36. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulrunde)
Olympiadeklasse 5
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

360511

Wir basteln eine „Zahlenkette". Alle ihre „Glieder" sollen dreistellige Zahlen sein; allerdings wird auch erlaubt (anders als sonst oft üblich), daß ein „Glied" die Anfangsziffer 0 hat.

Als erstes „Glied" wählen wir eine beliebige dreistellige Zahl, in der mindestens zwei voneinander verschiedene Ziffern vorkommen. Nun wird erklärt, wie man den „Nachfolger" zu einem „Glied" bildet: Man sortiert die drei Ziffern des „Gliedes" einmal so, daß eine möglichst große Zahl entsteht, und ein zweites Mal so, daß eine möglichst kleine Zahl entsteht. Die Differenz zwischen diesen beiden Zahlen ist der gesuchte „Nachfolger". Ist die Differenz zweistellig (z.B. „99"), mache sie durch Voranstellen einer 0 dreistellig (also „099").

Nach dieser Vorschrift stellen wir aus dem ersten Glied als seinen Nachfolger das zweite Glied her, daraus nach derselben Vorschrift das dritte, ... usw.

a) Bilde als Beispiele einige „Zahlenketten" und stelle fest, ob sich in diesen Beispielen die „Glieder" von einer Stelle an stets wiederholen!

b) Versuche herauszufinden, ob sich in jeder möglichen „Zahlenkette" gewisse „Glieder" von einer Stelle an wiederholen! Wenn du meinst, daß das so ist, woran könnte es liegen?

360512

Drei Fußballvereine A , B und C tragen ein Turnier aus, bei dem jeder Verein genau einmal gegen jeden der beiden anderen Vereine spielt. Die Punkteverteilung erfolgt so:

Jeder Verein bekommt

für jedes	gewonnene	Spiel	3 Punkte,
für jedes	verlorene	Spiel	0 Punkte,
für jedes	unentschiedene	Spiel	1 Punkt.

a) Wie viele Spiele werden insgesamt in dem Turnier gespielt, und welche sind es?

b) Wie viele Spiele insgesamt gibt es bei einem entsprechenden Turnier mit 4 Vereinen? Und bei 5 Vereinen?

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

c) Xaver, Yvonne und Zacharias sprechen über den Tabellen-Endstand des Turniers mit den drei Vereinen A, B und C. Kann der Tabellenstand am Ende des Turniers mit den Vereinen A, B und C so aussehen:

Xaver behauptet:	
Verein	Punkte
A	6
B	3
C	1

Yvonne behauptet:	
Verein	Punkte
A	4
B	1
C	2

Zacharias behauptet:	
Verein	Punkte
A	2
B	2
C	2

Stelle für jede der drei Behauptungen fest, ob sie einen möglichen Endstand angibt! Begründe deine Feststellungen!

<u>360513</u>

Die Zahl 135 kann in verschiedener Weise als Summe von aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen dargestellt werden, wobei die 0 nicht als Summand zugelassen sein soll. Zwei Beispiele:

$$135 = 44 + 45 + 46 \quad \text{oder} \tag{1}$$

$$135 = 2 + 3 + 4 + \cdots + 14 + 15 + 16. \tag{2}$$

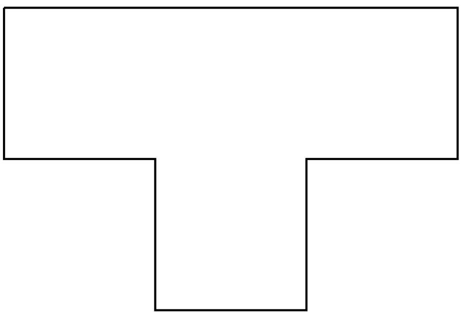
a) Gib mindestens zwei weitere Darstellungen von 135 als Summe aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen an!

b) Auch die Zahl 15 kann als Summe von aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen dargestellt werden. Gib alle diese Darstellungen an! Erkläre auch, warum es keine weiteren gibt!

c) Peter meint: „Aus der Tatsache, daß $213 : = 71$ gilt, kann man eine Darstellung der Zahl 213 als Summe von drei aufeinanderfolgenden Zahlen gewinnen, nämlich ... “.
Welche Darstellung hat er (wenn er richtig gedacht hat) da gefunden? Durch welche Überlegung kann er sie gefunden haben? Wende eine solche Überlegung auch auf zwei andere Beispiele an, bei denen eine durch 3 teilbare Zahl darzustellen ist!

<u>360514</u>

Die Figur aus der Abbildung A 360514 ist aus vier Quadraten der Seitenlänge 2 cm zusammensetzbar. Sie soll mit genau einem Schnitt so in zwei Teilfiguren zerlegt werden, daß diese Teile zu einem Quadrat zusammengesetzt werden können.



A 360514

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

Finde mindestens drei unterschiedliche Lösungen!

Für jede der drei Lösungen genügt es, zu zeichnen:

(1) die Ausgangsfigur mit dem eingezeichneten Schnitt, und daneben
(2) die zu einem Quadrat zusammengesetzten Teile.

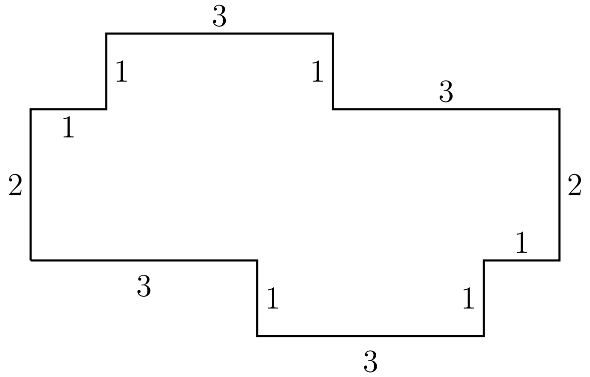
.

36. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Olympiadeklasse 5
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

360521

a) In der Abbildung A 360521 a wird eine Figur gezeigt. Alle Winkel darin sind rechte Winkel, die Längenangaben sind in Zentimetern zu nehmen.

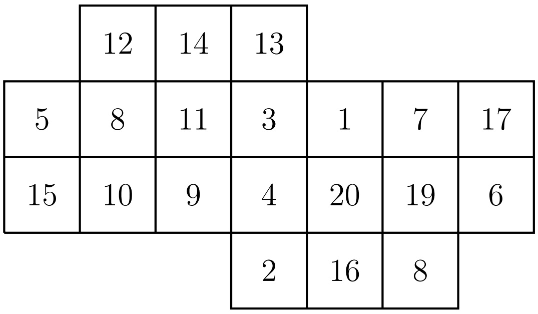


A 360521 a

Zerlege diese Figur vollständig in vier einander deckungsgleiche Teilfiguren! Gib drei Beispiele einer solchen Zerlegung an!
Hinweis: Es genügt, die drei Beispiele zeichengenau anzufertigen. Eine Begründung wird nicht verlangt.

b) Nun enthält die Figur noch quadratförmige Zahlenfelder (siehe Abbildung A 360521 b):

Auf der nächsten Seite geht es weiter!



A 360521 b

Gib auch für diese Figur eine Zerlegung in vier einander deckungsgleiche Teilfiguren! Dabei sollen die Zahlenfelder nicht zerschnitten werden, und die Zahlen in den vier Teilfiguren sollen einander gleiche Summen ergeben.

<u>360522</u>

Vier Fußballvereine A, B, C, D tragen ein Turnier aus, bei dem jeder dieser Vereine gegen jeden anderen genau einmal spielt. Die Punktverteilung erfolgt so: Jeder Verein erhält

für jedes	gewonnene	Spiel	3 Punkte,
für jedes	verlorene	Spiel	0 Punkte,
für jedes	unentschiedene	Spiel	1 Punkt.

a) Welche Werte kann die Summe aller derjenigen Punkte annehmen, die in einem solchen Turnier vergeben werden? Nenne alle diese Werte und begründe, daß es alle sind!

b) Bei einem solchen Turnier wurde der folgende Tabellen-Endstand erreicht:

Verein	A	B	C	D
Punkte	9	4	3	1

Gib für jedes einzelne Spiel des Turniers einen Spielausgang (Gewinner- und Verliererverein bzw. unentschiedener Ausgang) so an, daß dieser Endstand zustandekommen konnte!

c) Bei einem anderen solchen Turnier war 14 die Summe aller derjenigen Punkte, die in dem Turnier vergeben wurden. Außerdem ergab sich im Endstand:

- A erhielt mehr Punkte als B,
- B mindestens so viele Punkte wie C,
- C mindestens so viele wie D.

Gib auch hierzu für jedes einzelne Spiel des Turniers einen Spielausgang so an, daß ein derartiger Endstand zustandekommen konnte!

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

360523

Frank und Beyhan stellen sich Aufgaben der folgenden Art:

Eine natürliche Zahl wird gegeben; gesucht wird ihre Darstellung als Summe von aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, wobei die 0 nicht als Summand zugelassen sein soll.

Frank hat als jeweils gegebene Zahl alle natürlichen Zahlen von 2 bis 10 durchprobiert. Er behauptet: „Unter diesen Zahlen gibt es mindestens zwei, bei denen die Aufgabe nicht lösbar ist.“

Beyhan hat als jeweils gegebene Zahl alle natürlichen Zahlen von 10 bis 20 mit genau einer Ausnahme durchprobiert. Er behauptet: „Für alle Zahlen, die ich probiert habe, ist die Aufgabe lösbar.“

a) Zeige, daß Frank recht hat!

b) Zeige, daß es zehn Zahlen unter den elf natürlichen Zahlen von 10 bis 20 gibt, so daß Beyhan recht hat, wenn er gerade diese zehn Zahlen durchprobiert hat!

360524

Eine 5.Klasse möchte eine Klassenfeier durchführen. Für jeden Schüler soll dabei genau ein Getränk gekauft werden. Zur Auswahl stehen Päckchen mit Limonade, die jeweils 35 Pfennig kosten, und mit Cola, deren Preis jeweils 42 Pfennig beträgt.

Jana sammelt vor der Feier von allen Schülern das Geld ein; es sind insgesamt 9,94 DM. Als sie einkaufen gehen will, stellt sie fest, daß sie den Zettel verloren hat, auf dem steht, wer welches Getränk bestellt hat. Sie weiß nicht einmal, wieviele Limonaden und wieviele Colas sie kaufen soll.

a) Immerhin weiß sie, daß an der Feier mindestens 20, höchstens aber 30 Schüler teilnehmen. Lassen sich mit dem nun zur Verfügung stehenden Wissen die richtigen Zahlen von Limos und Colas herausfinden? Begründe deine Antwort!

b) Etwas später – aber noch vor dem Kauf – erfährt sie: Es nehmen genau 24 Schüler teil. Lassen sich nun die richtigen Zahlen von Limos und Colas herausfinden? Wenn das so ist, begründe es und gib diese Zahlen an!

36. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Olympiadeklasse 5
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

360531

Eine von Adam Ries in einem seiner Rechenbücher gestellte Aufgabe könnte man heute so formulieren: „Jemand kauft 56 Pfund einer Ware für 13 Gulden, 2 Groschen und 4 Pfennige. Wieviel kosten 8 Pfund von dieser Ware?“

Bei dieser Aufgabe soll nur mit drei Münzarten gerechnet werden, die zur Zeit von Adam Ries vorkamen: Gulden, Groschen, Pfennig. Für diese Münzen galt:

Ein Gulden hat 21 Groschen, ein Groschen hat 12 Pfennige.

a) Wenn der Käufer die 56 Pfund nur mit Pfennigen bezahlt hätte, wie viele wären das gewesen?

b) Beantworte die Frage von Ries: Wieviel kosten 8 Pfund der Ware? Gib dabei den Preis so an, daß die Zahl der benötigten Münzen möglichst klein ist!

c) Drei Personen kaufen die 56 Pfund. Sie teilen sich diesen Kauf so ein: Der Zweite kauft doppelt so viel wie der Erste, der Dritte kauft doppelt so viel wie der Zweite.
Gib für jeden der drei Käufer den zu zahlenden Preis so an, daß die Zahl der von ihm benötigten Münzen möglichst klein ist!

360532

Sieben Fußballvereine trugen ein Turnier aus, bei dem jeder dieser Vereine gegen jeden anderen genau einmal spielte. Die Punktverteilung erfolgt so: Jeder Verein erhält

für jedes	gewonnene	Spiel	3 Punkte,
für jedes	unentschiedene	Spiel	1 Punkt,
für jedes	verlorene	Spiel	0 Punkte.

a) Wie viele Spiele wurden in diesem Turnier gespielt?

b) Nach dem Turnier behauptet Franz, einer Tabelle entnehmen zu können: „Der Siegerverein hat genau 17 Punkte erhalten.“ Fritz meint: „Das kann nicht stimmen.“ Zeige, daß Fritz recht hat!

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

c) Die (richtige) Tabelle am Ende des Turniers ergibt 52 als Summe der Punkte aller sieben Vereine. Wie viele von allen Spielen wurden gewonnen?

d) Zeige, daß am Ende eines Turniers die Summe der Punkte aller sieben Vereine nicht 41 sein kann!

<u>360533</u>

Otto, Paul und Rudolf gingen gemeinsam kegeln. Sie spielten es so: In einem Wurf versucht man, mit der Kugel möglichst viele der neun Kegel umzuwerfen. Jeder umgefallene Kegel bringt einen Punkt. Nach jedem Wurf werden die neun Kegel wieder aufgestellt.

(1) Nachdem jeder Spieler einmal gekegelt hatte, wurde festgestellt:
Paul hatte die meisten Punkte,
Rudolf schaffte drei Punkte weniger als Paul,
Otto schaffte sechs Punkte weniger als Paul und Rolf zusammen,
insgesamt wurden beim ersten Wurf 20 Punkte erzielt.

(2) Beim zweiten Wurf ergab sich:
Paul kegelte besser als bei seinem ersten Wurf,
Otto erreichte fünf Punkte weniger als Paul,
Rudolf erzielte einen Punkt mehr als Otto.

(3) Als jeder Spieler dreimal gekegelt hatte, kam heraus:
Mit allen drei Würfen zusammen schaffte Paul 18 Punkte,
Otto erzielte insgesamt zwei Punkte mehr als Paul;
es waren insgesamt 54 Kegel umgefallen.

a) Wie viele Punkte erreichte Paul beim ersten Wurf?

b) Wie viele Punkte erreichte Paul beim dritten Wurf?

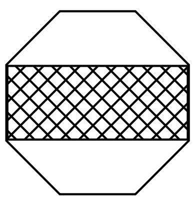
c) Wie viele Punkte erreichte Rudolf beim dritten Wurf?

<u>360534</u>

Gegeben ist ein regelmäßiges Achteck, in dem ein Teil eingefärbt ist.

(Ein Achteck heißt regelmäßig, wenn alle seine Seiten einander gleichlang sind und alle seine Winkel einander gleichgroß sind.)

Welcher Bruchteil der Fläche des Achtecks ist eingefärbt?



Nenne Überlegungen, mit denen du deine Antwort gefunden hast!

36. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulrunde)
Olympiadeklasse 6
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

360611

Wir basteln eine „Zahlenkette". Alle ihre „Glieder" sollen dreistellige Zahlen sein; allerdings wird auch erlaubt (anders als sonst oft üblich), daß ein „Glied" die Anfangsziffer 0 hat.

Als erstes „Glied" wählen wir eine beliebige dreistellige Zahl, in der mindestens zwei voneinander verschiedene Ziffern vorkommen. Nun wird erklärt, wie man den „Nachfolger" zu einem „Glied" bildet: Man sortiert die drei Ziffern des „Gliedes" einmal so, daß eine möglichst große Zahl entsteht, und ein zweites Mal so, daß eine möglichst kleine Zahl entsteht. Die Differenz zwischen diesen beiden Zahlen ist der gesuchte „Nachfolger". Ist die Differenz zweistellig (z.B. „99"), mache sie durch Voranstellen einer 0 dreistellig (also „099").

Nach dieser Vorschrift stellen wir aus dem ersten Glied als seinen Nachfolger das zweite Glied her, daraus nach derselben Vorschrift das dritte, … usw.

a) Bilde als Beispiele einige „Zahlenketten" und stelle fest, ob sich in diesen Beispielen die „Glieder" von einer Stelle an stets wiederholen!
b) Versuche herauszufinden, ob sich in jeder möglichen „Zahlenkette" gewisse „Glieder" von einer Stelle an wiederholen! Wenn du meinst, daß das so ist, woran könnte es liegen?

360612

Drei Fußballvereine A, B und C tragen ein Turnier aus, bei dem jeder Verein genau einmal gegen jeden der beiden anderen Vereine spielt. Die Punkteverteilung erfolgt so:

Jeder Verein bekommt

für jedes gewonnene Spiel	3 Punkte,
für jedes verlorene Spiel	0 Punkte,
für jedes unentschiedene Spiel	1 Punkt.

a) Wie viele Spiele werden insgesamt in dem Turnier gespielt, und welche sind es?
b) Wie viele Spiele insgesamt gibt es bei einem entsprechenden Turnier mit 4 Vereinen? Und bei 5 Vereinen?
Finde eine Formel für die Anzahl der Spiele bei n Vereinen!

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

c) Xaver, Yvonne und Zacharias sprechen über den Tabellen-Endstand des Turniers mit den drei Vereinen A, B und C. Kann der Tabellenstand am Ende des Turniers mit den Vereinen A, B und C so aussehen:

Xaver behauptet:	
Verein	Punkte
A	6
B	3
C	1

Yvonne behauptet:	
Verein	Punkte
A	4
B	1
C	2

Zacharias behauptet:	
Verein	Punkte
A	2
B	2
C	2

Stelle für jede der drei Behauptungen fest, ob sie einen möglichen Endstand angibt! Begründe deine Feststellungen!

360613

Die Zahl 135 kann in verschiedener Weise als Summe von aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen dargestellt werden, wobei die 0 nicht als Summand zugelassen sein soll. Zwei Beispiele:

$$135 = 44 + 45 + 46 \quad \text{oder} \tag{1}$$

$$135 = 2 + 3 + 4 + \cdots + 14 + 15 + 16. \tag{2}$$

a) Gib mindestens zwei weitere Darstellungen von 135 als Summe aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen an!

b) Auch die Zahl 15 kann als Summe von aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen dargestellt werden. Gib alle diese Darstellungen an! Erkläre auch, warum es keine weiteren gibt!

c) Peter meint: „Aus der Tatsache, daß $213 \; : = 71$ gilt, kann man eine Darstellung der Zahl 213 als Summe von drei aufeinanderfolgenden Zahlen gewinnen, nämlich ... “.
Welche Darstellung hat er (wenn er richtig gedacht hat) da gefunden? Durch welche Überlegung kann er sie gefunden haben? Wende eine solche Überlegung auch auf zwei andere Beispiele an, bei denen eine durch 3 teilbare Zahl darzustellen ist!

360614

a) Ein Rechteck von 10 cm Länge und 20 cm Breite soll vollständig mit runden Bierdeckeln (Durchmesser 10 cm) überdeckt werden. Zur Erleichterung wird vereinbart: Es sollen nirgendwo mehr als zwei Bierdeckel übereinander liegen.

Ein erster Versuch wird gemacht: Zwei Deckel lassen sich so nebeneinander legen, daß sie nirgendwo über den Rand des Rechtecks hinausragen. Nun sind noch 6 Teilflächen des Rechtecks unbedeckt. Jede dieser Teilflächen kann mit einem Deckel zugedeckt werden; dadurch ist die Aufgabe mit 8 Deckeln gelöst.

Fritzchen Schlaukopf sagt: „Die Aufgabe kann auch mit 7 Deckeln gelöst werden.“ Hat er recht? Versuche, dies durch eine Zeichnung zu klären!

b) Jetzt stehen 17 Deckel zur Verfügung. Man soll das Rechteck vergrößern, aber nur so weit, daß es sich mit diesen 17 Deckeln überdecken läßt. Und wieder sollen nirgendwo mehr als zwei Deckel übereinander liegen.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

Nach den Erfahrungen mit Aufgabe (a) entsteht die Vermutung: Für ein geeignetes Rechteck, das den Flächeninhalt $600\,\mathrm{cm}^2$ hat, ist die Aufgabe lösbar. Stimmt das? Kläre auch dies durch eine Zeichnung!

c) Wieder will Fritzchen Schlaukopf es besser wissen: „Wenn man sehr genau konstruiert und die 17 Deckel noch geschickter anordnet, kann man ein Rechteck mit einem etwas größeren Flächeninhalt bekommen, für das die Aufgabe auch lösbar ist.“

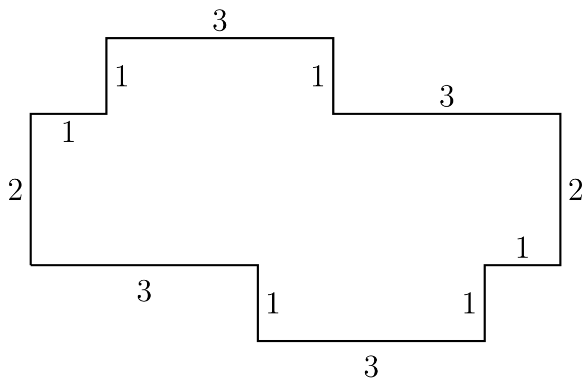
Hat er diesmal recht? Wie er andeutete, müßtest du sicher mit einer genügend genauen Zeichnung arbeiten, um das zu entscheiden. Versuche es!

36. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Olympiadeklasse 6
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

360621

a) In der Abbildung A 360621 a wird eine Figur gezeigt. Alle Winkel darin sind rechte Winkel, die Längenangaben sind in Zentimetern zu nehmen.



A 360621 a

Zerlege diese Figur vollständig in vier einander deckungsgleiche Teilfiguren! Gib drei Beispiele einer solchen Zerlegung an!
Hinweis: : Es genügt, die drei Beispiele zeichengenau anzufertigen. Eine Begründung wird nicht verlangt.

b) Nun enthält die Figur noch quadratförmige Zahlenfelder (siehe Abbildung A 360621 b):

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

	12	14	13			
5	8	11	3	1	7	17
15	10	9	4	20	19	6
			2	16	8	

A 360621 b

Gib auch für diese Figur eine Zerlegung in vier einander deckungsgleiche Teilfiguren! Dabei sollen die Zahlenfelder nicht zerschnitten werden, und die Zahlen in den vier Teilfiguren sollen einander gleiche Summen ergeben.

c) Kann man anstelle der Zahlen in (b) die Zahlen von 1 bis 20 so eintragen, daß sich dann dieselbe Aufgabe wie in (b) lösen läßt? Wenn ja, gib ein Beispiel; wenn nein, begründe, warum nicht!
Wie lautet die Antwort und die Begründung, wenn in den Zahlen von 1 bis 20 die 18 weggelassen wird und dafür die 8 zweimal vorkommt?

360622

Vier Fußballvereine A, B, C, D tragen ein Turnier aus, bei dem jeder dieser Vereine gegen jeden anderen genau einmal spielt. Die Punktverteilung erfolgt so: Jeder Verein erhält

für jedes	gewonnene	Spiel	3 Punkte,
für jedes	verlorene	Spiel	0 Punkte,
für jedes	unentschiedene	Spiel	1 Punkt.

a) Welche Werte kann die Summe aller derjenigen Punkte annehmen, die in einem solchen Turnier vergeben werden? Nenne alle diese Werte und begründe, daß es alle sind!

b) Bei einem solchen Turnier wurde der folgende Tabellen-Endstand erreicht:

Verein	A	B	C	D
Punkte	9	4	3	1

Gib für jedes einzelne Spiel des Turniers einen Spielausgang (Gewinner- und Verliererverein bzw. unentschiedener Ausgang) so an, daß dieser Endstand zustandekommen konnte!

c) Bei einem anderen solchen Turnier war 14 die Summe aller derjenigen Punkte, die in dem Turnier vergeben wurden. Außerdem ergab sich im Endstand:

- A erhielt mehr Punkte als B,
- B mindestens so viele Punkte wie C,
- C mindestens so viele wie D.

Gib auch hierzu für jedes einzelne Spiel des Turniers einen Spielausgang so an, daß ein derartiger Endstand zustandekommen konnte!

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

360623

Frank und Beyhan stellen sich Aufgaben der folgenden Art:

Eine natürliche Zahl wird gegeben; gesucht wird ihre Darstellung als Summe von aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, wobei die 0 nicht als Summand zugelassen sein soll.

Frank hat als jeweils gegebene Zahl alle natürlichen Zahlen von 2 bis 10 durchprobiert. Er behauptet: „Unter diesen Zahlen gibt es mindestens zwei, bei denen die Aufgabe nicht lösbar ist.“

Beyhan hat als jeweils gegebene Zahl alle natürlichen Zahlen von 10 bis 20 mit genau einer Ausnahme durchprobiert. Er behauptet: „Für alle Zahlen, die ich probiert habe, ist die Aufgabe lösbar.“

a) Zeige, daß Frank recht hat!
b) Zeige, daß es zehn Zahlen unter den elf natürlichen Zahlen von 10 bis 20 gibt, so daß Beyhan recht hat, wenn er gerade diese zehn Zahlen durchprobiert hat!
c) Nachdem Beyhan nun noch die vorher weggelassene Zahl probiert hat, behauptet er: „Für diese Zahl ist die Aufgabe nicht lösbar.“ Hat er auch hiermit recht? Begründe deine Antwort!

360624

a) Für ein Ratespiel wird mitgeteilt: Es werden drei Gewichtsstücke benutzt; jedes wiegt eine ganze Zahl von Gramm, zusammen wiegen sie 6 Gramm. Äußerlich, nur vom Ansehen, sind sie nicht zu unterscheiden.

   Welche Möglichkeiten gibt es hiernach für die Gewichte der einzelnen Gewichtsstücke?
b) Die Spielregeln lauten: Der Rater soll mehrmals vorschreiben, welche zwei der drei Gewichtsstücke auf eine Balkenwaage kommen sollen, welches auf die rechte, welches auf die linkes Seite. Jedesmal wird ihm dann mitgeteilt, ob Gleichgewicht eintrat oder welches Gewichtsstück schwerer als das andere war. Er sieht die Wägungen aber nicht, kann also nicht wissen, ob der Gewichtsunterschied bei einer Wägung etwa größer war als bei einer anderen Wägung.

   Welches ist die kleinste Zahl solcher Wägungen, nach der es überhaupt möglich werden kann, daß infolge der Informationen, die der Rater erhält, die drei Gewichte eindeutig feststehen?
c) Ein Rater schreibt jeweils die nächste Wägung so vor, daß sich die drei Gewichte mit möglichst wenig Wägungen ermitteln lassen.

   Welches ist dann die größte Zahl von Wägungen, die hierbei erforderlich werden können?

36. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Olympiadeklasse 6
Aufgaben – 1. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

360631

Eine von Adam Ries in einem seiner Rechenbücher gestellte Aufgabe könnte man heute so formulieren: „Jemand kauft 56 Pfund einer Ware für 13 Gulden, 2 Groschen und 4 Pfennige. Wieviel kosten 8 Pfund von dieser Ware?“

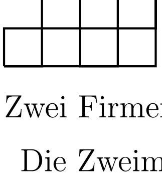
Bei dieser Aufgabe soll nur mit drei Münzarten gerechnet werden, die zur Zeit von Adam Ries vorkamen: Gulden, Groschen, Pfennig. Für diese Münzen galt:

Ein Gulden hat 21 Groschen, ein Groschen hat 12 Pfennige.

a) Wenn der Käufer die 56 Pfund nur mit Pfennigen bezahlt hätte, wie viele wären das gewesen?
b) Beantworte die Frage von Ries: Wieviel kosten 8 Pfund der Ware? Gib dabei den Preis so an, daß die Zahl der benötigten Münzen möglichst klein ist!
c) Drei Personen kaufen die 56 Pfund. Sie teilen sich diesen Kauf so ein: Der Zweite kauft doppelt so viel wie der Erste, der Dritte kauft doppelt so viel wie der Zweite.
Gib für jeden der drei Käufer den zu zahlenden Preis so an, daß die Zahl der von ihm benötigten Münzen möglichst klein ist!

360632

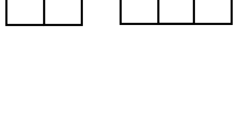
Hier geht es um Treppen verschiedener Höhen. Eine vierstufige Treppe (eine Treppe der Höhe 4) zum Beispiel würde so aussehen:



Zwei Firmen stellen Elemente her, aus denen sich solche Treppen zusammensetzen lassen.

Die Zweimalzwei GmbH stellt her:

Die Dreimaldrei KG stellt her:



(a) Für ein Bauvorhaben werden 5-, 6-, 8- und 11-stufige Treppen benötigt. Welche Firma kann für welche dieser Treppen ausreichende Elemente liefern?

(b) Jemand behauptet, daß keine der beiden Firmen ausreichende Elemente für 3-, 7-, 9-, 13- oder 15-stufige Treppen liefern kann. Begründe von diesen Behauptungen diejenige, die sich auf die Zweimalzwei GmbH und 7-stufige Treppen bezieht!

(c) Jetzt sollen sich die beiden Firmen zusammentun. Zeige, daß dann die Elemente beider Firmen für Treppen aller Höhen von 7 bis 15 ausreichen!

<u>360633</u>

Otto, Paul und Rudolf gingen gemeinsam kegeln. Sie spielten es so: In einem Wurf versucht man, mit der Kugel möglichst viele der neun Kegel umzuwerfen. Jeder umgefallene Kegel bringt einen Punkt. Nach jedem Wurf werden die neun Kegel wieder aufgestellt.

(1) Nachdem jeder Spieler einmal gekegelt hatte, wurde festgestellt:
Paul hatte die meisten Punkte,
Rudolf schaffte drei Punkte weniger als Paul,
Otto schaffte sechs Punkte weniger als Paul und Rolf zusammen,
insgesamt wurden beim ersten Wurf 20 Punkte erzielt.

(2) Beim zweiten Wurf ergab sich:
Paul kegelte besser als bei seinem ersten Wurf,
Otto erreichte fünf Punkte weniger als Paul,
Rudolf erzielte einen Punkt mehr als Otto.

(3) Als jeder Spieler dreimal gekegelt hatte, kam heraus:
Mit allen drei Würfen zusammen schaffte Paul 18 Punkte,
Otto erzielte insgesamt zwei Punkte mehr als Paul;
es waren insgesamt 54 Kegel umgefallen.

a) Wie viele Punkte erreichte Paul beim ersten Wurf?

b) Wie viele Punkte erreichte Paul beim dritten Wurf?

c) Wie viele Punkte erreichte Rudolf beim dritten Wurf?

36. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Olympiadeklasse 6
Aufgaben – 2. Tag

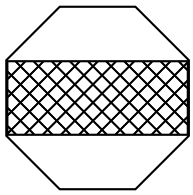
Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

360634

Gegeben ist ein regelmäßiges Achteck, in dem ein Teil eingefärbt ist.

(Ein Achteck heißt regelmäßig, wenn alle seine Seiten einander gleichlang sind und alle seine Winkel einander gleichgroß sind.)

Welcher Bruchteil der Fläche des Achtecks ist eingefärbt?



Nenne Überlegungen, mit denen du deine Antwort gefunden hast!

360635

Sieben Fußballvereine trugen ein Turnier aus, bei dem jeder dieser Vereine gegen jeden anderen genau einmal spielte. Die Punktverteilung erfolgt so: Jeder Verein erhält

für jedes	gewonnene	Spiel	3 Punkte,
für jedes	unentschiedene	Spiel	1 Punkt,
für jedes	verlorene	Spiel	0 Punkte.

a) Wie viele Spiele wurden in diesem Turnier gespielt?

b) Nach dem Turnier behauptet Franz, einer Tabelle entnehmen zu können: „Der Siegerverein hat genau 17 Punkte erhalten.“ Fritz meint: „Das kann nicht stimmen.“ Zeige, daß Fritz recht hat!

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

c) Die (richtige) Tabelle am Ende des Turniers ergibt 52 als Summe der Punkte aller sieben Vereine. Wie viele von allen Spielen wurden gewonnen?

d) Finde die kleinste Zahl, die am Ende eines Turniers als Summe der Punkte aller sieben Vereine möglich ist! Wie viele Punkte hat am Ende eines solchen Turniers der Siegerverein?
Finde die größte Zahl, die am Ende eines Turniers als Summe der Punkte aller sieben Vereine möglich ist! Fritz behauptet: „Wenn in einem solchen Turnier der Siegerverein mehr Punkte hat als jeder andere Verein, dann muß er 18 Punkte haben." Hat Fritz auch diesmal recht?

<u>360636</u>

a) Finde alle Darstellungen der Zahl 35 als Summe von mindestens zwei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen (wobei die Null nicht als Summand zugelassen ist)!
Zeige auch, daß es keine weiteren Darstellungen gibt!

b) J.Sylvester (1814 - 1897) hat folgenden Satz bewiesen:

> *Jede natürliche Zahl ab 3 hat genau so viele Darstellungen als Summe aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen, wie sie ungerade Teiler hat. Dabei wird die 1 nicht als Teiler mitgezählt, wohl aber die Zahl selbst (falls sie ungerade ist).*

Zeige, daß dein Ergebnis der Aufgabe (a) mit dem Satz von Sylvester im Einklang steht!

In den folgenden Aufgaben kannst du den Satz von Sylvester anwenden, ohne ihn zu beweisen:

c) Wie viele Darstellungen als Summe aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen hat die Zahl 115? Und die Zahl 90?

d) Zeige, daß jede Potenz von 2 überhaupt keine Darstellung als Summe aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen hat!
Zeige, daß dagegen jede natürliche Zahl ab 3, die nicht Potenz von 2 ist, mindestens eine solche Darstellung hat!

36. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulrunde)
Olympiadeklassen 7 und 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

360811

Frau Lehmann, Frau Meier und Frau Neumann haben (nicht notwendig in dieser Reihenfolge) die Vornamen Agnes, Brigitte und Christine. Jede dieser drei Frauen betreibt genau eine der drei Lieblingsbeschäftigungen Schwimmen, Tennis und Wandern. Ferner ist bekannt:

(1) Christine hat bei ihrer Lieblingsbeschäftigung Schwimmen sogar schon viele Preise gewonnen.
(2) Frau Meier, die jünger als die Schwimmerin ist, wohnt im Haus neben Brigittes Wohnung.
(3) Brigitte ist älter als die Tennisspielerin, aber jünger als Frau Lehmann.

Ermittle aus diesen Angaben für jede der drei Frauen den Vornamen und die Lieblingsbeschäftigung!

360812

Ermittle alle diejenigen vierstelligen Zahlen $z = \overline{abcd}$, die folgende Bedingungen (1) bis (4) erfüllen!

(1) z ist eine Primzahl.
(2) Keine zwei der Ziffern a, b, c, d sind einander gleich.
(3) Die beiden Zahlen $\overline{ab}$ und $\overline{cd}$ sind Primzahlen; jede dieser beiden Zahlen hat die Quersumme 10.
(4) Auch jede der beiden Ziffern c und d bezeichnet eine Primzahl.

Hinweis: In dieser Aufgabe bedeutet die Schreibweise $z = \overline{abcd}$, daß die Zahl z mit den Ziffern a, b, c, d (in dieser Reihenfolge) geschrieben wird. Entsprechend bedeuten $\overline{ab}$ und $\overline{cd}$ Schreibweisen zur Angabe der Ziffern von zweistelligen Zahlen.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

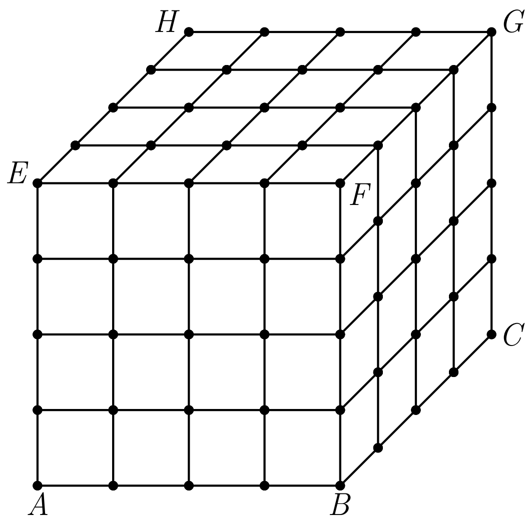
360813

Es sei $ABCD$ ein Rechteck mit den Seitenlängen $|AB| = a$ und $|BC| = b$. Die Diagonale $\overline{AC}$ habe die Länge d, das Lot von B auf $\overline{AC}$ habe die Länge h.

Beweise, daß unter diesen Voraussetzungen stets $d = \dfrac{a \cdot b}{h}$ gilt!

360814

Abbildung A 360814 zeigt einen Würfel $ABCDEFGH$ mit der Kantenlänge 4 cm. Zugleich sind dort Gitterpunkte hervorgehoben. Der Abstand je zweier benachbarter Gitterpunkte von links nach rechts, von vorn nach hinten und von unten nach oben beträgt jeweils 1 cm. Auch im Innern des Würfels und auf seinen nicht sichtbaren Flächen denke man sich derartige Gitterpunkte angebracht; insgesamt kommen also 125 Gitterpunkte vor.



A 360814

Es sollen nun Pyramiden betrachtet werden, die folgende Eigenschaften haben:

(1) Alle Eckpunkte der Pyramide sind Gitterpunkte.

(2) Die Grundfläche der Pyramide ist ein Quadrat der Seitenlänge 2 cm, das in der Ebene durch die Punkte A, B, C liegt.

(3) Das von der Spitze der Pyramide auf die Ebene durch A, B, C gefällte Lot hat seinen Fußpunkt im Innern oder auf dem Rand der Grundfläche der Pyramide.

a) Wie viele verschiedene gibt es insgesamt unter diesen Pyramiden?
Dabei werden zwei Pyramiden genau dann als **nicht** voneinander verschieden betrachtet, wenn die Längen $a_1, a_2, \ldots, a_8$ der Kanten der einen Pyramide und die in geeigneter Reihenfolge angegebenen Längen $a'_1, a'_2, \ldots, a'_8$ der Kanten der anderen Pyramide die Gleichungen $a_1 = a'_1, a_2 = a'_2, \ldots, a_8 = a'_8$ erfüllen.

b) Fertige von drei verschiedenen dieser Pyramiden je ein Schrägbild an!

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

c) Es werde nun unter diesen Pyramiden eine betrachtet, deren Grundfläche den Punkt A als eine Ecke hat und deren Höhe 2 cm beträgt. Eine solche Pyramide kann durch eine Verschiebung in eine andere Pyramide übergehen, deren Eckpunkte sämtlich Gitterpunkte sind. Gib die Anzahl aller derjenigen Verschiebungen an, für die das zutrifft! Begründe deine Anzahlangabe durch eine Beschreibung der hierfür möglichen Verschiebungen!

360815

Von den alten Ägyptern sind Handschriften überliefert, die das Dividieren natürlicher Zahlen zeigen. Die nachstehenden Beispiele 530 : 5 (Ergebnis: 106) und 390 : 9 (Ergebnis: 43 , Rest 3) lassen erkennen, wie gerechnet wurde:

	530
1	5
+ 2	- 10
4	20
+ 8	- 40
16	80
+ 32	- 160
+ 64	- 320
= 106	Rest 0

	390
+ 1	- 9
+ 2	- 18
4	36
+ 8	- 72
16	144
+ 32	- 288
= 43	Rest 3

a) Beschreibe ein Verfahren, das du aus diesen Beispielen erkennst! Verwende dabei die Aufgabe 1655 : 29 als Beispiel! Nenne dabei auch (ausführlicher als nur in einer Tabelle) die einzelnen durchzuführenden Rechenschritte!

b) Begründe, warum das von dir beschriebene Verfahren stets die richtigen Ergebnisse liefern muß! Welche Gesetze über natürliche Zahlen ziehst du zu dieser Begründung heran?

360816

Mutter stellt auf den Kaffeetisch fünf frische Pfannkuchen. Drei davon sind mit Pflaumenmus und die beiden anderen mit leckerer Erdbeerkonfitüre gefüllt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß Klaus, der kleine Vielfraß, beim Verzehr von zwei Pfannkuchen mindestens einen mit Erdbeerkonfitüre gefüllten erwischt? *Hinweis:* Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist diejenige (gebrochene) Zahl, die man erhält, wenn man die Anzahl der günstigen Ereignisse durch die Anzahl der möglichen Ereignisse dividiert.

Dabei sind in dieser Aufgabe die „möglichen Ereignisse“ alle möglichen Auswahlen einer Menge, die aus zwei der fünf Pfannkuchen besteht; und eine solche Auswahl ist genau dann ein „günstiges Ereignis“, wenn die ausgewählte Menge mindestens einen mit Erdbeerkonfitüre gefüllten Pfannkuchen enthält.

36. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Olympiadeklasse 7
Aufgaben

<u>Hinweis:</u> *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

<u>360721</u>

In dem Schema der Abbildung A 360721 läßt sich das Wort **Q U A D R A T** auf verschiedenen „Wegen" von **Q** nach **T** lesen. Man geht z. B. (wie eingezeichnet) von **Q** aus einen Schritt nach rechts, dann zwei Schritte nach unten, dann zwei nach rechts und schließlich noch einen Schritt nach unten zum Buchstaben **T**.

Es gilt die Bedingung: Von einem Buchstaben darf man jedesmal nur entweder zum nächsten Buchstaben nach rechts oder zum nächsten Buchstaben nach unten gehen.

Wie viele solche Wege von **Q** nach **T** gibt es insgesamt in diesem Schema?

Begründe deine Antwort!

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Q} \arrow[r] & \mathrm{U} \arrow[d] & \mathrm{A} & \mathrm{D} \\ \mathrm{U} & \mathrm{A} \arrow[d] & \mathrm{D} & \mathrm{R} \\ \mathrm{A} & \mathrm{D} \arrow[r] & \mathrm{R} \arrow[r] & \mathrm{A} \arrow[d] \\ \mathrm{D} & \mathrm{R} & \mathrm{A} & \mathrm{T} \end{tikzcd}$$

A 360721

<u>360722</u>

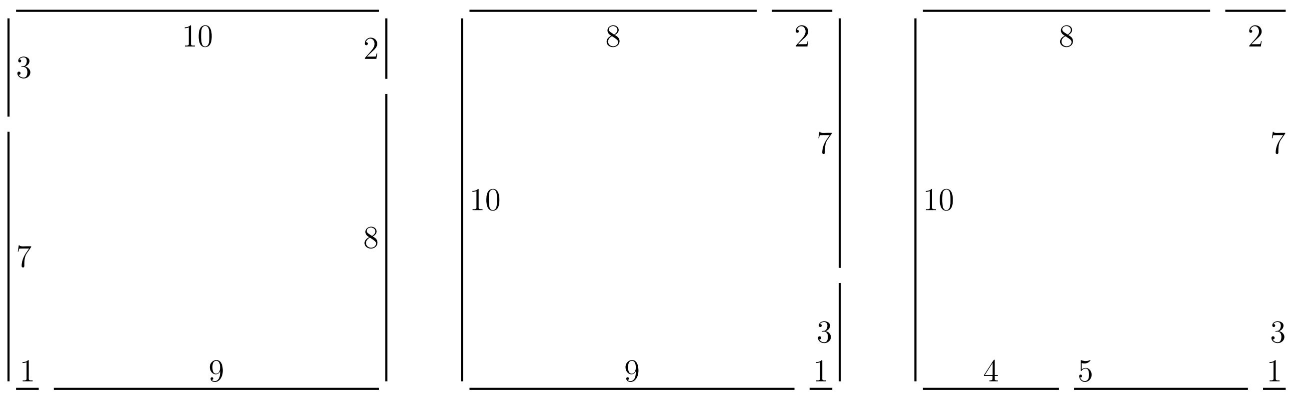
Stefanie besitzt genau 9 Holzstäbchen; eines ist 1 cm lang, ein zweites 2 cm, ein drittes 3 cm,. . . , das neunte 9 cm. Stefanie möchte ein Quadrat legen; d. h., die vier Seiten des Quadrates sollen aus Stäbchen bestehen, wobei keine anderen als nur die oben genannten vorkommen sollen. Allerdings müssen nicht alle 9 Stäbchen verwendet werden.

Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es insgesamt für ein so herzustellendes Quadrat?

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

Hinweis: Zwei Möglichkeiten solcher Quadrate gelten genau dann als voneinander „verschieden“, wenn in einem dieser beiden Quadrate mindestens eine Seite vorkommt, die – verglichen mit jeder Seite des anderen Quadrates – aus anderen Stäbchen besteht.

Es spielt hierfür also keine Rolle, in welcher Reihenfolge die vier Seiten eines Quadrates angeordnet sind und in welcher Reihenfolge die Stäbchen einer Quadratseite. Beispielsweise würde (wenn auch ein Stäbchen der Länge 10 cm vorkommen dürfte) Abb. A 360722 nicht etwa drei, sondern genau zwei verschiedene Möglichkeiten zeigen; denn die beiden linken Quadrate zeigen nur eine Möglichkeit, nicht etwa zwei voneinander „verschiedene“.



A 360722

360723

Brüche der Form $\frac{1}{n}$, wobei n eine natürliche Zahl bezeichnet, die größer als 1 ist, werden Stammbrüche genannt. Zwei Stammbrüche, deren Nenner sich um 1 unterscheiden, wollen wir benachbart nennen. Zum Beispiel sind somit $\frac{1}{8}$ und $\frac{1}{9}$ benachbarte Stammbrüche.

(a) Ermittle alle diejenigen (gebrochenen) Zahlen zwischen $\frac{1}{2}$ und 1, die sich als Summe zweier benachbarter Stammbrüche schreiben lassen!

(b) Untersuche jede der drei Zahlen $x = \frac{52}{463}$, $y = \frac{31}{273}$, $z = \frac{107}{2862}$ daraufhin, ob sie sich als Summe zweier benachbarter Stammbrüche schreiben läßt!

(c) Max erklärt dem Moritz, wie er die Summe zweier benachbarter Stammbrüche berechnet: „Ich erweitere den ersten Stammbruch mit dem Nenner des zweiten und den zweiten Stammbruch mit dem Nenner des ersten. Die Zähler der beiden so entstandenen Brüche addiere ich; das ergibt den Zähler des Ergebnisses. Als Nenner des Ergebnisses nehme ich den gemeinsamen Nenner der beiden eben durch Erweitern erhaltenen Brüche.“
Moritz antwortet: „Wenn man so rechnet, ergibt sich stets ein unkürzbarer Bruch, gleichgültig, welche beiden benachbarten Stammbrüche man addiert hat.“
Beweise, daß diese Antwort wahr ist!

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

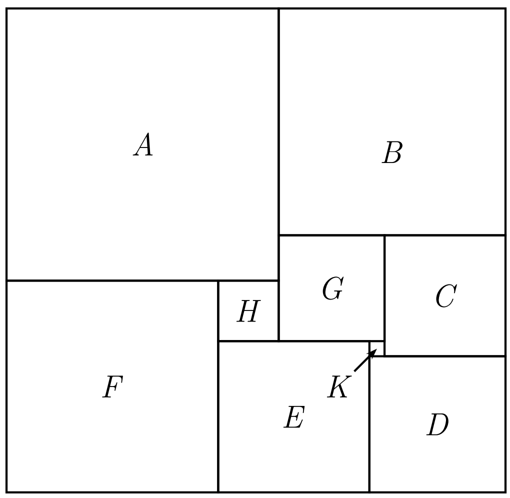
360724

Die Abbildung A 360724 zeigt neun Quadrate $A, B, C, D, E, F, G, H, K$, die so zusammengefügt wurden, daß die Gesamtfigur ein Rechteck bildet.

(a) Die Seitenlänge des Quadrates A betrage 36 cm , des Quadrates B 30 cm , des Quadrates D 18 cm und des Quadrates F 28 cm.
Ermittle aus diesen Angaben die Seitenlängen der übrigen fünf Quadrate!

(b) In einem anderen Rechteck soll eine „ebenso aussehende“ Zerlegung vorliegen.
(Damit ist gemeint: Für die neue Zerlegung haben zwei Quadrate immer in gleicher Weise ein gemeinsames Stück ihres Randes, wie es hier in Abb. A 360724 der Fall war. Zum Beispiel haben hier die Quadrate G und H ein gemeinsames Randstück; dieses ist eine vollständige Seite von H, aber nur ein Teil einer Seite von G; das andere Teil ist zugleich Teil einer Seite von A. In der neuen Zerlegung soll alles dies ebenfalls gelten.)
Für die neue Zerlegung betrage der Flächeninhalt des Quadrates C 64 cm^2 und des Quadrates D 81 cm^2. Ermittle die Flächeninhalte der Quadrate E, G, H und K!

(c) Beweise, daß es kein Rechteck mit „ebenso aussehender“ Zerlegung geben kann, in dem das Quadrat E die Seitenlänge 4,4 cm und das Quadrat G die Seitenlänge 3,5 cm hat!



A 360724

36. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Olympiadeklassen 7
Aufgaben – 1. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

360731

In einem Speiselokal bietet die Mittagskarte vier verschiedene Vorspeisen, drei verschiedene Suppen, fünf verschiedene Hauptgerichte und zwei verschiedene Nachspeisen an.

(a) Wie viele verschiedene vollständige Menüs (Vorspeise, Suppe, Hauptgericht, Nachspeise – genau in dieser Reihenfolge und jedes davon nur je einmal) kann sich ein Gast zusammenstellen?

(b) Um wieviel Prozent steigert sich die Anzahl der Menüs verschiedener Zusammensetzung gegenüber der bisherigen Anzahl, wenn eine weitere Nachspeise zusätzlich ins Angebot aufgenommen wurde?

(c) Auf wieviel Prozent verringert sich, ausgehend vom Angebot in (a), die Anzahl der Menüs, wenn ein Hauptgericht von der Karte gestrichen werden muß?

360732

Wir wollen eine natürliche Zahl „symmetrisch“ nennen, wenn ihre Zifferndarestellung von rechts gelesen ebenso lautet wie von links. Dabei soll stets auch die 0 als Anfangsziffer mitberücksichtigt werden. So sind z.B. 15251 und 037730 symmetrische Zahlen.

(a) Ein vierstelliger Tageskilometerzähler in einem Pkw zeigt 0163. Welches war die letzte vorausgehende symmetrische Zahl, die der Zähler zeigte?
Welches wird die nächste sein?
(Eine Begründung für diese beiden Angaben wird nicht verlangt.)

(b) Wie viele vierstellige symmetrische Zahlen gibt es insgesamt?

(c) Wie groß ist der Anteil der symmetrischen fünfstelligen Zahlen an der Gesamtheit aller fünfstelligen Zahlen?

(d) Gib in einer Tabelle die entsprechenden Anteile bei zwei-, drei-,..., usw. bis siebenstelligen Zahlen an! Welche Gesetzmäßigkeit vermutest du? Wie groß sind nach dieser Gesetzmäßigkeit die entsprechenden Anteile bei 32-, 33- und 34-stelligen Zahlen?

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

360733

Über ein Dreieck ABC und eine Gerade g werden folgende Voraussetzungen gemacht:

(1) Es gilt $|AC| = |BC|$.
(2) Der Winkel BAC beträgt 45°.
(3) Die Gerade g schneidet die Seite $\overline{AC}$ in einem Punkt E zwischen A und C, sie schneidet die Seite $\overline{BC}$ in einem Punkt F zwischen B und C, und sie schneidet die Verlängerung der Seite $\overline{BA}$ über A hinaus in einem Punkt D.

(a) Ferner wird vorausgesetzt:

(4) Der Winkel EDA beträgt 42°.

Ermittle aus den Voraussetzungen (1) bis (4) die Größen der Winkel CEF und EFC!

(b) Nun wird die Voraussetzung (4) weggelassen. Stattdessen soll für den Winkel EDA eine andere Größe vorausgesetzt werden.

Ermittle alle Möglichkeiten, diese Größe so zu wählen, daß sich – zusammen mit den Voraussetzungen (1) bis (3) – eine Figur ergibt, in der das Dreieck EFC gleichschenklig ist!

36. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Olympiadeklassen 7
Aufgaben – 2. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

360734

Antje beobachtet ein Amselpärchen. Sie hat gelesen: Jede Amsel frißt pro Tag durchschnittlich 8 Würmer; jeder Wurm lebt nur ein Jahr; und wenn er bis zum Ende eines Jahres nicht gefressen wurde, legt er Eier, aus denen im nächsten Jahr 40 Würmer entstehen.

Gehe von dieser – natürlich stark vereinfachten – Beschreibung aus, rechne das Jahr zu 360 Tagen und beantworte folgende Fragen!

Welche Zahl von Würmern, die zu Beginn des ersten Jahres da sind, reicht aus, damit für das Amselpärchen

(a) in diesem und im nächsten Jahr,
(b) in diesem, im nächsten und im übernächsten Jahr

genügend Würmer vorhanden sind?

Nenne jeweils die kleinste derartige Zahl!

360735

In einem Dreieck ABC sei D der Schnittpunkt der Seite $\overline{AC}$ mit der Winkelhalbierenden von $\sphericalangle ABC$. Die Parallele durch D zu $\overline{AB}$ schneide $\overline{BC}$ in E, und die Parallele durch D zu $\overline{BC}$ schneide $\overline{AB}$ in F.

Beweise, daß für jedes Dreieck ABC aus diesen Voraussetzungen stets $\overline{BD} \perp \overline{EF}$ folgt!

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

360736

(a) Zwei Trainer A und B wollen acht Sportler trainieren, jeder eine Trainingsgruppe von vier Sportlern. Wie viele verschiedene Aufteilungsmöglichkeitenen der acht Sportler in die zwei Trainingsgruppen für A und B gibt es insgesamt?

(b) Löse die gleiche Aufgabe, wenn drei Trainer A, B und C neun Sportler trainieren, jeder eine Trainingsgruppe von drei Sportlern!

Hinweis:

1. Bei dieser Aufgabe würde eine bloße Aufzählung von Aufteilungen nur dann genügen, wenn ersichtlich gemacht wird, daß alle Aufteilungen erfaßt sind.
2. In dieser Aufgabe ist auch bei Verwendung einer als bekannt angegebenen allgemeinen Formel eine Begründung zu erbringen.

36. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Olympiadeklasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

360821

Über die Wahl zum Schulsprecher des Friedrich-Schiller-Gymnasiums ist folgendes bekannt:

(1) Nur Kerstin und Martin waren als Kandidaten nominiert.
(2) Es wurden von genau 90% aller Schüler der Schule Stimmen abgegeben.
(3) Genau 128 der abgegebenen Stimmen waren ungültig.
(4) Für Kerstin waren genau 248 abgegebene Stimmen mehr als für Martin.
(5) Die für Kerstin abgegebenen Stimmen waren genau 49% aller Schüler der Schule.

Untersuche, ob durch diese Angaben die Anzahl der für Kerstin abgegebenen Stimmen eindeutig bestimmt ist! Ist das der Fall, so gib diese Anzahl an!

360822

Es sei $\triangle ABC$ ein gleichschenkliges Dreieck mit $|AB| = |BC|$. Die Größe des Winkels ABC betrage $120°$. Der Fußpunkt des Lotes von C auf die Gerade durch A und B sei D.

(a) Beweise, daß unter diesen Voraussetzungen die Strecke $\overline{CB}$ eine Winkelhalbierende im Dreieck ADC ist!
(b) Beweise, daß unter diesen Voraussetzungen der Flächeninhalt des Dreiecks ABC doppelt so groß wie der Flächeninhalt des Dreiecks DBC ist!

360823

Brüche der Form $\frac{1}{n}$, wobei n eine natürliche Zahl bezeichnet, die größer als 1 ist, werden Stammbrüche genannt. Zwei Stammbrüche, deren Nenner sich um 1 unterscheiden, wollen wir benachbart nennen. Drei Stammbrüche, von denen der erste (mit dem kleinsten Nenner) und der zweite sowie der zweite und der dritte jeweils benachbart sind, seien ebenfalls benachbart genannt. Zum Beispiel sind $\frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}$ drei benachbarte Stammbrüche.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

(a) Ermittle alle diejenigen (gebrochenen) Zahlen zwischen $\frac{1}{2}$ und 1, die sich als Summe dreier benachbarter Stammbrüche schreiben lassen!

(b) Max erklärt dem Moritz, wie er die Summe zweier benachbarter Stammbrüche berechnet: „Ich erweitere den ersten Stammbruch mit dem Nenner des zweiten und den zweiten Stammbruch mit dem Nenner des ersten. Die Zähler der beiden so entstandenen Brüche addiere ich; das ergibt den Zähler des Ergebnisses. Als Nenner des Ergebnisses nehme ich den gemeinsamen Nenner der beiden eben durch Erweitern erhaltenen Brüche.“
Moritz antwortet: „Wenn man so rechnet, ergibt sich stets ein unkürzbarer Bruch, gleichgültig, welche beiden benachbarten Stammbrüche man addiert hat.“
Beweise, daß diese Antwort wahr ist!

(c) Zur Berechnung der Summe dreier benachbarter Stammbrüche sei der folgende Weg vorgeschrieben: „Man erweitere jeden der drei Stammbrüche mit dem Produkt der Nenner der beiden anderen Stammbrüche. Man addiere die Zähler der drei so entstandenen Brüche; das ergibt den Zähler des Ergebnisses. Als Nenner des Ergebnisses nehme man den gemeinsamen Nenner der drei eben durch Erweitern erhaltenen Brüche.“
Für welche Nenner des ersten Stammbruchs kann der so als Summe erhaltene Bruch durch 2 gekürzt werden, für welche nicht?
Zeige, daß der erhaltene Bruch in jedem Fall durch keine andere Zahl (> 1) als durch 2 gekürzt werden kann!

<u>360824</u>

(a) In einer Kleinstadt gibt es fünf Apotheken. Wir bezeichnen sie mit A, B, C, D und E. Ein Lieferant soll auf einer Fahrt alle fünf Apotheken erreichen, jede genau einmal, und ihnen Arzneimittel anliefern. Er hat ferner den Auftrag, auf dieser Fahrt zusätzlich einige Arzneimittel bei Apotheke B zu laden und zur Apotheke D zu bringen. Ebenso soll er weitere Arzneimittel bei Apotheke C laden und zur Apotheke E bringen.
Wie viele Möglichkeiten gibt es, für die Fahrt die Reihenfolge der Apotheken so zu wählen, daß alle diese Bedingungen erfüllt sind?
Hinweis: Es genügt nicht, die Möglichkeiten einfach aufzuzählen. Es muß auch deutlich gemacht werden, daß es keine weiteren Möglichkeiten gibt.

(b) In einer anderen Stadt sollen auf einer Fahrt sieben Apotheken A, B, C, D, E, F, G erreicht werden, jede genau einmal, und ein zusätzlicher Auftrag lautet:
Es sind bei Apotheke B Arzneimittel zu laden; einige davon sind zur Apotheke E zu bringen, einige zur Apotheke G.
Wie viele Möglichkeiten der Reihenfolge gibt es diesmal?

36. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Olympiadeklassen 8
Aufgaben – 1. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

360831

(a) Ermittle alle diejenigen Paare (a, b) natürlicher Zahlen, für die die folgenden Bedingungen (1), (2), (3) gleichzeitig erfüllt sind!

$a < 4,$ (1)

$a - b > 0,$ (2)

$a + b > 2.$ (3)

(b) Beweise, daß die Bedingungen (1), (2), (3) von keinem Paar (a, b) ganzer Zahlen erfüllt werden, in dem (mindestens) eine der beiden Zahlen a, b negativ ist!

Hinweis: Anders als in manchen Lehrbüchern wird hier auch die Zahl 0 als eine natürliche Zahl bezeichnet.

360832

(a) Beweise, daß die Zahl $3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{100}$ durch 10 teilbar ist!

(b) Untersuche, ob die Zahl $3 + 7 + 3^2 + 7^2 + 3^3 + 7^3 + \cdots + 3^{100} + 7^{100}$ durch 10 teilbar ist!

360833

Über ein Dreieck ABC und eine Gerade g werden folgende Voraussetzungen gemacht:

(1) Es gilt $|AC| = |BC|$.

(2) Der Winkel BAC beträgt 64,5°.

(3) Die Gerade g schneidet die Seite $\overline{AC}$ in einem Punkt E zwischen A und C, sie schneidet die Seite $\overline{BC}$ in einem Punkt F zwischen B und C, und sie schneidet die Verlängerung der Seite $\overline{BA}$ über A hinaus in einem Punkt D.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

(a) Ferner wird vorausgesetzt:

   (4) Der Winkel EDA beträgt $42°$.

   Ermittle aus den Voraussetzungen (1) bis (4) die Größen der Winkel CEF und EFC!

(b) Nun wird die Voraussetzung (4) weggelassen. Stattdessen soll für den Winkel EDA eine andere Größe vorausgesetzt werden.

   Ermittle alle Möglichkeiten, diese Größe so zu wählen, daß sich – zusammen mit den Voraussetzungen (1) bis (3) – eine Figur ergibt, in der das Dreieck EFC gleichschenklig ist!

36. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Olympiadeklassen 8
Aufgaben – 2. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

360834

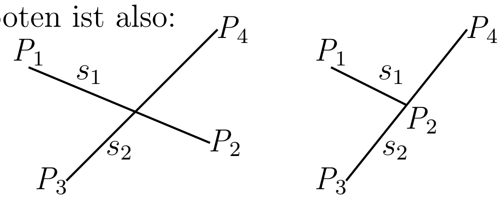
Zwei Kerzen von unterschiedlicher Dicke wurden zu Beginn eines Tages um 0 Uhr angezündet; damals hatten sie voneinander verschiedene Längen. An demselben Tag um 2 Uhr wurde beobachtet, daß sie einander gleiche Länge hatten. An demselben Tag um 3 Uhr 30 Minuten war die ursprünglich längere Kerze vollständig niedergebrannt, an demselben Tag erst um 5 Uhr auch die ursprünglich kürzere Kerze.

In welchem Verhältnis stand zu Anfang die Länge der kürzeren Kerze zur Länge der längeren?

360835

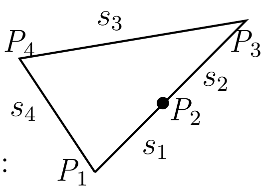
Im Innern eines Vierecks $ABCD$, in dem alle vier Innenwinkel kleiner als 180° sind, sei eine Anzahl n von Punkten $P_1, \ldots, P_n$ gelegen. Dann seien Strecken so eingezeichnet, daß folgende Bedingungen erfüllt sind:

– Von jedem der Punkte $P_1, \ldots, P_n$ geht mindestens eine der eingezeichneten Strecken aus;
– jede dieser Strecken verbindet entweder zwei der Punkte miteinander oder einen der Punkte A, B, C, D mit einem der Punkte $P_1, \ldots, P_n$;
– keine dieser Strecken hat mit einer anderen einen Punkt zwischen deren beiden Endpunkten gemeinsam;
verboten ist also:



– das Viereck $ABCD$ wird durch die sämtlichen eingezeichneten Strecken vollständig in Dreiecke zerlegt;
– in jedem dieser Dreiecke enthält keine Seite zwischen ihren beiden Endpunkten noch einen weiteren der Punkte $P_1, \ldots, P_n$;

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

verboten ist also: 

(a) Zeichne je ein Beispiel für $n = 1, 2, 3, 4$ und stelle in jedem dieser Beispiele die Anzahl der Dreiecke fest, in die das Viereck zerlegt wird!

(b) Zeichne für zwei Beispiele, die sich voneinander nicht in der Wahl der beiden Punkte P_1, P_2 unterscheiden, bei denen aber das Viereck auf unterschiedliche Weise in Dreiecke zerlegt ist! Stelle fest, daß dennoch in beiden Beispielen dieselbe Anzahl von Dreiecken vorliegt!

(c) Nenne und beweise eine Formel, die – ebenfalls, wie in (b) für $n = 2$ festgestellt, unabhängig von der Wahl der einzelnen Strecken – für jede natürliche Zahl $n \geqslant 1$ die Anzahl der entstehenden Dreiecke angibt!

360836

(a) Zwei Trainer A und B wollen zwölf Sportler trainieren, A eine Trainingsgruppe von vier Sportlern, B eine von acht Sportlern. Wie viele verschiedene Aufteilungsmöglichkeitenen der zwölf Sportler in die zwei Trainingsgruppen für A und B gibt es insgesamt?

(b) Löse die gleiche Aufgabe, wenn drei Trainer A, B und C die zwölf Sportler trainieren, jeder eine Trainingsgruppe von vier Sportlern!

Hinweis:
1. Bei dieser Aufgabe würde eine bloße Aufzählung von Aufteilungen nur dann genügen, wenn ersichtlich gemacht wird, daß alle Aufteilungen erfaßt sind.
2. In dieser Aufgabe ist auch bei Verwendung einer als bekannt angegebenen allgemeinen Formel eine Begründung zu erbringen.

36. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Olympiadeklassen 8
Aufgaben – 1. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

360841

Für eine Familie mit Vater, Mutter und zwei Kindern ist über die ganzzahligen Altersangaben bekannt:

(1) Die Summe aller vier Altersangaben beträgt 124.

(2) Die Summe der Altersangaben von Vater und Mutter ist das Dreifache der Summe der Altersangaben der beiden Kinder.

(3) Die Altersangabe der Mutter ist größer als das Doppelte der Altersangabe des älteren Kindes.

(4) Die Differenz, die sich ergibt, wenn man die Altersangabe der Mutter von der des Vaters subtrahiert, ist neunmal so groß wie die Differenz, die sich ergibt, wenn man die Altersangabe des jüngeren Kindes von der des älteren subtrahiert.

Weise nach, daß die vier Altersangaben durch die Bedingungen (1) bis (4) eindeutig bestimmt sind! Wie lauten sie?

360842

Jack, Jim und Jonny entdecken in der Prärie einen Goldschatz. Sie wollen die Beute so verteilen: Jack, der Boß, bekommt mehr als Jim; das Greenhorn Jonny bekommt weniger als Jim. Da nun die drei Männer durchaus keine tollen Bruchrechner sind, beschließen sie, ihren Schatz nur in Brüche mit dem Zähler 1 zu teilen.

(a) Gib eine Aufteilung des Schatzes unter diesen Bedingungen an! Zeige, daß dies die einzige Möglichkeit ist, den Schatz wie gewünscht zu teilen!

(b) Wie hätte die Aufteilung erfolgen müssen, wenn der an Schnupfen erkrankte Jonas als vierter Mann bei der Entdeckung des Goldschatzes beteiligt gewesen wäre und weniger als Jim, aber mehr als Jonny zu bekommen hätte? Auch hier soll jeder Anteil ein Bruch mit dem Zähler 1 sein. Ermittle alle Möglichkeiten einer solchen Aufteilung!

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

360843

In einem Dreieck ABC schneide die Halbierende des Winkels ABC die Seite $\overline{AC}$ in D, ferner schneide die Halbierende des Winkels ACB die Seite $\overline{AB}$ in E. Der Schnittpunkt dieser beiden Winkelhalbierenden sei S. Weiter werde vorausgesetzt: Der Winkel DCS sei ebenso groß wie $\sphericalangle CDS$, und der Winkel AES sei ebenso groß wie $\sphericalangle ASE$.

Untersuche, ob durch diese Voraussetzungen die Größen der drei Innenwinkel des Dreiecks ABC eindeutig bestimmt sind! Ist dies der Fall, so gib diese Größen an!

36. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Olympiadeklassen 8
Aufgaben – 2. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

360844

Karl und Fritz spielen ein Würfelspiel: Sie werfen drei Würfel auf einmal. Zeigen alle drei Würfel dieselbe Zahl, so gewinnt Karl; zeigen die Würfel drei aufeinanderfolgende Zahlen, so gewinnt Fritz. Sind aber die drei Zahlen weder einander gleich noch drei aufeinanderfolgende Zahlen, so ist dieser Wurf unentschieden. Nach einiger Zeit stellt sich heraus:

(a) Karl findet das Spiel „unfair". Er meint, Fritz habe größere Gewinnchancen als er selbst. Stimmt das?

(b) Fritz findet das Spiel „langweilig". Er meint, die Wahrscheinlichkeit für ein Unentschieden sei genau fünfmal so groß wie die Wahrscheinlichkeit für einen Wurf, der nicht unentschieden ist. Hat er recht?

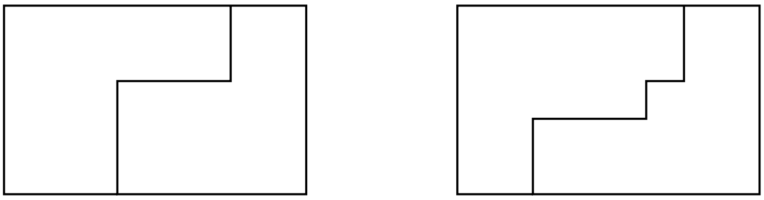
360845

Beweise, daß die Zahl $21^{39} + 39^{21}$ durch 45 teilbar ist!

360846

In Abbildung A 360846 ist ersichtlich, was unter einer „zweistufigen" und einer „dreistufigen Treppenlinie" in einem Rechteck verstanden werden soll:

Ihre Teilstrecken gehen durch das Innere des Rechtecks; sie sind parallel zu den Seiten des Rechtecks, und zwar abwechselnd von unten nach oben und von links nach rechts.



A 360846

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

Nun werde folgende Aufgabe betrachtet:

Ein Rechteck soll so durch eine derartige Treppenlinie zerschnitten werden, daß sich die rechte Teilfläche durch eine Verschiebung in eine Lage bringen läßt, bei der Folgendes gilt:

Die beiden Teilflächen sind wieder lückenlos und ohne Überlappung zusammengefügt, und zwar diesmal zu einem Quadrat.

(a) Zeichne ein Rechteck mit der Breite $a = 9\,\text{cm}$ und der Höhe $b = 4\,\text{cm}$, in dem die Aufgabe durch das Beispiel einer zweistufigen Treppenlinie gelöst ist!

(b) Gib ein Paar (a, b) von Seitenlängen (Breite und Höhe eines Rechtecks) so an, daß die Aufgabe mit einer dreistufigen Treppenlinie lösbar läßt! Beweise auch: Wenn die Aufgabe mit einer dreistufigen Treppenlinie lösbar ist, dann müssen a und b in demselben Verhältnis zueinander stehen wie bei den von dir angegebenen a und b!

(c) Zeige, daß es zu jeder natürlichen Zahl n genau ein Verhältnis $a : b$ gibt, für das die Aufgabe mit einer n-stufigen Treppe lösbar ist!

36. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulrunde)
Olympiadeklassen 9 und 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

361011

Ralf gelingt es, jede gerade Zahl von 4 bis 100 als eine Summe zweier Primzahlen darzustellen.

Ute schafft solche Darstellungen auch für einige weitere Zahlen. Sie sagt: „Ich vermute, daß jede gerade Zahl eine Summe zweier Primzahlen ist.“ Ralf meint: „Man kann nicht Vermutungen aufstellen, die man für unendlich viele Fälle ausspricht, aber nur in Einzelfällen bestätigt; auch dann nicht, wenn es viele Einzelfälle sind.“ Ute erwidert: „Doch, das kann man; nur . . . .“

(a) Wie würden Sie Utes Erwiderung fortsetzen?
(b) Schreiben Sie ein Computerprogramm, mit dem man Ralfs Ergebnis bestätigen kann!

361012

Axel wählt eine natürliche Zahl z_0 und bildet aus ihr durch fortgesetzte Verdopplung die Folge der Zahlen $z_1, z_2, \ldots, z_{14}$. Er bemerkt: Bei seiner Wahl von z_0 gelten für die erhaltene Folge die Aussagen:

– Die ersten vier Zahlen z_1 bis z_4 sind 5-stellig.
– Die folgenden drei Zahlen sind 6-stellig.
– Dann folgen drei 7-stellige Zahlen,
– und am Ende stehen vier 8-stellige Zahlen.

Susanne wählt eine andere Zahl z_0, bildet nach der gleichen Regel z_1 bis z_{14} und stellt zu ihrer Überraschung fest, daß ebenfalls die obigen Aussagen gelten.

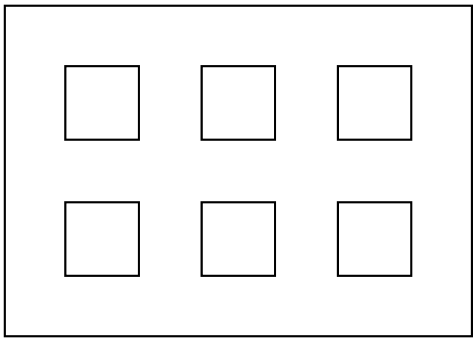
Die Mathematiklehrerin meint, daß dies nun nicht so überraschend sei; es gebe mehr als 50 Startzahlen z_0, bei deren Wahl ebenfalls diese Aussagen gelten.

(a) Hat die Lehrerin recht?
(b) Wie viele Startzahlen z_0, bei deren Wahl die obigen Aussagen gelten, gibt es insgesamt?

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

361013

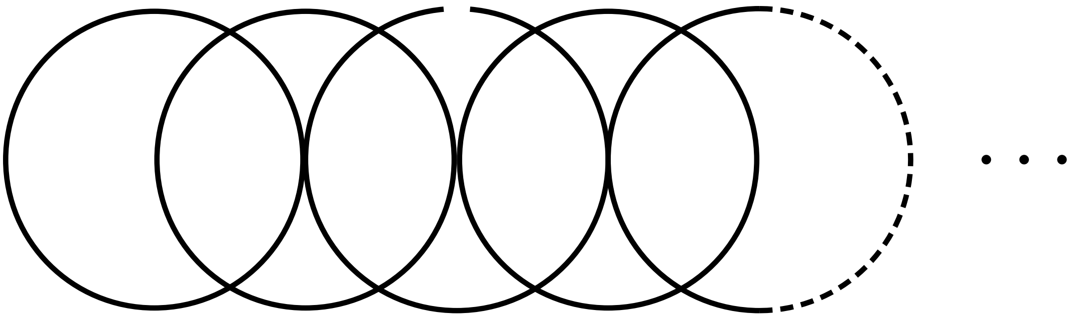
Zur Gestaltung des Raumes für eine Feier will eine Schulklasse auf einer gegebenen Rechteckfläche sechs Bilder so aufkleben, wie in Abbildung A 361013 ersichtlich. Zur Verfügung stehen zehn Bilder in dem gewünschten Format; keine zwei dieser zehn Bilder sind einander gleich. Wie viele Möglichkeiten gibt es insgesamt, sechs dieser zehn Bilder in der vorgesehenen Weise anzuordnen?



A 361013

361014

Bei einer Kette aus 63 Gliedern habe jedes Glied eine Masse von 1 g. Durch Aufbiegen von einigen Gliedern wird die Kette zerlegt. Abbildung A 361014 zeigt als Beispiel das Aufbiegen des dritten Gliedes.



A 361014

Die aufgebogenen Glieder und die verbliebenen Teilketten sollen als Wägestücke dienen, und zwar so, daß stets ein zu wägender Gegenstand auf eine Waagschale kommt, die passenden Wägestücke auf die andere Waagschale. (Ein glqq Subtraktionsverfahren", bei dem auch Wägestücke auf dieselbe Waagschale wie der Gegenstand kommen dürfen, soll also nicht stattfinden.)

Durch das Aufbiegen welcher Glieder läßt sich erreichen, daß mit den so erhaltenen Wägestücken jeder ganzzahlige Grammbetrag von 1 g bis 63 g zusammengesetzt werden kann? Dabei sollen so wenig Glieder wie möglich aufgebogen werden.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

361015

Einem Kreis mit gegebenem Radius r sei ein regelmäßiges n-Eck einbeschrieben. Auch seine Seitenlänge s_n sei gegeben. Gesucht ist die Seitenlänge s_{2n} eines regelmäßigen $2n$-Ecks, das demselben Kreis einbeschrieben ist. Diese Seitenlänge soll in Abhängigkeit von r und s_n angegeben werden.

361016

Auf dem Arbeitsblatt ist das Bild $A'B'C'D'S'$ einer vierseitigen Pyramide $ABCDS$ bei einer schrägen Parallelprojektion vorgegeben. Von einer Ebene ε wird gefordert, daß die Schnittfigur dieser Ebene mit der Pyramide $ABCDS$ ein Parallelogramm ist. Zu zeichnen ist das (bei derselben Projektion entstehende) Bild einer solchen Schnittfigur.

Rainer schlägt eine Konstruktion vor, bei der die Strecke $\overline{AB}$ eine Seite eines gesuchten Parallelogramms werden soll: Er konstruiert Z' so, daß $A'B'C'Z'$ ein Parallelogramm wird, und verschiebt dann die Strecke $\overline{C'Z'}$ in Richtung von C' nach S', bis er X' auf $\overline{C'S'}$ sowie Y' auf $\overline{D'S'}$ so erhält, daß $Z'C'X'Y'$ ein Parallelogramm wird.

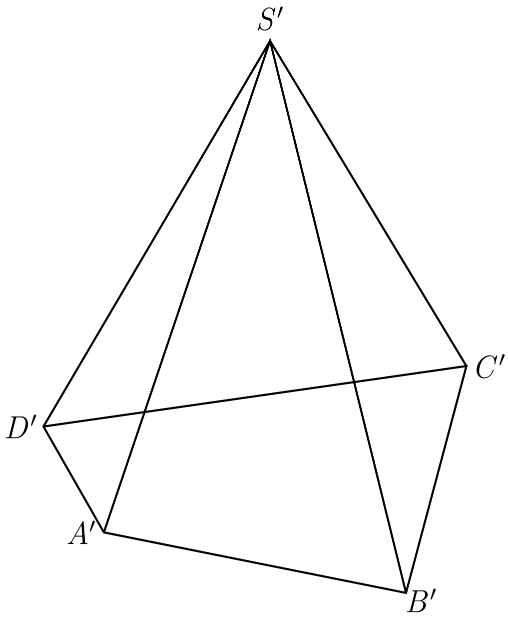
Er sagt: „Ich begründe diese Konstruktion mit dem Satz, daß Geraden, die zueinander (aber nicht zur Projektionsrichtung) parallel sind, bei Parallelprojektion stets wieder in zueinander parallele Geraden abgebildet werden.“

Susann erwidert: „Jetzt ist zwar ein Parallelogramm, aber dennoch nicht Bild einer gesuchten Schnittfigur.“

(a) Beweisen Sie, daß Susann recht hat!

(b) Geben Sie eine Konstruktion an, mit der stattdessen tatsächlich das Bild einer gesuchten Schnittfigur gewonnen werden kann!

(c) Beweisen Sie, daß es sogar unendlich viele Ebenen gibt, die die Pyramide $ABCDS$ in je einem Parallelogramm schneiden!



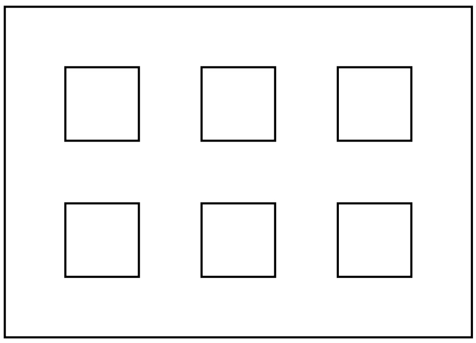
A 361016

36. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Olympiadeklasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

360921

Ein Fotoklub möchte eine Serie von Blättern über seine Arbeit herstellen. Jedes Blatt soll genau 6 Bilder enthalten, wie in Abbildung A 360921 ersichtlich; die Motive der 6 Bilder auf je einem Blatt sollen voneinander verschieden sein. Insgesamt stehen 10 verschiedene Motive zur Verfügung.



A 360921

Welches ist die größtmögliche Anzahl voneinander verschiedener Blätter, die sich in dieser Art herstellen lassen?

Dabei gelten zwei Blätter bereits dann als voneinander verschieden, wenn eines dieser beiden Blätter mindestens ein Motiv enthält, das auf dem anderen Blatt nicht vorkommt. Enthalten zwei Blätter dagegen beide genau dieselben 6 Motive, nur möglicherweise in unterschiedlicher Reihenfolge, so gelten sie nicht als verschieden.

Hinweis: Anders als im Vorspann vermerkt, würde es bei dieser Aufgabe nicht ausreichen, etwa eine (für Aufgaben dieses Typs) anwendbare fertige Formel als bekannten Sachverhalt anzuführen und dann nur formal anzuwenden. Vielmehr ist, wenn eine solche Formel benutzt werden soll, zusätzlich zu ihr eine Begründung zu nennen (die wenigstens für die hier gestellte spezielle Aufgabe ausreicht).

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

360922

Ermitteln Sie alle Primzahlen p mit der Eigenschaft, daß die Zahl $p^2 - 1$ durch 24 teilbar ist!

360923

Es seien a, b, c und d positive Zahlen.

Beweisen Sie, daß unter dieser Voraussetzung stets die Ungleichung

$$\frac{1}{a+b+c} + \frac{1}{a+b+d} + \frac{1}{a+c+d} + \frac{1}{b+c+d} > \frac{4}{a+b+c+d}$$

gilt!

360924

Konstruieren Sie ein beliebiges Viereck $ABCD$, das folgende Eigenschaften hat: Alle Innenwinkel sind kleiner als 180°, keine zwei Seiten sind einander gleichlang, keine zwei Seiten sind zueinander parallel!

Nun soll im Innern des von Ihnen konstruierten Vierecks $ABCD$ ein Punkt P so konstruiert werden, daß die beiden Vierecke $ABCP$ und $CDAP$ einander gleichen Flächeninhalt haben. (*Bemerkung:* : Es gibt unendlich viele solche Punkte; nur ein beliebiger von ihnen soll konstruiert werden.)

(a) Beschreiben Sie, wie aus gegebenen A, B, C, D ein Punkt P konstruiert werden soll!

(b) Beweisen Sie, daß ein Punkt P, wenn er nach Ihrer Beschreibung konstruiert wird, die Bedingung (gleicher Flächeninhalt von $ABCP$ und $CDAP$) erfüllt!

(c) Führen Sie die von Ihnen beschriebene Konstruktion durch!

36. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Olympiadeklasse 9
Aufgaben – 1. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

360931

Beim Kartenspiel „Doppelkopf“ gibt es 40 Karten, nämlich von jeder der vier „Farben“ *Kreuz, Pik, Herz, Karo* je zwei von jedem der „Bilder“ *As, König, Dame, Bube, Zehn.*

Jemand stellt fest, daß die ersten sechs Karten, die er beim Geben bekommen hat, sechs Damen sind. Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es insgesamt für eine Zusammenstellung von sechs Damen?

Dabei gelten zwei Möglichkeiten genau dann als voneinander verschieden, wenn für (mindestens) eine der vier Farben gilt, daß bei der einen Zusammenstellung eine andere Anzahl von Damen dieser Farbe dabei ist als bei der anderen Zusammenstellung. Auf eine Unterscheidung zwischen zwei Damen jeweils von einander gleicher Farbe kommt es also nicht an, auch nicht auf die Reihenfolge, in der die vier Karten zusammengestellt werden.

360932

Wieviele Lösungen (x, y) mit nichtnegativen ganzen Zahlen x, y hat die Gleichung
$9x + 11y = 1996$ insgesamt?

360933

Gegeben seien zwei Kreise k_1, k_2 , die sich in zwei Punkten $P \neq Q$ schneiden und für deren Radien $r_1 \neq r_2$ gilt.

Von einer Geraden g wird gefordert:

(1) Die Gerade g schneidet k_1 in P und einem Punkt A_1, sie schneidet k_2 in P und einem Punkt A_2.
(2) Es gilt $P \neq A_1$, $P \neq A_2$ und $A_1 \neq A_2$.
(3) Es gilt $|PA_1| = |PA_2|$.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

(a) Aus der Annahme, eine Gerade g erfülle diese Forderungen, soll hergeleitet werden, wie man g (ausgehend von den gegebenen Kreisen k_1, k_2 und ihren Mittelpunkten M_1, M_2) konstruieren kann. Führen Sie eine solche Herleitung durch und

(b) beschreiben Sie die so hergeleitete Konstruktion!

(c) Zeigen Sie, wie sich auch umgekehrt aus der Voraussetzung, eine Gerade g sei nach Ihrer Beschreibung konstruiert, schließen läßt, daß g dann die Forderungen erfüllt!

(d) Führen Sie, ausgehend von zwei selbst gewählten Kreisen k_1, k_2, die von Ihnen beschriebene Konstruktion aus!

36. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Olympiadeklasse 9
Aufgaben – 2. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

360934

Susanna und Ralf wollen ein Spiel für 16 Personen erfinden. Die Regeln sollen nach folgender Idee gestaltet werden: Jedem Mitspieler wird eine von 16 verschiedenen Zahlen zugeordnet. Dann wird mehrere Male durch Zufallsentscheidung eine dieser Zahlen hergestellt. Jedesmal erhält der Spieler, dem die hergestellte Zahl zugeordnet ist, einen Gewinnpunkt. Wer am Ende, nachdem dies $n \cdot 16$ mal durchgeführt wurde (mit einer großen Zahl n), die meisten Gewinnpunkte hat, ist Sieger.

Ralf schlägt als Zufallsentscheidung vor: „Man würfelt mit drei Würfeln und nimmt die Augensumme des Wurfes. Das ist dann stets eine der 16 Zahlen $3, 4, \ldots, 18$.“

Susanna meint: „So wird das Spiel aber ungerecht. Denn es gibt z.B. nur eine Möglichkeit für die Augensumme 3, aber mehr als eine Möglichkeit für die Augensumme 10. Der Spieler, dem die 3 zugeordnet ist, hat also eine kleinere Chance, Gewinnpunkte zu erhalten, als der Spieler, dem die 10 zugeordnet ist.“

Ralf meint: „Statt der drei Würfel müßte ein Körper mit 16 Seitenflächen benutzt werden, auf jeder dieser Flächen mit einer Zahl beschriftet. Aber leider gibt es kein regelmäßiges Polyeder mit 16 Seitenflächen.“

Schließlich kommt Susanna auf die Idee: „Wir nehmen zwei regelmäßige Oktaeder und beschriften jede Seitenfläche mit einer der Zahlen $0, 1, \ldots, 8$. Die Beschriftung kann für beide Oktaeder unterschiedlich sein, und es müssen auch Zahlen mehrmals vorkommen (weil ja 16 Flächen zu beschriften sind, aber nur 9 Zahlen verwendet werden sollen). Diese Beschriftung richten wir so ein, daß jeder mögliche Wurf mit den zwei Oktaedern eine der Zahlen $1, 2, \ldots, 16$ als Summe hat, und zwar für jede dieser Zahlen mit gleichgroßer Chance ihres Vorkommens wie für jede andere dieser Zahlen.“

Zeigen Sie durch ein Beispiel, daß eine solche Beschriftung möglich ist!

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

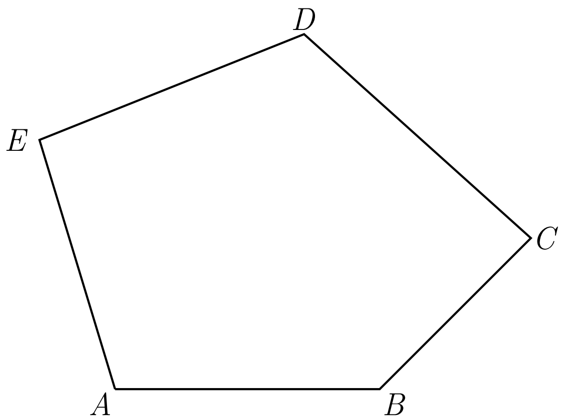
360935

Beweisen Sie, daß es für jede der Ziffern $a = 1, 2, \dots, 9$ und für jede ganze Zahl $g \geqslant 1$ eine Zahl $N \geqslant 1$ gibt, mit der die folgende Aussage (*) gilt!

(*) Alle Zahlen, deren Zifferndarstellung $\underbrace{aaa\cdots aa}_{n \text{Ziffern}}$ mit $n > N$ lautet, lassen bei Division durch 2^g denselben Rest.

360936

Gegeben sei ein Fünfeck $ABCDE$.



Im Innern dieses Fünfecks sollen alle diejenigen Punkte P gefunden werden, mit denen die folgende Aussage gilt: Das Viereck $ABCP$ hat ebenso großen Flächeninhalt wie das Fünfeck $CDEAP$.

(a) Beschreiben Sie eine (von den gegebenen Punkten A, B, C, D, E ausgehende) Konstruktion, mit der sich eine Menge von Punkten P ergibt!

(b) Beweisen Sie, daß jeder Punkt P, der sich aus einer Konstruktion nach Ihrer Beschreibung ergibt, die Bedingung (gleicher Flächeninhalt von $ABCP$ und $CDEAP$) erfüllt!

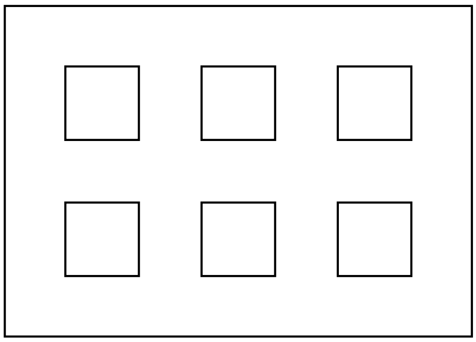
(c) Führen Sie auf dem Arbeitsblatt die von Ihnen beschriebene Konstruktion durch!

36. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Olympiadeklasse 9
Aufgaben – 1. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

360941

Ein Fotoklub möchte eine Serie von Blättern zum Verteilen herstellen. Auf jedem Blatt sollen 6 Bilder sein, wie in Abbildung A 360941 gezeigt.



A 360941

Für solche Bilder stehen insgesamt 10 verschiedene Motive zur Verfügung. Jede mögliche Zusammenstellung von 6 verschiedenen dieser Motive soll in einer beliebigen Reihenfolge auf genau einem Blatt vorkommen. Wie viele Exemplare (kleinstmögliche Anzahl) von jedem der 10 Motive reichen aus?

Hinweis: Anders als im Vorspann vermerkt, würde es *bei dieser Aufgabe nicht ausreichen*, etwa eine (für Aufgaben dieses Typs) anwendbare *fertige Formel* als bekannten Sachverhalt anzuführen und dann *nur formal anzuwenden.* Vielmehr ist, wenn eine solche Formel benutzt werden soll, zusätzlich zu ihr eine Begründung zu nennen (die wenigstens für die hier gestellte spezielle Aufgabe ausreicht).

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

360942

Es seien 100 Brüche $Q_i = \frac{a_i}{b_i}$ $(i = 1, \dots, 100)$ mit natürlichen Zahlen a_i und b_i beliebig gewählt, nur mit der Bedingung, daß mindestens ein Paar (i, j) mit $Q_i \neq Q_j$ existiert.

Beweisen Sie, daß der Bruch $\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{100}}{b_1 + b_2 + \cdots + b_{100}}$ größer als das Minimum der Q_i und kleiner als das Maximum der Q_i ist!

360943

Es sei $ABCD$ ein Trapez mit $\overline{AB} || \overline{CD}$ und $|AB| = 2 \cdot |CD|$. Der Schnittpunkt der Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ sei S. Jede Gerade g durch S zerlegt das Trapez in zwei Teilflächen; deren Flächeninhalte seien so mit F_1, F_2 bezeichnet, daß $F_1 > F_2$ gilt.

(a) Beweisen Sie, daß es genau eine Gerade g durch S gibt, für die das Verhältnis $v = F_1 : F_2$ seinen größtmöglichen Wert annimmt!

(b) Berechnen Sie diesen größtmöglichen Wert von v!

36. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Olympiadeklasse 9
Aufgaben – 2. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

360944

Aus dem Schema in Abbildung A 361044 sollen genau acht Zahlen gestrichen werden. Als einzige Bedingung wird gefordert, daß in jeder Zeile und in jeder Spalte genau zwei Zahlen wegfallen.

Beweisen Sie, daß sich nach jeder solchen Streichung dieselbe Summe der acht übrigbleibenden Zahlen ergibt!

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

A 361044

360945

Untersuchen Sie, ob es ein Stellenwertsystem der Basis B gibt, in dem $17^3 = 21^2$ gilt! Geben Sie im Falle der Existenz alle dersrtigen Basen B an!

360946

In einem beliebig gegebenen Kreisausschnitt AMB, dessen Zentriwinkel AMB eine Größe kleiner als 90° hat, werden von einem beliebigen Punkt P des Bogens $\overset{\frown}{AB}$ die Lote auf die Radien $\overline{MA}$ und $\overline{MB}$ gefällt; die Fußpunkte seien mit C bzw. D bezeichnet.

Beweisen Sie, daß die Länge der Strecke $\overline{CD}$ unabhängig von der Lage des Punktes P auf dem Bogen $\overset{\frown}{AB}$ ist!

36. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Olympiadeklasse 10
Aufgaben

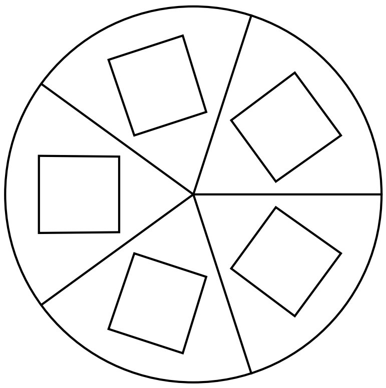
Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

361021

Zur Gestaltung eines bunten Nachmittags will eine Schulklasse ein Glücksrad bauen. Sie hat dafür eine runde Scheibe mit 5 Plätzen für je ein Bild; siehe Abbildung A 361021. Es stehen zum Aufkleben 5 verschiedene Bilder zur Verfügung.

Wie viele verschiedene Reihenfolgen, diese Bilder auf dem Glücksrad anzubringen, gibt es insgesamt?

Dabei gelten zwei Reihenfolgen genau dann als nicht verschieden voneinander, wenn in ihnen für je zwei Bilder die gleiche Drehung das erste Bild in das zweite überführt.



A 361021

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

361022

Wenn z_0 und a zwei gegebene natürliche Zahlen sind, so werde diejenige Zahlenfolge $(z_1, z_2, \ldots, z_{14})$ eine „$(z_0; a)$ -Folge“ genannt, bei der aus z_0 der Reihe nach durch Multiplikation mit a die Zahlen $z_1, z_2, \ldots, z_{14}$ gebildet wurden und bei der je zwei dieser 14 Zahlen 5-stellig, 6-stellig, 7-stellig, 8-stellig, 9-stellig, 10-stellig, 11-stellig sind.

(a) Finden Sie zu $a = 3$ eine natürliche Zahl z_0 , mit der eine $(z_0; a)$-Folge entsteht!

(b) Untersuchen Sie, ob es auch eine $(z_0; a)$-Folge zu einer natürlichen Zahl $a \neq 3$ gibt!

361023

Beweisen Sie die folgende Aussage!

> Für jede gerade natürliche Zahl n, von der vorausgesetzt wird, daß sie die Summe zweier Quadratzahlen ist, folgt: Auch $\frac{1}{2}n$ ist die Summe zweier Quadratzahlen.

(Zwei Beispiele dafür, daß sowohl die Voraussetzung als auch die Behauptung erfüllt sein kann, sind etwa: *1. Beispiel:* $8 = 2^2 + 2^2$ wegen $4 = 2^2 + 0^2$; *2. Beispiel:* $34 = 5^2 + 3^2$ wegen $17^2 = 4^2 + 1^2$. Natürlich ist mit solchen Beispielen die zu beweisende allgemeine Aussage nicht erbracht.)

361024

Ein Würfel soll von einer Ebene so geschnitten werden, daß als Schnittfigur ein regelmäßiges n Eck entsteht.

Ermitteln Sie alle diejenigen natürlichen Zahlen $n \geqslant 3$, für die das möglich ist!

36. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Olympiadeklasse 10
Aufgaben – 1. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

361031

Beim Kartenspiel „Doppelkopf“ gibt es 40 Karten, nämlich von jeder der vier „Farben“ *Kreuz, Pik, Herz, Karo* je zwei von jedem der „Bilder“ *As, König, Dame, Bube, Zehn*.

Jemand stellt fest, daß die ersten vier Karten, die er beim Geben bekommen hat, vier Damen sind. Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es insgesamt für eine Zusammenstellung von vier Damen?

Dabei gelten zwei Möglichkeiten genau dann als voneinander verschieden, wenn für (mindestens) eine der vier Farben gilt, daß bei der einen Zusammenstellung eine andere Anzahl von Damen dieser Farbe dabei ist als bei der anderen Zusammenstellung. Auf eine Unterscheidung zwischen zwei Damen jeweils von einander gleicher Farbe kommt es also nicht an, auch nicht auf die Reihenfolge, in der die vier Karten zusammengestellt werden.

361032

Ermitteln Sie alle diejenigen ganzen Zahlen a, b und n, für die $n \geqslant 1$ und

$$(a+b)^n = a^n + b^n$$

gilt!

361033

Gegeben seien zwei Kreise k_1, k_2 , die sich in zwei Punkten $P \neq Q$ schneiden und für deren Radien $r_1 \neq r_2$ gilt.

Von einer Geraden g wird gefordert:

(1) Die Gerade g schneidet k_1 in P und einem Punkt A_1, sie schneidet k_2 in P und einem Punkt A_2.
(2) Es gilt $P \neq A_1$, $P \neq A_2$ und $A_1 \neq A_2$.
(3) Es gilt $|PA_1| = |PA_2|$.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

(a) Aus der Annahme, eine Gerade g erfülle diese Forderungen, soll hergeleitet werden, wie man g (ausgehend von den gegebenen Kreisen k_1, k_2 und ihren Mittelpunkten M_1, M_2) konstruieren kann. Führen Sie eine solche Herleitung durch und

(b) beschreiben Sie die so hergeleitete Konstruktion!

(c) Zeigen Sie, wie sich auch umgekehrt aus der Voraussetzung, eine Gerade g sei nach Ihrer Beschreibung konstruiert, schließen läßt, daß g dann die Forderungen erfüllt!

(d) Führen Sie, ausgehend von zwei selbst gewählten Kreisen k_1, k_2, die von Ihnen beschriebene Konstruktion aus!

36. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Olympiadeklasse 10
Aufgaben – 2. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

361034

Susanna und Ralf wollen ein Spiel für 16 Personen erfinden. Die Regeln sollen nach folgender Idee gestaltet werden: Jedem Mitspieler wird eine von 16 verschiedenen Zahlen zugeordnet. Dann wird mehrere Male durch Zufallsentscheidung eine dieser Zahlen hergestellt. Jedesmal erhält der Spieler, dem die hergestellte Zahl zugeordnet ist, einen Gewinnpunkt. Wer am Ende, nachdem dies $n \cdot 16$ mal durchgeführt wurde (mit einer großen Zahl n), die meisten Gewinnpunkte hat, ist Sieger.

Ralf schlägt als Zufallsentscheidung vor: „Man würfelt mit drei Würfeln und nimmt die Augensumme des Wurfes. Das ist dann stets eine der 16 Zahlen $3, 4, \ldots, 18$.“

Susanna meint: „So wird das Spiel aber ungerecht. Denn es gibt z.B. nur eine Möglichkeit für die Augensumme 3, aber mehr als eine Möglichkeit für die Augensumme 10. Der Spieler, dem die 3 zugeordnet ist, hat also eine kleinere Chance, Gewinnpunkte zu erhalten, als der Spieler, dem die 10 zugeordnet ist.“

Ralf meint: „Statt der drei Würfel müßte ein Körper mit 16 Seitenflächen benutzt werden, auf jeder dieser Flächen mit einer Zahl beschriftet. Aber leider gibt es kein regelmäßiges Polyeder mit 16 Seitenflächen.“

Schließlich kommt Susanna auf die Idee: „Wir nehmen zwei regelmäßige Oktaeder und beschriften jede Seitenfläche mit einer der Zahlen $0, 1, \ldots, 8$. Die Beschriftung kann für beide Oktaeder unterschiedlich sein, und es müssen auch Zahlen mehrmals vorkommen (weil ja 16 Flächen zu beschriften sind, aber nur 9 Zahlen verwendet werden sollen). Diese Beschriftung richten wir so ein, daß jeder mögliche Wurf mit den zwei Oktaedern eine der Zahlen $1, 2, \ldots, 16$ als Summe hat, und zwar für jede dieser Zahlen mit gleichgroßer Chance ihres Vorkommens wie für jede andere dieser Zahlen.“

Zeigen Sie durch ein Beispiel, daß eine solche Beschriftung möglich ist!

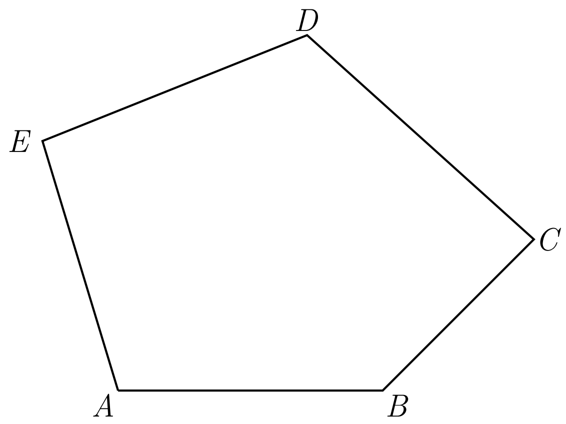
Auf der nächsten Seite geht es weiter!

361035

Für jede natürliche Zahl $n \geqslant 2$ ermittle man in Abhängigkeit von n den größten gemeinsamen Teiler der beiden Zahlen $2^{n-1} - 1$ und $2^{n+1} - 1$.

361036

Gegeben sei ein Fünfeck $ABCDE$.



Im Innern dieses Fünfecks sollen alle diejenigen Punkte P gefunden werden, mit denen die folgende Aussage gilt: Das Viereck $ABCP$ hat ebenso großen Flächeninhalt wie das Fünfeck $CDEAP$.

(a) Beschreiben Sie eine (von den gegebenen Punkten A, B, C, D, E ausgehende) Konstruktion, mit der sich eine Menge von Punkten P ergibt!

(b) Beweisen Sie, daß jeder Punkt P, der sich aus einer Konstruktion nach Ihrer Beschreibung ergibt, die Bedingung (gleicher Flächeninhalt von $ABCP$ und $CDEAP$) erfüllt!

(c) Führen Sie auf dem Arbeitsblatt die von Ihnen beschriebene Konstruktion durch!

36. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Olympiadeklasse 10
Aufgaben – 1. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

361041

In einem „$4 \times n$ Kartenspiel'“ gebe es 4 „Farben“ und von jeder Farbe n „Bilder“; dabei sei n eine natürliche Zahl mit $n \geqslant 5$. Gefragt wird nun, wie groß die Chance ist, bei zufälligem Ziehen von fünf Karten des Spiels solche Karten zu ziehen, die alle fünf einander gleiche Farbe haben.

Jemand bemerkt, daß diese Chance um so größer ist, je größer n ist. Bei einem Skatspiel ($n = 8$) beispielsweise haben etwa 0,1112 % aller Möglichkeiten, fünf Karten zu ziehen, die Eigenschaft, daß es fünf Karten einander gleicher Farbe sind, bei einem Rommèspiel ($n = 13$) sind es bereits etwa 0,1981 % aller Möglichkeiten.

Kann n so groß gewählt werden, daß der Anteil der Möglichkeiten, fünf Karten gleicher Farbe zu ziehen, 0,5 % aller Möglichkeiten erreicht oder übersteigt?

361042

Es seien 100 Brüche $Q_i = \dfrac{a_i}{b_i}$ $(i = 1,\dots,100)$ mit natürlichen Zahlen a_i und b_i beliebig gewählt, nur mit der Bedingung, daß mindestens ein Paar (i, j) mit $Q_i \neq Q_j$ existiert.

Beweisen Sie, daß der Bruch $\dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{100}}{b_1 + b_2 + \cdots + b_{100}}$ größer als das Minimum der Q_i und kleiner als das Maximum der Q_i ist!

361043

Es sei $ABCD$ ein Trapez mit $\overline{AB} \| \overline{CD}$ und $|AB| = 2 \cdot |CD|$. Der Schnittpunkt der Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ sei S. Jede Gerade g durch S zerlegt das Trapez in zwei Teilflächen; deren Flächeninhalte seien so mit F_1, F_2 bezeichnet, daß $F_1 > F_2$ gilt.

(a) Beweisen Sie, daß es genau eine Gerade g durch S gibt, für die das Verhältnis $v = F_1 : F_2$ seinen größtmöglichen Wert annimmt!

(b) Berechnen Sie diesen größtmöglichen Wert von v!

36. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Olympiadeklasse 10
Aufgaben – 2. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

361044

Aus dem Schema in Abbildung A 361044 sollen genau acht Zahlen gestrichen werden. Als einzige Bedingung wird gefordert, daß in jeder Zeile und in jeder Spalte genau zwei Zahlen wegfallen.

Beweisen Sie, daß sich nach jeder solchen Streichung dieselbe Summe der acht übrigbleibenden Zahlen ergibt!

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

A 361044

361045

Beweisen Sie, daß es zu jeder natürlichen Zahl n eine natürliche Zahl z gibt, die im dekadischen System unter (gegebenenfalls mehrfacher) Verwendung von genau zwei verschiedenen Ziffern geschrieben wird und durch n teilbar ist!

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

361046

In einem Quadrat $ABCD$ werden um die Eckpunkte diejenigen Viertelkreisbögen konstruiert, die jeweils zwei der übrigen Eckpunkte miteinander verbinden. Im Innern des Quadrates $ABCD$ liegen vier Schnittpunkte E, F, G, H von jeweils zwei der Viertelkreisbögen. Sie sind die Eckpunkte eines kleineren Quadrates Q. Außerdem aber sind E, F, G, H auch die Endpunkte von Teilbögen der Viertelkreise; diese Teilbögen bilden ein Kreisbogenviereck V. Schließlich werde derjenige Kreis K konstruiert, der dem Kreisbogenviereck V einbeschrieben ist, indem er die vier Bögen des Kreisbogenvierecks V berührt.

Untersuchen Sie, ob die Flächeninhalte von Q und von K einander gleich sind bzw. welcher dieser beiden Flächeninhalte andernfalls der größere ist!

Hinweis: Bei Verwendung von Näherungswerten (z.B. von dem auf 5 Dezimalen nach dem Komma genauen Näherungswert 3,14159 für π) ist korrektes Arbeiten mit Ungleichungen erforderlich.

36. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulrunde)
Olympiadeklassen 11–13
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

361311

a) Man ermittle alle positiven ganzen Zahlen n mit der folgenden Eigenschaft:
Schreibt man vor den Anfang der im Dezimalsystem geschriebenen Zahl n zusätzlich eine geeignet gewählte weitere Ziffer, so ergibt sich die Zahl $57 \cdot n$.

b) Man beweise, daß keine positive ganze Zahl n existiert, aus der sich durch das in (a) beschriebene Voranstellen einer Ziffer die Zahl $56 \cdot n$ ergeben würde.

361312

Man beweise, daß für jedes rechtwinklige Dreieck die folgende Aussage gilt:

Ist ρ der Inkreisradius, r der Umkreisradius, u der Umfang und c die Länge der Hypotenuse des Dreiecks, so ergibt sich zwischen den beiden Verhältnissen $u : c$ und $\rho : r$ die Differenz 2.

361313

Man beweise, daß für jede natürliche Zahl $n \geqslant 4$ die Ungleichung

$$(4^2 - 4) \cdot (5^2 - 4) \cdot \dots \cdot (n^2 - 4) < 6 \cdot (4^2 - 9) \cdot (5^2 - 9) \cdot \dots \cdot (n^2 - 9)$$

gilt.

361314

In einem Vortrag wurde erwähnt, daß man mit algebraischen Methoden die folgende historische Aufgabe der sogenannten „Würfelverdopplung“ als unlösbar durch eine Konstruktion mit Zirkel und Lineal nachweisen kann:

Gegeben ist eine Streckenlänge a. Gesucht ist die Kantenlänge x eines Würfels, der doppelt so großes Volumen hat wie ein Würfel der Kantenlänge a.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

In der anschließenden Diskussion schlägt ein Schüler vor:

„Man kann zu einem Quader mit den Kantenlängen $a_0 = 2a$, $b_0 = c_0 = a$ mit Zirkel und Lineal eine Länge x_1 konstruieren, für die $x_1^2 = a_0 \cdot b_0$ gilt. Der Quader mit den Kantenlängen $a_1 = b_1 = x_1$, $c_1 = c_0$ hat dasselbe Volumen wie der vorige Quader, ebenso auch alle folgenden Quader.

Man konstruiert weiter: x_2 mit $x_2^2 = b_1 \cdot c_1$ und erhält den Quader mit $a_2 = a_1$, $b_2 = c_2 = x_2$; dann konstruiert man x_3 mit $x_3^2 = a_2 \cdot b_2$ und erhält den Quader mit $a_3 = b_3 = x_3$, $c_3 = c_2$; weiter erreicht man $x_4^2 = b_3 \cdot c_3$ und erhält den Quader mit $a_4 = a_3$, $b_4 = c_4 = x_4$; $\ldots$ usw. Diese Längen x_1, x_2, x_3, $x_4, \ldots$ kommen der gesuchten Länge x beliebig nahe."

(a) Berechnen Sie x sowie x_1, x_2, x_3, x_4 und dann $\frac{x_1}{x}, \frac{x_2}{x}, \frac{x_3}{x}, \frac{x_4}{x}$, diese vier Werte als Potenzen mit der Basis 2 geschrieben!

(b) Beweisen Sie, daß in der Tat die Längen x_n sich beliebig wenig von x unterscheiden, wenn nur für n genügend große Werte gewählt werden!

36. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Olympiadeklassen 11–13
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

361321

Man ermittle alle diejenigen Paare $(x; y)$ reeller Zahlen, die Lösungen des Gleichungssystems

$$(x+y)^2 + 3(x+y) = 4, \qquad (1)$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = -\frac{1}{6} \qquad (2)$$

sind.

361322

Trennt man in der Dezimaldarstellung einer natürlichen Zahl n, beginnend mit der letzten Ziffer, jeweils Gruppen von k Ziffern ab (wobei die letzte Gruppe auch aus weniger als k Ziffern bestehen kann) und bildet die Summe der von diesen Gruppen dargestellten Zahlen, so erhält man eine Zahl, die als *die Quersumme k-ter der Ordnung von n* , kurz $Q_k(n)$, bezeichnet sei. Beispielsweise ist

$$Q_3(1\,234\,056\,789) = 789 + 56 + 234 + 1 = 1\,080.$$

Jemand behauptet:

Zu jeder natürlichen Zahl $m > 5$ gibt es eine natürliche Zahl $k > 0$, mit der die folgende „Teilbarkeitsregel für m“ gilt: Eine natürliche Zahl n ist genau dann durch m teilbar, wenn $Q_k(n)$ durch m teilbar ist. (*)

a) Man zeige, daß die Aussage (*) für $m = 10$ nicht gilt.
b) Man zeige, daß die Aussage (*) für $m = 37$ gilt.
c) Man ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen $m > 5$, für die die Aussage (*) gilt.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

361323

In der Ebene sei ein rechtwinkliges kartesisches Koordinatensystem gegeben. Weiterhin seien in der Ebene n Rechtecke gelegen, deren Seiten sämtlich zu den Koordinatenachsen parallel sind. Die Randlinien (bestehend aus den je vier Seiten) dieser Rechtecke zerlegen die Ebene in N Teilflächen.
Man bestimme für jede natürliche Zahl $n \geqslant 1$ den größten Wert, den N annehmen kann.

361324

a) Man beweise, daß für alle reellen Zahlen k und alle reellen Zahlen a, b mit $a \geqslant b \geqslant 0$ die Ungleichung

$$\sqrt{a^2 + k^2} - \sqrt{b^2 + k^2} \leqslant a - b$$

gilt.

b) Man beweise, daß für alle reellen Zahlen k, alle reellen Zahlen a, b mit $a \geqslant b \geqslant 0$ und alle positiven ganzen Zahlen n die Ungleichung

$$\sqrt[n]{a^n + k^2} - \sqrt[n]{b^n + k^2} \leqslant a - b$$

gilt.

36. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Olympiadeklassen 11–13
Aufgaben – 1. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

361331

Man ermittle, wie viele Möglichkeiten es insgesamt gibt, die Zahl 1997 als Summe von zwei oder mehr aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen darzustellen. (Darstellungen mit 0 als erstem Summanden sollen nicht mitgezählt werden.)

361332

In einer Ebene E_1 ist ein Parallelogramm $A_1B_1C_1D_1$ gegeben, in einer Ebene E_2 ein Parallelogramm $A_2B_2C_2D_2$. Dabei sei $A_1 = A_2$.

Man zeige: Unter diesen Voraussetzungen gilt stets die Ungleichung $|B_1B_2| + |C_1C_2| \geqslant |D_1D_2|$.

361333

Von den nachstehenden Aufgaben Teil A und Teil B ist genau eine auszuwählen und zu lösen:

Teil A

Man ermittle alle diejenigen Paare (x, y) reeller Zahlen x und y, die Lösungen des folgenden Gleichungssystems (1), (2) sind:

$$\frac{x}{\sqrt{y}} + \frac{y}{\sqrt{x}} = xy, \qquad (1)$$

$$x^5 + y^5 = 8xy. \qquad (2)$$

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

Teil B

Man ermittle alle diejenigen reellwertigen Funktionen f, die den folgenden Bedingungen (1) , (2) , (3) genügen:

(1) Die Funktion f ist für alle von 0 verschiedenen reellen Zahlen x definiert.

(2) Für alle von 0 verschiedenen reellen Zahlen x gilt $f(-x) = f(x)$.

(3) Fü alle von 0 verschiedenen reellen Zahlen x und y mit $x + y \neq 0$ gilt

$$f\left(\frac{1}{x+y}\right) = f\left(\frac{1}{x}\right) + f\left(\frac{1}{y}\right) + 2xy - 1\,.$$

36. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Olympiadeklassen 11–13
Aufgaben – 2. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

361334

Man ermittle alle reellen Lösungen x der Gleichung

$$(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)\cdot(x-4)+1=0\,.$$

361335

In einem Quadrat $ABCD$ seien k_1 und k_2 die von A nach C verlaufenden Viertelkreisbögen mit den Mittelpunkten B bzw. D. Für jeden Punkt P auf k_1 sei t_1 die in P an k_1 gelegte Tangente; ferner sei t_2 die zu t_1 parallele Tangente an k_2. Die zu t_1 und t_2 senkrechten Geraden durch A bzw. C seien s_1 bzw. s_2. Die Geraden t_1, s_1, t_2, s_2 begrenzen ein Rechteck R.
Man beweise, daß der Umfang des Rechtecks R nicht von der Wahl des Punktes P abhängt.

361336

Man ermittle alle diejenigen Paare (m, n) nichtnegativer ganzer Zahlen m und n, für die $5^m + 2^n + 2$ eine Quadratzahl ist.

36. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Olympiadeklassen 11–13
Aufgaben – 1. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

361341

Man beweise: Es gibt keine von Null verschiedenen Quadratzahlen a, b, c, d, für die $a \cdot d - b \cdot c = a$ gilt.

361342

Als *ungeraden* Teil einer positiven ganzen Zahl k bezeichnen wir den größten ungeraden Teiler von k und schreiben dafür $\mathrm{u}(k)$.

Man beweise, dass für jede natürliche Zahl n die Ungleichung $\frac{1}{2^n} \cdot \sum_{k=1}^{2^n} \frac{\mathrm{u}(k)}{k} > \frac{2}{3}$ gilt.

361343

Für ein konvexes Viereck $ABCD$ mit den Diagonalen AC und BD seien folgende Winkelgrößen vorausgesetzt:

Winkel	$\sphericalangle CBD$	$\sphericalangle CAD$	$\sphericalangle ABD$	$\sphericalangle BAC$
Größe	$10°$	$20°$	$40°$	$50°$

Man berechne die Größen der beiden Innenwinkel $|\sphericalangle BCD|$ und $|\sphericalangle ADC|$ des Vierecks $ABCD$.

36. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Olympiadeklassen 11–13
Aufgaben – 2. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

361344

Man ermittle alle diejenigen Tripel (x, y, z) reeller Zahlen x, y, z, die das folgende Gleichungssystem (1), (2), (3) erfüllen:

$$x^3 = 2y - 1 \quad (1)$$
$$y^3 = z - 1 \quad (2)$$
$$z^3 = 2x - 1 \quad (3)$$

361345

Von n in einer Ebene liegenden Kreisscheiben, unter denen sich auch solche befinden können, die einander überlappen, wird vorausgesetzt: Die Vereinigungsmenge dieser Kreisscheiben habe den Flächeninhalt 1.

Man beweise, daß es unter dieser Voraussetzung stets möglich ist, aus den Kreisscheiben eine Teilmenge von paarweise disjunkten Scheiben so auszuwählen, daß die Summe der Flächeninhalte der ausgewählten Scheiben größer als $\frac{1}{9}$ ist.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

361346

Von den nachstehenden Aufgaben Teil A und Teil B ist genau eine auszuwählen und zu lösen:

Teil A

Es seien f und g die durch

$$f(x) = x^5 + 5x^4 + 5x^3 + 5x^2 + 1,$$
$$g(x) = x^5 + 5x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 1$$

definierten Funktionen.

Man ermittle alle diejenigen Primzahlen p, zu denen es (mindestens) eine natürliche Zahl x mit $0 \leqslant x < p$ gibt, für die sowohl die Zahl $f(x)$ als auch die Zahl $g(x)$ durch p teilbar ist. Zu jeder solchen Primzahl p ermittle man alle natürlichen Zahlen x, die diese Bedingungen erfüllen.

Teil B

Zur näherungsweisen Konstruktion eines regelmäßigen Fünfecks wird folgendes Verfahren vorgeschlagen: Auf einer Kreislinie wähle man fünf Punkte P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 so, daß sie die Eckpunkte eines sonst beliebigen konvexen Fünfecks $P_1P_2P_3P_4P_5$ sind. Ferner wähle man eine beliebige positive Zahl ε als Fehlerschranke. Nun führe man folgende Arbeitsschritte durch:

(1) Führe die weiteren Bezeichnungen $P_0 := P_5$ und $P_6 := P_1$ ein und konstruiere dann für $j = 1, \ldots, 5$ den Punkt Q_j als Mittelpunkt desjenigen Kreisbogens, der P_{j-1} mit P_{j+1} verbindet und durch P_j geht.

(2) Benenne das so entstandene Fünfeck $Q_1Q_2Q_3Q_4Q_5$ in $P_1P_2P_3P_4P_5$ um.

(3) Betrachte für $j = 1, \ldots, 5$ jeweils die Länge des Bogens, der von P_j nach P_{j+1} (aber nicht über die anderen P_i) führt. Wenn diese Bogenlängen die Bedingung erfüllen, daß die Differenz aus der größten und der kleinsten dieser Bogenlängen kleiner als ε ist, dann beende das Verfahren; andernfalls setze mit Schritt (1) fort.

Man beweise, daß dieses Verfahren für jede Wahl der Ausgangspunkte P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 und der Fehlerschranke ε nach endlich vielen Schritten abbricht.