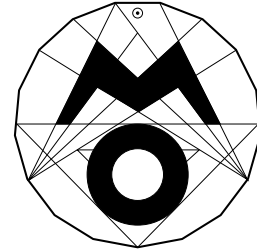


35. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulrunde)
Olympiadeklasse 5
Aufgaben

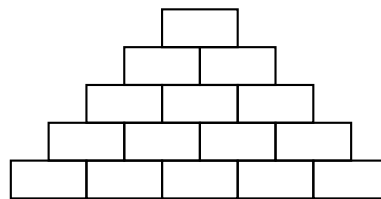


© 1995 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e. V.*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.

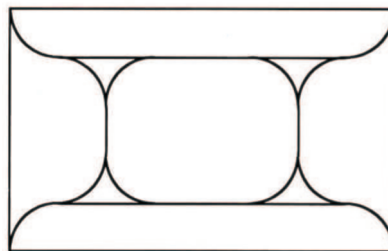
350511

- a) Eine Mauer aus farbigen Steinen soll nach dem Muster der Abbildung A 350511 a aufgebaut werden. Die Farben sollen so angeordnet sein, daß niemals zwei gleichfarbige Flächen aneinanderstoßen. Auch sollen möglichst wenige Farben vorkommen. Mache einen Vorschlag für eine solche Färbung!



A 350511 a

- b) Auf einem Blumenbeet sollen neun Teilflächen so zu erkennen sein, wie die Abbildung A 350511 b zeigt. In jede Teilfläche sollen Blumen einer Farbe gepflanzt werden. Auch hier sollen niemals zwei gleichfarbige Flächen aneinanderstoßen, und es sollen möglichst wenige Farben vorkommen.



A 350511 b

Mache auch hierzu einen Vorschlag!

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

350512

Klaus stellt Rechenaufgaben zusammen. Er verwendet keine anderen Zeichen als die in den folgenden Kästchen. Er kann aber Zeichen mehrfach verwenden, wenn er will.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	+	-	•	:	()
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Wenn er zum Beispiel mit genau zehn Ziffern 3 das Ergebnis 100 erhalten will, so kann er die Rechenaufgabe $33 + 33 + 333 : (3 \cdot 3) - 3$ bilden.

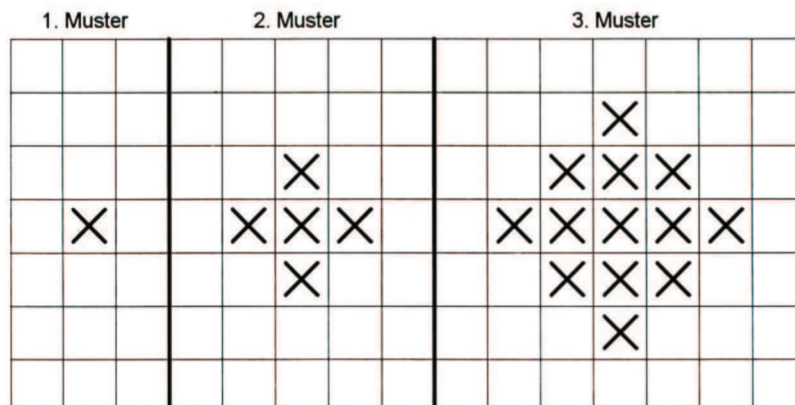
Welche Rechenaufgabe kann er bilden, um das Ergebnis 100

- a) mit genau fünf Ziffern 1,
- b) mit genau fünf Ziffern 3,
- c) mit genau fünf Ziffern 5,
- d) mit den neun Ziffern von 1 bis 9, von denen jede genau einmal verwendet wird,

zu erhalten?

350513

Regina zeichnet Muster auf Kästchenpapier. Hat sie ein Muster fertig, so bildet sie daraus ein neues Muster. Das macht sie so: Sie zeichnet in jedes Kästchen, das oben, unten, rechts oder links von einem Kreuz des vorigen Musters liegt und noch leer ist, ein neues Kreuz. Die ersten drei Muster sind in der Abbildung A 350513 zu sehen.



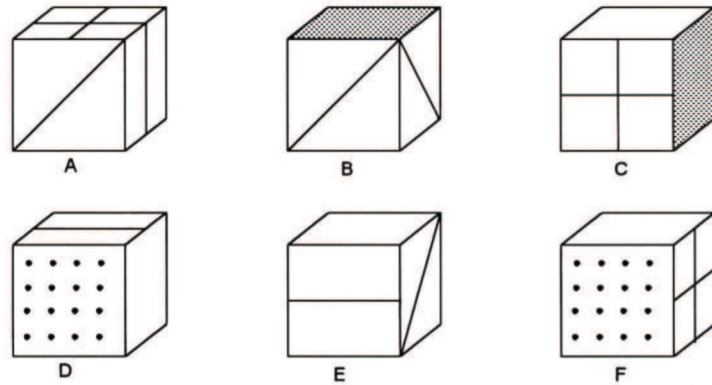
A 350513

- a) Ermittle die Anzahl der Kreuze im 4. und im 5. Muster.
- b) Regina möchte aus den Anzahlen der Kreuze im 4. und im 5. Muster die Anzahl der Kreuze im 6. Muster errechnen. Gib eine Möglichkeit an, mit welchen Rechenoperationen dies geschehen kann.
- c) Finde eine Möglichkeit, wie man stets die Anzahl der Kreuze eines Musters aus den Anzahlen der Kreuze in den zwei vorhergehenden Mustern errechnen kann.

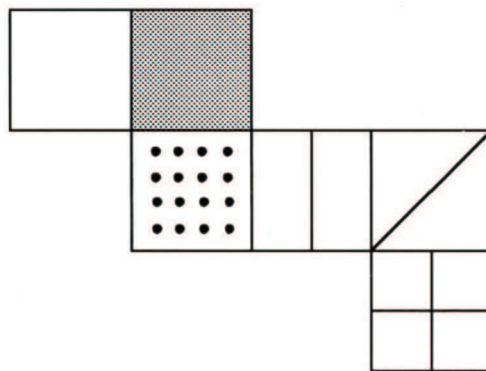
Auf der nächsten Seite geht es weiter!

350514

Stelle für jeden der Würfel *A* bis *F* in der Abbildung A 350514 a fest, ob er sich aus dem Netz in der Abbildung A 350514 b basteln läßt oder nicht!

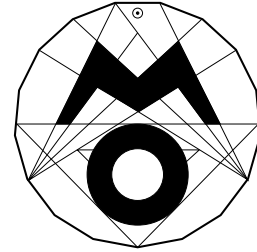


A 350514 a



A 350514 b

35. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Olympiadeklasse 5
Aufgaben

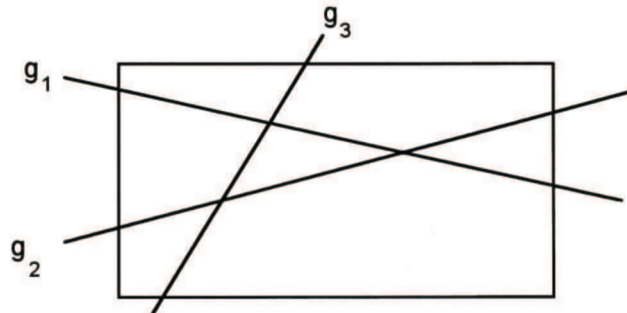


© 1995 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e. V.*
 www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

350521

- a) In der Abbildung A 350521 wird ein Rechteck durch drei Geraden g_1, g_2, g_3 in Teilflächen zerlegt. Diese Teilflächen sollen so gefärbt werden, daß niemals zwei Teilflächen, die entlang einer Linie benachbart sind, dieselbe Farbe haben. (Sind zwei Teilflächen nur an einer Ecke benachbart, so wird an diese Teilflächen keine Forderung gestellt.) Insgesamt sollen möglichst wenige Farben verwendet werden.



A 350521

Gib ein Beispiel einer derartigen Färbung an!

- b) In die Abbildung A 350521 soll eine zusätzliche Gerade g_4 eingezeichnet werden. Die Vorschrift für Farben in benachbarten Teilflächen bleibt dieselbe. Zeichne Beispiele für verschiedene Lagemöglichkeiten einer vierten Geraden und gib bei diesen Beispielen an, welche kleinstmögliche Anzahl von Farben nun ausreicht! Eine Begründung wird nicht verlangt.
- c) Peter behauptet: „Man kann in die (unveränderte) Abbildung A 350521 eine zusätzliche Linie l so einzeichnen, daß das Rechteck in Teilflächen eingeteilt wird, zu deren Färbung drei Farben nötig sind, wenn die Vorschrift für Farben in benachbarten Teilflächen dieselbe bleibt.“

Gib ein Beispiel an, falls Peter recht hat!

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

350522

Andreas, Bernd, Claus, Dieter, Eric, Franz und Gunther waren die Teilnehmer an einem 100 m-Lauf. Keine zwei von ihnen hatten in dem Lauf dieselbe Zeit erreicht. Über die Reihenfolge ihres Zieleinlaufs wird berichtet:

- (1) Andreas kam direkt vor Bernd und unmittelbar hinter Claus ins Ziel.
- (2) Dieter lief gleich hinter Eric ein.
- (3) Franz erzielte den mittleren der sieben Plätze.

Ferner ist bekannt:

- (4) Andreas und Dieter wohnen in A-Stadt.
- (5) Den zweiten Platz schaffte ein Junge aus B-Stadt.

Wie war nach diesen Informationen die Platzverteilung?

350523

Axel, Bruno, Christian und Dirk wollen Boot fahren. Zur Verfügung stehen zwei Paddelboote und ein Tretboot.

- a) Zuerst wollen sie nur eines der Paddelboote und das Tretboot verwenden, jedes dieser beiden Boote für zwei Jungen. Nenne alle Möglichkeiten, die es hierzu für die Verteilung der Jungen auf die Boote gibt!
- b) Dann wollen sie Wettfahrten machen: In einem Paddelboot sollen zwei Jungen fahren, im anderen Paddelboot die beiden anderen Jungen. Jede Möglichkeit, die vier Jungen in dieser Weise aufzuteilen, soll in genau einer Wettfahrt stattfinden. Aus diesen Wettfahrten soll das ganze „Turnier“ bestehen. Nenne alle Wettfahrten des Turniers!
Axel fragt: „Wenn man sich nur von jeder einzelnen Wettfahrt merkt, welches Zweier-team das schnellere war, kann man dann schon daraus ersehen, welches Zweier-team im gesamten Turnier das schnellste war?“
Bruno meint: „Nein. Selbst wenn nämlich in einem zweiten Turnier bei jeder einzelnen Wettfahrt wieder dasselbe Zweier-team das schnellere wird wie im ersten Turnier, so kann dabei trotzdem das schnellste Zweier-team im gesamten zweiten Turnier ein anderes werden als im ersten.“
Kann man Brunos Behauptung durch ein Beispiel belegen?
- c) Am Ende wollen sie nur noch ein bißchen paddeln. Einer der vier soll sich an Land ausruhen, einer soll ein Paddelboot alleine benutzen, die beiden übrigen Jungen das andere Paddelboot. Christian will aber nicht mit Dirk in einem Boot sein.
Nenne alle Möglichkeiten, die es hiernach für die Aufteilung der Jungen gibt!

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

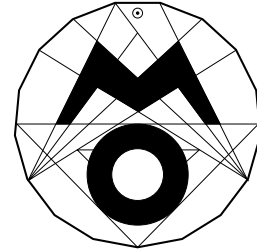
350524

Frank nimmt in jede Hand eine Anzahl Kugeln, keine Hand bleibt leer. Er verrät: „In einer Hand habe ich eine gerade Anzahl Kugeln, in der anderen Hand eine ungerade Anzahl.“

Michael sagt: „Multipliziere die Anzahl der Kugeln in der linken Hand mit 4, die Anzahl der Kugeln in der rechten Hand mit 5 und nenne die Summe dieser beiden Produkte!“

- a) Wie kann man, wenn die Summe genannt wird, mit Sicherheit die Aussage erhalten, in welcher Hand die gerade und in welcher Hand die ungerade Anzahl Kugeln ist?
- b) Wie kann man, wenn die Summe 60 genannt wird, mit Sicherheit die beiden Anzahlen der Kugeln herleiten, die Frank in der linken Hand und in der rechten Hand hat?

35. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Olympiadeklasse 5
Aufgaben

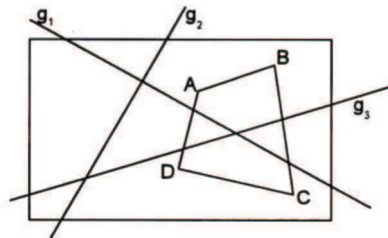


© 1996 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e. V.*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

350531

In der Abbildung A 350531 wird ein Rechteck durch drei Geraden g_1, g_2, g_3 und ein Viereck $ABCD$ in Teilflächen zerlegt. Diese Teilflächen sollen so gefärbt werden, daß niemals zwei Teilflächen, die entlang einer Linie benachbart sind, dieselbe Farbe haben. (Sind zwei Teilflächen nur in einem Punkt benachbart, so wird an diese Teilfläche keine Forderung gestellt.)



A 350531

- Anita behauptet: „Man kann eine Färbung der geforderten Art mit zwei Farben erreichen.“ Hat Anita recht? Wenn ja, gib eine derartige Färbung an!
- Jetzt soll anstelle des Vierecks $ABCD$ ein anderes Viereck $EFGH$ gewählt werden. Es darf auch gemeinsame Linien mit den Geraden haben.
Bernd sagt: „Man kann $EFGH$ so wählen, daß durch g_1, g_2, g_3 und $EFGH$ eine Zerlegung entsteht, bei der zum Färben der Teilflächen mehr als zwei Farben erforderlich sind.“ Hat Bernd recht? Wenn ja, zeichne eine solche Zerlegung, gib eine derartige Färbung an und erkläre, warum zwei Farben nicht ausreichen!
- Christiane will eine Zerlegung durch g_1, g_2, g_3 und zwei Vierecke $KLMN$ und $PQRS$ bilden, bei der zum Färben der Teilflächen mehr als drei Farben erforderlich sind. Wenn das möglich ist, zeichne eine solche Zerlegung und erkläre, warum drei Farben nicht ausreichen!

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

350532

Alexandra, Birgit, Cornelia, Doris und Elena wollen Tischtennis spielen. Allerdings steht nur eine Tischtennisplatte zur Verfügung. Deswegen wollen sie ein Doppel-Turnier austragen (d.h., vor jedem Spiel des Turniers werden zwei Teams gebildet, jedes dieser Teams aus zwei Spielerinnen).

- a) Welche verschiedenen Teams gibt es? Welche verschiedenen Spiele gibt es? Zähle alle Möglichkeiten auf!
- b) Wieviel Zeit ist für ein Turnier aus allen diesen Spielen anzusetzen, wenn für je vier Spiele eine Stunde angesetzt werden soll?
- c) Nach dem Turnier sagt Elena: „Ich war in neun Spielen im Siegerteam!“ Doris sagt: „Komisch, ich auch!“ Kann das stimmen?

350533

- a) In der Zeit, als der Rechenmeister Adam Ries lebte, gab es in verschiedenen deutschen Ländern unterschiedliche Währungen. In der Umgebung von Leipzig bezahlte man mit Gulden (*fl*), Groschen (*gr*) und Pfennigen (*pf*). Für 2 Gulden erhielt man 42 Groschen, für 60 Pfennige bekam man 5 Groschen.

Wie viele Pfennige erhielt man für einen Gulden?

- b) In einem Rechenbüchlein von Adam Ries steht folgende Aufgabe:

Item / Einer hat empfangen / wie hernach verzeichnet

<i>fl</i>	<i>gr</i>	<i>pf</i>
123	17	9
145	15	11
207	11	7
278	13	6

Wieviel macht es in einer summa?

Das heißt: Jemand hat die genannten Beträge erhalten. Wie groß ist ihre Summe?

Wie kann man diese Summe mit möglichst wenig Geldstücken zusammenstellen?

- c) Die Summe soll so an zwei Brüder verteilt werden, daß der eine doppelt so viel erhält wie der andere. Wieviel bekommt jeder? Wie kann man diese beiden Anteile so auszahlen, daß man dabei möglichst wenig Geldstücke verwendet?

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

350534

In einem Karton liegen 40 Kugeln. Jede Kugel hat genau eine der Farben Blau, Grün, Rot, Schwarz, Weiß; jede dieser Farben kommt mindestens einmal vor. Ferner gilt:

Die Anzahl der blauen Kugeln ist doppelt so groß wie die Anzahl der grünen Kugeln.

Es gibt genau halb so viele rote Kugeln wie blaue.

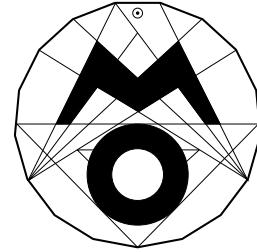
Es gibt genau doppelt so viele weiße Kugeln wie blaue.

- a) Stelle in einer Tabelle alle möglichen Verteilungen der Farben zusammen! (Darin soll jedesmal eine Verteilung so angegeben werden, daß für jede Farbe die Anzahl der Kugeln in der Tabelle steht.)
- b) Katja nimmt 7 Kugeln aus dem Karton. Darunter sind fünf Kugeln mit gleicher Farbe. Welche Farbe kann dies sein? Nenne für jede in a) gefundene Verteilung alle Möglichkeiten!
- c) Nun legt Katja die 7 Kugeln in den Karton zurück und nimmt dann 18 Kugeln heraus. Unter diesen gibt es keine fünf Kugeln mit gleicher Farbe. Wenn Katja aber noch irgend eine der restlichen Kugeln herausnehmen würde, so wären in jedem Fall unter den 19 herausgenommenen Kugeln fünf mit gleicher Farbe.

Welche Verteilung müssen hiernach die 40 Kugeln haben?

Hinweis: Nutze nochmals deine Tabelle!

35. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulrunde)
Olympiadeklasse 6
Aufgaben



© 1996 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e. V.*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

350611

In Anlehnung an eine alte indische Erzählung kann man das folgende Gedankenspiel treiben: Auf einem Schachbrett liegt auf dem ersten Feld ein Pfennig; auf dem zweiten liegen 2 Pfennige, auf dem dritten Feld 4 Pfennige. Auch auf jedem weiteren Feld liegen jeweils doppelt so viele Pfennige wie auf dem vorhergehenden Feld.

- a) Zeige, daß auf dem 16. Feld 32^3 Pfennige liegen! (Zur Schreibweise siehe unten den Hinweis.)
- b) Suche ähnliche Darstellungen in Potenzschreibweise für die Anzahl der Pfennige auf dem 29. Feld sowie auf dem 64. Feld!
- c) Wie viele Pfennige befinden sich zusammengenommen auf den ersten 28 Feldern des Schachbrettes?
(Auch zur Angabe dieser Anzahl genügt eine Darstellung, bei der – unter anderem – von der Potenzschreibweise Gebrauch gemacht wird.) Vergleiche diese Anzahl mit der Anzahl der Pfennige auf dem 29. Feld!
- d) Versuche, in ähnlicher Form allgemein anzugeben, wie viele Pfennige sich zusammengenommen auf den ersten n Feldern befinden! Gib dann auch in entsprechender Darstellung an, wie viele Pfennige insgesamt auf dem Schachbrett sind!

Hinweis: 32^3 (gelesen: „32 hoch 3“) bedeutet $32 \cdot 32 \cdot 32$. Man nennt 32^3 die Potenz mit der Basis 32 und dem Exponent 3. Allgemein bedeutet z^n (gelesen „z hoch n“) das Produkt aus n Faktoren, die alle z lauten.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

350612

Ruth beschriftet sechs Kärtchen, jedes mit genau einer der Ziffern 1, 2, 4, 5, 7, 8, so daß jede dieser Ziffern auf genau einem Kärtchen steht.

- a) Sie will die Kärtchen einmal so legen, daß eine Additionsaufgabe zweier dreistelliger Zahlen mit dem Ergebnis 702 entsteht.

$$\begin{array}{r} \square \square \square \\ + \square \square \square \\ \hline 7 \quad 0 \quad 2 \end{array}$$

A 350612 a

Ein anderes Mal soll eine Additionsaufgabe dreier zweistelliger Zahlen mit dem Ergebnis 135 entstehen (siehe Abbildung A 350612 b).

$$\begin{array}{r} \square \square \\ + \square \square \\ + \square \square \\ \hline 1 \quad 3 \quad 5 \end{array}$$

A 350612 b

Gib je eine Möglichkeit hierzu an!

- b) Nun sollen die Kärtchen so gelegt werden, daß eine Additionsaufgabe zweier dreistelliger Zahlen mit einem möglichst großen **dreistelligen Ergebnis** entsteht. Gib eine Möglichkeit hierzu an! Wie lautet die möglichst große dreistellige Summe?

Ebenso soll mit den Kärtchen durch Addition dreier zweistelliger Zahlen eine möglichst große **zweistellige Summe** entstehen. Wie lautet diese Summe? Gib eine solche Addition an!

- c) Schließlich sollen die Kärtchen so gelegt werden, daß durch Addition zweier dreistelliger Zahlen eine überhaupt möglichst große Summe entsteht. Wie lautet sie?

350613

Die Klasse 6a möchte in ihrem Klassenraum Fußboden, Wände und Decken renovieren. Auch 20 Eltern wollen sich an den Arbeiten beteiligen.

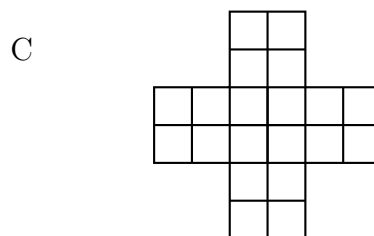
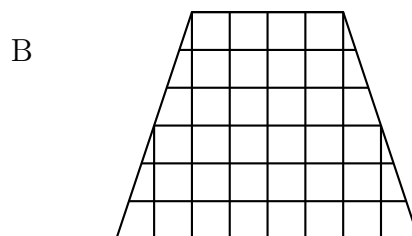
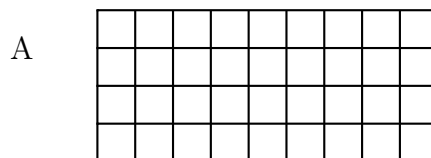
- a) Diese 20 Personen sollen in drei Arbeitsgruppen aufgeteilt werden. In jeder dieser drei Gruppen sollen mindestens 4 Personen sein. Gib alle Möglichkeiten für die drei Gruppenstärken an! Dabei genügt es, von Aufteilungen, die sich nur in der Reihenfolge der Gruppenstärken unterscheiden, nur eine zu nennen.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

- b) Drei Schüler besorgen Informationen über ansprechende Farben und Muster. Sie schlagen zur Auswahl vor: 3 verschiedene Fußbodenfarben, 5 verschiedene Tapetenmuster, 4 verschiedene Deckenfarben. Wie viele Zusammenstellungen aus je einer Fußbodenfarbe, einem Tapetenmuster und einer Deckenfarbe könnten unter Verwendung dieser Vorschläge insgesamt gebildet werden?
- c) Die Fußbodenfarbe kann in Eimern zu je 9 Litern besorgt werden. Nach der Aufschrift auf den Eimern reicht ein Liter mit Sicherheit für 2 Quadratmeter. Die Schüler haben den Klassenraum gemessen und überlegen nun, welche (möglichst kleine) Anzahl von Eimern hiernach mit Sicherheit ausreicht. Finde diese Anzahl, wenn Folgendes gemessen wurde! Der Klassenraum ist 7,76 m breit und 9,94 m lang. Zusätzlich zu dieser rechteckigen Fußbodenfläche ist eine Fußbodenleiste zu streichen. Sie verläuft 6 cm breit um den gesamten Raum herum mit Ausnahme der Tür, die 1 m breit ist. Die Fußbodenfläche soll zweimal gestrichen werden, die Fußbodenleiste nur einmal.

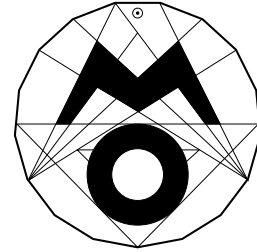
350614

Wähle zu jeder der Figuren *A*, *B* und *C* der Abbildung A 350614 höchstens je 5 Geraden, die die betreffende Figur in Teilflächen zerlegen! Diese Teilflächen sollen sich dann zu einem Quadrat zusammensetzen lassen, ohne daß Lücken zwischen ihnen frei bleiben oder sich Teile überlappen; und alle Teilflächen der betreffenden Figur sollen dabei verbraucht werden.



A 350614

35. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulrunde)
Olympiadeklasse 6
Aufgaben



© 1995 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e. V.*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

350621

Anton besucht einen Jahrmarkt. An einem Karussell sieht er viele bunte Lampen blinken; auf den ersten Blick erscheint ihm das ganz unregelmäßig. Aber der Inhaber des Karussells erklärt ihm: „Vom Einschalten an gerechnet blinken die blauen Lampen alle 2 Sekunden, die roten alle 3 Sekunden und die grünen alle 5 Sekunden.“

- a)
 1. Wann blinken zum ersten Mal nach gleichzeitigem Einschalten aller Lampen mindestens zwei Farben gleichzeitig? Welche Farben sind das?
 2. Wann blinken zum ersten Mal nach gleichzeitigem Einschalten aller Lampen alle drei Farben gleichzeitig?
- b) Wann blinken zum ersten Mal, nachdem mindestens 60 Sekunden seit dem gleichzeitigem Einschalten aller Lampen vergangen sind, genau zwei Farben (das heißt zwei Farben, aber nicht drei) gleichzeitig?
- c)
 1. Zusätzlich werden noch gelbe Lampen angebracht, die vom Einschalten an gerechnet alle 7 Sekunden blinken. Wann blinken zum ersten Mal nach gleichzeitigem Einschalten aller Lampen alle vier Farben gleichzeitig?
 2. Welches sind bis einschließlich vier Minuten nach gleichzeitigem Einschalten alle Zeitpunkte, in denen genau drei Farben gleichzeitig blinken?

350622

Die Autokennzeichen im Lande Phantasia haben die Form

PH – ** ????.

Dabei steht für ** einen Buchstaben oder für zwei Buchstaben; als Buchstabe ist jedes der 26 Zeichen **A, . . . , Z** zugelassen. Ferner steht ???? für eine Ziffer, zwei Ziffern, drei Ziffern oder vier Ziffern; als Ziffer ist jedes der neun Zeichen **1, . . . , 9** zugelassen.

- a) Welches ist die größtmögliche Anzahl von Autos, bei denen ** für einen Buchstaben steht?
- b) Welches ist die größtmögliche Anzahl von Autos, bei denen ???? für eine Ziffer steht?

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

- c) Nach einem Banküberfall sagt ein Zeuge über das Kennzeichen des Phantasia-Fluchtautos: „Das Kennzeichen hatte im Ziffernteil genau drei Ziffern. Zwei dieser Ziffern waren einander gleich, sie standen unmittelbar nebeneinander. Die dritte Ziffer war von ihnen verschieden.“ Welches ist die größtmögliche Anzahl von Autos, auf die diese Beschreibung zutrifft?
- d) Welches ist die Anzahl aller Phantasia-Kennzeichen, die es überhaupt geben kann?

350623

Herr **K**omisch, Herr **E**rnst und Herr **W**itzig treffen sich zum Skat. Ihre Vornamen sind (möglicherweise in anderer Reihenfolge) **K**laus, **E**gon und **W**alter. Einer von ihnen trägt **keinen** Schlips, ein anderer einen **einfarbigen** und der dritte einen **witzigen** Schlips. Nach dem Spiel stellen sie fest:

- (1) Der Gewinner der Skatrunde trägt den **einfarbigen** Schlips.
- (2) Herr **E**rnst saß noch nie vorher auf Herrn **K**omischs Sofa.
- (3) **W**alter trägt **keinen** Schlips.
- (4) Herr **K**omisch findet es **komisch**, daß er nicht gewonnen hat.
- (5) **K**laus saß schon das vorige Mal auf Herrn **K**omischs Sofa.
- (6) Herr **W**itzig trägt den **witzigen** Schlips.

Stelle die Vor- und Familiennamen richtig zusammen!

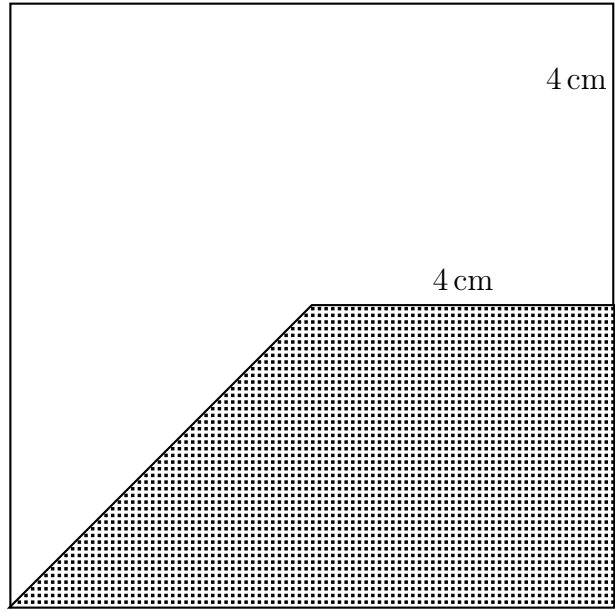
350624

Abbildung A 350624 zeigt ein Quadrat, in dem eine Teilfläche schraffiert ist.

- a) Ermittle den Flächeninhalt der markierten Fläche!
- b) Zeichne eine Figur, die von gleicher Form wie in der Abbildung A 350624, aber von anderer Größe ist! Dabei soll die Seitenlänge a des Quadrates so viele Zentimeter betragen, daß die markierte Teilfläche den Flächeninhalt $13,5 \text{ cm}^2$ hat. Für welchen Wert der Seitenlänge a trifft das zu?
- c) Nun wird verlangt, daß bei einer Figur von gleicher Form folgendes gilt: Wenn man die Seitenlänge a des Quadrates in Zentimetern mißt, so ergibt sich eine natürliche Zahl; und wenn man den Flächeninhalt A der markierten Teilfläche in Quadratzentimetern mißt, so ergibt sich ebenfalls eine natürliche Zahl.

Ermittle alle diejenigen Werte der Seitenlänge a , für die das zutrifft und die größer als 1 cm, aber kleiner als 30 cm sind!

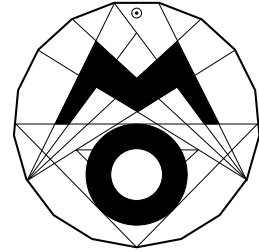
Auf der nächsten Seite geht es weiter!



8 cm

A 350624

35. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Olympiadeklasse 6
Aufgaben – 1. Tag



© 1995 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e. V.*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.

350631

Bei der Essenausgabe in einer Schule stehen genau 7 Schüler hintereinander. Olaf stellt fest:

- (1) Kein Mädchen stand unmittelbar vor einem anderen Mädchen.
- (2) Genau einer der Jungen stand unmittelbar zwischen zwei Mädchen.
- (3) Genau eines der Mädchen stand unmittelbar zwischen zwei Jungen.
- (4) Genau einmal kam es in der Reihe vor, daß drei Jungen unmittelbar hintereinander standen.

Finde alle Möglichkeiten für die Reihenfolge von Mädchen und Jungen! Erkläre, warum es alle Möglichkeiten sind!

350632

Eine Wiese ist 10 800 Quadratmeter groß. Drei Bauern überlegen, wie sie die Wiese mähen wollen. Bauer *A* würde sie in 3 Stunden mähen, wenn er es allein tun müßte, Bauer *B* in 4 Stunden, Bauer *C* in 6 Stunden.

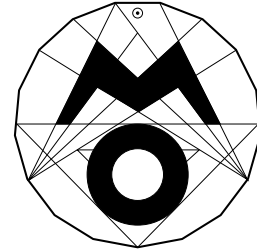
- a) Sie beschließen dann aber, gleichzeitig zu mähen, so daß sie bei geschickter Aufteilung der Wiese gleichzeitig fertig werden können. Wieviel Zeit würden sie hierzu brauchen?
- b) Nachdem sie zu dritt die Hälfte der Wiese gemäht haben, muß jedoch Bauer *B* aufhören. Wieviel Zeit brauchen nun noch *A* und *C*, bis die Wiese fertig gemäht ist?

350633

Tom sammelt Postkarten aus Argentinien, Kenia und Indien. Insgesamt hat er 30 dieser Karten. Davon sind mehr aus Argentinien als aus Kenia, aber weniger aus Argentinien als aus Indien. Die Anzahl der indischen Karten ist größer als das Vierfache der Anzahl der argentinischen Karten, aber kleiner als das Fünffache dieser Anzahl.

Untersuche, ob diese Angaben ausreichen, um wenigstens für ein Land die Anzahl der Karten aus diesem Land eindeutig zu ermitteln! Für die Länder, für die es mehrere Möglichkeiten der Anzahl gibt, finde alle diese Möglichkeiten!

35. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Olympiadeklasse 6
Aufgaben – 2. Tag



© 1995 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e. V.*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.

350634

In einem Karton liegen 40 Kugeln. Jede Kugel hat genau eine der Farben Blau, Grün, Rot, Schwarz, Weiß; jede dieser Farben kommt mindestens einmal vor. Ferner gilt:

Die Anzahl der blauen Kugeln ist doppelt so groß wie die Anzahl der grünen Kugeln.

Es gibt genau halb so viele rote Kugeln wie blaue.

Es gibt genau doppelt so viele weiße Kugeln wie blaue.

- a) Stelle in einer Tabelle alle möglichen Verteilungen der Farben zusammen! (Darin soll jedesmal eine Verteilung so angegeben werden, daß für jede Farbe die Anzahl der Kugeln in der Tabelle steht.)
- b) Katja nimmt 7 Kugeln aus dem Karton. Darunter sind fünf Kugeln mit gleicher Farbe. Welche Farbe kann dies sein? Nenne für jede in a) gefundene Verteilung alle Möglichkeiten!
- c) Nun legt Katja die 7 Kugeln in den Karton zurück und nimmt dann 18 Kugeln heraus. Unter diesen gibt es keine fünf Kugeln mit gleicher Farbe. Wenn Katja aber noch irgend eine der restlichen Kugeln herausnehmen würde, so wären in jedem Fall unter den 19 herausgenommenen Kugeln fünf mit gleicher Farbe.

Welche Verteilung müssen hiernach die 40 Kugeln haben?

Hinweis: Nutze nochmals deine Tabelle!

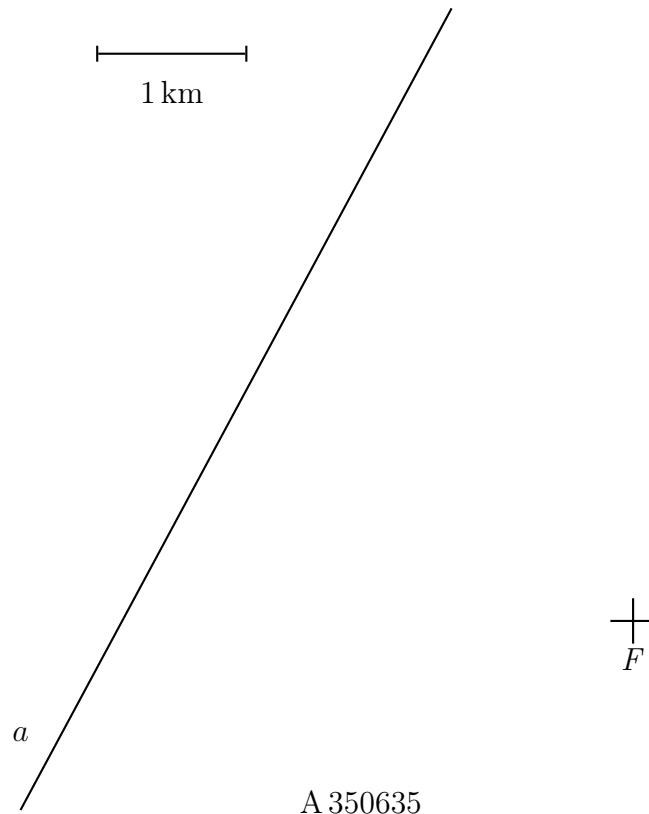
350635

Michael findet auf einer Landkarte mit angegebenen Maßstab eine Autobahnstrecke a und einen Flugplatz, bei dem eine Startbahn im Punkt F beginnt.

- a) Michael stellt die Entfernung von F zu a fest; das macht er so: Er konstruiert durch F die Senkrechte s zu a ; sie schneidet a im Punkt S . Dann trägt er auf s von F ausgehend mit dem Zirkel so oft eine 1 km – Strecke ab, bis er den Punkt S erreicht. Führe diese Konstruktion aus! Wie groß ist die Entfernung?

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

- b) Simone kennt folgende Beschreibungen: Die Fluglärmbelastigung ist genau für alle diejenigen Orte zulässig, deren Entfernung zu F größer als 3,5 km ist. Die Lärmbelastigung durch Autos ist genau für alle diejenigen Orte zulässig, deren Entfernung zu a größer als 500 m ist.
Konstruiere das Gebiet, in dem sogar gilt, daß jede der beiden Lärmbelastigungen größer als zulässig ist!



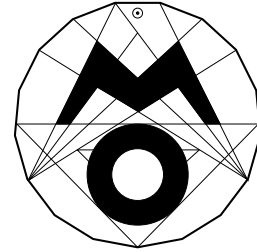
350636

Auf einem Tisch liegen zwei Häufchen von Spielsteinen. Martina nimmt zwei Steine vom ersten Häufchen und legt sie auf das zweite. Petra stellt fest: Jetzt hat das erste Häufchen noch genau doppelt so viele Steine wie das zweite. Dann legt sie die zwei Steine wieder zurück.

Nun nimmt Martina 4 Steine vom zweiten Häufchen und legt sie auf das erste. Petra stellt jetzt fest: Jetzt hat das erste Häufchen genau fünfmal so viele Steine wie das zweite.

Wie viele Steine sind nun noch zusätzlich vom zweiten Häufchen auf das erste zu legen, damit dann das erste Häufchen achtmal so viele Steine hat wie das zweite?

35. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulrunde)
Olympiadeklasse 7
Aufgaben



© 1995 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e. V.*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.

350711

Auf Wanderschaft traf Eulenspiegel einen Bauern. Er ging mit ihm ins Wirtshaus. Sie versuchten dort ihr Glück beim Kartenspiel mit dem Wirt, über den sie sich wegen seiner unverschämten Preisforderung geärgert hatten.

Zuerst verlor Eulenspiegel die Hälfte seines Geldes zu gleichen Teilen an den Bauern und den Wirt. Im zweiten Spiel verlor der Bauer die Hälfte des Geldes, das er nun hatte, zu gleichen Teilen an Eulenspiegel und den Wirt. Im dritten Spiel verlor der Wirt die Hälfte des Geldes, das er nun hatte, zu gleichen Teilen an Eulenspiegel und den Bauern. Danach hatte jeder der drei Spieler 8 Taler.

Wer von den drei Spielern hatte nun insgesamt gewonnen, wer hatte verloren, und wie hoch war für jeden der Gewinn bzw. Verlust?

350712

Ermittle alle diejenigen geordneten Tripel (p_1, p_2, p_3) von Primzahlen p_1, p_2, p_3 , welche die Gleichung $p_1(p_3 - p_2) = 195$ erfüllen!

350713

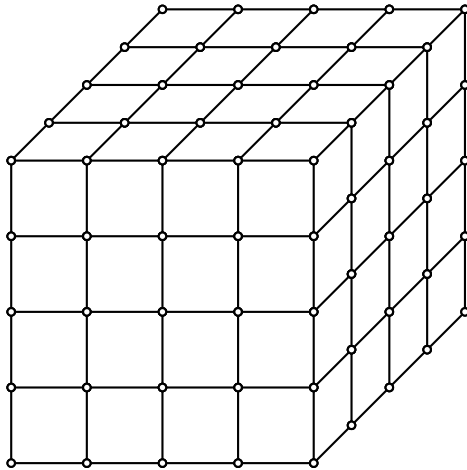
Es sei ABC ein gleichschenkliges Dreieck mit $|AB| = |AC|$. Mittelpunkt der Seite \overline{BC} sei mit D , der Mittelpunkt der Seite \overline{AB} mit E bezeichnet. Der Schnittpunkt von \overline{AD} mit \overline{CE} sei mit S bezeichnet.

Beweise, daß unter diesen Voraussetzungen stets das Dreieck ACS und das Viereck $BDSE$ einander flächeninhaltsgleich sind!

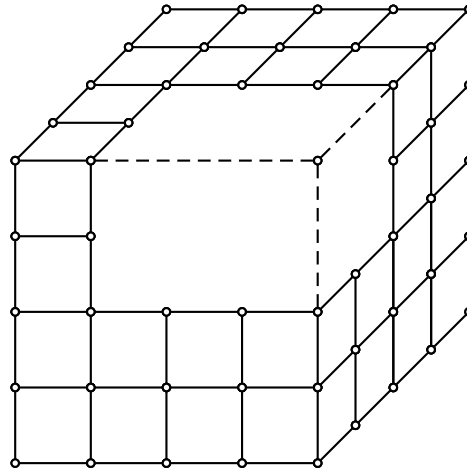
Auf der nächsten Seite geht es weiter!

350714

Die Abbildung A 350714 a zeigt einen Würfel W_1 mit der Kantenlänge 4 cm. Zugleich sind dort sogenannte Gitterpunkte hervorgehoben. Der Abstand je zweier benachbarter Gitterpunkte von links nach rechts, von vorn nach hinten und von unten nach oben beträgt jeweils 1 cm. Auch im Innern des Würfels und auf seinen nicht sichtbaren Flächen denke man sich entsprechend Gitterpunkte eingeführt.



A 350714 a

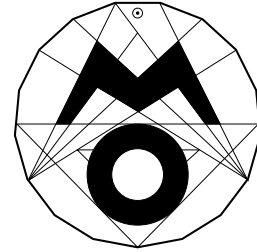


A 350714 c

- a) Ermittle die Gesamtzahl der Gitterpunkte, die im Innern und auf der Oberfläche des Würfels W_1 liegen! Nenne auch einzeln die Anzahl der Gitterpunkte im Innern und die Anzahl der Gitterpunkte auf der Oberfläche!
- b) Ein anderer Würfel W_2 ist so groß, daß er im Innern und auf seiner Oberfläche insgesamt 512 Gitterpunkte enthält. Ein dritter Würfel W_3 ist so groß, daß schon die in seinem Innern vorhandenen Gitterpunkte genau 512 sind. Beide Würfel haben (ebenso wie W_1) eine solche Lage, daß ihre 8 Ecken Gitterpunkte sind und daß auch ihre Kanten von links nach rechts, von vorn nach hinten bzw. von unten nach oben verlaufen. Welche Kantenlängen haben W_2 und W_3 ?
- c) In Abbildung A 350714c ist angedeutet, wie man in den Würfel W_1 einen Quader mit den Kantenlängen 2 cm, 2 cm, 3 cm hineinlegen kann. Dieser Quader soll so im Würfel verschoben werden, daß seine Eckpunkte sämtlich auf Gitterpunkte des Würfels zu liegen kommen und daß die Verschiebungsweite größer als Null ist.

Wie viele derartige Verschiebungen sind insgesamt möglich?

35. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Olympiadeklasse 7
Aufgaben



© 1995 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e. V.*
 www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

350721

Petra beschriftet drei Kärtchen mit der Ziffer 3, drei Kärtchen mit der Ziffer 5 und drei Kärtchen mit der Ziffer 9. Sie will dann diese Kärtchen so legen, daß eine Additionsaufgabe dreier dreistelliger Zahlen mit dem Ergebnis 1887 entsteht (siehe Abbildung A 350721).

$$\begin{array}{r}
 \square \square \square \\
 + \square \square \square \\
 + \square \square \square \\
 \hline
 1 \ 8 \ 8 \ 7
 \end{array}$$

A 350721

- a) Gib zwei verschiedene Möglichkeiten an, die Kärtchen in der gewünschten Art zu legen!
- b) Wie viele derartige Möglichkeiten gibt es insgesamt?

350722

Von einem Rechteck $ABCD$ mit $|AB| > |BC|$ wird vorausgesetzt, daß sich die Mittelsenkrechte der Strecke \overline{AC} und die Gerade, die den Winkel BAD halbiert, in einem Punkt P schneiden, der auf der Seite \overline{CD} liegt.

Beweise, daß durch diese Voraussetzung die Größe des Winkels BAC eindeutig bestimmt ist, und gib diese Winkelgröße an!

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

350723

Die Orte A und B liegen 30 km voneinander entfernt. Antje fährt von A nach B mit einer gleichbleibenden Geschwindigkeit von 21 km/h. Bernd fährt von B nach A ebenfalls mit konstanter Geschwindigkeit, er legt in der Stunde 24 km zurück.

- a) Nach wieviel Minuten treffen sich Antje und Bernd, wenn sie zur gleichen Zeit gestartet sind? Wie viele Kilometer ist dann Antje bis zum Treffpunkt gefahren?
- b) An einem anderen Tag ist Antje um 8.00 Uhr gestartet, aber Bernd erst um 8.15 Uhr. Um wieviel Uhr treffen sie sich diesmal?

350724

Ein Würfel W werde in Teilwürfel zerlegt, die sämtlich einander gleichgroß sind. Der Flächeninhalt der Oberfläche von W sei A , die Summe der Flächeninhalte der Oberflächen der Teilwürfel, nachdem man sie voneinander getrennt hat, sei S .

- a) Ermittle das Verhältnis $A:S$, wenn W die Kantenlänge 12 cm hat und die Anzahl der Teilwürfel 8 beträgt!
- b) Ermittle $A:S$, wenn W beliebige Kantenlänge a hat und die Anzahl der Teilwürfel n^3 beträgt, wobei n eine beliebige natürliche Zahl größer als 1 ist!

35. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Olympiadeklassen 7
Aufgaben – 1. Tag



© 1996 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e. V.*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.

350731

Ein Schachmeister spielt simultan (gleichzeitig) gegen mehrere Schachspieler. In der ersten Stunde gewann er sieben Zwölftel aller Spiele; die anderen Spiele waren nach dieser Zeit noch nicht beendet. Von diesen Spielen gewann er anschließend noch 80 %. Nach Abschluss aller Spiele wurde festgestellt: Der Schachmeister hatte in der ersten Stunde genau 12 Spiele mehr gewonnen als in der Zeit danach.

Wie viele Spiele hatte er insgesamt gespielt?

Wie viele dieser Spiele hatte er gewonnen, wie viele nicht?

350732

Bekanntlich gilt $45 \cdot 9 = 405$. Untersuche, ob es weitere Beispiele dafür gibt, dass einer zweistelligen natürlichen Zahl durch Einschreiben einer Ziffer 0 zwischen ihre beiden Ziffern zugleich das Produkt der zweistelligen Zahl mit einer einstelligen Zahl entsteht! Wenn das der Fall ist, gib alle diese Beispiele an!

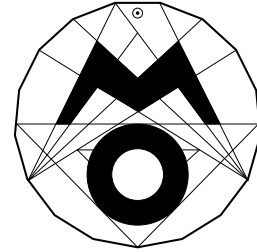
350733

Es sei $ABCD$ ein Parallelogramm mit spitzen Winkel bei A und mit $|AB| > |BC|$. Der Kreis um D mit dem Radius $|DC|$ schneide die Verlängerung von \overline{CB} über B hinaus in E , der Kreis um B mit dem Radius $|BC|$ schneide die Strecke \overline{CD} zwischen C und D in F .

Beweise, daß aus diesen Voraussetzungen stets folgt:

- a) Die Winkel DEC und BFC sind einander gleich groß,
- b) das Dreieck AEF ist gleichschenkelig.

35. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Olympiadeklassen 7
Aufgaben – 2. Tag



© 1996 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e. V.*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

350734

An einer Landstraße liegen die Gemeinden A und B sowie die Stadt C in dieser Reihenfolge. Der Weg von A nach B beträgt auf dieser Landstraße 5 km.

Eine Zugmaschine fährt auf der Landstraße von B nach C . Sie beginnt um 6 Uhr morgens und fährt mit der gleichbleibenden Geschwindigkeit von 20 km/h. Am gleichen Tag fährt ein Mopedfahrer auf der Landstraße von A über B nach C . Er beginnt um 6.15 Uhr morgens und fährt mit der gleichbleibenden Geschwindigkeit von 30 km/h. Er erreicht C um 20 Minuten eher als die Zugmaschine.

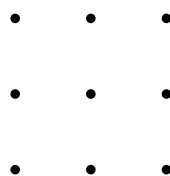
Zu welcher Uhrzeit hat der Mopedfahrer die Zugmaschine überholt, und wie viele Kilometer hatte er von da an noch bis C zurückzulegen?

Wie viele Kilometer beträgt auf der Landstraße der Weg von B nach C ?

350735

Die Abbildung A 350735 zeigt neun Punkte in einer Anordnung, die sich aus vier Quadraten zusammensetzen läßt. Für jeden dieser neun Punkte soll festgestellt werden, wie viele Dreiecke sich dadurch bilden lassen, daß man diesen Punkt als einen Eckpunkt festlegt und dann zwei der anderen acht Punkte so auswählt, daß sie als die beiden anderen Eckpunkte geeignet sind.

Gib an, wie für jeden der neun Punkte die so gefundene Anzahl zu bildender Dreiecke lautet!



A 350735

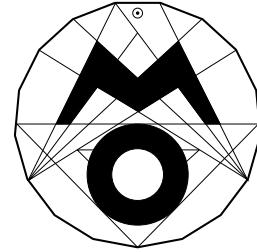
Auf der nächsten Seite geht es weiter!

350736

Ermittle die kleinste achtstellige natürliche Zahl z , die die folgenden Bedingungen (1) und (2) erfüllt!

- (1) Alle Ziffern der dezimalen Darstellung von z sind voneinander verschieden.
- (2) Die Zahl z ist durch 36 teilbar.

35. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Olympiadeklasse 7
Aufgaben – 1. Tag



© 1995 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e. V.*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.

350741

In einer Klausur erreichten die Schüler folgende Ergebnisse: Genau 22 Schüler erreichten je eine der Noten „Sehr gut“, „Gut“, „Befriedigend“. Genau 40 % aller teilnehmenden Schüler erreichten die Note „Ausreichend“, genau 5 % aller teilnehmenden Schüler erreichten die Note „Mangelhaft“ die Note „Ungenügend“ kam nicht vor.

Die Anzahl der Schüler mit der Note „Gut“ war genau um 3 größer als die Anzahl der Schüler mit der Note „Sehr gut“, die Note „Befriedigend“ kam genau dreimal so oft vor wie die Note „Gut“.

Wie viele Schüler nahmen insgesamt an der Klausur teil? Wie groß war für jede einzelne der Noten „Sehr gut“, „Gut“, „Befriedigend“, „Ausreichend“, „Mangelhaft“ die Anzahl der Schüler, die diese betreffende Note erreichten?

350742

Es sei ABC ein beliebiges Dreieck. Ferner sei $ACDE$ ein beliebiges Parallelogramm, das (bis auf die gemeinsame Strecke \overline{AC}) ganz außerhalb des Dreiecks ABC liegt, und $BCFG$ sei ein Parallelogramm, das (bis auf die gemeinsame Strecke \overline{BC}) ganz außerhalb des Dreiecks ABC liegt. Weiter sei H der Schnittpunkt der durch D und E gelegenen Geraden mit der durch F und G gelegenen Geraden. Schließlich sei $ABKL$ ein Parallelogramm, in dem die Seite \overline{BK} parallel zu der Strecke \overline{CH} und ebenso lang wie diese Strecke ist.

Beweise, daß aus diesen Voraussetzungen folgt:

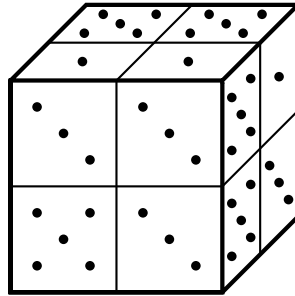
Die Summe der Flächeninhalte der Parallelogramme $ACDE$ und $BCFG$ ist gleich dem Flächeninhalt des Parallelogramms $ABLK$.

Hinweis zu dieser Aufgabe: Die hier zu beweisende Aufgabe ist möglicherweise aus einer Arbeitsgemeinschaft bekannt, z. B. unter der Bezeichnung „Satz von Pappos“. In diesem Fall genügt es natürlich nicht, die Aussage ohne Beweis als bekannten Sachverhalt anzuführen (wie oben im Vorspann erklärt), sondern hier ist ein Beweis anzuführen.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

350743

Axel, Beate und Chris sehen die Abbildung A 350743. Sie überlegen, was man aussagen kann, wenn der dargestellte Würfel aus 8 Spielwürfeln zusammengesetzt ist, bei denen wie üblich jedes Mal die Seitenflächen mit den Augenzahlen 1, 3, 5 an einer Ecke zusammenstoßen.



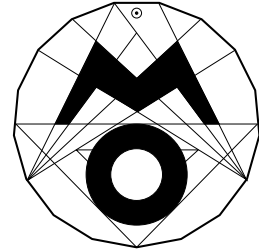
A 350743

Zunächst bemerken die drei:

Alle zwölf sichtbaren Augenzahlen sind ungerade, ihre Summe S beträgt 40.

- a) Axel meint nun: „Man kann die Würfel auch so zusammensetzen, daß alle sichtbaren Augenzahlen ungerade sind, ihre Summe S aber nur 30 beträgt.“
Zeichne ein Schrägbild eines zusammengesetzten Würfels und trage darin Augenzahlen so ein, daß Axels Aussage bestätigt wird!
- b) Beate sagt: „Wenn man wieder die Bedingung stellt, daß alle sichtbaren Augenzahlen ungerade sind, so kenne ich für die Summe S dieser zwölf Augenzahlen den kleinstmöglichen Wert, den S unter dieser Bedingung erreichen kann.“
Ermittle diese kleinstmögliche Summe!
- c) Chris kommt auf Axels Aussage zurück und fügt hinzu: „Wenn man erreichen will, daß alle sichtbaren Augenzahlen ungerade sind und ihre Summe 30 beträgt, dann müssen mindestens vier der sichtbaren Augenzahlen eine Eins sein.“
Beweise das!

35. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Olympiadeklasse 7
Aufgaben – 2. Tag



© 1995 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e. V.*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

350744

Jemand sucht eine natürliche Zahl, die die beiden folgenden Bedingungen (1) und (2) erfüllt:

- (1) In der Zahl, wie üblich in Ziffernschreibweise angegeben, kommt jede der Ziffern 3, 5 und 9 mindestens einmal vor.
- (2) Die Zahl ist durch jede der Zahlen 3, 5 und 8 teilbar.

Er merkt schnell, daß es nicht nur eine solche Zahl gibt, sondern daß man beliebig viele solcher Zahlen finden kann. Darauf hin stellt er die Aufgabe, unter allen natürlichen Zahlen, die die Bedingungen (1) und (2) erfüllen, die sechs *kleinsten* Zahlen zu finden.

Ermittle diese Zahlen!

350745

Es sei ABC ein beliebiges spitzwinkliges Dreieck, darin sei D der Fußpunkt der auf \overline{BC} senkrechten Höhe; F sei der Fußpunkt des von D auf \overline{AC} gefällten Lotes; W liege so auf der Strecke \overline{DC} , daß die Strecke \overline{AW} den Winkel DAC halbiert; der Schnittpunkt der Strecken \overline{DF} und \overline{AW} sei S .

Beweise, daß aus diesen Voraussetzungen stets folgt: Das Dreieck WSD ist gleichschenkelig.

350746

In einem Ratespiel soll eine natürliche Zahl z gefunden werden. Andrea, Benjamin, Carolin und Daniel vereinbaren: Jeder von ihnen wird drei Aussagen machen; mindestens eine dieser drei Aussagen ist wahr, mindestens eine dieser drei Aussagen ist falsch.

Eva, die diese Spielregeln kennt und die Aussagen hört, soll dann die Zahl z finden.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

Andrea sagt: (1) Die Zahl z ist durch 4 teilbar.
(2) Die Zahl z ist durch 9 teilbar.
(3) Das Elffache der Zahl z ist kleiner als 1000.

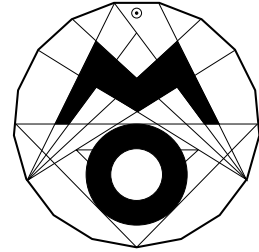
Benjamin sagt: (1) Die Zahl z ist durch 10 teilbar.
(2) Die Zahl z ist größer als 100.
(3) Das Zwölffache der Zahl z ist größer als 1000.

Carolin sagt: (1) Die Zahl z ist eine Primzahl
(2) Die Zahl z ist durch 7 teilbar.
(3) Die Zahl z ist kleiner als 20.

Daniel sagt: (1) Die Zahl z ist nicht durch 7 teilbar.
(2) Die Zahl z ist kleiner als 12.
(3) Das Fünffache der Zahl z ist kleiner als 70.

Untersuche, ob es genau eine natürliche Zahl z gibt, bei der mit diesen Aussagen die Spielregeln eingehalten wurden! Wenn das der Fall ist, nenne diese Zahl!

35. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulrunde)
Olympiadeklasse 8
Aufgaben



© 1995 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e. V.*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.

350811

- a) Von den Schülern des Lessing-Gymnasiums gehören genau 40 % einem Sportverein an, und von diesen 40 % sind wiederum genau $\frac{1}{5}$ zugleich Mitglieder des Schulchores. Wieviel Prozent aller Schüler des Lessing-Gymnasiums sind folglich diese Schüler, die sowohl einem Sportverein als auch dem Schulchor angehören?
- b) Genau 5 % aller Schüler des Lessing-Gymnasiums verließen am Ende des Schuljahres 1993/94 das Gymnasium. Zu Beginn des Schuljahres 1994/95 kamen 189 Schüler neu an das Gymnasium. Durch diese beiden Änderungen hat sich insgesamt die Anzahl aller Schüler gegenüber der Schülerzahl, die vor dem Ende des Schuljahres 1993/94 dort gewesen war, um 10 % erhöht.

Wie groß ist die Schülerzahl des Gymnasiums nun nach dem Beginn des Schuljahres 1994/95?

350812

Von sieben Punkten A, B, C, D, E, F, G sei vorausgesetzt:

- (1) Die Punkte A, B, C, D liegen, in dieser Reihenfolge angeordnet, auf einer Geraden g .
- (2) Die Punkte A, E, F, G liegen, in dieser Reihenfolge angeordnet, auf einer anderen Geraden g' .
- (3) Der Winkel GCD beträgt 90° .
- (4) Es gilt $|AC| = |CG| = 12$ cm.
- (5) Die fünf Dreiecke ABE, BEF, BCF, CFG, CDG haben alle den gleichen Flächeninhalt.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

Zeige, daß durch diese Voraussetzungen

- a) die Größe des Winkels DAG ,
- b) der Flächeninhalt des Dreiecks ADG ,
- c) die Streckenlänge $|CG|$

eindeutig bestimmt sind, und berechne diese Größen!

Beweise, daß aus den Voraussetzungen $|AE| = |EF|$ folgt!

350813

Konstruiere ein Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge 5 cm! Beschreibe dann eine Konstruktion von drei Punkten E, F, G , die folgende Forderungen erfüllen:

- (1) Jedes der Dreiecke ABE, ABF, ABG hat denselben Flächeninhalt wie das Quadrat $ABCD$.
- (2) Das Dreieck ABE ist spitzwinklig.
- (3) Das Dreieck ABF ist rechtwinklig.
- (4) Das Dreieck ABG ist stumpfwinklig.

Führe die von dir beschriebene Konstruktion durch! Beweise, daß die Forderungen erfüllt werden, wenn E, F, G nach deiner Beschreibung konstruiert werden!

Hinweis: Die Konstruktion von E, F, G soll mit Lineal (nur zum Konstruieren von Geraden) und Zirkel erfolgen, ohne Messen und Rechnen. Die Beschreibung der Konstruktion von E, F, G soll angeben, durch welche Punkte jeweils eine zu konstruierende Gerade gehen soll bzw. um welchen Punkt jeweils ein Kreis konstruiert werden soll und die Länge welcher Strecke als sein Radius genommen werden soll. Beim Beweis sind geometrische und rechnerische Argumente zugelassen.

350814

Alexander, Bianca und Christian unterhalten sich über Teilbarkeitsaussagen.

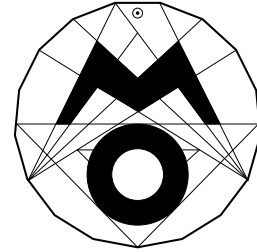
Alexander meint: „Die Summe zweier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen, die beide nicht durch 3 teilbar sind, ist stets durch 3 teilbar.“ (Er verdeutlicht seinen Gesprächspartnern diese Aussage auch an einem selbstgewählten Beispiel. Wie könnte ein solches Beispiel lauten?)

Bianca meint: „Die Summe von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, die nicht durch 4 teilbar sind, ist stets durch 2 teilbar.“

Christian verallgemeinert beide Aussagen; er meint: „Für jede natürliche Zahl $m \geq 3$ gilt: Wenn S die Summe von $m - 1$ aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist, die sämtlich nicht durch m teilbar sind, und wenn m gerade ist, so ist S durch $\frac{m}{2}$ teilbar. Ist dagegen m ungerade, so ist S durch m teilbar.“

Beweise, daß die Aussagen von Alexander, Bianca und Christian alle drei wahr sind!

35. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Olympiadeklasse 8
Aufgaben



© 1995 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e. V.*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.

350821

Heike hat 1500 Gramm einer 7,2-prozentigen wässrigen Kochsalzlösung. Durch Kochen dieser Lösung verdunstet ein Teil des Wassers, und es verbleiben 1200 Gramm der neuen Lösung.

- a) Eine wieviel-prozentige Lösung ist dies?
- b) Wieviel Gramm Kochsalz müßte Heike der neuen Lösung begeben, um daraus eine 20-prozentige Lösung zu gewinnen?

Hinweis: In einer „ p -prozentigen wässrigen Kochsalzlösung“ bestehen je 100 Gramm der Lösung aus p Gramm Kochsalz und $(100 - p)$ Gramm Wasser.

350822

Von einem Viereck $ABCD$ wird vorausgesetzt, daß $|AD| = |DC|$ gilt und daß für die Größen seiner Innenwinkel die folgenden Angaben mit einer geeigneten Winkelgröße α zutreffen:

Winkel	DAB	ABC	BCD	CDA
Größe	α	2α	3α	4α

- a) Beweise, daß durch diese Voraussetzungen die einzelnen Größen der vier Innenwinkel eindeutig bestimmt sind! Nenne diese Größen!

Beweise ferner, daß aus den Voraussetzungen die nachstehenden Aussagen b), c) und d) folgen!

- b) Die Diagonale halbiert den Winkel DAB .
- c) Die Seite \overline{BC} ist kürzer als die Seite \overline{AD} .
- d) Die Seite \overline{AB} ist doppelt so lang wie die Seite \overline{AD} .

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

350823

a) In einer Schachtel liegen sechs Kugeln. Sie können voneinander unterschieden werden, da sie durch Beschriften mit den Zahlen von 1 bis 6 numeriert sind. Arnold will mit einem Griff drei dieser Kugeln aus der Schachtel herausnehmen. Gib alle Möglichkeiten dafür an, welche drei Kugeln das sein können!

b) Birgit erklärt:

(1) Zusätzlich zur Numerierung sind die Kugeln gefärbt, jede mit genau einer der Farben Rot, Grün, Blau; jede dieser drei Farben kommt mindestens einmal vor.

Ferner macht Birgit folgende Aussagen:

(2) Wenn man 4 Kugeln aus der Schachtel herausgreift, muß sich mindestens eine rote Kugel unter den herausgegriffenen befinden; gleichgültig, welche 4 Kugeln man herausgegriffen hat.

(3) Wenn man 5 Kugeln aus der Schachtel herausgreift, muß sich mindestens eine grüne Kugel unter den herausgegriffenen befinden; gleichgültig, welche 5 Kugeln man herausgegriffen hat.

Zeige, daß durch diese Angaben eindeutig bestimmt ist, wie viele der sechs Kugeln rot, wie viele grün und wie viele blau sind! Nenne diese drei Anzahlen!

c) Christian macht folgende Aussagen:

(4) Addiert man die Nummern aller roten und grünen Kugeln, so ergibt sich die Summe 15.

(5) Addiert man die Nummern aller grünen und blauen Kugeln, so ergibt sich eine Summe, die kleiner als 11 ist.

Ermittle alle Möglichkeiten, den Kugeln (angegeben durch ihre Nummer) derart die Farben zuzuordnen, daß alle Aussagen von Birgit und Christian zutreffen!

350824

a) Konstruiere ein Viereck $ABCD$, in dem die Seitenlängen $a = |AB| = 10$ cm, $b = |BC| = 8$ cm und $d = |AD| = 5$ cm vorliegen, der Winkel BAD die Größe $\alpha = 70^\circ$ hat und der Winkel ABC die Größe $\beta = 60^\circ$ hat!

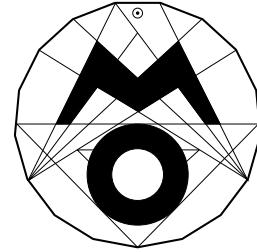
Zu diesem Viereck ist nun ein Punkt E gesucht, der so liegen soll, daß das Dreieck ABE denselben Flächeninhalt wie das Viereck $ABCD$ hat.

b) Beschreibe, wie aus dem vorliegenden Viereck $ABCD$ ein Punkt E konstruiert werden kann! Die Beschreibung soll jeden Schritt dieser Konstruktion eindeutig kennzeichnen.

c) Beweise, daß ein Punkt E , wenn er nach deiner Beschreibung konstruiert wird, die geforderte Bedingung erfüllt, daß ABE und $ABCD$ einander flächeninhaltsgleich sind!

d) Führe die Konstruktion durch!

35. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Olympiadeklassen 8
Aufgaben – 1. Tag



© 1995 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e. V.*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.

350831

Die vier Mädchen Anja, Bärbel, Claudia und Daniela treffen im Tennis – Club auf die drei Jungen Steffen, Thomas und Ulrich.

- a) Sie überlegen, wie viele Teams als gemischtes Doppel (ein Mädchen und ein Junge) sie überhaupt bilden könnten. Nenne alle diese Teams!
- b) Nun überlegen sie, welche Spiele sich ansetzen lassen, so daß jede mögliche Zusammensetzung zweier Teams genau einmal angesetzt wird. Welche Spiele sind das?
- c) An jedem Sonnabend können genau 6 Tennisplätze genutzt werden. Stelle einen Turnierplan auf, der folgende Bedingungen erfüllt:
 - (1) Solange das Turnier läuft, werden an jedem Sonnabend alle 6 Tennisplätze genutzt.
 - (2) An jedem dieser Sonnabende gilt: Kein Team wird an diesem Sonnabend zweimal angesetzt. (Einzelne Spieler dürfen an einem Sonnabend mehrmals eingesetzt werden, aber dann nur in verschiedenen Teams.)
 - (3) Im gesamten Turnier wird jedes nach b) mögliche Spiel genau einmal angesetzt.

350832

- a) Zu einem gegebenen konvexen Viereck $ABCD$ soll eine Strecke konstruiert werden, die A als einen Eckpunkt hat und das Viereck in zwei flächeninhaltsgleiche Teile zerlegt. Beschreibe eine Konstruktion und beweise, daß sich zu jedem beliebig gegebenen konvexen Viereck $ABCD$ eine derartige Strecke ergibt, wenn sie nach deiner Beschreibung konstruiert wird!
- b) Konstruiere ein Viereck $ABCD$, in dem $a = |AB| = 4,0$ cm, $b = |BC| = 3,7$ cm sowie $d = |AD| = 4,7$ cm gilt, der Innenwinkel BAC die Größe $\alpha = 61^\circ$ hat und der Innenwinkel ABC die Größe $\beta = 61^\circ$ hat. Führe zu diesem Viereck die nach a) beschriebene Konstruktion durch!

Hinweis: Ein Viereck $ABCD$ heißt genau dann konvex, wenn alle seine Innenwinkel kleiner als 180° sind.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

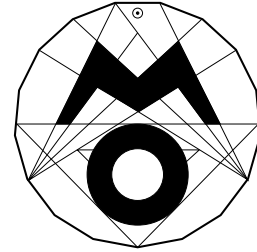
350833

Es sei $ABCD$ ein Parallelogramm mit spitzen Winkel bei A und mit $|AB| > |BC|$. Der Kreis um D mit dem Radius $|DC|$ schneide die Verlängerung von \overline{CB} über B hinaus in E , der Kreis um B mit dem Radius $|BC|$ schneide die Strecke \overline{CD} zwischen C und D in F .

Beweise, daß aus diesen Voraussetzungen stets folgt:

- a) Die Winkel DEC und BFC sind einander gleich groß,
- b) das Dreieck AEF ist gleichschenkelig.

35. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Olympiadeklassen 8
Aufgaben – 2. Tag



© 1995 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e. V.*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.

350834

In einem Lager werden große, mittelgroße und kleine Kisten aufbewahrt. Jede mittelgroße Kiste liegt in einer großen Kiste, jede kleine Kiste liegt in einer mittelgroßen Kiste; jede kleine Kiste ist leer. Für die Anzahlen dieser Kisten sind folgende Bedingungen erfüllt:

- (1) Für jede große Kiste gilt: Entweder ist diese Kiste leer, oder die Anzahl der in ihr befindlichen mittelgroßen Kisten beträgt 10.
 - (2) Für jede mittelgroße Kiste gilt: Entweder ist diese Kiste leer, oder die Anzahl der in ihr befindlichen kleinen Kisten beträgt 10.
 - (3) Die Anzahl aller großen Kisten beträgt 10.
 - (4) Die Anzahl aller nicht leeren Kisten beträgt 54.
- a) Wie viele Kisten sind insgesamt in dem Lager?
- b) Gib ein Beispiel für die Anzahl aller mittelgroßen Kisten und die Anzahl aller Kleinen Kisten so an, daß in diesem Beispiel die Bedingungen (1) bis (4) erfüllt sind!

350835

Beweise folgende Aussagen!

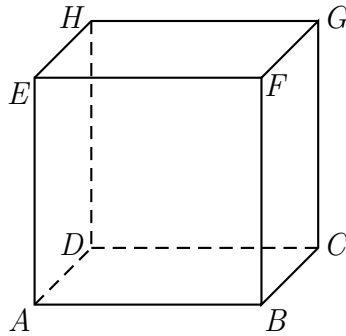
Wenn p und q Primzahlen sind, für die $q - p = 2$ und $p > 3$ gilt, dann folgt:

- a) Das arithmetische Mittel von p und q ist durch 3 teilbar.
- b) Vergrößert man das Produkt von p und q um 1, so entsteht eine durch 18 teilbare Zahl.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

350836

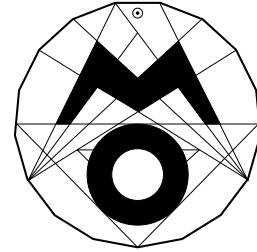
Auf der Ecke A eines Würfels $ABCDEFGH$ (siehe Abbildung A 350836) sitzt eine mathematisch geschulte Raupe. Sie will alle diejenigen Wege von A nach G ausprobieren, von denen jeder nur längs Würfelkanten verläuft und keinen Eckpunkt zweimal erreicht. Um eine Kante zu durchkriechen, braucht sie je einen Tag; nachts ruht sie.



A 350836

Wenn sie am Punkt G angekommen ist, rutscht sie in der Nacht auf der Diagonale \overline{GA} zurück nach A und beginnt am Morgen einen neuen Weg, den sie noch nicht ausprobiert hatte. Sie startet am 2. Januar 1996. Am Morgen welchen Tages ist sie wieder in A , nachdem sie alle vorgesehenen Wege ausprobiert hat?

35. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Olympiadeklassen 8
Aufgaben – 1. Tag



© 1995 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e. V.*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

350841

An einer Schule gibt es drei Arbeitsgruppen *Informatik*, *Mathematik*, *Schach*. Über sie werden folgende Aussagen gemacht:

Die Anzahl derjenigen Schüler, die an je mindestens einer dieser Arbeitsgruppen teilnehmen, beträgt 35.

An der Arbeitsgruppe *Schach* nehmen genau 17 Schüler teil.

Genau 8 Schüler nehmen sowohl an der Arbeitsgruppe *Informatik* als auch an Arbeitsgruppe *Mathematik* teil.

Genau 3 Schüler nehmen an alle drei Arbeitsgruppen teil. Genau 16 Schüler nehmen an jeweils nur einer Arbeitsgruppe teil.

Zeige, daß aus diesen Aussagen eindeutig hervorgeht, wie viele Schüler an der Arbeitsgruppe *Schach*, aber an keiner der beiden anderen Arbeitsgruppen teilnehmen!

350842

Es sei ABC ein beliebiges Dreieck. Ferner sei $ACDE$ ein beliebiges Parallelogramm, das (bis auf die gemeinsame Strecke \overline{AC}) ganz außerhalb des Dreiecks ABC liegt, und $BCFG$ sei ein Parallelogramm, das (bis auf die gemeinsame Strecke \overline{BC}) ganz außerhalb des Dreiecks ABC liegt. Weiter sei H der Schnittpunkt der durch D und E gelegenen Geraden mit der durch F und G gelegenen Geraden. Schließlich sei $ABKL$ ein Parallelogramm, in dem die Seite \overline{BK} parallel zu der Strecke \overline{CH} und ebenso lang wie diese Strecke ist.

Beweise, daß aus diesen Voraussetzungen folgt:

Die Summe der Flächeninhalte der Parallelogramme $ACDE$ und $BCFG$ ist gleich dem Flächeninhalt des Parallelogramms $ABLK$.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

Hinweis: Die hier zu beweisende Aufgabe ist möglicherweise aus einer Arbeitsgemeinschaft bekannt, z. B. unter der Bezeichnung „Satz von Pappos“. In diesem Fall genügt es natürlich nicht, die Aussage ohne Beweis als bekannten Sachverhalt anzuführen (wie oben im Vorspann erklärt), sondern hier ist ein Beweis anzuführen.

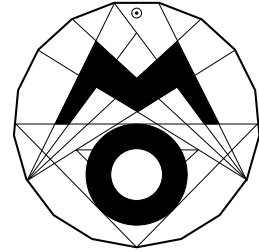
350843

Lancelot, der Drachentöter, wollte die Stadt von einem dreiköpfigen, dreischwänzigen Drachen befreien. Eine gute Fee gab ihm ein Zauberschwert. Sie erklärte ihm auch vier Arten, damit zuzuschlagen: Mit je einem Schlag kann man entweder einen Kopf oder einen Schwanz oder zwei Köpfe oder zwei Schwänze abschlagen. Die Fee erklärte auch die Kräfte des Drachen: Schlägt man einen Kopf ab, so wächst wieder ein Kopf nach. Schlägt man einen Schwanz ab, so wachsen zwei Schwänze nach. Schlägt man zwei Köpfe ab, so wächst nichts nach. Schlägt man zwei Schwänze ab, so wächst ein Kopf nach.

Ermittle die kleinste Zahl von Schwertschlägen, mit der dem Drachen alle drei Köpfe und alle drei Schwänze abgeschlagen werden können; d. h.:

- a) Zeige, daß dieses Ziel mit keiner kleineren Zahl erreichbar ist!
- b) Zeige durch ein Beispiel für die Reihenfolge von Schwertschlägen, daß dieses Ziel mit der angegebenen Zahl von Schwertschlägen erreichbar ist!

35. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Olympiadeklassen 8
Aufgaben – 2. Tag



© 1995 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e. V.*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

350844

Jemand sucht eine natürliche Zahl, die die beiden folgenden Bedingungen (1) und (2) erfüllt:

- (1) In der Zahl, wie üblich in Ziffernschreibweise angegeben, kommt jede der Ziffern 3, 5 und 9 mindestens einmal vor.
- (2) Die Zahl ist durch jede der Zahlen 3, 5 und 8 teilbar.

Er merkt schnell, daß es nicht nur eine solche Zahl gibt, sondern daß man beliebig viele solcher Zahlen finden kann. Darauf hin stellt er die Aufgabe, unter allen natürlichen Zahlen, die die Bedingungen (1) und (2) erfüllen, die sechs *kleinsten* Zahlen zu finden.

Ermittle diese Zahlen!

350845

Es sei ABC ein beliebiges rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel bei C .

In diesem Dreieck sei H der Fußpunkt der auf \overline{AB} senkrechten Höhe. Ferner sei P ein beliebiger Punkt auf der Strecke \overline{HC} , und Q sei der Schnittpunkt der Strecke \overline{AB} mit der Geraden, die durch P geht und parallel zu \overline{BC} ist.

Beweise, daß aus diesen Voraussetzungen stets folgt: Die Gerade durch A und P steht senkrecht auf der Geraden durch C und Q .

350846

In einem Ratespiel soll eine natürliche Zahl z gefunden werden. Andrea, Benjamin, Carolin und Daniel vereinbaren: Jeder von ihnen wird drei Aussagen machen; mindestens eine dieser drei Aussagen ist wahr, mindestens eine dieser drei Aussagen ist falsch.

Eva, die diese Spielregeln kennt und die Aussagen hört, soll dann die Zahl z finden.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

Andrea sagt: (1) Die Zahl z ist durch 4 teilbar.
(2) Die Zahl z ist durch 9 teilbar.
(3) Das Elffache der Zahl z ist kleiner als 1000.

Benjamin sagt: (1) Die Zahl z ist durch 10 teilbar.
(2) Die Zahl z ist größer als 100.
(3) Das Zwölffache der Zahl z ist größer als 1000.

Carolin sagt: (1) Die Zahl z ist eine Primzahl
(2) Die Zahl z ist durch 7 teilbar.
(3) Die Zahl z ist kleiner als 20.

Daniel sagt: (1) Die Zahl z ist nicht durch 7 teilbar.
(2) Die Zahl z ist kleiner als 12.
(3) Das Fünffache der Zahl z ist kleiner als 70.

Untersuche, ob es genau eine natürliche Zahl z gibt, bei der mit diesen Aussagen die Spielregeln eingehalten wurden! Wenn das der Fall ist, nenne diese Zahl!

35. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulrunde)
Olympiadeklassen 9 und 10
Aufgaben



© 1995 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e. V.*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.

351011

Uwe berichtet, er habe an einer Straßenkreuzung während einer Grünphase genau folgende Autos die Kreuzung passieren gesehen: Genau zwei VW, genau zwei Audi, genau zwei Opel, genau zwei BMW. Zwischen den beiden VW fuhr genau ein anderes dieser Autos; zwischen den beiden Audi fuhren genau zwei andere; zwischen den beiden Opel fuhren genau drei andere; und zwischen den beiden BMW fuhren genau vier andere der Autos.

Man finde alle Möglichkeiten für die Reihenfolge, in der nach Uwes Bericht die Autos gefahren sein konnten.

351012

Ermittle alle diejenigen Paare (n, k) natürlicher Zahlen, für die $3^{n-1} + 7^{k-1}$ eine Primzahl ist!

351013

Der Verkaufspreis (Bruttopreis) einer Ware setzt sich zusammen aus dem Nettopreis und der Mehrwertsteuer. Vor einiger Zeit hatte in Deutschland die Mehrwertsteuer 14 % des Nettopreises betragen; dann wurde im Zuge der europäischen Anpassung dieser Prozentsatz auf 15 % erhöht. Das bedeutete – bei gleichbleibendem Nettopreis – eine Erhöhung des Verkaufspreises.

Wieviel Prozent des vorigen Verkaufspreises hat diese Erhöhung betragen? Berechne diesen Prozentsatz gerundet auf zwei Dezimalen nach dem Komma!

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

351014

Annegret legt aus Hölzchen einheitlicher Länge L ein ebenes Muster, das aus Quadraten der Kantenlänge L zusammengesetzt ist und insgesamt einen quadratförmigen Umfang hat. (Die Breite der Hölzchen sei so klein angenommen, daß sie vernachlässigt werden kann.)

Bernd behauptet, daß sich in diesem Muster insgesamt 30 Quadrate finden lassen, deren Umfang von Hölzchen des Musters gebildet wird. Er zählt dabei zwei Quadrate genau dann als verschieden, wenn in dem Muster wenigstens ein Hölzchen enthalten ist, das im Umfang des einen dieser beiden Quadrate vorkommt, aber nicht im Umfang des anderen.

Für welche Anzahl von Hölzchen trifft Bernds Behauptung zu?

351015

Ist $ABCD$ ein Viereck, so sei eine Gerade genau dann als „1 : 2 - Eckgerade“ bezeichnet, wenn sie durch (mindestens) eine Ecke des Vierecks geht und das Viereck in zwei Teilflächen zerlegt, deren Flächeninhalte sich in geeigneter Reihenfolge wie 1 : 2 verhalten.

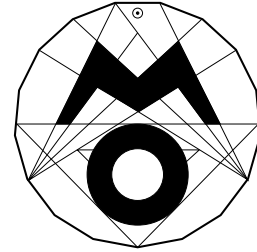
Untersuche für jedes Trapez $ABCD$ mit den Eigenschaften $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ und $|AB| > 2 \cdot |DC|$, wie viele 1 : 2 - Eckgeraden es insgesamt zu diesem Trapez gibt!

351016

- a) Unter Verwendung aller zehn Ziffern 0, 1, 2, ..., 9 sollen zehnstellige natürliche Zahlen geschrieben werden, die durch 7 teilbar sind. Man beweise, daß es mindestens 24 solche Zahlen gibt.
- b) Man schreibe ein Computerprogramm, um zu zeigen, daß es sogar mindestens 100 solche Zahlen gibt. Man beweise, daß das angegebene Programm (bei technisch fehlerfreiem Ablauf) diesen Nachweis korrekt erbringt.

Hinweis: Man zeige und verwende – insbesondere zu a) – auch Hilfsaussagen, die über ein bloßes Probieren hinausgehen. Man betrachte etwa Teilgruppen der Zifferndarstellung einer Zahl und beweise z.B. Teilbarkeitsaussagen für Zusammenstellungen solcher Teilgruppen.

35. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Olympiadeklasse 9
Aufgaben



© 1995 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e. V.*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.

350921

An der Eingangsallee eines Arboretums (Baumgartens) sollen in einer Reihe 14 Bäume gepflanzt werden: 2 Arven, 2 Birken, 2 Coloradotannen, 2 Douglasien, 2 Eiben, 2 Faulbäume und 2 Ginkobäume. Die Bäume sollen so gepflanzt werden, daß stets zwischen zwei gleichartigen Bäumen eine Anzahl (größer als Null) der anderen 12 Bäume steht. Von diesen hiermit geforderten sieben Anzahlen (Bäume zwischen den Arven, Bäume zwischen den Birken, ..., Bäume zwischen den Ginkos) sollen keine zwei einander gleich sein.

Nenne zwei Beispiele für eine derartige Anordnung der Bäume! Diese beiden Beispiele sollen in folgendem Sinn voneinander verschieden sein: Es soll nicht möglich sein, das eine Beispiel aus dem anderen dadurch zu erhalten, daß man lediglich die Reihenfolge der Bäume umkehrt oder daß man in einer Reihenfolge eine bloße Umbenennung der Baumarten vornimmt oder daß man beides durchführt.

350922

Yvonne und Zacharias spielen „Kalkulation beim Joghurtverkauf.“

Zacharias sagt: „Bisher verkaufte ich in jeder Woche 1000 Becher Joghurt zu je 0,49 DM und 1000 Becher zu je 0,59 DM. Jetzt überlege ich, ob es günstig ist, den Verkaufspreis der zweiten Sorte von 0,59 DM auf 0,69 DM zu erhöhen. Nur fürchte ich, daß die Käuferzahl für diese Becher zu stark abnimmt.“

Yvonne überlegt: „Vielleicht kaufen dafür mehr Kunden als früher den billigen Becher, so daß bei insgesamt unveränderter Anzahl 2000 verkaufter Becher auch der Erlös vom Verkauf beider Bechersorten insgesamt unverändert bleibt.“

Ist das rechnerisch möglich?

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

350923

Man denke sich alle natürlichen Zahlen von 1 bis einschließlich zu einer Zahl n aufgeschrieben. Bei diesem Schreibvorgang werde die Ziffer 5 genau p -mal und die Ziffer 6 genau q -mal geschrieben.

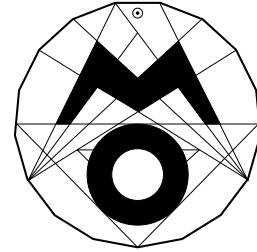
- a) Man ermittle die kleinste Zahl n , für die $p = q = 321$ gilt.
- b) Gibt es eine Zahl n , für die $p = q = 1995$ gilt?

350924

Beweise die beiden folgenden Aussagen!

- a) Wenn in einem Viereck $ABCD$ die Diagonale \overline{BD} von der Diagonale \overline{AC} oder ihrer Verlängerung halbiert wird, so wird auch der Flächeninhalt des Vierecks $ABCD$ von der Diagonale \overline{AC} halbiert.
- b) Wenn der Flächeninhalt eines Vierecks $ABCD$ von der Diagonale \overline{AC} halbiert wird, so wird auch die Diagonale \overline{BD} von der Diagonale \overline{AC} oder ihrer Verlängerung halbiert.

35. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Olympiadeklasse 9
Aufgaben – 1. Tag



© 1996 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e. V.*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.

350931

Beweisen Sie, daß man ein gleichseitiges Dreieck so in 1996 gleichseitige Teildreiecke zerschneiden kann, daß es unter je 5 dieser Teildreiecke zwei gibt, die zueinander nicht kongruent sind!

350932

- a) Zu einem gegebenen konvexen Viereck $ABCD$ soll eine Strecke konstruiert werden, die A als einen Eckpunkt hat und das Viereck in zwei flächeninhaltsgleiche Teile zerlegt. Beschreiben Sie eine Konstruktion und beweisen Sie, daß sich zu jedem beliebig gegebenen konvexen Viereck $ABCD$ eine derartige Strecke ergibt, wenn sie nach Ihrer Beschreibung konstruiert wird!
- b) Konstruieren Sie ein Viereck $ABCD$, in dem $a = |AB| = 4,0$ cm, $b = |BC| = 3,7$ cm sowie $d = |AD| = 4,7$ cm gilt, der Innenwinkel BAD die Größe $\alpha = 61^\circ$ hat und der Innenwinkel ABC die Größe $\beta = 83^\circ$ hat!

Führen Sie zu diesem Viereck die nach a) beschriebene Konstruktion durch!

Hinweis: Ein Viereck $ABCD$ heißt genau dann konvex, wenn alle seine Innenwinkel kleiner als 180° sind.

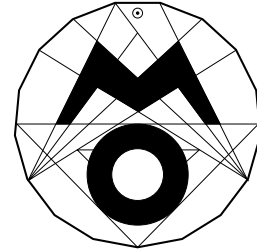
350933

Die Zahl $20!$ ist das Produkt aller natürlichen Zahlen von 1 bis 20. Im Dezimalsystem ist diese Zahl 19-stellig. Jürgen hat den Rechnerausdruck

$$20! = 2\,432\,902\,0\boxed{}8\,176\,6\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}$$

erhalten; darin sind die Ziffern an den Stellen $\boxed{}$ unleserlich. Kann er, wenn die anderen Ziffern korrekt sind, die fehlenden Ziffern ermitteln, ohne einen Rechner zu nutzen oder Multiplikationen mit zehner- oder mehrstelligen Zahlen auszuführen? Wenn das möglich ist, begründen Sie dies und geben Sie die fehlenden Ziffern an!

35. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Olympiadeklasse 9
Aufgaben – 2. Tag



© 1996 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e. V.*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.

350934

Ermitteln Sie alle im Dezimalsystem sechsstelligen natürlichen Zahlen z mit der folgenden Eigenschaft!

Nimmt man die erste Ziffer von z weg und setzt sie hinter die letzte Ziffer von z , so entsteht die Zahl $3z$.

350935

In der Firma Phantastico wird jeden Monat eine Literzahl Saft und die zehnfache Literzahl Milch gekauft und genau in diesem Mischungsverhältnis ein Mischgetränk produziert. Der Preis für diese Milchmenge ist doppelt so groß wie der Preis für diese Saftmenge.

Eines Tages sinkt der Milchpreis um 20 %. Wenn nun monatlich genau so viel Geld wie bisher für den Kauf von Saft und Milch ausgegeben werden soll, um wieviel Prozent kann dann bei Einhaltung des bisherigen Mischungsverhältnisses die Produktion des Mischgetränkes gesteigert werden? Errechnen Sie diesen Prozentsatz auf zwei Dezimalen nach dem Komma genau!

350936

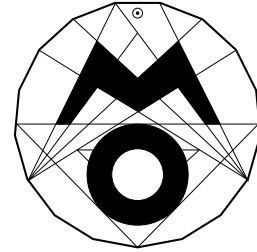
Über ein Viereck $ABCD$ werde vorausgesetzt:

- (1) Es gibt einen Kreis k , auf dem alle vier Punkte A, B, C, D liegen.
- (2) Die Diagonalen \overline{AC} und \overline{BD} stehen aufeinander senkrecht.

Beweisen Sie, daß aus diesen Voraussetzungen stets die nachstehende Aussage folgt!

Das Lot vom Mittelpunkt M der Seite \overline{AB} auf die Seite \overline{CD} geht durch den Schnittpunkt S der Diagonalen $\overline{AC}, \overline{BD}$.

35. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Olympiadeklasse 9
Aufgaben – 1. Tag



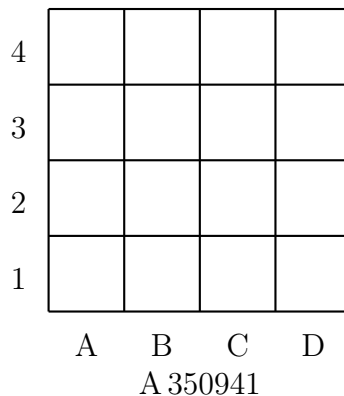
© 1996 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e. V.*
 www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.

350941

Die untere Abbildung A 350941 zeigt ein 4×4 Schachbrett. Ein Springer steht auf dem Feld A1 und soll das Feld D4 in n Springerzügen erreichen. Bedingung ist dabei, jedes Feld höchstens einmal zu besetzen.

Ermitteln Sie alle diejenigen Zahlen n , für die sich ein Weg aus n derartigen Springerzügen finden läßt!



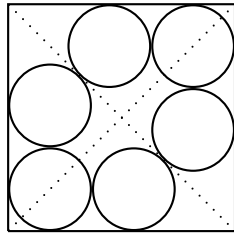
350942

Alex und Beate beschäftigen sich mit folgendem Problem:

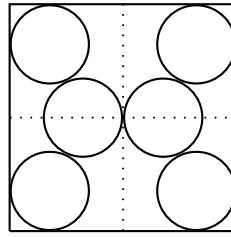
In ein Quadrat mit gegebener Seitenlänge a sollen n kongruente, möglichst große Kreise so einbeschrieben werden, daß keine zwei Kreise einen inneren Punkt gemeinsam haben und daß kein Punkt eines Kreises außerhalb des Quadrates liegt.

Für $n = 6$ zeichnete Alex die Kreise in der Anordnung wie in Abbildung A 350942 a, Beate wie in Abbildung A 350942 b. Wer hat die größeren Kreise gezeichnet?

Auf der nächsten Seite geht es weiter!



A 350942 a



A 350942 b

350943

Über drei Geraden g, h und j wird vorausgesetzt, daß sie zueinander parallel sind, wobei h zwischen g und j liegt. Durch einen Punkt P auf g werden die beiden Geraden gezeichnet, die mit g Winkel von 60° einschließen. Diese Geraden schneiden h und j in insgesamt vier Punkten.

Beweisen Sie, daß aus diesen Voraussetzungen stets folgt. Man kann aus den zuletzt genannten vier Schnittpunkten zwei Punkte A und B so auswählen, daß auf g ein Punkt C existiert, für den ABC ein gleichseitiges Dreieck ist.

35. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Olympiadeklasse 9
Aufgaben – 2. Tag



© 1995 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e. V.*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.

350944

Wir betrachten diejenigen zehnstelligen Zahlen, in denen jede der zehn Ziffern $0, 1, \dots, 9$ genau einmal auftritt.

Beweisen Sie, daß es unter diesen Zahlen mindestens 50 000 gibt, die durch 11 teilbar sind!

350945

Jemand sucht eine Serie $S = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ von n natürlichen Zahlen der Form

$$a_1, a_2 = a_1 + 1, a_3 = a_2 + 1, \dots, a_n = a_{n-1} + 1$$

mit der Eigenschaft, daß keine der Zahlen a_1, a_2, \dots, a_n eine durch 5 teilbare Quersumme hat.

- Welches ist die größtmögliche Länge n , die eine solche Serie S haben kann?
- Wie viele solche Serien S dieser größtmöglichen Länge n gibt es insgesamt im Bereich der natürlichen Zahlen von 1 bis 1000?

350946

Beweisen Sie, daß für jedes spitzwinklige Dreieck ABC die folgende Aussage (*) gilt!

(*) Sind A', B' und C' die Fußpunkte der auf \overline{BC} , \overline{CA} bzw. \overline{AB} senkrechten Höhen, so ist

$$|AC'|^2 + |BA'|^2 + |CB'|^2 = |C'B|^2 + |A'C|^2 + |B'A|^2$$

Untersuchen Sie ferner, ob die Aussage (*) auch für jedes rechtwinklige Dreieck ABC gilt!

35. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Olympiadeklasse 10
Aufgaben



© 1995 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e. V.*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

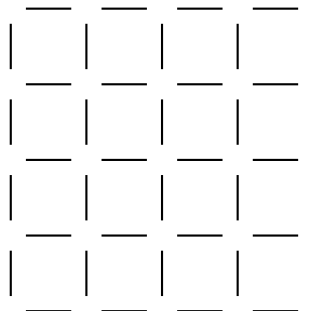
Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

351021

Annette legt aus 40 Hölzchen die in Abbildung A 351021 gezeigte Figur, in der genau 30 verschiedene Quadrate auftreten. Felix und Jens erhalten die Aufgabe, aus dieser Figur derart Hölzchen zu entfernen, daß in der übrigbleibenden Figur kein Quadrat mehr auftritt. Beide Jungen berichten, ohne ihr Ergebnis sichtbar zu machen, daß sie eine Lösung dieser Aufgabe gefunden haben; Felix durch Entfernen von 9 Hölzchen, Jens durch Entfernen von 10 Hölzchen.

Daraufhin meint Felix, aus der Lösung von Jens müsse sich dadurch eine weitere Lösung bilden lassen, daß man eines der entfernten Hölzchen wieder an seinen alten Platz zurücklegt.

- a) Gib in einem Beispiel eine Lösung an, die Felix gefunden haben könnte!
- b) Gib in einem Beispiel eine Lösung an, die Jens gefunden haben könnte, für die jedoch die Aussage von Felix nicht zutrifft!



A 351021

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

351022

- a) Konstruiere ein Trapez $ABCD$, in dem $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ und $|AB| = 2 \cdot |DC|$, gilt! Konstruiere ferner den Mittelpunkt M der Seite \overline{DC} !
- b) Beschreibe nun, wie man zu den vorliegenden $ABCD$ und M alle diejenigen Geraden konstruieren kann, die durch M gehen und das Trapez $ABCD$ in zwei Flächenstücke zerlegen, deren Flächeninhalte sich (in irgend einer Reihenfolge) wie $1 : 2$ verhalten! Die Beschreibung soll jeden Schritt dieser Konstruktion eindeutig kennzeichnen.
- c) Beweise, daß alle nach Deiner Beschreibung konstruierten Geraden die genannten Bedingungen erfüllen!
Beweise, daß es außer den nach Deiner Beschreibung konstruierten Geraden nicht noch weitere Geraden geben kann, die diese Bedingungen erfüllen!
- d) Führe die von Dir zu b) beschriebene Konstruktion durch!

351023

Es seien a und b je eine der Ziffern $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Ferner sei z diejenige natürliche Zahl, deren Zifferndarstellung im Dezimalsystem $ababab$ lautet. Man beweise, daß jede so zu beschreibende Zahl z durch 481 teilbar ist.

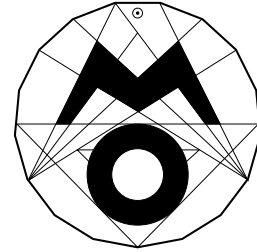
351024

In einem Unternehmen wurde in einer Befragung festgestellt, welche der Mitarbeiter bisher an einer betrieblichen Qualifizierung teilgenommen hatten. Dann fand ein Wiederholungskurs dieser Qualifizierung statt; daran nahmen nur solche Mitarbeiter teil, die das bisher noch nicht getan hatten. Es stellte sich heraus, daß sich auf diese Weise die Zahl der Qualifizierungsteilnehmer um 25% ihres bisherigen Wertes erhöht hatte und daß sich zugleich die Zahl der Nicht-Qualifizierungsteilnehmer um 17% ihres bisherigen Wertes verringert hatte.

Wieviel Prozent der gesamten Mitarbeiterschaft waren vor diesem weiteren Kurs Qualifizierungsteilnehmer gewesen?

Wieviel Prozent der gesamten Mitarbeiterschaft waren nach diesem Kurs Qualifizierungsteilnehmer? Ermittle diese beiden Prozentangaben auf eine Stelle nach dem Komma genau!

35. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Olympiadeklasse 10
Aufgaben – 1. Tag



© 1996 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e. V.*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

351031

Beweisen Sie, daß man ein Quadrat so in mehr als vier Teilquadrate zerschneiden kann, daß es unter je 4 dieser Teilquadrate zwei gibt, die zueinander nicht kongruent sind!

351032

Zu einem gegebenen Trapez $ABCD$ mit $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ soll eine Gerade g konstruiert werden, die durch einen Eckpunkt des Trapezes geht und das Trapez in zwei Teilflächen zerlegt, deren Flächeninhalte sich wie 1 : 3 verhalten.

- a) Beschreiben Sie eine Konstruktion von g !
- b) Beweisen Sie, daß sich zu jedem beliebig gegebenen Trapez $ABCD$ eine derartige Gerade g ergibt, wenn sie nach Ihrer Beschreibung konstruiert wird!
- c) Führen Sie die beschriebene Konstruktion an einem Trapez $ABCD$ mit $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ durch, in dem $a = |AB| = 7,0$ cm und $d = |AD| = 4,3$ cm gilt, der Innenwinkel BAD die Größe $\alpha = 48^\circ$ hat und der Innenwinkel ABC die Größe $\beta = 72^\circ$ hat!

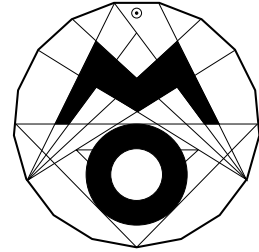
351033

Die Zahl $20!$ ist das Produkt aller natürlichen Zahlen von 1 bis 20. Im Dezimalsystem ist diese Zahl 19-stellig. Jürgen hat den Rechnerausdruck

$$20! = 2\,432\,902\,0\boxed{}8\,176\,6\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}$$

erhalten; darin sind die Ziffern an den Stellen $\boxed{}$ unleserlich. Kann er, wenn die anderen Ziffern korrekt sind, die fehlenden Ziffern ermitteln, ohne einen Rechner zu nutzen oder Multiplikationen mit zehner- oder mehrstelligen Zahlen auszuführen? Wenn das möglich ist, begründen Sie dies und geben Sie die fehlenden Ziffern an!

35. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Olympiadeklasse 10
Aufgaben – 2. Tag



© 1996 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e. V.*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.

351034

Ermitteln Sie alle im Dezimalsystem sechsstelligen natürlichen Zahlen z mit der folgenden Eigenschaft!

Nimmt man die erste Ziffer von z weg und setzt sie hinter die letzte Ziffer von z , so entsteht die Zahl $3z$.

351035

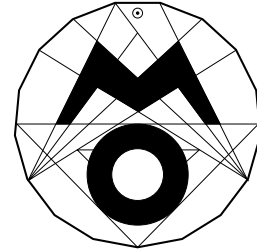
In der Firma Phantastico wird jeden Monat eine Literzahl Saft und die zehnfache Literzahl Milch gekauft und genau in diesem Mischungsverhältnis ein Mischgetränk produziert. Der Preis für diese Milchmenge ist doppelt so groß wie der Preis für diese Saftmenge.

Eines Tages sinkt der Milchpreis um 20 %. Wenn nun monatlich genau so viel Geld wie bisher für den Kauf von Saft und Milch ausgegeben werden soll, um wieviel Prozent kann dann bei Einhaltung des bisherigen Mischungsverhältnisses die Produktion des Mischgetränkes gesteigert werden? Errechnen Sie diesen Prozentsatz auf zwei Dezimalen nach dem Komma genau!

351036

Beweisen Sie, daß in jedem spitzwinkligen Dreieck ABC der Höhenschnittpunkt H von allen drei Seiten des Dreiecks DEF gleichgroße Abstände hat, wobei D , E und F die Fußpunkte der Höhen sind!

35. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Olympiadeklasse 10
Aufgaben – 1. Tag



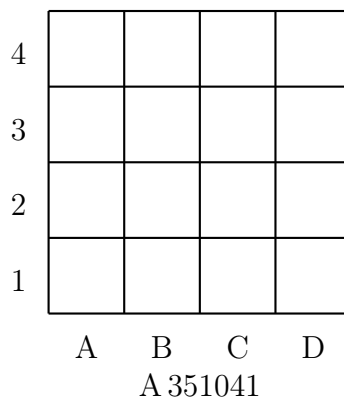
© 1995 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e. V.*
 www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.

351041

Die untere Abbildung A 351041 zeigt ein 4×4 Schachbrett. Ein Springer steht auf dem Feld A1 und soll das Feld D4 in n Springerzügen erreichen. Bedingung ist dabei, jedes Feld höchstens einmal zu besetzen.

Ermitteln Sie alle diejenigen Zahlen n , für die sich ein Weg aus n derartigen Springerzügen finden läßt!



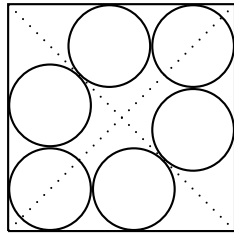
351042

Alex und Beate beschäftigen sich mit folgendem Problem:

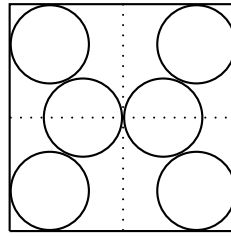
In ein Quadrat mit gegebener Seitenlänge a sollen n kongruente, möglichst große Kreise so einbeschrieben werden, daß keine zwei Kreise einen inneren Punkt gemeinsam haben und daß kein Punkt eines Kreises außerhalb des Quadrates liegt.

Für $n = 6$ zeichnete Alex die Kreise in der Anordnung wie in Abbildung A 351042 a, Beate wie in Abbildung A MOAN b. Wer hat die größeren Kreise gezeichnet?

Auf der nächsten Seite geht es weiter!



A 351042 a



A 351042 b

351043

Ein Schüler will ein Dreieck ABC konstruieren, wobei folgende Größen vorgeschrieben werden:

Die Länge c der Seite \overline{AB} ,

die Länge h_c der auf \overline{AB} senkrechten Höhe,

die Differenz $\varepsilon = \alpha - \beta$ zwischen den Größen α und β der Innenwinkel bei A bzw. B .

Dabei sollen die Längen c und h_c beliebig vorgegeben werden; für ε soll $0^\circ < \varepsilon < 90^\circ$ gelten, unter dieser Bedingung soll auch ε beliebig vorgegeben werden.

Nun sind folgende Fragen zu beantworten:

- a) Gibt es bei jeder Vorgabe von Größen c , h_c und ε , wie beschrieben, ein solches Dreieck ABC ?
- b) Gibt es hierbei auch stets – bis auf Kongruenz – nur ein solches Dreieck?
- c) Wie kann ein solches Dreieck, wenn es existiert, konstruiert werden?

35. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Olympiadeklasse 10
Aufgaben – 2. Tag



© 1995 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e. V.*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.

351044

Wir betrachten diejenigen zehnstelligen Zahlen, in denen jede der zehn Ziffern $0, 1, \dots, 9$ genau einmal auftritt.

Beweisen Sie, daß es unter diesen Zahlen mindestens 50 000 gibt, die durch 11 teilbar sind!

351045

Jemand sucht eine Serie $S = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ von n natürlichen Zahlen der Form

$$a_1, a_2 = a_1 + 1, a_3 = a_2 + 1, \dots, a_n = a_{n-1} + 1$$

mit der Eigenschaft, daß keine der Zahlen a_1, a_2, \dots, a_n eine durch 5 teilbare Quersumme hat.

- Welches ist die größtmögliche Länge n , die eine solche Serie S haben kann?
- Wie viele solche Serien S dieser größtmöglichen Länge n gibt es insgesamt im Bereich der natürlichen Zahlen von 1 bis 1000?

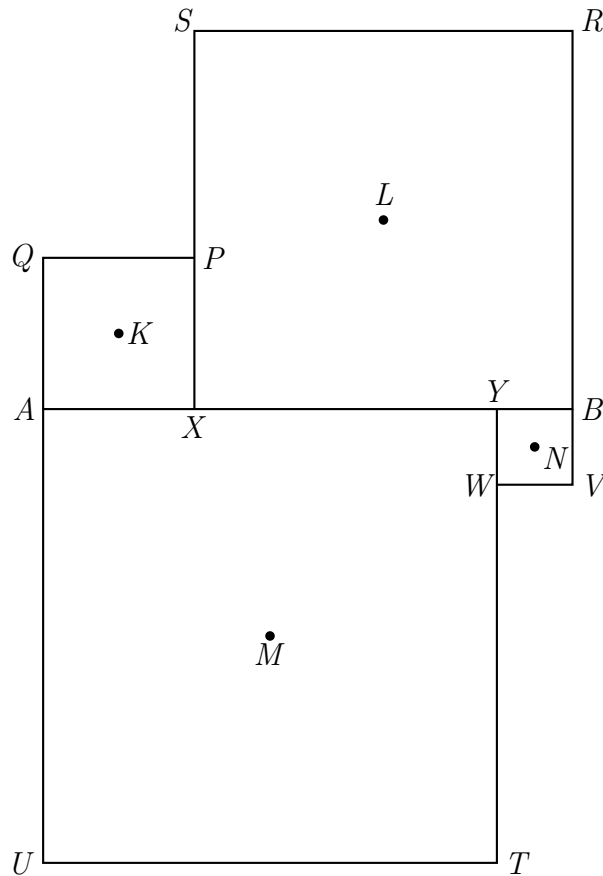
Auf der nächsten Seite geht es weiter!

351046

Ein Schüler zeichnet eine Strecke \overline{AB} und wählt auf ihr zwei beliebige Punkte X und Y . Dann konstruiert er die vier Quadrate $AXPQ$, $XBR S$, $AYTU$ und $YB V W$, so angeordnet, wie in Abbildung A 351046 angegeben. Weiter konstruiert er die Mittelpunkte K , L , M bzw. N dieser Quadrate.

Er vermutet anhand seiner Zeichnung: Die Strecken \overline{KN} und \overline{LM} sind einander gleichlang und stehen aufeinander senkrecht.

Ist diese Vermutung bei jeder Wahl von X und Y auf \overline{AB} wahr?



A 351046

35. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulrunde)
Olympiadeklassen 11–13
Aufgaben



© 1996 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e. V.*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

351311

In einem Dreieck ABC liege der Fußpunkt D der auf \overline{AB} senkrechten Höhe \overline{CD} so zwischen A und B , daß $|AD| = 9$ und $|DB| = 7$ gilt (gemessen in beliebiger Längeneinheit). Eine zu \overline{CD} parallele Gerade zerlege das Dreieck in zwei Teilflächen, die einander gleichen Flächeninhalt haben. Es sei P der Schnittpunkt dieser Geraden mit \overline{AB} .

Wie lang ist die Strecke \overline{AP} ?

351312

In einem alten Rechenbuch wird das folgende Verfahren für die Multiplikation der Zahl 142 857 mit einer natürlichen Zahl n angegeben:

„Man dividiere zunächst n durch 7 und schreibe den ganzzahligen Teil des Ergebnisses hin. Dann multipliziere man den Rest mit 142 857 und setze die Ziffern des Produktes hinter die aufgeschriebene Zahl. Von der so gebildeten Zahl subtrahiere man noch die zuerst hingeschriebene Zahl. Auf diese Weise erhält man das Produkt $142\,857 \cdot n$.“

- a) Man begründe, daß dieses Verfahren immer zum richtigen Ergebnis führt, wenn n nicht durch 7 teilbar ist.
- b) Man untersuche, wie das Verfahren modifiziert werden kann, wenn n ein Vielfaches von 7 ist.

351313

Bildet man von einer natürlichen Zahl n die Quersumme, vom Ergebnis wieder die Quersumme usw., so gelangt man nach endlich vielen Schritten zu einer einstelligen Zahl, die als $Q(n)$ bezeichnet sei. Man beweise, daß für jede natürliche Zahl n die Gleichung $Q(n^2) = Q((Q(n))^2)$ gilt.

Beispiel: Für $n = 17$ gilt einerseits $n^2 = 289$, $Q(n^2) = 1$, andererseits $Q(n) = 8$, $(Q(n))^2 = 64$, $Q((Q(n))^2) = 1$.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

351314

Die Buchstaben **M** und **O** (für „Mathematik-Olympiade“) sollen jeweils einem Quadrat gleicher Größe eingeschrieben werden. Beide Buchstaben sollen dabei dieselbe „Strichdicke“ x aufweisen (siehe Abb. A 351314).

Bei einer gewissen Strichdicke überdeckt der Buchstabe **O** einen Flächenanteil von $\frac{5\pi}{36}$ seines Quadrates; welchen Flächenanteil seines Quadrates füllt bei dieser Strichdicke der Buchstabe **M** aus?

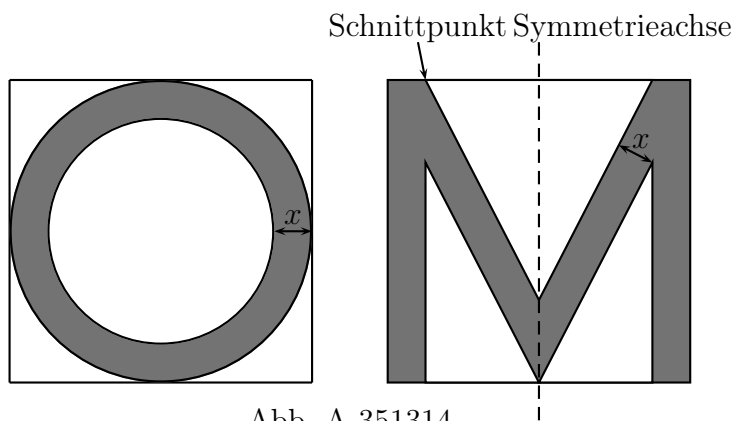
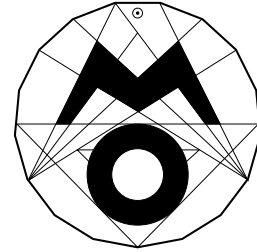


Abb. A 351314

35. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Olympiadeklassen 11–13
Aufgaben



© 1996 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e. V.*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.

351321

Man ermittle alle diejenigen Paare (x, y) reeller, von Null verschiedener Zahlen x, y , die das nachstehende Gleichungssystem (1) und (2) erfüllen:

$$x + \frac{x}{y} = \frac{8}{3} \tag{1}$$

$$y - \frac{1}{x} = \frac{5}{2} \tag{2}$$

351322

Für eine Tombola sollen Papierstreifen mit den Losnummern bedruckt werden. Zunächst wird vorgeschlagen, nach Wahl einer positiven ganzen Zahl n alle diejenigen Ziffernfolgen, die aus genau n Ziffern bestehen, als Losnummern zu verwenden. Dann aber wird bemerkt, daß sich darunter mehrdeutig lesbare Ziffernfolgen befinden, da die Ziffern 0, 6, 8, 9, wenn sie um 180 Grad gedreht werden, wieder als Ziffern lesbar sind. So lautet z. B. für $n = 4$ die Ziffernfolge 0889 nach dieser Drehung 6880; diese beiden Ziffernfolgen sind also mehrdeutig. Dagegen ist z. B. die Ziffernfolge 8698 eindeutig, da sie nach der Drehung genauso lautet; und die Ziffernfolge 8691 ist eindeutig, da sie die Ziffer 1 enthält, also nur in nicht gedrehtem Zustand als Ziffernfolge lesbar ist.

Ein erster Vorschlag (A) lautet: Man lasse genau alle mehrdeutigen Ziffernfolgen weg.

Ein zweiter Vorschlag (B) lautet: Man verwende alle diejenigen Ziffernfolgen, die aus genau n von 0 verschiedenen Ziffern und - als Erkennungszeichen für die Richtung, in der gelesen werden soll - einer vorangestellten Ziffer 0 bestehen.

Man untersuche für jede positive ganze Zahl n , ob nach dem Vorschlag (A) oder nach dem Vorschlag (B) mehr Losnummern vorliegen.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

351323

Man ermittle alle diejenigen Paare (x, y) positiver ganzer Zahlen x, y , welche die Gleichung

$$10x^3 - (2y + 5)x^2 + (y - 4)x + 76 = 0$$

erfüllen.

351324

Man beweise: Für jedes Dreieck ABC mit dem Flächeninhalt F und jede Gerade g durch den Schwerpunkt von $\triangle ABC$ erfüllen die Flächeninhalte F_1, F_2 der Flächenstücke, in die $\triangle ABC$ durch g zerlegt wird, die Ungleichung $|F_2 - F_1| \leq \frac{1}{9}F$.

Hinweis: Der Schwerpunkt ist der Schnittpunkt der drei Seitenhalbierenden von $\triangle ABC$.

35. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Olympiadeklassen 11–13
Aufgaben – 1. Tag



© 1996 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e. V.*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.

351331

Ein Polynom $p(x)$ lasse bei der Division durch $(x - 1)^4$ den Rest $ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Welchen Rest läßt $p(x)$ bei der Division durch $(x - 1)^2$?

Hinweis: Genau dann sagt man, ein Polynom $p(x)$ lasse bei Division durch ein Polynom $f(x)$ das Polynom $r(x)$ als Rest, wenn $r(x)$ kleineren Grad als $f(x)$ hat oder gleich 0 ist und es ein Polynom $q(x)$ gibt, das die Gleichung $p(x) = q(x)f(x) + r(x)$ erfüllt.

351332

Es sei $ABCD$ ein beliebig gegebenes konvexes Viereck. Ein Punkt P durchlaufe alle Punkte der Seite \overline{AB} , ein Punkt Q durchlaufe unabhängig hiervon alle Punkte der Seite \overline{CD} .

Ermitteln Sie die Menge der Mittelpunkte aller so entstehenden Strecken \overline{PQ} !

351333

Teil A:

In einem Raum stehen n verschlossene Truhen. Über sie ist Folgendes bekannt: Zu jeder Truhe gibt es genau einen Schlüssel; mit ihm kann diese und nur diese Truhe geöffnet werden. In jeder Truhe liegt genau einer dieser Schlüssel; diese Verteilung der Schlüssel auf die Truhen ist zufällig; d. h., alle möglichen derartigen Verteilungen sollen die gleiche Wahrscheinlichkeit haben. In genau einer Truhe liegt außerdem ein Schatz.

Jemand bricht eine zufällig gewählte Truhe auf. Er hat die Möglichkeit, mit dem darin gefundenen Schlüssel die zugehörige Truhe aufzuschließen, wenn sie noch nicht offen ist; dasselbe gilt für gegebenenfalls in weiteren aufgeschlossenen Truhen gefundenen Schlüssel. Freilich wird er diese Möglichkeit, wenn sie besteht, nur nutzen, solange er noch nicht die Truhe mit dem Schatz geöffnet hat.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

Wie groß ist (in Abhängigkeit von n) die Wahrscheinlichkeit dafür, auf diese Weise an den Schatz zu kommen?

Teil B:

Zu jeder nichtnegativen reellen Zahl a werde folgendermaßen eine Zahlenfolge (x_n) definiert:

Es sei $x_0 = a$, $x_{n+1} = \text{frac}(2x_n)$ ($n = 1, 2, \dots$).

Die Zahl a werde genau dann periodikal genannt, wenn es eine natürliche Zahl $m \geq 0$ und eine natürliche Zahl $k > 0$ mit $x_m = x_{m+k}$ gibt.

Man beweise, daß die Menge aller derjenigen nichtnegativen reellen Zahlen, die periodikal sind, dieselbe Menge ist wie die Menge aller nichtnegativen rationalen Zahlen.

Hinweis: Ist z eine nichtnegative reelle Zahl, so bezeichnet $[z]$ diejenige ganze Zahl $g = [z]$, für die $g \leq z < g + 1$ gilt; und dann wird definiert: $\text{frac}(z) = z - [z]$.

35. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Olympiadeklassen 11–13
Aufgaben – 2. Tag



© 1996 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e. V.*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

351334

Man ermittle alle reellen Lösungen der Gleichung:

$$(x + 1)(x + 3)(x + 5)(x + 7)(x + 9)(x + 11) + 225 = 0 .$$

351335

Über reelle Zahlen a, b und c werde vorausgesetzt, daß für alle reellen Zahlen x mit $|x| \leq 1$ die Ungleichung $|ax^2 + bx + c| \leq \frac{1}{100}$ gilt.

Man beweise, daß aus dieser Voraussetzung stets folgt: Es gilt $|a| + |b| + |c| \leq \frac{1}{25}$.

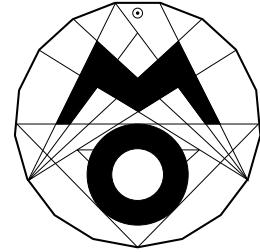
351336

Es sei k der Umkreis eines gegebenen regelmäßigen Sechsecks $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$.

Ist X ein Punkt auf k , so seien A, B und C die Fußpunkte der Lote von X auf die Diagonalen $\overline{P_1P_4}, \overline{P_2P_5}$ bzw. $\overline{P_3P_6}$.

Man beweise, daß der Flächeninhalt des Dreiecks ABC nicht von der Wahl des Punktes X auf k abhängt.

35. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Olympiadeklassen 11–13
Aufgaben – 1. Tag



© 1996 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e. V.*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

351341

Man ermittle alle diejenigen positiven ganzen Zahlen n , für die folgende Aussage gilt:

Schreibt man die dezimale Zifferndarstellung von n auf und fügt dann noch weitere geeignete Ziffern an, so entsteht die dezimale Zifferndarstellung der Zahl $1996 \cdot n$.

351342

Es seien a und b positive reelle Zahlen mit $a < 1$ und $b < 1$. Beweisen Sie, daß unter dieser Voraussetzung stets die beiden folgenden Aussagen (1) und (2) zueinander äquivalent sind!

- (1) Es gilt $a + b = 1$.
- (2) Für alle diejenigen positiven reellen Zahlen x und y mit $x < 1$ und $y < 1$, für die die Ungleichung $ax + by < 1$ gilt, gilt auch die Ungleichung

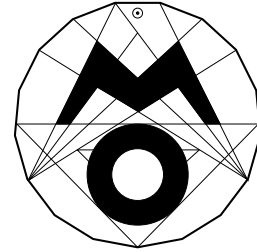
$$\frac{1}{1 - ax - by} \leq \frac{a}{1 - x} + \frac{b}{1 - y}.$$

351343

Es sei $ABCD$ ein beliebiges (nicht notwendig regelmäßiges) Tetraeder. Sein Volumen sei V . Betrachtet werden Ebenen, die durch den Schwerpunkt S des Tetraeders $ABCD$ verlaufen und die Kante \overline{AD} in einem Punkt A' , die Kante \overline{BD} in einem Punkt B' , so wie die Kante \overline{CD} in einem Punkt C' schneiden. Es ist bekannt, daß es unter allen durch solche Ebenen entstehenden Teiltetraedern $A'B'C'D$ eines mit kleinsten Volumen gibt.

Man ermittle dieses kleinste Volumen in Abhängigkeit von V .

35. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Olympiadeklassen 11–13
Aufgaben – 2. Tag



© 1996 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e. V.*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

351344

Es sind alle Paare (x, y) positiver reeller Zahlen zu ermitteln, die das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}x - y &= 7 & (1) \\ \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2} &= 7 & (2)\end{aligned}$$

erfüllen.

351345

In einem Kreis k seien zwei Sehnen \overline{AB} und \overline{CD} gegeben, die sich nicht schneiden. Gegeben sei außerdem eine Länge $a < |CD|$. Gesucht sind alle diejenigen Punkte X auf k , die die Bedingung erfüllen, daß die Strecken \overline{XA} und \overline{XB} die Sehne \overline{CD} in den Punkten P bzw. Q schneiden, für die $|PQ| = a$ gilt.

Beschreiben Sie eine Konstruktion mit dem Ziel, zu gegebenen $k, \overline{AB}, \overline{CD}$ und a Punkte X zu erhalten! Beweisen Sie, daß ein Punkt X dann und nur dann durch die von Ihnen beschriebene Konstruktion erhalten wird, wenn er die geforderte Bedingung erfüllt!

(Insbesondere soll aus der Beschreibung auch hervorgehen, wie bei Durchführung der Konstruktion ersichtlich werden kann, ob es Punkte X gibt, die die Bedingung erfüllen. Das zeichengenaue Ausführen einer solchen Konstruktion wird nicht verlangt.)

351346

Teil A

Man beweise folgende Aussage:

Wenn ein Polynom $p(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$ drei reelle positive Nullstellen hat, von denen mindestens zwei voneinander verschieden sind, so gilt : $A^2 + B^2 + 18C > 0$.

Teil B

Jeder Punkt einer Ebene sei mit genau einer der drei Farben rot, schwarz oder blau gefärbt. Man beweise, daß es unter dieser Voraussetzung stets in dieser Ebene ein Rechteck gibt, dessen vier Eckpunkte mit einander gleicher Farbe gefärbt sind.