lösungen heißen $t_1 = 0$ und $t_2 = \frac{2v_0}{g}$.

t_2 ist die Zeit, die der Körper bis zur Rückkehr zum Ausgangspunkt benötigt, also die Summe aus Steigzeit und Fallzeit.

In den täglichen Übungen zur *3. Stunde* sollten gemischte Aufgaben zu den unter den Punkten 1. bis 3. der Unterrichtseinheit 4.2.1. vermerkten Vorübungen erfolgen. Anschließend werden vorwiegend Sachaufgaben gelöst.

Diese Unterrichtseinheit kann mit einer *Leistungskontrolle etwa* folgenden Inhalts abschließen.

1. Lösen quadratischer Gleichungen mit einer Variablen, z. B.:

   a) $x^2 - 1{,}44 = 0$ b) $4x^2 - 1 = 0$ c) $26x^2 - 39x = 0$

   d) $4ax^2 - a^2 = 0$ ($a \neq 0$)

   Zusatzaufgabe zu d):
   Für welche reellen Zahlen a existiert keine Lösung?

2. Lösen einer Sachaufgabe, z. B.:

   Für welches konvexe n-Eck ist die Anzahl der Diagonalen gleich 0?

   Formel: $S = f(n) = \frac{n(n-3)}{2}$ (S Anzahl der Diagonalen; n Anzahl der Ecken)

In diesem Zusammenhang noch ein Wort zu den *Proben*.

Die rechnerische Lösung sollte auch einmal durch eine graphische Darstellung der entsprechenden Funktion überprüft werden. Bei Sachaufgaben ist das Ergebnis außerdem auf seine richtige sachinhaltliche Aussage zu überprüfen. Dort, wo die Probe nur eine formale Forderung bleibt, verliert sie mindestens ihre erzieherische Bedeutung. Diese ist vor allem darin zu sehen, daß die Schüler gewöhnt werden, kein unzureichend überprüftes Arbeitsergebnis aus der Hand zu geben.

4.2.3. Die Gleichung $x^2 + px + q = 0$; ihre allgemeine Lösungsformel (LE 13 und 14; 4 Std.)

An Hand von Lb 121, Beispiel D 18, kann man das Ziel der *1. Stunde, die allgemeine Lösungsformel für quadratische Gleichungen herzuleiten*, angeben.
Die Schüler erhalten den Auftrag, das Beispiel auf einfache Aufgaben wie $x^2 + 4x - 5 = 0$ anzuwenden. Als Hilfe wird noch der Hinweis gegeben, daß man bei derartig einfachen Beispielen die Lösung aber über das Ermitteln der Scheitelpunktkoordinaten der entsprechenden Parabel
$\left[\text{mit Hilfe von } \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p^2}{4} - q\right) = 0\right]$, die graphische Darstellung und das Ablesen der Nullstellen gewinnen kann.
Es folgen jetzt weitere Beispiele, die an der Tafel gerechnet werden. Dabei wird der Schwierigkeitsgrad schrittweise gesteigert.

Beispiele:

$$x^2 - 8x + 10 = 0$$
$$x^2 + 2ax - 3a^2 = 0$$
$$x^2 + px + q = 0$$

Beim letzten Beispiel werden die Schüler aufgefordert, möglichst selbständig zu arbeiten. Die Schüler dürfen auch das Lehrbuch zu Hilfe nehmen. U. U. kann ein Schüler den Lösungsweg an der Tafel entwickeln.
Die Stunde schließt mit dem Formulieren der allgemeinen Lösungsformel, vgl. Lb 123.
Sollte noch Zeit sein, wird der entwickelte Algorithmus auf seine „Funktionstüchtigkeit" hin an einem einfachen Beispiel überprüft.

Die *2. Stunde* dient dem *Festigen der Fertigkeiten beim Arbeiten mit der allgemeinen Lösungsformel.* Dabei sollten anfänglich die Koeffizienten in den Gleichungen so gewählt werden, daß sich ganzzahlige Lösungen ergeben.
Möglichst oft sind Diskriminantenuntersuchungen einzubeziehen.
Bei irrationalen Lösungen sind – in Übereinstimmung mit dem Lehrplan – Rechenstab und Zahlentafel für das Ermitteln von Näherungslösungen zu verwenden. Oft genügt es aber, wenn z. B. $x_1 = -2 + \sqrt{5}$ und $x_2 = -2 - \sqrt{5}$ von den Schülern als Lösung angegeben wird.
Die betreffenden Proben sind gleichzeitig eine gute Wiederholung der binomischen Formeln und frischen Fertigkeiten und Kenntnisse über die Wurzelgesetze auf.
Schrittweise kann nunmehr der Schwierigkeitsgrad der Aufgaben gesteigert werden.
Wichtig ist dabei, daß die Schüler auch quadratische Gleichungen zu lösen haben, die sie erst in die Normalform überführen müssen, z. B. $3x^2 = 4 - \sqrt{3} \cdot x$. Selbstverständlich sollten an Stelle von x auch einmal andere Variable verwendet werden.

In der *3. Stunde* werden die bisher vermittelten Kenntnisse und die Sicherheit im Durchführen der behandelten Operationen *systematisiert und überprüft.*
An Beispielen werden der Graph der entsprechenden Funktion, deren Nullstellen, die Diskriminante und die Lösungen der Gleichungen einander gegenübergestellt.

Beispiele:

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$
$$x^2 - 4x + 4 = 0$$
$$x^2 - 4x + 5 = 0$$

Einen *Schwerpunkt* bilden dabei die *Diskriminantenuntersuchungen.*

$D > 0$: Zwei Nullstellen, zwei Lösungen
$D = 0$: Eine Nullstelle, eine Lösung
$D < 0$: Keine (reellen) Nullstellen, keine (reellen) Lösungen

In einer zweiten Phase muß man zeigen, daß man mit Hilfe der allgemeinen Lösungsformel für $x^2 + px + q = 0$ auch alle Sonderfälle lösen kann.

1. $p = 0; q < 0$: $\quad x^2 + q = 0; \quad x_{1,2} = 0 \pm \sqrt{0 - q}$

$$x_1 = +\sqrt{-q}; \quad x_2 = -\sqrt{-q}$$

2. $p \neq 0; q = 0$; $\quad x^2 + px = 0; \quad x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - 0}$

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \frac{p}{2} = 0$$

$$x_2 = -\frac{p}{2} - \frac{p}{2} = -p$$

In diesem Zusammenhang sollte noch einmal darauf hingewiesen werden, daß die beiden (verschiedenen) Vorzeichen vor der Wurzel eine Vereinbarung in der Darstellung bedeuten.

Den Abschluß in der Behandlung dieser Unterrichtseinheit kann eine schriftliche *Leistungskontrolle* bilden.

Beispiel:

1. Ermitteln Sie zeichnerisch und rechnerisch die Nullstellen der Funktion $y = x^2 - 5x + 4$!
2. Berechnen Sie m! $\quad 6m^2 = 2 - m$
3. Unter welchen Bedingungen für die reellen Zahlen a und b ($a > 0$) gibt es bei $x^2 - 2 \cdot \sqrt{a} \cdot x + b = 0$

   a) zwei verschiedene Lösungen, b) eine Lösung, c) keine (reellen) Lösungen?

4.2.4. Beispiele für das Lösen quadratischer Gleichungen; Ausblick (LE 15, 16; 3 Std.)

In dieser Unterrichtseinheit lösen die Schüler kompliziertere quadratische Gleichungen.

Die Schwierigkeit der Aufgaben richtet sich

a) nach der Wahl der Koeffizienten,
b) nach der Darstellungsform der Gleichung,
c) nach den notwendigen Fallunterscheidungen beim Verwenden von Variablen als Koeffizienten.

Dabei ist zu empfehlen, auch solche Aufgaben zu stellen, die von den Schülern Entscheidungen über die Wahl eines rationellen Lösungswegs verlangen. Es ist z. B. nicht gleichgültig, ob die Schüler diejenigen Zahlen x, die die Gleichung

$$2ax^2 - 5a^2x = 0 \quad (a \neq 0)$$

erfüllen, nach x mit Hilfe der allgemeinen Lösungsformel oder durch Ausklammern ermitteln.

Beispiel für das Ausklammern:

$$2ax(x - 2{,}5a) = 0$$

Es ist durchaus nicht selbstverständlich, daß jede Gleichung, die die Variable x enthält, auch nach x gelöst werden muß. Ebensogut könnte eine Lösung nach einer anderen Variablen erfolgen. Gelegentlich sollten solche Betrachtungen angestellt werden. Das Beispiel $2ax^2 - 5a^2x = 0$ eignet sich dafür: a tritt darin so auf, daß eine quadratische Gleichung zu lösen ist.
Die Gleichung $0{,}1x^2 - 2{,}3x + 0{,}5 = 0$ löst der Schüler vorteilhaft, wenn er die Gleichung vorher mit 10 multipliziert. Solche Überlegungen sind im gewissen Grade wertvoller als die formale Lösung.

An dieser Stelle sollte über den Wurzelsatz des VIETA informiert werden; vgl. Lp 36 und Lb 129f, LE 18. Je nach Möglichkeit kann man hier folgendes erörtern.

1. Im Zusammenhang mit dem Satz auf Lb 130 erfolgt lediglich ein Hinweis auf den Satz von VIETA.
   Die damit gegebene vorteilhafte Durchführung der Probe wird an einem Beispiel gezeigt.
2. Die Gesetzmäßigkeiten $(x_1 + x_2) = -p$ und $x_1 \cdot x_2 = q$ werden hergeleitet und an einigen Beispielen demonstriert
3. Ausblicke auf Gleichungen höheren Grades und Demonstration einiger Beispiele; vgl. Lb 131f, LE 20*.
   Unter der Voraussetzung, daß im Bereich der reellen Zahlen n Lösungen existieren, kann man eine Gleichung n-ten Grades als Produkt von n reellen Linearfaktoren darstellen.
   Hat z. B. eine Gleichung dritten Grades die Lösungen $x_1 = 1$, $x_2 = -1$ und $x_3 = 2$, dann gilt $(x - 1)(x + 1)(x - 2) = 0$. Die oben gegebenen Wurzeln sind Lösungen der Gleichung $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$. Findet man bei einer Gleichung dritten Grades durch Probieren eine Lösung, so kann man diese Gleichung auf eine Gleichung zweiten Grades reduzieren.
4. Eventuell kann hier ein Ausblick auf die Lösung biquadratischer Gleichungen und quadratischer Ungleichungen gegeben werden; vgl. Lb 130f, LE 19*.
5. Historische Bemerkungen, insbesondere zu VIETA und seinen Verdiensten bei der Einführung von mathematischen Symbolen; vgl. Lb 135f.

4.2.5. Lösen von Sachaufgaben (LE 17; 4 Std.)

Beim Lösen von Sachaufgaben kommt es auf die folgenden Schwerpunkte an.

- Darstellen des Sachverhalts in Form einer (quadratischen) Gleichung nach Festlegen der Bedeutung der Variablen
- Aufsuchen eines rationellen Weges für das Lösen der Gleichung
- Überprüfen und Diskutieren der erhaltenen Lösungen am vorgegebenen Sachverhalt

Aufgaben aus der Physik, dem polytechnischen Unterricht, der Geometrie, der sozialistischen Volkswirtschaft und dem Militärwesen sollten eine besondere Rolle spielen. Sie bieten viele Gelegenheiten zur staatsbürgerlichen Erziehung der Schüler.
Zunächst müssen die Schüler lernen, die Gleichung aus einem gegebenen Text herauszulesen. Deshalb ist es anzuraten, formale Textaufgaben von den ersten Übungen an in den Unterricht aufzunehmen. Dazu erscheinen z. B. Aufgaben folgenden Typs geeignet.

- *Das Produkt zweier natürlicher Zahlen, deren Differenz* 2 *beträgt, ist* 483. *Wie heißen die Zahlen?*
  Im Bereich der reellen Zahlen hat die entsprechende Gleichung auch negative Lösungen. Hier kommt es darauf an, daß die Schüler beim Formulieren des Antwortsatzes den vorgegebenen Text richtig erfassen, d. h. den Grundbereich der Variablen beachten.
- *Die Summe aus einer rationalen Zahl und ihrem Reziproken ergibt* $\frac{13}{6}$. *Wie heißt die rationale Zahl?*

Das erzieherische Anliegen dieser Unterrichtseinheit soll an folgenden beiden Beispielen illustriert werden.

Beispiel I:
Zwei technische Einheiten A und B der NVA sollen vom gleichen Bereitstellungsraum aus einen 120 km *entfernten Punkt zur gleichen Zeit erreichen.*
Aus taktischen Gründen, und weil sie gegenüber der anderen Einheit nur eine um durchschnittlich $10\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$ *geringere gleichförmige Marschgeschwindigkeit einzuhalten vermag, startet die Einheit A* 1 h *früher als die schnellere Einheit B.*
Welche Durchschnittsgeschwindigkeit muß die Einheit B unbedingt einhalten, wenn sie den Marschbefehl erfüllen soll?

Es ergibt sich zunächst folgender Ansatz.

Einheit B: $v_1 t_1 = 120 \quad (1)$
Einheit A: $(v_1 - 10)(t_1 + 1) = 120 \quad (2)$

Folgender Lösungsweg mit Hilfe des Einsetzungsverfahrens ist möglich.

Aus (1) ergibt sich: $t_1 = \frac{120}{v_1}$.
In (2) eingesetzt:

$$(v_1 - 10)\left(\frac{120}{v_1} + 1\right) = 120$$
$$(v_1 - 10)\left(\frac{120 + v_1}{v_1}\right) = 120 v_1$$
$$(v_1 - 10)(120 + v_1) = 120 v_1$$
$$120 v_1 - 1200 - 10 v_1 + v_1^2 = 120 v_1$$
$$v_1^2 - 10 v_1 - 1200 = 0$$

Anwenden der allgemeinen Lösungsformel:

$v_{1,1} = 40$
$v_{1,2} = -30$

Das anschließende Überprüfen am vorliegenden Sachverhalt ergibt, daß sich die Einheit B mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 40 km · h^{-1} vorwärts bewegen muß.
Sicherlich lassen sich solche Erörterungen auch dahingehend auswerten, die Jungen auf den Ehrendienst in den bewaffneten Streitkräften unserer Republik rechtzeitig vorzubereiten.
Vor dem Lösen der Aufgaben empfiehlt sich eine Diskussion der möglichen Lösungswege. Das Rechnen selbst kann dann in zwei Gruppen erfolgen und gegebenenfalls als Tafelbild erscheinen.
Wichtig ist weiterhin das korrekte Festlegen der verwendeten Variablen vor Beginn der Arbeit an dieser Aufgabe. Im Beispiel sind v_1 und t_1 die Maßzahlen für die Durchschnittsgeschwindigkeit und die Zeit der schnelleren Einheit B. Wird von der langsameren Einheit A ausgegangen, so ergeben sich etwas andere Lösungswege.

Beispiel 2:

Im Bild 146/1 bedeuten:
A – Trafostation;
$\overline{AB}$ – Stück der Straße;
C – Pumpstation.

146/1

Von A, der bereits vorhandenen Trafostation, soll nach C, der Pumpstation des neuerbauten Rinderkombinats, ein Kabel gelegt werden. Längs der Straße belaufen sich die Kosten für die Ausschachtungsarbeiten auf 8 M *je Meter Straße und durch das Gelände* 10 M *je Meter Trasse.*

1. *Berechnen Sie die Strecke $\overline{AC}$!*
2. *Unter welchen Bedingungen sind die Ausschachtungskosten geringer?*
   a) *Bei Verlegung des Kabels direkt von A nach C*
   b) *Bei Verlegung des Kabels von A über B nach C*

Bei Bezeichnung der Maßzahl der Strecke $\overline{AC}$ mit y erhält man die quadratische Gleichung $y^2 - 16900 = 0$.
Ansatz und Rechnung sind verhältnismäßig einfach. Hier können alle Schüler selbständig zu einer Lösung gelangen und eventuell durch eine maßstäbliche Skizze überprüfen.
Diese Aufgabe kann mindestens für die leistungsstärkeren Schüler erweitert werden. Man kann z. B. folgende Frage stellen:

Bei welcher Entfernung x der Pumpstation von der Straße sind die Ausschachtungskosten längs der Strecke AC gleich denen von A über B nach C?

Es ergibt sich folgender Ansatz:

$$120 \cdot 8 + x \cdot 10 = \sqrt{120^2 + x^2} \cdot 10 \qquad |:10$$
$$12 \cdot 8 + x = \sqrt{120^2 + x^2} \qquad |(\ldots)^2$$
$$12^2 \cdot 8^2 + 2 \cdot 12 \cdot 8x + x^2 = 12^2 \cdot 10^2 + x^2$$
$$2 \cdot 12 \cdot 8x = 12^2(10^2 - 8^2)$$
$$x = \frac{12 \cdot 12 \cdot 36}{2 \cdot 12 \cdot 8}$$
$$x = 27$$

Bei einer Entfernung von 27 m würde sich keine Einsparung ergeben.

Die Schüler erkennen an Aufgaben dieser Art, daß man, um sparsam wirtschaften zu können, vorher genau überlegen und rechnen muß. Selbst wenn der Praxisbezug hier sicherlich vereinfacht werden mußte, wird doch deutlich, wie notwendig zum Lösen solcher Aufgaben mathematische Kenntnisse und Fertigkeiten sind. Sowohl im ersten als auch im zweiten Teil der dargestellten Aufgabe sollte unbedingt auf die Möglichkeiten einer rationellen Rechnung (pythagoreische Zahlentripel, sinnvolle Umwandlungen) hingewiesen werden.

4.2.6. Zusammenfassung (3 Std.)

Die notwendige Zusammenfassung sollte nicht die Form einer formalen Aneinanderreihung der einzelnen Fakten und Gesetzmäßigkeiten haben; vielmehr sollten – mit Hilfe der im Lehrbuch enthaltenen (eingerahmten) Übersichten – zum Beispiel Kurzvorträge der Schüler zu bestimmten Teilkomplexen vorbereitet werden, etwa zu Themen folgender Art.

- Die Eigenschaften der quadratischen Funktionen $y = ax^2 + c$ (Scheitelpunktskoordinaten der Parabel, Fallunterscheidungen hinsichtlich a, usw.)

Aufgaben komplexen Charakters sind auch sehr gut geeignet, die wichtigsten Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten wachzurufen, zu festigen und eventuell zu systematisieren.

- *Berechnen Sie die Nullstellen von* $y = 3x^2 - 4x + 1$*!*
  Kontrollieren Sie die Ergebnisse durch eine Zeichnung!

In einer solchen Aufgabe sind enthalten:

1. Anwenden der allgemeinen Lösungsformel;
2. Anwenden von $f(x) = a \cdot g(x)$, also die graphische Darstellung unter Beachtung der Streckung.

- *Eine Parabel mit der Gleichung* $y = x^2 + px + q$ *schneidet die Abszissenachse in den Punkten mit den Abszissen* $x_1 = -1$ *und* $x_2 = 3$.
  a) *Berechnen Sie p und q!*
  b) *Berechnen Sie die Scheitelpunktskoordinaten! Überprüfen Sie durch die graphische Darstellung!*

  Natürlich kann man hierbei auch Variable als Koordinaten vorgeben, z. B.: $x_1 = a;\ x_2 = \frac{a}{2}$.

Auch für die Schüler unbekannte Probleme, wie das Lösen einer biquadratischen Gleichung $r^4 - 29r^2 + 100 = 0$, sind geeignet, die bisher erworbenen Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten in modifizierter Form zu wiederholen, allerdings nicht als Kontrolle mit Bewertung.

4.2.7. Vorschlag einer Klassenarbeit (2 Std.)

Für eine Kontrollarbeit von 90 min Dauer zum Gesamtstoff des Stoffgebietes 4. erscheinen Aufgaben folgenden Typs geeignet.

1. Errechnen der Nullstellen quadratischer Funktionen. Überprüfen der Rechnung durch Darstellung der Funktionen in einem kartesischen Koordinatensystem.

2. Ermitteln der Lage des Graphen einer quadratischen Funktion im Koordinatensystem, z. B.:
   Eine Parabel mit der Gleichung $y = x^2 + px + q$ habe mit der x-Achse die folgenden Schnittpunkte: $P_1\ (-2;\ 0)$ und $P_2\ (3;\ 0)$. Geben Sie die Scheitelpunktskoordinaten der Parabel an!
   Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts der Parabel mit der y-Achse!
   Überprüfen Sie die Rechnungen durch graphische Darstellung in einem Koordinatensystem!
3. Aufgaben über den Einfluß von Parametern auf die Lösung quadratischer Gleichungen, z. B.:
   Unter welchen Bedingungen für die reellen Zahlen m und n hat die quadratische Gleichung $x^2 - 4\sqrt{m} \cdot x + n = 0\ (m > 0)$
   a) keine reelle Lösung;
   b) eine reelle Lösung;
   c) zwei verschiedene reelle Lösungen?
4. Lösen von Sachaufgaben, z. B.:
   a) Die Längen der beiden Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks ABC unterscheiden sich um 7 cm. Der Flächeninhalt betrage 60 cm².
      Berechnen Sie die Länge des Umfangs!
   b) Zwei Widerstände, die sich um 16 Ω unterscheiden, haben bei Parallelschaltung einen Gesamtwiderstand von 6 Ω. Wie groß sind die beiden Widerstände?
   c) Ein mit einer Brennweite von 60 mm fotografierter Gegenstand sei auf dem Bild 25 mm groß. Die Entfernung des Gegenstandes von der Kamera betrage 600 mm. Wie groß ist dieser Gegenstand in Wirklichkeit?

Bemerkungen:

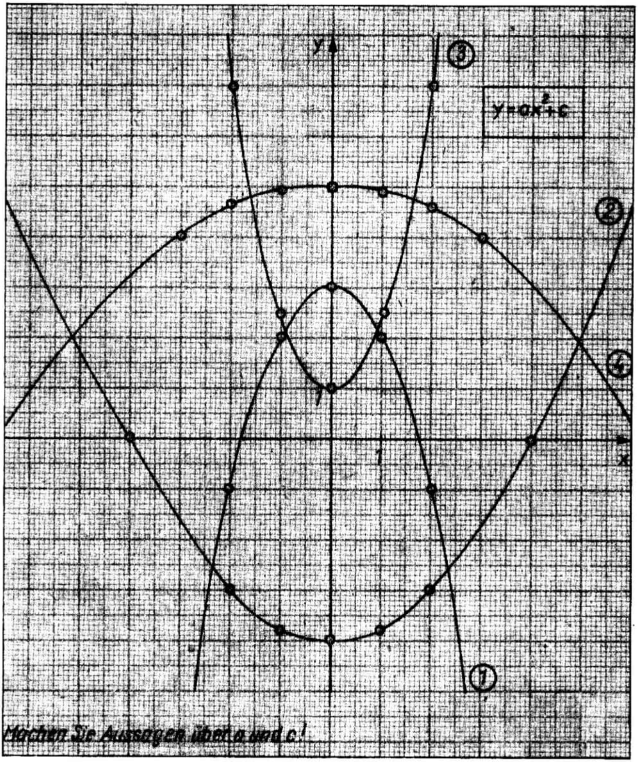
Die Aufgabe 3. kann vereinfacht werden: $x^2 - 4x + n = 0$.
Die Fragestellung erfolgt dann nur hinsichtlich n.
Die Aufgabe 4.c) läßt sich auch so gestalten, daß eine Diskriminantenuntersuchung durchgeführt werden muß.

Anhang:

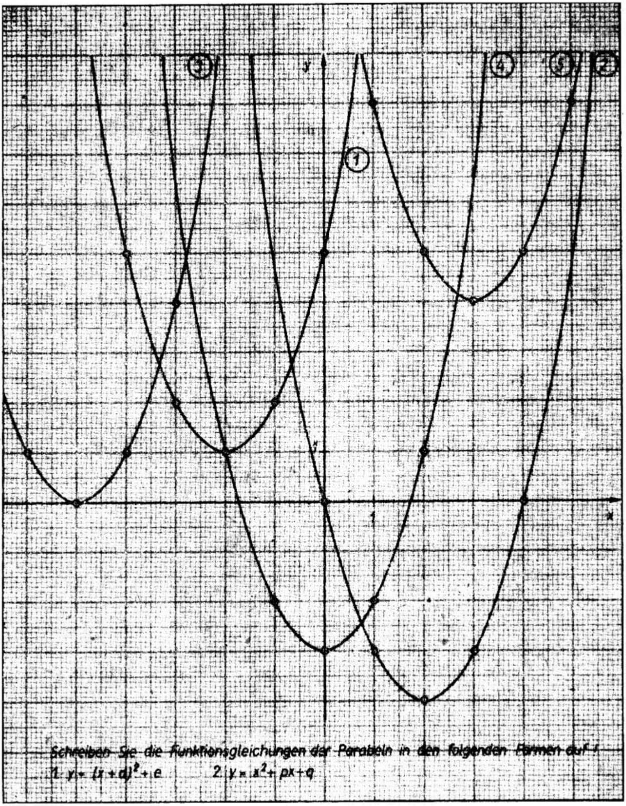
Es lassen sich einige Arbeitsblätter ohne großen Material- und Zeitaufwand herstellen, die dann auch weiterhin verwendbar bleiben.
Koordinatensystem auf Millimeterpapier

Übungsblatt zu $y = ax^2 + c$; vgl. Bild 149/1

Übungsblatt zu $y = (x + d)^2 + e = x^2 + px + q$; vgl. Bild 150/1



149/1



y
x
1
1
1
2
3
4
5
Schreiben Sie die Funktionsgleichungen der Parabeln in den folgenden Formen auf!
1. y = (x + d)² + e
2. y = x² + px + q

150/1

5. Exponential- und Logarithmusfunktionen; Rechenhilfsmittel

5.0. Vorbemerkungen

Wie mit dem vorangegangenen Stoffgebiet 4. „Quadratische Funktionen und quadratische Gleichungen“ wird mit dem Stoffgebiet 5. „Exponential- und Logarithmusfunktionen; Rechenhilfsmittel“ die *Behandlung ausgewählter spezieller Funktionen* fortgesetzt, und zwar mit den Exponential- und Logarithmusfunktionen als Vertretern nichtrationaler Funktionen.
Im Unterschied zum Stoffgebiet 4. beruhen die hier neu zu behandelnden Funktionen nicht wie die quadratischen Funktionen (und die rationalen Funktionen höheren Grades) auf einer additiven Verbindung spezieller Funktionen, sondern auf anderen, durch besondere Definitionen festgelegten Operationen mit reellen Zahlen.

Als Aufgabe des Unterrichts im Hinblick auf die **mathematische Grundlagenbildung** der Schüler nennt der Lehrplan die Vermittlung anwendbarer Kenntnisse über die neu einzuführenden Begriffe, Operationen und Funktionen, die Erweiterung (und im Rahmen der Oberschule auch Abrundung) des Wissens über *Rechenhilfsmittel* sowie die Vervollkommnung der Fertigkeiten im Gebrauch des *logarithmischen Rechenstabes*; vgl. Lp 36.
Das Wissen über die mengentheoretischen Grundlagen der Lehre von den Funktionen, das die Schüler bei der Behandlung dieses Stoffgebiets (vor allem der Stoffeinheit 5.1 „Exponential- und Logarithmusfunktionen“) erwerben, bildet wichtige Voraussetzungen für die Behandlung weiterer nichtrationaler Funktionen im Mathematikunterricht der Klasse 10. Der Überblick über die gebräuchlichen Rechenhilfsmittel und die Übungen im Rechnen mit dem logarithmischen Rechenstab haben allgemeine Bedeutung für den weiterführenden Unterricht und für die Lebenspraxis.
Inhalt und Aufgabe des Unterrichts lassen die engen Beziehungen dieses Stoffgebiets zu den *inhaltlichen Leitlinien* „Mengen“ und „Abbildungen“ erkennen; eine Verbindung zur Leitlinie „Gleichungen und Ungleichungen“ ergibt sich – ähnlich wie im Stoffgebiet 3. „Potenzen und Potenzfunktionen“ – durch die Formulierung gewisser Aufgaben über Funktionswerte; vgl. Uh 16f. Von den *Leitlinien der mathematischen Methode* sind für die Stoffeinheit 5.1. vor allem die Leitlinien „Definieren“ und „Beweisen“ bedeutungsvoll, für die Stoffeinheit 5.2. – beim rechnerischen Lösen verschiedenartiger Aufgaben – die Leitlinien „Verfahren der Problemlösung“ und „Hilfsmittel mathematischen Arbeitens“ (Rechentechnik). Die Leitlinie „Hilfsmittel mathematischen Arbeitens“ wird auch in der Stoffeinheit 5.1. verfolgt, und zwar im Hinblick sowohl auf die Rechentechnik als auch auf das graphische Arbeiten; vgl. Uh 22f.

Im Hinblick auf die **ideologische Bildung und Erziehung** in diesem Stoffgebiet gelten die gleichen inhaltlichen und methodischen Grundsätze wie für die anderen Stoffgebiete bzw. -einheiten über Funktionen. Mit Hilfe von Exponentialfunktionen werden zahlreiche *Prozesse in Natur und Technik* beschrieben, *die einen engen Bezug* *zu weltanschaulichen Fragen haben* (z. B. radioaktiver Zerfall, Prozesse in Kernreaktoren; zusammenfassend: alle Prozesse, bei denen die Änderungsgeschwindigkeit einer Größe dem jeweiligen Wert dieser Größe direkt proportional ist).

Für die **methodische Gestaltung** des Unterrichts ist die Stellung des Stoffgebietes – am Ende des Schuljahres – bedeutsam. Besonders dem Unterricht in der Stoffeinheit 5.1. kommt eine gewisse integrierende Rolle zu. Mit der Einführung des Bereichs der reellen Zahlen und dem Hinweis auf den Bereich der komplexen Zahlen wird – für den Unterricht der Oberschule – die *Erweiterung der Zahlenbereiche abgeschlossen.* Im Stoffgebiet 5.1. besteht die günstige Möglichkeit, die Kenntnisse der Schüler über den Bereich der reellen Zahlen zu wiederholen, zu sichern und zu vertiefen. Unmittelbare Anknüpfungspunkte dafür ergeben sich bei der Einführung der Potenzen mit irrationalen Exponenten und bei der Definition der Logarithmen. Die gleichen Gegenstände ermöglichen, die Einsicht der Schüler in die *Anwendung der Methoden mathematischen Arbeitens*, besonders des Definierens von Begriffen und des Beweisens von Sätzen, zu vervollkommnen; vgl. Uh 22. Auch die Kenntnisse über Gleichungen werden – bei den Betrachtungen zu Exponentialgleichungen – angewendet und erweitert, wenn auch die Gleichungen dieses Typs im Unterricht nicht mit Hilfe von Algorithmen oder Kalkülen, sondern durch inhaltliche Überlegungen gelöst werden. Durch das beim Lösen von Gleichungen notwendige Umformen von Termen wird auch eine Verbindung zur Stoffeinheit 1.3. hergestellt.
Ein tieferes Eindringen in das Gebiet der Exponentialfunktionen und Exponentialgleichungen kann Aufgabe einer außerunterrichtlichen Arbeitsgemeinschaft sein.
Der Aufbau des Unterrichts in der Stoffeinheit 5.1. „Exponential- und Logarithmusfunktionen" ist mit dem Aufbau des Unterrichts im Stoffgebiet 3. „Potenzen und Potenzfunktionen" vergleichbar. Den Ausgangspunkt bildet eine bisher (im vorangegangenen Unterricht) nicht definierte Operation, es schließen sich Untersuchungen über die betreffenden Funktionen an, und zuletzt werden die gewonnenen Kenntnisse beim Lösen von Aufgaben verschiedener Art angewendet.
Die Definitionen derjenigen Begriffe und die Beweise derjenigen Sätze, die, vom logischen Standpunkt aus betrachtet, zum Aufbau dieses Stoffgebiets erforderlich sind, werden im Unterricht der Oberschule nicht in ihrer Vollständigkeit behandelt. Auch hier, wie seit Beginn des Lehrgangs in Klasse 6, bedeutet das Befolgen der Leitlinie „Beweisen", daß in erster Linie die *Fähigkeit der Schüler, Beweise zu führen,* zu entwickeln ist; vgl. Lp 37. Einige Begriffe werden ohne Definition eingeführt, einige Sätze nur mitgeteilt und gegebenenfalls näher erläutert (Lp 37; zur Unterscheidung von „Einführung" und „Definition" vgl. Lp 18). Die Schüler sind jedoch auf diese (z. T. auch didaktisch motivierte) Beschränkung aufmerksam zu machen; die Erkenntnis, daß Definitionen und Beweise notwendige Elemente der mathematischen Methode sind, darf nicht von den Schülern in Zweifel gezogen werden.
Die Akzente, die der Lehrplan 1970 für die Behandlung des Stoffgebiets 5. setzt, unterscheiden sich in mancher Hinsicht von Auffassungen früherer Lehrpläne. Die Behandlung der Eigenschaften der dekadischen Logarithmen (in der Stoffeinheit 5.2. „Rechenhilfsmittel") ist vorrangig auf die *Begründung des Stabrechnens* gerichtet. Das schriftliche logarithmische Rechnen ist nicht zu behandeln; vgl. Lp 6. Seine praktische Bedeutung ist heute gering, zumal die Ergebnisse meist mit anderen Hilfsmitteln schneller und genauer gefunden werden können. Im allgemeinen genügt für gröbere Berechnungen die Genauigkeit des Rechenstabs. Genauigkeitsabschätzungen und ein sinnvolles Runden gehören zu den Grundsätzen des Rechnens unter Verwenden von Rechenhilfsmitteln. Lp 37 hebt dies besonders hervor.

Übersicht über das Stoffgebiet 5. „Exponential- und Logarithmusfunktionen; Rechenhilfsmittel“ (20 Stunden – 14 Lerneinheiten)

Unterrichtseinheit	Std.	Seiten Lb	Uh	Wiederholung	Einführung	Festigung
5.1.1. Definition des Logarithmus (LE 1 bis 3)	3	138	155	Potenzgesetze für rationale Exponenten Irrationalität von x für $x^2 = 2$ Begriff „reelle Zahl“	Exponentialgleichungen Irrationalität von x für $10^x = 3$ Definition des Logarithmus	Verfahren des indirekten Beweises Monotoniegesetze Inhaltliches Lösen von Gleichungen
5.1.2. Exponential- und Logarithmusfunktionen (LE 4 und 5)	3	142	157	Potenzgesetze Begriff der Funktion als eindeutige Abbildung	Definitionen der Exponential- und der Logarithmusfunktionen Eigenschaften dieser Funktionen Graphen dieser Funktionen Information: Umkehrbeziehungen	Begriff des Logarithmus
5.1.3. Anwendungen und Zusammenfassung (LE 6)	2	145	159	Variable und Grundbereiche von Variablen	Exponential- und Logarithmusfunktionen in den Naturwissenschaften und in der Technik	Eigenschaften der Exponential- und Logarithmusfunktionen Definitionsbereiche
5.2.1. Dekadische Logarithmen (LE 7 bis 9)	3	147	160	Definitionen des Logarithmus Graphen der Logarithmusfunktionen Aufbau der Zahlentafeln Positionssysteme Logarithmische Skalen	Dekadische Logarithmen Eigenschaften der dekadischen Logarithmen Tafeln der Logarithmen	Skalen des Rechenstabes

Unterrichtseinheit	Std.	Seiten Lb	Uh	Wiederholung	Einführung	Festigung
5.2.2. Der Rechenstab (LE 10 bis 13)	7	150	162	Positionssysteme Potenzen mit negativen Exponenten Regeln für das Rechnen mit Potenzen Schätzen, Überschlagen, Runden	Aufbau des Rechenstabes Begründen der Rechenregeln Genauigkeitsabschätzungen	Algorithmen für das Stabrechnen
5.2.3. Überblick über weitere Rechenhilfsmittel (LE 14)	2	156	164		Digital- und Analogrechner Anwendungen der Rechentechnik	

5.1. Exponential- und Logarithmusfunktionen
(LE 1 bis 6; 8 Std.)

5.1.1. Definition des Logarithmus (LE 1 bis 3; 3 Std.)

Im ersten Teil dieser Unterrichtseinheit lernen die Schüler, *einfache Exponentialgleichungen* der Form $a^x = b$ zu lösen, und zwar durch inhaltliche Überlegungen, nicht durch Anwenden eines allgemeinen Algorithmus. Für das Lösen dieser einfachen Exponentialgleichungen ist es erforderlich, die Potenzgesetze sicher zu beherrschen. Dementsprechend erscheint eine relativ umfangreiche Übung im Operieren mit Potenzen zu Beginn dieser Unterrichtseinheit notwendig. Bei den Exponentialgleichungen werden die Terme auf beiden Seiten der Gleichungen so umgeformt, daß sich beide Terme als Potenzen mit gleicher Basis darstellen.
Die im Aufgabenteil des Lehrbuchs gegebenen Beispiele für Exponentialgleichungen können den Schülern teilweise schwierig erscheinen, zumal der Weg der Lösung mancher Aufgabe nicht auf den ersten Blick ersichtlich ist. Es empfiehlt sich deshalb, einige Aufgaben ausführlicher, als Beispiele, zu behandeln und den Lösungsweg eingehend zu erläutern; vgl. Lb 215/1 bis 4.

Das Motiv für das Mitteilen der Existenz von Potenzen mit reellen Exponenten bildet die Überlegung, daß es Gleichungen von der Form $a^x = b$ mit nichtnegativen reellen Zahlen a und b gibt, die keine Lösung im Bereich der rationalen Zahlen haben, vgl. Lp 37. Der Beweis erfolgt an einem Beispiel, und zwar – nach Lb 138f – an der Gleichung $10^x = 3$. Er ist für die Schüler leicht verständlich. Ehe dieses Beispiel ausgeführt wird, empfiehlt es sich, die Darstellung der reellen Zahlen durch eine Folge von Doppelungleichungen zu wiederholen und dabei hervorzuheben, daß jede reelle Zahl durch eine derartige Folge geklärt werden kann.
In ähnlicher Weise ist eine Annäherung der Zahl 3 durch Potenzen von 10 mit rationalen Exponenten möglich (dies sollte nur vom Lehrer demonstriert werden, entsprechend Lb 138f). Zu betonen ist dabei, daß die Näherungswerte existieren. Es kann bemerkt werden, wie sich diese Näherungswerte berechnen lassen.
Dieses Verfahren bietet zwar eine Möglichkeit, die Lösung einer Gleichung der gegebenen Art näherungsweise zu ermitteln, sagt aber noch nichts über die Existenz von Potenzen mit irrationalen Exponenten aus. Darauf sollten die Schüler besonders aufmerksam gemacht werden.
Die Erweiterung des Potenzbegriffs auf Potenzen mit reellen Exponenten erfolgt im Unterricht nicht durch eine spezielle Definition. Es wird lediglich auf die Existenz von Potenzen mit reellen Exponenten hingewiesen und der Satz behandelt
„*Für jede positive reelle Zahl a und jede reelle Zahl c existiert genau eine positive reelle Zahl b mit* $a^c = b$."
Er ist auf Lb 140 nicht numeriert. Die in dem Satz formulierte Einschränkung auf positive reelle Zahlen a und b muß deutlich hervorgehoben werden.

Da die Schüler in Zusammenhang mit der Definition der Wurzel informiert wurden, daß erst im Bereich der komplexen Zahlen auch Wurzeln aus negativen Zahlen existieren, kann darauf verwiesen werden, daß in diesem Zahlenbereich auch die betreffenden Einschränkungen für a und b in $a^c = b$ aufgehoben sind.

Die Einschränkung für a und b im oben genannten Satz erklärt auch, weshalb beim praktischen logarithmischen Rechnen stets mit den Absolutbeträgen der Zahlen operiert werden muß.

Der Verzicht auf die Definition der Potenzen mit reellen Exponenten bedingt auch, daß die Potenzgesetze für Potenzen mit reellen Exponenten nicht bewiesen werden. Es ist lediglich mitzuteilen, daß die für Potenzen mit rationalen Exponenten ausgesprochenen Potenzgesetze auch für Potenzen mit reellen Exponenten gelten; vgl. Lp 37. Diese Einsicht kann durch das Lösen von Lb 215/5 bis 8 unterstützt werden. Solche Aufgaben bieten auch die Möglichkeit, die Rechenfertigkeiten der Schüler weiterzuentwickeln. Ihr besonderer Wert liegt darüberhinaus in einer bildungswirksamen Anwendung bisher gewonnener Begriffe und Gesetze. Es sollte insgesamt Ziel der Behandlung dieser Aufgaben sein, daß die Schüler ihre Kenntnisse über Rechenoperationen möglichst rationell gebrauchen lernen.

Dafür erscheint eine Aufgabe besonders geeignet, bei der gefordert wird, aus dem gegebenen Näherungswert für eine Potenz mit gebrochenem Exponenten die Näherungswerte für weitere Potenzen mit gebrochenen Exponenten (der gleichen Basis) zu ermitteln. Ist z. B. $10^{0,5} = \sqrt{10} \approx 3,162$ gegeben (Lb 215/8) und erkennen die Schüler, daß $10^{1,5} = 10 \cdot 10^{0,5}$, $10^{2,5} = 100 \cdot 10^{0,5}$, $10^{-0,5} = 10^{0,5} : 10$ und $10^{-1,5} = 10^{0,5} : 100$ ist, bleibt eine einfache Kopfrechnung übrig. Weitere in der Aufgabe gegebenen Potenzen lassen sich durch Verwenden der Tafel der reziproken Werte ebenfalls rasch ermitteln, wobei zunächst das Berechnen der Werte für $10^{0,25}$ und $10^{0,125}$ und $10^{0,375}$ erfolgen müßte und dann für $10^{0,75}$ $(10 : 10^{0,25})$ unmittelbar aus der Tafel der reziproken Werte das Ergebnis abgelesen werden könnte. Eine Gegenüberstellung verschiedener Lösungswege und die Diskussion dieser Lösungswege zeigt deutlich, welche Vorteile die möglichst umfassende Anwendung der Rechengesetze sowie des Tafelrechnens bieten.

Ebenso lassen sich z. B. bei Vorgabe von $\sqrt[3]{10} \approx 2,154$ in ähnlicher Weise $10^{\frac{2}{3}}$, $10^{\frac{4}{3}}$, $10^{-\frac{2}{3}}$ und $10^{-\frac{4}{3}}$ ermitteln (die in dieser Aufgabe berechneten Werte können später beim Zeichnen des Graphen für die Exponentialfunktion $y = 10^x$ verwendet werden).

Bei der *Definition des Logarithmus* wird zunächst festgestellt, daß jede Gleichung $a^x = b$ $(a > 0, a \neq 1; b > 0)$ genau eine reelle Lösung hat, vgl. Lb 141, Satz E 2. Dieser Satz bleibt ebenfalls ohne Beweis. Die vorangegangene Betrachtung zur Gleichung $10^x = 3$ kann nicht als Herleitung betrachtet werden, da für diese Gleichung nur eine Aussage über die Eindeutigkeit der Lösung bei dem Paar [10; 3] gemacht wird, der zu erörternde Satz aber eine allgemeingültige Aussage für positive reelle Zahlen darstellt.
Die Definition des Logarithmus (Lb 141, Definition E 3) steht in unmittelbarer Verbindung mit dem genannten Satz über die Lösung der Gleichung $a^x = b$ $(a > 0, a \neq 1, b > 0)$.
Durch die Formulierung der Definition wird deutlich, daß der Logarithmus ein Potenzexponent ist. Daraus ist ableitbar, daß die (später zu behandelnden) Logarithmengesetze aus den Potenzgesetzen folgen.
Durch gründliche Arbeit an entsprechenden Aufgaben (z. B. an Lb 216/9 bis 20), bei der in der Unterrichtsstunde mehrere Aufgaben kommentiert werden sollten (vgl. Lb 141, Beispiel E 4), kann das Erfassen des neu eingeführten Begriffs gesichert werden.

Bei einigen Aufgaben (z. B. Lb 216/17, 18, 20) gibt es zwei Lösungsmöglichkeiten, wie am folgenden Beispiel deutlich wird.

Es ist $9^{\log_3 10}$ zu berechnen.

(a) Es sei $x = \log_3 10$, so folgt $3^x = 10$.
Wegen $9 = 3^2$ folgt weiter

$$\left(9^{\frac{1}{2}}\right)^x = 10 \quad \text{und} \quad 9^x = 10^2, \quad \text{also} \quad 9^{\log_3 10} = 100.$$

(b) Leicht folgt auch

$$9^{\log_3 10} = (3^2)^{\log_3 10} = (3^{\log_3 10})^2 = 10^2.$$

Im folgenden soll ein möglicher Ablauf der Stunden für diese Unterrichtseinheit skizziert werden.

1. Stunde:

Einleitung (z. B. durch Wiederholung der Motivation für die Erweiterung des Zahlenbereichs bis zum Bereich der reellen Zahlen);
Wiederholung des Begriffs der Potenz mit rationalen Exponenten;
Lösen von Gleichungen folgender Form:

1. $3^2 = x;\quad 1{,}4^3 = x;\quad -0{,}5^2 = x;\quad (-0{,}5)^2 = x;\quad 0{,}027^{\frac{1}{3}} = x$

2. $x^2 = 25;\quad x^3 = 8;\quad x^{\frac{1}{2}} = 4;\quad x^{\frac{1}{3}} = 0{,}5;\quad x^{-4} = 16$

Lösen weiterer Aufgaben (z. B. Lb 138, Auftrag E 3, und Lb 215/1 bis 4);
Diskussion der Gleichung $10^x = 3$;
Beweis, daß für diese Gleichung keine rationale Lösung existiert;
Formulieren der Vermutung, daß die Lösung dieser Gleichung eine reelle Zahl sein könnte.

2. Stunde:

Lösen von Gleichungen folgender Form (als einleitende Übung):

$5^x = 25;\quad \left(\frac{1}{5}\right)^x = 125;\quad 0{,}3^x = 0{,}09;\quad 2^x = \frac{1}{2};\quad 0{,}5^x = 1;\quad 4^x = 2^x;$

Erweiterung des Begriffs der Potenz auf Potenzen mit reellen Exponenten;
Mitteilung des Satzes, daß für jede positive reelle Zahl a und jede reelle Zahl c genau eine positive reelle Zahl b mit $a^c = b$ existiert;
Bestätigen der Vermutung, daß die Lösung der Gleichung $10^x = 3$ eine reelle Zahl ist;
Mitteilung über die Gültigkeit der Potenzgesetze für Potenzen mit reellen Exponenten;
Lösen von Aufgaben (z. B. Lb 140, Beispiel E 3, und Lb 215/5 bis 7)
Als Hausaufgaben sind ähnliche Aufgaben geeignet.

3. Stunde:

Zusammenfassung der in den vorangegangenen Stunden gewonnenen Erkenntnisse;
Definition des Logarithmus;
Erläutern der Gleichung $a^{\log_a b} = b$;
Erörtern und Lösen von Aufgaben (z. B. Lb 141, Beispiel E 5, Auftrag E 4, und Auswahl aus Lb 216/9 bis 20);
Wiederholung des Verfahrens des indirekten Beweises an einem Beispiel (etwa Irrationalität von $\log_{10} 2$; vgl. Lb 141, Auftrag E 5)

5.1.2. Exponential- und Logarithmusfunktionen (LE 4 und 5; 3 Std.)

Es empfiehlt sich, die *Exponentialfunktionen* am Beispiel $f(x) = 2^x$ einzuführen; vgl. Lb 142. Dabei wird von der Wertetabelle, die für leicht zu berechnende Zahlenpaare aufgestellt werden soll, ausgegangen. Einige wichtige Eigenschaften der Funktion werden studiert, bevor der Graph der Funktion gezeichnet und untersucht

wird. Dieses Vorgehen hat den Vorteil, daß unmittelbar auf die Definition des Funktionsbegriffs aufgebaut (der Wortlaut der Definition sollte zur Festigung von einem Schüler – als Wiederholung – vorgetragen werden) und die eventuell bei einigen Schülern vorhandene Vorstellung, daß Funktion und Graph identisch seien, abgebaut wird.
Bei der Gewinnung der ersten wesentlichen Eigenschaften der Exponentialfunktionen, z. B. der Monotonie im gesamten Definitionsbereich sowie der Reziprozität von $f(x)$ und $f(-x)$ als Folgerungen aus den Potenzgesetzen, ergibt sich auch die Möglichkeit, noch weitere Funktionswerte zu gewinnen.
Wenn anschließend der Graph der Exponentialfunktion gezeichnet werden soll, so empfiehlt es sich, die auf Grund der Wertetabelle ermittelten Punkte nicht unmotiviert durch einen Kurvenzug zu verbinden, sondern den vermuteten Kurvenverlauf an gewissen Stellen (etwa in der Umgebung der Punkte für die Argumentwerte 0 und 1) mit Hilfe einiger weiterer Funktionswerte genauer festzulegen oder zumindest die graphische Inter- oder Extrapolation auf diese Weise zu überprüfen.
Anhand des Graphen können die Eigenschaften der Funktion dann wiederholend hervorgehoben werden.
Für die Behandlung der hier genannten Probleme kann nur relativ wenig Zeit in Anspruch genommen werden. In der Hauptsache werden in dieser Unterrichtseinheit Aufgaben wie Lb 216/21 bis Lb 217/31 gelöst. Wird z. B. nach der Klärung der Eigenschaften der Funktion $f(x) = 2^x$ die Aufgabe gestellt, den Graph der Funktion $f(x) = 2^x$ im Intervall $-4 \leqq x \leqq 4$ zu zeichnen und – unter anderem – aus dem Graph Näherungswerte für $2^{0,7}$, $2^{1,2}$, $2^{\sqrt{2}}$ zu ermitteln, so sollte eine Abschätzung in folgender Art nicht fehlen.

$$2^{0,5} < 2^{0,7} < 2^1, \qquad \text{also} \quad 1{,}41\ldots < 2^{0,7} < 2$$
$$2^1 < 2^{1,2} < 2^{1,41\ldots} < 2^{1,5}, \quad \text{also} \quad 2 < 2^{1,2} < 2^{1,41\ldots} < 2 \cdot 1{,}41\ldots$$

Wenn auch dieses Abschätzen nur recht grobe Näherungswerte ergibt, so wird doch dadurch zum einen das Rechnen mit Potenzen wiederholt, zum anderen die Kenntnis der wesentlichen Eigenschaften der Exponentialfunktionen gesichert.
Beim Betrachten einiger spezieller Exponentialfunktionen kommt es vor allem darauf an, die Schüler möglichst selbständig arbeiten zu lassen. Ausgangspunkt beim Zeichnen des Graphen einer Funktion sollte stets das Berechnen einiger Funktionswerte sein. Die Graphen können dann unter Verwenden einer Schablone vervollständigt werden. In diesem Zusammenhang kann auch gezeigt werden, daß jedes Zahlenpaar außer [0; 1] nur einer Exponentialfunktion $f(x) = a^x$ zugeordnet ist, etwa an Lb 217/27.
Bei den Betrachtungen über Exponentialfunktionen waren als Beispiele bisher nur Funktionen $f(x) = a^x$ mit $a > 1$ gewählt worden. Es erscheint jedoch zweckmäßig, zumindest an einem Beispiel zu zeigen, daß

$$f_1(x) = a^x \quad \text{und} \quad f_2(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x$$

zwei Funktionen sind, deren Graphen symmetrisch zur y-Achse liegen, vgl. 217/6.

In dieser Unterrichtseinheit werden ebenfalls die *Logarithmusfunktionen* eingeführt. Der Festigung des Begriffs „Logarithmus“ kann es dienen, wenn die Schüler die Wertetabelle für die gewählten Funktionen selbständig aufstellen (das Berechnen der einzelnen Funktionswerte ist auch durch Rückführen auf die entsprechende

Exponentialgleichung möglich). An den Funktionswerten wird die Monotonie der Funktionen deutlich, sie muß allerdings noch besonders nachgewiesen werden.
Zweckmäßig ist es, analog zur Behandlung der Exponentialfunktionen die wesentlichen Eigenschaften der Logarithmusfunktionen mit Hilfe der Wertetabelle für einen ausgewählten Vertreter dieser Klasse von Funktionen zu gewinnen und den Graph nur zum Veranschaulichen („Gedächtnisstütze") heranzuziehen. Durch das Lösen von Aufgaben, in denen auf die wesentlichen Eigenschaften der Logarithmusfunktionen Bezug genommen wird, können die Schüler das Gelernte festigen.

In der *Zusammenfassung* zum Abschluß der Unterrichtseinheit wird informativ mitgeteilt, daß Exponentialfunktionen und Logarithmusfunktionen $f(x) = a^x$ und $g(x) = \log_a x$ zueinander Umkehrfunktionen sind. Damit ergibt sich eine günstige Möglichkeit, durch den Vergleich beider Klassen von Funktionen die wichtigsten Eigenschaften hervorzuheben und zu festigen, z. B. durch einen kurzen Lehrervortrag unter Verwenden der im folgenden angegebenen Tabelle.

Eigenschaften	Exponentialfunktionen	Logarithmusfunktionen
Definitionsbereich	P	$P;\ x > 0$
Wertebereich	$P;\ y > 0$	P
Monotonie $1 < a$	steigend	steigend
$0 < a < 1$	steigend	steigend
Nullstellen	nicht vorhanden	(1; 0)
$f(0)$	(0; 1)	nicht vorhanden
Verlauf in den Quadranten	II und I	IV und I

5.1.3. Anwendungen und Zusammenfassung (LE 6; 2 Std.)

Für das Lösen von *Anwendungsaufgaben*, bei denen die Zusammenhänge der Zahlen oder Größen durch Exponential- oder Logarithmusfunktionen beschrieben werden, gelten ebenfalls die allgemeinen, an anderer Stelle bereits gekennzeichneten Grundsätze für das Lösen von Sachaufgaben; vgl. Uh 74f, 107, 144ff.
Gegenstand der Aufgaben, die auf Exponentialfunktionen führen, sind vielfach Vorgänge, bei denen die Änderung einer Größe dem jeweiligen Wert dieser Größe direkt proportional ist. Dieser Sachverhalt kann den Schülern nur mitgeteilt und anschaulich erläutert werden, da die Differentialrechnung nicht zur Verfügung steht. Als Beispiele eignen sich folgende Sachverhalte; vgl. Lp 37.

$p = p_0\, e^{-ah}$ a — Konstante	Der Luftdruck p ist abhängig vom Gewicht der Luftmassen, die auf der Schicht in der Höhe h lasten. Die Dichte der Luft einer bestimmten Schicht ist proportional dem dort herrschenden Luftdruck.
$T = T_0\, e^{-at}$ a — Konstante	Die Temperaturabnahme in der Zeit Δt ist abhängig von der Temperaturdifferenz zwischen T und T_0. Verringerte Temperaturdifferenz bedeutet verringerte Temperaturabnahme bei gleicher Zeit Δt.
$m = m_0\, e^{at}$ a — Konstante	Die Massenzunahme in der Zeit Δt ist abhängig von der Ausgangsmasse. Die vergrößerte Ausgangsmasse bedeutet eine vergrößerte Massenzunahme in der Zeit Δt.

Bei der Arbeit an den Aufgaben ist es manchmal zweckmäßig, *Graphen der Funktionen zeichnen oder skizzieren* zu lassen. Das Berechnen einzelner Werte kann mit Hilfe der Tafel der Exponentialfunktionen (z. B. Tafelwerk [62], Seite 28/29) durchgeführt werden. Dabei sollte man den Schülern den Aufbau der Tafel erklären. Durch die Darstellung dieser Funktionen und die dabei notwendigen Berechnungen wird der in den vergangenen Stunden erarbeitete Stoff gefestigt.

5.2. Rechenhilfsmittel

(LE 7 bis 14; 12 Std.)

5.2.1. Dekadische Logarithmen (LE 7 bis 9; 3 Std.)

Zielstellung der Unterrichtseinheiten 5.2.1. „Dekadische Logarithmen" und 5.2.2. „Der Rechenstab" insgesamt ist eine *exakte Begründung des Rechnens mit Hilfe des logarithmischen Rechenstabes.* Dazu ist selbstverständlich notwendig, zunächst die dekadischen Logarithmen als Spezialfall der (in der Stoffeinheit 5.1. allgemein behandelten) Logarithmen darzustellen und die für das dekadische Logarithmensystem geltenden besonderen Eigenschaften herauszuarbeiten. Diese Eigenschaften werden unter Anwenden der Potenzgesetze gewonnen.
Der Lehrplan sieht nicht vor, daß die Schüler das schriftliche logarithmische Rechnen erlernen sollen (Lp 6), die diesbezüglichen Operationen sind nicht Unterrichtsgegenstand. Dennoch erscheint es zweckmäßig, wenn der Lehrer einige Beispiele zum schriftlichen Berechnen von Produkten und Quotienten demonstriert, da damit das Verständnis für die Logarithmengesetze (Satz auf Lb 148) geweckt und nochmals gezeigt werden kann, daß das Rechnen mit Hilfe des logarithmischen Rechenstabes auf eine Addition bzw. Subtraktion von Strecken, deren Maßzahlen die Logarithmen der betreffenden Zahlen sind, zurückgeführt wird.

Das Ziel der Unterrichtseinheit 5.2.1. besteht in der Hauptsache darin, aus bereits bekannten Sätzen (vgl. LE E 3 und E 5) zunächst das *Logarithmieren als zweite Umkehrung des Potenzierens* zu kennzeichnen und dann die Besonderheiten des dekadischen Logarithmensystems herauszuarbeiten. In enger Verbindung damit steht die Begründung der logarithmischen Skale. Informativ kann auch auf logarithmische Papiere (Geraden als Graphen der Logarithmusfunktionen auf solchen Papieren) eingegangen werden.

Einleitend werden in der *1. Stunde* die Operationen des Radizierens und des Logarithmierens erörtert. Dabei ist es notwendig zu erläutern, daß diese Operationen einem geordneten Zahlenpaar eine dritte Zahl nach bestimmten Regeln zuordnen.
Auf Grund der Definition der Wurzel bzw. des Logarithmus ist jedem geordneten Zahlenpaar, das den in der Definition gegebenen Einschränkungen entspricht, eine dritte Zahl zugeordnet. Hier sollte auch an einem Beispiel der *Zusammenhang zwischen den Operationen Potenzieren, Radizieren und Logarithmieren* gezeigt werden; vgl. Lb 147 Beispiel E 9.

Gegeben sei ein Zahlentripel (2; 3; 8).

a) Die Zuordnung zwischen dem Zahlenpaar [2, 3] und der Zahl 8 wird als Potenzieren bezeichnet.
   Man schreibt: $2^3 = 8$.
   Man spricht: Dem geordneten Paar der Zahlen 2 und 3 wird durch das Potenzieren die Zahl 8 zugeordnet.

b) Die Zuordnung zwischen dem Zahlenpaar [3, 8] und der Zahl 2 wird als Radizieren bezeichnet.

Man schreibt: $\sqrt[3]{8} = 2$.

Man spricht: Dem geordneten Paar der Zahlen 3 und 8 wird durch das Radizieren die Zahl 2 zugeordnet.

c) Die Zuordnung zwischen dem Zahlenpaar [2, 8] und der Zahl 3 wird als Logarithmieren bezeichnet.

Man schreibt: $\log_2 8 = 3$.

Man spricht: Dem geordneten Paar der Zahlen 2 und 8 wird durch Logarithmieren die Zahl 3 zugeordnet.

In entsprechender Weise können weitere Beispiele dargestellt werden. Es ergibt sich, daß nicht für jedes beliebige Tripel diese Zuordnungen möglich sind. Auf Grund einer Festsetzung wird die zuerst genannte Operation als Grundoperation bezeichnet, die beiden anderen werden als Umkehroperationen erklärt.
Den theoretischen Überlegungen zum Logarithmieren und zum Ermitteln von Logarithmen (an einfachen Beispielen) schließen sich einige Übungen zum Umformen von Gleichungen an, die Potenzen, Wurzeln oder Logarithmen enthalten. Solche Übungen helfen, den erarbeiteten Stoff zu festigen.

Beispiele:

Lösen Sie folgende Gleichungen!

$$\begin{aligned}
\log_3 9 &= x;\\
\log_4 64 &= x;\\
\log_{10} x &= 0;\\
\log_2 x &= 5;\\
\log_x 16 &= 4;\\
\log_x 36 &= 2;\\
\log_5 625 &= x;\\
\log_3 x &= 81
\end{aligned}$$

Falls für einzelne Schüler weitere Übungen notwendig sind, sei auf Lb 215/1; Lb 216/13, 20 verwiesen.
Nach der Erklärung des Begriffs „Logarithmensystem“ und der Feststellung, daß vorrangig dekadische Logarithmen betrachtet werden sollen, werden zum Abschluß der Stunde die Logarithmen der Potenzen von 10 mit ganzzahligen Exponenten ermittelt und die Schüler mit der Zielangabe für die folgenden Stunden bekanntgemacht.

Die Behandlung der *Eigenschaften der dekadischen Logarithmen* wird in der *2. Stunde* mit der Wiederholung der Potenzgesetze und des dekadischen Positionssystems begonnen. Bei der Wiederholung des Positionssystems sollte betont werden, daß sich jede positive reelle Zahl als Produkt aus einer rellen Zahl a ($1 \leqq a \leqq 10$) und einer Potenz der Zahl 10 mit ganzzahligem Exponenten darstellen läßt.
Im Anschluß an die Wiederholung kann eine Tabelle über die Logarithmen von Zahlen mit gleicher Ziffernfolge aufgestellt werden; vgl. Lb 148, Beispiel E 10. Dann sind die Schüler ohne weiteres in der Lage, die notwendigen Folgerungen weitgehend selbständig zu ziehen.
Als erste Folgerung erkennen die Schüler, daß die Mantisse von der Ziffernfolge des Numerus abhängig ist und die Größenordnung in die Kennziffer eingeht.

Numerus	Größenordnung	Logarithmus
$10^{-2} \leqq x < 10^{-1}$	10^{-2}	$-2 \leqq y < -1$
$10^{-1} \leqq x < 1$	10^{-1}	$-1 \leqq y < 0$
$10^{0} \leqq x < 10$	1	$0 \leqq y < 1$
$10^{1} \leqq x < 10^{2}$	10	$1 \leqq y < 2$
usw.	usw.	usw.

Durch diese Betrachtung wird die Behandlung des Rechenstabes unmittelbar vorbereitet.

Zur Festigung der Kenntnisse über die dekadischen Logarithmen kann – als Gegenbeispiel – auf die natürlichen Logarithmen informatorisch hingewiesen werden. Zu behandeln ist aber nur das dekadische Logarithmensystem; vgl. Lp 37.

Zum Abschluß dieser Unterrichtseinheit wird die *logarithmische Skale*, die den Schülern aus dem Unterricht in Klasse 7 bekannt ist, wiederholt. Dabei ist den Schülern mitzuteilen, daß eine Skale eine mögliche Darstellungsweise für eine Funktion ist. Auf diesem Gedanken aufbauend kann die Skale selbst aus dem Graphen der Funktion konstruktiv gewonnen werden und umgekehrt.

Auf Lb 149f wird vorgeschlagen, die aus der Logarithmentafel zu entnehmenden Werte unmittelbar auf eine Strecke mit der Länge 10 cm zu übertragen. Auch bei der oben angegebenen Konstruktion müssen die Funktionswerte aus der Logarithmentafel entnommen werden. Es bietet aber den Vorteil, daß der Zusammenhang zur Funktionsdarstellung besser erkennbar ist.

Zur Vorbereitung auf das Thema der folgenden Unterrichtseinheit 5.2.2. „Der Rechenstab" sollte nachgewiesen werden, daß bei einer logarithmischen Skale die Strecken für die einzelnen Intervalle $\langle 10^n; 10^{n+1} \rangle$ gleich lang sind. Auch wird darauf aufmerksam gemacht, daß die Skalen auf dem Rechenstab logarithmische Skalen sind.

5.2.2. **Der Rechenstab** (LE 10 bis 13; 7 Std.)

Der Algorithmus für die einzelnen Operationen mit Hilfe des Rechenstabes dürfte genügend gesichert sein, da er von den Schülern schon von Klasse 7 an angewendet wird. Ein wesentliches Problem, das hier erörtert werden muß, ist die *Stellenwertberechnung*, die bisher (nach dem Lehrplan für Klasse 7) nur durch einen Überschlag erfolgte. Jetzt stehen die Gesetze für das Rechnen mit Potenzen zur Verfügung, so daß die Angabe einer Zahl als Produkt aus einer (rationalen) Zahl zwischen 1 und 10 und aus einer Potenz der Zahl 10 mit ganzzahligem Exponenten (kurz „Zehnerpotenz" genannt) ohne weiteres möglich wird. Ein Überschlag sollte trotzdem niemals unterbleiben. Entsprechende Beispiele sind dazu auf Lb 219/50 bis 61 enthalten.
Besonders vorteilhaft ist das Abtrennen von Zehnerpotenzen, wenn festgestellt werden soll, ob beim Rechnen mit Hilfe des Rechenstabes ein Rückschlag notwendig ist. Da für die Faktoren nach dem Abtrennen der Zehnerpotenzen $1 \leqq a < 10$ gilt, kann gefolgert werden, daß der Rückschlag bei der Multiplikation stets dann notwendig ist, wenn das Produkt $a_1 \cdot a_2 > 10$ ist.
Hauptaspekt aller Bestrebungen in dieser Stoffeinheit muß sein, den Aufbau des logarithmischen Rechenstabes so exakt zu begründen, daß die Schüler die bisher geübten Verfahrensweisen voll verstanden haben und in der Lage sind, ein beliebiges

Stabsystem (an Hand der dem Rechenstab beigefügten Gebrauchsanweisung) zu erfassen. Es kommt deshalb nicht so sehr auf eine Vielzahl von Übungen bereits gesicherter Verfahren mit dem vorhandenen Rechenstab, als vielmehr auf die *Erläuterung des prinzipiellen Aufbaus eines Rechenstabes und seiner vielfältigen Einsatzmöglichkeiten* an. Ebenso kann nicht die Schnelligkeit im Einstellen und Ablesen als wesentlich angesehen werden, entscheidend sind vielmehr die Präzision bei der Einstellung und beim Ablesen der Werte sowie ein rationelles Rechnen.
In dieser Unterrichtseinheit werden umfangreiche Übungen durchgeführt.

Schwerpunkt der *1. Stunde* ist die *Behandlung der Logarithmengesetze*. Diese Gesetze werden aus den Potenzgesetzen hergeleitet. Das ermöglicht eine Wiederholung der Eigenschaften der Exponential- und Logarithmusfunktionen. Durch Beispiele wie Lb 151, Beispiele E 12 und E 13, wird den Schülern demonstriert, daß die Multiplikation von Zahlen auf die Addition ihrer Logarithmen zurückgeführt wird. Eine Aufgabe (z. B. Lb 152, Beispiel E 14) sollte nun unmittelbar auf das Arbeiten mit dem Rechenstab hinlenken. Alle anderen Fragestellungen können völlig unabhängig vom Stab behandelt werden.

In der *2. Stunde* der Unterrichtseinheit sollten alle wesentlichen *mathematischen Grundlagen des Rechnens mit Hilfe des Rechenstabes* erklärt werden. Die Besonderheiten des Rechnens sind den Schülern in der Regel bekannt. Es geht hier vor allem um die mathematische Begründung. Sie kann von den Schülern weitgehend selbständig gegeben werden. Sehr wesentlich ist dabei das Vergleichen der einzelnen Skalen des Stabes (einschließlich der Reziprokenskale).
In dieser Stunde kann auch noch das Verfahren für die Multiplikation und die Division begründet werden.

Weitere *vier Stunden* stehen nun für die *Behandlung der zusammengesetzten Aufgaben* zur Verfügung. Es sollten dabei die Übungen im Lösen formaler Aufgaben nicht überbetont werden. Nur insoweit, wie es für das Verständnis der behandelten Verfahren benötigt wird, sollte Zeit dafür verwendet werden.
Beim Lösen der Aufgaben kommt es darauf an, einige wichtige Probleme des rationellen Arbeitens bei zusammengesetzten Aufgaben zu behandeln. Das sind:

- Reihenfolge der Operationen bei zusammengesetzten Multiplikationen und Divisionen;
- Gebrauch der Proportionaleinstellung;
- Gebrauch der Teilstriche des Läufers;
- Übergang zwischen Skalengruppen;
- Überschlagsrechnungen, Runden;
- Aufstellen von Lösungsplänen.

Die Folge der Aufgaben auf Lb 218/49 bis Lb 222/93 gewährleistet ein systematisches Vorgehen.
An geeigneter Stelle sollte eine zusammenfassende Darstellung der Genauigkeit des Stabrechnens erfolgen; vgl. LE E 13. Es erscheint vorteilhaft, den entsprechenden Stoff in die Übungsstunden einzugliedern und später einen Schüler zusammenfassend darüber sprechen zu lassen.

Die *7. Stunde* sollte der *Zusammenfassung und Systematisierung* des Gelernten vorbehalten sein. Es ist nützlich, in Verbindung damit eine kurze Kontrollarbeit von den Schülern anfertigen zu lassen; Auswahl aus Lb 218/49 bis Lb 222/93.

5.2.3. Überblick über weitere Rechenhilfsmittel (LE 14; 2 Std.)

Die Auswahl der weiteren Rechenhilfsmittel, mit denen die Schüler bekannt gemacht werden sollen, obliegt im einzelnen dem Lehrer. Sie richtet sich auch wesentlich nach den örtlichen Möglichkeiten. Bevorzugt werden sollten natürlich moderne Hilfsmittel, die voraussichtlich auch noch in den nächsten zehn bis zwanzig Jahren im praktischen Gebrauch sein werden. Kann eine Rechenstation (oder eine „überschaubare" DV-Anlage mit ihren Peripheriegeräten) besichtigt werden, so sollte diese Gelegenheit unbedingt genutzt werden. Allgemeine Angaben über die Entwicklung und den Stand der Rechentechnik sind im Lehrbuch recht ausführlich und leicht faßlich dargestellt. Sie können z. B. vor der Besichtigung von den Schülern in häuslicher Arbeit gelesen werden. Fragen können dann unmittelbar bei der Besichtigung gestellt werden. Der wesentliche Vorteil einer Besichtigung ist darin zu sehen, daß im Betrieb die Anwendung der Rechentechnik unmittelbar an Beispielen gezeigt werden kann.

In der Aussprache nach der Besichtigung sollten den Schülern in einer knapp gefaßten Darstellung auch ökonomische Fragen des Einsatzes elektronischer Datenverarbeitungsanlagen erläutert werden. Solche Gespräche sind gut geeignet, die Schüler die große Bedeutung der Mathematik für die ökonomischen Fortschritte der entwickelten sozialistischen Gesellschaft erkennen zu lassen.

In den Schulen, denen aus verschiedenen Gründen eine derartige Besichtigung nicht möglich ist, sollte – eventuell durch die Fachzirkel – zumindest den Lehrern der Besuch eines Rechenzentrums ermöglicht werden, bei dem auch Informationen über Fragen des Einsatzes der Rechentechnik vermittelt werden. Dabei geht es auch darum, Informationen über den Einsatz der Rechentechnik in dem jeweiligen Kreis oder Bezirk zu erhalten.

Literaturverzeichnis

Grundsatzdokumente

[G 1] IX. Parteitag der SED, Berlin, 18. bis 22. Mai 1976. Bericht des Zentralkomitees der Sozialistischen Einheitspartei Deutschlands an den IX. Parteitag der SED. Berichterstatter: Genosse Erich Honecker. Dietz Verlag, Berlin 1976.

[G 2] IX. Parteitag der SED, Berlin, 18. bis 22. Mai 1976. Programm der Sozialistischen Einheitspartei Deutschlands. Dietz Verlag, Berlin 1976.

[G 3] VIII. Pädagogischer Kongreß der Deutschen Demokratischen Republik vom 18. bis 20. Oktober 1978. Protokoll. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1979.

[G 4] Gesetz über das einheitliche sozialistische Bildungssystem. Vom 25. Februar 1965. Gesetzblatt der DDR, I, 1965, Nr. 6.

[G 5] Lehrpläne, Klasse 1, Teil: Mathematik. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1967.

[G 6] Lehrpläne Deutsch und Mathematik, Klasse 2, Teil: Mathematik. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1968.

[G 7] Lehrpläne Deutsch und Mathematik, Klasse 3, Teil: Mathematik. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1969.

[G 8] Lehrplan für Mathematik, Klassen 6 bis 8. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1968.

[G 9] Lehrplan für Mathematik, Klassen 9 und 10. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1969.

[G 10] Lehrplan Mathematik, Klassen 5 bis 10, Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1977. Dieser Lehrplan enthält die hier unter [G 8] und [G 9] angegebenen Teillehrpläne und den Lehrplan für Klasse 5.

[G 11] Lehrplan Staatsbürgerkunde, Klasse 9. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1977.

[G 12] Lehrplan Staatsbürgerkunde, Klasse 10. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1977.

Fachliche, didaktische und methodische Arbeiten

Abkürzungen:

Päd Zeitschrift „Pädagogik", Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin
MSch Zeitschrift „Mathematik in der Schule", Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin

Eine Ziffer in Klammern hinter der Angabe der bibliographischen Daten – z. B. (3.) – bedeutet einen speziellen Beitrag für die Gestaltung des betreffenden Stoffgebiets oder -abschnitts. Bei Titeln allgemeineren Charakters fehlt eine solche Angabe.

[1] Alexandrow, P. S.: Einführung in die reellen Zahlen und die Theorie der reellen Funktionen. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1964

[2] Allgemeinbildung – Lehrplanwerk – Unterricht. Ausgearbeitet von einem Autorenkollektiv unter Leitung von G. Neuner. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1972

[3] Analysis für Ingenieur- und Fachschulen. VEB Fachbuchverlag, Leipzig 1968

[4] Arnold, K.: Anwenden von Ungleichungen bei der Lösung von formalen Textaufgaben und Sachaufgaben. MSch Jg. 6 (1968), H. 3, S. 203 – (2.)

[5] Autorenkollektiv unter Leitung von W. Walsch und K. Weber: Methodik Mathematikunterricht. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1975

[6] BOCK, H., und W. WALSCH: Zum logischen Denken im Mathematikunterricht. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1975
[7] BUCHE, M.: Zur Einführung des Rechenstabes. MSch Jg. 6 (1968), H. 7, S. 535 – (5.2.)
[8] DIETZ, A.: Aspekte des kalkülmäßigen, algorithmischen Arbeitens bei der Behandlung von Gleichungen und Ungleichungen. MSchr Jg. 5 (1967), H. 11, S. 850 – (2., 4.)
[9] DIETZ, A.: Über die Bedeutung logischer Verknüpfungen bei der Lösung von quadratischen Gleichungen und von Gleichungssystemen. MSch Jg. 1 (1963), H. 3, S. 174 – (2., 4.)
[10] DIETZEL, K.: Stand und Aufgaben des Mathematikunterrichts bei der weiteren inhaltlichen Ausgestaltung der Oberschule. MSch Jg. 13 (1975), H. 7, S. 353
[11] DRÖSE, H.: Typische Beispiele von Sachaufgaben, die durch Gleichungssysteme mit zwei Variablen dargestellt werden können. MSch Jg. 8 (1970), H. 7, S. 524 – (2.)
[12] EISERBECK, S.: Erhöhung der Rechenkultur der Schüler – ein Beitrag zur Realisierung des polytechnischen Prinzips. MSch Jg. 16 (1978), H. 11, S. 577 – (3.1.; 4.2.)
[13] FLADE, L.: Systematisierungen zum Thema „Zahlenbereiche", Klasse 9. MSch Jg. 15 (1977), H. 9, S. 504 – (1.)
[14] FANGHÄNEL, G., und K. WEBER: Zu Fragen der kommunistischen Arbeitserziehung im Mathematikunterricht. MSch Jg. 16 (1978), H. 5, S. 225
[15] FANGHÄNEL, G., und H. VOCKENBERG: Arbeiten mit Mengen. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1978
[16] FEHRINGER, K.: Näherungsrechnen – Gleichungen – Ungleichungen. Einige Probleme der praktischen Mathematik. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1978
[17] FUHRMANN, E.: Zum Definieren im Mathematikunterricht. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1973
[18] GOMM, E.: Neue Lehrpläne – Schulordnung – Unterrichtsplanung. Päd. Jg. 23 (1968), H. 10, S. 852
[19] GOMM, E.: Die Vorbereitung auf die Unterrichtsstunde. Päd Jg. 23 (1968), H. 11, S. 986
[20] GÖRKE, L.: Mengen – Relationen – Funktionen. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1974
[21] GOTTESMANN, S.: Diskussion linearer Gleichungen mit einer Unbekannten. MSch Jg. 6 (1968), H. 4, S. 266 – (2.)
[22] GRASSMANN, H., und F. HOMAGK: Reelle Zahlen. MSch Jg. 4 (1966), H. 10, S. 738 – (1.2.)
[23] HAUPT, D.: Einige Beispiele zur Lösung von Ungleichungen mit Hilfe der Mengenlehre. MSch Jg. 2 (1964), H. 1, S. 9, und H. 10, S. 768 – (2.)
[24] HENKEL, W., und A. SCHÄFER: Erfahrungen mit dem Unterrichtsprogramm „Exponentialgleichungen". MSch Jg. 6 (1968), H. 3, S. 207 – (5.1.)
[25] HERZOG, H.: Die Durchführung der Probe im Mathematikunterricht. MSch Jg. 2 (1964), H. 5, S. 346
[26] HOPFE, A.: Einige Überlegungen zur Bedeutung und Stellung der Kontrolle und deren Verfahren im Mathematikunterricht. MSch Jg. 8 (1970), H. 5, S. 356
[27] Instruktion für die Lehrplanarbeit. Pädagogische Forschung Berlin, Jg. 7 (1966), H. 6, S. 98
[28] JÄKEL, E.: Die Verwendung von Kerblochkarten bei der intensiveren Nutzung von Fehleranalysen im Fach Mathematik. MSch Jg. 8 (1970), H. 5, S. 375
[29] KAISER, G.: Methodische Leitprinzipien für den Mathematikunterricht. – (3) Systematische unterrichtliche Behandlung von Beweisaufgaben. MSch Jg. 6 (1968), H. 10, S. 738
[30] KEGEL, O., und F. NEIGENFIND: Zu Problemen mündlicher Prüfungen im Fach Mathematik. MSch Jg. 4 (1966), H. 4, S. 247
[31] KANNEGIESSER, K.: LENIN über die Mathematik. MSch Jg. 8 (1970), H. 4, S. 242
[32] Kleine Enzyklopädie Mathematik. VEB Bibliographisches Institut, Leipzig 1967
[33] KREBS, M.: Zur Planung des Mathematikunterrichts mit Unterrichtshilfen. MSch Jg. 12 (1974), H. 4, S. 213
[34] KUNTZE, G.: Meine Erfahrungen beim Beweisen in Klasse 9. MSch Jg. 16 (1978), H. 12, S. 651
[35] LANDA, L. N.: Algorithmierung im Unterricht. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1969
[36] LANGER, O., und W. TRÄGER: Sozialistische Wehrerziehung im Mathematikunterricht. MSch Jg. 10 (1972), H. 3, S. 132, H. 4, S. 205

[37] Lehrplanwerk und Unterrichtsgestaltung. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1969
[38] LEMKE, H., und W. STOYE: Einige Hinweise zur Behandlung der reellen Zahlen in Klasse 9. MSch Jg. 12 (1974), H. 7, S. 373, H. 8, S. 455
[39] LEY, H., und K.-F. WESSEL (Hrsg.): Weltanschaulich-philosophische Bildung im mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht (Beiträge). Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1972
[40] MADER, O.: Zur logischen Gliederung des Bildungs- und Erziehungsziels. Päd. Jg. 21 (1966), H. 3, S. 219
[41] Mathematik in Übersichten – Wissensspeicher für die Klassen 8 bis 10. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1973
[42] NEUNER, G.: Zur Theorie der sozialistischen Allgemeinbildung. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1973
[43] OSTROWSKI und KORDEMSKI: Zeichnen hilft Rechnen. VEB Fachbuchverlag, Leipzig 1963
[44] PAULIN, C.: Struktur und Programmierung von kleinen Digitalrechnern. MSch Jg. 3 (1965), H. 12, S. 881, Jg. 4 (1966), H. 8, S. 561, Jg. 5 (1967), H. 6, S. 415 – (5.2.)
[45] PIETZSCH, G.: Einige Ergebnisse einer Schülerbefragung zum Stoffabschnitt „1.2. Reelle Zahlen" in Klasse 9. MSch Jg. 10 (1972), H. 8/9, S. 486 – (1.)
[46] PIETZSCH, G.: Methodische Probleme bei der Behandlung der reellen Zahlen in Klasse 9. MSch Jg. 10 (1972), H. 6, S. 335 – (1.)
[47] POLLOK, H.-J.: Über schöpferische geistige Fähigkeit beim Aufgabenlösen im Mathematikunterricht. MSch Jg. 6 (1968), H. 7, S. 496
[48] POPPE, G.; POPPE, D., und RUB, R.: Erfahrungen bei der Behandlung des Stoffabschnitts „4.2. Quadratische Gleichungen" in Klasse 9. MSch Jg. 14 (1976), H. 2/3, S. 117 – (4.2.)
[49] RENTNER, W.-D.: Über einige dem fachwissenschaftlichen Gegenstand des Mathematikunterrichts entsprechenden Aspekte der ideologischen Bildung und Erziehung. MSch Jg. 10 (1972) H. 5, S. 257
[50] REHM, M.: Hinweise zur Behandlung des Stoffgebiets „1. Arbeiten mit Variablen" in Klasse 8 nach dem neuen „Lehrplan für Mathematik – Klassen 6 bis 8". MSch Jg. 7 (1969), H. 8, S. 594 – (1.3.)
[51] RICHTER, D.: Der Aufbau des Zahlenbereichs der reellen Zahlen. MSch Jg. 4 (1966), H. 10, S. 716, und Jg. 5 (1967) H. 1, S. 6 – (1.1; 1.2.)
[52] RICHTER, D.: Die Anwendung mathematischer Begriffe zur Widerspiegelung gemeinsamer Eigenschaften von unterschiedlichen Sachverhalten der Praxis. MSch Jg. 6 (1968), H. 1, S. 65
[53] RITTER, K.: Über einige wesentliche Gestaltungsmerkmale eines modernen Mathematikunterrichts. MSch Jg. 7 (1969), H. 8, S. 562
[54] RÖSEL, R.: Regelmäßige Übungen führen zu sicheren Kenntnissen. Mathematik und Physik in der Schule, Berlin, Jg. 9 (1962), H. 3, S. 184
[55] ROSSA, E.: Zur Einheit von Bildung und Erziehung im mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht. Päd. Jg. 24 (1969), H. 12, S. 1120
[56] SCHLOSSER, G.: Über den Einfluß der Aufgabenstellung auf die Entwicklung von Fähigkeiten und Fertigkeiten der Schüler. MSch Jg. 8 (1970), H. 4, S. 263
[57] SCHNEIDER, S.: Vorschläge zur Behandlung des Stoffabschnitts „1.2. Reelle Zahlen", Klasse 9. MSch Jg. 16 (1978), H. 6, S. 329 (Teil 1), H. 7/8, S. 376 (Teil 2) – (1.2.)
[58] SCHULZ, F.: Staatsbürgerliche Erziehung im Mathematikunterricht. MSch Jg. 5 (1967), H. 10, S. 721
[59] SCHULZ, R.: Methodische Leitprinzipien für den Mathematikunterricht. – (4) Prinzipien zur Gestaltung von Übungsstunden. MSch Jg. 7 (1969), H. 11, S. 832
[60] SOTSCHECK, P.: Gedanken zur Verwirklichung des polytechnischen Prinzips beim Arbeiten mit Gleichungen, Ungleichungen und Funktionen. MSch Jg. 14 (1976), H. 12, S. 652
[61] STAHL, F., und E. WENZEL: Elektronische Datenverarbeitung. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1975
[62] Tabellen und Formeln – Mathematik, Physik, Chemie. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1973
[63] VOGEL, B.: Einige Aspekte staatsbürgerlicher Erziehung im Mathematikunterricht. MSch Jg. 10 (1972), H. 10, S. 545, Jg. 11 (1973), H. 1, S. 1

[64] WALSCH, W.: Bemerkungen zur Einheit von sprachlicher und logischer Bildung im Mathematikunterricht. MSch Jg. 5 (1967), H. 7, S. 490

[65] WALSCH, W.: Zum Beweisen im Mathematikunterricht. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1972

[66] WEBER, K.: Neue Lehrpläne für den Mathematikunterricht der Klassen 6, 7 und 8. MSch Jg. 7, (1969), H. 1, S. 1

[67] WEBER, K.: Neue Lehrpläne für den Mathematikunterricht der Klassen 9 und 10. MSch Jg. 8 (1970), H. 5 (Teil 1), H. 6 (Teil 2)

[68] WENDT, L.: Programmierte Leistungskontrollen. MSch Jg. 5 (1967), H. 6, S. 481

[69] WIESEMANN, H.: Hinweise für einige Unterrichtsstunden zum Stoffabschnitt „Potenzfunktionen" (Klasse 9). MSch Jg. 8 (1970), H. 10, S. 747 – (3.)

[70] WIESEMANN, H.: Methodische Leitprinzipien für den Mathematikunterricht – (1) Prinzip der Aktivierung der Schüler. MSch Jg. 5 (1967), H. 8, S. 582

[71] WINCKELMANN, K.: Hinweise und Erläuterungen zum Unterrichtsmittel-Bedarfsplan des Faches Mathematik. MSch Jg. 9 (1971), H. 8/9, S. 531

[72] WOHLRABE, M.: Zur Behandlung der Exponential- und Logarithmusfunktionen unter dem Aspekt des Festigens. MSch Jg. 16 (1978), H. 4, S. 204 – (5.1.)

[73] WOHLRABE, M.: Zur Verbindung von altem und neuem Wissen im Stoffgebiet „Potenzen und Potenzfunktionen". MSch Jg. 14 (1976), H. 12, S. 657 – (3.)

[74] ZOLL, S.: Rationelle Leistungskontrollen. MSch Jg. 6 (1968), H. 6, S. 434