Aufgabensammlung

Thema: Algebra
Aufgaben und Lösungen
der I. bis IV. Runde
der Klassenstufen 5 bis 12
der Mathematik-Olympiaden
von 1960 bis 1994

Zentrales Komitee für die
Olympiaden Junger Mathematiker

unter Nutzung von Manuela Kugels
https://www.olympiade-mathematik.de/

zusammengestellt von Steffen Polster
https://mathematikalpha.de
Chemnitz, 2019/22

bearbeitet von Christian Hercher
Flensburg, 2022

I Klasse 5

I.I Gleichungen, Gleichungssysteme, Rechnungen

Runde 1

Aufgabe V00502:
Nimm eine dreistellige Zahl; allerdings mit der Einschränkung, dass die erste und letzte Ziffer nicht übereinstimmen; setze die Ziffer in umgekehrter Reihenfolge darunter und stelle die Differenz fest! Schreibe die Umkehrung dieser Zahl nochmals darunter! Addiere dann Umkehrung und Differenz! Führe die Aufgabe an zwei Beispielen durch! Was stellst du fest?

Lösung von Steffen Polster:
Die nachfolgenden Beispiele ergeben am Ende als Ergebnis 1089:

$$\begin{array}{cccc} & 4 & 5 & 2 \\ - & 2 & 5 & 4 \\ \hline & 1 & 9 & 8 \\ + & 8 & 9 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 8 & 9 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} & 6 & 9 & 1 \\ - & 1 & 9 & 6 \\ \hline & 4 & 9 & 5 \\ + & 5 & 9 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 8 & 9 \end{array}$$

Aufgabe V00503:
Zu einer gedachten Zahl wird 16 addiert, anschließend mit 7 multipliziert, dann 8 subtrahiert und schließlich mit 9 dividiert. Man erhält dann 22 Rest 4.
Wie heißt die gedachte Zahl?

Lösung von Steffen Polster:
x sei die gedachte Zahl. Dann ergibt sich mit den Operationen der Term

$$((x+16)\cdot 7-8):9$$

Dieser Term soll 22 mit einem Rest 4 werden, d. h. es gilt

$$((x+16)\cdot 7-8)=9\cdot 22+4$$

Schrittweises Zusammenfassen und Umstellen ergibt

$$\begin{aligned} ((x+16)\cdot 7-8) &= 9\cdot 22+4 \\ (x+16)\cdot 7-8 &= 198+4 \\ (x+16)\cdot 7 &= 202+8 \\ x+16 &= 210:7 \\ x &= 30-16=14 \end{aligned}$$

Die gedachte Zahl ist 14.

Aufgabe V00504:
Die dreifache Summe der beiden Zahlen 14076 und 1009 soll um die doppelte Summe der beiden Zahlen 8072 und 496 vermehrt werden.

Lösung von Steffen Polster:
Zu berechnen ist

$$3 \cdot (14076 + 1009) + 2 \cdot (8072 + 496) = 62391$$

Aufgabe V00506:
1; 4; 5; 7; 12; 15; 16; 18; 23; usf.
Diese Zahlenfolge ist nach einem bestimmten Gesetz aufgebaut. Setze diese Zahlenfolge bis über 50 hinaus fort!

Lösung von Steffen Polster:
Beginnend bei der 1 werden folgende Summanden addiert: 3, 1, 2, 5. Danach beginnt man wieder mit der 3 und addiert weiter 1, 2, 5, usw.

Damit ist die gesuchte Zahlenfolge:

$$1; 4; 5; 7; 12; 15; 16; 18; 23; 26; 27; 29; 34; 37; 38; 40; 45; 48; 49; 51; 56; \ldots$$

Aufgabe 020511:
Beim Aufbau des Berliner Stadtzentrums entsteht am Alexanderplatz das „Haus des Lehrers". Zuerst wurde die Baugrube ausgehoben. Dabei mussten etwa 7100m^3 Boden abtransportiert werden:

a) Wie viel Muldenkipperladungen waren das, wenn ein Kipper 4m^3 Boden transportieren kann?
b) Wie lang wäre der für den gesamten Transport nötige „Muldenkipperzug" gewesen, wenn jeder Muldenkipper eine Länge von 3m hat?

Lösung von Steffen Polster:
a) Das Gesamtvolumen von 7100m^3 ist durch die Ladefähigkeit eines Kippers von 4m^3 zu teilen: $\frac{7100\text{m}^3}{4\text{m}^3} = 1775$.
Es waren 1775 Muldenkipperladungen.

b) Da jeder Kipper 3 m lang ist, ergibt sich für die Gesamtlänge aller Kipper 3 m $\cdot$ 1775 = 5325 m.

Aufgabe 030511:
Der VEB Simson Suhl produziert gegenwärtig täglich 235 Kleinstroller KR 50. Im Jahre 1958 betrug die Produktion dagegen nur 42 Kleinstroller täglich.
Wie viel Kleinstroller wurden im Jahre 1963 mehr produziert als im Jahre 1958? Die Anzahl der Arbeitstage eines Jahres sei dabei mit 300 angenommen.

Lösung von Steffen Polster:
1958: Da täglich 42 Kleinstroller an 300 Arbeitstagen produziert wurden, ergibt dies insgesamt $42 \cdot 300 = 12600$ Stück im Jahr 1958.
Da 1963 täglich 235 Roller hergestellt wurden, sind dies für das ganze Jahr $235 \cdot 300 = 70500$ Kleinstroller.
Die Differenz beider Produktionszahlen ist $70500 - 12600 = 57900$. Somit wurden 1963 insgesamt 57900 Kleinstroller mehr produziert als 1958.

Aufgabe 030512:
Nach der Kreisolympiade Junger Mathematiker wurde ein Pionier gefragt, wie viel Punkte er bekommen habe. Scherzhaft sagte er: „Wenn man zu der Zahl meiner Punkte 10 hinzufügt und die Summe verdoppelt, so fehlen mir noch 10 Punkte an 100.“

a) Wie viel Punkte erzielte der Thälmann-Pionier?
b) Wie hast du das Ergebnis gefunden?

Lösung von Steffen Polster:
a) Der Pionier erzielte 35 Punkte.

b) Die erreichten Punkte seien x. Dann ergibt sich die Gleichung: $(x + 10) \cdot 2 = 100 - 10$.
Über die äquivalenten Umformungen: $(x + 10) \cdot 2 = 90$ und weiter $x + 10 = \frac{90}{2} = 45$ ergibt sich die gesuchte Punktzahl $x = 35$.

Aufgabe 050511:
In drei Abteilen eines Eisenbahnwagens befinden sich 90 Fahrgäste. Würden aus dem ersten Abteil 12 Fahrgäste in das zweite und aus dem zweiten 9 Fahrgäste in das dritte umsteigen, dann wären in allen drei Abteilen gleich viel Personen.
Wie viel Fahrgäste waren ursprünglich in den einzelnen Abteilen?

Lösung von Steffen Polster:
Sind 90 Fahrgäste auf 3 Abteile gleichverteilt, so befinden sich in jedem Abteil 30 Fahrgäste.

Wenn aus dem ersten 12 in den zweiten wechseln, so sind im ersten zu Beginn 12 zu viel, d. h. 42 Fahrgäste.
Wenn 9 vom zweiten in den dritten wechseln müssen um 30 Personen zu erhalten, so fehlen zu Beginn im 3 Abteile diese 9, d. h. es sind vor dem Umsteigen 21 im dritten Abteil.
Damit sind zu Beginn im 2. Abteil 90 - 42 - 21 = 27 Fahrgäste.

Aufgabe 050514:
Gerd, Fred, Heinz und Werner befinden sich auf dem Weg zur Schule. Fred ist noch dreimal so weit entfernt von der Schule wie Gerd. Heinz hat bis zur Schule noch den vierfachen Weg von Gerd zurückzulegen.
Werner muss noch 2,4 km bis zur Schule laufen; das ist die doppelte Länge von Freds Weg.

a) Welche Strecken müssen die einzelnen Schüler noch zurücklegen, bis sie die Schule erreicht haben?
b) Wie viel Minuten vergehen, bis alle Schüler in der Schule angekommen sind, wenn jeder Schüler für je 100 m genau 90 sec braucht?

Lösung von Steffen Polster:
a) Die noch zu laufenden Wege der Schüler seien für Fred f, für Gerd g, für Heinz h und für Werner w. Dann gelten entsprechend der Aufgabenstellung die Gleichungen:

$$f = 3g \quad (1); \qquad h = 4g \quad (2); \qquad w = 2{,}4 \text{ km} \quad (3); \qquad w = 2f \quad (4)$$

Aus (3) und (4) folgt für Freds Weg 1,2 km. Damit hat nach (1) Gerd noch einen Restweg von 400 m zu laufen. Beziehung (2) ergibt für Heinz dann einen Weg von 1,6 km.

b) Da Werner noch am weitesten entfernt ist, treffen sich die Schüler erst wenn Werner ankommt. Für ihn gilt:
Werner braucht für 2,4 km: $24 \cdot 90\text{s} = 2160\text{s} = 36\text{min}$.

Damit vergehen noch 36 min, bis alle Schüler in der Klasse sind.

Aufgabe 060511:
Laut Jahresplan sind von einem Zementwerk im 2. Halbjahr 16400 t Zement zu produzieren. Im Juli wurden 2430 t, im August 2310 t, im September 2680 t, im Oktober 2830 t, im November 2940 t produziert.

a) Berechne die hinreichende kleinste Anzahl von Tonnen Zement, die im Dezember hergestellt werden müssen, damit das Werk seinen Plan erfüllt!
b) Berechne den Preis dieser Menge vom Dezember, wenn eine Tonne Zement 39,- MDN kostet!

Lösung von Steffen Polster:
a) Von Juli bis November wurden hergestellt (in Tonnen): $2430 + 2310 + 2680 + 2830 + 2940 = 13190$ Tonnen. Da das Ziel 16400 Tonnen sind, müssen im Dezember 16400 t - 13190 t = 3210 t produziert werden.

b) Mit $39 \cdot 3210 = 125190$ ergibt sich ein Preis von 125190 MDN für 3210 t Zement.

Aufgabe 060512:
Eine Strecke von 168 m Länge wurde in drei Teile geteilt. Die zweite Teilstrecke war dreimal so groß wie die erste, dagegen betrug die dritte Teilstrecke das Vierfache der ersten Teilstrecke.
Berechne die Längen der einzelnen Teilstrecken!

Lösung von Steffen Polster:
Ist die Länge der ersten Teilstrecke a, so ist die zweite Teilstrecke $3a$ lang und die dritte $4a$ lang. In der Summe ist dies $a + 3a + 4a = 168$ m, d. h. die erste Teilstrecke hat eine Länge von $a = 21$ m.
Die zweite Teilstrecke hat somit die Länge $3 \cdot 21\text{m} = 63\text{m}$ und die dritte Teilstrecke $4 \cdot 21\text{m} = 84\text{m}$.

Aufgabe 080513:
Annerose bringt aus dem Garten Äpfel und Pflaumen mit.
Als sie nach Hause kommt, wird sie von ihrem Bruder Gerd gefragt: „Wie viel Äpfel und wie viel Pflaumen hast du mitgebracht?“
Verschmitzt antwortet Annerose: „Es sind zusammen weniger als 50 Stück, und zwar dreimal so viel Pflaumen wie Äpfel. Wenn Mutter von den mitgebrachten Äpfeln und Pflaumen jedem von uns vier Geschwistern je einen Apfel und je eine Pflaume gibt, bleiben noch viermal so viel Pflaumen wie Äpfel übrig.“

Wie viel Äpfel und wie viel Pflaumen hatte sie mitgebracht?

Lösung von Steffen Polster:
Die Anzahl der Pflaumen sei p, die der Äpfel a.
Aus der Aufgabenstellung ergeben sich dann die Gleichungen

$$p - 4 = 4(a - 4) \qquad ; \qquad p = 3a$$

Setzt man die 2. Gleichung in die erste ein, wird

$$3a - 4 = 4a - 16 \qquad \Rightarrow a = 12; \quad p = 36$$

Annerose hat 12 Äpfel und 36 Pflaumen mitgebracht. Die Bedingung der Aufgabe, dass die Summe von p und a kleiner als 50 sein muss, ist erfüllt.

Aufgabe 100512:
In einem alten Buch mit lustigen mathematischen Knobeleien fand Annerose folgenden Vers:

Eine Zahl hab' ich gewählt,
107 zugezählt,
dann durch 100 dividiert
und mit 11 multipliziert,
endlich 15 subtrahiert,
und zuletzt ist mir geblieben
als Resultat die Primzahl 7.

Gibt es wenigstens eine Zahl, die den gegebenen Bedingungen genügt? Wenn ja, ermittle alle diese Zahlen!

Lösung von Steffen Polster:
Die gesuchte Zahl sei z. Dann ergibt sich die Gleichung:

$$(z + 107) : 100 \cdot 11 - 15 = 7 \qquad \Rightarrow \qquad z = 93$$

Die gesuchte Zahl lautet 93. Die Probe bestätigt diese Lösung.

Aufgabe 110511:
Bei einem Manöver unserer NVA legte ein Fahrzeug in 9 Teilstrecken eine Gesamtstrecke von 1780 km zurück. Die erste Teilstrecke betrug 220 km. Die restlichen 8 Teilstrecken waren untereinander gleich lang.
Berechne die Länge einer jeden dieser restlichen 8 Teilstrecken!

Lösung von Steffen Polster:
Die Länge der restlichen 8 Teilstrecken ist 1780 - 220 = 1560 km.
Damit hat ein Teilstück die Länge 1560 : 8 = 195, d. h. 195 km.

Aufgabe 120511:
Auf einer Geburtstagsfeier stellt Rainer seinen Gästen folgende - schon im Altertum bekannte - Knobelaufgabe:

Eine Schnecke beginnt am Anfang eines Tages vom Erdboden aus eine 10 m hohe Mauer emporzukriechen. In der folgenden Zeit kriecht sie während der ersten 12 Stunden je eines Tages um 5 m höher und gleitet während der restlichen 12 Stunden des gleichen Tages jeweils um 4 m nach unten.

Nach wie viel Stunden hat sie erstmals die gesamte Mauerhöhe erreicht?

Lösung von Steffen Polster:
Nach 12 Stunden erreicht die Schnecke eine Höhe von 5 m, rutscht aber in den darauffolgenden 12 Stunden wieder 4 m zurück.
Damit startet sie am 2. Tag in 1 m Höhe, am 3. Tag in 2 m Höhe, usw. Am 6. Tag beginnt sie in 5 m Höhe zu kriechen und erreicht nach 12 h die geforderten 10 Meter Höhe.

Da sie 5 Tage kroch und zurück rutschte, am 6. Tag aber nach 12 Stunden am Ziel ankam, benötigte sie $5 \cdot 24 + 12 = 132$ Stunden.

Aufgabe 130513:
Das Dreifache der Summe der Zahlen 38947 und 12711 soll durch das Sechsfache der Differenz der Zahlen 9127 und 8004 dividiert werden.
Wie lautet der Quotient?

Lösung von Steffen Polster:
Nach der Aufgabenstellung ist zu berechnen:

$$3 \cdot (38947 + 12711) : (6 \cdot (9127 - 8004)) = 3 \cdot 51568 : (6 \cdot 1123) = 154974 : 6738 = 23$$

Aufgabe 140511:
Ermittle die natürlichen Zahlen a, b, c, d, e, von denen folgendes bekannt ist:

(1) a ist die Hälfte von b.
(2) b ist die Summe von c und d.
(3) c ist die Differenz von d und e.
(4) d ist das Dreifache von e.
(5) e ist der vierte Teil von 56.

Lösung von Steffen Polster:
Die natürlichen Zahlen lasse sich von (5) nach (1) berechnen:
Aus (5) folgt sofort $e = \frac{56}{4} = 14$ und somit $d = 42$. Mit $d - e = c = 28$ wird $b = 70$ und abschließend $a = 35$.

Aufgabe 150513:
Eine Gruppe von Pionieren unternahm eine Radwanderung. Sie starteten innerhalb eines Ortes und erreichten nach 800 m Fahrt den Ortsausgang. Nachdem sie danach das Fünffache dieser Strecke zurückgelegt hatten, rasteten sie.
Nach weiteren 14 km machten sie Mittagspause. Die Reststrecke bis zu ihrem Fahrtziel betrug 2,5 km weniger als die bisher zurückgelegte Strecke.
Ermittle die Gesamtlänge der Strecke vom Start bis zum Ziel!

Lösung von Steffen Polster:
Addition der Teilstrecken ergibt

$$s = (800m + 5 \cdot 800m + 14000m) + (800m + 5 \cdot 800m + 14000m) - 2500m = 35100m$$

Die Radwanderung war 35 km und 100 m lang.

Aufgabe 150514:
An einem Waldlauf beteiligten sich insgesamt 81 Personen. Von den teilnehmenden Erwachsenen (18 Jahre oder älter) war die Anzahl der Männer doppelt so groß wie die der Frauen.
Die Anzahl der teilnehmenden Kinder und Jugendlichen (unter 18 Jahren) betrug die Hälfte der Anzahl der teilnehmenden Erwachsenen. Dabei waren es halb soviel Kinder (unter 16 Jahren) wie Jugendliche (16 Jahre oder älter, aber unter 18 Jahre).
Gib die Anzahlen der teilnehmenden erwachsenen Männer, Frauen sowie der teilnehmenden Kinder und Jugendlichen an!

Lösung von Steffen Polster:
Die Anzahl der Frauen, Männer, Kinder und Jugendlichen sei f, m, k und j. Dann ergeben sich aus der Aufgabenstellung die Beziehungen:

$$f + m + k + j = 81; \qquad m = 2f; \qquad m + f = 2 \cdot (k + j); \qquad j = 2k$$

Setzt man die vierte und zweite Gleichung jeweils in die erste und dritte ein, so wird

$$f + 2f + k + 2k = 3f + 3k = 81 \qquad ; \qquad 3f = 2f + f = 2 \cdot (3k)$$

Damit wird, mit erneutem Einsetzen: $6k + 3k = 81$, d. h. also $k = 9$ und weiter $f = 18$, $j = 18$, $m = 36$.
Am Waldlauf nahmen 9 Kinder, 18 Jugendliche, 18 Frauen und 36 Männer teil.

Aufgabe 160511:
In einer Mathematik-Arbeitsgemeinschaft stellt Monika den Teilnehmern folgende Aufgabe:

„Jeder der Buchstaben A, L, P, H bedeutet eine einstellige natürliche Zahl. Dabei gilt:

(1) Die Zahl H ist doppelt so groß wie die Zahl P.

(2) Die Zahl A ist gleich der Summe aus der Zahl P und dem Doppelten der Zahl H.

(3) Die Zahl L ist gleich der Summe der Zahlen A, P und H.

Schreibt man die Zahlen $ALPHA$ in dieser Reihenfolge hintereinander, dann erhält man die (fünfstellige) Leserzahl der mathematischen Schülerzeitschrift „alpha".

Wie groß ist diese Leserzahl?"

Lösung von Steffen Polster:
Als Gleichungen ergeben sich

$$H = 2P; \qquad A = P + 2H; \qquad L = A + P + H$$

Außerdem sind A, L, P, H Ziffern von 0 bis 9.
Setzt man die erste Gleichung in die zweite und dritte ein, wird $A = 5P$ und $L = A + 3P$ und folglich $L = 8P$. Da P und L kleiner als 10 sind, muss $P = 1$ und $L = 8$ sein und damit $H = 2$, $A = 5$.
Die „alpha" hat somit 58125 Leser.

Aufgabe 160513:
Um zu ermitteln, welchen Durchschnittswert die Masse eines Maiskolbens von einem Versuchsfeld hat, hatten Schüler einer Mathematik-Arbeitsgemeinschaft sechs Kolben ausgewählt und gewogen.
Der größte Kolben hatte eine Masse von 850 g, drei Kolben hatten eine Masse von je 640 g, zwei Kolben von je 460 g.
Wie viel Gramm betrug hiernach die durchschnittliche Masse eines dieser sechs Maiskolben?

Lösung von Steffen Polster:
Die Masse der sechs Maiskolben ist $850 + 3 \cdot 640 + 2 \cdot 460 = 3690$ Gramm.
Als durchschnittliche Masse erhält man damit $3690\text{g} : 6 = 615\text{g}$.

Aufgabe 210512:
Die Pioniergruppen der Klassen 5a, 5b und 5c einer Schule fertigten für einen Solidaritätsbasar Buchhüllen an. Dabei fertigte die Klasse 5a genau 6 Hüllen mehr als die Klasse 5b an, und die Klasse 5c schaffte das Doppelte von dem, was die Klasse 5b anfertigte.
Insgesamt wurden von den Pionieren der drei Klassen 66 Buchhüllen hergestellt.
Wie viel Buchhüllen fertigte jede der drei Pioniergruppen an?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, die Klasse 5a hätte 6 Hüllen weniger angefertigt. Dann wären insgesamt 60 Buchhüllen hergestellt worden. Außerdem könnte man dann die Menge dieser 60 Buchhüllen so in vier gleichgroße Teilmengen zerlegen, dass die Klassen 5a und 5b je eine dieser Teilmengen angefertigt hätten und die Klasse 5c die Übrigen zwei Teilmengen.
Wegen $60 : 4 = 15$ und $2 \cdot 15 = 30$ hat die Klasse 5b daher genau 15 Hüllen und die Klasse 5c genau 30 Hüllen angefertigt, während die Klasse 5a wegen $15 + 6 = 21$ genau 21 Buchhüllen hergestellt hat.

Aufgabe 220512:
Mutter kauft ein. Sie hat genau 50 M bei sich. Eigentlich möchte sie drei Schals, eine Mütze und ein Paar Handschuhe kaufen, aber das Geld reicht hierfür nicht. Eine Mütze kostet 18 M, ein Schal halb so viel, ein Paar Handschuhe kosten 1,50 M mehr als ein Schal. Sie kauft drei Schals und ein Paar Handschuhe.
Wie viel Geld hat sie danach noch insgesamt übrig?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Ein Schal kostet halb so viel wie 18 M, also 9 M. Drei Schals kosten daher $3 \cdot 9\text{M} = 27\text{M}$.
Ein Paar Handschuhe kostet $9\text{M} + 1{,}50\text{M} = 10{,}50\text{M}$.
Somit hat die Mutter $27\text{M} + 10{,}50\text{M} = 37{,}50\text{M}$ bezahlt. Danach hat sie noch $50\text{M} - 37{,}50\text{M} = 12{,}50\text{M}$ übrig.

Aufgabe 230512:
Die Maßzahlen der (in Zentimeter gemessenen) Seitenlängen einen Dreiecks sind drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen. Der Umfang diesen Dreiecks beträgt 42 cm.
Wie lang sind seine drei Seiten?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Maßzahl des Dreiecksumfangs ergibt sich durch Addition seiner drei Seitenlängen. Nun ist die Summe dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen gleich dem Dreifachen der mittleren dieser drei Zahlen (denn die erste Zahl ist um 1 kleiner und die dritte um 1 größer als die mittlere Zahl).
Wegen $42 : 3 = 14$ beträgt mithin die mittlere Zahl im vorliegenden Fall 14, und die beiden anderen Zahlen betragen 13 und 15.

Die Seiten des Dreiecks, dessen Umfang 42 cm beträgt, sind also 13 cm, 14 cm und 15 cm lang. Diese drei Seitenlängen erfüllen auch die Bedingung, dass die Summe zweier Seitenlängen stets größer als die dritte Seitenlänge ist.

Aufgabe 250513:
Drei Kunden in einem Eisenwarengeschäft kauften Schrauben. Jede Schraube kostete 7 Pfennig. Der zweite Kunde kaufte vier Schrauben mehr als der erste Kunde. Der dritte Kunde kaufte doppelt so viele Schrauben wie der zweite Kunde. Die drei Kunden bezahlten dafür insgesamt 5 Mark und 32 Pfennig.
Wie viel bezahlte der dritte Kunde?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn der erste Kunde x Schrauben kaufte, dann kaufte der zweite Kunde $x+4$ Schrauben und der dritte Kunde $2 \cdot (x+4)$ Schrauben. Hierfür gilt $2 \cdot (x+4) = 2x+8$.

Addiert man die drei Anzahlen, so ergibt sich $x + x + 4 + 2x + 8 = 4x + 12$, also kauften die drei Kunden insgesamt $4x + 12$ Schrauben.
Da sie insgesamt 5,32 M bezahlten und jede Schraube 7 Pfennig kostete, kauften sie wegen $532 : 7 = 76$ insgesamt 76 Schrauben. Also gilt $4x + 12 = 76$ und somit $x = 16$.

Der erste Kunde kaufte also 16 Schrauben, der zweite kaufte 4 Schrauben mehr, also 20 Schrauben, der dritte kaufte doppelt so viele, also 40 Schrauben. Wegen $40 \cdot 7 = 280$ bezahlte er hierfür 2,80 M.

Aufgabe 270512:
Eine Strecke von 240 mm Länge soll in zwei Teilstrecken zerlegt werden. Die größere Teilstrecke soll genau 47 mal so lang sein wie die kleinere.
Wie lang muss dann die kleinere Teilstrecke sein und wie lang die größere? Begründe deine Antwort!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Da die größere Teilstrecke genau 47 mal so lang sein soll wie die kleinere, müssen genau 48 solcher kleinen Teile zusammengesetzt eine Strecke ergeben, die genau so lang ist wie die ganze Strecke.
Wegen 240 : 48 = 5 muss also die kleinere Teilstrecke 5 mm lang sein, und wegen 240 - 5 = 235 muss die größere Teilstrecke 235 mm lang sein.

Aufgabe 290511:
Kerstin erhält am 30. April zu ihrem Geburtstag von mehreren Verwandten Geld geschenkt. Sie hat nun genau 35 Mark in ihrer Sparbüchse und nimmt sich vor, in den folgenden Monaten fleißig Altstoffe zu sammeln, so dass sie am Ende jedes Monats genau 5 Mark in die Sparbüchse stecken kann.
Am Ende welchen Monats werden, wenn ihr Vorhaben gelingt, erstmals 55 Mark in der Sparbüchse sein?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wegen 55 - 35 = 20 benötigt Kerstin zum Erreichen ihres Zieles noch genau 20 Mark. Da sie in jedem Monat 5 Mark sparen will, braucht sie wegen 20 : 5 = 4 noch genau 4 Monate dazu.
Der vierte Monat nach dem April ist der August. Die gewünschten 55 Mark werden also erstmals am Ende des Monats August in der Sparbüchse sein.

Aufgabe 300513:
Fritz, Hans und Petra haben am Ostseestrand einen Beutel voll Muscheln gesammelt. Sie wissen nicht, wie viel Muscheln sie im Beutel haben.

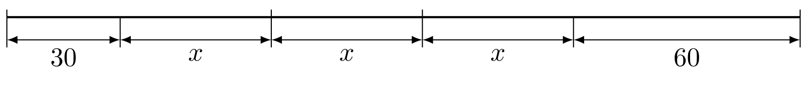
Fritz meint: „Wenn man siebenmal hintereinander je 12 Muscheln aus dem Beutel nimmt, dann bleiben noch mehr als 6 Muscheln übrig.“
Hans meint: „Wenn man aber neunmal hintereinander je 10 Muscheln aus dem Beutel nehmen wollte, dann würden die Muscheln dafür nicht ausreichen.“
Petra zählt nun die Muscheln nach und stellt fest: „Keiner von euch beiden hat recht.“

Wie viel Muscheln waren insgesamt im Beutel?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Hätte Fritz recht gehabt, dann hätten wegen $7 \cdot 12 + 6 = 90$ mindestens 91 Muscheln in dem Beutel sein müssen.
Hätte dagegen Hans recht gehabt, dann hätten es wegen $9 \cdot 10 = 90$ höchstens 89 Muscheln sein können.
Da keiner von beiden recht hatte, waren mithin genau 90 Muscheln in dem Beutel.

Aufgabe 320514:
Ein 6 m 30 cm langer Kupferdraht ist in drei Teile zu unterteilen. Der erste Teil soll 30 cm länger als der zweite Teil sein und der dritte Teil 60 cm länger als der zweite.
Wie lang wird jeder der Teile?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Aus der Abbildung wird ersichtlich:
Durch Subtraktion von 90 cm von der Gesamtlänge des Drahtes erhält man eine Länge, die dreimal so groß ist wie die Länge x des zweiten Teilstücks. Wegen 630 cm - 90 cm = 540 cm und 540 cm : 3 = 180 cm hat das zweite Teilstück eine Länge von 1 m 80 cm.

Wegen 180 cm + 30 cm = 210 cm und 180 cm + 60 cm = 240 cm haben das erste Teilstück eine Länge von 2 m 10 cm und das dritte Teilstück eine Länge von 2 m 40 cm.

Aufgabe 330512:
Bei einer Geburtstagsfeier wird ein Spiel mit blauen Spielmarken und ebenso vielen roten Spielmarken gespielt.
Nach einiger Zeit hatte jedes Kind 12 blaue und 15 rote Spielmarken bekommen, und es waren noch 48 blaue und 15 rote Spielmarken übrig.
Wie viele Kinder spielten dieses Spiel?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn jedes Kind noch 3 blaue Spielmarken bekommen würde, so müssten ebenso viele blaue wie rote Spielmarken übrigbleiben, d. h., 15 Stück. Es müssten dabei also 48 - 15 = 33 Spielmarken verteilt werden. Weil dabei jedes Kind 3 Spielmarken bekäme, nahmen 11 Kinder an dem Spiel teil.

Runde 2

Aufgabe 010522:
Bei einem Probeflug von Moskau zur sowjetischen Südpolar-Beobachtungsstation Mirny über insgesamt 25300 km legte ein Flugzeug vom Typ „IL 18“ die letzten 6700 km in zwei Etappen zurück. Dabei war die erste Etappe um rund 1700 km länger als die zweite.
Wie viel Kilometer betrugen die beiden Etappen?

Lösung von Steffen Polster:
Es sei a die Länge der ersten Etappe und b die Länge der zweiten Etappe. Damit ergeben sich die Gleichungen

$$a + b = 6700 \text{ km} \qquad ; \qquad a = b + 1700 \text{ km}$$

Einsetzen der ersten Gleichung in die zweite Gleichung ergibt

$$(b + 1700 \text{ km}) + b = 6700 \text{ km} \quad \Rightarrow b = 2500 \text{ km} \quad ; \quad a = 2500 \text{ km} + 1700 \text{ km} = 4200 \text{ km}$$

Die erste Etappe ist 4200 km und die zweite 2500 km lang.

Aufgabe 030521:
Die Kosmonautin Valentina Tereschkowa umkreiste mit dem Raumschiff „Wostok 6“ rund 48 mal die Erde. Durchschnittlich benötigte sie für jede Umkreisung rund 88 Minuten.
Wie lange dauerte der gesamte Weltraumflug?

Lösung von Steffen Polster:
Ohne Berücksichtigung der Start- und Ladezeit wird: Eine Umrundung dauert durchschnittlich 88 Minuten. Damit benötigen 48 Umrundungen $48 \cdot 88\text{min} = 4224\text{min}$, also 70 Stunden und 24 Minuten.

Aufgabe 060521:
In jeder von fünf Kisten befindet sich genau die gleiche Anzahl von Äpfeln. Entnimmt man jeder Kiste 60 Äpfel, bleiben in den Kisten insgesamt soviel Äpfel übrig, wie vorher in zwei Kisten waren.
Ermittle die Gesamtzahl aller Äpfel, die sich anfangs in den Kisten befanden !

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Aus den fünf Kisten wurden 300 Äpfel herausgenommen; denn $5 \cdot 60 = 300$.

Diese Menge entspricht dem Inhalt von drei Kisten, da nur soviel Äpfel übrig blieben, wie vorher in zwei Kisten Waren.
Folglich befanden sich in jeder Kiste anfangs genau 100 Äpfel. Insgesamt waren daher genau 500 Äpfel vorhanden.

Aufgabe 060523:
Die Zahl 97236 ist in sechs Summanden zu zerlegen.

Der erste Summand ist gleich dem neunten Teil dieser Zahl, der zweite Summand ist doppelt so groß wie der erste, der dritte ist um 12792 kleiner als der zweite Summand, der vierte dreimal so groß wie der dritte und der fünfte ist ebenso groß wie der dritte Summand.
Wie lauten die sechs Summanden?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Der erste Summand lautet 10804; denn $97236 : 9 = 10804$;
der zweite Summand lautet 21608; denn $10804 \cdot 2 = 21608$;
der dritte Summand lautet 8816; denn $21608 - 12792 = 8816$;
der vierte Summand lautet 26448; denn $8816 \cdot 3 = 26448$;
der fünfte Summand lautet 8816 und
der sechste Summand lautet 20744; denn $10804 + 21608 + 8816 + 26448 + 8816 + 20744 = 97236$.

Aufgabe 060524:
Hans nimmt am Training der Sektion Leichtathletik seiner Schulsportgemeinschaft teil. Eine der Übungen besteht in rhythmischem Gehen mit anschließendem Nachfedern im Stand.
Die Länge der Übungsstrecke beträgt 30 m. Am Anfang und am Ende stehen Fahnenstangen. Hans legt die Strecke auf folgende Weise zurück:
Zwei Schritte vor, nachfedern, dann einen Schritt zurück, nachfedern, dann wieder zwei Schritte vor ... u.s.f., bis er die zweite Fahnenstange erreicht.

Welches ist die genaue Anzahl von Schritten, die er unter den angegebenen Bedingungen insgesamt macht, wenn seine Schrittlänge genau 5 dm beträgt?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Mit je 3 Schritten kommt Hans 50 cm vorwärts. Daher ist er nach genau $2 \cdot 3 \cdot 29$ Schritten = 174 Schritten 29 m vom Startpunkt entfernt.
Da er nach zwei weiteren Schritten die zweite Fahnenstange erreicht und dann nach Voraussetzung mit der Übung aufhört, legt er die Übungsstrecke mit genau 176 Schritten zurück.

Aufgabe 080522:
In einem Lagerraum befinden sich dreimal so viel Kilogramm Weizen wie in einem zweiten. Nachdem aus dem ersten 85000 kg und aus dem zweiten 5000 kg entnommen wurden, waren die Bestände gleich.
Wie viel Tonnen Weizen befanden sich vor der Entnahme in dem ersten und wie viel in dem zweiten Lagerraum?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es gilt: 85000 kg = 85 t und 5000 kg = 5 t.
Wenn nach der Entnahme von 85 t Weizen aus dem ersten und 5 t aus dem zweiten die Bestände in den beiden Lagerräumen gleich sind, befanden sich im ersten Lagerraum 80 t mehr als im zweiten; denn 85 t - 5 t = 80 t.

Da im ersten Lagerraum der Bestand anfangs dreimal so groß wie im zweiten war und nach der Entnahme in beiden die Bestände gleich sind, muss anfangs der Überschuss des ersten Raumes zweimal so groß wie der Bestand des zweiten Raumes gewesen sein.
Also befanden sich im zweiten Raum die Hälfte von 80 t, das sind 40 t, und im ersten 120 t Weizen; denn 40 t - 3 = 120 t.

Aufgabe 100524:
Eine Gruppe Junger Mathematiker führte eine Exkursion durch. Jeder Teilnehmer bezahlte 1,50 Mark für die Fahrkosten. Bei der Bezahlung des Sammelfahrscheines blieb ein Betrag von 1,10 Mark übrig.
Hätte jeder Teilnehmer 1,40 Mark eingezahlt, so hätten 1,10 Mark an den Kosten des Sammelfahrscheines gefehlt.
Ermittle die Anzahl der Teilnehmer an dieser Exkursion! Wie viel Geld erhielt jeder dieser Teilnehmer zurück, als der zu viel eingezahlte Betrag gleichmäßig unter ihnen verteilt wurde?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Da bei einem Teilnehmerbeitrag von 1,40 Mark genau 1,10 Mark zuwenig, bei einem Betrag von 1,50 Mark genau 1,10 Mark zu viel zusammengekommen wäre, so hätte das gesammelte Geld genau das Doppelte der Kosten des einen Sammelfahrscheines betragen, wenn jeder Teilnehmer 2,90 Mark eingezahlt hätte.

Folglich wären genau die Kosten des einen Sammelfahrscheines zusammengekommen, wenn jeder Teilnehmer 1,45 Mark bezahlt hätte. Jeder der Teilnehmer hatte also 0,05 Mark zu viel bezahlt.
Dieser Betrag wurde jedem zurückerstattet. Wegen $110 : 5 = 22$ handelte es sich um 22 Junge Mathematiker, die an dieser Exkursion teilnahmen.

Aufgabe 120522:
Eine Oberschule führte für alle Schulklassen ein Schulsportfest durch. Nach dem Sportfest behauptete Gerald, es hätte insgesamt 325 Teilnehmer gegeben.
Günter, der wusste, dass die Anzahl der an dem Sportfest teilnehmenden Mädchen um genau 24 größer war als die der teilnehmenden Jungen, meinte, Geralds Behauptung sei falsch.
Weise nach, dass Günters Meinung richtig ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Günter konnte z. B. folgendermaßen schließen:
Die Differenz der Anzahl der Mädchen zu der der Jungen war eine gerade Zahl. Daher mussten die Anzahlen der Mädchen und die der Jungen entweder beide gerade oder beide ungerade sein.
In jedem dieser Fälle ist aber die Summe eine gerade Zahl, kann also nicht 325 sein.

Oder:
Die Anzahl aller Teilnehmer ist gleich der Summe aus der doppelten Anzahl der teilnehmenden Jungen und 24, und damit eine gerade Zahl. Günters Meinung ist also richtig.

Aufgabe 130521:
Eine Fischereigenossenschaft hatte an einem Tage nur Hechte, Barsche und Plötzen gefangen. Davon waren insgesamt 125 Plötzen. Ferner waren es doppelt soviel Barsche wie Hechte; die Anzahl der Hechte betrug ein Fünftel der Anzahl der Plötzen.
Stelle fest, wie viel Fische die Fischereigenossenschaft an diesem Tage insgesamt gefangen hatte!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Da die Anzahl der Hechte ein Fünftel der Anzahl der Plötzen betrug, wurden genau 25 Hechte gefangen.

Laut Aufgabe waren im Fang doppelt soviel Barsche wie Hechte, also genau 50 Barsche. Wegen 125 + 25 + 50 = 200 werden mithin insgesamt 200 Fische der genannten Arten gefangen.

Aufgabe 140522:
Anita und Peter sollten für ihre Gruppe aus dem Konsum 7 Flaschen Selterswasser holen. Sie hatten eine Geldsumme bei sich, die genau hierfür gereicht hätte. Sie konnten aber nur Brause bekommen, von der jede Flasche 15 Pfennige mehr kostete als eine Flasche Selterswasser. Für ihr gesamtes Geld erhielten sie nunmehr 4 Flaschen Brause.

Ermittle den Preis für eine Flasche Selterswasser und den Preis für eine Flasche Brause. Wie viel kosteten die 4 Flaschen Brause?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Anita und Peter bezahlten für die 4 Flaschen Brause wegen $4 \cdot 15 = 60$ insgesamt 60 Pfennige mehr, als sie für 4 Flaschen Selters bezahlt hätten.
Für diese 60 Pfennig hätten sie genau $7 - 4 = 3$ Flaschen Selterswasser kaufen können. Wegen $60 : 3 = 20$ kostete mithin jede Flasche Selterswasser 20 Pfennig, und folglich jede Flasche Brause 35 Pfennig.
Wegen $4 \cdot 35 = 7 \cdot 20 = 140$ kosteten die 4 Flaschen Brause 1,40 Mark.

Aufgabe 160522:
Zwei Junge Pioniere legten in ihrem Ruderboot stromabwärts in 10 Minuten eine Strecke zurück, deren Länge insgesamt 1 km und 200 m betrug.
Wie viel Zeit brauchten sie, um dieselbe Strecke gegen den Strom zurückzurudern, wenn sie dabei durchschnittlich in jeder Minute 40 m weniger zurücklegten als auf der Hinfahrt?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Auf der Hinfahrt legten die Pioniere eine Strecke von 1200 m in 10 Minuten zurück, in jeder Minute also durchschnittlich 120 m. Auf der Rückfahrt legten sie wegen 120 - 40 = 80 folglich in jeder Minute 80 m zurück.
Wegen 1200 : 80 = 15 brauchten sie daher für die Rückfahrt 15 Minuten.

Aufgabe 220523:
Über die 650 Schüler einer Schule liegen folgende Angaben vor:

500 Schüler sind Mitglied einer Sport-Arbeitsgemeinschaft.
400 Schüler sind Mitglied einer anderen Arbeitsgemeinschaft.
100 Schüler sind nicht Mitglied einer Arbeitsgemeinschaft.

Aus diesen Angaben soll ermittelt werden, wie viel der 650 Schüler sowohl Mitglied einer Sport-Arbeitsgemeinschaft als auch Mitglied einer anderen Arbeitsgemeinschaft sind.
Erkläre, wie man diese Anzahl finden kann!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wegen 650 - 100 = 550 sind 550 Schüler Mitglied mindestens je einer Arbeitsgemeinschaft.
Wegen 550 - 400 = 150 sind von diesen 550 Schülern 150 Mitglied nur in einer Sport-Arbeitsgemeinschaft.
Unter den 500 Mitgliedern von Sport-Arbeitsgemeinschaften sind wegen 500 - 150 = 350 folglich 350 Schüler auch Mitglied je einer anderen Arbeitsgemeinschaft.

Aufgabe 220524:
Ein Schüler kauft 5 gleiche Hefte und 7 gleiche Bleistifte, wofür er insgesamt 3,80 M bezahlt.
Wie teuer ist ein derartiges Heft und wie teuer ein derartiger Bleistift, wenn ein Bleistift doppelt so viel kostet wie ein Heft?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wegen $2 \cdot 7 + 5 = 19$ kosten die 7 Bleistifte und 5 Hefte ebenso viel wie 19 Hefte. Wegen $380 : 19 = 20$ kostet ein Heft folglich 20 Pf.
Wegen $2 \cdot 20 = 40$ kostet also ein Bleistift 40 Pf.

Aufgabe 260524:
Du kannst die mit zwei Würfeln von jemandem geworfenen beiden Augenzahlen nennen, ohne sie gesehen zu haben, wenn du folgende Rechenschritte (1) bis (4) ausführen und dir nur das Endergebnis nach Schritt (4) ansagen lässt:

(1) Die mit dem einen Würfel geworfene Augenzahl ist zu verdoppeln.
(2) Hierzu ist 5 zu addieren.
(3) Die erhaltene Summe ist mit 5 zu multiplizieren.
(4) Zum Produkt ist die mit dem anderen Würfel geworfene Augenzahl zu addieren.

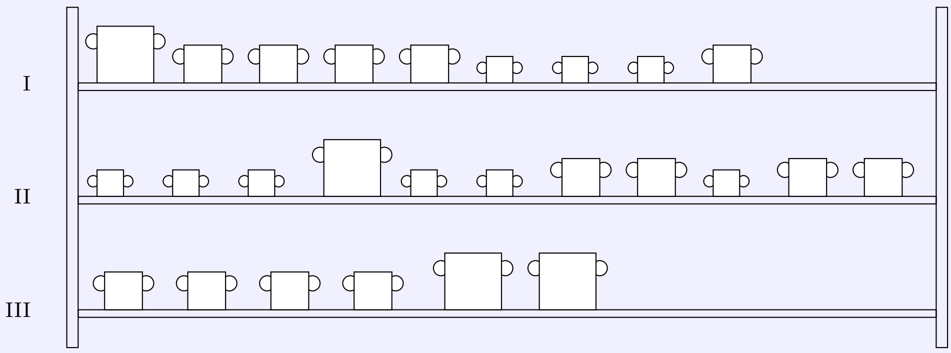
Wenn du nämlich vom Ergebnis des Schrittes (4) die Zahl 25 subtrahierst, so erhältst du diejenige Zahl, deren eine Ziffer die Augenzahl des einen Würfels und deren andere Ziffer die Augenzahl des anderen Würfels bezeichnet.
a) Überprüfe dies an einem selbstgewählten Beispiel!
b) Weise nach, dass das für jeden mit zwei Würfeln möglichen Wurf gilt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Wählt man zum Beispiel die Augenzahlen 3 und 5, dann führt die Ausführung der Schritte (1) bis (4) zu folgenden Ergebnissen:
(1) $2 \cdot 3 = 6$ (2) $6 + 5 = 11$ (3) $11 \cdot 5 = 55$ (4) $55 + 5 = 60$
Wenn man von 60 die Zahl 25 subtrahiert, erhält man wie behauptet mit 35 eine Zahl, deren eine Ziffer die Augenzahl des einen und deren andere Ziffer die Augenzahl des anderen Würfels angibt.

b) Für jeden möglichen Wurf sind die mit zwei Würfeln geworfenen Augenzahlen zwei natürliche Zahlen a und b, für die $1 \leq a \leq 6$ und $1 \leq b \leq 6$ gilt. Damit führt die Ausführung der Schritte (1) bis (4) zu folgenden Ergebnissen:
(1) $2 \cdot a$, (2) $2 \cdot a + 5$, (3) $5 \cdot (2 \cdot a + 5) = 10 \cdot a + 25$, (4) $10 \cdot a + 25 + b$

Wenn man von $10 \cdot a + 25 + b$ die Zahl 25 subtrahiert, so erhält man wie behauptet mit $10 \cdot a + b$ diejenige Zahl, deren eine Ziffer a die Augenzahl des einen und deren andere Ziffer b die Augenzahl des anderen Würfels angibt.

Aufgabe 270524:



Die Abbildung zeigt ein Regal, in dem Töpfe von genau drei verschiedenen Größen stehen. In jeder der Reihen I, II, III ergibt sich das gleiche Fassungsvermögen von genau 24 Litern.
Welches Fassungsvermögen hat jeweils ein Topf der verschiedenen Sorten?
Erkläre, wie sich für jede Topfsorte das Fassungsvermögen aus den Angaben über die Reihen I, II und III ergibt!
Überprüfe, dass bei deinen Ergebnissen sich wirklich für jede Reihe ein Fassungsvermögen von genau 24 Litern ergibt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Aus den Angaben ergibt sich durch Vergleich der Reihen I und II:
Ein mittelgroßer Topf fasst genau soviel wie drei kleine Töpfe.

Durch Vergleich der Reihen II und III ergibt sich: Ein großer Topf fasst genau soviel wie sechs kleine Töpfe.
Wegen $4 \cdot 3 + 2 \cdot 6 = 24$ folgt damit: Die Reihe III fasst genau soviel wie 24 kleine Töpfe. Da Reihe III genau 24 Liter fasst, ergibt sich:
Jeder kleine Topf fasst genau 1 Liter, jeder mittelgroße Topf fasst genau 3 Liter, jeder große Topf fasst genau 6 Liter.
Die Überprüfung der Reihen ergibt mit diesen Fassungsvermögen folgende Literzahlen:

Reihe I: $3 + 5 \cdot 3 + 6 = 24$,
Reihe II: $6 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + 6 = 24$,
Reihe III: $4 \cdot 3 + 2 \cdot 6 = 24$.

Aufgabe 280521:
In einer Gaststätte, die aus einem Speisesaal und einem Grillrestaurant besteht, sind im Speisesaal genau 135 Plätze für die Gäste vorhanden. Die Anzahl der Plätze im Grillrestaurant beträgt ein Drittel von der Anzahl der Plätze im Speisesaal.

a) Wie viel Plätze stehen in der Gaststätte insgesamt zur Verfügung?
b) Im Sommer kommen noch Plätze im Freien hinzu. Ihre Anzahl ist doppelt so groß wie die Anzahl der Plätze im Grillrestaurant.
Wie groß ist im Sommer das Platzangebot der Gaststätte?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Wegen $135 : 3 = 45$ und $135 + 45 = 180$ stehen in der Gaststätte insgesamt 180 Plätze zur Verfügung.
b) Wegen $45 \cdot 2 = 90$ und $180 + 90 = 270$ umfasst das Platzangebot der Gaststätte im Sommer 270 Plätze.

Aufgabe 290522:
Susanne besitzt 18 Spielwürfel. Einige davon sind rot, andere blau und die restlichen gelb. Sie stellt fest, dass die Anzahl der blauen Würfel um 1 kleiner ist als die doppelte Anzahl der roten Würfel.
Weiter bemerkt sie, dass das Dreifache der Anzahl der roten Würfel, wenn man es um 1 vermehrt, gerade die Anzahl der gelben Würfel ergibt.
Zeige, dass Susannes Feststellungen nur bei einer einzigen Möglichkeit für die drei Anzahlen der roten, blauen und gelben Würfel wahr sein können! Gib diese drei Anzahlen an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn x die Anzahl der roten Würfel ist, dann ist nach Susannes Feststellungen $2x - 1$ die Anzahl der blauen Würfel und $3x + 1$ die Anzahl der gelben Würfel.

Die Summe der drei Anzahlen ist 18, also folgt

$$x + 2x - 1 + 3x + 1 = 18 \qquad ; \qquad x = 3$$

Daraus folgt weiter $2x - 1 = 2 \cdot 3 - 1 = 5$ und $3x + 1 = 3 \cdot 3 + 1 = 10$.
Also können Susannes Feststellungen nur wahr sein, wenn die Anzahl der roten Würfel 3, die Anzahl der blauen Würfel 5 und die Anzahl der gelben Würfel 10 beträgt.

Aufgabe 320524:
In einem Haus mit Erdgeschoss und drei weiteren Etagen wohnen 72 Personen. In der zweiten Etage sind es 7 Personen mehr als in der ersten, in der dritten 6 Personen mehr als in der ersten.
Da im Erdgeschoss außer Wohnungen auch ein Geschäft ist, wohnen dort 12 Personen weniger als in der ersten Etage.
Wie viele Personen wohnen im Erdgeschoss und in jeder der weiteren Etagen?
Begründe, wie sich diese Personenzahlen aus den obigen Angaben herleiten lassen und überprüfe, dass bei den von dir angegebenen Zahlen diese Angaben zutreffen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Aus den Angaben folgt:
In der ersten Etage wohnen 12 Personen mehr als im Erdgeschoss.
In der zweiten Etage wohnen 12 + 7 = 19 Personen mehr als im Erdgeschoss.
In der dritten Etage wohnen 12 + 5 = 17 Personen mehr als im Erdgeschoss.
Würden diese hier genannten 12 + 19 + 17 = 48 Personen ausziehen, so blieben in jeder Etage ebenso viele Personen wie im Erdgeschoss; d. h., es blieb im ganzen Haus die vierfache Bewohnerzahl des Erdgeschosses.
Da dabei im Haus 72 - 48 = 24 Personen blieben, folgt: Im Erdgeschoss wohnen 24 : 4 = 6 Personen.

Hieraus und aus den eingangs genannten Vergleichsangaben folgt:
In der ersten Etage wohnen 6 + 12 = 18 Personen, in der zweiten Etage 6 + 19 = 25 Personen, in der dritten Etage 6 + 17 = 23 Personen.

Aufgabe 330521:
In einer kleinen Stadt stehen auf einer Straße am linken und am rechten Straßenrand insgesamt 47 Laternen. Auf jeder Straßenseite beträgt der Abstand zwischen je zwei benachbarten Laternen 35 m.
Am linken Straßenrand steht je eine Laterne genau am Anfang und am Ende der Straße.
Wie lang ist diese Straße?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Am linken Straßenrand muss genau eine Laterne mehr als am rechten Straßenrand stehen. Zählt man am linken Straßenrand die Laterne am Ende der Straße nicht mit, so stehen auf beiden Seiten der Straße gleich viele Laternen, also 46 : 2 = 23 Stück.
Also ist die Straße $23 \cdot 35\text{m} = 805\text{m}$ lang.

Aufgabe 340523:
Man kann jede natürliche Zahl 1, 2, 3, ... als eine Summe darstellen, in der jeder Summand eine 1 oder eine 2 ist. Zum Beispiel gibt es für die Zahl 3 unter Beachtung der Reihenfolge genau die Darstellungen

$$3 = 1 + 1 + 1 = 1 + 2 = 2 + 1$$

(a) Gib auch für jede der Zahlen 4, 5 und 6 alle Darstellungen an!
(b) Wie groß ist für jede der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 und 6 jeweils die Anzahl aller Darstellungen?
Finde eine Gesetzmäßigkeit, die für diese sechs Anzahlen gilt!
Wie viele Darstellungen muss es - wenn die von dir genannte Gesetzmäßigkeit sogar allgemein gilt - für die Zahl 10 geben?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(a) Die gesuchten Darstellungen sind:

$$4 = 1 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 2 = 1 + 2 + 1 = 2 + 1 + 1 = 2 + 2$$

$$5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 2 = 1 + 1 + 2 + 1 = 1 + 2 + 1 + 1 = 2 + 1 + 1 + 1 = 1 + 2 + 2 =$$
$$= 2 + 1 + 2 = 2 + 2 + 1$$

$$6 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 2 = 1 + 1 + 1 + 2 + 1 = 1 + 1 + 2 + 1 + 1 =$$
$$= 1 + 2 + 1 + 1 + 1 = 2 + 1 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 2 + 2 = 1 + 2 + 1 + 2 = 1 + 2 + 2 + 1 =$$
$$= 2 + 1 + 1 + 2 = 2 + 1 + 2 + 1 = 2 + 2 + 1 + 1 = 2 + 2 + 2$$

(b) Als Anzahlen erhält man:

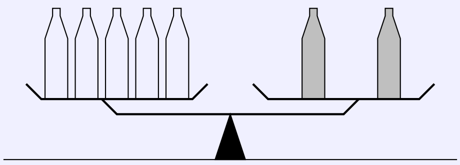
Darzustellende Zahl	1	2	3	4	5	6
Anzahl der Darstellungen	1	2	3	5	8	13

Für sie gilt folgende Gesetzmäßigkeit:
Die Summe zweier benachbarter Anzahlen ist gleich der darauffolgenden Anzahl. Wenn diese Gesetzmäßigkeit allgemein gilt, so erhält man als Fortsetzung:

Darzustellende Zahl	7	8	9	10
Anzahl der Darstellungen	8+13=21	13+21=34	21+34=55	34+55=89

Für die Zahl 10 muss es dann also genau 89 Darstellungen geben.

Aufgabe 340524:



Auf einer Waage sind fünf links stehende leere Mineralwasserflaschen mit zwei rechts stehenden vollen im Gleichgewicht (siehe Abbildung).

(a) Britta füllt zwei leere Flaschen mit Mineralwasser und erreicht dann, dass wieder Gleichgewicht eintritt, indem sie auf die rechte Waagschale leere Flaschen dazustellt.
Wie viele leere Flaschen sind das?
(b) Jan entleert dann eine der rechts stehenden Flaschen und nimmt von der linken Waagschale eine leere Flasche weg. Welche Waagschale neigt sich nun nach unten?
(c) Pia nimmt alle Flaschen von der Waage und stellt dann links zwei volle Flaschen und eine leere Flaschen auf, rechts eine volle Flasche und drei leere Flaschen.
Welche Waagschale neigt sich nun nach unten?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(a) Werden rechts noch drei leere Flaschen dazugestellt, so stehen sowohl links als auch rechts je zwei volle und drei leere Flaschen; also tritt Gleichgewicht ein. Die gesuchte Anzahl ist somit 3.

(b) Denkt man sich in der Abbildung des Aufgabentextes auf beiden Waagschalen das Gewicht von zwei leeren Flaschen entfernt, so folgt:
Drei leere Flaschen haben dasselbe Gewicht wie das Mineralwasser, das zwei Flaschen füllt. Daraus ergibt sich die Aussage:
Eine leere Flasche hat ein kleineres Gewicht als das Wasser für eine Flasche. Da Jan links die Flasche und rechts das Wasser wegnimmt und vorher Gleichgewicht herrschte, neigt sich nun die linke Waagschale nach unten.

(c) Die Aufstellung, die Pia vornimmt, kann stattdessen auch aus der nach (b) erreichten Aufstellung erhalten werden, indem man dort links und rechts je eine leere Flasche wegnimmt.
Daher neigt sich auch bei Pias Aufstellung die linke Waagschale nach unten.

I.II Ungleichungen, der Größe ordnen

Runde 1

Aufgabe V00507:
Wie heißen Subtrahend und Minuend in der folgenden Subtraktionsaufgabe: $\star\star\star\star - \star\star\star = 1$.

Lösung von Steffen Polster:
Die einzige vierstellige Zahl, die bei der Subtraktion mit einer dreistelligen Zahl 1 ergibt, ist die 1000. Damit ist der Subtrahend 1000 und der Minuend 999.

Aufgabe 030515:
Von fünf Thälmann-Pionieren sind folgende zehn Altersvergleiche bekannt:
Doris ist jünger als Marga, Bärbel älter als Inge, Renate älter als Doris, Inge jünger als Marga, Bärbel jünger als Renate, Renate jünger als Marga, Doris älter als Inge, Marga älter als Bärbel, Inge jünger als Renate, Doris älter als Bärbel.

a) Wie lautet die Reihenfolge der fünf Mädchen nach ihrem Alter? Beginne mit der Jüngsten!
b) Welche angegebenen Vergleiche sind überflüssig? Warum?

Lösung von Steffen Polster:
a) Inge, Bärbel, Doris, Renate, Marga

b) Für die Bestimmung der Reihenfolge benötigt man nur die Aussagen:
Bärbel ist älter als Inge, Doris ist älter als Bärbel, Renate ist älter als Doris und Renate ist jünger als Marga. Damit ergibt sich die Anordnung nach dem Alter.

Nicht notwendig sind die Aussagen:
Doris ist jünger als Marga, Inge ist jünger als Marga, Bärbel ist jünger als Renate, Doris ist älter als Inge, Marga ist älter als Bärbel und Inge ist jünger als Renate.

Aufgabe 120514:
Erklärung: Mit der Schreibweise einer „fortlaufenden Ungleichung“ $a < b < c < d$ drückt man aus, dass die drei Ungleichungen $a < b$, $b < c$ und $c < d$ gelten. Es gelten dann auch die Ungleichungen $a < c$, $a < d$ und $b < d$.

Aufgabe:
Es seien w, x, y, z vier natürliche Zahlen, für die folgende Ungleichungen gelten:

(1) $z > x$
(2) $z < w$
(3) $w > x$
(4) $x < y$
(5) $y > w$

(6) $z < y$

Stelle fest, ob sich alle diese Ungleichungen in Form einer fortlaufenden Ungleichung schreiben lassen!

Lösung von Steffen Polster:
Schreibt man alle Ungleichungen so, dass das Zeichen „>“ verwendet wird, ergibt sich:

$$(1)\quad z > x,\quad (2)\quad w > z,\quad (3)\quad w > x,\quad (4)\quad y > x,\quad (5)\quad y > w,\quad (6)\quad y > z$$

Nach (5), (2) und (1) ist y die größte Zahl. Beginnt man mit (5) und setzt die restlichen Ungleichungen an, ergibt sich $y > w > z > x$.
Die Probe mit allen 6 Ungleichungen bestätigt das Ergebnis.

Aufgabe 140513:
Die Schüler Lutz, Dora, Erich, Nina, Bernd und Manja beteiligten sich an der Kreisolympiade Junger Mathematiker.
Dabei erzielte Bernd mehr Punkte als Erich, Lutz bekam zwar mehr Punkte als Dora, aber weniger als Erich. Nina erhielt eine kleinere Punktzahl als Dora. Manjas Punktzahl war größer als die Punktzahl Bernds.
Ermittle die Reihenfolge der Punktzahlen der genannten Schüler; schreibe sie mit der größten beginnend auf!

Lösung von Steffen Polster:
Werden die Punktzahlen von Lutz, Dora, Erich, Nina, Bernd und Manja mit l, d, e, n, b und m bezeichnet, gelten nach der Aufgabenstellung die Ungleichungen

$$b > e; \qquad e > l > d; \qquad d > n; \qquad m > b$$

Aus der ersten und vierten Ungleichung ergibt sich: $m > b > e$, aus den anderen beiden $e > l > d > n$. Beide Ungleichungen kann man zu $m > b > e > l > d > n$ zusammenfassen. Die Reihenfolge war: Manja, Bernd, Erich, Lutz, Dora, Nina.

Aufgabe 150512:
Ermittle alle positiven geraden Zahlen u, p, g, die folgende Ungleichungen erfüllen:

a) $42 > 5u > 19$
b) $11 < (3p + 3) < 22$
c) $23 > (3g - 3) \geq 3$,
und für die $(3g - 3)$ eine natürliche Zahl ist!

Gib die Lösungsmenge so an, dass die geraden Zahlen, die jeweils die betreffende Ungleichheit erfüllen, der Größe nach geordnet sind! Beginne stets mit der kleinsten!

Lösung von Steffen Polster:
a) $u = \{4, 6, 8\}$
b) $8 < 3p < 19 \Rightarrow p = \{4, 6\}$
c) $26 > 3g \geq 6 \Rightarrow g = \{2, 4, 6, 8\}$

Aufgabe 170511:
Die Oberschule „Wilhelm Pieck“ hat genau 314 Jungen und genau 322 Mädchen als Schüler. Ein Sechstel von ihnen gehört der FDJ an, alle anderen sind Mitglieder der Pionierorganisation „Ernst Thälmann“.
Ermittle die Anzahl der FDJler unter diesen Schülern und die Anzahl der Pioniere unter ihnen!

Lösung von Steffen Polster:
Insgesamt sind 314 + 322 = 636 Schüler in der Oberschule. Ein Sechstel sind Mitglieder in der FDJ, d. h. 636 : 6 = 106 Schüler. Pioniere sind es somit 636 - 106 = 530.
Es gibt in der Schule 106 FDJler und 530 Pioniere.

Aufgabe 170514:
Eine Strecke von 240 m ist so in vier Teilstrecken geteilt, dass folgendes gilt:
(1) Die erste Teilstrecke ist doppelt so lang wie die zweite Teilstrecke.
(2) Die zweite Teilstrecke ist so lang wie die Summe der Längen der dritten und vierten Teilstrecke.
(3) Die dritte Teilstrecke ist ein Fünftel der Gesamtstrecke.

Ermittle die Längen der einzelnen Teilstrecken!

Lösung von Steffen Polster:
Die vier Teilstrecken seien a, b, c, d. Es ergeben sich die Gleichungen:

$$a = 2b; \qquad b = c + d; \qquad 5c = 240 \text{ m}; \qquad a + b + c + d = 240 \text{ m}$$

Aus der dritten Beziehung folgt sofort $c = 48$ m. Setzt man in die vierte Gleichung für $c + d$ (aus der 2.) ein und zusätzlich noch (1), erhält man 240 m $= a + b + c + d = 2b + b + b = 4b$. Somit ist $b = 60$ m und damit auch $a = 120$ m.
d erhält man nun aus $d = 240 \text{ m} - a - b - c = 12m$.
Die Teilstrecken haben die Längen 120 m, 60 m, 48 m und 12 m.

Aufgabe 180514:
Auf einem Parkplatz stehen insgesamt 60 Personenkraftwagen der Typen „Trabant“, „Wartburg“, „Skoda“ und „Wolga“. Die Anzahl der Wagen vom Typ „Trabant“ ist doppelt so groß wie die Anzahl der Wagen der drei anderen Typen zusammengenommen. Außerdem gilt:
Es stehen dreimal soviel Wagen vom Typ „Wartburg“ wie von den Typen „Skoda“ und „Wolga“ zusammen auf dem Parkplatz und drei Wagen mehr vom Typ „Skoda“ als vom Typ „Wolga“.
Wie viel PKW jeden Typs stehen auf diesem Parkplatz?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Teilt man die Wagen „Trabant“ in zwei Gruppen gleicher Anzahl, so bilden alle übrigen Wagen eine dritte Gruppe derselben Anzahl. Jede Gruppe enthält daher 20 Wagen, also gibt es 40 „Trabant“-Wagen auf dem Parkplatz. Für die restlichen 20 Wagen gilt:

Teilt man die Wagen „Wartburg“ in drei Gruppen gleicher Anzahl, so bilden die nun noch verbleibenden eine vierte Gruppe derselben Anzahl. Also enthält jede dieser Gruppen 5 Wagen, folglich sind 15 „Wartburg“-Wagen auf dem Parkplatz. Für die verbleibenden 5 Wagen gilt:

Es handelt sich nur um Wagen der Typen „Wolga“ und „Skoda“. Dabei ist laut Aufgabe die Anzahl der „Skoda“-Wagen um drei größer als die der „Wolga“-Wagen. Das ist nur möglich, wenn 4 „Skoda“-Wagen und 1 „Wolga“-Wagen auf dem Parkplatz stehen.

Aufgabe 200513:
Annegret, Heidi, Katrin, Lore, Petra und Ruth bewohnen im Pionierlager gemeinsam ein Zelt und beschließen, die Reihenfolge für ihren Ordnungsdienst nach ihrem Alter festzulegen, beginnend mit dem ältesten Mädchen.

Alle sechs Mädchen sind im gleichen Jahr geboren, jedes an einem anderen Tag. Katrin ist älter als die fünf anderen Mädchen. Heidi hat einen Monat nach Annegret Geburtstag, sie ist aber älter als Petra.
Lore ist jünger als Annegret. Ruth ist älter als Heidi und hat einen Tag später Geburtstag als Lore.
In welcher Reihenfolge müssen die sechs Pioniere ihren Ordnungsdienst versehen, wenn sie ihren Beschluss verwirklichen wollen?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Da Katrin älter als alle fünf anderen Mädchen ist, gilt auch:

Katrin ist älter als Annegret.
Lore ist jünger als Annegret, also, gilt: Annegret ist älter als Lore.
Ruth hat später als Lore Geburtstag, also gilt: Lore ist älter als Ruth.
Ferner gilt: Ruth ist älter als Heidi.
Schließlich gilt: Heidi ist älter als Petra.
Folglich lautet die gesuchte Reihenfolge: Katrin, Annegret, Lore, Ruth, Heidi, Petra.

Aufgabe 320513:
Vergleiche der Körpergrößen ergaben:
Jan ist größer als Steffi, Anna kleiner als Ingo, Franziska kleiner als Jan, Steffi kleiner als Moritz, Franziska kleiner als Moritz, Franziska größer als Steffi, Steffi kleiner als Anna, Anna kleiner als Moritz, Jan kleiner als Anna, Moritz größer als Ingo.

(a) Ordne diese Kinder nach ihrer Größe, beginnend mit dem kleinsten Kind.
(b) Welche der angegebenen zehn Vergleiche hätten ausgereicht, um die Aufgabe eindeutig zu lösen? Warum?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(a) Steffi, Franziska, Jan, Anna, Ingo, Moritz.

(b) Die sechste, dritte, neunte, zweite und zehnte Aussage genügen, um in dieser Reihenfolge die gewünschte Ordnung zu erreichen.

Runde 2

Aufgabe 050522:
Für die fünf natürlichen Zahlen a, b, c, d, e gelten die folgenden Ungleichungen:
$a > e$; $b < c$; $c > e$; $d < e$; $a > b$; $b < d$; $c > a$; $a > d$;
Ordne diese Zahlen der Größe nach an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Man sucht zunächst die kleinste Zahl, indem man der Reihe nach ausscheidet:
Die kleinste Zahl ist nicht: a, c, e, d.
Also ist b die kleinste Zahl. Indem man so fortfährt, erhält man schließlich

$$b < d < e < a < c$$

Aufgabe 170522:
Auf drei Bäumen sitzen insgesamt 56 Vögel.
Nachdem vom ersten Baum 7 auf den zweiten und vom zweiten 5 Vögel auf den dritten Baum geflogen waren, saßen nun auf dem zweiten Baum doppelt so viel Vögel wie auf dem ersten und auf dem dritten doppelt so viel Vögel wie auf dem zweiten Baum.
Berechne, wie viel Vögel ursprünglich auf jedem der Bäume saßen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Bezeichnet man die Anzahl der Vögel, die am Ende auf dem ersten Baum sitzen, mit x, dann sitzen auf dem zweiten Baum $2x$ Vögel, auf dem dritten $4x$ Vögel. Das sind zusammen $7x$ Vögel.
Wegen $56 : 7 = 8$ müssen mithin zuletzt auf dem ersten Baum 8 Vögel, auf dem zweiten Baum 16 Vögel, auf dem dritten Baum 32 Vögel sitzen.

Auf dem ersten Baum saßen daher am Anfang 7 Vögel mehr als 8 Vögel, das sind 15 Vögel.
Auf dem zweiten Baum saßen zu Anfang noch nicht die später vom ersten Baum zugeflogenen 7 Vögel, dafür aber die dann zum dritten Baum geflogenen 5 Vögel; also waren es zu Anfang 2 Vögel weniger als 16 Vögel, das sind 14 Vögel.
Auf dem dritten Baum saßen am Anfang 5 Vögel weniger als 32 Vögel, das sind 27 Vögel.

Aufgabe 180523:
Vier Kooperative Abteilungen Pflanzenproduktion (KAP), die mit A, B, C und D bezeichnet sein sollen, besitzen zusammen 92 Traktoren.
Wenn B zur besseren Nutzung drei ihrer Traktoren an A und vier ihrer Traktoren an D weitergibt, dann verfügen alle vier KAP über die gleiche Anzahl von Traktoren.
Wie viele Traktoren besaß ursprünglich jede der vier KAP?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wegen $92 : 4 = 23$ verfügt nach dem Ausleihen jede der vier KAP über 23 Traktoren. Da C weder einen Traktor erhielt, noch einen Traktor abgab, besaß sie auch ursprünglich genau 23 Traktoren.
A besaß 3 Traktoren weniger als 23, also 20 Traktoren. D besaß 4 Traktoren weniger als 23, also 19 Traktoren. B besaß 7 Traktoren mehr als 23, also 30 Traktoren.

Aufgabe 190522:
In einem Bericht eines Schülers über einen 60 m-Lauf war zu lesen:

„Es war ein spannender Lauf unserer Mädchen. Astrid zog an Doris vorbei und konnte dann ihren Vorsprung bis ins Ziel behaupten. Auf den letzten Metern gelang es sogar noch Beate, Doris zu überholen. Das war zwar eine anerkennenswerte Leistung, jedoch kam Beate noch etwas später ins Ziel als Christine. Doris wurde nur teilweise den in sie gesetzten Erwartungen gerecht; immerhin konnte sie Christine hinter sich lassen.“

Können alle Aussagen dieses Berichtes gleichzeitig wahr sein? Begründe deine Entscheidung!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wären alle Aussagen des Berichtes wahr, so hätte Beate Doris „auf den letzten Metern überholt“, und Doris hätte Christine „hinter sich gelassen“. Also wäre Beate vor Christine ins Ziel gekommen.
Das steht im Widerspruch zu der Aussage, Beate wäre „etwas später ins Ziel gekommen als Christine“.
Folglich können nicht alle Aussagen des Berichtes gleichzeitig wahr sein.

Aufgabe 270521:
Von Anja, Beate, Kerstin, Steffen und Maik wissen wir folgendes:

(1) Steffen ist kleiner als Kerstin und größer als Beate.
(2) Maik ist kleiner als Steffen und größer als Beate.
(3) Anja ist kleiner als Beate.

Ordne die Kinder nach ihrer Größe! Beginne mit dem größten Kind! Eine Begründung wird nicht verlangt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Reihenfolge lautet: Kerstin, Steffen, Maik, Beate, Anja.

Aufgabe 300522:
Über das Alter der fünf Personen Antje, Dirk, Manuela, Susanne und Thomas werden folgende Angaben gemacht:

(1) Antje ist älter als Manuela, aber jünger als Susanne.
(2) Thomas ist genau so alt wie Antje und Manuela zusammen.
(3) Dirk ist älter als Antje und Susanne zusammen.

a) Zeige, dass aus diesen Angaben eindeutig folgt, wer die jüngste und wer die älteste dieser fünf Personen ist!
b) Stelle fest, ob aus den Angaben auch eindeutig folgt, welche Reihenfolge für die Altersangaben der übrigen drei Personen vorliegt! Begründe deine Feststellung!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Bezeichnet man für jede Person das Alter mit dem Anfangsbuchstaben ihres Vornamens, so folgt aus den Angaben:

$$S > A > M \quad (1); \qquad T = A + M \quad (2); \qquad D > A + S \quad (3)$$

Nach (1) sind weder Susanne noch Antje die Jüngste, nach (2) auch Thomas nicht und nach (3) auch Dirk nicht. Also ist Manuela die Jüngste der fünf Personen.

Nach (1) sind weder Antje noch Manuela die älteste, nach (3) auch Susanne nicht. Also ist entweder Dirk oder Thomas die älteste der fünf Personen. Wegen (3) und $S > M$ (siehe (1)) gilt aber $D > A + M$, und nach (2) besagt dies $D > T$.
Folglich ist Dirk die älteste der fünf Personen.

b) Es gibt sowohl Altersangaben, für die (1), (2), (3) zutreffen und bei denen $S < T$ gilt, als auch Altersangaben, für die (1), (2), (3) zutreffen und bei denen $S > T$ gilt.
Zur Begründung genügt es, je ein Beispiel hierfür anzugeben und die genannten Aussagen zu bestätigen. Solche Beispiele sind etwa

$$D = 16, T = 13, S = 8, A = 7, M = 6 \text{ bzw. } D = 22, S = 14, T = 13, A = 7, M = 6$$

Daher folgt aus den Angaben nicht eindeutig, welche Reihenfolge für die Altersangaben von Antje, Susanne und Thomas vorliegt.

Aufgabe 310523:
Nach einem 100 m-Lauf, an dem 5 Sportler teilnahmen, fragt jemand, in welcher Reihenfolge sie ins

Ziel kamen. Gert erinnert sich:

(1) Achim kam eher ins Ziel als Christian.
(2) Zeitgleich mit Emil kam kein anderer ins Ziel, und zwar war Emil der Dritte oder der Vierte.
(3) Frank kam nicht eher ins Ziel als Bernd.
(4) Frank kam jedoch eher ins Ziel als Achim.

Nenne alle hiernach bestehenden Möglichkeiten der Reihenfolge! Zeige, dass nur bei den von dir genannten Möglichkeiten Gerts Aussagen wahr sind!
Hinweis: Beachte, dass es für die gesuchten Möglichkeiten der Reihenfolge einen Unterschied bedeutet, ob zwei Sportler gleichzeitig ins Ziel kamen oder nicht!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Mit A, B, C, E, F seien die Laufzeiten von Achim, Bernd, Christian, Emil bzw. Frank bezeichnet. Die Aussagen (4) und (1) können nur bei der Reihenfolge $F < A < C$ von Achim, Christian und Frank wahr sein.
Nach (3) gibt es für die Reihenfolge von Bernd und Frank nur die beiden Möglichkeiten $B < F$ bzw. $B = F$, für Achim, Bernd, Christian und Frank also nur $B < F < A < C$, (5) $B = F < A < C$. (6)
Sowohl zu (5) als auch zu (6) gibt es nur zwei Möglichkeiten, auch (2) zu erfüllen: Entweder ist E an die dritte Stelle zwischen F und A einzufügen oder an die vierte Stelle zwischen A und C. Also gibt es dafür, dass Gerts Aussagen wahr sind, nur die vier Möglichkeiten

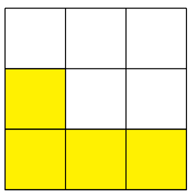
$$B < F < E < A < C, \quad B < F < A < E < C, \quad B = F < E < A < C, \quad B = F < A < E < C$$

I.III Verhältnisse, Proportionalitäten

Runde 1

Aufgabe V00510:
Zeichne ein Quadrat mit einer Seitenlänge von 6 cm!
Schraffiere davon $\frac{4}{9}$ (vier Neuntel)!

Lösung von Steffen Polster:



Aufgabe 010511:
Im Rechenschaftsbericht an den XXII. Parteitag der KPdSU heißt es, dass an die Bevölkerung der Sowjetunion im Jahre 1953 insgesamt 1757000 t, im Jahre 1960 aber 4158000 t Fleisch und Fleischerzeugnisse verkauft wurden.
Wie viel Tonnen Fleisch und Fleischerzeugnisse wurden 1960 mehr verkauft als 1953?

Lösung von Steffen Polster:
Zur Lösung ist die Differenz der Massen der Fleisch und Fleischerzeugnisse von 1960 und 1953 zu berechnen. Es ist 4158000 t - 1757000 t = 2401000 t, d. h. es wurden 2,401 Millionen Tonnen mehr produziert.

Aufgabe 020512:
„Genau eine Million zweihundertneuntausendsechshundert Sekunden dauert es, bis wir uns wieder treffen", sagt Walter, der gern mit großen Zahlen rechnet, zu Rolf, als sie sich am 10. Mai um 12.00 Uhr verabschieden.
Wann treffen die beiden wieder zusammen?

Lösung von Steffen Polster:

$$1209600 \text{ s} = \frac{1209600}{60} \text{ min} = 20160 \text{ min} = \frac{20160}{60} \text{ h} = 336 \text{ h} = \frac{336}{24} \text{ d} = 14 \text{ d}$$

14 Tage nach dem 10. Mai 12.00 Uhr sind der 24. Mai 12.00 Uhr. Walter und Rolf treffen sich am 24. Mai 12.00 Uhr wieder.

Aufgabe 020513:
Zwei Pioniergruppen wollen an einem Sonntag eine Wanderung nach dem zwölf Kilometer entfernten Neuendorf machen. Die erste Gruppe will um 8.00 Uhr aufbrechen. Sie legt in jeder Stunde 4 km zurück.
Die andere Gruppe macht eine Radwanderung und kann in jeder Stunde 12 km schaffen.
Wann muss sie aufbrechen, wenn beide Gruppen gleichzeitig in Neuendorf eintreffen wollen?

Lösung von Steffen Polster:
Die erste Gruppe wandert 4 km pro Stunde und erreicht das Ziel in 12 km Entfernung in 3 Stunden, d. h. sie erreichen Neuendorf um 11.00 Uhr.
Die zweite Gruppe legt 12 km pro Stunde zurück und benötigt nur 1 Stunde bis zum Ziel. Damit mussen sie um 10.00 Uhr in Neuendorf starten.

Aufgabe 070512:
Ein Bezirk plante, die Instandsetzung dreier Straßen durchzuführen. Die erste Straße hat eine Länge von 8 km, die zweite eine Länge von 7 km, die dritte eine Länge von 6 km. Für jeden Kilometer wurden 3000 MDN Kosten vorgesehen.
Eine der drei Straßen war nur wenig beschädigt, so dass man für diese mit der Hälfte der Kosten pro Kilometer auskam, während bei jeder der beiden anderen genau die eingeplante Summe verwendet wurde. Die Gesamtkosten für die Instandsetzung betrugen 51000 MDN.
Für welche der drei Straßen wurde nicht die eingeplante Summe verwendet?

Lösung von Steffen Polster:
Hätte man alle Straßen vollständig erneut, wären Kosten entstanden von

$$(8 + 7 + 6) \text{ km} \cdot 3000 \frac{\text{MDN}}{\text{km}} = 63000 \text{ MDN}$$

Da nur 51000 MDN benötigt wurden, blieb die Differenz 63000 MDN - 51000 MDN = 12000 MDN über. Da eine Straße nur 1500 MDN je Kilometer Kosten verursachte, muss diese $\frac{12000}{1500} = 8$ km sein. Der dritte Streckenabschnitt benötigte nur die halben Kosten.

Aufgabe 080511:
Auf einer Großbaustelle sind drei Bagger eingesetzt. Bei gleichbleibender Leistung befördern sie in 20 min insgesamt 90 m^3 Erde. Für die Bedienung dieser drei Bagger ist ein Kollektiv von insgesamt sechs Arbeitern notwendig. Wir nehmen an, dass an Stelle dieser drei Bagger sechs Erdarbeiter diese Arbeit verrichten müssten.
Nach wie viel Arbeitstagen würden sie frühestens die 90 m^3 Erde ausgehoben haben, wenn jeder der Erdarbeiter an jedem Arbeitstag durchschnittlich 5 m^3 Erde bewegt?

Lösung von Steffen Polster:
Wenn 6 Erdarbeiter jeden Tag 5 m^3 Erde ausheben, so schaffen sie je Tag 30 m^3. Damit benötigen sie für 90 m^3 3 Tage.

Aufgabe 120513:
Von einem Bahnhof wurden mit zwei LKW Kartoffeln abtransportiert, und zwar insgesamt 170 t. Der erste LKW, der bei jeder Fahrt mit 4 t Kartoffeln beladen wurde, führte insgesamt 20 Fahrten aus.

Wie viel Fahrten führte der zweite LKW insgesamt aus, wenn er bei jeder Fahrt mit 5 t der Kartoffeln beladen wurde, die der erste LKW nicht abtransportiert hatte?

Lösung von Steffen Polster:
Der erste LKW transportiert in 20 Fahrten $20 \cdot 4 = 80$ t Kartoffeln.
Vom Rest von 170 t - 80 t = 90 t transportiert der 2. LKW je Fahrt 5 Tonnen, d. h. $90 : 5 = 18$. Der 2. LKW muss 18 mal fahren.

Aufgabe 150511:
Im Jahre 1974 erzielten 187 Schiffe der DDR-Handelsflotte eine Transportleistung von insgesamt 1080000 t.

Berechne zur Veranschaulichung dieser Leistung, welche Länge ein Güterzug bei gleicher Transportleistung haben müsste!
Dabei sei angenommen, dass dieser Zug aus Güterwagen mit einer Tragfähigkeit von je 25 t besteht und dass jeder dieser Wagen (einschließlich der Koppelvorrichtung) eine Länge von 12 m besitzt.
Wie viel Güterzüge zu je 60 dieser Güterwagen hätten 1974 täglich fahren müssen, um die gleiche Transportleistung zu erzielen (das Jahr sei zu 360 Tagen gerechnet)?

Lösung von Steffen Polster:
Der Güterzug besteht aus $10800000t : 25t = 432000$ Güterwagen, die damit $432000 \cdot 12m = 5184000m = 5184km$ lang sind.

Jeden Tag hätten $10800000t : 360 = 30000t$ transportiert werden müssen. Ein Zug mit 60 Güterwagen zu je 25 t Tragfähigkeit transportiert $60 \cdot 25t = 1500t$. Folglich müssten täglich $30000t : 1500t = 20$ solcher Züge fahren, um die Leistung der Handelsschiffe zu erbringen.

Aufgabe 280513:
Vier gleich große Kisten mit gleichem Inhalt haben zusammen eine Masse von 132 kg.
Welche Masse hat dann der Inhalt einer Kiste, wenn die Masse aller vier leeren Kisten zusammen 12 kg beträgt?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wegen 132 - 12 = 120 beträgt die Gesamtmasse des Inhalts der vier Kisten 120 kg. Folglich beträgt wegen $120 : 4 = 30$ die Masse des Inhalts je einer Kiste 30 kg.

Runden 2 & 3

Aufgabe 010521:
Im Jahre 1961 wurden in der DDR 70000 t Schlachtvieh und Geflügel, 115000 t Milch und 300000000

Eier mehr auf den Markt gebracht als im Jahre 1960. Die Einwohnerzahl unserer Republik beträgt rund 17000000.
Wie viel Schlachtvieh und Geflügel, wie viel Milch und wie viel Eier konnte jeder Bürger unserer Republik im Jahre 1961 zusätzlich verbrauchen? Runde auf volle Kilogramm bzw. volle Stückzahlen!

Lösung von Steffen Polster:
Für jedes Produkt ist der Quotient aus der produzierten Menge und der Einwohnerzahl zu berechnen:

Schlachtvieh und Geflügel: $\frac{70000}{17000000}$ t $= \frac{70000000}{17000000}$ kg ≈ 4 kg;

Milch: $\frac{115000}{17000000}$ t $= \frac{115000000}{17000000}$ kg ≈ 7 kg;

Eier: $\frac{300000000}{17000000}$ Stück ≈ 18 Stück.

Für jeden Bürger waren im Jahre 1961 durchschnittlich rund 4 kg Schlachtvieh und Geflügel, rund 7 kg Milch und rund 18 Eier zusätzlich verfügbar.

Aufgabe 020521:
Während der Herbstferien waren viele Oberschüler im Ernteeinsatz. Dabei sammelte jeder der 1200 Schüler eines Stadtbezirkes durchschnittlich 8 dt Kartoffeln täglich. Die Schüler arbeiteten 4 Tage.

a) Wie viel Kartoffeln wurden von den Schülern dieses Stadtbezirkes insgesamt gesammelt? (Angabe in dt)
b) Wie viel Familien können von diesem Vorrat Kartoffeln erhalten, wenn der Jahresbedarf je Familie 250 kg beträgt?

Lösung von Steffen Polster:
a) $1200 \cdot 8 \frac{\text{dt}}{\text{d}} \cdot 4 \text{ d} = 38400$ dt. Von den Schülern wurden insgesamt 38400 dt Kartoffeln geerntet.
b) Die Gesamtmenge ist durch die Menge 250 kg = 2,5 dt je Familie zu teilen, d. h. $\frac{38400 \text{ dt}}{2{,}5 \text{ dt}} = 15360$. 15360 Familien können versorgt werden.

Aufgabe 020522:
Die Erdölleitung „Trasse der Freundschaft“ wird etwa 4000 km lang sein. In jeder Stunde wird die DDR durch diese Leitung 540 t Erdöl erhalten.

a) Wie viel Tonnen sind das in einer Minute?
b) Wie viel Kilogramm sind das in einer Sekunde?

Lösung von Steffen Polster:
a) Wenn in einer Stunde 540 t Erdöl transportiert werden, so sind dies je Minute $\frac{540}{60} = 9$ Tonnen.
b) 9 t sind 9000 kg, so dass $\frac{9000}{60} = 150$ kg je Sekunde transportiert werden.

Aufgabe 020523:
Petra spielt mit Werner eine Partie Schach.
Als sie fertig sind, fragt Werner: „Wie lange haben wir eigentlich gespielt?“
Petra antwortet: „Ich weiß es nicht, aber ich habe aus dem Fenster gesehen und gezählt, dass die Straßenbahn genau zehnmal in dieser Zeit an unserem Hause in Stadtrichtung vorbeifuhr. Die erste Bahn kam, als wir mit dem Spiel anfingen, und die zehnte, als wir gerade fertig waren.“
(Die Bahn fährt alle 20 Minuten.)
Wie lange haben Petra und Werner gespielt?

Lösung von Steffen Polster:
Zwischen der ersten vorbeifahrenden Straßenbahn und der zehnten Bahn liegen $9 \cdot 20 = 180$ Minuten, da die Bahnen im Abstand von 20 Minuten fahren.
Petra und Werner haben somit 180 Minuten = 3 Stunden gespielt.

Aufgabe 030522:
In einem volkseigenen Betrieb wurden bis Ende Juni von einem bestimmten Maschinenteil täglich 12 Stück hergestellt. Durch den sozialistischen Wettbewerb gelang es, täglich 2 Stück mehr zu produzieren.

a) Wie viel Maschinenteile dieser Art wurden nunmehr monatlich – 26 Arbeitstage – angefertigt?
b) Wie viel solche Teile können dadurch bis zum Jahresende über den Plan hinaus produziert werden?

Lösung von Steffen Polster:
a) Bei 26 Arbeitstagen in einem Monat, an denen jeweils 14 Stück je Tag hergestellt wurden, sind dies für den ganzen Monat: $26 \cdot 14$ Stück = 364 Stück.

b) Ein Halbjahr besteht aus 6 Monaten. Jeden Tag (26 Tage je Monat) werden 2 Stück mehr produziert, als der Plan vorsieht.
Somit ergibt sich: 6Monate·26Tage pro Monat·2Stück pro Tag = 312Stück. Es werden 312 Maschinenteile über den Plan produziert.

Aufgabe 040521:
Zwei Dreher übernahmen am 11. Januar 1965 (früh) den Auftrag, 1100 Werkstücke herzustellen. Der erste Dreher stellt 19 Werkstücke je Tag her, der zweite täglich 3 Stück mehr als der erste.
An welchem Tage werden sie bei gleichbleibender Leistung je Tag mit dieser Arbeit fertig, wenn an den Sonntagen nicht, an den Sonnabenden ausnahmsweise voll gearbeitet wird?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
An jedem Tage werden 41 Werkstücke hergestellt.
Wegen $26 \cdot 41 = 1066$ und $27 \cdot 41 = 1107$ werden die Dreher im Laufe des 27. Tages fertig.
Dieser Tag ist der 10. Februar 1965.

Aufgabe 050523:
Für jeden von 600000 Einwohnern Leipzigs werden 125 kg Kartoffeln eingekellert.

a) Berechne die bereitzustellende Menge in Tonnen!
b) Welches ist die größte Anzahl von Güterwagen mit je 15 t Ladefähigkeit, die mit dieser Menge voll beladen werden können?
c) Wie viel Tonnen werden durchschnittlich an jedem Tag ausgeliefert, wenn der erste Auslieferungstag der 17.9. und der letzte Auslieferungstag der 14.10. ist und auch an Sonn- und Feiertagen ausgeliefert wird?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Die bereitzustellende Kartoffelmenge beträgt in Tonnen $(600000 \cdot 125) : 1000 = 75000$.

b) Die größte Anzahl der erwähnten Güterwagen, die mit 75000 t Kartoffeln voll beladen werden können, beträgt $75000 : 15 = 5000$.

c) Da an 28 Tagen ausgeliefert wird, beträgt die an jedem Tag durchschnittlich ausgelieferte Menge in Tonnen: $75000 : 28 \approx 2679$ Tonnen je Tag.

Aufgabe 070521:
Die Schüler einer Klasse sammelten insgesamt 336 kg Altpapier. Aus 1 kg Altpapier stellt man in einer Papierfabrik genau 700 g reines weißes Papier her und aus je 30 g von diesem ein Schreibheft. (In der Produktion wird weißes Papier nicht unmittelbar aus Altpapier hergestellt. Durch Zusatz von Altpapier wird aber eine entsprechende Menge Rohstoff eingespart.)

Gib die größtmögliche Anzahl von Heften an, die aus dem gesammelten Altpapier hergestellt werden kann!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Berechnung der Menge des reinen weißen Papiers: Wegen

$$336 \cdot 700 = 235200 \quad \text{und} \quad 235200 \text{ g} = 235{,}2 \text{ kg}$$

können aus 336 kg Altpapier höchstens 255,2 kg weißes Papier hergestellt werden.

Berechnung der Menge von Schreibheften:
Wegen 235200 : 30 = 7840 können aus 336 kg Altpapier höchstens 7840 Schreibhefte hergestellt werden.

Aufgabe 090522:
In einem HO-Bekleidungshaus kauften drei Kunden von dem gleichen Stoff. Der erste kaufte genau 3 m, der zweite genau 5 m und der dritte genau 9 m. Der zweite Kunde bezahlte 30 M mehr als der erste.

Wie viel Mark hatten die drei Kunden insgesamt für den Stoff zu bezahlen?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Der zweite Kunde kaufte genau 2 m Stoff mehr als der erste; denn $5m - 3m = 2m$. Für diese 2 m Stoff hatte er 30 M zu bezahlen.
Jedes Meter Stoff kostete daher die Hälfte davon, das sind 15 M. Die drei Kunden kauften zusammen 17 m Stoff; folglich hatten sie insgesamt $17 \cdot 15 = 255$ M zu bezahlen.

Aufgabe 100523:
Die Mitglieder einer Arbeitsgemeinschaft „Junge Botaniker“ unterstützten ihre Paten-LPG beim Obstbau.
Zu diesem Zwecke hielten sie eine 2,6 ha große Obstplantage, auf der je Hektar durchschnittlich 150 Apfelbäume standen, von Schädlingen frei. Danach wurden von jedem Baum durchschnittlich 50 kg Äpfel geerntet.
Berechne, wie viel Tonnen Äpfel unter diesen Umständen insgesamt auf der Plantage geerntet wurden!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es gilt 2,6 ha = 260 a.
Da auf 1 ha = 100 a durchschnittlich 150 Apfelbäume standen, standen auf 10 a durchschnittlich 15 Apfelbäume, auf 260 a mithin 26 mal soviel, das sind insgesamt 590 Apfelbäume.

Diese 390 Apfelbäume trugen 390 mal soviel, wie jeder Apfelbaum durchschnittlich trug, das sind wegen $590 \cdot 50 = 19500$ insgesamt 19500 kg Äpfel.
Wegen 19500 kg = 19,5 t wurden somit auf der Plantage 19,5 t Äpfel geerntet.

Aufgabe 110523:
Am Wettbewerb der mathematischen Schülerzeitschrift „alpha“ beteiligten sich 1970 von einer Oberschule insgesamt 216 Schüler. Das waren dreimal so viele wie im Jahr 1969.
Im Jahr 1969 gab es an derselben Schule doppelt so viele Teilnehmer am alpha-Wettbewerb wie im Jahr 1968.
Berechne jeweils die Anzahl aller Schüler dieser Oberschule, die am alpha-Wettbewerb der Jahre 1968 und 1969 teilgenommen haben!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Da es 1970 dreimal so viele Teilnehmer waren wie 1969, muss man die Anzahl 216 der Teilnehmer von 1970 durch 3 dividieren, um die Anzahl der Teilnehmer von 1969 zu erhalten.
Diese betrug wegen $216 : 3 = 72$ somit 72.

Da es 1969 doppelt so viele Teilnehmer waren wie 1968, muss man die Anzahl 72 der Teilnehmer von 1969 durch 2 dividieren, um die Anzahl der Teilnehmer von 1968 zu erhalten.
Diese betrug wegen $72 : 2 = 36$ somit 36.

Aufgabe 140523:
Uwe fuhr mit einem Sonderzug ins Ferienlager. Als der Zug genau die Hälfte seiner Reisestrecke zurückgelegt hatte, schlief Uwe ein und erwachte erst, als der Zug noch eine Strecke von genau 25 km bis zum Reiseziel zurückzulegen hatte.
Diese Strecke war halb so lang wie die Strecke, die der Zug zurückgelegt hatte, während Uwe schlief.
Wie viel Kilometer betrug Uwes Reisestrecke?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Laut Aufgabe legte der Zug, während Uwe schlief, eine Strecke zurück, die doppelt so lang wie 25 km war, also 50 km betrug.
Vom Zeitpunkt des Einschlafens an bis zum Reiseziel musste wegen $50 + 25 = 75$ Uwe folglich 75 km fahren.
Das war laut Aufgabe die Hälfte der Länge seiner Reisestrecke. Daher war diese Reisestrecke 150 km lang.

Aufgabe 150521:
Die Werktätigen des Flachglaskombinates Torgau beschlossen, im Jahre 1975 als Beitrag zum Wohnungsbauprogramm 135000 m^2 Flachglas über den Plan hinaus zu produzieren. Diese Glasmenge reicht für 4500 Neubauwohnungen eines bestimmten Typs aus.
Ermittle den Bedarf an Flachglas (in Quadratmetern), der nach diesen Angaben für 1000 Neubauwohnungen dieses Typs zugrunde gelegt wurde.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wegen $4500 : 9 = 500$ und $135000 : 9 = 15000$ wurde als Bedarf für 500 Neubauwohnungen 15000 m^2 Flachglas angenommen, für 1000 Neubauwohnungen folglich das Doppelte, also 30000 m^2.

Aufgabe 160524:
Jeder Schüler braucht im Jahr 15 Hefte. Aus 1 Tonne Papier können 25000 Hefte hergestellt werden.
Wie viele Schüler insgesamt kann man unter diesen Umständen aus 3 Tonnen Papier für ein Jahr mit Heften versorgen?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wegen $3 \cdot 25000 = 75000$ können aus 3 Tonnen Papier 75000 Hefte hergestellt werden.

Wegen 75000 : 15 = 5000 lassen sich mit diesen Heften in einem Jahr insgesamt 5000 Schüler versorgen.

Aufgabe 180521:
Die Gleise der BAM werden nach ihrer Fertigstellung eine Gesamtlänge von 3200 km haben. Je 1 m Gleis entsprechen 2 m Schiene.
Wie viel Tonnen Stahl werden für die Schienen der BAM insgesamt benötigt, wenn man für je 1 m Schiene 65 kg Stahl braucht?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wegen $3200 \cdot 2 = 6400$ werden insgesamt 6400 km Schienen benötigt.
Wegen 6400 km = 6400000 m und $6400000 \cdot 65 = 416000000$ werden insgesamt 416000000 kg = 416000 t Stahl für diese Schienen benötigt.

Aufgabe 200521:
Zwei Geschwister erhielten im September zusammen 6 Mark für abgelieferte Altstoffe. Im Oktober erhielten sie zusammen 13 Mark. Im November bekamen sie 2 Mark weniger als in den beiden vorigen Monaten zusammen.
Ein Drittel ihres in den drei Monaten erzielten Gesamterlöses spendeten sie für die Solidarität, ein weiteres Drittel des Gesamterlöses legten sie in ihre gemeinsame Ferienkasse. Den Rest teilten sie sich zu gleichen Teilen zum persönlichen Gebrauch.
Ermittle den Betrag, den damit jeder der beiden für sich persönlich erhielt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wegen 6 + 13 = 19 und 19 - 2 = 17 erhielten die Geschwister im November zusammen 17 Mark, wegen 6 + 13 + 17 = 36 mithin insgesamt 36 Mark.
Wegen 36 : 3 = 12 betrug ihre Solidaritätsspende 12 Mark. Den gleichen Betrag legten sie in ihre Ferienkasse.
Wegen 36 - 12 - 12 = 12 verblieben 12 Mark, davon erhielt jeder für sich die Hälfte, also jeder 6 Mark.

Aufgabe 210521:
Ein Behälter, der mit Sonnenblumenöl gefüllt ist, wiegt 17 kg 500 g. Der leere Behälter würde 2 kg 700 g wiegen.

a) Wie viel Liter Öl befinden sich in dem Behälter, wenn 1 Liter Sonnenblumenöl 925 g wiegt ?
b) Für den Ladenverkauf wird das Öl in Flaschen zu 400 g abgefüllt. Wie viel Flaschen lassen sich mit dem im Behälter befindlichen Öl füllen?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Wegen 17500 - 2700 = 14800 sind 14 kg 800 g Sonnenblumenöl im Behälter. Aus 14800 : 925 = 16 erhält man, dass sich 16 Liter Sonnenblumenöl im Behälter befinden.

b) Wegen 14800 : 400 = 37 lassen sich 37 Flaschen mit der im Behälter vorhandenen Ölmenge füllen.

Aufgabe 230523:
Die drei Pioniere Hans, Karl und Peter fuhren mit dem Rad von Leipzig nach Halle. Hans fuhr dabei in je 10 Minuten 2 Kilometer, Karl benötigte für je 2,5 Kilometer 10 Minuten, während Peter in je 10 Minuten 3 Kilometer zurücklegte und Halle nach genau 100 Minuten erreichte.
Wie viel Minuten nach Peter trafen Hans und Karl in Halle ein, wenn alle drei Pioniere zur gleichen Zeit in Leipzig abfuhren?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn Peter in 10 Minuten 3 km zurücklegt, dann legt er in 100 Minuten zehnmal soviel zurück, also 30 km.
Wenn Hans für 2 km 10 Minuten braucht, dann benötigt er für 30 km fünfzehnmal soviel, also 150 Minuten.
Wenn Karl für 2,5 km 10 Minuten braucht, dann benötigt er für 5 km 20 Minuten, also für 30 km 120 Minuten.
Wegen 150 - 100 = 50 kam Hans mithin 50 Minuten später als Peter in Halle an. Wegen 120 - 100 = 20 kam Karl 20 Minuten später als Peter in Halle an.

Aufgabe 240522:
In einem metallverarbeitenden VEB werden verschiedene Einzelteile produziert. Dazu werden vier Maschinen eingesetzt; mit jeder Maschine wird eine Sorte dieser Einzelteile hergestellt. Die Ergebnisse einer Schicht waren folgende:

Es wurden insgesamt 4320 Teile hergestellt, und zwar auf der ersten Maschine ein Drittel der 4320 Teile, auf der zweiten Maschine ein Fünftel der 4320 Teile. Auf der dritten Maschine wurden ebenso viele Teile hergestellt wie auf der vierten Maschine.
Berechne für jede der vier Maschinen die Stückzahl der auf dieser Maschine hergestellten Teile!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wegen 4320 : 3 = 1440 wurden auf der ersten Maschine 1440 Teile hergestellt.
Auf der zweiten Maschine wurden 864 Teile produziert; denn es ist 4320 : 5 = 864.
Wegen 4320 - 1440 - 864 = 2016 und 2016 : 2 = 1008 wurden auf der dritten und auf der vierten Maschine je 1 008 Teile angefertigt.

Aufgabe 250522:
Vom Bahnhof Mathestädt fährt zu jeder vollen Viertelstunde ein Bus ab und trifft nach 2 Stunden in Knobelhausen ein.
Von dort fahren ebenfalls im Viertelstundenabstand Busse auf derselben Straße nach Mathestädt, wo sie nach 2 Stunden Fahrzeit eintreffen.
Morgens fährt der erste Bus von Mathestädt um 5.00 Uhr und der erste Bus von Knobelhausen um 7.10 Uhr ab. Die Busfahrer begrüßen einander jedesmal mit Kopfnicken, wenn sie sich unterwegs begegnen.

Wie viele ihm entgegenkommende Kollegen begrüßt der Busfahrer Franz Freundlich auf einer Fahrt von Mathestädt nach Knobelhausen, wenn diese Fahrt um 10.00 Uhr beginnt?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Als ersten begrüßt Franz Freundlich denjenigen Kollegen, der als erster nach 8.00 Uhr in Knobelhausen abgefahren ist; als letzten denjenigen, der als letzter vor 12.00 Uhr in Knobelhausen abfährt. Also begrüßt er alle diejenigen Kollegen, die zu einer der folgenden Zeiten in Knobelhausen abfahren:

8.10 Uhr, 8.25 Uhr, 8.40 Uhr, 8.55 Uhr, 9.10 Uhr, 9.25 Uhr, 9.40 Uhr, 9.55 Uhr, 10.10 Uhr, 10.25 Uhr, 10.40 Uhr, 10.55 Uhr, 11.10 Uhr, 11.25 Uhr, 11.40 Uhr, 11.55 Uhr.

Das sind insgesamt 16 Kollegen.

Aufgabe 270523:
In einer Olympiadeklasse wurde genau die Hälfte aller Teilnehmer mit einem Preis ausgezeichnet. Es gab nur erste, zweite und dritte Preise. Genau ein Achtel aller Teilnehmer erhielt einen ersten Preis.

Genau ein Sechstel aller Teilnehmer erhielt einen zweiten Preis. In dieser Olympiadeklasse waren insgesamt mindestens 20, aber weniger als 30 Teilnehmer.
Wie viel Teilnehmer genau waren in dieser Olympiadeklasse?
Wie viele erste, zweite bzw. dritte Preise gab es darin?
Gib an, wie du diese gesuchten Anzahlen eindeutig aus den obigen Angaben findest!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Anzahl der Teilnehmer war eine der Zahlen 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29. Genau ein Achtel davon erhielt einen ersten Preis, also war die Anzahl durch 8 teilbar.
Daraus folgt eindeutig: Die Anzahl der Teilnehmer war 24.
Wegen $24 : 2 = 12$ erhielten genau 12 Teilnehmer einen Preis.
Wegen $24 : 8 = 3$ erhielten genau 3 Teilnehmer einen ersten Preis.
Wegen $24 : 6 = 4$ erhielten genau 4 Teilnehmer einen zweiten Preis.
Wegen $12 - 3 - 4 = 5$ erhielten genau 5 Teilnehmer einen dritten Preis.

Aufgabe 340531:
Fritz hat geträumt, er bekäme ein Paket voller Gummibärchen, wenn er drei Aufgaben (a), (b), (c) löst.
Obwohl es nur ein Traum war und er nicht weiß, ob die Zahlen des Traumes genau stimmen, möchte er die Aufgaben doch lösen. In seinem Traum hieß es:

Ein Paket enthält 1000 Gummibärchen. Sie sind in 50 Tüten verteilt.
Der Inhalt einer Tüte kostet 1,60 DM. Ein Kilogramm Gummibärchen kostet 20 DM. In jeder Tüte ist dieselbe Anzahl Gummibärchen wie in jeder anderen Tüte. Jedes Gummibärchen wiegt ebenso viel und kostet ebenso viel wie jedes andere Gummibärchen.
Die Aufgaben lauten:

(a) Wie viel kosten zusammengenommen die Gummibärchen in einem Paket?
(b) Wie viel wiegt der Inhalt einer Tüte?
(c) Wie viel wiegt ein Gummibärchen?

Gib die Lösungen zu (a), (b), (c) an und begründe, wie du sie erhalten hast!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(a) Da ein Paket 50 Tüten enthält und der Inhalt jeder Tüte 1,60 DM kostet, kosten die Gummibärchen in einem Paket zusammengenommen $50 \cdot 1{,}60\text{DM} = 80\text{DM}$.

(b) Da 1000 Gramm Gummibärchen 2000 Pfennig kosten, kostet 1 Gramm 2 Pfennig. Also kosten 80 Gramm 1,60 DM.
Das ist der Preis für den Inhalt einer Tüte; dieser Inhalt wiegt also 80 Gramm.

(c) Da die 50 Tüten in einem Paket 1000 Gummibärchen enthalten, enthält wegen $1000 : 50 = 20$ eine Tüte 20 Gummibärchen. Da diese, wie in (b) gefunden, 80 Gramm wiegen, wiegt ein Gummibärchen $80\text{g} : 20 = 4\text{g}$.

II Klasse 6

II.I Gleichungen, Gleichungssysteme

I Runde 1

Aufgabe V00605:
Wie viel sind eineinhalb Drittel von Hundert?

Lösung von Steffen Polster:

$$\frac{1\frac{1}{2}}{3} \cdot 100 = \frac{\frac{3}{2}}{3} \cdot 100 = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 100 = \frac{1}{2} \cdot 100 = 50$$

Aufgabe V00606:
Wie heißt der Bruch mit einem einstelligen Nenner, der größer als $\frac{7}{9}$ und kleiner als $\frac{8}{9}$ ist?

Lösung von Steffen Polster:
Ein möglicher Bruch ist das arithmetische Mittel von $\frac{7}{9}$ und $\frac{8}{9}$:

$$\frac{\frac{7}{9} + \frac{8}{9}}{2} = \frac{\frac{15}{9}}{2} = \frac{15}{30} = \frac{5}{6}$$

Die Aufgabe ist nicht eindeutig lösbar, da z. B. auch $\frac{6}{7}$ ein solcher Bruch ist.

Aufgabe V00607:
Zu einer gedachten Zahl wird 16 addiert, anschließend mit 7 multipliziert, dann 8 subtrahiert und schließlich mit 9 dividiert. Man erhält 22 Rest 4.
Wie heißt die gedachte Zahl?

Lösung von Steffen Polster:
x sei die gedachte Zahl. Dann ergibt sich mit den Operationen der Term

$$((x + 16) \cdot 7 - 8) : 9$$

Dieser Term soll 22 mit einem Rest 4 werden, d. h. es gilt

$$((x + 16) \cdot 7 - 8) = 9 \cdot 22 + 4$$

Schrittweises Zusammenfassen und Umstellen ergibt

$$\begin{aligned}
((x + 16) \cdot 7 - 8) &= 9 \cdot 22 + 4 \\
(x + 16) \cdot 7 - 8 &= 198 + 4 \\
(x + 16) \cdot 7 &= 202 + 8 \\
x + 16 &= 210 : 7 \\
x &= 30 - 16 = 14
\end{aligned}$$

Die gedachte Zahl ist 14.

Aufgabe 010611:
a) $9\frac{4}{15} \cdot \frac{138}{139}$

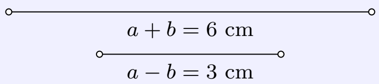
b) $3451\frac{23}{35} - 2868\frac{24}{49}$

Lösung von Steffen Polster:

$$\text{a)} \quad 9\frac{4}{15} \cdot \frac{138}{139} = \frac{139}{15} \cdot \frac{138}{139} = \frac{138}{15} = 9\frac{1}{5}$$

$$\text{b)} \quad 3451\frac{23}{35} - 2868\frac{24}{49} = 3451 - 2868 + \frac{23}{5 \cdot 7} - \frac{24}{7 \cdot 7} = 583 + \frac{23 \cdot 7 - 24 \cdot 5}{5 \cdot 7 \cdot 7} = 583\frac{41}{245}$$

Aufgabe 020616:



Gegeben sind zwei Strecken. Die eine ist gleich der Summe zweier Strecken, die andere ist gleich ihrer Differenz. Wie lang sind die Strecken a und b? Beschreibe, wie du die Lösung gefunden hast!

Lösung von Steffen Polster:
Die Summe der beiden Strecken $(a + b)$ und $(a - b)$ ist gleich $(a + b) + (a - b) = (a + a) = 9$ cm. Damit ist die Strecke $a = 4{,}5$ cm lang und $b = 1{,}5$ cm.

Aufgabe 040614:
Zerlege die Zahl 390 in drei Summanden, von denen der zweite dreimal so groß wie der erste und der dritte $2\frac{1}{2}$ mal so groß wie der erste ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Der erste Summand ist doppelt so groß wie seine Hälfte, der zweite 6 mal und der dritte 5 mal so groß wie diese Hälfte. Insgesamt besteht die Summe 390 also aus 13 Summanden, von denen jeder halb so groß wie der gesuchte erste Summand ist. Auf diese Weise findet man die drei Summanden 60, 180 und 150.

Aufgabe 060612:
Zu Beginn des Schuljahres kaufte Heinz zwei verschiedene Sorten von Heften, die eine kostet 8 Pf, die andere 15 Pf pro Stück. Er zahlte für 12 Hefte zusammen 1,31 MDN.
Wie viel Hefte kaufte er von jeder Sorte?

Lösung von Steffen Polster:
a sei die Anzahl der Hefte zu 8 Pf und b die Anzahl der Hefte zu 15 Pf. Dann gilt

$$a \cdot 8 + b \cdot 15 = 131 \qquad ; \qquad a + b = 12 \quad \text{oder} \quad a = 12 - b$$

Setzt man die zweite Gleichung in die erste ein, wird $8 \cdot (12 - b) + 15b = 131$. Daraus gewinnt man $b = 5$ und weiter $a = 7$.
Heinz kauft 7 Hefte zu 8 Pf und 5 Hefte zu 15 Pf.

Aufgabe 070611:
Zu einem Straßenbahnhof einer gewissen Großstadt gehören insgesamt 83 Straßenbahnwagen. Davon sind genau 46 Anhänger. Zu einem gewissen Zeitpunkt befinden sich insgesamt 8 Triebwagen mit je zwei Anhängern und 23 Triebwagen mit je einem Anhänger im Einsatz.
Welches ist die Anzahl aller Triebwagen und Anhänger, die sich zu diesem Zeitpunkt nicht im Einsatz befinden?

Lösung von Steffen Polster:
Die Anzahl der Anhänger sei a, die der Triebwagen t. Dann gilt nach Aufgabenstellung $a+t = 46+t = 83$. Damit gibt es 37 Triebwagen.
Zu dem bestimmten Zeitpunkt sind $8 + 23 = 31$ Triebwagen und $16 + 23 = 39$ Anhänger im Einsatz. Folglich sind zu diesem Zeitpunkt 7 Anhänger und 6 Triebwagen nicht im Einsatz.

Aufgabe 070613:
In einem Speicher wurden insgesamt 2170 kg Getreide gelagert. Es waren genau 11 Sack Weizen zu je 80 kg, 6 Sack Gerste und 12 Sack Mais. Jeder Sack Gerste enthielt 5 kg mehr als jeder Sack Mais.
Wie viel Kilogramm Mais wurden im Speicher gelagert?

Lösung von Steffen Polster:
Die Masse des Weizens ist $11 \cdot 80\text{kg} = 880\text{kg}$, so dass die Masse von Gerste (g je Sack) und Mais (m je Sack) zusammen 1290 kg beträgt. Da $g = m + 5$ gilt, wird für beide (in Kilogramm):

$$6g + 12m = 1290 \qquad ; \qquad 6 \cdot (m + 5) + 12m = 1290 = 18m + 30$$

Daraus ergibt sich für den Mais je Sack $m = 70$ kg und somit für die Gerste je Sack $g = 75$ kg.
Da 12 Säcke Mais vorhanden sind, ist deren Gesamtmasse $12 \cdot 70\text{kg} = 840\text{kg}$.

Aufgabe 090613:
In einem Wettbewerb der Mathematischen Schülerzeitschrift „alpha“ sollten den vier dort vorgegebenen geometrischen Figuren die richtigen Namen zugeordnet werden.
In genau $\frac{3}{25}$ der eingesandten Lösungen wurden allen vier vorgegebenen Figuren die richtigen Namen zugeordnet. Bei genau doppelt soviel Lösungen wurden je zwei Figuren die richtigen und je zwei Figuren die falschen Namen zugeordnet.
Die Anzahl der Lösungen mit genau drei falschen Zuordnungen war genau viermal so groß wie die Zahl der richtigen Lösungen. Genau 240 der eingesandten Lösungen enthielten keine richtige Zuordnung. Weitere Einsendungen lagen nicht vor.

Ermittle die Anzahl aller zu diesem Wettbewerb eingesandten Lösungen!

Lösung von Steffen Polster:
Die Anzahl der eingesandten Lösungen sein n. Dann gilt:

Genau vier sind richtig, d. h $\frac{3}{25}n$, genau zwei sind richtig, d. h. $\frac{6}{25}n$, genau eine ist richtig, d. h. : $4 \cdot \frac{3}{25}n$ und keine Lösung richtig sind 240. Die Summe ergibt

$$n = \frac{3}{25}n + \frac{6}{25}n + 4 \cdot \frac{3}{25}n + 240 = \frac{21}{25}n + 240 \qquad \to \qquad \frac{4}{25}n = 240$$

Somit erfolgten insgesamt $n = 240 \cdot \frac{25}{4} = 1500$ Einsendungen.

Aufgabe 090614:
Eine Arbeitsgemeinschaft erhielt als Auszeichnung für sehr gute Leistungen einen Betrag von genau 240 M.
Bei gleichmäßiger Verteilung dieses Geldes auf alle Mitglieder der Arbeitsgemeinschaft hätte jedes Mitglied einen ganzzahligen Betrag (in Mark) erhalten. Die Mitglieder beschlossen jedoch, die 240 M gemeinsam auf einer Wanderfahrt auszugeben.
Genau drei der Mitglieder konnten an der Wanderfahrt nicht teilnehmen, infolgedessen standen bei gleichmäßiger Verteilung des Geldes auf alle Teilnehmer der Wanderfahrt für jeden Teilnehmer genau 4 M mehr zur Verfügung als bei gleichmäßiger Verteilung auf alle Mitglieder.

Ermittle die Mitgliederzahl der Arbeitsgemeinschaft!

Lösung von Steffen Polster:
Die Anzahl Schüler der Arbeitsgemeinschaft sei x. Bei gleichmäßiger Verteilung des Geldes erhält jeder somit $a = \frac{240}{x}$, womit x ein Teiler von 240 sein muss.

Nehmen 3 Mitgliedern nicht teil so erhöht sich der Anteil für aller übrigen Mitglieder auf $a + 4$, d. h. es ist $a + 4 = \frac{240}{x-3}$, womit auch $x - 3$ ein Teiler von 240 ist.

Die Teiler x von 240, für die auch $x - 3 > 0$ ist, sind

$$4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 20, 24, 30, 40, 48, 60, 80, 120, 240$$

Nur die Paare $(8; 5)$ und $(15; 12)$ sind Paare der Form $(x; x - 3)$. Einsetzen der ersten Gleichung in die zweite ergibt: $\frac{240}{x} + 4 = \frac{240}{x-3}$.
Setzt man die zwei Paare ein, so zeigt sich, dass nur $x = 15$, $x - 3 = 12$ die letzte Gleichung erfüllen. Die Arbeitsgemeinschaft hatte somit 15 Mitglieder.

Aufgabe 100611:
Eine LPG hatte auf zwei Feldern Kartoffeln angebaut. Vom ersten Feld wurden insgesamt 810 t, vom zweiten insgesamt 640 t Kartoffeln geerntet. Auf dem ersten Feld wurde ein Durchschnittsertrag von 180 dt je ha, auf dem zweiten von 200 dt je ha erzielt.
Welches von den beiden Feldern hat den größeren Flächeninhalt? Um wie viel Ar unterscheiden sich die beiden Flächen?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Vom ersten Feld wurden an Kartoffeln 810 t = 8100 dt geerntet. Da der Durchschnittsertrag 180 dt je ha betrug, erhalten wir für dieses Feld wegen $8100 : 180 = 45$ einen Flächeninhalt von 45 ha.

Vom zweiten Feld wurden an Kartoffeln 640 t = 6400 dt geerntet. Da der Durchschnittsertrag hier 200 dt je ha betrug, erhalten wir für das zweite Feld wegen $6400 : 200 = 32$ einen Flächeninhalt von 32 ha.

Also ist das erste Feld größer als das zweite. Die Differenz der Flächeninhalte beträgt 13 ha, das sind 1300 a.

Aufgabe 100613:
Es seien a, b, c, d, e, f, g, h sämtlich paarweise untereinander verschiedene einstellige natürliche Zahlen ungleich Null, und es gelte:

$$a + b = 10, \qquad c + d + e = 16, \qquad f + g + h = 14$$

Welche einstellige natürliche Zahl (ungleich Null) wurde in diesen drei Aufgaben nicht verwendet?
Gib für a, b, c, d, e, f, g, h eine mögliche Lösung an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es gibt genau 9 einstellige natürliche Zahlen ungleich Null, nämlich 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9. Die Summe aller dieser 9 Zahlen beträgt

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$$

Von ihnen wurden laut Aufgabe genau 8 verwendet.
Aus den gegebenen Gleichungen erhält man durch Addition:

$$a+b+c+d+e+f+g+h=10+16+14=40$$

Also wurde die 5 nicht verwendet. Eine mögliche Lösung ist z. B.:

$$a=1,\quad b=9,\quad c=2,\quad d=8,\quad e=6,\quad f=3,\quad g=7,\quad h=4.$$

Aufgabe 110611:
Von zwei Autos vom Typ „Wartburg“ legte das eine eine Strecke von 1200 km zurück, das andere eine Strecke von 800 km. Es sei angenommen, dass jedes der beiden Autos für jeden Kilometer die gleiche Menge Kraftstoff verbrauchte. Dabei verbrauchte das zweite Auto 36 Liter Kraftstoff weniger als das erste.
Berechne, wie viel Liter Kraftstoff beide Autos zusammen für die oben angegebenen Strecken verbrauchten!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wegen $1200-800=400$ legte das erste Auto 400 km mehr zurück als das zweite. Für diese 400 km verbrauchte es laut Aufgabe 36 Liter Kraftstoff.
Beide Autos legten zusammen 1200km + 800km = 2000km zurück. Das sind 5 mal soviel wie 400 km.
Folglich verbrauchten sie insgesamt wegen $5\cdot 36=180$ für diese Strecken 180 Liter Kraftstoff.

Aufgabe 120611:
Von 30 Schülern einer Klasse lesen regelmäßig 20 Schüler die Zeitschrift „Fröhlichsein und Singen“ (Frösi), 12 Schüler die mathematische Schülerzeitschrift „alpha“ und 6 Schüler weder „Frösi“ noch „alpha“.

Ermittle die Anzahl aller Schüler dieser Klasse, die beide Zeitschriften lesen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Anzahl der Schüler, die beide Zeitschriften lesen, sei x.
Dann lesen genau $(20-x)$ Schüler „Frösi“ aber nicht „alpha“, ferner genau $(12-x)$ Schüler „alpha“, aber nicht „Frösi“. Daher gilt

$$x+(20-x)+(12-x)+6=30$$

woraus $38-x=30$, also $x=8$ folgt.

Aufgabe 120614:
Eine Strecke von 168 m Länge soll in drei Teilstrecken geteilt werden, deren Längen der Reihe nach mit a, b, c bezeichnet seien. Dabei soll die zweite Teilstrecke dreimal so lang wie die erste und die dritte Teilstrecke viermal so lang wie die erste sein.

Ermittle alle Möglichkeiten, die Längen a, b, c der Teilstrecken so anzugeben, dass eine Teilung mit diesen Eigenschaften entsteht!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, die Längen a, b, c haben die geforderten Eigenschaften. Dann gilt:

$a + b + c = 168$ m, ferner $b = 3a$ sowie $c = 4a$.
Daraus folgt: $a + 3a + 4a = 168$ m, also $8a = 168$ m, woraus man $a = 21$ m, also $b = 63$ m und $c = 84$ m erhält.

Deshalb können nur diese Längen die gestellten Bedingungen erfüllen. Wegen 63m = 3·21m, 84m = 4·21m und 21m + 63m + 84m = 168m haben sie die geforderten Eigenschaften tatsächlich.

Aufgabe 130611:
Eine Strecke von 7 m Länge soll so in vier Teile geteilt werden, dass die zweite Teilstrecke 40 cm länger als die erste, die dritte 40 cm länger als die zweite und die vierte 40 cm länger als die dritte ist.
Untersuche, ob eine solche Einteilung möglich ist, und gib, wenn dies der Fall ist, die Längen jeder der vier Teilstrecken an!

Lösung von Steffen Polster:
Die Längen der vier Teilstücke seien x, $x + 40$, $x + 80$ und $x + 120$ (alles in cm), womit für die Summe ergibt:

$$x + x + 40 + x + 80 + x + 120 = 4x + 240 = 700 \text{ cm} \qquad \Rightarrow \qquad x = 115 \text{ cm}$$

Das erste Teilstück ist somit 115 cm lang, das zweite 155 cm, das dritte 195 cm und das vierte 235 cm.

Aufgabe 140612:
Bernd und Monika unterhalten sich über die letzte Zusammenkunft ihrer Arbeitsgemeinschaft Junger Mathematiker, bei der genau 6 Jungen mehr anwesend waren als Mädchen.
Bernd meint, dass bei dieser Veranstaltung von den 25 Zirkelteilnehmern genau 2 gefehlt hätten.
Monika entgegnet nach einigem Überlegen, dass das nicht stimmen könne.
Wer von beiden hat recht?

Lösung von Steffen Polster:
Bei der letzten Zusammenkunft waren 25 - 2 = 23 23 Teilnehmer anwesend. Ist die Anzahl der Mädchen x, so waren, nach Bernd, $x + 6$ Jungen da, d. h.

$$x + (x + 6) = 23 \qquad \rightarrow \qquad x = 8{,}5$$

Das Ergebnis ist nicht ganzzahlig, womit klar ist, dass Monika recht hat. Bernds Aussage ist nicht korrekt.

Aufgabe 150611:
Die Volksrepublik Polen lieferte vom 6. Dezember 1974 (erster Liefertag) bis zum 18. Dezember 1974 (letzter Liefertag) eine Gesamtmenge von 132000 t Steinkohle und 24000 t Koks auf dem Wasserwege in die Hauptstadt der DDR. Die Lieferung erfolgte auf Schleppkähnen mit einem Fassungsvermögen von je 600 t.
Wie viel dieser Kahnladungen trafen im angegebenen Zeitraum durchschnittlich an jedem Tag in Berlin ein (wobei Sonntage als Liefertage mitgerechnet seien)?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wegen 132000 + 24000 = 156000 betrug die gelieferte Gesamtmenge 156000 t. Wegen 132000 : 600 = 220, 24000 : 600 = 40 und 220 + 40 = 260 oder: wegen 156000 : 600 = 260 waren das insgesamt 260 Kahnladungen.
Da es sich vom 6. bis 18. Dezember 1974 um insgesamt 13 Liefertage handelte, trafen wegen 260 : 13 = 20 täglich durchschnittlich 20 dieser Kahnladungen aus der Volksrepublik Polen in Berlin ein.

Aufgabe 150613:
Im Jahre 1770 gab der Schweizer Mathematiker Leonard Euler ein Lehrbuch der Algebra heraus, das mehr als 100 Jahre lang zu den meistgelesenen Algebrabüchern gehörte. Eine Aufgabe aus diesem Lehrbuch lautet:

Die Zahl 25 ist so in zwei Summanden zu zerlegen, dass der größere der beiden Summanden 49 mal so groß ist wie der andere.

Untersuche, ob eine solche Zerlegung möglich ist, und ermittle, wenn dies der Fall ist, die beiden dabei auftretenden Summanden!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn eine solche Zerlegung möglich ist, so gilt für sie:
Bezeichnet man den kleineren der beiden Summanden mit x, dann lautet der größere $49x$, und es gilt $x + 49x = 25$, woraus man $x = \frac{1}{2}$ erhält.

Also kann nur eine Zerlegung die geforderten Eigenschaften haben, in der der kleinere Summand $\frac{1}{2}$ und der größere $49 \cdot \frac{1}{2} = \frac{49}{2}$ lautet.
Dies ist auch in der Tat eine Zerlegung der gesuchten Art; denn für diese beiden Summanden ist $\frac{1}{2} + \frac{49}{2} = 25$.

Aufgabe 150614:
Eine Pioniergruppe sammelt Altpapier. Bei der Abrechnung stellte sich heraus, dass das Sammelergebnis der letzten beiden Tage ein Viertel der insgesamt erreichten Menge betrug, und zwar waren am letzten Tag 27 kg gesammelt worden und am vorletzten Tag 6 kg weniger als am letzten Tag.

Wie viel Kilogramm betrug die insgesamt gesammelte Menge Altpapier?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Am letzten Tag waren 27 kg gesammelt worden, am vorletzten Tag wegen $27 - 6 = 21$, also 21 kg.
Wegen $27 + 21 = 48$ betrug das Sammelergebnis der letzten beiden Tage daher 48 kg. Da dies ein Viertel der insgesamt erreichten Menge war, ist diese das Vierfache von 48 kg, wegen $4 \cdot 48 = 192$ also 192 kg Altpapier.

Aufgabe 170613:
Jeder der 27 Pioniere der Klasse 6a sammelte durchschnittlich 5 Flaschen und 8 kg Altpapier. Für jede Flasche gab es 5 Pfennig und für je 1 kg Altpapier 15 Pfennig.
Die Klasse 6b sammelte Altstoffe für insgesamt 25 M.
Reicht das so erworbene Geld für die gemeinsame Eisenbahnfahrt beider Klassen zum Wandertag, die 60 M kosten wird?

Lösung von Steffen Polster:
In der Klasse 6a wurden $27 \cdot 5 = 135$ Flaschen und $27 \cdot 8\text{kg} = 216\text{kg}$ Altpapier gesammelt. Dies sind $135 \cdot 5\text{Pf} + 216 \cdot 15\text{Pf} = 675\text{Pf} + 3240\text{Pf} = 3915\text{Pf} = 39{,}15\text{M}$.

Zusammen haben beiden Klassen $39{,}15\text{M} + 25\text{M} = 64{,}15\text{M}$ gesammelt. Der Geldbetrag genügt für die gemeinsame Eisenbahnfahrt.

Aufgabe 190612:
Ulrike möchte vier natürliche Zahlen in einer bestimmten Reihenfolge angeben, so dass folgendes gilt:

Die zweite Zahl ist um 1 kleiner als das Doppelte der ersten Zahl,
die dritte Zahl ist um 1 kleiner als das Doppelte der zweiten Zahl,
die vierte Zahl ist um 1 kleiner als das Doppelte der dritten Zahl,
die Summe der vier angegebenen Zahlen beträgt 79.

Zeige, wie man alle Zahlen finden kann, die diese Bedingungen erfüllen! Überprüfe, ob die gefundenen Zahlen alle Bedingungen erfüllen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, vier Zahlen erfüllen die gestellten Bedingungen.
Die erste Zahl sei mit a bezeichnet. Die zweite, Zahl lautet dann $2a - 1$, die dritte Zahl $2(2a - 1) - 1 = 4a - 2 - 1 = 4a - 3$, die vierte Zahl $2(4a - 3) - 1 = 8a - 6 - 1 = 8a - 7$. Daher ist die Summe der vier Zahlen

$$a + 2a - 1 + 4a - 3 + 8a - 7 = 15a - 11$$

Aus $15a - 11 = 79$ folgt $15a = 90$. Daraus folgt, dass die erste Zahl $a = 6$ lautet, die zweite, dritte, vierte also 11, 21 bzw. 41.

Daher können nur die Zahlen 6, 11, 21, 41 (in dieser Reihenfolge) die Bedingungen erfüllen. Die folgende Überprüfung zeigt, dass sie alle geforderten Bedingungen erfüllen:
Es gilt: $2 \cdot 6 - 1 = 11$, $2 \cdot 11 - 1 = 21$, $2 \cdot 21 - 1 = 41$ und $6 + 11 + 21 + 41 = 79$.

Aufgabe 210613:
Die drei Schülerinnen Bianka, Heike und Kerstin ernteten im Schulgarten Weißkohl, insgesamt 128 Kohlköpfe. Dabei hat Bianka genau 8 Kohlköpfe mehr als Heike geerntet, und Kerstin hat genau 5 Kohlköpfe weniger als Bianka geerntet.
Wie viel Kohlköpfe hat jedes der drei Mädchen insgesamt geerntet?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Hätte Heike 8 Kohlköpfe mehr und Kerstin 5 Kohlköpfe mehr geerntet, so wären es wegen $128+8+5 = 141$ insgesamt 141 Kohlköpfe gewesen. Andererseits hätten dann alle drei Mädchen gleich viele Kohlköpfe geerntet, nämlich jede so viele wie Bianka.
Wegen $141 : 3 = 47$ hat also Bianka 47 Kohlköpfe geerntet, wegen 47 - 8 = 39 hat Heike 39 Kohlköpfe geerntet, wegen 47 - 5 = 42 hat Kerstin 42 Kohlköpfe geerntet.

Aufgabe 230612:
Eine Brigade kaufte für ihre Patenklasse drei Bücher und zwei Bälle. Eine andere Brigade kaufte drei Bücher und vier Bälle. Alle Bücher kosteten gleich viel. Alle Bälle kosteten ebenfalls gleich viel.
Die erste Brigade bezahlte 15 Mark, die zweite Brigade bezahlte 24 Mark.
Wie viel Mark kostete ein Buch? Wie viel Mark kostete ein Ball?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die zweite Brigade kaufte genau zwei Bälle mehr und bezahlte (wegen 24 - 15 = 9) genau 9 Mark mehr als die erste Brigade. Folglich kostet ein Ball (wegen $9 : 2 = 4,50$) genau 4,50 Mark.
Also zahlte die erste Brigade genau 9 Mark für die Bälle. Wegen 15 - 9 = 6 zahlte sie für die drei Bücher genau 6 Mark, also kostete ein Buch genau 2 Mark.

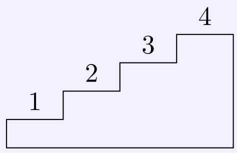
Aufgabe 270614:
Kerstin zerschneidet ein rechteckiges Stück Papier so, dass der Schnitt vom Mittelpunkt einer Rechteckseite zum Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite verläuft. Es entstehen zwei kleinere Rechtecke; Kerstin legt sie genau übereinander, so dass nur noch ein kleineres Rechteck zu sehen ist, das aus zwei Schichten besteht.
Kerstin zerschneidet dieses aus zwei Schichten bestehende Rechteck in gleicher Weise und legt wieder die entstandenen rechteckigen Papierstücke genau übereinander. Entsprechend wird fortgesetzt: übereinanderliegende Rechtecke werden zerschnitten, die entstandenen Papierstücke werden übereinandergelegt.
(Natürlich geht das nicht beliebig oft; denn der Papierstapel, der zerschnitten werden soll, wird immer dicker.)

(1) Nenne die Anzahl der Papierstücke, die nach dem
a) zweiten, b) dritten, c) vierten Zerschneiden entstanden sind!

(2) Angenommen, das Zerschneiden wäre beliebig oft möglich. Warum könnten dann trotzdem niemals nach einen Schnitt genau 160 Papierstücke entstehen?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(1) Die Anzahl ist a) 4, b) 8, c) 16.
(2) Als weitere Anzahlen nach dem fünften, sechsten, ... Schnitt usw. treten auf: 32, 64, 128, 256, ... und dann noch größere Anzahlen (nämlich jeweils das Doppelte der vorangehenden Anzahl). Daher kommt unter den auftretenden Anzahlen die Zahl 160 nicht vor.

Aufgabe 280614:
Die Treppe in der Abbildung besteht aus vier Stufen. Um diese vierstufige Treppe hinaufzugehen, darf man jeweils mit einem Schritt entweder genau eine oder genau zwei Stufen nach oben steigen. (Eine hiernach mögliche Schrittfolge lautet z. B. 1, 3, 4.)



a) Gib für diese Treppe alle möglichen Schrittfolgen an! Wie viel sind es insgesamt?
b) Gib für eine dreistufige Treppe alle möglichen Schrittfolgen an, ebenso für eine zweistufige Treppe und für eine einstufige Treppe!
c) Jemand behauptet: „Man kann die Anzahl aller möglichen Schrittfolgen für eine vierstufige Treppe durch eine einfache Rechnung finden, wenn man die Anzahl aller möglichen Schrittfolgen für eine dreistufige Treppe und die Anzahl aller möglichen Schrittfolgen für eine zweistufige Treppe kennt.“
Gib eine solche einfache Rechnung an! Schreibe sie in Form einer Gleichung!
d) Schreibe entsprechend eine Gleichung, mit der sich die Anzahl aller möglichen Schrittfolgen für eine dreistufige Treppe aus den entsprechenden Anzahlen für eine zweistufige und für eine einstufige berechnen lässt!
e) Wie kommt es, dass die in c) und d) gefundenen Beziehungen gelten?
f) Gib die Anzahl aller möglichen Schrittfolgen für eine fünfstufige und für eine sechsstufige Treppe an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Alle möglichen Schrittfolgen für die vierstufige Treppe sind:

$$1,2,3,4; \quad 1,2,4; \quad 1,3,4; \quad 2,3,4; \quad 2,4$$

b) Alle möglichen Schrittfolgen für eine dreistufige Treppe sind:

$$1,2,3; \quad 1,3; \quad 2,3$$

Alle möglichen Schrittfolgen für eine zweistufige Treppe sind: $1, 2; 2$, Für eine einstufige Treppe gibt es genau die Schrittfolge 1.
c) Die Anzahl der Schrittfolgen bei einer vierstufigen Treppe ist gleich der Summe der Anzahlen der Schrittfolgen bei der dreistufigen und der zweistufigen Treppe: 5 = 3 + 2.

d) Die Anzahl der Schrittfolgen bei einer dreistufigen Treppe ist gleich der Summe der Anzahlen der Schrittfolgen bei der zweistufigen und der einstufigen Treppe: 3 = 2 + 1.

e) Um in der angegebenen Weise die vierstufige Treppe hinaufzugehen, kann man entweder mit dem ersten Schritt nur eine Stufe steigen und hat dann noch drei Stufen vor sich, oder man kann mit dem ersten Schritt zwei Stufen nehmen und hat dann nur noch zwei Stufen vor sich.

Im ersten Fall ist die Anzahl der möglichen Fortsetzungen gleich der Anzahl der Schrittfolgen bei einer dreistufigen Treppe, und im zweiten Fall ist sie gleich der Anzahl der Schrittfolgen bei einer zweistufigen Treppe. Folglich ist die Anzahl aller möglichen Schrittfolgen bei der vierstufigen Treppe gleich der Summe der Anzahlen möglicher Schrittfolgen bei der dreistufigen und der zweistufigen Treppe.

f) Entsprechend folgt: Die Gleichung 8 = 5 + 3 führt zur Anzahl 8 der Schrittfolgen bei einer fünfstufigen Treppe; die Gleichung 13 = 8 + 5 führt zur Anzahl 13 der Schrittfolgen bei einer sechsstufigen Treppe.

Aufgabe 300613:
Lina kauft 7 Bleistifte und 8 Hefte ein und stellt dabei fest, dass 7 Bleistifte teurer als 8 Hefte sind.
Was ist teurer: 10 Bleistifte und 2 Hefte oder 11 Hefte und 2 Bleistifte?
Begründe deine Antwort!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Antwort: 10 Bleistifte und 2 Hefte sind teurer als 11 Hefte und 2 Bleistifte.

Begründung: Ist b der Preis für einen Bleistift und h der Preis für ein Heft, so gilt nach Linas Feststellung $7b > 8h$. (1) Daraus folgt erst recht $7b > 7h$, (2) also $b > h$. (3)

Aus (1) und (3) ergibt sich $8b > 9h$. (4)
Vergrößert man nun jeweils sowohl $8b$ als auch $9h$ um $2b + 2h$, so folgt $10b + 2h > 2b + 11h$, wie in der Antwort angegeben.

Aufgabe 310613:
Elke, Regina, Gerd und Joachim vergleichen ihre Briefmarkensammlungen. Sie bemerken:

(1) Joachim hat mehr Briefmarken als Gerd.
(2) Elke und Regina haben zusammen genau so viele Briefmarken, wie Joachim und Gerd zusammen haben.
(3) Elke und Joachim haben zusammen weniger Briefmarken als Regina und Gerd zusammen haben.

Stelle fest, ob diese Angaben nur durch eine Reihenfolge für die Anzahlen von Elkes, Reginas, Gerds und Joachims Briefmarken erfüllt werden können!
Wenn das der Fall ist, ermittle diese Reihenfolge, nach fallenden Anzahlen geordnet!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Bezeichnen E, R, G, J die Anzahlen der Briefmarken von Elke, Regina, Gerd bzw. Joachim, so folgt aus den Angaben

$$J > G, \quad (1) \qquad E + R = J + G, \quad (2) \qquad E + J < R + G \quad (3)$$

Vermehrt man von den beiden Zahlen $E+J$ und $R+G$ in (3) sowohl die kleinere als auch die größere um die in (2) auf beiden Seiten genannte Zahl, so folgt $2E+R+J<R+J+2G$.
Dies ist aber nur möglich, wenn $E<G$ (4) gilt. Hiernach kann die Gleichung (2) nur gelten, wenn für die anderen darin auftretenden Summanden $R>J$ (5) gilt. Mit (5), (1), (4) ist gezeigt, dass die Angaben nur durch die Reihenfolge $R>J>G>E$ erfüllt werden können.

II Runden 2 & 3

Aufgabe 040621:
Ein Rohr von 10 m Länge soll senkrecht zur Achse so zerschnitten werden, dass der eine Teil fünfmal so lang wie der andere ist.
Wie lang werden die Teile?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Ansatz: $x+5x=10$ ergibt $8\frac{1}{3}$ m und $1\frac{2}{3}$ m.

Aufgabe 040623:
Ein rechteckiger Schulgarten soll eingezäunt werden. Auf jeder der kürzeren Seiten, die jeweils je 40 m lang sind, stehen 21 Zementsäulen, auf den längeren jeweils 15 mehr. Der Abstand zwischen je zwei benachbarten Säulen ist gleich. Zwischen zwei dieser Säulen wird ein Tor eingebaut.

Wie hoch sind die Kosten, wenn 1 m Zaun 9,50 MDN, 1 Säule 11,00 MDN und das Tor 64,00 MDN kosten?
Die Dicke der Säulen wird dabei nicht berücksichtigt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
218 m Zaun kosten 2071 MDN, 1 Tor kostet 64 MDN und 110 Zementsäulen kosten 1210 MDN. In der Summe sind dies 3345 MDN.

Aufgabe 050621:
In einer Möbelfabrik wurde die Produktion von Tischen monatlich um 10 Tische gesteigert. Die Jahresproduktion betrug 1920 Tische.
Wie viel Tische wurden im Juni und wie viel im Dezember hergestellt?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Bezeichnet man die Anzahl der im Januar produzierten Tische mit x, so kann man folgende Aufstellung anfertigen:

Monat	Anzahl der produzierten Tische
Januar	x
Februar	$x+10$
März	$x+20$
April	$x+30$
...	
Dezember	$x+110$
	$12x+660$

Wäre die Produktion nicht gesteigert worden, d. h., wäre in jedem Monat die gleiche Anzahl wie im Januar produziert werden, so hätte die Anzahl der im ganzen Jahr produzierten Tische $1960-660=1260$ betragen.
Die Anzahl der im Januar angefertigten Tische beträgt also $1260:12=105$ und daher die der im Juni hergestellten Tische $105+50=155$ und die der im Dezember fabrizierten Tische $105+110=215$.

Aufgabe 060621:
Eine Strecke von 20 m wird in drei Teilstrecken geteilt. Die erste Teilstrecke ist doppelt so lang wie die zweite, und die Länge der dritten Teilstrecke beträgt das Dreifache der Länge der ersten Teilstrecke. Berechne die Längen der einzelnen Teilstrecken!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Bezeichnet man die Länge der zweiten Teilstrecke mit a, dann hat die erste Teilstrecke die Länge $2a$ und die dritte Teilstrecke die Länge $6a$. Die Länge der Gesamtstrecke beträgt also

$$a + 2a + 6a = 9a$$

Das sind laut Aufgabe 20 m. Für die Länge der zweiten Teilstrecke gilt daher $20 : 9 = \frac{20}{9}$, für die Länge der ersten Teilstrecke $\frac{40}{9}$ und für die Länge der dritten Teilstrecke $\frac{40}{3}$.
Die Längen der einzelnen Teilstrecken sind also $2\frac{2}{9}$ m, $4\frac{4}{9}$ m und $13\frac{1}{3}$ m.

Aufgabe 080622:
Während der Sommerferien besuchte Monika die Hauptstadt der UdSSR. Für ihre Mathematikarbeitsgemeinschaft brachte sie unter anderem folgende Aufgabe mit:

Im „Gorki"-Ring der Moskauer Untergrundbahn befinden sich vier Rolltreppen von unterschiedlicher Länge.
Die Gesamtlänge der beiden Rolltreppen mittlerer Länge beträgt 136 m, wobei die Länge der einen um 8 m größer ist als die der anderen. Die Länge der längsten Rolltreppe beträgt 3 10 und die der kürzesten 3 14 von der Gesamtlänge aller vier Rolltreppen.
Berechne die Länge jeder einzelnen Rolltreppe!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es sei a die Maßzahl der längsten, b die der zweitlängsten, c die der drittlängsten und d die der kürzesten Rolltreppe sowie g die Maßzahl der Gesamtlänge aller Rolltreppen.
Dann gilt: $b + c = 136$ und $b = c + 8$. Daraus folgt: $b = 72$ und $c = 64$.
Für die Gesamtlänge der längsten und der kürzesten Rolltreppe gilt:

$$a + d = \frac{3}{10}g + \frac{3}{14}g = \frac{36}{70}g$$

dann ergibt sich:

$$136 = b + c = g - (a + d) = \frac{34}{70}g$$

Daraus folgt: $\frac{1}{70}g = 4$ und demnach $\frac{3}{10}g = 84$ und $\frac{3}{14}g = 60$.
Die Längen der Rolltreppen betragen 84 m, 72 m, 64 m und 60 m.

In der Tat ergibt sich als Probe $72 + 64 = 136$, $72 = 64 + 8$, $84 = \frac{3}{10}(84 + 72 + 64 + 60)$ und $60 = \frac{3}{14}(84 + 72 + 64 + 60)$.

Aufgabe 090621:
Klaus nahm als Mitglied der Sektion Radsport einer Betriebssportgemeinschaft an einem Bahnrennen teil. Nach dem Rennen wurde Klaus von seinem Bruder Reiner nach dem Ausgang des Rennens gefragt. Klaus sagte:

„Als ich den Zielstrich überfuhr, war kein Fahrer neben mir; genau ein Drittel der beteiligten Fahrer hatte das Ziel schon erreicht, und genau die Hälfte aller Teilnehmer lag noch hinter mir."

Gib an, welchen Platz Klaus in diesem Rennen belegte und wie viel Fahrer insgesamt an dem Rennen teilnahmen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(I) Nach Aufgabenstellung waren (wegen $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$) alle Fahrer außer Klaus so viel, wie $\frac{5}{6}$ aller teilnehmenden Fahrer. Klaus stellte daher $\frac{1}{5}$ aller Teilnehmer dar.
Das ist nur möglich, wenn die Teilnehmerzahl 6 betrug.

(II) Daher erreichten wegen $\frac{1}{3}\cdot 6=2$ genau 2 der Teilnehmer vor Klaus das Ziel, so dass Klaus den 3. Platz belegte.

Aufgabe 110623:
Von dem berühmten Mathematiker Leonhard Euler (1707 bis 1783) stammt folgende Aufgabe:

Zerlege die Zahl 25 so in zwei Summanden, dass der größere Summand 49 mal so groß ist wie der kleinere Summand.

Hinweis: Die Summanden brauchen nicht natürliche Zahlen zu sein.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Soll der größere Summand das 49-fache des kleineren Summanden betragen, so muss die Summe das 50-fache des kleineren Summanden sein. Diesen erhält man daher, wenn man die Summe durch 50 dividiert; er lautet somit $25:50=\frac{1}{2}$, und hiernach muss der größere Summand $49\cdot\frac{1}{2}=\frac{49}{2}$ sein.

In der Tat beträgt die Summe von diesen beiden Summanden (von denen der größere 49 mal so groß ist wie der kleinere) $\frac{1}{2}+\frac{49}{2}=25$.

Aufgabe 110624:
Wenn man ein Drittel von Rainers Spargeld zu einem Fünftel dieses Spargeldes addiert, dann ist die Summe genau 7 Mark mehr als die Hälfte seines Spargeldes.
Wie viel Mark hat Rainer hiernach insgesamt gespart?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Laut Aufgabe besitzt Rainer Spargeld. Dessen Betrag sei x Mark. Dann gilt

$$\frac{x}{3}+\frac{x}{5}=\frac{x}{2}+7$$

Hieraus folgt nach Multiplikation mit 30 weiter $10x+6x=15x+210$ und daraus $x=210$.
Also hat Rainer insgesamt 210 Mark gespart.

Aufgabe 170623:
In der Dreherei eines Betriebes dreht man Einzelteile aus Bleirohlingen. Jeder Bleirohling ergibt ein Einzelteil.
Die Abfallspäne, die man bei der Anfertigung von je 6 Einzelteilen erhält, kann man schmelzen und daraus noch einen Bleirohling anfertigen. (Jede kleinere Menge von Abfallspänen ist hierfür zu wenig.)

Welches ist die größte Anzahl von Einzelteilen, die man hiernach insgesamt aus 36 Rohlingen anfertigen kann?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Aus 36 Rohlingen ergeben sich zunächst 36 Einzelteile; die Abfallspäne von je 6 Rohlingen ergeben dann

noch einen Rohling, d. h. aus den Abfallspänen von 36 Rohlingen kann man 6 neue Rohlinge anfertigen.

Aus ihnen lassen sich noch einmal 6 Einzelteile herstellen. Die dabei anfallenden Späne ergeben einen weiteren Rohling. Fertigt man aus ihm wieder ein Einzelteil an, so fallen zwar wieder Späne an, diese lassen sich aber nicht mehr (nach Einschmelzen) zur Herstellung eines weiteren Rohlings verwenden.

Also beträgt die gesuchte Anzahl von Einzelteilen $36 + 6 + 1 = 43$.

Aufgabe 180623:
In einer Verkaufsstelle wird ein Artikel in drei verschiedenen Ausführungen angeboten, wobei die Ausführungen unterschiedlich im Preis sind.
Beate kauft von jeder Ausführung dieses Artikels ein Stück und bezahlt insgesamt 10,50 M. Hätte sie drei Stück von der billigsten Ausführung gekauft, dann hätte sie 0,75 M gespart.
Hätte sie dagegen drei Stück von der teuersten Ausführung gekauft, dann hätte sie 0,75 M mehr bezahlen müssen.
Wie viel kostet jede der drei Ausführungen dieses Artikels?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wegen 1050 - 75 = 975 und 975 : 3 = 325 kostet die billigste Ausführung des Artikels 3,25 M.
Wegen 1050 + 75 = 1125 und 1125 : 3 = 375 kostet die teuerste Ausführung des Artikels 3,75 M.
Wegen 1050 - 325 - 375 = 350 kostet die dritte Sorte 3,50 M.

Aufgabe 190622:
In einem Regal einer HO-Verkaufsstelle liegen sechs Geschenkartikel zum Preis von 15 M, 16 M, 18 M, 19 M, 20 M bzw. 31 M, von jeder Sorte genau ein Stück.

Ein Käufer kaufte genau zwei dieser Geschenke, ein anderer genau drei. Der zweite Käufer hatte doppelt soviel zu bezahlen wie der erste.
Ermittle aus diesen Angaben, welche der sechs Geschenke vom ersten und welche vom zweiten Käufer gekauft wurden!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Der Gesamtpreis aller sechs Geschenke beträgt 119 M. Da genau fünf Geschenke gekauft wurden, blieb genau eines zurück. War es das zu 15 M, 16 M, 18 M, 19 M, 20 M bzw. 31 M, so hatten beide Käufer zusammen 101 M, 103 M, 101 M, 100 M, 99 M bzw. 88 M gezahlt.

Zahlte der erste Käufer x Mark, so bezahlte der zweite $2x$ Mark. Die von beiden gezahlte Summe, $3x$ Mark, muss folglich durch 3 teilbar sein. Das trifft nur für den Betrag von 99 M zu.
Also wurde das Geschenk zu 20 M nicht gekauft; ferner ist $3x = 99$, der erste Käufer bezahlte 33 M.
Hätte er als eines seiner beiden Geschenke das zu 16 M, 19 M oder 31 M gekauft, so müsste das andere 17 M, 14 M bzw. 2 M gekostet haben; diese Preise kamen aber nicht vor.
Also hat der erste Käufer die Geschenke zu 15 M und 18 M gekauft, der zweite Käufer folglich die Geschenke zu 16 M, 19 M und 31 M.

Aufgabe 190623:
Zum Montieren eines Gerätes sind insgesamt 110 Stunden geplant. Die Montage wird in drei Abschnitten erfolgen.
Für den zweiten Abschnitt ist genau dreimal soviel Zeit vorgesehen wie für den ersten; der dritte Abschnitt soll genau halb so lange dauern wie der zweite.
Untersuche, welche Zeiten man hiernach für jeden einzelnen Abschnitt zu planen hat!
Überprüfe, ob diese Zeiten alle gestellten Forderungen erfüllen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn die Forderungen erfüllt sind und dabei der erste Abschnitt x Stunden dauert, so dauert der zweite $3x$ Stunden und der dritte $\frac{3}{2}x$ Stunden. Daraus folgt

$$x + 3x + 32x = 110 \qquad \to \qquad x = 20$$

Also können die Forderungen nur dadurch erfüllt werden, dass man für den ersten Abschnitt 20 Stunden und somit für den zweiten 60 Stunden und für den dritten 30 Stunden plant.
Diese Zeiten erfüllen die Forderungen; denn 60 Stunden sind dreimal so viel Zeit wie 20 Stunden, 30 Stunden dauern halb so lange wie 60 Stunden, und wegen $20 + 60 + 30 = 110$ ergibt sich die vorgesehene Gesamtzeit.

Aufgabe 200622:
Ein leeres quaderförmiges Wasserbecken ist 22 m lang, 6 m breit und 2 m tief. Beim Füllen des Beckens fließen in jeder Minute 900 l Wasser in das Becken.
Nach welcher Zeit ist das Becken bis zu einer Höhe von genau 1,50 m gefüllt?
Wir nehmen an, dass der Boden des Wasserbeckens genau waagerecht ist.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wegen $22 \cdot 6 \cdot 1{,}5 = 22 \cdot 9 = 198$ enthält das bis zur Höhe von 1,50 m gefüllte Becken 198 m^3 Wasser.
Da 1 m^3 = 1000 l sind, enthält das Becken also 198000 l Wasser. Wegen $198000 : 900 = 220$ ist es somit nach genau 220 Minuten bis zur angegebenen Höhe gefüllt.

Aufgabe 210623:
Im Laufe eines Jahres ist in einem Möbelwerk die Zahl der hergestellten Tische monatlich um 10 angewachsen. Im Laufe des ganzen Jahres wurden 1920 Tische hergestellt.
a) Wie viel Tische wurden im Monat Juni hergestellt ?
b) Wie viel Tische wurden im Monat Dezember hergestellt?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
In dem Betrieb wurden im Februar 10, im März 20, ..., im Juni 50, ..., im Dezember 110 Tische mehr hergestellt als im Monat Januar. Wegen

$$10 + 20 + 30 + 40 + 50 + 60 + 70 + 80 + 90 + 100 + 110 = 660$$

sind das insgesamt 660 Tische mehr, als wenn die Produktionssteigerung nicht erfolgt wäre, d. h. in allen 12 Monaten gleich viele Tische hergestellt worden wären, ebensoviele wie im Januar.
Wegen 1920 - 660 = 1260 und 1260 : 12 = 105 wurden im Januar somit 105 Tische produziert.

a) Aus 105 + 50 = 155 folgt, dass im Juni 155 Tische angefertigt wurden.
b) Wegen 105 + 110 = 215 wurden im Dezember 215 Tische hergestellt.

Aufgabe 220623:
Die Zahl 32 soll in eine Summe aus vier natürlichen Zahlen zerlegt werden, von denen folgende Eigenschaft gefordert wird.
Wenn man zum ersten Summanden 3 addiert, vom zweiten 3 subtrahiert, den dritten mit 3 multipliziert und den vierten durch 3 dividiert, dann sind die vier Ergebnisse, die man erhält, alle gleich groß.
Nenne vier derartige Summanden!
Überprüfe, dass sie alle Forderungen erfüllen! Beweise, dass die Forderungen durch keine anderen Summanden erfüllt werden können!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Geeignete Summanden sind 3, 9, 2 und 18 in dieser Reihenfolge; denn es gilt $3 + 9 + 2 + 18 = 32$ sowie

$3 + 3 = 9 - 3 = 2 \cdot 3 = 18 : 3 = 6$.

Wäre der erste Summand eine kleinere (bzw. eine größere) Zahl als 3, so ergäbe sich durch Addition von 3 eine kleinere (bzw. eine größere) Zahl als 6. Dann müsste der zweite Summand kleiner (bzw. größer) als 9, der dritte kleiner (bzw. größer) als 2 und der vierte kleiner (bzw. größer) als 18 sein. Hiernach wäre die Summe kleiner (bzw. größer) als 32, was der Forderung der Aufgabe widerspricht.

Also muss der erste Summand gleich 3 sein, woraus folgt, dass auch für die übrigen Summanden keine anderen Zahlen als die oben angegebenen den Forderungen der Aufgabe entsprechen können.

Aufgabe 240624:
Rita experimentiert mit einer Balkenwaage.
(Mit einer solchen Waage kann man feststellen, ob der Inhalt einer Waagschale soviel wiegt wie der Inhalt der anderen Waagschale oder welcher dieser beiden Inhalte mehr wiegt als der andere.)
Rita hat 17 Kugeln, 6 Würfel und 1 Pyramide. Sie stellt fest:

(1) Jede Kugel wiegt soviel wie jede der anderen Kugeln.
(2) Jeder Würfel wiegt soviel wie jeder der anderen Würfel.
(3) Die Pyramide und 5 Würfel wiegen zusammen soviel wie 14 Kugeln.
(4) Ein Würfel und 8 Kugeln wiegen zusammen soviel wie die Pyramide.

Rolf fragt Rita, nachdem sie diese Feststellungen erhalten hat:
„Wie viele Kugeln wiegen soviel wie die Pyramide?“
Beweise, dass man Rolfs Frage bereits eindeutig mit Hilfe der Feststellungen (1), (2), (3), (4) beantworten kann, ohne dass ein nochmaliges Wägen nötig ist! Wie lautet die Antwort?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Ist k, w bzw. p das Gewicht einer Kugel, eines Würfels bzw. der Pyramide, so folgt aus (1) und (2), dass jede Kugel das Gewicht k und jeder Würfel das Gewicht w hat. Aus (3) und (4) folgt ferner

$$p + 5w = 14k \tag{5}$$
$$w + 8k = p. \tag{6}$$

Wegen (6) besagt (5) $w + 8k + 5w = 14k$, also $6w = 6k$ und folglich $w = k$. Hiernach ergibt sich aus (6) $9k = p$.
Damit ist bewiesen, dass man Rolfs Frage eindeutig mit Hilfe der Feststellungen (1), (2), (3), (4) beantworten kann. Die Antwort lautet: 9 Kugeln wiegen soviel wie die Pyramide.

Aufgabe 280622:
Frau Müller und ihre Tochter Michaela, Frau Beyer und ihre Söhne Jan und Gerd sowie Frau Schulz mit ihren Kindern Steffi und Jens besuchen gemeinsam eine Veranstaltung. Frau Müller kauft die Eintrittskarten für alle und bezahlt 22 Mark.
Wie viel Geld müssen Frau Beyer und Frau Schulz der Frau Müller geben, um die Eintrittskarten für sich und ihre Kinder zu bezahlen, wenn für Michaela, Jan, Gerd, Steffi und Jens jeweils nur der halbe Eintrittspreis wie für einen Erwachsenen entrichtet werden musste?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Frau Müller kauft Eintrittskarten für 3 Erwachsene und 5 Kinder. Weil Kinder nur halbe Preise zahlen, zahlt Frau Müller (wegen $3 \cdot 2 = 6$ und $6 + 5 = 11$) soviel an Eintritt, wie für 11 Kinder zu zahlen wäre. Hieraus folgt wegen $22 : 11 = 2$, dass für jedes Kind 2 Mark zu entrichten sind.

Wegen $2 \cdot 2 = 4$ kostet der Eintritt für einen Erwachsenen 4 Mark. Frau Beyer hat somit (wegen $1 \cdot 4 + 2 \cdot 2 = 8$) an Frau Müller 8 Mark zu bezahlen, ebenso Frau Schulz.

Aufgabe 320624:
Ein rechteckiges Kinderzimmer ist 4 m und 40 cm lang sowie 3 m und 30 cm breit. Es hat genau eine Tür, diese ist 90 cm breit. Thomas will an die Wände dieses Zimmers eine neue Fußbodenleiste anbringen. Er berechnet durch Berücksichtigung der genannten Maßangaben die erforderliche Gesamtlänge an Leistenholz.
Das laufende Meter Leistenholz kostet 5 DM. Thomas kauft die von ihm berechnete Gesamtlänge und bezahlt mit einem Hundertmarkschein.
Wie viel Geld erhält er zurück?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Thomas berechnet unter Berücksichtigung der Länge a = 4,40 m, der Breite b = 3,30 m des Zimmers und der Türbreite t = 0,90 m die erforderliche Gesamtlänge $2a + 2b - t =$ 8,80 m + 6,60 m - 0,90 m = 14,50 m.
Hierfür sind $5 \cdot 14{,}50$ DM = 72,50 DM zu zahlen. Also erhält Thomas 100 DM - 72,50 DM = 27,50 DM zurück.

Aufgabe 340623:
Nach folgenden Regeln lässt sich ein „Zahlenzug“ bilden:

- Im ersten „Waggon“ steht eine natürliche Zahl größer als 1.
- Steht in einem „Waggon“ eine gerade Zahl, so steht im nächsten „Waggon“ die halb so große Zahl.
- Steht in einem „Waggon“ eine ungerade Zahl größer als 1, so steht im nächsten „Waggon“ die um 1 kleinere Zahl.
- Steht in einem „Waggon“ die Zahl 1, so ist der „Zahlenzug“ mit diesem „Waggon“ beendet.

a) Nenne alle diejenigen „Zahlenzüge“, die aus genau 4 „Waggons“ bestehen!
Begründe auch, dass deine Aufzählung vollständig ist!
b) Welches ist die größtmögliche Zahl, die im ersten „Waggon“ eines „Zahlenzuges“ vorkommen kann, der aus genau 7 „Waggons“ besteht?
Nenne einen solchen „Zahlenzug“ mit dieser Anfangszahl und zeige, dass eine größere Anfangszahl nicht möglich ist!
c) Welches ist die kleinstmögliche Zahl, die im ersten „Waggon“ eines „Zahlenzuges“ vorkommen kann, der aus genau 7 „Waggons“ besteht? Nenne einen solchen „Zahlenzug“ mit dieser Anfangszahl und zeige, dass eine kleinere Anfangszahl nicht möglich ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Für jeden „Zahlenzug“ gilt:
Im letzten „Waggon“ steht eine 1. Steht in einem „Waggon“ eine ungerade Zahl, so steht im vorangehenden „Waggon“ das Doppelte. Steht aber in einem „Waggon“ eine gerade Zahl, so steht im vorangehenden „Waggon“ entweder die um 1 größere Zahl oder das Doppelte.

(a) Hieraus folgt der Reihe nach:
Im vorletzten „Waggon“ steht eine 2, davor entweder eine 3 oder eine 4; vor der 3 steht eine 6; vor der 4 steht entweder eine 5 oder eine 8.
Damit ist als vollständige Aufzählung der „Zahlenzüge“ aus genau 4 „Waggon“ begründet:
$(6, 3, 2, 1), (5, 4, 2, 1), (8, 4, 2, 1)$.

(b) Wählt man bei jeder geraden Zahl die Möglichkeit, als vorangehende Zahl das Doppelte zu nehmen, so erhält man als „Zahlenzug“ aus genau 7 „Waggon“: $(64, 32, 16, 8, 4, 2, 1)$.

Da das Verdoppeln einer Zahl, die größer als 1 ist, stets zu einem größeren Ergebnis führt als das Addieren von 1, ist eine größere Anfangszahl nicht möglich; damit ist als größtmögliche Anfangszahl 64 nachgewiesen.

(c) Im Anschluss an (a) folgt der Reihe nach:
Als fünftletzte Zahl sind genau möglich: Wenn sie ungerade ist, 7 und 9; wenn sie gerade ist, 10, 12, 16; als sechstletzte Zahl: ungerade 11, 13, 17; gerade 14, 18, 20, 24, 32.
Für die hierzu vorangehende Anfangszahl ist damit als kleinste ungerade Zahl 15, als kleinste gerade Zahl 22, also insgesamt 15 als kleinstmögliche Anfangszahl nachgewiesen. Der „Zahlenzug“ hierzu lautet $(15, 14, 7, 6, 3, 2, 1)$.

Aufgabe 340633:
Schon vor 5000 Jahren gab es in Ägypten eine weit entwickelte Kenntnis der Bruchrechnung. Dabei wurden Stammbrüche bevorzugt; das sind Brüche, deren Zähler 1 lautet und deren Nenner eine natürliche Zahl ist.

(a) Gib je eine Möglichkeit an, wie man die Brüche $\frac{2}{7}$ und $\frac{3}{13}$ als Summe von mindestens zwei unterschiedlichen Stammbrüchen darstellen kann!
Die Anzahl der Summanden ist nicht vorgeschrieben; eine Begründung wird nicht verlangt.
(b) Stelle den Bruch $\frac{1}{36}$ derart als Summe von mindestens zwei Stammbrüchen dar, dass einer der Summanden so groß wie möglich ist! Erkläre, warum kein größerer Summand möglich ist!
(c) Löse dieselbe Aufgabe für $\frac{1}{n}$ statt $\frac{1}{36}$, wo n eine beliebige natürliche Zahl größer als 1 ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Beispiele zu (a) sind etwa:

$$\frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28} \qquad ; \qquad \frac{3}{13} = \frac{1}{6} + \frac{1}{26} + \frac{1}{39}$$

(b),(c) Es gilt

$$\frac{1}{36} - \frac{1}{37} = \frac{37-36}{36 \cdot 37} = \frac{1}{3332}, \qquad \text{also} \qquad \frac{1}{36} = \frac{1}{37} + \frac{1}{3332}$$

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n \cdot (n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}, \qquad \text{also} \qquad \frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}$$

Dabei hat der Summand $\frac{1}{37}$ (bzw. der Summand $\frac{1}{n+1}$ die verlangte Eigenschaft, dass kein größerer Stammbruch Summand in einer solchen Darstellung sein kann.

Beweis:
Unter den natürlichen Zahlen ist 37 (bzw. $n+1$) die nächstgrößere zu 36 (bzw. zu n), d. h.: Es gibt unter den natürlichen Zahlen, die größer als 36 (bzw. als n) sind, keine kleinere als 37 (bzw. $n+1$).
Daraus folgt:
Es gibt unter den Stammbrüchen, die (in einer gesuchten Darstellung als Summand auftreten und daher) kleiner als $\frac{1}{36}$ (bzw. als $\frac{1}{n}$) sein müssen, keinen größeren als $\frac{1}{37}$ (bzw. $\frac{1}{n+1}$).

Aufgabe 340634:
Vera erzählt ihrer Freundin Ute, sie habe die Kantenlänge eines Quaders gemessen und dabei folgendes bemerkt:

(1) Eine der Kanten ist doppelt so lang wie eine andere der Kanten.
(2) Die Summe der Längen aller zwölf Kanten des Quaders beträgt 320 cm.
(3) Genau zwei der sechs Seitenflächen des Quaders sind Quadrate.

Ute meint, durch diese Angaben sei eindeutig bestimmt, welche Kantenlängen bei diesem Quader auftreten.

Untersuche, ob Utes Meinung wahr ist!
Wenn sie wahr ist, gib die Kantenlängen an; wenn sie nicht wahr ist, gib alle Möglichkeiten an, die es für die Kantenlängen eines Quaders gibt, auf den Veras Angaben zutreffen!

Hinweis: Bei der Angabe der Kantenlängen eines Quaders brauchst du natürlich nicht zwölf Kantenlängen anzugeben, sondern es genügen die Längen etwa der drei Kanten, die an der Ecke des Quaders zusammentreffen.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn a, b, c die Maßzahlen der in cm gemessenen Längen von drei an einer Ecke zusammentreffenden Kanten eines Quaders sind, auf den Veras Aussagen (1), (2), (3) zutreffen, so folgt:

Nach (3) sind genau zwei der a, b, c einander gleich; die Bezeichnungen lassen sich so wählen, dass $b = c$ gilt.
Nach (2) und weil jede der Kantenlängen a, b, c genau 4 mal vorkommt, folgt daher $a+2b = 320 : 4 = 80$. (4)
Aus (1) folgt ferner: Es gilt entweder $a = 2b$ (5) oder $b = 2a$. (6)

Gilt (4) und (5), so folgt $a + a = 80$, also $a = 40$, $b = 20$, $c = 20$. (7)
Gilt aber (4) und (6), so folgt $a + 4a = 80$, $5a = 80$, also $a = 16$, $b = 32$, $c = 32$. (8)

II. Die in (7) genannten Zahlen erfüllen (4) und (5), die in (8) genannten Zahlen erfüllen (4) und (6); außerdem gilt in beiden Fällen $b = c$.
Daher treffen in beiden Fällen Veras Aussagen (1), (2), (3) zu.
Mit I. und II. ist gezeigt: Die Kantenlängen eines Quaders sind durch Veras Angaben (1), (2), (3) nicht eindeutig bestimmt (d. h. Utes Meinung ist nicht wahr), sondern es gibt für die Kantenlängen eines Quaders, auf den Veras Aussagen zutreffen, genau die beiden Möglichkeiten, dass diese Kantenlängen entweder 40 cm, 20 cm, 20 cm oder 16 cm, 32 cm, 32 cm betragen.

II.II Bewegungsgleichungen, Verhältnisse

I Runde 1

Aufgabe V00601:
Vor dem Zusammenschluss landwirtschaftlicher Einzelbetriebe eines Dorfes zur LPG musste eine Traktorenbrigade wegen der auseinanderliegenden Felder häufig den Arbeitsplatz wechseln. Sie hatte dadurch am Tage (8 Std.) 2,3 Stunden Leerlauf je Traktor.
Nach dem Zusammenschluss konnte mit jedem Traktor ohne Unterbrechung auf dem Felde gearbeitet werden.

a) Wie viel Hektar können mit jedem Traktor je Tag zusätzlich gepflügt werden, wenn in einer Stunde 0,26 ha gepflügt werden?
b) Die Brigade arbeitet mit 5 Traktoren, ziehe die Schlussfolgerung!

Lösung von Steffen Polster:
a) Es werden mit einem Traktor in 2,3 Stunden: $2{,}3 \cdot 0{,}26 \approx 0{,}6$ ha mehr gepflügt.
b) Mit 5 Traktoren sind es somit ≈ 3 ha.

Aufgabe 010612:
Bei den im Oktober 1961 durchgeführten sowjetischen Raketenversuchen lagen bei einer Zielentfernung von etwa 12500 km alle Treffer innerhalb eines Kreises, dessen Radius kleiner als 1 km war.
Wie groß wäre der Radius des Trefferkreises bei einem Schüler, der mit gleicher Treffsicherheit auf ein 25 m entferntes Ziel einen Schlagball werfen würde?

Lösung von Steffen Polster:
Das Verhältnis des Radius des Trefferkreises und der Entfernung des Zieles entspricht der Treffsicherheit. D. h., nach der Aufgabenstellung soll das unbekannte Verhältnis x : 25 m den Verhältnis 1 km : 12500 km gleich sein.

$$x = 25 \text{ m} \cdot \frac{1 \text{ km}}{12500 \text{ km}} = 0{,}002 \text{ m} = 2 \text{ mm}$$

Der Trefferkreis des Schülers hätte einen Radius von 2 mm.

Aufgabe 010613:
Ein „Trabant“ fährt bei einem Kilometerzählerstand von 17880 km los. Nach der Rückkehr steht sein Kilometerzähler auf 18030 km. Der Benzinverbrauch betrug 10,5 Liter.

a) Wie viel Kilometer hat der „Trabant“ zurückgelegt?
b) Wie viel Liter Treibstoff muss der Fahrer tanken, wenn er eine Strecke von 350 km fahren will?

Lösung von Steffen Polster:
a) Die zurückgelegte Strecke ist gleich 18030 km - 17880 km = 150 km.

b) Für den Benzinverbrauch ergibt sich die Beziehung x : 10,5 l = 350 km : 150 km, d. h. x = 24,5 l.

Aufgabe 020611:
Inge fragt ihren Bruder Klaus, der mit seiner Klasse in den Herbstferien einer LPG bei der Kartoffelernte geholfen hat, nach dem Ergebnis der Erntehilfe.
Klaus antwortet: „Insgesamt wurden 15000 dt Kartoffeln geerntet. $\frac{1}{5}$ dieser Menge sammelten wir Schüler, $\frac{1}{3}$ dieser Menge wurde von einigen Genossenschaftsbauern mit der Kartoffelkombine geerntet, den Rest sammelten die anderen Genossenschaftsbauern.“
Wie viel Dezitonnen Kartoffeln ernteten
a) die Schüler?
b) die Bauern mit der Kartoffelkombine?
c) die übrigen Genossenschaftsbauern?

Lösung von Steffen Polster:
a) Die Schüler sammelten $\frac{1}{5} \cdot 15000$ dt = 3000 dt Kartofellen.
b) Die Bauern mit der Kartoffelkombine sammelten $\frac{1}{3} \cdot 15000$ dt = 5000 dt Kartoffeln.
c) Der Rest beträgt $15000 - 3000 - 5000 = 7000$ dt.

Aufgabe 020612:
Von den bisher festgesetzten 296 Minuten wurden im Rahmen des Produktionsaufgebotes von den Arbeitern des VEB Druck- und Prägemaschinen Berlin bei einem Arbeitsgang 96 Minuten eingespart. Das macht je hergestellte Maschine 2,40 DM aus.

a) Wie groß ist die Einsparung, wenn 60 Prägemaschinen hergestellt werden?
b) Infolge des Produktionsaufgebotes konnten sogar 83 statt 60 Maschinen in der gleichen Zeit hergestellt werden. Wie groß ist dabei die Einsparung?

Lösung von Steffen Polster:
a) Jede Maschine spart 2,40 DM, d. h. insgesamt werden $60 \cdot 2{,}40$ DM = 144 DM eingespart.
b) Werden 83 Maschinen verwendet, steigt die Einsparung auf $83 \cdot 2{,}40$ DM = 199,20 DM.

Aufgabe 030611:
Für kulturelle, soziale und gesundheitliche Zwecke gab unsere Regierung im Jahre 1958 rund 15 Milliarden DM aus. Im Jahre 1962 war die entsprechende Summe um ein Drittel höher als 1958.

a) Wie viel DM wurden in der DDR im Jahre 1962 für die genannten Zwecke ausgegeben?
b) Wie viel DM waren das in beiden Fällen je Kopf unserer Bevölkerung, wenn man jeweils eine Einwohnerzahl von rund 17 Millionen annimmt?

Lösung von Steffen Polster:
a) Ein Drittel mehr als 15 Milliarden DM sind $\frac{4}{3} \cdot 15$ Milliarden = 20 Milliarden DM, die 1962 für kulturelle, soziale und gesundheitliche Zwecke ausgegeben wurden.

b) Im Jahr 1958 waren es $\frac{15000000000}{17000000}$ DM $\approx$ 882 DM, d. h. rund 900 DM.
Im Jahr 1962 waren es dagegen 1176 DM, das sind rund 1200 DM.

Aufgabe 030612:
Eine Pioniergruppe fuhr um 16.00 Uhr mit einem Autobus aus der Stadt in ein Ferienlager.
Als sie neun Zehntel des Weges zurückgelegt hatten, mussten die Pioniere 2 km vor dem Lager aussteigen, weil der Bus den Waldweg, der zum Lager führte, nicht mehr befahren konnte. Für den Rest des Weges benötigten sie eine halbe Stunde und trafen um 17.00 Uhr im Lager ein.
Mit welcher Geschwindigkeit fuhr der Bus? (Wie viel Kilometer legte er in einer Stunde zurück?)

Lösung von Steffen Polster:
Da $\frac{1}{10}$ des Weges 2 km beträgt, wurde, wenn der Bus $\frac{9}{10}$ der Strecke in 30 Minuten fährt, eine Strecke von 18 km zurückgelegt. Das sind 36 km in einer Stunde.

Aufgabe 040611:
In 2 Minuten greifen und befördern 3 Bagger 108 m^3 Erde. Ein Erdarbeiter kann an einem achtstündigen Arbeitstag 5 m^3 Erde ausheben.
Verschaffe dir eine Vorstellung von der Leistungsfähigkeit eines solchen Baggers, indem du ausrechnest, wie viel Erdarbeiter erforderlich wären, um einen Bagger zu ersetzen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es wären 1728 Erdarbeiter erforderlich.

Aufgabe 050611:
Aus Leipzig und Dresden (Entfernung 119 km) fahren gleichzeitig zwei Radfahrer ab. Der Radfahrer aus Leipzig fährt nach Dresden, der aus Dresden nach Leipzig. Der eine von ihnen legt 15 km, der andere 20 km in der Stunde zurück.

a) Wie groß ist die Entfernung zwischen beiden Radfahrern nach $2\frac{1}{2}$ Stunden?
b) Wie weit sind sie von beiden Städten entfernt, wenn sie einander treffen?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Der eine Radfahrer hat nach $2\frac{1}{2}$ Stunden insgesamt $2\frac{1}{2} \cdot 20 = 50$ km, der andere in der gleichen Zeit $2\frac{1}{2} \cdot 15 = 37{,}5$ km zurückgelegt.

Nach $2\frac{1}{2}$ Stunden beträgt daher ihre Entfernung voneinander (in Kilometern) $119 \cdot (50 + 37{,}5) = 31{,}5$.

b) In $\frac{1}{5}$ Stunde, also in 12 min fährt der eine Radfahrer 3 km, der andere 4 km. Beide legen also in 12 min zusammen 7 km zurück. Daher treffen sie einander nach $\frac{119}{7} \cdot 12 = 17 \cdot 12$ min.
In dieser Zeit hat der eine Radfahrer $17 \cdot 3$ km, der andere $17 \cdot 4$ km zurückgelegt. Der Treffpunkt liegt also 51 km von der einen und 68 km von der anderen Stadt entfernt.

Aufgabe 090612:
In den Ferien war Klaus auf dem Lande. Aus seinen Beobachtungen ergab sich folgende Scherzaufgabe:

$$1\tfrac{1}{2} \text{ Hühner legen in } 1\tfrac{1}{2} \text{ Tagen } 1\tfrac{1}{2} \text{ Eier}$$

Ermittle die Anzahl aller Eier, die bei gleicher Legeleistung 7 Hühner in 6 Tagen legen würden!

Lösung von Steffen Polster:
Wenn $1\frac{1}{2}$ Hühner in $1\frac{1}{2}$ Tagen $1\frac{1}{2}$ Eier legen, so legen sie in 6 Tagen das Vierfache ($1\frac{1}{2} \cdot 4 = 6$), d. h. 6 Eier.
7 Hühner sind das $\frac{14}{3}$-fache von $1\frac{1}{2}$ Hühner, da $\frac{14}{3} \cdot 1\frac{1}{2} = 7$ ist. Damit legen die 7 Hühner in 6 Tagen $\frac{14}{3} \cdot 6 = 28$ Eier.

Aufgabe 140613:
Ein Radfahrer fuhr mit gleichbleibender Geschwindigkeit auf einer Straße von A nach B. Er startete in A um 6.00 Uhr und legte in jeder Stunde 12 km zurück. Ein zweiter Radfahrer, der denselben Weg von A nach B ebenfalls mit gleichbleibender Geschwindigkeit fuhr, startete am selben Tag um 7.00 Uhr in A und legte in jeder Stunde 15 km zurück. Er traf mit dem ersten Radfahrer zur gleichen Zeit in B ein.

a) Um wie viel Uhr holte der zweite Radfahrer den ersten ein?
b) Wie lang ist der Weg von A nach B?

Lösung von Steffen Polster:
Der erste Radfahrer benötigte für die Strecke t Stunden, der zweite $t - 1$ Stunden, da er eine Stunden später losfuhr. Die Strecken = Geschwindigkeit · Zeit sind für beide gleich, d. h. mit v in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$

$$t \cdot 12 = (t-1) \cdot 15 \quad \to \quad 12t = 15t - 15 \quad \to \quad 3t = 15 \quad \to \quad t = 5$$

Der erste Radfahrer für 5 Stunden, der zweite 4 Stunden, d. h., er holt ihn nach 4 Stunden ein.
Die Strecke ist damit $5 \cdot 12 = 4 \cdot 15 = 60$ km.

Aufgabe 160612:
Knut ist ein sehr trainierter Radfahrer. Bei einem Ausflug legte er auf seinem Fahrrad in der Minute durchschnittlich 320 m zurück.
Er fuhr um 7.00 Uhr mit seinem Rad ab und erreichte um 11.00 Uhr sein Ziel. Von 9.00 Uhr bis 9.20 Uhr hatte er gerastet, in der übrigen Zeit ist er ununterbrochen gefahren.
Wie lang (in km) ist die dabei von Knut insgesamt zurückgelegte Strecke?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Zeit von 7.00 Uhr bis 11.00 Uhr beträgt 4 Stunden, das sind 240 Minuten. Die Rastzeit beträgt 20 Minuten, die Fahrzeit also 220 Minuten.

Wegen $220 \cdot 320 = 70400$ ist die von Knut insgesamt zurückgelegte Strecke mithin 70400 m = 70,4 km lang.

Aufgabe 170611:
In der DDR wurden folgende Mengen von Stickstoffdüngemitteln (in t) produziert

1950	1960	1970	1974
231000	334000	395000	424000

Dabei wurden die Ergebnisse von Jahr zu Jahr gesteigert.
Berechne, um wie viel Tonnen die Stickstoffdüngemittelproduktion im Durchschnitt jährlich gesteigert wurde:
a) von 1951 bis 1960
b) von 1961 bis 1970
c) von 1971 bis 1974!

Lösung von Steffen Polster:
a) Von 1950 bis 1960 wurde das Ergebnis um 334000 t - 231000 t = 103000 t gesteigert, d. h. um $\frac{103000}{231000} \cdot 100\% = 44{,}59$ %.
Für 10 Jahre entspricht das einer jährlichen Steigerung von 4,46%.

b) Von 1960 bis 1970 wurde das Ergebnis um 395000 t - 334000 t = 61000 t gesteigert, d. h. um 18,26 % und jährlich um 1,83 %.

c) Von 1970 bis 1974 wurde das Ergebnis um 29000 t gesteigert, d. h. um 7,34 % und für 3 Jahre jährlichen um von 2,45 %.

Aufgabe 170612:
Von zwei Häfen A und B, die durch eine Schiffahrtsroute der Länge 240 km miteinander verbunden sind, legten gleichzeitig zwei Schiffe ab und fuhren auf dieser Route einander entgegen, jedes für sich mit gleichbleibender Geschwindigkeit.
Das eine entwickelte eine Geschwindigkeit von 18 km je Stunde. Nach fünfstündiger Fahrt waren die Schiffe einander noch nicht begegnet; jedoch betrug die Länge des zwischen ihnen liegenden Teils der Route nur noch 45 km.
Wie viel Kilometer legte das zweite Schiff durchschnittlich in jeder Stunde zurück?

Lösung von Steffen Polster:
Nach 5 Stunden ist das erste Schiff $5 \cdot 18 = 90$ km gefahren.
Da die Gesamtstrecke 240 km beträgt und das zweite Schiff nach 5 Stunden nur noch 45 km entfernt ist, muss es 105 km gefahren sein. Dies entspricht der Geschwindigkeit $\frac{105 \text{ km}}{5 \text{ h}} = 21 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Aufgabe 190611:
Von einem Busbahnhof fahren um 12.00 Uhr gleichzeitig vier Busse ab. Die Zeit, die jeweils bis zur nächsten Rückkehr und anschließenden erneuten Abfahrt vom gleichen Busbahnhof vergeht, beträgt für den ersten Bus $\frac{3}{4}$ h, für den zweiten Bus $\frac{1}{2}$ h, für den dritten Bus 36 Minuten und für den vierten Bus 1 Stunde.
Zu welcher Uhrzeit fahren hiernach erstmalig alle vier Busse wieder gleichzeitig von dem Busbahnhof ab?
Wie viele Fahrten hat jeder der vier Busse bis dahin durchgeführt?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Abfahrzeiten lauten
für den ersten Bus: 12.00, 12.45, 13.30, 14.15, 15.00, ...,
für den zweiten Bus: 12.00, 12.30, 13.00, 13.30, 14.00, 14.30, 15.00, ...,
für den dritten Bus: 12.00, 12.36, 13.12, 13.48, 14.24, 15.00, ...,
für den vierten Bus: 12.00, 13.00, 14.00, 15.00, ...,

Daraus ist zu sehen: Die vier Busse fahren erstmalig um 15.00 Uhr wieder gleichzeitig ab. Bis dahin hat der erste Bus 4 Fahrten, der zweite Bus 6 Fahrten, der dritte Bus 5 Fahrten, der vierte Bus 3 Fahrten, durchgeführt.

Aufgabe 200612:
Aus dem Wirtschaftsbuch eines Erholungsheimes war ersichtlich, dass man für 25 Urlauber, die 14 Tage lang versorgt wurden, insgesamt 21 kg Butter verbraucht hatte.
Berechne, wie viel kg Butter für 30 Personen, die 6 Tage lang versorgt werden sollen, insgesamt bereitgestellt werden müssen, wenn je Person und Tag eine gleichgroße Buttermenge wie im angegebenen Beispiel verbraucht werden soll!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Für 14 Tage verbrauchten 25 Urlauber 21000 g Butter.
Für 1 Tag verbrauchten 25 Urlauber wegen $21000 : 14 = 1500$ also 1500 g Butter.
Für 1 Tag verbraucht 1 Urlauber wegen $1500 : 25 = 60$ also 60 g Butter.
Für 1 Tag verbrauchen 30 Urlauber wegen $60 \cdot 30 = 1800$ also 1800 g Butter.
Für 6 Tage verbrauchen 30 Urlauber wegen $1800 \cdot 6 = 10800$ also 10800 g = 10,8 kg Butter.

Aufgabe 320614:
Ein Radfahrer fährt von Schnellhausen nach Sausedorf, wobei er täglich 36 Kilometer zurücklegt. Gleichzeitig fährt ihm ein anderer Radfahrer, der täglich 34 Kilometer zurücklegt, von Sausedorf aus entgegen. Die Entfernung zwischen Schnellhausen und Sausedorf beträgt 350 km.
In wie viel Tagen treffen sich die beiden Radfahrer? Führe auch eine Probe durch.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Entfernung zwischen den beiden Radfahrern betrug anfangs 350 Kilometer. Sie verringerte sich wegen $36\text{km} + 34\text{km} = 70\text{km}$ täglich um 70 Kilometer. Folglich treffen sich die beiden Radfahrer wegen $350\text{km} : 70\text{km} = 5$ in fünf Tagen.

Zur Probe kann man den von den Radfahrern in fünf Tagen zurückgelegten Weg berechnen:
Wegen $5 \cdot 36\text{km} = 180\text{km}$ liegt der Treffpunkt der beiden Radfahrer 180 Kilometer von Schnellhausen entfernt, und wegen $5 \cdot 34\text{km} = 170\text{km}$ beträgt seine Entfernung zu Sausedorf 170 km. Die beiden Wegstrecken ergeben zusammen die Entfernung Schnellhausen-Sausedorf: $180\text{km} + 170\text{km} = 350\text{km}$.

Aufgabe 340611:
Herr Eilig fuhr auf der Autobahn eine Strecke von 475 Kilometern. Er legte diese Strecke in 3 Stunden und 10 Minuten zurück und verbrauchte dabei 57 Liter Benzin.

a) Wie groß war seine durchschnittliche Geschwindigkeit?
b) Wie viel Benzin hatte er im Durchschnitt für je 100 km verbraucht?
c) Wäre er stattdessen mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von 120 km/h gefahren, so hätte er für je 100 km nur 8 Liter verbraucht.

Welche Strecke hätte er bei der Durchschnittsgeschwindigkeit 120 km/h mit dem gesparten Benzin noch fahren können?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Da Herr Eilig für 475 Kilometer 3 Stunden und 10 Minuten, d. h. 19 mal 10 Minuten brauchte, fuhr er in je 10 Minuten durchschnittlich $475 : 19 = 25$ Kilometer, in jeder Stunde also $6 \cdot 25 = 150$ Kilometer; d. h., seine durchschnittliche Geschwindigkeit betrug 150 km/h.

b) Da er für die $475 = 25 \cdot 19$ Kilometer $57 = 3 \cdot 19$ Liter Benzin brauchte, waren es für je 25 Kilometer durchschnittlich 3 Liter, also für je 100 Kilometer viermal so viel, d. h. 12 Liter.

c) Hätte er für je 100 Kilometer nur 8 Liter gebraucht, so hätte er in je 100 Kilometern noch 4 Liter übrig behalten. Da das die Hälfte von 8 Litern ist, hätte er zu der insgesamt gefahrenen Strecke von 475 Kilometern zusätzlich noch eine halb so lange Strecke fahren können.
Wegen $475 = 474 + 1$ und $474 : 2 = 237$ sind das 237 Kilometer und ein halber Kilometer (500 Meter).

II Runde 2

Aufgabe 010621:
Bei einem Probeflug auf der Strecke Moskau–Mirny (sowjetische Südpolarstation) überquerten zwei sowjetische Flugzeuge vom Typ „AN-10“ und „IL-18“ Europa, Asien, Australien, die Antarktis, den Indischen Ozean und den Stillen Ozean.
Die AN-10 legte die gewaltige Strecke von 25300 km in 48 h und 7 min, die IL-18 in 44 h und 36 min zurück.
Welche Strecke überflogen die beiden Flugzeuge durchschnittlich in 1 Stunde?

Lösung von Steffen Polster:
Die Durchschnittsgeschwindigkeit erhält man als Quotienten der Strecke und der Flugzeit. Es wird damit für die AN-10:

$$\frac{25300 \text{ km}}{48\frac{7}{60} \text{ h}} = 525{,}8\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

und für die IL-18:

$$\frac{25300 \text{ km}}{44\frac{36}{60} \text{ h}} = 567{,}3\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Die Maschinen flogen durchschnittlich rund 526 km bzw. 567 km in einer Stunde.

Aufgabe 010622:
Eine Expedition legte am ersten Tage $\frac{2}{5}$ des Weges, am zweiten Tage $\frac{1}{3}$ des Weges und am dritten Tag die restlichen 1000 km zurück.

a) Welche Strecken wurden an den beiden ersten Tagen zurückgelegt?
b) Wie groß war die Gesamtstrecke?

Lösung von Steffen Polster:
An Tag 1 und 2 wurden $\frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \frac{11}{15}$ des Weges zurückgelegt. Die 1000 km des dritten Tages sind somit $\frac{4}{15}$ des ganzen Weges. $\frac{1}{15}$ des Weges sind folglich 250 km.

a) Am ersten Tag wurden $6 \cdot 250$ km $= 1500$ km und am zweiten Tag $5 \cdot 250$ km $= 1250$ km zurückgelegt.
b) Die Gesamtstrecke ist 3750 km lang.

Aufgabe 020621:
Bei dem Gruppenflug der sowjetischen Kosmonauten Nikolajew und Popowitsch umkreisten die Raumschiffe Wostok III und Wostok IV in rund 88 Minuten einmal die Erde (rund 41 000 km).

a) Welche Strecke legte jedes Raumschiff in einer Stunde zurück?
b) Welche Strecke legte es in jeder Sekunde zurück?
Die Ergebnisse sind sinnvoll zu runden!

Lösung von Steffen Polster:
a) Die Strecke entspricht $\frac{66}{80}$ der Erdumkreisung, d. h. $\frac{66}{80} \cdot 41000$ km ≈ 28000 km.
b) 60 Minuten bestehen aus 3600 Sekunden, d. h., in einer Sekunde legt das Raumschiff $\frac{41000}{3600}$ km $\approx 7{,}8$ km zurück.

Aufgabe 020622:
Beim Werkunterricht benutzt Regine eine Tischbohrmaschine. Sie weiß, dass der Bohrer bei jeder Umdrehung $\frac{1}{4}$ mm tief in das Werkstück eindringt.
Sie soll ein Werkstück von 30 mm Dicke durchbohren. Die Bohrmaschine macht in einer Minute 240 Umdrehungen.
In welcher Zeit kann Regine eine Bohrung durchführen?

Lösung von Steffen Polster:
Für 30 mm Tiefe benötigt der Bohrer $\frac{30 \text{ mm}}{\frac{1}{4} \text{ mm}} = 120$ Umdrehungen und somit ein halbe Minute = 30 s.

Aufgabe 030621:
Schallwellen legen in der Luft in einer Sekunde eine Strecke von rund 340 m zurück, die Rundfunkwellen dagegen rund 300000 km.
Wer hört einen vor dem Mikrophon sprechenden Redner früher,

a) ein Zuhörer in der ersten Reihe im Saal, der 2 m vom Redner entfernt sitzt, oder
b) ein Rundfunkhörer, der die Sendung in einer Entfernung von 1000 km mit Kopfhörern abhört?
Begründe deine Antwort.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Da die Schallwellen für eine Strecke von 2 m rund $\frac{1}{170}$ Sekunde benötigen, die Rundfunkwellen aber für 1000 km nur $\frac{1}{300}$ Sekunde brauchen, hört der Rundfunkhörer den Redner etwas früher.

Aufgabe 070624:
Von den Teilnehmern einer Schule eines Landkreises an der 1. Stufe der Mathematikolympiade wurden genau $\frac{3}{40}$ zur 2. Stufe delegiert. Von diesen Schülern erhielten bei der 2. Stufe (Kreisolympiade) genau $\frac{2}{9}$ Preise oder Anerkennungsschreiben.

Einen ersten Preis in seiner Klassenstufe erhielt genau ein Schüler, genau ein weiterer Schüler erhielt in seiner Klassenstufe einen zweiten Preis, genau zwei weitere bekamen dritte Preise. Außerdem wurden genau vier anderen Schülern dieser Schule für besonders gute Lösungen einer Aufgabe Anerkennungsschreiben überreicht.

Gib die Anzahl aller Teilnehmer dieser Schule an der 1. Stufe der Mathematikolympiade an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Schüler mit Preisen oder Anerkennungsschreiben:

8 Schüler = $\frac{2}{9}$ der Teilnehmer an der 2. Stufe. Daraus folgt:
4 Schüler = $\frac{1}{9}$ der Teilnehmer an der 2. Stufe und
36 Schüler = $\frac{9}{9}$, (das sind alle Teilnehmer dieser Schule an der 2. Stufe)

Laut Aufgabe gilt weiterhin: 36 Schüler = $\frac{3}{40}$ der Teilnehmer an der 1. Stufe also
480 Schüler = $\frac{40}{40}$ (das sind alle Teilnehmer dieser Schule an der 1. Stufe). Genau 480 Schüler dieser Schule beteiligten sich an der 1. Stufe der Mathematikolympiade.

Aufgabe 080624:
Drei Freunde bereiten sich auf die „Kleine Friedensfahrt“ vor. Sie trainieren auf einer Rundstrecke. Ihr Start erfolgt zur gleichen Zeit und in gleicher Richtung an der Startlinie S. Manfred legte die erste Runde in genau 3 Minuten, Klaus in genau $3\frac{3}{4}$ Minuten und Helmut in genau 5 Minuten zurück.

a) Nach wie viel Minuten würden die drei Freunde erstmalig die Startlinie S wieder gleichzeitig erreichen, wenn wir annehmen, dass Manfred für alle weiteren Runden je Runde genau 3 Minuten, Klaus genau $3\frac{3}{4}$ Minuten und Helmut genau 5 Minuten brauchten?
b) Wie viel Runden hätte jeder von ihnen bis dahin zurückgelegt?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(a) Nach 15 Minuten würden die drei Freunde unter den Bedingungen der Aufgabe erstmalig wieder gleichzeitig die Startlinie S erreichen.

Beweis hierzu: Helmut brauchte für jede Runde genau 300 Sekunden, Klaus genau 225 Sekunden und Manfred genau 180 Sekunden. Das kgV von 225, 300 und 180 beträgt 900, und 900 Sekunden sind gleich 15 Minuten.

(b) In 15 Minuten würden Helmut genau 3, Klaus genau 4 und Manfred genau 5 Runden zurücklegen.

Aufgabe 090624:
Jürgen und seine jüngere Schwester Elke haben den gleichen Schulweg. Elke braucht vom Elternhaus bis zum Schultor genau 30 Minuten, Jürgen genau 20 Minuten. An einem Tage ging Elke genau 5 Minuten vor Jürgen aus dem Haus.

Nach wie viel Minuten holte Jürgen seine Schwester ein?
(Es sei angenommen, dass jeder von beiden mit gleichbleibender Geschwindigkeit ging.)

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Laut Aufgabe legt Elke in jeder Minute genau $\frac{1}{30}$ des Schulweges, Jürgen in jeder Minute genau $\frac{1}{20}$ des gleichen Weges zurück. Da Elke 5 Minuten vor Jürgen losgegangen ist, hat sie vor Jürgen in dieser Zeit einen Vorsprung von $\frac{5}{30} = \frac{10}{60}$ des Weges.

Wegen $\frac{1}{20} - \frac{1}{30} = \frac{1}{60}$ verringert sich dieser Vorsprung in jeder Minute um $\frac{1}{60}$ des Gesamtweges.
Die gesuchte Anzahl der Minuten bis zum Einholen kann also nur diejenige Zahl sein, mit der man $\frac{1}{60}$ multiplizieren muss, um $\frac{10}{60}$ zu erhalten. Das ist die Zahl 10.
Jürgen holt unter den angegebenen Umständen seine Schwester in genau 10 Minuten ein.

Aufgabe 100622:
Die sowjetischen Raumschiffe Sojus 6, Sojus 7 und Sojus 8 umkreisten im Gruppenflug die Erde. Dabei brauchte die Gruppe der drei Raumschiffe für jede Umkreisung durchschnittlich 88 Minuten und legte in dieser Zeit rund 41000 km zurück.
Berechne die Länge des Weges, den die Raumschiffgruppe während ihres Fluges durchschnittlich

a) in jeder Stunde,
b) in jeder Sekunde zurücklegte!

Bei der Aufgabe a) soll die Angabe in Kilometern erfolgen und auf volle Tausend Kilometer gerundet werden, bei Aufgabe b) soll die Angabe in Metern erfolgen und auf volle Hundert Meter gerundet werden.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Da die Raumschiffgruppe in 88 Minuten durchschnittlich 41000 km zurücklegte, legte sie in jeder Minute wegen $41000 : 88 \approx 466$ rund 466 km, in 60 Minuten also rund $60 \cdot 466$ km, das sind rund 28000 km zurück.

b) Da die Raumschiffgruppe in jeder Minute 466 km = 466000 m zurücklegte, legte sie in jeder Sekunde den 60. Teil davon, also wegen $466000 : 60 = 7767$ rund 7800 m zurück.

Aufgabe 120624:
Manfred berichtete im Zirkel Junger Mathematiker von einem Besuch des Rostocker Überseehafens:

„Ich habe dort insgesamt 21 Schiffe aus fünf verschiedenen Ländern gesehen. Die Anzahl der Schiffe aus der DDR war halb so groß wie die aller im Hafen liegenden ausländischen Schiffe. Diese kamen aus der Sowjetunion, der Bulgarischen Volksrepublik, aus Finnland sowie aus Indien.
Dabei war die Anzahl der sowjetischen Schiffe um zwei größer als die der bulgarischen, diese wieder um eins größer als die der finnischen, diese schließlich um zwei größer als die der indischen Schiffe.“

Ermittle die Anzahl der Schiffe aus der DDR, aus der Sowjetunion, der Bulgarischen Volksrepublik, aus Finnland und aus Indien, die Manfred in Rostock gesehen hat!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Anzahl der in der DDR beheimateten Schiffe beträgt laut Aufgabe $\frac{1}{3}$ der Gesamtzahl, also stammten 7 Schiffe aus der DDR. Die restlichen 14 Schiffe stammten aus den anderen vier Ländern.

Nun hat Manfred laut Aufgabe mindestens 1 indisches Schiff sowie infolgedessen mindestens 3 finnische, 4 bulgarische und 6 sowjetische Schiffe gesehen. Da das zusammen bereits 14 Schiffe sind, sind damit die gesuchten Anzahlen gefunden.

Aufgabe 140624:
Ein Radfahrer fuhr mit gleichbleibender Geschwindigkeit auf einer Straße von A nach B. Er startete in A um 6.00 Uhr und legte in jeder Stunde 14 km zurück. Ein zweiter Radfahrer fuhr auf derselben Straße mit gleichbleibender Geschwindigkeit von B nach A. Er startete am selben Tag um 8.00 Uhr in B und legte in jeder Stunde 21 km zurück.
Beide Radfahrer begegneten sich genau am Mittelpunkt der Strecke von A nach B.

Um wie viel Uhr begegneten sie sich? Wie lang ist die Strecke von A nach B?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Der erste Radfahrer war um 8.00 Uhr genau zwei Stunden gefahren und hatte dabei eine Strecke von 28 km zurückgelegt.
Von diesem Zeitpunkt an legte der zweite Radfahrer in jeder Stunde genau 7 km mehr zurück als der erste.
Da sie sich genau am Mittelpunkt der Strecke von A nach B trafen, geschah das wegen $28 : 7 = 4$ genau 4 Stunden nach Abfahrt des zweiten Radfahrers, also um 12.00 Uhr.
Bis zu diesem Zeitpunkt hatte wegen $6 \cdot 14 = 84$ bzw. $4 \cdot 21 = 84$ jeder von beiden genau 84 km zurückgelegt.

Die Länge der Strecke von A nach B beträgt wegen $2 \cdot 84 = 168$ mithin 168 km.

Aufgabe 150621:
Ein sowjetischer Hubschrauber vom Typ Mi-10 kann eine Nutzlast von 15000 kp befördern.
Bei einem Transport von Sperrgut mit drei Hubschraubern dieses Typs wurde der erste Hubschrauber zu $\frac{1}{3}$, der zweite zu $\frac{7}{8}$ und der dritte zu $\frac{3}{5}$ seiner Tragfähigkeit ausgelastet.
Ermittle das Gesamtgewicht des in diesem Transport von den drei Hubschraubern beförderten Sperrgutes!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Der erste Hubschrauber beförderte $\frac{1}{3}$ von 15000 kp, das sind 5000 kp. Der zweite beförderte damit 13125 kp; der dritte beförderte 9000 kp.
Das Sperrgut hatte somit wegen $5000 + 13125 + 9000 = 27125$ ein Gesamtgewicht von 27125 kp.

Aufgabe 160622:
Von zwei Häfen A und B, die durch eine Schiffahrtsroute der Länge 240 km miteinander verbunden sind, legten gleichzeitig zwei Schiffe ab und fuhren auf dieser Route einander entgegen, jedes für sich mit gleichbleibender Geschwindigkeit.
Das eine entwickelte eine Geschwindigkeit von 18 km je Stunde. Nach fünfstündiger Fahrt waren die Schiffe einander noch nicht begegnet; jedoch betrug die Länge des zwischen ihnen liegenden Teils der Route nur noch 45 km.
Wie viel Kilometer legte das zweite Schiff durchschnittlich in jeder Stunde zurück?

Lösung von Steffen Polster:
Wegen 68 + 76 + 64 + 52 = 260 besitzen die vier Räume eine Gesamtbodenfläche von 260 m^2.
Wegen 260 : 65 = 4 standen für jeden Pionier laut Aufgabe 4 m^2 Bodenfläche zur Verfügung. Daher ergab sich wegen 68 : 4 = 17, 76 : 4 = 19, 64 : 4 = 16 sowie 52 : 4 = 13 folgende Belegung:

Im ersten Raum: 17 Thälmann-Pioniere,
im zweiten Raum: 19 Thälmann-Pioniere,
im dritten Raum: 16 Thälmann-Pioniere,
im vierten Raum: 13 Thälmann-Pioniere,
zusammen also: 65 Thälmann-Pioniere.

Aufgabe 160624:
Ein Kraftfuttergemisch für Zuchteber ist aus Haferschrot, Weizenkleie, Gerstenschrot, Mineralstoffen und Wasser zusammengesetzt, und zwar ist die Hälfte des Gemischs Haferschrot, $\frac{1}{10}$ des Gemischs ist Weizenkleie, $\frac{1}{4}$ des Gemischs ist Gerstenschrot, $\frac{1}{100}$ des Gemischs sind Mineralstoffe, der Rest ist Wasser.
Berechne (in kg) den Anteil an Wasser, den 35 kg dieses Kraftfuttergemischs enthalten!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Laut Aufgabe enthalten 35 kg des in der Aufgabe genannten Gemischs wegen $\frac{1}{2} \cdot 35 = 17{,}5$ genau 17,5 kg Haferschrot,
wegen $\frac{1}{10} \cdot 35 = 3{,}5$ genau 3,5 kg Weizenkleie,
wegen $\frac{1}{4} \cdot 35 = 8{,}75$ genau 8,75 kg Gerstenschrot,
wegen $\frac{1}{100} \cdot 35 = 0{,}35$ genau 0,35 kg Mineralstoffe.

Das sind wegen 17,5 + 3,5 + 8,75 + 0,35 = 30,1 insgesamt 30,1 kg. Wegen 35 - 30,1 = 4,9 verbleiben mithin genau 4,9 kg Wasser als Wasseranteil dieses Kraftfuttergemischs.

Aufgabe 170621:
Eine Expedition von Wissenschaftlern legte am ersten Tag ein Drittel der geplanten Gesamtstrecke, am zweiten Tag 150 km und am dritten Tag noch einmal ein Viertel der Gesamtstrecke zurück und erreichte damit den Zielort.
Wie lang war die von der Expedition zurückgelegte Strecke?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Am ersten Tag legte man $\frac{1}{3}$ und am dritten Tag $\frac{1}{4}$ der Gesamtstrecke zurück. Damit wurde wegen $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$ an diesen beiden Tagen $\frac{7}{12}$ der gesamten Strecke bewältigt.

Die restlichen 150 km sind also genau $\frac{5}{12}$ der Gesamtstrecke. Wegen $150 : 5 = 30$ sind folglich 30 km genau $\frac{1}{12}$ der Gesamtstrecke; diese beträgt demnach $12 \cdot 30\text{km} = 360\text{km}$.

Aufgabe 180621:
a) Die Multispektralkamera MKF-6 von Sojus-22 fotografierte bei jeder Aufnahme ein rechteckiges Gebiet von 115 km Breite und 165 km Länge.
Berechne den Flächeninhalt eines solchen Gebietes!

b) Während der 83. Erdumkreisung am 20. September 1976 überflog Sojus 22 die DDR in Richtung von Eisenach nach Pasewalk. Auf einer Landkarte im Maßstab 1 : 700000 hat die dabei überflogene Strecke eine Länge von 65 cm.
Wie lang ist diese Strecke in Wirklichkeit? (Angabe in km) (Rechnung ohne Berücksichtigung der Erdkrümmung)

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Wegen $115 \cdot 165 = 18975$ beträgt der Flächeninhalt eines solchen Gebietes 18975 km^2.
b) Wegen $700000 \cdot 65 = 45500000$ ist die Strecke in Wirklichkeit 45500000 cm = 455 km lang.

Aufgabe 200621:
Ein Flugzeug, das mit konstanter (gleichbleibender) Geschwindigkeit von A nach B fliegt, war um 10.05 Uhr noch 2100 km, um 11.20 Uhr nur noch 600 km von B entfernt.
Um welche Zeit wird es in B eintreffen, wenn es mit der bisherigen Geschwindigkeit weiterfliegt?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Zeit von 10.05 Uhr bis 11.20 Uhr beträgt 1 h 15 min = 75 min.
Wegen $2100 - 600 = 1500$ hat das Flugzeug in dieser Zeit 1500 km zurückgelegt. Wegen $75 : 15 = 5$ benötigt es für je 100 km also 5 min, wegen $6 \cdot 5 = 30$ für die noch zurückzulegenden 600 km mithin 30 min. Daher trifft es 30 min nach 11.20 Uhr, d. h. um 11.50 Uhr in B ein.

Aufgabe 210621:
Ein Güterzug fährt von einer Station A (Kilometer 0) zu einer Station B (Kilometer 60). Beim Kilometer 15 hält der Zug 30 Minuten lang; in der übrigen Zeit fährt er mit der gleichbleibenden Geschwindigkeit von 45 Kilometern je Stunde. Um 9.30 Uhr fährt der Zug in A ab.

Lege eine Tabelle an, aus der zu ersehen ist, bei welchem Kilometer sich der Zug zu den Uhrzeiten alle 10 Minuten nach der Abfahrt (9.40 Uhr, 9.50 Uhr, 10.00 Uhr usw.) befindet!
Begründe diese Kilometerangaben!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Bei der Geschwindigkeit von 45 Kilometern je Stunde legt der Zug jeweils in 10 Minuten ein Sechstel der Strecke 45 km zurück, das sind (wegen $45 : 6 = 7\frac{1}{2}$) jeweils $7\frac{1}{2}$ km.
Berücksichtigt man noch die Wartezeit, so ergibt sich folgende Tabelle:

Uhrzeit	9.40	9.50	10.00	10.10	10.20	10.30	10.40	10.50	11.00	11.10
Kilometer	$7\frac{1}{2}$	15	15	15	15	$22\frac{1}{2}$	30	$37\frac{1}{2}$	45	$52\frac{1}{2}$

Aufgabe 230621:
Von einem Milchhof sollen an einem Tag 2200 Kästen mit je 25 Behältern zu $\frac{1}{4}$ Liter Milch, ferner 600 Kästen mit je 24 Flaschen zu $\frac{1}{2}$ Liter und 800 Kästen mit je 12 Beuteln zu 1 Liter Milch ausgeliefert werden.
Die hierfür insgesamt benötigte Milchmenge wurde in Tankwagen angeliefert, von denen jeder 9000 Liter Milch fasst.

a) Berechne, wie viel Liter Milch insgesamt an diesem Tag ausgeliefert werden sollen!
b) Berechne die kleinstmögliche Anzahl von Tankwagen, die zur Anlieferung der benötigten Milchmenge insgesamt ausreichend waren!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Wegen $2200 \cdot 25 : 4 = 13750$, $600 \cdot 24 : 2 = 7200$, $800 \cdot 12 \cdot 1 = 9600$ und $13750 + 7200 + 9600 = 30550$ sollen insgesamt 30550 Liter Milch ausgeliefert werden.
b) Wegen $30550 : 9000 = 3 + \frac{3550}{9000}$ waren für den Abtransport der 30550 Liter Milch vier Tankwagen ausreichend, aber nicht weniger. Also ist 4 die gesuchte kleinstmögliche Anzahl.

Aufgabe 240623:
Drei Motorradfahrer Rainer, Jürgen und Frank fahren zur gleichen Zeit in Karl-Marx-Stadt an der gleichen Stelle ab; sie fahren auf der gleichen Straße in Richtung Leipzig.
Rainer legt mit seiner Maschine in je 10 Minuten eine Weglänge von 9 Kilometern zurück, Jürgen fährt in je 10 Minuten 8 Kilometer, Frank nur 6 Kilometer.
Wie groß sind nach einer Stunde die Weglängen zwischen Rainer und Jürgen, zwischen Rainer und Frank und zwischen Jürgen und Frank, wenn bis zu diesem Zeitpunkt jeder Fahrer seine Geschwindigkeit beibehalten hat?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Da eine Stunde das Sechsfache von 10 Minuten ist, legt jeder Fahrer in einer Stunde das Sechsfache der von ihm in 10 Minuten gefahrenen Weglänge zurück. Daraus folgt:

Rainer fährt wegen $6 \cdot 9 = 54$ in einer Stunde 54 km,
Jürgen fährt wegen $6 \cdot 8 = 48$ in einer Stunde 48 km,
Frank fährt wegen $6 \cdot 6 = 36$ in einer Stunde 36 km.

Somit betragen nach einer Stunde wegen $54 - 48 = 6$ bzw. $54 - 36 = 18$ bzw. $48 - 36 = 12$ die Weglängen zwischen Rainer und Jürgen 6 km, zwischen Rainer und Frank 18 km, zwischen Jürgen und Frank 12 km.

Aufgabe 340621:
Ein Jogger benötigt im Dauerlauf für 100 m jeweils 20 Sekunden.
a) Welche Stecke schafft er, wenn er dieses Tempo 20 Minuten lang unverändert durchhält?
b) Welche Strecke schafft er, wenn sich in den insgesamt gelaufenen 20 Minuten auch Zeiten befinden, in denen er für 100 m jeweils 30 Sekunden benötigt, und zwar auf Teilstrecken, die zusammen 1600 m betragen?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(a) Da der Jogger in 20 Sekunden 100 m schafft und da 20 Minuten 60 mal so viel Zeit sind wie 20 Sekunden, schafft er in 20 Minuten $60 \cdot 100\text{m} = 6000\text{m}$.

(b) Während er die 1600 m mit der niedrigeren Geschwindigkeit läuft, braucht er 16 mal so viel Zeit wie für 100 m, also $16 \cdot 30$ Sekunden $= 480$ Sekunden $= 8$ Minuten.
Wegen $20 - 8 = 12$ bleiben 12 Minuten für die höhere Geschwindigkeit. Da eine Minute 3 mal so viel Zeit wie 20 Sekunden ist, schafft er in diesen 12 Minuten $3 \cdot 12 \cdot 100\text{m} = 3600\text{m}$.
Insgesamt legt er so $1600\text{m} + 3600\text{m} = 5200\text{m}$ zurück.

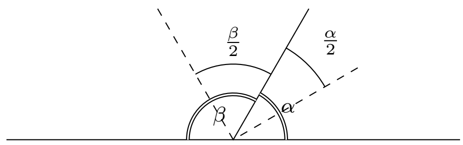
III Geometrie

III.I Dreiecke, Geraden, Winkel

I Runde 1

Aufgabe 010616:
Zeichne zwei Nebenwinkel und konstruiere ihre Winkelhalbierenden.
Was für einen Winkel bilden die Winkelhalbierenden? Begründe deine Antwort!

Lösung von Steffen Polster:



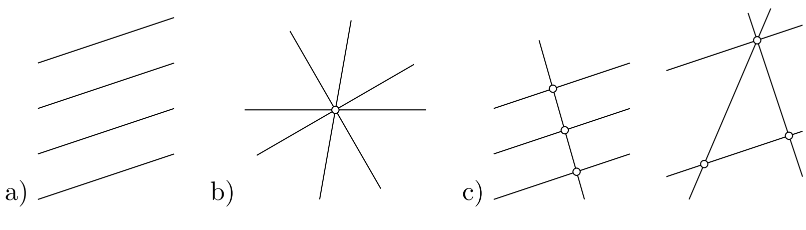
α und β seien die zwei Nebenwinkel mit $\alpha + \beta = 180°$.
Die Winkel zwischen den Winkelhalbierenden und einem gemeinsamen Schenkel sind somit $\frac{\alpha}{2}$ bzw. $\frac{\beta}{2}$.
Der Winkel zwischen den zwei Winkelhalbierenden ist damit

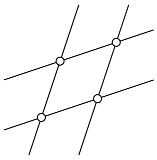
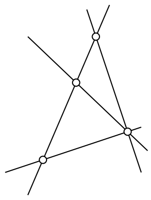
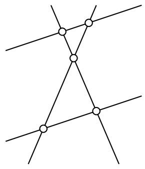
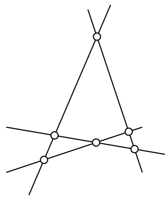
$$\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2} = 90°$$

d. h. sie bilden einen rechten Winkel.

Aufgabe 020615:
In einer Ebene sollen vier Geraden so gezeichnet werden, dass genau
a) kein Schnittpunkt,
b) 1 Schnittpunkt,
c) 3 Schnittpunkte (zwei Möglichkeiten),
d) 4 Schnittpunkte (zwei Möglichkeiten),
e) 5 Schnittpunkte,
f) 6 Schnittpunkte entstehen!
Wie müssen die Geraden zueinander liegen? Zeichne!

Lösung von Steffen Polster:
Die Geraden müssen für a) zueinander parallel sein, bei b) sich alle in einem Punkt schneiden.
Die Bedingung c) wird erfüllt, wenn entweder drei zueinander parallele Geraden von der vierten Geraden geschnitten werden oder wenn ein Dreieck von der vierten in einem Eckpunkt berührt wird.
Für die Aufgabe d) können je zwei paarweise parallele Geraden vorliegen oder ein Dreieck von der letzten Gerade in einem Eckpunkt und der gegenüberliegenden Seite geschnitten werden.
Für Bedingung e) müssen zwei Geraden parallel zueinander sein und bei f) dürfen keine der Geraden zueinander parallel sein.



d)   e)  f) 

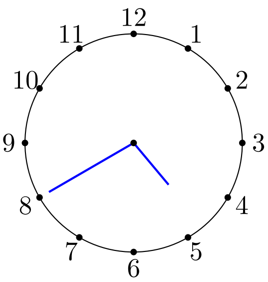
Aufgabe 040613:
Eine 6. Klasse stellte verschiedenartige Pappdreiecke her. Die Schüler wollten diese Dreiecke im Mathematischen Kabinett ihrer Schule in einem Schränkchen aufbewahren, das neun Fächer enthielt. Jeweils drei Fächer hatten die Schüler für die gleichseitigen Dreiecke, für die nur gleichschenkligen Dreiecke (d. h. für die nicht gleichseitigen) und für die ungleichschenkligen Dreiecke vorgesehen. Innerhalb dieser Gruppen sollten die Figuren nämlich noch in spitzwinklige, rechtwinklige und stumpfwinklige Dreiecke unterteilt werden.

Überprüfe, ob die Anzahl der Fächer richtig gewählt war!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Da es keine rechtwinkligen oder stumpfwinkligen Dreiecke gibt, die gleichseitig sind, bleiben 2 Fächer unbenutzt. Die Anzahl der Fächer hätte also 7 betragen müssen.

Aufgabe 080612:
Berechne die Größe des kleineren der beiden Winkel, die der Stunden- und der Minutenzeiger einer Uhr um 16 Uhr 40 Minuten miteinander bilden!

Lösung von Steffen Polster:



Der große Zeiger steht auf der 8. Der kleine Zeiger steht zwischen der 4 und 5.
In 60 Minuten bewegt sich der kleine Zeiger jeweils 30°. Zum Zeitpunkt 16:40 Uhr ist er somit $\frac{40}{60} \cdot 30° = 20°$ von der 4 in Richtung 5 gewandert, bzw. er steht noch 10° vor der 5.

Der Winkel zwischen der 5 und der 8 ist ein rechter Winkel, da zwischen zwei Stundenangaben jeweils 30° liegen.
Damit ist der Winkel zwischen dem großen und dem kleinen Zeiger $90° + 10° = 100°$.

Aufgabe 260613:
Die Verbindungsstraßen dreier Orte A, B, C bilden ein Dreieck. In der Mitte der Verbindungsstraße von B nach C liegt ein weiterer Ort D. Von A über B nach C beträgt die Entfernung 25 km, von B über C nach A dagegen 27 km und von C über A nach B schließlich 28 km.
Eine Pioniergruppe wandert auf den genannten Straßen auf kürzestem Wege vom Ort A zum Ort D.

a) Über welchen der beiden Orte B oder C läuft die Pioniergruppe?
Begründe deine Entscheidung!
b) Wie viel Zeit spart sie gegenüber dem längeren der beiden möglichen Wege von A nach D ein, wenn sie stündlich 4 km zurücklegt?
c) Wie lang ist der von ihr insgesamt zurückgelegte Weg?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Wegen $AB + BC = 25$ km und $AC + BC = 27$ km ist AC um 2 km länger als AB. Damit ist wegen

$CD = BD$ eine Wanderung von A über C nach D um 2 km länger als eine Wanderung von A über B nach D.
Weil die Pioniergruppe den kürzeren der beiden Wege wählte, läuft sie über den Ort B.

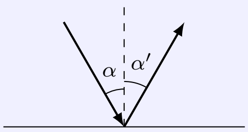
b) Nach den Überlegungen zu a) spart die Pioniergruppe auf dem kürzeren Wege von A nach D gegenüber dem längeren Wege 2 km ein. Wenn sie stündlich 4 km zurücklegt, benötigt sie für 2 km eine halbe Stunde. Sie spart damit bei einer Wanderung von A nach D auf dem kürzeren Wege gegenüber einer auf dem längeren Wege $\frac{1}{2}$ Stunde ein.

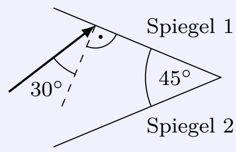
c) Würde man hintereinander von A über B nach C, dann von C über A nach B und dann von B über C nach A laufen, so würde man zweimal den Umfang des Dreiecks ABC durchlaufen und wegen 25 + 28 + 27 = 80 insgesamt 80 km zurücklegen.

Folglich ist wegen 80 : 2 = 40 der Umfang des Dreiecks ABC gleich 40 km. Subtrahiert man von ihm $AC + BC = 27$ km, so verbleibt $AB = 40$ km - 27 km = 13 km.
Subtrahiert man vom Umfang aber $AC + AB = 28$ km, so verbleibt $BC = 40$ km - 28 km = 12 km. Daher ist $BD = 12$ km : 2 = 6 km. Der gesuchte Weg beträgt folglich $AB + BD = 13$ km + 6 km = 19 km.

II Runde 2

Aufgabe 030622:

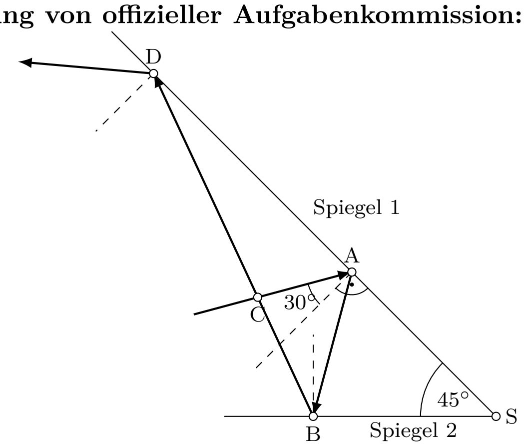
1) 

2) 

Fällt ein Lichtstrahl auf einen ebenen Spiegel, so wird er so reflektiert, dass der Einfallswinkel α und der Reflexionswinkel α' gleich groß sind (siehe Abbildung).

a) Konstruiere den Verlauf eines Lichtstrahls, der auf den in der Abbildung 2) dargestellten Winkelspiegel unter einem Einfallswinkel von 30° fällt!
b) Welchen Winkel bildet der auf den Spiegel 1 einfallende Strahl mit dem vom Spiegel 2 reflektierten?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



a) Die folgende Zeichnung stellt den Verlauf des Lichtstrahles dar. Eine weitere Reflexion tritt nicht auf, da der bei D reflektierte Lichtstrahl nicht mehr auf den Spiegel 2 trifft. Die kann man wie folgt beweisen:

Der Einfallswinkel bei A beträgt 30°, also auch der Reflexionswinkel, und damit ist der Winkel $\angle BAS = 60°$. Nun ergibt sich nach Innenwinkelsummensatz im Dreieck $\triangle BAS$ für den Winkel $\angle ABS$:

$$\angle ABS = 180° - 45° - 60° = 75°$$

Der Einfallswinkel ergibt sich als Ergänzung zu 90°, also ist der Winkel $\angle ABC = 2 \cdot 15° = 30°$ als Summe von Einfalls- und Reflexionswinkel. Im Dreieck $\triangle BSD$ gilt dann:

$$\angle BDS = 180° - \angle ASB - \angle ABS - \angle ABC = 180° - 45° - 75° - 30° = 30°$$

Damit beträgt auch $\beta = 30°$. Dieser Winkel ist kleiner als $\angle BSD$, weshalb der letzte Lichtstrahl den Spiegel 1 nicht mehr treffen wird.

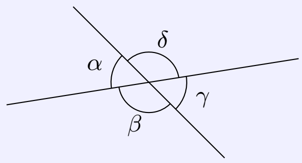
b) Gesucht ist Winkel $\angle BCA$. Nach dem Innenwinkelsummensatz im Dreieck $\triangle ABC$ ergibt sich:

$$\angle BCA = 180° - \angle BAC - \angle ABC = 180° - 2 \cdot 30° - 30° = 90°$$

Der gesuchte Winkel ist also ein rechter Winkel.

Aufgabe 040622:

Beim Schnitt zweier Geraden entstehen die Winkel $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ (Abbildung).
Wie groß sind diese Winkel, wenn die ersten drei von ihnen die Winkelsumme 234° haben?

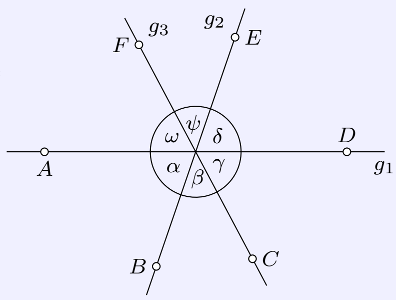


Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Über den Vollwinkel wird $\delta = 126°$. Mit den Beziehungen über Scheitel- und Nebenwinkel folgt dann $\alpha = 54°$, $\beta = 126°$, $\gamma = 54°$.

Aufgabe 050622:

Die drei Geraden g_1, g_2 und g_3 schneiden einander im Punkt M. Dabei entstehen Winkel mit den Maßen α, β, γ, δ, ψ und ω (siehe Abbildung).

Wie groß sind diese 6 Winkelmaße, wenn
(1) $\gamma + \delta + \psi + \omega = 252°$ und
(2) α dreimal so groß wie β ist?

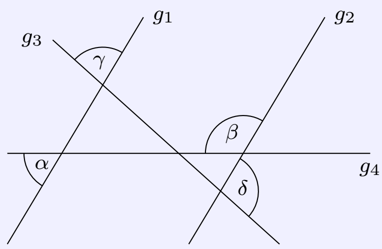


Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es gilt: $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \psi + \omega = 360°$
und wegen (1) $\alpha + \beta = 108°$ also wegen (2) $4\beta = 108°$, d. h. $\beta = 27°$ und daher wegen (2) $\alpha = 81°$.

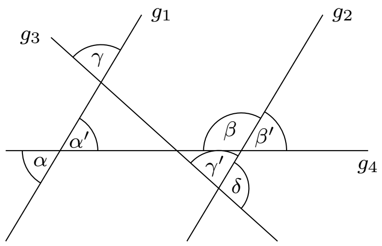
Weiter sind Scheitelwinkel, d. h. $\delta = \alpha = 81°$ und $\psi = \beta = 27°$. Nach der Nebenwinkelbeziehung wird $(\alpha + \beta) + \gamma = 180°$ und somit $\gamma = \omega = 72°$.

Aufgabe 070621:

Die Geraden g_1, g_2, g_3 und g_4 schneiden einander in der aus der Abbildung ersichtlichen Weise. Von den Größen α, β, γ und δ der dadurch entstehenden Winkel sei $\alpha = 50°$, $\beta = 130°$ und $\gamma = 70°$.
Ermittle δ!



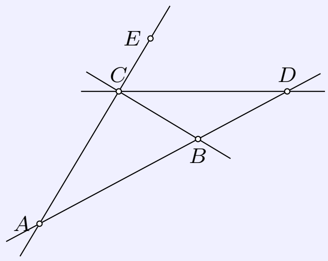
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Es gilt mit den Bezeichnungen in der Abbildung
$\alpha = \alpha'$ als Scheitelwinkelpaar
$\beta + \beta' = 180°$ als Nebenwinkelpaar mithin $\beta' = 180° - \beta = 50°$, also $\beta' = \alpha$. Daraus folgt $g_1 \parallel g_2$.

Nun ist ferner: $\gamma = \gamma'$ als Stufenwinkelpaar an geschnittenen Parallelen und $\gamma' + \delta = 180°$ als Nebenwinkel.
Damit wird $\delta = 180° - \gamma' = 110°$.

Aufgabe 090623:



Die Abbildung zeigt drei verschiedene Geraden durch einen Punkt C und eine vierte Gerade, die nicht durch C geht.
Diese möge die drei erstgenannten Geraden in den Punkten A, B bzw. D schneiden, wobei B zwischen A und D liegen möge, Punkt E liege auf der Geraden durch A und C so, dass C zwischen A und E liegt.
Ferner gelte $\angle ECD \cong \angle ABC$.

Beweise, dass $\angle BCD \cong \angle BAC$ ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Summe der Winkel $\angle ACB$ und $\angle ECD$ wird von $\angle BCD$ zu 180° ergänzt.
Die nach Voraussetzung ihr gleiche Summe der Winkel $\angle ACB$ und $\angle ABC$ wird von $\angle BAC$ zu 180° ergänzt (Winkelsumme im Dreieck $\triangle ABC$). Daraus folgt die Behauptung $\angle BCD \cong \angle BAC$.

Aufgabe 190621:
Gegeben seien zwei einander schneidende Geraden. Die Größen dreier der dabei entstehenden vier Schnittwinkel haben die Summe 226°.
Ermittle die Größe jedes einzelnen dieser vier Schnittwinkel!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Größen aller vier Schnittwinkel haben die Summe 360°. Hiernach und wegen 360 - 226 = 134 hat einer der Schnittwinkel die Größe 134°.
Von den übrigen ist einer der Scheitelwinkel dieses Winkels, hat also ebenfalls die Größe 134°. Die anderen beiden sind jeweils Nebenwinkel des zuerst genannten Winkels. Wegen 180 - 134 = 46 hat daher jeder von ihnen die Größe 46°.
Die gesuchten Größen sind mithin: 131°, 46°, 131° und 46°.

III.II Vier-, Vielecke

I Runde 1

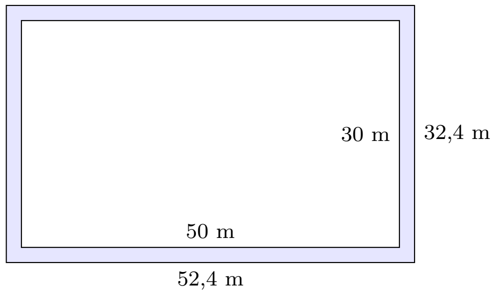
Aufgabe V00603:
Um ein Schwimmbad mit der Beckengröße 50 m mal 30 m wird ein 1,20 m breiter Weg mit Zementplatten ausgelegt.
Wie viel Platten sind erforderlich, wenn die Maße der Platten 30 cm mal 30 cm betragen?

Lösung von Steffen Polster:

Die auszulegende Fläche ist die Differenz der zwei Rechtecke (siehe Abildung). Damit wird für den Flächeninhalt

$$F = 52{,}4 \text{ m} \cdot 32{,}4 \text{ m} - 50 \text{ m} \cdot 30 \text{ m} = 197{,}76 \text{ m}^2$$

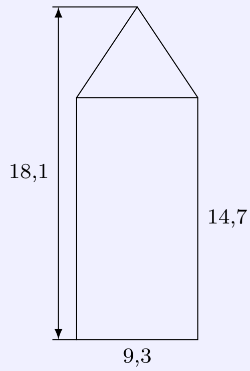
Ein Platte hat den Flächeninhalt $0{,}3 \text{ m} \cdot 0{,}3 \text{ m} = 0{,}09 \text{ m}^2$. Damit benötigt man $\frac{197{,}76}{0{,}9} = 2197{,}3 \approx 2200$ Platten.



Aufgabe V00609:

In Leipzig werden viele Häuser neu verputzt! Das Verputzen einer Giebelwand kostet ohne Arbeitslohn 131,17 DM.
Berechne die zu verputzende Fläche aus der Abbildung und die Kosten für 1 m^2 Kalkanstrich!

Hinweis: Maßzahlen in der Abbildung in Meter.



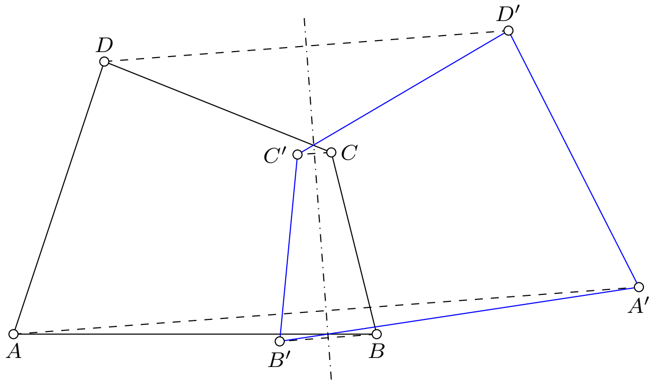
Lösung von Steffen Polster:
Die Giebelwand setzt sich aus einem Rechteck und einem Dreieck (Höhe = 18,1 - 14,7 = 3,4 m) zusammen. Für den Flächeninhalt ergibt sich somit

$$F = 9{,}3 \cdot 14{,}7 + \frac{1}{2} \cdot 9{,}3 \cdot 3{,}4 = 152{,}52 \text{ m}^2$$

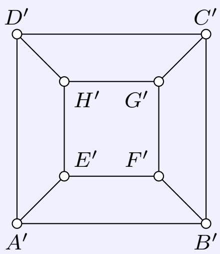
Die zu verputzende Fläche hat einen Inhalt von 152,5 m^2. 1 m^2 Putz kostet damit $\frac{131{,}17}{152{,}52} = 0{,}86$ DM.

Aufgabe V00610:
Zeichne ein beliebiges Viereck und eine Symmetrieachse, die das Viereck schneidet!
Konstruiere das zum ersten Viereck symmetrische!

Lösung von Steffen Polster:



Aufgabe 040616:



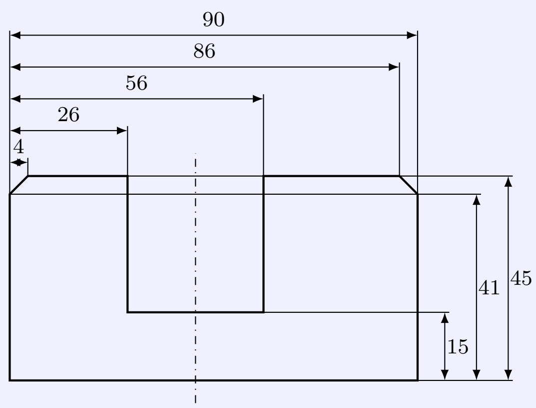
Die abgebildete Figur ist der Grundriss eines ebenflächig begrenzten Körpers.
Die Bilder seiner Eckpunkte A, B, C, D, E, F, G, H sind mit A', B', C', D', E', F', G', H' bezeichnet. Das Quadrat $ABCD$ liegt auf der Grundrissebene; das Quadrat $EFGH$ liegt parallel zur Grundrissebene im Abstand von 4 cm.
Die Seite AB ist 5 cm, die Seite EF 3 cm lang.

Um welchen Körper handelt es sich? Baue ein Modell dieses Körpers! Das Material kannst du selbst wählen.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es handelt sich um einen Pyramidenstumpf.

Aufgabe 060611:

Berechne den Flächeninhalt der abgebildeten Figur! Runde das Ergebnis auf volle Quadratzentimeter! (Die Maßeinheit aller angegebenen Maßzahlen ist Millimeter.)



Lösung von Steffen Polster:
Aus einem Rechteck mit den Maßen 90 mm und 45 mm werden in der Mitte ein Quadrat der Seitenlänge

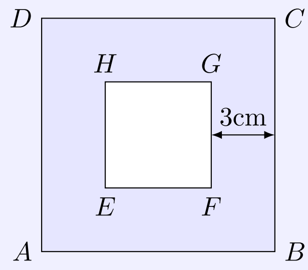
30 mm und an den oberen Ecken zwei rechtwinklige Dreiecke (Katheten je 4 mm) herausgeschnitten. Daraus ergibt sich:

$$A = 45 \cdot 90 - 30 \cdot 30 - 2 \cdot \frac{4 \cdot 4}{2} = 3134 \text{ mm}^2$$

Der Flächeninhalt der Figur beträgt rund 31 cm^2.

Aufgabe 070612:

Die Abbildung stellt zwei Quadrate $ABCD$, $EFGH$ dar. Sie sind so gelegen, dass die vier Diagonalen AC, BD, EG und FH einander in genau einem Punkt schneiden, und dass $AB \parallel EF$ gilt.
Die Differenz der Flächeninhalte der beiden Quadrate $ABCD$ und $EFGH$ beträgt 96 cm^2.
Berechne die Längen der Strecken BC und GH!



Lösung von Steffen Polster:
Für die Seiten gilt $a = AB = BC = CD = DA$ sowie $b = EF = FG = GH = HE$ und nach Aufgabenstellung $a = b + 6$ cm.

Die Differenz der Flächeninhalte der zwei Quadrate ist somit (Angaben in cm^2):

$$A_{\text{groß}} - A_{\text{klein}} = a^2 - b^2 = (b+6)^2 - b^2 = b^2 + 12b + 36 - b^2 = 12b + 36 = 96$$

Daraus folgt sofort, dass $b = 5$ cm ist und $a = b + 6 = 11$ cm ist.

Aufgabe 080611:
a) Die Summe der Inhalte einer Rechteckfläche und einer Quadratfläche beträgt 3000 m^2. Die Quadratseite und eine Rechteckseite haben eine Länge von je 30 m.

a) Wie lang ist die andere Rechteckseite?
b) Zeichne beide Flächen im Maßstab 1 : 2000!

Lösung von Steffen Polster:
a sei die Länge der Quadratseiten, b die bekannte und c die gesuchte Rechteckseite. Dann gilt (Angabe in Metern bzw. Quadratmetern):

$$A_Q + A_R = a^2 + b \cdot c \Rightarrow 3000 = 30^2 + 30 \cdot c \Rightarrow c = 70$$

Die unbekannte Rechteckseite ist 70 m lang.

b) siehe Abbildung. Die Quadratseite mit 30 m Länge muss in der Abbildung 3000 cm : 2000 = 1,5 cm groß sein.

Aufgabe 120613:
In einem Raum mit einer rechteckigen Bodenfläche von 11 m Breite und 36 m Länge stehen 6 Maschinen mit Standflächen von folgendem Flächeninhalt:

Maschine A: 15 ^{2}	Maschine D: 60 m^2
Maschine B: 5 m^2	Maschine E: 18 m^2
Maschine C: 18 m^2	Maschine F: 50 m^2

Für die Lagerung und Bereitstellung der zu bearbeitenden Werkstücke werden an den Maschinen weitere Flächen mit folgendem Flächeninhalt benötigt:

An der Maschine A: 14 m^2	An der Maschine D: 21 m^2
An der Maschine B: 6 m^2	An der Maschine E: 13 m^2
An der Maschine C: 15 m^2	An der Maschine F: 17 m^2

Die restliche Bodenfläche soll für Transportwege genutzt werden.

a) Berechne (in m^2) den Flächeninhalt der Bodenfläche, die für Transportwege zur Verfügung steht!

b) Wir nehmen an, dass die Anordnung der Maschinen und der Lagerplätze es gestattet, die Transportwege aus Rechteckflächen von gleicher Breite zusammenzusetzen. Die Summe der Längen dieser Rechteckflächen wollen wir dann als „Gesamtlänge der Transportwege“ bezeichnen.
Wie breit sind diese Transportwege, wenn sie eine Gesamtlänge von 48 m besitzen?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Der Flächeninhalt der Standfläche für die Maschinen beträgt 166 m^2, derjenige der Fläche für die Lagerung der Werkstücke 86 m^2, der Flächeninhalt der gesamten Bodenfläche wegen $11 \cdot 36 = 396$ insgesamt 396 m^2.
Mithin verbleiben wegen $396 - 166 - 86 = 144$ für die Transportwege 144 m^2.

b) Die Breite der Transportwege betrage x m. Dann gilt $48 \cdot x = 144$, woraus man $x = 144 : 48$, also $x = 3$ erhält. Dann beträgt die gesuchte Breite 3 m.

Aufgabe 130612:
Für die „Galerie der Freundschaft“ ist ein rechteckiges Bild mit den Seitenlängen 18 cm und 12 cm durch einen rechteckigen Rahmen von 3 cm Breite aus Zeichenkarton eingerahmt worden.
Ermittle den Flächeninhalt dieses Rahmens!

Lösung von Steffen Polster:
Der Flächeninhalt des Bildes ist $12 \cdot 18 = 216 \text{cm}^2$. Der Flächeninhalt von Rahmen und Bild wird

$$(12 + 2 \cdot 3) \cdot (18 + 2 \cdot 3) = 18 \cdot 24 = 432 \text{ cm}^2$$

Damit ist die Rahmenfläche gleich 432 cm^2 - 216 cm^2 = 216 cm^2.

Aufgabe 180611:
In einem Stadtbezirk Leipzigs wurden 260 große Wohnungen renoviert.
Bei einem Zehntel dieser Wohnungen hat jede Wohnung 55 m^2 Wohnfläche; bei einem Viertel der 260 Wohnungen hat jede Wohnung 67 m^2 Wohnfläche; jede andere der 260 Wohnungen hat 80 m^2 Wohnfläche.
Berechne die gesamte Wohnfläche dieser 260 renovierten Wohnungen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Ein Zehntel der 260 Wohnungen sind 26 Wohnungen; denn es gilt $260 : 10 = 26$.
Ein Viertel der 260 Wohnungen sind 65 Wohnungen; denn es gilt $260 : 4 = 65$.
Die restlichen Wohnungen sind 169 Wohnungen; denn es gilt $260 - 26 - 65 = 169$.

Die Wohnfläche der zuerst genannten 26 Wohnungen beträgt 1430 m^2; denn es gilt $26 \cdot 55 = 1430$.
Die Wohnfläche der danach genannten 65 Wohnungen beträgt 4355 m^2; denn es gilt $65 \cdot 67 = 4355$.
Die Wohnfläche der restlichen 169 Wohnungen beträgt 13520 m^2; denn es gilt $169 \cdot 80 = 13520$.
Die gesamte Wohnfläche der 260 Wohnungen beträgt 19305 m^2; denn es gilt $1430+4355+13520 = 19305$.

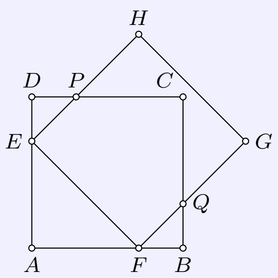
Aufgabe 210611:
Von einem Rechteck sind folgende Eigenschaften bekannt:
Wenn seine beiden Seitenlängen in Metern gemessen werden, so ergeben sich natürliche Zahlen als Maßzahlen. Die Differenz der beiden Seitenlängen beträgt 20 m. Der Umfang des Rechtecks beträgt 60 m.

a) Welchen Flächeninhalt hat dieses Rechteck?
b) Welche Längen erhalten seine beiden Seiten im Maßstab 1 : 250?
Zeichne das Rechteck in diesem Maßstab!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Verringert man die größere Seitenlänge des Rechtecks um 20 m, so verringert sich sein Umfang um 40 m, erreicht also den Wert 20 m. Andererseits entsteht dabei ein Quadrat.
Wegen $20 : 4 = 5$ beträgt seine Seitenlänge 5 m; dies ist zugleich die Länge der kleineren Seite des ursprünglichen Rechtecks. Die Länge seiner größeren Seite beträgt somit 25 m. Wegen $5 \cdot 25 = 125$ beträgt sein Flächeninhalt 125 m^2.

b) Im Maßstab 1 : 250 wird wegen 5 m = 500 cm und $500 : 250 = 2$ die kleinere Seitenlänge durch die Seitenlänge 2 cm wiedergegeben. Wegen 25 m = 2500 cm und $2500 : 250 = 10$ wird die größere Seitenlänge durch die Länge 10 cm wiedergegeben.

Aufgabe 230613:

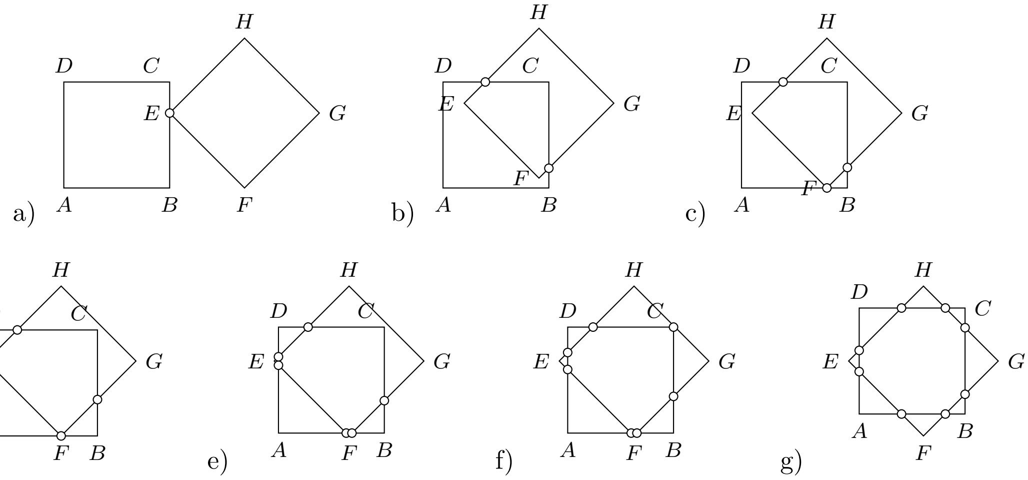


Im Bild sind zwei gleichgroße Quadrate $ABCD$ und $EFGH$ gezeichnet, die genau vier Randpunkte (E, F, P und Q) gemeinsam haben.
Zeichne zwei gleichgroße Quadrate $ABCD$ und $EFGH$, die so liegen, dass sie

a) genau einen Punkt, b) genau zwei Punkte,
c) genau drei Punkte, d) genau fünf Punkte,
e) genau sechs Punkte, f) genau sieben Punkte,
g) genau acht Punkte

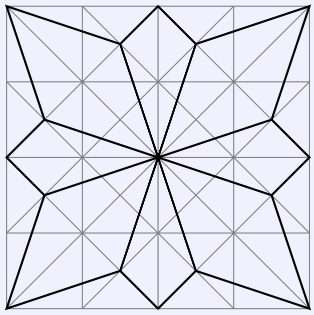
gemeinsam haben! Eine Begründung wird nicht verlangt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

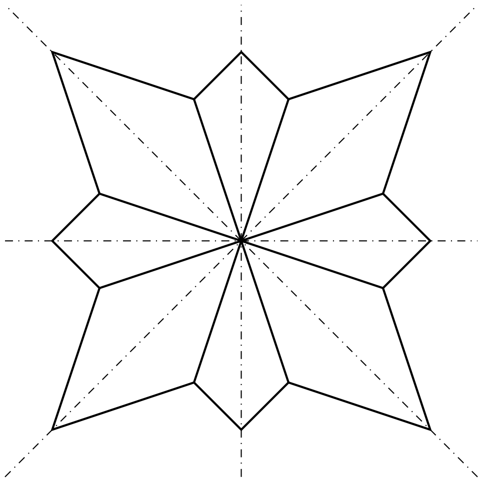


Die Abbildungen (a) bis (g) zeigen je eine Möglichkeit für die zu konstruierenden Quadrate.

Aufgabe 250614:
In dem Bild ist - auf einem (mit dünnen Linien gezeichneten) Hintergrund von Quadraten und ihren Diagonalen - mit dicken Linien ein Ornament gezeichnet.
Überprüfe mit durchsichtigem Papier (oder Folie), ob das Ornament axialsymmetrisch ist!
Überprüfe ferner, ob es Drehungen gibt, bei denen das Ornament sich selbst als Bild hat!
Ist beides der Fall, so nenne
a) die Anzahl aller Symmetrieachsen des Ornaments,
b) alle diejenigen Drehungen, bei denen das Ornament sich selbst als Bild hat!
Zu Aufgabe a) zeichne auch das Ornament und alle seine Symmetrieachsen!



Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

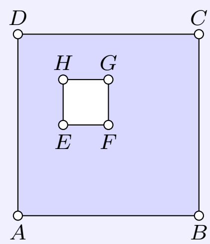


Die Überprüfung ergibt, dass das Ornament sowohl axialsymmetrisch als auch drehsymmetrisch ist.
a) Das Ornament hat genau vier Symmetrieachsen (siehe Abbildung).

b) Das Ornament hat genau bei den Drehungen um seinen Mittelpunkt um 90°, 180° und 270° sich selber als Bild, außerdem natürlich bei der Drehung um 0° (d. h. bei derjenigen Drehung, bei der jeder Punkt der Ebene sich selbst als Bild hat).

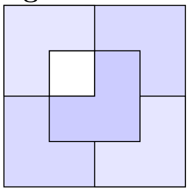
Aufgabe 260611:

In ein Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge 8 cm ist ein Quadrat $EFGH$ mit der Seitenlänge 2 cm so eingezeichnet, wie es das Bild zeigt.
HG und DC sind zueinander parallele Strecken mit dem Abstand 2 cm voneinander. EH und AD sind zueinander parallele Strecken mit dem Abstand 2 cm voneinander.



a) Berechne den Flächeninhalt der im Bild gefärbten Fläche!
b) Die gefärbte Fläche soll in fünf Teile zerlegt werden. Diese Teile sollen so gestaltet sein, dass man je zwei von ihnen durch Drehen oder Verschieben miteinander zur Deckung bringen kann.
Zeichne eine solche Aufteilung der gefärbten Fläche!

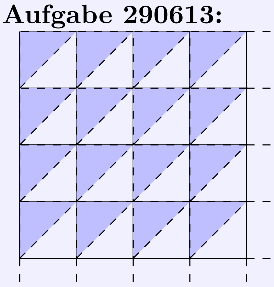
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



a) Die Quadrate $ABCD$ und $EFGH$ haben wegen $8 \cdot 8 = 64$ und $2 \cdot 2 = 4$ die Flächeninhalte 64 cm^2 bzw. 4 cm^2. Somit besitzt die schraffierte Fläche wegen $64 - 4 = 60$ den Flächeninhalt 60 cm^2.

b) Die Abbildung zeigt eine mögliche Lösung der Aufgabe.

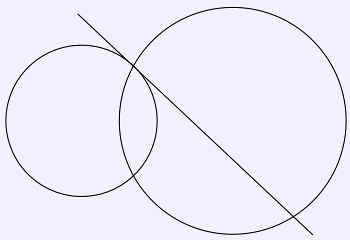
Aufgabe 290613:



Ein rechteckiger Fußboden, der 3,6 m lang und 2,7 m breit ist, soll mit zwei Sorten gleichgroßer, aber verschiedenfarbiger dreieckiger Teppichfliesen so ausgelegt werden, dass ein Muster entsteht, wie es durch Fortsetzen des Musters des Bildes zu erhalten ist.
Je zwei solcher dreieckigen Fliesen einer Farbe sollen durch einmaliges Zerschneiden einer quadratischen Fliese mit der Seitenlänge 30 cm hergestellt werden.
Wie viele quadratische Teppichfliesen werden von jeder der beiden Sorten insgesamt benötigt?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wegen 3,6m = 360cm, 2,7m = 270cm, $360 : 30 = 12$, $270 : 30 = 9$ und $12 \cdot 9 = 108$ lässt sich der Fußboden mit insgesamt 108 quadratischen Fliesen auslegen.
Das bleibt auch so, wenn man diese Fliesen zerschneidet und zu dem gewünschten Muster umordnet. Da dieses Muster die Fliesen beider Farben in einander gleichen Mengen enthält, werden von jeder der beiden Sorten quadratischer Teppichfliesen wegen $108 : 2 = 54$ insgesamt je 54 Stück benötigt.

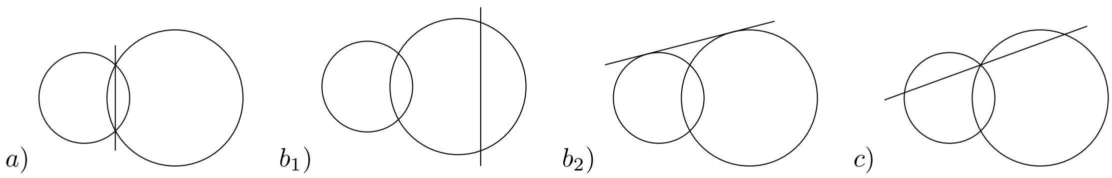
Aufgabe 330613:
Karin zeichnet zwei Kreise, die sich in zwei verschiedenen Punkten schneiden. Dann zeichnet sie eine Gerade und zählt an der entstandenen Figur,



1. wie viele Punkte es gibt, die als gemeinsamer Punkt (Schnitt- oder Berührungspunkt) von mindestens zwei der drei gezeichneten Linien vorkommen,
2. wie viele Gebiete es gibt, die von Teilen der Linien vollständig eingeschlossen werden und in ihrem Innern frei von anderen Linienteilen sind.

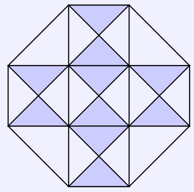
Die Abbildung zeigt als Beispiel eine Figur mit 3 Punkten und 4 Gebieten.
Zeichne Figuren mit
a) 2 Punkten, 4 Gebieten; b) 4 Punkten, 4 Gebieten; c) 4 Punkten, 5 Gebieten!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Abbildung zeigt Beispiele für Zeichnungen der geforderten Art.

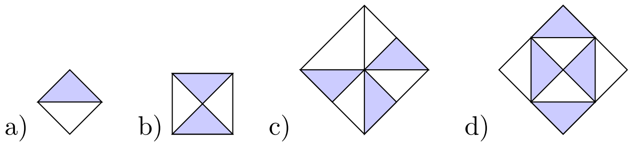


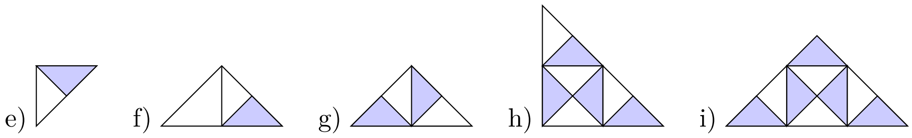
Aufgabe 340612:

Das Fliesenmuster in der Abbildung wurde aus 14 weißen und 10 gemusterten dreieckigen Fliesen zusammengesetzt. Man kann darin mehrere Quadrate und Dreiecke finden, die jeweils aus mehr als einer Fliese zusammengesetzt sind.
Wie viele solcher Quadrate lassen sich insgesamt finden?



Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es gibt genau 4 Quadrate aus je zwei Fliesen, 5 Quadrate aus je vier Fliesen, 4 Quadrate aus je sieben Fliesen, 1 Quadrat aus acht Fliesen (siehe die Beispiele Abb. a, b, c, d), also insgesamt 14 Quadrate der gesuchten Art.





Es gibt genau 20 Dreiecke aus je zwei Fliesen, 8 Dreiecke aus je drei Fliesen, 8 Dreiecke aus je vier Fliesen, 4 Dreiecke aus je acht Fliesen, 4 Dreiecke aus je neun Fliesen (siehe die Beispiele Abb. e, f, g, h, i), also insgesamt 44 Dreiecke der gesuchten Art.

II Runden 2 & 3

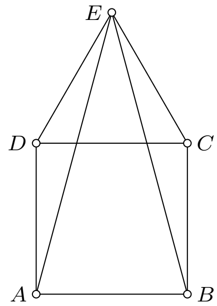
Aufgabe 060624:
Im Rahmen des Wiederaufbaus der Leipziger Innenstadt entstehen moderne Wohnkomplexe. Vor den Häusern werden Rasenflächen, Blumenbeete und Terrassen angelegt.
Für eine der rechteckigen Terrassen werden genau 400 Sandsteinplatten verwendet. Die Platten bedecken lückenlos den Boden. Jede dieser Platten ist 60 cm lang und 40 cm breit. Die Länge dieser Terrasse beträgt 10 m.
Ermittle die Breite dieser Terrasse!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Der Flächeninhalt jeder dieser Platten beträgt $60 \cdot 40\ \text{cm}^2 = 2400\ \text{cm}^2$.
Daher bedecken 400 solche Platten eine Fläche von $400 \cdot 2400\ \text{cm}^2 = 960000\ \text{cm}^2 = 96\ \text{m}^2$.
Die Terrassenfläche ist rechteckig, ihr Flächeninhalt mithin gleich dem Produkt aus ihrer Länge und ihrer Breite. Die unbekannte Breite betrage b Meter, dann gilt $10b = 96$, woraus man $b = 9{,}6$ erhält.
Die Breite der Terrasse beträgt also 9,6 m.

Aufgabe 080623:
Über der Seite CD eines Quadrates $ABCD$ mit $AB = 4$ cm ist ein gleichseitiges Dreieck $\triangle DCE$ so zu konstruieren, dass das Quadrat und das Dreieck die Seite CD gemeinsam haben.
Der Punkt E des Dreiecks $\triangle DCE$ sei dabei außerhalb des Quadrates $ABCD$ gelegen. Verbinde E mit A und mit B!
Berechne die Größe des Winkels $\angle AEB$!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Im Dreieck $\triangle AED$ gilt: (siehe Abbildung) $AD = DE$ (nach Konstruktion)

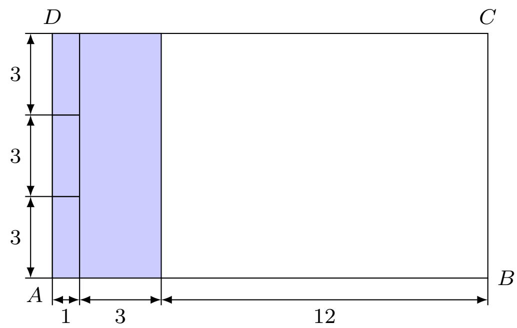
(1) Daraus folgt $\angle DAE = \angle AED$ (als Basiswinkel). Ferner ist:
(2) $\angle EDA = \angle EDC + \angle CDA = 150°$; ($\angle ABC$ bezeichnet die Größe des Winkels $\angle ABC$) denn $\angle EDC = 60°$ (Winkel im gleichseitigen Dreieck) und $\angle CDE = 90°$ (Winkel im Quadrat).

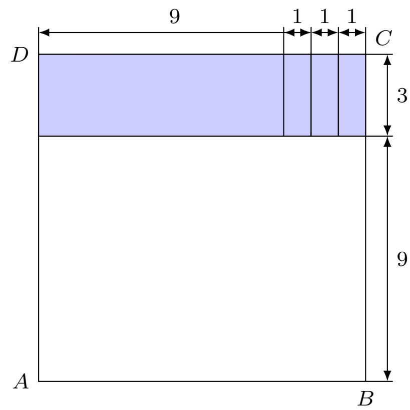


Aus (1), (2) und $\angle AED + \angle EDA + \angle DAE = 180°$ (nach Winkelsummensatz) folgt $\angle AED = 15°$. Entsprechend ist $\angle BEC = 15°$, also $\angle AEB = \angle DEC - \angle AED - \angle BEC = 30°$.

Aufgabe 100624:
Die Fläche des Rechtecks $ABCD$ mit den Seitenlängen $a = 16$ cm, $b = 9$ cm ist so in fünf Rechtecksflächen zu zerlegen, dass sich diese zu einer Quadratfläche zusammensetzen lassen, wobei sämtliche Teilrechtecke verwendet werden sollen und die gesamte Fläche des Quadrats lückenlos und ohne Überlappungen von den Flächen dieser Teilrechtecke ausgefüllt werden soll.
Gib eine Möglichkeit hierfür an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

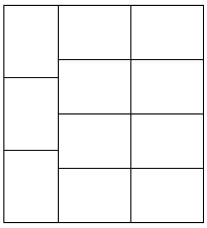




Alle Maßangaben in cm.
Das Rechteck $ABCD$ hat laut Aufgabe einen Flächeninhalt von $9\text{cm} \cdot 16\text{cm} = 144\text{cm}^2$.
Da das Quadrat den gleichen Flächeninhalt haben muss, und da 12 die einzige natürliche Zahl ist, deren Quadratzahl 144 beträgt, so muss seine Seite 12 cm lang sein.

Aufgabe 130621:
Eine rechteckige Glasscheibe ist 24 cm lang und 22 cm breit. Daraus sollen rechteckige Scheiben von 8 cm Länge und 6 cm Breite geschnitten werden.
Welches ist die größte Anzahl derartiger Scheiben, die man dabei erhalten kann?
Stelle eine Möglichkeit, diese größte Anzahl zu gewinnen, in einer Zeichnung im Maßstab 1 : 2 dar!

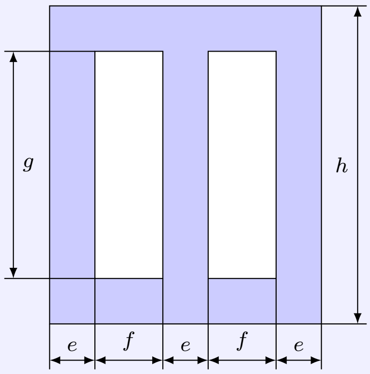
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Die gesamte Glasscheibe hat wegen $24 \cdot 22 = 528$ einen Flächeninhalt von 528 cm^2. Jede der kleinen Glasscheiben hat wegen $6 \cdot 8 = 48$ einen Flächeninhalt von 48 cm^2.
Wegen $528 : 48 = 11$ lassen sich also höchstens 11 derartige kleine Scheiben aus der großen schneiden.

Dass dies auch tatsächlich möglich ist, zeigt die Abbildung.

Aufgabe 150624:



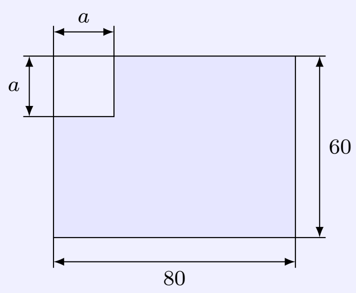
Berechne den Inhalt A der gefärbten Fläche der in der Abbildung dargestellten Figur (die Maße sind der Abbildung zu entnehmen)

a) für $e = 10$ mm, $f = 15$ mm, $g = 50$ mm, $h = 70$ mm,
b) allgemein, indem du eine Formel für A herleitest, in der nur die Variablen e, f, g, h auftreten!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Die gefärbte Fläche kann man sich dadurch entstanden denken, dass aus einem Rechteck R zwei Rechtecke S und T herausgeschnitten wurden, wobei wegen $10 + 15 + 10 + 15 + 10 = 60$ das Rechteck R die Seitenlängen 60 mm und 70 mm hat und jedes der Rechtecke S, T die Seitenlängen 15 mm und 50 mm.
Daher ergeben sich für R, S, T wegen $60 \cdot 70 = 4200$ bzw. $15 \cdot 50 = 750$ die Flächeninhalte 4200 mm^2 bzw. 750 mm^2 bzw. 750 mm^2.
Somit hat wegen $4200 - 750 - 750 = 2700$ die gefärbte Fläche den Flächeninhalt $A = 2700$ mm^2.

b) Die Seitenlängen von R sind $(3e + 2f)$ und h, die Seitenlängen von jedem der Rechtecke S, T sind f und g. Daher hat R den Flächeninhalt $(3e + 2f)h$, und jedes der Rechtecke S, T hat den Flächeninhalt $f \cdot g$.
Also ist $A = (3e + 2f)h - 2fg$.

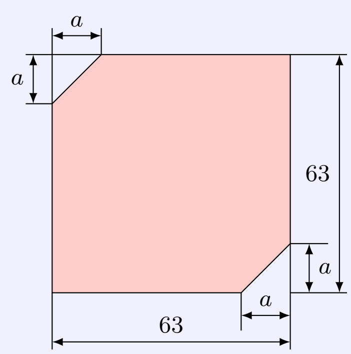
Aufgabe 160623:



Die abgebildete farbige Fläche besteht aus einer Rechteckfläche, aus der eine quadratische Fläche herausgeschnitten wurde.
Die farbige Fläche hat einen Flächeninhalt von 44 cm^2.
Aus den in der Abbildung angegebenen Maßen (in mm) ist die Seitenlänge a (in mm) des herausgeschnittenen Quadrats zu berechnen.

Lösung von Steffen Polster:
Wegen $80 \cdot 60 = 4800$ beträgt der Flächeninhalt des großen Rechtecks 4 800 mm^2 = 48 cm^2.
Für den Flächeninhalt des herausgeschnittenen Quadrats verbleiben wegen $48 - 44 = 4$ somit 4 cm^2. Also beträgt seine Seitenlänge $a = 2$ cm, da 2 die einzige natürliche Zahl ist, die mit sich selbst multipliziert 4 ergibt.
Die Seitenlänge a des herausgeschnittenen Quadrats beträgt somit $a = 20$ mm.

Aufgabe 180624:



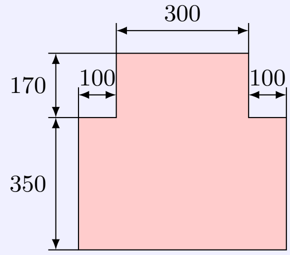
Die abgebildete farbige Fläche ist 38 cm^2 groß. Sie ist aus einer quadratischen Fläche entstanden, von der zwei (gleichgroße) dreieckige Flächen abgeschnitten wurden.

Aus den in der Abbildung angegebenen Maßen (in mm) ist die Seitenlänge a der Dreiecke (in mm) zu berechnen.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wegen $63^2 = 3969$ hat das abgebildete Quadrat den Flächeninhalt 3969 mm^2. Wegen 38 cm^2 = 3800 mm^2 und 3969 - 3800 = 169 haben die beiden Dreieckflächen zusammen den Flächeninhalt 169 mm^2.

Da die beiden Dreiecke gleich groß und rechtwinklig-gleichschenklig sind, ergänzen sie sich zu einem Quadrat. Dieses Quadrat hat einen Flächeninhalt von 169 mm^2 und daher die Seitenlänge $a = 13$ mm.
Die Seitenlänge a der genannten Dreiecke beträgt 13 mm.

Aufgabe 220621:
Die Abbildung zeigt den Grundriss eines Zimmers. Alle Maße sind in Zentimeter angegeben.
Das Zimmer ist 280 cm hoch. In diesem Zimmer ist ein alter Tapetenbelag von den Wänden und von der Decke zu entfernen. Danach sind Wände und Decke mit Makulatur zu streichen und zu tapezieren.



Errechne für diese Arbeiten mit Hilfe der folgenden Tabelle die insgesamt erforderlichen Lohnkosten!
Dabei ist jede Wand vollständig zu berücksichtigen, auch wenn Fenster und Türen vorhanden sind. (Es wird also angenommen, dass sich die Einsparung an Fläche wieder durch den komplizierten Arbeitsaufwand ausgleicht.) Das Ergebnis ist auf vollen Markbetrag zu runden.

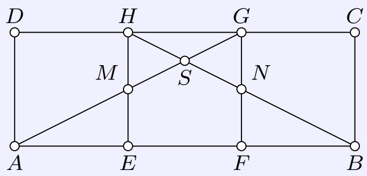
Leistung	Lohnkosten pro m^2
Alte Tapezierung entfernen	28 Pf
Makulatur streichen	26 Pf
Wandtapezierung	83 Pf
Deckentapezierung	112 Pf

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Folgende Wandfläche A_W ist zu bearbeiten:

$$A_W = (350 + 170 + 100 + 350 + 550 + 350 + 100 + 170) \cdot 280 cm^2 = 599200 cm^2$$

das sind 59,92 m^2, also rund 60 m^2.
Die Lohnkosten L_W für die Bearbeitung der Wandfläche A_W betragen somit rund $L_W = 60 \cdot (28+26+83)$ Pf = 8220 Pf, das sind 82,20 M. Folgende Deckenfläche A_D ist zu bearbeiten: $A_D = (350 \cdot 550 + 170 \cdot 350) =$ 252000 cm^2, das sind 25,2 m^2, also rund 25 m^2. Die Lohnkosten L_D für die Bearbeitung der Deckenfläche A_D betragen somit, mit analoger Rechnung, rund 41,83 M.
Die gesamten Lohnkosten L betragen daher $L = 124{,}03$ M, das sind rund 124 M.

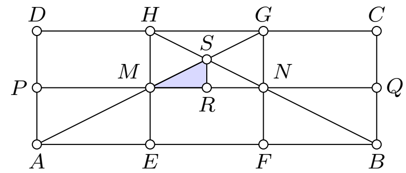
Aufgabe 230622:
Die abgebildete Figur $ABCD$ (siehe Abbildung) stellt ein Rechteck dar, das sich aus den drei gleichgroßen Quadraten $AEHD$, $EFGH$ und $FBCG$ zusammensetzt. Die Strecke AG schneidet die Strecke EH in deren Mittelpunkt M, die Strecke BH schneidet die Strecke FG in deren Mittelpunkt N. Der Flächeninhalt des Rechtecks $ABCD$ beträgt 48 Flächeneinheiten.



Ermittle
a) den Flächeninhalt des Dreiecks SGH,
b) den Flächeninhalt des Dreiecks ABS,
c) den Flächeninhalt den Vierecks $ASHD$!

Hinweis: Zur Herleitung darfst du den Satz verwenden, dass jedes Rechteck durch seine Diagonalen in vier gleich große Dreiecke zerlegt wird.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wegen 48 : 3 = 16 beträgt der Flächeninhalt jedes der drei Quadrate genau 16 Flächeneinheiten.



Die Gerade durch M und N schneide die Strecke AD in P und die Strecke BC in Q. Der Abbildung ist dann zu entnehmen:

Da M der Mittelpunkt von EH und N der Mittelpunkt von FG ist, ist $MNGH$ ein Rechteck, das halb so groß ist wie das Quadrat $EFGH$. Sein Flächeninhalt beträgt daher 8 Flächeneinheiten.

Ganz entsprechend werden auch die anderen beiden Quadrate durch die Gerade durch P und Q jeweils in zwei Rechtecke mit je 8 Flächeneinheiten Inhalt zerlegt.

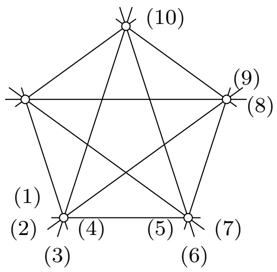
a) Die Diagonalen MG und NH zerlegen das Rechteck $MNGH$ in vier inhaltsgleiche Teildreiecke. Jedes von ihnen, und folglich auch das Dreieck SGH, hat einen Inhalt von 2 Flächeneinheiten.
b) Der Flächeninhalt des Dreiecks ABS ist gleich der Summe der Flächeninhalte der (untereinander gleich großen) Dreiecke AEM und FBN, des Rechtecks $EFNM$ sowie des Dreiecks MNS.
Die Dreiecke AEM und FBN sind jeweils halb so groß wie das Rechteck $EFMN$, ihr Inhalt beträgt daher jeweils 4 Flächeneinheiten. Wegen $2 \cdot 4 + 8 + 2 = 18$ beträgt daher der Flächeninhalt des Dreiecks ABS 18 Flächeneinheiten.

c) Der Flächeninhalt des Vierecks $ASHD$ ist gleich der Summe der Flächeninhalte des Dreiecks AMP, des Rechtecks $PMHD$ und des Dreiecks MSH. Wegen $4 + 8 + 2 = 14$ beträgt daher der Flächeninhalt des Vierecks $ASHD$ 14 Flächeneinheiten.

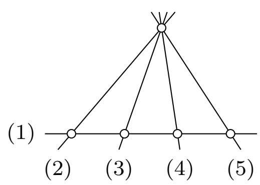
Aufgabe 230624:
Fünf voneinander verschiedene Punkte einer Ebene sollen durch Geraden miteinander verbunden werden. Dabei sollen stets alle möglichen Verbindungsgeraden gezeichnet werden.

Uwe behauptet: Die fünf Punkte können so liegen, dass es genau zehn verschiedene Verbindungsgeraden gibt.
Norbert behauptet: Die fünf Punkte können aber auch so liegen, dass es nur fünf Verbindungsgeraden gibt.
Fritz behauptet: Die fünf Punkte können sogar so liegen, dass es nur eine einzige Verbindungsgerade gibt.
a) Zeige durch Zeichnung von je einem Beispiel, dass alle drei Aussagen wahr sind!
b) Untersuche, ob bei entsprechender Lage der fünf Punkte auch noch andere Anzahlen verschiedener Verbindungsgeraden vorkommen können, und zeichne auch dafür Beispiele!

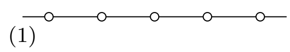
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Folgende Beispiele zeigen, dass alle drei Aussagen wahr sind:



10 Verbindungsgeraden

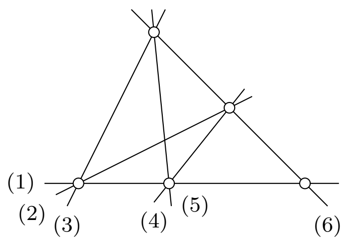


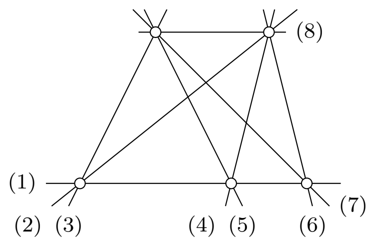
5 Verbindungsgeraden



1 Verbindungsgerade

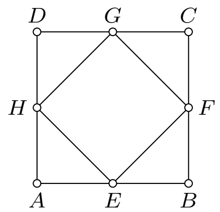
b) Folgende beiden Beispiele zeigen, dass die fünf Punkte auch so liegen können, dass es genau 6 bzw. genau 8 verschiedene Verbindungsgeraden gibt:





Aufgabe 250623:
Es sei $ABCD$ ein Quadrat mit der Seitenlänge 14 cm. Die Punkte E, F, G und H seien die Mittelpunkte der Quadratseiten. Dabei liege E auf AB, F auf BC, G auf CD, H auf DA.
a) Konstruiere dieses Quadrat und verbinde die Mittelpunkte E und F, F und G, G und H sowie H und E durch Strecken!
b) Ermittle den Flächeninhalt der Fläche $EFGH$!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



b) Die Strecken EG und FH zerlegen das Quadrat $ABCD$ in vier inhaltsgleiche Quadrate. Jedes dieser Quadrate wird durch die eingezeichnete Diagonale in zwei (gleichschenklig-rechtwinklige) inhaltsgleiche Dreiecke zerlegt.

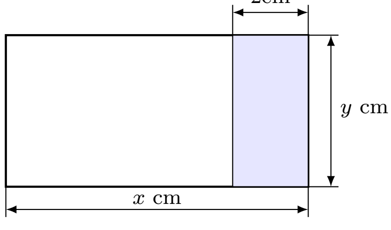
Das Quadrat $ABCD$ ist aus acht solchen Dreiecken zusammengesetzt, die Fläche $EFGH$ aus vier solchen Dreiecken; ihr Flächeninhalt ist daher halb so groß wie der von $ABCD$. Wegen $14 \cdot 14 = 196$ hat $ABCD$ den Flächeninhalt 196cm^2.
Wegen $196 : 2 = 98$ hat somit $EFGH$ den Flächeninhalt 98cm^2.

Aufgabe 280623:
Rolf zeichnet ein Rechteck. Er verkleinert dann dessen größere Seitenlänge um 2 cm und stellt fest:

Dabei entsteht ein zweites Rechteck, dessen Flächeninhalt um 8 cm^2 kleiner ist als der Flächeninhalt des ersten Rechtecks.
Ferner vergrößert er beide Seitenlängen des ersten Rechtecks um je 1 cm und stellt fest:

Dabei entsteht ein drittes Rechteck, dessen Flächeninhalt um 13 cm^2 größer ist als der Flächeninhalt des ersten Rechtecks.
Weise nach, dass sich allein aus Rolfs Feststellungen die beiden Seitenlängen des ersten Rechtecks ermitteln lassen!
Gib diese Seitenlängen an!

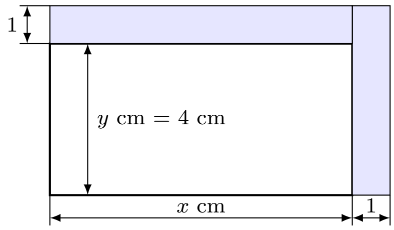
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Das Verkleinern der größeren Seitenlänge des ersten Rechtecks kann erfolgen, indem ein Teilrechteck abgeschnitten wird, dessen eine Seitenlänge 2 cm und dessen Flächeninhalt 8 cm^2 beträgt.
Wegen $8 : 2 = 4$ beträgt seine andere Seitenlänge 4 cm. Sie ist zugleich die kleinere Seitenlänge des ersten Rechtecks; diese ist damit eindeutig ermittelt.

Das Vergrößern beider Seitenlängen des ersten Rechtecks kann erfolgen, indem zwei Teilrechtecke hinzugefügt werden, eines mit der Seitenlänge 1 cm und (wegen $4 + 1 = 5$) 5 cm, also einem Flächeninhalt von 5 cm^2, das andere mit einer Seitenlänge 1 cm und (wegen 13 - 5 = 8) dem Flächeninhalt 8 cm^2.

Wegen $8 : 1 = 8$ beträgt seine andere Seitenlänge 8 cm. Sie ist zugleich die größere Seitenlänge des ersten Rechtecks; auch diese ist damit eindeutig ermittelt.

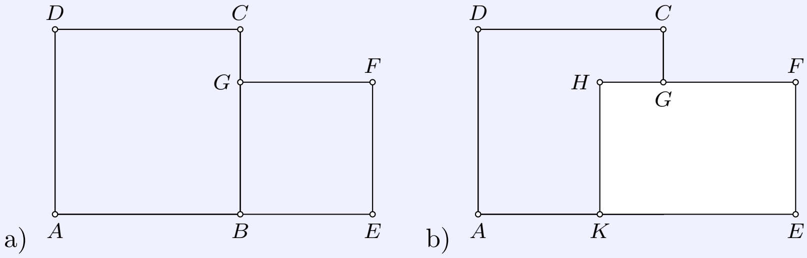


In der Abbildung hat jede farbige Flächen den Flächeninhalt 13 cm^2.

Somit lässt sich eindeutig ermitteln: Die Seitenlängen des ersten Rechtecks betragen 4 cm und 8 cm.

Aufgabe 340622:
Die Gärten von Familie Kniffel und Familie Knobel haben jeweils die Form eines Quadrates und grenzen so aneinander, wie die Abbildung a zeigt.
Die Fläche von Kniffels Garten beträgt 1225 Quadratmeter, die von Knobels Garten 625 Quadratmeter.

a) Welche Breite AD bzw. EF haben die Gärten?
b) Familie Kniffel gibt Familie Knobel ein Stück ihres Gartens ab. Danach haben beide Gärten gleichgroße Fläche. Wie groß ist diese?
c) Abbildung b zeigt die neue Aufteilung. Um welche Länge GH ist Knobels Garten länger geworden?



Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(a) Wegen $35 \cdot 35 = 1225$ hat ein Quadrat mit der Seitenlänge 35 m den Flächeninhalt 1225 Quadratmeter. Also ist die Breite von Kniffels Garten $AD = 35$ m. Aus $25 \cdot 25 = 625$ folgt ebenso $EF = 25$ m.

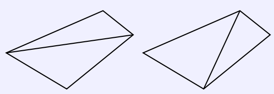
(b) Wegen $1225 + 625 = 1850$ haben beide Gärten zusammen 1850 Quadratmeter. Nach der Aufteilung in zwei gleichgroße Flächen hat jede von ihnen wegen $1850 : 2 = 925$ somit 925 Quadratmeter.

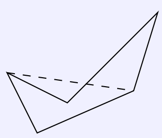
(c) In dem Rechteck $KEFH$ mit diesem Flächeninhalt und der Seitenlänge $EF = 25$ m ist wegen $925 : 25 = 37$ die andere Seitenlänge $FH = 37$ m.
Damit ergibt sich $GH = FH - FG = 37\text{m} - 25\text{m} = 12\text{m}$.

Aufgabe 340631:
Jedes konvexe Vieleck lässt sich in Dreiecke zerlegen, deren Eckpunkte zugleich Eckpunkte des Vielecks sind. Bei einem Viereck beispielsweise findet man dafür genau 2 Möglichkeiten (siehe Abbildung a). Skizziere für ein selbstgewähltes

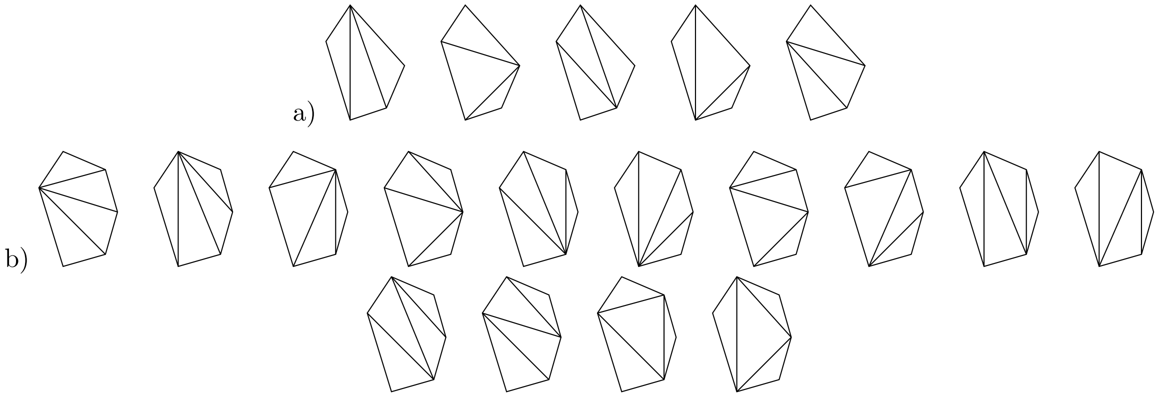
a) konvexes Fünfeck b) konvexes Sechseck
alle Zerlegungen dieser Art!

Hinweis: Ein Vieleck wird genau dann konvex genannt, wenn alle seine Diagonalen ganz der Fläche des Vielecks angehören. Ein Beispiel für ein Vieleck, das nicht konvex ist, zeigt Abbildung b.

a) 

b) 

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Abbildungen a, b zeigen Zeichnungen der verlangten Art.

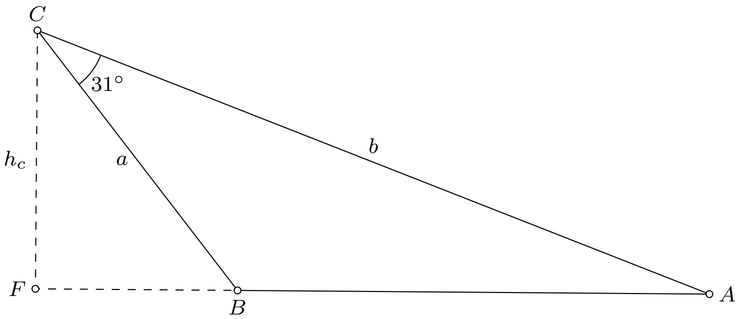


III.III Konstruktionen

I Runde 1

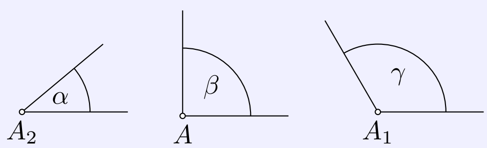
Aufgabe V00608:
Konstruiere ein Dreieck aus: $a = 4{,}8$ cm, $b = 10{,}6$ cm und $\gamma = 31°$.
Konstruiere die Höhe h_c mit dem Zirkel! Miss die anderen Stücke!

Lösung von Steffen Polster:

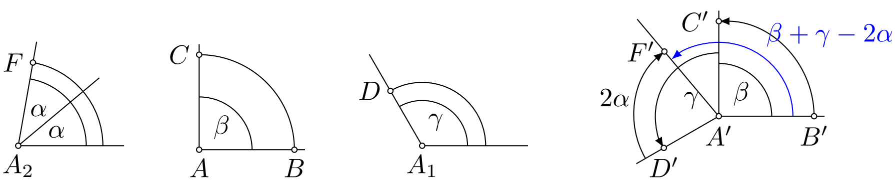


Messung: $c \approx 6{,}9$ cm; $\alpha \approx 21°$; $\beta \approx 128°$; $h_c \approx 3{,}8$ cm

Aufgabe 050613:
Gegeben sind die Winkel α, β und γ (siehe Abbildung)
a) Konstruiere den Winkel $\beta + \gamma - 2\alpha$ mit Zirkel und Lineal!
b) Beschreibe die Konstruktion!



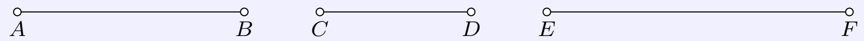
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) siehe Abbildung



b) Konstruktionsbeschreibung:
Ich zeichne einen Strahl mit dem Anfangspunkt A'. Dann schlage ich um den in der Abb. gegebenen Punkt A und um A' je einen Kreisbogen mit dem gleichen Radius.
Der Kreisbogen um A schneidet die Schenkel des Winkels β in den Punkten B und C. Der Kreisbogen um A' schneidet den Strahl im Punkt B'.
Dann schlage ich um B' mit BC als Radius einen Kreisbogen, der den Kreisbogen durch B' in C' schneidet. Ich verbinde A' mit C'.
Dann ist $\angle B'A'C'$ der verlangte Winkel β.

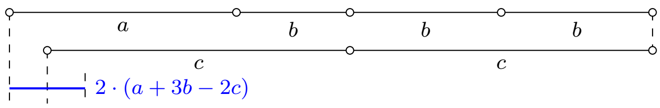
Nun trage ich in der gleichen Weise im Punkt A' an $A'C'$ entgegen dem Uhrzeigersinn den Winkel γ an. Dabei erhalte ich (siehe Abbildung) den Punkt D'.
Schließlich trage ich in A' an $A'D'$ im Uhrzeigersinn den Winkel 2α an (der Winkel 2α wurde vorher in der für den Winkel $(\beta+\gamma)$ beschriebenen Weise konstruiert). Das ergibt den Punkt F'.
Der Winkel $\angle B'A'F'$ ist der verlangte Winkel $(\beta+\gamma-2\alpha)$.

Aufgabe 060613:



Gegeben sind drei Strecken mit den Längen a, b und c (siehe Abbildung).
Konstruiere eine Strecke mit der Länge $2\cdot(a+3b-2c)$!
Anmerkung: Bei der Konstruktion darf die Maßeinteilung des Lineals nicht benutzt werden. Eine Konstruktionsbeschreibung wird nicht verlangt.

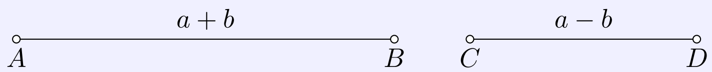
Lösung von Steffen Polster:



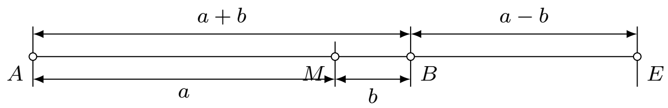
Auf einer Geraden wird die Strecke AB abgetragen und an diese nacheinander dreimal die Strecke CD. Vom erreichten Endpunkt wird die Strecke EF zweimal in entgegengesetzter Richtung abgetragen.

Die entstehende Strecke zwischen dem Startpunkt und dem jetzt erreichten Punkt ist dann $a+3b-2c$ lang. Diese Strecke wird verdoppelt werden und hat die gesuchte Länge (in der Abbildung blau).

Aufgabe 110612:
Von den beiden abgebildeten Strecken AB und CD hat die erste die Länge $a+b$, die zweite die Länge $a-b$.
Konstruiere unter ausschließlicher Verwendung von Zirkel und Lineal eine Strecke der Länge a und eine Strecke der Länge b! Beschreibe und begründe deine Konstruktion!

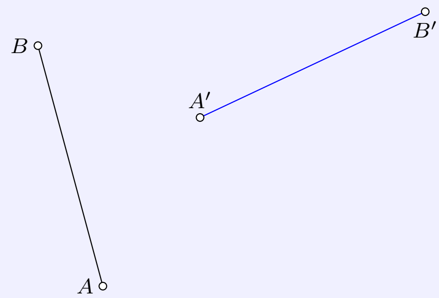


Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Konstruktionsbeschreibung:
(1) Wir zeichnen die Strecke AB.
(2) Wir verlängern die Strecke AB über B hinaus um (eine Strecke der gleichen Länge wie) CD.
(3) Ist E der Endpunkt dieser Verlängerung, so halbieren wir die Strecke AE. Der Mittelpunkt von AE sei M genannt. Dann ist AM eine Strecke der Länge a und MB eine Strecke der Länge b.

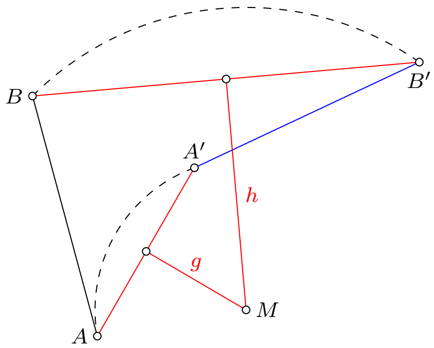


Begründung: Nach Konstruktion hat AE die Länge $a+b+a-b=2a$. Daher hat AM die Länge a sowie MB die Länge $a+b-a=b$.

Aufgabe 310612:
a) Begründe, dass jede Drehung, die einen gegebenen Punkt A in einen anderen gegeben Punkt A' überführt, ihren Drehpunkt M auf der Mittelsenkrechten von AA' haben muss!
b) Die Abbildung zeigt zwei einander gleichlange Strecken AB und $A'B'$.
Konstruiere den Drehpunkt M derjenigen Drehung, bei der A in A' und B in B' übergeht, also die Strecke AB das Bild $A'B'$ hat!
Eine Konstruktionsbeschreibung wird nicht verlangt.



Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

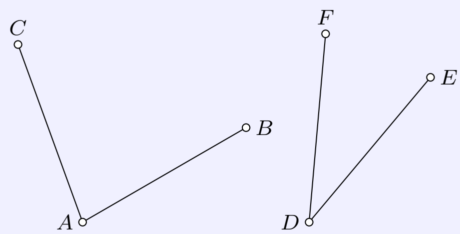


a) Wenn M der Drehpunkt einer Drehung ist, die A in A' überführt, so gilt $MA = MA'$. (1)
Daraus folgt, dass M auf der Mittelsenkrechten von AA' liegen muss, da dies für alle Punkte M gilt, die (1) erfüllen.

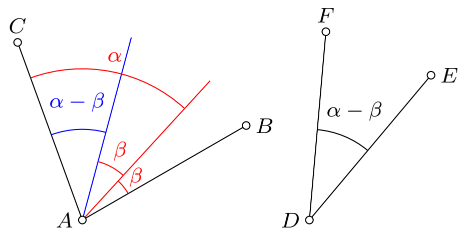
b) Die Abbildung zeigt eine geforderte Konstruktion.
g und h sind die Mittelsenkrechten von AA' bzw. BB', ihr Schnittpunkt ist der gesuchte Punkt M. Zur Kontrolle kann man überprüfen, dass im Kreis um M durch A die Radien MA, MA' einen gleichgroßen Winkel bilden wie MB, MB' im Kreis um M durch B.

Aufgabe 320613:

Gegeben seien zwei Winkel BAC und EDF mit den Maßen $\alpha+\beta$ bzw. $\alpha-\beta$ (siehe Abbildung).
Konstruiere unter alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal zwei Winkel mit den Maßen α und β.
Beschreibe, wie du die Konstruktion gefunden hast.



Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

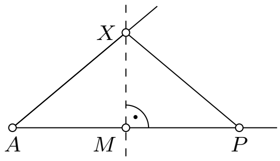


Wenn man die Winkelmaße $\alpha + \beta$ und $\alpha - \beta$ addiert bzw. subtrahiert, so erhält man 2α bzw. 2β. Entsprechend kann man durch Antragen des Winkels mit dem Maß $\alpha - \beta$ an den Strahl AB^+ bzw. AC^+ Winkel mit den Maßen 2α bzw. 2β zeichnen. Diese Winkel kann man halbieren und so je einen Winkel mit den Maßen α bzw. β erhalten.

II Runde 2

Aufgabe 010624:
Zeichne einen beliebigen Winkel und nenne seinen Scheitelpunkt A! Wähle auf einem der beiden Schenkel einen beliebigen Punkt und nenne ihn P!
Konstruiere nun auf dem anderen Schenkel einen Punkt X so, dass $PX = AX$ ist! Begründe die Konstruktion!

Lösung von Steffen Polster:



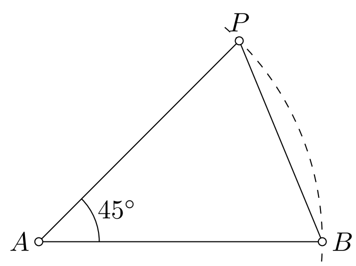
Alle Punkte, die von A und P den gleichen Abstand haben, liegen auf der Mittelsenkrechten der Strecke $\overline{AB}$.
Konstruiert man diese Mittelsenkrechte, so schneidet sie den zweiten Schenkel des Winkels im gesuchten Punkt X.

Aufgabe 020625:
Zeichne eine Strecke $AB = 5$ cm! Trage in A an AB den Winkel $\alpha = 45°$ an!
Gesucht ist auf dem Schenkel, auf dem nicht der Punkt B liegt, ein Punkt P mit folgender Eigenschaft:

Verbindet man P und B, dann soll $\angle ABP = \angle APB$ sein.
Wie kann man diesen Punkt P konstruieren?

Lösung von Steffen Polster:

Die Punkte A, B und P bilden ein Dreieck, bei dem die zwei Winkel bei B und P gleich groß sind. Das Dreieck $\triangle ABP$ ist also gleichschenklig, die Basis ist BP und die Schenkel sind $AB = AP$.
Damit findet man den Punkt P, indem man die Strecke $\overline{AB} = 5$ cm auf dem zweiten Schenkel abträgt.

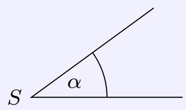


Aufgabe 030623:
Gegeben seien zwei Punkte A und B, deren Abstand 10 cm beträgt. Du hast als Hilfsmittel nur ein Lineal von 8 cm Länge (ohne Zentimetereinteilung) und einen Zirkel zur Verfügung.
Zeichne die Gerade, die durch A und B geht, und begründe die Konstruktion!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Man schlägt um A und um B Kreise mit gleichem Radius, der etwas größer als 5 cm sein muss.

Die beiden Schnittpunkte dieser Kreise werden durch das Lineal miteinander verbunden und die so entstandene Strecke mit Zirkel und Lineal halbiert. Dann ist der Halbierungspunkt auch der Mittelpunkt der Strecke AB, und diese lässt sich nunmehr mit dem Lineal zeichnen.

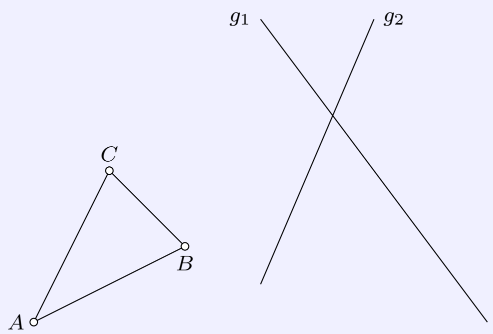
Aufgabe 060623:
Gegeben ist ein Winkel mit dem Gradmaß $\alpha = 36°$ (siehe Abbildung).
Konstruiere unter alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal einen Winkel, dessen Gradmaß 99° beträgt!



Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Der geforderte Winkel lässt sich als Summe aus einem rechten Winkel und einem Winkel vom Gradmaß 9° konstruieren.
Der rechte Winkel wird wie üblich konstruiert. Dann halbiert man den gegebenen Winkel und halbiert einen der beiden so erhaltenen Winkel (Gradmaß $\frac{\alpha}{2} = 18°$) noch einmal. Dadurch entsteht ein Winkel vom Gradmaß $\frac{\alpha}{4} = 9°$.

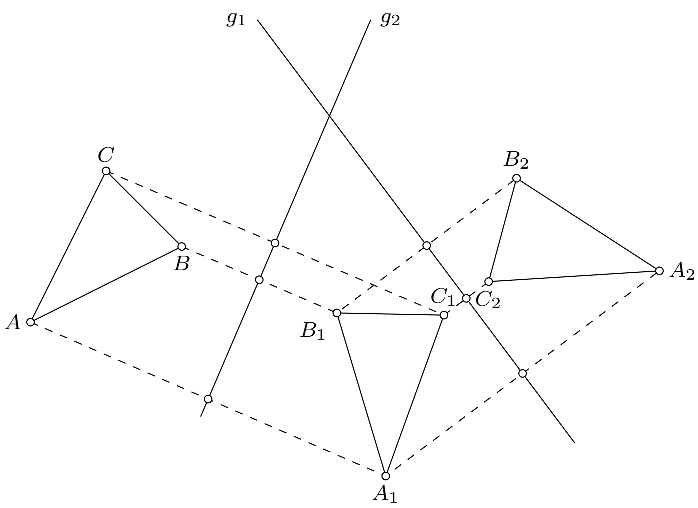
Man addiert auf die im Lehrbuch Klasse 5 angegebene Weise den rechten Winkel und den Winkel von 9° und erhält, wie verlangt, einen Winkel von 99°.

Aufgabe 100621:
Die Abbildung zeigt ein Dreieck $\triangle ABC$ und zwei Geraden g_1 und g_2. Das Dreieck $\triangle ABC$ soll nacheinander an den Geraden g_1 und g_2 gespiegelt werden.



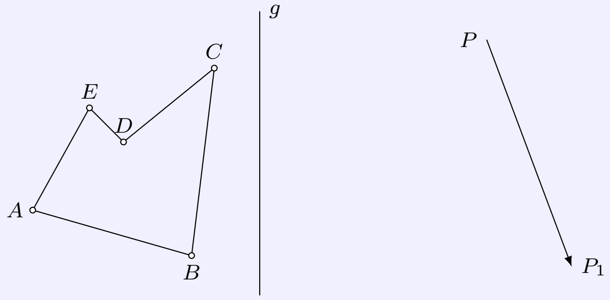
Konstruiere unter alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal das dabei entstehende Dreieck $\triangle A_2B_2C_2$!
(Konstruktionsbeschreibung wird nicht verlangt.)

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

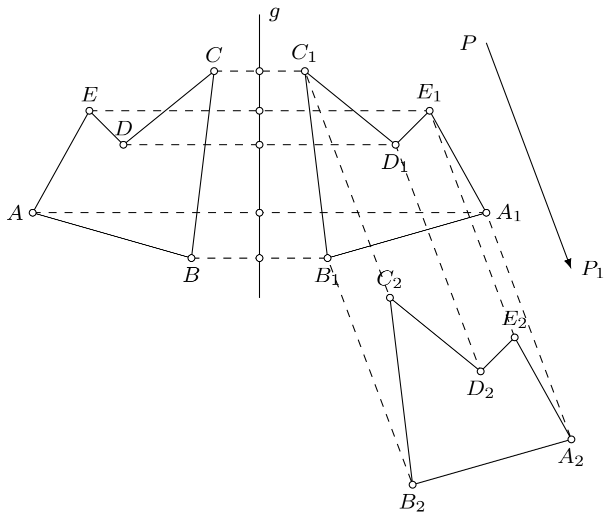


Aufgabe 110621:
Das auf der untenstehenden Zeichnung abgebildete Fünfeck $ABCDE$ soll an der Geraden g gespiegelt werden. Auf das so entstandene Fünfeck $A_1B_1C_1D_1E_1$ ist anschließend die Verschiebung anzuwenden, die durch den Verschiebungspfeil $\overrightarrow{PP_1}$ gegeben ist.

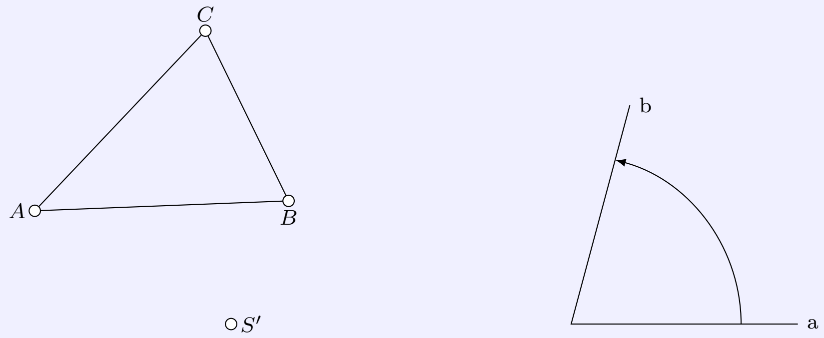
Konstruiere unter alleiniger Verwendung von Zirkel, Lineal und Zeichendreieck auf dem Arbeitsblatt das dadurch entstehende Fünfeck $A_2B_2C_2D_2E_2$! Eine Konstruktionsbeschreibung wird nicht verlangt.



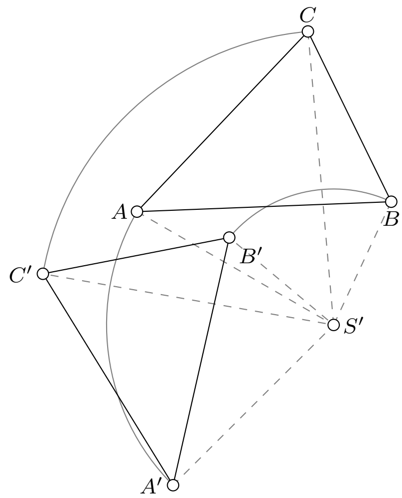
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Aufgabe 120621:
Das abgebildete Dreieck ABC ist um den Drehpunkt S um den Drehwinkel $\angle(a, b)$ im angegebenen Drehsinn zu drehen. Konstruiere unter alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal das dadurch entstehende Dreieck $A'B'C'$! Eine Konstruktionsbeschreibung wird nicht verlangt.

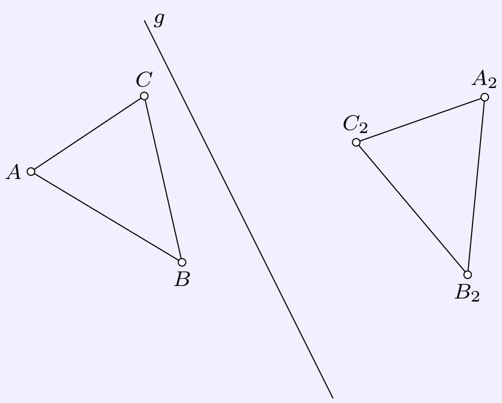


Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



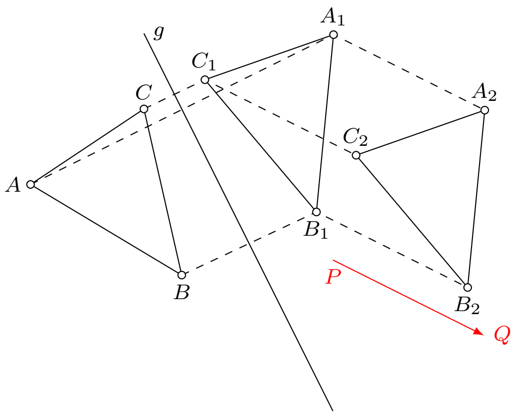
Aufgabe 140621:
Auf dem beiliegenden Arbeitsblatt sind ein Dreieck ABC und ein Dreieck $A_2B_2C_2$, ein Punkt P sowie eine Gerade g abgebildet.

Das Dreieck $A_2B_2C_2$ ist aus dem Dreieck ABC durch folgende Konstruktionen entstanden:
Zunächst wurde $\triangle ABC$ an g gespiegelt, wobei ein Dreieck $A_1B_1C_1$ entstand. Danach wurde auf $\triangle A_1B_1C_1$ eine solche Verschiebung angewendet, dass $\triangle A_2B_2C_2$ als Bild des Dreiecks $A_1B_1C_1$ entstand.



Konstruiere unter Verwendung von Zirkel, Lineal und Zeichendreieck den Verschiebungspfeil $\overrightarrow{PQ}$ dieser auf $\triangle A_1B_1C_1$ anzuwendenden Verschiebung. Eine Konstruktionsbeschreibung wird nicht verlangt.

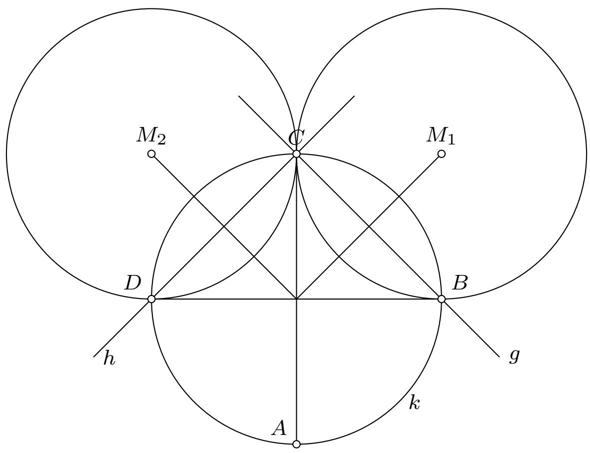
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



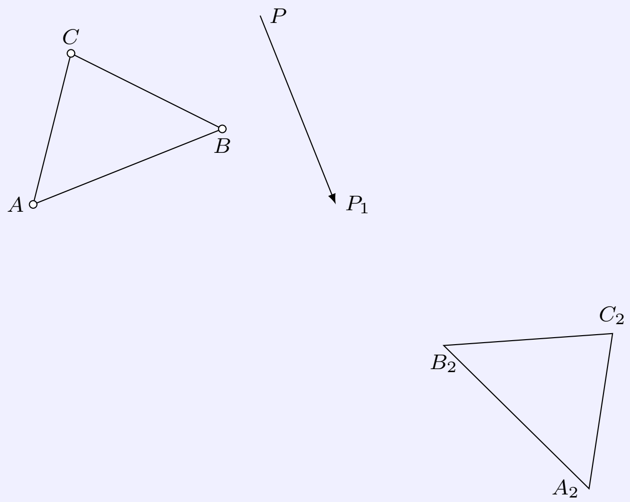
Als Lösung gilt jede (einwandfreie) Zeichnung, in der für mindestens einen der Punkte A_1, B_1 bzw. C_1 bei der Spiegelung an g und dann gleichsinnig parallel und gleichlang zu $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{B_1B_2}$ bzw. $\overrightarrow{C_1C_2}$ der gesuchte Verschiebungspfeil $\overrightarrow{PQ}$ konstruiert wurde.

Aufgabe 150623:
Zeichne einen Kreis k mit dem Mittelpunkt M und einem Durchmesser von 6,4 cm!
Trage in diesen Kreis zwei aufeinander senkrecht stehende Durchmesser ein und bezeichne ihre auf k liegenden vier Endpunkte der Reihe nach entgegen dem Uhrzeigersinn mit A, B, C, D!
Die Gerade durch B und C sei g, die Gerade durch C und D sei h. Spiegele den Kreis k an g und nenne den Mittelpunkt des gespiegelten Kreises M_1!
Spiegele den Kreis k an h und nenne den Mittelpunkt des gespiegelten Kreises M_2!
Als Lösung gilt die ausgeführte Konstruktion ohne Beschreibung.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

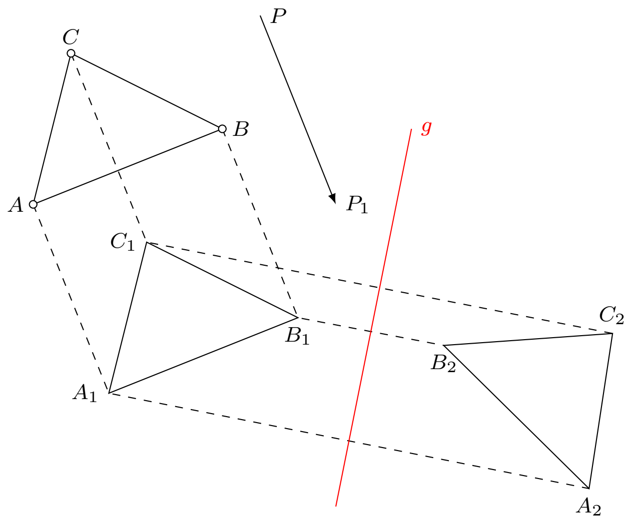


Aufgabe 170624:



Auf der Abbildung sind ein Dreieck ABC, ein Verschiebungspfeil $\overrightarrow{PP_1}$, sowie ein Dreieck $A_2B_2C_2$ abgebildet.
Gesucht ist eine Gerade g mit folgender Eigenschaft:
Wendet man auf das Dreieck ABC zuerst die Verschiebung $\overrightarrow{PP_1}$ und dann die Spiegelung an der Geraden g an, so entsteht das Dreieck $A_2B_2C_2$.
Konstruiere unter alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal eine Gerade g mit dieser Eigenschaft!
Eine Konstruktionsbeschreibung wird nicht verlangt.

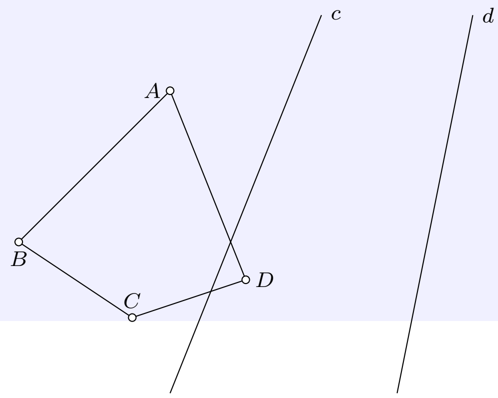
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



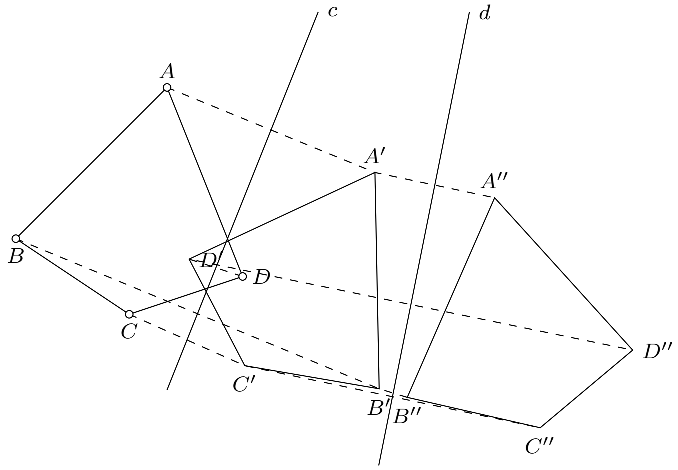
Aufgabe 210624:

Spiegele die Figur $ABCD$ auf dem Arbeitsblatt nacheinander an den gegebenen Geraden c und d!

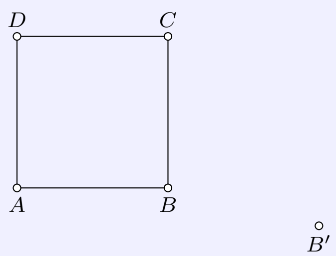
Eine Beschreibung der Konstruktion ist nicht erforderlich.



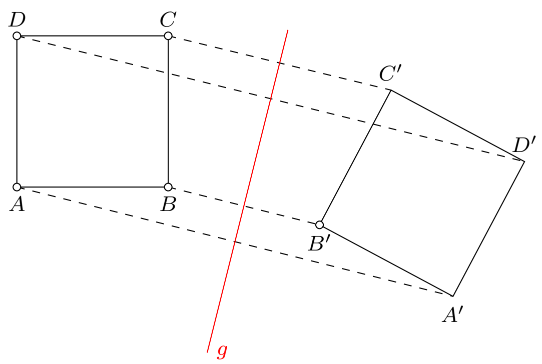
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



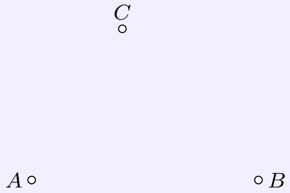
Aufgabe 220622:
Der Punkt B' auf dem Arbeitsblatt sei das Bild von B bei der Spiegelung an einer Geraden g. Konstruiere diese Gerade g und die Bilder A', C', D' der Punkte A, C, D bei der Spiegelung an g! Eine Beschreibung und Begründung der Konstruktion wird nicht verlangt.



Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Aufgabe 260623:



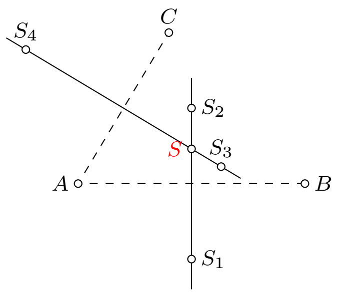
Es seien A, B, C die drei in der Abbildung gegebenen Punkte, die nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen.

a) Konstruiere (mindestens) zwei Punkte S_1 und S_2, für die $S_1A = S_1B$ und $S_2A = S_2B$ gilt!

b) Es gibt genau einen Punkt S, der von A, B und C gleich weit entfernt ist. Konstruiere diesen Punkt S!

c) Begründe, warum der Punkt S bei deiner Konstruktion die geforderten Bedingungen erfüllt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



a) Eine mögliche Konstruktion ist die folgende (siehe Abbildung):
Wir zeichnen um A und um B je einen Kreis mit dem gleichen Radius r, der größer als $\frac{1}{2}AB$ und sonst beliebig gewählt wird. Die beiden Schnittpunkte S_1 und S_2 dieser beiden Kreise erfüllen die Bedingung $S_1A = S_1B$ und $S_2A = S_2B$.

b) In entsprechender Weise konstruieren wir für die Punkte A und C zwei Punkte S_3, und S_4, für die $S_3A = S_3C$ und $S_4A = S_4C$ gilt. Der Schnittpunkt S der Geraden durch S_1, S_2 und der Geraden durch S_3, S_4 erfüllt die geforderten Bedingungen.

c) Nach Konstruktion ist die Gerade durch S_1, S_2 Symmetrieachse zu A, B, wobei alle ihre Punkte ebenso weit von A wie von B entfernt sind.
Ferner ist die Gerade durch S_3, S_4 Symmetrieachse zu A, C, wobei alle ihre Punkte ebenso weit von A wie von C entfernt sind.
Nach Konstruktion ist S ein Punkt beider Symmetrieachsen. Deshalb gilt für ihn: $S_A = S_B$ und $S_A = S_C$ und damit auch $S_B = S_C$, d. h., S ist von A, B und C gleich weit entfernt.

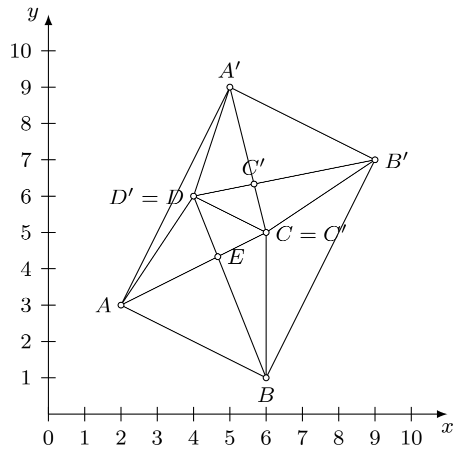
Aufgabe 290622:

a) Zeichne in ein Koordinatensystem (Einheit 1 cm) die Punkte $A(2; 3)$, $B(6; 1)$, $C(6; 5)$ und $D(4; 6)$ ein! Verbinde die Punkte A, B, C und D so miteinander, dass ein Viereck entsteht! Verbinde dann in diesem Viereck den Punkt A mit dem Punkt C und den Punkt B mit D! Bezeichne den Schnittpunkt der Strecken AC und BD mit E!

b) Spiegele die erhaltene Figur an der Geraden durch C und D! Verbinde anschließend noch den Punkt A mit seinem Bildpunkt A' und den Punkt B mit seinem Bildpunkt B'!

c) Die insgesamt erhaltene Figur soll längs ihrer Strecke so durchlaufen werden, dass jede Strecke genau einmal in einem solchen Weg vorkommt.
Wähle einen geeigneten Anfangspunkt und schreibe einen derartigen Weg auf!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



a,b)

c) Ein möglicher Weg ist: $D, A, B, E, D, C, E, A, A', D, E', B', C, E', A', B', B, C$.

Aufgabe 300621:
a) Zeichne in ein Koordinatensystem das Quadrat $ABCD$ mit den Eckpunkten

$$A(1;1), \quad B(5;1), \quad C(5;5), \quad D(1;5)$$

und das Quadrat $PQRS$ mit den Eckpunkten

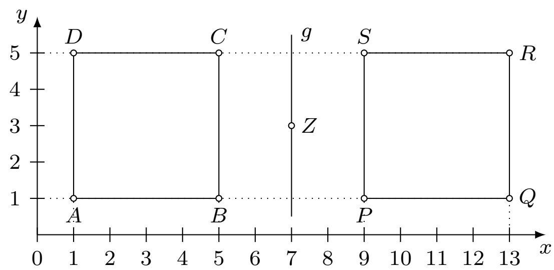
$$P(9;1), \quad Q(13;1), \quad R(13;5), \quad S(9;5)$$

ein!
b) Gibt es eine Spiegelung und auch eine Drehung, bei der das Quadrat $PQRS$ das Bild des Quadrates $ABCD$ ist?
Wenn dies der Fall ist, gib die Koordinaten des Drehzentrums und die Größe des Drehwinkels an! Eine Begründung wird nicht verlangt.

Hinweis: Wenn das Quadrat $PQRS$ das Bild des Quadrates $ABCD$ ist, so braucht die Reihenfolge P, Q, R, S nicht die Reihenfolge der Bildpunkte A, B, C, D zu sein.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

a) Die Abbildung zeigt die in ein Koordinatensystem eingezeichneten Quadrate.
b) Die Abbildung zeigt auch die Spiegelgerade g und eine Konstruktion dieser Geraden.
c) Das Drehzentrum ist $Z(7;3)$, der Drehwinkel beträgt 180°.

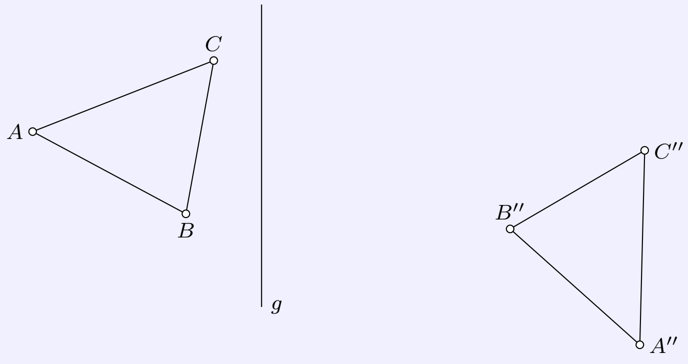


Aufgabe 310624:
Auf dem Arbeitsblatt befinden sich zwei Dreiecke ABC, $A''B''C''$ und eine Gerade g. Zu konstruieren ist

1. das Bild $A'B'C'$ von ABC bei der Spiegelung an g,
2. der Drehpunkt M derjenigen Drehung, die $A'B'C'$ in $A''B''C''$ überführt.

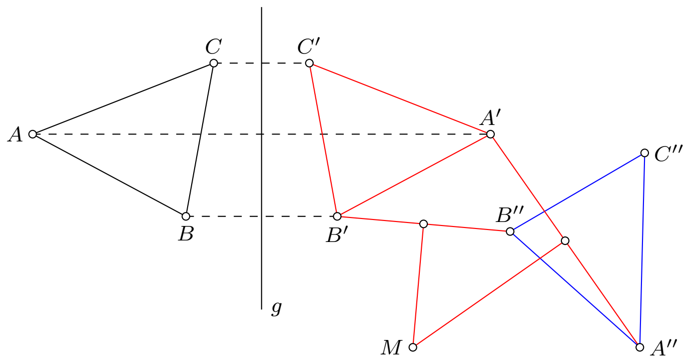
a) Fertige auf dem Arbeitsblatt eine Konstruktionszeichnung an, die alle benötigten Hilfslinien enthält!

b) Beschreibe deine Konstruktion! Eine Begründung wird nicht verlangt.



Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Abbildung zeigt eine Konstruktion. Sie kann folgendermaßen beschrieben werden:

(1) Man konstruiert die Lote AA_1, BB_1, CC_1 von A, B, C auf g und verlängert sie über A_1, B_1 bzw. C_1 hinaus um ihre eigene Länge bis A', B', C'.
(2) Man konstruiert die Mittelsenkrechten m_1, m_2 von $A'A''$ bzw. bzw. $B'B''$ und ihren Schnittpunkt M.



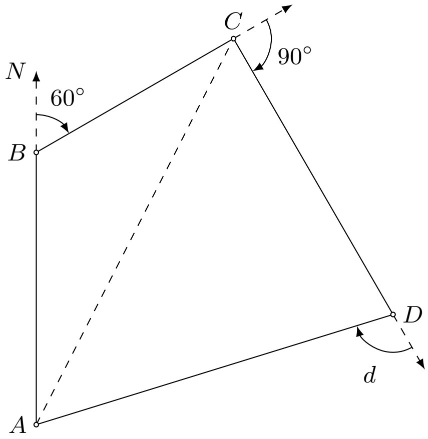
Aufgabe 320623:
Bei einem Geländespiel erhält eine Pfadfindergruppe folgenden Auftrag:

- Geht vom Ausgangspunkt A aus 600 m geradlinig nach Norden! Dort befindet sich ein Aussichtsturm (Punkt B).
- Ändert nun euren Kurs um 60° in nordöstliche Richtung! Nach 500 m erreicht ihr eine alte Scheune (Punkt C).
- Geht jetzt im rechten Winkel in etwa südöstliche Richtung um 700 m weiter! Dort ist eine hohle Eiche (Punkt D). Von ihr aus sollt ihr wieder nach A zurückfinden.

a) Um wie viel Grad muss die Pfadfindergruppe in D den Kurs ändern, um geradlinig nach A zu gelangen?
b) Wie lang ist die Strecke von A nach D?
c) Ein Mitglied der Gruppe will bereits von C aus nach A zurückkehren. Wie weit ist A von C entfernt?

Fertige zur Beantwortung dieser Fragen eine Zeichnung an (auf weißem, nicht kariertem oder liniertem Papier; in geeigneter Verkleinerung); entnehme die gesuchten Angaben mit Zeichengenauigkeit!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Abbildung zeigt eine Darstellung, bei der 100 m verkleinert als 1 cm wiedergegeben werden. An einer solchen Zeichnung kann man mit Zeichengenauigkeit (etwa auf 1° genau bzw. etwa auf 1 mm genau, d. h. für die Wegstrecken etwa auf 10 m genau) ablesen:
a) In D muss der Kurs um $\delta \approx 103°$ (in etwa südwestliche Richtung) geändert werden.
b) Die Strecke von D nach A ist etwa 820 m lang.
c) Der Punkt A ist von C etwa 950 m entfernt.



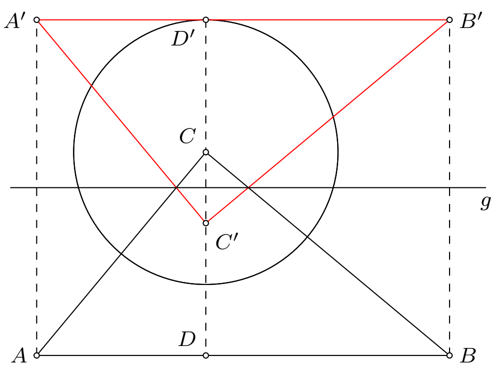
Aufgabe 330623:
Konstruiere ein rechtwinkligen Dreieck ABC mit $AC = 5$ cm, $BC = 6$ cm und dem rechten Winkel bei C!
Konstruiere weiter den Kreis k um C mit dem Radius 2,5 cm!
Nun soll eine Gerade g so gelegt werden, dass folgende Bedingung erfüllt wird:

Wenn man das Dreieck ABC an g spiegelt und dabei das Dreieck $A'B'C'$ erhält, so hat der Kreis k genau 3 gemeinsame Punkte (Schnitt- oder Berührungspunkte) mit diesem Dreieck, d. h. mit der Linie, die sich aus den drei Strecken $A'B'$, $B'C'$ und $C'A'$ zusammensetzt.

Konstruiere eine solche Gerade g und überprüfe durch Konstruktion des durch Spiegelung entstehenden Dreiecks $A'B'C'$, ob die Bedingung erfüllt ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
In Abbildung ist eine mögliche Lösungen gezeigt.

Die dort jeweils verwendete Gerade g kann nach folgender Beschreibung konstruiert werden:
a) Man konstruiert das Lot von C auf AB. Ist D sein Fußpunkt, so verlängert man DC über C hinaus bis zum Schnitt D' mit k.
Dann konstruiert man g als die Mittelsenkrechte von DD'.



III.IV Raumgeometrie

I Runde 1

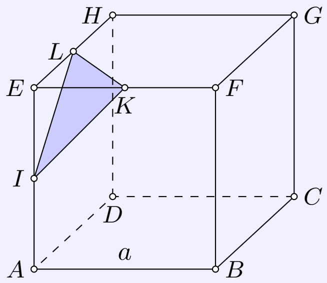
Aufgabe 050614:
In einem Betrieb sollen 1600 Pakete, die je 1,6 dm lang, 7 cm breit und 45 mm hoch sind (Außenmaße), zum Versand gebracht werden.
Arbeiter wollen sie in Kisten von 64 cm Länge, 0,28 m Breite und 1,8 dm Höhe (Innenmaße) einschichten.

Welches ist die kleinste Anzahl von Kisten, die ausreicht, um alle diese Pakete gleichzeitig zu versenden?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wir können in jede der Kisten 64 Pakete einpacken, wenn wir die Pakete so hineinlegen, dass ihre längsten Kanten parallel der längsten Kistenkante und ihre zweitlängsten Kanten parallel der zweitlängsten Kistenkante liegen. In diesem Fall erhalten wir 4 übereinanderliegende Schichten von je 16 Paketen.

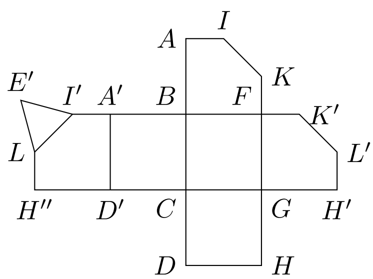
Mit 25 so gepackten Kisten kommen wir aus; denn die Anzahl der in ihnen liegenden Pakete beträgt $25 \cdot 64 = 1600$.
Die Summe der Volumina der Innenräume aller 25 Kisten beträgt genau soviel wie die Summe der Volumina der Pakete. Da weniger als 25 Kisten ein kleineres Volumen als das hier ermittelte haben, ist 25 die kleinste Anzahl von Kisten, die ausreicht, um 1600 Pakete der in der Aufgabe angegebenen Größe gleichzeitig zu versenden.

Aufgabe 090611:



Gegeben sei ein Würfel mit den Eckpunkten A, B, C, D, E, F, G, H (siehe Abbildung) und der Kantenlänge $a = 4$ cm. Von ihm werde durch einen ebenen Schnitt durch die Punkte I, K, L eine Ecke abgeschnitten, wobei I der Mittelpunkt von AE, K der Mittelpunkt von EF und L der Mittelpunkt von EH ist. Zeichne ein Netz des Restkörpers und bezeichne die Eckpunkte!

Lösung von Steffen Polster:
Ein mögliches Netz:

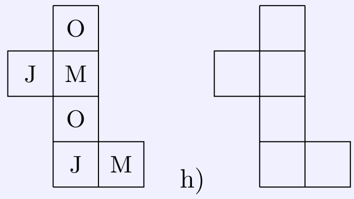


Aufgabe 220611:
In einem Aquarium hat der Hohlraum, der mit Wasser gefüllt werden könnte, die Gestalt eines Würfels von 60 cm Kantenlänge. Dieser Hohlwürfel soll aber nur bis zu einer Höhe von 10 cm unter seinem oberen Rand gefüllt werden.
Wie viel Eimer Wasser sind dafür insgesamt erforderlich, wenn jeder Eimer 9 Liter fasst?

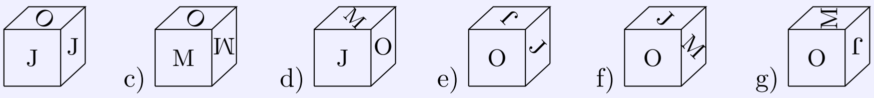
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wegen $60 - 10 = 50$ hat der mit Wasser zu füllende Teil des Aquariums die Gestalt eines Quaders vom Volumen $60\text{cm} \cdot 60\text{cm} \cdot 50\text{cm} = 180000\text{cm}^3 = 180\text{dm}^3$.
Da 1 Liter Wasser ein Volumen von 1 dm^3 hat, sind folglich 180 Liter Wasser einzufüllen. Wegen $180 : 9 = 20$ sind das genau 20 Eimer Wasser.

Aufgabe 220612:
Die sechs quadratischen Flächen der Oberfläche eines Würfels sind so mit den Buchstaben O, J, M beschriftet, wie es das Würfelnetz in Bild a) zeigt. (Der Buchstabe O gelte dabei als kreisförmig.)

a) Welche der in den Bildern b) bis g) abgebildeten Würfel könnten aus diesem Netz hergestellt worden sein?
Für welche Würfel ist dies nicht möglich? (Als Lösung genügt jeweils die Angabe, ob Herstellbarkeit vorliegt, ohne Begründung.)

a) 

h)

b) c) d) e) f) g)


b) In das Würfelnetz des Bildes h) sollen die Buchstaben O, J, M so eingetragen werden, dass sich aus dem Netz ein Würfel mit den folgenden Eigenschaften (1), (2) und (3) herstellen lässt:

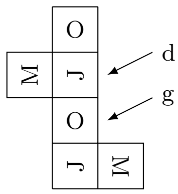
(1) Je zwei gegenüberliegende Seitenflächen des Würfels tragen denselben Buchstaben.
(2) Der Würfel lässt sich so drehen, dass Bild d) entsteht.
(3) Der Würfel lässt sich so drehen, dass Bild g) entsteht.

Als Lösung ist eine mögliche Eintragung anzugeben, ohne Begründung, aber mit der Kennzeichnung einer Fläche, die J enthält und in Bild d) sichtbar sein soll, sowie einer Fläche, die O enthält und in Bild g) sichtbar sein soll.

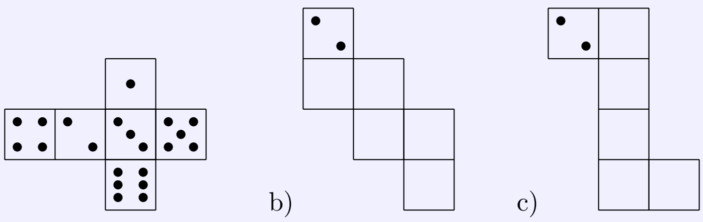
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

a) Die Würfel in den Abbildungen c), e), f) lassen sich aus dem Netz in Abbildung a) herstellen, die Würfel in den Abbildungen b), d), g) nicht.

b) Eine mögliche Eintragung zeigt die Abbildung.

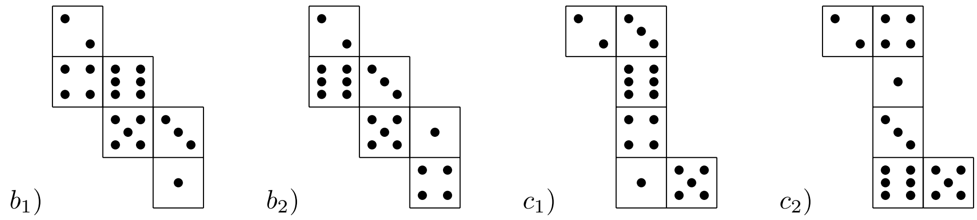


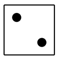
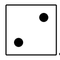
Aufgabe 230611:
Die Bilder a) bis c) zeigen drei Würfelnetze.


a) b) c)

Wie können die Punkte auf dem Würfelnetz b) und auf dem Netz c) verteilt werden, damit der gleiche Würfel entsteht wie aus dem Netz a)?
Gib je ein Beispiel für b) und c) an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Es gibt genau die in der Abbildung angegebenen Möglichkeiten. Von ihnen ist zu b) und c) je eine anzugeben.
Man kann auch Lösungen zulassen, in denen die Punkte auf den Flächen des Würfels zwar dieselben Zahlen darstellen, aber anders angeordnet sind, z. B.  .

Aufgabe 240613:
Wenn man einen Würfel auf einen Tisch stellt, so dass er nirgends seitlich über die Tischplatte hinausragt, so sind von seinen sechs Flächen genau fünf sichtbar.
Ebenso kann man einen kleineren Würfel so auf einen größeren stellen, dass von den sechs Flächen des kleineren Würfels genau fünf sichtbar sind, während die sechste vollständig auf dem größeren Würfel aufliegt, ohne seitlich über ihn hinauszuragen.

In dieser Art sollen drei Würfel mit den Kantenlängen $a_1 = 20$ cm, $a_2 = 10$ cm, $a_3 = 4$ cm der Größe nach so übereinander gestellt werden, dass der größte Würfel zuunterst auf der Tischplatte steht.
Wie groß ist dann die Summe der Flächeninhalte aller sichtbaren Flächenteile der drei Würfel?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Sichtbar sind von jedem der drei Würfel erstens die vier Seitenflächen (der Mantel). Sie haben die Flächeninhalte

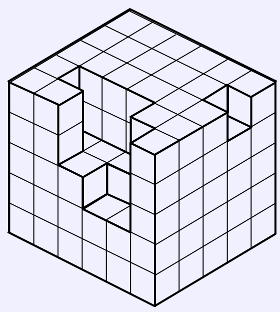
$$A_1 = 4 \cdot a_1^2 = 1600 \text{ cm}^2, \qquad A_2 = 4 \cdot a_2^2 = 400 \text{ cm}^2, \qquad A_3 = 4 \cdot a_3^2 = 64 \text{ cm}^2$$

Sichtbare Flächenteile sind zweitens Teile der Deckflächen der drei Würfel.
Die Flächeninhalte dieser Flächenteile ergeben zusammen den Flächeninhalt der Deckfläche des größten Würfels, also $A_D = a_1^2 = 400 \text{ cm}^2$. Weitere sichtbare Flächenteile kommen nicht vor.
Für die Summe der Flächeninhalte aller sichtbaren Flächenteile gilt daher

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_D = 2464 \text{ cm}^2$$

Aufgabe 280612:

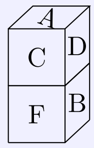
Ein großer Quader wurde in kleine, untereinander gleich große Würfel zerlegt. Wie in der Abbildung ersichtlich, wurden dann einige kleine Würfel herausgenommen. Von denjenigen kleinen Würfeln, die in der Abbildung nicht zu sehen sind, wurde aber keiner weggenommen.
Wie viele der kleinen Würfel enthält dann der in der Abbildung gezeigte Restkörper insgesamt noch?
Beschreibe, wie du die gesuchte Anzahl gefunden hast!

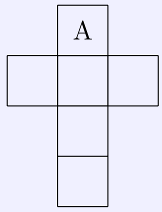


Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die gesuchte Anzahl der kleinen Würfel beträgt 135; man kann sie durch folgende Überlegung finden:

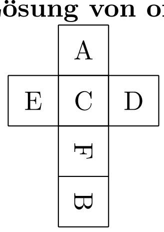
Der große Quader bestand ursprünglich wegen $6 \cdot 5 \cdot 5 = 150$ aus genau 150 kleinen Würfeln. Aus ihm wurden genau 15 kleine Würfel herausgenommen, nämlich
genau 8 aus der vordersten Schicht,
genau 6 aus der zweiten Schicht von vorn,
genau 1 aus der vierten Schicht von vorn.
Wegen $150 - 15 = 135$ enthält der Restkörper somit genau 135 kleine Würfel.

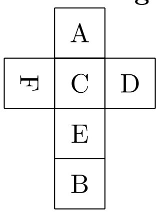
Aufgabe 300611:
Das Bild a) zeigt zwei gleiche, mit den Buchstaben A, B, C, D, E, F in gleicher Anordnung beschriftete Würfel.
Man soll die Beschriftung des Würfelnetzes im Bild b) so ergänzen, dass zwei Würfel, die mit je einem solchen Netz hergestellt werden, sich zum Bild a) zusammenstellen lassen.
Gib zwei verschiedene Ergänzungsmöglichkeiten an!
Gib zu beiden Ergänzungsmöglichkeiten an, welche Fläche des unteren Würfels dann als Grundfläche gewählt werden muss!

a) 

b) 

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:





Die Abbildung zeigt zwei Ergänzungsmöglichkeiten der geforderten Art.
Bei beiden muss als Grundfläche des unteren Würfels die als E beschriftete Fläche gewählt werden.

II Runde 2

Aufgabe 130622:
Vier undurchsichtige Würfel mit den Kantenlängen $a_1 = 24$ cm, $a_2 = 12$ cm, $a_3 = 6$ cm und $a_4 = 3$ cm sollen so übereinander auf eine undurchsichtige Tischplatte gestellt werden, dass der größte zuunterst, darauf der nächstgrößte usw., schließlich der kleinste Würfel zuoberst steht, wobei jeder der Würfel vollständig auf der Deckfläche des unter ihm stehenden (bzw. auf der Tischplatte) ruht (d. h. ohne über diese Fläche hinauszuragen).
Ermittle von diesen Würfeln den Gesamtflächeninhalt derjenigen Oberflächenteile, die sichtbar (d. h. nicht verdeckt) sind!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Jeder der Würfel hat genau 6 Flächen. Von ihnen ist bei jedem die Fläche, auf der er steht, nicht sichtbar. Außerdem verdeckt der zweitgrößte Würfel mit seiner Standfläche einen gleichgroßen Teil der obersten Fläche des größten Würfels. Entsprechendes gilt für den drittgrößten und für den kleinsten der vier Würfel. Weitere nicht sichtbare Teilflächen kommen nicht vor.

Daher erhält man den gesuchten Gesamtflächeninhalt, indem man von der Summe der Flächeninhalte von jeweils 5 Flächen der vier Würfel die Summe der Flächeninhalte je einer Fläche des zweitgrößten, des drittgrößten und des kleinsten Würfels subtrahiert.
Wegen $5 \cdot (24^2 + 12^2 + 6^2 + 3^2) - (12^2 + 6^2 + 3^2) = 3636$ beträgt der gesuchte Gesamtflächeninhalt der sichtbaren Oberflächenteile der vier Würfel 3636 cm^2.

IV Klasse 7

IV.I Gleichungen, Gleichungssysteme

I Runde 1

Aufgabe V00701:
Drei Klassen halfen im NAW und putzten im Wettbewerb 9600 Ziegel ab. Die Klasse 7a putzte 840 Ziegel mehr ab als die Klasse 7b, die Klasse 7c jedoch schaffte 360 Stück mehr als die Pioniere der Klasse 7a.

Wer gewann den Wettbewerb, welche Leistungen erzielten die einzelnen Klassen (in Stück- und Prozentzahlen)?

Lösung von Steffen Polster:
Sind a, b, c die Stückzahlen der Klassen 7a, 7b und 7c, so gilt $a = 840 + b$ und $c = 360 + a$, also

$$a+b+c = 840+b+b+360+840+b = 2040+3b = 9600 \quad \rightarrow \quad b = 2520, \quad a = 3360, \quad c = 3720$$

in Prozenten Klasse 7a: 35%, Klasse 7b: 26,25%, Klasse 7c: 38,75%.

Aufgabe V00703:
Der zehnte Teil einer Zahl wird um 3 vermehrt. Der gleiche Wert ergibt sich, wenn man $\frac{1}{100}$ dieser Zahl um 6 vermindert!
Wie heißt sie?

Lösung von Steffen Polster:
Ist x die gesuchte Zahl, so ergibt sich die Gleichung

$$\frac{x}{10} + 3 = \frac{x}{100} - 6$$

Deren einzige Lösung ist $x = -100$. Die gesuchte Zahl ist -100.

Aufgabe V00705:

$$\frac{169}{30} \quad ? \quad \frac{13}{15} = \frac{13}{2}$$

Welche Rechenzeichen können an Stelle des Fragezeichens stehen?

Lösung von Steffen Polster:
Es ergeben sich mit den Rechenoperationen

$$\frac{169}{30} + \frac{13}{15} = \frac{13}{2} \quad ; \quad \frac{169}{30} - \frac{13}{15} = \frac{143}{30}$$
$$\frac{169}{30} \cdot \frac{13}{15} = \frac{2197}{450} \quad ; \quad \frac{169}{30} : \frac{13}{15} = \frac{13}{2}$$

Als Rechenzeichen können "+" und ":" eingesetzt werden.

Aufgabe V00706:
Für das Gehäuse einer Haushaltwaage wurde im VEB Thüringer Industriewerk Rauenstein ein rechteckiger Blechstreifen von 390 mm Länge und 85 mm Breite verwendet. Die Stärke des Materials betrug 2,5 mm.
Durch einen Verbesserungsvorschlag gelang es, 2 mm starkes Blech zu benutzen.

Berechne die Materialeinsparung in t für eine Auflage von 100000 Stück!
(Dichte des Eisens 7,8 g$\cdot$cm^{-3})

Lösung von Steffen Polster:
Der quaderförmige Blechstreifen hat ursprünglich ein Volumen $V_1 = a \cdot b \cdot c = 39 \cdot 8{,}5 \cdot 0{,}25 = 82{,}875$ cm^3. Durch die Einsparung sind es noch 66,3 cm^3, d. h. eine Volumeneinsparung von 16,575 cm^3. Mit der Dichte des Eisens sind dies 129,285 g.
Da insgesamt 100000 Bleche erzeugt werden sollen, werden 12,9285 t $\approx$ 13 t Material eingespart.

Aufgabe 020715:
Die Summe von 9 aufeinanderfolgenden natürlichen (positiven ganzen) Zahlen beträgt 396.
Wie lauten die Zahlen?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

$$n + (n+1) + (n+2) + (n+3) + (n+4) + (n+5) + (n+6) + (n+7) + (n+8) = 9n + 36 = 396$$

damit folgt $9n = 360$ und $n = 40$. Die Zahlen sind also 40 bis 48.

Aufgabe 040711:
Nur unter Verwendung der Ziffer 7 sollen Zahlen gebildet werden, die miteinander verknüpft die Zahl 1964 ergeben. Folgende Arten der Verknüpfung dürfen dabei auftreten: Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division. Brüche mit gleichem Zähler und Nenner sind nicht zu verwenden.
Gib eine der möglichen Lösungen an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
z. B.: $(777 + 777 + 777) : 7 + 77 + 777 + 777 = 1964$

Aufgabe 070711:
Bei einer Mathematikarbeit erzielten die 36 Schüler einer Klasse folgende Ergebnisse:

a) $\frac{5}{12}$ der Anzahl aller dieser Schüler erhielten eine Drei,
b) $\frac{2}{5}$ von der unter a) genannten Anzahl erreichte die Note Eins.
c) Die Anzahl der Vieren war ebenso groß wie die der Einsen.
d) Die Anzahl der Vieren betrug $\frac{3}{4}$ von der Anzahl der Zweien.
e) Die Anzahl der Fünfen ergibt sich aus a) bis d).
Gib die Zensurenverteilung bei dieser Mathematikarbeit an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Genau 15 Schüler erhielten eine Drei; denn $\frac{5}{12} \cdot 36 = 15$.
b) Genau 6 Schüler erreichten die Note Eins; denn $\frac{2}{5} \cdot 15 = 6$.
c) Genau 6 Schüler erzielten eine Vier.
d) Genau 8 Schüler bekamen eine Zwei; denn $\frac{3}{4} \cdot 8 = 6$.
e) Genau 1 Schüler erhielt eine Fünf; denn $36 - (15 + 6 + 6 + 8) = 1$.

Aufgabe 090714:
Gegeben sei eine beliebige dreistellige natürliche Zahl (z. B. 357). Schreibt man hinter diese Zahl noch einmal die gleiche Zahl, so erhält man eine sechsstellige Zahl (im Beispiel 357 357).
Beweise, dass für jede sechsstellige Zahl, die auf diese Weise entstehen kann, die folgende Behauptung gilt:
Dividiert man die sechsstellige Zahl zuerst durch 7, dann den gefundenen Quotienten durch 11 und den jetzt gefundenen Quotienten durch 13, so erhält man die dreistellige Ausgangszahl!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Jede sechsstellige Zahl, die in der beschriebenen Weise entstehen kann, ergibt sich aus ihrer dreistelligen Ausgangszahl durch folgende Rechnung:

1. Die Ausgangszahl wird mit 1000 multipliziert,
2. zum Ergebnis wird nochmals die Ausgangszahl addiert.

Daher ist die sechsstellige Zahl das 1001-fache der Ausgangszahl. Aus ihr entsteht folglich bei Division durch 7 wegen $1001 : 7 = 143$ das 143-fache der Ausgangszahl.
Wird dies durch 11 dividiert, so ergibt sich wegen $143 : 11 = 13$ das 13-fache der Ausgangszahl. Dividiert man dies durch 13, so erhält man die Ausgangszahl.
Das war die Behauptung, diese ist damit bewiesen.

Aufgabe 150712:
Zwei Gefäße, A bzw. B genannt, haben zusammen ein Fassungsvermögen von genau 8 Litern. Auf beide Gefäße ist eine bestimmte Wassermenge W so verteilt, dass A zur Hälfte und B ganz gefüllt ist. Gießt man nun soviel Wasser aus B in A, dass A ganz gefüllt ist, so ist B noch zu einem Sechstel gefüllt. Gefragt wird

a) nach dem Fassungsvermögen von jedem der Gefäße A und B, b) nach der Wassermenge W.

Ermittle alle in a) und b) erfragten Angaben, die die genannten Eigenschaften haben!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(I) Wenn die genannten Eigenschaften vorliegen, so folgt:

a) Gefäß A habe ein Fassungsvermögen von x Litern, dann hat B ein solches von $(8 - x)$ Litern. Hierfür gilt

$$\frac{x}{2} + 8 - x = x + \frac{8-x}{6} \quad \Rightarrow \quad x = 5$$

Also kann nur die Angabe, dass Gefäß A ein Fassungsvermögen von 5 Litern und Gefäß B deshalb eines von 3 Litern hat, den Bedingungen der Aufgabe entsprechen. Weiter folgt:

b) Wegen $3{,}0\text{l} + 2{,}5\text{l} = 5{,}5$ l beträgt die Wassermenge $W = 5{,}5$ l. Also kann nur diese Angabe die Forderungen erfüllen.

Aufgabe 170711:
Matthias war in den Sommerferien in einem internationalen Pionierzeltlager. Er berichtet seinen Klassenkameraden:

„Ein Viertel aller Teilnehmer und vier Pioniere kamen aus der Sowjetunion, ein Fünftel aller Teilnehmer und fünf Pioniere aus der DDR, ein Sechstel aller Teilnehmer und sechs Pioniere aus der CSSR, ein Achtel aller Teilnehmer und acht Pioniere aus der VR Polen, ein Neuntel aller Teilnehmer und neun Pioniere aus der VR Bulgarien. Die übrigen 21 Pioniere kamen aus der Ungarischen Volksrepublik. In jedem Zelt des Lagers waren genau acht Pioniere untergebracht.“

Ermittle aus diesen Angaben die Anzahl der Zelte des Lagers!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es sei x die Anzahl aller Teilnehmer. Dann gilt laut Aufgabe:

$$x = \left(\frac{1}{4}x + 4\right) + \left(\frac{1}{5}x + 5\right) + \left(\frac{1}{6}x + 6\right) + \left(\frac{1}{8}x + 8\right) + \left(\frac{1}{9}x + 9\right) = 21$$

woraus man erhält $x = 360$.
Wegen $360 : 8 = 45$ betrug die Anzahl der Zelte mithin 45.

Aufgabe 170714:
Der kleine Uwe hat würfelförmige, weiß gefärbte Bausteine mit einer Kantenlänge von 2 cm und würfelförmige, rot gefärbte Bausteine mit einer Kantenlänge von 3 cm. Er baute einen größeren, zusammengesetzten Würfelkörper auf und verwendete dazu nur Steine dieser beiden Sorten.
Dabei bestanden die vier senkrecht stehenden Außenwände aus roten Bausteinen, der restliche Würfelkörper bestand von unten bis oben durchgehend aus weißen Bausteinen.
Ermittle die Anzahl der hierbei verwendeten weißen und die der verwendeten roten Bausteine, wobei vorausgesetzt wird, dass Uwe nicht mehr als 60 Bausteine von jeder Sorte zur Verfügung hatte!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Höhe des von Uwe gebauten Würfelkörpers lässt sich sowohl aus einer Anzahl r roter Steine als auch aus einer Anzahl w weißer Steine zusammensetzen. Sie ist ferner gleich der Breite des Würfelkörpers, die sich aus der Breite von 2 roten Steinen und der einer Anzahl v (≥ 1) weißer Steine ergibt. Daher ist ihre Maßzahl (in cm) die Zahl

$$3r = 2w = 2v + 2 \cdot 3 \tag{1}$$

Hiermit ist $(2v + 2 \cdot 3)$ und folglich auch v durch 3 teilbar. Also gibt es eine natürliche Zahl $n \geq 1$ und mit $v = 3n$, und aus (1) folgt $w = 3n + 3$ sowie $r = 2n + 2$.
Alle verwendeten weißen Steine bilden einen Quader. Dieser besteht aus w Schichten; jede von ihnen enthält v Reihen zu je v Steinen. Daher wurden genau $W = w \cdot v2$ weiße Steine verwendet.

Wäre nun $n \geq 2$, so folgte $v \geq 6$, $w \geq 9$, also $W \geq 9 \cdot 36 > 60$ im Widerspruch zur Aufgabenstellung.
Somit gilt $n = 1, v = 3, w = 6, r = 4$, und damit werden genau $W = 6 \cdot 9 = 54$ weiße Steine verwendet.
Alle verwendeten roten Steine sind in r Schichten angeordnet; jede von ihnen lässt sich aus vier Reihen zu je $(r - 1)$ Steinen zusammensetzen. Daher wurden genau $R = r \cdot 4(r - 1) = 4 \cdot 4 \cdot 3 = 48$ rote Steine verwendet.

Aufgabe 180712:

Berechne

$$\begin{aligned} a &= 1{,}25 : \frac{13}{12} \cdot \frac{91}{60} \\ b &= 2{,}225 - \frac{5}{9} - \frac{5}{6} \\ c &= \frac{32}{15} : \frac{14}{15} + 6 + \left(\frac{45}{56} - 0{,}375 \right) \\ d &= c - \frac{b}{a} \end{aligned}$$

ohne Verwendung von Näherungswerten!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es ist

$$\begin{aligned} a &= \frac{5}{4} : \frac{13}{12} \cdot \frac{91}{60} = \frac{5 \cdot 12 \cdot 91}{4 \cdot 13 \cdot 60} = \frac{7}{4} \\ b &= \frac{89}{40} - \frac{5}{9} - \frac{5}{6} = \frac{801 - 200 - 300}{360} = \frac{301}{360} \\ c &= \frac{32 \cdot 15}{15 \cdot 14} + 6 + \left(\frac{45}{56} - \frac{3}{8} \right) = \frac{17}{6} + 6 + \frac{45 - 21}{56} = \frac{61}{7} \\ d &= \frac{61}{7} - \frac{\frac{301}{360}}{\frac{7}{4}} = \frac{61}{7} - \frac{301 \cdot 4}{360 \cdot 7} = \frac{61 \cdot 90}{7 \cdot 90} - \frac{301}{90 \cdot 7} = \frac{5490 - 301}{630} = \frac{5189}{630} \end{aligned}$$

Anmerkung: Auch die Angaben $a = 1\frac{3}{4}$, $a = 1{,}75$, $c = 8\frac{5}{7}$ und $d = 8\frac{149}{630}$ genügen der Aufgabenstellung.

Aufgabe 200712:
Aus einem alten ägyptischen Rechenbuch (1700 v. u. Z.) stammt folgende Aufgabe:
Ein Wanderer stellt fest, dass ein Hirte 70 Schafe auf die Weide führt. Er fragt den Hirten: „Sind die Schafe, die du hier führst, deine sämtlichen Schafe?“
„Nein“, antwortet der Hirte, „ich führe nur zwei Drittel von einem Drittel der gesamten Herde, die mir anvertraut ist, auf die Weide.“

Ermittle die Stückzahl der gesamten Herde, die diesem Hirten anvertraut war!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Ist x die gesuchte Stückzahl der gesamten Herde, so ist ein Drittel der Herde $\frac{x}{3}$, und zwei Drittel von diesem Drittel sind $\frac{2}{3} \cdot \frac{x}{3}$. Daher gilt nach dem Aufgabentext:

$$\frac{2}{3} \cdot 13 = 70 \qquad \text{also} \qquad x = 315$$

Die Stückzahl der gesamten Herde beträgt daher 315.

Aufgabe 210712:
Andreas sagt zu seinem Freund:
„Nimm in eine Hand eine gerade, in die andere Hand eine ungerade Anzahl Hölzchen!
Verdopple in Gedanken die Anzahl der Hölzchen in der linken und verdreifache die Anzahl der Hölzchen in der rechten Hand! Addiere die beiden Produkte und nenne mir das Ergebnis! Ich werde dir dann mit Sicherheit sagen, in welcher Hand du die gerade Anzahl von Hölzchen hast.“
Untersuche, ob man wirklich allein aus dem von dem Freund genannten Ergebnis mit Sicherheit die von Andreas angekündigte Aussage erhalten kann!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn der Freund in der linken Hand eine gerade und in der rechten Hand eine ungerade Anzahl von Hölzchen hat, so gilt:
Das erste Produkt ist gerade, weil einer seiner Faktoren gerade ist. Das zweite Produkt ist ungerade, weil beide Faktoren ungerade sind. Die Summe aus diesen beiden Produkten, einer geraden und einer ungeraden Zahl, ist folglich ungerade.

Wenn aber der Freund in der linken Hand eine ungerade Anzahl und in der rechten Hand eine gerade Anzahl von Hölzchen hat, so gilt:
Beide Produkte sind gerade; denn in jedem dieser Produkte kommt ein geradzahliger Faktor vor. Also ist auch ihre Summe eine gerade Zahl.
Daher kann man mit Sicherheit die von Andreas angekündigte Aussage erhalten: Wenn der Freund eine ungerade Zahl als Ergebnis nennt, so hat er die gerade Anzahl von Hölzchen in der linken Hand; wenn er aber eine gerade Zahl als Ergebnis nennt, so hat er die gerade Anzahl von Hölzchen in der rechten Hand.

Aufgabe 220713:
Zwei landwirtschaftliche Produktionsgenossenschaften (LPG) A und B wollen einen Entwässerungsgraben von 2,4 km Länge säubern.
Der LPG A gehören davon 1,5 km, die LPG B besitzt die übrigen 0,9 km.
Damit diese wichtige Arbeit in kurzer Zeit geschafft wird, hilft auch die LPG C mit. Die drei LPG führen die Säuberungsarbeiten so durch, dass jede einen gleichlangen Grabenabschnitt übernimmt. Danach ist an die LPG C für die von ihren Mitgliedern geleistete Arbeit ein Betrag von insgesamt 240 M durch die LPG A und B zu zahlen. Jede dieser beiden LPG zahlt davon soviel, wie es der Länge des Grabenstücks entspricht, dessen Reinigung die LPG C für sie übernommen hat.

Berechne die beiden von den LPG A und B gezahlten Beträge!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Jede LPG säuberte ein Drittel des 2,4 km langen Grabens, also 0,8 km. Diese Länge entspricht daher den 240 M, die die LPG C bekommt. Für je 0,1 km erhält die LPG C somit jeweils 30 M. Von den 0,9 km der LPG B wurden 0,8 km mit eigenen Kräften und folglich 0,1 km durch die LPG C gesäubert.
Die LPG B zahlte daher 30 M, die LPG A die restlichen 210 M an die LPG C.

Aufgabe 240714:
(a) Über die Maßzahlen der in Zentimeter gemessenen Seitenlängen eines Dreiecks wird vorausgesetzt:
(1) Diese Maßzahlen sind drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen.
(2) Der Umfang des Dreiecks ist um 25 cm länger als die kürzeste Dreiecksseite. Ermittle aus diesen Voraussetzungen die drei Seitenlängen!

(b) Löse die Aufgabe, wenn die Voraussetzung (2) durch die folgende Voraussetzung (2') ersetzt wird!
(2') Es sei n eine vorgegebene natürliche Zahl. Der Umfang des Dreiecks ist um n Zentimeter länger als die kürzeste Dreiecksseite. Die gesuchten drei Seitenlängen sind mit Hilfe von n ausgedrückt anzugeben.

(c) Untersuche, welche natürlichen Zahlen n in (2') vorzugeben sind, damit in (b) eine lösbare Aufgabe entsteht!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(a) Da der Umfang die Summe der Längen der kürzesten Dreiecksseite und der beiden anderen Seiten ist, beträgt nach (2) die Summe der Längen der beiden anderen Seiten 25 cm. Also ist 25 nach (1) die Summe zweier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen. Das ist nur möglich, wenn es sich um die Zahlen 12 und 13 handelt. Hiernach (und nochmals wegen (1)) lauten die gesuchten Seitenlängen 11 cm, 12 cm,

13 cm.

(b) Wie in (a) folgt, dass n die Summe zweier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen ist.
Bezeichnet m die Zahl in der Mitte zwischen diesen beiden aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, so lauten sie $m - \frac{1}{2}$ und $m + \frac{1}{2}$; ihre Summe ist also $2m$.
Da sie n beträgt, muss $m = \frac{n}{2}$ sein. Die beiden aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen sind somit $\frac{n}{2} - \frac{1}{2}$ und $\frac{n}{2} + \frac{1}{2}$, die Maßzahlen der drei gesuchten Seitenlängen können folglich nur $\frac{n}{2} - \frac{3}{2}$, $\frac{n}{2} - \frac{1}{2}$, $\frac{n}{2} + \frac{1}{2}$ lauten.
(c) Die Aufgabe (b) ist hiernach genau dann lösbar, wenn die zuletzt gefundenen Zahlen natürliche Zahlen größer als 0 sind, die auch die in der Dreiecksungleichung geforderte Bedingung erfüllen, dass die größte der drei Maßzahlen kleiner als die Summe der beiden anderen Maßzahlen ist.

(I) Natürliche Zahlen sind die drei Zahlen genau dann, wenn die (vorzugebende natürliche) Zahl n ungerade ist und $n \geq 3$ gilt.
(II) Größer als 0 sind sie genau dann, wenn $n > 3$ ist.
(III) Für $n = 5$ lauten die drei Maßzahlen 1, 2, 3; sie erfüllen also nicht die Dreiecksungleichung.
Für $n = 7$ lauten sie 2, 3, 4 und erfüllen somit die Dreiecksungleichung.
Vergrößert man n noch weiter, so vergrößern sich die drei Maßzahlen stets um einen einheitlichen Betrag. Also vergrößert sich die Summe der beiden kürzesten Längen um den doppelten Betrag wie die längste; somit bleibt die Dreiecksungleichung erst recht gültig.
Mit (I), (II), (III) ist bewiesen: In (b) entsteht genau dann eine lösbare Aufgabe, wenn die natürliche Zahl n als ungerade Zahl $n \geq 7$ vorgegeben wird.

Aufgabe 300712:
Fünf Schüler der Klasse 7a sammelten Altpapier. Von der Menge, die sie insgesamt zusammenbrachten, hatte Marco ein Viertel, Frank ein Sechstel, Matthias ein Fünftel und Steffen ein Zehntel beigetragen. Dirk hatte 2 kg mehr als Marco gesammelt.

a) Wie viel Kilogramm Altpapier hatte jeder dieser fünf Schüler beigetragen?
b) Welcher Betrag wurde für die von den fünf Schülern insgesamt abgelieferte Papiermenge bezahlt, wenn für jedes Kilogramm 30 Pfennig bezahlt wurden?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn die fünf Schüler insgesamt x Kilogramm Altpapier zusammenbrachten, so hatten jeweils Marco $\frac{x}{4}$, Falk $\frac{x}{6}$, Matthias $\frac{x}{5}$, Steffen $\frac{x}{10}$ und Dirk $\frac{x}{4} + 2$ Kilogramm beigetragen. Also gilt

$$x = \frac{x}{4} + \frac{x}{6} + \frac{x}{5} + \frac{x}{10} + \frac{x}{4} + 2 = \frac{58x}{60} + 2 \qquad \Rightarrow \qquad x = 60$$

a) Daher hatten Marco 15 kg, Falk 10 kg, Matthias 12 kg, Steffen 6 kg und Dirk 17 kg beigetragen.
b) Wegen $60 \cdot 30 = 1800$ wurden für das gesammelte Altpapier 18 M bezahlt.

Aufgabe 320713:
Ein Wasserbehälter soll durch zwei Röhren gefüllt werden. Zum Füllen nur durch die erste Röhre wären 3 Stunden erforderlich, zum Füllen nur durch die zweite Röhre 2 Stunden.
In wie viel Minuten ist der Behälter voll, wenn durch beide Röhren gleichzeitig gefüllt wird?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
In einer Minute wird wegen 3 h = 180 min von der ersten Röhre $\frac{1}{180}$ des Behälters gefüllt, ebenso wegen 2 h = 120 min von der zweiten Röhre $\frac{1}{120}$ des Behälters. Also füllen beide Röhren zusammen in einer Minute

$$\frac{1}{180} + \frac{1}{120} = \frac{1}{72}$$

des Behälters. Daher ist der Behälter durch beide Röhren in 72 Minuten gefüllt.

Aufgabe 330713:
Anke berichtet, dass sie ein gleichschenkliges Dreieck mit dem Umfang 14 cm gezeichnet hat, in dem eine der drei Seiten genau dreimal so lang ist wie eine zweite der drei Seiten.
Beate meint, durch diese Angaben seien die Längen aller drei Seiten eindeutig bestimmt.
Christin meint dagegen, die Angaben könnten bei mehr als einer Möglichkeit für die drei Seitenlängen zutreffen.
Untersuche, ob Beate oder Christin recht hat! Ermittle alle vorhandenen Möglichkeiten für die drei Längen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Ist c die Länge der Basis und $a = b$ die Länge der Schenkel des genannten Dreiecks, so gilt nach Anjas Angaben entweder $a = 3 \cdot c$ oder $c = 3 \cdot a$.
Da nach der Dreiecksungleichung $a + a > c$ gilt, scheidet jedoch der Fall $c = 3 \cdot a$ aus; also verbleibt nur die Möglichkeit $a = 3 \cdot c$. (1) Nach den Angaben gilt ferner $2 \cdot a + c = 14$ cm. (2)
Aus (1) und (2) folgt $6 \cdot c + c = 14$ cm, also $c = 2$ cm und damit $a = b = 6$ cm.
Diese Längen erfüllen nicht nur die Forderung $a + a > c$, sondern auch die Forderung $a + c > a$ der Dreiecksungleichung. Also hat Beate recht; für die Längen gibt es genau die genannte Möglichkeit.

II Runde 2

Aufgabe 050721:
Bei den Nahverkehrsbetrieben Rostock kann man Straßenbahnfahrscheine für Erwachsene zu folgenden Preisen kaufen:

(1) Einen Fahrschein an der Zahlbox für 0,20 MDN
(2) Eine Karte mit 6 Fahrabschnitten für 1,00 MDN
(3) Einen Block mit 50 Fahrscheinen für 7,50 MDN (Die Gültigkeitsdauer ist unbegrenzt)
(4) Eine Monatskarte für beliebig viele Fahrten für 10,00 MDN

Welches ist die kleinste Anzahl von Fahrten (monatlich), bei der für eine Person die Monatskarte am billigsten ist?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Eine Straßenbahnfahrt kostet im Falle (1) 20 Pfennig, im Falle (2) $16\frac{2}{3}$ Pfennig, im Falle (3) 15 Pfennig.
Im Falle (3) kosten x Fahrten im Monat genau $15 \cdot x$ Pfennig, während sie im Falle (4) gerade 1000 Pfennig kosten.
Daher ist die Monatskarte bei x Fahrten genau dann am billigsten, wenn $15 \cdot x \geq 1000$ ist; d. h. bei 67 und mehr Fahrten monatlich ist die Monatskarte am billigsten, bei weniger Fahrten nicht.
Die gesuchte Zahl ist daher 67.

Aufgabe 080722:
Es seien a und b beliebige natürliche Zahlen mit $a > b$.
a) Man berechne alle Zahlen x, für die die Summe aus x und dem Produkt von a und b das Quadrat der Zahl a ergibt!
b) Man berechne alle Zahlen y, für die die Differenz aus dem Produkt von a und b und der Zahl y das Quadrat der Zahl b ergibt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

(a) Angenommen, es gibt eine Zahl x mit der geforderten Eigenschaft, dann gilt: $ab + x = a^2$, woraus man $x = a^2 - ab$ erhält.

Also kann höchstens die Zahl $x = a^2 - ab = a(a-b)$ Lösung sein. Tatsächlich ist

$$a \cdot b + a(a-b) = ab + a^2 - ab = a^2$$

(b) Angenommen, es gibt eine Zahl y mit der geforderten Eigenschaft, dann gilt: $ab - y = b^2$, woraus man $y = ab - b^2$ erhält.

Also kann höchstens die Zahl $y = ab - b^2 = b(a-b)$ Lösung sein. Tatsächlich ist

$$a \cdot b - b(a-b) = ab - ab + b^2 = b^2$$

Aufgabe 140724:
Fritz hat von seinem Freund Max für 6 Tage ein Buch geliehen. Zu seinem Freund Paul, der das Buch nach ihm leihen möchte, sagt er am Morgen des 6. Tages:

„Am ersten Tag las ich den 12. Teil des Buches, an den folgenden 4 Tagen jeweils ein Achtel, und heute muss ich noch, wenn ich das ganze Buch lesen will, 20 Seiten weniger lesen, als ich in den vergangenen Tagen zusammen gelesen habe.
Wie viel Seiten hat das Buch insgesamt?“

Untersuche, welche Möglichkeiten es für Paul gibt, auf diese Frage so zu antworten, dass alle Angaben von Fritz zutreffen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, die Angaben treffen zu, wenn das Buch x Seiten hat. Von ihnen las Fritz am ersten Tag $\frac{x}{12}$ Seiten, an den folgenden 4 Tagen zusammen $4 \cdot \frac{x}{8}$ Seiten, das sind zusammen $\frac{7}{12}x$ Seiten. Für den letzten Tag verblieben daher noch $\frac{5}{12}x$ Seiten. Das waren laut Aufgabe 20 Seiten weniger als $\frac{7}{12}x$ Seiten. Daraus folgt $\frac{2}{12}x = 20$ und somit $x = 6 \cdot 20 = 120$.

Somit können nur für die Antwort, das Buch habe 120 Seiten, die Angaben von Pritz zutreffen. In der Tat treffen sie hierfür zu; denn hat das Buch 120 Seiten, so las Fritz am ersten Tag 10 Seiten, an den folgenden 4 Tagen je 15 Seiten, bis dahin also zusammen 70 Seiten; und liest er noch (20 Seiten weniger, d. h.) 50 Seiten, so ergibt sich genau die Seitenzahl des Buches, 120 Seiten.

Aufgabe 160721:
Nach der Jugendweihefeier ließen sich alle Schüler einer Klasse einzeln fotografieren. Jeder ließ von seinem Foto genügend viele Abzüge herstellen, und dann tauschte jeder Schüler dieser Klasse mit jedem seiner Klassenkameraden sein Foto aus.
Wie viel Schüler tauschten insgesamt in dieser Klasse miteinander die Fotos aus, wenn dabei genau 812 Fotografien ihren Besitzer wechselten?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Bezeichnet man die gesuchte Anzahl der Schüler dieser Klasse mit x, dann erhielt jeder Schüler $(x-1)$ Fotografien. Eine natürliche Zahl $x > 1$ entspricht mithin genau dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn für sie $x(x-1) = 812$ gilt.

Nun sind x und $x-1$ benachbarte natürliche Zahlen. Da $812 = 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 29$ ist, lässt sich 812 nur auf die folgenden Weisen in ein Produkt aus zwei natürlichen Zahlen zerlegen:

$$812 = 1 \cdot 812 = 2 \cdot 406 = 4 \cdot 203 = 7 \cdot 116 = 14 \cdot 58 = 28 \cdot 29$$

Dabei sind nur im Falle $28 \cdot 29$ die beiden Faktoren benachbarte natürliche Zahlen. Daher ist $x = 29$.
Es tauschten also 29 Schüler in der genannten Klasse ihre Fotos aus.

Aufgabe 180722:
Von einem Bruch wird gefordert, dass er die beiden folgenden Eigenschaften (1), (2) hat. Ermittle alle Brüche, die diese Forderung erfüllen!

(1) Der Bruch stellt die gleiche gebrochene Zahl dar wie 0,4.
(2) Die Summe aus dem Zähler und dem Nenner dieses Bruches ist eine zweistellige Quadratzahl.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, es gibt einen solchen Bruch $\frac{p}{q}$ mit natürlichen Zahlen p, q und $q \neq 0$. Wegen (1) gilt dann $\frac{p}{q} = \frac{2}{5}$.
Daraus folgt $p = 2n$ und $q = 5n$ (mit $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$), also $p+q = 7n$, was mit $7|p+q$ gleichbedeutend ist.

Da die Zahl 49 die einzige durch 7 teilbare zweistellige Quadratzahl ist, kann wegen (2) nur $p + q = 49$ und somit $n = 7$, $p = 14$, $q = 35$ gelten. Wenn es also einen Bruch mit den geforderten Eigenschaften gibt, dann kann dies nur der Bruch $\frac{14}{35}$ sein. Tatsächlich erfüllt der Bruch beide Bedingungen.

Aufgabe 260721:
Anne, Bernd und Peter helfen im Garten bei der Apfelernte. Alle drei benutzen Körbe gleicher Größe. Anne benötigt 10 Minuten, um einen Korb zu füllen, Bernd braucht dafür 15 Minuten und der kleine Peter sogar 30 Minuten.
Wie lange würde es dauern, bis die drei Kinder gemeinsam einen Korb gefüllt hätten?
Wir setzen voraus, dass sich für keinen der drei Helfer die Pflückgeschwindigkeit ändert.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Anne hat in einer Minute $\frac{1}{10}$ ihres Korbes gefüllt, Bernd $\frac{1}{15}$ und Peter $\frac{1}{30}$. Alle zusammen haben nach einer Minute also

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{30} = \frac{1}{5}$$

eines Korbes gefüllt. Sie brauchen somit zusammen 5 Minuten, um einen Korb gemeinsam zu füllen.

Aufgabe 270721:
Jörg unternahm in den Ferien mit seinem Fahrrad eine Dreitagewanderung. Er legte dabei am ersten Tag die Hälfte und am zweiten Tag ein Drittel der Länge der für alle drei Tage geplanten Wanderstrecke zurück.
Am zweiten Tag war Jörg 24 km weniger gefahren als am ersten Tag.
Ermittle die Länge der Wegstrecke, die Jörg noch für den dritten Tag verblieb!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Aus $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ folgt, dass Jörg am ersten Tag $\frac{1}{6}$ des für alle drei Tage geplanten Weges mehr zurücklegte als am zweiten Tag. Da $6 \cdot 24 = 144$ ist, betrug die gesamte Wanderstrecke 144 km.
Am ersten Tag legte Jörg somit $144km : 2 = 72$ km, am zweiten Tag $144km : 3 = 48$ km zurück. Damit verblieben Jörg für den dritten Tag wegen $144 - 72 - 48 = 24$ noch 24 km.

Aufgabe 320724:
In einem Hallenbad befindet sich auch ein Planschbecken für Kinder. Es kann durch eine Warmwasserleitung und eine Kaltwasserleitung bis zu einer markierten Höhe gefüllt werden. Würde man nur die Warmwasserleitung betreiben, so würde es $12\frac{1}{2}$ Minuten dauern, bis der Wasserspiegel diese Höhe erreicht. Nur mit der Kaltwasserleitung würde man 10 Minuten dazu brauchen.
Um eine vorgesehene Wassertemperatur zu erreichen, wurde zunächst $2\frac{1}{2}$ Minuten lang aus beiden Leitungen Wasser eingelassen; dann wurde die Warmwasserleitung geschlossen.
Berechne die Zeit, die danach noch gebraucht wurde, um allein mit der Kaltwasserleitung den Rest des Beckens bis zur markierten Höhe zu füllen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Warmwasserleitung füllt das Becken in $12\frac{1}{2}$ Minuten, d. h. in $\frac{25}{2}$ Minuten, also füllt sie in einer Minute $\frac{2}{25}$ des Beckens.
Ebenso füllt die Kaltwasserleitung in einer Minute $\frac{1}{10}$ des Beckens. Somit wurden zunächst von beiden Leitungen zusammen in je einer Minute $\frac{2}{25} + \frac{1}{10} = \frac{9}{50}$ des Beckens gefüllt; in $2\frac{1}{2}$ Minuten $\frac{5}{2} \cdot \frac{9}{50} = \frac{9}{20}$ des Beckens.
Danach blieben somit als Rest noch $1 - \frac{9}{20} = \frac{11}{20}$ des Beckens zu füllen. Wegen $\frac{11}{20} : \frac{1}{10} = \frac{11}{2}$ war dieser Rest $\frac{11}{2}$ mal so groß wie $\frac{1}{10}$ 10 des Beckens, d. h. wie derjenige Teil des Beckens, der in einer Minute allein durch die Kaltwasserleitung gefüllt werden kann.
Also wurden für das Füllen des Restes noch $\frac{11}{2} = 5\frac{1}{2}$ Minuten gebraucht.

Aufgabe 330723:
Über ihre viertägige Radtour berichten Teilnehmer:

Michael: „Am zweiten Tag haben wir genau 7 km mehr als am dritten Tag zurückgelegt.“
Martin: „Am zweiten und am dritten Tag sind wir insgesamt 105 km gefahren.“
Matthias: „Am ersten Tag wurden genau 5 16 und am vierten Tag genau 1 4 der gesamten Weglänge aller vier Tage geschafft.“

Weise nach, dass durch diese Angaben eindeutig bestimmt ist, wie viele Kilometer an jedem der vier Tage zurückgelegt wurden, und gib diese vier Weglängen an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Am zweiten und am dritten Tag zusammen wurden nach Michaels Aussage 7 km und die zweifache Weglänge des dritten Tages gefahren. Da dies nach Martins Aussage 105 km waren, betrug die zweifache Weglänge des dritten Tages $(105 - 7)$ km $= 98$ km. Also wurden am dritten Tag 98 km : 2 = 49 km, am zweiten Tag $(49 + 7)$ km $= 56$ km gefahren.

Am ersten und am vierten Tag zusammen wurden nach Matthias’ Aussage $\frac{5}{16} + \frac{1}{4} = \frac{9}{16}$ der gesamten Weglänge gefahren. Die 105 km des zweiten und dritten Tages waren folglich die restlichen $\frac{7}{16}$ der gesamten Weglänge; diese betrug daher $\frac{7}{16} \cdot 105$ km $= 240$ km.

Also wurden am ersten Tag $\frac{5}{16} \cdot 240$ km $= 75$ km, am vierten Tag $\frac{1}{4} \cdot 240$ km $= 60$ km gefahren. Damit ist der geforderte Nachweis geführt, und die vier Weglängen der einzelnen Tage sind angegeben.

Aufgabe 340721:
Großvater hatte seinen drei Enkeln einen Korb mit Nüssen mitgebracht, die sich diese ehrlich teilen sollten. Lars, der allein im Haus war, nahm sich als erster seinen Anteil: Er entnahm dem Korb ein Drittel der Nüsse.
Katja, die beim Nachhausekommen nicht wusste, dass sich Lars bereits bedient hatte, nahm von den im Korb verbliebenen Nüssen ein Drittel.
Schließlich nahm ebenfalls Markus ein Drittel der im Korb verbliebenen Nüsse. Es waren noch 16 Nüsse im Korb.
Wie viele Nüsse hatte jedes der drei Kinder genommen?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Waren zu Beginn n Nüsse im Korb, so folgt:
Lars nahm $\frac{n}{3}$ Nüsse, danach blieben $n - \frac{n}{3} = \frac{2n}{3}$ Nüsse im Korb.
Davon nahm Katja $\frac{1}{3} \frac{2n}{3} = \frac{2n}{9}$ Nüsse, danach blieben $\frac{2n}{3} - \frac{2n}{9} = \frac{4n}{9}$ Nüsse im Korb.
Davon nahm Markus $\frac{1}{3} \frac{4n}{9} = \frac{4n}{27}$ Nüsse, danach blieben $\frac{4n}{29} - \frac{4n}{27} = \frac{8n}{27}$ Nüsse im Korb. Da dies 16 Nüsse waren, folgt $\frac{8n}{27} = 16$ und daraus $n = 54$.

Also waren zu Beginn 54 Nüsse im Korb.
Von ihnen nahm Lars 18 Nüsse, von den verbleibenden 36 Nüssen nahm Katja 12 Nüsse, von den verbleibenden 24 Nüssen nahm Markus 8 Nüsse.

III Runde 3

Aufgabe 010735:
Rolf behauptet, er kenne eine Rechenaufgabe, in der nur die Zahl 7 verwendet wird und deren Ergebnis die Jahreszahl 1962 ist.
a) Versuche, eine derartige Rechenaufgabe aufzustellen!
b) Lässt sich auch eine Rechenaufgabe aufstellen, in der nur die Zahl 1962 verwendet wird und deren Ergebnis 7 lautet? Wenn ja, gib diese Rechenaufgabe an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Zu dieser Aufgabenstellung gibt es mehrere Lösungen, z. B.

$$a_1)\quad \left(7+7+7+7+7+7-\frac{7}{7}-\frac{7}{7}\right)7)\cdot 7\cdot 7+\frac{7}{7}+\frac{7}{7}=1962$$

$$a_2)\quad 7\cdot(7+7)\cdot(7+7)+(7+7+7+7+7)\cdot 7+7\cdot 7\cdot 7\cdot 7+(7+7):7=1962$$

$$b)\quad \frac{1962+1962+1962+1962+1962+1962+1962}{1962}=7$$

Aufgabe 020733:
Hans hat eine Eins geschrieben und ist in bester Stimmung. Als er heimkommt, läuft er daher frohgemut die 20 Stufen bis zu seiner Wohnung im 1. Stock so hinauf, dass er immer 3 Stufen hinauf- und 2 wieder hinuntersteigt, ohne eine Stufe auszulassen.
Klaus, der im gleichen Haus im 4. Stock wohnt, meint: „Wenn du so weitergehst, bin ich eher vor meiner Tür als du vor deiner.“
Sie vereinbaren, dass sie beide im gleichen Rhythmus steigen, und dass der gewinnt, der zuerst auf dem Treppenabsatz vor seiner Wohnung steht. (Bis zum 4. Stock sind es 4 mal 20 Stufen.)
a) Wer gewinnt?
b) Wer würde gewinnen, wenn es bis zum 1. Stock nur 10 Stufen wären und die 3 anderen Treppen aber je 20 Stufen haben?
c) Wie viel Stufen müsste die unterste Treppe haben, damit beide Jungen gleichzeitig ankommen? (Auch hier sollen die 3 übrigen Treppen 20 Stufen haben.)
Begründe deine Antworten!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

a) Die Anzahl der Schritte, die Klaus braucht, ist gleich der Anzahl der Stufen, also 80. Hans schafft in $3+2=5$ Schritten nur $3-2=1$ Stufe. Zu beachten ist aber, dass Hans von der 17. Stufe aus direkt auf seinen Stock kommt (mit drei Schritten), ohne die zwei Schritte wieder zurückzugehen.
Also braucht Hans $17\cdot 5+3=88$ Schritte, womit Klaus gewinnt.

b) Klaus braucht $10+60=70$ Schritte; Hans nur $7\cdot 5+3=38$ und gewinnt in diesem Fall.

c) Gleichheit der Anzahl der Schritte bei s Stufen: $(s-3)\cdot 5+3=s+60$, damit $5s-s=60-3+15$ und weiter $s=18$.

Aufgabe 040731:
Wie viel Seiten eines Buches werden von Seite 1 an fortlaufend nummeriert, wenn dabei insgesamt 1260 Ziffern gedruckt werden?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Zunächst hat man die Seiten 1-9 welche je 1 Ziffern haben $\Rightarrow$ 9 Ziffern.
Dann die Zahlen von 10-99 mit je 2 Ziffern $\Rightarrow$ 180 Ziffern.
Die nun folgenden Zahlen sind alle dreistellig. Bis zur Seite 99 wurden 189 Ziffern benötigt, zieht man das von den 1260 Gesamtziffern ab so sind noch 1071 Ziffern übrig. Teilt man das durch drei so erhält man die Anzahl der dreistelligen Zahlen. Diese ist 357.
Das heißt, dass nach Seite 99 noch 357 andere Seiten kommen. Rechnet man nun $99 + 357$ so erhält man die Gesamtseitenzahl. Also hat das Buch 456 Seiten.

Aufgabe 060734:
Die Zahl $\frac{16}{15}$ soll in der Form $\frac{16}{15} = \frac{a}{m} + \frac{b}{n}$ dargestellt werden. Dabei sollen a, b, m, n natürliche Zahlen sein, für die die Brüche $\frac{a}{m}$ und $\frac{b}{n}$ nicht kürzbar und keine ganzen Zahlen sind.

Gib drei Beispiele einer solchen Darstellung an, wobei
im ersten Beispiel $m = n$ und $a \neq b$ gilt,
im zweiten Beispiel $a = b$ und $m \neq n$ gilt,
im dritten Beispiel $a = b$ und $m = n$ gilt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. $\frac{16}{15} = \frac{a}{m} + \frac{b}{m}$ kann z. B. mit $m = 15$, $a = 2$, $b = 14$ erreicht werden, wobei auch alle anderen Bedingungen der Aufgabe erfüllt sind: $\frac{16}{15} = \frac{2}{15} + \frac{14}{16}$.

II. $\frac{16}{15} = \frac{a}{m} + \frac{a}{n}$ kann z. B. mit $m = 3$, $n = 5$, $a = 2$ erreicht werden, wobei auch alle anderen Bedingungen der Aufgabe erfüllt sind: $\frac{16}{15} = \frac{2}{3} + \frac{2}{5}$.

III. $\frac{16}{15} = \frac{a}{m} + \frac{a}{m}$ kann (zugleich mit den Bedingungen der Aufgabe nur) durch $m = 15, a = 8$ erreicht werden: $\frac{16}{15} = \frac{8}{15} + \frac{8}{15}$.

Aufgabe 070734:
Gegeben sei die Gleichung

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + 7 = x - \frac{3}{4}$$

In dieser Gleichung soll der Summand 7 so durch eine andere Zahl ersetzt werden, dass $x = 11$ die Gleichung erfüllt.
Wie lautet diese Zahl?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(I) Angenommen, a sei eine Zahl, wie sie in der Aufgabenstellung gesucht ist. Dann erfüllt $x = 11$ die Gleichung $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + a = x - \frac{3}{4}$, das heißt: Dann gilt die Gleichung $\frac{11}{2} + \frac{11}{3} + a = 11 - \frac{3}{4}$. Hieraus folgt

$$a = 11 - \frac{3}{4} - \frac{11}{2} - \frac{11}{3} = \frac{13}{12}$$

Also hat höchstens die Zahl $a = \frac{13}{12}$ die verlangte Eigenschaft.

(II) Ist $x = 11$ und $a = \frac{13}{12}$, so ist

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + a = \frac{11}{2} + \frac{11}{3} + \frac{13}{12} = \frac{41}{4} \Rightarrow x - \frac{3}{4} = \frac{41}{4}$$

so dass im Fall $a = \frac{13}{12}$ die Zahl $x = 11$ der Gleichung (1) genügt.

Aufgabe 090732:
Die Maßzahlen a, b, c der Seitenlängen eines Dreiecks sollen die Bedingungen

$$\begin{aligned}(I) \qquad & a + b = 38,\\ (II) \qquad & b + c = 46,\\ (III) \qquad & a + c = 42\end{aligned}$$

erfüllen. Ermittle unter Berücksichtigung dieser Bedingungen
a) die Maßzahl jeder Seitenlänge!
b) Weise nach, dass ein Dreieck existiert, das den Bedingungen (I), (II), (III) genügt!
(Gleiche Maßeinheiten seien wie üblich vorausgesetzt.)

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

a) Wenn die Bedingungen (I), (II), (III) erfüllt sind, so folgt durch eine Eliminationsmethode, z. B. durch Addition von (I), (II), (III), Division durch 2 und anschließende Subtraktion je einer der Gleichungen (I), (II), (III):
$$a = 17, \quad b = 21, \quad c = 25$$

b) Ein Dreieck mit diesen Maßzahlen existiert; denn die Dreiecksungleichungen sind erfüllt. Es ist nämlich
$$17 + 21 > 25, \quad \text{also} \quad a + b > c \qquad ; \qquad 21 + 25 > 17, \quad \text{also} \quad b + c > a$$
$$17 + 25 > 21, \quad \text{also} \quad a + c > b$$
Jedes Dreieck mit diesen Maßzahlen seiner Seitenlängen erfüllt auch die Bedingungen (I), (II), (III). Es ist nämlich
$$a + b = 17 + 21 = 38 \qquad , \qquad b + c = 21 + 25 = 46 \qquad , \qquad a + c = 17 + 25 = 42$$

Aufgabe 100733:
Von den Schülern einer 8. Klasse gehören genau $\frac{3}{5}$ dem Schulchor und genau $\frac{7}{10}$ der Schulsportgemeinschaft an. Genau $\frac{2}{5}$ der Anzahl aller Schüler dieser Klasse sind sowohl Mitglied des Chores als auch Mitglied der Schulsportgemeinschaft (SSG).

Berechne, der wievielte Teil der Anzahl aller Schüler dieser Klasse weder im Chor noch in der SSG ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Laut Aufgabe sind $\frac{3}{5} - \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$ der Anzahl aller Schüler der Klasse Mitglieder des Chores, aber nicht Mitglieder der SSG; und $\frac{7}{10} - \frac{2}{5} = \frac{3}{10}$ der Anzahl der Schüler sind Mitglieder der SSG, aber nicht Mitglieder des Chores.

Berücksichtigt man noch die $\frac{2}{5}$ der Anzahl der Schüler dieser Klasse, die beiden angehören, so verbleibt wegen $\frac{1}{5} + \frac{3}{10} + \frac{2}{5} = \frac{9}{10}$ genau $\frac{1}{10}$ der Anzahl aller Schüler dieser Klasse, und genau soviel sind weder im Chor noch in der SSG.

Aufgabe 100734:
Nach der Sage machte die böhmische Königin Libussa die Gewährung ihrer Hand von der Lösung eines Rätsels abhängig, das sie ihren drei Freiern aufgab:

„Wenn ich aus diesem Korb mit Pflaumen dem ersten Freier die Hälfte des Inhalts und noch eine Pflaume, dem zweiten die Hälfte des Restes und noch eine Pflaume, dem dritten die Hälfte des nunmehrigen Restes und noch drei Pflaumen geben würde, dann wäre der Korb geleert. Nenne die Anzahl der Pflaumen, die der Korb enthält!“

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Ist x die Anzahl der Pflaumen, die der Korb enthält, dann bekommt der erste Freier $(\frac{x}{2}+1)$ Pflaumen. Als Rest verbleiben Pflaumen in der Anzahl $x-(\frac{x}{2}+1)=\frac{x}{2}-1$.
Die Anzahl der Pflaumen, die der zweite Freier bekommt, ist hiernach

$$\frac{\frac{x}{2}-1}{2}+1=\frac{x}{4}+\frac{1}{2}$$

und als nunmehriger Rest verbleiben Pflaumen in der Anzahl

$$\left(\frac{x}{2}-1\right)-\left(\frac{x}{4}+\frac{1}{2}\right)=\frac{x}{4}-\frac{3}{2}$$

Die Anzahl der Pflaumen, die der dritte Freier bekommt, ist dann

$$\frac{\frac{x}{4}-\frac{3}{2}}{2}+3=\frac{x}{8}+\frac{9}{4}$$

Danach ist der Korb geleert, woraus die Gleichung

$$\left(\frac{x}{4}-\frac{3}{2}\right)-\left(\frac{x}{8}+\frac{9}{4}\right)=0$$

folgt. Aus dieser ergibt sich $x=30$. Daher kann die gesuchte Anzahl nur 30 betragen.

Aufgabe 110734:
Fritz erzählt:
„In unserer Klasse gibt es genau doppelt soviel Mädchen wie Jungen. Wären es je 5 Jungen und Mädchen weniger, dann hätten wir genau dreimal soviel Mädchen wie Jungen.“
Ermittle die Anzahl aller Mädchen und die aller Jungen dieser Klasse!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Bezeichnet man die Anzahl der Jungen dieser Klasse mit x, dann ist die der Mädchen $2x$. Die Klasse hat mithin wegen $x+2x=3x$ insgesamt $3x$ Schüler (Mädchen und Jungen).
Wären es je 5 Jungen und Mädchen weniger, so würde die Anzahl aller Schüler $3x-10$ betragen. Daher gilt dann laut Aufgabe

$$3x-10=(x-5)+3(x-5)$$

woraus man $x=10$ erhält. Die Klasse hat also genau 30 Schüler, und zwar 20 Mädchen und 10 Jungen.

Aufgabe 120731:
An einer Oberschule mit genau 500 Schülern bestehen mathematisch-naturwissenschaftliche, künstlerische und Sport-Arbeitsgemeinschaften. Über die Teilnahme von Schülern an diesen Arbeitsgemeinschaften ist folgendes bekannt:

(1) Genau 250 Schüler sind Mitglied mindestens einer Sport-Arbeitsgemeinschaft.
(2) Genau 125 Schüler gehören mindestens einer künstlerischen Arbeitsgemeinschaft an.
(3) Genau 225 Schüler nehmen mindestens an einer mathematisch-naturwissenschaftlichen Arbeitsgemeinschaft teil.
(4) Genau 25 Schüler besuchen mindestens sowohl eine künstlerische als auch eine Sport-Arbeitsgemeinschaft.
(5) Genau 75 Schüler sind mindestens sowohl Mitglied einer mathematisch-naturwissenschaftlichen als auch einer Sport-Arbeitsgemeinschaft.
(6) Genau 25 Schüler nehmen mindestens sowohl an einer mathematisch-naturwissenschaftlichen als auch an einer künstlerischen Arbeitsgemeinschaft teil.
(7) Genau 5 Schüler gehören allen drei genannten Arbeitsgemeinschaftsarten an.

Ermittle die Anzahl aller Schüler dieser Schule, die
a) an genau einer Art dieser Arbeitsgemeinschaften,
b) an keiner dieser Arbeitsgemeinschaften teilnehmen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Mit den Buchstaben M, S, K und den Buchstabengruppen MS, MK, SK, MSK seien die Anzahlen derjenigen Schüler bezeichnet, die an den entsprechenden Arbeitsgemeinschaften (M: mathematisch- naturwissenschaftlich, S: Sport-AG, K: künstlerische AG) teilnehmen, aber nicht an den übrigen. Mit N sei die Anzahl derjenigen Schüler bezeichnet, die an keiner der Arbeitsgemeinschaften teilnehmen. Dann folgt:

$$\begin{aligned}
&(0) \quad N + M + S + K + MS + MK + SK + MSK = 500,\\
&(1) \quad S + MS + SK + MSK = 250,\\
&(2) \quad MK + SK + MSK = 125,\\
&(3) \quad M + MS + MK + MSK = 225,\\
&(4) \quad SK + MSK = 25,\\
&(5) \quad MS + MSK = 75,\\
&(6) \quad MK + MSK = 25,\\
&(7) \quad MSK = 5.
\end{aligned}$$

Wegen (7) und (4) bzw (5) bzw. (6) ist

$$(8) \quad SK = 20 \qquad , \qquad (9) \quad MS = 70 \qquad , \qquad (10) \quad MK = 20$$

Wegen (7) und (1), (8), (9) bzw. (2), (8), (10) bzw. (3), (9), (10) ist

$$(11) \quad S = 155 \qquad , \qquad (12) \quad K = 80 \qquad , \qquad (13) \quad M = 130$$

Wegen (0), (7), (8), (9), (10), (11), (12), (13) ist $N = 20$.
Die in a) gesuchte Anzahl ist $S+K+M$; wegen (11), (12), (13) beträgt sie 365. Die in b) gesuchte Anzahl ist $N = 20$.

Aufgabe 120735:
Ermittle alle nichtnegativen rationalen Zahlen x, die die Gleichung $x + |x - 1| = 1$ erfüllen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es sei x eine beliebige rationale Zahl, für die $0 \leq x \leq 1$ gilt. Dann gilt $x + |x-1| = x + 1 - x = 1$, also ist die gegebene Gleichung erfüllt. Daher erfüllen alle rationalen Zahlen x, für die $x + |x-1| = x + 1 - x = 1$ gilt, diese Gleichung.

Angenommen, es gäbe eine rationale Zahl $x > 1$, die die Gleichung $x + |x - 1| = 1$ erfüllt. Dann wäre $1 = x + |x - 1| = x + x - 1$ und somit $2x = 2$, also $x = 1$, im Widerspruch zu $x > 1$.

Also gibt es keine rationale Zahl $x > 1$, die die gegebene Gleichung erfüllt. Daher erfüllen genau alle diejenigen nicht negativen rationalen Zahlen x, für die $(0 \leq x \leq 1)$ gilt, die gegebene Gleichung.

Aufgabe 140735:
Der Umfang eines Dreiecks mit den Seitenlängen a, b, c beträgt 34 cm. Weiterhin gilt $a : b = 3 : 8$ und $b : c = 4 : 3$.
Ermittle die Seitenlängen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es gilt $a : b = 3 : 8, b : c = 8 : 6$ (Erweiterung von $4 : 3$ mit 2), daraus folgt $a : b : c = 3 : 8 : 6$, d. h., a, b

und c sind der Reihe nach das 3-, 8-, bzw. 6fache ein und derselben Länge.

Wegen $3 + 8 + 6 = 17$ und wegen des gegebenen Umfange von 34 cm beträgt diese Länge 2 cm. Die gesuchten Seitenlängen betragen daher $a = 6$ cm, $b = 16$ cm, $c = 12$ cm.

Aufgabe 180736:
Ermittle alle rationalen Zahlen a mit folgender Eigenschaft:
Das Produkt aus der Zahl a und ihrem absoluten Betrag ist gleich der Summe der Zahl a und ihrem absoluten Betrag.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, eine rationale Zahl a habe die genannte Eigenschaft. Dann gilt

$$a \cdot |a| = a + |a| \tag{1}$$

Für die Zahl a trifft nun genau einer der folgenden zwei Fälle zu:

1. Fall: $a \geq 0$.
Dann gilt $|a| = a$, also folgt aus (1) (2) $a^2 = 2a$. Hiernach verbleiben im 1. Fall nur die Möglichkeiten, dass entweder $a = 0$ gilt oder, falls $a \neq 0$ ist, aus (2) weiter $a = 2$ folgt.

2. Fall: $a < 0$.
Dann gilt $|a| = -a$, und es folgt einerseits $a \cdot |a| \neq 0$, andererseits $a + |a| = 0$. Die Annahme, dass a die Eigenschaft (1) hat, führt somit im 2. Fall auf einen Widerspruch.
Folglich können nur die beiden Zahlen 0 und 2 die genannte Eigenschaft haben. Tatsächlich gilt $0 \cdot |0| = 0 = 0 + |0|$ sowie $2 \cdot |2| = 4 = 2 + |2|$. Also sind genau die Zahlen 0 und 2 die gesuchten Zahlen.

Aufgabe 190731:
Ermittle alle geordneten Paare $(x; y)$ natürlicher Zahlen, die folgende Bedingungen erfüllen:

(1) Die zweite Zahl y ist um 1 kleiner als das Dreifache der ersten Zahl x.
(2) Das Produkt aus dem Sechsfachen der ersten und dem Vierfachen der zweiten Zahl beträgt 1680.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, für ein Paar $(x; y)$ natürlicher Zahlen seien die Bedingungen (1), (2) erfüllt. Dann gilt $y = 3x - 1$ (1) und $6x \cdot 4y = 1680$, also $xy = 70$ (2).
Wie man (bei Beachtung von $70 = 1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7$) durch systematisches Erfassen aller möglichen Fälle erkennt, wird (2) nur von folgenden Zahlenpaaren erfüllt: (1;70), (2;35), (5;14), (7;10), (10;7), (14;5), (35;2), (70;1).

Von diesen Zahlenpaaren erfüllt aber nur (5;14) auch die Bedingung (1). Daher kann nur das geordnete Paar (5;14) alle gestellten Bedingungen erfüllen.
Es erfüllt diese Bedingungen tatsächlich; denn es gilt $14 = 3 \cdot 5 - 1$ und $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 14 = 30 \cdot 56 = 1680$.
Alternativ-Lösung von cyrix:
Aus den beiden Angaben erhält man das Gleichungssystem $y = 3x - 1$ und $6x \cdot 4y = 1680$, wobei die zweite Gleichung äquivalent ist zu $xy = 70$. Setzt man die erste Gleichung hier ein, so erhält man die quadratische Gleichung $3x^2 - x - 70 = 0$, welche im Bereich der reellen Zahlen die Lösungen

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{1}{6} \pm \sqrt{\frac{1}{36} + \frac{70}{3}} \\ &= \frac{1}{6} \cdot (1 \pm \sqrt{1 + 840}) \\ &= \frac{1 \pm 29}{6}, \end{aligned}$$

also $x = 5$ bzw. $x = -\frac{14}{3}$ besitzt.
Davon ist aber offenbar nur $x = 5$ eine natürliche Zahl. Man erhält dazu $y = 14$ und die Probe bestätigt, dass dieses Paar $(x; y) = (5; 14)$ die einzige Lösung in den natürlichen Zahlen ist.

Aufgabe 190735:
Cathrin geht einkaufen. Sie hat genau 18 Geldstücke, und zwar nur Zweimark- und Fünfzigpfennigstücke, bei sich. Von dem Gesamtbetrag dieses Geldes gibt sie genau die Hälfte aus.
Nach dem Einkauf stellt sie fest, dass sie jetzt wieder ausschließlich Zweimark- und Fünfzigpfennigstücke bei sich hat, und zwar soviel Zweimarkstücke wie sie vor dem Einkauf Fünfzigpfennigstücke besaß, und soviel Fünfzigpfennigstücke, wie sie vorher Zweimarkstücke hatte.
Welchen Geldbetrag besaß Cathrin noch nach dem Einkauf?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Bezeichnet man die Anzahl der Zweimarkstücke, die Cathrin vor dem Einkauf besaß, mit x, so hatte sie zur gleichen Zeit $(18 - x)$ Fünfzigpfennigstücke. Der Geldbetrag, den sie vor dem Einkauf besaß, betrug somit

$$(2x + (18 - x) \cdot 0{,}5) \text{ Mark } = (1,5x + 9) \text{ Mark}$$

Da sie davon genau die Hälfte ausgab, hatte sie nach dem Einkauf noch $(0{,}75x + 4{,}5)$ Mark. Laut Aufgabe setzte sich dieser Betrag aus $(18 - x)$ Zweimarkstücken und x Fünfzigpfennigstücken zusammen. Daher gilt

$$0{,}75x + 4,5 = 2(18 - x) + 0{,}5x = 36 - 1{,}5x$$

woraus man $2,25x = 31,5$, also $x = 14$ erhält.

Folglich hatte Cathrin vor dem Einkauf genau 14 Zweimarkstücke und genau 4 Fünfzigpfennigstücke, das sind zusammen 30 Mark, bei sich. Nach dem Einkauf besaß sie genau 4 Zweimarkstücke und genau 14 Fünfzigpfennigstücke, das sind zusammen 15 Mark.

2. Lösungsweg:
Hatte Cathrin nach dem Einkauf noch genau p Mark, so hatte sie vorher genau 2p Mark. Würde man ebenso viele Geldstücke (jeweils der gleichen Werte), wie sie vorher hatte, und dazu noch ebenso viele, wie sie nachher hatte, nebeneinanderlegen, so wären das einerseits genau 18 Zweimarkstücke und 18 Fünfzigpfennigstücke, also $(36 + 9)$ Mark $= 45$ Mark; andererseits wären es $(2p + p)$ Mark $= 3p$Mark. Daher gilt $3p = 45$, also $p = 15$.
Folglich hatte Cathrin nach dem Einkauf noch genau 15 Mark.

Aufgabe 200731:
Von einer natürlichen Zahl z wird gefordert, dass sie sich in vier Summanden zerlegen lässt, die die folgenden Bedingungen erfüllen:

Der erste Summand beträgt zwei Drittel der Zahl z,
der zweite Summand beträgt ein Viertel des ersten Summanden,
der dritte Summand beträgt ein vier Fünftel es zweiten Summanden,
der vierte Summand beträgt ein Viertel des dritten Summanden,
der dritte Summand beträgt 48.

Untersuche, ob diese Bedingungen erfüllbar sind!
Ist dies der Fall, so ermittle alle natürlichen Zahlen z und ihre Zerlegungen in vier Summanden, die diese Bedingungen erfüllen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn eine natürliche Zahl z so in vier Summanden s_1, s_2, s_3, s_4 zerlegt ist, dass die angegebenen

Bedingungen erfüllt sind, so gilt

$$z = s_1 + s_2 + s_3 + s_4 \quad (1) \qquad s_1 = \frac{2}{3}z \quad (2) \qquad s_2 = \frac{1}{4}s_1 \quad (3)$$
$$s_3 = \frac{4}{5}s_2 \quad (4) \qquad s_4 = \frac{1}{4}s_3 \quad (5) \qquad s_3 = 48 \quad (6)$$

Aus (5) und (6) folgt (7) $s_4 = \frac{1}{4} \cdot 48 = 12$.
Aus (6) und (4) folgt (8) $48 = \frac{4}{5} \cdot s_2$, also $s_2 = \frac{5}{4}5 \cdot 48 = 60$.
Aus (8) und (3) folgt (9) $60 = \frac{1}{4} \cdot s_1$, also $s_1 = 4 \cdot 60 = 240$.
Aus (1) und (6) bis (9) folgt $z = 240 + 60 + 48 + 12 = 360$.
Daher kann nur die Zahl $z = 360$ und ihre Zerlegung in $s_1 = 240$, $s_2 = 60$, $s_3 = 48$, $s_4 = 12$ die Bedingungen der Aufgabenstellung erfüllen.

Aufgabe 200734:
Horst, der aktiv Sport treibt, erzählt seinem Freund:
„In vier Jahren habe ich insgesamt an 21 Wettkämpfen teilgenommen, in jedem Jahr an mindestens einem Wettkampf. Dabei war die Anzahl der Wettkämpfe von Jahr zu Jahr größer; im vierten Jahr war sie genau dreimal so groß wie im ersten Jahr.“
Untersuche, ob es für die Wettkämpfe in den einzelnen Jahren Anzahlen gibt, die Horsts Angaben entsprechen, und ob aus den Angaben diese Anzahlen eindeutig hervorgehen! Ist das der Fall, so ermittle diese vier Anzahlen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Sind a, b, c, d Horsts Angaben entsprechende Anzahlen der Wettkämpfe im 1., 2., 3. bzw. 4. Jahr, so gilt

$$0 < a < b < c < d \qquad (1)$$
$$d = 3a \qquad (2)$$
$$a + b + c + d = 21 \qquad (3)$$

Wäre $a \geq 4$, so folgte aus (1), dass $b \geq 5$, $c \geq 6$, $d \geq 7$, also $a + b + c + d \geq 22$ wäre, im Widerspruch zu (3).
Wäre $a \leq 2$, so folgte aus (2), dass $d \leq 6$ wäre; aus (1) folgte dann $c \leq 5$, $b \leq 4$, also $a + b + c + d \leq 17$, in Widerspruch zu (3). Also muss $a = 3$ (4) sein.
Nach (2) folgt $d = 9$ (5), nach (1) folgt $b \geq 4$ (6).
Wäre $b > 4$, so folgte aus (2), dass $c > 5$, also $a + b + c + d > 21$ wäre, im Widerspruch zu (3). Daher muss $b = 4$ (6) sein, und aus (3), (4), (S), (6) folgt $c = 5$.

Also können nur die Anzahlen 3 Wettkämpfe im ersten Jahr, 4 Wettkämpfe im zweiten Jahr, 5 Wettkämpfe im dritten Jahr, 9 Wettkämpfe im vierten Jahr Horsts Angaben entsprechen (7).

Sie entsprechen ihnen; denn es gilt $0 < 3 < 4 < 5 < 9$; $9 = 3 \cdot 3$; $3 + 4 + 5 + 9 = 21$. Daher gibt es Anzahlen, die Horsts Angaben entsprechen, sie gehen eindeutig aus den Angaben hervor und lauten wie in (7) angegeben.

Aufgabe 200736:
In eine Leihbibliothek kamen während eines Tages Schüler aus jeder der Klassenstufen 6, 7 und 8; dies waren insgesamt 85 Schüler. Genau ein Drittel der Schüler der Klassenstufe 6, genau ein Drittel der Schüler der Klassenstufe 7 und genau ein Viertel der Schüler der Klassenstufe 8, das waren insgesamt 26 Schüler, entliehen Bücher aus der Bibliotheksreihe „Mathematische Schülerbücherei“.
Außerdem ergab sich aus Gesprächen, dass genau ein Zehntel der Schüler der Klassenstufe 7 an der Mathematikolympiade des Kreises teilgenommen hatte.
Untersuche, ob aus diesen Angaben die Anzahlen der Schüler der Klassenstufe 6, der Klassenstufe 7 und der Klassenstufe 8 eindeutig hervorgehen! Ist das der Fall, so ermittle diese drei Anzahlen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Sind a, b, c die Anzahlen der Schüler der Klassenstufe 6, 7, 8 in dieser Reihenfolge, so folgt aus den Angaben:
Es sind a und b durch 3 teilbar, c ist durch 4 teilbar, außerdem ist b durch 10 teilbar. Da 3 und 10 teilerfremd sind, ist folglich b durch 30 teilbar. Also gibt es natürliche Zahlen p, q, r mit $a = 3p$, $b = 30q$, $c = 4r$ (1); dabei sind p, q, r ebenso wie a, b, c von 0 verschieden.

Aus (1) und der Angabe über die Gesamtzahl der Schüler folgt $3p + 30q + 4r = 85$ (2); aus (1) und der Angabe über die Anzahl derjenigen Schüler, die Bücher aus der „Mathematischen Schülerbücherei“ entliehen hatten, folgt $p + 10q + r = 26$ (3).

Wegen (2) kann nur $q = 1$ oder $q = 2$ sein. Wäre $q = 2$, dann folgte aus (3): $p + r = 6$ und aus (2) weiterhin $3p + 4r = 3p + 3r + r = 3(p + r) + r = 25$. Wegen $p + r = 6$ gilt $1 \leq p \leq 5$ und $1 \leq r \leq 5$. Aus $3(p + r) + r = 3 \cdot 6 + r = 25$ folgte aber $r = 7$, im Widerspruch zu $r \leq 5$.
Also ist $q = 1$ und mithin $p + r = 16$ sowie $3p + 4r = 3(p + r) + r = 55$. Daraus folgt $3 \cdot 16 + r = 55$ und schließlich $r = 7$ sowie $p = 9$. Damit ist gezeigt, dass aus den Angaben der Aufgabe eindeutig hervorgeht:

Die Anzahlen der Schüler der Klassenstufen 6, 7 bzw. 8 betragen 27, 30 bzw. 28.

Aufgabe 210732:
Ermittle alle Paare $(x; y)$ rationaler Zahlen mit der Eigenschaft, dass die Summe $x + y$ dieselbe Zahl wie das Produkt $x \cdot y$ und auch dieselbe Zahl wie der Quotient $x : y$ ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn ein Paar $(x; y)$ rationaler Zahlen den Bedingungen der Aufgabe genügt, dann gilt

(1) $x + y = x \cdot y$ und
(2) $x + y = x : y$.

Aus (1) und (2) folgt (3) $x \cdot y = x : y$.
Wäre $x = 0$, so wäre nach (1) auch $y = 0$ im Widerspruch zur Existenz von $x : y$. Also kann man (3) durch x dividieren und erhält $y = \frac{1}{y}$.
Die einzigen rationalen Zahlen, die gleich ihrem Kehrwert sind, sind die Zahlen +1 und -1. Wäre $y = +1$, so ergäbe (1) den Widerspruch $x + 1 = x$. Also ist $y = -1$ und damit nach (1) $x - 1 = x$, also $x = \frac{1}{2}$
Daher kann nur das Paar $(\frac{1}{2}; -1)$ den Bedingungen der Aufgabe genügen.

Aufgabe 210736:
Eine Flüssigkeit wird in kleinen, mittleren und großen Flaschen verkauft. In jede kleine Flasche passen genau 200 g, in jede mittlere genau 500 g und in jede große genau 1000 g der Flüssigkeit. Jede gefüllte 200 g-Flasche kostet 1,20 M, jede gefüllte 500 g-Flasche kostet 2,80 M. Der Preis der leeren 500 g-Flasche ist um 50% höher als der der leeren 200 g-Flasche. Die leere 1000 g- Flasche wiederum ist um 50% teurer als die leere 500 g-Flasche.
Welcher Betrag wird eingespart, wenn anstelle von fünf gefüllten 200 g-Flaschen eine gefüllte 1000 g-Flasche gekauft wird?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die leere 200 g-Flasche koste x Mark. Daraus folgt: Die leere 500 g-Flasche kostet 50% mehr, also $\frac{3}{2} \cdot x$ Mark.
Ferner folgt:
Je 200 g der Flüssigkeit kosten $(1{,}20 - x)$ Mark,
je 500 g der Flüssigkeit kosten $(2{,}80 - \frac{3}{2} \cdot x)$ Mark.

Da der Preis für 500 g aber andererseits $\frac{5}{2}$ des Preises für 200 g betragen muss, ergibt sich

$$2{,}80 - \frac{3}{2} \cdot x = \frac{5}{2}(1{,}20 - x) = 3 - \frac{5}{2}x$$

woraus man $x = 0{,}20$ erhält.
Also kostet die leere 200 g-Flasche 0,20 M, die leere 500 g-Flasche mithin 0,30 M und schließlich die leere 1000 g-Flasche $\frac{3}{2} \cdot 0{,}30$ M $= 0{,}45$ M.
Folglich kosten fünf leere 200 g-Flaschen $5 \cdot 0{,}20$ M $= 1$ M. Kauft man daher die 1000 g Flüssigkeit nicht in diesen fünf Flaschen, sondern statt dessen in einer Flasche zu 1000 g, so spart man $(1 - 0{,}45)$ M $=$ 0,55 M ein.

Aufgabe 220731:
Die Konsumgenossenschaft erstattet in jedem Jahr 1,6% desjenigen Betrages zurück, für den Konsummarken abgerechnet wurden. Von vier Familien A, B, C und D ist aus einem Jahr bekannt:

A hatte für einen doppelt so großen Betrag abgerechnet wie B oder, was dasselbe war, für einen dreimal so großen wie C bzw. für einen viermal so großen wie D;
die vier Familien A, B, C, D erhielten zusammen 336 DM zurückerstattet.

Für jede der vier Familien A, B, C, D soll aus diesen Angaben ermittelt werden:

a) Für welchen Betrag hatte diese Familie in diesem Jahr Konsummarken abgerechnet?
b) Welchen Betrag erhielt daher diese Familie zurückerstattet?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Der Betrag, für den die Familie A, B, C bzw. D Konsummarken abgerechnet hatte, sei a, b, c bzw. d. Dann gilt

$$b = \frac{1}{2}a; \qquad c = \frac{1}{3}a; \qquad d = \frac{1}{4}a$$

Die vier Familien hatten also zusammen für den Betrag $a + \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}a + \frac{1}{4}a$. Da 1,6% hiervon 336 M sind, gilt

$$a + \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}a + \frac{1}{4}a = \frac{336 \cdot 100}{1{,}6}M \quad \Rightarrow \quad a = 10080M$$

und damit

$$b = \frac{1}{2} \cdot 10080M = 5040M \qquad ; \qquad c = \frac{1}{3} \cdot 10080M = 3360M \qquad ; \qquad d = \frac{1}{4} \cdot 10080M = 2520M$$

b) Familie A erhielt $\frac{10080 \cdot 1{,}6}{100}M = 161{,}28M$, Familie B erhielt $\frac{5040 \cdot 1{,}6}{100}M = 80{,}64M$, Familie C erhielt $\frac{3360 \cdot 1{,}6}{100}M = 53{,}76M$, Familie D erhielt $\frac{2520 \cdot 1{,}6}{100}M = 40{,}32M$.

Aufgabe 230734:
Von einer Zahl wird folgendes gefordert:

Wenn man die Zahl halbiert,
vom Ergebnis dann 1 subtrahiert,
vom dabei erhaltenen Ergebnis ein Drittel bildet,
von diesem Drittel wieder 1 subtrahiert,
vom nun entstandenen Ergebnis ein Viertel bildet
und von diesem Viertel nochmals 1 subtrahiert,
so erhält man 1.

Gib jede Zahl an, die diese Forderung erfüllt! Beweise dazu, dass jede Zahl, die die Forderung erfüllt, von dir angegeben wurde und dass jede von dir angegebene Zahl die Forderung erfüllt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Eine Zahl x hat genau dann die geforderte Eigenschaft, wenn sie die Gleichung

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\left(\frac{x}{2}-1\right)-1\right)-1=1$$

erfüllt. Diese Gleichung ist der Reihe nach äquivalent mit

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\left(\frac{x}{2}-1\right)-1\right)-1&=1\\ \frac{1}{3}\left(\frac{x}{2}-1\right)-1&=8\\ \frac{x}{2}-1&=27\\ x&=56\end{aligned}$$

Damit ist bewiesen, dass die Zahl 56 die geforderte Eigenschaft hat und dass sie die einzige Zahl mit der geforderten Eigenschaft ist.

Aufgabe 260732:
Über die Feriengäste in einem Ferienheim ist folgendes bekannt:

Die Anzahl der Mädchen ist gleich der Hälfte der Anzahl derjenigen Feriengäste, die keine Mädchen sind.
Die Anzahl der Jungen ist gleich einem Drittel der Anzahl derjenigen Feriengäste, die keine Jungen sind.
Die Anzahl der Frauen ist gleich einem Viertel der Anzahl derjenigen Feriengäste, die keine Frauen sind.
Außer diesen Mädchen, Jungen und Frauen sind in diesem Ferienheim als Feriengäste noch genau 26 Männer.

Untersuche, ob sich aus diesen Angaben eindeutig die Anzahlen der Mädchen, Jungen und Frauen ergeben!
Wenn dies der Fall ist, gib diese Anzahlen an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es sei m die Anzahl der Mädchen, j die Anzahl der Jungen und f die Anzahl der Frauen. Die Anzahl aller Feriengäste in dem Ferienheim sei x. Dann gilt nach Aufgabenstellung

$$m=\frac{1}{2}(x-m) \qquad \text{also} \qquad m=\frac{x}{3} \tag{1}$$

Entsprechend folgt aus $j=\frac{1}{3}(x-j)$, also $3j=x-j$, die Beziehung $j=\frac{x}{4}$ (2) und aus $f=\frac{1}{4}(x-f)$ die Beziehung $f=\frac{x}{5}$ (3).
Nach Aufgabenstellung gilt weiterhin $x=m+j+f+26$. Hieraus folgt wegen (1), (2), (3)

$$x=\frac{x}{3}+\frac{x}{4}+\frac{x}{5}+26 \Rightarrow x=120$$

Nochmals nach (1), (2), (3) folgt hieraus $m=40$, $j=30$, $f=24$.
Damit ist gezeigt, dass sich aus den Angaben eindeutig diese Anzahlen der Mädchen, Jungen und Frauen ergeben.

Aufgabe 280732:
In einer Fabrik zur Herstellung von alkoholhaltigen Essenzen soll aus einem Restbestand von 300 kg 32prozentigem Alkohol durch Zugabe von 90prozentigem Alkohol ein neuer Bestand von 40prozentigem Alkohol hergestellt werden.
Ermittle diejenige Menge 90prozentigen Alkohols, mit der das erreicht wird!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Der Restbestand enthält $\frac{32}{100} \cdot 300$ kg $= 96$ kg Alkohol. Fügt man (x kg 90prozentigen Alkohol und damit) $\frac{9}{10}x$ kg Alkohol hinzu, so enthält der neue Bestand $(96 + \frac{9}{10}x)$ kg Alkohol.
Damit dies 40 Prozent der Menge $(300 + x)$ kg des neuen Bestandes sind, muss

$$96 + \frac{9}{10}x = \frac{4}{10}(300 + x)$$

gelten. Daraus folgt

$$96 + \frac{9}{10}x = 120 + \frac{4}{10}x \qquad \Rightarrow \qquad x = 48$$

Die gesuchte Menge 90prozentigen Alkohols beträgt 48 kg.

Aufgabe 310731:
Bei einer Geburtstagsfeier wurden an die Kinder Bonbons verteilt:
Das erste Kind bekam 1 Bonbon und ein Zehntel vom verbleibenden Rest,
Das zweite Kind bekam 2 Bonbons und ein Zehntel vom nun verbleibenden Rest,
Das dritte Kind bekam 3 Bonbons und ein Zehntel vom nun verbleibenden Rest, usw.

Schließlich waren, als dies konsequent fortgesetzt worden war, alle Bonbons verteilt, und es stellte sich heraus, dass jedes Kind dieselbe Anzahl Bonbons erhalten hatte wie jedes andere Kind.

Ermittle aus diesen Angaben die Anzahl a aller verteilten Bonbons, die Anzahl k aller beteiligten Kinder und die Anzahl b derjenigen Bonbons, die jedes dieser Kinder erhielt!
Überprüfe, dass für die von dir ermittelten Anzahlen a, k, b alle obengenannten Angaben zutreffen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Aus den Angaben folgt: Das 1. Kind bekam $1+\frac{1}{10}(a-1) = \frac{a}{10}+\frac{9}{10}$ Bonbons, danach waren $a-\left(\frac{a}{10} - \frac{9}{10}\right) = \frac{9a}{10} - \frac{9}{10}$ Bonbons vorhanden.
Das 2. Kind bekam $2 + \frac{1}{10}\left(\frac{9a}{10} - \frac{9}{10} - 2\right) = \frac{9a}{100} + \frac{171}{100}$ Bonbons.
Da auch das 1. Kind diese Anzahl erhalten hatte, folgt

$$\frac{9a}{10} - \frac{9}{10} = \frac{9a}{100} + \frac{171}{100} \qquad \Rightarrow \qquad a = 81$$

und damit weiter

$$b = \frac{a}{10} + \frac{9}{10} = 9$$

Da jedes der k Kinder b Bonbons bekam, ist die Anzahl aller verteilten Bonbons $a = k \cdot b$; damit folgt $k = 81 : 9 = 9$.
Probe:

Nummer des Kindes	Anzahl der an dieses Kind ausgegebenen Bonbons	danach verbleibender Rest
1	1 + 80 : 10 = 9	81 - 9 = 72
2	2 + 70 : 10 = 9	72 - 9 = 63
...	...	...
8	8 + 10 : 10 = 9	18 - 9 = 9
9	9 + 0 : 10 = 9	9 - 9 = 0

Aufgabe 320736:
Über ein Schwimmbecken wurden folgende Angaben gemacht:
Das Becken kann durch zwei getrennte Wasserleitungen gefüllt werden. Aus der zweiten Leitung strömen in jeder Minute 50 Kubikmeter mehr heraus als aus der ersten. Um das Becken vollständig zu füllen, werden 48 Minuten gebraucht, wenn beide Leitungen gleichzeitig geöffnet sind; dagegen 2 Stunden, wenn nur die erste Leitung geöffnet ist.
Untersuche, ob das Volumen des Beckens durch diese Angaben eindeutig bestimmt ist! Wenn das der Fall ist, so ermittle dieses Volumen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn das Volumen des Beckens x Kubikmeter beträgt, so folgt aus den Angaben: In jeder Minute strömen aus der geöffneten ersten Leitung $\frac{x}{120}$ Kubikmeter, aus der zweiten $(\frac{x}{120}+50)$ Kubikmeter. Das Volumen des Beckens, das durch beide Leitungen in 48 Minuten gefüllt wird, beträgt daher

$$48 \cdot \left(\frac{x}{120} + \left(\frac{x}{120} + 50\right)\right)$$

Kubikmeter. Also muss die Gleichung

$$48 \cdot \left(\frac{x}{120} + \left(\frac{x}{120} + 50\right)\right) = x$$

gelten. Durch Umformen wird $x = 12000$.
Somit ist durch die Angaben eindeutig bestimmt: Das Volumen des Beckens beträgt 12 000 Kubikmeter.

IV.II Bewegungsaufgaben

I Runde 1

Aufgabe V00707:
Herr A fährt mit seinem PKW auf der Autobahn mit 100 km·h^{-1} an einer Tankstelle (T_1) vorbei. 35 km hinter T_1 muss Herr A den Benzinhahn auf Reserve stellen.
Da die nächste Tankstelle (T_2) auf der Autobahn noch weitere 35 km entfernt ist, geht Herr A auf 60 km·h^{-1} herunter, um weniger Benzin zu verbrauchen.
Mit welcher Durchschnittsgeschwindigkeit wird Herr A die Strecke zwischen T_1 und T_2 unter diesen Bedingungen zurücklegen?

Lösung von Steffen Polster:
Für die Strecke 35 km von T_1 bis zum Umschalten auf Reserve werden $t_1 = \frac{s}{v} = \frac{35km}{100\frac{km}{h}} = 21$ min benötigt.
Für die zweite Strecke von 35 km entsprechend $t_2 = \frac{s}{v} = \frac{35km}{60\frac{km}{h}} = 35$ min.
Aus der damit benötigten Gesamtfahrzeit von 56 Minuten zwischen T_1 und T_2 ergibt sich eine Durchschnittsgeschwindigkeit von $v = \frac{70km}{56min} = 75\frac{km}{h}$.

Aufgabe 030712:
Bei der Friedensfahrt 1963 wurde zwischen Bautzen und Dresden (57 km) ein Einzelzeitfahren ausgetragen.
Die Fahrer starteten dabei in Abständen von 1 Minute. Unmittelbar vor dem späteren Gesamtsieger Klaus Ampler (DDR) startete sein härtester Gegner Vyncke (Belgien). Während Ampler je Stunde durchschnittlich 42 km zurücklegte, erreichte Vyncke einen „Schnitt“ von 40 km je Stunde.
In welcher Zeit und nach wie viel Kilometern hätte Ampler den belgischen Fahrer eingeholt, wenn beide mit konstanter Geschwindigkeit gefahren wären? Begründe deine Antwort!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Ampler legt in jeder Stunde durchschnittlich 2 km mehr zurück als Vyncke. Dieser hatte $\frac{2}{3}$ km Vorsprung, also wäre er nach 20 min von Ampler eingeholt worden. In dieser Zeit hätte Ampler 14 km zurückgelegt.

Aufgabe 040712:
Ein Güterzug legte in der ersten Stunde $35\frac{3}{4}$ km und in den nachfolgenden $2\frac{1}{2}$ Stunden weitere 92,7 km zurück. Für die Rückfahrt auf derselben Strecke benötigte er drei Stunden und 12 Minuten.
Berechne die Durchschnittsgeschwindigkeit für die ganze Fahrt! Runde auf eine Dezimale!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Der Gesamtweg beträgt: $(35\frac{3}{4} + 92{,}7)$ km $\cdot\, 2 = 256{,}9$ km.
Die gesamte Fahrtzeit beträgt: $(1 + 2{,}5 + 3{,}2)$ h $= 6{,}7$ h.
Die Durchschnittsgeschwindigkeit beträgt somit $v = \frac{s}{t} = \frac{256{,}9\text{ km}}{6{,}7\text{ h}} \approx 38{,}3\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Aufgabe 160714:
Bei einem Radrennen auf einem Rundkurs von 1 km Länge hatte zu einem bestimmten Zeitpunkt der Radsportler A genau 500 m Vorsprung vor dem Radsportler B. B fuhr mit einer Geschwindigkeit von 50 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, A mit einer Geschwindigkeit von 45 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

a) Nach wie viel Minuten von dem angegebenen Zeitpunkt an gerechnet holte B den Fahrer A das erste Mal ein, wenn angenommen wird, dass beide mit gleichbleibender Geschwindigkeit fuhren?
b) Nach wie viel weiteren Minuten würde B den Fahrer A zum zweiten Mal einholen („überrunden“), wenn beide Fahrer auch weiterhin mit jeweils gleichbleibender Geschwindigkeit weiterfahren würden? Wie viele Runden hätte A und wie viele B zwischen dem ersten und dem zweiten Mal des Überholens zurückgelegt?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) B muss innerhalb der gesuchten Zeit einen Vorsprung von 500 m aufholen. Innerhalb einer Stunde hätte B eine um 5 km = 5000 m längere Strecke zurückgelegt als A, d. h. einen zehnmal so großen Vorsprung aufgeholt wie erforderlich. Also holte er den Vorsprung von A in $\frac{1}{10}$ Stunde, d. h. in 6 Minuten auf.

b) Bis zum zweiten Mal des Überholens hätte B einen Vorsprung von 1 km aufzuholen. Die dazu benötigte Zeit wäre demnach doppelt so lang wie bei a), also 12 Minuten. In dieser Zeit legte A eine Strecke von $\frac{1}{5} \cdot 45\text{km} = 9$ km, also 9 Runden, zurück und B daher eine Runde mehr, d. h. 10 Runden.

Aufgabe 230712:
Ein Kraftwagen fährt auf einer Autobahn mit einer konstanten Geschwindigkeit von 80 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Ein zweiter Kraftwagen befindet sich 2 km hinter dem ersten und fährt in derselben Richtung mit einer konstanten Geschwindigkeit von 85 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

a) Wie viel Minuten benötigt der zweite Kraftwagen, bis er den ersten einholt?
b) Wie viel Kilometer legt der zweite Kraftwagen zurück, bis er den ersten einholt?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Da die Geschwindigkeit des zweiten Kraftwagens um 5 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ größer ist als die des ersten Kraftwagens, legt der zweite Kraftwagen 5 km mehr in der Stunde zurück als der erste. In $\frac{1}{5}$ h, d. h. in 12 Minuten, kommt er dem ersten Kraftwagen um 1 km näher, also hat er den ersten Kraftwagen in $2 \cdot 12$ Minuten = 24 Minuten eingeholt.

b) In dieser Zeit hat er eine Entfernung von $85 \cdot \frac{2}{5}$ km = 34 km zurückgelegt.

II Runde 2

Aufgabe V10722:
Die Strecke von Berlin nach Karl-Marx-Stadt wird von der Deutschen Lufthansa mit Flugzeugen vom Typ AN 2 beflogen. Um 09.45 Uhr startet die Maschine in Berlin und landet nach 220 Flugkilometern um 11.00 Uhr in Karl-Marx-Stadt.
Ein Flugzeug vom Typ IL 14 P startet um 12.30 Uhr in Leipzig und landet um 14.05 Uhr in Barth nach 443 Flugkilometern.

Im Schnellverkehr der Deutschen Reichsbahn fährt der D-Zug nach Magdeburg um 6.42 Uhr in Berlin ab und trifft nach einer Fahrtstrecke von 169 km um 8.59 Uhr in Magdeburg ein.

In welchem Verhältnis stehen die Durchschnittsgeschwindigkeiten der drei Verkehrsmittel zueinander?

Lösung von Steffen Polster:
Die Durchschnittsgeschwindigkeit wird mittel $v = \frac{s}{t}$ berechnet.
Flugzeug AN 2: $s_1 = 220$ km; $t_1 = 85$ min, d. h. $v_1 = \frac{220}{85} = 2{,}59\frac{\text{km}}{\text{min}} \approx 155\frac{\text{km}}{\text{h}}$
Flugzeug IL 14: $s_2 = 443$ km; $t_1 = 95$ min, d. h. $v_2 = \frac{443}{95} = 4{,}66\frac{\text{km}}{\text{min}} \approx 280\frac{\text{km}}{\text{h}}$
D-Zug: $s_3 = 169$ km; $t_1 = 137$ min, d. h. $v_1 = \frac{169}{137} = 1{,}23\frac{\text{km}}{\text{min}} \approx 74\frac{\text{km}}{\text{h}}$

Aufstellen der gesuchten Proportionen: $155 : 74 = 2{,}1$ und $280 : 74 = 3{,}8$ und somit lautet die gesuchte Proportion $v_1 : v_2 : v_3 = 2{,}1 : 3{,}8 : 1$.

Aufgabe 010722:
Die Eisenbahnstrecke Leipzig - Halle - Köthen - Magdeburg ist 123,6 km lang. Ein Personenzug fährt um 12.32 Uhr in Leipzig ab. Er hat eine Durchschnittsgeschwindigkeit von 32,7 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Ein D-Zug fährt um 13.11 Uhr in Leipzig ab. Seine Durchschnittsgeschwindigkeit beträgt 75,2 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.
a) Um wie viel Uhr holt der D-Zug den Personenzug ein?
b) Wie viel Kilometer haben beide Züge bis dahin zurückgelegt?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Gesucht ist diejenige Wegstrecke ist, die beide Züge bis zum Einholen zurücklegen. Diese Wegstrecke ist das Produkt aus mittlerer Geschwindigkeit und jeweils benötigter Zeit. Die Fahrzeiten, die die beiden Züge bis dahin benötigen, unterscheiden sich um 39 min = $\frac{13}{20}$ h (nämlich der Unterschied zwischen den Abfahrtszeiten).
Die Gleichung ist also, wenn t die Fahrzeit des D-Zuges bezeichnet:

$$t \cdot 75{,}2\frac{\text{km}}{\text{h}} = \left(t + \frac{13}{20}\text{h}\right) \cdot 32{,}7\frac{\text{km}}{\text{h}} = t \cdot 32{,}7\frac{\text{km}}{\text{h}} + 21{,}255 \text{ km}$$

a) Daraus errechnet sich $t = 0{,}5$ h = 30 min. Der D-Zug holt den Personenzug eine halbe Stunde nach 13.11 Uhr, also um 13.41 Uhr ein.
b) Zu diesem Zeitpunkt haben beide Züge 37,6 km zurückgelegt.

Aufgabe 090723:
Ein Tourist war an drei aufeinanderfolgenden Tagen jeweils genau die gleiche Zeit unterwegs.
Am ersten Tag ging er zu Fuß mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 6 km/h. Am zweiten Tag benutzte er ein Moped mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 30 km/h. Am dritten Tag benutzte er ein Auto mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 60 km/h. Der an den drei Tagen zurückgelegte Gesamtweg betrug 520 km.
Ermittle die Zeit, die er an jedem einzelnen der Tage unterwegs war, und die Anzahl der am ersten, zweiten bzw. dritten Tage zurückgelegten Kilometer!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die an den einzelnen Tagen zurückgelegten Wege sind proportional den jeweiligen Durchschnittsgeschwindigkeiten. Der am zweiten bzw. dritten Tag zurückgelegte Weg ist also das 5- bzw. 10fache des am ersten Tag zurückgelegten Weges.

Wegen $1 + 5 + 10 = 16$ ist somit der Gesamtweg, nach Aufgabenstellung 520 km, das 16fache des am ersten Tage zurückgelegten Weges.

Dies ist nur möglich, wenn der am ersten Tage zurückgelegte Weg $520km : 16 = 32{,}5$ km und folglich der am zweiten bzw. dritten Tage zurückgelegte Weg $5 \cdot 32{,}5km = 162{,}5$ km bzw. $10 \cdot 32{,}5km = 325$ km betrugen.

Daraus ergibt sich wegen $\frac{32{,}5}{6} = \frac{65}{12} = 5\frac{25}{60}$ die am ersten Tage (und nach Aufgabenstellung an jedem der drei Tage) aufgewendete Zeit als $\frac{65}{12}$ h (= 5 h 25 min).

Aufgabe 190724:
Ein Kraftfahrer fuhr mit seinem PKW von A nach B. Nach einer Fahrzeit von 20 Minuten hatte er eine Panne, die in 30 Minuten behoben werden konnte. Nach weiteren 12 Minuten Fahrzeit musste er an einer geschlossenen Bahnschranke 4 Minuten warten. Bis dahin hatte er 40 km zurückgelegt.
Die Fahrt von der Bahnschranke nach B begann um 11.06 Uhr und verlief ohne Aufenthalt. In B angekommen, stellt der Kraftfahrer fest, dass er von der Abfahrt an der Bahnschranke bis zur Ankunft in B genau die Hälfte derjenigen Zeit benötigt hat, die insgesamt von der Abfahrt von A bis zur Ankunft in B vergangen war.
Es sei angenommen, dass der Kraftfahrer auf jedem Teilstück dieses Weges mit der gleichen Durchschnittsgeschwindigkeit fuhr.

a) Zu welcher Uhrzeit traf der Kraftfahrer in B ein?
b) Wie groß war die Durchschnittsgeschwindigkeit, in km h ausgedrückt?
c) Wie viel Kilometer hatte er insgesamt von A nach B zurückgelegt?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Der Kraftfahrer benötigte wegen $20 + 30 + 12 + 4 = 66$ bis zur Abfahrt von der Bahnschranke genau 66 Minuten. Da diese Zeit ebenso lang war wie die Fahrzeit von der Bahnschranke bis nach B, war er ab 11.06 Uhr noch einmal 66 Minuten bis B unterwegs, traf daher dort um 12.12 Uhr ein.

b) Für die ersten 40 km betrug die reine Fahrzeit wegen $66 - 30 - 4 = 32$ genau 32 Minuten, das sind $\frac{8}{15}$ Stunden. Wegen $40 : \frac{8}{15}$ betrug seine Durchschnittsgeschwindigkeit mithin 75 $\frac{km}{h}$.

c) Da er den Rest des Weges mit der gleichen Durchschnittsgeschwindigkeit zurücklegte und dafür 66 Minuten, also $\frac{11}{10}$ Stunden benötigte, legte er dabei wegen $75 \cdot \frac{11}{10} = 82{,}5$ noch weitere 82,5 km zurück.
Mithin hatte er von A nach B insgesamt 40 km + 82,5 km = 122,5 km zurückgelegt.

III Runde 3

Aufgabe V10734:
Eine Gruppe Junger Pioniere wandert von dem im Tal gelegenen Orte A auf den 9 km entfernten Berg B. Sie bricht in A um 8.00 Uhr auf und ist in B um 12.00 Uhr angelangt.
Am nächsten Tage wandert die Gruppe denselben Weg zurück. Sie geht um 8.30 Uhr los und kommt um 11.00 Uhr in A an.
Gibt es auf dem Wege von A nach B einen Punkt, an dem sich die Gruppe an beiden Tagen zu der gleichen Zeit befindet? Begründe die Antwort!

Lösung von Steffen Polster:
Einen solchen Zeitpunkt gibt es.
Auf dem Weg von A nach B hat die Gruppe eine Geschwindigkeit von $v_1 = \frac{9 \text{ km}}{4 \text{ h}}$, auf dem Weg von B nach A von $v_2 = \frac{9 \text{ km}}{2{,}5 \text{ h}} = \frac{18 \text{ km}}{5 \text{ h}}$.
Von A nach B ist die Gruppe von A nach einer Laufzeit t_1 genau $s = t_1 \cdot v_1 = \frac{9}{4} t_1$ km entfernt. Von B nach A ist der Abstand nach t_2 von B genau $s_2 = t_2 \cdot v_2 = \frac{18}{5} t_2$ km. Da die Gesamtstrecke 9 km lang ist,

gilt $s_1 = 9km - s_2$. Da die Gruppe am zweiten Tag eine halbe Stunden losläuft, ist außerdem $t_2 = t_1 - 0{,}5$ h. Damit ergibt sich für den Punkt mit gleichem Abstand zu A und der gleichen Uhrzeit die Gleichung

$$\frac{9}{4}t_1 = 9 - (t_1 - 0{,}5)\frac{18}{5}$$

Als Lösung der Gleichung ergibt sich $t_1 = \frac{24}{13}$ h, d. h. der Zeitpunkt 9 Uhr 51 min. In diesem Moment sind die Pioniere an jedem Tag 4,15 km von A entfernt. Die Probe bestätigt das Ergebnis.

Aufgabe 010732:
Im Sommer 1961 stellte der Dresdener Meister des Sports Gerhard Wissmann einen neuen Segelflug-Rekord im Dreieck-Streckenflug auf. Er legte die Strecke Zossen - Storkow - Golßen - Zossen in 1 h 1 min 30 s zurück.
Auf einer Karte im Maßstab 1 : 750000 stellen wir die folgenden Strecken fest: Zossen–Storkow 4,5 cm, Storkow–Golßen 5,2 cm, Golßen–Zossen 3,9 cm. Zu der errechneten Entfernung müssen wir noch 4 km für Umwege bei der Kursänderung hinzuzählen.

a) Welche Durchschnittsgeschwindigkeit erreichte Gerhard Wissmann?
b) Um wie viel Prozent war seine Geschwindigkeit höher als die des westdeutschen Rekordinhabers Ernst-Günter Haase, der eine Strecke von 100 km in 1 h 12 min zurücklegte?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die geflogene Entfernung betrug $750000 \cdot (4{,}5 + 5{,}2 + 3{,}9)$ cm + 4 km = 106 km.

1. Als Durchschnittsgeschwindigkeit erreichte Gerhard Wissmann $\frac{106 \text{ km}}{1\frac{1}{40}\text{h}} = 103\frac{17}{41}\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

2. Sein Konkurrent Ernst-Günter Haase erreichte nur $\frac{100 \text{ km}}{1\frac{1}{5}\text{h}} = 83\frac{1}{3}\frac{\text{km}}{\text{h}}$, so dass der neue Rekordinhaber den alten um 24 % übertraf.

Aufgabe 130736:
Ein mit konstanter Geschwindigkeit fahrender Zug fuhr über eine 225 m lange Brücke in genau 27 s (gerechnet von der Auffahrt der Lok auf die Brücke bis zur Abfahrt des letzten Wagens von der Brücke).
An einem Fußgänger, der entgegen der Fahrtrichtung des genannten Zuges ging, fuhr dieser in genau 9 s vorüber. In dieser Zeit hatte der Fußgänger genau 9 m zurückgelegt.
Ermittle die Länge des Zuges (in Meter) und seine Geschwindigkeit (in Kilometer je Stunde)!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Man könnte sich vorstellen, dass der Fußgänger im selben Augenblick die Brücke (entgegengesetzt zur Fahrtrichtung des Zuges) verlässt, in dem die Lok auf die Brücke fährt. Wenn der Fußgänger nach 9 s 9 m zurückgelegt hat, fährt der letzte Wagen des Zuges an ihm vorbei. Bis zum Verlassen der Brücke benötigt dieser Wagen wegen $27 - 9 = 18$ noch 18 s. In dieser Zeit legt er wegen $225 + 9 = 234$ genau 234 m zurück.

Folglich betrug wegen $234 : 18 = 13$ die Durchschnittsgeschwindigkeit des Zuges 13 m/s das sind wegen $13 \cdot \frac{3600}{1000} = 46{,}8$ genau 46,8 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.
Da der Zug zur Brückenfahrt 27 s benötigte, legte die Lok wegen $13 \cdot 27 = 351$ in dieser Zeit 351 m zurück. Diese Strecke setzt sich aus den 225 m Länge der Brücke und der Länge des Zuges zusammen. Wegen $352 - 225 = 126$ hat der Zug mithin eine Länge von 126 m.

Aufgabe 250734:
Ein Jagdflugzeug flog in einer halben Stunde 200 km weiter als ein Sportflugzeug in einer Stunde.
Wie groß war die Geschwindigkeit jedes dieser beiden Flugzeuge, wenn die des Jagdflugzeuges dreimal so groß war wie die des Sportflugzeugs?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Geschwindigkeit des Sportflugzeugs sei $x\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$, die des Jagdflugzeugs ist dann $3x\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Da das Sportflugzeug in einer Stunde x km flog, flog das Jagdflugzeug in einer halben Stunde $(x+200)$ km und daher in einer Stunde $2\cdot(x+200)$ km. Also gilt

$$3x = 2\cdot(x+200) \qquad \Rightarrow \qquad x = 400$$

Das Sportflugzeug hatte somit die Geschwindigkeit $400\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$, das Jagdflugzeug hatte die Geschwindigkeit $1200\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Aufgabe 260731:
Herr Anders fuhr mit seinem Pkw auf der Autobahn mit einer Geschwindigkeit von $100\ \frac{km}{h}$ an einer Tankstelle (A) vorbei. Nach einer weiteren Fahrstrecke von 175 km musste Herr Anders den Benzinhahn auf Reserve stellen.
Da die nächste Tankstelle (B) von dieser Stelle aus auf der Autobahn noch 45 km entfernt liegt, verringerte Herr Anders seine Geschwindigkeit auf $60\ \frac{km}{h}$, um weniger Benzin zu verbrauchen.
Mit welcher Durchschnittsgeschwindigkeit legte Herr Anders die Strecke zwischen A und B zurück?
(Der kurze Bremsweg, auf dem die Geschwindigkeit von $100\ \frac{km}{h}$ auf $60\ \frac{km}{h}$ h herabgesetzt wurde, soll in der Rechnung nicht berücksichtigt werden, da er die gesuchte Durchschnittsgeschwindigkeit nur unwesentlich beeinflusst.)

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Fahrstrecke von A bis zu der Stelle, an der die Geschwindigkeit herabgesetzt wurde, beträgt $s_1 = 175$ km, die Fahrstrecke von dieser Stelle bis B beträgt $s_2 = 45$ km, die Gesamtstrecke von A bis B also $s = s_1 + s_2 = 220$ km. (1)
Die Geschwindigkeit, mit der die erste Teilstrecke zurückgelegt wurde, beträgt $v_1 = 100\frac{km}{h}$. Da diese Geschwindigkeit konstant war, ergibt sich als Fahrzeit für diese Strecke

$$t_1 = \frac{s_1}{v_1} = \frac{175}{170}\text{h} = \frac{7}{4}\text{h}$$

Die Geschwindigkeit, mit der die zweite Teilstrecke zurückgelegt wurde, beträgt $v_2 = 60\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Da auch diese Geschwindigkeit konstant war, ergibt sich als Fahrzeit für diese Strecke

$$t_2 = \frac{s_2}{v_2} = \frac{45}{60}\text{h} = \frac{3}{4}\text{h}$$

Also ist die gesamte Fahrzeit von A nach B $t = t_1 + t_2 = \frac{5}{2}$ h (2). Aus (1) und (2) ergibt sich als gesuchte Durchschnittsgeschwindigkeit

$$v = \frac{s}{t} = \frac{200\text{ km}}{\frac{5}{2}\text{h}} = 88\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Aufgabe 330734:
Ulrike sitzt am Fenster eines Zuges, der mit der Geschwindigkeit $60\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ fährt. Sie beobachtet, dass an ihrem Fenster ein Gegenzug innerhalb von 4 Sekunden vorüberfährt. Außerdem weiß sie, dass dieser Gegenzug 120 m lang ist.
Untersuche, ob die Geschwindigkeit des Gegenzuges durch diese Angaben eindeutig bestimmt ist!
Wenn das der Fall ist, gib diese Geschwindigkeit in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Strecke, die der Gegenzug in 4 Sekunden durchfährt, ergibt sich, wenn man seine Länge 120 m um die Länge derjenigen Strecke vermindert, die Ulrikes Zug selbst in diesen 4 Sekunden zurücklegt. Die letztgenannte Strecke beträgt wegen der Geschwindigkeit 60 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ von Ulrikes Zug

$$4s \cdot \frac{60 \cdot 1000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = \frac{200}{3} m$$

Also durchfährt der Gegenzug in 4 Sekunden die Strecke 120 m $- \frac{200}{3}$ m $= \frac{160}{3}$ m; somit ist seine Geschwindigkeit eindeutig durch die Angaben bestimmt, sie beträgt $48 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

IV.III Prozentrechnung, Proportionalität

I Runde 1

Aufgabe V10712:
Einer der größten von Menschenhand geschaffenen Seen ist der Zimljansker Stausee in der Sowjetunion. Er hat eine Oberfläche von rund 2600 km^2. Die Fläche des Müggelsees beträgt dagegen rund 750 ha.
Wie viel mal so groß ist die Fläche des Zimljansker Stausees?

Lösung von Steffen Polster:
2600 km^2 sind gleich 260000 ha. Damit wird $\frac{260000}{750} = 346{,}\overline{6} \approx 347$.
Der Stausee ist 347 mal größer als der Müggelsee.

Aufgabe V10713:
Für eine elektrische Leitung von 7 km Länge benötigt man 259 kg Kupferdraht.
Wie viel Kilogramm Kupferdraht der gleichen Stärke benötigt man für eine Leitung von 22 km Länge?

Lösung von Steffen Polster:
Mit direkter Proportionalität wird $\frac{259}{7} = \frac{x}{22}$ und $x = 814$ kg. Es werden 814 kg Kupferdraht benötigt.

Aufgabe 010712:
Beim freiwilligen Kartoffeleinsatz trugen drei Gruppen von Schülern einer 7. Klasse einen kleinen Wettbewerb aus. Sie sammelten gemeinsam insgesamt 52 dt Kartoffeln. Dabei sammelte die zweite Gruppe $1\frac{1}{2}$ mal soviel wie die erste, die dritte 3 dt Kartoffeln mehr als die erste.
Wie viel Dezitonnen Kartoffeln sammelte jede Gruppe?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Zusammen sammelten die drei Gruppen also 1 mal + $1\frac{1}{2}$ mal + 1 mal soviel wie die erste allein plus 3 dt zusätzlich. $3\frac{1}{2}$mal der Ertrag der ersten ist also gleich (52 - 3) dt = 49 dt. Das bedeutet, dass die erste Gruppe 14 dt Kartoffeln aufgesammelt hat, für die zweite folgt daraus 21 dt und für die dritte 17 dt.

Aufgabe 010713:
Im Unterrichtstag in der sozialistischen Produktion sägt ein Schüler ein Stück Vierkantstahl ab, das 475 p schwer ist. Am nächsten Tag wird ein Stück Vierkantstahl, dessen Abmessungen viermal so groß sind wie bei dem abgesägten Stück und das aus gleichem Material besteht, bearbeitet.
Wie schwer ist das Stück? Begründe die Antwort!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Das Volumen steigt proportional mit jeder Abmessung; da es drei mögliche Abmessungen gibt, hat das neue Stück ein $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$mal so großes Volumen. Das Gewicht verhält sich (bei gleichem Material) wie das Volumen, daher ist das neue Gewicht 30400 p.

Aufgabe 050711:
Zwei Jungen vergleichen ihre Ersparnisse. Sie stellen fest: $\frac{2}{3}$ von Peters Sparbetrag ist genau soviel wie $\frac{3}{4}$ von Rainers Sparbetrag.
Wer hat mehr Geld gespart?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Peters Geldbetrag sei p, Rainers r. Dann gilt $\frac{2}{3}p = \frac{3}{4}r$ und folglich $p = \frac{8}{9}r > r$, also hat Peter mehr Geld gespart als Rainer.

Aufgabe 060711:
Ein Vater geht mit seinem Sohn spazieren. Dabei stellen sie fest: Jede Strecke, die der Sohn mit drei Schritten zurücklegt, schafft der Vater mit zwei Schritten.
Nach wie viel Schritten des Vaters setzen beide gleichzeitig den rechten Fuß auf, wenn beide den ersten Schritt gleichzeitig beginnen und mit dem rechten Bein ausführen?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Nur nach jedem zweiten Schritt des Vaters setzen Vater und Sohn gleichzeitig einen Fuß auf. Das ist beim Vater stets der linke Fuß, da er laut Aufgabe den ersten Schritt mit den rechten Bein ausgeführt hat. Also können beide niemals unter den Bedingungen der Aufgabe gleichzeitig den rechten Fuß aufsetzen.

Aufgabe 120711:
Klaus hatte an einem Sonnabend um 12.00 Uhr seine Armbanduhr nach dem Zeitzeichen von Radio DDR eingestellt. Er bemerkte am folgenden Sonntag um 12.00 Uhr beim Zeitzeichen, dass seine Uhr um genau 6 Minuten nachging, vergaß aber, sie richtig zu stellen.
Er wollte am folgenden Montag früh genau um 8.00 Uhr fortgehen.

Welche Zeit zeigte seine Uhr zu dieser Uhrzeit an, wenn angenommen wird, dass seine Uhr während der ganzen Zeit gleichmäßig lief?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Armbanduhr ging in 24 Stunden genau 6 Minuten nach, d. h., in jeder Stunde ging sie den 24. Teil von 6 Minuten, das ist $\frac{1}{4}$ 4 Minute, nach.
Da von Sonnabend 12.00 Uhr bis Montag 8.00 Uhr genau 44 Stunden vergangen waren, ging die Uhr wegen $44 \cdot \frac{1}{4} = 11$ mithin 11 Minuten nach, zeigte also 7.49 Uhr, als es genau 8.00 Uhr war.

Aufgabe 190711:
Eine Gruppe von 8 Schülern hebt bei der Produktionsarbeit im Patenbetrieb einen Graben von 30 cm Breite, 60 cm Tiefe und 20 m Länge aus. Eine zweite Gruppe von 6 Schülern hebt einen Graben von 25 cm Breite, 50 cm Tiefe und 22 m Länge aus.

Es werde vorausgesetzt, dass von jedem der 14 Schüler für das Ausheben gleich großer Volumina gleiche Zeiten benötigt werden (wobei die für das Ausheben eines bestimmten Volumens benötigte Zeit bei allen Schülern dieselbe sei).

Welche der beiden Gruppen benötigt für das Ausheben ihres Grabens unter diesen Voraussetzungen weniger Zeit als die andere?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Das Volumen des Grabens der ersten Gruppe beträgt $(3 \cdot 6 \cdot 200)$ dm^3 = 3600 dm^3; für jeden der 8 Schüler dieser Gruppe ist daher ein Volumen von (3600 : 8) dm^3 = 450 dm^3 auszuheben.
Das Volumen des Grabens der zweiten Gruppe beträgt $(2{,}5 \cdot 5 \cdot 220)$ dm^3 = 2750 dm^3; für jeden der 6 Schüler dieser Gruppe ist daher ein Volumen von (2750 : 6) dm^3 = $458\frac{1}{3}$ dm^3 auszuheben.
Hat jeder der Schüler so lange gearbeitet, bis er 458 dm^3 ausgehoben hat, so ist die erste Gruppe fertig, die zweite noch nicht. Daher benötigt die erste Gruppe weniger Zeit als die zweite.

Aufgabe 260713:
Für die Klassen 2, 3 und 4 einer Schule steht ein Schulgarten mit einem Flächeninhalt von genau 800 Quadratmetern zur Verfügung. Ein Viertel dieser Fläche wird für einen Spielplatz und für das Anlegen von Wegen vorgesehen, die übrige Fläche soll zur Bearbeitung auf die drei Klassen aufgeteilt worden.
Da den einzelnen Klassen unterschiedlich viele Schüler angehören, nämlich der 2. Klasse 25 Schüler, der 3. Klasse 20 Schüler und der 4. Klasse 30 Schüler, wird vereinbart, dass jedem Schüler der genannten Klassen eine gleich große Fläche zur Bearbeitung zugewiesen wird.
Wie viel Quadratmeter Gartenland hat demnach jede der drei Klassen zu bearbeiten?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Fläche für Wege und Spielplatz beträgt $\frac{1}{4}$ von 800 m^2, das sind 200 m^2. Zur Bearbeitung verbleiben somit 800 m^2 - 200 m^2 = 600 m^2.
Die Gesamtschülerzahl der drei Klassen beträgt $25 + 20 + 30 = 75$. Somit hat
Klasse 2 $\frac{25}{75}$ von 600 m^2, das sind 200 m^2,
Klasse 3 $\frac{20}{75}$ von 600 m^2, das sind 160 m^2 und
Klasse 4 $\frac{30}{75}$ von 600 m^2, das sind 240 m^2
zu bearbeiten.

Aufgabe 310711:
Ein Warenhaus erhielt eine Lieferung von roten, blauen und grünen Bällen, zusammen 675 Stück. Während einer gewissen Zeit wurden davon verkauft:
die Hälfte der roten Bälle, zwei Drittel der blauen Bälle und ein Viertel der grünen Bälle.

Es stellte sich heraus, dass danach von jeder der drei Farben noch gleich viele Bälle übriggeblieben waren.
Ermittle aus diesen Angaben,
a) wie viele Bälle von jeder der drei Farben in der genannten Zeit verkauft worden waren.
b) wie viele Bälle danach insgesamt noch vorhanden waren!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Anzahl der Bälle, die von jeder Farbe am Ende noch vorhanden waren, sei x. Nach den Angaben im Aufgabentext kam dies so zustande, dass

x rote Bälle verkauft wurden, also $2x$ geliefert worden waren,
$2x$ blaue Bälle verkauft wurden, also $3x$ geliefert worden waren, und
$3x$ grüne Bälle verkauft wurden, also $4x$ geliefert worden waren.

Mithin hatte die gesamte Lieferung aus $2x+3x+4x = 9x$ Bällen bestanden; daher gilt $9x = 675$, $x = 75$. Es wurden somit genau 75 rote, 150 blaue und 225 grüne Bälle verkauft, und danach waren noch insgesamt $3 \cdot 75 = 225$ Bälle vorhanden.

Aufgabe 330711:
In einer Hühnerfarm wurden 2500 Hühner gehalten. Am ersten Tag eines Monats war Futter vorhanden, das für genau 30 Tage ausreichend war. Nach genau 14 Tagen wurden 500 Hühner geschlachtet. Um wie viele Tage länger wurde dadurch die Zeit, für die das Futter ausreichend war?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Das nach 14 Tagen vorhandene Futter hätte für 2500 Hühner noch 16 Tage gereicht. Für 500 Hühner würde es 5 mal so lange reichen, d. h. $5 \cdot 16$ Tage.
Für 2000 Hühner reicht es $\frac{1}{4}$ dieser $5 \cdot 16$ Tage, d.s. $5 \cdot 4 = 20$ Tage. Verglichen mit 16 Tagen reicht es also um 4 Tage länger.

II Runde 2

Aufgabe V10721:
Alle Länder des sozialistischen Lagers zusammen erzeugten:

Erzeugnis	Vorkriegsjahr	1959
Elektroenergie	84,7 Mrd. kWh	418,2 Mrd. kWh
Stahl	25,4 Mill. t	92,7 Mill. t
Zement	14,5 Mill. t	73,3 Mill. t

Um wie viel Prozent stieg die Erzeugung?

Lösung von Steffen Polster:
Mit der Beziehung $W : G = p : 100$ (Prozentwert W, Grundwert G, Prozentsatz p) wird für jedes Erzeugnis:
Elektroenergie $p = 493{,}7$, d. h. Anstieg um 393,7 %; Stahl $p = 365{,}0$, d. h. Anstieg um 265 % und Zement $p = 505{,}5$, d. h. Anstieg um 405,5 %.

Aufgabe 010721:
Der Kapitalismus hat zur Folge, dass einer Handvoll industriell hochentwickelter Länder eine große Anzahl sehr schwach entwickelter Länder gegenüberstehen, die durch die imperialistischen Mächte ausgebeutet und ausgeplündert werden.
So erzeugten die hoch entwickelten Länder bei einer Bevölkerungszahl von 603000000 Menschen im Jahre 1959 insgesamt 204000000 t Stahl und 1604 Milliarden Kilowattstunden Elektroenergie. Die schwach entwickelten Länder erzeugten im gleichen Jahr bei einer Bevölkerungszahl von 1283000000 Menschen nur 6000000 t Stahl und 120 Milliarden Kilowattstunden Elektroenergie.
Wie viel Stahl und wie viel Kilowattstunden hätten die schwach entwickelten Länder erzeugen müssen, wenn sie im Verhältnis zu ihrer Bevölkerungszahl genau so viel produziert hätten wie die imperialistischen Mächte?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Zuerst rechnet man die Pro-Kopf-Produktion in den hoch entwickelten Ländern aus.

Stahl: $204\,000\,000 \text{ t} : 603\,000\,000 = 0{,}338 \,\frac{\text{t}}{\text{Person}}$,
Energie: $1\,604\,000\,000\,000 \text{ kWh} : 603\,000\,000 = 2\,660 \text{ kWh/Person}$.

Diese Werte multipliziert man mit der Anzahl der Menschen in den schwach entwickelten Ländern und stellt fest, dass sie etwa 434000000 t Stahl und 3413 Mrd. kWh Energie hätten produzieren müssen.

Aufgabe 020721:
An der Berliner Mathematik-Olympiade des Jahres 1962 nahmen im Stadtbezirk Köpenick 3808 von 5828 Schülern und im Stadtbezirk Lichtenberg 5097 von 7387 Schülern teil.
Welcher Stadtbezirk wies die bessere relative Beteiligung auf? Die Antwort ist zu begründen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die relative Beteiligung ist der Quotient aus der Anzahl der Schüler, die teilgenommen haben, und denen, die hätten teilnehmen können. Es müssen also die Zahlen $\frac{3808}{5828}$ und $\frac{5097}{7387}$ verglichen werden.
Zur Vereinfachung kann man beide Zahlen auf einen Nenner bringen und die Zähler vergleichen; dann stellt man fest, dass

$$3808 \cdot 7387 \approx 28100000 < 5097 \cdot 5828 \approx 29700000$$

gilt. Das bedeutet, dass die relative Beteiligung in Lichtenberg höher ist.

Aufgabe 060724:
In einem zylindrischen Gefäß (gerader Kreiszylinder mit waagerechter Bodenfläche) befindet sich Wasser. Der Wasserspiegel steht bei $\frac{3}{4}$ der Höhe des Gefäßes. Nachdem genau $2\frac{1}{2}$ Liter Wasser aus diesem Gefäß ausgegossen wurden, steht der Wasserspiegel bei $\frac{2}{5}$ der Gefäßhöhe.
Welches Fassungsvermögen hat das Gefäß?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Das Volumen (in Litern gemessen) ist der Höhe des Gefäßes direkt proportional. $\frac{3}{4}$ des Volumens verringern sich auf $\frac{2}{4}$ des Volumens dadurch, dass $2\frac{1}{2}$ Liter ausgegossen werden.
Wegen $\frac{3}{4} - \frac{2}{5} = \frac{7}{20}$ folgt daraus: $\frac{7}{20}$ des Volumens sind gleich $2\frac{1}{2}$ Liter. Das Gefäß hat demnach ein Fassungsvermögen von $\frac{50}{7}$ Liter.

Aufgabe 090721:
Vater und Sohn gehen nebeneinander. In der gleichen Zeit, in der der Vater 4 Schritte macht, macht der Sohn jedesmal 5 Schritte, und in dieser Zeit legen beide jedesmal genau den gleichen Weg zurück.
Die durchschnittliche Schrittlänge des Vaters beträgt 80 cm.

a) Wie groß ist die durchschnittliche Schrittlänge des Sohnes?
b) Wir nehmen an, dass beide gleichzeitig mit dem rechten Fuß beginnen. Nach dem wievielten Schritt des Vaters treten beide erstmalig gleichzeitig mit dem linken Fuß auf?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

a) Mit 4 Schritten legt der Vater 320 cm zurück; denn $4 \cdot 80cm = 320$ cm. Da der Sohn für die gleiche Strecke 5 Schritte braucht, beträgt wegen $320 : 5 = 64$ seine durchschnittliche Schrittlänge 64 cm.

b) Genau dann, wenn der Vater ein (positives ganzzahliges) Vielfaches von 4 als Schrittzahl beendet hat, hat der Sohn gleichzeitig mit dem Vater eine ganzzahlige Schrittzahl beendet, treten also Vater und Sohn gleichzeitig auf.

   Dies geschieht genau dann mit dem linken Fuß, wenn sie eine gerade Anzahl von Schritten beendet haben. Bei dem Vater ist dies für jedes Vielfache von 4 der Fall, bei dem Sohn genau für alle geradzahligen Vielfachen von 5. Das kleinste (positive) geradzahlige Vielfache von 5 ist aber das Zweifache.

   Daher treten Vater und Sohn erstmalig nach dem 8. Schritt des Vaters gleichzeitig mit dem linken Fuß auf.

Aufgabe 160722:
Eine Gärtnerische Produktionsgenossenschaft verkaufte in den Monaten August bis November Äpfel.
Der Preis für 1 kg Äpfel war im September um 20% niedriger als im August, im November hingegen um 20% höher als im September.
Waren die Äpfel im November billiger, im Preis gleich oder teurer als im August?
Falls der Preis im November von dem im August abwich, ist anzugeben, um wie viel Prozent des Augustpreises der Novemberpreis von diesem abwich.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Der Preis für 1 kg Äpfel betrage im August x Mark, dann beträgt er im September $(x - \frac{1}{5})$ Mark $= \frac{4}{5}x$ Mark. Im November betrug der Preis

$$\frac{4}{5}x \text{ Mark } + \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5}x \text{ Mark } = \frac{24}{25} \text{ Mark}$$

Da $\frac{24}{25}x < x$ ist, waren die Äpfel im November billiger als im August. Aus $x - \frac{24}{25}x = \frac{1}{25}x = \frac{4}{100}x$ folgt, dass der Preis für die Äpfel im November um 4% ihres Preises im August von diesem abwich.

Aufgabe 200722:
Von einem Dreieck wird gefordert:
Die Maßzahlen der in cm gemessenen Seitenlängen a, b, c sollen natürliche Zahlen sein, die Seitenlänge a soll genau 36% des Umfangs u betragen, die Seitenlänge b genau 48% des Umfangs.

a) Untersuche, ob es unter diesen Bedingungen ein Dreieck gibt, dessen Umfang $u = 25$ cm ist! Wenn dies der Fall ist, so gib seine Seitenlängen an!
b) Untersuche, ob es unter den genannten Bedingungen auch ein Dreieck gibt, dessen Umfang $u > 25$ cm ist! Wenn dies der Fall ist, so gib seine Seitenlängen an!
c) Ermittle alle diejenigen Längen u, die kleiner als 100 cm sind und als Umfang eines Dreiecks auftreten können, dessen Seitenlängen die gestellten Forderungen erfüllen! Ermittle zu jedem dieser Werte u jeweils die Seitenlängen eines solchen Dreiecks!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) 36% von 25 cm sind $36 \cdot \frac{25}{100}$ cm $= 9$ cm, 48% von 25 cm sind 12 cm.
Ferner gilt 25 cm - 9 cm - 12 cm = 4 cm. Da nun die Dreiecksungleichungen

$$12 \text{ cm} + 4 \text{ cm} > 9 \text{ cm}, \qquad 4 \text{ cm} + 9 \text{ cm} > 12 \text{ cm}, \qquad 9 \text{ cm} + 12 \text{ cm} > 4 \text{ cm}$$

erfüllt sind, gibt es ein Dreieck mit den Seitenlängen $a = 9$ cm, $b = 12$ cm, $c = 4$ cm. Dieses erfüllt die gestellten Forderungen.

b), c) Wenn eine Länge $u = z$ cm als Umfang eines Dreiecks auftritt, das die Forderungen der Aufgabe erfüllt, so folgt: Die Zahl z ist eine natürliche Zahl, ferner ist auch $\frac{36}{100}z = \frac{9}{25}z$ eine natürliche Zahl, nämlich die Maßzahl von a.
Also ist $9z$ durch 25 teilbar. Da 9 zu 25 teilerfremd ist, ist mithin z durch 25 teilbar. Somit kann nur für $z = 25n$ mit natürlichem n die Länge $u = z$ cm als Umfang eines Dreiecks auftreten, das die gestellten Forderungen erfüllt.
Wegen der Forderung $z < 100$ kommen dabei nur Werte $n < 4$ in Betracht, d. h. die Längenangaben $u = 25$ cm, $u = 50$ cm, $u = 75$ cm.

Für jede solche Umfangsangabe gilt: 36% von $25n$ sind $9n$; 48% von $25n$ sind $12n$; ferner gilt $25n - 9n - 12n = 4n$. Wieder sind damit die Dreiecksungleiohungen erfüllt, also gibt es zu diesen Umfangsangaben auch Dreiecke, die die Forderungen der Aufgabe erfüllen.

Indem man für n die Werte 1, 2, 3 einsetzt, erhält man die gesuchten Seitenlangen, nämlich für $n = 1$ die Werte aus dem Aufgabenteil a) und für $n = 2$ zum Umfang $u = 50$ cm die Seitenlängen $a = 18$ cm,

$b = 24$ cm, $c = 8$ cm bzw. für n = 3 zum Umfang $u = 75$ cm die Seitenlängen $a = 27$ cm, $b = 36$ cm, $c = 12$ cm.

Aufgabe 230721:
Uwes Schulweg führt am Rathaus und am Bahnhof vorbei. Am Rathaus hat Uwe ein Viertel des Weges geschafft; die Rathausuhr zeigt 7.30 Uhr an. Am Bahnhof hat Uwe ein Drittel des Weges hinter sich; die Bahnhofsuhr zeigt 7.32 Uhr an.
Um wie viel Uhr trifft Uwe in der Schule ein, wenn er während den gesamten Weges mit gleichbleibender Geschwindigkeit geht?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn der Weg bis zum Rathaus genau $\frac{1}{4}$ des Gesamtweges und der Weg bis zum Bahnhof genau $\frac{1}{3}$ des Gesamtweges ist, dann ist der Weg vom Rathaus bis zum Bahnhof (wegen $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$) genau $\frac{1}{12}$ des Gesamtweges.

Wenn der Weg bis zum Bahnhof genau $\frac{1}{3}$ des Gesamtweges ist, dann ist der Weg vom Bahnhof bis zur Schule genau $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$ des Gesamtweges.
Da Uwe für $\frac{1}{12}$ des Gesamtweges genau 2 Minuten benötigte, benötigte er für $\frac{8}{12}$ des Gesamtweges genau 16 Minuten. Da Uwe um 7.32 Uhr am Bahnhof war, trifft er folglich um 7.48 Uhr in der Schule ein.

Aufgabe 290721:
Susi geht einkaufen. Von dem Geld, das ihr die Mutter gegeben hat, gibt sie 30% im Fleischerladen aus; im Milchladen bezahlt sie mit einem Viertel desjenigen Betrages, den ihr die Mutter gegeben hatte. Im Gemüseladen braucht sie genau vier Fünftel desjenigen Betrages, den sie im Fleischerladen bezahlt hatte.
Beim Bäcker schließlich gibt sie doppelt so viel Geld aus, wie sie danach als Restbetrag wieder mit nach Hause bringt. Von diesem Restbetrag gibt ihr die Mutter die Hälfte, nämlich genau 1,05 M, damit sie sich ein Softeis kaufen kann.

Ermittle den Geldbetrag, den Susi zu Anfang von der Mutter bekommen hatte!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Da von dem Restbetrag, den Susi wieder mit nach Hause brachte, die Hälfte genau 1,05 M war, ergibt sich, dass dieser Restbetrag selbst 2,10 M betragen hat. Doppelt so viel, also 4,20 M, gab Susi beim Bäcker aus.
Nach dem Einkauf im Fleischer-, Milch- und Gemüseladen hatte sie also noch 4,20 M + 2,10 M = 6,30 M. Im Fleischerladen gab sie 30% des Betrages aus, den ihr die Mutter ursprünglich mitgegeben hatte; im Gemüseladen vier Fünftel von diesen 30%, das sind also 24% des ursprünglichen Betrages.
Im Milchladen gab sie ein Viertel, d. h. 25% des ursprünglichen Betrages aus. Daher gab Susi in diesen drei Läden zusammen $30\% + 25\% + 24\% = 79\%$ des ursprünglichen Betrages aus; folglich waren die 6,30 M, die ihr nach diesen drei Einkäufen verblieben waren, 21% des ursprünglichen Betrages. War G dieser Betrag, so gilt also $G = 6{,}30 \cdot \frac{100}{21}$ M = 30 M.

Aufgabe 340722:
a) Ein Wettspielgewinn von 1485 DM soll auf drei Teilnehmer im Verhältnis 2 : 3 : 4 aufgeteilt werden.
Wie viel bekommt jeder?

b) Bei einem anderen Spiel erhält ein Teilnehmer ein Fünftel der Gewinnsumme, das sind 150 DM. Der Rest soll auf die beiden anderen Teilnehmer im Verhältnis 5 : 7 aufgeteilt werden.
Wie viel bekommt jeder von ihnen?

c) Bei einem dritten Spiel wurde vereinbart, den Gewinn im Verhältnis der Einsätze aufzuteilen, mit denen sich die Teilnehmer an dem Wettspiel beteiligt hatten. Die Summe dieser Einsätze der drei Teilnehmer Anke, Bertram und Claus hatte 44 DM betragen, ferner gilt: Hätte Anke 6 DM mehr eingesetzt und hätte Claus das Doppelte seines Einsatzes eingesetzt, so hätten alle drei den gleichen Gewinnanspruch erreicht.
Wie groß waren die drei Einsätze?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Die Teilnehmer sollen der Reihe nach 2 Teile, 3 Teile und 4 Teile des Gewinns erhalten, wobei alle diese Teile gleichgroß sein sollen und zusammen den gesamten Gewinn ausmachen sollen. Da es also $2 + 3 + 4 = 9$ Teile sein sollen, muss jedes Teil 1485 DM : 9 = 165 DM betragen. Also erhalten die Teilnehmer der Reihe nach

$$2 \cdot 165 \text{ DM} = 330 \text{ DM}, \qquad 3 \cdot 165 \text{ DM} = 495 \text{ DM}, \qquad 4 \cdot 165 \text{ DM} = 660 \text{ DM}$$

b) Da ein Fünftel des Gewinns 150 DM sind, beträgt der gesamte Gewinn $5 \cdot 150$ DM = 750 DM.
Die im Aufgabentext genannten beiden anderen Teilnehmer bekommen zusammen 750 DM - 150 DM = 600 DM. Zur Aufteilung dieses Betrages im Verhältnis 5 : 7 ergibt sich entsprechend wie in a) wegen $5+7 = 12$ und $600 : 12 = 50$: Die beiden anderen Teilnehmer erhalten der Reihe nach $5 \cdot 50$ DM = 250 DM; $7 \cdot 50$ DM = 350 DM.

c) Waren a, b, c die in DM gerechneten Einsätze von Anke, Bertram bzw. Claus, so gilt $a + b + c = 44$ und $a + 6 = 2c = b$.
Setzt man hieraus $a = 2c - 6$ und $b = 2c$ in die erste Gleichung ein, so folgt $2c - 6 + 2c + c = 44$, d. h. $c = 10$ und damit weiter $b = 20$, $a = 14$.
Also wurden folgende Beträge gesetzt: Anke: 14 DM, Bertram: 20 DM, Claus: 10 DM.

III Runde 3

Aufgabe V10731:
In der DDR stieg die Zahl der hergestellten Fotoapparate von 1959 um 10% gegenüber 1958 und betrug rund 558000 Stück. Wie viel Stück wurden 1958 hergestellt?
Fritz rechnet: „558000 minus 10% davon, das sind 55800. Also wurden 1958: $558000 - 55800 = 502200$ Stück hergestellt.“
a) Welchen Fehler hat Fritz gemacht?
b) Wie muss man richtig rechnen, und wie lautet das Ergebnis?
c) Die Zahl der hergestellten Fernsehempfänger stieg von 1958 bis 1959 um 61% und betrug 1959 290000 Stück. Wie viel Stück wurden 1958 hergestellt?
d) Wie groß ist in diesem Falle die Abweichung gegenüber dem Ergebnis, das Fritz mit seiner falschen Rechnung erhält?

Lösung von Steffen Polster:
a) Der Fehler besteht darin, dass die 10 % auf den Prozentwert von 1959 bezogen wurde und nicht auf den Grundwert von 1958.
b) Eine Steigerung von 10 % bedeutet, dass der Prozentwert P von 1959 110 % des Grundwertes G von 1958 entspricht, d. h.

$$\frac{P}{G} = \frac{110}{100} \to \frac{558000}{G} = 1{,}1 \qquad \to \qquad G = \frac{558000}{1{,}1} = 507272$$

1958 wurden 507272 Fotoapparate hergestellt.
c) Analog zur Aufgabe b) wird

$$\frac{P}{G} = \frac{161}{100} \to \frac{290000}{G} = 1{,}61 \qquad \to \qquad G = \frac{290000}{1{,}61} = 180124$$

1958 wurden 180124 Fernsehgeräte produziert.
d) Mit der fehlerhaften Berechnung würde sich ergeben: $290000 - 0.61 \cdot 290000 = 113100$. Die Abweichung wäre folglich 67024 Fernsehgeräte.

Aufgabe V10732:
Im Grundlehrgang Metallbearbeitung wurden von 5 Schülern Spannstücke für Parallelschraubzwingen angefertigt. Beim Nachmessen stellen die Schüler folgende Längen fest:
Spannstück 1 Länge 119,5 mm,
Spannstück 2 Länge 119,7 mm,
Spannstück 3 Länge 120,2 mm,
Spannstück 4 Länge 120,1 mm,
Spannstück 5 Länge 120,6 mm.
a) Welche durchschnittliche Länge hatten die Spannstücke?
b) Wie groß ist die Abweichung der Maßzahlen vom Sollmaß (120,0 mm) bei den einzelnen Spannstücken? (absoluter Fehler).
c) Wie viel Prozent des Sollmaßes betragen die Abweichungen? (prozentualer Fehler).
d) Welche Spannstücke sind brauchbar, wenn der prozentuale Fehler höchstens 1/2 Prozent betragen darf?

Lösung von Steffen Polster:
a) $(119{,}5 + 119{,}7 + 120{,}2 + 120{,}1 + 120{,}6) : 5 = 120{,}02$ Der Mittelwert ist 120,2 mm.
b-d)

Spannstück	absoluter Fehler	prozentualer Fehler
1	0,5 mm	0,417 %
2	0,3 mm	0,25 %
3	0,2 mm	0,167 %
4	0,1 mm	0,083 %
5	0,6 mm	0,5 %

Alle Spannstücke entsprechen dem maximalen Fehler und sind damit brauchbar.

Aufgabe 010731:
Ein guter Melker kann in einer Stunde höchstens 8 Kühe melken. Durch den Einsatz einer sowjetischen Melkmaschine kann er in 8 Stunden 96 Kühe melken. Die 150 Milchkühe, die das VEG Biesdorf im Jahre 1958 besaß, konnten mit Hilfe eines Melkstandes bereits in 3 Stunden gemolken werden.
Um wie viel Prozent wächst die Arbeitsproduktivität
a) beim Einsatz der sowjetischen Melkmaschine,
b) beim Einsatz eines Melkstandes?
Anmerkung: Unter der Arbeitsproduktivität verstehen wir in diesem Falle den Quotienten aus der Anzahl der Kühe und der zu ihrem Melken benötigten Zeit.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Ausgangsgröße ist der Melker, der 8 Kühe pro Stunde melkt.
a) Mit der sowjetischen Melkmaschine schafft er 96 Kühe/8 h = 12 Kühe/h, also 50% mehr.
b) Am Melkstand können 150 Kühe/3 h = 50 Kühe/h gemolken werden, das ist eine Steigerung auf 625 % oder um 525 % gegenüber der Ausgangsgröße.

Aufgabe 020731:
Bei einem Preisausschreiben galt es, die Bilder von 4 verschiedenen Bauwerken 4 genannten Städten richtig zuzuordnen. 12 Prozent der Einsender hatten alles richtig gemacht, doppelt so viele hatten zwei Bauwerke und viermal so viele hatten ein Bauwerk richtig zugeordnet. 240 eingesandte Lösungen waren gänzlich falsch.

a) Wie viel Lösungen waren eingesandt worden?
b) Wie viel Einsender hatten 0, 1, 2, 3 und 4 Paare richtig zusammengestellt?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Zuerst stellt man fest, dass es nicht möglich ist, drei Bauwerke richtig und eines falsch zuzuordnen.
12%+24%+48% = 84% hatten wenigstens ein Bauwerk richtig. Daher entsprechen die verbleibenden 16% den 240 vollkommen falschen Einsendungen. Damit waren insgesamt 1500 Lösungen eingesandt worden, davon hatten 240, 720, 360, 0 bzw. 180 genau 0, 1, 2, 3 bzw. 4 Paare richtig.

Aufgabe 020732:
In einen Flachstab von 2,5 m Länge sollen 15 Löcher in gleichem Abstand mit dem Durchmesser d = 20 mm gebohrt werden.
In welchem Abstand muss angekörnt werden, wenn an beiden Enden der Abstand bis zum Lochrand das 2,5fache des Lochdurchmessers betragen soll?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Zwischen den 15 Löchern gibt es 14 Abstände. Also muss der Abstand zwischen den Mittelpunkten der äußersten Löcher in 14 gleiche Teile geteilt werden. An beiden Enden geht das 2,5fache eines Lochdurchmessers ab, also 100 mm. Dazu kommen noch zweimal der Radius, da die Angabe vorher sich auf den Lochrand bezog.
Es müssen also 2380 mm in 14 Abschnitte zerlegt werden. Jeder muss also 170 mm lang sein.

Aufgabe 030731:
Peter stellt um 7.00 Uhr seine Armbanduhr nach der Zeitansage im Radio. Um 15.00 Uhr stellt er fest, dass seine Uhr in diesen 8 Stunden insgesamt 12 Minuten nachgegangen ist. Er möchte um Punkt 18.00 Uhr seinen Freund treffen.
Wie muss er seine Uhr um 15.00 Uhr stellen, damit sie um 18.00 Uhr die genaue Zeit anzeigt?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Auf 8 Stunden geht Peters Uhr 12 Minuten nach. Damit geht seine Uhr in einer Stunde 1,5 Minuten nach, und in 3 Stunden 4,5 Minuten. Also muss Peter um 15.00 Uhr seine Uhr auf 15.04 Uhr und 30 Sekunden stellen.

Aufgabe 050736:
Ein Betrieb sollte in 20 Arbeitstagen p Werkstücke der gleichen Art herstellen. Durch Anwendung besserer Arbeitsmethoden gelang es den Arbeitern, diesen Auftrag bereits in 5 Arbeitstagen früher zu erfüllen und dabei noch k Werkstücke mehr als gefordert herzustellen.
Wie viel Werkstücke wurden durchschnittlich an jedem Arbeitstag über den Plan hinaus produziert?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Anzahl der durchschnittlich an jedem Arbeitstag laut Plan anzufertigenden Werkstücke beträgt $\frac{p}{20}$.
In Wahrheit wurden aber $(p + k)$ Werkstücke in $(20 - 5)$ Tagen produziert, an jedem Arbeitstag also durchschnittlich $\frac{p+k}{15}$ Werkstücke.
Daher betrug die Anzahl der durchschnittlich an jedem Arbeitstag über den Plan hinaus angefertigten Werkstücke

$$\frac{p+k}{15} - \frac{p}{20} = \frac{p+4k}{60}$$

Aufgabe 060732:
In einer alten Aufgabensammlung steht folgende Aufgabe:
Ein Jagdhund verfolgt einen Fuchs, der ihm 54 Fuchsschritte voraus ist. Die Länge von 2 Hundeschritten ist genau gleich der Länge von 3 Fuchsschritten. Der Hund braucht zu 4 Schritten genauso lange Zeit wie der Fuchs zu 5 Schritten.
Mit wie viel Schritten holt der Hund den Fuchs ein, wenn beide gleichzeitig in ein und derselben Richtung starten?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Der Hund braucht zu 4 Schritten genau soviel Zeit wie der Fuchs zu 5 Schritten. Da 4 Hundeschritte so lang wie 6 Fuchsschritte sind, kommt der Hund mit je 4 Schritten dem Fuchs um 1 Fuchsschritt näher. Die 54 Fuchsschritte holt der Hund folglich mit $54 \cdot 4$ Hundeschritten $= 216$ Hundeschritten auf.

Aufgabe 070733:
Drei Angler fuhren zum Fischfang. Der erste fing 3 Fische, der zweite 4 und der dritte keinen. Die Fischer brieten alle 7 Fische, verteilten sie gleichmäßig unter sich und frühstückten. Zum Spaß gab der dritte Fischer seinen beiden Kameraden 7 Pfennige, um die von ihm verzehrten Fische zu „bezahlen“. Wie müssten die 7 Pfennige unter diesen Umständen verteilt werden?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Jeder Angler aß $\frac{7}{3}$ Fische.
Daher gab der erste $\frac{2}{3}$ Fische, der zweite $\frac{5}{3}$ Fische an den dritten. Falls die vom dritten Angler verzehrten Fische also „bezahlt“ werden sollen, müsste der erste 2 und der zweite 5 Pfennige bekommen.

Aufgabe 090734:
Bei einer Subtraktionsaufgabe betrage der Subtrahend $\frac{2}{5}$ des (von Null verschiedenen) Minuenden.
a) Wie viel Prozent des Minuenden beträgt die Differenz?
b) Wie viel Prozent des Minuenden beträgt die Summe aus Minuend und Subtrahend?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Bezeichnet man den Minuenden mit m ($m \neq 0$), dann ist der Subtrahend $\frac{2}{5}m$. Die Differenz ist $m - \frac{2}{5}m = \frac{3}{5}m$. Wegen $\frac{3}{5}m = \frac{60}{100}m$ beträgt die Differenz 60% des Minuenden.

b) Die Summe aus Minuend und Subtrahend ist $m + \frac{2}{5}m = \frac{7}{5}m$. Wegen $\frac{7}{5}m = \frac{140}{100}m$ beträgt diese Summe 140% des Minuenden.

Aufgabe 140734:
In einem VEB wurde eine bestimmte Art von Werkstücken zuerst in der Abteilung A1 und danach in der Abteilung A2 bearbeitet. Dabei konnte zunächst in der einen Abteilung täglich dieselbe Anzahl von Werkstücken bearbeitet werden wie in der anderen.

Mit Hilfe von Rationalisierungsmaßnahmen in beiden Abteilungen konnten die 53 Arbeiter der Abteilung A1 ihre Produktion auf 159 % und die 62 Arbeiter der Abteilung A2 ihre Produktion auf 124 % erhöhen. Da aber aus den angegebenen Gründen der Produktionsausstoß in beiden Abteilungen gleich groß sein musste, entschlossen sich hinreichend viele Arbeiter der einen Abteilung dazu, in der anderen Abteilung zu arbeiten.

Welche Anzahl von Arbeitern aus welcher der beiden Abteilungen nahm ihre Arbeit in der anderen Abteilung auf, wenn erreicht wurde, dass der Produktionsausstoß in beiden Abteilungen danach wieder gleich groß war?
Auf wie viel Prozent der Produktionsmenge vor den Rationalisierungsmaßnahmen war damit insgesamt der Produktionsausstoß gestiegen?
Bemerkungen: Es sei angenommen, dass der Produktionsausstoß beider Abteilungen jeweils der Zahl der Arbeiter proportional ist.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
In A1, produzierte nach Durchführung der Rationalisierung jeder der 53 Arbeiter $\frac{1{,}59}{53}$ und in A2 jeder der 62 Arbeiter $\frac{1{,}64}{62}$ des Produktionsausstoßes seiner Abteilung vor den Rationalisierungsmaßnahmen.

Da in A1 die Produktion auf eine größere Menge gewachsen war als in A2 mussten Arbeiter von A1 nach A2 überwechseln. Ihre Anzahl sei x. Danach betrug in A1 die Produktion $\frac{1{,}59}{53}(53-x)$ der früheren Produktion, in A2 aber $\frac{1{,}24}{62}(62+x)$. Da diese beiden Produktionsausstöße gleich waren, gilt

$$\frac{159}{53}(53-x) = \frac{124}{62}(62+x) \Rightarrow x = 7$$

Es wechselten somit 7 Arbeiter von A1 nach A2 über. Der neue Produktionsausstoß in jeder Abteilung betrug dann $\frac{1{,}59}{53} \cdot 46 = 1{,}38$, d. h., er stieg auf 138 % des früheren Produktionsausstoßes.

Aufgabe 150734:
Ein Zug fährt genau 15 Minuten später von einem Bahnhof B ab, als es der Fahrplan vorsieht. Deshalb fährt er mit 120 % der auf dieser Strecke üblichen Durchschnittsgeschwindigkeit so lange, bis der Rückstand aufgeholt ist.
Nach wie viel Minuten (gerechnet von der tatsächlichen Abfahrtszeit des Zuges an) ist das der Fall?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Ist v die auf der Strecke übliche Durchschnittsgeschwindigkeit, so fährt der Zug mit der Geschwindigkeit $\frac{120}{100}v = \frac{6}{5}v$.
Ist s die Länge der Strecke von B bis zu der Stelle, an der der Rückstand aufgeholt ist, und ist t die Fahrzeit des Zuges von B bis zu dieser Stelle, so ist einerseits $s = \frac{6}{5}v \cdot t$, andererseits die für die genannte Strecke übliche Fahrzeit (in Minuten) $t + 15$, also $s = v \cdot (t + 15)$.

Daraus folgt $\frac{6}{5}vt = vt + 15v$, also $\frac{1}{5}vt = 15v$, also $t = 5 \cdot 15 = 75$. Der Rückstand ist mithin in 75 min aufgeholt.

Aufgabe 160734:
Im Rahmen der Hans-Beimler-Wettkämpfe an der Schule beteiligte sich Fritz am Entfernungsschätzen.

a) Bei seinem Schätzwert von 350 Metern erfährt er, dass dieser zu klein war, und zwar um genau 12,5% der wahren Entfernung. Ermittle die wahre Entfernung!
b) Wie groß wäre die wahre Entfernung, wenn der Schätzwert von Fritz zu groß gewesen wäre, und zwar um genau 12,5% der wahren Entfernung?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Die wahre Entfernung sei x Meter. Der Schätzwert war um 12,5% von x Metern, d. h. um $\frac{1}{8}x$ Meter zu klein. Das bedeutet, dass der Schätzwert genau $\frac{7}{8}x$ Meter betrug. Mithin gilt: $\frac{7}{8} = 350$, also $x = 400$. Die wahre Entfernung beträgt also 400 m.

b) In diesem Falle sei die wahre Entfernung y Meter. Der Schätzwert wäre um $\frac{1}{8}y$ Meter zu groß gewesen, d. h., er hätte $\frac{9}{8}y$ Meter betragen. Folglich gilt: $\frac{9}{8}y = 350$, also $y = 311\frac{1}{9}$. In diesem Falle würde die wahre Entfernung $311\frac{1}{9}$ m betragen.

Aufgabe 180734:
In einem Behälter befinden sich genau 25 kg einer 4%igen wässrigen Lösung, d. h., 4% dieser Lösung bestehen aus der gelösten Substanz, der Rest besteht aus Wasser.
Wie viel Prozent des Wassers sind dieser Lösung zu entziehen, damit eine neue Lösung entsteht, deren Wasseranteil nur noch 90% beträgt?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
In der Ausgangslösung befinden sich genau 4% der gelösten Substanz, das ist bei 25 kg Lösung genau

1 kg. Diese Menge stellt nach dem Entzug einer Wassermenge genau dann 10% der neuen Lösung dar, wenn die neue Lösung insgesamt 10 kg umfasst.

Somit beträgt genau dann, wenn man der Ausgangslösung 15 kg Wasser entzogen hat, sein Anteil 90%, wie es gefordert war. Zu ermitteln ist demnach, wie viel Prozent von 24 kg Wasser 15 kg Wasser sind. Für diesen gesuchten Prozentsatz x gilt die Beziehung

$$x : 100\% = 15 : 24 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{1500}{24}\% = 62{,}5\%$$

Demzufolge sind 62,5% des in der Ausgangslösung enthaltenen Wassers dieser Lösung zu entziehen, um eine neue Lösung mit 90% Wasseranteil zu erhalten.

Aufgabe 190734:
Birgit und Frank erhalten folgende Informationen über die Schüler einer Schulklasse:

Die Anzahl aller Schüler dieser Klasse ist kleiner als 40.
Genau 60% dieser Schüler nehmen an der AG „Bildende Kunst“ teil,
genau 66% aller Schüler der Klasse gehen regelmäßig zum Schwimmen,
genau 50% aller Schüler der Klasse sind Leser der Kinderbibliothek.

Birgit nennt eine natürliche Zahl x und meint:
Aus den Informationen folgt, dass mindestens x Schüler dieser Klasse sowohl an der AG „Bildende Kunst“ teilnehmen als auch regelmäßig zum Schwimmen gehen; dagegen folgt nicht, dass mehr als x Schüler der Klasse diese beiden Freizeitbeschäftigungen ausüben.

Frank nennt eine natürliche Zahl y und meint:
Aus den Informationen folgt, dass mindestens y Schüler dieser Klasse an allen drei Formen der Freizeitbeschäftigung (AG „Bildende Kunst“, Schwimmen, Kinderbibliothek) teilnehmen.

a) Zeige, dass aus den gegebenen Informationen die Anzahl der Schüler der Klasse eindeutig ermittelt werden kann, und gib diese Anzahl an!
b) Ermittle eine natürliche Zahl x so, dass Birgits Aussagen wahr sind!
c) Beweise, dass Franks Aussagen für jede natürliche Zahl $y > 0$ falsch sind!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Da $60\% = \frac{3}{5}, 66\frac{2}{3}\% = \frac{2}{3}$ und $50\% = \frac{1}{2}$ gilt, muss die gesuchte Anzahl z durch 2, 3 und 5, wegen der paarweisen Teilerfremdheit dieser Zahlen also durch $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ teilbar sein. Wegen $0 < z < 40$ folgt somit $z = 30$.

b) Daher und wegen $35 \cdot 30 = 18, 23 \cdot 30 = 20, 12 \cdot 30 = 15$nehmen genau 18 Schüler an der AG „Bildende Kunst“ teil, genau 20 der Schüler gehen regelmäßig zum Schwimmen und genau 15 der Schüler sind Leser der Kinderbibliothek.

Hiernach folgt, dass mindestens 8 Schüler dieser Klasse sowohl an der AG „Bildende Kunst“ teilnehmen als auch regelmäßig zum Schwimmen gehen. Wären es nämlich weniger als 8, so gäbe es unter den 20 regelmäßig zum Schwimmen gehenden Schülern mehr als 12, die nicht an der AG „Bildende Kunst“ teilnehmen. Diese Schüler und die 18 Teilnehmer der AG wären zusammen bereits mehr als 30 Schüler.

Dagegen folgt nicht, dass mindestens 9 Schüler der Klasse diese beiden Freizeitbeschäftigungen ausüben. Denn nach den Informationen ist z. B. folgende Verteilung möglich:

Von den 18 Teilnehmern der AG „Bildende Kunst“ gehen genau 8 zum Schwimmen, genau die anderen 10 sind Leser der Kinderbibliothek; die übrigen 12 Schüler der Klasse gehen sämtlich zum Schwimmen, genau 5 von ihnen sind außerdem Leser der Kinderbibliothek.

Damit ist bewiesen, dass Birgits Aussagen für die Zahl $x = 8$ wahr sind.

c) Wie das ebengenannte Beispiel zeigt, besteht nach den Informationen auch die Möglichkeit, dass kein Schüler der Klasse alle drei Freizeitbeschäftigungen ausübt. Für keine natürliche Zahl $y > 0$ kann daher Franks Aussage wahr sein.

Aufgabe 230735:
Roland rechnet eine Divisionsaufgabe. Er stellt fest:

Der Dividend beträgt 60% des Quotienten, der Divisor beträgt 75% des Quotienten.
Beweise, dass man aus Rolands Feststellungen eindeutig ermitteln kann, wie der Quotient der Divisionsaufgabe lautet! Gib diesen Quotienten an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Ist Q der Quotient, so ist nach Rolands Feststellungen der Dividend $\frac{3}{5}Q$ und der Divisor $\frac{3}{4}Q$. Die Divisionsaufgabe lautet somit

$$\frac{3}{5}Q : \left(\frac{3}{4}Q\right)$$

Ihr Ergebnis ist $\frac{3}{5} \cdot \frac{4}{3} = \frac{4}{5}$.
Damit ist bewiesen, dass man den Quotienten aus Rolands Feststellungen eindeutig ermitteln kann. Er lautet $\frac{4}{5}$.

Aufgabe 240731:
Bei der Friedensfahrt ergab sich auf einer Etappe folgende Rennsituation:
Genau 14 Fahrer, darunter jedoch kein DDR-Fahrer, waren hinter das Hauptfeld zurückgefallen. Genau 90% der nicht zurückgefallenen Fahrer bildeten das Hauptfeld; darin fuhren einige, aber nicht alle DDR-Fahrer.
Die Fahrer vor dem Hauptfeld bildeten eine Spitzengruppe; sie umfasste genau ein Zwölftel aller Fahrer der Etappe. In der Spitzengruppe war die tschechoslowakische Mannschaft als einzige am schwächsten vertreten, die sowjetische Mannschaft als einzige am stärksten.

Untersuche, ob sich aus diesen Angaben eindeutig ermitteln lässt, welche Mannschaften insgesamt in der Spitzengruppe fuhren und mit wie viel Fahrern sie dort vertreten waren!
Wenn dies zutrifft, gib diese Anzahlen an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn genau x Fahrer an der Etappe teilnahmen, so waren genau $x - 14$ Fahrer nicht zurückgefallen, und genau 10% hiervon, also $\frac{1}{10}(x - 14)$ Fahrer, bildeten die Spitzengruppe. Da dies auch $\frac{x}{12}$ Fahrer waren, folgt

$$\frac{1}{10}(x - 14) = \frac{x}{12} \qquad \Rightarrow \qquad x = 84$$

Somit bestand wegen $84 : 12 = 7$ die Spitzengruppe aus genau 7 Fahrern.
Darunter waren auch DDR- Fahrer, und zwar mindestens 2, da sich auch CSSR-Fahrer in der Spitzengruppe befanden, aber mindestens einer weniger als DDR-Fahrer.
Wären es mindestens 3 DDR-Fahrer gewesen, so mindestens 4 sowjetische Fahrer, im Widerspruch dazu, dass unter den 7 Fahrern der Spitzengruppe nicht nur die DDR- und die UdSSR-Mannschaft vertreten waren.
Also lässt sich eindeutig ermitteln: In der Spitzengruppe waren genau 2 DDR-Fahrer, (1) ferner genau 1 CSSR-Fahrer. (2)

Ferner folgt, dass die sowjetische Mannschaft mit 3 oder 4 Fahrern vertreten war. Wären es genau 3 gewesen, so folgte der Widerspruch, dass eine weitere Mannschaft genau einen Fahrer in der Spitzengruppe gehabt hätte, also die CSSR-Mannschaft nicht als einzige am schwächsten dort vertreten gewesen wäre.
Damit ergibt sich eindeutig: In der Spitzengruppe waren genau die Mannschaften der UdSSR, DDR und CSSR vertreten, darunter (außer den in (1),(2) genannten Fahrern) genau 4 sowjetische Fahrer.

Aufgabe 300731:
In einem Lehrbuch aus dem Jahre 1525 wird sinngemäß folgende Aufgabe gestellt:

Ein Hund jagt einen Fuchs. Jeweils in der Zeit, in der der Fuchs 9 Sprünge macht, macht der Hund 6 Sprünge, aber mit 3 Sprüngen legt der Hund einen ebenso langen Weg zurück, wie der Fuchs mit 7 Sprüngen.
Mit wie viel seiner Sprünge holt der Hund den Fuchs ein, wenn der Fuchs zu Beginn 60 Fuchssprünge Vorsprung hat?

Bemerkung: Es wird vorausgesetzt, dass der Hund der Spur des Fuchses folgt und dass beide ihren ersten Sprung gleichzeitig beginnen.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Damit der Fuchs jeweils in der Zeit, in der der Hund $6 = 2 \cdot 3$ Sprünge macht, einen ebenso langen Weg wie der Hund zurücklegen könnte, müsste er $2 \cdot 7 = 14$ Sprünge machen. Da er aber in dieser Zeit nur 9 seiner Sprünge macht, verringert sich dabei sein Vorsprung jedesmal um 5 Fuchssprünge.
Wegen $60 : 5 = 12$ ist folglich genau dann, wenn das 12mal geschehen ist, der Vorsprung aufgebraucht, also nach $12 \cdot 6 = 72$ Sprüngen des Hundes.

Aufgabe 330732:
In einem Kaufhaus waren $\frac{4}{5}$ aller Beschäftigten Frauen. Zu Anfang eines Monats waren 12,5% dieser Frauen nicht verheiratet. Von den in diesem Kaufhaus beschäftigten Männern waren 18,75% nicht verheiratet.
Während des Monats heirateten vier Paare, von denen jeweils sowohl der Mann als auch die Frau zu den eben genannten unverheirateten Beschäftigten des Kaufhauses gehörten. Weitere Änderungen gab es nicht.
Danach waren noch genau 36 Beschäftigte des Kaufhauses unverheiratet.
Wie viele Beschäftigte hatte das Kaufhaus insgesamt?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn das Kaufhaus insgesamt x Beschäftigte hatte, so waren darunter $\frac{4}{5}x$ Frauen und $\frac{1}{5}x$ Männer.
Zu Beginn des Monats waren $\frac{12,5}{100} \cdot \frac{4}{5}x = \frac{1}{10}x$ Frauen und $\frac{18,75}{100} \cdot \frac{1}{5}x = \frac{3}{80}x$ Männer unverheiratet, das waren zusammen $\frac{1}{10}x + \frac{3}{80}x = \frac{11}{80}x$ unverheiratete Beschäftigte.

Nach der Heirat der 4 Paare waren noch $\frac{11}{80}x - 8$ Beschäftigte unverheiratet. Daher gilt

$$\frac{11}{80}x - 8 = 36 \qquad \Rightarrow \qquad x = 320$$

Das Kaufhaus hatte insgesamt 320 Beschäftigte.

IV.IV Ungleichungen

I Runde 1

Aufgabe V00704:
Welche der beiden Zahlen ist die größere?

$$\frac{35}{47} \qquad \text{oder} \qquad \frac{23}{31}$$

Welcher vierstellige Dezimalbruch kommt beiden Zahlen möglichst nahe?

Lösung von Steffen Polster:
Durch "Überkreuzmultiplizieren" von $\frac{35}{47} \gtreqless \frac{23}{31}$ wird $35 \cdot 31 = 1085 \gtreqless 1081 = 23 \cdot 47$, d. h. der linke Bruch ist der größere, also $\frac{35}{47} > \frac{23}{31}$.

Das arithmetische Mittel beider Brüche ist $\frac{1083}{1457} \approx 0{,}74331$, womit der gesuchte Dezimalbruch 0,7433 ist.

Aufgabe V10711:
Ordne folgende Zahlen der Größe nach:

$$\frac{29}{8}; \quad -0{,}66; \quad -\frac{3}{2}; \quad \frac{2}{3}; \quad 3{,}52; \quad -0{,}67; \quad 3{,}5\overline{2}$$

Lösung von Steffen Polster:
Beginnend mit der kleinsten Zahl ergibt sich die Ordnung

$$-\frac{3}{2}; \quad -0{,}67; \quad -0{,}66; \quad \frac{2}{3}; \quad 3{,}52; \quad 3{,}5\overline{2}; \quad \frac{29}{8}$$

Aufgabe 010711:

$$a)\ \left(-\frac{5}{6}\right)^2 \qquad b)\ \left(\frac{3}{4}\right)^2 \qquad c)\ \left(-\frac{2}{3}\right)^5 \qquad d)\ \left(-\frac{4}{5}\right)^4$$

Ordne die Ergebnisse der Größe nach!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Ergebnisse sind in absteigender Reihenfolge

$$a)\ \frac{25}{36} \qquad b)\ \frac{9}{16} \qquad d)\ \frac{256}{625} \qquad c)\ -\frac{32}{243}$$

Aufgabe 030713:
Wie kann man ohne Ausführung der angegebenen Rechenoperationen feststellen, ob die Zahl

$$\frac{378 \cdot 436 - 56}{378 + 436 \cdot 377}$$

größer oder kleiner als 1 ist?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es gilt

$$\frac{378 \cdot 436 - 56}{378 + 436 \cdot 377} = \frac{377 \cdot 436 + 436 - 56}{436 \cdot 377 + 378} = \frac{377 \cdot 436 + 380}{377 \cdot 436 + 378}$$

Da der Zähler größer als der Nenner ist, ist die Zahl größer als 1.

Aufgabe 160712:
Man denke sich die Zahlen 1, 2, 3, 4, ... usw. bis 100 derart hintereinander aufgeschrieben, dass eine Zahl z der Form

$$z = 12345678910111213...9899100$$

entsteht.
a) Wie viel Stellen hat z?
b) Es sollen 100 Ziffern der Zahl z so gestrichen werden, dass die mit den restlichen Ziffern dargestellte Zahl z' möglichst groß ist. Dabei soll an der Reihenfolge der (in z') verbleibenden Ziffern von z nichts geändert werden.
Ermittle, welche Ziffern zu streichen sind, und gib die ersten zehn Ziffern der neuen Zahl z' an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Die vorgegebene Zahl z entstand aus 9 einstelligen Zahlen, $9 \cdot 10$ zweistelligen Zahlen und der dreistelligen Zahl 100. Sie enthält mithin $9 \cdot 1 + 90 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 192$ Stellen.

b) Von den insgesamt 192 Ziffern von z sollen in der zu bildenden Zahl z' genau 92 Ziffern erhalten bleiben. Von zwei 92stelligen Zahlen, die mit verschiedener Anzahl von Neunen beginnen, ist diejenige die größere, die mit der größeren Anzahl von Neunen beginnt.
Vor der ersten in der Zahl auftretenden Neun stehen 8 von Neun verschiedene Ziffern, vor der zweiten weitere 19, vor der dritten, vierten und fünften wiederum je weitere 19 von Neun verschiedene Ziffern.

Streichen wir diese, so sind insgesamt 84 Ziffern ($8 + 4 \cdot 19 = 84$) entfernt. Es sind noch 16 Ziffern zu streichen.

Die Zahl beginnt dann so: 99999505152535455565750596O...........

Es ist nun nicht mehr möglich, die 19 Ziffern vor der nächsten (ursprünglich sechsten) Neun zu streichen, da dann mehr als 100 Ziffern entfielen.
Von zwei 92stelligen Zahlen, die mit 5 Neunen beginnen und in der sechsten Stelle verschiedene Ziffern haben, ist diejenige größer, die an der sechsten Stelle die größere Zahl enthält. In unserem Fall kommt die Acht dafür nicht in Frage, da dann noch 17 Ziffern zu streichen wären. An der sechsten Stelle kann also höchstens eine Sieben stehen. Das ist auch erreichbar, wenn man die nächsten 15 Ziffern streicht.

Entsprechend zeigt man, dass als letzte Ziffer die auf die Sieben folgende Fünf entfernt werden muss. Die ersten zehn Ziffern der gesuchten Zahl z' lauten mithin 9999978596.

II Runde 3

Aufgabe 270732:
In einem Betrieb werden Erzeugnisse hergestellt, bei denen die Herstellungskosten für jedes Stück 19,2 0M betragen. Der Betrieb hat die Möglichkeit, für 13500 M eine neue Werkzeugmaschine anzuschaffen; mit dieser Maschine würden die Herstellungskosten für jedes Stück nur noch 13,15 M betragen.
Ein Planziel lautet: Die Summe aus den Anschaffungskosten der neuen Maschine und aus den Herstellungskosten der damit in 3 Jahren hergestellten Erzeugnisse soll weniger als 80% derjenigen Herstellungskosten betragen, die (für ebenso viele Erzeugnisse) ohne Nutzung der neuen Maschine entstehen würden.
Ermittle die kleinste Stückzahl pro Jahr, mit der dieses Planziel zu erreichen ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Werden pro Jahr x Stück hergestellt, so würden die Herstellungskosten für die in 3 Jahren ohne Nutzung der neuen Maschine hergestellten Erzeugnisse $3x \cdot 19{,}20$ M betragen. 80% hiervon sind $0{,}8 \cdot 3x \cdot 19{,}20$ M $= 3x \cdot 15{,}36$ M.

Die Herstellungskosten für die in 3 Jahren mit der neuen Maschine hergestellten Erzeugnisse betragen $3x \cdot 13{,}15$ M. Also wird das Planziel genau dann erreicht, wenn $13500 + 3x \cdot 13{,}15 < 3x \cdot 15{,}36$, also $x \cdot 2{,}21 > 4500$ gilt.
Wegen $2036 \cdot 2{,}21 = 4499{,}56$ und $2037 \cdot 2{,}21 = 4501{,}77$ ist somit die kleinste Stückzahl pro Jahr, mit der das Planziel erreicht wird, $x = 2037$.

Aufgabe 340732:
Man denke sich die Zahlen 1, 2, 3, 4, ... usw. bis 100 derart hintereinander aufgeschrieben, dass eine Zahl z der Form $z = 12345678910111213....9899100$ entsteht.
a) Wie viel Stellen hat z?
b) Es sollen 100 Ziffern der Zahl z so gestrichen werden, dass die mit den restlichen Ziffern dargestellt Zahl z' möglichst groß ist. Dabei soll die Reihenfolge der in z' verbleibenden Ziffern von z nicht geändert werden.
Ermittle, welche Ziffern zu streichen sind, und gib die ersten 10 Ziffern der neuen Zahl z' an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Die Zahl z hat ihre Ziffern aus den 9 einstelligen Zahlen 1, ..., 9, den 90 zweistelligen Zahlen 10, ..., 99 und der dreistelligen Zahl 100. Also hat sie $9 + 90 \cdot 2 + 3 = 192$ Stellen.

b) Von den 192 Ziffern der Zahl z sollen in z' genau 92 Ziffern erhalten bleiben. Von zwei 92-stelligen Zahlen, die mit verschiedener Anzahl von Neunen beginnen, ist diejenige die größere, die mit der größeren Anzahl von Neunen beginnt.
Vor der ersten in z auftretenden Neun stehen 8 von Neun verschiedene Ziffern, vor der zweiten weitere 19, vor der dritten, vierten und fünften wiederum je weitere 19 von Neun verschiedene Ziffern. Streicht man diese, so sind insgesamt bereits $8 + 4 \cdot 19 = 84$ Ziffern entfernt; aus der danach verbleibenden Zahl

$$99999505152535455565758596 0...9899100$$

sind noch genau 16 Ziffern zu streichen.
Das können nicht die 19 Ziffern bis zur ersten auf den Anfang 99999 folgenden Neun und auch nicht die 17 Ziffern bis zur ersten auf 99999 folgenden Acht sein. Von je zwei 92-stelligen Zahlen, die mit 99999 beginnen und an der sechsten Stelle verschiedene Ziffern haben, ist stets diejenige die größere, die an der sechsten Stelle die größere Ziffer hat.
Die größte Möglichkeit hierfür ist somit, durch Streichen der ersten auf 99999 folgenden 15 Ziffern den Anfang 999997 zu erreichen. Danach ist noch genau eine Ziffer zu streichen.

Von den beiden Möglichkeiten, die auf den Anfang 999997 folgende Fünf zu streichen oder stehenzulassen (und eine später stehende Ziffer zu streichen), liefert das Streichen der Fünf die größere Zahl.
Damit ist gefunden, welche 100 Ziffern aus z zu streichen sind, um eine möglichst große Zahl z' zu erhalten. Die ersten zehn Ziffern dieser Zahl lauten 9999978596.

V Klasse 8

V.I Gleichungen

I Runde 1

Aufgabe V00803:
Ich lasse einen Ball fallen. Er springt bis zu $\frac{2}{3}$ seiner Fallhöhe. Er fällt von neuem und springt das zweite Mal $\frac{5}{8}$ der ersten Sprunghöhe.
Berechne, von welcher Höhe ich den Ball fallen ließ, wenn er das zweite Mal 45 cm weniger hoch sprang als das erste Mal!

Lösung von Steffen Polster:
Wenn x die Fallhöhe ist, ergibt sich die lineare Gleichung

$$\frac{5}{8} \cdot \frac{2}{3}x + 45 = \frac{2}{3}x$$

mit der Lösung $x = 180$. Der Ball fiel aus einer Höhe von 180 cm.

Aufgabe V00806:
Fritz hat seinen Fuß auf ein 0,1 mm starkes Blatt Papier gestellt und überlegt, wie hoch er wohl stehen würde, faltete er es fünfzigmal.
Könnt ihr es ihm sagen?

Lösung von Steffen Polster:
Faltet er 50 mal, so würde das gefaltete Stapel theoretisch $2^{50} \cdot 0{,}1$ mm ≈ 112000000 km hoch sein.
Dies ist aber nicht möglich. Im Allgemeinen kann man ein Blatt maximal 8 Mal falten. Der Weltrekord mit Spezialfolie liegt bei 11 Mal.

Aufgabe V10813:

$$(7{,}3a - 9{,}8c) - (2{,}1b + 7{,}2c) - (3{,}9a - 4{,}7b)$$

a) Fasse zusammen!
b) Welcher Wert ergibt sich für $a = 2; b = 1{,}5; c = 7$?

Lösung von Steffen Polster:

$$\begin{aligned}(7{,}3a - 9{,}8c) - (2{,}1b + 7{,}2c) - (3{,}9a - 4{,}7b) &= 7{,}3a - 9{,}8c - 2{,}1b - 7{,}2c - 3{,}9a + 4{,}7b \\ &= 7{,}3a - 3{,}9a - 2{,}1b + 4{,}7b - 7{,}2c - 9{,}8c \\ &= 3{,}4a + 2{,}6b - 17c\end{aligned}$$

b) Einsetzen ergibt -108,3.

Aufgabe 010811:
Berechne:

$$\left(1\frac{2}{3}cd + \frac{25}{4}dg - 2\frac{1}{2}d\right) : 5d - \left(\frac{7}{2}mn - 1\frac{1}{4}ng + \frac{3}{4}n\right) : \left(-\frac{3}{8}n\right).$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

$$\begin{aligned}&\left(1\frac{2}{3}cd+\frac{25}{4}dg-2\frac{1}{2}d\right):5d-\left(\frac{7}{2}mn-1\frac{1}{4}ng+\frac{3}{4}n\right):\left(-\frac{3}{8}n\right)\\&=\frac{1}{5}\left(1\frac{2}{3}c+\frac{25}{4}g-2\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{8}{3}\right)\left(\frac{7}{2}m-1\frac{1}{4}g+\frac{3}{4}\right)\\&=\left(\frac{5}{5\cdot 3}c+\frac{25}{5\cdot 4}g-\frac{5}{5\cdot 2}\right)+\left(\frac{8\cdot 7}{3\cdot 2}m-\frac{8\cdot 5}{3\cdot 4}g+\frac{8\cdot 3}{3\cdot 4}\right)\\&=\left(\frac{1}{3}c+1\frac{1}{4}g-\frac{1}{2}\right)+\left(9\frac{1}{3}m-3\frac{1}{3}g+2\right)=\frac{1}{3}c+9\frac{1}{3}m-2\frac{1}{12}g+1\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Aufgabe 030812:
Klaus wird von seinen Eltern nach dem Ergebnis der letzten Mathematikarbeit gefragt. Er weiß, dass 5 Schüler die Note 1, 8 Schüler die Note 2, 4 Schüler die Note 4 und die übrigen Schüler die Note 3 erhielten. Außerdem erinnert er sich noch, dass die Durchschnittsnote genau 2,5 betrug.

Wie viel Schüler haben die Arbeit mitgeschrieben?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Anzahl der Schüler, die eine 3 geschrieben haben: x

Anzahl der Schüler: $n=5+8+4+x=17+x$

Durchschnittsnote: $d=2{,}5=(5\cdot 1+8\cdot 2+x\cdot 3+4\cdot 4)/n$

$$\begin{aligned}2{,}5&=(5\cdot 1+8\cdot 2+x\cdot 3+4\cdot 4)/(17+x)\\2{,}5&=(5+16+x\cdot 3+16)/(17+x)\\42{,}5+2{,}5\cdot x&=37+x\cdot 3\\5{,}5&=0{,}5\cdot x\\11&=x\end{aligned}$$

$n=17+x=17+11=28$. 28 Schüler haben die Arbeit mitgeschrieben.

Aufgabe 050812:
Für welche reellen Zahlen a und b ist die Gleichung

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{(a+b)\cdot(a-b)}{ab}\quad\text{erfüllt?}$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Weder a noch b dürfen Null sein. Dann ergibt sich

$$\frac{a+b}{ab}=\frac{(a+b)\cdot(a-b)}{ab}\Rightarrow 0=(a+b)\cdot(a-b)-(a+b)\Rightarrow(a+b)(a-b-1)=0$$

Ein Produkt ist Null, wenn mindestens ein Faktor Null ist. Damit muss $a+b=0$ oder $a-b=1$ gelten. Umgekehrt ist offensichtlich, dass die Gleichung erfüllt ist, wenn entweder $a=-b$ oder $a=b+1$ gilt.

Aufgabe 100812:
Ermittle alle rationalen Zahlen x mit $x\neq 2$, die die folgende Gleichung erfüllen:

$$\frac{3x}{x-2}+1+\frac{4}{x-2}\quad=\quad 2+\frac{3(x+1)}{x-2}+\frac{1}{x-2}$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, die Gleichung hätte eine rationale Lösung x mit $x \neq 2$. Dann folgt aus der gegebenen Gleichung

$$3x + x - 2 + 4 = 2x - 4 + 3x + 3 + 1$$

Daraus folgt $x = 2$ im Widerspruch zur Voraussetzung $x \neq 2$. Daher war die Annahme falsch, d. h., es gibt keine rationale Zahl x mit $x \neq 2$, die die gegebene Gleichung erfüllt.

Aufgabe 110811:
a) Berechne die Zahl $$x = -\left\{-\left[-(-2)\right]^2\right\}^3 \cdot \left\{-\left[-\left(-\frac{1}{2}\right)^3\right]^2\right\}$$

b) Stelle fest, ob sich x als Potenz einer natürlichen Zahl darstellen lässt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

$$x = -\left\{-\left[-(-2)\right]^2\right\}^3 \cdot \left\{-\left[-\left(-\frac{1}{2}\right)^3\right]^2\right\} = -\left\{-\left[2\right]^2\right\}^3 \cdot \left\{-\left[\frac{1}{8}\right]^2\right\} = -\left\{-4\right\}^3 \cdot \left\{-\frac{1}{64}\right\} = -1$$

b) Da als Potenz einer natürlichen Zahl niemals eine negative Zahl auftritt, kann x nicht Potenz einer natürlichen Zahl sein.

Aufgabe 110812:
Ermittle alle rationalen Zahlen x, die folgende Eigenschaft haben:

Addiert man 33 zu x und halbiert die entstandene Summe, so erhält man das Doppelte der zu x entgegengesetzten Zahl.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Addiert man 33 zu einer Zahl x und halbiert die entstandene Summe, so erhält man $\frac{x+33}{2}$. Das Doppelte der zu x entgegengesetzten Zahl ist $2 \cdot (-x)$. Daher hat eine Zahl x genau dann die genannte Eigenschaft, wenn sie die Gleichung

$$\frac{x + 33}{2} = -2x$$

erfüllt.
Diese Gleichung ist genau dann erfüllt, wenn $x + 33 = -4x$ gilt. Das ist äquivalent mit $5x = -33$ und dies mit $x = -\frac{33}{5}$. Daher hat genau diese Zahl die verlangte Eigenschaft.

Aufgabe 120813:
Man denke sich alle natürlichen Zahlen von 1 bis 1000000 fortlaufend nebeneinander geschrieben. Es entsteht die Zahl mit der Ziffernfolge 123456789101112...

welche Ziffer steht in dieser Zahl an der 300001. Stelle?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es gibt 9 einstellige, $99 - 9 = 90$ zweistellige, $999 - 99 = 900$ dreistellige, $9999 - 999 = 9000$ vierstellige und $99999 - 9999 = 90000$ fünfstellige Zahlen.

Die ersten neun Stellen der Ziffernfolge nehmen die einstelligen Zahlen, die nächsten 180 Stellen ($2 \cdot 90 = 180$) die zweistelligen, die nächsten 2700 Stellen ($3 \cdot 900 = 2700$) die dreistelligen ein. 36000 Stellen benötigen die vier- und 450000 Stellen die fünfstelligen Zahlen.

Da die ein- bis vierstelligen Zahlen zusammen also 38889 Stellen einnehmen, ist die uns interessierende Ziffer eine solche einer mindestens fünfstelligen Zahl.
Wegen $300001 - 38889 = 261112 < 450000$ und $261112 : 5 = 52222$ Rest 2 ist die zu ermittelnde Ziffer die zweite Ziffer der 52223. fünfstelligen Zahl. Da die fünfstelligen Zahlen mit 10000 beginnen, ist es die zweite Ziffer der Zahl 62222.
An der 300001. Stelle steht mithin die Ziffer 2.

Aufgabe 220812:
Von einer 22stelligen Zahl z werden folgende Eigenschaften gefordert:

z hat die Einerziffer 7; streicht man diese Endziffer und setzt sie vor die übrigen 21 Ziffern, so entsteht dasselbe Ergebnis wie bei der Multiplikation $7 \cdot z$.

Beweise, dass es genau eine solche Zahl z gibt! Ermittle diese Zahl!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn eine Zahl uz die verlangten Eigenschaften hat, so folgt:
Es gibt eine 21stellige Zahl x mit $z = 10x + 7$, und für sie gilt

$$7 \cdot 10^{21} + x = 7 \cdot (10x + 7)$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} 69x &= 7 \cdot 10^{21} - 49 \\ x &= \frac{7 \cdot 10^{21} - 49}{69} = \frac{6999999999999999999951}{69} = 101449275362318840579 7 \end{aligned}$$

Die Probe bestätigt die Lösung.

Aufgabe 270811:
Steffen stellt den Mitgliedern der AG Mathematik folgende Aufgabe:

„Jeder denke sich eine Zahl, multipliziere diese mit 2, addiere zum Produkt 30, dividiere die Summe durch 2, subtrahiere von dem erhaltenen Ergebnis die anfangs gedachte Zahl!
Schreibe des Ergebnis auf!“

Es stellte sich heraus, dass alle Schüler der Arbeitsgemeinschaft das gleiche Ergebnis hatten. Müssen sich Steffens Mitschüler unbedingt auch die gleiche Zahl gedacht haben?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Schüler müssen sich nicht unbedingt die gleiche Zahl gedacht haben. Man stellt fest, dass aus zwei verschiedenen Anfangszahlen dasselbe Ergebnis entsteht. So genügen zum Beweis z. B. folgende Feststellungen:

Die Anfangszahl 1 führt der Reihe nach auf die Zahlen $1 \cdot 2 = 2, 2 + 30 = 32, 32 : 2 = 16, 16 - 1 = 15$.
Die Anfangszahl 2 führt der Reihe nach auf die Zahlen $2 \cdot 2 = 4, 4 + 30 = 34, 34 : 2 = 17, 17 - 2 = 15$.

Andere Beweismöglichkeit: Man beweist, dass aus jeder Anfangszahl a dasselbe Ergebnis entsteht, nämlich vermittels der Zahlen

$$a \cdot 2; \quad a \cdot 2 + 30; \quad (a \cdot 2 + 30) : 2 = a + 15; \quad a + 15 - a = 15$$

Aufgabe 310812:
Rudolf macht folgende Aussage:

„Für je drei unmittelbar aufeinanderfolgende natürliche Zahlen gilt stets: Multipliziert man die kleinste dieser drei Zahlen mit der mittleren und addiert zum Ergebnis das Produkt aus der mittleren und der größten der drei Zahlen, so ist die entstandene Summe gleich dem doppelten Quadrat der mittleren Zahl.“

a) Überprüfe, ob diese Gleichheit in einigen selbstgewählten Beispielen zutrifft!

b) Beweise oder widerlege Rudolfs Aussage!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Beispiele einer Überprüfung der geforderten Art sind etwa:

3 aufeinanderfolgende Zahlen	$a \cdot b + b \cdot c$	$2 \cdot b^2$
3, 4, 5	$12 + 20 = 32$	$2 \cdot 16 = 32$
5, 6, 7	$30 + 42 = 72$	$2 \cdot 36 = 72$
...	...	...

b) Je drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen lauten, wenn man die mittlere mit b bezeichnet, $b-1$, b, $b+1$. Die Summe der zu bildenden Produkte beträgt $(b-1)\cdot b + b \cdot (b+1)$, das doppelte Quadrat der mittleren Zahl beträgt $2 \cdot b^2$. Da durch Umformen die Gleichung

$$(b-1)\cdot b + b\cdot(b+1) = b^2 - b + b^2 + b = 2\cdot b^2$$

folgt, ist Rudolfs Aussage bewiesen.

Aufgabe 320814:
Alexander beobachtete zwei Kerzen, eine weiße und eine halb so lange rote. Beide wurden gleichzeitig angezündet; nach 2 Stunden war die weiße Kerze heruntergebrannt, die rote (da sie breiter war) erst nach 5 Stunden.

Wie lange nach dem Anzünden hatte es bis zu dem Zeitpunkt gedauert, an dem beide Kerzen einander genau gleichlang gewesen waren?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
In jeder Stunde verringerte sich die Länge L der weißen Kerze, solange sie brannte, um $\frac{1}{2}L$, die Länge $\frac{L}{2}$ der roten Kerze dagegen um $\frac{1}{5}\cdot\frac{L}{2} = \frac{1}{10}L$.
Jeweils nach x Stunden hat sich demnach die Länge der weißen Kerze um $\frac{x}{2}L$ auf $L - \frac{x}{2}L = (1-\frac{x}{2})L$ verringert, die der roten Kerze um $\frac{x}{10}L$ auf $\frac{L}{2} - \frac{x}{10}L = (\frac{1}{2} - \frac{x}{10})L$.

Sind die Kerzen nach x Stunden einander gleichlang, so gilt folglich

$$1 - \frac{x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{x}{10} \qquad ; \qquad x = \frac{5}{4}$$

Also hatte es $\frac{5}{4}$ Stunden (= 75 Minuten) gedauert, bis die Kerzen einander gleichlang gewesen waren.

II Runde 2

Aufgabe V10824:
Fritz rechnet $32 \cdot 38 = 30 \cdot 40 + 2 \cdot 8$ bzw. $73 \cdot 77 = 70 \cdot 80 + 3 \cdot 7$.
Leite daraus eine Rechenregel ab und beweise sie allgemein!

Lösung von Steffen Polster:
a) $32 \cdot 38 = 30 \cdot 40 + 2 \cdot 8$

$$\begin{aligned}(30+2)(40-2) &= 30 \cdot 40 + 2 \cdot 40 - 2 \cdot 30 - 2 \cdot 2\\ &= 30 \cdot 40 + 2(40 - 30 - 2) = 30 \cdot 40 + 2 \cdot 8\end{aligned}$$

b) $73 \cdot 77 = 70 \cdot 80 + 3 \cdot 7$

$$\begin{aligned}(70+3)(80-3) &= 70 \cdot 80 + 3 \cdot 80 - 3 \cdot 70 - 3 \cdot 3\\ &= 70 \cdot 80 + 3(80 - 70 - 3) = 70 \cdot 80 + 3 \cdot 7\end{aligned}$$

c) Verallgemeinerung:

$$\begin{aligned}(10a+b)(10a+10-b) &= 10a \cdot 10a + 10a \cdot 10 - 10ab + 10ab + 10b - b \cdot b\\ &= 100a^2 + 100a + 10b - b^2\\ &= 10a(10a+10) + b(10-b)\end{aligned}$$

Weitere Verallgemeinerung:
Man erhält das Produkt zweier zweistelliger (ganzer) Zahlen mit gleichen Zehnern und einander zu 10 ergänzenden Einem, indem man zuerst die Zehner mit dem nächsthöheren Zehner, dann die Einer miteinander multipliziert und die beiden Zwischenprodukte addiert.

$$(a+b)(a+10-b) = a(a+10) + b(10-b)$$

Aufgabe 020823:
Berechne:

$$\frac{m^2-n^2}{m-n} + \frac{m^2+2mn+n^2}{m+n}.$$

Lösung von Carsten Balleier:

$$\frac{m^2-n^2}{m-n} + \frac{m^2+2mn+n^2}{m+n} = \frac{(m+n)(m-n)}{m-n} + \frac{(m+n)^2}{m+n} = m+n+m+n = 2(m+n)$$

Aufgabe 020824:
Welche x erfüllen die folgende Gleichung:

$$\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{3}\right) : \left(\frac{x}{3}-\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{3x}{4}-\frac{1}{6}\right) : \left(\frac{x}{2}-\frac{2}{3}\right)?$$

Lösung von Carsten Balleier:

$$\begin{aligned}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{x}{2}-\frac{2}{3}\right) &= \left(\frac{3x}{4}-\frac{1}{6}\right) \cdot \left(\frac{x}{3}-\frac{1}{2}\right)\\ \frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} + \frac{2}{9} &= \frac{x^2}{4} - \frac{31x}{72} + \frac{1}{12}\\ \frac{5}{72}x &= \frac{5}{36}\end{aligned}$$

Also ist $x = 2$, wovon man sich in der Probe noch einmal überzeugt.

Aufgabe 040824:
Peter ist im Ferienlager. Er will für seine Gruppe Brause zu 21 Pf je Flasche einkaufen und nimmt dazu leere Flaschen mit.
Für das eingelöste Pfandgeld (30 Pf für jede der leeren Flaschen) möchte er möglichst viele Flaschen Brause kaufen. Für jede Flasche müssen erneut 30 Pf Pfand hinterlegt werden.
Es stellt sich heraus, dass er 6 Flaschen weniger erhält, als er abgegeben hat. Außerdem bekommt er noch Geld zurück.

Wie viel leere Flaschen hatte Peter mitgenommen? (Es gibt nicht nur eine Lösung.)

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Peter muss den Inhalt der gekauften Flaschen von dem Erlös der 6 nicht zurückerhaltenen Flaschen bezahlen. Wegen $180 : 21 = 8\frac{12}{21}$ kann er höchstens 8 Flaschen gekauft haben.

1. Lösung: Peter hatte 14 Flaschen mit und erhält 12 Pf zurück.

2. Lösung: Peter hatte 13 Flaschen mit und erhält 33 Pf zurück.

Hätte Peter 12 Flaschen mitgehabt, so hätte er 7 Flaschen kaufen können, also $(n-5)$ statt nur $(n-6)$, was der Aufgabe widerspricht.

Aufgabe 100823:
Bei einem 216 kp schweren Stück einer Kupfer-Zink-Legierung wurde in Wasser ein Auftrieb (Gewichtsverlust) von 26 kp gemessen.
Bekannt ist, dass Kupfer beim Eintauchen in (destilliertes) Wasser $\frac{1}{9}$ seines ursprünglichen Gewichtes und Zink $\frac{1}{7}$ seines ursprünglichen Gewichtes verliert.

Ermittle den prozentualen Gewichtsanteil des Kupfers und den des Zinks in der angegebenen Legierung! (Die zu ermittelnden Größen sind auf volle Prozent zu runden).

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Das Gewicht des Kupferanteils in der Legierung sei x kp. Dann beträgt das Gewicht des Zinkanteils $(216-x)$ kp.
Beim Eintauchen in Wasser beträgt der Gewichtsverlust des Kupferanteils $\frac{1}{9}x$ kp und der des Zinkanteils $\frac{1}{7}(216-x)$ kp. Daher gilt:

$$\frac{1}{9}x + \frac{1}{7}(216-x) = 26$$

woraus man $7x + 9 \cdot (216-x) = 63 \cdot 26$, also $x = 153$ erhält.
Der Kupferanteil kann daher nur 153 kp, der Zinkanteil nur 216 kp - 153 kp = 63 kp betragen haben.
Wegen $153 : 216 \approx 0{,}708$ betrug der prozentuale Anteil des Kupfers rund 71 %, der des Zinks rund 29 %.

Aufgabe 130823:
Man ermittle alle rationalen Zahlen r mit folgender Eigenschaft:

Subtrahiert man r vom Zähler des Bruches $\frac{3}{4}$ und addiert r zu dessen Nenner, so erhält man einen Bruch, der halb so groß wie $\frac{3}{4}$ ist.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, es gibt eine rationale Zahl r, die die Bedingungen der Aufgabe erfüllt. Dann gilt:

$$\frac{3-r}{4+r} = \frac{3}{8}$$

Daraus folgt $24 - 8r = 12 + 3r$. Also kann höchstens $r = \frac{12}{11}$ die Bedingungen der Aufgabe erfüllen. Tatsächlich ist

$$\frac{3-\frac{12}{11}}{4+\frac{12}{11}} = \frac{\frac{21}{11}}{\frac{56}{11}} = \frac{3}{8}$$

d. h., $r = \frac{12}{11}$ erfüllt die Bedingungen.

Aufgabe 170824:
Dieter erzählt seinen Klassenkameraden:

> „Mein Bruder Fritz ist nur halb so alt wie ich. Wenn man die Anzahl seiner Lebensjahre mit sich selbst multipliziert, erhält man das Alter meines Vaters. Meine Mutter ist drei Jahre jünger als mein Vater. Alle zusammen sind wir 87 Jahre alt.“

Ermittle das Alter aller 4 Personen! (Es sind jeweils nur die vollendeten Lebensjahre zu berücksichtigen.)

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Das Alter des Vaters ist eine Quadratzahl kleiner 45, da das Alter von Vater und Mutter zusammen nicht 87 Jahre oder mehr betragen kann. Da der Vater die älteste der vier Personen ist, beträgt sein Alter mindestens ein Viertel von 87 Jahren, also ist es größer als 21. Zwischen 21 und 45 liegen genau die Quadratzahlen 25 und 36.

Fall 1: Angenommen, das Alter des Vaters wäre 25 Jahre. Dann wären Fritz 5 Jahre, Dieter 10 Jahre und die Mutter 22 Jahre. Das Alter aller Familienangehörigen zusammen betrüge in diesem Fall nicht 87 Jahre. Also ist der Vater nicht 25 Jahre alt.

Fall 2: Angenommen, das Alter des Vaters beträgt 36 Jahre. Dann ist Fritz 6 Jahre, Dieter 12 Jahre und die Mutter 33 Jahre alt. Alle zusammen sind wegen $36+6+12+33 = 87$ mithin 87 Jahre, wie es verlangt war.
Folglich treffen diese Altersangaben als einzige zu.

Aufgabe 210824:
Über den Mitgliederstand einer Betriebssportgemeinschaft (BSG), in der genau fünf Sektionen bestehen, wurden folgende Angaben gemacht:

- Genau 22 Mitglieder der BSG gehören zur Sektion Schach.
- Genau ein Drittel aller Mitglieder der BSG gehören zur Sektion Fußball.
- Genau ein Fünftel aller Mitglieder der BSG gehören zur Sektion Leichtathletik.
- Genau drei Siebentel aller Mitglieder der BSG gehören zur Sektion Tischtennis.
- Genau zwei Neuntel aller Mitglieder der BSG gehören zur Sektion Turnen.
- Genau 8 Mitglieder der BSG gehören zu je genau drei verschiedenen Sektionen.
- Genau 72 Mitglieder der BSG gehören zu mindestens zwei verschiedenen Sektionen.
- Kein Mitglied der BSG gehört mehr als drei Sektionen an, aber jedes Mitglied mindestens einer Sektion.

Untersuche, ob es eine Zusammenstellung von Mitgliederzahlen sowohl der gesamten BSG als auch der fünf einzelnen Sektionen gibt, so dass alle diese Aussagen zutreffen! Untersuche, ob diese Mitgliederzahlen durch die Aussagen eindeutig bestimmt sind! Ist das der Fall, so gib die Mitgliederzahlen an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn für eine Zusammenstellung von Mitgliederzahlen alle genannten Aussagen zutreffen, so folgt: Ist x die Mitgliederzahl der BSG, so sind die Mitgliederzahlen der genannten Sektionen

$$22, \quad \frac{x}{3}, \quad \frac{x}{5}, \quad \frac{3}{7}x, \quad \frac{2}{9}x \tag{1}$$

Addiert man diese Zahlen, so hat man damit jedes Mitglied der BSG so oft erfasst, wie die Anzahl der Sektionen angibt, denen das betreffende Mitglied angehört. Dieselbe Art der Erfassung kann man folgendermaßen erreichen:

Man erfasse jedes der x Mitglieder zunächst einmal, dann die im Aufgabentext genannten 72 Mitglieder noch ein zweites Mal und schließlich die zuvor genannten 8 Mitglieder noch ein drittes Mal. Daher gilt

$$22 + \frac{x}{3} + \frac{x}{5} + \frac{3}{7}x + \frac{2}{9}x = x + 80$$

Durch Subtraktion von $22 + x$ und Multiplikation mit 315 folgt

$$105x + 63x + 135x + 70x - 315x = 18270 \qquad \Rightarrow \qquad x = 315$$

Nach (1) können daher die genannten Aussagen nur dann zutreffen, wenn 315 die Mitgliederzahl der BSG ist und 22, 105, 63, 135, 70 die Mitgliederzahlen der Sektionen sind.

II. Werden umgekehrt diese Mitgliederzahlen für die Sektionen erreicht und wird zusätzlich erreicht, dass genau 72 Mitglieder zu je mindestens zwei Sektionen gehören und von diesen genau 8 zu je genau drei Sektionen, so beträgt die Mitgliederzahl der BSG wegen $22 + 105 + 63 + 135 + 70 - 72 - 8 = 315$ dann 315.
Also treffen damit auch die Aussagen zu, dass die Mitgliederzahlen 105, 63, 135, 70 dasselbe sind wie $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{3}{7}$ bzw. $\frac{2}{9}$ der Mitgliederzahl der BSG.

Aus I. und II. folgt: Es gibt eine Zusammenstellung von Mitgliederzahlen der BSG und der Sektionen so, dass alle genannten Aussagen zutreffen. Sie ist durch die Aussagen eindeutig bestimmt und lautet:

BSG: 315; Sektionen: 22, 105, 63, 135, 70.

Aufgabe 230822:
Eine Schulklasse wird so in Lernbrigaden aufgeteilt, dass die Anzahl der Mitglieder jeder Brigade um 2 größer ist als die Anzahl der Brigaden. Hätte man eine Brigade weniger gebildet, so hätte jede Brigade 2 Mitglieder mehr haben können.

Weise nach, dass man aus diesen Angaben die Anzahl der Schüler dieser Klasse eindeutig ermitteln kann, und gib diese Anzahl an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Bezeichnet man die Anzahl der Brigaden mit x, so sind in jeder Brigade $(x + 2)$ Schüler, und der Klasse gehören $x(x + 2)$ Schüler an.

Hätte man eine Brigade weniger gebildet, wären es $(x-1)$ Brigaden mit je $(x+4)$ Schülern gewesen. Daraus ergibt sich die Schülerzahl zu $(x-1)(x+4)$. Folglich gilt

$$x(x+2)=(x-1)(x+4) \qquad \Rightarrow \qquad x=4$$

Es wurden mithin 4 Brigaden zu je 6 Schülern gebildet. Daher befinden sich insgesamt 24 Schüler in dieser Klasse.

Aufgabe 250821:
Ermittle diejenigen zwölf aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen, die die Eigenschaft haben, dass die Summe der beiden größten dieser Zahlen gleich der Summe der zehn übrigen ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es sei x die kleinste der zwölf Zahlen. Dann gilt laut Aufgabenstellung

$$x+x+1+x+2+x+3+x+4+x+5+x+6+x+7+x+8+x+9=x+10+x+11$$

$$10x+45=2x+21 \qquad \Rightarrow \qquad x=-3$$

Tatsächlich ist die Summe der zehn aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen von -3 bis 6 gleich der Summe der beiden darauffolgenden Zahlen 7 und 8.
Die Bedingungen der Aufgabe werden also genau von den Zahlen -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 und 8 erfüllt.

Aufgabe 270821:
Ein AG-Leiter behauptet, er könne jede von seinen Zirkelteilnehmern gedachte Zahl erraten, wenn ihm nur das Ergebnis der folgenden Rechnung genannt wird:

> „Denke dir eine Zahl. Addiere dazu die Zahl 5, multipliziere die Summe mit 16, subtrahiere davon das Sechsfache der gedachten Zahl und dividiere diese Differenz durch 10!“

Lässt sich tatsächlich aus dem nun zu nennenden Ergebnis dieser Rechnung die gedachte Zahl ermitteln? Wenn das der Fall ist, so beschreibe und begründe, auf welche Weise das geschehen kann!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Bezeichnet man die gedachte Zahl mit x, dann werden durch die genannte Rechnung der Reihe nach die Zahlen

$$\begin{aligned} x+5 \quad &; \quad (x+5)\cdot 16=16x+80 \\ 16x+80-6x=10x+80 \quad &; \quad (10x+80):10=x+8 \end{aligned}$$

gebildet. Subtrahiert man hiervon die Zahl 8, so erhält man die Zahl x.
Damit wird bewiesen: Die gedachte Zahl lässt sich aus dem zu nennenden Ergebnis ermitteln, indem man von diesem Ergebnis 8 subtrahiert.

Aufgabe 290822:
a) Untersuche, ob die Gleichung

$$\left(\frac{x}{2}+2\right)(4x-7)=2x^2+\frac{x}{3}+1$$

eine natürliche Zahl x als eine Lösung besitzt!
b) In der genannten Gleichung soll die Zahl 7 so durch eine rationale Zahl r ersetzt werden, dass die entstehende Gleichung die Zahl $x=1$ als eine Lösung besitzt.
Ermittle alle diejenigen rationalen Zahlen r, die diese Forderung erfüllen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Wenn x eine Lösung der genannten Gleichung ist, dann folgt

$$\begin{aligned} 2x^2 - \frac{7}{2}x + 8x - 14 &= 2x^2 + \frac{x}{3} + 1 \\ 48x - 21x - 2x &= 90 \\ 5x &= 18 \end{aligned}$$

Da dies von keiner natürlichen Zahl x erfüllt wird, hat die genannte Gleichung keine natürliche Zahl x als Lösung.

b) Die entstehende Gleichung

$$\left(\frac{x}{2} + 2\right)(4x - r) = 2x^2 + \frac{x}{3} + 1$$

hat genau dann $x = 1$ als eine Lösung, wenn $\left(\frac{1}{2} + 2\right)(4 - r) = 2 + \frac{1}{3} + 1$ (1) gilt. Das ist genau dann der Fall, wenn

$$\frac{5}{2} \cdot (4 - r) = \frac{10}{3} \qquad \Rightarrow \qquad r = \frac{8}{3}$$

gilt. Die genannte Forderung wird also genau von der rationalen Zahl $r = \frac{8}{3}$ erfüllt.

Aufgabe 300821:
In einem Garten stehen zwei Fässer mit Wasser. Jörg gießt aus dem ersten Fass so viele Liter Wasser in das zweite Fass, wie dort bereits enthalten sind. Anschließend gießt er aus dem zweiten Fass so viele Liter Wasser in das erste, wie sich dort nach dem vorigen Umgießen befinden. Nach diesen beiden Umfüllvorgängen befinden sich in jedem der beiden Fässer genau je 24 Liter Wasser.

Untersuche, ob aus diesen Angaben eindeutig folgt, wie viele Liter Wasser sich anfangs in jedem der beiden Fässer befanden! Ist dies der Fall, so gib diese beiden Literzahlen an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn sich am Schluss in jedem der beiden Fässer 24 Liter befinden und mit dem zweiten Umfüllen die Wassermenge des ersten Fasses verdoppelt wurde, dann müssen sich wegen $24 : 2 = 12$ vor dem zweiten Umfüllen in diesem Fass 12 Liter Wasser befunden haben.
Da die gesamte in den Fässern vorhandene Wassermenge 48 Liter beträgt, waren wegen $48 - 12 = 36$ in dem zweiten Fass zu diesem Zeitpunkt 36 Liter. Ferner war mit dem ersten Umfüllen die Wassermenge im zweiten Fass verdoppelt worden.
Daraus ergibt sich, dass für die Wassermengen, die anfangs in den Fässern waren, eindeutig folgt: Wegen $36 : 2 = 18$ waren im zweiten Fass 18 Liter und wegen $48 - 18 = 30$ im ersten Fass 30 Liter.

Aufgabe 300824:
Man denke sich die Zahlen 1, 2, 3, 4, ..., 9999 derart hintereinander aufgeschrieben, dass die Zifferndarstellung einer Zahl z entsteht.

Der Beginn dieser Darstellung lautet $z = 123456789101112131415...$; beispielsweise an der elften Stelle steht die Ziffer 0, die Ziffer 2 tritt z. B. an der zweiten Stelle, an der 15ten Stelle und noch an weiteren Stellen von z auf.

Welche Ziffer steht an der 206788sten Stelle von z?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Unter den aufgeschriebenen Zahlen gibt es genau 9 einstellige, genau $99 - 9 = 90$ zweistellige, genau $999 - 99 = 900$ dreistellige, genau $9999 - 999 = 9000$ vierstellige und genau $99999 - 9999 = 90000$ fünfstellige Zahlen.

In der damit aufgeschriebenen Ziffernfolge für z nehmen die einstelligen Zahlen die ersten 9 Stellen ein, die zweistelligen Zahlen die nächsten $2 \cdot 90 = 180$ Stellen, die dreistelligen Zahlen die nächsten $3 \cdot 900 = 2700$ Stellen, die vierstelligen Zahlen die nächsten $4 \cdot 9000 = 36000$ Stellen und die fünfstelligen Zahlen die nächsten $5 \cdot 90000 = 450000$ Stellen.

Da somit die ein- bis vierstelligen Zahlen wegen $9 + 180 + 2700 + 36000 = 38889$ die ersten 38889 Stellen einnehmen, die ein- bis fünfstelligen Zahlen jedoch wegen $38889 + 450000 = 488889$ die Stellen bis zur 488889sten einnehmen, kommt die Ziffer an der 206788sten Stelle von z wegen $38889 < 206788 < 488889$ in einer der aufgeschriebenen fünfstelligen Zahlen vor.

Um festzustellen, in welcher, bilden wir die Differenz $206788 - 38889 = 167899$ und führen die Division von 167899 durch 5 mit Rest aus. Damit erhalten wir, dass $167899 = 5 \cdot 33579 + 4$ gilt, und es folgt:

Der gesuchten Ziffer gehen 33579 fünfstellige Zahlen voran, und sie ist in der dann folgenden, also 33580sten fünfstelligen Zahl die vierte Ziffer. Da die fünfstelligen Zahlen mit der Zahl 1000 beginnen, lautet die 33580ste von ihnen 43579. Ihre vierte Ziffer ist 7.
Somit steht an der 206788sten Stelle von z die Ziffer 7.

Aufgabe 320824:
In der linken Waagschale einer gleicharmigen Waage stehen drei Kerzen, in der rechten steht eine Kerze. Die vier Kerzen sind so beschaffen, dass jede von ihnen während je einer Stunde Brenndauer die gleiche Masse verliert wie jede andere von Ihnen. Jede der drei linken Kerzen würde zum vollständigen Herunterbrennen 9 Stunden brauchen, die rechte Kerze 12 Stunden.

Die vier Kerzen werden gleichzeitig angezündet. Wie lange danach ist die Waage erstmals Im Gleichgewicht?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es sei m die Masse, die jede der vier Kerzen während einer Stunde Brenndauer verliert.
Dann hat jede der drei linken Kerzen die Masse $9m$, und die rechte Kerze hat die Masse $12m$. Nach x Stunden Brenndauer befindet sich folglich, solange $x \leq 9$ bleibt, auf der linken bzw. auf der rechten Waagschale die Masse $3 \cdot (9 - x)m$ bzw. die Masse $(12 - x)m$.
Hiermit ergibt sich genau dann Gleichgewicht, wenn

$$3 \cdot (9 - x) = 12 - x$$

gilt. Die Lösung der Gleichung ist $x = 7\frac{1}{2}$.
Also ist die Waage erstmals $7\frac{1}{2}$ Stunden nach dem Anzünden der vier Kerzen im Gleichgewicht.

Aufgabe 330821:
Zu Beginn einer Feier waren insgesamt anwesend: Genau viermal so viele Frauen wie Männer. Nachdem vier Ehepaare die Feier verlassen hatten, waren genau fünfmal so viele Frauen wie Männer auf der Feier.

Wie viele Personen waren insgesamt zu Beginn auf der Feier gewesen?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Waren zu Beginn genau x Männer auf der Feier, so waren genau $4x$ Frauen auf der Feier. Nachdem vier Ehepaare die Feier verlassen hatten, blieben genau $x - 4$ Männer und $4x - 4$ Frauen. Für diese Anzahlen gilt folglich

$$5 \cdot (x - 4) = 4x - 4 \qquad \text{also} \qquad x = 16$$

Somit waren zu Beginn insgesamt 16 Männer und 64 Frauen, also 80 Personen auf der Feier gewesen.

Aufgabe 330822:
Susann lässt sich je eine natürliche Zahl von Xaver, Yvonne und Zacharias sagen. Sie teilt ihnen dann die Summe dieser drei Zahlen mit. Jeder multipliziert die mitgeteilte Summe mit der ursprünglich von ihm genannten Zahl. So erhält Xaver das Ergebnis 240, Yvonne 270 und Zacharias 390.

Untersuche, ob hierdurch die drei ursprünglich genannten Zahlen eindeutig bestimmt sind! Ist dies der Fall, so gib diese Zahlen an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Sind x, y, z die drei ursprünglich genannten Zahlen und ist $s = x + y + z$ (1) ihre Summe, so gilt

$$x \cdot s = 240 \qquad , \qquad y \cdot s = 270 \qquad , \qquad z \cdot s = 390 \tag{2}$$

Indem man (1) mit s multipliziert und dann (2) anwendet, folgt

$$s^2 = x \cdot s + y \cdot s + z \cdot s \qquad ; \qquad 240 + 270 + 390 = 900$$

Da s als Summe dreier natürlicher Zahlen selbst eine natürliche Zahl ist, ist hierdurch eindeutig bestimmt: Es gilt $s = 30$ und damit nach (2) $x = 8, y = 9, z = 13$.

III Runde 3

Aufgabe 020832:
Rechenvorteile erleichtern das Kopfrechnen. Zwei Zahlen von 11 bis 19 kann man z. B. folgendermaßen multiplizieren:

$18 \cdot 17 = ?$	$18 + 7$	25
	Null anhängen	250
	$7 \cdot 8$ addieren	306

Weise die Richtigkeit dieses Rechenvorteils nach!

Lösung von Carsten Balleier:
Man kann das Produkt darstellen als $(10 + a)(10 + b)$ mit $1 \leq a,b \leq 9$. Es ist daher gleich

$$100 + 10a + 10b + ab = 10(10 + a + b) + ab.$$

Die Summe aus 10 und den beiden Einerstellen entspricht im Beispiel $18 + 7$, die Multiplikation mit 10 der angehängten Null und das Produkt der Einer der $7 \cdot 8$.

Aufgabe 100832:
Eine Pumpe P_1 füllt ein Becken in genau 4 h 30 min. Eine zweite Pumpe P_2 füllt dasselbe Becken in genau 6 h 45 min. Beim Füllen dieses Beckens wurde eines Tages zunächst die Pumpe P_1 genau 30 min lang allein eingesetzt. Anschließend wurden beide Pumpen zusammen so lange eingesetzt, bis das Becken gefüllt war.

Berechne, wie lange es insgesamt dauerte, bis das Becken unter diesen Umständen gefüllt wurde! (Es sei angenommen, dass beide Pumpen während ihres Einsatzes mit konstanter Leistung arbeiteten.)

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Da P_1 das gesamte Becken in genau 4 h 30 min füllt, wurde durch diese Pumpe in 30 min genau $\frac{1}{9}$ des Beckens gefüllt. In jeder Minute füllte P_1 mithin genau $\frac{1}{270}$ des Beckens.

Da P_2 das gesamte Becken in genau 6 h 45 min, also in 405 min füllt, füllte diese Pumpe in jeder Minute $\frac{1}{405}$ des Beckens.
In der Zeit, in der beide Pumpen zusammen arbeiteten, füllten sie mithin in jeder Minute wegen

$$\frac{1}{270} + \frac{1}{405} = \frac{15}{2430} = \frac{1}{162}$$

genau $\frac{1}{162}$ des Beckens. Insgesamt wurden von beiden Pumpen gemeinsam $\frac{8}{9}$ des Beckens gefüllt.
Wegen $\frac{8}{9} = \frac{144}{162}$ geschah das in genau 144 min. Infolgedessen wurde das Becken in der in der Aufgabe angegebenen Weise in genau 174 min, das sind 2 h 54 min, gefüllt.

Aufgabe 110831:
In ein leeres Gefäß (ohne Abfluss) mit einem Fassungsvermögen von 1000 Liter flossen mit gleichmäßiger Strömungsgeschwindigkeit zunächst in jeder Sekunde genau 30 Liter Wasser und von einem späteren Zeitpunkt t ab in jeder Sekunde genau 15 Liter Wasser. Nach genau 40 s, gemessen vom Anfang an, war das Gefäß gefüllt.

Ermittle, welcher Bruchteil des Gefäßinhalts zum Zeitpunkt t gefüllt war!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die vom Anfang bis zum Zeitpunkt t vergangene Zeit, während der also genau 30 Liter je Sekunde in das Gefäß flossen, betrage x, dann sind in der Zeit, während der genau 15 Liter je Sekunde in das Gefäß flossen, genau $(40 - x)$ Sekunden vergangen, und es gilt:

$$30x + (40 - x) \cdot 15 = 1000$$

also $15x = 400$, woraus man $x = \frac{80}{3}$ erhält.
Während dieser $\frac{80}{3}$ s flossen genau $\frac{80}{3} \cdot 30$ l, das sind 800 1 Wasser, in das Gefäß. Wegen $\frac{800}{1000} = \frac{4}{5}$ waren daher zum Zeitpunkt t genau $\frac{4}{5}$ des Gefäßes gefüllt.

Aufgabe 110835:
Gisela stellt auf einem Pioniernachmittag folgende Aufgabe:

> „Wenn ich aus diesem Gefäß mit Nüssen an fünf von euch dem ersten die Hälfte und eine halbe Nuss und dann dem zweiten, dem dritten usw. nacheinander jeweils die Hälfte der noch vorhandenen Nüsse und eine halbe dazu gebe, dann habe ich alle verbraucht.
>
> Wie groß ist die Anzahl der Nüsse, die das Gefäß enthielt?
>
> Wie groß ist für jeden der fünf Pioniere die Anzahl der Nüsse, die er erhalten würde?“

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Anzahl der Nüsse in dem Gefäß sei x. Dann würde der erste Pionier $\frac{x}{2} + \frac{1}{2}$ erhalten, als Rest blieben

$$\frac{x}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(x - 1)$$

Davon würde der zweite Pionier $\frac{1}{4}(x - 1) + \frac{1}{2}$ erhalten, als Rest blieben $\frac{1}{4}(x - 1) - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}(x - 3)$.

Davon würde der dritte Pionier $\frac{1}{8}(x - 3) + \frac{1}{2}$ erhalten, als Rest blieben $\frac{1}{8}(x - 3) - \frac{1}{2} = \frac{1}{8}(x - 7)$.

Davon würde der vierte Pionier $\frac{1}{16}(x - 7) + \frac{1}{2}$ erhalten, als Rest blieben

$$\frac{1}{16}(x - 7) - \frac{1}{2} = \frac{1}{16}(x - 15)$$

Davon würde der fünfte Pionier $\frac{1}{32}(x-15)+\frac{1}{2}$ erhalten, als Rest blieben

$$\frac{1}{32}(x-15)-\frac{1}{2}=\frac{1}{32}(x-31)$$

Dieser Rest betrug laut Aufgabe Null. Daraus folgt $x = 31$. Also enthielt das Gefäß genau 31 Nüsse. Von diesen würden bekommen:
Der 1. Pionier 16 Nüsse, der 2. Pionier 8 Nüsse, der 3. Pionier 4 Nüsse, der 4. Pionier 2 Nüsse und der 5.Pionier 1 Nuss.

Aufgabe 160834:
Fritz behauptet: Zwei zweistellige Zahlen, die durch Vertauschen der Ziffern auseinander hervorgehen (z. B. 72 und 27), kann man nach der folgenden Vorschrift miteinander multiplizieren, die am Beispiel der beiden genannten Zahlen dargelegt werden soll:

(1)	Man berechnet das Produkt der beiden Ziffern	$7 \cdot 2 = 14$
(2)	Man schreibt die erhaltene Zahl zweimal hintereinander auf (Hinweis: War die in (1) erhaltene Zahl einstellig, so schreibt man zwischen die beiden Zahlen noch eine Ziffer Null.)	1414
(3)	Man addiert die Quadratzahlen der beiden Ziffern	$49 + 4 = 53$
(4)	Man hängt an das Ergebnis eine Null an	530
(5)	Man addiert die Ergebnisse der Rechenschritte (2) und (4) und erhält damit das gesuchte Produkt	$1414 + 530 = 1944$

Beweise die Richtigkeit dieser Behauptung!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Sind a und b die beiden Ziffern, so sind die zu multiplizierenden Zahlen $10a + b$ und $10b + a$. Ihr Produkt ist

$$(10a + b)(10b + a) = 100ab + 10a^2 + 10b^2 + ab$$

In Rechenschritt (1) ergibt sich nun ab, in Rechenschritt (2) demnach $100ab + ab$. In Rechenschritt (3) ergibt sich $a^2 + b^2$, in (4) also $10(a^2 + b^2)$.
Somit führt Rechenschritt (5) auf $100ab + ab + 10(a^2 + b^2)$, also, wie behauptet, auf das zu berechnende Produkt.

Aufgabe 170833:
Die gebrochene Zahl $\frac{9}{91}$ soll als Differenz zweier positiver echter Brüche mit den Nennern 7 und 13 dargestellt werden.

Untersuche, ob es eine solche Darstellung gibt, ob es mehr als eine gibt, und ermittle alle derartigen Darstellungen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, es gibt eine solche Darstellung; dann lautet sie

$$\frac{9}{91}=\frac{x}{7}-\frac{y}{13}$$

wobei x und y natürliche Zahlen mit $0 < x < 7$ und $0 < y < 13$ sind. Wegen $91 = 7 \cdot 13$ gilt daher $13x - 7y = 9$ uns somit $y = \frac{13x-9}{7}$.

Wir erhalten für $x = 1, ..., 6$:

x	$13x$	$13x-9$	x	$13x$	$13x-9$
1	13	4	2	26	17
3	39	30	4	42	43
5	65	56	6	78	69

Von den in der dritten Spalte angegebenen Zahlen ist nur die Zahl 56 durch 7 teilbar. Wir erhalten also nur für $x = 5$ einen ganzzahligen Wert für y, und zwar $y = 8$.
Somit kann nur die Darstellung

$$\frac{9}{91} = \frac{5}{7} - \frac{8}{13} \tag{1}$$

den Bedingungen der Aufgabenstellung genügen. Sie erfüllt diese Bedingungen; denn $\frac{5}{7}$ und $\frac{8}{13}$ sind positive echte Brüche, und es gilt (1).

Aufgabe 180833:
Jürgen ist im Ferienlager und will für seine Gruppe Brause zu 0,21 M je Flasche einkaufen. Er nimmt kein Bargeld, sondern nur leere Flaschen mit. Für das eingelöste Pfandgeld (0,30 M für jede der leere Flaschen) kauft er möglichst viele Flaschen Brause, wobei er für jede volle Flasche außer dem Preis von 0,21 M auch 0,30 M Pfand zu zahlen hat. Es stellt sich heraus, dass er sieben Flaschen weniger erhält, als er abgegeben hat. Außerdem bekommt er noch Geld zurück.

Ermittle alle Möglichkeiten, wie viele leere Flaschen Jürgen mitgenommen haben könnte und wie viel Geld er dann zurückerhielt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Jürgen habe x leere Flaschen mitgenommen, er habe y Pfennig zurückerhalten. Somit bezahlte Jürgen einen Betrag von $30x - y$, und er erhielt dafür $x - 7$ volle Flaschen zu 0,51 M. Es gilt folglich:

$$(1) \quad 30x - y = 51(x - 7) \qquad \text{mit } 0 < y < 51$$

da Jürgen im Falle $y = 51$ noch weitere Flaschen erhalten könnte und im Falle $y = 0$ kein Geld herausbekäme.
Aus (1) erhält man:

$$y = 357 - 21y = 7(51 - 3x)$$

also $0 < 51 - 3x < \frac{51}{7}$. Aus $0 < 51 - 3x$ folgt $x < 17$. Aus $51 - 3x < \frac{51}{7}$ folgt $3x > \frac{6 \cdot 51}{7}$, also $x > \frac{102}{7} > 14$.

Daher verbleiben nur die Möglichkeiten $x = 15$ und $x = 16$. Für $x = 15$ gilt $y = 42$, und für $x = 16$ folgt $y = 21$.

1. Möglichkeit: Jürgen hatte 15 leere Flaschen mitgenommen, das entspricht 4,50 M Pfandgeld. Er kaufte $15 - 7 = 8$ Flaschen Brause und musste dafür 4,08 M bezahlen. Er erhielt 0,42 M zurück, wofür er keine weitere Flasche Brause kaufen konnte.

2. Möglichkeit: Jürgen hatte 16 leere Flaschen mitgenommen, das entspricht 4,80 M Pfandgeld. Er kaufte $16 - 7 = 9$ Flaschen Brause und musste dafür 4,59 M bezahlen. Er erhielt 0,21 M zurück, wofür er ebenfalls keine weitere Flasche Brause kaufen konnte.

Aufgabe 190831:
Klaus erzählt:

„Als ich kürzlich einkaufte, hatte ich genau drei Münzen bei mir. Beim Bezahlen stellte ich folgendes fest. Wenn ich zwei meiner Münzen hingebe, so fehlen noch 3,50 M bis zum vollen Preis der gekauften Ware, lege ich aber nur die übrige Münze hin, so erhalte ich 3,50 M zurück“

Ermittle aus diesen Angaben alle Möglichkeiten dafür, wie viel Münzen welcher Sorte Klaus bei sich gehabt hat! Dabei sind nur 1, 5, 10, 20, und 50 Pf. sowie 1, 2, 5, 10 und 20 Mark zu berücksichtigen.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Differenz zwischen der Summe der Werte der ersten beiden Münzen und dem Wert der dritten Münze beträgt genau 7,00 M. Deshalb ist der Wert der dritten Münze größer als 7 M, also 10 M oder 20 M.
Wäre die dritte Münze eine Münze zu 20 M gewesen, dann müsste die Summe der Werte der beiden anderen Münzen genau 13 Mark betragen haben, das ist mit den angegebenen Münzwerten jedoch nicht möglich.
Also war die dritte Münze eine Münze zu 10 M, und die Summe der Werte der beiden anderen Münzen betrug genau 3 M. Das ist bei den angegebenen Münzsorten nur möglich, wenn Klaus eine 2-Mark-Münze und eine 1-Mark-Münze bei sich hatte.
Klaus hatte also bei diesem Einkauf eine 10-Mark-Münze, eine 2-Mark-Münze und eine 1-Mark-Münze bei sich.

Aufgabe 190834:
Beweise, dass das Produkt dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen, vermehrt um die mittlere Zahl, stets die dritte Potenz der mittleren Zahl ergibt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Ist x die mittlere der drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, so lauten sie $x-1$, x und $x+1$.
Bildet man daher ihr Produkt und vermehrt es um die mittlere Zahl, so erhält man

$$(x-1)\cdot x\cdot(x+1)+x=x^3-x+x=x^3$$

Aufgabe 220832:

a) Beweise, dass für $n=2,3,4$ und 5 der folgende Satz gilt:

   Wenn q das arithmetische Mittel von n unmittelbar aufeinanderfolgenden ungeraden natürlichen Zahlen ist, dann ist q stets eine natürliche Zahl.

b) Ermittle unter den Zahlen $n=2,3,4,5$ alle diejenigen, für die das in a) genannte Mittel q stets eine gerade Zahl ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Man kann n unmittelbar aufeinanderfolgende ungerade natürliche Zahlen stets mit jeweils einer geeigneten natürlichen Zahl m

für $n=2$ in der Form $2m-1, 2m+1$,
für $n=3$ in der Form $2m-1, 2m+1, 2m+3$,
für $n=4$ in der Form $2m-3, 2m-1, 2m+1, 2m+3$,
für $n=5$ in der Form $2m-3, 2m-1, .2m+1, 2m+3, 2m+5$

darstellen. Das arithmetische Mittel q dieser Zahlen ist

für $n=2$ die Zahl $q=\frac{1}{2}\cdot 4m=2m$,
für $n=3$ die Zahl $q=\frac{1}{3}\cdot(6m+3)=2m+1$,
für $n=4$ die Zahl $q=\frac{1}{4}\cdot 8m=2m$,
für $n=5$ die Zahl $q=\frac{1}{5}\cdot(10m+5)=2m+1$,

Wie m sind auch $2m$ und $2m+1$ natürliche Zahlen; damit ist der in a) geforderte Beweis erbracht.
Ferner ist q genau in den Fällen mit $q=2m$ gerade; also sind genau $n=2$ und $n=4$ die in b) zu ermittelnden Zahlen.

Aufgabe 230831:
Ein vollständig gefülltes Wasserbecken besitzt einen großen und einen kleinen Abflusshahn. Öffnet man nur den großen Hahn, so läuft das Becken in genau einer Stunde aus; öffnet man nur den kleinen Hahn, so ist das Becken in genau drei Stunden leer.

Nach welcher Zeit ist das Becken leer, wenn beide Hähne gleichzeitig geöffnet sind? Vorausgesetzt wird für jeden der beiden Hähne, dass aus ihm jeweils in gleich langen Zeiten gleich große Wassermengen entströmen.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Ist nur der große Hahn geöffnet, so läuft in jeder Minute $\frac{1}{60}$ des Beckeninhalts aus; ist nur der kleine Hahn geöffnet, so läuft in jeder Minute $\frac{1}{180}$ des Beckeninhalts aus.
Sind nun beide Hähne gleichzeitig geöffnet, so läuft in jeder Minute $\frac{1}{60} + \frac{1}{180} = \frac{4}{180} = \frac{1}{45}$ des Beckeninhalts aus. Somit ist das Becken nach genau 45 Minuten leer, wenn beide Hähne gleichzeitig geöffnet sind.

Aufgabe 250835:
Von Lew Nikolajewitsch Tolstoi (1828 - 1910), einem bedeutenden russischen Schriftsteller, stammt folgende Aufgabe:

> Schnitter sollen zwei Wiesen mähen. Am Morgen begannen alle, die größere Wiese zu mähen. Vom Mittag dieses Tages an teilten sie jedoch die Arbeit anders ein: Die Hälfte der Schnitter verblieb beim Mähen der ersten Wiese, die sie bis zum Abend fertig mähen. Die anderen Schnitter gingen zum Mähen der zweiten Wiese über, deren Flächeninhalt gleich dem der Hälfte der ersten war, und arbeiteten bis zum Abend. Nun blieb auf der zweiten Wiese ein Rest, für den ein Schnitter allein einen ganzen Tag benötigte.
>
> Wie viel Schnitter waren am ersten Tag bei der Arbeit?

Anmerkung: Es sei vorausgesetzt, dass jeder Schnitter an jedem Vormittag eine gleichgroße Fläche wie an jedem Nachmittag mäht und dass diese Arbeitsleistung aller Schnitter die gleiche ist.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn am ersten Tag x Schnitter bei der Arbeit waren, so gilt:
Das Mähen der zweiten Wiese ist die halbe Tagesleistung von $\frac{x}{2}$ Schnittern, vermehrt um die Tagesleistung von einem Schnitter. Das Mähen der ersten Wiese ist eine doppelt so große Leistung; es ist also die Tagesleistung von $\frac{x}{2}$ Schnittern, vermehrt um die Tagesleistung von zwei Schnittern.

Andererseits war das Mähen der ersten Wiese die halbe Tagesleistung von x Schnittern, vermehrt um die halbe Tagesleistung von $\frac{x}{2}$ Schnittern.

$$\frac{x}{2} + 2 = \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{2} \qquad \Rightarrow \qquad x = 8$$

Folglich waren am ersten Tag acht Schnitter bei der Arbeit.

Aufgabe 260831:
Gegen Ende eines Kinderfestes kommen fünf Mädchen zur Solidaritätstombola und wollen Lose kaufen. Der Pionierleiter zählt die vorrätigen Lose und sagt dann: „Der Vorrat reicht dafür, dass jede von euch, eine nach der anderen, jeweils genau die Hälfte der gerade noch vorhandenen Lose und ein halbes Los dazu kauft. Dann bleibt kein Los übrig.“

(I) Weise nach, dass es als Vorrat an Losen höchstens eine Anzahl geben kann, bei der die Aussagen des Pionierleiters zutreffen!

(II) Weise nach, dass für diese Anzahl die Aussagen des Pionierleiters zutreffen! Wie viele Lose kann jedes der fünf Mädchen nach diesen Angaben kaufen?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

(I) Wenn die Aussagen des Pionierleiters bei einem Vorrat von x Losen zutreffen, so kann jedes der Mädchen so viele Lose kaufen, wie die folgende Tabelle angibt. Ferner ist dort angegeben, wie viele Lose dann jeweils noch vorhanden sind.

	Anzahl der Lose, die das Mädchen kaufen kann	Anzahl der Lose, die danach noch vorhanden sind
1. Mädchen	$\frac{x}{2}+\frac{1}{2}$	$x-(\frac{x}{2}+\frac{1}{2})=\frac{x}{2}-\frac{1}{2}$
2. Mädchen	$\frac{1}{2}(\frac{x}{2}-\frac{1}{2})+\frac{1}{2}=\frac{x}{4}+\frac{1}{4}$	$(\frac{x}{2}-\frac{1}{2})-(\frac{x}{4}+\frac{1}{4})=\frac{x}{4}-\frac{3}{4}$
3. Mädchen	$\frac{1}{2}(\frac{x}{4}-\frac{3}{4})+\frac{1}{2}=\frac{x}{8}+\frac{1}{8}$	$(\frac{x}{4}-\frac{3}{4})-(\frac{x}{8}+\frac{1}{8})=\frac{x}{8}-\frac{7}{8}$
4. Mädchen	$\frac{1}{2}(\frac{x}{8}-\frac{7}{8})+\frac{1}{2}=\frac{x}{16}+\frac{1}{16}$	$(\frac{x}{8}-\frac{7}{8})-(\frac{x}{16}+\frac{1}{16})=\frac{x}{16}-\frac{15}{16}$
5. Mädchen	$\frac{1}{2}(\frac{x}{16}-\frac{15}{16})+\frac{1}{2}=\frac{x}{32}+\frac{1}{32}$	

Da das 5. Mädchen alle noch vorhandenen Lose gekauft hat, gilt

$$\frac{x}{32}+\frac{1}{32}=\frac{x}{16}-\frac{15}{16} \qquad \text{also} \qquad x=31$$

Als Vorrat an Losen kann daher höchstens die Zahl $x=31$ die Eigenschaft haben, dass die Aussagen des Pionierleiters zutreffen.

(II) Für diese Anzahl als Vorrat gilt in der Tat:

Das 1. Mädchen kann $\frac{31}{2}+\frac{1}{2}=16$ Lose kaufen. Von den dann vorhandenen 15 Losen kann das 2. Mädchen $\frac{15}{2}+\frac{1}{2}=8$ Lose kaufen.

Von den dann vorhandenen 7 Losen kann das 3. Mädchen $\frac{7}{2}+\frac{1}{2}=4$ Lose kaufen. Von den dann vorhandenen 3 Losen kann das 4. Mädchen $\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2$ Lose kaufen.

Von dem dann vorhandenen 1 Los kann das 5. Mädchen $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$ Los kaufen, und danach bleibt kein Los übrig.

Für den Vorrat von 31 Losen treffen somit die Aussagen des Pionierleiters zu; die einzelnen Mädchen können nach diesen Aussagen der Reihe nach 16, 8, 4, 2, 1 Lose kaufen.

Alternativ-Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn die Aussagen des Pionierleiters zutreffen, so folgt:
Nachdem die ersten vier Mädchen gekauft haben, wie angegeben, kann das 5. Mädchen die Hälfte der noch vorhandenen Lose und ein halbes Los dazu kaufen, und danach bleibt kein Los übrig.
Also war das eben genannte halbe Los die andere Hälfte der noch vorhandenen Lose; d. h. die Anzahl der noch vorhandenen Lose hatte 1 betragen.

Also bleibt, wenn das 4. Mädchen die Hälfte der noch vorhandenen Lose und ein halbes Los dazu kauft, danach noch genau dieses eine Los übrig. Somit war dieses Los und das halbe Los zusammen die andere Hälfte der zuvor noch vorhandenen Lose; d. h. die Anzahl der noch vorhandenen Lose hatte 3 betragen.

Entsprechend schließt man:
Für das 3. Mädchen hatte die Hälfte der Anzahl der zuvor noch vorhandenen Lose $3\frac{1}{2}$, diese Anzahl selbst also 7 betragen; für das 2. Mädchen hatte die Hälfte der Anzahl der zuvor noch vorhandenen Lose $7\frac{1}{2}$, diese Anzahl selbst also 15 betragen; die Hälfte der Anzahl der ganz zu Beginn vorhandenen Lose hatte $15\frac{1}{2}$, diese Anzahl selbst also 31 betragen.

(II) wie im 1. Lösungsweg.

Aufgabe 270831:
Während einer Kindergeburtstagsfeier spielt man „Geburtstagsdatum erraten“. Katrin, das Geburtstagskind, erklärt ihrem jeweiligen Spielpartner:

> „Teile dein Geburtsdatum auf in eine Tageszahl und eine Monatszahl! (Mein heutiger Geburtstag, der 24. Mai, wäre z. B. aufzuteilen in die Tageszahl 24 und die Monatszahl 5.) Verdopple nun die Tageszahl deines Geburtsdatums, addiere zum Ergebnis 7, multipliziere die Summe mit 50 und vermehre das Produkt um die Monatszahl deines Geburtsdatums!“

Nachdem das Ergebnis genannt wurde, war Katrin in der Lage, das betreffende Geburtsdatum zu nennen. Erkläre, durch welche Überlegung man das Geburtsdatum in jedem Fall aus dem Ergebnis der von Katrin geforderten Rechnung finden kann!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Für jedes Geburtsdatum mit Tageszahl x und Monatszahl y gilt:
Die geforderte Rechnung führt der Reihe nach auf die Zahlen

$$2x, \qquad 2x+7, \qquad (2x+7)\cdot 50 = 100x+350$$

also auf das Ergebnis $100x+350+y$.
Aus diesem Ergebnis kann man die gesuchten Zahlen x und y folgendermaßen finden:

Man subtrahiert 350 und erhält die Zahl $100x+y$. Da y als Monatszahl kleiner als 100 ist, muss y die aus der Zehner- und Einerziffer von $100x+y$ gebildete Zahl sein (wobei, falls die Zehnerziffer 0 lautet, diese wegzulassen ist); und lässt man umgekehrt aus $100x+y$ die Zehner- und Einerziffer weg, so bleibt die (Zifferndarstellung der) Zahl x übrig.

Aufgabe 290831:
Eine Aufgabe des bedeutenden englischen Naturwissenschaftlers Isaac Newton (1643 bis 1727) lautet:

Ein Kaufmann besaß eine gewisse Geldsumme.
Im ersten Jahr verbrauchte er davon 100 Pfund; zum Rest gewann er durch seine Arbeit ein Drittel desselben dazu.
Im zweiten Jahr verbrauchte er wiederum 100 Pfund und gewann zum Rest ein Drittel dazu.
Im dritten Jahr verbrauchte er erneut 100 Pfund und gewann zum Rest ein Drittel dazu.
Dabei stellte er fest, dass sich sein Geld gegenüber dem Anfang des ersten Jahres verdoppelt hatte.

Ermittle aus diesen Angaben, welche Geldsumme anfangs des ersten Jahres vorhanden gewesen sein muss! Weise nach, dass bei dieser Anfangssumme die Angaben des Aufgabentextes zutreffen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn die Angaben mit der Anfangssumme x Pfund zutreffen, so folgt:
Da durch Hinzugewinn eines Drittels einer Summe stets vier Drittel dieser Summe entstehen, ergibt sich am Ende des dritten Jahres die Summe von

$$(((x-100)\cdot\frac{4}{3}-100)\cdot\frac{4}{3}-100)\cdot\frac{4}{3} \text{ Pfund}$$

Also gilt nach der letzten Angabe des Aufgabentextes

$$(((x-100)\cdot\frac{4}{3}-100)\cdot\frac{4}{3}-100)\cdot\frac{4}{3} = 2x$$

Daraus folgt durch Ausmultiplizieren aller Klammern und anschließendes Multiplizieren mit dem Hauptnenner

$$\begin{aligned}((\frac{4}{3}x - \frac{400}{3} - 100) \cdot \frac{4}{3} - 100) \cdot \frac{4}{3} &= 2x \\ (\frac{16}{9}x - \frac{1600}{9} - \frac{400}{3} - 100) \cdot \frac{4}{3} &= 2x \\ \frac{64}{27}x - \frac{6400}{27} - \frac{1600}{9} - \frac{400}{3} &= 2x \\ 64x - 6400 - 4800 - 3600 &= 54x \\ x &= 1480\end{aligned}$$

Die Anfangssumme muss folglich 1480 Pfund betragen haben.

Aus dieser Anfangssumme entsteht, im ersten Jahr durch Verbrauchen von 100 Pfund die Summe 1380 Pfund, durch Hinzugewinnen eines Drittels (460 Pfund) die Summe 1840 Pfund; im zweiten Jahr entsprechend 1740 Pfund + 580 Pfund = 2320 Pfund; im dritten Jahr 2220 Pfund + 740 Pfund = 2960 Pfund.
Da 2960 das Doppelte von 1480 ist, treffen bei der genannten Anfangssumme somit die Angaben des Aufgabentextes zu.

V.II Bewegungsgleichungen

I Runde 1

Aufgabe 040813:
Auf einer zweigleisigen Strecke zum Vorort einer Großstadt fährt alle 10 Minuten von der Anfangsstation und von der Endstation gleichzeitig je eine Straßenbahn ab und benötigt je 50 Minuten Fahrtzeit. Die Aufenthaltszeit an diesen beiden Stationen beträgt je 10 Minuten.

Wie viel Straßenbahnen sind insgesamt auf dieser Strecke eingesetzt?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Zur Abfahrtszeit befinden sich an der Anfangs- und an der Endstation je 2 Bahnen. Außerdem sind je 2 Bahnen 10 min, 20 min, 30 min und 40 min unterwegs. Also sind insgesamt 12 Straßenbahnen eingesetzt.

Aufgabe 060813:
Auf einer 1 km langen kreisförmigen Bahn wird ein Radrennen ausgetragen. Zu einer gewissen Zeit hat der Radsportler B genau 500 m Vorsprung vor dem Radsportler A. A fährt mit einer Geschwindigkeit von 50 km/h, B mit einer Geschwindigkeit von 45 km/h.

Nach wie viel Minuten würde A den Fahrer B ein ersten Mal einholen, wenn beide mit gleichbleibender Geschwindigkeit weiterfahren würden?

Lösung von Manuela Kugel:
B hat zunächst einen Vorsprung von 500 m. In der gleichen Zeit, in der A 500 m zurücklegt, legt B nur 450 m zurück. A holt bei also 50 m auf. Insgesamt muss er 500 m aufholen. Das schafft er unter den Bedingungen der Aufgabe in genau 5 Runden.

Die Gesamtlänge des Weges beträgt bei 5 Runden 5 km. Daher wird B von A in 6 Minuten eingeholt.

Aufgabe 070813:
Drei Sportler starteten gleichzeitig und liefen 100 m. Als der erste am Ziel war, hatte der zweite noch genau 10 m zu laufen. Als der zweite am Ziel war, blieben für den dritten noch genau 10 m.

Wie weit war der dritte noch vom Ziel entfernt, als der erste dieses erreicht hatte? (Es sei angenommen, dass jeder der drei Sportler die gesamte Strecke mit konstanter Geschwindigkeit durchlief.)

Lösung von Manuela Kugel:
Es kann die Formel der konstanten Geschwindigkeit angewandt werden: $v = s : t$ bzw. umgestellt: $t = s : v$.

Betrachtet man den Zeitpunkt 1, an dem der 1. Läufer (a) ins Ziel kommt, dann gilt für den Zweiten (b) und Dritten (c): $t_1 = s_{b_1} : v_{b_1} = s_{c_1} : v_{c_1}$,
wobei $s_{b_1} = 100m - 10m = 90m$ und s_{c_1} die gesuchte Wegstrecke ist, die c zum Zeitpunkt 1 des Zieleinlaufes hinter sich gebracht hatte.

Zum Zeitpunkt 2, an dem der Zweite Läufer (b) das Ziel erreicht gilt analog: $t_2 = s_{b_2} : v_{b_2} = s_{c_2} : v_{c_2}$,
wobei $s_{b_2} = 100$ m und $s_{c_2} = 100m - 10m = 90m$ sowie $v_b := v_{b_1} = v_{b_2}$ und $v_c := v_{c_1} = v_{c_2}$ gilt.

Nun werden die Gleichungen des 1. und 2. Zeitpunktes zusammengeführt:

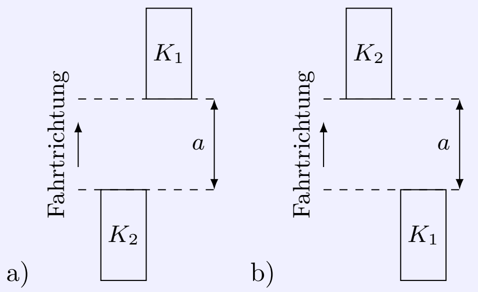
$$s_{c_1} = s_{b_1} \cdot \frac{v_c}{v_b} = 90m \cdot \frac{v_c}{v_b} = 90m \cdot \frac{s_{c2}}{s_{b_2}} = 90m \cdot \frac{90m}{100m} = 81m.$$

Demzufolge war der Dritte noch $100m - 81m = 19m$ vom Ziel entfernt als der Erste das Ziel erreicht hatte.

Aufgabe 090814:
Auf zwei nebeneinanderliegenden Fahrbahnen sind zwei 4 m lange Kraftwagen in gleicher Fahrtrichtung gefahren. Der erste hatte eine Geschwindigkeit von 60 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, der zweite eine Geschwindigkeit von 70 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Der zweite Kraftwagen fuhr an dem ersten vorbei.

Zu Beginn des betrachteten Vorganges befand sich die Hinterkante des ersten Wagens $a = 20$ m vor der Vorderkante des zweiten (siehe Abbildung a); am Ende des Vorganges die Vorderkante des ersten $a = 20$ m hinter der Hinterkante des zweiten (siehe Abbildung b).

Wie lange dauerte dieser Vorgang, und welche Fahrtstrecke wurde von der Vorderkante des zweiten Wagens dabei zurückgelegt?



Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Da der Vorgang laut Aufgabe stattgefunden hat, existiert eine Lösung. Es seien folgende Bezeichnungen eingeführt:
Geschwindigkeit von K_1 bzw. K_2: $v_1 = 60\frac{\text{km}}{\text{h}}$, $v_2 = 70\frac{\text{km}}{\text{h}}$

Weg der Vorderkante von K_1 bzw. K_2 während des Vorgangs: s_1, s_2
Zeitdauer des Vorgangs: t
Abstand der Vorderkanten voneinander zu Anfang bzw. am Ende des Vorgangs: $d_A = d_E = 24$ m
Summe dieser Abstände: $D = d_A + d_E = 48$ m
Angenommen nun, diese Größen seien die bei dem Vorgang der Aufgabenstellung auftretenden. Dann folgt $s_1 = v_1 t, \qquad s_2 = v_2 t, \qquad s_1 + D = s_2$. Daraus folgt weiter $v_1 t + D = v_2 t$, also

$$t = \frac{D}{v_2 - v_1} = \frac{0{,}048}{10}\text{h} = 17{,}28\text{s} \approx 17{,}3\text{s}$$

sowie

$$s_2 = v_2 t \left(= \frac{v_2 D}{v_2 - v_1} \right) = 336\text{m}$$

Aufgabe 220813:
Eine NVA-Marschkolonne ist 3,2 km lang. Ein Regulierungsposten fährt mit dem Krad vom Ende der Marschkolonne ab, holt die Spitze der Marschkolonne nach 5,6 km Fahrt ein, fährt sofort mit gleichbleibender Geschwindigkeit genau 6 min lang weiter und hat dann seinen Genossen erreicht, der an der nächsten Straßenkreuzung steht, um den Gegenverkehr zu sperren. Hier wartet er auf die Marschkolonne, die während der gesamten Zeit ihre Durchschnittsgeschwindigkeit beibehalten hat.

a) Wie verhalten sich die Durchschnittsgeschwindigkeiten des Regulierungspostens und der Marschkolonne zueinander?

b) Wie viel Minuten muss der Regulierungsposten an der Kreuzung insgesamt auf die Spitze der Marschkolonne warten?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Die Durchschnittsgeschwindigkeiten des Regulierungepostens und der Marschkolonne seien mit v_R bzw. v_M bezeichnet.
Sie verhalten sich wie die in gleicher Zeit zurückgelegten Wege. Der vom Regulierungsposten zunächst zurückgelegte Weg $s_0 = 5{,}6$ km setzt sich zusammen aus der Länge $s_1 = 3{,}2$ km der Marschkolorine und demjenigen Weg s_2, den die Marschkolonne während der Vorbeifahrt des Regulierungspostens zurücklegte. Dieser Weg hat folglich eine Länge von $s_2 = s_0 - s_1 = 2{,}4$ km. Somit gilt

$$v_R : v_M = s_0 : s_2 = 5{,}6 : 2{,}4 = 7 : 3$$

b) Der Zeitpunkt, an dem der Regulierungsposten die Spitze der Marschkolonne verlässt, sei T_0 genannt. Von diesem Zeitpunkt an legt der Regulierungsposten noch den Weg $s = v_R \cdot 6$ min zurück.
Denselben Weg hat die Spitze der Marschkolonne in der Zeit t vom Zeitpunkt T_0 an bis zum Eintreffen an der Kreuzung zurückzulegen. Also gilt $s = v_M \cdot t$. Daraus folgt

$$t = \frac{v_R}{v_M} \cdot 6 \text{ min}$$

nach a) also $t = \frac{7}{3} \cdot 6$ min $= 14$ min. Diese Zeit $t = 14$ min,setzt sich zusammen aus der vom Zeitpunkt T_0 an benötigten Fahrzeit 6 min und der gesuchten Wartezeit des Regulierungspostens an der Kreuzung. Diese Wartezeit beträgt daher 8 min.

Aufgabe 230813:
Auf einer 22,5 km langen Straßenbahnstrecke sollen Wagenzüge während der Zeit von 8.00 Uhr bis 16.00 Uhr in beiden Richtungen in zehnminütigem Abstand verkehren, beginnend mit der Abfahrtzeit genau 8.00 Uhr an beiden Endhaltestellen. Die Durchschnittsgeschwindigkeit der Wagenzüge betrage 18 $\frac{km}{h}$. Jeder Wagenzug, der an einer Endhaltestelle angekommen ist, soll bis zu seiner Abfahrt eine Pause einlegen, die mehr als 10 Minuten, aber weniger als 20 Minuten beträgt.

a) Wann hat der Wagenzug, der um 8.00 Uhr an einer Endhaltestelle abfuhr, dieselbe Endhaltestelle zum zweiten Mal zu verlassen?

b) Wie viel Wagenzüge sind ausreichend, um den geschilderten Verkehrsablauf einzuhalten?

c) Wie viel Zeit vergeht für einen Wagenzug, der sich auf der Fahrt von einer Endhaltestelle zur anderen befindet, durchschnittlich von einer Begegnung mit einem entgegenkommenden Wagenzug bis zur Begegnung mit dem nächsten entgegenkommenden Wagenzug?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Da die Strecke zwischen den beiden Endhaltestellen $s = 22{,}5$ km beträgt und mit der Geschwindigkeit $v = 18\frac{km}{h}$ durchfahren wird, benötigt ein Wagenzug hierfür die Zeit

$$t = \frac{s}{v} = \frac{22{,}5}{18}h = 1{,}25h = 1h14min$$

Der Wagenzug, der um 8.00 Uhr von einer Endhaltestelle abfuhr, erreicht die andere Endhaltestelle folglich um 9.15 Uhr.

Von dort hat er planmäßig zu einer Uhrzeit abzufahren, die ein ganzzahliges Vielfaches von 10 Minuten ist, wegen der Pausenregelung also um 9.30 Uhr. Entsprechend hat er von der ersten Endhaltestelle nochmals 1 Stunden später, also um 11.00 Uhr abzufahren.

b) Von der zweiten Endhaltestelle müssen zu den Abfahrtszeiten 8.00, 8.10, 8.20, 8.30, 8.40, 8.50, 9.00, 9.10, 9.20 Uhr Wagenzüge zur Verfügung stehen, das sind 9 Wagenzüge.
Ebenso viele werden zur Abfahrt an der ersten Endhaltestelle zu denselben Zeiten benötigt. Von 9.30 Uhr ab ist die Fortsetzung des geplanten Ablaufs mit den bereits aufgezählten Wagenzügen möglich. Daher reichen insgesamt 18 Wagenzüge aus.

c) Der erstgenannte Wagenzug sei Z_0; der erste bzw. der zweite ihm begegnende Wagenzug sei Z_1 bzw. Z_2.
Während der Fahrt haben Z_1 und Z_2 einen gleichbleibenden Abstand so voneinander; dies ist auch zum Zeitpunkt von Z_0 und Z_1 der Abstand zwischen Z_0 und Z_2. Da der Wagenzug Z_2 an einer Stelle jeweils 10 Minuten später als Z_1 eintrifft, benötigt er zum Durchfahren von so genau 10 Minuten.

Durch die Bewegung der Wagenzüge Z_0 und Z_2 gegeneinander verringert sich ihr Abstand mit einer doppelt so großen Geschwindigkeit wie die Fahrgeschwindigkeit jedes einzelnen Wagenzuges. Also wird dieser Abstand in der halben Zeit, die ein einzelner Wagenzug zum Durchfahren von so benötigen würde, auf 0 verringert. Das besagt:
Bis zum Zeitpunkt der Begegnung von Z_0 mit Z_2 vergeht die Hälfte von 10 Minuten, das sind 5 Minuten.

II Runde 2

Aufgabe 020826:
Klaus fährt mit seinem Moped mit gleichbleibender Geschwindigkeit eine Straße entlang und passiert dabei zu Anfang einen Kilometerstein mit einer zweistelligen Zahl vor dem Komma. Nach genau $1\frac{1}{2}$ Stunden kommt er wiederum an einem Kilometerstein vorbei, auf dem vor dem Komma die gleichen Ziffern, jedoch in umgekehrter Reihenfolge stehen.
Nach weiteren $1\frac{1}{2}$ Stunden ist er am Ziel und erblickt einen Kilometerstein, dessen dreistellige Zahl vor dem Komma aus den beiden Ziffern des ersten Steines, zwischen denen sich eine Null befindet, besteht. Hinter dem Komma stand in allen drei Fällen die gleiche Ziffer.

a) Welche Strecke legte Klaus zurück?

b) Mit welcher Durchschnittsgeschwindigkeit fuhr er?

Lösung von Carsten Balleier:
Die Abschnitte zwischen dem ersten und zweiten bzw. zweiten und dritten Kilometerstein müssen gleich sein. Sei die Zahl auf dem ersten $10a + b$, auf dem zweiten $10b + a$ und auf dem dritten $100a + b$ mit $1 \leq a,b \leq 9$. Dann gilt $(10b + a) - (10a + b) = (100a + b) - (10b + a)$ oder umgeformt $108a = 18b$ oder $6a = b$.

Im vorgegebenen Bereich wird das bloß von $a = 1,\ b = 6$ erfüllt. Also stand auf den Kilometersteinen 16, 61 und 106 – Klaus legte also 90 km zurück. Da er 3 h gebraucht hat, war seine durchschnittliche Geschwindigkeit 30 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Aufgabe 080824:
Ein mit konstanter Geschwindigkeit v_1 fahrender Lastkraftwagen wird 1 h 25 min nach Fahrtbeginn von einem ebenfalls mit konstanter Geschwindigkeit v_2 fahrenden Personenkraftwagen eingeholt, der 30 min später vom gleichen Ort abfuhr, aber eine um 25 $\frac{km}{h}$ größere Geschwindigkeit als der LKW hatte.

a) Berechne v_1 und v_2!

b) Welche Länge s hat die von beiden Fahrzeugen bis zum Überholungspunkt durchfahrene Wegstrecke?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
In der Zeit $t_i = 85$ min legt der LKW die gleiche Strecke zurück, für die der PKW die Zeit $t_2 = 55$ min brauchte.
Bezeichnet man die Geschwindigkeit des LKW mit $v_1 = x\frac{km}{h}$, dann beträgt die des PKW $v_2 = (x+25)\frac{km}{h}$.
Wegen $s = t_1 \cdot v_1 = t_2 \cdot v_2$ gilt dann: $x \cdot \frac{85}{60} = (x + 25) \cdot \frac{55}{60}$.
Daraus erhält man $x = \frac{5 \cdot 55}{60} = 45\frac{5}{6}$.

a) Die Geschwindigkeit des LKW betrug $45\frac{5}{6}\frac{km}{h}$, die des PKW $70\frac{5}{6}\frac{km}{h}$.

b) Wegen
$$\frac{5 \cdot 55}{60} \cdot \frac{85}{60} = 64\frac{67}{72} \approx 64{,}9$$
beträgt die durchgefahrene Wegstrecke $s \approx 64{,}9$ km.

Umgekehrt werden durch diese Werte in der Tat alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt, wie eine Probe zeigt.

Aufgabe 140822:
Vier Lastkraftwagen A, B, C und D befahren dieselbe Strecke. Fährt A mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 56 $\frac{km}{h}$ und B mit 40 $\frac{km}{h}$, so benötigt A genau 2 Stunden weniger als B für diese Strecke.

Mit welcher Durchschnittsgeschwindigkeit müsste C fahren, wenn D genau 4 Stunden eher als C abfahren, durchschnittlich mit 35 $\frac{km}{h}$ fahren und gleichzeitig mit C am gemeinsamen Ziel ankommen soll?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, A habe die in der Aufgabe genannte Strecke in t Stunden zurückgelegt. Dann benötigte B für dieselbe Strecke $(t + 2)$ Stunden. Daher gilt $56t = 40(t + 2)$, woraus man $t = 5$ erhält.
A legte mithin die Strecke mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 56 $km \cdot h^{-1}$ in 5 Stunden zurück.
Die Strecke war daher 280 km lang.

Wegen $280 : 35 = 8$ würde D für diese Strecke bei einer Durchschnittsgeschwindigkeit von $35\ km \cdot h^{-1}$ genau 8 Stunden brauchen. Da C erst 4 Stunden später als D abfahren soll, müsste er die gesamte Strecke in genau 4 Stunden zurücklegen, wenn er gleichzeitig mit D am Ziel eintreffen will. Wegen $280 : 4 = 70$ müsste er dabei eine Durchschnittsgeschwindigkeit von $70\ km \cdot h^{-1}$ einhalten.

Aufgabe 280821:
Ein Frachtschiff benötigt für eine Schiffsroute vom Hafen A zum Hafen B genau 12 Tage. Ein Tanker fährt diese Route in entgegengesetzter Richtung und braucht dafür 15 Tage.
Der Frachter fährt 6 Tage später vom Hafen A ab als der Tanker vom Hafen B.

a) Wie viel Tage nach Abfahrt des Frachters treffen sich die beiden Schiffe, wenn sie mit gleichbleibender Geschwindigkeit fahren?
b) Welchen Teil der Route hat dann jedes Schiff zurückgelegt?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Der Tanker legt an jedem Tage $\frac{1}{15}$ der Route zurück. Am Tage des Auslaufens des Frachters hat der Tanker bereits $\frac{6}{15} = \frac{2}{5}$ des Weges zurückgelegt, der Abstand der beiden Schiffe beträgt zu diesem Zeitpunkt daher $\frac{3}{5}$ der Route.

Wegen $\frac{1}{12} + \frac{1}{15} = \frac{3}{20}$ nähern sich beide Schiffe täglich um $\frac{3}{20}$ der Route. Da $\frac{3}{5} : \frac{3}{20} = 4$ ist, treffen sich beide Schiffe 4 Tage nach Abfahrt des Frachters.

b) Der Frachter legt in 4 Tagen $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ der Route zurück und der Tanker wegen $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ (oder wegen seiner Fahrzeit von 10 Tagen und $\frac{10}{15} = \frac{2}{3}$) die restlichen $\frac{2}{3}$ der Route.

III Runde 3

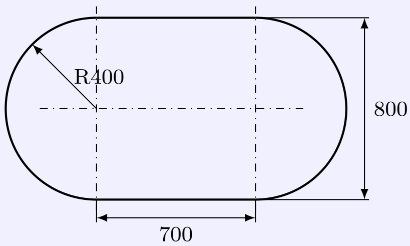
Aufgabe V10831:
Ein Radfahrer fährt an einem windstillen Tage auf einer geradlinig verlaufenden Landstraße nach einem 32 km entfernt liegenden Orte und sofort wieder zurück. Er benötigt für Hin- und Rückfahrt genau 4 Stunden, hat also eine Geschwindigkeit $v = 16 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.
Am nächsten Tage ist es windig. Es sei angenommen, dass die Geschwindigkeit des Radfahrers sich um 4 km je Stunde verringert, wenn er gegen den Wind fährt, und sich um 4 km je Stunde erhöht, wenn er mit dem Wind fährt.
Der Radfahrer nimmt an, dass er ebenfalls 4 Stunden für Hin- und Rückfahrt benötige, da ja die Verzögerung auf der Hinfahrt durch die Beschleunigung auf der Rückfahrt ausgeglichen wird.
Trifft das zu? Begründe deine Antwort!

Lösung von Steffen Polster:
Hinfahrt: In diesem Fall verringert sich die Geschwindigkeit auf $12 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Für die 32 km benötigt er dann $t = \frac{s}{t} = \frac{32}{12}$ h.

Rückfahrt: In diesem Fall erhöht sich die Geschwindigkeit auf $20 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Für die 32 km benötigt er dann $t = \frac{s}{t} = \frac{32}{20}$ h.

In der Summe benötigt der Radfahrer $\frac{32}{12} + \frac{32}{20} = \frac{64}{15}$ h, das sind 4 Stunden und 16 Minuten. Es tritt kein Ausgleich der Verzögerung und Beschleunigung auf.

Aufgabe 010832:
Peter hat für seine Modelleisenbahn ein „Schienenoval" auf einem Brett aufgebaut (siehe dazu die Skizze; die Kreisbögen sind Halbkreise).



Hans, den er eingeladen hat, fragt plötzlich: „Was meinst du, fährt der Zug so schnell wie in Wirklichkeit?" Peter antwortet: „Bestimmt nicht, stell dir doch einmal einen richtigen Zug daneben vor! Unser Zug schafft doch höchstens einen Kilometer in der Stunde!"
„Ja", sagt Peter, „das schon, aber 1 km bedeutet ja für die Anlage etwas ganz anderes. Man müsste es umrechnen." Sie überlegen und ermitteln dann folgende Werte:

Zeit für eine Umkreisung:	11 s
Spurweite der Modellbahn:	18,5 mm
Spurweite in Wirklichkeit:	1435 mm

a) Wie groß ist die Geschwindigkeit des Zuges tatsächlich?
b) Wie groß wäre die Geschwindigkeit vom Standpunkt der Modelleisenbahn?

Lösung von Carsten Balleier:

a) Für die tatsächliche Geschwindigkeit des Zuges benötigt man die Länge, die er auf dem Schienenoval zurücklegt. Das sind zwei Strecken und zwei Halbkreisbögen: $2 \cdot 700\text{mm} + 2\pi \cdot 400\text{mm} = 3{,}91\text{m}$.

   Das ergibt eine Geschwindigkeit des Modelleisenbahnzuges von $35{,}6\frac{\text{cm}}{\text{s}} = 1{,}28\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$

b) 18,5 mm Spurweite auf der Modellbahn entsprechen 1435 mm Spurweite in der Wirklichkeit. Der Geschwindigkeit des Zuges entsprechen also in Realität

$$\frac{35{,}6\frac{\text{cm}}{\text{s}} \cdot 1435\text{mm}}{18{,}5\text{mm}} = 27{,}6\frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 100\frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

Aufgabe 150834:
Eine Pioniergruppe wandert von der Touristenstation A zum Bahnhof B. Sie legte in der ersten Stunde 3 km zurück. Danach rechnete sie sich aus, dass sie bei gleichbleibender Geschwindigkeit 40 Minuten zu spät zum Zug kommen würde. Deshalb erhöhte sie ihre durchschnittliche Marschgeschwindigkeit auf 4 km in der Stunde und kam damit 45 Minuten vor Abfahrt des Zuges in B an.

Berechne die Länge des Weges von A nach B!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Entfernung von A nach B betrage s km. Die Pioniergruppe hat beim Anstellen ihrer Überlegung bereits 3 km zurückgelegt, muss also noch $(s-3)$ km bewältigen. Bei gleichförmiger Bewegung ist die Zeit der Quotient aus Weg und Geschwindigkeit.

Bei beiden Geschwindigkeiten $v_1 = 3\frac{\text{km}}{\text{h}} >$ bzw. $v_2 = 4\frac{\text{km}}{\text{h}} >$ ist die Zeit t vom Beginn der Geschwindigkeitserhöhung bis zur Abfahrt des Zuges gleich. Diese Zeit in Stunden beträgt somit

$$t = \frac{s-3}{v_1} - \frac{2}{3} \qquad \text{bzw.} \qquad t = \frac{s-3}{v_2} - \frac{3}{4}$$

Nach Einsetzen der Werte für v_1 bzw. $v_2 4$ erhält man daraus $4s - 12 - 8 = 3s - 9 + 9$, also $s = 20$. Die Länge des Weges von A nach B beträgt somit 20 km.

Aufgabe 190836:
Ein Taxifahrer hatte den Auftrag, um 15.00 Uhr einen Gast vom Bahnhof abzuholen. Bei einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 50 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ hätte er sein Ziel pünktlich erreicht. Auf Grund ungünstiger Verkehrsverhältnisse konnte er jedoch nur mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 30 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ fahren und kam deshalb erst um 15.10 Uhr am Bahnhof an.

a) Berechne die Länge des Weges, den der Fahrer bis zum Bahnhof zurückgelegt hat!

b) Berechne die Zeit, die der Fahrer bis zum Bahnhof benötigte!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Bei einer Geschwindigkeit von 30 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ legte der Taxifahrer in 10 Minuten einen Weg von $30 \cdot \frac{1}{6}$ km $= 5$ km zurück. Für diese Strecke hätte er mit einer Geschwindigkeit von 50 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ eine Zeit von $\frac{5}{50}$ h $= \frac{1}{10}$ h $= 6$ min benötigt.

Für je 5 km benötigte der Taxifahrer daher 4 min mehr, als er bei einer Geschwindigkeit von 50 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ gebraucht hätte. Da er genau 10 min zu spät kam, hatte er wegen $\frac{5}{4} \cdot 10 = 12{,}5$ insgesamt eine Strecke von 12,5 km zurückgelegt.

b) Für die Weglänge 12,5 km wird bei einer Geschwindigkeit von 30 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ eine Zeit von $\frac{12{,}5}{30}$ h $= \frac{5}{12}$ h $= 25$ min benötigt.

Aufgabe 220834:
Ein Hubschrauber startete um 4.30 Uhr in einer Stadt A und flog mit der Geschwindigkeit 250 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ zu einer Stadt B. Dort blieb er 30 Minuten und flog dann auf demselben Weg mit der Geschwindigkeit 200 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ nach A zurück, wo er an demselben Tag um 11.45 Uhr ankam.

Ermittle die Länge des Weges von A nach B!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die gesuchte Länge betrage x Kilometer, die Zeiten für den Hin- bzw. Rückflug seien t_1 Stunden bzw. t_2 Stunden. Dann gilt $x = 250t_1$ und $x = 200t_2$, also

$$t_1 = \frac{x}{250} \qquad ; \qquad t_2 = \frac{x}{200} \tag{1}$$

Vom Start in A bis zur Ankunft in A vergingen $7\frac{1}{4}$ Stunden; nach Abzug der Wartezeit verbleibt somit eine Flugzeit von

$$(t_1 + t_2) \text{ Stunden } = 6\frac{3}{4} \text{ Stunden} \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt

$$\frac{x}{250} + \frac{x}{200} = \frac{27}{4} \qquad \Rightarrow \qquad x = 750$$

Also beträgt die gesuchte Länge 750 km.

Aufgabe 240832:
Um die Haltbarkeit eines Motorradreifentyps zu ermitteln, wurden zwei Reifen getestet. Dabei wurde festgestellt, dass der Reifen auf dem Hinterrad nach 15000 gefahrenen Kilometern und der Reifen auf dem Vorderrad nach 25000 gefahrenen Kilometern nicht mehr die erforderliche Profiltiefe hatte und damit abgenutzt war.

a) Es soll nun erreicht werden, dass zwei solche Reifen gleichzeitig abgenutzt sind, indem man sie nach einer bestimmten Anzahl gefahrener Kilometer gegeneinander austauscht. Ermittle diese Kilometerzahl!
b) Nach wie viel Kilometern sind unter den Voraussetzungen der Teilaufgabe a) beide Reifen abgenutzt?

Es werde angenommen, dass sowohl auf dem Vorderrad als auch auf dem Hinterrad die Abnutzung jeweils proportional zur Fahrstrecke ist.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Würde man sowohl auf dem Vorderrad als auch auf dem Hinterrad jeden Reifen erst nach seiner vollständigen Abnutzung durch einen neuen Reifen ersetzen, so müsste ein solcher Reifenwechsel auf dem Vorderrad nach 25000 km, 50000 km, 75000 km, ... usw. und auf dem Hinterrad nach 15000 km, 30000 km, 45000 km, 60000 km, 75000 km, ... usw. erfolgen.

Daher würden bei diesem Vorgehen erstmals nach 75000 km Vorderradreifen und Hinterradreifen gleichzeitig gewechselt, und bis dahin wären drei Vorderradreifen und fünf Hinterradreifen, also insgesamt acht Reifen verbraucht.

Wenn man mit acht Reifen insgesamt 75000 km fahren kann, dann kann man mit zwei Reifen insgesamt $\frac{75000}{4}$ km $= 18750$ km zurücklegen.
Dabei muss jeder der beiden Reifen die gleiche Strecke als Vorder- wie als Hinterradreifen zurücklegen, damit beide Reifen denselben Abnutzungsbedingungen unterworfen sind. D. h., die Reifen müssen nach $\frac{18750}{2}$ km $= 9375$ km ausgetauscht werden.

Die in a) bzw. b) gesuchten Kilometerangaben lauten also 9375 km bzw. 18750 km.

Aufgabe 240836:
Zwei Motorradfahrer unternehmen eine Fahrt, auf der beide die gleiche Entfernung zurücklegen. Sie starten gleichzeitig und kommen gleichzeitig am Ziel an. Dabei benötigt A doppelt so viel Zeit zum Fahren wie B zum Rasten. B dagegen fuhr dreimal so lange, wie A rastete.

Welcher der beiden Fahrer hatte die längere Rastzeit?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Bezeichnet man die Rastzeit von A mit a und die von B mit b, so ist bei A die (reine) Fahrzeit $2b$ und bei B entsprechend $3a$. Da die Summen von Fahrzeit und Rastzeit für jeden der beiden Fahrer gleich sind, gilt

$$a + 2b = b + 3a \qquad \text{also} \qquad b = 2a > a$$

Der Fahrer B hatte mithin die längere Rastzeit.

Aufgabe 280831:
Zwei wanderlustige Freunde A und B beschließen, auf einer Wanderstrecke von 30 km einander entgegenzugehen. Zu Beginn befindet sich A an einem Endpunkt, B an dem anderen Endpunkt dieser Strecke. Sie verständigen sich telefonisch über ihr Vorhaben und nehmen dabei an, dass jeder von ihnen seine persönliche Marschgeschwindigkeit während des ganzen Weges gleichbleibend beibehält. Damit erhalten sie die folgenden Aussagen:

(1) Wenn A 2 Stunden eher startet als B, so treffen sie sich $2\frac{1}{2}$ Stunden nach dem Start von B.

(2) Wenn aber B 2 Stunden eher startet als A, so treffen sie sich 3 Stunden nach dem Start von A.

Zeige, dass unter diesen Voraussetzungen, wenn die Aussagen (1) und (2) zutreffen, die Marschgeschwindigkeiten von A und B eindeutig bestimmt sind; ermittle diese Geschwindigkeiten!

Überprüfe, dass auch umgekehrt gilt: Wenn A und B die ermittelten Geschwindigkeiten haben, dann treffen die Aussagen (1) und (2) zu.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Wenn die Aussagen (1) und (2) zutreffen, so gilt für die Maßzahlen v_A, v_B der in $\frac{km}{h}$ gemessenen Geschwindigkeiten von A bzw. B:
Gehen A und B gemäß (1) jeweils von ihrem Start bis zum Treffen $4\frac{1}{2}$ Stunden bzw. $2\frac{1}{2}$ Stunden, so legen sie dabei Strecken zurück, deren in km gemessene Länge $4\frac{1}{2} \cdot v_A$ bzw. $2\frac{1}{2} \cdot v_B$ beträgt. Daraus folgt

$$4\frac{1}{2} \cdot v_A + 2\frac{1}{2} \cdot V_B = 30 \tag{3}$$

Gehen A und B aber gemäß (2) jeweils von ihrem Start bis zum Treffen 3 Stunden bzw. 5 Stunden, so folgt entsprechend

$$3 \cdot v_A + 5 \cdot v_B = 30 \tag{4}$$

Aus (3) folgt $9 \cdot v_A + 5 \cdot v_B = 60$; hieraus und aus (4) folgt $6 \cdot vA = 30$, $v_A = 5$. Damit ergibt sich aus (4) $5 \cdot vB = 15$, $v_B = 3$.

Also sind die Marschgeschwindigkeiten, wenn (1) und (2) zutreffen, eindeutig bestimmt; sie betragen 5 $\frac{km}{h}$ bzw. 3 $\frac{km}{h}$.

II. Wenn A und B diese Geschwindigkeiten haben, so folgt:
In $4\frac{1}{2}$ Stunden legt A die Teilstrecke $22\frac{1}{2}$ km zurück und B in $2\frac{1}{2}$ Stunden die Teilstrecke $7\frac{1}{2}$ km. Wegen $22\frac{1}{2} + 7\frac{1}{2} = 30$ treffen sie sich dann, also gilt (1).
In 3 Stunden legt A die Teilstrecke 15 km zurück und B in 5 Stunden die Teilstrecke 15 km. Wegen $15 + 15 = 30$ treffen sie sich dann, also gilt auch (2).

Aufgabe 320834:
Ein Radfahrer fuhr mit konstanter Geschwindigkeit über eine 100 m lange Brücke. Als er auf dieser Brücke 40 m zurückgelegt hatte, traf er einen zweiten Radfahrer, der ihm mit gleicher Geschwindigkeit entgegenkam. Ein Auto, das auf derselben Strecke mit der Geschwindigkeit 70 $\frac{km}{h}$ fuhr, begegnete dem zweiten Radfahrer in dem Augenblick, als dieser die Brücke verließ, und es überholte den ersten Radfahrer genau am Ende der Brücke.

Ermittle aus diesen Angaben die Geschwindigkeit der Radfahrer!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die gesuchte Geschwindigkeit der Radfahrer sei v. Die Zeit t_1, in der der erste Radfahrer auf der Brücke fuhr, bis er dem zweiten Radfahrer begegnete, ist genau so lang wie die anschließende Zeit t_2, bis der zweite Radfahrer die Brücke verließ (und dabei dem Auto begegnete); denn in beiden Zeiten t_1, t_2 war dieselbe Strecke mit der gleichen Geschwindigkeit v zu durchfahren.

Daher hat der erste Radfahrer in der Zeit t_2 weitere 40 m zurückgelegt und musste folglich in einer anschließenden Zeit t_3 noch $(100 - 2 \cdot 40)$ m $= 20$ m bis zum Ende der Brücke zurücklegen.
In dieser Zeit t_3 durchfuhr das Auto die Strecke 100 m, also eine 5 mal so lange Strecke wie der Radfahrer Daher war die Geschwindigkeit des Autos 5 mal so groß wie die des Radfahrers; d. h., es gilt

$$v = \frac{70}{5}\frac{\text{km}}{\text{h}} = 14\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Also beträgt die gesuchte Geschwindigkeit 14 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Aufgabe 330834:
Auf einer Strecke AB fährt ein Radfahrer X von A nach B, ein zweiter Radfahrer Y von B nach A. Beide sind zur gleichen Zeit gestartet. In B bzw. A angekommen, kehren sie sofort um, fahren dieselbe Strecke bis A bzw. B zurück und beenden dann ihre Fahrt. Es werde angenommen, dass jeder der beiden Fahrer seine Geschwindigkeit konstant beibehält und dass die zum Wenden gebrauchte Zeit vernachlässigt werden kann.

Auf der Hinfahrt begegneten sie sich 30 Minuten nach dem Start an einer Stelle, die 7,5 km von A entfernt ist. Nochmals 30 Minuten später waren die Radfahrer wieder beide zusammen an einer Stelle zwischen A und B.

Ermittle alle Möglichkeiten dafür, wie groß nach dieser Beschreibung

a) die Länge der Strecke AB,

b) die Geschwindigkeiten der Radfahrer X und Y sein können!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Da X in der Zeit $\frac{1}{2}$h bis zum ersten Treffen den Weg 11 km zurücklegte, fuhr X mit der Geschwindigkeit 15 $\frac{km}{h}$. Wären X und Y beim zweiten Treffen einander entgegengefahren, so hätte X zwischen dem ersten und zweiten Treffen B erreichen und dort die Richtung wechseln müssen, also wäre die Strecke vom ersten Treffpunkt bis B kürzer als 12 km.
Daher hätte Y eine kleinere Geschwindigkeit als X und hätte somit in der zweiten halben Stunde noch nicht einmal A erreichen, also erst recht nicht wenden und X begegnen können.
Daher gibt es nur zwei Möglichkeiten:

I. In der Zeit $\frac{1}{2}$ h vom ersten bis zum zweiten Treffen war X nochmals $\frac{15}{2}$ km in gleicher Richtung weitergefahren und wurde am Ende dieser Zeit von Y eingeholt (der zuvor A erreicht und dort die Richtung gewechselt hatte).
Das besagt: Y musste in dieser Zeit eine 3 mal so lange Strecke durchfahren und hat somit die Geschwindigkeit $45\frac{km}{h}$.

Ferner folgt: Y hatte vom Start an bis zum ersten Treffen einen 3 mal so langen Weg wie X zurückgelegt. Also hat die Strecke AB insgesamt die Länge $4 \cdot \frac{15}{2}$ km $=$ 30 km.

II. Zwischen dem ersten und zweiten Treffen ist X in B angekommen, hat dort die Richtung gewechselt und dann beim zweiten Treffen Y eingeholt.
Der Ablauf der Begegnungen ist wie im Fall I., nur mit vertauschten Rollen von X und Y. Also hat nun X eine 3 mal so große Geschwindigkeit wie Y, d. h.: Y hat die Geschwindigkeit 5 $\frac{km}{h}$. Dementsprechend ergibt sich auch, dass die Länge von AB im Fall I. einen 3 mal so großen Wert hatte wie im Fall II.; d. h., im Fall II. hat AB die Länge 10 km.

V.III Prozentrechnung; Proportionalitäten; Misch-Aufgaben

I Runde 1

Aufgabe V10811:
Der neue Doppelstock-Gliederzug unserer Reichsbahn wiegt insgesamt 129 Mp (Leergewicht) und hat für 640 Reisende Sitzplätze. Ein D-Zug-Wagen alter Bauart wiegt 40 Mp und bietet 64 Reisenden Sitzplätze.

Um wie viel Prozent ist das „Sitzplatzgewicht“ (Leergewicht je Sitzplatz) bei dem neuen Doppelstock-Gliederzug geringer als bei einem D-Zug alter Bauart?

Lösung von Steffen Polster:
Doppelstock-Gliederzug: Leergewicht je Sitzplatz $L_1 = \frac{129}{640} \approx 0{,}2016$
D-Zug-Wagen: Leergewicht je Sitzplatz $L_2 = \frac{40}{64} \approx 0{,}625$
L_1 ist gleich 33,22 % von L_2. Beim Doppelstockgliederzug ist das Sitzplatzgewicht somit um 67,75 Prozent niedriger als bei einem D-Zug alter Bauart.

Aufgabe 010812:
In diesem Jahr werden in der UdSSR 8,3 Milliarden Meter Stoffe gewebt. Jemand behauptet, dass man damit die ganze Bahnlänge des Mondes um die Erde auslegen könnte.
Hat er recht? (Die Mondbahn sei als Kreisbahn angenommen. Der mittlere Abstand des Mondes von der Erde beträgt 384000 km.)

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Länge der Mondbahn ist der Kreisumfang mit dem Radius 384000 km, d. h. $2\pi \cdot 384000$ km $\approx$ 2413000000 m.
Er hat recht, die Länge der Mondbahn ist weniger als ein Drittel der Stoffbahn.

Aufgabe 020812:
Für den Zusammenbau von 1000 kompletten Schalterteilen für elektrische Geräte benötigte im VEB Elektro-Apparate-Werk Berlin-Treptow ein Arbeiter bisher $27\,\frac{1}{2}$ Stunden. In einem Schülerwettbewerb unterbreitete ein Schüler einen Verbesserungsvorschlag, durch den diese Zeit auf $16\,\frac{1}{2}$ Stunden verringert werden konnte.
a) Um wieviel Prozent verringerte sich die Arbeitszeit?
b) Um wieviel Prozent erhöhte sich dabei die Arbeitsproduktivität?

Anmerkung: Unter der Arbeitsproduktivität versteht man in diesem Falle den Quotienten aus der Anzahl der Schalterteile und der für ihre Herstellung benötigten Arbeitszeit.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Arbeitszeit verringerte sich um $11 : 27\frac{1}{2} \cdot 100\% = 40\%$.
Die Produktivität betrug vorher $36\frac{4}{11}\mathrm{h}^{-1}$, jetzt liegt sie bei $60\frac{20}{33}\mathrm{h}^{-1}$. Sie ist also um $66\frac{2}{3}\%$ gestiegen.

Aufgabe 030811:
Im Jahre 1962 landeten die Fangfahrzeuge der Hochseefischerei 117291 t Fisch an. Die Fangmenge im ersten Halbjahr 1963 betrug 74445 t Fisch; das waren um 44 Prozent mehr als im ersten Halbjahr 1962.

a) Wie groß war die Fangmenge im ersten Halbjahr 1962?

b) Wie groß wäre die gesamte Fangmenge im Jahre 1963, wenn man für das zweite Halbjahr 1963 die gleiche prozentuale Steigerung gegenüber dem ersten Halbjahr annimmt wie im Jahre 1962?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Die Fangmenge im ersten Halbjahr 1962 betrug rund 74445 t/1,44 $\approx$ 51700 t.

b) Die voraussichtliche Fangmenge beträgt $1{,}44 \cdot 117291$ t $\approx$ 168900 t.

Aufgabe 040811:
Für ein Experiment werden 50 cm^3 10-prozentige Salzsäure benötigt. Es steht aber nur 36-prozentige Salzsäure zur Verfügung.

Wie viel Kubikzentimeter 36-prozentige Salzsäure müssen mit destilliertem Wasser verdünnt werden?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
x sei die gesuchte Menge an 36%-iger Salzsäure

50 cm^3 an 10%-iger Salzsäure enthalten 5 cm^3 reiner Salzsäure (S). Somit lässt sich folgende Gleichung aufstellen:

$$S = \frac{36}{100} \cdot x \qquad \Rightarrow \qquad x = S \cdot \frac{100}{36} = \frac{5\text{ cm}^3 \cdot 100}{36} = 13\frac{8}{9}\text{ cm}^3 \approx 13{,}9\text{ cm}^3$$

Man benötigt also $\approx 13{,}9$ cm^3 36%-iger Salzsäure und dementsprechend $50 - 13{,}9$ cm^3 $\approx 36{,}1$ cm^3 destilliertes Wasser.

Aufgabe 050811:
Über die Beteiligung an der 1. Stufe der IV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR hatte ein Schüler folgende Übersicht an die Wandzeitung geheftet:

Klasse 8a: Von 33 Schülern beteiligten sich 20, das sind etwa 60,6 Prozent.

Klasse 8b: Von 32 Schülern beteiligten sich 21, das sind etwa 65,6 Prozent.

Klasse 8c: Von 27 Schülern beteiligten sich 19, das sind etwa 70,4 Prozent.

Die Schüler dieser Klassen erhalten die Aufgabe, die prozentuale Gesamtbeteiligung der Schüler der 8. Klassen zu ermitteln. Ein Teil der Schüler bildet das arithmetische Mittel der Prozentzahlen, die anderen bilden den mit 100 multiplizierten Quotienten aus der Anzahl aller Teilnehmer und der Anzahl aller Schüler dieser Klassen.

a) Wie groß ist die Differenz, die sich bei den beiden Rechnungen ergibt?

b) Welche Schüler haben die Prozentzahl in der richtigen Weise berechnet?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Schüler der zweiten Gruppe haben die Prozentzahl korrekt berechnet und erhalten $\frac{60}{92} \cdot 100\% \approx 65{,}22\%$, während die anderen Schüler mit einem fehlerhaften Verfahren 65,53% erhalten. Die Differenz zwischen beiden Ergebnissen beträgt 0,31%.

Aufgabe 060812:
Aus Kuhmilch kann man 21% der Masse an Rahm gewinnen. Aus Rahm gewinnt man Butter, und zwar beträgt die Buttermasse 23% der Rahmmasse.

Ermittle die kleinste Menge Kuhmilch, die ausreicht, um genau 1 kg Butter unter den angegebenen Bedingungen zu gewinnen!

Die Milchmenge ist in kg anzugeben und als Dezimalbruch zu schreiben, der auf eine Stelle nach dem Komma so zu runden ist, dass die Menge ausreicht, um 1 kg Butter zu gewinnen.

Lösung von Manuela Kugel:
Aus x kg Milch erhält man $\frac{21}{100}x$ kg Rahm und daraus $\frac{23}{100} \cdot \frac{21}{100}x$ kg Butter.

Aus der Gleichung $\frac{23\cdot 21}{100\cdot 100}x = 1$ folgt $x = \frac{10000}{21\cdot 23} = \frac{10000}{483}$.

Wegen $20{,}7 < \frac{10000}{483} < 20{,}8$ ist bei Berücksichtigung von genau einer Stelle nach dem Komma 20,8 kg Milch die kleinste Menge, die ausreicht, um mit dem angegebenen Verfahren 1 kg Butter zu gewinnen.

Aufgabe 070812:
Bei welchem Massenverhältnis von 10 prozentiger und 30 prozentiger Salzlösung erhält man nach Mischung 25 prozentige Salzlösung? (Die Prozentangaben sind auf die Masse bezogen.)

Lösung von Manuela Kugel:
Eine 10-, 30- und 25-%ige Salzlösung a, b und c der Menge 1 (Einheitsmenge) kann man wie folgt darstellen, wenn s der Anteil Salz und w der Anteil Wasser ist:

$$a = 0{,}1s + 0{,}9w \qquad ; \qquad b = 0{,}3s + 0{,}7w \qquad ; \qquad c = 0{,}25s + 0{,}75w$$

Wenn in der 25%igen Lösung c das Mischungsverhältnis aus k Teilen 10%iger und l Teilen 30%iger Salzlösung besteht, kann dies als Gleichung wie folgt ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} c &= k\cdot a + l\cdot b \\ 0{,}25s + 0{,}75w &= k\cdot(0{,}1s + 0{,}9w) + l\cdot(0{,}3s + 0{,}7w) \\ 0{,}25s + 0{,}75w &= (0{,}1k + 0{,}3l)\cdot s + (0{,}9k + 0{,}7l)\cdot w \end{aligned}$$

Der Koeffizientenvergleich bedeutet dann:

$$0{,}25 = 0{,}1k + 0{,}3l \qquad ; \qquad 0{,}75 = 0{,}9k + 0{,}7l$$

Dies ergibt nach Multiplizieren der ersten Gleichung mit 9 und anschließendem Abziehen der 2. Gleichung davon: $1{,}5 = 2l$ bzw. $l = 0{,}75$. Dies ergibt in der ersten Gleichung eingesetzt: $0{,}25 = 0{,}1k + 0{,}225$ bzw. $k = 0{,}25$.
Damit ergibt sich das gesuchte Verhältnis $k : l$ wie folgt: 0,25 : 0,75 bzw. 1 : 3.

Aufgabe 170811:
Der Preis einer Ware (100 M) wurde in drei hintereinander liegenden Jahren um jeweils 5% gesenkt.

a) Wie viel Prozent des Anfangspreises müsste eine einmalige Preissenkung betragen, wenn derselbe Endpreis erreicht werden sollte?

b) Wie viel Prozent des Endpreises beträgt der Anfangspreis der Ware?

Die Prozentangaben sind auf 2 Dezimalen genau zu runden.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Eine Ware, die anfangs 100 M kostete, kostete nach der

1. Preissenkung um $\frac{5\cdot 100}{100}$ M = 5 M weniger, also 95,- M,
2. Preissenkung um $\frac{5\cdot 95}{100}$ M = 4,75 M weniger, also 90,25 M,
3. Preissenkung um $\frac{5\cdot 90{,}25}{100}$ M = 4,5125 M $\approx$ 4,51 M weniger, also 85,74 M

d. h., bei einer einmaligen Preissenkung auf diesen Endpreis wäre die Ware 100 M - 85,74 M = 14,26 M billiger geworden. Daher müsste die einmalige Preissenkung 14,26 % des Anfangspreises betragen, um denselben Endpreis zu erreichen.

b) Vom Endpreis (85,74 M) als Grundwert ist bei dem gesuchten Prozentsatz x der Anfangspreis (100 M) der Prozentwert. Folglich gilt:

$$\frac{x}{100\%} = \frac{100}{85{,}74} \qquad ; \qquad x = \frac{10000}{85{,}74}\% \approx 116{,}63\%$$

Der Anfangspreis beträgt somit 116,63 % des Endpreises.

Aufgabe 200813:
Ein Vater, der von seinen Söhnen Fritz und Heinz begleitet wurde, kaufte sich im Warenhaus einen Anzug, der mit einem Schild folgenden Inhalts versehen war: „Im Preis um 20% herabgesetzt.“

Auf dem Heimweg sagte Heinz: „Vati, da hast du 25% des von dir gezahlten Preises eingespart.“ Fritz, der diese Bemerkung bezweifelte, fragte den Vater: „Stimmt das?“.

Dieser erklärte ihm darauf: „Das stimmt. Wäre der Preis des Anzugs nur um 10% herabgesetzt worden, dann hätte ich allerdings nur $11\frac{1}{9}$% des von mir gezahlten Preises eingespart.“

Beweise, dass diese Aussagen unabhängig von dem speziellen Wert des Preises vor der Preisherabsetzung wahr sind!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
War P der Preis vor der Preisherabsetzung, so sind 20% hiervon $\frac{1}{5}P$. Daher beträgt der vom Vater gezahlte Preis $G = \frac{4}{5}P$.

Die eingesparte Summe ist somit $\frac{1}{5}P = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{5}P = \frac{1}{4}G$, also 25% von G, wie behauptet.

Wäre der Preis nur um 10% , also um $\frac{1}{10}P$ herabgesetzt worden, hätte der vom Vater gezahlte Preis $G' = \frac{9}{10}P$ betragen, und die eingesparte Summe wäre $\frac{1}{10}P = \frac{1}{9} \cdot \frac{9}{10}P = \frac{1}{9}G'$, also $11\frac{1}{9}$% von G' gewesen, w. z. b. w.

Aufgabe 210814:
Einer Brigade der ausgezeichneten Qualität war der Auftrag erteilt worden, in möglichst kurzer Zeit eine gewisse Anzahl Messgeräte fertigzustellen. Die Brigade bestand aus einem erfahrenen Arbeiter als Brigadier und neun jungen Arbeitern, die eben erst ihre Ausbildung beendet hatten.

Im Laufe eines Tages stellte jeder von den neun jungen Arbeiter 15 Geräte fertig, der Brigadier aber 9 Geräte mehr als jedes der zehn Brigademitglieder im Durchschnitt.

Wie viel Messgeräte wurden insgesamt von der Brigade an diesem Arbeitstag fertiggestellt?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn man alle diejenigen Geräte, die die neun jungen Arbeiter fertigstellten, und dazu 9 von den Geräten, die der Brigadier fertigstellte, gleichmäßig auf die neun jungen Arbeiter verteilt, so entfällt auf jedes der zehn Brigademitglieder der genannte Durchschnitt, das sind also für jedes Mitglied gleich viele Geräte. Da hierbei auf jeden der neun jungen Arbeiter genau 16 Geräte entfallen, so folgt wegen $10 \cdot 16 = 160$. Es wurden an diesem Tag insgesamt 160 Geräte fertiggestellt.

Aufgabe 230811:
Ein quaderförmiger Holzblock hat eine Masse von 25 g.

Welche Masse hat ein quaderförmiger Holzblock gleicher Holzart mit den vierfachen Kantenlängen?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Der Quader habe die Kantenlängen a, b, c; sein Volumen beträgt mithin $V = abc$.
Ein Quader mit den vierfachen Kantenlängen $4a, 4b, 4c$ hat dann das Volumen

$$V' = 4a \cdot 4b \cdot 4c\cdot = 64abc = 64V$$

Da bei gleichem Material die Masse dem Volumen proportional ist, beträgt die Masse des zweiten Holzblockes $64 \cdot 25$ g = 1600 g.

Aufgabe 240811:
An einer Schule wird in den Klassen 5 bis 10 eine Altstoffsammlung durchgeführt. Bei der anschließenden Auswertung für einen Wettbewerb zwischen den Klassenstufen wird folgendes festgestellt:

Die Schüler der Klassenstufe 9 sammelten Altstoffe im Wert von 42 M; ebensoviel sammelten die Schüler der Klassenstufe 10. Die Klassenstufe 8 erbrachte doppelt so viel wie die Klassen 9 und 10 zusammengenommen. Die Schüler der Klassenstufe 5 erreichten 21% des Gesamtergebnisses der Schule; die Klassenstufe 6 lieferte 30% des Gesamtergebnisses der Schule, und die Klassenstufe 7 erreichte 2% des Gesamtergebnisses der Schule weniger als die Klassenstufe 6.

Welchen Betrag hat nach diesen Feststellungen das Gesamtergebnis der Schule?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Nach den genannten Feststellungen heben die Klassenstufen 8, 9 und 10 zusammen

$$100\% - 21\% - 30\% - 28\% = 21$$

des Gesamtergebnisses geliefert. Das waren andererseits Altstoffe im Wert von

$$42M + 42M + 2 \cdot (42M + 42M) = 252M$$

Wegen $252 : 21 = 12$ sind 12 M somit 1% des Gesamtergebnisses; dieses beträgt daher 1200 M.

Aufgabe 250811:

a) Es sei b diejenige Zahl, die man erhält, wenn man die Zahl 30 um 50% vergrößert.

   Um wie viel Prozent muss diese Zahl b verkleinert werden, um wieder die Zahl 30 zu erhalten?

b) Überprüfe, ob die für die Zahl 30 gefundene Aussage bei gleicher Aufgabenstellung auch für jede beliebige positive Zahl a zutrifft!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Vergrößert man die Zahl 30 um 50%, so erhält $b = 30 + 15 = 45$.
Die Zahl b muss um 15 verkleinert werden, um erneut 30 zu erhalten. Dieser Wert 15 ist $\frac{1}{3}$ von 45, also lautet die gesuchte Prozentangabe $33\frac{1}{3}\%$.

b) Für jede positive Zahl a gilt: Vergrößert man a um 50%, so erhält man

$$b = a + \frac{a}{2} = \frac{3}{2}a$$

Diese Zahl muss um $\frac{a}{2}$ verkleinert werden, um erneut a zu erhalten; $\frac{a}{2}$ ist aber ein Drittel von $\frac{3}{2}a$.
Also lautet auch für jede beliebige positive Zahl a die - bei gleicher Aufgabenstellung wie in Aufgabe a) gesuchte Prozentangabe $33\frac{1}{3}\%$.

Aufgabe 290811:
Auf einer Flasche mit handelsüblicher 40 prozentiger Essigessenz stehe die folgende Gebrauchsanweisung: „Der Inhalt dieser Flasche (200 ml), mit 800 ml Wasser vermischt, ergibt einen zehnprozentigen Speiseessig.“

Stimmt das?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Der Inhalt dieser Flasche Essigessenz besteht aus $\frac{40}{100} \cdot 200$ ml = 80 ml Essigsäure und 200 ml - 80 ml = 120 ml Wasser.
Nach dem Vermischen mit den angegebenen 800 ml Wasser sind folglich insgesamt 920 ml Wasser und 80 ml Essigsäure vorhanden. Das sind 920 ml + 80 ml = 1000 ml Flüssigkeit und davon 80 ml Essigsäure. In 100 m1 dieser Flüssigkeit sind folglich 8 ml Essigsäure; d. h., es liegt ein 8 prozentiger Speiseessig vor.

Aufgabe 330811:
Nach dem Kauf eines neuen Autos muss man bekanntlich im Lauf der Zeit mit einem Wertverlust rechnen. Für diesen Wertverlust seien im Lauf des ersten Jahres 20%, im zweiten Jahr weitere 15% und im dritten Jahr nochmals weitere 15% gerechnet, wobei alle diese Prozentangaben vom ursprünglichen Kaufpreis verstanden werden. Der jeweils entstehende verminderte Wert wird als Zeitwert bezeichnet.

a) Frau Grübler bezahlte für ihren Neuwagen 23800 DM. Berechne den Zeitwert nach zwei Jahren!

b) Herr Bauer will sein Auto nach drei Jahren verkaufen. Zu diesem Zeitpunkt würde der Zeitwert des Wagens 16200 DM betragen. Um 10% dieses Wertes verringert sich jedoch aufgrund eines Unfalls der Zeitwert nochmals.
Wie viel Prozent des ursprünglichen Kaufpreises beträgt nun der so entstandene verringerte Zeitwert?

c) Herr Neumann kauft ein neues Auto für 43000 DM. Er möchte den Wagen nach vier Jahren zum Zeitwert verkaufen, den er als 18275 DM annimmt.
Welchen Prozentsatz (vom ursprünglichen Kaufpreis) hat er dabei für den Wertverlust im vierten Jahr zugrunde gelegt?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) 20 % von 23800 DM sind 4760 DM, 15 % von 23800 DM sind 3570 DM.
Damit entsteht der Wertverlust 4760 DM + 3570 DM = 8330 DM.
Also beträgt der Zeitwert 23800 DM - 8330 DM = 15470 DM.
(Mit gleicher Begründung wie in b) kann man auch 100 % - (20 % + 15 %) = 65 % von 23800 DM berechnen.)

b) Da die Prozentangaben für die Wertverluste einheitlich vom Kaufpreis verstanden werden, beträgt die Summe der Wertverluste 20 % + 15 % + 15 % = 50 % des Kaufpreises. Daher sind 16200 DM die übrigen 50 % des Kaufpreises; dieser hatte somit 32400 DM betragen.

Die weitere Verringerung des Zeitwertes beträgt 10 % von 16200 DM , das sind 1620 DM. Als verringerter Zeitwert verbleiben 16200 DM - 1620 DM = 14580 DM. Wegen 14580 : 32400 $\cdot$ 100 = 45 sind das 45 % vom Kaufpreis.

c) 18275 DM sind 42,5 % von 43000 DM. Wieder wegen der einheitlichen Bezugnahme auf den Kaufpreis wurde somit für den Wertverlust im vierten Jahr ein Prozentsatz von 50 % - 42,5 % = 7,5 % zugrundegelegt.

II Runde 2

Aufgabe V10821:
In einer LPG werden Kartoffeln mit einer vierreihigen Legemaschine ausgelegt. In 10 Stunden können mit dieser modernen Maschine 3 Genossenschaftsbauern 5 ha Kartoffeln auslegen.
Früher, als die Bauern die Kartoffeln ohne Maschine auslegen mussten, konnte ein Bauer in 8 Stunden 0,5 ha schaffen. Außerdem benötigte er noch 2 Stunden für das Lockern des Ackers und das Zudecken der Kartoffeln.
Wie viel Stunden Arbeit (Arbeitskraftstunden) sind für 1 ha erforderlich
a) mit der Kartoffellegemaschine,
b) bei der Handarbeit?
c) Vergleiche die Zahlen durch Berechnung von Prozentwerten.

Lösung von Steffen Polster:
a) Die Verhältnisgleichung $3 \cdot 10 : 5 = x : 1$ hat die Lösung $x = 6$. Mit der Kartoffellegemaschine sind für 1 ha 6 Arbeitskräfte eine Stunde erforderlich.

b) Analog wird aus $10 : 0{,}5 = x : 1$ die Lösung $x = 20$. Bei Handarbeit sind für 1 ha 20 Arbeitskraftstunden notwendig.

c) Aus den Werten von a) und b) wird $6 : x = 20 : 100$, $x = 30$. Der Aufwand an Arbeitskräften beträgt mit der Legemaschine nur noch 30 Prozent.

Aufgabe V10822:
Im VEB Glaswerk Stralau wurde die Wanne II mit folgenden Rohstoffen beschickt:
250 kg Scherben, 134 kg Pechstein, 7 kg Flussspat, 228 kg Sand, 82,5 kg Kalk, 17 kg Sulfat und 103 kg Soda.
Wie viel Kilogramm der anderen Rohstoffe benötigt man bei gleicher Zusammensetzung für 1 t Sand?

Lösung von Steffen Polster:
Das Verhältnis 1000 kg : 228 kg $= x : 250$ ergibt für die Menge an Scherben $x = 1096{,}5$ kg. Für die anderen Rohstoffe wird die Gleichung entsprechend verändert und gelöst.
Es ergibt sich: Beim Verbrauch von 1 t Sand benötigt man 1096 kg Scherben, 590 kg Pechstein, 31 kg Flussspat, 362 kg Kalk, 75 kg Sulfat und 452 kg Soda.

Aufgabe 010821:
Die Stahlerzeugung ist in der UdSSR bis 1960 gegenüber 1913 (zaristisches Russland) auf etwa 1640 Prozent gesteigert worden.

In wieviel Tagen wurde 1960 in der UdSSR genau soviel Stahl erzeugt wie im gesamten Jahr 1913?

Lösung von Carsten Balleier:
Die Stahlerzeugung der UdSSR im Jahr 1960 entspricht 1640 Prozent der Jahresproduktion von 1913, d. h. der Produktion innerhalb von 365 Tagen. Die gesamte Jahresproduktion von 1913, also 100 Prozent, werden dann an $100 : 1640 \cdot 365$ Tagen ≈ 22 Tagen im Jahr 1960 erzeugt.

Aufgabe 020822:
Nach den Plänen, die auf dem XXII. Parteitag der KPdSU ausgearbeitet wurden, soll die Kohleförderung 1980 um 687 Millionen t höher liegen als im Jahre 1960. Die Kohleförderung im Jahre 1980 beträgt 234 Prozent im Vergleich zum Jahre 1960.

Berechne die geplante Kohleförderung des Jahres 1960! Runde auf volle Millionen t!

Lösung von Carsten Balleier:
Es gilt, den Grundwert x zum Prozentwert 687 Millionen t, der 134 Prozent (mehr als 1960, wo es 100 Prozent waren) entspricht, zu berechnen. Also lautet die Beziehung $x : 687$ Millionen t $= 100 : 134$.

Daraus erhält man 513 Millionen t geförderte Kohle im Jahr 1960.

Aufgabe 030821:
Ein rechteckiges Maisfeld von 360 m Länge und 220 m Breite soll von zwei Mähhäckslern abgeerntet werden. Proben haben einen durchschnittlichen Bestand von 58 kg je 10 m^2 ergeben. Jeder Mähhäcksler kann stündlich 105 dt ernten.

a) In welcher Zeit wird das Maisfeld (bei ununterbrochenem Einsatz beider Maschinen) abgeerntet?

b) Für den Transport des Erntegutes stehen Hänger mit einem Fassungsvermögen von 3,5 t zur Verfügung. Jeder Hänger benötigt für das Be- und Entladen sowie für Hin- und Rückfahrt insgesamt 40 min (Umlaufzeit).
Wie viel Hänger braucht man mindestens, wenn die Arbeit ununterbrochen vonstatten gehen soll?

Die Antworten sind zu begründen!

Lösung von Steffen Polster:
a) Das Feld hat einen Flächeninhalt von 360 m $\cdot$ 220 m $=$ 79200 m^2. Der Bestand hat also eine Masse von $\frac{58\text{kg}}{10\text{m}^2} \cdot 79200\text{ m}^2 = 459360\text{ kg} = 4594\text{ dt}$.
Da beide Mähhäcksler 210 dt jede Stunden ernten, benötigen sie damit $\frac{4594}{210} = 21{,}88 \approx 22$ Stunden.

Ein jeder Mähhäcksler erntet 3,5 t in 20 Minuten. Nimmt man an das Beladen und Hinfahrt genauso lange dauert wie Entladen und Rückfahrt, so benötigt jeder Häcksler zwei Hänger, insgesamt also 4.

Aufgabe 050821:
Eine Gruppe von Schülern einer Klasse hat Kastanien gesammelt. Als ein Mitschüler fragt, wie viel Schüler die Klasse hat und wie viel beim Sammeln teilgenommen haben, erhält er folgende Antworten:

(1) Wären 12 Schüler mehr dabei gewesen, dann hätten wir 75% mehr sammeln können.

(2) Wenn 75% der Schüler unserer Klasse teilgenommen hätten, dann hätten wir das Eineinhalbfache sammeln können.

(3) Es soll vorausgesetzt werden, dass jeder Schüler die gleiche Anzahl von Kastanien sammelt.

a) Wie viel Schüler haben teilgenommen?
b) Wie viel Schüler hat die Klasse?

Lösung von Manuela Kugel:

a) Die Anzahl der Schüler, die gesammelt haben, sei x. Wegen (1) und (3) gilt dann $(x + 12) : x = 175 : 100$, woraus sich $75x = 1200$ und $x = 16$ ergibt.

b) Wegen (2) und (3) gilt für die Anzahl a der Schüler in der Klasse

$$\frac{75}{100}a : x = 3 : 2 \qquad \Rightarrow \qquad a : x = 2 : 1 \qquad \Rightarrow \qquad a = 2$$

Folglich ist $a = 32$, und die Klasse hat genau 32 Schüler.

Aufgabe 060823:
18% einer Zahl sind gleich 15% einer anderen Zahl.

Ermittle das Verhältnis der ersten zur zweiten dieser beiden Zahlen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Ist x die erste Zahl und y die zweite, so gilt nach den Angaben die folgende Gleichung:

$$\frac{18 \cdot x}{100} = \frac{15 \cdot y}{100}$$

also $6x = 5y$. Daraus gewinnt man die Proportion $x : y = 5 : 6$.
Durch Rückschluss erkennt man, dass unter dieser Bedingung auch tatsächlich die Forderung erfüllt ist.

Aufgabe 150821:
Die Wägung eines mit Wasser gefüllten Gefäßes ergab eine Gesamtmasse (Gefäß- und Wassermasse) von 2000 g. Gießt man 20% des Wassers ab, so verringert sich diese gewogene Gesamtmasse auf 88%.

Berechne die Masse des leeren Gefäßes!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die von der Gesamtmasse 2000 g genommenen 12 %, das sind $\frac{12}{100} \cdot 2000$ g $= 240$ g, sind laut Aufgabe genau 20 %, d. h. ein Fünftel der Masse des Wassers. Wegen 240 g $\cdot 5 = 1200$ g enthielt das Gefäß also 1200 g Wasser. Mithin beträgt die Masse des leeren Gefäßes 800 g.

Aufgabe 160822:
Ein Rechteck habe die Seitenlängen a_1 und b_1.

Um wie viel Prozent verändert sich der Flächeninhalt dieses Rechtecks, wenn die Seite a_1 um 25% verkleinert und die Seite b_1 um 20% vergrößert wird?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Der Flächeninhalt A_1 des gegebenen Rechtecks beträgt $A_1 = a_1 \cdot b_1$. Er entspricht 100 %.
Die um 25 % verkleinerte Seite habe die Länge a_2, dann gilt

$$a_2 = a_1 - \frac{1}{4}a_1 = \frac{3}{4}a_1$$

Die um 20 % verlängerte Seite habe die Länge b_2, dann gilt entsprechend $b_2 = \frac{6}{5}b_1$.
Demnach beträgt der Flächeninhalt des so veränderten zweiten Rechtecks

$$A_2 = a_2 \cdot b_2 = \frac{3}{4}a_1 \cdot \frac{6}{5}b_1 = \frac{9}{10}A_1$$

Daher wurde der Flächeninhalt des ersten Rechtecks um 10 % verkleinert.

Aufgabe 200821:
Herr Schäfer hatte sich zwei Hunde gekauft. Er musste sie aber bald wieder verkaufen. Dabei erhielt er für jeden Hund 180 Mark.

Wie Herr Schäfer feststellte, hatte er damit an dem einen Hund 20% von dessen früherem Kaufpreis dazugewonnen, während er den anderen Hund mit 20% Verlust von dessen früherem Kaufpreis weiterverkauft hatte.

Untersuche, ob sich hiernach für Herrn Schäfer insgesamt beim Verkauf beider Hunde ein Gewinn oder ein Verlust gegenüber dem gesamten früheren Kaufpreis ergeben hat! Wenn dies der Fall ist, so ermittle, wie viel der Gewinn bzw. Verlust beträgt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
War der frühere Kaufpreis des ersten Hundes x Mark, so erhielt Herr Schäfer beim Verkauf dieses Hundes $\frac{120}{100}x$ Mark $= \frac{6}{5}$ Mark. Daher gilt

$$\frac{6}{5}x = 180 \qquad \text{also} \qquad x = 150$$

War der frühere Kaufpreis des zweiten Hundes y Mark, so erhielt Herr Schäfer beim Verkauf dieses Hundes $\frac{80}{100}y$ Mark $= \frac{4}{5}y$ 57 Mark. Daher gilt $y = 225$.
Somit hatte der frühere Kaufpreis 150 M + 225 M = 375 M betragen. Da Herr Schäfer die Hunde für insgesamt 360 Mark weiterverkaufte, erlitt er insgesamt einen Verlust von 15 Mark.

III Runde 3

Aufgabe 010831:
In einem Kreis wurde in einem Quartal der Plan für die Produktion von Mauersteinen (Plan: 1350000 Stück) insgesamt mit 100,1 Prozent erfüllt. Eine Überprüfung der Betriebe zeigte, dass dabei zwei Betriebe, die laut Plan 150000 bzw. 290000 Stück Mauersteine zu produzieren hatten, den Plan nur mit 80,0 Prozent bzw. 86,2 Prozent erfüllt hatten.

a) Wie viel Mauersteine hätten in diesem Kreis produziert werden können, wenn diese beiden Betriebe ihren Plan mit 100 Prozent erfüllt hätten?
b) Wie viel Prozent hätte in diesem Falle die Planerfüllung für den Kreis betragen?

Lösung von Carsten Balleier:

a) Der erste Betrieb hätte 20 % von 150000 Steinen mehr produzieren können, also 30000 Stück.

   Der zweite Betrieb dagegen 13,8 % von 290000, also 40020 Stück.

   Zusammen mit den $1350000 \cdot 1{,}001 = 1351350$ tatsächlich produzierten Mauersteinen wären es also 1421370 Mauersteine gewesen.

b) Die Planerfüllung hätte dann bei $\frac{1421370}{1350000} = 1{,}053 = 105{,}3$ Prozent gelegen.

Aufgabe 020831:
Zinkblende ist ein Erz und enthält 65 Prozent Zink. Von dieser Zinkmenge gehen bei der Gewinnung noch 15 Prozent verloren.

Wie viel kg Zinkblende sind erforderlich, um 1000 kg Zink zu gewinnen?

Lösung von Carsten Balleier:
Die 1000 kg Zink, die gewonnen werden sollen, sind 85% des Zinks, das in der Zinkblende enthalten ist, also sind 100% 1176,5 kg. Dies wiederum ist 65% der Gesamtmenge an Zinkblende, die demzufolge 1810 kg betragen muss.

Aufgabe 050835:
Jemand gießt 9 kg Wasser mit einer Temperatur von 30°C und 6 kg Wasser mit einer Temperatur von 85°C zusammen und rührt das Gemisch gut um.

Welche Temperatur würde das Gemisch annehmen, wenn man den Wärmeaustausch mit der Umgebung unberücksichtigt lässt?

Lösung von Eckart Keller:
Bezeichnet man die Masse der ersten Komponente mit m_1, die der zweiten mit m_2, die Temperatur der ersten Komponente mit t_1, die der zweiten mit t_2, so gilt für die Mischungstemperatur t_x unter den angegebenen Bedingungen:

$$t_x = \frac{m_1}{m_1+m_2}t_1 + \frac{m_2}{m_1+m_2}t_2.$$

Unter Verwendung der gegebenen Maßzahlen erhält man also, wenn x die Maßzahl von t_x bezeichnet,

$$\begin{aligned} x &= \frac{9}{15}\cdot 30 + \frac{6}{15}\cdot 85, \qquad \text{also} \\ x &= 52. \end{aligned}$$

Das Gemisch hat eine Temperatur von $t_x = 52$°C.

Aufgabe 060833:
Gegeben seien 3000 g einer 7,2-prozentigen Lösung von Kochsalz in Wasser (d. h. in je 100 g der Lösung sind genau 7,2 g Kochsalz enthalten). Durch Sieden dieser Lösung verdampft soviel Wasser, dass genau 2400 g der eingedampften Lösung verbleibt.

Wie viel prozentig ist die so erhaltene Lösung?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
In je 100 g der Lösung sind genau 7,2 g Kochsalz enthalten. Folglich beträgt die Kochsalzmenge in 3000 g Lösung

$$30 \cdot 7{,}2 \text{ g} = 216 \text{ g}$$

Da beim Verdampfen die Kochsalzmenge konstant bleibt, sind also auch in der neuen Lösung von 2400 g genau 216 g Kochsalz enthalten. Mithin enthält die neue Lösung in je 100 g eine Kochsalzmenge von genau 216 g : 24 = 9 g, d. h., die Lösung ist 9-prozentig.

Aufgabe 090835:
Aus 77prozentigem und 87prozentigem Spiritus und nur daraus soll durch Mischen genau 1000 g 80prozentiger Spiritus hergestellt werden.

Ermittle die dafür genau benötigten Massen!

Die Prozentangaben beziehen sich auf die Massen.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn es eine Lösung der Aufgabe gibt, dann sei für diese x die Maßzahl der Masse des 77prozentigen Spiritus. Dann ist $(1000 - x)$ die Maßzahl der Masse des 87prozentigen Spiritus, und es gilt:

$$\frac{77}{100}x + \frac{87}{100}(1000 - x) = \frac{80}{100} \cdot 1000$$

also $77x + 87000 - 87x = 80000$, woraus man $x = 700$ erhält.

Folglich kommen als Lösung der Aufgabe nur die Massen 700 g 77-prozentiger und 300 g 87prozentiger Spiritus in Frage.
Diese Massen haben tatsächlich die geforderte Eigenschaft; denn 700 g von 77prozentigem Spiritus enthalten genau 539 g reinen Spiritus; 300 g von 87prozentigem Spiritus enthalten genau 261 g reinen Spiritus. Das sind zusammen 800 g reiner Spiritus.

Laut Definition bezeichnet man 1000 g einer Mischung, die 800 g Spiritus und 200 g Wasser enthält, als 80prozentigen Spiritus, der laut Aufgabe herzustellen war.

Aufgabe 140836:
Gegeben seien drei Zahlen p, p_1, p_2 mit $0 < p_1 < p < p_2 < 100$.

Aus einer geeigneten Menge x kg einer p_1-prozentigen Lösung eines Stoffes (d. h. einer Lösung, die p_1 % dieses Stoffes und den Rest Wasser enthält) und einer geeigneten Menge y kg einer p_2-prozentigen Lösung des gleichen Stoffes soll durch Zusammengießen eine p-prozentige Lösung hergestellt werden.

a) Ermittle das hierzu erforderliche Mischungsverhältnis, d. h. die Zahl $x : y$, zunächst speziell für die Werte $p_1 = 25$, $p_2 = 60$ und $p = 35$!

b) Stelle dann eine für beliebige Werte von p_1, p_2 und p gültige Formel für das Mischungsverhältnis auf!

Anmerkung: Die angegebenen Prozentsätze beziehen sich auf die Masse, sind also nicht als Volumenprozent anzusehen.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) In x kg der 25prozentigen Lösung befinden sich $\frac{25x}{100}$ kg des gelösten Stoffes, in y kg der 60prozentigen Lösung entsprechend $\frac{60y}{100}$ kg. Somit hat $x : y$ genau dann den gesuchten Wert, wenn sich in den durch Zusammengießen erhaltenen $(x + y)$ kg genau $\frac{35(x+y)}{100}$ kg des gelösten Stoffes befinden, d. h. genau dann, wenn

$$\frac{25x}{100} + \frac{60y}{100} = \frac{35(x + y)}{100}$$

gilt. Dies ist der Reihe nach äquivalent mit $25x + 60y = 35x + 35y$, $25y = 10x$, $\frac{5}{2} = \frac{x}{y}$.
Das gesuchte Mischungsverhältnis beträgt somit 5 : 2.

b) Mit analoger Begründung wie in a) hat $x : y$ genau dann den gesuchten Wort, wenn

$$\frac{p_1}{100}x + \frac{p_2}{100}y = \frac{p}{100}(x + y) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{x}{y} = \frac{p_2 - p}{p - p_1}$$

Das gesuchte Mischungsverhältnis lautet: $\frac{p_2-p}{p-p_1}$

Aufgabe 170836:
Zwei Platten von gleicher Dicke bestehen aus Eichenholz bzw. Stahl. Der Flächeninhalt der Grundfläche der Eichenplatte ist um 20% größer als der Flächeninhalt der Grundfläche der Stahlplatte. Die Dichte des Eichenholzes verhält sich zur Dichte des Stahls wie 1 : 10.

Ermittle, um wie viel Prozent die Masse der Stahlplatte größer als die Masse der Eichenplatte ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es seien folgende Bezeichnungen verwendet:

	Eichenplatte	Stahlplatte
Masse	m_E	m_S
Dichte	ρ_E	ρ_S
Volumen	V_E	V_S
Inhalt der Dreiecksfläche	A_E	A_S
Dicke	h	h

Dann ist

$$(1) \quad m_E = A_E \cdot h \cdot \rho_E \qquad , \qquad (2) \quad m_S = A_S \cdot h \cdot \rho_S$$

sowie nach Voraussetzung (3) $\rho_E = \frac{1}{10}\rho_S$ und (4) $A_E = \frac{120}{100}A_S$. Die Masse der Stahlplatte sei x % der Masse der Eichenplatte. Dann gilt $M_s = \frac{x}{100} = m_E$.

Folglich ist wegen (1), ..., (4):

$$x = \frac{m_s}{m_E}100 = \frac{A_S \cdot h \cdot \rho_S \cdot 100}{A_E \cdot h \cdot \rho_E} = \frac{A_S \cdot h \cdot \rho_S \cdot 100}{\frac{120}{100}A_S \cdot h \cdot \frac{1}{10}\rho_S} = 833\frac{1}{3}$$

Die Masse der Stahlplatte ist um $(833\frac{1}{3} - 100)\% = 733\frac{1}{3}\%$ größer als die der Eichenplatte.

Aufgabe 180835:
Zum Experimentieren wird eine 30%ige Salzlösung benötigt. Vorhanden sind aber lediglich 2 Liter 10%iger Salzlösung sowie eine Flasche mit 42%iger Salzlösung.

Ermittle, wie viel Liter 42%iger Salzlösung den 2 Litern 10%iger Salzlösung zuzusetzen sind, damit eine 30%ige Salzlösung entsteht!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, beim Zusetzen von x Litern 42%iger Salzlösung zu den 2 Litern 10%iger Salzlösung bilden die entstehenden $(x + 2)$ 1 eine 30%ige Salzlösung. Es gilt dann:

2 Liter 10%ige Salzlösung enthalten 0,20 l Salz,
x Liter 42%ige Salzlösung enthalten 0,42x l Salz,
$(x + 2)$ Liter 30%ige Salzlösung enthalten 0,30$(x + 2)$ l Salz.

Da die Salzmenge im Lösungsgemisch stets gleich der Summe der Salzmengen in den gemischten Lösungen ist, muss gelten:

$$0{,}20 + 0{,}42x = 0{,}30(x + 2) \Rightarrow 20 + 42x = 30x + 60 \Rightarrow x = \frac{10}{3}$$

Man muss also $\frac{10}{3}$ Liter 42%ige Salzlösung zusetzen, um die geforderte 30%ige Salzlösung zu erhalten.

Probe: Man erhält als Mischung 2 Liter + $\frac{10}{3}$ Liter = $\frac{16}{3}$ Liter einer Lösung mit folgendem Salzgehalt:

2 Liter 10%ige Salzlösung enthalten 0,20 Liter Salz, $\frac{10}{3}$ Liter 42%ige Salzlösung enthalten 1,40 Liter Salz. Das sind zusammen 1,60 Liter Salz.
Von $\frac{16}{3}$ Litern Gesamtflüssigkeit sind diese 1,60 Liter Salz aber $1{,}60 : \frac{16}{3} \cdot 100\% = 30\%$, wie es verlangt war.

V.IV Ungleichungen

I Runde 1

Aufgabe 150811:
Peter kam vom Einkaufen zurück. Er kaufte in genau 4 Geschäften ein und hatte dafür genau 35 M zur Verfügung. Davon bringt er der Mutter genau 2 M wieder und berichtet:

> „Im Gemüseladen habe ich 4 M und noch etwas, jedenfalls mehr als 10 Pf bezahlt. Im Schreibwarengeschäft habe ich mehr als im Gemüseladen bezahlen müssen, es war eine gerade Zahl von Pfennigen und kein 5-Pfennig-Stück dabei. Beim Bäcker war es dann mehr als im Gemüseladen und Schreibwarengeschäft zusammen, aber diese Geldsumme war ungerade, und im Konsum schließlich bezahlte ich mehr als in den drei anderen Geschäften zusammen.“

Welche Geldbeträge bezahlte Peter in den vier genannten Geschäften?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Peter muss im Gemüseladen mindestens 4,11 M bezahlt haben. Hätte er 4,12 M oder mehr entrichtet, so hätte er im Schreibwarengeschäft 4,13 M oder mehr, beim Bäcker 8,26 M oder mehr, beim Konsum 16,52 M oder mehr, insgesamt also 33,03 M oder mehr bezahlt, hätte daher höchstens 1,97 M wiederbringen können. Daher hat er im Gemüseladen genau 4,11 M bezahlt.

Im Schreibwarengeschäft musste er folglich mindestens 4,12 M bezahlen. Er kann aber auch nicht 4,14 M oder mehr bezahlt haben; denn sonst hätte er beim Bäcker 8,26 M oder mehr und beim Konsum 16,52 M oder mehr, insgesamt also 33,03 M oder mehr bezahlt, was nicht möglich ist.

Folglich hat er im Schreibwarengeschäft genau 4,12 M bezahlt. Beim Bäcker musste er dann laut Aufgabe mindestens 8,25 M bezahlt haben. Er kann aber auch nicht 8,27 M oder mehr bezahlt haben; denn in diesem Falle hätte er beim Konsum 16,51 M oder mehr, insgesamt also 33,01 M oder mehr zu zahlen gehabt, was ebenfalls nicht möglich ist.

Folglich hat er beim Bäcker genau 8,25 M bezahlt. Wegen 4,11 M + 4,12 M + 8,25 M = 16,48 M und da Peter genau 2,00 M zurückbrachte, hat er beim Konsum genau 16,52 M bezahlt.

Aufgabe 150812:

a) Ermittle alle geordneten Paare $(a,\ b)$ natürlicher Zahlen, für die die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$a < 4 \quad (1) \qquad ; \qquad a - b > 0 \quad (2) \qquad ; \qquad a + b > 2 \quad (3)$$

b) Beweise, dass es keine geordneten Paare $(a,\ b)$ ganzer Zahlen mit den Eigenschaften (1), (2), (3) gibt, bei denen $a < 0$ oder $b < 0$ ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) I. Wenn ein Paar (a,b) natürlicher Zahlen die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt,so ist a wegen(1) eine der Zahlen 0, 1, 2, 3.

Wäre $a = 0$, so folgte aus (2) der Widerspruch $b < 0$ gegen die Eigenschaft von b, natürliche Zahl zu sein.
Wäre $a = 1$, so folgte aus (2) zunächst $b = 0$ und damit $a + b = 1$ im Widerspruch gegen (3).
Für $a = 2$ folgt aus (2), (3) einerseits $b < 2$, andererseits $b > 0$, also $b = 1$.
Für $a = 3$ folgt aus (2) die Ungleichung $b < 3$.

Daher können nur die Paare $(2{,}1), (3{,}0), (3{,}1), (3{,}2)$ (4) natürlicher Zahlen die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllen.

II. Für alle diese Paare ist in der Tat $a < 4$; ferner hat $a - b$ für sie die Werte 1, 3, 2, 1, die alle größer als 0 sind; schließlich hat $a + b$ die Werte 3, 3, 4, 5, die alle größer als 2 sind.
Also sind die Paare (4) alle in Aufgabe a) zu ermittelnden.

b) Gäbe es ein Paar $(a{,}b)$ ganzer Zahlen mit (1), (2), (3) und $a < 0$, so folgte aus (2) auch $b < 0$ und damit $a + b < 0$ im Widerspruch gegen (3).
Gäbe es ein Paar mit (1), (2), (3) und $b < 0$, so folgte $b \leq -1$, aus (1) aber $a \leq 3$ und damit $a + b \leq 2$ im Widerspruch gegen (3).

II Runde 2

Aufgabe 190822:
In einer AG Mathematik stellte ein Mitglied der Patenbrigade den Teilnehmern folgende Aufgabe:

„Unsere Brigade hat mehr als 20, aber weniger als 35 Mitglieder. Von ihnen nahmen im letzten Jahr im Juli dreimal soviel, im Februar doppelt soviel ihren Jahresurlaub wie im Mai. Im Januar nahmen drei Personen weniger als im Juli Urlaub, im August dagegen eine Person mehr als im Mai. In den nicht genannten Monaten dieses Jahres nahm kein Mitglied unserer Brigade Urlaub. Unter den genannten Urlaubern ist jedes Mitglied unserer Brigade genau einmal vertreten.

Stellt fest, ob ihr allein aus diesen Angaben die Anzahl unserer Brigademitglieder ermitteln könnt!“

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Anzahl der Mitglieder. dieser Brigade, die im Mai Urlaub nahmen, sei x. Dann nahmen im Juli $3x$, im Februar $2x$, im Januar $3x - 3$ und im August $x + 1$ Brigademitglieder Urlaub. Das sind zusammen $(10x - 2)$ Personen.

Nun gilt $20 < 10x - 2 < 35$, also $22 < 10x < 37$.
Da x eine natürliche Zahl ist, folgt daraus $x = 3$. Mithin hatte die Brigade 28 Mitglieder.

Aufgabe 210821:
Ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen a, für die $\frac{1}{4} < \frac{a}{a+12} < \frac{1}{3}$ gilt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn eine natürliche Zahl a die geforderte Ungleichung erfüllt, so gilt:

$$\frac{1}{4} < \frac{a}{a+12} \qquad \text{und} \qquad \frac{a}{a+12} < \frac{1}{3} \tag{1,2}$$

Aus (1) folgt $a + 12 < 4a$, also $12 < 3a$, folglich $4 < a$. Aus (2) folgt $3a < a + 12$, also $2a < 12$, folglich $a < 6$.
Die einzige natürliche Zahl, die (3) und (4) erfüllt, ist $a = 5$. Daher kann nur diese Zahl die geforderte Ungleichung erfüllen.

Sie erfüllt diese Ungleichung, wie die Probe zeigt.

Alternativ-Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Bildet man $\frac{a}{a+12}$ für zwei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen $a = n$ und $a = n + 1$, so erhält man die Zahlen $\frac{n}{n+12}$ und $\frac{n+1}{n+13}$.
Bringt man sie auf den gemeinsamen Nenner $(n + 12)(n + 13)$, so lauten sie

$$\frac{n(n+13)}{(n+12)(n+13)} = \frac{n^2+13n}{(n+12)(n+13)} \qquad \text{bzw.}$$
$$\frac{(n+1)(n+13)}{(n+12)(n+13)} = \frac{n^2+13+12}{(n+12)(n+13)}.$$

Daher gilt stets $\frac{n}{n+12} < \frac{n+1}{n+13}$, d. h., die für $a = 0, 1, 2, \dots$ gebildeten Zahlen erfüllen die Ungleichungen

$$0 < \frac{1}{13} < \frac{2}{14} < \frac{3}{15} < \frac{4}{16} < \frac{5}{17} < \frac{6}{18} < \frac{7}{19} < \dots$$

Wegen $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$ und $\frac{6}{18} = \frac{1}{3}$ erfüllt somit genau die natürliche Zahl $a = 5$ die geforderte Ungleichung.

Aufgabe 240823:
Ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen x, die die Ungleichung

$$\frac{11}{15} < \frac{7}{x} < \frac{15}{11} \quad \text{erfüllen!}$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die geforderte Ungleichung ist genau dann erfüllt, wenn die zwei Ungleichungen

$$\frac{11}{15} < \frac{7}{x} \quad (1) \qquad ; \qquad \frac{7}{x} < \frac{15}{11} \quad (2)$$

erfüllt sind.
Für natürliche Zahlen x gilt (1) genau dann, wenn ($\frac{7}{x}$, d. h. auch) x positiv ist und die Ungleichung $11x < 105$ erfüllt. Dies gilt genau dann, wenn $0 < x < \frac{105}{11}$, was wegen $\frac{105}{11} = 9\frac{6}{11}$ genau von den natürlichen Zahlen x mit $0 < x \leq 9$ erfüllt wird.

Für natürliche Zahlen x gilt (2) genau dann, wenn ($\frac{7}{x}$ existiert, d. h.) $x > 0$ ist und die Ungleichung $15x > 77$ erfüllt. Dies gilt genau dann, wenn $x > \frac{77}{15}$ ist, was wegen $\frac{77}{15} = 5\frac{2}{15}$ genau von den natürlichen Zahlen x mit $x \geq 6$ erfüllt wird.

Also ist die Gültigkeit von (1) und (2) für natürliche Zahlen x gleichbedeutend mit $6 \leq x \leq 9$ (d. h., die gesuchten Zahlen sind genau die Zahlen 6, 7, 8 und 9).

Aufgabe 310822:

a) Klaus wählt natürliche Zahlen m und n mit $0 < m < n$ und bildet die Zahlen $p = \frac{m}{n}$ und $q = \frac{n}{m}$ Dann ordnet er die drei Zahlen 1, p, q der Größe nach, beginnend mit der kleinsten.

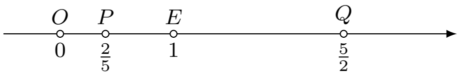
   Beweise, dass sich bei jeder Wahl solcher m, n stets dieselbe Reihenfolge für 1, p, q ergeben muss! Wie lautet sie?

b) Nun zeichnet Klaus auf einer Zahlengeraden die drei Punkte E, P, Q, die den Zahlen 1, p, q zugeordnet sind. Er ordnet dann die beiden Längen $\overline{EP}$ und $\overline{EQ}$ der Größe nach.

Zeichne für das Beispiel $m = 2$, $n = 5$ die Strecken EP, EQ auf einer Zahlengeraden, deren Einheitsstrecke (vom Nullpunkt O bis E) die Länge $\overline{OE} = 4cm$ hat! Beweise, dass sich (bei jeder Wahl obengenannter m, n) auch für $\overline{EP}$ und $\overline{EQ}$ stets dieselbe Reihenfolge ergeben muss! Wie lautet sie?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Für natürliche Zahlen m, n mit $0 < m < n$ (1) folgt stets, indem man (1) durch m bzw. n dividiert, $1 < \frac{n}{m}$ bzw. $\frac{m}{n} < 1$. D. h., es ergibt sich stets die Reihenfolge $p < 1 < q$. (2)

b) Zeichnung:



Aus (2) folgt: Die Strecke EP hat die Länge

$$EP = 1 - p = 1 - \frac{m}{n} = \frac{n-m}{n}$$

die Strecke EQ hat die Länge

$$EQ = q - 1 = \frac{n}{m} - 1 = \frac{n-m}{m}$$

Nach (1) ist $n - m > 0$, hieraus und aus (1) folgt

$$\frac{n-m}{m} > \frac{n-m}{n}$$

d. h., es ergibt sich stets die Reihenfolge $EP < EQ$.

III Runde 3

Aufgabe 030832:
Beweise folgende Behauptung:

Wenn a und b entweder beide positive reelle oder beide negative reelle Zahlen sind, dann ist stets

$$5a^2 - 6ab + 5b^2 > 0.$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Beweis: Es gilt $5a^2 - 6ab + 5b^2 = 5(a - b)^2 + 4ab$. Der Summand $5(a - b)^2$ ist stets eine nichtnegative reelle Zahl, während $4ab$ unter den angegebenen Bedingungen eine positive reelle Zahl ist.

Also gilt $5a^2 - 6ab + 5b^2 > 0$. □

Aufgabe 040835:
Gegeben sind vier aufeinander folgende natürliche Zahlen, die in ihrer Reihenfolge a, b, c und d genannt sind.

a) Welches Produkt ist größer, ac oder bd ? Bestimme die Differenz der beiden Produkte!
b) Welches Produkt ist größer, bc oder ad ? Bestimme die Differenz der beiden Produkte!

Lösung von Manuela Kugel:
Es seien die vier Zahlen a, b, c, d, dabei gilt $b = a + 1$, $c = a + 2$ und $d = a + 3$

a)
$$ac = a \cdot (a+2) = a^2 + 2a \qquad ; \qquad bd = (a+1) \cdot (a+3) = a^2 + 4a + 3$$

Daraus folgt $a \cdot c < b \cdot d$, die Differenz beträgt $2a + 3$.

b)
$$bc = (a+1)(a+2) = a^2 + 3a + 2 \qquad ; \qquad ad = a \cdot (a+3) = a^2 + 3a$$

Daraus folgt $b \cdot c > a \cdot d$, die Differenz beträgt 2.

Aufgabe 110833:
Ermittle alle reellen Zahlen x, für die ein gleichschenkliges Dreieck $\triangle ABC$ mit den Seitenlängen $a = -5x + 12$; $b = 3x + 20$; $c = 4x + 16$ existiert!

(Überlege, welche Bedingungen a, b und c dabei erfüllen müssen!)

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Ein Dreieck $\triangle ABC$ mit drei reellen Zahlen a, b, c als Seitenlängen existiert genau dann, wenn gleichzeitig die Ungleichungen

$$\begin{array}{cccccc} (1) & a > 0 & (4) & a < b + c & (2) & b > 0 \\ (5) & b < a + c & (3) & c > 0 & (6) & c < a + b \end{array}$$

gelten. Es ist genau dann gleichschenklig, wenn $a = b$ oder $a = c$ oder $b = c$ gilt. Die Bedingung $a = b$ ist gleichbedeutend mit $-5x + 12 = 3x + 20$, also mit $x = -1$.
Daraus ergibt sich $a = b = 17$ und $c = 12$, und (1) bis (6) sind sämtlich erfüllt.

Die Bedingung $a = c$ ist gleichbedeutend mit $-5x + 12 = 4x + 16$, also mit $x = -\frac{4}{9}$. Daraus ergibt sich $a = c = \frac{128}{8}$ und $b = \frac{56}{3}$, und (1) bis (6) sind sämtlich erfüllt.

Die Bedingung $b = c$ ist gleichbedeutend mit $3x + 20 = 4x + 16$, also mit $x = 4$. Daraus ergibt sich $b = c = 32$ und $a - 8$, d. h. (1) ist nicht erfüllt.
Mithin gibt es genau für $x = -1$ und $x = -4$ je ein gleichschenkliges Dreieck.

Aufgabe 110834:
Beweise, dass für je zwei rationale Zahlen $a > 2$ und $b > 2$ das Produkt ab größer als die Summe $a + b$ ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wegen $a > 2$, $b > 2$ ist $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} < 1$, also $\frac{a+b}{ab} < 1$ und folglich wegen $ab > 0$ auch $a + b < ab$.

Aufgabe 130834:
Ermittle alle rationalen Zahlen a, die die Ungleichung erfüllen:

$$\frac{3a - 2}{a + 1} < 0$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Ein Bruch ist genau dann negativ, wenn entweder sein Zähler positiv und sein Nenner negativ oder wenn sein Zähler negativ und sein Nenner positiv ist.

Angenommen, es gäbe eine rationale Zahl a mit $3a - 2 > 0$ und $a + 1 < 0$. Dann folgte aus $3a - 2 > 0$ einerseits $a > \frac{2}{3}$ und aus $a + 1 < 0$ andererseits $a < -1$. Da es keine rationale Zahl gibt, die gleichzeitig größer als 3 und kleiner als -1 ist, war unsere Annahme falsch.

Daher ist die gegebene Ungleichung genau für diejenigen rationalen Zahlen a erfüllt, für die $3a - 2 < 0$ und $a + 1 > 0$ gilt. Nun ist $3a - 2 < 0$ gleichbedeutend mit $a < \frac{2}{3}$ und $a + 1 > 0$ mit $a > -1$.
Diese beiden Bedingungen werden genau von allen rationalen Zahlen a erfüllt, für die $-1 < a < 1$ gilt.

Folglich sind alle rationalen Zahlen a mit $-1 < a < \frac{2}{3}$ und nur diese Lösungen der gegebenen Ungleichungen.

Aufgabe 310834:
Untersuche für alle rationalen Zahlen a, b mit $a \geq 2$, $b \geq 2$, ob bzw. unter welchen Bedingungen das Produkt der Zahlen a, b kleiner als die Summe, gleich der Summe oder größer als die Summe von a und b ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Für alle $a \geq 2$, $b \geq 2$ gilt

$$a - 1 \geq 1 \qquad , \qquad b - 1 \geq 1 \tag{1}$$

Da in beiden Beziehungen (1) die auf beiden Seiten stehenden Zahlen positiv sind, folgt durch Multiplikation

$$(a-1)(b-1) \geq 1 \tag{2}$$
$$ab - a - b + 1 \geq 1$$
$$ab \geq a + b \tag{3}$$

Gleichheit gilt in (3) genau dann, wenn sie in (2) gilt, und das ist genau dann der Fall, wenn in beiden Beziehungen (1) Gleichheit gilt. Damit ist gezeigt:

Es gibt keine Zahlen a, b mit $a \geq 2$, $b \geq 2$, für die das Produkt ab kleiner als die Summe $a + b$ wäre;

im Fall, dass beide Zahlen a, b gleich 2 sind, ist das Produkt ab gleich der Summe $a + b$;

für alle anderen a, b mit $a \geq 2$, $b \geq 2$ ist das Produkt ab größer als die Summe $a + b$.

V.V Gleichungssysteme

I Runde 1

Aufgabe V00801:
Zwei Brigaden einer Spulenfabrik fertigen zusammen 8200 Transformatorspulen. Bei der Gütekontrolle müssen von den durch das erste Kollektiv gefertigten Spulen 2%, von denen des zweiten Kollektivs 3% wegen mangelhafter Isolation ausgeschieden werden.
Insgesamt sind 216 Spulen unbrauchbar. Wie viel einwandfreie Spulen werden von jedem Kollektiv hergestellt?

Lösung von Steffen Polster:
x sei die Produktion der ersten Brigade, y der zweiten Brigade. Dann ergibt sich das Gleichungssystem

$$x + y = 8200 \qquad ; \qquad 0{,}02 \cdot x + 0{,}03 \cdot y = 216$$

Das System hat die Lösung $x = 3000, y = 5200$. Nach Abzug der mangelhaften Spulen ($0{,}02 \cdot x = 60$, $0{,}03 \cdot y = 156$) ergibt sich, dass die erste Brigade 2940 und die zweite Brigade 5044 einwandfreie Spulen hergestellt haben.

Aufgabe V00804:
Wir haben zwei Gefäße. In beide Gefäße gießen wir Wasser, und zwar in das erste $\frac{2}{5}$ seines Fassungsvermögens, in das zweite $\frac{3}{8}$ seines Fassungsvermögens.
Wenn wir die beiden Wassermengen zusammengießen, erhalten wir 8,5 Liter. Wir wissen noch, dass $\frac{4}{5}$ des Fassungsvermögens des ersten Gefäßes um 6,2 Liter größer ist als $\frac{3}{4}$ des Fassungsvermögens des zweiten Gefäßes.
Berechnet die Fassungsvermögen der beiden Gefäße!

Lösung von Steffen Polster:
Das Fassungsvermögen der Gefäße sei x und y. Als Gleichungssystem ergibt sich

$$\frac{2}{5}x + \frac{3}{8}y = 8{,}5 \qquad ; \qquad \frac{4}{5}x - 6{,}2 = \frac{3}{4}y$$

Das System hat die Lösungen $x = 14{,}5$ und $y = 7{,}2$. Das erste Gefäß hat ein Fassungsvermögen von 14,5 l, das zweite von 7,2 l.

Aufgabe V00808:
Knobel Knifflig erzählt: Ich bin dem Riesen aus Prag begegnet. Sein Kopf und Hals sind zusammen 30 cm lang. Seine Beine sind doppelt so lang wie Kopf, Hals und halber Rumpf, und der ganze Kerl ist genau ein Meter länger als Kopf, Hals und Beine zusammen.
Wie groß ist er?

Lösung von Steffen Polster:
Die Länge von Kopf, Hals, Rumpf und Beine seien k, h, r, b. Dann ergibt sich das Gleichungssystem (Längen in cm)

$$k + h = 30 \quad (1) \qquad ; \qquad b = 2\left(k + h + \frac{1}{2}r\right) \quad (2)$$

$$k + h + r + b = 100 + k + h + b \tag{3}$$

Aus (3) folgt sofort $r = 100$. Setzt man (1) und den Wert für r in (2) ein, wird $b = 160$. Damit wird $k + h + r + b = 30 + 100 + 160 = 290$. Der Riese ist 2,90 m groß.

Aufgabe 240812:
Cathrin stellt ihren Mitschülern in der Arbeitsgemeinschaft „Mathematik“ folgende Knobelaufgabe:

Eine Flasche und ein Glas wiegen zusammen so viel wie ein Krug. Die Flasche wiegt allein so viel wie das Glas zusammen mit einem Teller, während drei solcher Teller zusammen so viel wie zwei solcher Krüge wiegen. Wie viel solcher Gläser wiegen zusammen so viel wie die Flasche?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Sind F, G, K, T die Gewichte von Flasche, Glas, Krug bzw. Teller, so gilt

$$F + G = K \tag{1}$$
$$F = G + T \tag{2}$$
$$3T = 2K \tag{3}$$

Aus (2) folgt $3F = 3G + 3T$. Setzt man hierin (3) ein, so ergibt sich

$$3F = 3G + 2K \tag{4}$$

Aus (1) folgt $2K = 2F + 2G$, Setzt man dies in (4) ein, so erhält man $3F = 3G + 2F + 2G$ und daraus $F = 5G$.
Also wiegen fünf Gläser so viel wie die Flasche.

Aufgabe 340811:
Anja, Bernd und Christina haben am gleichen Tag Geburtstag.

An diesem Tag sagt Anja zu Christina: „$\frac{3}{4}$ deines Alters sind ebenso viele Jahre wie $\frac{2}{3}$ meines Alters.“

Bernd sagt zu Christina: „$\frac{3}{4}$ deines Alters sind ebenso viele Jahre wie die Hälfte meines Alters.“

Christina sagt: „Die Summe unserer drei Altersangaben in Jahren ausgedrückt, beträgt 58.“

Zeige, dass durch diese Angaben eindeutig bestimmt ist, wie alt Anja, Bernd und Christina sind! Nenne diese drei Altersangaben!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Aus den Angaben folgt für das Alter a bzw. b bzw. c von Anja bzw. Bernd bzw. Christina:

$$\frac{3}{4}c = \frac{2}{3}a \quad (1) \qquad \frac{3}{4}c = \frac{1}{2}b \quad (2) \qquad a + b + c = 58 \quad (3)$$

Aus (1) folgt $9c = 8a$, also $a = \frac{9}{8}c$ (4), aus (2) folgt $3c = 2b$, also $b = \frac{3}{2}c$. (5)
Damit folgt aus (3)

$$\frac{9}{8}c + \frac{3}{2}c + c = 58 \qquad \Rightarrow \qquad c = \frac{58 \cdot 8}{29} = 16$$

und dann nach (4), (5) weiter $a = 18$ und $b = 24$.
Also ist durch die Angaben eindeutig bestimmt: Anja ist 18 Jahre alt, Bernd ist 24 Jahre alt, Christina ist 16 Jahre alt.

II Runde 2

Aufgabe 140821:
Bei einer Kreisspartakiade wurden für die Teilnehmer insgesamt 61 Goldmedaillen, 63 Silbermedaillen und 60 Bronzemedaillen vergeben. Die Mannschaften der Schulen der Stadt B erkämpften dabei zusammen 42 dieser Medaillen. Sie erhielten genau ein Drittel aller Silbermedaillen, mehr als ein Sechstel, jedoch weniger als ein Fünftel aller Bronzemedaillen und einige Goldmedaillen.

Ermittle die Anzahl aller Gold-, Silber- und Bronzemedaillen, die von den Schülern der Stadt B bei diesem Wettkampf errungen wurden!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Anzahl aller von den Schülern der Stadt B bei dieser Kreisspartakiade errungenen Goldmedaillen sei g, die der Silbermedaillen s und die der Bronzemedaillen b. Dann gilt laut Aufgabe:

$$g + s + b = 42 \quad (1); \qquad s = \frac{63}{3} = 21 \quad (2); \qquad 10 < b < 12 \quad (3)$$

Daraus folgt, da b ganzzahlig ist, $b = 11$ und somit wegen (1) und (2) $g = 42 - 21 - 11 = 10$.
Die Schüler der Stadt B errangen 10 Gold-, 21 Silber- und 11 Bronzemedaillen.

III Runden 3 & 4

Aufgabe 080836:
Die Zahlen a, b, c und d mögen folgenden Bedingungen genügen:

(1) $d > c$

(2) $a + b = c + d$

(3) $a + d < b + c$

Ordne die Zahlen der Größe nach (beginnend mit der größten)!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wegen (1) gilt $b+d > b+c$, und weil $a+d < b+c$ ist, findet man $a+d < b+d$ und daraus $a < b$. (4)
Durch Subtraktion erhält man aus (2) und (3):

$$d - b < b - d \quad \to \quad 2d < 2b \quad \to \quad d < b \tag{5}$$

Aus (2) erhält man $b - d = c - a$, woraus sich wegen $b > d$ die Aussage (6) $c > a$ ergibt.
Wegen (4), (5) und (6) ist die gesuchte Reihenfolge $b > d > c > a$.

Aufgabe 160833:
In einem allseitig geschlossenen quaderförmigen Glaskasten befinden sich genau 600 cm^3 Wasser. Legt man den Kasten nacheinander mit seinen verschiedenen Außenflächen auf eine horizontale Ebene, so ergibt sich für die Wasserhöhe im Kasten einmal 2 cm, einmal 3 cm und einmal 4 cm.

Ermittle diejenigen Werte für das Fassungsvermögen des Kastens, die diesen Angaben entsprechen!

Bemerkung: Der Wasserspiegel sei als Teil einer horizontalen Ebene angenommen, die Adhäsion werde vernachlässigt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn die Kantenlängen a, b, c (in cm) des quaderförmigen Innern des Kastens den Angaben der Aufgabenstellung entsprechen, so gilt o. B. d. A.

$$a \cdot b \cdot 2 = 600 \quad (1) \qquad ; \qquad a \cdot c \cdot 3 = 600 \quad (2) \qquad ; \qquad b \cdot c \cdot 4 = 600 \quad (3)$$

Dividiert man (1) durch (3), so erhält man $\frac{a}{2c} = 1$ bzw.(4) $a = 2c$. Setzt man (4) in (2) ein, so folgt $6c^2 = 600$, und daraus wegen $c > 0$ (5) $c = 10$.

Wegen (5) folgt aus (4) $a = 20$ und aus (1) oder (3) $b = 15$.
Also können nur 10 cm, 15 cm, 20 cm als Innenmaße des Kastens und mithin nur der Wert 3000 cm^3 für sein Fassungsvermögen den Angaben der Aufgabenstellung entsprechen.

Aufgabe 170834:
Eine Pioniergruppe sammelte Altpapier; der gesamte Erlös wurde auf das Solidaritätskonto überwiesen. Die Pioniere bildeten zwei Brigaden, jeder Pionier der Gruppe gehörte genau einer dieser Brigaden an. Über das Sammelergebnis ist folgendes bekannt:

(1) Jeder Pionier der Brigade A sammelte genau 13 kg, außer einem, der nur 6 kg mitbrachte.
(2) Jeder Pionier der Brigade B sammelte genau 10 kg, außer einem mit nur genau 5 kg.
(3) Brigade A sammelte insgesamt die gleiche Menge wie Brigade B.
(4) Die gesamte Pioniergruppe sammelte mehr als 100 kg, jedoch weniger als 600 kg Altpapier.

a) Wie viel Pioniere gehörten einer jeden Brigade insgesamt an?
b) Wie viel Mark konnte die Pioniergruppe auf das Solidaritätskonto überweisen, wenn der Altstoffhandel 0,15 Mark pro kg Altpapier bezahlte?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Die Anzahl der Pioniere, die je genau 13 kg sammelten, sei x. Nach (1) gehören dann genau $(x+1)$ Pioniere der Brigade A an, das Sammelergebnis dieser Brigade betrug $(13x+6)$ kg.
Die Anzahl der Pioniere, die je genau 10 kg sammelten, sei y. Nach (2) gehören dann genau $(y+1)$ Pioniere der Brigade B an, und das Sammelergebnis dieser Brigade betrug $(10y+5)$ kg.

Nach (3) gilt somit $13x+6 = 10y+5$, also $y = \frac{13x+1}{10}$ (*).
$13x+1$ ist durch 10 teilbar, folglich endet die (Zifferndarstellung der) Zahl $13x$ auf die Ziffer 9 und somit x auf die Ziffer 3.

Aus (4) folgt $100 < 2(13x+6) < 600$ und daraus $44 < 13x < 294$.

Dies wird weder von $x = 3$ noch von den Zahlen $x = 23$ erfüllt, da hierfür $13x = 39$ bzw. $13x = 299$ gilt. Also ist $x = 13$.
Nach (*) ergibt sich daraus $y = 17$. Somit gehörten genau 14 Schüler der Brigade A und genau 18 der Brigade B an.

b) Brigade A sammelte $(13 \cdot 13 + 6)$ kg $= 175$ kg und Brigade B $(17 \cdot 10 + 5)$ kg $= 175$ kg, die gesamte Gruppe somit 350 kg Altpapier.
Wegen $350 \cdot 0{,}15$ M $= 52{,}50$ M konnte die Pioniergruppe genau 52,50 M auf das Solidaritätskonto überweisen.

Aufgabe 200831:
Uwe erzählt:

> „In den Winterferien machten wir mit einer Reisegesellschaft eine Fahrt in den Harz. Daran nahmen nicht mehr als 80 Personen teil, und zwar waren es genau 3 Männer weniger als Frauen und genau 20 Erwachsene mehr als Kinder. Unterwegs wurden wir in genau 7 Gruppen von gleicher Personenzahl aufgeteilt.“

Ermittle alle Möglichkeiten, die Anzahlen der Männer, Frauen und Kinder so anzugeben, dass Uwes Aussagen zutreffen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Treffen Uwes Aussagen für eine Angabe von Anzahlen der Männer, Frauen und Kinder zu und ist dabei m die Anzahl der teilnehmenden Männer, so ergibt sich:
Die Anzahl der teilnehmenden Frauen ist $m+3$, die Anzahl der Erwachsenen also $2m+3$; es gilt $2m+3 \geq 20$ (1)
und die Anzahl der Kinder ist $2m+3-20$.

Somit ist $m+m+3+2m+3-20 = 4m-14$ die Gesamtzahl aller Teilnehmer. Daher gilt einerseits $4m-14 \leq 80$ (2)
andererseits ist $4m-14$ durch 7 teilbar. Das gilt folglich auch für $4m$; somit ist wegen der Teilerfremdheit von 4 und 7 m durch 7 teilbar. (3)
Wäre $m \leq 7$, so wäre $2m+3 \leq 17$, im Widerspruch zu (1); wäre $m \geq 28$, so wäre $4m-14 \geq 98$, im Widerspruch zu (2).
Daher können (1), (2), (3) nur erfüllt sein, wenn $m = 14$ oder $m = 21$ ist. Somit können nur die in der folgenden Tabelle angegebenen Personenzahlen mit Uwes Angaben übereinstimmen. Aus der Tabelle ist zugleich ersichtlich, dass sie tatsächlich mit diesen Angaben übereinstimmen:

Männer	Frauen	Erwachsene	Kinder	Teilnehmer
m	$m+3$	$2m+3$	$2m-17$	$4m-14$
14	17	31	11	42
21	24	45	25	70

Aufgabe 210835:
Jemand hebt von seinem Sparkonto einen bestimmten Geldbetrag ab. Er erhält diesen in insgesamt 29 Banknoten ausgezahlt, und zwar ausschließlich in Zehnmarkscheinen, Zwanzigmarkscheinen und Fünfzigmarkscheinen. Dabei ist die Anzahl der 10-M-Scheine um 1 kleiner als die Anzahl der 20-M-Scheine. Die Anzahl der 50-M-Scheine ist größer als das Zweifache, aber kleiner als das Dreifache der Anzahl der 20-M-Scheine.

Ermittle die Höhe des abgehobenen Geldbetrages!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, es wurden x Zwanzigmarkscheine und y Fünfzigmarkscheine ausgezahlt. Dann wurden $(x-1)$ Zehnmarkscheine ausgezahlt, und es gilt:

$$(x-1)+x+y=29, \quad \text{also} \quad 2x+y=30 \quad \text{sowie} \quad 2x<y<3x$$

Aus $2x+y=30$ und $2x<y$ folgt $4x<30$, also $x \leq 7$. (1)
Aus $2x+y=30$ und $3x>y$ folgt $5x>30$, also $x>6$. (2)
Aus (1) und (2) folgt $x=7$, also $y=16$.
Somit wurden 6 Zehnmarkscheine, 7 Zwanzigmarkscheine, und 16 Fünfzigmarkscheine, also ein Betrag von 1000 M, ausgezahlt.

Aufgabe 320832:
Um einen Behälter mit Wasser füllen zu können, soll eine Anzahl Röhren angelegt werden. Durch jede Röhre soll das Wasser gleichmäßig strömen (d. h. in gleichen Zeiten gleichviel Wasser). In einer Stunde soll durch jede Röhre die gleiche Wassermenge zuströmen wie durch jede andere Röhre.

Für die Anzahl der Röhren gibt es drei Vorschläge. Nach dem zweiten Vorschlag, zwei Röhren weniger als beim ersten Vorschlag zu nehmen, würde das Füllen des Behälters zwei Stunden länger dauern als beim ersten. Nach dem dritten Vorschlag, vier Röhren mehr als beim ersten Vorschlag zu nehmen, würde das Füllen des Behälters zwei Stunden kürzer dauern als beim ersten.

Ermittle aus diesen Angaben die Anzahl der Röhren und die Zeit zum Füllen des Behälters beim ersten Vorschlag!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Beim ersten Vorschlag seien n Röhren sowie eine Füllzeit von t Stunden vorgesehen. Jede Röhre füllt dann in jeder Stunde $\frac{1}{n \cdot t}$ des Behältervolumens.
Die $n-2$ Röhren des zweiten Vorschlags füllen also in jeder Stunde $\frac{n-2}{n \cdot t}$ des Behältervolumens; der Behälter wird nach diesem Vorschlag somit in $\frac{n \cdot t}{n-2}$ Stunden gefüllt. Da dies 2 Stunden mehr als beim ersten Vorschlag sind, gilt

$$\frac{n \cdot t}{n-2} = t+2 \qquad \text{und daher} \qquad t = n-2 \tag{1}$$

Entsprechend folgt: Nach dem dritten Vorschlag wird der Behälter in $\frac{n \cdot t}{n+4}$ Stunden gefüllt, und es gilt

$$\frac{n \cdot t}{n+4} = t-2 \qquad ; \qquad t = \frac{n}{2}+2 \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt $n-2=\frac{n}{2}+2$ und damit nach (1) $n=8$ und $t=6$.
Also war beim ersten Vorschlag vorgesehen, mit 8 als Anzahl der Röhren eine Füllzeit von 6 Stunden zu erreichen.

Aufgabe 320836:
In der linken Waagschale einer gleicharmigen Waage steht eine Kerze, in der rechten stehen drei Kerzen. Die vier Kerzen sind so beschaffen, dass jede von ihnen während je einer Minute Brenndauer die gleiche Masse verliert wie jede andere von ihnen.

> Die linke Kerze würde zum vollständigen Herunterbrennen 84 Minuten brauchen,
>
> von den drei rechten Kerzen die erste 70 Minuten,
>
> die zweite 63 Minuten,
>
> die dritte 35 Minuten.

Die vier Kerzen werden gleichzeitig angezündet. Wie lange danach ist die Waage erstmals im Gleichgewicht?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es sei m die Masse, die jede der vier Kerzen während einer Minute Brenndauer verliert.
Dann hat die linke Kerze die Masse $84m$, und die rechten Kerzen haben die Massen $70m$, $63m$ bzw. $35m$.

Nach x Minuten Brenndauer befindet sich, solange $x \leq 35$ bleibt, auf der linken bzw. auf der rechten Waagschale die Masse $(84 - x)m$ bzw. die Masse $(70 - x + 63 - x + 35 - x)m = (168 - 3x)m$.
Aus $x \leq 35$ folgt aber $2x \leq 70$, also erst recht $2x < 84$ und daraus weiter $84 - x < 168 - 3x$. Daher ist während der Brenndauer bis 35 Minuten die linke Waagschale stets leichter als die rechte.

Von da an, also nach x Minuten Brenndauer mit $x > 35$, befindet sich, solange $x \leq 63$ bleibt, auf der linken bzw. auf der rechten Waagschale die Masse $(84 - x)m$ bzw. die Masse $(70 - x + 63 - x)m = (133 - 2x)m$. Hiermit ergibt sich genau dann Gleichgewicht, wenn $84 - x = 133 - 2x$ oder, äquivalent hierzu, $x = 49$ gilt.

Also ist die Waage erstmals 49 Minuten nach dem Anzünden der vier Kerzen im Gleichgewicht.

Aufgabe 330841:
Max arbeitet zur Vorbereitung auf die Mathematik-Olympiade eine Anzahl von Aufgaben durch. Sein Freund Moritz, der ihn fragt, wie viele von diesen Aufgaben er schon gelöst habe und wie viele noch nicht, antwortet er:

> „Die Anzahl der gelösten Aufgaben ist um 22 größer als die Anzahl der nicht gelösten Aufgaben. Addiert man zur Anzahl der gelösten Aufgaben die dreifache Anzahl der nicht gelösten Aufgaben, so erhält man eine Zahl, die kleiner als 60 ist. Addiert man aber zur Anzahl der gelösten Aufgaben ein Drittel der Anzahl der nicht gelösten Aufgaben, so ergibt sich eine ganze Zahl, die größer als 30 ist.“

Untersuche, ob durch diese Angaben eindeutig bestimmt ist, wie viele Aufgaben Max bearbeitet und wie viele er davon gelöst hat! Ist das der Fall, so gib diese Anzahlen an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Aus den Angaben folgt: Wenn Max x Aufgaben gelöst hat, so hat er $x - 22$ Aufgaben nicht gelöst; es gilt

$$x + 3 \cdot (x - 22) < 60 \quad (1) \qquad x + \frac{1}{3} \cdot (x - 22) > 30 \quad (2)$$

$$x + 7 \cdot (x - 22) \text{ ist eine ganze Zahl} \qquad (3)$$

Aus (1) folgt $x + 3x - 66 < 60$ und $x < 31\frac{1}{2}$. Aus (2) folgt $x + 7x - 7 > 30$ und $x > 28$.
Daher ist x eine der Zahlen 29, 30, 31 und folglich $x - 22$ eine der Zahlen 7, 8, 9.

Die Bedingung (3) erfordert, dass $x - 22$ durch 3 teilbar ist; dies wird unter den genannten Zahlen nur von $x - 22 = 9$ erfüllt.
Also ist durch die Angaben eindeutig bestimmt: Max hat $x = 31$ Aufgaben gelöst von insgesamt 40 bearbeiteten Aufgaben.

VI Klasse 9

VI.I Gleichungen

I Runde 1

Aufgabe V00902:
Wie kommt es zu der Formel?

$$x_{1;2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Lösung von Steffen Polster:
Lösungsformel der Normalform der quadratischen Gleichung mit den Parametern p und q:

$$\begin{aligned}
0 &= x^2 + px + q \\
0 &= x^2 + px + \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + q \\
\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 &= \frac{p^2}{4} - q \\
x + \frac{p}{2} &= \pm\sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \\
x &= -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}
\end{aligned}$$

Aufgabe 010911:
Berechnen Sie:

$$\left(\frac{9}{10}m^4 - 3\frac{211}{360}m^2 + 5\frac{1}{4}m - 4\frac{1}{2}\right) : \left(1\frac{1}{2}m^2 + 1\frac{2}{3}m - 6\right).$$

Lösung von Christiane Czech:
Mit Polynomdivision erhalten wir:

$$\begin{array}{l}
\left(\tfrac{9}{10}m^4 - 3\tfrac{211}{360}m^2 + 5\tfrac{1}{4}m - 4\tfrac{1}{2}\right) : \left(1\tfrac{1}{2}m^2 + 1\tfrac{2}{3}m - 6\right) = \tfrac{3}{5}m^2 - \tfrac{2}{3}m + \tfrac{3}{4}. \\
\underline{-\left(\tfrac{9}{10}m^4 + m^3 - 3\tfrac{3}{5}m^2\right)} \\
\qquad -m^3 + \tfrac{1}{72}m^2 + 5\tfrac{1}{4}m - 4\tfrac{1}{2} \\
\qquad \underline{-\left(-m^3 - 1\tfrac{1}{9}m^2 + 4m\right)} \\
\qquad\qquad 1\tfrac{1}{8}m^2 + 1\tfrac{1}{4}m - 4\tfrac{1}{2} \\
\qquad\qquad \underline{-\left(1\tfrac{1}{8}m^2 + 1\tfrac{1}{4}m - 4\tfrac{1}{2}\right)} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Aufgabe 040911:
Martina stellt ihrer Freundin in einem Jahr, das kein Schaltjahr ist, folgende Aufgabe:

„Wenn man zur Hälfte der Zahl der bis heute verflossenen Tage dieses Jahres ein Drittel der Zahl der restlichen Tage des Jahres addiert, erhält man die Zahl der verflossenen Tage. Den heutigen Tag habe ich zu den verflossenen gezählt.“

Geben Sie das Datum (Tag und Monat) an, an dem das geschieht!

Lösung von Steffen Polster:
a seien die verflossene Tage, b die noch übrigen Tage, wobei $a+b = 365$ gilt, da kein Schaltahr angenommen wird. Dann gilt nach Aufgabenstellung

$$\frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b = a \qquad \Rightarrow \qquad b = 1{,}5a$$

Einsetzen in die erste Gleichung ergibt $2{,}5a = 365$, also $a = 146$. Der 146. Tag des Jahres ist der 26. Mai.

Aufgabe 080911:
Eine FDJ-Versammlung wurde so stark besucht, dass genau 75 Prozent der FDJler Platz fanden. Daher wurde beschlossen, eine zweite Versammlung in einem anderen Raum zu veranstalten. Es gingen 150 der Jugendfreunde dorthin. Die übrigen blieben im ersten Raum. Dadurch wurden in diesem genau 5 Plätze frei.

Ermitteln Sie die Anzahl aller Jugendfreunde, die zu der ursprünglich angesetzten Veranstaltung erschienen waren!

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:
Nach der Aufgabenstellung ist $0{,}25 \cdot x + 5 = 150$. Also erschienen 580 Jugendliche, von denen zunächst 435 Platz fanden, bevor 150 gingen.

Aufgabe 090911:
Auf der Siegerehrung einer Kreisolympiade wurde folgendes mitgeteilt:

Genau ein Neuntel aller Teilnehmer an dieser Kreisolympiade errangen einen Preis. Genau ein Zehntel aller Teilnehmer der Kreisolympiade sind Mitglieder des Kreisklubs Junge Mathematiker. Von den Preisträgern stammen genau 75 Prozent aus dem Kreisklub. Genau 6 derjenigen Schüler, die an der Kreisolympiade teilnahmen und Mitglieder des Kreisklubs sind, erhielten keinen Preis.

Ermitteln Sie die Anzahl aller Teilnehmer an dieser Kreisolympiade!

Lösung von Steffen Polster:
T sei die Anzahl aller Teilnehmer der Kreisolympiade. Nach Aufgabenstellung sind $\frac{1}{9}$ der Teilnehmer Preisträger sowie 75%, also $\frac{3}{4}$, der Preisträger Klubmitglieder.
Einen Preis erhalten damit $\frac{1}{9} \cdot \frac{3}{4} \cdot T = \frac{1}{12} \cdot T$ der Klubmitglieder, d. h. ein Zwölftel der Teilnehmer sind folglich sowohl Preisträger als auch Klubmitglieder.

Die Anzahl der Klubmitglieder die einen Preis erhalten ($\frac{1}{12} \cdot T$) und derer die keinen Preis erhalten (6) ist gleich $\frac{1}{10}$ der Teilnehmer. Damit wird

$$\frac{1}{12} \cdot T + 6 = \frac{1}{10} \cdot T \qquad \text{und somit} \qquad T = 360$$

Die Anzahl der Teilnehmer an der Kreisolympiade war 360.

Aufgabe 180913:
In einem Zirkel Junger Mathematiker versuchen die Teilnehmer, folgende Aufgabe zu lösen:

> Die Zahl 30 soll dargestellt werden, indem dazu genau eine einziffrige Zahl genau neunmal benutzt wird, wobei noch die Zeichen der Grundrechenoperationen und Klammern erlaubt sind und die Potenzschreibweise zulässig ist.

Zeigen Sie, dass das für jede der einziffrigen Zahlen 1; 2; 3; 4, 5; 6; 7; 8 und 9 möglich ist! (Es genügt jeweils die Angabe eines Beispiels.)

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es gilt:

$$30 = (1+1)^{1+1+1+1+1} - 1 - 1 \qquad 30 = (2+2+2)^2 - 2 - 2 - 2 + 2 - 2$$

$$30 = 3^3 + 3 + 3 - 3 + 3 - 3 + 3 - 3 \qquad 30 = 4 \cdot 4 \left(\frac{4+4}{4}\right) - \frac{4}{4} - \frac{4}{4}$$

$$30 = 5 \cdot 5 + 5 + 5 - 5 + 5 - 5 + 5 - 5 \qquad 30 = 6 \cdot 6 - 6 + 6 - 6 + 6 - 6 + 6 - 6$$

$$30 = 7 + 7 + 7 + 7 + \frac{7+7}{7} + 7 - 7 \qquad 30 = 8 + 8 + 8 + 8 - \frac{8+8}{8} + 8 - 8$$

$$30 = 9 + 9 + 9 + \frac{9}{9} + \frac{9}{9} + \frac{9}{9}$$

Aufgabe 210913:
Elsa behauptet:

> „Man kann die Zahl 1981 folgendermaßen darstellen: Man schreibt die natürlichen Zahlen von 1 bis zu einer geeigneten Zahl n der Reihe nach auf und setzt zwischen je zwei dieser Zahlen jeweils genau eines der vier Operationszeichen $+$, $-$, $\cdot$, $:$. Dabei braucht nicht überall dasselbe Operationszeichen gewählt zu werden; es brauchen auch nicht alle vier Operationszeichen vorzukommen. An der Reihenfolge der natürlichen Zahlen darf nichts geändert werden; Klammern und weitere Rechenzeichen sollen nicht auftreten. Das Ergebnis der so aufgeschriebenen Rechenaufgabe ist 1981.“

Ist Elsas Behauptung wahr?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Elsas Behauptung ist wahr. Um das zu beweisen, genügt ein Beispiel. Derartige Beispiele lassen sich etwa durch folgende Überlegung zu finden:

Es gibt eine Zahl m so, dass die Summe der natürlichen Zahlen von 1 bis m die Zahle 1981 gerade übersteigt. Das ist bei $m = 63$ der Fall; denn er gilt

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 63 = \frac{63 \cdot 64}{2} = 2016$$

Wegen $2016 - 1981 = 35$ muss diese Summe um 35 verringert werden, um 1981 zu erreichen. Das kann z. B. dadurch geschehen, dass man die auf 63 folgenden 70 natürlichen Zahlen wechselweise addiert und subtrahiert, also

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 63 + 64 - 65 + 66 - 67 + - \cdots + 132 - 133 = 1981$$

bildet.

Ein anderer Weg besteht darin, dass man statt +17 die Zahl -17 einfügt, womit sich die Summe um 34 vermindert. Man erhält auf diese Weise

$$1+2+3+\cdots+17-17+18+\cdots+64=1982$$

und gelangt durch Hinzufügen von +64 und -65 auf die gewünschte Zahl.

Ein weiteres Beispiel ist:

$$1+2\cdot3\cdot4\cdot5:6+7\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11:12-13\cdot14\cdot15-16\cdot17+18\cdot19=1+20+4620-2870-272+342=1981$$

Aufgabe 230911:
Für die Multiplikation zweier natürlicher Zahlen a und b mit $5\leq a\leq 10$ und $5\leq b\leq 10$ gibt es folgende „Fingerregel“:

> Man streckt an der einen Hand so viele Finger aus, wie die erste Zahl a größer als 5 ist. Das gleiche macht man mit der anderen Hand für die zweite Zahl b. Die Gesamtzahl der ausgestreckten Finger wird mit 10 multipliziert. Die Zahl der nicht ausgestreckten Finger der einen Hand wird mit der Zahl der nicht ausgestreckten Finger der anderen Hand multipliziert und zu dem vorhergegangenen Produkt addiert. Die dabei erhaltene Summe ist das gesuchte Ergebnis $a\cdot b$.

Beweisen Sie, dass diese „Fingerregel“ für alle genannten a und b gilt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Nach der angegebenen Regel wird aus a und b die Zahl

$$z=((a-5)+(b+5))\cdot10+(10-a)(10-b)$$

berechnet. Man erhält

$$z=10a+10b-100+100-10a-10b+ab=ab$$

Damit ist die Gültigkeit der „Fingerregel“ für die genannten a und b bewiesen.

Aufgabe 280912:
Gibt es eine rationale Zahl, aus der man nach dem Bilden des Reziproken und anschließendem Verdoppeln wieder die ursprüngliche rationale Zahl erhält?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es gibt keine solche rationale Zahl. Dies kann folgendermaßen bewiesen werden:

Gäbe es eine solche Zahl x, so wäre für sie $\frac{1}{x}\cdot2=x$. Daraus würde $x^2=2$ folgen. Diese Gleichung hat aber nur die beiden Lösungen $\sqrt{2}$ und $-\sqrt{2}$, die bekanntlich beide irrational sind.

Aufgabe 320911:
Anne rechnet mit einem einfachen Taschenrechner. Als Ergebnis der Aufgabe 1 : 13 erhält sie die mit 6 Stellen nach dem Dezimalpunkt gezeigte Zahl 0.076923.

Britta meint: „Man kann den wahren Dezimalbruch finden, ohne das bekannte schriftliche Divisionsverfahren noch einmal von vorn zu beginnen; man braucht nur noch eine einfache Rechnung, z. B. mit diesem Taschenrechner, durchzuführen und muss dann ein wenig überlegen.“

Wie kann eine solche Rechnung und Überlegung verlaufen?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Man kann, ohne dass (wie bei dem Taschenrechnerergebnis für 1:13) die Möglichkeit eines Rundungsfehlers zu berücksichtigen wäre, $13 \cdot 76923 = 999999$ erhalten. Daraus folgt $1000000 - 13 \cdot 76923 = 1$ und weiter

$$1 : 13 - 0{,}076923 = 0{,}000001 : 13$$

Also muss das Divisionsverfahren für die Aufgabe 1:13, nachdem es die Anfangsziffern 0,076923 erbracht hat, wieder mit denselben aufeinanderfolgenden Ziffern fortgesetzt werden, mit denen es begonnen hat.

Das heißt: der wahre Dezimalbruch für 1:13 ist der periodisch-unendliche Dezimalbruch $0{,}\overline{076923}$.

Aufgabe 340915:
Geben Sie eine Gleichung in einer Unbekannten x so an, dass beide Seiten der Gleichung für alle reellen Zahlen x definiert sind, dass die Gleichung unendlich viele reelle Zahlen als Lösung hat, von denen aber keine ganzzahlig ist!

Zeigen Sie, dass die von Ihnen angegebene Gleichung diesen Bedingungen genügt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Zwei mögliche Beispiele sind:

I. Die Gleichung

$$\left|x - \frac{1}{4}\right| + \left|x - \frac{3}{4}\right| = \frac{1}{2}$$

Offenbar sind beide Seiten für alle reellen Zahlen x definiert. Beweis der übrigen Eigenschaften:

Für alle $x < \frac{1}{4}$ ist

$$\left|x - \frac{1}{4}\right| + \left|x - \frac{3}{4}\right| = \frac{1}{4} - x + \frac{3}{4} - x = 1 - 2x > 1 - 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

für alle x mit $\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}$ ist

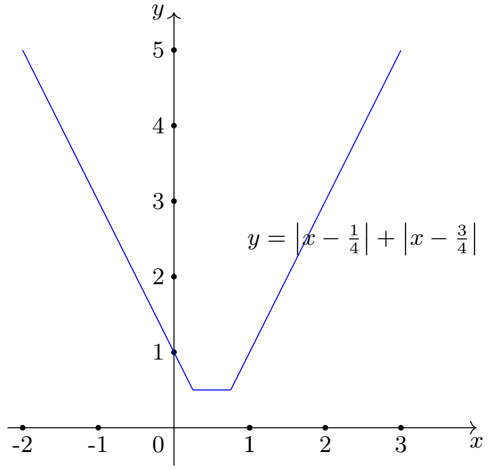
$$\left|x - \frac{1}{4}\right| + \left|x - \frac{3}{4}\right| = x - \frac{1}{4} + \frac{3}{4} - x = \frac{1}{2}$$

für alle $x > \frac{3}{4}$ ist

$$\left|x - \frac{1}{4}\right| + \left|x - \frac{3}{4}\right| = x - \frac{1}{4} + x - \frac{3}{4} = 2x - 1 > 2 \cdot \frac{3}{4} - 1 = \frac{1}{2}$$

Also sind genau alle x mit $\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}$ Lösung der Gleichung; keine dieser Zahlen ist eine ganze Zahl.

Eine andere Nachweismöglichkeit entsteht unter Verwendung des Graphen der durch $f(x) = \left|x - \frac{1}{4}\right| + \left|x - \frac{3}{4}\right|$ definierten Funktion f (siehe Abbildung).



II. Die Gleichung $\sin x = 1$. Wieder sind beide Seiten für alle reellen Zahlen x definiert; weiter gilt:

Alle Lösungen der Gleichung sind die Zahlen

$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi = \frac{4k+1}{2}\pi \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$$

Da π irrational ist und alle $\frac{4k+1}{2}$ rational und von 0 verschieden sind, sind alle Lösungen irrational, also nicht ganzzahlig.

II Runde 2

Aufgabe 010921:
Von den gesamten Kohlenvorräten der Welt liegen etwa $\frac{3}{5}$ in der Sowjetunion, $\frac{2}{9}$ der Vorräte der UdSSR betragen die Kohlenvorräte der USA, während die restlichen Länder 5 Billionen Tonnen weniger als die UdSSR besitzen.
a) Wie groß sind die Kohlenvorräte der Sowjetunion und die der USA?
b) Wie groß sind die Vorräte der ganzen Welt?

Lösung von Christiane Behns:
Ist x die Menge der Kohlevorräte der ganzen Welt in Billionen Tonnen, so lagern in der Sowjetunion $\frac{3}{5}x$ und in den USA $\frac{2}{9} \cdot \frac{3}{5}x = \frac{2}{15}x$. Die Kohlevorräte der übrigen Länder betragen dann

$$\left(1 - \frac{3}{2} - \frac{2}{15}\right) x = \frac{3}{5}x - 5$$

Umstellen der Gleichung ergibt, dass auf der ganzen Welt $x = 15$ Billionen Tonnen lagern, davon in der Sowjetunion 9 Billionen Tonnen und in den USA 2 Billionen Tonnen Kohle.

Aufgabe 020923:
Peter macht mit Jürgen eine Wette. Er will nach einem 10000 Schritte entfernten Ort hin- und zurückgehen, bevor Jürgen 150 Murmeln in ein Körbchen gesammelt hat.
Die Murmeln sollen dabei in einer Reihe mit je einem Schritt Abstand voneinander liegen und einzeln in das Körbchen gebracht werden, das in einem Schritt Abstand vor der ersten Murmel steht. Beide Jungen sollen genau gleich schnell gehen.
Wer gewinnt die Wette? Begründen Sie die Behauptung!

Lösung von André Lanka:
Peter gewinnt. Er muss $2 \cdot 10000 = 20000$ Schritte gehen.
Jürgen dagegen muss $2 \cdot (1 + 2 + 3 + ... + 150) = 2 \cdot 75 \cdot 150 = 22650$ Schritte gehen.

Aufgabe 040922:
Der ungarische Rechenkünstler Pataki berechnet das Produkt $95 \cdot 97$ auf folgende Weise:

1) Er addiert die Faktoren. $95 + 97 = 192$

2) Er streicht die erste Stelle der Summe. 92

3) Er bildet die Differenz jedes der beiden Faktoren und der Zahl 100 und multipliziert diese beiden Zahlen miteinander. $5 \cdot 3 = 15$

4) Er schreibt das Ergebnis von (3) hinter das Ergebnis von (2) und erhält 9215.

Untersuchen Sie, ob dieses Verfahren für alle Faktoren zwischen 90 und 100 gültig ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die beiden Faktoren seien $100 - a$ und $100 - b$, wobei gilt $0 < a < 10$ und $0 < b < 10$. Dann erhält man als Produkt

$$(100 - a)(100 - b) = 10000 - 100a - 100b + ab$$

Nach der Methode von Pataki erhält man schrittweise

$$100 - a + 100 - b = 200 - a - b \tag{1}$$

Wegen der Einschränkung für a und b hat diese Zahl an der Hunderterstelle eine Eins.

$$200 - a - b - 100 = 100 - a - b \tag{2}$$
$$ab \tag{3}$$
$$100(100 - a - b) + ab = 10000 - 100a - 100b + ab.$$

Also ist das Verfahren für derartige Faktoren gültig.

Aufgabe 050921:
Man ermittle sämtliche rationalen Zahlen a und b, für die $(a + b)^3 = a^3 + b^3$ gilt.

Lösung von Manuela Kugel:
Die Gleichung

$$(a + b)^3 = a^3 + b^3$$

ist wegen

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

mit jeder der folgenden Gleichungen äquivalent:

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3$$
$$3a^2b + 3ab^2 = 3ab \cdot (a + b) = 0$$
$$ab \cdot (a + b) = 0$$

Da ein Produkt genau dann gleich Null ist, wenn mindestens einer seiner Faktoren Null ist, gilt die angegebene Gleichung genau dann, wenn mindestens eine der drei Bedingungen erfüllt ist:

a) $a = 0$, b beliebig rational,

b) $b = 0$, a beliebig rational,

c) $a = -b$, b beliebig rational.

Aufgabe 050923:
Ein Bruder sagt zu seiner Schwester:
„Als Tante Katja so alt war, wie wir beide zusammen jetzt sind, warst du so alt, wie ich jetzt bin. Aber als Tante Katja so alt war, wie du jetzt bist, da warst du . . . “

a) Wie alt war da die Schwester?
b) Wie viel mal so alt wie die Schwester ist Tante Katja jetzt?

Lösung von Matthias Lösche:
Größen: b = jetziges Alter des Bruders, s = jetziges Alter der Schwester, t = jetziges Alter der Tante.
„Als Tante Katja so alt war, wie wir beide zusammen jetzt sind, warst du so alt, wie ich jetzt bin“ bedeutet

$$s - (t - (b + s)) = b \Rightarrow t = 2s$$

„Aber als Tante Katja so alt war, wie du jetzt bist, da warst du ...“ ergibt

$$s - (t - s) = s - (2s - s) = s - s = 0$$

a) Die Schwester wurde gerade geboren.

b) Die Tante ist jetzt doppelt so alt wie die Schwester.

Aufgabe 160922:
Die Zahl $\frac{20}{21}$ soll so in zwei Summanden zerlegt werden, dass
a) die beiden Summanden Brüche mit gleichem, von 21 verschiedenem Nenner und mit unterschiedlichen Zählern sind,
b) die beiden Summanden Brüche mit gleichem Zähler und mit unterschiedlichen Nennern sind.
Dabei sollen in jedem Bruch, der als Summand auftritt, jeweils der Zähler und der Nenner natürliche Zahlen sein, die zueinander teilerfremd sind.
Geben Sie für a) und b) je ein Beispiel einer derartigen Zerlegung an, und weisen Sie nach, dass es alle verlangten Eigenschaften hat!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Die Zerlegung $\frac{20}{21} = \frac{11}{42} + \frac{29}{42}$ beispielsweise hat alle verlangten Eigenschaften.

Beweis: Die beiden Summanden haben denselben, von 21 verschiedenen Nenner 42 sowie die unterschiedlichen Zähler 11 und 29.
In $\frac{11}{42}$ sind Zähler und Nenner die teilerfremden natürlichen Zahlen 11 und 42, in $\frac{29}{42}$ die teilerfremden natürlichen Zahlen 29 und 42.

b) Die Zerlegung $\frac{20}{21} = \frac{2}{3} + \frac{2}{7}$ beispielsweise hat alle verlangten Eigenschaften.

Beweis: Die beiden Summanden haben denselben Zähler 2 sowie die unterschiedlichen Nenner 3 und 7. In $\frac{2}{3}$ sind Zähler und Nenner die teilerfremden natürlichen Zahlen 2 und 3, in $\frac{2}{7}$ die teilerfremden natürlichen Zahlen 2 und 7.

Aufgabe 170922:
Jens sagt zu Christa: „Ich kann die Zahl 30 durch einen Term darstellen, der genau dreimal die Zahl 5 und außerdem nur Zeichen von Grundrechenoperationen enthält.“
Nach kurzem Besinnen sagt Christa: “Man kann sogar für jede natürliche Zahl $n > 2$ die Zahl 30 durch einen Term darstellen, der genau n-mal die Zahl 5 und außerdem nur Zeichen von Grundrechenoperationen und Klammern enthält.“
Beweisen Sie, dass Christas Aussage wahr ist!

Lösung von cyrix:
Für $n = 3$ wählen wir $5 \cdot 5 + 5 = 30$, für $n = 4$ die Darstellung $55 - 5 \cdot 5 = 30$ und für jedes größere n ergänzen wir die Darstellung für $n - 2$ um „$+5 - 5$“, $\Box$.

Aufgabe 180922:
In einer Wiederholungsstunde über Zahlbereiche werden u. a. folgende Aussagen gemacht:
(1) Das Produkt zweier verschiedener irrationaler Zahlen ist stets wieder eine irrationale Zahl.
(2) Die Summe zweier verschiedener irrationaler Zahlen ist stets wieder eine irrationale Zahl.
(3) Die Summe einer rationalen und einer irrationalen Zahl ist stets eine irrationale Zahl.
Man entscheide von jeder dieser Aussagen, ob sie wahr oder falsch ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Zu (1): Die Zahlen $\sqrt{2}$ und die von ihr verschiedene Zahl $\sqrt{8}$ sind irrational, ihr Produkt $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = 4$ ist dagegen rational. Aussage (l) ist also falsch.
Zu (2): $\sqrt{2}$ und $-\sqrt{2}$ sind verschieden irrationale Zahlen. Ihre Summe ist 0. Das ist eine rationale Zahl. Aussage (2) ist also falsch.
Zu (3): Angenommen, es gäbe eine rationale Zahl r und eine irrationale Zahl x, deren Summe eine rationale Zahl wäre. Dann gäbe es ganze Zahlen a, b, c, d mit $b \neq 0$, $d \neq 0$ und

$$r = \frac{a}{b} \quad , \quad r + x = \frac{c}{d}$$

Daraus ergäbe sich

$$x = \frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{bc - ad}{bd}$$

also der Widerspruch, dass x rational wäre; Damit ist bewiesen, dass Aussage (3) wahr ist.
Zum Beweis von (3) kann auch statt der rechnerischen Umformung von $x = \frac{c}{d} - \frac{a}{b}$ als Satz zitiert werden, dass die Differenz zweier rationaler Zahlen stets wieder eine rationale Zahl ist. **Alternativ-Lösung von cyrix:**
Die ersten beiden Aussagen sind falsch, wie die Gegenbeispiele $\sqrt{2} \cdot (-\sqrt{2}) = -2$ und $\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0$ zeigen.
Dagegen ist die dritte Aussage wahr: Wäre die Summe $s = r + x$ aus einer irrationalen Zahl x und einer rationalen Zahl r selbst rational, dann auch $s - r = x$, was einen Widerspruch liefert.

Aufgabe 250924:
Untersuchen Sie, ob es rationale Zahlen a und b gibt, für die $\sqrt{3} = a + b\sqrt{2}$ gilt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, es gäbe derartige Zahlen a und b. Aus dieser Annahme folgte dann

$$3 = a^2 + 2ab\sqrt{2} + 2b^2 \qquad ; \qquad 2ab\sqrt{2} = 3 - a^2 - 2b^2$$

(1) Im Fall $a \neq 0, b \neq 0$ folgt weiter

$$\sqrt{2} = \frac{3 - a^2 - 2b^2}{2ab}$$

also der Widerspruch, dass $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl wäre. Daher scheidet dieser Fall aus.
(2) Im Fall $b = 0$ folgte aus $\sqrt{3} = a + b\sqrt{2}$ der Widerspruch, dass $\sqrt{3} = a$ eine rationale Zahl wäre. Also ist auch dieser Fall nicht möglich.
(3)Im fall $a = 0$ folgt $3 = 2b^2$ mit einer rationalen Zahl b, also mit $b = \frac{m}{n}$, wobei m und n natürliche Zahlen wären. Das führte auf

$$3 = 2 \cdot \frac{m^2}{n^2} \qquad ; \qquad 3n^2 = 2m^2$$

Da in der Primfaktorzerlegung der Quadratzahlen n^2 und m^2 jeder Primfaktor in gerader Anzahl vorkommt, ergäbe sich der Widerspruch, dass der Primfaktor 3 auf der linken Seite in ungerader Anzahl vorkommen müsste, auf der rechten Seite aber in gerader Anzahl.
Die Annahme hat somit in jedem Falle auf einen Widerspruch geführt; damit ist bewiesen, dass es keine rationalen Zahlen a, b mit $\sqrt{3} = a + b\sqrt{2}$ gibt.

Aufgabe 280922:
In ein Quadrat mit 4×4 Feldern seien die Zahlen von 1 bis 16 so eingetragen, dass jede der Zahlen genau einmal auftritt und dass sich bei der Addition der Zahlen in jeder der vier Zeilen, der vier Spalten und der beiden Diagonalen jeweils dieselbe Summe s ergibt („Magisches Quadrat“).
a) Beweisen Sie, dass in allen magischen Quadraten (mit den Zahlen von 1 bis 16 in 4×4 Feldern) derselbe Wert für s auftreten muss!
b) Beweisen Sie, dass in jedem magischen Quadrat von 4×4 Feldern die Summe der Zahlen in den vier Eckfeldern ebenfalls s sein muss!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Für jedes magische Quadrat, dessen Zahlen mit

a_1	a_2	a_3	a_4
b_1	b_2	b_3	b_4
c_1	c_2	c_3	c_4
d_1	d_2	d_3	d_4

bezeichnet sind, gilt:
a) Da die Summe aller Zahlen von 1 bis 16 der Wert 136 hat, muss in jeder der vier Zeilen die Summe $s = 136 : 4 = 34$ auftreten.
b) Nach den Bedingungen für ein magisches Quadrat ist

$$\begin{array}{rlrl} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = s & \text{1. Zeile} & d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = s & \text{4. Zeile} \\ -a_2 - b_2 - c_2 - d_2 = -s & \text{2. Spalte} & -a_3 - b_3 - c_3 - d_3 = -s & \text{3. Spalte} \\ a_1 + b_2 + c_3 + d_4 = s & \text{Hauptdiagonale} & d_1 + c_2 + b_3 + a_4 = s & \text{Nebendiagonale} \end{array}$$

Die Addition dieser sechs Gleichungen ergibt $2(a_1 + a_4 + d_1 + d_4) = 2s$ und damit die Behauptung.

Aufgabe 330922:
Zum Mahlen einer Getreidemenge können zwei Mahlwerke A und B eingesetzt werden. Jedes Mahlwerk bewältigt in gleichen Zeiten gleiche Mengen.
Wenn man zunächst 8 Stunden lang nur mit dem Mahlwerk A mahlen würde und anschließend nur mit B, so würde B noch genau 18 Stunden benötigen, bis die gesamte Getreidemenge bewältigt ist.
Würde aber zunächst 10 Stunden lang nur mit A gemahlen und anschließend nur mit B, so würde B noch genau 15 Stunden benötigen, bis die gesamte Menge bewältigt ist.
Wie lange wird es dauern, die gesamte Menge zu bewältigen, wenn A und B von Anfang an zusammen eingesetzt werden?

Lösung von Steffen Polster:
Es seien x und y die prozentualen Leistungen des Mahlwerks je Stunde Arbeitszeit. Dann ergibt sich das System

$$\frac{8}{x} + \frac{18}{y} = 1 \qquad \text{und} \qquad \frac{10}{x} + \frac{15}{y} = 1$$

mit der Lösung $x = 20, y = 30$. Arbeiten beide t Stunden zusammen, wird damit $\frac{t}{20} + \frac{t}{30} = 1$ mit der Lösung $t = 12$. Beide Mahlwerke benötigen 12 Stunden, wenn sie von Anfang an gemeinsam arbeiten.

III Runden 3 & 4

Aufgabe V10931:
Der 1945 verstorbene polnische Mathematiker Stefan Banach war im Jahre x^2 gerade x Jahre alt. Wann ist er geboren?

Lösung von StrgAltEntf:
Die zwei größten Quadratzahlen bis 1945 sind $1936 = 44^2$ und $1849 = 43$.
Für $x = 44$ wäre Banach $1936 - 44 = 1892$ geboren worden, für $x = 43$ ergäbe sich $1849 - 43 = 1806$.
Banach wäre im zweiten Fall 139 Jahre alt geworden, d. h. diese Lösung entfällt.
Stefan Banach war 1936 44 Jahre alt.

Aufgabe 020932:
Eine Aufgabe aus dem Jahre 1494:
Oben auf einem Baum, der 60 Ellen hoch ist, sitzt eine Maus, unten auf der Erde eine Katze. Die Maus klettert jeden Tag $\frac{1}{2}$ Elle herunter und in der Nacht wieder $\frac{1}{6}$ Elle in die Höhe. Die Katze klettert jeden Tag 1 Elle hinauf und in der Nacht $\frac{1}{4}$ 4 hinunter.
Nach wie viel Tagen erreicht die Katze die Maus?

Lösung von André Lanka:
Sei x die Anzahl der Tage. Im Verlauf eines Tages (mit der Nacht) geht die Maus auf die Katze $\frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ Ellen zu.
Gleichzeitig nähert sich die Katze $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ Ellen. Insgesamt kommen sich Katze und Maus $\frac{13}{12}$ Ellen näher. Das ist aber nur bei den ersten $x-1$ Tagen so. Am letzten Tag darf die Nacht nicht mit eingerechnet werden.
An diesem letzten Tag geht die Maus auf die Katze $\frac{1}{2}$ Elle zu und die Katze auf die Maus 1 Elle. Daher muss gelten

$$\frac{13}{12}(x-a) + \frac{3}{2} \geq 60$$

was für $x \geq 55$ wahr ist. Am 55. Tag erreicht die Katze die Maus.

Aufgabe 030933:
Welche Punkte $P(x;0)$ sind von dem Punkt $P_1(a;0)$ doppelt so weit entfernt wie von $P_2(b;0)$? Bestimmen Sie die Abszissen dieser Punkte! $(b > a)$

Lösung von Korinna Grabski:
Es gilt: $|P_1P| = 2 \cdot |P_2P|$ sowie $|x-a| = 2 \cdot |x-b|$

1. Fall: $x \leq a < b$ tritt nicht auf, da P weiter von P_1 entfernt sein soll als von P_2.
2. Fall: $a \leq x \leq b$: $x - a = 2 \cdot (b-x) \Rightarrow x = a + (b-a) \cdot \frac{2}{3}$
3. Fall: $a < b \leq x$: $x - a = 2 \cdot (x-b) \Rightarrow x = 2 \cdot b - a$

Die Punkte $(a + \frac{2}{3}(b-a);0)$ und $(2 \cdot b - a;0)$ sind von dem Punkt $P_1(a;0)$ doppelt so weit entfernt wie von $P_2(b;0)$.

Aufgabe 040931:
Zwei Betriebe A und B übernahmen die Herstellung von Ersatzteilen für Traktoren. Die Arbeit sollte in 12 Tagen ausgeführt werden. Zwei Tage nach dem Beginn der Arbeiten, die in beiden Betrieben gleichzeitig begannen, wurden im Werk A umfangreiche Reparaturen durchgeführt, so dass es für die Fortführung der Arbeiten ausfiel.
In wie viel Tagen kann das Werk B allein den Auftrag abschließen, wenn seine Kapazität $66\frac{2}{3}\%$ von der des Werkes A beträgt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die auf den Auftrag bezogenen Tagesleistungen der beiden Betriebe seinen a und b, die herzustellende Gesamtmenge sei p. Dann gilt $12(a+b) = p$.
Die restlichen fünf Sechstel soll das Werk B in x Tagen schaffen. Da $a = 1{,}5b$ ist, gilt $12 \cdot 1{,}5b + 12b = p$. Daraus folgt $30b = p$.
Das heißt: Werk B hätte allein den Auftrag in 30 Tagen ausführen können. Die restlichen fünf Sechstel schafft es also in 25 Tagen. Die benötigten Teile stehen 27 Tage nach dem Beginn der Arbeiten in beiden Werken zur Verfügung.

Aufgabe 040932:
Die Glieder der folgenden Summe sind nach einer bestimmten Gesetzmäßigkeit gebildet.
Suchen Sie diese Gesetzmäßigkeit, und berechnen Sie x möglichst einfach!

$$x = \frac{6}{5\cdot 7} + \frac{6}{7\cdot 9} + \frac{6}{9\cdot 11} + \frac{6}{11\cdot 13} + ... + \frac{6}{31\cdot 33}$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Man klammert zunächst 3 aus. Jeder der Summanden von der Form $\frac{2}{a(a+2)}$ lässt sich als Differenz zweier Brüche schreiben:

$$\frac{2}{a(a+2)} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a+2}$$

Daher lautet die zu berechnende Summe

$$x = 3\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} \pm ... - \frac{1}{31} + \frac{1}{31} - \frac{1}{33}\right) = 3\cdot\frac{28}{165} = \frac{28}{55}$$

Aufgabe 050934:
Man ermittle für die reellen Zahlen a und b, $a \neq 0$, die dem Betrag nach kleinere Lösung der Gleichung

$$x^2 + 2ax - b^2 = 0$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die angegebene Gleichung hat die beiden Wurzeln

$$x_1 = -a + \sqrt{a^2+b^2} \qquad ; \qquad x_2 = -a - \sqrt{a^2+b^2}$$

Daraus folgt $|x_2| > |x_1|$ für $a > 0$ und $|x_1| > |x_2|$ für $a < 0$.

Aufgabe 050936:
Eine Mutter stellt ihren drei Kindern Jürgen, Renate und Christine eine Schüssel mit Kirschen auf den Tisch mit dem Bemerken, dass sich jeder nach der Rückkehr ein Drittel der Kirschen nehmen möge.
Jürgen, der als erster nach Hause kommt, nimmt sich, da die Zahl der Kirschen nicht durch 3 teilbar ist, zunächst eine Kirsche und dann von den Restlichen den dritten Teil.
Als Renate heimkommt, meint sie, die erste zu sein. Sie nimmt sich, da die Zahl der Kirschen nicht durch drei teilbar ist, zunächst zwei Kirschen und von den Übrigen den dritten Teil.
Auch Christine glaubt, als sie heimkehrt, erste zu sein, und nimmt sich den dritten Teil der in der Schüssel befindlichen Kirschen.
Die Mutter stellt danach fest, das insgesamt 42 Kirschen gegessen wurden.
Wie viel Kirschen waren anfangs in der Schüssel?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Bezeichnet man die ursprünglich vorhandene Anzahl Kirschen mit x, so kann man folgende Aufstellung machen: Jürgen nimmt

$$1 + \frac{x-1}{3} = \frac{x+2}{3}$$

es verbleiben

$$x - \frac{x+2}{3} = \frac{2x-2}{3}$$

Renate nimmt

$$2 + \left(\frac{2x-2}{3} - 2\right)\cdot\frac{1}{3} = \frac{2x+10}{9}$$

es verbleiben

$$\frac{2x-2}{3}-\frac{2x+10}{9}=\frac{4x-16}{9}$$

Christine nimmt

$$\frac{4x-16}{9}\cdot\frac{1}{3}=\frac{4x-16}{27}$$

es verbleiben

$$\frac{4x-16}{9}-\frac{4x-16}{27}=\frac{8x-32}{27}$$

Laut Aufgabe gilt

$$x-\frac{8x-32}{27}=42$$

und somit $x = 58$. Es befanden sich anfangs 58 Kirschen in der Schüssel.

Aufgabe 090933:
Für eine bestimmte Arbeit benötigt A genau m-mal so lange Zeit wie B und C zusammen; B benötigt genau n-mal so lange wie C und A zusammen und C genau p-mal so lange wie A und B zusammen. Berechnen Sie p in Abhängigkeit von m und n!

Lösung von cyrix:
Wir betrachten die Leistungen a, b und c von A, B und C. Dann gilt nach Aufgabenstellung

$$a=\frac{1}{m}(b+c);\qquad b=\frac{1}{n}(a+c);\qquad c=\frac{1}{p}(a+b)$$

Die erste Gleichung ist äquivalent zu $c = am - b$, die zweite zu $c = bn - a$. Insbesondere ist also $am - b = bn - a$ bzw. $(m + 1)a = (n + 1)b$, also

$$b=\frac{m+1}{n+1}\cdot a\qquad\text{und}\qquad c=am-b=\frac{mn-1}{n+1}\cdot a$$

Ist $mn - 1 = 0$, also $c = 0$, dann leistet C keine Arbeit und also ist p nicht definiert. Andernfalls können wir im Folgenden durch $c \neq 0$ dividieren.
Mit der dritten Gleichung erhalten wir schließlich durch Einsetzen

$$p=\frac{a+b}{c}=\frac{\frac{n+1+m+1}{n+1}\cdot a}{\frac{mn-1}{n+1}\cdot a}=\frac{m+n+2}{mn-1}$$

Aufgabe 240934:
Bei einer Diskussion in der mathematischen Arbeitsgemeinschaft berichtet Norbert, er habe eine Quadratzahl $n^2 > 1$ als Summe von n natürlichen Zahlen dargestellt, von denen keine zwei einander gleich waren.
Anke meint: „Es gibt sogar unendlich viele Quadratzahlen $n^2 > 1$, die jeweils als Summe von n natürlichen Zahlen darstellbar sind, unter denen sich keine zwei gleichen befinden.“
Bernd fragt: „Gibt es auch Quadratzahlen $n^2 > 1$, die sich als Summe von $2n$ natürlichen Zahlen darstellen lassen, unter denen es keine zwei gleichen gibt?“
a) Beweise Ankes Aussage!
b) Beantworte Bernds Frage!

Lösung von cyrix:
a) Die Aussage gilt für jede natürliche Zahl $n > 1$, da $n^2 = 1 + 3 + \cdots + (2n - 1)$ die Summe der ersten n ungeraden natürlichen Zahlen ist. (Dies stimmt offensichtlich für $n = 1$; und wenn es für n wahr ist, dann wegen

$$(n+1)^2=n^2+2n+1=n^2+(2n+1)=1+3+\cdots+(2n-1)+(2n+1)$$

auch für $n+1$, also für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$.)

b) Solche Quadratzahlen $n^2 > 1$ kann es nicht geben, da die Summe von $2n$ paarweise verschiedenen positiven ganzen Zahlen mindestens so groß ist wie die Summe der kleinsten $2n$ positiven ganzen Zahlen, also

$$0 + 1 + \cdots + (2n-1) = \frac{(2n-1) \cdot 2n}{2} = n \cdot (2n-1) > n^2$$

für $2n - 1 > n$, also $n > 1$.

Aufgabe 250936:
a) Ist durch den Term

$$z = \sqrt{192 + 96 \cdot \sqrt{3}} + \sqrt{192 - 96 \cdot \sqrt{3}}$$

eine Zahl definiert?
b) Wenn dies der Fall ist, ist z rational?

Lösung von cyrix:
a) Es ist $192 - 96\sqrt{3} = 96 \cdot (2 - \sqrt{3}) > 0$, da $2 = \sqrt{4} > \sqrt{3}$, sodass z eine reelle Zahl beschreibt.
b) Es ist

$$z = \sqrt{16 \cdot (12 + 6\sqrt{3})} + \sqrt{16 \cdot (12 - 6\sqrt{3})} = 4 \cdot (\sqrt{12 + 6\sqrt{3}} + \sqrt{12 - 6\sqrt{3}})$$

genau dann rational, wenn es $0 \leq x := \frac{z}{4} = \sqrt{12 + 6\sqrt{3}} + \sqrt{12 - 6\sqrt{3}}$ auch ist. Es ist

$$x^2 = (12 + 6\sqrt{3}) + 2\sqrt{(12 + 6\sqrt{3}) \cdot (12 - 6\sqrt{3})} + (12 - 6\sqrt{3}) = 24 + 2\sqrt{144 - 36 \cdot 3} =$$

$$= 24 + 2\sqrt{36} = 24 + 2 \cdot 6 = 36 \qquad \text{also} \qquad x = 6 \text{ und } z = 24 \in \mathbb{Q}$$

Aufgabe 260934:
Beweisen Sie folgenden Satz:
Wenn a und b zwei von 0 verschiedene natürliche Zahlen sind, die nicht beide Quadratzahlen sind und für die $\frac{a}{b}$ ein so weit wie möglich gekürzter Bruch ist, dann ist $\sqrt{\frac{a}{b}}$ eine irrationale Zahl.

Lösung von cyrix:
Wir nehmen indirekt an, dass $\sqrt{\frac{a}{b}}$ eine rationale Zahl ist. Dann existieren teilerfremde positive ganze Zahlen p und q mit $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{p}{q}$, da $a > 0$ und $b > 0$ sind.
Nach Quadrieren und Beseitigen der Nenner folgt $aq^2 = bp^2$. Da p und q teilerfremd sind, ist auch $\text{ggT}(p^2,q^2) = 1$, also wegen $p^2 | bp^2$ und damit $p^2 | aq^2$ auch $p^2 | a$. Damit gibt es eine positive ganze Zahl c mit $a = c \cdot p^2$.
Analog folgert man auch die Existenz einer positiven ganzen Zahl d mit $b = d \cdot q^2$. Setzt man dies ein, so ergibt sich $c \cdot p^2 q^2 = d \cdot p^2 q^2$, also $c = d$. Dann jedoch sind a und b beide durch c teilbar, sodass der Bruch $\frac{a}{b}$ mit diesem Zähler und Nenner nur genau dann schon so weit wie möglich gekürzt war, wenn $c = 1$ ist. Dann jedoch sind sowohl $a = p^2$ als auch $b = q^2$ Quadratzahlen, was ein Widerspruch zur Voraussetzung aus der Aufgabenstellung ist.
Demzufolge kann $\sqrt{\frac{a}{b}}$ nicht rational, muss also irrational sein, $\square$.

Aufgabe 300932:
Man ermittle alle Darstellungen der Zahl 1991 als Summe von mindestens drei aufeinanderfolgenden positiven natürlichen Zahlen.

Lösung von cyrix:
Es ist $1991 = 1001 + 990 = 11 \cdot (91 + 90) = 11 \cdot 181$, wobei 11 und 181 Primzahlen sind. Damit hat 1991 genau die vier Teiler 1, 11, 181 und 1991.
Es sei $n \geq 3$ die Anzahl der aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, deren Summe 1991 ergibt.

Fall 1: Es ist $n = 2m + 1$ eine ungerade Zahl. Sei $a - m$ der kleinste Summand. Dann lauten die weiteren also $a - (m-1), a - (m-2), \ldots, a-1, a, a+1, \ldots, a + (m-1), a+m$ und wir erhalten

$$1991 = (a-m) + (a - (m-1)) + \cdots + (a-1) + a + (a+1) + \cdots + (a + (m-1)) + (a+m) = (2m+1) \cdot a$$

Also müssen $n = 2m+1$ und a Teiler von 1991 mit $0 < a - m = \frac{1991}{n} - \frac{n-1}{2}$ sein. Dies schließt $n = 1991$ und $n = 181$ aus; $n = 1$ fällt wegen $n \geq 3$ weg, sodass nur $n = 11$ und damit $a = 181$ verbleibt. Wir erhalten

$$1991 = 176 + 177 + 178 + 179 + 180 + 181 + 182 + 183 + 184 + 185 + 186$$

Fall 2: Es ist $n = 2m$ eine gerade Zahl mit $m \geq 2$. Sei $a - m$ der kleinste Summand. Dann lauten die weiteren $a - (m-1), \ldots, a + (m-1)$, sodass wir

$$1991 = (a-m) + (a - (m-1)) + \cdots + (a + (m-1)) = 2m \cdot a - m = m \cdot (2a - 1)$$

erhalten. Diesmal müssen m und $2a - 1$ Teiler und Gegenteiler von 1991 sein, sodass $2a = \frac{1991}{m} + 1 = \frac{1991+m}{m}$ und damit $a = \frac{1991+m}{2m}$ gilt.
Wieder muss $0 < a - m = \frac{1991+m-2m^2}{2m}$, also $2m^2 - m < 1991$ gelten. Dies schließt $m = 1991$ und $m = 181$ aus, während $m = 1$ wegen $m \geq 2$ ausgeschlossen ist. Es verbleibt als einzige Lösung $m = 11$, woraus $2a - 1 = 181$ und $a = 91$ folgt. Wir erhalten die Darstellung

$$1991 = 80 + 81 + \cdots + 100 + 101.$$

Aufgabe 310932:
In einer Sammlung von Kuriositäten soll sich ein Gefäß mit folgender Aufschrift befunden haben:

Fünf Strich Zwei Null als Maß passt in mich, nach der ersten Ziffer lies „durch“ für den Strich! Oder dreh’ um, Null Zwei Fünf findest du, nach der ersten Ziffer ein Komma füg’ zu!

In der Tat ist $\frac{5}{20} = 0{,}25$.
Gibt es noch andere Zusammenstellungen von drei Ziffern, bei denen die Vorschrift, in gleicher bzw. in umgekehrter Reihenfolge jeweils nach der ersten Ziffer den Divisionsstrich bzw. das Dezimalkomma zu schreiben, auf zwei einander gleiche Zahlenwerte führt?

Lösung von cyrix:
Es seien a, b und c die drei Ziffern. Es ist also die Gleichung $\frac{a}{10b+c} = c + \frac{10b+a}{100}$ zu lösen.

Fall 1: $b = 0$.
Dann reduziert sich die Gleichung auf $\frac{a}{c} = c + \frac{a}{100}$ bzw. nach Multiplikation mit $c \neq 0$ auf $a = c^2 + \frac{ac}{100}$. Da auf der linken Seite eine ganze Zahl steht, muss auch die rechte Seite eine solche sein, also ac durch 100 teilbar. Wegen $0 \leq a, c < 10$ ist $0 \leq ac < 100$, sodass $ac = 0$ und wegen $c \neq 0$ (sonst wäre der Bruch $\frac{a}{c}$ nicht definiert) schließlich $a = 0$, aber daraus nach Einsetzen dann auch wieder $c = 0$ folgen würde, was ein Widerspruch ist, sodass es in diesem Fall keine Lösung gibt.

Fall 2: $b > 0$.
Dann ist $10b + c \geq 10 > a$, also $0 \leq \frac{a}{10b+c} < 1$. Da wegen $0 < 10b + a \leq 99 < 100$ auch $0 < \frac{10b+a}{100} < 1$ gilt und c eine nicht-negative ganze Zahl ist, ist c der Vorkomma-Anteil von $c + \frac{10b+a}{100}$, also wegen $\frac{a}{10b+c} = c + \frac{10b+a}{100}$ und $0 < \frac{10b+a}{100} < 1$ schließlich $c = 0$.

Dadurch vereinfacht sich die zu betrachtende Gleichung auf $\frac{a}{10b} = \frac{a+10b}{100}$ bzw. nach Multiplikation mit $100b$ auf $10a = ab + 10b^2$. Dabei kann a nicht null sein, da sonst $0 = 10 \cdot b^2$ folgen würde, was ein Widerspruch zur Fallannahme $b > 0$ wäre. Also sind sowohl a als auch b positiv, woraus $ab > 0$ und $10a > 10b^2$ bzw. $a > b^2$ folgt. Dies ist aber für $b \geq 3$ wegen $a \leq 9$ nicht möglich, sodass $b \in \{1,2\}$ folgt.

Fall 2.1: Es ist $b = 1$. Dann muss $10a = a + 10$ bzw. $9a = 10$ gelten, was keine Lösung in ganzen Zahlen hat.

Fall 2.2: Es ist $b = 2$. Dann muss $10a = 2a + 40$ bzw. $8a = 40$, also $a = 5$ gelten. Tatsächlich ist also das schon in der Aufgabenstellung genannte Tripel $(a,b,c) = (5,2,0)$ das einzig möglich.

Aufgabe 310935:
Man ermittle und zeichne in einem x,y-Koordinatensystem alle diejenigen Punkte, deren Koordinaten $(x;y)$ die Gleichung $|x+y| + |x-y| = 4$ erfüllen.

Lösung von cyrix:
Durch eine Punktspiegelung am Koordinatenursprung bzw. äquivalent einer Drehung um diesen um 180° geht jeder Punkt $(x_P;y_P)$ in den Punkt $(-x_P;-y_P)$ über. Erfüllt der erste Punkt die Bedingung, dann aufgrund der Beträge auch der zweite, und umgekehrt. Es genügt also die Figur im Bereich $x \geq 0$ zu konstruieren und sie dann durch diese Punktspiegelung bzw. Drehung fortzusetzen, sodass wir o. B. d. A. $x \geq 0$ annehmen können.

Weiterhin geht durch Spiegelung an der x-Achse jeder Punkt $(x_P;y_P)$ in den Punkt $(x_P;-y_P)$ über. Erfüllt der erste Punkt die Bedingung $|x_P+y_P| + |x_P-y_P| = 4$, dann wegen

$$|x_P - y_P| + |x_P + y_P| = |x_P + y_P| + |x_P - y_P| = 4$$

auch der zweite, und umgekehrt. Wir können also o. B. d. A. auch $y \geq 0$ annehmen und dann die Figur durch Spiegelung an der x-Achse fortsetzen.

Schließlich geht durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden des ersten Quadranten jeder Punkt $(x_P;y_P)$ in den Punkt $(y_P;x_P)$ über. Erfüllt der erste Punkt die Bedingung, dann aufgrund

$$|y_P + x_P| + |y_P - x_P| = |x_P + y_P| + |x_P - y_P|$$

auch der zweite, und umgekehrt. Wir können also o. B. d. A. $x \leq y$ annehmen und dann die Figur durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden des ersten Quadranten fortsetzen.

Zusammen haben wir also nun folgende Annahmen, die wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit treffen konnten: $0 \leq x \leq y$. Dann jedoch sind $x+y$ und $-(x-y)$ stets nichtnegativ, sodass die Gleichung übergeht in $(x+y) + (y-x) = 4$ bzw. $y = 2$. Zu zeichnen ist also der Abschnitt der Parallelen zur x-Achse durch $(0;2)$, für welchen die x-Koordinaten der auf ihm liegenden Punkte nichtnegativ und ≤ 2 sind, also die Strecke vom Punkt $(0;2)$ zum Punkt $(2;2)$.

Durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden des ersten Quadranten erhält man die zusätzliche Strecke vom Punkt $(2;2)$ zum Punkt $(2;0)$. Durch Spiegelung an der x-Achse setzt sich diese Strecke bis zum Punkt $(2;-2)$ fort und man erhält als Spiegelung der ersten Teilstrecke noch die Strecke zwischen den Punkten $(2;-2)$ und $(0;-2)$. Die Punktspiegelung/ Drehung um den Koordinatenursprung schließlich ergänzt die Figur, sodass man abschließend genau das Quadrat (bzw. genauer: dessen Rand) mit den Eckpunkten $(\pm 2;\pm 2)$ als gesuchte Lösungsmenge erhält.

Aufgabe 330931:
Beweisen Sie, dass es unendlich viele Stammbrüche gibt, die sich als Summe zweier voneinander verschiedener Stammbrüche darstellen lassen!
Hinweis: Ein Bruch heißt genau dann ein Stammbruch, wenn sein Zähler 1 lautet und sein Nenner eine natürliche Zahl ist.

Lösung von Steffen Polster:
Es sei $n \neq 0$ eine natürliche Zahl. Wir betrachten:

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n(n-1)} = \frac{1}{n(n+1)}$$

Stellt man diese Gleichung um

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}$$

so erhält man für jedes $n > 0$ eine Darstellung für den Stammbruch $\frac{1}{n}$ als Summe zweier verschiedener Stammbrüche, also das Gesuchte.

Aufgabe 330945:
Bei Verwendung eines kartesischen Koordinatensystems werde ein Punkt der Ebene „rational“ genannt, wenn seine beiden Koordinaten rationale Zahlen sind; er werde „irrational“ genannt, wenn seine beiden Koordinaten irrationale Zahlen sind; er werde „gemischt“ genannt, wenn eine seiner Koordinaten rational und die andere irrational ist.
a) Gibt es in der Ebene Geraden, die nur Punkte einer Sorte enthalten?
Ermitteln Sie die Antwort auf diese Frage für jede der drei Sorten „rational“, „irrational“, „gemischt“!
b) Gibt es in der Ebene Geraden, in denen aus genau zwei Sorten (mindestens) je ein Punkt enthalten ist?
Ermitteln Sie die Antwort auf diese Frage für jede Zusammenstellung von zwei der drei Sorten!
c) Gibt es in der Ebene Geraden, in denen aus jeder der drei Sorten (mindestens) je ein Punkt enthalten ist?

Lösung von cyrix:
a) Es kann keine Gerade geben, die nur aus rationalen oder irrationalen Punkten besteht: Jede Gerade, die nicht parallel zur y-Achse verläuft, enthält für jede reelle Zahl x einen Punkt mit dieser x-Koordinate, also insbesondere Punkte mit rationaler und Punkte mit irrationaler x-Koordinate. Und für jede Parallele zu y-Achse gilt dieses Argument entsprechend mit den y-Koordinaten.

Auch kann keine Gerade nur gemischte Punkte enthalten: Gäbe es eine solche, so kann sie nicht parallel zur x-Achse verlaufen, denn sonst wäre entweder für alle Punkte auf dieser Geraden die y-Koordinate rational, oder für alle irrational, während sowohl Punkte mit rationaler als auch mit irrationaler x-Koordinate auf ihr liegen, also auf jeden Fall auch ein rationaler bzw. ein irrationaler Punkt.

Analog schließt man aus, dass es sich um eine Gerade handelt, die parallel zur y-Achse liegt. Für jede sonstige Gerade aber durchlaufen sowohl die x- als auch die y-Koordinaten der auf ihr liegenden Punkte alle reellen Zahlen, wobei jede nur genau einmal (als x- und einmal als y-Koordinate) angenommen. Lägen auf ihr nur gemischte Punkte, so müsste jeder Punkt mit irrationaler x-Koordinate eine rationale y-Koordinate besitzen, sodass es mindestens so viele rationale wie irrationale reelle Zahlen geben müsste. Tatsächlich sind aber die irrationalen Zahlen überabzählbar, während die rationalen nur abzählbar sind, was ein Widerspruch zur gerade gewonnenen Feststellung ist. Also gibt es keine Gerade, die nur aus gemischten Punkten besteht.

b) Für jede Kombination gibt es solche Geraden:
Auf der Geraden $y = 0$ liegen ausschließlich rationale Punkte (die mit rationaler x-Koordinate) und gemischte (die mit irrationaler x-Koordinate). Auf der Geraden $y = \sqrt{2}$ liegen ausschließlich irrationale Punkte (die mit irrationaler x-Koordinate) und gemischte (die mit rationaler x-Koordinate). Und auf der Geraden $y = x$ liegen ausschließlich rationale Punkte (die mit rationaler x-Koordinate) und irrationale (die mit irrationaler x-Koordinate).

c) Auch solche Geraden gibt es, z. B. $y = \sqrt{2} \cdot x$. Auf dieser Geraden liegt der rationale Punkt (0,0), der gemischte Punkt $(1,\sqrt{2})$ und der irrationale Punkt $(\sqrt{3}, \sqrt{6})$.

Aufgabe 340933:
Berechnen Sie die Zahl

$$123456785 \cdot 123456787 \cdot 123456788 \cdot 123456796 - 123456782 \cdot 123456790 \cdot 123456791 \cdot 123456793$$

ohne die Zahlenwerte der beiden Produkte einzeln zu berechnen!

Lösung von cyrix:
Mit $n := 123456789$ ist also die Differenz

$$D := (n-4)\cdot(n-2)\cdot(n-1)\cdot(n+7) - (n-7)\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+4)$$

zu berechnen. Dabei ergeben sich beim Ausmultiplizieren der Produkte jeweils gleiche Vorzeichen bei den Termen mit geraden Exponenten von n und verschiedene bei ungeraden Exponenten von n. Es ergibt sich also

$$= 2n^3 \cdot (-4-2-1+7) + 2n \cdot (-8+56+28+14) = 180n = 22.222.222.020$$

VI.II Bewegungs- & Verhältnis-Gleichungen

I Runde 1

Aufgabe V00906:
Wie tief taucht ein Würfel ($a = 30$ mm) aus Eisen ($\gamma_{\text{Fe}} = 7{,}5$ p·cm^{-3}) in Quecksilber ($\gamma_{\text{Hg}} = 13{,}6$ p·cm^{-3}) ein?

Lösung von Steffen Polster:
Es gilt für die Eintauchtiefe h des Körpers

$$\gamma_1 : \gamma_2 = h_{\text{Eintauchtiefe}} : h_{\text{Körper}}$$

Einsetzen der Werte ergibt $h_{\text{Eintauchtiefe}} \approx 16{,}54$, d. h. der Würfel taucht etwa 165 mm ein.

Aufgabe V10911:
Das neue Turboprop-Flugzeug der Deutschen Lufthansa vom Typ IL 18 fliegt um 8.05 Uhr in Berlin-Schönefeld ab und landet um 13.00 Uhr in Moskau. Der Rückflug beginnt um 14.55 Uhr und endet am 16.10 Uhr (beachte: 12.00 Uhr Mitteleuropäische Zeit entspricht 14.00 Uhr Moskauer Zeit).
a) Welche Durchschnittsgeschwindigkeit erreicht die IL 18 auf dem Hin- bzw. Rückflug?
b) Wie hoch ist die durchschnittliche Windgeschwindigkeit, wenn man annimmt, dass das Flugzeug auf dem Hinflug mit dem Winde, auf dem Rückflug aber gegen den Wind flog?
Die Flugstrecke beträgt 1630 km.

Lösung von Steffen Polster:
Berechnung der Flugzeiten: $2\frac{11}{12}$ bzw. $2\frac{1}{4}$ h.
Berechnung der Fluggeschwindigkeiten: 559 bzw. 502 km·h^{-1}.
Die Windgeschwindigkeit beträgt damit rund 28,5 km·h^{-1}.

Aufgabe 010912:
In der Ballistik verwendet man häufig den Begriff „mittlere Präzision“ p_m. Nimmt man p_m als Radius eines Kreises, dann liegen in diesem Kreis etwa 20 Prozent aller Treffer. Sämtliche Treffer erfasst man mit einem Kreis, der einen etwa $4\frac{1}{2}$mal so großen Radius hat. Westliche Militärexperten rechnen z. Zt. mit einer mittleren Präzision (bei Raketen) von $p_m = 0{,}5$ Prozent der Schussweite. Später wollen sie Werte von $p_m = 0{,}1$ Prozent und in ferner Zukunft sogar $p_m = 0{,}05$ Prozent erreichen.

a) Wie groß wäre bei diesen Werten der Radius des 20 Prozent-Kreises bzw. der des alle Treffer enthaltenden Kreises, wenn die Schussweite 12500 km beträgt?

b) Welche mittlere Präzision p_m wurde von der Sowjetunion erreicht, wenn man berücksichtigt, dass der Radius des alle Treffer enthaltenden Kreises bei den im Oktober 1961 durchgeführten Versuchen kleiner als 1 km war?

Lösung von Christiane Czech:

a) Der Wert p_m gibt den Prozentwert des Verhältnisses des Radius r_{20} des 20%-Kreises zur Schussweite an. Da für den Radius r_{100} des Kreises, in dem alle Treffer landen, $r_{100} = 4\frac{1}{2}r_{20}$ gilt, haben die Kreise für die angegebenen p_m die folgenden Radien:

p_m	0,5%	0,1%	0,05%
r_{20}	62,5 km	12,5 km	6,25 km
r_{100}	281,25 km	56,25 km	28,125 km

b) Ist $r_{100} < 1km$, so ist $r_{20} = \frac{2}{9}r_{100} < \frac{2}{9}km = 0{,}222km$. Somit ist das Verhältnis von r_{20} zur Schussweite kleiner als $\frac{0{,}222km}{12500km} \approx 0{,}000018$, also $p_m < 0{,}0018\%$.

Aufgabe 010913:
Um beim Zerspanen von Metallen die Schneidfähigkeit der Werkzeuge zu erhalten, wird vielfach mit einer Emulsion aus gefettetem Mineralöl (Dichte 0,98 g/cm^3) und möglichst weichem Wasser (Dichte 1,0 g/cm^3) gekühlt. Die Mischung muss für Schneidwerkzeuge höherer Festigkeit die Dichte 0,996 g/cm^3, bei Schleifarbeiten die Dichte 0,992 g/cm^3 haben. Wie viel Liter gefettetes Mineralöl und wie viel Liter weiches Wasser braucht man für jeweils 10 Liter Emulsion?

Lösung von Christiane Czech:
Die Dichte ϱ eines Stoffes ist der Quotient aus Masse m und Volumen V einer bestimmten Menge dieses Stoffes. Da man es hier mit einer Mischung zweier Stoffe zu tun hat, muss die *Mischungsregel* beachtet werden. Danach gilt für die Dichte ϱ_E der Emulsion

$$\varrho_\mathrm{E} = \frac{\varrho_\text{Öl} \cdot V_\text{Öl} + \varrho_\mathrm{W} \cdot V_\mathrm{W}}{V_\text{Öl} + V_\mathrm{W}},$$

wobei $\varrho_\text{Öl}$, $V_\text{Öl}$ Dichte und Volumen des verwendeten Öls sowie ϱ_W, V_W Dichte und Volumen des verwendeten Wassers sind. Da nach Aufgabenstellung das Gesamtvolumen $V = V_\text{Öl} + V_\mathrm{W} = 10l = 10000cm^3$ gegeben ist, können wir in (1) $V_\text{Öl} = V - V_\mathrm{W}$ ersetzen und erhalten nach Umstellen

$$V_\mathrm{W} = \frac{\varrho_\mathrm{E} - \varrho_\text{Öl}}{\varrho_\mathrm{W} - \varrho_\text{Öl}} V.$$

Soll die Emulsion eine Dichte von 0,996 g/cm^3 haben, braucht man also 8 l Wasser und 2 l Öl. Für eine Emulsion mit einer Dichte von 0,992 g/cm^3 braucht man 6 l Wasser und 4l Öl.

Aufgabe 020911:
Für die Lagerung des Erdöls wurden im Rostocker Ölhafen Rolltanks aus der Sowjetunion aufgestellt. Ein solcher Tank hat die Form eines Zylinders mit dem Durchmesser $d = 23m$ und der Höhe $h = 21m$.

a) Berechnen Sie unter Vernachlässigung der Wanddicke das Volumen eines Tanks!

b) Wie viel Tonnen Erdöl fasst ein Rolltank (Dichte des Erdöls etwa 0,85 g/cm^3)?

c) Der in Leningrad für die DDR gebaute Tanker Leuna I hat ein Gesamtfassungsvermögen von 10200 t Erdöl. Seine vier Pumpen besitzen eine Leistung von je 250 t/h. In welcher Zeit wird der Tanker von ihnen leergepumpt?

d) Wie viel Zeit wird benötigt, um mit Hilfe dieser Pumpen einen Rolltank zu füllen?

Lösung von André Lanka:

a) $V = \frac{\pi}{4}d^2 \cdot h \approx 8725 \text{ m}^3$

b) $m = \varrho \cdot V = 0{,}85 \text{ g/cm}^3 \cdot 8725 \cdot 10^6 \text{ cm}^3 \approx 7416 \text{ t}$

c) $t = \frac{10200 \text{ t}}{4 \cdot 250 \text{ t/h}} = 10{,}2 \text{ h} = 10 \text{ h } 12 \text{ min}$

d) $t = \frac{7416 \text{ t}}{4 \cdot 250 \text{ t/h}} \approx 7{,}4 \text{ h} = 7 \text{ h } 24 \text{ min}$

Aufgabe 020912:
Im VEB Uhren- und Maschinenfabrik „Klement Gottwald“ senkte eine Jugendabteilung die Ausschussquote um 6 Prozent der Produktionsmenge, und sparte dabei fast 800 Arbeitsstunden ein. Danach betrug die Ausschussquote nur noch $\frac{2}{5}$ ihres bisherigen Wertes. Gleichzeitig entstand ein ökonomischer Nutzen von 3351,- M.

a) Wie viel Prozent der Produktionsmenge betrug der Ausschuss vorher?

b) Wie viel Prozent beträgt er jetzt?

c) Welchem Wert (in M) entspricht der Ausschuss jetzt noch?

Lösung von André Lanka:

a) Aus der Gleichung $x - 6\% = \frac{2}{5}x$ erhalten wir $\frac{3}{5}x = 6\%$. Also betrug die Ausschussquote vorher 10 %.

b) Demzufolge hat der Ausschuss jetzt einen Anteil von 4 % an der Produktionsmenge.

c) Die eingesparten 3351,- M entsprechen 6 %. Also hat der jetzt noch produzierte Ausschuss einen Wert von 2234,- M.

Aufgabe 030911:
Die erste Kosmonautin der Welt, Valentina Tereschkowa, startete mit ihrem Raumschiff Wostock 6 am 16. Juni 1963 um 10.30 Uhr und landete nach 48 Erdumkreisungen am 19. Juni 1963 um 9.20 Uhr. Die durchschnittliche Flughöhe betrug 200 km. (Mittlerer Erdradius $R = 6370$ km.)

a) Wie viel Kilometer legte die Kosmonautin auf ihrem Raumflug zurück? (Zur Vereinfachung sei angenommen, dass der Start- und Landeplatz übereinstimmten und der Flug auf einer Kreisbahn erfolgte.)

b) Wie groß war die durchschnittliche Geschwindigkeit während des Raumfluges?

Lösung von Sebastian Boesler:
a) Gegeben sind der mittlere Erdradius $R = 6370$ km, die durchschnittliche Flughöhe $h = 200$ km und die Anzahl n der Erdumkreisungen, $n = 48$. Die Umlaufbahn soll als kreisförmig angenommen werden, Start- und Landepunkt seien identisch.

Die zu ermittelnde Gesamtflugstrecke s setzt sich aus drei Teilstrecken zusammen: Der Startflugstrecke s_S zum Erreichen der Flughöhe nach dem Start, der Flugstrecke s_U, die während der Erdumkreisungen zurückgelegt wird, sowie der Landeflugstrecke s_L zum Verlassen der Flughöhe vor der Landung.

Wir wollen im folgenden vereinfachend annehmen, dass die Flughöhe bei Start und Landung senkrecht über dem Start- bzw. Landepunkt erreicht bzw. verlassen werde. Wie man schnell erkennt, gilt dann $s_S = s_L = h$.

Zur Berechnung der Strecke s_U ist es notwendig, den Umfang u des Umlaufkreises zu kennen – gilt doch offensichtlich $s_U = nu$. Der Umfang eines Kreises lässt sich aus seinem Radius r bestimmen; der Radius der Umlaufbahn ist natürlich die Summe aus Erdradius und Flughöhe, $r = R + h$.

Somit berechnet sich die Gesamtflugstrecke s wie folgt:

$$\begin{aligned} s &= s_S + s_U + s_L = h + nu + h \\ &= 2h + 2n\pi r = 2h + 2n\pi(R+h) \\ &= 2 \cdot 200 \text{ km} + 2 \cdot 48\pi(6370 \text{ km} + 200 \text{ km}) = 1982000 \text{ km} \end{aligned}$$

b) Der Flug begann am 16. Juni um 10:30 Uhr und endete am 19. Juni um 9:20 Uhr; er dauerte also 2 Tage, 22 Stunden und 50 Minuten. Die Flugzeit t beträgt somit 4250 Minuten.
Mit $s = 1982000$ km gemäß (a) ergibt sich die durchschnittliche Fluggeschwindigkeit v:

$$v = \frac{s}{t} = \frac{1982000 \text{ km}}{4250 \text{ min}} = 466\frac{\text{km}}{\text{min}} = 27980\frac{\text{km}}{\text{h}} = 7{,}77\frac{\text{km}}{\text{s}}$$

Aufgabe 030912:
Wolfgang befindet sich in einem Zug, dessen Eigengeschwindigkeit er mit 60 km/h gemessen hat. Er will die Geschwindigkeit eines entgegenkommenden Doppelstock-Gliederzuges ermitteln. Er weiß, dass dieser Doppelstock-Gliederzug einschließlich Lokomotive rund 120 m lang ist, und stoppt die Zeit, die der Zug zur Vorbeifahrt benötigt, mit genau 3,0 s.

Mit welcher Geschwindigkeit fährt der Gegenzug?

Lösung von Sebastian Boesler:
Die beiden Züge bewegen sich aufeinander zu. Insbesondere bewegen sich dabei der Punkt, an dem Wolfgang seine Messungen durchführt, und das Ende des Gegenzuges aufeinander zu und reduzieren ihren Abstand in der Zeit $t = 3{,}0s$ um $s = s_W + s_G = 120$ m, wobei s_W den Anteil der Strecke beschreibt, den Wolfgangs Zug zurücklegt, und s_W für die vom Gegenzug bewältigte Strecke steht.
Weiterhin ist die Geschwindigkeit v_W bekannt, mit der Wolfgangs Zug fährt: $v_W = 60\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Die gesuchte Geschwindigkeit v_G des Gegenzuges berechnet sich damit wie folgt:

$$v_G = \frac{s_G}{t} = \frac{s - s_W}{t} = \frac{s - v_W t}{t} = \frac{s}{t} - v_W = \frac{120 \text{ m}}{3{,}0 \text{ s}} - 60\frac{\text{km}}{\text{h}} = 84\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Aufgabe 050911:
Ein Dreher braucht zur Anfertigung eines bestimmten Werkstücks eine halbe Stunde. Da mehrere gleiche Teile anzufertigen sind, überlegt er, ob er eine Vorrichtung bauen soll, die es erlaubt, jedes solche Werkstück in 20 Minuten anzufertigen. Die Herstellung dieser Vorrichtung würde 4 Stunden dauern.

Wie groß müsste die Zahl der herzustellenden Werkstücke mindestens sein, damit der Bau der Vorrichtung eine Zeitersparnis bringen würde?

Lösung von Manuela Kugel:
Für den Bau ohne Vorrichtung werden für x Werkstücke 30 min benötigt. Für den Bau mit Vorrichtung 20 min plus der 240 min für den Bau der Vorrichtung.
Ab welcher Werkstückanzahl lohnt sich der Bau der Vorrichtung?

$$30x > 20x + 240 \rightarrow x > 24$$

Werden mehr als 24 Werkstücke hergestellt, bringt der vorherige Bau der Vorrichtung eine Zeitersparnis.

Aufgabe 120912:
Während einer GST-Übung schätzten Andreas und Frank die Länge einer Strecke. Wenn Andreas um 10 % weniger geschätzt hätte, hätte er die genaue Länge getroffen. Wenn Franks Schätzwert um 10 % höher gelegen hätte, hätte er die genaue Länge der Strecke getroffen.

Bei welcher der beiden Schätzungen ist der absolute Betrag des absoluten Fehlers geringer?

Lösung von Manuela Kugel:
Die genaue Länge der Strecke S liegt nach Andreas Schätzung A um 10% unter seinem Wert; also bei $\frac{9}{10}A = S$. Franks Schätzung F muss um 10% erhöht werden, um den genauen Wert S zu erhalten; also $\frac{11}{10}F = S$. Andreas Wert ist somit $A = \frac{10}{9}S$ und der Betrag des absoluten Fehlers $A = |\frac{10}{9}S - S| = \frac{1}{9}S$. Franks Wert ist $F = \frac{10}{11}S$ und der Betrag des absoluten Fehlers
$F = |\frac{10}{11}S - S| = \frac{1}{11}S$. Bei Franks Schätzwert ist der Betrag des absoluten Fehlers kleiner als bei Andreas Schätzwert ($\frac{1}{11}S < \frac{1}{9}S$).

Aufgabe 130912:
Jemand will aus einer Mischung, die zu 99 % aus Wasser besteht, eine neue Mischung mit einem Wasseranteil von 98 % dadurch herstellen, dass er aus der ursprünglichen Mischung Wasser entzieht.

Man ermittle, wie viel Prozent der in der ursprünglichen Mischung enthaltenen Wassermenge er ihr zu diesem Zweck insgesamt entziehen muss.

Lösung von Manuela Kugel:
Die ursprüngliche Mischung besteht am Anfang aus Wasser (w_1) und einem anderen Stoff (y). Die Gesamtmenge sei m_1, so dass sich folgende Gleichung aufstellen lässt: $m_1 = y + w_1$ (1), wobei der 99-prozentige Wasseranteil wie folgt einfließt: $w_1 = 0{,}99 \cdot m_1$ (2).

Für den Zustand nach dem Wasserentzug gilt für die veränderte Gesamtmenge m_2 bei konstantem Stoff y: $m_2 = y + w_2$ (3), wobei auch hier eine Aussage zum Wasseranteil getroffen wird: $w_2 = 0{,}98 \cdot m_2$ (4).

Gesucht wird der Anteil der entzogenen Wassermenge ($x_1 - x_2$) an der ursprünglichen Wassermenge (x_1) in Prozent. Dazu werden nun die Gleichungen (1) bis (4) genutzt. Zunächst werden (1) und (3) nach y umgestellt und gleichgesetzt und anschließend (2) und (4) genutzt: $y = m_1 - w_1 = m_2 - w_2 \Rightarrow m_1 - 0{,}99 \cdot m_1 = m_2 - 0{,}98 \cdot m_2 \Rightarrow 0{,}01 \cdot m_1 = 0{,}02 \cdot m_2$ bzw. $m_1 = 2 \cdot m_2$. Nun kann der gesuchte Anteil errechnet werden:

$$\frac{x_1 - x_2}{x_1} = \frac{0{,}99 \cdot m_1 - 0{,}98 \cdot m_2}{0{,}99 \cdot m_1} = \frac{1{,}98 \cdot m_2 - 0{,}98 \cdot m_2}{1{,}98 \cdot m_2} = \frac{m_2}{1{,}98 \cdot m_2} = \frac{1}{1{,}98} \approx 0{,}51$$

Der entzogene Anteil Wasser an der ursprünglichen Wassermenge beträgt also etwa 51%.

Aufgabe 180912:
Es seien a und b rationale Zahlen, für die folgendes gilt:

Vermindert man a um 10%, so erhält man 297.
Vergrößert man b um 10%, so erhält man 297.

Wieviel Prozent von a beträgt dann b? (Angabe des Prozentsatzes auf zwei Dezimalstellen gerundet.)

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Da 10 % von a gleich $\frac{a}{10}$ ist, gilt: $a - \frac{a}{10} = 297$, also $\frac{9}{10}a = 297$. Entsprechend gilt:

$$b + \frac{b}{10} = 297 \qquad \text{also} \qquad \frac{11}{20}b = 297 = \frac{9}{10}a$$

Daraus folgt $b = \frac{9}{11}a = 0{,}8182a$ (Dezimalbruch auf 4 Dezimalstellen gerundet); b beträgt also 81,82% von a (Prozentsatz auf 2 Dezimalstellen gerundet).

Aufgabe 300912:
Ein Betrieb hat in den letzten vier Jahren seine Produktion (jeweils gegenüber dem Vorjahr) um 8%, 11%, 9% bzw. 12% gesteigert. Peter meint, dass der Betrieb dann eine Produktionssteigerung von insgesamt 40% erreicht hat.

Weisen Sie nach, dass das nicht stimmt.

Bernd meint, der Betrieb hätte eine größere Steigerung erreicht, wenn er die Produktion viermal um 10% gesteigert hätte.

Stellen Sie fest, ob das richtig ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Dies Gesamtsteigerung errechnet sich durch Multiplikation des Anfangswertes mit der Zahlen $1{,}08 \cdot 1{,}11 \cdot 1{,}09 \cdot 1{,}12$. Wegen

$$1{,}08 \cdot 1{,}11 = 1{,}1988 > 1{,}19; \qquad 1{,}19 \cdot 1{,}09 = 1{,}2971 > 1{,}28; \qquad 1{,}29 \cdot 1{,}12 = 1{,}4448 > 1{,}4$$

ist folglich die Gesamtsteigerung größer als 40%. Daher hat Peter nicht recht.

Die Gesamtsteigerung bei viermaliger Steigerung um 10% errechnet sich durch Multiplikation des Anfangswertes mit der Zahl $1{,}1^4$. Wegen

$$1{,}08 \cdot 1{,}12 = 1{,}2096 < 1{,}21 = 1{,}1^2; \qquad 1{,}09 \cdot 1{,}11 = 1{,}2099 < 1{,}21 = 1{,}1^2 \qquad \text{also}$$

$$1{,}08 \cdot 1{,}11 \cdot 1{,}09 \cdot 1{,}12 < 1{,}1^4$$

führt eine viermalige Steigerung im 10% daher in der Tat zu einer größeren Gesamtsteigerung. Bernds Behauptung trifft also zu.

Hinweis: Mit Taschenrechnergenauigkeit ergibt sich

$$1{,}08 \cdot 1{,}11 \cdot 1{,}09 \cdot 1{,}12 \approx 1{,}463495 \qquad ; \qquad 1{,}1^4 = 1{,}4641$$

Rundet man diese Ergebnisse so, dass ganzzahlige Prozentangaben entstehen, also auf 1,46, so erhält man:

1. Die Gesamtsteigerung (bei Steigerungen um 8 %, 11 %, 9%, 12%) ist größer als 40 %. Allerdings ist der Beweis mit den so vorgenommenen Rundungsschritten nicht einwandfrei, da nicht untersucht wird, ob auch Aufrundungsschritte vorkommen.

2. Die viermalige Steigerung um 10% ergibt nur eine so wenige vergrößerte Gesamtsteigerung, dass man auch formulieren kann, sie sei „nicht wesentlich größer“, und „in diesem Sinne“ sei Bernds Behauptung nicht zutreffend.

Aufgabe 310914:
a) Eine Schule hat insgesamt 825 Schüler. Es wurde errechnet, dass während eines Schuljahres die Anzahl der Teilnehmer einer Interessengruppe um 4% ihres Anfangswertes zugenommen habe und, hiermit gleichbedeutend, die Anzahl der Nichtteilnehmer um 7% ihres Anfangswertes abgenommen habe.
Wenn das genau zutraf, wie groß war dann die Anzahl der Nichtteilnehmer zu Beginn des Schuljahres, und um welche Schülerzahl hat sie bis zum Ende des Schuljahres abgenommen?

b) Nachträglich wurde aber mitgeteilt, die Prozentangaben seien nur als Näherungswerte 4,0% bzw. 7,0% ermittelt worden, nämlich gemäß den Rundungsregeln auf eine Dezimale nach dem Komma genau gerundet.

Sind hiernach die die in a) gesuchten Anzahlen immer noch eindeutig bestimmt? Wenn das nicht der Fall ist, ermitteln Sie alle diejenigen Werte für in a) gesuchte Anzahlen, die ebenfalls auf die gerundeten Prozentangaben 4,0% und 7,0% führen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Zu Beginn der Schuljahres sei x die Anzahl der Teilnehmer, y die Anzahl der Nichtteilnehmer gewesen, Dann gilt $x + y = 825$ (1) und da die Zunahme der Teilnehmerzahl ebenso groß wie die Abnahme der Nichtteilnehmerzahl war, gilt

$$\frac{4}{100} \cdot x = \frac{7}{100} \cdot y \qquad (2)$$

Aus (1) folgt $x = 825 - y$; aus (2) folgt damit

$$4 \cdot (825 - y) = 7y \quad (3) \qquad ; \qquad 11y = 3300 \quad (4)$$

Also war die Anzahl der Nichtteilnehmer zu Beginn des Schuljahres $y = 300 \quad (5)$; sie nahm um 7 % dieses Wertes ab, d. h. um die Zahl $z = 21$.

b) Sind p und q die wahren, durch 4,0 und 7,0 angenäherten Werte, so liegt p zwischen 3,95 und 4,05 sowie q zwischen 6,95 und 7,05; ferner ist statt (3), (4), (5) nur bekannt, dass mit solchen Werten p,q

$$p \cdot (825 - y) = q \cdot y \qquad ; \qquad y = \frac{p \cdot 825}{p + q}$$

gilt. Das führt zunächst zu der Aussage, das y zwischen

$$\frac{3{,}95 \cdot 825}{4{,}05 + 7{,}05} = \frac{3258{,}75}{11{,}1} \qquad \text{und} \qquad \frac{4{,}05 \cdot 825}{3{,}95 + 6{,}95} = \frac{3341{,}25}{10{,}9} \qquad \text{und}$$

also erst recht zwischen 293,58 und 306,54 liegen und folglich eine der Zahlen

$$294, 295, ..., 306 \qquad (6)$$

sein muss. Die Anzahl $z = \frac{q}{100}y$ der Schüler, um die sich y während des Schuljahres verringert hat, liegt daher zwischen $\frac{6{,}95}{100} \cdot 294 = 20{,}433$ und $\frac{7{,}05}{100} \cdot 306 = 21{,}573$, d. h. sie ist eindeutig bestimmt und beträgt $z = 21$.

II Runde 2

Aufgabe V10921:
Der sowjetische Flieger K. Kokkinaki hat mit der einmotorigen Turbodüsenmaschine E 66 einen neuen Weltrekord aufgestellt. Er flog 100 km in 170 s.
a) Wie groß war seine mittlere Geschwindigkeit in $\frac{km}{h}$?
b) Mit welchem möglichen Fehler ist dieser Wert behaftet, wenn die Entfernungsmessung genau war, die Zeitmessung aber mit einem Fehler von ±0,5 s behaftet war?

Lösung von J. Lehmann und W. Unze:
a1) Umrechnung von t: $170s = \frac{170}{3600}\text{h}$
a2) Berechnung der mittleren Geschwindigkeit

$$v = \frac{s}{t} = \frac{100 \cdot 3600}{170} = 2117{,}6 \approx 2118$$

Die mittlere Geschwindigkeit betrug 2118 km·h^{-1}.
b1) zeitliche Abweichung nach oben: $v = \frac{100 \cdot 3600}{170{,}5} = 2111{,}4 \approx 2111$.
b2) zeitliche Abweichung nach unten: $v = \frac{100 \cdot 3600}{169{,}5} = 2123{,}9 \approx 2124$. Bei einem Zweitfehler von ±0,5 s ist der Wert der mittleren Geschwindigkeit mit einem Fehler von etwa ±6 km·h^{-1} behaftet.

Aufgabe V10922:
Gemäß unseres Siebenjahrplans wird sich die Industrieproduktion der Deutschen Demokratischen Republik stark erhöhen. Die gesamte Industrieproduktion wächst von 1958 bis 1965 um 88%. Die Produktion von Produktionsmitteln (d.s. Rohstoffe, Maschinen, Ausrüstungen für die Industrie, Landwirtschaft und Verkehr usw.) wächst um 95%, dagegen die Produktion von Konsumgütern (d.s. Güter, die für den Bedarf der Bevölkerung bestimmt sind) um 77%.
Wie viel Prozent der gesamten Industrieproduktion betrug der Anteil der Produktion von Produktionsmitteln im Jahre 1958? Wie viel Prozent wird er 1965 betragen?

Lösung von J. Lehmann und W. Unze:

	1958	1965
Gesamte Industrieproduktion	100	188
Produktion von Produktionsmitteln	x	$\frac{195}{100}x$
Produktion von Konsumgütern	y	$\frac{177}{100}y$

Gesamte Industrieproduktion = Produktion von Produktionsmitteln + Produktion von Konsumgütern

$$100 = x + y \quad (1) \qquad 100 \cdot 108 = 195 \cdot x + 177 \cdot y \quad (2)$$

Aus (I)+(II) folgt: $195x + 177(100 - x) = 18800$, d. h. $x = 61{,}1$.
Im Jahre 1958 betrug der Anteil der Produktion von Produktionsmitteln rund 61,1% der gesamten Produktion. Aus der aufgestellten Tabelle ergibt sich:
Sei p der gefragte Prozentsatz für die Produktionsmitteln im Jahre 1965, dann muss gelten:

$$188 : 100 = \frac{195}{100} \cdot 61{,}1 : p \Rightarrow p = 63{,}4$$

Im Jahre 1965 beträgt der Anteil der Produktion von Produktionsmitteln 63,4 % der gesamten industriellen Produktion.

Aufgabe 010922:
a) Ein Hanfseil von 15 mm Durchmesser verträgt eine Belastung von 175 kp, ohne zu reißen.
Welcher Länge des Seiles entspricht diese Belastung, d. h., wann reißt das Seil unter seinem eigenen Gewicht, wenn ein Seil von 1 m Länge je mm^2 Querschnitt 1 p wiegt?

b) Ein Dederonseil vom gleichen Querschnitt hält eine weitaus größere Belastung aus, nämlich 400 kp.
Welcher Länge des Seils entspricht diese Belastung, wenn ein Seil von 1 m Länge je mm^2 Querschnitt 0,8 p wiegt?

Lösung von Christiane Behns:
a) Das Hanfseil hat eine Querschnittsfläche von $A = \frac{\pi}{4}d^2 = 176{,}7$ mm^2, es wiegt also pro Meter 176,7 p. Somit kann es maximal

$$l_{max} = \frac{175000p}{176{,}7\frac{p}{m}} = 990{,}3m$$

lang sein, ohne unter seinem Eigengewicht zu reißen.

b) Für die maximale Länge des Dederonseils gilt hingegen: $l_{max} = 2829{,}4$ m.

Aufgabe 020921:
Bei dem Gruppenflug der sowjetischen Kosmonauten Andrijan Nikolajew und Pawel Popowitsch hatten die Raumschiffe Wostok III und Wostok IV zeitweilig einen Abstand von nur 6,5 km voneinander. Der Einfachheit halber sei angenommen, dass sie genau hintereinander flogen. Dabei legten sie eine Erdumrundung (41000 km) in rund 88 Minuten zurück.
Welchen Abstand müssten zwei mit einer Geschwindigkeit von 100 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ auf der Autobahn fahrende Autos haben, wenn ihr Zeitabstand der gleiche wie bei den Raumschiffen wäre?

Lösung von André Lanka:
Die beiden Raumschiffe haben eine Geschwindigkeit von

$$v = \frac{41000\text{ km}}{88\text{ min}} \cdot 60\frac{\text{min}}{\text{h}} \approx 27955\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

was einen Zeitabstand von

$$t_\Delta = \frac{6{,}5\text{ km}}{27955\frac{\text{km}}{\text{h}}} \approx 0{,}0002325\text{ h}$$

ergibt. Bei einer Geschwindigkeit von 100 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ entspricht das einer Entfernung von $0{,}0002325\text{ h} \cdot 100\frac{\text{km}}{\text{h}} = 0{,}02325\text{ km} = 23{,}25$ m.

Aufgabe 020922:
Ein Auto fährt mit einer Geschwindigkeit von 100 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Es wird gebremst.
a) In welcher Zeit kommt es zum Stehen, wenn durch die Bremsung seine Geschwindigkeit in jeder Sekunde um 5 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ abnimmt?
b) Welchen Bremsweg legt es in dieser Zeit zurück?

Lösung von André Lanka:
a) Aus der Formel $v = at$ erhält man

$$t = \frac{v}{a} = \frac{\frac{100}{3{,}5}\frac{\text{m}}{\text{s}}}{5\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \approx 5{,}56\text{s}$$

b) Das Auto legt in dieser Zeit einen Weg von $s = \frac{a}{2}t^2 \approx 77{,}3$ m zurück.

Aufgabe 040921:
In einer Abteilung eines Werkes soll ein neues, zeitsparendes Arbeitsverfahren eingeführt werden. Wenn 4 Arbeiter der Abteilung nach diesem Verfahren arbeiten, erhöht sich die Produktion um 20 Prozent.
Wenn 60 Prozent der Arbeiter der Abteilung dieses Verfahren anwenden, kann die Produktion auf das Zweieinhalbfache gesteigert werden.

a) Wie viel Arbeiter hat die Abteilung?

b) Auf wie viel Prozent würde sich die Produktion erhöhen, wenn alle Arbeiter der Abteilung nach diesem Verfahren arbeiten würden? (Alle Arbeiter der Abteilung führen die gleiche Tätigkeit aus.)

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Wenn p die Produktion der Abteilung ist, so erreichen 4 Arbeiter eine Steigerung um 0,2 p. 60 Prozent der Arbeiter erreichen eine Steigerung um 1,5 p.
Daraus folgen: 60 % = 30 Arbeiter und 100 % = 50 Arbeiter. In der Abteilung sind 50 Arbeiter tätig.

b) Falls alle Arbeiter dieser Abteilung das neue Verfahren anwenden, lässt sich die Produktion auf 350 Prozent steigern.

Aufgabe 320923:
Beim Tanken eines Oldtimers mit Zweitaktmotor, der ein Öl-Kraftstoff-Gemisch von 1 : 50 benötigt, wurden zunächst versehentlich 7 Liter Kraftstoff ohne Öl getankt.
Wieviel Liter Gemisch mit dem noch lieferbaren Verhältnis 1 : 33 müssen nun hinzugetankt werden, damit sich das richtige Mischungsverhältnis von 1 : 50 ergibt?
Die gesuchte Literzahl ist auf eine Stelle nach dem Komma genau zu ermitteln.

Lösung von cyrix:
Es sei V das Volumen der noch nachzutankenden Menge in Litern.
Dann soll also $\frac{1}{34} \cdot V = \frac{1}{51} \cdot (V+7)$ gelten, also $\left(\frac{1}{34} - \frac{1}{51}\right) \cdot V = \frac{7}{51}$.
Es ist $51 = 3 \cdot 17$ und $34 = 2 \cdot 17$, also geht die Gleichung durch Multiplikation mit $17 \cdot 6$ über in $(3-2) \cdot V = V = 14$, sodass genau (auf beliebig viele Stellen nach dem Komma) 14 Liter vom 1 : 33-Gemisch nachzutanken sind.

III Runde 3

Aufgabe 010931:
In den ersten $2\frac{1}{2}$ Jahren des Siebenjahrplans erzeugten die Stahlwerker der Sowjetunion insgesamt 113 Prozent der gesamten italienischen Stahlproduktion des Jahres 1959 über den Plan hinaus.
Jährlich wurden dabei im Durchschnitt nur 310000 t Stahl weniger zusätzlich produziert als in einem halben Jahr (1959) in Italien.
Wie viel Tonnen Stahl produzierten die Stahlwerker der Sowjetunion zusätzlich?
Wie viel Tonnen Stahl wurde 1959 in Italien produziert?

Lösung von Christiane Behns:
Ist x die italienische Stahlproduktion von 1959 in Tonnen, so wurden in der Sowjetunion in den $2\frac{1}{2}$ Jahren $1{,}13x$ Tonnen Stahl über den Plan produziert. Im einem Jahr beträgt die Überproduktion in der Sowjetunion dann $\frac{1}{2}x - 310000$ Tonnen. Also ist

$$\frac{5}{2}\left(\frac{1}{2}x - 310000\right) = \frac{113}{100}x$$

also $x \approx 6500000$. Damit wurden 1959 in Italien ca. 6,5 Millionen Tonnen Stahl produziert und in den $2\frac{1}{2}$ Jahren in der Sowjetunion $1{,}13x = 7{,}3$ Millionen Tonnen Stahl über den Plan.

Aufgabe 010932:

Kurt fährt mit der Straßenbahn eine lange gerade Straße entlang. Plötzlich sieht er seinen Freund auf gleicher Höhe in entgegengesetzter Richtung auf dieser Straße gehen. Nach einer Minute hält die Straßenbahn. Kurt steigt aus und läuft doppelt so schnell wie sein Freund, jedoch nur mit einem Viertel der Durchschnittsgeschwindigkeit der Straßenbahn hinter seinem Freund her.
Nach wie viel Minuten holt er ihn ein? Wie haben Sie das Ergebnis ermittelt?

Lösung von Eckard Specht:
Seien v_F, v_S und v_K die Geschwindigkeiten des Freundes, der Straßenbahn bzw. von Kurt. Zunächst bewegen sich Freund und Straßenbahn mit der Relativgeschwindigkeit $v_S + v_F$ auseinander.
Zum Zeitpunkt des Aussteigens nach $t = 1$ min sind beide die Strecke $s = \frac{v_S+v_F}{t}$ voneinander entfernt.
Anschließend holt Kurt seinen Freund mit der Relativgeschwindigkeit $v_K - v_F$ wieder ein.
Laut Aufgabenstellung ist ferner $v_K = 2v_F = \frac{1}{4}v_S$. Somit gilt für die zum Einholen benötigte Zeit:

$$t' = \frac{s}{v_K - v_F} = \frac{v_S + v_F}{v_K - v_F}t = \frac{8v_F + v_F}{2v_F - v_F}t = 9t = 9 \text{ min}$$

Aufgabe 020934:
Ein Schnellzug legt die 120 km lange Teilstrecke Leipzig–Riesa–Dresden mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 60 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ zurück. Infolge Bauarbeiten muss der Zug während einiger Tage die erste Hälfte der Strecke (Leipzig–Bornitz) mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 50 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ zurücklegen. Um den Zeitverlust möglichst wettzumachen, wird auf der zweiten Hälfte der Strecke (Bornitz–Dresden) die Durchschnittsgeschwindigkeit auf 70 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ erhöht.
Kommt der Zug pünktlich in Dresden an?

Lösung von André Lanka:
Wir benutzen die Gleichung $s = v \cdot t$ und erhalten für die erste Weghälfte

$$t_1 = \frac{60 \text{ km}}{50\frac{\text{km}}{\text{h}}} = \frac{6}{5} \text{ h}$$

Für die zweite Weghälfte braucht der Zug

$$t_2 = \frac{60km}{70\frac{km}{h}} = \frac{6}{7}h$$

Insgesamt ergibt das eine Fahrzeit von $\frac{6}{5}$ h $+\frac{6}{7}$ h $= \frac{72}{35}$ h. Da $\frac{72}{35} > 2$ größer als 2 ist, kommt der Zug nicht pünktlich an.

Aufgabe 060935:
Auf dem Kreis k bewegen sich der Punkt A mit der gleichförmigen Geschwindigkeit v_1 und der Punkt B mit der gleichförmigen Geschwindigkeit v_2, wobei $v1 \neq v_2$ ist.
Bewegen sich beide Punkte im gleichen Umlaufsinn (etwa im Uhrzeigersinn), so überholt der Punkt A den Punkt B jeweils nach 56 min. Bewegen sich beide Punkte in verschiedenem Umlaufsinn, so begegnen sie einander jeweils nach 8 min. Dabei verringert bzw. vergrößert sich ihr auf der Kreislinie gemessener Abstand voneinander in je 24 s um 14 m.

a) Wie lang ist der Kreisumfang?

b) Wie groß sind die Geschwindigkeiten v_1 und v_2 (in m/min)?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

a) Nach den Bedingungen der Aufgabe gilt $v_1 > v_2$. Bei der Bewegung in verschiedenem Umlaufsinn erhält man die relative Geschwindigkeit von B bezüglich A durch Addition ihrer Geschwindigkeiten. Laut Aufgabe werden bei dieser relativen Geschwindigkeit jeweils 14 m in 24 s zurückgelegt, in 8 min also
$$\frac{14 \cdot 60 \cdot 8}{24} \text{ m} = 280 \text{ m}$$
Das ist die Länge des Kreisumfangs.

b) Nach dem Gesagten ist
$$v_1 + v_2 = \frac{14 \text{ m}}{24 \text{ s}} = 35 \frac{\text{m}}{\text{min}}$$
Bewegen sich die Punkte aber in gleichem Umlaufsinn, so erhält man die relative Geschwindigkeit von B bezüglich A durch Subtraktion der kleineren Geschwindigkeit v_2 von v_1. Laut Aufgabe und nach dem Ergebnis a) ist somit
$$v_1 - v_2 = \frac{280 \text{ m}}{56 \text{ min}} = 5 \frac{\text{m}}{\text{min}}$$
Die gesuchten Geschwindigkeiten betragen also $v_1 = 20 \frac{\text{m}}{\text{min}}$ und $v_2 = 15 \frac{\text{m}}{\text{min}}$.

Aufgabe 120934:
Zwei Fußgänger A und B legten dieselbe Strecke zurück. Sie starteten zur gleichen Zeit. Ein Beobachter stellte fest:
A ging die Hälfte der Strecke mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 4 $\frac{km}{h}$, den Rest mit 5 $\frac{km}{h}$. B ging während der Hälfte der von ihm für die ganze Strecke aufgewandten Zeit mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 4 $\frac{km}{h}$, während der übrigen Zeit mit 5 $\frac{km}{h}$.
Wer von den beiden erreichte zuerst das Ziel?

Lösung von StrgAltEntf:
Wir nutzen die Beziehung Geschwindigkeit = Strecke/Zeit bzw. Zeit = Strecke/Geschwindigkeit.
d sei die Länge der gesamten Strecke.
A benötigt für die Strecke d die Zeit $t_A = \frac{d/2}{4} + \frac{d/2}{5} = \frac{9}{40}d$.
d_1, d_2 seien die Strecken, bei denen sich B mit $4\frac{km}{h}$ bzw. $5\frac{km}{h}$ bewegt. Dann ist $d_1 + d_2 = d$. Für die Strecken benötigt B die Zeiten $t_1 = \frac{d_1}{4}$ bzw. $t_2 = \frac{d_2}{5}$.
Nach Voraussetzung ist $t_1 = t_2$, also $\frac{d_1}{4} = \frac{d_2}{5}$. Zusammen mit $d_1 + d_2 = d$ folgt hieraus $d_1 = \frac{4}{9}d$, $d_2 = \frac{5}{9}d$ und somit $t_1 = t_2 = \frac{1}{9}d$. Also benötigt B die Gesamtzeit $t_B = t_1 + t_2 = \frac{2}{9}d$.
Da $\frac{9}{40} > \frac{2}{9}$, ist B zuerst am Ziel.

VI.III Ungleichungen

I Runde 1

Aufgabe 040914:
Von den natürlichen Zahlen p und q ist bekannt, dass $0 < p < q$ gilt.

a) Ordnen Sie die Zahlen 1, $\frac{p}{q}$ und $\frac{q}{p}$ der Größe nach! Beginnen Sie mit der kleinsten Zahl!

b) Stellen Sie fest, welche der beiden Zahlen $\frac{p}{q}$ und $\frac{q}{p}$ näher an 1 liegt!

Lösung von MontyPythagoras:

a) Es ist $p < q$. Teilt man durch q (erlaubt, weil $Q < 0$ ist) ergibt sich $\frac{p}{q} <$. Teilt man durch p wird $1 < \frac{q}{p}$ also
$$\Rightarrow \frac{p}{q} < 1 < \frac{q}{p}$$

b) Aus $p < q$ wird $p(q-p) < q(q-p)$. Teilt man durch pq ergibt sich

$$1 - \frac{p}{q} \quad < \quad \frac{q}{p} - 1$$

Dies bedeutet, dass der Abstand von $\frac{p}{q}$ zu Eins kleiner als der Abstand von $\frac{q}{p}$ zu Eins ist.

Aufgabe 050913:
Vergleichen Sie die beiden Zahlen!

$$A = \frac{5678901234}{6789012345} \quad \text{und} \quad B = \frac{5678901235}{6789012347}$$

Lösung von Manuela Kugel:
Setzt man den Zähler von A gleich x und den Nenner von A gleich y, so erhält man

$$A \quad = \quad \frac{x}{y} \text{ und } B = \frac{x+1}{y+2}$$

und weiter

$$A - B \quad = \quad \frac{x}{y} - \frac{x+1}{y+2} = \frac{xy + 2x - xy - y}{y(y+2)} = \frac{2x - y}{y(y+2)}.$$

Da $2x > y$ ist, folgt $2x - y > 0$ und wegen $y > 0$ weiter $A - B > 0$. Es gilt also $A > B$.

Aufgabe 220913:

a) Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen x, für die der Term $\frac{4x-4}{2x-3}$ definiert ist.

b) Ermitteln Sie unter den in a) gefundenen Zahlen x alle diejenigen, für die $0 < \frac{4x-4}{2x-3} < 1$ gilt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Der Term ist genau dann nicht definiert, wenn $2x - 3 = 0$ ist. Dies ist äquivalent mit $x = \frac{3}{2}$. Somit ist der Term genau für alle reellen x mit $x \neq \frac{3}{2}$ definiert.

Im Fall $x > \frac{3}{2}$ gilt also $2x - 3 > 0$. Daher führt das Multiplizieren einer Ungleichung mit $2x - 3$ zu einer jeweils äquivalenten Ungleichung. Somit sind die Ungleichungen

$$0 < \frac{4x-4}{2x-3} \qquad \text{und} \qquad \frac{4x-4}{2x-3} < 1$$

äquivalent mit

$$0 < 4x - 4 \qquad \text{und} \qquad 4x - 4 < 2x - 3$$

diese mit $4 < 4x$ und $2x < 1$ und diese mit $x > 1$ und $x < \frac{1}{2}$.
Diese beiden Ungleichungen widersprechen einander. Also gibt es kein $x > \frac{3}{2}$, das die in b) geforderte Ungleichung erfüllt.

Im Fall $x < \frac{3}{2}$ gilt $2x - 3 < 0$. Daher entsteht jeweils aus einer Ungleichung durch Multiplikation mit $2x - 3$ und Umkehrung des Ungleichheitszeichens eine äquivalente Ungleichung.

Somit sind die gegebenen Ungleichungen äquivalent mit

$$0 > 4x - 4 \qquad \text{und} \qquad 4x - 4 > 2x - 3 \qquad \text{d. h.} \qquad x < 1 \qquad \text{und} \qquad x > \frac{1}{2}$$

Diese beiden Ungleichungen werden genau von allen x mit $\frac{1}{2} < x < 1$ erfüllt. Für alle diese x gleich auch $x < \frac{3}{2}$.

Damit ist bewiesen: Die in b) geforderte Ungleichung gilt genau für alle reellen x mit $\frac{1}{2} < x < 1$.

Aufgabe 240914:
Drei Schüler diskutieren, welche Beziehung zwischen den Zahlen 1 und $\frac{2}{x-10}$ für reelle Zahlen $x \neq 10$ gilt. Sie stellen fest:

Für $x = 11$ ist $\frac{2}{x-10} = 2$, also $1 < \frac{2}{x-10}$;
für $x = 12$ ist $1 = \frac{2}{x-10}$;
für $x = 13$ ist $1 > \frac{2}{x-10}$.

Anschließend behauptet Marion: Die Gleichung $1 = \frac{2}{x-10}$ gilt genau für $x = 12$.
Norbert behauptet: Die Ungleichung $1 < \frac{2}{x-10}$ gilt genau für alle $x < 12$.
Petra behauptet: Die Ungleichung $1 > \frac{2}{x-10}$ gilt genau für alle $x > 12$.

Untersuchen Sie für jede dieser drei Behauptungen, ob sie wahr oder falsch ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Marions Behauptung ist wahr. Beweis:

(I) Wenn für eine reelle Zahl x die Gleichung $1 = \frac{2}{x-10}$ gilt, dann folgt $x - 10 = 2$, also $x = 12$.

(II) Für $x = 12$ gilt $\frac{2}{x-10} = \frac{2}{2} = 1$.

Norberts Behauptung ist falsch, da es unter den von Norbert genannten Zahlen x mit $x < 12$ auch solche gibt, für die $1 < \frac{2}{x-10}$ nicht gilt.

Zum Beweis gebügt es, ein Beispiel anzugeben. Ein solches Beispiel ist $x = 0$; denn diese Zahl erfüllt $x < 12$, und für sie gilt $\frac{2}{x-10} = -\frac{2}{10}$, also $1 > \frac{2}{x-10}$.

Petras Behauptung ist falsch, da es außer den von Petra genannten Zahlen x mit $x > 12$ noch weitere gibt, für die $1 > \frac{2}{x-10}$ gilt. Auch hierfür genügt ein Beispiel zum Beweis. Geeignet ist ebenfalls $x = 0$; denn diese Zahl erfüllt nicht $x > 12$, und für sie gilt $1 > \frac{2}{x-10}$.

II Runde 2

Aufgabe 120922:
Ermitteln Sie alle reellen Zahlen x, für die der Quotient $\frac{8-3x}{7x-2}$ negativ ist!

Lösung von Conny42:
Es ist $\frac{8-3x}{7x-2} < 0$ genau dann, wenn einer der folgenden beiden Fälle eintritt:

i) Es ist $8 - 3x < 0$ und $7x - 2 > 0$.
ii) Es ist $7x - 2 < 0$ und $8 - 3x > 0$.

Zu i): Aus $8 - 3x < 0$ folgt $x > \frac{8}{3}$ und aus $7x - 2 > 0$ folgt $x > \frac{2}{7}$. Wegen $\frac{8}{3} > \frac{2}{7}$ ist $x > \frac{2}{7}$ automatisch erfüllt, wenn $x > \frac{8}{3}$ erfüllt ist. Der erste Fall tritt also genau dann ein, wenn $x \in \left(\frac{8}{3}, \infty\right)$.

Zu ii): Aus $7x-2<0$ folgt $x<\frac{2}{7}$ und aus $8-3x>0$ folgt $x<\frac{8}{3}$. Wegen $\frac{2}{7}<\frac{8}{3}$ ist $x<\frac{8}{3}$ automatisch erfüllt, wenn $x<\frac{2}{7}$ erfüllt ist. Der zweite Fall tritt also genau dann ein, wenn $x\in\left(-\infty,\frac{2}{7}\right)$.

Insgesamt folgt, dass der Quotient $\frac{8-3x}{7x-2}$ genau dann negativ ist, wenn $x\in\left(-\infty,\frac{2}{7}\right)\cup\left(\frac{8}{3},\infty\right)$.

Aufgabe 200922:
a) Nennen Sie zwei verschiedene ganze Zahlen x, die die Ungleichung $\frac{x+3}{x-1}<0$ erfüllen und bestätigen Sie das Erfülltsein dieser Ungleichung für die von Ihnen genannten Zahlen!
b) Ermitteln Sie die Menge aller derjenigen reellen Zahlen x, die diese Ungleichung erfüllen!

Lösung von cyrix:
a) Setzen wir $x=0$ in die Ungleichung ein, erhalten wir die wahre Aussage $\frac{3}{-1}=-3<0$. Setzen wir $x=-1$ in die Ungleichung ein, erhalten wir die wahre Aussage $\frac{2}{-2}=-1<0$.

b) Es ist $\frac{x+3}{x-1}=1+\frac{4}{x-1}$, die Ungleichung also äquivalent zu $\frac{4}{x-1}<-1$. Also muss $x-1$ negativ sein, sodas die Multiplikation mit diesem Term das Relationszeichen dreht und die Ungleichung unter der Einschränkung $x-1<0$, d. h., $x<1$, äquivalent ist zu $4>-(x-1)$ bzw. $-4<x-1$, d. h. $x>-3$. Die Ungleichung wird also genau von allen reelen Zahlen x mit $-3<x<1$ erfüllt.

Aufgabe 210923:
Beweisen Sie, dass reelle Zahlen x,y,z genau dann das System der drei Ungleichungen

$$\begin{aligned} x+y+z&>0,\\ x\cdot y\cdot z&>0,\\ xy+xz+yz&>0 \end{aligned}$$

erfüllen, wenn x,y und z positiv sind!

Lösung von cyrix:
Sind x, y und $z<$ allesamt positiv, so erfüllen sie offensichtlich alle drei Ungleichungen.
Gelten nun ab jetzt für die drei Variablen die drei Ungleichungen. Dann sind aufgrund der zweiten Ungleichung alle drei verschieden von 0 und entweder genau 0 oder genau 2 negativ. (Bei genau einer oder genau drei negativen Zahlen wäre ihr Produkt auch negativ, im Widerspruch zur zweiten Ungleichung.)

Nehmen wir nun an, dass genau zwei der drei Variablen negativ wären, d. h., wir nehmen o. B. d. A. $x>0$ und $y<0$ sowie $z<0$ an. Dann ist aufgrund der ersten Ungleichung $x>x+z>-y>0$ und analog $x>x+z>0$. Damit gilt $0<(x+y)(x+z)<x^2$.
Es ist aber wegen $0<x^2$ und der der dritten Ungleichung

$$x^2<x^2+xy+xz+yz=x^2+x(y+z)+yz=(x+y)(x+z)$$

was den gewünschten Widerspruch liefert.
Damit müssen alle drei Variablen x, y und z positiv sein, wenn sie die drei Ungleichungen gleichzeitig erfüllen, sodass die beiden Aussagen äquivalent sind, $\square$.

Aufgabe 240922:
Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen x mit $x\neq 5$, für die gilt:

$$\frac{x}{5-x}<4$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Für jedes reelle $x < 5$ ist das Bestehen der Ungleichung $\frac{x}{5-x} < 4$ äquivalent (wie das Multiplizieren mit der positiven Zahl $5 - x$ bzw. für die umgekehrte Schlussweise das Dividieren durch diese Zahl zeigt) mit $x < 20 - 4x$, dies mit $5x < 20$ und dies mit $x < 4$.

b) Für jedes reelle $x > 5$ ist das Bestehen der Ungleichung $\frac{x}{5-x} < 4$ äquivalent mit $x > 20 - 4x$, dies mit $x > 4$, was aber bereits für alle Zahlen $x > 5$ gilt, d. h. für diese mit der ursprünglichen Bedingung $x > 5$ äquivalent ist.
Da für jedes reelle $x \neq 5$ entweder $x < 5$ oder $x > 5$ gilt, ist mit a) und b) bewiesen:
Die gesuchten Zahlen sind genau diejenigen reellen Zahlen x, für die $x < 4$ oder $x > 5$ gilt.

Aufgabe 250923:
Es seien a, b, x und y positive reelle Zahlen, und es gelte $\frac{a}{b} < \frac{x}{y}$.
Beweisen Sie, dass aus diesen Voraussetzungen stets folgt

$$\frac{a}{b} < \frac{a+x}{b+y} < \frac{x}{y}$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Aus $\frac{a}{b} < \frac{x}{y}$ folgt durch die Multiplikation mit der positiven Zahl by: $ay < bx \quad (1)$.
Addiert man $a \cdot b$ folgt $a(b + y) < b(a + x)$. Dividiert man dies durch die positive Zahl $b(b + y)$, so folgt

$$\frac{a}{b} < \frac{a+x}{b+y} \tag{2}$$

Addiert man zu (1) xy ergibt sich durch Umformung

$$ay + xy < bx + xy$$
$$(a + x)y < x(b + y)$$
$$\frac{a+x}{b+x} < \frac{x}{y} \tag{3}$$

Mit (2) und (3) ist die geforderte Beziehung hergeleitet.

Aufgabe 260922:
Peter und Heinz erzählen, dass sie Dreiecke gezeichnet haben, deren Seitenlängen, gemessen in Zentimeter, die Maßzahlen

$$a = 3x + 9, \qquad b = 5x + 8, \qquad c = 4x + 1$$

hatten, wobei x eine zuvor gewählte von Null verschiedene natürliche Zahl war.
Anke behauptet: Für jede von Null verschiedene natürliche Zahl x gibt es ein Dreieck mit den so gebildeten Maßzahlen a, b, c seiner Seitenlängen.
Birgit behauptet: Es gibt eine von Null verschiedene Zahl x, für die ein Dreieck, das diese Seitenlängen hat, rechtwinklig ist.
Untersuchen Sie für jede dieser beiden Behauptungen, ob sie wahr ist!

Lösung von cyrix:
a) Offensichtlich gilt für jede reelle Zahl $x > 0$ (und damit auch für jede von Null verschiedene natürliche), dass $a + b = 8x + 17 > 4x + 1 = c$ und $a + c = 7x + 10 > 5x + 8 = b$ ist. Es gilt aber auch die dritte Dreiecksungleichung $b + c = 9x + 9 > 3x + 9 = a$, sodass sich für alle $x > 0$ jeweils ein entsprechendes Dreieck mit Kantenlängen a, b und c bilden lässt. Anke hat also recht.

b) Mit $x = 1$ ist $a = 12$, $b = 13$ und $c = 5$, was $a^2 + c^2 = 144 + 25 = 169 = 13^2 = b^2$ erfüllt, sodass nach der Umkehrung des Satzes des Pythagoras bedeutet, dass es ein rechtwinkliges Dreieck mit Kathetenlängen a und c sowie Hypotenusenlänge b gibt. Also hat auch Birgit recht.

Aufgabe 270924:
Für je zwei natürliche Zahlen a, b, die die Ungleichungen

$$3a - 2b \leq 10 \quad (1) \qquad ; \qquad 3a + 8b \leq 25 \quad (2)$$

erfüllen, sei $S = a + 2b$.
Untersuchen Sie, ob es unter allen Zahlen S, die sich auf diese Weise bilden lassen, eine größte gibt! Wenn das der Fall ist, so ermitteln Sie diesen größtmöglichen Wert von S!

Lösung von cyrix:
Aus der zweiten Ungleichung folgt $b \leq 3$. Wir unterscheiden nun nach dem Wert, den b annimmt:

1. Fall: $b = 3$. Dann ist nach (2) $a \leq 0$, also $a = 0$ und $S = 6$.
2. Fall: $b = 2$. Dann folgt aus (2) $a \leq 3$, welche jeweils auch (1) erfüllen, und $S \leq 3 + 2 \cdot 2 = 7$.
3. Fall: $b \leq 1$. Dann folgt aus (1) $a \leq 4$, also $S \leq 4 + 2 \cdot 1 = 6$. Damit gilt in jedem Fall $S \leq 7$, welcher für das Paar $(a,b) = (3,2)$, dass beide Ungleichungen erfüllt, auch angenommen wird.

Aufgabe 300921:
Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen $x \neq 3$, für die die folgende Ungleichung (1) gilt!

$$\frac{2}{x-3} + \frac{1}{2} < \frac{5}{x-3} - \frac{1}{10}$$

Lösung von cyrix:
Die Ungleichung ist äquivalent zu $\frac{3}{5} < \frac{3}{x-3}$ bzw. $\frac{1}{5} < \frac{1}{x-3}$. Ist $x - 3$ negativ, so auch $\frac{1}{x-3}$, sodass die Ungleichung nicht erfüllt wäre. Also ist $x-3$ positiv und damit die Ungleichung äquivalent zu $5 > x-3 > 0$ bzw. $3 < x < 8$.

III Runden 3 & 4

Aufgabe 060933:
Beweisen Sie die folgende Behauptung:
In keinem rechtwinkligen Dreieck ist die Länge der Hypotenuse kleiner als das $\frac{1}{\sqrt{2}}$fache der Summe der Kathetenlängen.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Für ein beliebiges rechtwinkliges Dreieck seien die Kathetenlängen mit a,b bezeichnet, die Hypotenusenlänge mit c. Dann ist $(a-b)^2$ als Quadrat einer reellen Zahl nicht negativ, also gilt

$$c^2 = a^2 + b^2 = \frac{1}{2}(a+b)^2 + \frac{1}{2}(a-b)^2 \geq \frac{1}{2}(a+b)^2$$

Wegen $c > 0$ und $a + b > 0$ folgt hieraus die Behauptung $c \geq \frac{1}{2}(a+b)^2$.

Aufgabe 070933:
Man denke sich die natürlichen Zahlen von 1 bis 100, aufsteigend der Größe nach geordnet, angeschrieben.

Die dabei insgesamt aufgeschriebenen Ziffern denke man sich in unveränderter Reihenfolge zur Ziffernfolge der hiermit erklärten Zahl

$$123456789101112131 4...979899100$$

zusammengestellt. Aus ihr sollen genau 100 Ziffern so gestrichen werden, dass die restlichen Ziffern in gleicher Reihenfolge eine möglichst große Zahl bilden.
Wie lautet diese?

Lösung von Nuramon:
Zunächst beobachten wir, dass das Ergebnis immer die gleiche Anzahl an Ziffern hat, egal welche Ziffern man streicht.
Damit die Ergebniszahl mit mindestens fünf Neunen beginnt, muss man auf jeden Fall die Zahlen

$$1,2,...,8,10,11,...,18,20,21,...,28,30,...,38,40,41,...,48$$

und die Ziffer 4 von 49 streichen. Das sind $8 + 4 \cdot 19 = 84$ Ziffern.
Es ist nicht möglich, dass das Ergebnis mit sechs Neunen startet, denn dazu müsste man auch noch die Zahlen 50,51,...,58 und die Ziffer 5 von 59 streichen, das wären dann aber schon $84 + 19 > 100$ Ziffern.
Es ist auch nicht möglich, dass das Ergebnis mit den Ziffern 999998 beginnt, denn dazu müsste man zusätzlich noch 50,51,...,57 und die 5 von 58 streichen, also insgesamt $84 + 17 > 100$ Ziffern.
Durch zusätzliche Streichung der Zahlen 50,51,...,56 und der Ziffer 5 von 57 erhält man eine Zahl, die mit 999997 beginnt und hat bisher $84 + 15 = 99$ Ziffern gestrichen.
Streicht man danach auch noch die Ziffer 5 von 58, hat man 100 Ziffern gestrichen und erhält

$$\varepsilon := 999997859606162...99100$$

als Ergebnis.
Streicht man die Ziffer 5 von 58 nicht, so bekommt man eine Zahl, die mit 9999975 beginnt, also kleiner als ε ist.
Also ist ε die größtmögliche Zahl.

Aufgabe 070936:
Man ermittle alle reellen Zahlen x, die die Ungleichung erfüllen:

$$\frac{3}{2x-1} - \frac{2}{x-\frac{1}{2}} > -\frac{1}{3}$$

Lösung von cyrix:
Die Ungleichung ist wegen $\frac{2}{x-\frac{1}{2}} = \frac{4}{2x-1}$ äquivalent zu $-\frac{1}{2x-1} > -\frac{1}{3}$, also nach Multiplikation mit (-1) und Reziprokenbildung auch zu $2x - 1 > 3$ oder $2x - 1 < 0$, d. h. $x > 2$ oder $x < \frac{1}{2}$.

Aufgabe 110935:
Es seien a, b, c positive reelle Zahlen. Man beweise, dass dann

$$\frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab} \geq 2 \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)$$

gilt! Man gebe alle Fälle an, in denen Gleichheit eintritt!

Lösung von cyrix:
Durch Multiplikation mit $abc > 0$ geht die zu zeigende Ungleichung in die äquivalente

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 2\,(bc + ac - ab) \qquad \text{bzw.} \qquad a^2 + 2ab + b^2 - 2(a+b)c + c^2 \geq 0$$

also $(a+b-c)^2 \geq 0$, was offensichtlich wahr ist.

Aufgabe 140934:
Man beweise, dass für beliebige reelle Zahlen x, y, z die folgende Beziehung gilt: $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz$.
Ferner gebe man für x, y, z Bedingungen an, die gleichwertig damit sind, dass in der genannten Beziehung das Gleichheitszeichen gilt.

Lösung von cyrix:
Die genannte Ungleichung ist äquivalent zu

$$0 \leq 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2xz - 2yz = (x^2 - 2xy + y^2) + (x^2 - 2xz + z^2) + (y^2 - 2yz + z^2) =$$
$$= (x-y)^2 + (x-z)^2 + (y-z)^2$$

was offensichtlich erfüllt ist. Gleichheit tritt dabei nur genau dann ein, wenn alle drei Quadrate Null sind, also $x = y = z$ gilt.

Aufgabe 150936:
Beweisen Sie, dass für alle Tripel (a, b, c) positiver reeller Zahlen mit $abc = 1$ die Ungleichung

$$(1+a)(1+b)(1+c) \geq 8$$

gilt! Wann gilt das Gleichheitszeichen?

Lösung von cyrix:
Aufgrund der Ungleichung zwischen geometrischem und harmonischem Mittel ist $1 = \sqrt[3]{abc} \geq \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$, also $3 \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Daraus erhält man durch Multiplikation mit $abc = 1$ die Ungleichung $3 \leq bc + ac + ab$.
Weiterhin ist aufgrund der Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel auch $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} = 1$, also $a + b + c \geq 3$.
Zusammen ergibt sich

$$(1+a)(1+b)(1+c) = 1 + a + b + c + ab + ac + bc + abc \geq 1 + 3 + 3 + 1 = 8$$

wobei Gleichheit nur genau dann eintritt, wenn $a = b = c$ $(= 1)$ gilt, da nur genau dann in den Mittel-Ungleichungen der Gleichheitsfall eintritt.

Aufgabe 160932:
Man beweise folgenden Satz:
Sind a und b positive reelle Zahlen, für die $ab = 1$ gilt, dann gilt

$$(a+1) \cdot (b+1) \geq 4 \qquad (1)$$

Untersuchen Sie ferner, in welchen Fällen in (1) das Gleichheitszeichen gilt!

Lösung von cyrix:
Aufgrund der Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel ist $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} = 1$, also

$$(a+1) \cdot (b+1) = ab + (a+b) + 1 \geq 1 + 2 + 1 = 4.$$

Dabei gilt Gleichheit genau für $a = b (= 1)$, da nur dann die Mittelungleichung den Gleichheitsfall liefert.

Aufgabe 170936:
Für jedes $i = 1, 2, 3$ seien x_i und y_i zwei beliebige voneinander verschiedene reelle Zahlen, und es sei mit d_i die größere der beiden Zahlen x_i und y_i bezeichnet.
a) Beweisen Sie:
Wenn $x_1 \leq x_2 + x_3$ und $y_1 \leq y_2 + y_3$ gilt, dann gilt $d_1 \leq d_2 + d_3$.
b) Stellen Sie fest, ob auch die folgende Aussage gilt.
Wenn $d_1 \leq d_2 + d_3$ gilt, dann gilt auch $x_1 \leq x_2 + x_3$.

Lösung von cyrix:
a) Es sind für alle i die Ungleichungen $x_i \leq d_i$ und $y_i \leq d_i$ nach Definition erfüllt. Also gilt sowohl $x_1 \leq x_2 + x_3 \leq d_2 + d_3$ als auch $y_1 \leq y_2 + y_3 \leq d_2 + d_3$. Da d_1 eine der beiden Zahlen x_1 oder y_1 ist, beide aber $\leq d_2 + d_3$ sind, gilt dies auch für d_1, $\Box$.

b) Dies ist offensichtlich nicht der Fall, wie etwa $x_1 = 1 = y_2 = y_3$ und $y_1 = 0 = x_2 = x_3$ zeigt. Dann ist nämlich $d_1 = d_2 = d_3 = 1$, also $d_1 \leq d_2 + d_3$, aber $x_1 > x_2 + x_3$.

Aufgabe 180931:
Beweisen Sie folgenden Satz!
Wenn a, b, c und d reelle Zahlen sind, für die $ab - cd \neq 0$ gilt, dann gilt $a^2 + b^2 > 0$ oder $c^2 + d^2 > 0$.

Lösung von cyrix:
Wäre $a^2 + b^2 = 0 = c^2 + d^2$, so wegen $x^2 = 0 \equiv x = 0$ für alle reellen Zahlen x auch $a = b = c = d = 0$ und damit auch $ab - cd = 0$ im Widerspruch zur Aufgabenstellung. Also muss $a^2 + b^2 > 0$ oder $c^2 + d^2 > 0$ gelten, $\Box$.

Aufgabe 200932:
Es seien a, b, c, d positive reelle Zahlen, für die $a > b > c > d$ sowie $a + d = b + c$ vorausgesetzt wird. Beweisen Sie, dass dann stets $a^2 + d^2 > b^2 + c^2$ gilt!

Lösung von cyrix:
Wegen $a > b$ existiert ein $x > 0$ mit $a = b + x$. Aufgrund $a + d = b + c$ ist dann $d = c - x$. Insbesondere ist

$$ad = (b + x)(c - x) = bc - (b - c)x - x^2 < bc \quad \text{also} \quad 2ad < 2bc$$

Wegen $a + d = b + c$ ist auch $(a + d)^2 = (b + c)^2$, also $a^2 + d^2 + 2ad = b^2 + c^2 + 2bc$.
Zieht man von dieser Gleichung nun links den kleineren Term $2ad$ und rechts den größeren $2bc$ ab, erhält man die Ungleichung $a^2 + d^2 > b^2 + c^2$, $\Box$.

Aufgabe 210933:
Beweisen Sie, dass die Ungleichung gilt:

$$1^1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot ... \cdot 998^{998} \cdot 999^{999} \cdot 1000^{1000} < 1000^{500000}$$

Lösung von cyrix:
Es ist $300^2 = 90.000 < 10^5$ und damit $300 < 1000^{\frac{5}{6}}$, also gilt

$$1^1 \cdot 2^2 \cdot \ldots \cdot 300^{300} < 300^1 \cdot 300^2 \cdot \ldots \cdot 300^{300} = 300^{1+2+\cdots+300} = 300^{\frac{300 \cdot 301}{2}} < 300^{300 \cdot 151} <$$

$$< 1000^{\frac{5}{6} \cdot 300 \cdot 151} = 1000^{37.750} < 1000^{40.000}$$

Weiterhin ist

$$301^{301} \cdot \ldots \cdot 1000^{1000} < 1000^{301} \cdot \ldots \cdot 1000^{1000} = 1000^{301+\cdots+1000} = 1000^{\frac{1000\cdot 1001}{2} - \frac{300\cdot 301}{2}} =$$
$$= 1000^{500.500-150\cdot 301} < 1000^{500.500-45.000}$$

also

$$1^1 \cdot \ldots \cdot 300^{300} \cdot 301^{301} \cdot \ldots \cdot 1000^{1000} < 1000^{40.000} \cdot 1000^{500.500-45.000} =$$
$$= 1000^{50.500+40.000-45.000} < 1000^{500.000}, \square$$

Aufgabe 230934:
Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen x, für die gilt:

$$-5 \leq \frac{4x-3}{2x+1} < 6$$

Lösung von cyrix:
Es ist $\frac{4x-3}{2x+1} = 2 - \frac{5}{2x+1}$, die Ungleichungskette also äquivalent zu $-7 < -\frac{5}{2x+1} < 4$ bzw. $-4 < \frac{5}{2x+1} < 7$ sowie $-\frac{4}{5} < \frac{1}{2x+1} < \frac{7}{5}$.

Wir unterscheiden danach, ob $\frac{1}{2x+1}$ positiv oder negativ ist. (Verschwinden kann es aufgrund des positiven Zählers nicht.) Dabei ist $x \neq -\frac{1}{2}$, da sonst der Bruch nicht definiert wäre. Der Bruch ist dabei genau dann positiv, wenn $x > -\frac{1}{2}$ ist.

1. Fall: $x > -\frac{1}{2}$: Dann ist die erste Ungleichung automatisch erfüllt und die zweite nach Reziprokenbildung äquivalent zu $2x + 1 > \frac{5}{7}$, also $x > -\frac{1}{7}$. Wegen $x > -\frac{1}{7} > -\frac{1}{2}$ erfüllen all jene x (und keine weiteren, die die Fallannahme erfüllen) beide Ungleichungen.

2. Fall: $x < -\frac{1}{2}$: Dann ist die zweite Ungleichung automatisch erfüllt und die erste nach Reziprokenbildung äquivalent zu $-\frac{5}{4} > 2x + 1$, also $x < -\frac{9}{8}$. Wegen $x < -\frac{9}{8} < -\frac{1}{2}$ erfüllen all jene x (und keine weiteren, die die Fallannahme erfüllen) beide Ungleichungen.
Zusammenfassend wird also die Ungleichungskette der Aufgabenstellung genau von jenen reellen Zahlen x erfüllt, die kleiner als $-\frac{9}{8}$ oder größer als $-\frac{1}{7}$ sind.

Aufgabe 240935:
Beweisen Sie, dass für die Kathetenlängen a, b und die Hypotenusenlänge c jedes rechtwinkligen Dreiecks die Ungleichung $a^5 + b^5 < c^5$ gilt!

Lösung von cyrix:
Einerseits ist $a < c$ und $b < c$ und andererseits gilt nach dem Satz von Pythagoras $a^2 + b^2 = c^2$. Also gilt

$$a^5 + b^5 = a^3 \cdot a^2 + b^3 \cdot b^2 < c^3 \cdot a^2 + c^3 \cdot b^2 = c^3 \cdot (a^2 + b^2) = c^3 \cdot c^2 = c^5, \square$$

Aufgabe 270932:
(I) Untersuchen Sie, ob der folgende Satz allgemein gilt:
Wenn a, b, c, d reelle Zahlen sind, für die $b \neq 0, b + c \neq 0$ und $b + d \neq 0$ gilt, so folgt aus

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c} \quad \text{stets auch} \quad \frac{a}{b} < \frac{a+d}{b+d}$$

(II) Untersuchen Sie, ob der folgende Satz allgemein gilt:

Wenn a, b, c, d positive reelle Zahlen sind, so folgt aus

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c} \quad \text{stets auch} \quad \frac{a}{b} < \frac{a+d}{b+d}$$

Lösung von cyrix:
(I) Die Aussage ist falsch, wie $a = 1$, $b = 2$, $c = 1$ und $d = 0$ zeigt, da dann die Voraussetzung $\frac{a}{b} = \frac{1}{2} < \frac{2}{3} = \frac{a+c}{b+c}$ erfüllt ist, die Schlussfolgerung wegen $\frac{a+d}{b+d} = \frac{a}{b}$ aber offensichtlich nicht.

(II) Die Aussage ist korrekt, da die Voraussetzung nach Multiplikation mit $b(b+c) > 0$ äquivalent ist zu $a(b+c) < b(a+c)$ bzw. $ab + ac < ab + bc$, also wegen $c > 0$ auch äquivalent zu $a < b$.
Dann ist aber wegen $d > 0$ auch $ab + ad < ab + bd$, also $a(b+d) < b(a+d)$, was nach Division durch $b(b+d) > 0$ genau auf die Folgerung in der Aufgabenstellung führt, $\square$.

Aufgabe 280934:
Beweisen Sie, dass für beliebige positive reellen Zahlen x und y stets die Ungleichung gilt:

$$\frac{\sqrt{x}}{y^6 \cdot \sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{x^6 \cdot \sqrt{x}} \geq \frac{1}{x^6} + \frac{1}{y^6}$$

Lösung von cyrix:
Die zu zeigende Ungleichung ist symmetrisch in x und y, sodass wir o. B. d. A. $y \geq x$ annehmen können. Durch Multiplikation mit $y^6 > 0$ geht sie äquivalent über in

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} + \frac{y^6 \cdot \sqrt{y}}{x^6 \cdot \sqrt{x}} \geq \frac{y^6}{x^6} + 1$$

bzw. nach der Substitution $t := \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{y}{x}} \geq 1$ in $t^{-1} + t^{13} \geq t^{12} + 1$. Da beide Seiten der Ungleichung offensichtlich positiv sind, ist Quadrieren eine Äquivalenzumformung, sodass die Ungleichung äquivalent ist zu $t^{-2} + 2 \cdot t^{-1} \cdot t^{13} + t^{26} \geq t^{24} + 2t^{12} + 1$ bzw. $t^{26} - t^{24} \geq 1 - t^{-2}$, also nach Multiplikation mit t^2 zu $t^{28} - t^{26} = t^{26} \cdot (t^2 - 1) \geq t^2 - 1$, was wegen $t \geq 1$ und damit sowohl $t^2 - 1 \geq 0$ auch $t^{26} \geq 1$ wahr ist, sodass auch die Ausgangsgleichung wahr ist, $\square$.

Aufgabe 290934:
Beweisen Sie, dass es zu je zwei beliebigen rationalen Zahlen a, b mit $a < b$ eine rationale Zahl x und eine irrationale Zahl y gibt, für die $a < x < y < b$ gilt!

Lösung von cyrix:
Wähle $x = a + \frac{1}{2} \cdot (b-a)$ und $y = a + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (b-a)$. Dann ist wegen $b - a > 0$ und $0 < \frac{1}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$ auch

$$a < a + \frac{1}{2} \cdot (b-a) = x < a + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (b-a) = y < a + 1 \cdot (b-a) = b$$

und mit $a,b \in \mathbb{Q}$ auch $x = a + \frac{1}{2} \cdot (b-a) \in \mathbb{Q}$ sowie wegen $\frac{b-a}{2} \in \mathbb{Q}$ und $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ auch $\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (b-a) \notin \mathbb{Q}$ und damit $y = a + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (b-a) \notin \mathbb{Q}$, $\square$.

Aufgabe 330942:
Ermitteln Sie alle diejenigen Tripel (a, b, c) positiver ganzer Zahlen a, b, c von denen keine größer als 100 ist und mit denen die Ungleichungen $a + b \geq 101$, $a + c \leq 101$, $a + b + c \geq 201$ gelten!

Lösung von cyrix:
Wäre $a + c < 101$ oder $b < 100$, so wegen $a + c \leq 101$ und $b \leq 100$ auch $a + c + b < 101 + 100 = 201$, im Widerspruch zur letzten gegebenen Ungleichung. Also muss $a + c = 101$ und $b = 100$ gelten, sodass die letzten beiden Ungleichungen also in jedem Fall erfüllt sind.

Aus $a + c = 101$ folgt für jedes positive ganze $1 \leq a \leq 100$, dass auch $c = 101 - a$ positiv ganz und nicht größer als 100 ist. Schließlich ist für alle diese a wegen $b = 100$ auch $a + b \geq 101$, sodass alle Bedingungen erfüllt sind. Weitere Lösungen kann es nicht geben. Damit erfüllen genau die Elemente der Menge

$$\{(a,100,101 - a) | a \in \mathbb{Z} \wedge 1 \leq a \leq 100\}$$

die Bedingungen der Aufgabenstellung.

VI.IV Gleichungssysteme

I Runde 1

Aufgabe V00901:
Die Summe zweier Zahlen beträgt 20, die Summe ihrer Quadrate 202. Löse die Aufgabe rechnerisch.

Lösung von Steffen Polster:
x und y seien die zwei gesuchten Zahlen. Dann ergibt sich das Gleichungssystem

$$x + y = 20 \quad (1) \qquad ; \qquad x^2 + y^2 = 202 \qquad (2)$$

Umstellen von (1) nach y und Einsetzen in (2) ergibt

$$x^2 + (20 - x)^2 = 202 \Rightarrow 2x^2 - 40x + 198 = 0 \Rightarrow x^2 - 20x + 99 = 0$$

Diese quadratische Gleichung hat die Lösung $x_1 = 9$ und $x_2 = 11$ mit $y_1 = 11$ und $y_2 = 9$.
Die gesuchten Zahlen sind 9 und 11. Sie erfüllen die Bedingungen der Aufgabenstellung, wie die Probe bestätigt.

Aufgabe V00905:
An einem Stromkreis liegt eine Spannung von 120 V. Wird der Widerstand um 10 Ohm vergrößert, sinkt die Stromstärke um 1 Ampere.
Wie groß sind Stromstärke und Widerstand?

Lösung von Steffen Polster:
Es sei x der Werte Stromstärke I und y der Wert des Widerstandes. Dann wird mit der Gleichung zum Ohmschen Gesetz $U = R \cdot I$

$$xy = 120 \qquad \text{(I)}$$
$$(y + 10)(x - 1) = 120 \qquad (2)$$

Das Gleichungssystem hat die Lösung $x = 4$ und $y = 30$, d. h. die Stromstärke beträgt 4 Ampere und der Widerstand 30 Ohm.

Aufgabe 270914:
Für jedes Rechteck seien die Seitenlängen mit a, b bezeichnet, die Diagonalenlänge mit d und der Flächeninhalt mit A. Beweisen Sie mit diesen Bezeichnungen die folgende Aussage:

Es gilt $d = 2a - b$ genau dann, wenn $A = \frac{3}{4}a^2$ gilt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn $d = 2a - b$ gilt, so folgt (da nach dem Satz des Pythagoras $d = \sqrt{a^2 + b^2}$ ist) $\sqrt{a^2 + b^2} = 2a - b$,

$$a^2 + b^2 = 4a^2 - 4ab + b^2 \qquad (1)$$
$$4ab = 3a^2 \qquad (2)$$

und hieraus (da nach der Formel für den Flächeninhalt des Rechtecks $A = ab$ ist)

$$4A = 3a^2 \qquad (3)$$
$$A = \frac{3}{4}a^2 \qquad (4)$$

II. Wenn $A = \frac{3}{4}a^2$ gilt, so folgt einerseits $ab = \frac{3}{4}a^2$, wegen $a > 0$ als $b = \frac{3}{4}a < 2a$.

Andererseits folgt (da die Schlüsse von (1) auf (2), (3), (4) umgekehrt werden können) $a^2 + b^2 = (2a - b)^2$. Wegen $b < 2a$, also $2a - b > 0$ kann man hieraus weiter auf $\sqrt{a^2 + b^2} = 2a - b$, d. h. $d = 2a - b$ schließen.

Mit I. und II. ist der verlangte Beweis geführt.

II Runde 2

Aufgabe 030924:
Geben Sie alle Paare reeller Zahlen an, deren Summe, Produkt und Quotient untereinander gleich sind!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Ist (a, b) ein Paar reeller Zahlen, für das

$$a + b = a \cdot b \quad (1) \qquad a \cdot b = \frac{a}{b} \quad (2)$$

gilt, so folgt aus (2), dass $b \neq 0$ ist, und danach aus (1), dass $a \neq 0$, und aus (2), dass $b^2 = 1$ ist. Also gilt $b_1 = +1$ oder $b_2 = -1$.
Der 1. Fall führt zu $a + 1 = a$ und damit zu einem Widerspruch.
Der 2. Fall ergibt $a - 1 = -a$ und damit $a = \frac{1}{2}$ als einzig mögliche Lösung.
Durch Einsetzen in (1) und (2) zeigt man, dass $\left(\frac{1}{2}, -1\right)$ Lösung und damit das einzige Paar reeller Zahlen ist, das alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

Aufgabe 050922:
28 Schüler einer Klasse beteiligten sich an einem Sportfest. Jeder nimmt an mindestens einer der drei Disziplinen Kugelstoßen, Weitsprung und 100-m-Lauf teil.
Die Anzahl derjenigen, die sowohl am Kugelstoßen als auch am Weitsprung, aber nicht am 100-m-Lauf teilnehmen, ist gleich der Zahl derer, die nur am Kugelstoßen beteiligt sind, und größer als 1.
Kein Teilnehmer tritt nur im Weitsprung oder nur im 100-m-Lauf an.
Sechs Schüler starten in den beiden Disziplinen Kugelstoßen und 100-m-Lauf und nehmen nicht am Weitsprung teil.
Die Anzahl derjenigen, die sowohl beim Weitsprung als auch beim 100-m-Lauf starten, ist fünfmal so groß wie die Anzahl derer, die in allen drei Disziplinen starten.
Die Anzahl derjenigen, die in allen drei Disziplinen teilnehmen, ist gerade, aber nicht Null.
Wie viele Schüler treten insgesamt in den einzelnen der drei Disziplinen an?

Lösung von Manuela Kugel:
Bezeichnet man die Anzahl der Teilnehmer an allen drei Disziplinen mit y, und die Anzahl derjenigen von ihnen, die nur am Kugelstoßen teilnehmen, mit x, so müssen x und y der folgenden Gleichung genügen:

$$2x + 5y + 6 = 28, \quad \text{also} \quad 2x + 5y = 22 \tag{1}$$

Daher muss y gerade sein. Da weiter nach Voraussetzung $y \neq 0$ und $x > 1$ gilt, ist (1) nur für $y = 2$ und $x = 6$ erfüllt. Die Anzahl der Teilnehmer betrug also:
Beim Kugelstoßen $2 \cdot 6 + 2 + 6 = 20$ Schüler, beim Weitsprung $5 \cdot 2 + 6 = 16$ Schüler und beim 100-m-Lauf $5 \cdot 2 + 6 = 16$ Schüler.

Aufgabe 070922:
Für zwei rationale Zahlen a und b gelten die vier Ungleichungen

$$a + b \neq 3; \quad a - b \neq 10; \quad a \cdot b \neq 5; \quad a : b \neq 18{,}75$$

Die Zahlen 3; 10; 5 und 18,75 stimmen jedoch (in anderer Reihenfolge) mit je einer der Zahlen $a + b$, $a - b$, $a \cdot b$ und $a : b$ überein.
Ermitteln Sie die Zahlen a und b!

Lösung von cyrix:
Da mit $a = \frac{(a+b)+(a-b)}{2} > 0$ auch $b = \frac{a \cdot b}{a}$ positiv ist, gilt $a - b < a + b$.
Insbesondere kann also $a - b$ nicht den größten der vier Werte annehmen. Es verbleiben zwei Fälle: $a - b = 5$ oder $a - b = 3$.
In beiden Fällen ist $a - b \in \mathbb{N}$. Wäre $a + b = 18{,}75$, so würde $a \cdot b = \frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{4} \notin \mathbb{N}$ folgen, da im Zähler dieses Bruchs von einer nicht ganzen eine ganze Zahl subtrahiert wird, also noch nicht einmal der Zähler eine ganze Zahl ist. Aber $a \cdot b \notin \mathbb{N}$ wäre ein Widerspruch, da die übrigen drei Ergebnisse alle natürlich sind. Also folgt in beiden Fällen $a + b \neq 18{,}75$.

1. Fall: $a - b = 5$.

   Dann verbleibt für $a + b$ als einziger Wert die 10, was zu $a = \frac{15}{2}$, $b = \frac{5}{2}$, $a \cdot b = \frac{75}{4} = 18{,}75$ und $a : b = 3$, also einer Lösung, führt.

2. Fall: $a - b = 3$.

   Wäre $a + b = 10$, so $a = \frac{13}{2}$, $b = \frac{7}{2}$ und $a \cdot b = \frac{91}{4}$, was nicht in der Liste vorkommt. Also verbleibt hier noch die Möglichkeit $a + b = 5$ zu prüfen, die aber auf $a = 4$, $b = 1$ und $a \cdot b = 4$, also auch keine Lösung, führt.

Es gibt also genau ein Lösungspaar, nämlich $(a{,}b) = \left(\frac{15}{2}, \frac{5}{2}\right)$.

Alternativ-Lösung von weird:
Ausgehend von der Gleichung

$$(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab \tag{*}$$

bleibt aufgrund der Tatsachen, dass 18.75 gemäß der Angabe unter den 3 Werten $a+b, a-b, ab$ vorkommen muss, aber $a \pm b = 18.75$ auf den Widerspruch führt, dass die linke Seite von (*) im Gegensatz zur rechten nicht ganzzahlig ist, nur mehr die Möglichkeit $ab = 18.75 = \frac{75}{4}$ übrig.
Insbesondere ist also dann $a + b > \sqrt{4 \cdot \frac{75}{4}} > 8$, womit von allen dann ganzzahligen Möglichkeiten für $a + b$ nur mehr $a + b = 10$ übrigbleibt, was dann wegen (*) auch sofort $a - b = 5$ zur Folge hat.
Die Auflösung von $a + b = 10$, $a - b = 5$ führt dann wieder auf die einzige Möglichkeit $a = \frac{15}{2}, b = \frac{5}{2}$, welche auch tatsächlich alle Vorgaben hier erfüllt.

III Runde 3

Aufgabe 080933:
Geben Sie alle Zahlentripel (a,b,c) an, die die Gleichungen

$$\begin{array}{ll} a+b+c=s_1 & a-b+c=s_3 \\ a+b-c=s_2 & a-b-c=s_4 \end{array}$$

unter der zusätzlichen Bedingung erfüllen, dass die Menge der vier Zahlen s_1, s_2, s_3, s_4 (ohne Rücksicht auf ihre Reihenfolge) mit der Menge der vier Zahlen 1, 2, 3, 4 übereinstimmt!

Lösung von ZePhoCa:
Addition der ersten und vierten Gleichung ergibt $2a = s_1 + s_4$.
Addition der zweiten und dritten Gleichung ergibt $2a = s_2 + s_3$.

Das geht nur, wenn $s_1 = 1$ und $s_4 = 4$ oder umgekehrt und $s_2 = 2, s_3 = 3$ oder umgekehrt. Daraus folgt $2a = 5$, also $a = \frac{5}{2}$.

Für $s_1 = 1$,$s_4 = 4$ folgt dann $b + c = -\frac{3}{2}$. Auflösen nach b und einsetzen in die zweite Gleichung ergibt $\frac{5}{2} + c + \frac{3}{2} + c = s_3$. Falls $s_3 = 2$ folgt $c = -1$, falls $s_3 = 3$ folgt $c = -\frac{1}{2}$. Einsetzen in die erste Gleichung ergibt $b = -\frac{1}{2}$ bzw. $b = -1$.
Für $s_1 = 4$,$s_4 = 1$ folgt $b + c = \frac{3}{2}$. Auflösen nach b und einsetzen in die zweite Gleichung ergibt $\frac{5}{2} + c - \frac{3}{2} + c = s_3$. Falls $s_3 = 2$ folgt $c = \frac{1}{2}$, falls $s_3 = 3$ folgt $c = 1$. Einsetzen in die erste Gleichung ergibt $b = 1$ bzw. $b = \frac{1}{2}$.

Es gibt also insgesamt die Möglichkeiten
$(a,b,c) = (\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, -1)$ (wenn $(s_1,s_2,s_3,s_4 = 1,3,2,4)$)
$(a,b,c) = (\frac{5}{2}, -1, -\frac{1}{2})$ (wenn $(s_1,s_2,s_3,s_4 = 1,2,3,4)$)
$(a,b,c) = (\frac{5}{2}, 1, \frac{1}{2})$ (wenn $(s_1,s_2,s_3,s_4 = 4,3,2,1)$)
$(a,b,c) = (\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, 1)$ (wenn $(s_1,s_2,s_3,s_4 = 4,2,3,1)$)
$(a,b,c) = (\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, -1)$ (wenn $(s_1,s_2,s_3,s_4 = 2,4,1,3)$)
$(a,b,c) = (\frac{5}{2}, -1, \frac{1}{2})$ (wenn $(s_1,s_2,s_3,s_4 = 2,1,4,3)$)
$(a,b,c) = (\frac{5}{2}, 1, -\frac{1}{2})$ (wenn $(s_1,s_2,s_3,s_4 = 3,4,1,2)$)
$(a,b,c) = (\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, 1)$ (wenn $(s_1,s_2,s_3,s_4 = 3,1,4,2)$)
und eine Probe ergibt, dass dies tatsächlich Lösungen sind.

Aufgabe 130935:
Beweisen Sie den folgenden Satz!
Wenn für rationale Zahlen a,b,c mit $a,b,c \neq 0$ und $a+b+c \neq 0$ die Gleichung

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$$

gilt, so sind zwei der Zahlen a,b,c zueinander entgegengesetzt.
(Rationale Zahlen x,y heißen genau dann zueinander entgegengesetzt, wenn $x = -y$ gilt.)

Lösung von cyrix:
Durch Multiplikation mit $abc(a+b+c)$ geht die Gleichung äquivalent über in

$$abc = (a+b+c) \cdot (bc+ac+ab) = abc + b^2c + bc^2 + a^2c + abc + ac^2 + a^2b + ab^2 + abc$$

bzw. nach Subtraktion von abc in

$$0 = a^2b + a^2c + abc + ac^2 + ab^2 + abc + b^2c + bc^2 = (a+b) \cdot (ab+ac+bc+c^2) = (a+b)(a+c)(b+c)$$

Dieses Produkt ist genau dann Null, wenn mindestens einer der Faktoren Null ist, also $a = -b$, $a = -c$ oder $b = -c$ gilt, sodass auf jeden Fall mindestens zwei der drei Zahlen a,b,c einander entgegengesetzt sind.

VI.V Funktionen & Folgen

I Runde 1

Aufgabe 300911:
Drei Schüler wollen ein Spiel nach folgenden Regeln spielen:

1. Es wird (d. h. durch Auslosung der Reihenfolge) festgelegt, dass jeder der drei Schüler stets eine bestimmte Rechenoperation auszuführen hat, und zwar ein Schüler A die Subtraktion der Zahl 2, ein Schüler B die Division durch die Zahl 2, der dritte Schüler C das Ziehen der Quadratwurzel (z. B. mit dem Taschenrechner ermittelt).

2. Dann wird eine dreistellige natürliche Zahl zufallsbedingt gewählt (z. B. durch Auslosen unter allen dreistelligen natürlichen Zahlen) und als „Startzahl“ bezeichnet.

3. Nun führen die Schüler stets gleichzeitig jeweils ihre Rechenoperation aus. Beim ersten Mal wenden sie die Operation auf die „Startzahl“ an, jedes weitere Mal auf das zuvor erhaltene Resultat.

4. Sobald ein Schüler ein Resultat kleiner als 1 erhält, ist das Spiel beendet; dieser Schüler hat verloren.

Bei der Diskussion zur Vereinbarung der Regeln protestiert ein Schüler. Er meint, nach diesen Regeln ergäbe schon die Festlegung der Rechenoperationen zwangsläufig, wer verlieren müsse.

Stimmt das?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Diese Meinung stimmt. Man kann dies folgendermaßen begründen:

Der Schüler A erhält aus der Startzahl z der Reihe nach die Zahlen

$$z-2, z-2\cdot 2, z-3\cdot 2, \dots$$

allgemeine nach k-maliger Ausführung die Zahl $z-k\cdot 2$. Der Schüler B erhält entsprechend der Reihe nach

$$\frac{z}{2}, \frac{z}{2\cdot 2}, \frac{z}{2^3}, \dots$$

allgemein nach k-maliger Ausführung die Zahl $\frac{z}{2^k}$.

Wegen $z<1000$ und $2^{10}>1000$ ist daher spätestens nach 10-maliger Ausführung sein Resultat kleiner als 1. Für den Schüler A ist (wegen $z>99$) für alle $k\leq 10$ das Resultat nach k-maliger Ausführung $z-k\cdot 2>99-20$ größer als 1.

Da schließlich für jede Zahl $x>1$ auch $\sqrt{x}>1$ ist, erreicht Schüler C niemals ein Resultat kleiner als 1. Also muss stets der Schüler V verlieren.

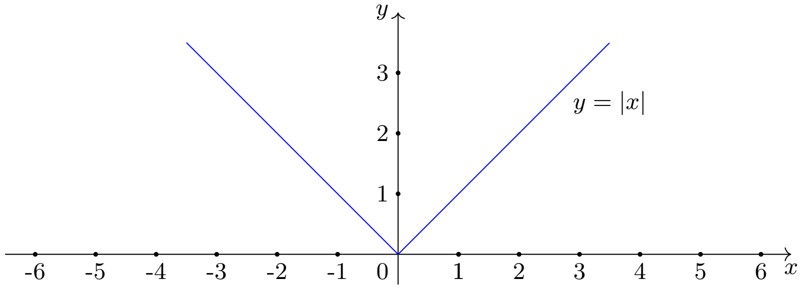
Aufgabe 340916:
Es seien Funktionen f_0, f_1, f_2, f_3, ... für alle reellen Zahlen x definiert durch

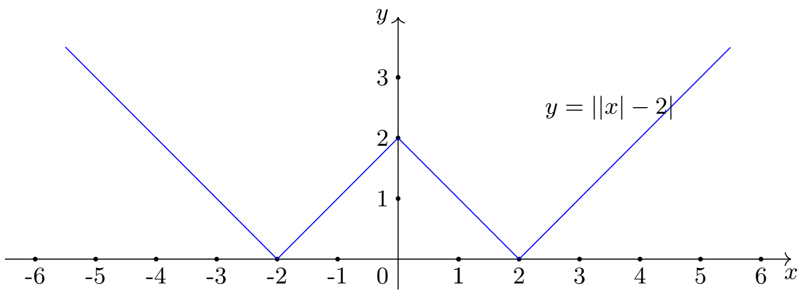
$$\begin{aligned} f_0(x) &= |x|, \\ f_1(x) &= \left||x|-2\right|, \\ f_2(x) &= \left|\left||x|-2\right|-2\right|, \\ &\dots \end{aligned}$$

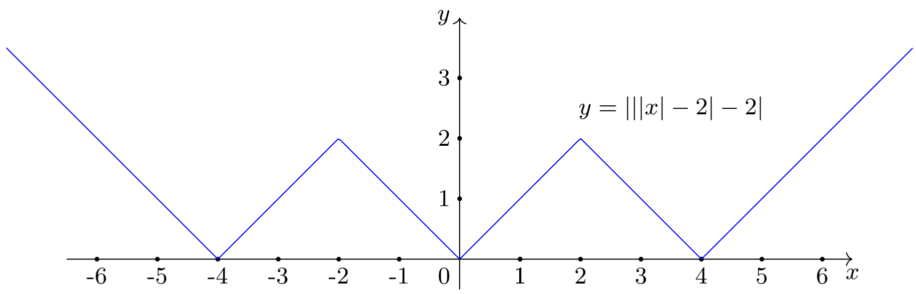
allgemein: $f_k(x)=|f_{k-1}(x)-2|$ für alle ganzen Zahlen $k\geq 1$.

Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen f_0, f_1 und f_2! Beschreiben Sie allgemein das Aussehen des Graphen der Funktion f_k!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Abbildung zeigt die Graphen von f_0, f_1 und f_2.







Beschreibung des Graphen von f_k: Die Funktion hat $(k+1)$ Nullstellen, symmetrisch zum Nullpunkt gelegen und mit Abständen zu je 4 Einheiten voneinander. Jeweils in der Mitte zwischen zwei Nullstellen liegt ein lokales Maximum.

In den Intervallen, die durch diese Nullstellen und Maxima voneinander abgegrenzt werden, verläuft der Graph geradlinig, immer abwechselnd mit den Anstiegen -1 und 1.

Bemerkung: Ausgehend von f_0 kann man diese Graphen der Reihe nach folgendermaßen erhalten: Der Graph von f_k wird um 2 Einheiten nach unten verschoben, und dann werden alle Kurventeile, die dabei unterhalb von der x-Achse zu liegen kommen, an der x-Achse gespiegelt; so entsteht der Graph von f_{k+1}.

II Runde 2

Aufgabe 100923:
Gegeben seien zwei reelle Zahlen $m \neq 0$ und n. Ferner sei f die durch $f(x) = mx + n$ für alle reellen Zahlen definierte Funktion.

a) Ermitteln Sie für $m = 1$ und $n = 0$ alle Zahlen x_0, für die $2 \cdot f(x_0) = f(x_0 + 2)$ gilt (d. h. für die der Funktionswert an der Stelle $x_0 + 2$ doppelt so groß ist wie der an der Stelle x_0)!
b) Ermitteln Sie bei beliebig gegebenen reellen Zahlen $m \neq 0$ und n alle Zahlen x_0, für die $2 \cdot f(x_0) = f(x_0 + 2)$ gilt!

Lösung von cyrix:
a) Durch die Wahl von m und n ist $f(x) = x$ für alle reellen Zahlen x, d. h., es sind die Lösungen der Gleichung $2 \cdot x_0 = x_0 + 2$ gesucht, was genau für $x_0 = 2$ erfüllt wird.
b) Hier ist die Gleichung $2m \cdot x_0 + 2n = m \cdot x_0 + 2m + n$ zu lösen, was äquivalent ist zu $m \cdot x_0 = 2m - n$, also $x_0 = 2 - \frac{m}{n}$.

Aufgabe 170921:
Für jede reelle Zahl m und jede reelle Zahl n wird durch $y = f(x) = mx + n$ (x reell) eine Funktion f definiert, deren Graph eine Gerade g ist.
a) Es sei $m = \frac{1}{2}$ und n beliebig reell.
Ermitteln Sie die Koordinaten aller derjenigen Punkte auf g, deren Ordinate doppelt so groß ist wie ihre Abszisse!
b) Es seien m und n beliebig reell.
Ermitteln Sie die Koordinaten aller derjenigen Punkte auf g, deren Ordinate doppelt so groß ist wie ihre Abszisse! (Stellen Sie insbesondere fest, für welche m und n überhaupt ein solcher Punkt auf g existiert!)

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Ein Punkt hat genau dann die verlangten Eigenschaften, wenn für seine Koordinaten x, y sowohl die Gleichung $y = \frac{1}{2}x + n$ als auch die Gleichung $y = 2x$ gilt.
Ist dies der Fall, so folgt

$$2x = \frac{1}{2}x + n \qquad , \qquad x = \frac{2}{3}n \qquad , \qquad y = \frac{4}{3}n$$

Daher können nur diese Werte x, y die genannten Gleichungen erfüllen.
Wegen $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}n + n = \frac{4}{3}n$ und $2 \cdot \frac{2}{3}n = \frac{4}{3}n$ erfüllen sie in der Tat diese Gleichungen.
Also hat (jeweils für ein n) genau der Punkt mit dem Koordinatenpaar $\left(\frac{2}{3}n, \frac{4}{3}n\right)$ die verlangten Eigenschaften.

b) Ein Punkt hat genau dann die verlangten Eigenschaften, wenn für seine Koordinaten x, y sowohl die Gleichung $y = mx + n$ als auch die Gleichung $y = 2x$ gilt.
Ist $m = 2$ und $n = 0$, so trifft dies genau für alle Punkte der Geraden zu, die $y = 2x$ als Gleichung hat.
Ist $m = 2$ und n $\neq 0$, so gelten für kein Zahlenpaar (x, y) beide Gleichungen, also gibt es in diesem Fall keinen Punkt mit den verlangten Eigenschaften.
Ist $m \neq 2$, so gilt: Wenn x, y die geforderten Gleichungen erfüllen, so folgt $2x = mx + n$, $x = \frac{n}{2-m}$, $y = \frac{2n}{2-m}$. Daher können im Fall $m \neq 2$ nur diese Werte x, y die Gleichungen erfüllen.
Die Probe zeigt, dass jeweils für ein Paar (m, n) mit $m \neq 2$ genau der Punkt mit dem Koordinatenpaar $\left(\frac{n}{2-m}, \frac{2n}{n-m}\right)$ die verlangten Eigenschaften hat.

Aufgabe 270923:
Für jeden Quader seien die Kantenlängen mit a, b, c bezeichnet, die Länge der Raumdiagonale mit d und der Oberflächeninhalt mit A.
Beweisen Sie mit diesen Bezeichnungen die folgende Aussage:
Es gilt genau dann $d = \frac{1}{3} \cdot (a + b + c)$, wenn $A = 8 \cdot d^2$ gilt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es gilt genau dann $d = \frac{1}{3}(a+b+c)$, wenn $3d = a+b+c$ gilt. Wegen $d > 0$ und $a+b+c > 0$ ist dies äquivalent mit

$$9d^2 = (a+b+c)^2 \qquad \to \qquad 9d^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)$$

und dies wegen $d^2 = a^2+b^2+c^2$ und $A = 2(ab+ac+bc)$ mit $9d^2 = d^2 + A$, also auch mit $8d^2 = A$, w. z. b. w.

Aufgabe 270923:
Für jeden Quader seien die Kantenlängen mit a, b, c bezeichnet, die Länge der Raumdiagonale mit d und der Oberflächeninhalt mit A.
Beweisen Sie mit diesen Bezeichnungen die folgende Aussage:
Es gilt genau dann $d = \frac{1}{3} \cdot (a+b+c)$, wenn $A = 8 \cdot d^2$ gilt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es gilt genau dann $d = \frac{1}{3}(a+b+c)$, wenn $3d = a+b+c$ gilt. Wegen $d > 0$ und $a+b+c > 0$ ist dies äquivalent mit

$$9d^2 = (a+b+c)^2 \qquad \to \qquad 9d^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)$$

und dies wegen $d^2 = a^2+b^2+c^2$ und $A = 2(ab+ac+bc)$ mit $9d^2 = d^2 + A$, also auch mit $8d^2 = A$, w. z. b. w.

III Runde 3

Aufgabe 090936:
Es sei $f(x)$ die für alle reellen x definierte Funktion

$$f(x) = \frac{(x-1)x}{2}.$$

Ferner sei x_0 eine beliebig gegebene, von 0 verschiedene reelle Zahl. Wie üblich seien die Funktionswerte der Funktion $f(x)$ an den Stellen x_0+1 und x_0+2 mit $f(x_0+1)$ bzw. $f(x_0+2)$ bezeichnet.
Man beweise, dass dann gilt:

$$f(x_0+2) = \frac{(x_0+2)f(x_0+1)}{x_0}.$$

Lösung von cyrix:
Es ist

$$\frac{(x_0+2)f(x_0+1)}{x_0} = \frac{(x_0+2)\cdot\frac{x_0(x_0+1)}{2}}{x_0} = \frac{(x_0+2)(x_0+1)}{2} = f(x_0+2).$$

Aufgabe 240932:
In einem rechtwinkligen Koordinatensystem seien der Kreis k um den Ursprung mit dem Radius $\sqrt{2}$ und die Gerade g mit der Gleichung $y = -x + 10$ gezeichnet.
Ermitteln Sie Gleichungen für die beiden zu g parallelen Tangenten an k!

Lösung von cyrix:
Die zu g parallelen Geraden haben den gleichen Anstieg wie g, also -1. Darüber hinaus stehen die

Berührungsradien senkrecht auf den Tangenten, haben also den Anstieg 1 und verlaufen durch den Mittelpunkt des Kreises, besitzen also die Gleichung $y_r = x$, sodass sich die Berührungspunkte an den Koordinaten (1,1) bzw. (-1,-1) befinden. (Man rechnet leicht nach, dass diese den Abstand $\sqrt{2}$ vom Kreismittelpunkt, also dem Koordinatenursprung, besitzen und damit auf k liegen.)
Damit haben die beiden Tangenten die Gleichungen

$$y_{t_1} = -(x-1)+1 = -x+2 \qquad \text{und} \qquad y_{t_2} = -(x+1)-1 = -x-2$$

Aufgabe 290935:
a) Beweisen Sie, dass es zu jeder Funktion f, die für alle reellen Zahlen x die Gleichung

$$f(x-1) = (x^2-1) \cdot f(x+1) \tag{1}$$

erfüllt, unendlich viele verschiedene reelle Zahlen x mit $f(x) = 0$ gibt.
b) Beweisen Sie, dass es eine Funktion f gibt, die für alle reellen Zahlen x die Gleichung (1) erfüllt, bei der aber nicht jede reelle Zahl x den Funktionswert $f(x) = 0$ hat!

Lösung von cyrix:
a) Es ist für $x = 1$ laut (1) $f(0) = f(1-1) = (1^2-1) \cdot f(1+1) = 0 \cdot f(2) = 0$. Für alle natürlichen Zahlen n gilt für $x = -2n+1$ wegen(1), dass $f(-2n-2) = ((-2n+1)^2-1) \cdot f(-2n)$ gilt. Aus $f(0) = 0$ folgt damit direkt $f(-2) = 0$, daraus $f(-4) = 0$ und sukzessive für alle negativen geraden ganzen Zahlen $f(-2n) = 0$, sodass die Funktion unendlich viele Nullstellen besitzt, $\square$.

b) Die Gleichung (1) setzt nur Funktionswerte von Argumenten in Beziehung, die sich um genau 2 unterscheiden. Es sei $2\mathbb{Z}+1$ die Menge der ungeraden ganzen Zahlen. Da für keine reelle Zahl $x \in \mathbb{R} \setminus (2\mathbb{Z}+1)$ gilt, dass $x+2$ oder $x-2$ eine ungerade ganze Zahl ist, ist die Wahl des Funktionswert für $f(x)$ unabhängig von der Wahl der Funktionswerte an den ungeraden ganzzahligen Stellen. Also kann man für alle x mit $x \in \mathbb{R} \setminus (2\mathbb{Z}+1)$ den Funktionswert $f(x) := 0$ festsetzen und unabhängig davon die für $x \in 2\mathbb{Z}+1$.

Setzt man nun $f(1) := 1$, so ergibt sich daraus ein eindeutiger Wert für $f(3)$, daraus ein eindeutiger Wert für $f(5)$ usw. für alle ungeraden natürlichen Zahlen. Umgekehrt folgt aber aus $f(1) = 1$ auch ein eindeutiger Wert, den $f(-1)$ annehmen muss, daraus einer für $f(-3)$ usw. für alle negativen ungeraden ganzen Zahlen.

Diese Funktion f ist wegen $f(1) \neq 0$ nicht konstant 0 ist, erfüllt damit für alle reellen Zahlen x die Funktionalgleichung (1), sodass es eine solche Funktion gibt, $\square$.

VII Klasse 10

VII.I Gleichungen

I Runde 1

Aufgabe V01003:
Zerlege 900 so in zwei Summanden, dass die Summe ihrer reziproken Werte gleich dem reziproken Wert von 221 ist!

Lösung von svrc:
Die beiden gesuchten Summanden bezeichnen wir mit a und b. Die beiden Bedingungen lauten

$$a + b = 900, \quad (1) \qquad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{221} \quad (2)$$

(2) lässt sich zu

$$\frac{a+b}{ab} = \frac{900}{ab} = \frac{1}{221}$$

umschreiben, so dass $ab = 900 \cdot 221 = 198900$ gilt. Mit $a = 900 - b$ aus (1) folgt

$$\begin{aligned} a \cdot b = (900 - b) \cdot b &= 198900 \\ b^2 - 900 \cdot b &= -198900 \\ b^2 - 900 \cdot b + 450^2 &= 450^2 - 198900 \\ (b - 450)^2 &= 3600 \end{aligned}$$

und somit die Möglichkeiten $b_1 = 390$ und $b_2 = 510$. Somit lauten die beiden Summanden - unter Beachtung der Kommutativität der Addition - dementsprechend 390 und 510.

Aufgabe V11011:
Im VEG Neuendorf werden 82,5 ha mit Getreide, 48,72 ha mit Hackfrüchten und 20,47 ha mit Luzerne bestellt. Die Hackfruchtflächen sollen je Hektar 34 kg, die Luzerneflächen 20 kg und die Getreideflächen 17,5 kg Phosphorpentoxyd (P2 05) erhalten.
Wieviel Dezitonnen Superphosphat werden benötigt, wenn dieses 17,3 Prozent Phosphorpentoxyd enthält?

Lösung von svrc:
Für die Hackfruchtflächen werden $48{,}72 \cdot 34\text{kg} = 1656{,}48\text{kg}$ P_2O_5 benötigt. Für die Luzerneflächen werden $20{,}47 \cdot 20\text{kg} = 409{,}40\text{kg}$ P_2O_5 benötigt. Für die Getreideflächen werden $82{,}5 \cdot 17{,}5\text{kg} = 1443{,}75\text{kg}$ P_2O_5 benötigt. Insgesamt werden somit 3509,83kg P_2O_5 benötigt.

Superphosphat enthält 17,3 Prozent P_2O_5, sodass insgesamt $\frac{3509{,}63}{0{,}173}\text{kg} \approx 20286\text{kg}$ Superphosphat benötigt werden. Da eine Dezitonne 100kg entspricht, werden 202,86 Dezitonnen Superphosphat benötigt.

Aufgabe V11012:
Welche Werte kann x in folgenden Gleichungen annehmen?

$$\begin{aligned} a)&\quad \sin x = \sin 69° \\ b)&\quad \tan\left(\frac{x}{2} + 32°\right) = 1 \\ c)&\quad \sin^2 x + \cos^2 \frac{x}{2} = 3{,}2 \end{aligned}$$

Lösung von J. Lehmann und W. Unze:
a) $x_1 = 69°; x_2 = 111°$. Wenn die Lösungen unter Berücksichtigung der Periodizität gegeben wurden, also mit $k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

$$x_1 = 69° + k \cdot 360° \qquad ; \quad x_2 = 111° + k \cdot 360°$$

b) $x_1 = 26°; x_2 = 206°$. Bei Berücksichtigung der Periodizität

$$x = 26° + k \cdot 180° \quad \text{mit } k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

c) Da sowohl $\sin^2 x$ als auch $\cos^2 x$ höchstens den Wert 1 annehmen können, kann die Summe beider niemals 3,2 betragen. Es gibt mithin kein x, das die angegebenen Bedingungen erfüllt.

Aufgabe 011012:
In der UdSSR wird heute in 37 Minuten genau soviel Gas erzeugt wie im zaristischen Russland während des gesamten Jahres 1913.
Berechnen Sie die Steigerung in Prozent!

Lösung von Christiane Czech:
Für die Menge des heute in 37 min produzierten Gases brauchte man 1913 genau $365 \cdot 24 \cdot 60 = 525600$ min. Die Gasproduktion steigerte sich also um das $\frac{525600}{37}$ fache, also um $\left(\frac{525600}{37} - 1\right) \cdot 100\% = 1420441\%$.

Aufgabe 021011:
Im Zentrum Berlins entsteht am Alexanderplatz das „Haus des Lehrers“. Die für dieses Bauwerk ausgehobene 20 m breite Baugrube hatte annähernd die Form eines Pyramidenstumpfes. Sie besaß eine Tiefe von 7,3 m.

Die rechteckige Bausohle hatte eine Länge von 47 m und eine Breite von 15 m. Berechnen Sie das Volumen des ausgebaggerten Bodens!

Lösung von André Lanka:
Aus dem Strahlensatz ergibt sich als Höhe h der Pyramide

$$\frac{h}{20 \text{ m}} = \frac{h - 7{,}3 \text{ m}}{15 \text{ m}}$$

was zu $h = 29{,}2$ m führt. Damit können wir die Länge l der Baugrube berechnen:

$$\frac{l}{29{,}2 \text{ m}} = \frac{47 \text{ m}}{21{,}9 \text{ m}}$$

was $l \approx 62{,}7$ m ergibt. Die Pyramide hat ein Volumen von

$$V_p = \frac{1}{3}(20 \text{ m} \cdot 62,7 \text{ m} \cdot 29{,}2 \text{ m}) = 12205{,}6 \text{ m}^3$$

Der Teil der Pyramide, der noch nicht ausgehoben ist, hat ein Volumen von

$$V_n = \frac{1}{2}(15 \text{ m} \cdot 47 \text{ m} \cdot 21{,}9 \text{ m}) = 5146{,}5 \text{ m}^3$$

Der ausgebaggerte Boden hat daher ein Volumen von $V_p - V_n \approx 7000 \text{ m}^3$.

Aufgabe 031011:
Eine Spule, deren Leermasse 235 g beträgt, ist mit Kupferdraht von 0,70 mm Durchmesser bewickelt und hat eine Masse von 4235 g.
Wieviel Meter Draht befinden sich auf der Spule? (Dichte des Kupfers $\rho = 8{,}93 \text{ g/cm}^3$.)

Lösung von Korinna Grabski:
Es gelten folgende Bezeichnungen und Formeln:
m_D Masse Kupferdraht, V_D Volumen Kupferdraht, der ein Kreiszylinder der Länge l_D mit dem Durchmesser d_D ist, $\rho_D = 8{,}93 \text{ g/cm}^3$ Dichte des Kupfers, $m_S = 4235$ g Masse Spule inkl. Draht, $m_L = 235$ g Leermasse der Spule

$$\begin{aligned} m_D &= m_S - m_L \\ V_D &= \frac{\pi}{4} d_D^2 \cdot l_D \\ \rho_D &= \frac{m_D}{V_D} = \frac{4(m_S - m_L)}{\pi d_D^2 l_D} \\ l_D &= \frac{4(m_S - M_L}{\pi d_D^2 \rho_D} = 116391{,}85 cm \approx 1{,}164 km \end{aligned}$$

Es befinden sich ca. 1,164 km Kupferdraht auf der Spule.

Aufgabe 041011:
In einem Betrieb, in dem Elektromotoren montiert werden, können durch die Anschaffung einer neuen Fließbandanlage, deren Kosten 105000 MDN betragen, die Lohnkosten je Motor um 0,50 MDN und die Gemeinkosten um jährlich 8800 MDN gesenkt werden.
a) Wie viele Motoren müssen jährlich mindestens montiert werden, damit die Kosten der neuen Anlage bereits in drei Jahren durch die Einsparungen an Löhnen und Gemeinkosten gedeckt werden?
b) Wie viele Motoren müssen jährlich mindestens montiert werden, damit darüber hinaus noch ein zusätzlicher Gewinn von jährlich 10000 MDN entsteht?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Wenn pro Jahr x Motoren montiert werden, so werden pro Jahr $0{,}50 \cdot x + 8800$ MDN eingespart. Damit die Kosten der Anlage nach drei Jahren gedeckt sind, muss gelten $3 \cdot (0{,}5 \cdot +8800) = 105000 \Rightarrow x = 52400$.

b) Von den 105000 MDN müssen jährlich 35000 MDN eingespart werden, und außerdem soll es noch 10000 MDN zusätzlichen Gewinn geben, deshalb gilt: $35000 + 10000 = 0{,}5 \cdot x + 8800 \Rightarrow x = 72400$.
Es müssen jährlich mindestens 72400 Motoren montiert werden.

Aufgabe 081011:
Eine FDJ-Versammlung wurde so stark besucht, dass genau 75 Prozent der FDJler Platz fanden. Daher wurde beschlossen, eine zweite Versammlung in einem anderen Raum zu veranstalten. Es gingen 150 der Jugendfreunde dorthin. Die übrigen blieben im ersten Raum. Dadurch wurden in diesem genau 5 Plätze frei.

Ermitteln Sie die Anzahl aller Jugendfreunde, die zu der ursprünglich angesetzten Veranstaltung erschienen waren!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Das Problem ist beschrieben durch $0{,}25 \cdot x + 5 = 150$. Also erschienen 580 Jugendliche, von denen zunächst 435 Platz fanden, bevor 150 gingen.

Aufgabe 101012:
Ist n eine positive ganze Zahl, so bezeichnet s_n die Summe aller positiven ganzen Zahlen von 1 bis n.

a) Für welche positive ganze Zahl n erhält man $s_n = 2415$?

b) Für welche positive ganze Zahl m ist s_m genau 69 mal so groß wie m?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Es gilt $s_n = \frac{n(n+1)}{2}$.
Angenommen, es gäbe eine positive ganze Zahl, für die $\frac{n(n+1)}{2} = 2415$ gilt. Dann folgt $n^2 + n - 4830 = 0$ und hieraus entweder $n = 69$ oder $n = -70$. Da aber $-70 < 0$ ist, kann nur $n = 69$ die gewünschte Eigenschaft haben. Tatsächlich gilt für die positive ganze Zahl 69:

$$s_{69} = \frac{69 \cdot 70}{2} = 2415$$

b) Angenommen, es gäbe eine positive ganze Zahl m, für die $\frac{m(m+1)}{2} = 69m$ gilt. Wegen $m \neq 0$ folgt daraus $\frac{m+1}{2} = 69$, also $m = 137$. Daher kann nur diese Zahl die gewünschte Eigenschaft haben. Tatsächlich gilt für die positive ganze Zahl 137

$$s_{137} = \frac{137 \cdot 138}{2} = 137 \cdot 69$$

Aufgabe 111013:
Es sei x eine Variable, die alle von 1 und -1 verschiedenen reellen Zahlen annehmen kann.

Geben Sie eine Möglichkeit an, den Term $\frac{x}{x^2-1}$ so als Summe zweier Brüche darzustellen, dass die Variable x nur in den Nennern dieser beiden Brüche und dort in keiner höheren als der 1. Potenz auftritt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es liegt nahe, für die gesuchten Quotienten der Nenner $x+1$ und $x-1$ zu wählen, weil deren Hauptnenner gleich dem Nenner des vorgegebenen Terms ist. Wir wählen also den Ansatz

$$\frac{x}{x^2-1} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1}$$

daraus folgt

$$\frac{x}{x^2-1} = \frac{ax - a + bx + b}{x^2-1}$$

also nach Multiplikation mit $x^2 - 1$

$$x = ax - a + bx + b = x(a+b) - a + b \tag{1}$$

Für $x = 0$ folgt daraus, dass notwendig $-a + b = 0 \quad (2)$ gilt. Aus (1) und (2) folgt weiterhin $x = x(a+b)$ und somit, da dies auch für mindestens ein $x \neq 0$ gelten soll: $a + b = 1 \quad (3)$.

Das Gleichungssystem (2), (3) hat nur die Lösung $a = b = \frac{1}{2}$. Die Probe bestätigt die gefundene Zerlegung

$$\frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{2(x-1)} = \frac{x - 1 + x + 1}{2(x+1)(x-1)} = \frac{1}{x^2-1}$$

Aufgabe 121014:
In einem alten Lehrbuch wird in einer Aufgabe über folgenden Handel berichtet:

Ein Bauer wollte bei einem Viehhändler mehrere Tiere kaufen. Der Viehhändler verlangte für jedes den gleichen Preis. Dem Bauern gelang es, diesen Preis um genau so viel Prozent des geforderten Preises herunterzuhandeln, wie er (in Groschen) betragen sollte.

Er bezahlte jetzt 21 Groschen pro Tier. Bei dem ursprünglichen Preis hätte sein Geld genau für 3 Tiere gereicht. Jetzt konnte er mehr Tiere kaufen, wobei er sein Geld vollständig ausgab.

Wie viele Tiere konnte der Bauer insgesamt kaufen?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Der ursprüngliche Preis p_1 wird um $p_1\% = \frac{p_1}{100}$ gesenkt. Also ist der neue Preis p_2 gleich $p_2 = p_1 - p_1 \cdot \frac{p_1}{100} = p_1 - \frac{p_1^2}{100}$. Da p_2 21 Groschen beträgt, gilt:

$$\begin{aligned} -\frac{p_1^2}{100} + p_1 &= 21 \\ p_1^2 - 100 \cdot p_1 + 2100 &= 0 \\ p_1^2 - 100 \cdot p_1 + 2500 &= 400 \\ (p_1 - 50)^2 &= 400 \\ p_1 &= 50 \pm 20 \end{aligned}$$

Also war der ursprüngliche Preis p_1 30 oder 70 Groschen. Zu diesem ursprünglichen Preis konnte der Bauer genau drei Tiere kaufen. Zu 21 Groschen kann er n Tiere kaufen, wobei er jeweils sein ganzes Geld ausgibt. Also gilt: $3 \cdot p_1 = 21 \cdot n \Leftrightarrow n = \frac{p_1}{7}$. Da n eine natürliche Zahl ist, muss p_1 durch 7 teilbar sein. Dies gilt für 70, aber nicht für 30 Groschen. Also betrug der ursprüngliche Preis 70 Groschen. Der Bauer kann nun 10 Tiere kaufen.

Aufgabe 141012:
Ein VEB hat für das Jahr 1975 die Produktion von 10000 Stück seines Haupterzeugnisses vorgesehen. Weiterhin ist geplant, die für die Jahre 1976, 1977, 1978, 1979 vorgesehenen Produktionszahlen so zu steigern, dass die für 1979 vorgesehene Zahl den vierfachen Wert der Zahl für 1975 erreicht. Dabei soll die prozentuale Steigerung von Jahr zu Jahr alle vier Mal gleich sein.

a) Wieviel Prozent beträgt bei gerundeter Rechnung, d. h. ohne Berücksichtigung der Stellen nach dem Komma, dieser jährliche Zuwachs?
b) Geben Sie die (entsprechend gerundeten) Produktionsziffern für die Jahre 1976, 1977, 1978 und 1979 an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Mit Hilfe der Zinseszinsformel erhält man $P_{1979} = P_{1975} \cdot (1 + p)^4$. Diese liefert mit $P_{1979} = 4 \cdot P_{1975}$ nach Umstellen: $p = \sqrt[4]{4} - 1 = \sqrt{2} - 1$ den Wert $p = 0{,}41 = 41\%$.

Damit folgt:
$P_{1976} = P_{1975} \cdot 1{,}41 = 14142$ Stück $\quad P_{1977} = P_{1976} \cdot 1{,}41 = 20000$ Stück
$P_{1978} = P_{1977} \cdot 1{,}41 = 28283$ Stück $\quad P_{1979} = P_{1978} \cdot 1{,}41 = 40000$ Stück

Aufgabe 151013:
Ermitteln Sie alle Möglichkeiten, den Wert für das Verhältnis $a:b$ zweier positiver reeller Zahlen a und b mit $a<b$ so zu wählen, dass folgendes gilt!

Das geometrische Mittel $\sqrt{ab}$ dieser Zahlen beträgt 60% ihres arithmetischen Mittels.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, für zwei Zahlen a und b mit $0<a<b$ sei $\sqrt{ab}$ gleich 60 % von $\frac{a+b}{2}$. Dann gilt

$$\frac{a+b}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}=\sqrt{ab} \qquad \text{also} \qquad a+b=\frac{10}{3}\sqrt{ab} \tag{1}$$

Sei nun $\frac{a}{b}=m$ das gesuchte Verhältnis, dann gilt $bm=a<b$, wegen $b>0$, also $m<1$.

Durch Einsetzen in (1) erhält man ferner

$$bm+b=\frac{10}{3}\sqrt{b^2m} \qquad \text{wegen } b>0 \text{ also}$$

$$b(m+1)=\frac{10}{3}b\sqrt{m} \qquad ; \qquad m+1=\frac{10}{3}\sqrt{m}$$

Durch Quadrieren und Subtraktion von $\frac{100}{9}m$ erhält man daraus

$$m^2-\frac{82}{9}m+1=0$$

Diese quadratische Gleichung hat die Lösungen $m_1=9$ und $m_2=\frac{1}{9}$ von denen nur die zweite die Eigenschaft $m<1$ hat.

Also können zwei Zahlen nur dann die gestellten Bedingungen erfüllen, wenn ihr Verhältnis $m=a:b=1:9$ ist. Umgekehrt folgt hieraus $b=9a$, also $\frac{a+b}{2}=\frac{9a+a}{2}=5a$ sowie, da $a>0$ ist, $\sqrt{ab}=\sqrt{9a^2}=3a$, und $3a$ sind genau 60 % von $5a$.

Also erfüllen a,b genau dann die gestellten Bedingungen, wenn $a:b=1:9$ gilt.

Aufgabe 201012:
Beweisen Sie, dass $\dfrac{x^4+4y^4}{x^2-2xy+2y^2}$ für alle ganzen Zahlen x, y mit $x\neq 0$ und $y\neq 0$

a) (als reelle Zahl) definiert ist und sogar

b) eine ganze Zahl ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Es gilt

$$x^2-2xy+2y^2=(x-y)^2+y^2\geq y^2$$

Wegen $y\neq 0$, also $y^2>0$, ist somit

$$x^2-2xy+2y^2\neq 0 \qquad \text{also} \qquad \frac{x^4+4y^4}{x^2-2xy+2y^2}$$

als reelle Zahl definiert.

b) Es gilt

$$(x^2-2xy+2y^2)(x^2+2xy+2y^2)=x^4+4y^4$$

also ist wegen der Ganzzahligkeit von x und y auch

$$\frac{x^4+4y^4}{x^2-2xy+2y^2}=x^2+2xy+2y^2$$

eine ganze Zahl.

Aufgabe 241011:
Zwei natürliche Zahlen, die zwischen 10 und 20 liegen, lassen sich *im Kopf* nach folgendem Verfahren relativ schnell und sicher multiplizieren:

Man addiere zur ersten Zahl die Einerziffer der zweiten Zahl, hänge an die erhaltene Summe eine Ziffer 0 an und addiere zu der nun erhaltenen Zahl das Produkt der Einerziffern der beiden gegebenen Zahlen.

Um beispielsweise nach dieser Regel $16 \cdot 12$ zu berechnen, addiert man 2 zu 16, erhält 18, hängt eine 0 an und addiert zu der nun erhaltenen Zahl 180 das Produkt $6 \cdot 2$, also 12. Es ergibt sich 192, in der Tat die gesuchte Zahl $16 \cdot 12$.

Beweisen Sie, dass dieses Verfahren für alle natürlichen Zahlen zwischen 10 und 20 zum richtigen Ergebnis führt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die beiden zu multiplizierenden Zahlen lassen sich in der Gestalt $10+a$ bzw. $10+b$ schreiben, wobei a bzw. b ihre Einerziffern sind. Nach dem beschriebenen Verfahren hat man zuerst $10+a+b$, dann $10\cdot(10+a+b)$ und schließlich $10\cdot(10+a+b)+a\cdot b$ zu bilden. Diese Zahl ist gleich

$$100+10a+10b+ab$$

Andererseits ist das gesuchte Produkt

$$(10+a)\cdot(10+b)=100+10a+10b+ab$$

Es stimmt also mit der nach den Verfahren berechneten Zahl überein. w. z. b. w.

Aufgabe 271014:
Ist es möglich, einen Quader mit den Kantenlängen $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ und $\sqrt{8}$ vollständig mit Würfeln gleicher Kantenlängen auszufüllen?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, es gäbe solche Würfel mit einer Kantenlänge a, so müsste (u.a. auch)

$$x\cdot a=\sqrt{2} \qquad \text{und} \qquad y\cdot a=\sqrt{3} \tag{1}$$

gelten. Dabei müssten x und y ganze Zahlen sein, da sie die Anzahl der Würfel längs der Kanten des Quaders angeben würden.

Aus (1) folgte $\frac{x}{y}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. Das ist ein Widerspruch, da links eine rationale und rechts eine irrationale Zahl stehen würde. Die Frage muss also verneint werden.

Aufgabe 301013:
Wenn die Produktion eines Betriebes um 50% zurückging (z. B. infolge des Ausfalls eines Teils der Anlage), so muss sie anschließend offensichtlich verdoppelt, d. h. um 100% erhöht werden, um wieder auf den Anfangswert gebracht zu werden.

Ermitteln Sie eine Formel, durch die man jeweils aus einem gegebenen Prozentsatz a denjenigen Prozentsatz b berechnen kann, für den die nachstehende Aussage (1) gilt!

(1) Wenn die Produktion um a Prozent zurückging, so muss sie anschließend um b Prozent erhöht werden, um wieder auf den Anfangswert gebracht zu werden.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Beim Zurückgehen um a Prozent wird der Anfangswert mit $\left(1-\frac{a}{100}\right)$ multipliziert, bei anschließender Erhöhung um b Prozent wird der dann erreichte Wert mit $\left(1+\frac{b}{100}\right)$ multipliziert. Damit der nun insgesamt erhaltene Wert gleich dem Anfangswert ist, muss

$$\left(1-\frac{a}{100}\right)\left(1+\frac{b}{100}\right))1$$

sein. Daraus folgt

$$\begin{aligned} 1+\frac{b}{100} &= \frac{1}{1-\frac{a}{100}} = \frac{100}{100-a} \\ \frac{b}{100} &= \frac{100}{100-a} - 1 = \frac{a}{100-a} \\ b &= \frac{100a}{100-a} \end{aligned}$$

als eine gesuchte Formel.

Aufgabe 311012:
Von einem Quader sind gegeben: das Volumen 24552 cm^3, der Oberflächeninhalt 17454 cm^2 und die Länge 3 cm einer Kante. Inge und Rolf wollen die Längen der anderen Kanten ermitteln.

Inge sagt, dass sie Lösung mit Hilfe einer quadratischen Gleichung gefunden hat und dass die gesuchten Längen, in cm gemessen, ganzzahlig sind.

Rolf entgegnet, er könne quadratische Gleichungen noch nicht lösen; aber wenn die Ganzzahligkeit der gesuchten Längen bekannt sei, so seien seine BASIC-Kenntnisse ausreichend, um die Aufgabe mit Hilfe eines Computers zu lösen.

Wie könnte die Aufgabe von Inge gelöst worden sein, und wie von Rolf?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Sind a, b die Maßzahlen der in cm gemessenen anderen Kanten, so folgt

$$3 \cdot a \cdot b = 24552 \qquad (1)$$

$$2 \cdot (ab + 3a + 3b) = 17454 \qquad (2)$$

$$\text{aus (1) folgt} \qquad ab = 8184 \qquad (3)$$

$$\text{aus (2) folgt} \qquad ab + 3a + 3b = 8727$$

Subtrahiert man hiervon (3), so folgt $3a + 3b = 543$, also $a + b = 181$ (4).

Aus (4) folgt $b = 181 - a$; setzt man dies in (3) ein, so folgt

$$a \cdot (181 - a) = 8184 \qquad ; \qquad a - 181a + 8184 = 0$$

Diese quadratische Gleichung hat die Lösungen

$$a_{1;2} = \frac{181}{2} \pm \sqrt{\frac{32761}{4} - 8184} = \frac{181}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}}$$

$$a_1 = 93 \qquad ; \qquad a_2 = 88$$

Nach (4) gehören hierzu die Werte $b_1 = 88$ bzw $b_2 = 93$.

Man bestätigt, dass sie außer (4) auch (3) erfüllen, woraus für sie auch (1) und (2) als erfüllt folgen. Damit sind die Längen der anderen Kanten ermittelt; sie betragen 88 cm und 93 cm.

b) Rolf könnte folgendermaßen zur Aufstellung eines Programms gelangen:

Wir lassen a die Werte 1, 2, 3, ... durchlaufen. Für jedes a soll der Computer den Wert b aus (1) berechnen und dann prüfen, ob (2) erfüllt wird (sowie, wenn das zutrifft, a und b ausgeben).

Das Ende des Ablaufs soll erreicht sein, wenn kein ganzzahliges b mehr auftreten kann. (Da b mit wachsendem a fällt (wie aus (1) ersichtlich ist), kann jedenfalls beendet werden, wenn $b < 1$ ist. Das wird sicher erreicht (wichtig!), weil a nicht nur wächst, sondern sogar über jede Schranke hinaus wächst. Einen solchen Ablauf realisiert z. B. das Programm

```
10 A=0
20 A=A+1
30 B=24552/3/A
40 IF B<1 THEN END
50 IF 2 * (A*B + 3*A + 3*B )=17454 THEN PRINT A,B
60 GOTO 20
```

Hinweis: Zur Verkürzung der Rechenzeit kann man Zahlenwerte, die im Ablauf oft gebraucht werden, einmal zu Anfang ermitteln und an eine Variable übergeben.

Weiter kann man überhaupt das System (1),(2) durch das einfachere (3),(4) ersetzen (und dabei noch als Folgerung aus (4) nutzen: Wächst a um 1, so fällt b um 1). Vor allem aber lässt sich die Abbruchbedingung günstiger wählen: Es genügt, nur Paare mit $a \leq b$ zu suchen, was nach (4) mit $a \leq 90$ gleichwertig ist (und damit zudem ermöglicht, statt der obigen Zeilen 20, 40, 60 das günstigere FOR-NEXT zu verwenden). Praktischer ist also z. B. das Programm

```
10 P =8184
20 B=181
30 FOR A=1 TO 90
40 B=B-1
50 IF A*B=P THEN PRINT A,B
60 NEXT A
```

Aufgabe 321011:
Bernd rechnet mit einem einfachen Taschenrechner. Als Ergebnis der Aufgabe 1:7 erhält er die mit 7 Stellen nach den Dezimalpunkt gezeigte Zahl 0.1428571.

Nun meint er: Man kann den wahren Dezimalbruch finden, ohne noch einen weiteren Schritt zahlenmäßigen Rechnens durchführen zu müssen. Es gibt aber auch die Möglichkeit, mit nur einem einfachen weiteren Rechenschritt auszukommen.

Beschreiben und begründen Sie, wie der gesuchte Dezimalbruch auf eine dieser Arten gefunden werden kann!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Bei dem bekannten schriftlichen Verfahren zur Division durch 7 können, wenn das Verfahren nicht mit Rest 0 endet, höchstens sechs verschiedene Reste auftreten. Sobald derselbe Rest zweimal auftritt, tritt eine Wiederholung der jeweils anschließend erhaltenen Ergebnisziffern ein. Daher muss der entstehende Dezimalbruch, wenn er nicht nach spätestens 6 Stellen abbricht, periodisch-unendlich mit einer Periodenlänge sein, die nicht größer als 6 ist.

Das Taschenrechnerergebnis 0.1428571 zeigt (gleichgültig, ob die letzte Ziffer 1 durch Runden oder Abbrechen ohne Runden zustandekam):

Es ergeben sich, beginnend mit der Zehntel-Ziffer 1, sechs verschiedene Ziffern, darunter die sechste nicht aufzurundende Ziffer 7, und danach erfolgt kein Abbruch. Also kann der gesuchte wahre Dezimalbruch nur der periodisch-unendliche Dezimalbruch $0{,}\overline{142857}$ sein.

Aufgabe 341015:
Geben Sie eine Gleichung in einer Unbekannten x so an, dass beide Seiten der Gleichung für alle reellen Zahlen x definiert sind, dass die Gleichung unendlich viele reelle Zahlen als Lösung hat, von denen aber keine ganzzahlig ist!

Zeigen Sie, dass die von Ihnen angegebene Gleichung diesen Bedingungen genügt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Zwei mögliche Beispiele sind:

I. Die Gleichung

$$\left|x-\frac{1}{4}\right|+\left|x-\frac{3}{4}\right|=\frac{1}{2}$$

Offenbar sind beide Seiten für alle reellen Zahlen x definiert. Beweis der übrigen Eigenschaften:

Für alle $x<\frac{1}{4}$ ist

$$\left|x-\frac{1}{4}\right|+\left|x-\frac{3}{4}\right|=\frac{1}{4}-x+\frac{3}{4}-x=1-2x>1-2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

für alle x mit $\frac{1}{4}\leq x\leq\frac{3}{4}$ ist

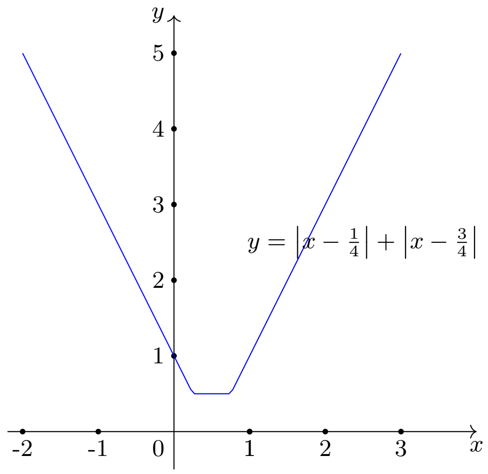
$$\left|x-\frac{1}{4}\right|+\left|x-\frac{3}{4}\right|=x-\frac{1}{4}+\frac{3}{4}-x=\frac{1}{2}$$

für alle $x>\frac{3}{4}$ ist

$$\left|x-\frac{1}{4}\right|+\left|x-\frac{3}{4}\right|=x-\frac{1}{4}+x-\frac{3}{4}=2x-1>2\cdot\frac{3}{4}-1=\frac{1}{2}$$

Also sind genau alle x mit $\frac{1}{4}\leq x\leq\frac{3}{4}$ Lösung der Gleichung; keine dieser Zahlen ist eine ganze Zahl.

Eine andere Nachweismöglichkeit entsteht unter Verwendung des Graphen der durch $f(x)=\left|x-\frac{1}{4}\right|+\left|x-\frac{3}{4}\right|$ definierten Funktion f (siehe Abbildung).



II. Die Gleichung $\sin x = 1$. Wieder sind beide Seiten für alle reellen Zahlen x definiert; weiter gilt:

Alle Lösungen der Gleichung sind die Zahlen

$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi = \frac{4k+1}{2}\pi \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$$

Da π irrational ist und alle $\frac{4k+1}{2}$ rational und von 0 verschieden sind, sind alle Lösungen irrational, also nicht ganzzahlig.

II Runde 2

Aufgabe V11025:
Peter sagt zu seinem Freund: „Nimm in eine Hand eine gerade, in die andere eine ungerade Anzahl Streichhölzer! Verdopple in Gedanken die Anzahl in der linken Hand, verdreifache die Anzahl in der rechten Hand, addiere beides und nenne mir das Ergebnis! Ich werde dir dann sagen, in welcher Hand du die gerade Anzahl hast.“
Wie macht Peter das? Begründen Sie Ihre Antwort!

Lösung von svrc:
Mit $g = 2k$ für eine natürliche Zahl k bezeichnen wir die gerade Anzahl Streichhölzer. Mit $u = 2l + 1$ für eine nichtnegative ganze Zahl l bezeichnen wir die ungerade Anzahl Streichhölzer. Es gibt zwei Varianten.

Erste Variante: Die gerade Anzahl Streichhölzer befindet sich in der linken Hand. Dann gilt für das Ergebnis n_1 des Rätsels

$$n_1 = 2 \cdot g + 3 \cdot u = 4k + 6l + 3.$$

In diesem Falle gilt, dass das Ergebnis des Rätsels ungerade ist. Dann weiß Peter, dass sich die gerade Anzahl Streichhölzer in der linken Hand befindet.

Zweite Variante: Die gerade Anzahl Streichhölzer befindet sich in der rechten Hand. Dann gilt für das Ergebnis n_2 des Rätsels

$$n_2 = 2 \cdot u + 3 \cdot g = 6k + 4l + 2.$$

In diesem Falle gilt, dass das Ergebnis des Rätsels gerade ist. Dann weiß Peter, dass sich die gerade Anzahl Streichhölzer in der rechten Hand befindet.

Aufgabe 011021:
Im Jahre 1970 sollen in der Sowjetunion mindestens 900 Milliarden kWh und 1980 wenigstens 2700 Milliarden kWh Elektroenergie erzeugt werden. Für die USA nimmt die Bundesenergiekommission 1475 Milliarden kWh bzw. 2230 Milliarden kWh an.
Wann würde die UdSSR die USA in der Erzeugung von Elektroenergie überholt haben, wenn man eine gleichmäßige Steigerung der Energieerzeugung annimmt?

Lösung von Christiane Czech:
Die produzierte Energiemenge E (in Mrd. kWh) lässt sich, wenn eine gleichmäßige Steigerung vorausgesetzt wird, mit linearen Funktionen beschreiben, diejenige der Sowjetunion ist $E_{SU} = 900 + 180x$, die der USA $E_{USA} = 1475 + 75{,}5x$, wobei x die Anzahl der Jahre nach 1970 ist.
Die Energieproduktion beider Länder ist gleich, wenn

$$E_{SU} = E_{USA}, \text{ also } 900 + 180x = 1475 + 75{,}5x$$

oder nach Umstellen $x \approx 5{,}5$ gilt. Dies wird somit im Jahre 1976 der Fall sein.

Aufgabe 021021:
Die in einem Stadtbezirk geleiteten Industriebetriebe erfüllten im I. Quartal 1962 den Plan der Bruttoproduktion gegenüber dem gleichen Zeitraum des Vorjahres mit 112,4%. Insgesamt wurden für 4,7 Millionen DM mehr Waren produziert. Der Volkswirtschaftsplan wurde gleichzeitig um 5,6% übererfüllt.
Wie hoch war die im Volkswirtschaftsplan vorgesehene Bruttoproduktion des I. Quartals 1962?

Lösung von André Lanka:
Im I. Quartal 1961 wurden Waren im Wert von

$$\frac{4{,}7 \text{ Millionen DM}}{12{,}4\%} = \frac{4{,}7 \text{ Millionen DM}}{0{,}124} \approx 38 \text{ Millionen DM}$$

produziert. Im I. Quartal 1962 waren es demnach Waren im Wert von 38 Millionen DM $\cdot 1{,}124 \approx 42{,}7$ Millionen DM.
Das entspricht 105,6% des Volkswirtschaftsplans.
Vorgesehen waren also $\frac{42{,}7 \text{ Millionen DM}}{1{,}056} \approx 40$ Millionen DM.

Aufgabe 021022:
In einem Steinkohlenwerk soll für einen 800 m tiefen Schacht eine Förderanlage gebaut werden. Es sollen Lasten bis zu 12 Mp gefördert werden.
Das Förderseil besteht aus Stahldrähten und verträgt unter Berücksichtigung der notwendigen Sicherung eine Belastung von 20 kp je mm^2 Querschnitt.
Wie groß muss der metallische Querschnitt des Seils sein, damit es sowohl die eigene Last als auch die zu fördernde Last tragen kann? (Wichte des Stahls $\gamma = 7{,}8 \frac{p}{cm^3}$)

Lösung von André Lanka:
Das Seil muss das Gewicht von 12 Mp, sowie das Eigengewicht fördern. Das Eigengewicht ergibt sich als $V \cdot \gamma = x \cdot 624 \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2}$. Dabei ist x der Querschnitt des Seils in cm^3.
Das Seil fördert 2000 $\frac{\text{kp}}{\text{cm}^2}$ Querschnitt. Damit benötigt das Seil einen Querschnitt von

$$x = \frac{12000 \text{ kp}}{2000 \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2} - 624 \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2}} \approx 8{,}721 \text{ cm}^2$$

Aufgabe 061021:
Man ermittle alle reellen Zahlen a, für die eine der Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$x^2 - \frac{15}{4}x + a = 0$$

das Quadrat der anderen Wurzel ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung seien w und w^2. Dann gilt nach dem Vietaschen Wurzelsatz:

$$w^2 + w = \frac{15}{4} \qquad (1) \quad ; \quad w^2 \cdot w = a \qquad (2)$$

Aus (1) folgt

$$w_1 = \frac{3}{2} \qquad \text{bzw.} \qquad w_2 = -\frac{5}{2}$$

Wegen (2) ist

$$a_1 = w_1^3 = \frac{27}{8} \qquad \text{und} \qquad a_2 = w_2^3 = -\frac{125}{8}$$

Durch Einsetzen findet man, dass die ermittelten Werte tatsächlich den Bedingungen genügen:

$$x^2 - \frac{15}{4}x + \frac{27}{8} = 0$$

hat die Wurzeln $x_1 = \frac{9}{4}$ und $x_2 = \frac{3}{2}$.

$$x^2 - \frac{15}{4}x - \frac{125}{8} = 0$$

hat die Wurzeln $x_1 = \frac{25}{4}$ und $x_2 = -\frac{5}{2}$. Die gestellte Bedingung wird von $a_1 = \frac{27}{8}$ und $a_2 = -\frac{125}{8}$ und nur von diesen erfüllt.

Aufgabe 191021:
Ein rechteckiges Bild, dessen Seitenlängen sich wie 2 : 3 verhalten, soll einen überall gleich breiten Rahmen erhalten, dessen Flächeninhalt so groß ist wie der des Bildes.
Ermitteln Sie alle diejenigen Werte des Längenverhältnisses der Außenkanten des Rahmens, die diese Forderung erfüllen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es sei $2a$ die Länge der kürzeren Seite des Bildes, dann ist $3a$ die Länge seiner längeren Seite. Es sei d die Breite des Rahmens, dann sind $2a + 2d$ bzw. $3a + 2d$ die Längen der Außenkanten des Rahmens.
Die in der Aufgabe gestellte Forderung ist genau dann erfüllt, wenn die von diesen Kanten eingeschlossene Fläche einen doppelt so großen Flächeninhalt hat wie die des Bildes, d. h. genau dann, wenn

$$(2a + 2d)(3a + 2d) = 2 \cdot 2a \cdot 3a$$

gilt. Dies ist der Reihe nach äquivalent mit

$$6a^2 + 4ad + 6ad + 4d^2 = 12a^2$$
$$4d^2 + 10ad - 6a^2 = 0$$
$$d^2 + \frac{5}{2}ad - \frac{3}{2}a^2 = 0$$

Diese quadratische Gleichung hat genau die Lösungen

$$d_{1,2} = -\frac{5}{4}a \pm \sqrt{\frac{25}{16}a + \frac{24}{16}a^2}$$

von denen genau $d = \frac{a}{2}$ nicht negativ ist. Daher ist die Forderung genau dann erfüllt, wenn die Außenkanten die Längen $2a + 2\frac{a}{2} = 3a$ und $3a + 2\frac{a}{2} = 4a$ haben.

Ist dies der Fall, so haben sie das Längenverhältnis 3:4, und auch umgekehrt gilt:
Haben die Außenkanten das Längenverhältnis $(2a+2d):(3a+2d)=3:4$, so folgt $8a+8d=9a+6d$, also $2d=a$ und damit $d=\frac{a}{2}$. Somit erfüllt genau das Längenverhältnis 3:4 die Bedingungen der Aufgabe.

Aufgabe 231022:
Ermitteln Sie alle diejenigen geordneten Zahlenpaare $(g;r)$ aus einer ganzen Zahl g und einer reellen Zahl r, die die Gleichung erfüllen:

$$\frac{3}{3r^2+1}=g$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn ein Zahlenpaar $(g;r)$ die verlangten Eigenschaften hat, so folgt:
Da das Quadrat jeder reellen Zahl ≥ 0 ist, gilt

$$3r^2+1\geq 1 \tag{1}$$

Hieraus folgt einerseits $3r^2+1>0$; daher und wegen $3>0$ ist

$$\frac{3}{3r^2+1}>0$$

Andererseits folgt aus (1), dass

$$\frac{3}{3r^2+1}\leq\frac{3}{1}=3$$

gilt. Somit erfüllt die ganze Zahl g die Ungleichung $0<g\leq 3\quad(2)$.
Aus $\frac{3}{3r^2+1}=g$ folgt weiter

$$3gr^2+g=3 \qquad ; \qquad r^2=\frac{3-g}{3g}$$

Diese Gleichung lautet für die ganzzahligen Lösungen von (2), wie in der Tabelle angegeben:

g	$r^2=\frac{3-g}{3g}$
1	$r^2=\frac{2}{3}$
2	$r^2=\frac{1}{6}$
3	$r^2=0$

Daher können nur die Paare

$$\left(1;\sqrt{\frac{2}{3}}\right),\quad\left(1;\sqrt{-\frac{2}{3}}\right),\quad\left(2;\sqrt{\frac{1}{6}}\right),\quad\left(2;\sqrt{-\frac{1}{6}}\right),\quad(3;0)$$

die verlangten Eigenschaften haben.
Sie haben diese Eigenschaften, denn 1, 2 und 3 sind ganze Zahlen und $\pm\sqrt{\frac{2}{3}},\pm\sqrt{\frac{1}{6}},0$ sind reelle Zahlen.
Ein Probe durch Einsetzen der Zahlen bestätigt die Lösung.

Aufgabe 231024:
Beweisen Sie, dass es genau eine positive rationale Zahl x gibt, die die Gleichung $x^x=27$ erfüllt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es gilt $3^3=27$.
Aus $0<x<1$ folgt auch $x^x<1$; denn da x rational ist, gibt es natürliche Zahlen $p,q>0$ mit $x=\frac{p}{q}$, und damit ist $x^x=\frac{p}{x^q}=\sqrt[q]{x^p}$. Aus $x<1$ folgt somit $x^p>1$ und daraus $\sqrt[q]{x^p}<1$.
Aus $x=1$ folgt $x^x=1$.
Aus $1<x<3$ folgt $x^x<x^3$, da für Potenzen mit einer Basis oberhalb 1 gilt: Je größer ihr Exponent ist, um so größer ist ihre Potenz. Weiter folgt analog $x^3<3^3$.
Mit den gleichen Begründungen folgt aus $x>3$, dass $x^x>x^3>3^3$ gilt.

Aus (I) bis (IV) folgt, dass unter allen positiven rationalen Zahlen x genau die Zahl $x=3$ die Gleichung $x^x=27$ erfüllt.

III Runde 3

Aufgabe 011031:
Auf dem XXII. Parteitag der KPdSU wurde über die Leistungen der Bestarbeiter in der Landwirtschaft berichtet, die große Erfolge bei der Steigerung der Erträge für Getreide und Hülsenfrüchte erreicht haben.
In einem Kolchos des Gebietes Winniza wurden 1961 auf einer Fläche von 708 ha 31 dt je ha Erbsen geerntet. Ferner erzielte der Kolchos den hohen Ernteertrag von 60 dt je ha an Körnermais.
Von der gesamten Getreideanbaufläche (einschließlich Erbsen) waren 21 Prozent mit Erbsen und 30 Prozent mit Körnermais bestellt. Der durchschnittliche Ernteertrag für die Gesamtfläche betrug 38 dt je ha.
Wie groß war der Ernteertrag je ha für die übrigen Getreidekulturen?

Lösung von Christiane Czech:
Der Ertrag an Erbsen beträgt $708 \cdot 31$ dt. Da die 21% der gesamten Anbaufläche, auf denen Erbsen angebaut werden, 708 ha entsprechen, beträgt die Gesamtfläche $\frac{708}{0{,}21}$ ha. Auf dieser wurde also ein Ertrag von $\frac{38 \cdot 708}{0{,}21}$ dt erzielt.
Die Maisanbaufläche beträgt $\frac{0{,}3 \cdot 708}{0{,}21}$ ha, es wurden also $\frac{18 \cdot 708}{0{,}21}$ dt Mais geerntet.
Die Fläche, auf der weder Mais noch Erbsen angebaut wurden, beträgt $\frac{0{,}49 \cdot 708}{0{,}21}$ ha. Damit beträgt der Ernteertrag der restlichen Getreidekulturen

$$\frac{\left(\frac{38 \cdot 708}{0{,}21} - 708 \cdot 31 - \frac{18 \cdot 708}{21}\right) \text{dt}}{\frac{0{,}49 \cdot 708}{0{,}21} \text{ha}} = 27{,}5 \frac{\text{dt}}{\text{ha}}$$

Aufgabe 051033:
Ermitteln Sie alle reellen Zahlen a, b und c für die gilt: $a + bc = (a + b)(a + c)$.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die gegebene Gleichung ist äquivalent mit jeder der folgenden Gleichungen

$$a + bc = a^2 + ac + ab + bc \qquad ; \qquad a(a + b + c - 1) = 0 \tag{1}$$

Da das Produkt zweier Zahlen dann und nur dann Null ist, wenn wenigstens einer seiner Faktoren Null ist, folgt, dass

$$a = 0 \qquad \text{oder} \qquad a + b + c - 1 = 0$$

sein muss, und umgekehrt ist in jedem dieser Fälle die Gleichung (1) und damit die gegebene Gleichung erfüllt. Die vorgegebene Gleichung ist also erfüllt für alle Zahlentripel (a,b,c) mit

1. $a = 0$ und reellen Zahlen b und c und
2. reellen Zahlen a, b und c, für die $a + b + c = 1$ gilt.

In allen anderen Fällen ist sie nicht erfüllt.

Aufgabe 051035:
Man gebe für die reellen Zahlen a, b, c, d Bedingungen an, die folgendes leisten:

1. Wenn die Bedingungen erfüllt sind, dann hat die Gleichung
$$\frac{a(x+1) + b}{c(x+1) + d} = \frac{ax + b}{cx + d} \tag{1}$$
(mindestens) eine Lösung.
2. Wenn die Gleichung (1) eine Lösung hat, so sind die Bedingungen erfüllt.

Man ermittle, falls die Bedingungen erfüllt sind, alle Lösungen von (1). (Diskussion)

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn die Gleichung (1) eine Lösung x_0 besitzt, so gilt:

$$\frac{a(x_0+1)+b}{c(x_0+1)+d} = \frac{ax_0+b}{cx_0+d}$$

$$c(x_0+1)+d \neq 0 \qquad ; \qquad cx_0+d \neq 0$$

Daraus folgt

$$(a(x_0+1)+b)(cx_0+d) = (c(x_0+1)+d)(ax_0+b) \tag{2}$$

$c^2+d^2>0$, weil c und d nicht gleichzeitig Null sein können. Und weiter

$$ad = bc \qquad ; \qquad c^2+d^2>0 \tag{3}$$

Wenn (1) eine Lösung besitzt, so muss (3) gelten, und umgekehrt, wenn (3) gilt, dann hat (1) eine Lösung; denn aus (3) folgt, dass für alle reellen Zahlen x_0 sicher (2) gilt, und daraus folgt weiter:

I. Ist $c=0$, dann ist wegen (3) auch $a=0$ und $d\neq 0$. Also ist für jede reelle Zahl x_0 sicher (1) erfüllt.

II. Ist $c\neq 0$, dann ist die Gleichung (1) für jede reelle Zahl x_04 mit $x_0 \neq -\frac{d}{c}$ und $x_0 \neq -\frac{d+c}{c}$ erfüllt.
$x_0=-\frac{d}{c}$ und $x_0=-\frac{d+c}{c}$ sind nicht Lösung von (1).

Aufgabe 061034:
Ermitteln Sie alle reellen Zahlen k, für die die Gleichung

$$x^2+x+3=k(x^2+5)$$

eine in x quadratische Gleichung ist, die
a) eine Doppellösung hat!
b) zwei voneinander verschiedene reelle Lösungen hat!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die gegebene Gleichung ist genau dann in x quadratisch, wenn $k\neq 1$ ist. Sie ist dann äquivalent mit der Gleichung

$$x^2+\frac{1}{1-k}x+\frac{3-5k}{1-k}=0 \tag{1}$$

Diese hat genau dann reelle Lösungen, wenn die folgenden Radikanten nicht negativ sind, und zwar die Lösungen

$$x_{1,2}=\frac{1}{2(k-1)} \pm \sqrt{\frac{1}{4(1-k)^2}-\frac{3-5k}{1-k}} = \frac{1\pm\sqrt{-20k^2+32k-11}}{2(k-1)}$$

a) Die Gleichung (1) hat genau dann eine Doppellösung, wenn

$$-20k^2+32k-11=0 \qquad \text{d. h.} \qquad k^2-\frac{8}{5}k+\frac{11}{20}=0$$

ist. Das ist für $k=\frac{11}{10}$ und für $k=\frac{1}{2}$ und nur für diese der Fall.

b) Die Gleichung (1) hat genau dann zwei voneinander verschiedene reelle Lösungen, wenn $-20k^2+32k-11>0$ ist. Daraus folgt

$$k^2-\frac{8}{5}k+\frac{11}{20}<0$$

und schließlich

$$\left(k-\frac{1}{2}\right)\left(k-\frac{11}{20}\right)<0$$

Diese Ungleichung ist genau dann erfüllt, wenn entweder $k-\frac{1}{2}>0$ und gleichzeitig $k-\frac{11}{20}<0$ ist, also für $\frac{1}{2}<k<1$, $1<k<\frac{11}{10}$, oder
$k-\frac{1}{2}<0$ und gleichzeitig $k-\frac{11}{20}>0$ ist. Es gibt keinen Wert von k, der den letzten beiden Ungleichungen gleichzeitig genügt.

Also hat die Gleichung (1) für $\frac{1}{2} < k < 1$, $1 < k < \frac{11}{10}$ und nur für diese k voneinander verschiedene reelle Lösungen.

Aufgabe 161032:
Von einer Gleichung

$$x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

werde vorausgesetzt, dass alle Koeffizienten a_3, a_2, a_1 und a_0 ganze Zahlen sind.
Beweisen Sie, dass dann folgender Satz gilt!
Wenn eine rationale Zahl x eine Lösung dieser Gleichung ist, so ist x eine ganze Zahl.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, eine rationale Zahl x sei eine Lösung der gegebenen Gleichung. dann gibt es ganze Zahlen $q \neq 0$ und p, die zueinander teilerfremd sind und für die $x = \frac{p}{q}$ ist. Hiernach ist

$$\frac{p^4}{q^4} + a_3\frac{p^3}{q^3} + a_2\frac{p^2}{q^2} + a_1\frac{p}{q} + a_0 = 0 \quad \text{also}$$

$$p^4 = -a(a_3p^3 + a_2p^2q + a_1pq^2 + a_0q^3)$$

Daher ist q ein Teiler von p^4, Da aber q zu p und folglich auch zu p^4 teilerfremd ist, ergibt sich, dass q nur $+1$ oder -1 sein kann.
Also ist $x = \frac{p}{q}$ eine ganze Zahl, w. z. b. w.

Aufgabe 181033:
Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen a, für die erstens die Terme, die auf beiden Seiten der Gleichung

$$\frac{1}{a^2-3a+2} + \frac{1}{a^2-5a+6} + \frac{1}{a^2-7a+12} + \frac{1}{a^2-9a+20} + \frac{1}{a^2-11a+30} + \frac{1}{a^2-13a+42} = \frac{a(a+5)}{a^2-8a+7}$$

stehen, definiert sind und zweitens diese Gleichung gilt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Für jede reelle Zahl a gilt

$$\begin{aligned} a^2-3a+2 &= (a-1)(a-2) \quad ; \quad a^2-5a+6 = (a-2)(a-3) \\ a^2-7a+12 &= (a-3)(a-4) \quad ; \quad a^2-9a+20 = (a-4)(a-5) \\ a^2-11a+30 &= (a-5)(a-6) \quad ; \quad a^2-13a+42 = (a-6)(a-7) \\ a^2-8a+7 &= (a-1)(a-7) \end{aligned}$$

Daher sind die Terme auf beiden Seiten der gegebenen Gleichung genau dann definiert, wenn a keine der Zahlen $1, 2, \ldots, 7$ ist. Trifft dies zu, so gilt ferner für $k = 1, \ldots, 6$

$$\frac{1}{(a-k)(a-(k+1))} = -\frac{1}{a-k} + \frac{1}{a-(k+1)}$$

Also ist für reelles $a \neq 1, 2, \ldots, 7$ die gegebene Gleichung genau dann erfüllt, wenn

$$\frac{1}{a-1} + \frac{1}{a-7} = \frac{a(a+5)}{a^2-8a+7}$$

oder, für reelles $a \neq 1, 2, \ldots, 7$ gleichbedeutend hiermit

$$\frac{-(a-7)+(a-1)}{(a-1)(a-7)} = \frac{6}{a^2-8a+7} = \frac{a^2+5a}{a^2-8a+7}$$

$$a^2 + 5a - 6 = 0$$

gilt. Da die letztgenannte Gleichung genau die reellen Lösungen $a = 1$ und $a = -6$ hat, ist sie für reelles $a \neq 1, 2, \ldots, 7$ äquivalent mit $a = -6$. Also erfüllt genau diese Zahl die Bedingungen der Aufgabe.

Aufgabe 231031:
Ermitteln Sie alle diejenigen geordneten Paare $(g;r)$ aus einer ganzen Zahl g und einer reellen Zahl r, für die

$$\frac{r}{r^2-6r+10}=g$$

gilt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
1. Wenn $(g;r)$ ein Paar mit den verlangten Eigenschaften ist, so folgt:
Ist $g=0$, so ist $r=0$. Ist $g\neq 0$, so folgt: r erfüllt die Gleichung

$$r^2-(6+\frac{1}{g})r+10=0$$

Deren Diskriminante ist folglich nichtnegativ, d. h., es gilt

$$\left(3+\frac{1}{2g}\right)^2-10\geq 0 \qquad \Rightarrow \qquad \left|3+\frac{1}{2g}\right|\geq\sqrt{10}$$

Da g ganzzahlig und von 0 verschieden ist, gilt $|g|\geq 1$, also $\frac{1}{|g|}\leq 1$ und daher $\frac{1}{g}\geq -1$, $3+\frac{1}{2g}\geq 3-\frac{1}{2}>0$
Also ist $|3+\frac{1}{2g}|=3+\frac{1}{2g}$ und es folgt weiter

$$3+\frac{1}{2g}\geq\sqrt{10} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{2g}\geq\sqrt{10}-3$$

Wegen $\sqrt{10}-3>0$ also einerseits $\frac{1}{2g}>0$, $g>0$, andererseits $2g\leq\frac{1}{\sqrt{10}-3}=\sqrt{10}+3<8$, $g<4$.
Daher verbleiben (im Fall $g\neq 0$) nur die Möglichkeiten der folgenden Tabelle

g	$r^2-(6+\frac{1}{g}r)+10=0$	Lösungen	
1	$r^2-7r+10=0$	$r_{1,2}=\frac{7}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}}$	$r_1=5$, $r_2=2$
2	$r^2-6{,}5r+10=0$	$r_{1,2}=\frac{13}{4}\pm\sqrt{\frac{9}{16}}$	$r_1=4$, $r_2=\frac{5}{2}$
3	$r^2-\frac{19}{3}r+10=0$	$r_{1,2}=\frac{19}{6}\pm\sqrt{\frac{1}{36}}$	$r_1=\frac{10}{3}$, $r_2=3$

Also können höchstens folgende geordnete Paare die Bedingungen der Aufgabe erfüllen:

$$(0;0),\quad (1;5),\quad (1;2),\quad (2;4),\quad (2;\frac{5}{2}),\quad (3;\frac{10}{3}),\quad (3;3)$$

2. Diese Paare $(g;r)$ erfüllen die Bedingungen der Aufgabe; denn in ihnen ist jeweils g ganzzahlig und es gilt:

g	r	$r^2-6r+10$	$\frac{r}{r^2-6r+10}$
0	0	10	0
1	5	$25-30+10=5$	1
1	2	$4-12+10=2$	1
2	4	$16-24+10=2$	2
2	$\frac{5}{2}$	$\frac{25}{4}-\frac{60}{4}+\frac{40}{4}=\frac{5}{4}$	2
3	$\frac{10}{3}$	$\frac{100}{9}-\frac{180}{9}+\frac{90}{9}=\frac{10}{9}$	3
3	3	$9-18+10=1$	3

Aufgabe 281034:
Ermitteln Sie alle diejenigen Paare $(a;b)$ reeller Zahlen, die die folgenden Gleichung (1) erfüllen!

$$a^3-b^3-a^2+b^2+a-b=0 \qquad (1)$$

Lösung von Steffen Polster:
Durch Polynomdivision folgt $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ und mittels binomischer Formel $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$. Dann wird aus (1)

$$\begin{aligned} a^3 - b^3 - a^2 + b^2 + a - b &= (a-b)(a^2 + ab + b^2) + (a-b)(a+b) + (a-b) = 0 \\ &= (a-b)(a^2 + ab + b^2 + a + b + 1) = 0 \end{aligned}$$

Offensichtlich erfüllen damit alle Paare (a,b) mit $a = b$ die Gleichung (1). Der zweite Faktor kann nicht Null werden, da gilt

$$\begin{aligned} a^2 + ab + b^2 + a + b + 1 = a^2 + a(b+1) + b^2 + b + 1 = 0 \\ a_{1;2} &= -\frac{b+1}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2 + 2b + 1 - (4b^2 + 4b + 4)}{4}} \\ &= -\frac{b+1}{2} \pm \sqrt{-\frac{3}{4}(b^2 + \frac{2}{3}b + 1)} = -\frac{b+1}{2} \pm \sqrt{-\frac{3}{4}\left(\left(b + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{8}{9}\right)} \end{aligned}$$

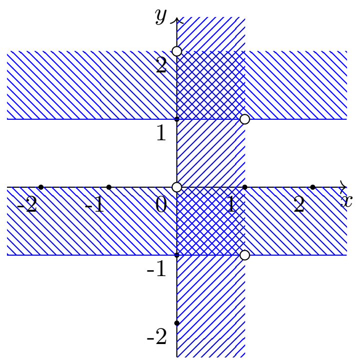
Der Radikand ist damit stets negativ. Damit gibt es kein reelles Paar (a,b) mit $(a^2 + ab + b^2 + a + b + 1) = 0$.
(1) hat ausschließlich alle Paare (a,b) mit $a = b$ als Lösungen.

Aufgabe 311032:
Man ermittle und zeichne in einem x,y-Koordinatensystem alle diejenigen Punkte, deren Koordinaten $(x; y)$
a) die Gleichung $[x]^2 + [y]^2 = 1 \qquad (1)$
b) die Gleichung $[x^2] + [y^2] = 1 \qquad (2)$
erfüllen.
Gegebenenfalls ist jeweils durch einen der Zeichnung beigefügten Text zu sichern, dass für jeden Punkt der Ebene eindeutig aus der Darstellung hervorgeht, ob er zur Menge der anzugebenden Punkte gehört oder nicht.
Hinweis: Ist z eine reelle Zahl, so wird diejenige ganze Zahl g, für die $g \leq z < g + 1$ gilt, mit $g = [z]$ bezeichnet.

Lösung von Steffen Polster:
a) Nach Definition ergibt $[z]$ für jedes reelle z eine ganze Zahl. Die Quadrate $[x]^2, [y]^2$ sind sicher ≥ 0 und damit wird $[x]^2, [y]^2 \in \{0, 1, 4, 9, ...\}$. Ist (x,y) Lösung von (1), so können $[x]^2, [y]^2$ nur die Werte 0 oder 1 annehmen:

1. Fall: $[x]^2 = 0, [y]^2 = 1$

Damit $[x]^2 = 0$ gilt, muss $[x] = 0$ und $0 \leq x < 1$ gelten. $[y]^2 = 1$ ergibt $[y] = 1$ oder $[y] = -1$ und die möglichen Intervalle $1 \leq y < 2$ bzw. $-1 \leq y < 0$.

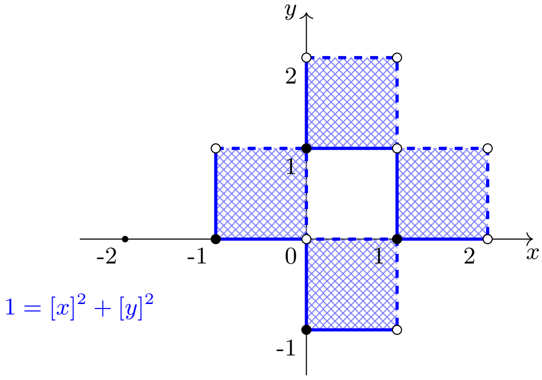


In der grafischen Darstellung sind damit alle Punkte der doppelgerasterten Bereiche Lösung. Dabei gehören die Punkte auf den Strecken (0,2) - (0,1) – (1,1) und (0,0) – (0, – 1) – (–1,1) mit Ausnahme der Endpunkte (0,2), (1,1), (0,0) und (–1,1) zur Lösungsmenge. Die anderen Seitenränder der zwei quadratischen Bereiche gehören nicht zur Lösung.

2. Fall: $[x]^2 = 1, [y]^2 = 0$

In Analogie zum 1.Fall wird: $0 \leq y < 1$ und $1 \leq x < 2$ bzw. $-1 \leq x < 0$.

Die Lösungsmenge der Aufgabe a) ist damit

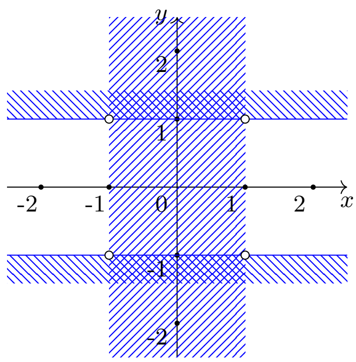


In der grafischen Darstellung sind damit alle Punkte der doppelgerasterten Bereiche Lösung. Dabei gehören die Punkte auf den Strecken (0,2) - (0,1) – (1,1), (0,0) – (0, – 1) – (–1,1), (–1,1) – (–1,0) – (0,0) und (1,1) – (1,0) – (2,0) mit Ausnahme der Endpunkte (0,2), (1,1), (0,0), (–1,1), (2,0) zur Lösungsmenge. Die anderen Seitenränder der zwei quadratischen Bereiche gehören nicht zur Lösung.

b) Die Quadrate $[x^2], [y^2]$ sind sicher ≥ 0, da x^2 und y^2 nicht negativ sind. Da $[x^2], [y^2]$ ganzzahlig sind und wird $[x^2], [y^2] \in \{0, 1, 2, 3, ...\}$. Ist (x,y) Lösung von (2), so können $[x^2], [y^2]$ nur die Werte 0 oder 1 annehmen:

1. Fall: $[x^2] = 0, [y^2] = 1$

Damit $[x^2] = 0$ gilt, muss x^2 im Intervall $0 \leq x^2 < 1$ liegen und somit $-1 < x < 1$ gelten.
$[y^2] = 1$ ergibt das Intervall $1 \leq y^2 < 2$ und damit die zwei Intervalle $1 \leq y < \sqrt{2}$ und $-\sqrt{2} < y \leq -1$.

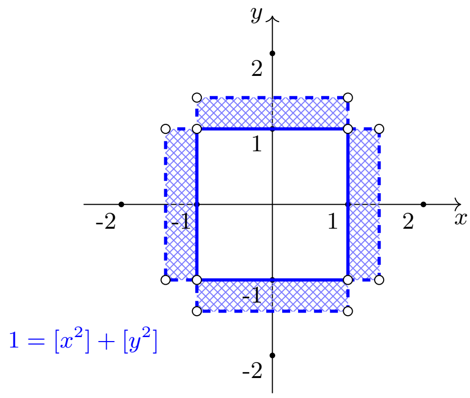


In der grafischen Darstellung sind damit alle Punkte der doppelgerasterten Bereiche Lösung. Dabei gehören die Punkte auf den Strecken von (–1,1) nach (1,1) sowie von (–1,–1) nach (–1,1) mit Ausnahme der Endpunkte (–1,1), (1,1), (–1, – 1) und (1, – 1) zur Lösungsmenge. Die anderen Seitenränder der zwei rechteckigen Bereiche gehören nicht zur Lösung

2. Fall: $[x^2] = 1, [y^2] = 0$

In Analogie zum 2.Fall wird: $-1 < y < 1$ und $1 \leq x < \sqrt{2}$ bzw. $-\sqrt{2} < x \leq -1$.

Die Lösungsmenge der Aufgabe b) ist damit



Aufgabe 331031:
Beweisen Sie, dass sich der Bruch $\frac{1}{1994}$ als Summe von genau 1994 Stammbrüchen darstellen lässt, von denen keine zwei einander gleich sind!
Hinweis: Ein Bruch heißt genau dann ein Stammbruch, wenn sein Zähler 1 lautet und sein Nenner eine natürliche Zahl ist.

Lösung von cyrix:
Es ist

$$\frac{1}{1994} = \frac{1}{2 \cdot 1994} + \frac{1}{2 \cdot 1994} = \frac{1}{2 \cdot 1994} + \frac{1}{2^2 \cdot 1994} + \frac{1}{2^2 \cdot 1994} = \dots = \frac{1}{2 \cdot 1994} + \frac{1}{2^2 \cdot 1994} + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{2^{1992} \cdot 1994} + \frac{1}{2^{1992} \cdot 1994} = \frac{1}{2 \cdot 1994} + \frac{1}{2^2 \cdot 1994} + \dots + \frac{1}{2^{1992} \cdot 1994} + \frac{1}{3 \cdot 2^{1991} \cdot 1994} + \frac{1}{6 \cdot 2^{1991} \cdot 1994}$$

$\square$.

Alternativ-Lösung von cyrix:
Wir zeigen allgemeiner, dass sich jeder Stammbruch $\frac{1}{k}$ als Summe von $n \geq 3$ verschiedenen Stammbrüchen schreiben lässt. Die Behauptung folgt dann für $n = k = 1994$.

Sei zuerst $n = 3$. Dann gilt offenbar $\frac{1}{k} = \frac{1}{2k} + \frac{1}{3k} + \frac{1}{6k}$, sodass sich jeder Stammbruch als Summe von drei verschiedenen Stammbrüchen schreiben lässt.

Lässt sich aber jeder Stammbruch als Summe von $n - 1$ verschiedenen Stammbrüchen darstellen, so auch jeder als Summe von n verschiedenen:

Ist nämlich $\frac{1}{2k} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{n-1}}$ eine Darstellung von $\frac{1}{2k}$ als Summe von $n - 1 \geq 3$ paarweise verschiedener Stammbrüche, so sind deren Nenner alle größer als $2k$ und es gilt $\frac{1}{k} = \frac{1}{2k} + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{n-1}}$, sodass auch jeder Stammbruch als Summe von genau n verschiedenen Stammbrüchen geschrieben werden kann.
Wiederholte Anwendung dieses Prozesses, der die Summandenanzahl jeweils um eins erhöht, zeigt diese Aussage für alle natürlichen Zahlen $n \geq 3$, $\square$.

Aufgabe 341032:
Berechnen Sie die Zahl

$$123456785 \cdot 123456787 \cdot 123456788 \cdot 123456796 - 123456782 \cdot 123456790 \cdot 123456791 \cdot 123456793$$

ohne die Zahlenwerte der beiden Produkte einzeln zu berechnen!

Lösung von cyrix:
Mit $n := 123456789$ ist also die Differenz

$$D := (n-4) \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot (n+7) - (n-7) \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+4)$$

zu berechnen. Dabei ergeben sich beim Ausmultiplizieren der Produkte jeweils gleiche Vorzeichen bei den Termen mit geraden Exponenten von n und verschiedene bei ungeraden Exponenten von n. Es ergibt sich also

$$= 2n^3 \cdot (-4-2-1+7) + 2n \cdot (-8+56+28+14) = 180n = 22.222.222.020$$

IV Runde 4

Aufgabe 011041:
Wie auf dem XXII. Parteitag der KPdSU mitgeteilt wurde, wird in der Sowjetunion von 1960 bis 1980 die Produktion von Produktionsmitteln (d.s. Rohstoffe, Maschinen, Ausrüstungen für Industrie, Landwirtschaft und Verkehr usw.) auf das 6,8 fache steigen.
Aber auch die Produktion von Gebrauchsgütern (Güter, die für den Bedarf der Bevölkerung bestimmt sind) soll stark anwachsen, sie soll auf das Fünffache steigen. Die gesamte Industrieproduktion steigt auf das 6,2 fache.
a) Wieviel Prozent der gesamten Industrieproduktion betrug der Anteil der Produktion von Produktionsmitteln im Jahr 1960?
b) Wieviel Prozent würde er im Jahre 1980 betragen?

Lösung von Eckard Specht:
Seien a_0, b_0 und c_0 die Produktion von Produktionsmitteln, Gebrauchsgütern bzw. die gesamte Industrieproduktion im Jahr 1960 sowie a_1, b_1 und c_1 die avisierten Größen im Jahr 1980.
Dann gilt $a_1 = 6{,}8a_0$, $b_1 = 5{,}0b_0$ und $c_1 = 6{,}2c_0$ und ferner $a_0 + b_0 = c_0$ und $a_1 + b_1 = c_1$ bzw. $6{,}8a_0 + 5{,}0b_0 = 6{,}2c_0$. Die erste Gleichung wird nun durch c_0, die zweite durch $6{,}2c_0$ dividiert. Dies liefert das lineare Gleichungssystem

$$\frac{a_0}{b_0} + \frac{b_0}{c_0} = 1 \qquad ; \qquad \frac{34}{31}\frac{a_0}{c_0} + \frac{25}{31}\frac{b_0}{c_0} = 1$$

welches die Lösung $\frac{a_0}{c_0} = \frac{2}{3}$ und $\frac{b_0}{c_0} = \frac{1}{3}$ besitzt.
a) Im Jahr 1960 betrug der Anteil der Produktion von Produktionsmitteln demnach $\frac{a_0}{c_0} = \frac{2}{3} = 66{,}7\%$.
b) Im Jahr 1980 hätte dieser Anteil $\frac{34}{31}\frac{a_0}{c_0} = \frac{68}{93} = 73{,}1\%$ betragen.

Aufgabe 051044:
Man berechne die Differenz D aus der Summe der Quadrate aller geraden natürlichen Zahlen ≤ 100 und der Summe der Quadrate aller ungeraden natürlichen Zahlen < 100.

Lösung von ZePhoCa:
Es gilt: Summe der ungeraden Quadrate $< 100 = \sum\limits_{i=1}^{50}(2i-1)^2$ und Summe der geraden Quadrate $\leq 100 = \sum\limits_{i=1}^{50}(2i)^2$. Also gilt

$$D = \sum_{i=1}^{50}(2i)^2 - \sum_{i=1}^{50}(2i-1)^2 = \sum_{i=1}^{50}4i^2 - \sum_{i=1}^{50}(4i^2-4i+1) = -50 + \sum_{i=1}^{50}4i =$$
$$= -50 + 4\cdot\frac{50}{2}\cdot 51 = 5050$$

Aufgabe 051045:
Man ermittle sämtliche reellen Zahlen x und y, die die Gleichung erfüllen:

$$[\sin(x-y)+1]\cdot[2\cos(2x-y)+1] = 6$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wegen $-1 \leq \sin\alpha \leq 1$ und $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$ gilt

$$[\sin(x-y)+1]\cdot[2\cos(2x-y)+1] \leq 6$$

für alle reellen x und y, und das Gleichheitszeichen steht genau dann, wenn gleichzeitig

$$\sin(x-y) = 1 \qquad ; \qquad \cos(2x-y) = 1 \tag{1}$$

gilt. Das Gleichungssystem (1) ist daher mit der gegebenen Gleichung äquivalent und genau dann erfüllt, wenn es zwei ganze Zahlen m und n gibt, so dass

$$x - y = \frac{\pi}{2} + 2m\pi \qquad ; \qquad 2x - y = 2n\pi$$

gilt. Daher erhält man alle Lösungen der gegebenen Gleichung, wenn $k = n - m$ und m in der Gleichungen

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2(n-m)\pi = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$
$$y = [2(n-2m)-1]\,\pi = [2(k-m)-1]\,\pi$$

unabhängig voneinander alle ganzen Zahlen durchlaufen.

Aufgabe 071044:
Ermitteln Sie den Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks aus der Länge seiner Hypotenuse und der Summe der Sinus seiner spitzen Winkel!
Welche Werte kann die Sinussumme annehmen?

Lösung von cyrix:
Wir bezeichnen die Winkel und Seiten des Dreiecks auf kanonische Weise, sodass die Hypotenuse c, die Katheten a und b sowie die ihnen gegenüberliegenden Innenwinkel mit α bzw. β lautet.

Nach der Definition der Sinusfunktion im rechtwinkligen Dreieck gilt $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ und analog

$$\sin\beta = \frac{b}{c} \qquad \text{also} \qquad \sin\alpha + \sin\beta = \frac{a+b}{c}$$

bzw.

$$A = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{4}\cdot(2ab) = \frac{1}{4}\cdot((a+b)^2 - (a^2+b^2)) = \frac{1}{4}\cdot\left((\sin\alpha+\sin\beta)^2c^2 - c^2\right) =$$
$$= \frac{c^2}{4}\cdot((\sin\alpha+\sin\beta)^2 - 1)$$

Für feste Hypotenusenlänge c kann sich, damit das Dreieck bei C einen rechten Winkel besitzt, nach dem Satz des Thales der Punkt C nur auf einem Kreis, der die Hypotenuse als Durchmesser hat, bewegen. Damit ist die Höhe auf c nach unten durch 0 und nach oben durch den Umkreisradius, also $\frac{c}{2}$ beschränkt, sodass der Flächeninhalt des Dreiecks im Intervall $\left(0; \frac{1}{2} \cdot c \cdot \frac{c}{2}\right]$ aus Stetigkeitsgründen jeden Wert annehmen kann, sodass $0 < (\sin\alpha + \sin\beta)^2 - 1 \leq 1$ gilt und damit die Sinussumme also genau die Werte aus dem Intervall $(1; \sqrt{2}]$ annimmt.

Aufgabe 091044:
Beweisen Sie folgenden Satz!
Wenn s und t von Null verschiedene reelle Zahlen und a, b und c drei paarweise voneinander verschiedene Lösungen der Gleichung $sx^2 \cdot (x-1) + t \cdot (x+1) = 0$ sind, so gilt:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = -1$$

Lösung von cyrix:
a,b,c sind die drei Nullstellen des normierten Polynoms $x^2 \cdot (x-1) + \frac{t}{s} \cdot (x+1)$. Daher gilt

$$(x-a)(x-b)(x-c) = x^2(x-1) + \frac{t}{s} \cdot (x+1) \ .$$

Durch Ausmultiplizieren und Koeffizientenvergleich erhalten wir

$$\begin{aligned} -a-b-c &= -1 \\ ab+bc+ac &= \frac{t}{s} \\ -abc &= \frac{t}{s} \end{aligned}$$

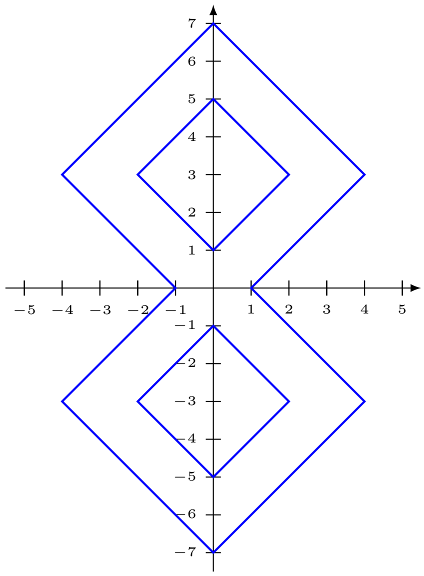
und somit

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = (a+b+c) \cdot \frac{ab+bc+ac}{abc} = 1 \cdot \frac{\frac{t}{s}}{-\frac{t}{s}} = -1 \ .$$

Aufgabe 131045:
Veranschaulichen Sie in einem rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem die Menge aller Zahlenpaare $(x; y)$, die die folgende Gleichung erfüllen!

$$||x| + ||y| - 3| - 3| = 1$$

Lösung von cyrix:
Zunächst stellen wir fest, dass $f(x,y) = f(-x,y)$ und $f(x,y) = f(x,-y)$, es liegt also eine Symmetrie zur x-Achse und zur y-Achse vor. Wir können uns also auf den ersten Quadranten beschränken. Es gilt dann $x,y > 0$ und die Gleichung geht über in $|x + |y-3| - 3| = 1$.
Sei nun $0 < y < 3$. Wir erhalten $|x - y + 3 - 3| = 1 \iff |x-y| = 1$. Für $x > y$ erhalten wir dann $y = x - 1$ und für $y > x$ folgt $y = x + 1$. Sei nun $y \geq 3$.
Dann geht unsere Gleichung über in $|x + y - 6| = 1$. Für $x + y < 6$ erhalten wir $y = -x + 5$ und für $x + y \geq 6$ folgt $y = 7 - x$.
Zeichnen wir die 4 Geraden und spiegeln diese, so erhalten wir also folgendes schönes Bild:



Aufgabe 141041:
Es sei
$$z = \left(1 - \frac{4}{1^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{4}{3^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{4}{5^2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{4}{199^2}\right)$$
Man stelle die rationale Zahl z in der Form $z = \frac{p}{q}$ dar, wobei p, q ganze, teilerfremde Zahlen sind und $q > 0$ ist!

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet":
Es ist
$$1 - \frac{4}{(2k-1)^2} = \frac{4k^2 - 4k - 3}{(2k-1)^2} = \frac{2k-3}{2k-1} \cdot \frac{2k+1}{2k-1}$$
Daraus folgt
$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{4}{(2k-1)^2}\right) = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-3}{2k-1} \cdot \frac{2k+1}{2k-1} = \frac{-1}{1} \cdot \frac{3}{1} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{5} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-3}{2n-1} \cdot \frac{2n+1}{2n-1} = -\frac{2n+1}{2n-1}$$
Nun ist $\text{ggT}(2n+1, 2n-1) = 1$, dieses folgt z. B. leicht mithilfe des euklidischen Algorithmus:
$2n + 1 = 1 \cdot (2n - 1) + 2$
$2n - 1 = (n - 1) \cdot 2 + 1$
$2 = 2 \cdot 1 + 0$
Der Produktwert z folgt mit $n = 100$: $z = -\frac{2 \cdot 100 + 1}{2 \cdot 100 - 1} = -\frac{201}{199}$

Aufgabe 151043A:
Ist z eine reelle Zahl, so werde mit $[z]$ diejenige ganze Zahl $[z] = g$ bezeichnet, für die $g \leq z < g + 1$ gilt.
Man ermittle alle reellen Zahlen x, für die $-10 \leq x \leq 2$ und $[x^2] = [x]^2$ gilt!

Lösung von MontyPythagoras:
Offenkundig wird durch $[x]$ die reelle Zahl x auf die nächstkleinere ganze Zahl abgerundet. Gemäß Definition gilt:
$$[x^2] \leq x^2 < [x^2] + 1$$
Und laut Aufgabenstellung $[x^2] = [x]^2$, so dass gelten muss:
$$[x]^2 \leq x^2 < [x]^2 + 1$$

Es sei nun $x = g + f$, wobei $g = [x]$ der nächstkleineren ganzen Zahl entspreche, und es gilt darüber hinaus $0 \leq f < 1$. Daher:

$$g^2 \leq (g+f)^2 < g^2 + 1$$
$$g^2 \leq g^2 + 2gf + f^2 < g^2 + 1$$
$$0 \leq 2gf + f^2 < 1$$

Die Gleichung ist schon einmal grundsätzlich erfüllt für $f = 0$, so dass alle ganzzahligen $x \in \{-10, -9, ..., 1, 2\}$ die Gleichung erfüllen. Sei nun x nicht ganzzahlig, also $f > 0$. Aufgeteilt auf zwei Ungleichungen muss gelten:

$$(1) \qquad 2gf + f^2 > 0 \qquad \text{und} \qquad (2) \qquad 2gf + f^2 < 1$$

Da $f > 0$ ist, folgt aus (1) als weitere Voraussetzung

$$2g + f > 0$$

woraus man schon einmal schließen kann, dass $g \geq 0$ sein muss, da $f < 1$ ist. Somit kommt grundsätzlich nur $x > 0$ in Frage, und damit nur $g = 0$ oder $g = 1$. Aus (2) folgt:

$$-g - \sqrt{g^2+1} < f < -g + \sqrt{g^2+1}$$

Da außerdem $f > 0$ gelten muss, die linke Seite hier aber kleiner als null ist, folgt als schärfere Bedingung:

$$0 < f < -g + \sqrt{g^2+1} \qquad \text{oder} \qquad g < x < \sqrt{g^2+1}$$

Für $g = 0$ bedeutet das $0 < x < 1$, für $g = 1$ folgt $1 < x < \sqrt{2}$.
Gesamtlösung: Vereinigt man diese Lösungsintervalle mit den ganzzahligen Lösungen $x = 0$ und $x = 1$, gilt allgemein $0 \leq x < \sqrt{2}$, sowie alle ganzen Zahlen im Intervall $[-10, 2]$.

Aufgabe 161043B:
Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen p, für die die Gleichung

$$\frac{x^2 - p + 3p^2}{x - p} + 2x = 3$$

eine Lösungsmenge L hat, die
a) leer ist,
b) genau ein Element enthält,
c) aus mehr als einem Element besteht!

Lösung von Steffen Polster:
Sicher muss $x \neq p$ gelten. Schrittweises Umformen liefert

$$3x^2 - 2px + p(3p - 1) = 3(x - p)$$
$$3x^2 - x \cdot (2p + 3) + p \cdot (3p + 2) = 0$$
$$x^2 - \frac{2p+3}{3}x + \frac{p(3p+2)}{3} = 0$$

Diese quadratische Gleichung hat die von p abhängigen Lösungen

$$x_{1;2} = \frac{2p+3}{6} \pm \sqrt{\frac{1}{6}(-32p^2 - 12p + 9)}$$

Die Diskriminante ist $D = \frac{1}{6}(-32p^2 - 12p + 9)$. Für $D < 0$ existiert keine reelle Lösung x, für $D = 0$ genau eine Lösung x_0 und für $D > 0$ zwei Lösungen x_1, x_2.

$$-32p^2 - 12p + 9 = 0 \Rightarrow p_1 = -\frac{3}{4}; \quad p_2 = \frac{3}{8}$$

Die Funktion $f(p) = -32p^2 - 12p + 9$ wäre in einer grafischen Darstellung eine nach unten geöffnete Parabel (Koeffizient vor p^2 ist negativ), hätte ein lokales Maximum und zwischen p_1 und p_2 positive Funktionswerte.
Damit ergibt sich als Lösung:
1. für $p < -\frac{3}{4}$ oder $p > \frac{3}{8}$ hat die Ausgangsgleichung keine reelle Lösung x.
2. für $p_1 = -\frac{3}{4}$ und $p_2 = \frac{3}{8}$ hat die Ausgangsgleichung jeweils genau eine reelle Lösung x.
3. für $-\frac{3}{4} < p < \frac{3}{8}$ hat die Ausgangsgleichung jeweils genau zwei reelle Lösungen x_1 und x_2.

Aufgabe 191042:
Beweisen Sie, dass die folgende Gleichheit gilt!

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + -... + \frac{1}{465} - \frac{1}{466} = \frac{1}{234} + \frac{1}{235} + \frac{1}{236} + ... + \frac{1}{465} + \frac{1}{466}$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wir formen die Gleichung in der Aufgabenstellung äquivalent um wie folgt

$$1 - \frac{1}{2} + -... + \frac{1}{233} = \frac{2}{234} + \frac{1}{236} + ... + \frac{2}{466}$$
$$1 - \frac{1}{2} + -... + \frac{1}{233} = \frac{1}{117} + \frac{1}{118} + ... + \frac{1}{233}$$

$$1 - \frac{1}{2} + -... - \frac{1}{166} = \frac{2}{118} + \frac{2}{120} + ... + \frac{2}{232}$$
$$1 - \frac{1}{2} + -... - \frac{1}{166} = \frac{1}{59} + \frac{1}{60} + ... + \frac{1}{116}$$

Entsprechend ergeben sich folgende weitere Zwischenergebnisse

$$1 - \frac{1}{2} + -... - \frac{1}{58} = \frac{1}{30} + \frac{1}{31} + ... + \frac{1}{58}$$
$$1 - \frac{1}{2} + -... + \frac{1}{29} = \frac{1}{15} + \frac{1}{16} + ... + \frac{1}{29}$$
$$1 - \frac{1}{2} + -... - \frac{1}{14} = \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + ... + \frac{1}{14}$$
$$1 - \frac{1}{2} + -... + \frac{1}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + ... + \frac{1}{7}$$
$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

Die letzte Gleichung ist offensichtlich wahr. Da die Umformungen äquivalent sind, ist damit die behauptete Gleichung bewiesen.

Aufgabe 221043A:
a) Jemand fragt nach reellen Zahlen a, b mit der Eigenschaft, dass die Gleichung

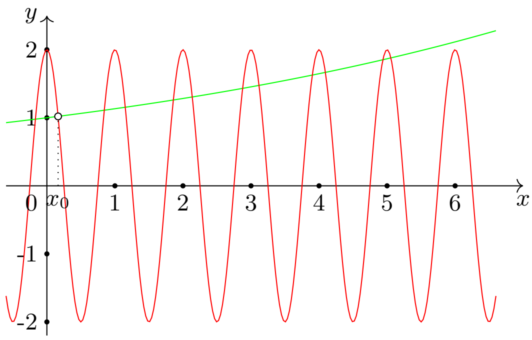
$$a^x = b \cdot \cos x \tag{1}$$

genau 1983 positive reelle Lösungen x hat (unabhängig von der Anzahl der eventuell vorhandenen nicht positiven Lösungen).
Geben Sie ein solches Paar $(a; b)$ reeller Zahlen an und beweisen Sie, dass es die genannte Eigenschaft besitzt!
b) Ermitteln Sie zu dem von Ihnen angegebenen Paar $(a; b)$ für eine positive Lösung x_0 der Gleichung (1) die Zahl $[x_0]$, d.i. diejenige ganze Zahl $g = [x_0]$, für die $g \leq x_0 < g + 1$ gilt!

c) Gibt es auch eine reelle Zahl a mit $a > 0$ und $a \neq 1$ derart, dass für jede reelle Zahl $b \neq 0$ die Gleichung (1) unendlich viele positive reelle Lösungen x hat?
Hinweise:
1. Als Näherungswert für π kann auf 4 Dezimalstellen genau $\pi = 3{,}1416$ verwendet werden.
2. Bei der Herleitung von Aussagen über Lösungen der Gleichung (1) sind auch graphisch-anschaulich begründete Beweismittel zugelassen.

Lösung von MontyPythagoras:
Die Zahl der positiven reellen Lösungen ist nur dann beschränkt, wenn $a > 1$ ist, weil nur dann mit wachsendem x irgendwann $a^x > |b|$ ist, und damit die Anzahl der Lösungen endlich ist. Bei $a < 1$ würde a^x gegen null gehen und unendlich viele Schnittpunkte mit $b \cos x$ haben. Da $a^x > 1$ für $x > 0$ ist, muss außerdem $|b| > 1$ sein, um überhaupt Schnittpunkte zu produzieren. Damit ist Aufgabenteil c) schon beantwortet.

Aufgrund der relativ großen Beliebigkeit kann man für Aufgabenteile a) und b) „angenehme“ Zahlen wählen. Zeichnet man beispielhaft die Graphen der Kurven a^x und $b \cos x$, stellt sich das Problem wie folgt dar:



In grün dargestellt ist die Funktion $f(x) = a^x$, in rot die Funktion $g(x) = b \cos x$, wobei allerdings auf der x-Achse hier Vielfache von 2π gezählt werden.

Man erkennt leicht, dass innerhalb eines Intervalls von der Breite 2π immer genau zwei Schnittpunkte liegen. Die Kurve f schneidet immer einen positiven Peak der Kosinusfunktion doppelt, so dass in diesem Beispiel eine ungerade Anzahl von positiven Schnittpunkten vorliegt. Man muss die Zahlen a und b also so wählen, dass die „grüne“ Kurve zwischen zwei positiven Peaks der „roten“ Kurve austritt. In diesem Beispiel tritt sie nach Peak Nummer 5 aus und wir haben 11 Schnittpunkte.

Da wir genau 1983 positive Nullstellen wollen, muss der Austritt erfolgen nach Peak Nummer 991. Daher muss gelten:

$$a^{991 \cdot 2\pi} = a^{1982\pi} < b$$

und

$$a^{992 \cdot 2\pi} = a^{1984\pi} > b$$

Wir setzen daher einfach

$$b = a^{1983\pi}$$

mit $a{,}b > 1$. Damit ist Aufgabenteil a) immer erfüllt. Wir geben nun $b = 2$ vor, so dass

$$a = 2^{\frac{1}{1983\pi}}$$

Dann ist a nur geringfügig größer als 1. Die „grüne“ Kurve beginnt also sehr flach, es ist $f(x) \approx 1$ für kleine x. Der erste Schnittpunkt liegt also etwa bei

$$1 \approx 2 \cos x_0$$

$$x_0 \approx \frac{\pi}{3} \approx 1.047$$

Daher gilt $[x_0] = 1$, was Aufgabenteil b) erfüllt.

Aufgabe 221045:
Beweisen Sie, dass die Gleichung

$$x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x - 16 = 0$$

genau zwei reelle Lösungen hat!

Lösung von cyrix:
Es ist

$$\begin{aligned} 0 &= x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x - 16 = x^4 - 16 + 5x^3 + 6x^2 - 4x = (x^2-4)(x^2+4) + 5x \cdot x^2 + 6x^2 - 4x \\ &= (x^2-4)(x^2+4) + (2x+3x) \cdot x^2 + (2x) \cdot (3x) + (2x - 3x) \cdot 4 \\ &= (x^2-4)(x^2+4) + (2x) \cdot (x^2+4) + (3x) \cdot (x^2-4) + (2x) \cdot (3x) \\ &= (x^2 - 4 + 2x) \cdot (x^2 + 4 + 3x) = (x^2 + 2x - 4) \cdot (x^2 + 3x + 4)\ . \end{aligned}$$

Da $x^2 + 3x + 4 = (x + \frac{3}{2})^2 + \frac{7}{4}$ stets positiv ist, folgt also aus der Gleichung der Aufgabenstellung $x^2 + 2x - 4 = 0$ bzw. $(x+1)^2 = 5$, also $x = -1 \pm \sqrt{5}$, sodass die Gleichung genau zwei verschiedene reelle Lösungen besitzt, $\square$.

Aufgabe 231045:
Ermitteln Sie alle diejenigen Winkelgrößen x, für die $0° \leq x \leq 180°$ (1) und

$$\left(2^{\sqrt{\sin x}} - \sin x\right) \cdot \sin x = 1 \qquad (2)$$

gilt!

Lösung von cyrix:
Die Gleichung ist äquivalent zu $\sin x \cdot 2^{\sqrt{\sin x}} = 1 + \sin^2 x$.

Für den angegebenen Bereich für x ist $0 \leq \sin x \leq 1$. Also ist $\sqrt{\sin x} \leq 1$ und damit $2^{\sqrt{\sin x}} \leq 2$, wobei Gleichheit nur genau für $\sin x = 1$, also $x = 90°$ eintritt.

Für alle reellen Zahlen z gilt $2z \leq 1 + z^2$, wobei Gleichheit nur für $z = 1$ eintritt, da diese Ungleichung äquivalent ist zu $0 \leq 1 - 2z + z^2 = (1-z)^2$.
Also ist für $x \neq 90°$ und damit $z := \sin x \neq 1$

$$1 + \sin^2 x = \sin x \cdot 2^{\sqrt{\sin x}} < \sin x \cdot 2 < 1 + \sin^2 x$$

was ein Widerspruch darstellt. Also kann x nicht verschieden von $90°$ sein.
Für $x = 90°$ und damit $\sin x = 1$ folgt aber schnell die Identität $\left(2^{\sqrt{1}} - 1\right) \cdot 1 = (2^1 - 1) = 1$, sodass es genau eine Lösung für x im vorgegebenen Intervall gibt, nämlich $x = 90°$.

Aufgabe 251044:
Ermitteln Sie alle diejenigen von 0 verschiedenen reellen Zahlen r, für die die Gleichung

$$\frac{2x}{r(x+r)} + \frac{1}{x-2r} = \frac{4x - r + 6}{r(x-2r)(x+r)}$$

a) genau zwei verschiedene reelle Lösungen, b) genau eine reelle Lösung, c) keine reelle Lösung besitzt!

Lösung von cyrix:
Ist $x \neq -r$ und $x \neq 2r$, so geht die Gleichung durch Multiplikation mit dem Hauptnenner äquivalent über in

$$4x - r + 6 = (2x)(x-2r) + r(x+r) = 2x^2 - 4rx + rx + r^2 \qquad \text{bzw.} \qquad 2x^2 - (3r+4)x + r^2 + r - 6 = 0$$

also $x^2 - \frac{3r+4}{2} \cdot x + \frac{r^2+r-6}{2} = 0$. Diese quadratische Gleichung in x hat genau die Lösungen

$$x_{1/2} = \frac{3r+4}{4} \pm \sqrt{\frac{D}{16}} \qquad \text{mit}$$

$$D = (3r+4)^2 - 8(r^2+r-6) = 9r^2 + 24r + 16 - 8r^2 - 8r + 48 = r^2 + 16r + 64 = (r+8)^2$$

also $x_{1/2} = \frac{3r+4\pm(r+8)}{4}$, d. h. $x_1 = \frac{3r+4-r-8}{4} = \frac{r}{2} - 1$ und $x_2 = \frac{3r+4+r+8}{4} = r+3$.

Diese beiden Lösungen fallen genau für $r = -8$ zusammen.
Nun müssen noch die Scheinlösungen dieser quadratischen Gleichung ausgeschlossen werden, für die $x = -r$ oder $x = 2r$ ist:

Fall 1.1: Es ist $-r = x_1 = \frac{r}{2} - 1$. Das ist äquivalent zu $r = 2$.
Fall 1.2: Es ist $-r = x_2 = r + 3$. Das ist äquivalent zu $r = -\frac{3}{2}$.
Fall 2.1: Es ist $2r = x_1 = \frac{r}{2} - 1$. Das ist äquivalent zu $r = -\frac{2}{3}$.
Fall 2.2: Es ist $2r = x_2 = r + 3$. Das ist äquivalent zu $r = 3$.

Zusammenfassend ergibt sich also, dass die Gleichung der Aufgabenstellung genau für
$r \in \left(\{-8, -\frac{3}{2}, -\frac{2}{3}, 2, 3\right\}$ genau eine Lösung besitzt, für alle anderen von Null verschiedenen r genau zwei und nie gar keine Lösung besitzt.

Aufgabe 271041:
Beweisen Sie, dass die Gleichung

$$x^4 - 8x^3 + 25x^2 - 34x + 10 = 0$$

genau zwei reelle Lösungen hat!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es sei f die durch

$$f(x) = x^4 - 8x^3 + 25x^2 - 34x + 10 = (x-2)^4 + x^2 - 2x - 6 = (x-2)^4 + (x-1)^2 - 7$$

definierte Funktion. Für sie gilt:

(1) Es ist $f(0) = 10 > 0$.
(2) Für alle x im Intervall $1 \leq x \leq 2$ ist

$$\begin{gathered} -1 \leq x - 2 \leq 0 \qquad \text{also} \qquad (x-2)^4 \leq 1 \qquad \text{und} \\ 0 \leq x - 1 \leq 1 \qquad \text{also} \qquad (x-1)^2 \leq 1 \qquad \text{also} \\ f(x) \leq 1 + 1 - 7 < 0 \end{gathered}$$

(3) Es ist $f(4) = 16 + 9 - 7 > 0$.
(4) Im Intervall aller $x < 1$ ist f streng monoton fallend, denn aus $x_1 < x_2 < 1$ folgt

$$\begin{aligned} x_1 - 2 < x_2 - 2 < 0 \qquad &\text{also} \qquad (x_1-2)^4 > (x_2-2)^4 \qquad \text{und} \\ x_1 - 1 < x_2 - 1 < 0 \qquad &\text{also} \qquad (x_1-1)^2 > (x_2-1)^2 \qquad \text{also} \qquad f(x_1) > f(x_2) \end{aligned}$$

(5) Im Intervall aller $x > 2$ ist f streng monoton steigend, denn aus $2 < x_1 < x_2$ folgt

$$\begin{array}{llllll} 0 < x_1 - 2 < x_2 - 2 & \text{also} & (x_1-2)^4 < (x_2-2)^4 & \text{und} & \\ 0 < x_1 - 1 < x_2 - 1 & \text{also} & (x_1-1)^2 < (x_2-1)^2 & \text{also} & f(x_1) < f(x_2) \end{array}$$

Wegen (1), (2) gibt es im Intervall $(0;1)$ und wegen (2), (3) im Intervall $(2;4)$ aufgrund der Stetigkeit von f je mindestens eine Lösung der Gleichung $f(x) = 0$.
Wegen (4) gibt es unter allen $x < 1$ und wegen (5) unter allen $x > 2$ auch jeweils keine weitere Lösung; wegen (2) liegt auch im Intervall $[1;2]$ keine Lösung. Damit ist der verlangte Beweis erbracht.

Aufgabe 281044:
Beweisen Sie, dass für keine reelle Zahl x die Gleichung

$$x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 24x + 40 = 0$$

gilt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wie man durch Ausmultiplizieren bestätigen kann, gilt

$$x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 24x + 40 = (x^2+4)(x^2-6x+10) = (x^2+4)((x-3)^2+1)$$

Für alle reellen x gilt $x^2 + 4 > 0$ und $(x-3)^2 + 1 > 0$. Folglich gibt es kein reelles x, für das das Produkt 0 wäre.
II. Für alle reellen x wird

$$x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 24x + 40 = x^2(x^2 - 6x + 9) + 5\left(x^2 - \frac{24}{5}x + \frac{144}{25}\right) - \frac{144}{5} + 40 =$$

$$= x^2(x-3)^2 + 5\left(x - \frac{12}{5}\right)^2 + \frac{56}{5} \geq \frac{56}{5} > 0$$

Aufgabe 291042:
Von zwei reellen Zahlen werde gefordert:
Die Summe aus dem Reziproken der beiden Zahlen und dem Reziproken des Produktes der beiden Zahlen beträgt 1.
Man ermittle alle diejenigen Werte, die sich als Summe s zweier derartiger Zahlen ergeben können.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(I) Für die Summe $s := x + y$ zweier reeller Zahlen x, y mit

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = 1 \qquad (1)$$

folgt zunächst

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{s-x} + \frac{1}{x(s-x)} = 1$$

und daraus

$$x^2 - sx + s + 1 = 0 \qquad (2)$$

Da in (1) notwendig $x \neq 0$ und $y = s - x \neq 0$ gilt, folgt aus (2) weiter

$$0 \neq x(s-x) = sx - x^2 = s + 1 \qquad \text{d. h.} \qquad s \neq -1 \qquad (3)$$

Andererseits wird (2) durch quadratische Ergänzungen zu

$$\left(x-\frac{s}{2}\right)^2=\frac{s^2}{4}-s-1$$

Folglich ist $s^2-4s-4\geq 0$, $(s-2)^2\geq 8$ und schließlich

$$|s-2|\geq 2\sqrt{2} \qquad (4)$$

Insgesamt liegt s also notwendigerweise in einem der Intervalle

$$s<-1; \qquad -1<s\leq 2-2\sqrt{2}; \qquad s\geq 2+2\sqrt{2} \qquad (5)$$

(II) Ist umgekehrt s aus einem dieser Intervalle, so sind die Zahlen

$$x=\frac{s}{2}+\sqrt{\frac{s^2}{4}-s-1} \qquad \text{und} \qquad y=\frac{s}{2}-\sqrt{\frac{s^2}{4}-s-1}$$

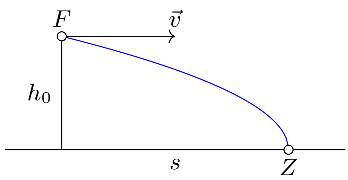
reelle (wegen (4)), $\neq 0$ (wegen (3)) und es gilt $x+y=s$ sowie $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{xy}=1$. Also sind die gesuchten Werte für s genau diejenigen, die in einem der Intervalle aus (5) liegen.

VII.II Bewegungsaufgaben

I Runde 1

Aufgabe V01002:
Schiffbrüchigen soll mit Hilfe eines Flugzeuges, welches in 500 m Höhe mit einer Geschwindigkeit von 100 km/h fliegt, Hilfe gebracht werden.
In welcher Entfernung von den Schiffbrüchigen muss der Verpflegungskanister ausgelöst werden, damit er sein Ziel erreicht? (g = 10 m/s^2)

Lösung von Steffen Polster:



Der Kanister muss in der Entfernung s vom Zielpunkt abgeworfen werden, da er längs der Bahn eines waagerechten Wurfs den Zielpunkt erreicht. Für einen waagerechten Wurf gilt:

$$s=v_0\cdot t \qquad ; \qquad h=h_0-\frac{g}{2}t^2$$

wobei v_0 die Flugzeuggeschwindigkeit, h_0 die Abwurfhöhe und t die Wurfzeit ist. Der Boden wird für $h=0$ erreicht, so dass sich ergibt

$$t=\sqrt{\frac{2h_0}{g}} \qquad ; \qquad s=v_0\cdot\sqrt{\frac{2h_0}{g}}$$

Einsetzen der gegebenen Werte ergibt $s\approx 278$ m.

Aufgabe 011013:
Ein Zug fährt mit geringer Geschwindigkeit über eine 171 m lange Brücke in 27 s (gerechnet vom Auffahren der Lokomotive auf die Brücke bis zum Verschwinden des letzten Wagens von der Brücke).
An einem Fußgänger, der dem Zug mit einer Geschwindigkeit von 1 m/s entgegengeht, fährt der Zug in 9 s vorüber.
a) Welche Geschwindigkeit hat der Zug (in km/h)?
b) Wie lang ist der Zug?

Lösung von Christiane Czech:
Der Zug fährt mit der Geschwindigkeit v in 9 s an dem Fußgänger vorbei, der ihm in dieser Zeit 9 m entgegenkommt. Der Zug fährt also eine Strecke von $s - 9$ m, wobei s die Länge des Zuges ist. Damit ist

$$v = \frac{s - 9m}{9s}$$

Da der Zug in 27 s eine Strecke von 171 m+s zurücklegt, ist aber auch

$$v = \frac{171m + s}{27s}$$

Nach Gleichsetzen der beiden Gleichungen und Umstellen erhalten wir $s = 99$ m und durch Einsetzen $v = 10\frac{m}{s} = 36\frac{km}{h}$.

Aufgabe 211011:
Ein Reisender legte den ersten Teil einer Dienstfahrt mit dem PKW und den Rest mit dem Zug zurück.

Als er die mit dem PKW zurückgelegte Teilstrecke sowie genau ein Fünftel der Bahnstrecke durchfahren hatte, stellte er fest, dass er zu diesem Zeitpunkt genau ein Drittel der Gesamtstrecke zurückgelegt hatte. Später, als er genau die Hälfte der Gesamtstrecke zurückgelegt hatte, war er mit dem Zug bereits 20 km mehr gefahren als zuvor mit dem PKW.

Wie lang war die Gesamtstrecke dieser Reise?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die mit dem PKW zurückgelegte Strecke sei x km, die mit dem Zug zurückgelegte Strecke y km. Die Gesamtstrecke war dann $(x + y)$ km lang, und es gilt

$$x + \frac{y}{5} = \frac{x + y}{3} \quad (1) \qquad \text{sowie} \qquad \frac{x + y}{2} = x + (x + 20) \quad (2)$$

Aus (1) folgt

$$15x + 3y = 5x + 5y \qquad ; \qquad y = 5x \tag{3}$$

aus (2) folgt

$$x + y = 2x + 2x + 40 \qquad ; \qquad y = 3x + 40 \tag{4}$$

Durch Gleichsetzen der rechten Seiten von (3) und (4) folgt $5x = 3x + 40$ und daraus $x = 20$. Nach (3) ergibt sich damit $y = 100$.

Der Reisende legte folglich mit dem PKW 20 km und mit dem Zug 100 km zurück, Die Gesamtstrecke betrug also 120 km.

II Runde 2

Aufgabe 041024:
Der Weg von einem Ort A nach einem Ort B ist 11,5 km lang und führt zuerst bergauf, dann verläuft er auf gleicher Höhe und schließlich bergab. Ein Fußgänger, der von A nach B ging, legte diesen Weg in 2 h 54 min zurück.
Für den Rückweg auf gleichem Kurs brauchte er 3 h 6 min. Dabei ging er jeweils bergauf mit einer Geschwindigkeit von $3\frac{km}{h}$, auf dem Mittelteil mit einer Geschwindigkeit von $4\frac{km}{h}$ und bergab mit $5\frac{km}{h}$.
Wie lang sind die einzelnen Teilabschnitte, wenn man voraussetzt, dass auf jedem Teilabschnitt die jeweilige Geschwindigkeit konstant war?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Maßzahlen der drei Teilabschnitte seien a, b und $a + x$.
Dann gelten:

$$2a + b + x = 11{,}5 \tag{1}$$
$$\frac{a}{3} + \frac{b}{4} + \frac{a+x}{5} = 2{,}9 \tag{2}$$
$$\frac{a+x}{3} + \frac{b}{4} + \frac{a}{5} = 3{,}1 \tag{3}$$

Aus (2) und (3) erhält man $x = 1{,}5$ und damit aus (1) $2a + b = 10$ und aus (2) $32a + 15b = 156$.
Aus diesen Gleichungen berechnet man $b = 4$ und $c = 3$.

Der Weg führt 3 km bergauf, dann 4 km auf gleicher Höhe und schließlich 4,5 km bergab, wenn man von A nach B geht. Die Probe bestätigt das Ergebnis.

Aufgabe 081024:
Ein Kraftwagen fährt mit konstanter Geschwindigkeit auf einer geraden Straße von A nach B. Ein zweiter Kraftwagen fährt auf der gleichen Straße ebenfalls mit konstanter Geschwindigkeit von B nach A.
Beide Kraftwagen beginnen diese Fahrt zur gleichen Zeit in A bzw. in B. An einer bestimmten Stelle der Straße begegnen sie einander.
Nach der Begegnung habe der erste noch genau 2 h bis nach B zu fahren, der zweite noch genau $\frac{9}{8}$ h bis nach A. Die Entfernung zwischen A und B beträgt (auf der Straße gemessen) 210 km.
Ermitteln Sie die Geschwindigkeiten der Kraftwagen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Maßzahlen der Geschwindigkeiten (in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$) der beiden Kraftwagen K_1, K_2 seien v_1, v_2; die Maßzahlen der Zeiten (in h), in denen sie die Strecke AB durchfahren, seien t_1, t_2.

Dann gilt (1) $210 = v_1 t_1 = v_2 t_2$.
Ferner ist sowohl $(t_1 - 2)$ h als auch $(t2 - \frac{9}{8})$ h die Zeit vom Fahrtbeginn bis zur Begegnung, so dass (2) $t_1 = t_2 + \frac{7}{8}$ gelten muss.

Schließlich ergibt sich die Entfernung vom Treffpunkt T nach B als $(v_1 \cdot 2)$ km und von T nach A als $(v_2 \cdot \frac{9}{8})$ km, woraus (3) $v1 \cdot 2 + v_2 \cdot \frac{9}{8} = 210$ folgt.

Die Lösung des Gleichungssystems (1), (2), (3) ergibt sich mit

$$210 \cdot t_2 \cdot 2 + 210 \cdot \left(t_2 + \frac{7}{8}\right) \cdot \frac{9}{8} = 210 \cdot \left(t_2 + \frac{7}{8}\right) \cdot t_2$$
$$t_2^2 - \frac{9}{4} t_2 - \frac{63}{64} = 0$$
$$t_{2_{1;2}} = \frac{9}{8} \pm \frac{1}{8}\sqrt{81 + 63} = \frac{9}{8} \pm \frac{12}{8}$$

Davon ist allein $t_2 = \frac{21}{8}$ brauchbar, da $t_2 > 0$ gilt. Nach (2) und (1) folgt hieraus weiter $t_1 = \frac{7}{2}$ und $v_1 = 60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sowie $v_2 = 80 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

Aufgabe 111022:
Zwei Autos starteten gleichzeitig und fuhren auf derselben Straße von A nach B. Das erste Auto benötigte für diese Strecke 4 Stunden, das zweite 3 Stunden. Beide fuhren während der ganzen Zeit mit gleichbleibender Geschwindigkeit.
a) Zu welchem Zeitpunkt nach dem Start war das erste Auto genau doppelt so weit von B entfernt wie das zweite?
b) Welche Strecke, ausgedrückt in Bruchteilen der gesamten Entfernung von A nach B, legte jedes Auto bis zu dem in a) gesuchten Zeitpunkt zurück?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Die Entfernung von A nach B betrage s km. Dann fuhr das erste Auto mit einer Geschwindigkeit von $\frac{s}{4}\frac{km}{h}$ und das zweite mit $\frac{s}{3}\frac{km}{h}$.
Das erste Auto ist nach t Stunden genau dann doppelt soweit von B entfernt wie das zweite, wenn

$$s - \frac{s}{4}t = 2\left(s - \frac{2}{3}t\right)$$

gilt. Wegen $s \neq 0$ ist dies äquivalent mit $1 - \frac{t}{4} = 2\left(1 - \frac{t}{3}\right)$, also mit $t = \frac{12}{5} = 2{,}4$.
Nach genau 2,4 h war daher das erste Auto doppelt so weit von B entfernt wie das zweite Auto.

b) Das erste Auto legte bis zu diesem Zeitpunkt wegen $\frac{s}{4} \cdot \frac{12}{5} = \frac{3}{5}s$ genau $\frac{3}{5}s$ des Weges, das zweite wegen $\frac{s}{3} \cdot \frac{12}{5} = \frac{4}{5}s$ genau $\frac{4}{5}$ des Weges zurück.

III Runde 3

Aufgabe 041031:
Ein Fußgänger geht (mit konstanter Geschwindigkeit) um 9.00 Uhr von A nach dem 12,75 km entfernten B.
Auf der gleichen Straße fährt um 9.26 Uhr ein Straßenbahnzug von A nach B ab. Er überholt den Fußgänger um 9.36 Uhr und fährt nach 4 Minuten Aufenthalt in B wieder zurück. Dabei begegnet er dem Fußgänger um 10.30 Uhr.

a) Wieviel Kilometer legen der Fußgänger und der Straßenbahnzug durchschnittlich in der Stunde zurück?

b) In welcher Entfernung von A überholt der Straßenbahnzug den Fußgänger, und wo begegnet er ihm bei der Rückfahrt?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Sei v_1 die Geschwindigkeit des Fußgängers und v_2 die Geschwindigkeit der Straßenbahn. Sei s_1 die Strecke von A zum ersten Treffpunkt und s_2 die Strecke von B bis zum zweiten Treffpunkt. Dann gilt:

$$(1): \quad v_1 = \frac{s_1}{36} = \frac{12{,}75 - s_2}{90} \qquad ; \qquad (2): \quad v_2 = \frac{s_1}{10} = \frac{12{,}75 + s_2}{60}$$

Die Lösungen für dieses linearen Gleichungssystems sind $s_1 = 3$ und $s_2 = 5{,}25$ Damit:

$$v_1 = \frac{3\text{km}}{\frac{3}{5}\text{h}} = 5\frac{\text{km}}{\text{h}} \qquad ; \qquad v_2 = \frac{12{,}75\text{km} + 5{,}25\text{km}}{1\text{h}} = 18\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Der Fußgänger legt in der Stunde durchschnittlich 5 km, der Straßenbahnzug in der gleichen Zeit durchschnittlich 18 km zurück.
b) Der Fußgänger wird, 3 km von A entfernt, vom Straßenbahnzug überholt und begegnet ihm, 5,25 km von B entfernt.

Aufgabe 121034:
Ein Lokomotivführer bemerkte am Anfang eines 20 km langen Streckenabschnitts s, dass er eine Verspätung von genau 4 min hatte.
Er fuhr daraufhin diese Strecke s mit einer um 10 km/h höheren Durchschnittsgeschwindigkeit, als sie der Fahrplan vorsah. Am Ende der Strecke s war erstmalig wieder Übereinstimmung mit dem Fahrplan erreicht.
Wie groß war die für s vorgesehene fahrplanmäßige Durchschnittsgeschwindigkeit?

Lösung von Steffen Polster:
Für den Weg gilt $s = 20$ km. Sind v_1 die vorgesehene Geschwindigkeit im Abschnitt s und t_1 die vorgesehene Zeit, so ist

$$v_1 = \frac{20km}{t_1} \qquad (1)$$

Der Lokomotivführer fährt mit $v_2 = v_1 + 10\frac{km}{h}$ und benötigt die Zeit t_2, die 4 min $= \frac{1}{15}$ h kürzer ist als t_1. Das ergibt

$$v_2 = v_1 + 10\frac{km}{h} = \frac{20km}{t_1 - \frac{1}{15}h} = t_2$$

Einsetzen von (1) führt zum Ergebnis $t_1 = \frac{2}{5}$ h $= 24$ min und der vorgesehenen Geschwindigkeit $v_1 = 50\frac{km}{h}$. Eine Probe bestätigt das Ergebnis.

IV Runde 4

Aufgabe 011042:
Auf einem Fluss mit konstanter Strömungsgeschwindigkeit v fährt ein Motorboot mit konstanter Eigengeschwindigkeit c stromab nach einem Ziel, das vom Start die Entfernung s hat, und wieder zurück.
Ein anderes Motorboot fährt mit der gleichen Eigengeschwindigkeit zu einem ebenfalls in der Entfernung s, aber genau senkrecht zur Strömungsrichtung liegenden Ziel und wieder zurück.
a) Wieviel reine Fahrzeit benötigen die beiden Boote?
b) Welches Ergebnis erhält man für $s = 250$ m, $v = 150\ \frac{m}{min}$ und $c = 250\ \frac{m}{min}$?

Lösung von Eckard Specht:
a) Wenn das Boot mit der Strömung fährt, addieren sich die Geschwindigkeiten. Fährt es ihr entgegen, ist die Differenz die Effektivgeschwindigkeit. Die Fahrzeit ist die Summe aus dem Abschnitt, auf dem das Boot mit $c + v$ fährt und dem mit $c - v$:

$$t_1 = \frac{s}{c+v} + \frac{s}{c-v} = \frac{2vs}{c^2 - v^2}$$

Bewegt es sich aber senkrecht zur Strömung, spielt die Geschwindigkeit des Flusses keine Rolle (sie muss natürlich vom Boot kompensiert werden). Dann ist $t_2 = \frac{2s}{c}$.
b) Nach Einsetzen der Zahlenwerte folgt: $t_1 = 1\frac{14}{30}$ min, im anderen Fall: $t_2 = 2$ min.

Aufgabe 031041:
Ein Radfahrer fährt mit konstanter Geschwindigkeit über eine Brücke. Als er $\frac{3}{8}$ des Weges zurückgelegt hat, trifft er einen ihm mit gleicher Geschwindigkeit entgegenkommenden Radfahrer.
Mit welcher Geschwindigkeit fuhren beide, wenn ein mit 80 $\frac{km}{h}$ auf der gleichen Straße fahrendes Auto den einen am Anfang und den anderen am Ende der Brücke traf?

Lösung von Manuela Kugel:
Bezeichnungen: 1. Radfahrer: x, 2. Radfahrer: y, Länge der Brücke b, Geschwindigkeit der Radfahrer: $v_x = v_y$ und des Autos: v_A, Weg: s, Zeit: t

Zum Zeitpunkt t_0 fährt y los und zum Zeitpunkt t_1 x. Zum Zeitpunkt t_2 begegnen sich x und y, d. h. $s_{x,t_2} + s_{y,t_2} = b$. Da $s_{x,t_2} = \frac{3}{8}b$ ist damit $s_{y,t_2} = \frac{5}{8}b$.
Schließlich erreicht zum Zeitpunkt t_3 y das Ziel, also $s_{y,t_3} = b$ und damit $s_{x,t_3} = \frac{6}{8}b$. x gelangt zum Zeitpunkt t_4 zur anderen Seite der Brücke: $s_{x,t_4} = b$, d. h. $s_{x,t_4-t_3} = \frac{1}{4}b$.

Fall 1: Das Auto fahre in gleicher Richtung wie x, fährt damit bei t_3 los und kommt bei t_4 an, legt eine Strecke von $s_{A,t_4-t_3} = b$ zurück, d. h. es gilt

$$v_A = \frac{s_{A,t_4-t_3}}{t_4 - t_3} = \frac{b}{t_4 - t_3} \quad \text{und} \quad v_x = \frac{s_{x,t_4-t_3}}{t_4 - t_3} = \frac{\frac{b}{4}}{t_4 - t_3}$$

Damit ergibt sich $v_x = \frac{v_A}{4} = 20\frac{\text{km}}{h}$.

Fall 2: Das Auto fahre in entgegengesetzter Richtung wie x, fährt damit bei t_0 los und kommt bei t_1 an und legt wieder eine Strecke von $s_{A,t_1-t_0} = b$ zurück, d. h. es gilt

$$v_A = \frac{s_{A,t_1-t_0}}{t_1 - t_0} = \frac{b}{t_1 - t_0} \quad \text{und} \quad v_y = \frac{s_{y,t_1-t_0}}{t_1 - t_0} = \frac{\frac{b}{4}}{t_1 - t_0}$$

Damit ergibt sich ebenfalls $v_y = v_x = \frac{v_A}{4} = 20\frac{\text{km}}{h}$.

VII.III Logarithmen-Gleichungen

I Runde 1

Aufgabe 041016:
a) Berechnen Sie ohne Rechenhilfsmittel einen ganzzahligen Näherungswert für

$$x = \frac{\lg 5}{\lg 3 - \lg 2}$$

b) Ist dieser Näherungswert kleiner oder größer als der exakte Wert?

Lösung von Annika Heckel:
Verwendete Formeln (bekannt aus dem Schulunterricht):

$$\log_b \frac{u}{v} = \log_b u - \log_b v \tag{1}$$

$$\log_c a = \frac{\log_b a}{\log_b c} \tag{2}$$

$$\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a \tag{3}$$

Nach (1) gilt

$$\lg 3 - \lg 2 = \lg \frac{3}{2}, \quad \text{d. h.} \quad x = \frac{\lg 5}{\lg \frac{3}{2}}$$

Nach (2) und (3) gilt:

$$x = \log_{\frac{3}{2}} 5 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = 5$$

Durch Ausprobieren ganzzahliger Werte für x erhält man:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^1 = 1{,}5; \quad \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 2{,}25; \quad \left(\frac{3}{2}\right)^3 = 3{,}375; \quad \left(\frac{3}{2}\right)^4 = 5{,}0625; \quad \left(\frac{3}{2}\right)^5 = 7{,}59375$$

Es ist folglich 4 die beste ganzzahlige Näherung für x, weil sie am nächsten an die Lösung der Gleichung (= 5) kommt. Da $\left(\frac{3}{2}\right)^4 > 5$ ist folglich der Näherungswert $x = 4$ größer als die tatsächliche Lösung.

II Runde 2

Aufgabe 041022:
Berechnen Sie ohne Verwendung von Näherungswerten (ohne Benutzung von Logarithmentafel oder Rechenstab):
$$y = 10 - 2 \cdot \lg 32 - 5 \cdot \lg 25$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Folgende Gesetze werden angewandt:
(1) $\lg(ab) = b \cdot \lg a$
(2) $\lg(a \cdot b) = \lg a + \lg b$
(3) $\lg x = \log_{10} x$
(4) $\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$ und insbesondere $\log_a a = 1$, weil $a^1 = a$ und folglich $\lg 10 = 1$.
Damit kann nun äquivalent umgeformt werden:

$$y = 10 - 2 \cdot \lg 2^5 - 5 \cdot \lg 5^2 = 10 - 2 \cdot 5 \cdot \lg 2 - 5 \cdot 2 \lg 5 = 10 - 10 \cdot \lg 2 - 10 \cdot \lg 5 =$$

$$= 10 \cdot (1 - \lg 2 - \lg 5) = 10 \cdot (1 - (\lg 2 + \lg 5)) = 10 \cdot (1 - (\lg(2 \cdot 5))) = 10 \cdot (1 - \lg 10) = 0$$

Aufgabe 081022:
Ermitteln Sie alle reellen Zahlen x, die der Bedingung $\log_2[\log_2(\log_2 x)] = 0$ genügen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Genügt x der geforderten Bedingung, so setzen wir $\log_2(\log_2 x) = a$ und erhalten $\log_2 a = 0$.
Das bedeutet $2^0 = a$, also $a = 1$.
Damit ist $\log_2(\log_2 x) = 1$. Wir setzen $\log_2 x = b$ und erhalten $\log_2 b = 1$. Das bedeutet $b = 2$.

Damit ist $\log_2 x = 2$, also muss $x = 4$ sein, wenn es der geforderten Bedingung genügen soll.

Aufgabe 091021:
Ermitteln Sie ohne Verwendung der Logarithmentafel den Quotienten $\frac{[\lg 3790]}{[\lg 0{,}0379]}$.
Dabei bedeutet $[x]$ die größte ganze Zahl, die x nicht übertrifft.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wegen $10^3 < 3790 < 10^4$ ist $3 \lg 3790 < 4$ also $[\lg 3790] = 3$.

Wegen $10^{-2} < 0{,}0379 < 10^{-1}$ ist $-2 \lg 0{,}0379 < -1$ also $[\lg 0{,}0379] = -2$.
Daher beträgt der gesuchte Quotient $\frac{3}{-2} = -1{,}5$.

III Runde 3

Aufgabe 021032:
Berechnen Sie:

$$\log_2 \frac{1}{256} + \log_2 \frac{1}{128} + \log_2 \frac{1}{64} + \log_2 \frac{1}{32} + ... + \log_2 \frac{1}{2} + \log_2 1 + \log_2 2 + ... + \log_2 64 + \log_2 128$$

Lösung von André Lanka:

$$\begin{aligned} &\log_2 \frac{1}{256} + \log_2 \frac{1}{128} + \log_2 \frac{1}{64} + \log_2 \frac{1}{32} + ... + \log_2 \frac{1}{2} + \log_2 1 + \log_2 2 + ... + \log_2 64 + \log_2 128 = \\ &= \log_2 \frac{1}{256} + \log_2 \frac{1}{128} + \log_2 128 + \log_2 \frac{1}{64} + \log_2 64 + \log_2 \frac{1}{32} + \log_2 32 + ... \log_2 \frac{1}{2} + \log_2 2 + \log_2 1 \\ &= \log_2 \frac{1}{256} - \log_2 128 + \log_2 128 - \log_2 64 + \log_2 64 - \log_2 32 + \log_2 32 ... - \log_2 2 + \log_2 2 + \log_2 1 \\ &= \log_2 \frac{1}{256} + \log_2 1 = \log_2 256 + 0 = - \log_{2^8} = -8 \end{aligned}$$

Aufgabe 031031:
Man löse die Gleichung $\lg(2x+1) - \lg x = 2$.

Lösung von Manuel Naumann:
Mit Hilfe der Logarithmengesetze und der Tatsache, dass $\lg x = 2$ nur für $x = 100$ gilt, folgt:

$$\lg(2x+1) - \lg x = \lg \frac{2x+1}{x} = 2$$
$$\frac{2x+1}{x} = 100 \Rightarrow x = \frac{1}{98}$$

Aufgabe 071032:
Es ist zu beweisen, dass $\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$ ist, wenn a, b, c positive reelle Zahlen sind und $a \neq 1, b \neq 1$ ist!

Lösung von cyrix:
Es ist $\log_a b$ diejenige reelle Zahl x, für die $a^x = b$ gilt. Analog ist $\log_b c$ diejenige reelle Zahl y, für die $b^y = c$ gilt. Dann ist $c = b^y = (a^x)^y = a^{x \cdot y}$, also $\log_a c = x \cdot y = \log_a b \cdot \log_b c$, $\square$.

Aufgabe 081033:
Beweisen Sie, dass für alle positiven reellen Zahlen a, b mit $a > b$ und $a^2 + b^2 = 6ab$ stets gilt:

$$\lg(a+b) - \lg(a-b) = \frac{1}{2} \lg 2$$

Lösung von cyrix:
Es gilt nach Voraussetzung:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= 6ab \\ 2a^2 + 2b^2 - 4ab &= a^2 + b^2 + 2ab \\ 2(a-b)^2 &= (a+b)^2 \\ \sqrt{2}|a-b| &= |a+b| \end{aligned}$$

wobei ebenfalls nach Voraussetzung $a > b$ und damit $a - b > 0$ und daher $|a - b| = a - b$. Ferner gilt a, b positiv und damit $a + b = |a + b| > 0$. Es gilt also: $\sqrt{2}(a - b) = a + b$ und somit:

$$\begin{aligned} \frac{a+b}{a-b} &= \sqrt{2} \\ \lg \frac{a+b}{a-b} &= \lg 2^{\frac{1}{2}} \\ \lg(a+b) - \lg(a-b) &= \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{aligned}$$

Aufgabe 101034:
Unter $n!$ (gelesen n Fakultät) versteht man das Produkt aller natürlichen Zahlen von 1 bis n.
Beweisen Sie, dass für alle natürlichen Zahlen $n > 2$ und alle positiven reellen Zahlen $x \neq 1$ gilt:

$$\frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_4 x} + ... + \frac{1}{\log_n x} = \frac{1}{\log_{n!} x}$$

Lösung von cyrix:
Es ist bekanntermaßen für alle positiven reellen Zahlen $a \neq 1$ und $b \neq 1$ die Identität $\log_b a = \frac{\ln a}{\ln b}$ erfüllt. Setzen wir dies ein, so wird die linke Seite der zu zeigenden Gleichung zu

$$\frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_4 x} + \dots \frac{1}{\log_n x} = \frac{\ln 2}{\ln x} + \frac{\ln 3}{\ln x} + \frac{\ln 4}{\ln x} + \dots \frac{\ln n}{\ln x} = \frac{\ln 2 + \ln 3 + \dots + \ln n}{\ln x} =$$

$$= \frac{\ln(2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n)}{\ln x} = \frac{\ln(n!)}{\ln(x)} = \frac{1}{\ln_{n!} x}$$

$\square$.

Aufgabe 121035:
Beweisen Sie, dass gilt:

$$\lg\left(1 - \frac{1}{25^2}\right) + \lg\left(1 - \frac{1}{26^2}\right) + ... + \lg\left(1 - \frac{1}{100^2}\right) = \lg\frac{606}{625}$$

Lösung von cyrix:
Es ist

$$\lg\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \lg\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right) = \lg(k^2-1) - 2\lg(k) = \lg(k-1) + \lg(k+1) - 2\lg(k) \qquad \text{also}$$

$$\lg\left(1 - \frac{1}{25^2}\right) + \lg\left(1 - \frac{1}{26^2}\right) + \dots + \lg\left(1 - \frac{1}{100^2}\right) = \sum_{k=25}^{100} \lg\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$$

$$= \sum_{k=25}^{100} (\lg(k-1) + \lg(k+1) - 2\lg(k)) = \sum_{k=25}^{100} \lg(k-1) + \sum_{k=25}^{100} \lg(k+1) - 2\sum_{k=25}^{100} \lg(k)$$

$$= \sum_{k=24}^{99} \lg(k) + \sum_{k=26}^{101} \lg(k) - 2\sum_{k=25}^{100} \lg(k)$$

$$= \lg(24) + \lg(25) + \sum_{k=26}^{99} \lg(k) + \sum_{k=26}^{99} \lg(k) + \lg(100) + \lg(101) - 2\lg(25) - 2\lg(100) - 2\sum_{k=25}^{100} \lg(k)$$

$$= \lg(24) + \lg(101) - \lg(25) - \lg(100) = \lg\left(\frac{24 \cdot 101}{25 \cdot 100}\right) = \lg\left(\frac{606}{625}\right)$$

Aufgabe 141033:
Gegeben sei eine positive reelle Zahl a, für die $a \neq 1$ gilt.
Man ermittle alle reellen Zahlen x, die die Gleichung $x^{\log_a x} = a^2 x$ erfüllen!

Lösung von Nuramon:
Damit $\log_a x$ definiert ist, muss x positiv sein. Durch Anwendung von $\log_a$ auf beide Seiten erhalten wir die äquivalente Gleichung $(\log_a x)^2 = 2 + \log_a x$.
Dies ist eine quadratische Gleichung in $\log_a x$ mit Lösungen $\log_a x = -1$ und $\log_a x = 2$.
Damit erfüllt x die Gleichung genau dann, wenn $x = \frac{1}{a}$ oder $x = a^2$ gilt.

Aufgabe 161034:
Beweisen Sie, dass gilt

$$\lg\left(1+\frac{1}{1}\right) + \lg\left(1+\frac{1}{2}\right) + \lg\left(1+\frac{1}{3}\right) + ... + \lg\left(1+\frac{1}{99}\right) = 2$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es gilt nach den Logarithmengesetzen

$$\lg\left(1+\frac{1}{n}\right) = \lg(n+1) - \lg n \qquad (n > 0)$$

Summiert man nun von $n = 1$ bis $n = 99$, so erhält man

$$\lg\left(1+\frac{1}{99}\right) + \lg\left(1+\frac{1}{98}\right) ... + \lg\left(1+\frac{1}{1}\right) = \lg 100 - \lg 99 + \lg 99 - + ... - \lg 2 + \lg 2 - \lg 1 =$$

$$= \lg 100 - \lg 1 = 2 - 1 = 0$$

Die Behauptung ist damit bewiesen.

Aufgabe 171033:
Jens, Uwe, Dirk und Peter diskutieren darüber, welchem Zahlenbereich die Zahl z angehört, die durch den Term

$$z = \frac{\lg(7 - 4\sqrt{3})}{\lg(2 - \sqrt{3})}$$

definiert werden soll.
Jens sagt, dass z eine natürliche Zahl ist; Dirk meint, die Zahl z sei eine rationale Zahl; Uwe hält z für irrational, und Peter vermutet, dass der Term überhaupt keine Zahl z definiert.
Entscheiden Sie wer recht hat!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es gilt $2 - \sqrt{3} > 0$, also ist $\lg(2 - \sqrt{3})$ definiert. Ferner gilt

$$(2 - \sqrt{3})^2 = 4 - 4\sqrt{3} + 3 = 7 - 4\sqrt{3}$$

also ist auch $7 - 4\sqrt{3} > 0$ und folglich $\lg(7 - 4\sqrt{3})$ definiert. Ferner ist $2 - \sqrt{3} \neq 1$, also $\lg(2 - \sqrt{3}) \neq 0$; somit wird durch den gegebenen Term eine Zahl z definiert, und für sie folgt außerdem

$$z = \frac{\lg((2 - \sqrt{3})^2)}{\lg(2 - \sqrt{3})} \qquad \text{also} \qquad z = \frac{2\lg(2 - \sqrt{3})}{\lg(2 - \sqrt{3})} = 2$$

Daher haben Jens und Dirk recht, Uwe und Peter haben nicht recht.

IV Runde 4

Aufgabe 081045:
Man ermittle alle reellen Zahlen x, die die Gleichung $4 \cdot \log_4 x + 3 = 2 \cdot \log_x 2$ erfüllen!

Lösung von cyrix:
Mit $\log_b a = \frac{\log_2 a}{\log_2 b}$ und $y := \log_2 x$ geht die Gleichung über in [$4 \cdot \frac{y}{2} + 3 = 2 \cdot \frac{1}{y}$, also

$$2y^2 + 3y - 2 = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad y = -\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16} + 1} = \frac{3 \pm 5}{4}$$

Damit erhält man die erste Lösung $y_1 = \frac{-3+5}{4} = \frac{1}{2}$ und also $x_1 = 2^{y_1} = \sqrt{2}$ und als zweite $y_2 = \frac{-3-5}{4} = -2$ und damit $x_2 = 2^{y_2} = \frac{1}{4}$.
Einsetzen in die Ausgangsgleichung bestätigt beide Werte.

Aufgabe 091042:
Zu den reellen Zahlen a, b mit $a > 0, b > 0$ und $a \neq 1, b \neq 1$ ermittle man alle Zahlen x, die die Gleichung $(\log_a x)(\log_b x) = \log_a b$ erfüllen.

Lösung von cyrix:
Es gilt $\ln_b a = \frac{\ln a}{\ln b}$ und somit

$$(\log_a x)(\log_b x) = \log_a b \iff \frac{\ln x}{\ln a} \cdot \frac{\ln x}{\ln b} = \frac{\ln b}{\ln a} \iff \left(\frac{\ln x}{\ln b}\right)^2 = (\log_b x)^2 = 1$$
$$\iff x = b \vee x = \frac{1}{b} \; .$$

Aufgabe 171045:
Beweisen Sie, dass der Term

$$\frac{\lg(5\sqrt{2} - 7)}{\lg(3 - 2\sqrt{2})} \qquad (1)$$

eine reelle Zahl definiert und dass diese rational ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Um zu zeigen, dass der Term (1) eine reelle Zahl definiert, benutzt man, dass die Funktion $\lg x$ für alle $x > 0$ reelle Werte annimmt, und dass $\lg x = 0$ genau dann gilt, wenn $x = 1$ ist. Daher reicht es, die Ungleichungen

$$5\sqrt{2} - 7 > 0, \qquad 3 - 2\sqrt{2} > 0, \qquad 3 - 2\sqrt{2} \neq 1 \qquad (2)$$

zu beweisen, etwa so:

$$50 > 49 \to \sqrt{50} > \sqrt{49} \to 5\sqrt{2} - 7 > 0$$
$$9 > 8 \to \sqrt{9} > \sqrt{8} \to 3 - 2\sqrt{2} > 0$$

Wäre $3 - 2\sqrt{2} = 1$, so wäre $\sqrt{2} = 1$ oder $2 = 1$.
Um nun zu zeigen, dass (1) sogar rational ist, stellt man fest, dass

$$5\sqrt{2} - 7 = (\sqrt{2} - 1)^2 \qquad 3 - 2\sqrt{2} = (\sqrt{2} - 1)^2 \qquad (3)$$

bzw. $(5\sqrt{2} - 7)^2 = (3 - 2\sqrt{2})^3$ (4) gilt. Benutzt man z. B. (4), so erhält man

$$\frac{\lg(5\sqrt{2} - 7)}{\lg(3 - 2\sqrt{2}} = \frac{\lg((3 - 2\sqrt{2})^{\frac{3}{2}}}{\lg(3 - 2\sqrt{2})} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\lg((3 - 2\sqrt{2})}{\lg(3 - 2\sqrt{2})} = \frac{3}{2}$$

Das Kürzen der Logarithmen ist nach (2) erlaubt. Da $\frac{3}{2}$ eine rationale Zahl ist, ist alles gezeigt.

VII.IV Wurzel-Gleichungen

I Runde 1

Aufgabe 221012:
In einer Diskussion über irrationale Zahlen wurde erwähnt, dass $\sqrt{2}$ und $\sqrt{5}$ irrational sind.

Peter meinte: „Dann muss auch $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ irrational sein." „Wie beweist du das?" fragte Katrin. „Es gibt doch keinen Satz, wonach stets dann $x+y$ irrational sein muss, wenn x und y irrational sind." „Ja, aber speziell für die irrationalen Zahlen $\sqrt{2}$ und $\sqrt{5}$ kann ich beweisen, dass auch ihre Summe $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ irrational ist", erwiderte Peter.

a) Bestätigen Sie durch ein Beispiel Katrins Meinung, dass es irrationale Zahlen x, y mit rationaler Summe $x+y$ gibt!

b) Wie könnte Peter den von ihm angekündigten Beweis führen?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Die Zahlen $x=\sqrt{2}$ und $y=-\sqrt{2}$ beispielsweise sind irrational, aber ihre Summe $\sqrt{2}-\sqrt{2}=0$ ist rational.

b) Angenommen, $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ wäre rational. Dann gäbe es ganze Zahlen a,b mit $b\neq 0$ und $\sqrt{2}+\sqrt{5}=\frac{a}{b}$. Wegen $\sqrt{2}+\sqrt{5}>0$ wäre auch $a\neq 0$. Weiter folgte

$$\sqrt{5}=\frac{a}{b}-\sqrt{2} \quad ; \quad 5=\frac{a^2}{b^2}-\frac{2a}{b}\sqrt{2}+2$$
$$\frac{2a}{b}\sqrt{2}=\frac{a^2}{b^2}-3 \quad ; \quad \sqrt{2}=\frac{a}{2b}-\frac{3b}{a}=\frac{a^2-3b^2}{2ab}$$

also der Widerspruch, dass $\sqrt{2}$ rational wäre. Daher war die eingangs gemachte Annahme falsch, d. h., $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ ist irrational.

Alternativ-Lösung von cyrix:
Mit $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ wäre auch $\frac{1}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{5})^2-7=\sqrt{10}$ rational, was ein Widerspruch ist, da 10 keine Quadratzahl und die Wurzel einer natürlichen Zahl, die nicht Quadratzahl ist, bekanntermaßen irrational ist.

II Runde 2

Aufgabe 051023:
Beweise: Wenn gilt $0<b<a$ (1) und $a^2+b^2=6ab$ (2) dann ist

$$\frac{a+b}{a-b}=\sqrt{2}$$

Lösung von Kitaktus:
Da a und b von 0 verschieden sind, gilt

$$\frac{6ab+2ab}{6ab-2ab}=2$$

Unter Verwendung von (2) folgt

$$\frac{a^2+2ab+b^2}{a^2-2ab+b^2}=\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2}=2$$

Wegen $a>b>0$ sind $a+b$ und $a-b$ positiv und man kann die Wurzel ziehen und erhält

$$\frac{a+b}{a-b}=\sqrt{2}.$$

III Runde 3

Aufgabe 191032:
Ermitteln Sie alle Paare $(x; y)$ reeller Zahlen, für die erstens in der Gleichung

$$2^{\sqrt{1+x-3y}} + 3^{\sqrt{2x-4y+1}} = 2$$

der Term auf der linken Seite (als reelle Zahl) definiert ist und zweitens diese Gleichung erfüllt ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Der genannte Term ist genau dann definiert, wenn die Ungleichungen

$$1 + x - 3y \geq 0 \quad (2) \qquad \text{und} \qquad 2x - 4y + 1 \geq 0 \quad (3)$$

gelten. Ist dies der Fall, so gelten die Ungleichungen

$$2^{\sqrt{1+x-3y}} \geq 1 \quad (4) \qquad ; \qquad 3^{\sqrt{2x-4y+1}} \geq 1 \quad (5)$$

Also kann (1) nur dann erfüllt werden, wenn sowohl in (4) als auch in (5) das Gleichheitszeichen steht. Dies trifft nur dann zu, wenn

$$1 + x - 3y = 0 \quad (6) \qquad \text{und} \qquad 2x - 4y + 1 = 0 \quad (7)$$

gelten. Das Gleichungssystem (6), (7) hat genau das Paar

$$(x; y) = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$$

als Lösung. Umgekehrt folgt für dieses Paar aus (6), (7) auch (2), (3) und (1). Daher hat genau dieses Paar alle verlangten Eigenschaften.

Aufgabe 341035:
Hat man in der Ebene ein kartesisches Koordinatensystem eingeführt, so werde ein Punkt der Ebene genau dann ein rationaler Punkt genannt, wenn seine beiden Koordinaten rationale Zahlen sind; er werde genau dann ein irrationaler Punkt genannt, wenn seine beiden Koordinaten irrationale Zahlen sind; er werde genau dann ein gemischter Punkt genannt, wenn eine seiner Koordinaten rational, die andere irrational ist.
a) Gibt es eine Gerade, auf der sich von jeder der drei Sorten jeweils mehr als ein Punkt befindet?
b) Für jede der drei Sorten beantworte man folgende Frage:
Gibt es eine Gerade, auf der sich von dieser Sorte genau ein Punkt, dagegen von jeder der beiden anderen Sorten jeweils mehr als ein Punkt befindet?

Lösung von cyrix:
Wir zeigen zuerst folgendes Lemma: Befinden sich auf einer Gerade mindestens zwei rationale Punkte, dann enthält diese Gerade keine irrationalen oder keine gemischten Punkte.

Beweis:
Seien (x_1,y_1) und (x_2,y_2) zwei verschiedene rationale Punkte, die auf der Geraden liegen. Wir führen nun eine Fallunterscheidung durch:

1. Fall: $x_1 = x_2$. Dann verläuft die Gerade parallel zur y-Achse und jeder Punkt auf der Gerade besitzt die gleiche x-Koordinate. Also hat jeder Punkt mindestens eine rationale Koordinate, sodass es auf dieser Geraden keine irrationalen Punkte gibt.

2. Fall: $y_1 = y_2$. Dann verläuft die Gerade parallel zur x-Achse, sodass alle Punkte auf ihr die gleiche – eine rationale – y-Koordinate besitzen und es wieder auf dieser Geraden keine irrationalen Punkte gibt.

3. Fall: $x_1 \neq x_2$ und $y_1 \neq y_2$. Dann verläuft die Gerade weder parallel zur x-, noch zur y-Achse und es gibt reelle Zahlen $m \neq 0$ und n, sodass die Punkte (x,y) auf der Geraden alle die Gleichung $y = mx + n$ erfüllen. Dabei sind jedoch $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ und $n = y_1 - mx_1$ beide sogar rational, sodass für jedes rationale x auch $y = mx + n$ rational ist. Umgekehrt ist aber auch für jedes rationale y auch $\frac{y-n}{m} = x$ rational, sodass es auf der Geraden keine gemischten Punkte gibt, $\Box$.

Mit diesem Lemma lässt sich die Frage aus Aufgabenteil a) sowie die Fragen aus Aufgabenteil b), die sich auf die Sorten gemischter bzw. irrationaler Punkte beziehen, leicht negativ beantworten, da in all diesen Situationen jeweils mindestens zwei rationale Punkte auf der Geraden liegen müssten, was dazu führt, dass eine der beiden anderen Sorten nicht auf der Gerade vertreten sein kann.

Es bleibt noch der Fall zu betrachten, ob es eine Gerade gibt, die genau einen rationalen und jeweils mindestens zwei gemischte und irrationale Punkte enthält. Dies ist der Fall, wie etwa die Gerade, die durch die Gleichung $y = \sqrt{2} \cdot x$ beschrieben wird, zeigt. Diese enthält nämlich den rationalen Punkt (0,0), die gemischten Punkte $(\pm 1, \pm\sqrt{2})$ und die irrationalen Punkte $(\pm\sqrt{3}, \pm\sqrt{6})$, wobei jeweils in der x- und y-Koordinate das gleiche Vorzeichen zu wählen ist.

IV Runde 4

Aufgabe 011043:
Es sei

$$s = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$$

Berechnen Sie s_2 und s_3 und versuchen Sie, einen rationalen Wert für s zu finden! (Die Wurzelwerte dürfen nicht durch Näherungswerte ersetzt werden.)

Lösung von Eckard Specht:
Wir setzen $s = u + v$ mit $u = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}}$ und $v = \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$. Dann gilt

$$u^3 + v^3 = (20 + 14\sqrt{2}) + (20 - 14\sqrt{2}) = 40$$

und weiter nach der 3. binomischen Formel

$$u^3 v^3 = (20 + 14\sqrt{2} \cdot (20 - 14\sqrt{2}) = 8$$

also $uv = 2$. Ferner gilt stets

$$(u+v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 = 3uv(u+v) + (u^3 + v^3) \Rightarrow s^3 - 6s - 40 = 0$$

Glücklicherweise lässt sich eine Wurzel dieser kubischen Gleichung (die bereits in reduzierter Form vorliegt) durch Probieren leicht finden, nämlich $s = 4$.
Eine Polynomdivision durch $(s - 4)$ liefert nun $s^3 - 6s - 40 = (s - 4)(s^2 + 4s + 10) = 0$, d. h. die anderen beiden Wurzeln sind komplex: $s_{2,3} = -2 + \sqrt{6}i$. Der gesuchte rationale Wert für s beträgt also 4; die weiteren Potenzen sind demnach $s^2 = 16$ und $s^3 = 64$.

Aufgabe 061045:
Es sei a eine beliebig gegebene reelle Zahl. Ermitteln Sie alle reellen x, die der Gleichung genügen:

$$\sqrt{a+x} - \sqrt{\frac{a^2}{a+x}} = \sqrt{2a+x}$$

Lösung von cyrix:
Multiplikation der Gleichung mit $\sqrt{a+x}$ überführt diese in (die wegen $a + x \neq 0$ äquivalente Gleichung) $a + x - |a| = \sqrt{(2a+x) \cdot (a+x)}$.

1. Fall: $a > 0$. Dann ist $|a| = a$ und man erhält durch Quadrieren $x^2 = x^2 + 3ax + 2a^2$ bzw. $x = -\frac{2}{3} \cdot a$. Damit erhält man $a + x = \frac{1}{3} \cdot a$ bzw.
$$\sqrt{a+x} - \sqrt{\frac{a^2}{a+x}} = \sqrt{\frac{1}{3}a} - \sqrt{\frac{a^2}{\frac{1}{3}a}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{a} - \sqrt{3a} = \sqrt{a} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \sqrt{3}\right) < 0 \leq \sqrt{2a-x}$$
also einen Widerspruch zur Ausgangsgleichung, sodass es in diesem Fall keine Lösungen gibt.
2. Fall: $a \leq 0$. Dann ist $|a| = -a$, sodass die Gleichung übergeht in $2a + x = \sqrt{(2a+x) \cdot (a+x)}$.
Fall 2.1: $2a + x = 0$. (Wegen $a + x \neq 0$ ist in diesem Fall $a \neq 0$, denn sonst würde aus $2a + x = 0$ nach Subtraktion von $a = 0$ sofort auch $a + x = 0$ folgen.) Dann ist $x = -2a$ und $\sqrt{a+x} - \sqrt{\frac{a^2}{a+x}} = \sqrt{-a} - \sqrt{-a} = 0 = \sqrt{2a+x}$, sodass dies Lösungen der Ausgangsgleichung sind.
Fall 2.2: Es ist $2a + x \neq 0$, also auch $\sqrt{2a+x} \neq 0$, sodass wir dadurch dividieren können. Damit erhalten wir die Gleichung $\sqrt{2a+x} = \sqrt{a+x}$ bzw. nach Quadrieren $2a + x = a + x$, also $a = 0$. Tatsächlich vereinfacht sich aber in diesem Fall die Ausgangsgleichung zu $\sqrt{x} - \sqrt{\frac{0}{x}} = \sqrt{x}$, was für alle positiven reellen Zahlen x erfüllt ist.

Zusammenfassung: Für positive a hat die Gleichung keine Lösung, für negative a ist jeweils $x = -2a$ die einzige Lösung und für $a = 0$ erfüllt jede positive reelle Zahl x die Gleichung.

Aufgabe 071046:
Man gebe alle reellen x an, die folgende Gleichung erfüllen:
$$\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x-\sqrt{x}} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}$$

Lösung von cyrix:
Offensichtlich ist $x \geq \sqrt{x}$, damit $\sqrt{x-\sqrt{x}}$ definiert ist. Dies ist äquivalent zu $x \geq 1$ oder $x = 0$, wobei aber letzteres ausgeschlossen ist, da man sonst wegen $x + \sqrt{x} = 0$ einen Nullnenner im Bruch unter der Wurzel auf der rechten Seite erhalten würde. Sei also ab sofort $x \geq 1$.

Durch Multiplikation mit $\sqrt{x+\sqrt{x}} \neq 0$ geht die Gleichung äquivalent über in
$$x + \sqrt{x} - \sqrt{x^2 - x} = \frac{3}{2}\sqrt{x} \qquad \text{bzw.} \qquad x - \sqrt{x} \cdot \sqrt{x-1} = \frac{1}{2}\sqrt{x}$$
Nach Division durch $\sqrt{x} \neq 0$ und umsortieren erhält man $\sqrt{x} - \frac{1}{2} = \sqrt{x-1}$. Quadriert man diese Gleichung, was wegen $x \geq 1$ und also $\sqrt{x} - \frac{1}{2} > 0$ eine Äquivalenzumformung ist, führt dies auf $x - \sqrt{x} + \frac{1}{4} = x - 1$ bzw. $\sqrt{x} = \frac{5}{4}$, also $x = \frac{25}{16}$.

Tatsächlich bestätigt die (mathematisch nicht notwendige) Probe (da es sich ausschließlich um Äquivalenzumformungen gehandelt hat), dass $x = \frac{25}{16}$ Lösung der Ausgangsgleichung ist. Diese ist auch, wie gezeigt, die einzige Lösung.

Aufgabe 131044:
Man untersuche, ob die Zahl
$$x = \sqrt{4+\sqrt{7}} - \sqrt{4-\sqrt{7}} - \sqrt{2}$$
positiv, negativ oder gleich Null ist!

Lösung von cyrix:
Es ist

$$x+\sqrt{2}=\sqrt{4+\sqrt{7}}-\sqrt{4-\sqrt{7}}=\frac{\left(\sqrt{4+\sqrt{7}}-\sqrt{4-\sqrt{7}}\right)\cdot\left(\sqrt{4+\sqrt{7}}+\sqrt{4-\sqrt{7}}\right)}{\sqrt{4+\sqrt{7}}+\sqrt{4-\sqrt{7}}}=$$

$$=\frac{4+\sqrt{7}-(4-\sqrt{7})}{\sqrt{4+\sqrt{7}}+\sqrt{4-\sqrt{7}}}$$

Dann ist

$$x=0\Leftrightarrow x+\sqrt{2}=\sqrt{2}\Leftrightarrow\frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{4+\sqrt{7}}+\sqrt{4-\sqrt{7}}}=\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{7}=\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{4+\sqrt{7}}+\sqrt{4-\sqrt{7}}\right)\Leftrightarrow\sqrt{2}\cdot\sqrt{7}=\left(\sqrt{4+\sqrt{7}}+\sqrt{4-\sqrt{7}}\right)$$

$$\Leftrightarrow 14=(4+\sqrt{7})+(4-\sqrt{7})+2\sqrt{4+\sqrt{7}}\cdot\sqrt{4-\sqrt{7}}$$

$$\Leftrightarrow 6=2\sqrt{(4+\sqrt{7})\cdot(4-\sqrt{7})}\Leftrightarrow 3=\sqrt{16-7}=\sqrt{9}=3$$

was eine wahre Aussage ist. Also ist $x=0$.

Alternativ-Lösung von cyrix:
Aus $4+\sqrt{7}>4-\sqrt{7}>0$ folgt $\sqrt{4+\sqrt{7}}-\sqrt{4-\sqrt{7}}>0$. Daher folgt aus

$$\left(\sqrt{4+\sqrt{7}}-\sqrt{4-\sqrt{7}}\right)^2=4+\sqrt{7}-2\sqrt{4+\sqrt{7}}\cdot\sqrt{4-\sqrt{7}}+4-\sqrt{7}=8-2\sqrt{9}=2$$

bereits $\sqrt{4+\sqrt{7}}-\sqrt{4-\sqrt{7}}=\sqrt{2}$ und somit $x=0$.

Zweite Alternativ-Lösung von Kornkreis:
Zunächst sind die auftretenden Wurzeln alle definiert, da wegen $2<\sqrt{7}<3$ die Radikanden nicht-negativ sind. Wir multiplizieren x mit der positiven Zahl $r=\sqrt{4+\sqrt{7}}+\sqrt{2}$ und erhalten mit der dritten binomischen Formel

$$r\cdot x=4+\sqrt{7}-2-\sqrt{16-7}-\sqrt{2}\sqrt{4-\sqrt{7}}=\sqrt{7}-1-\sqrt{2}\sqrt{4-\sqrt{7}}$$

Betrachte nun die Gleichung $y-1=\sqrt{2}\sqrt{4-y}$ für $2<y<3$. Beide Seiten sind positiv, daher ist Quadrieren eine Äquivalenzumformung und liefert

$$y-1=\sqrt{2}\sqrt{4-y}\iff(y-1)^2=8-2y\iff y^2-7=0\Longleftarrow y=\sqrt{7}$$

Daraus folgt $r\cdot x=0$ und da r positiv war also $x=0$.

Aufgabe 141044:
Man ermittle alle rationalen Zahlen r, die die folgende Gleichung erfüllen:

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^r+\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^r=4$$

Lösung von weird:
Wegen $\sqrt{2-\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$ ist $(\sqrt{2+\sqrt{3}})^r$ eine Lösung der Gleichung $x+\frac{1}{x}=4$, womit also dann

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^r=2\pm\sqrt{3}$$

gilt. Diese Gleichung hat aber einerseits für jede Vorzeichenwahl eine eindeutig bestimmte Lösung $r \in \mathbb{R}$, andererseits sind $r = \pm 2$ jeweils offensichtlich Lösungen, welche dann auch tatsächlich die gesuchten rationalen Lösungen der Aufgabe sind.

Aufgabe 181043B:
Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen x, für die erstens jede in dem Ausdruck

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}$$

auftretende Wurzel und damit dieser Ausdruck insgesamt (als reelle Zahl) existiert und zweitens diese Zahl gleich 1 ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Genau dann existiert jede in dem angegebenen Ausdruck auftretende Wurzel, wenn die Beziehungen gelten:

$$x \geq 1 \quad (1) \quad ; \quad x+3 \geq 4\sqrt{4-1} \quad (2) \quad ; \quad x+3 \geq 6\sqrt{x-1} \quad (3)$$

(I) Angenommen, für eine reelle Zahl x sei dies der Fall, und für sie gelte auch

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1 \qquad (4)$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} \sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} &= 1-\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} \\ x+3-4\sqrt{x-1} &= 1-2\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}+x+6-6\sqrt{x-1} \\ \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} &= 3-\sqrt{x-1} \qquad (5) \end{aligned}$$

also $\sqrt{x-1} \leq 3 \quad (6)$.
Aus (4) und (5) folgt weiter

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} = \sqrt{x-1}-2 \quad \text{also} \quad \sqrt{x-1} \geq 2 \quad (7)$$

Aus (6) und (8) ergibt sich

$$4 \leq x-1 \leq 9 \quad (9) \qquad \text{also} \qquad 5 \leq x \leq 10 \quad (10)$$

Daher können nur diejenigen reellen Zahlen x, für die (10) gilt, die geforderten Eigenschaften haben.

(II) Umgekehrt gilt: Wenn eine reelle Zahl x die Bedingung (10) erfüllt, so gilt für sie (1) sowie (9), also (6) und (8); ferner gilt

$$x^2-10x+25 = (x-5)^2 \geq 0$$

also

$$x^2+6x+9 \geq 16x-16 \qquad \text{d. h.} \qquad (x+3)^2 \geq 16(x-1)$$

und daraus ergibt sich (da aus (10) auch $x+3 > 0$ folgt) die Ungleichung (2).
Weiterhin gilt

$$x^2-20x+100 = (x-10)^2 \geq 0$$

also

$$x^2+16x+64 \geq 36x-36 \qquad \text{d. h.} \qquad (x+8)^2 \geq 36(x-1)$$

und daraus ergibt sich (da aus (10) auch $x+8 > 0$ folgt) die Ungleichung (3). Ferner gilt

$$(\sqrt{x-1}-2)^2 = x-1-4\sqrt{x-1}+4 = x+3-4\sqrt{x-1}$$

hieraus und aus (8) folgt (7). Weiterhin gilt

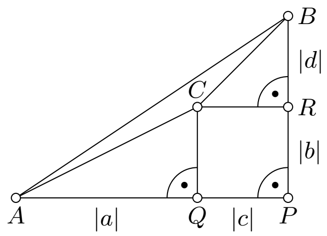
$$(3-\sqrt{x-1})^2 = 0 - 6\sqrt{x-1} + x - 1 = x + 8 - 6\sqrt{x-1}$$

hieraus und aus (6) folgt (5).
Aus (5) und (7) aber ergibt sich, dass x auch (4) erfüllt. Somit haben genau diejenigen reellen Zahlen x, für die (10) gilt, die geforderten Eigenschaften.

Aufgabe 191043A:
Beweisen Sie, dass für alle reellen Zahlen x, y die Ungleichung gilt:

$$\sqrt{4\cos^2 x\cos^2 y + \sin^2(x-y)} + \sqrt{4\sin^2 x\sin^2 y + \sin^2(x-y)} \geq 2$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Für reelle Zahlen a,b,c,d kann man als Hilfsfigur ein rechtwinkliges Dreieck APB mit Katheten der Längen $AP = |a| + |c <$ und $BP = |b < +|d|$ betrachten.
Q und R seien die Punkte auf den Katheten mit $AQ = |a|$ und $BR = |d|$. Der Punkt C ergänze das Dreieck QPR zu einem Rechteck (siehe Skizze).



Im Dreieck ABC gilt dann $AC + BC \geq AB$. Nach dem Satz des Pythagoras ergibt sich daraus

$$\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2} \geq \sqrt{(|a|+|c|)^2 + (|b|+|d|)^2} \geq \sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2} \qquad (1)$$

Wählt man entsprechen der Aufgabe $a = 2\cos x\cos y$. $c = 2\sin x\sin y$, $b = d = \sin(x-y)$, so gilt nach einem Additionstheorem

$$a + c = 2(\cos x\cos y + \sin x\sin y) = 2\cos(x-y)$$

und nach dem trigonometrischen Pythagoras

$$(a+c)^2 + (b+d)^2 = 4(\cos^2(x-y) + \sin^2(x-y)) = 4$$

Durch Einsetzen in (1) erhält man die Behauptung.

Aufgabe 191045:
Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen x, für die $\sqrt{x^2+5x+28}$ (als reelle Zahl) definiert ist und die die Gleichung

$$x^2 + 5x + 4 = 5\sqrt{x^2+5x+28}$$

erfüllen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, eine reelle Zahl x habe die genannten Eigenschaften. Dann gilt $x^2 + 5x + 28 \geq 0$, und, wenn man $y = \sqrt{x^2+5x+28}$ setzt, $y^2 - 24 = 5y$.
Diese quadratische Gleichung hat die Lösungen $y = 8$ und $y = -3$, so dass eine der Gleichungen

$$x^2 + 5x + 4 = 40 \qquad \text{bzw.} \qquad x^2 + 5x + 4 = -15$$

folgt. Von diesen beiden Gleichungen besitzt nur die erste reelle Lösungen, und zwar $x = -9$ und $x = 4$. Also können höchstens diese beide Zahlen die geforderten Eigenschaften haben.
Sie habe diese Eigenschaften auch, denn es gilt

$$(-9)^2 + 5(-9) + 28 = 64 \geq 0 \qquad \text{bzw.} \qquad 4^2 + 5 \cdot 4 + 28 = 64 \geq 0$$

also existiert für diese Zahlen x die Wurzel $\sqrt{x^2 + 5x + 28}$ und es gilt

$$(-9)^2 + 5(-9) + 4 = 40 = 5 \cdot 8 = 5\sqrt{(-9)^2 + 5(-9) + 28} \qquad \text{bzw.}$$

$$4^2 + 5 \cdot 4 + 4 = 40 = 5 \cdot 8 = 5\sqrt{4^2 + 5 \cdot 4 + 28} \qquad (2)$$

Daher erfüllen genau die Zahlen $x = -9$ und $x = 4$ die Bedingungen der Aufgabe.

Aufgabe 331045:
Bei Verwendung eines kartesischen Koordinatensystems werde ein Punkt der Ebene „rational“ genannt, wenn seine beiden Koordinaten rationale Zahlen sind; er werde „irrational“ genannt, wenn seine beiden Koordinaten irrationale Zahlen sind; er werde „gemischt“ genannt, wenn eine seiner Koordinaten rational und die andere irrational ist.
a) Gibt es in der Ebene Geraden, die nur Punkte einer Sorte enthalten?
Ermitteln Sie die Antwort auf diese Frage für jede der drei Sorten „rational“, „irrational“, „gemischt“!
b) Gibt es in der Ebene Geraden, in denen aus genau zwei Sorten (mindestens) je ein Punkt enthalten ist?
Ermitteln Sie die Antwort auf diese Frage für jede Zusammenstellung von zwei der drei Sorten!
c) Gibt es in der Ebene Geraden, in denen aus jeder der drei Sorten (mindestens) je ein Punkt enthalten ist?

Lösung von cyrix:
a) Es kann keine Gerade geben, die nur aus rationalen oder irrationalen Punkten besteht: Jede Gerade, die nicht parallel zur y-Achse verläuft, enthält für jede reelle Zahl x einen Punkt mit dieser x-Koordinate, also insbesondere Punkte mit rationaler und Punkte mit irrationaler x-Koordinate. Und für jede Parallele zu y-Achse gilt dieses Argument entsprechend mit den y-Koordinaten.

Auch kann keine Gerade nur gemischte Punkte enthalten: Gäbe es eine solche, so kann sie nicht parallel zur x-Achse verlaufen, denn sonst wäre entweder für alle Punkte auf dieser Geraden die y-Koordinate rational, oder für alle irrational, während sowohl Punkte mit rationaler als auch mit irrationaler x-Koordinate auf ihr liegen, also auf jeden Fall auch ein rationaler bzw. ein irrationaler Punkt.

Analog schließt man aus, dass es sich um eine Gerade handelt, die parallel zur y-Achse liegt. Für jede sonstige Gerade aber durchlaufen sowohl die x- als auch die y-Koordinaten der auf ihr liegenden Punkte alle reellen Zahlen, wobei jede nur genau einmal (als x- und einmal als y-Koordinate) angenommen. Lägen auf ihr nur gemischte Punkte, so müsste jeder Punkt mit irrationaler x-Koordinate eine rationale y-Koordinate besitzen, sodass es mindestens so viele rationale wie irrationale reelle Zahlen geben müsste. Tatsächlich sind aber die irrationalen Zahlen überabzählbar, während die rationalen nur abzählbar sind, was ein Widerspruch zur gerade gewonnenen Feststellung ist. Also gibt es keine Gerade, die nur aus gemischten Punkten besteht.

b) Für jede Kombination gibt es solche Geraden:
Auf der Geraden $y = 0$ liegen ausschließlich rationale Punkte (die mit rationaler x-Koordinate) und gemischte (die mit irrationaler x-Koordinate).
Auf der Geraden $y = \sqrt{2}$ liegen ausschließlich irrationale Punkte (die mit irrationaler x-Koordinate) und gemischte (die mit rationaler x-Koordinate). Und auf der Geraden $y = x$ liegen ausschließlich rationale Punkte (die mit rationaler x-Koordinate) und irrationale (die mit irrationaler x-Koordinate).

c) Auch solche Geraden gibt es, z. B. $y = \sqrt{2} \cdot x$. Auf dieser Geraden liegt der rationale Punkt (0,0), der gemischte Punkt $(1,\sqrt{2})$ und der irrationale Punkt $(\sqrt{3}, \sqrt{6})$.

VII.V Ungleichungen

I Runde 1

Aufgabe 031015:
Welcher von den folgenden Brüchen ist größer:

$$\frac{100^{100}+1}{100^{90}+1} \qquad \text{oder} \qquad \frac{100^{99}+1}{100^{89}+1}$$

Begründen Sie Ihre Behauptung!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Man bildet die Differenz

$$\frac{100^{100}+1}{100^{90}+1} - \frac{100^{99}+1}{100^{89}+1} = \frac{(100^{100}+1)(100^{89}+1) - (100^{99}+1)(100^{90}+1)}{(100^{90}+1)(100^{89}+1)}$$

Nach dem Ausmultiplizieren erhält man im Zähler

$$100^{100} + 100^{89} - 100^{90} - 100^{99} = 100^{99} \cdot (100-1) - 100^{89} \cdot (100-1) > 0$$

Da der Nenner ebenfalls positiv ist, ist die Differenz größer als Null. Also ist der erste Bruch größer.

Aufgabe 051014:
Es seien u, v, c reelle Zahlen mit $|u| < |c|$, $|v| < |c|$. Es ist zu beweisen, dass dann gilt:

$$\left| \frac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}} \right| < |c|$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Aus $|u| < |c|$ folgt zunächst $c \neq 0$ und weiter $\left|\frac{u}{c}\right| < 1$. Aus $|v| < |c|$ folgt $\left|\frac{v}{c}\right| < 1$. Somit ergibt sich

$$0 < \left(1 - \frac{u}{c}\right)\left(1 - \frac{v}{c}\right) = 1 - \frac{u+v}{c} + \frac{uv}{c^2} \qquad \text{und}$$
$$0 < \left(1 + \frac{u}{c}\right)\left(1 + \frac{v}{c}\right) = 1 + \frac{u+v}{c} + \frac{uv}{c^2}$$

und daraus

$$-\left(1 + \frac{uv}{c^2}\right) < \frac{u+v}{c} < 1 + \frac{uv}{c^2} \tag{1}$$

insbesondere also auch $1 + \frac{uv}{c^2} > 0$, so dass sich nach Division der Ungleichung (1) durch $1 + \frac{uv}{c^2}$ und anschließender Multiplikation mit $|c|$ die Behauptung ergibt.

Aufgabe 161012:
Geben Sie alle reellen Zahlen x $(x \neq -3)$ an, die folgende Ungleichung erfüllen!

$$\frac{2}{x+3} - \frac{1}{2} \geq \frac{5}{x+3} - \frac{1}{10} \tag{1}$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Eins reelle Zahl x $(\neq -3)$ erfüllt genau dann (1), wenn

$$-\frac{2}{5} \geq \frac{3}{x+3} \tag{2}$$

gilt. Für alle $x > -3$ ist $\frac{3}{x+3}$ positiv, also (2) nicht erfüllt.

Für $x < -3$ ist (2) gleichbedeutend mit jede der Ungleichungen

$$-2(x+3) \leq 15 \qquad ; \qquad x+3 \geq -7{,}5 \qquad ; \qquad x \geq -10{,}5$$

Also wird (2) und folglich ebenso auch (1) genau von denjenigen Zahlen x erfüllt, für die $-10{,}5 \leq x < -3$ gilt.

Aufgabe 171012:
Man ermittle die Menge aller derjenigen reellen Zahlen x, für die der Term $\dfrac{1}{\sqrt{33-8x-x^2}}$ definiert ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Der Term $\sqrt{33-8x-x^2}$ ist genau dann definiert, wenn $33-8x-x^2 \geq 0$ ist.

Der Term $\frac{1}{\sqrt{33-8x-x^2}}$ ist genau dann definiert, wenn $\sqrt{33-8x-x^2}$ definiert ist und $\sqrt{33-8x-x^2} \neq 0$ gilt. Diese Forderungen sind der Reihe nach gleichwertig mit

$$33-8x-x^2 > 0 \quad \rightarrow \quad x^2+8x+16 < 49 \quad \rightarrow \quad (x-4)^2 < 49 \quad \rightarrow \quad |x-4| < 7$$

$$0 \leq x+4 < 7 \qquad \text{oder} \qquad -7 < x+4 < 0 \quad \rightarrow \quad -4 \leq x < 3 \qquad \text{oder} \qquad -11 < x < -4$$

Daher ist die gesuchte Menge die Menge aller x, für die $-11 < x < 3$ gilt.

Aufgabe 181012:
In einem Mathematikzirkel werden Aussagen zur Diskussion gestellt, die mit den Worten beginnen: „Wenn a und b zwei von 0 verschiedene reelle Zahlen sind, für die $a > b$ und $|a| < |b|$ gilt, dann ...“

Antje stellt als Fortsetzung zur Diskussion: „... ist a negativ.“

Bernd stellt als Fortsetzung zur Diskussion: „... sind a und b negativ.“

Cornelia stellt als Fortsetzung zur Diskussion: „... ist b negativ.“

Doris stellt als Fortsetzung zur Diskussion: „... braucht weder a noch b negativ zu sein.“

Man untersuche für jede dieser vier zur Diskussion gestellten Aussagen, ob sie wahr ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Zahlen $a = 1$ und $b = -2$ sind von 0 verschieden; sie haben die Eigenschaft $a > b$ und wegen $|1| = 1, |-2| = 2$ auch die Eigenschaft $|a| < |b|$.

Da $a = 1$ jedoch nicht negativ ist, ist sowohl die von Antje als auch die von Bernd zur Diskussion gestellte Aussage falsch.
Ferner gilt: Wenn a und b zwei von 0 verschiedene reelle Zahlen sind, für die $a > b$ und $|a| < |b|$ gilt; so ist b negativ; denn wäre b nicht negativ, so folgte $a > b > 0$, also $|a| = a > b = |b|$ im Widerspruch zu $|a| < |b|$.

Damit ist bewiesen, dass die von Cornelia zur Diskussion gestellte Aussage wahr und die von Doris zur Diskussion gestellte Aussage falsch ist.

Aufgabe 191013:
Man ermittle alle reellen Zahlen x mit $-1 \leq x \leq 1$, für die der Term $x^2 + 3x + 4$ das Quadrat einer natürlichen Zahl ergibt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Für alle reellen x gilt

$$x^2 + 3x + 4 = \left(c + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 1$$

für $-1 \leq x \leq 1$ gilt ferner $x^2 \leq 1, 3x \leq 3$, also

$$x^2 + 3x + 4 \leq 1 + 3 + 4 < 9$$

Daraus folgt: Wenn der Term für reelles x mit $-1 \leq x \leq 1$ eine ganzzahlige Quadratzahl ergibt, so kann dies nur die Zahl 4 sein.
Die Gleichung $x^2 + 3x + 4 = 4$ ist nun gleichwertig mit $x(x + 3) = 0$.

Daher hat sie genau die Lösungen $x = 0$ und $x = -3$. Von diesen erfüllt genau die erstgenannte die Bedingung $-1 \leq x \leq 1$. Also hat genau die Zahl $x = 0$ die verlangte Eigenschaft.

Aufgabe 201011:
a) Geben Sie ein Paar (x, y) reeller Zahlen an, das die folgenden Ungleichungen (1), (2) und (3) erfüllt!

$$10y - x \leq 100 \qquad (1)$$
$$5y - 5x > 0 \qquad (2)$$
$$y + x \geq 21 \qquad (3)$$

b) Beweisen Sie, dass es mehr als zehn verschiedene derartige Paare (x, y) gibt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
b) Ein Paar (x,y) erfüllt dann die Ungleichungen (1),(2),(3), wenn es die Ungleichungen

$$10y - 100 \leq x \quad (4) \qquad ; \qquad x < y \quad (5) \qquad ; \qquad 21 - y \leq x \quad (6)$$

erfüllt. Ferner hat eine Zahl y die Eigenschaft, dass es zu ihr Zahlen mit (4), (5), (6) gibt, wenn y die Ungleichungen

$$10y - 100 < y \qquad ; \qquad 21 - y < y$$

erfüllt. Dies ist der Fall, wenn die Ungleichungen

$$9y < 100 \qquad ; \qquad 21 < 2y$$

bestehen; dies wiederum trifft dann zu, wenn

$$\frac{21}{9} < y < \frac{100}{9}$$

gilt. Beispielsweise erfüllt $y = 11$ diese Ungleichungen. Für diesen Wert von y geht sowohl das System (4), (5) als auch das System (5), (6) über in $10 \leq x < 11 \qquad (7)$.
Nun gibt es mehr als zehn verschiedene reelle Zahlen x, die (7) erfüllen. Die mit diesen Zahlen x gebildeten Paare $(x, 11)$ sind somit bereits mehr als zehn verschiedene Paare, die (1), (2) und (3) erfüllen.

Zu a) genügt es, ein Paar (x,y) anzugeben und nachzuweisen, dass es (1), (2),(3) erfüllt.

Aufgabe 231012:
Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen x, für die $x^3 - 9x > 0$ gilt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es gilt
$$x^3 - 9x = x(x^2 - 9) = x(x-3)(x+3)$$
Damit lässt sich die linke Seite der Ungleichung als Produkt dreier Faktoren darstellen. Ein Produkt dreier Faktoren ist genau dann positiv, wenn

(a) alle drei Faktoren positiv sind oder
(b) zwei Faktoren negativ sind und der dritte positiv ist.

Fall (b) tritt genau dann ein, wenn der zweitgrößte Faktor x negativ und der größte Faktor $x+3$ positiv ist, d. h. genau dann, wenn die Ungleichungen $x < 0$ und $x > -3$ gelten, Fall (a) genau dann, wenn $x - 3$ positiv ist, also $x > 3$ gilt.

Daher sind genau diejenigen reellen Zahlen x die zu ermittelnden, für die gilt:
$$-3 < x < 0 \qquad \text{oder} \qquad x > 3$$

Aufgabe 251011:

a) Beweisen Sie unter Verwendung des Tafelwerkes, dass $\sqrt{5} + \sqrt{8} < \sqrt{6} + \sqrt{7}$ gilt!

b) Beweisen Sie die Gültigkeit dieser Ungleichung ohne Verwendung von Näherungswerten für die Wurzeln!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Aus den Angaben im Tafelwerk ergibt sich, dass für die Wurzeln jedenfalls folgende Ungleichungen gelten
$$2{,}23 < \sqrt{5} < 2{,}24 \tag{1}$$
$$2{,}82 < \sqrt{8} < 2{,}83 \tag{2}$$
$$2{,}44 < \sqrt{6} < 2{,}45 \tag{3}$$
$$2{,}64 < \sqrt{7} < 2{,}65 \tag{4}$$
Aus (1) und (2) bzw. (3) und (4) folgt
$$\sqrt{5} + \sqrt{7} < 5{,}07 \qquad \text{bzw.} \tag{5}$$
$$5{,}08 < \sqrt{6} + \sqrt{7} \tag{6}$$
Aus (5) und (6) folgt unmittelbar
$$\sqrt{5} + \sqrt{8} < \sqrt{6} + \sqrt{7} \qquad \text{(w. z. b. w.)}$$
b) Es gilt
$$\sqrt{40} < \sqrt{42} \tag{8}$$
Daraus folgt
$$2 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{8} < 2 \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{7} \tag{9}$$
$$5 + 2 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{8} + 8 < 6 + 2 \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{7} + 7 \tag{10}$$
$$(\sqrt{5} + \sqrt{8})^2 < (\sqrt{6} + \sqrt{7})^2 \tag{11}$$

Da $\sqrt{6}+\sqrt{7}>0$ ist, folgt aus (11) weiter

$$\sqrt{5}+\sqrt{8}<\sqrt{6}+\sqrt{7} \qquad \text{(w.z.b.w)}$$

Aufgabe 271012:

a) Gibt es eine *ganze Zahl* x, für die $\frac{1}{x-1}>1987$ gilt?

b) Ermitteln Sie alle diejenigen *reellen Zahlen* x, für die $\frac{1}{x-1}>1987$ gilt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Für jede ganze Zahl x gilt entweder $x=1$ oder $x\geq 2$ oder $x\leq 0$.

Wenn $x=1$ ist, so existiert $\frac{1}{x-1}$ nicht.

Wenn $x\geq 2$ ist, so ist $x-1\geq 1$; für den Kehrwert gilt daher $\frac{1}{x-1}\leq 1$.

Wenn $x\leq 0$ ist, so ist $x-1$ negativ und daher auch $\frac{1}{x-1}$ negativ.
Damit ist bewiesen, dass es keine ganze Zahl x gibt, für die $\frac{1}{x-1}>1987$ gilt.

(1) b) Für jede reelle Zahl $x\leq 1$ gilt entweder $x=1$, und dann existiert $\frac{1}{x-1}$ nicht, oder es gilt $x<1$, also $x-1<0$ und folglich $\frac{1}{x-1}<0$.

Für alle reellen $x\leq 1$ ist damit bewiesen, dass sie die Ungleichung $\frac{1}{x-1}>1987$ nicht erfüllen.

(2) Für reelle $x>1$, ist $x-1$ positiv und daher die Ungleichung $\frac{1}{x-1}>1987$ der Reihe nach äquivalent mit

$$1>1987\cdot(x-1)\Rightarrow \frac{1}{1987}>x-1>0\Rightarrow 1<x<\frac{1988}{1987} \qquad (1)$$

Alle diejenigen x aus (1) erfüllen die gegebene Ungleichung.

II Runde 2

Aufgabe 091024:
Mit welchen der folgenden Bedingungen (1), ..., (5) ist die Bedingung $3x^2+6x>9$ äquivalent?

(1) $-3<x<1$	(2) $x>-3$	(3) $x<1$
(4) $x<1$ oder $x>-3$	(5) $x>1$ oder $x<-3$)	

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Folgende Ungleichungen sind der gegebenen äquivalent

$$\begin{aligned} x^2+2x-3&>0\\ (x+1)^2&>4\\ (x+1)^2-2^2&>0\\ (x-1)(x+3)&>0 \end{aligned}$$

nach Fallunterscheidung erhält man als äquivalent mit der letzten Bedingung: $x>1$ oder $x<-3$.

Damit ist gezeigt, dass von den Bedingungen (1) bis (5) nur die Bedingung (5) der gegebenen äquivalent ist.

Aufgabe 111023:
Es seien u und v reelle Zahlen mit $0 < v < u$.
Ermitteln Sie alle reellen Zahlen k mit $k > -\frac{u}{v}$, für die $\frac{u+kv}{v+ku} < 1 \quad (*)$ gilt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, für eine reelle Zahl k gelte $(*)$, Dann ist $v + ku > 0$ und es folgt aus $(*)$:

$$(1) \quad u + kv < v + ku \qquad \text{also} \qquad (2) \quad (u - v)(1 - k) < 0$$

Wegen $u > v$ folgt daraus $k > 1$. Also können höchstens alle $k > 1$ Lösungen von $(*)$ sein.
Tatsächlich ist für $k > 1$ die Ungleichung (2) und damit auch (1) sowie $(*)$ erfüllt.

Aufgabe 151024:
Für positive reelle Zahlen a und b gelte

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 2 \qquad (1)$$

Es ist zu beweisen, dass dann für diese Zahlen $a + b \geq 2 \quad (2)$ gilt.
Ferner sind alle positiven reellen Zahlenpaare (a, b) zu ermitteln, für die (1) gilt und für die in (2) das Gleichheitszeichen gilt.

Lösung von Steffen Polster:
Umformen von (1) ergibt, da $a > 0$, $b > 0$

$$a + b = 2ab \quad (2) \quad \Rightarrow \quad a = \frac{b}{2b - 1} \quad (3)$$

Da $a > 0$ nach Aufgabenstellung ist, wird aus (3): $\frac{b}{2b-1} > 0 \Rightarrow b > \frac{1}{2}$ (analog aus Symmetriegründen $a > \frac{1}{2}$), womit (3) für alle möglichen b definiert ist. Einsetzen von (3) in (2) ergibt

$$a + b = 2\frac{b^2}{2b - 1} \qquad (4)$$

Für alle möglichen $b > \frac{1}{2}$ wird

$$\frac{b^2}{2b - 1} \geq 1 \Leftrightarrow b^2 \geq 2b - 1 \Leftrightarrow b^2 - 2b + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (b - 1)^2 \geq 0 \qquad (5)$$

Da $(b - 1)^2$ für $b > \frac{1}{2}$ stets positiv ist, kann (4) abgeschätzt werden

$$a + b = 2\frac{b^2}{2b - 1} \geq 2$$

w. z. b. w.
Die Zahlenpaare $(a; b)$ mit $a,b \in \mathbb{R}$, $b > \frac{1}{2} \wedge a = \frac{b}{2b-1}$ erfüllen Gleichung (1).
Die Gleichheit in (2) gilt für $\frac{b^2}{2b-1} = 1$, d. h. nach (5) für $(b - 1)^2 = 0$, also $b = 1$ und somit $a = 1$, d. h. das Zahlenpaar $(1, 1)$.

Alternativ-Lösung von cyrix:
Es ist

$$H(a,b) := \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \qquad \text{das } \textit{harmonische Mittel} \text{ und}$$

$$A(a,b) := \frac{a + b}{2} \qquad \text{das } \textit{arithmetische Mittel} \text{ von } a \text{ und } b.$$

Nach Voraussetzung ist $H(a,b) = \frac{2}{2} = 2$. Nach der Ungleichung zwischen arithmetischem und harmonischem Mittel gilt

$$A(a,b) \geq H(a,b),$$

also $a + b \geq 2$, wobei Gleichheit genau für $a = b$, also $a = b = 1$, eintritt.

Aufgabe 171023:
Man ermittle die Menge aller derjenigen reellen Zahlen x, für die der Term $\lg(x^2 + 7x - 30)$ definiert ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Der Term $\lg(x^2 + 7x - 30)$ ist genau dann definiert, wenn $x^2 + 7x - 30 > 0$ ist. Dazu sind der Reihe nach äquivalent

$$\begin{aligned} x^2 + 7x + \left(\frac{7}{2}\right)^2 &> 30 + \frac{49}{4} \\ \left(x + \frac{7}{2}\right)^2 &> \frac{169}{4} \\ \left|x + \frac{7}{2}\right| &> \frac{13}{2} \\ x + \frac{7}{2} > \frac{13}{2} \quad \text{oder} \quad x + \frac{7}{2} &< -\frac{13}{2} \end{aligned}$$

und damit $x > 3$ oder $x < -10$. Die gesuchte Menge ist die Menge aller reellen Zahlen x, für die $x > 3$ oder $x < -10$ gilt.

Aufgabe 201024:
Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen z mit $0 < z < 1$, die zu ihrem Reziproken addiert mindestens 4 ergeben!

Lösung von Steffen Polster:
Da $z > 0$ ist, kann umgeformt werden

$$z + \frac{1}{z} \geq 4 \quad \Rightarrow \quad z^2 + 1 \geq 4z \quad \Rightarrow \quad z^2 - 4z + 1 \geq 0$$

Die quadratische Gleichung $z^2 - 4z + 1 =$ hat die Lösungen

$$0 < z_1 = 2\sqrt{3} < 1 \qquad \text{und} \qquad 1 < z_2 = 2 + \sqrt{3}$$

Eine quadratische Funktion $y = z^2 - 4z + 1 = (z - 2)^2 - 3$ hat ihre Nullstellen bei z_1 und z_2 und ist eine nach oben geöffnete Parabel. Damit hat die Funktion im Intervall $(z_1; 1)$ negative Funktionswerte.
Die gesuchten Lösungen der Aufgabenstellung sind damit alle reellen Zahlen $0 < z \leq 2 - \sqrt{3}$.

Aufgabe 251022:
Man zeige, dass für beliebige positive reelle Zahlen a und b die Ungleichung gilt:

$$\sqrt{a} + \sqrt{a + 3b} < \sqrt{a + b} + \sqrt{a + 2b}$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es gilt $a^2 + 3ab < a^2 + 3ab + 2b^2$, weil b positiv ist. Da die Wurzelfunktion streng monoton steigt und beide Terme positiv sind, gilt

$$\sqrt{a^2 + 3ab} < \sqrt{a^2 + 3ab + b^2}$$

Nach Multiplikation mit 2, Anwendung der Wurzelgesetze und Addition von $2a + 3b$ erhält man

$$a + (a + 3b) + 2\sqrt{a}\sqrt{a + 3b} < (a + b) + (a + 2b) + 2\sqrt{a + b}\sqrt{a + 2b}$$

Unter Benutzung der binomischen Formel ergibt sich daraus

$$\left(\sqrt{a} + \sqrt{a + 3b}\right)^2 < \left(\sqrt{a + b} + \sqrt{a + 2b}\right)^2$$

Weil aus $u2 < v^2$ stets $|u| < |v|$ folgt, gilt weiter

$$\left|\sqrt{a} + \sqrt{a + 3b}\right| < \left|\sqrt{a + b} + \sqrt{a + 2b}\right|$$

Da die Terme in den Beträgen positiv sind, gilt schließlich die ursprüngliche Behauptung. w. z. b. w.

III Runde 3

Aufgabe 031036:
Bestimmen Sie alle ganzzahligen Paare (x, y), für die gilt:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} > \frac{1}{2}$$

und $x > 2, y > 2$.

Lösung von Manuel Naumann:
Es gilt:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} > \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{y} > \frac{x - 2}{2x} \Rightarrow y < \frac{2x}{x - 2}$$

In diese letzte Beziehung kann man nun konkrete Werte für x einsetzen. Unter Beachtung der Voraussetzungen, d. h. $x, y > 2$, erhält man für

$$\begin{aligned} x = 3: &\quad 2 < y < 6 \rightarrow y = 3, y = 4 \text{ oder } y = 5 \\ x = 4: &\quad 2 < y < 4 \rightarrow y = 3 \\ x = 5: &\quad 2 < y < \frac{10}{3} \rightarrow y = 3 \\ x = 6: &\quad 2 < y < 3 \end{aligned}$$

Für $x = 6$ existiert also keine natürliche Zahl y, so dass die Ungleichung erfüllt wird.
Aus $\frac{1}{y} > \frac{1}{2} - \frac{1}{x}$ ist ersichtlich, dass für größer werdendes x, $\frac{1}{y}$ ebenfalls größer und somit y immer kleiner werden muss. Für $x > 5$ können deshalb keine weitere Lösung existieren.

Aufgabe 061032:
Zeigen Sie, dass für beliebige positive reelle Zahlen a, b, c stets gilt:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{9}{a + b + c}$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wegen $a > 0, b > 0, c > 0$ gilt

$$a(b - c)^2 + b(a - c)^2 + c(a - b)^2 \leq 0 \qquad \text{d. h.}$$

$$ab^2 + ac^2 + a^2b + bc^2 + a^2c + b^2c - 6abc \leq 0$$

Durch Addition von $pabc$ erhält man

$$(bc + ac + ab)(a + b + c+) \leq 9abc$$

Durch Multiplikation mit der positiven Zahl $\frac{1}{abc(a+b+c)}$ folgt die Behauptung.

Aufgabe 061035:
Ermitteln Sie alle reellen Zahlen x, die die folgende Ungleichung erfüllen

$$\frac{1}{2} \cdot \lg(2x-1) + \lg\sqrt{x-9} > 1$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Nach der Definition der Wurzel und des Logarithmus existiert die linke Seite der gegebenen Ungleichung genau dann, wenn $x - 9 > 0$ und $2x - 1 > 0$ gilt. Dies ist genau für $x > 9$ der Fall.
Die gegebene Ungleichung ist dann äquivalent mit folgenden Ungleichungen

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\lg(2x-1) + \frac{1}{2}\lg(x-9) &> 1 \\ \lg(2x-1)(x-9) &> 2 \\ \lg(2x^2 - 19x + 9) &> \lg 100 \end{aligned}$$

Diese Ungleichung gilt genau dann, wenn

$$2x^2 - 19x + 9) > 100 \qquad \text{oder} \qquad x2 - \frac{19}{2}x - \frac{91}{2} > 0$$

gilt. Wegen $(x-13)(x+\frac{7}{2}) = x^2 - \frac{19}{2}x - \frac{91}{2}$ ist die letzte Ungleichung äquivalent mit

$$(x - l3)\left(x + \frac{7}{2}\right) > 0 \tag{1}$$

Da ein Produkt zweier reeller Zahlen genau dann positiv ist, wenn entweder beide Faktoren positiv oder beide Faktoren negativ sind, ist (1) genau dann erfüllt, wenn entweder (2) $x - 13 > 0$ und $x + \frac{7}{2} > 0$ oder (3) $x - 13 < 0$ und $x + \frac{7}{2} < 0$.
Aus (2) folgt $x > 13$ und umgekehrt; aus (3) folgt $x < -\frac{7}{2}$ und umgekehrt.
Davon ist wegen $x - 9 > 0$ nur $x > 13$ Lösung der gegebenen Ungleichung; diese ist somit für alle reellen Zahlen $x > 13$ und nur für diese erfüllt.

Aufgabe 071035:
Für welches reelle a nimmt die Summe der Quadrate der Lösungen der Gleichung
$x^2 + ax + a - 2 = 0$ ihren kleinsten Wert an?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Diskriminante des Polynoms $x^2+ax+a-2$ ist $a^2-4(a-2) = (a-2)^2+4$ ist für jedes reelle a positiv, also gibt es auch für jedes reelle a genau zwei Lösungen $x_1,x_2 \in \mathbb{R}$ der Gleichung $x^2+ax+a-2 = 0$ und diese sind keine doppelten Nullstellen.
Nach Vieta gilt $x_1 + x_2 = -a$ und $x_1x_2 = a - 2$. Somit ist

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = a^2 - 2(a-2) = a^2 - 2a + 4 = (a-1)^2 + 3$$

Die Summe der Quadrate der Lösungen wird daher genau dann minimal, wenn $a = 1$.

Aufgabe 091033:
Geben Sie
a) eine notwendige und hinreichende,
b) eine notwendige und nicht hinreichende sowie
c) eine hinreichende und nicht notwendige
Bedingung dafür an, da $\sqrt{1 - |\log_2 |5-x||} > 0$ gilt!
Die anzugebenden Bedingungen sind dabei so zu formulieren, dass sie in der Forderung bestehen, x solle in einem anzugebenden Intervall oder in einem von mehreren anzugebenden Intervallen liegen.

Lösung von cyrix:
Damit die Wurzel definiert ist, muss der Radikand nicht-negativ sein.
Dafür muss also $|\log_2 |5-x|| \leq 1$ bzw. $-1 \leq \log_2 |5-x| \leq 1$ gelten, was äquivalent ist zu $\frac{1}{2} \leq |5-x| \leq 2$.
Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

1. Fall: $5 - x \geq 0$, also $x \leq 5$: Dann muss $\frac{1}{2} \leq 5 - x \leq 2$ gelten, was äquivalent zu $x \in \left[3; \frac{9}{2}\right]$ ist.
2. Fall: $5 - x < 0$, also $x > 5$: Dann ist $|5-x| = -(5-x) = x - 5$ und es muss $\frac{1}{2} \leq x - 5 \leq 2$ gelten, was äquivalent ist zu $x \in \left[\frac{11}{2}; 7\right]$.

Zusammengefasst, ergibt sich also eine notwendige (und, wie wir gleich sehen werden, nicht hinreichende) Bedingung dafür, dass die gegebene Gleichung erfüllt ist, durch

$$x \in \left[3; \frac{9}{2}\right] \qquad \text{oder} \qquad x \in \left[\frac{11}{2}; 7\right]$$

denn sonst wäre die Wurzel gar nicht definiert. (Dies beantwortet dann Teil b).)
Im Falle, dass die Wurzel definiert ist, die Gleichung aber nicht gilt, muss die Wurzel, und damit auch ihr Radikand, Null werden, sodass dann $|\log_2 |5-x|| = 1$, also $\log_2 |5-x| \in \{-1, 1\}$ und damit $|5-x| \in \left\{\frac{1}{2}, 2\right\}$ gelten muss. Es ergibt sich weiter $5 - x \in \left\{-2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2\right\}$, also diesen Gedanken abschließend $x \in \left\{3; \frac{9}{2}; \frac{11}{2}; 7\right\}$. Nur genau dann, wenn x einen dieser vier Werte annimmt, wird die Wurzel 0, ist also definiert, aber nicht echt positiv.
Somit ergibt sich eine hinreichende und notwendige Bedingung für die Ungleichung der Aufgabenstellung zu

$$x \in \left(3; \frac{9}{2}\right) \qquad \text{oder} \qquad x \in \left(\frac{11}{2}; 7\right)$$

was dann Teil a) beantwortet.

Eine hinreichende, aber nicht notwendige Bedingung, wie sie Teil c) fordert, erhält man etwa dadurch, dass man nur eines der beiden Intervalle betrachtet, also z. B. ausschließlich $x \in \left(3; \frac{9}{2}\right)$ fordert.

Aufgabe 131036:
Man beweise, dass die Ungleichung $|\log_a b| + |\log_b a| \geq 2$ für alle Paare positiver reeller Zahlen (a, b) mit $a \neq 1, b \neq 1$ gilt!

Lösung von cyrix:
Es ist $\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}$ und umgekehrt $\log_b a = \frac{\ln a}{\ln b}$. Also ist mit $x = |\log_a b| \in \mathbb{R}_{>0}$ der zweite Summand $|\log_b a| = \frac{1}{x}$, sodass für alle positiven reellen Zahlen x die Ungleichung $x + \frac{1}{x} \geq 2$ zu zeigen verbleibt. Diese ist aber äquivalent zu $x - 2 + \frac{1}{x} \geq 0$ bzw. $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 \geq 0$, was offenbar wahr ist.

Aufgabe 171031:
Es seien a und b positive reelle Zahlen, n eine natürliche Zahl.
Beweisen Sie, dass dann $(a+b)^n \leq 2^n(a^n+b^n)$ gilt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es sei o. B. d. A. $a \leq b$. Dann gilt, da a durch eine höchstens größere Zahl ersetzt wird

$$(a+b)^n = (2b)^n \qquad \Rightarrow \qquad (a+b)^2 = 2^n b^n$$

Ferner gilt $(a+b)^2 \leq 2^n b^n + 2^n a^n \quad (*)$, da auf der größeren Seite eine positive Zahl addiert wurde also auch $(a+b)^n \leq 2^n(a^n+b^n)$. w. z. b. w.

Aufgabe 191036:
Beweisen Sie, dass für alle reellen Zahlen a, b und c gilt:

$$\sqrt{(a+c)^2+b^2} + \sqrt{(a-c)^2+b^2} \geq 2\sqrt{a^2+b^2}$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es gilt

$$(a^2+b^2+c^2)-4a^2c^2 = a^4+b^4+c^4+2a^2b^2-2a^2c^2+2b^2c^2 \geq a^4+b^4+c^4+2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2 = (a^2+b^2-c^2)^2$$

Daraus folgt (die Existenz der nachstehenden Wurzel sowie)

$$\sqrt{(a^2+b^2+c^2)-4a^2c^2} \geq a^2+b^2-c^2$$

$$a^2+2ac+c^2+b^2+2\cdot\sqrt{(a^2+c^2+b^2+2ac)(a^2+c^2+b^2-2ac)}+a^2-2ac+c^2 \geq 4a^2+4b^2$$

$$(\sqrt{(a+c)^2+b^2}+\sqrt{(a-c)^2+b^2})^2 = 4(a^2+b^2)$$

Diese beiden Wurzeln existieren wegen $(a \pm c)^2+b^2 \geq 0$. Wegen $(a^2+b^2) \geq 0$ und $\sqrt{(a+c)^2+b^2} + \sqrt{(a-c)^2+b^2} \geq 0$ folgt hieraus

$$\sqrt{(a+c)^2+b^2} + \sqrt{(a-c)^2+b^2} \geq 2\sqrt{a^2+b^2}$$

Aufgabe 201032:
Ermitteln Sie alle reellen Zahlen a mit der Eigenschaft, dass das folgende Ungleichungssystem (1), (2), (3) mindestens eine (aus reellen Zahlen x, y bestehende) Lösung hat!

$$2y+x<20 \qquad (1)$$
$$y-x<4 \qquad (2)$$
$$y-ax \geq 6 \qquad (3)$$

Lösung von MontyPythagoras:
Wir formen die Ungleichungen jeweils nach y um:

$$y < -\frac{1}{2}x+10 \quad (1) \qquad ; \qquad y<x+4 \quad (2) \qquad ; \qquad y \geq ax+6 \quad (3)$$

Kombiniert man (1) mit (3), so muss gelten:

$$-\frac{1}{2}x+10 > ax+6 \qquad \to \qquad \left(a+\frac{1}{2}\right)x < 4 \qquad (4)$$

Kombiniert man (2) mit (3), so folgt:

$$x + 4 > ax + 6 \qquad \rightarrow \qquad (a-1)x < -2 \tag{5}$$

Wenn $\left(a + \frac{1}{2}\right)$ und $(a-1)$ das gleiche Vorzeichen haben, gibt es auf jeden Fall unendlich viele Lösungen, da ich Ungleichungen (4) und (5) jeweils durch die Klammerausdrücke teilen kann und die jeweils schärfere Bedingung die Lösungsmenge bestimmt.
Wenn $a = 1$ ist, ist Ungleichung (5) nicht erfüllbar.
Wenn $a = -\frac{1}{2}$, dann ist Ungleichung (4) auf jeden Fall erfüllt und es gibt unendlich viele Lösungen. Es ist neben $a = 1$ nur dann möglich, dass es keine Lösung gibt, wenn die beiden Klammerausdrücke unterschiedliche Vorzeichen haben und die Ungleichungen (4) und (5) sich widersprechen. Ungleiche Vorzeichen liegen vor für $-\frac{1}{2} < a < 1$, denn dann ist $a + \frac{1}{2} > 0$ und $a - 1 < 0$. Somit gilt laut Ungleichung (4):

$$x < \frac{4}{a + \frac{1}{2}}$$

und laut Ungleichung (5):

$$x > \frac{-2}{a-1}$$

und in Kombination:

$$\frac{4}{a + \frac{1}{2}} > \frac{-2}{a-1}$$

Wir multiplizieren mit beiden Nennern. Das Produkt der beiden Nenner ist voraussetzungsgemäß kleiner als null, so dass sich die Richtung der Relation umdreht:

$$4(a-1) < -2\left(a + \frac{1}{2}\right) \qquad \rightarrow \qquad a < \frac{1}{2}$$

Für diese a widersprechen sich die Ungleichungen (4) und (5) nicht. Es gibt daher unendlich viele Lösungen für $a < \frac{1}{2}$ oder $a > 1$, dazwischen gibt es keine Lösung.

Aufgabe 211034:
Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen x, die die Ungleichung erfüllen:

$$\frac{1 - \sqrt{1 - 3x^2}}{x} < 1$$

Lösung von cyrix:
Offensichtlich kann x nicht 0 sein, da sonst der Bruch nicht definiert wäre. Analog muss $|x| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$ gelten, da für $|x| > \frac{1}{\sqrt{3}}$ sofort $x^2 > \frac{1}{3}$ und damit $1 - 3x^2 < 1 - 1 = 0$ folgen würde, sodass der Radikand negativ und die Wurzel nicht mehr definiert wäre.

Sei also im Folgenden $0 < |x| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$.
Dann ist $1 - 3x^2 < 1$, also $\sqrt{1 - 3x^2} < 1$ und damit $1 - \sqrt{1 - 3x^2} > 0$. Der Bruch besitzt also das gleiche Vorzeichen wie der Nenner x. Ist dieser negativ, so ist die Ungleichung offensichtlich erfüllt, sodass wir ein erstes Lösungsintervall erhalten, nämlich $x \in \left[-\frac{1}{\sqrt{3}}; 0\right)$.

Ist dagegen $0 < x \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$, dann ist die Ungleichung nach Multiplikation mit $x > 0$ und Subtraktion von 1 äquivalent zu $-\sqrt{1 - 3x^2} < x - 1$ bzw. $\sqrt{1 - 3x^2} > 1 - x$. Da $\frac{1}{\sqrt{3}} < 1$ gilt, sind beide Seiten dieser Ungleichung nichtnegativ und also ist die Ungleichung äquivalent zu $1 - 3x^2 > (1 - x)^2 = 1 - 2x + x^2$ bzw. $0 > -2x + 4x^2 = (-2x)(1 - 2x)$.
Wegen $x > 0$ ist $-2x < 0$, die Ungleichung also äquivalent zu $1 - 2x > 0$ bzw. $x < \frac{1}{2}$. Da $2 > \sqrt{3}$ gilt, ist $\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$, sodass tatsächlich alle positiven x mit $x < \frac{1}{2}$ die Ungleichung erfüllen (und die weiteren nicht).

Zusammenfassend erhalten wir, dass genau all jene x aus der Menge $\left[-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{2}\right) \setminus \{0\}$ die Ungleichung erfüllen.

Aufgabe 241032:
Beweisen Sie, dass für alle reellen Zahlen, die größer als 1 sind, die folgenden Ungleichungen (1) gelten!

$$2(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}) < \frac{1}{\sqrt{x}} < 2(\sqrt{x}-\sqrt{x-1}) \qquad (1)$$

Lösung von MontyPythagoras:
Zunächst die linke Ungleichung:

$$2\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right) < \frac{1}{\sqrt{x}} \qquad \rightarrow \qquad \sqrt{x}\cdot\sqrt{x+1}-x < \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow \qquad x(x+1) < \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 \qquad \rightarrow \qquad x^2+x < x^2+x+\frac{1}{4}$$

Diese Ungleichung ist immer erfüllt. Die rechte Ungleichung nach dem gleichen Prinzip:

$$\frac{1}{\sqrt{x}} < 2\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-1}\right) \qquad \rightarrow \qquad \frac{1}{2} < x-\sqrt{x}\cdot\sqrt{x-1}$$

$$\rightarrow \qquad x(x-1) < \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 \qquad \rightarrow \qquad x^2-x < x^2-x+\frac{1}{4}$$

Auch diese Ungleichung ist immer erfüllt (die Einschränkung $x \geq 1$ ist wegen $\sqrt{x-1}$ notwendig).

Aufgabe 261036:
Beweisen Sie, dass für jede reelle Zahl $x > 1$ die Ungleichungen

$$\frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{x^2}\right) < \frac{1}{\sqrt[3]{x}} < \frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}\right)$$

gelten!

Lösung von cyrix:
Durch Division durch $x^{\frac{2}{3}} > 0$ geht die zu zeigende Ungleichungskette äquivalent über in

$$\frac{3}{2}\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3}}-1\right) < \frac{1}{x} < \frac{3}{2}\left(1-\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3}}\right)$$

Wegen $1 < x$ ist $0 < \frac{1}{x} < 1$, sodass aufgrund der Bernoulli-Ungleichung $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3}} < 1+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x}$ sowie $\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3}} < 1-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x}$ gilt, woraus sofort die zu zeigende Ungleichungskette folgt, $\square$.

Aufgabe 291034:
Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen x, die die folgende Ungleichung (1) erfüllen

$$\frac{\sqrt{x+5}}{x+1} > 1 \qquad (1)$$

Lösung von Steffen Polster:
Der linke Term der Ungleichung (1) ist nur für $x \geq -5$ und $x \neq -1$ definiert. Gleichzeitig ist der Nenner $\sqrt{x+5} \geq 0$ und der Zähler $x+1$ nur für $x > -1$ positiv, so dass der gesamte Bruch nur für $x > -1$ positiv wird und so evtl. Lösungen der Ungleichung (1) ergeben kann.
Außerdem ist die Funktion $f(x) = \frac{\sqrt{x+5}}{x+1}$ für $x > -1$ streng monoton fallend, da $f'(x) = -\frac{x+9}{2(x+1)^2 \cdot \sqrt{x+5}} < 0$ für $x > -1$ ist.
Umstellen von (1) ($x \neq -1$) und Quadrieren liefert eine quadratische Ungleichung

$$x+5 > x^2+2x+1 \quad \Rightarrow \quad 0 > x^2+x-4$$

Die Lösungen der quadratischen Gleichung $0 = x^2+x-4$ sind

$$x_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{17}}{2} \qquad ; \qquad x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2}$$

Nur x_2 liegt im Bereich $x > -1$. Da die oben genannte Funktion $f(x)$ streng monoton fallend ist, ergibt sich als Lösungsmenge von (1) das Intervall

$$x \in (-1; -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2}]$$

Aufgabe 301034:
Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen x, die die folgende Ungleichung (1) erfüllen!

$$||x-2|-2| < 1 \qquad (1)$$

Lösung von cyrix:
Die Ungleichung (1) ist äquivalent zu $-1 < |x-2|-2 < 1$ bzw. $1 < |x-2| < 3$.
Es ist $|x-2| < 3$ äquivalent zu $-3 < x-2 < 3$ bzw. $-1 < x < 5$, sodass nur solche reelle Zahlen auch (1) erfüllen können.
Weiterhin wird $1 < |x-2|$ genau von denjenigen reellen Zahlen x erfüllt, für die $1 < x-2$ (d. h. $x > 3$) oder $-1 > x-2$ (d. h. $x < 1$) gilt.
Zusammen wird also (1) genau von den reellen Zahlen mit $-1 < x < 1$ oder $3 < x < 5$ erfüllt.

Aufgabe 311031:
Beweisen Sie, a) dass gilt:

$$\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot ... \cdot 22 \cdot 24}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot ... \cdot 23 \cdot 25} > \frac{1}{5}$$

b) dass für jede natürliche Zahl $m \geq 2$ die Ungleichung gilt:

$$\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot ... \cdot (2m-2)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot ... \cdot (2m-1)} > \frac{1}{\sqrt{2m-1}}$$

Lösung von cyrix:
Es folgt a) aus b) mit $m = 13$, sodass es genügt die Ungleichung aus b) für alle $m \geq 2$ zu zeigen. Dazu sei

$$x := \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2m-2)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (2m-1)}$$

Mit $(k-1)(k+1) = k^2-1 < k^2$ für alle natürlichen Zahlen k folgt dann

$$x^2 = \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot \ldots \cdot (2m-2)^2}{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot \ldots \cdot (2m-1)^2} > \frac{(1 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 5) \cdot (5 \cdot 7) \cdot \ldots \cdot ((2m-3) \cdot (2m-1)}{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot \ldots \cdot (2m-1)^2} = \frac{1}{2m-1}$$

also $x^2 > \frac{1}{2m-1}$ bzw. $x > \frac{1}{\sqrt{2m-1}}$, $\Box$.

Aufgabe 331035:
Man ermittle alle diejenigen Paare $(m; n)$ positiver ganzer Zahlen m und n, für die

$$\frac{m^2}{m+1} + \frac{n^2}{n+1}$$

eine ganze Zahl ist.

Lösung von cyrix:
Es ist

$$\begin{aligned} z &:= \frac{m^2}{m+1} + \frac{n^2}{n+1} = \frac{m^2-1}{m+1} + \frac{n^2-1}{n+1} + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{(m-1)(m+1)}{m+1} + \frac{(n-1)(n+1)}{n+1} + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{n+1} = n-1+m-1+\frac{1}{m+1} + \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

genau dann eine ganze Zahl, wenn auch $z-(n-1)-(m-1) = \frac{1}{m+1} + \frac{1}{n+1} =: x$ eine ganze Zahl ist. Offensichtlich ist $0 < x$ und wegen $m \geq 1$ sowie $n \geq 1$ gilt

$$0 < x = \frac{1}{m+1} + \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{1+1} + \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

sodass $x = 1$ gelten muss, da es die einzige ganze Zahl in diesem Intervall $(0; 1]$ ist. Also muss Gleichheit auch an den vorhergehenden Abschätzungen gegolten haben, d. h. $m = n = 1$.

Tatsächlich ist für das Paar $(m; n) = (1; 1)$ die Zahl $z = \frac{1^2}{1+1} + \frac{1^2}{1+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ eine ganze Zahl, sodass es genau ein Paar positiver ganzer Zahlen, nämlich das gerade betrachtete gibt, was der Bedingung der Aufgabenstellung genügt.

IV Runde 4

Aufgabe 031043:
Gegeben seien die Zahlen $Z_1 = \sqrt{7} + \sqrt{10}$ und $Z_2 = \sqrt{3} + \sqrt{19}$.
Stellen Sie ohne Berechnung der Wurzeln fest, welche von beiden Zahlen größer ist!

Lösung von Steffen Weber:
Es gilt $27 < 20 \cdot 7 = 20\sqrt{49} < 20\sqrt{57}$. Also ist

$$(2\sqrt{70})^2 = 280 = 25 + 27 + 228 < 25 + 20\sqrt{57} + 4 \cdot 57 = (5 + 2\sqrt{3 \cdot 19})^2$$

Somit ist $2\sqrt{7 \cdot 10} < 5 + 2\sqrt{3 \cdot 19}$ bzw.

$$(\sqrt{7} + \sqrt{10})^2 = 7 + 2\sqrt{7 \cdot 10} + 10 < 3 + 2\sqrt{3 \cdot 19} + 19 = (\sqrt{3} + \sqrt{19})^2$$

Daraus folgt $\sqrt{7} + \sqrt{10} < \sqrt{3} + \sqrt{19}$ und $Z_1 < Z_2$.

Aufgabe 041042:
Man bestimme alle reellen Zahlen x, die der Ungleichung

$$\frac{x}{p} - \frac{2p}{x} < 2$$

genügen, wobei p eine positive reelle Zahl (Parameter) bedeutet.

Lösung von cyrix:
Wir unterscheiden zwei Fälle.

1. Fall: $x > 0$.
Dann ist die zu betrachtende Ungleichung äquivalent zu

$$x^2 - 2p^2 < 2px \qquad \text{bzw.} \qquad (x^2 - 2px + p^2) < 3p^2$$

also $(x-p)^2 < 3p^2$ und damit

$$-\sqrt{3}p < x - p < \sqrt{3}p \qquad \text{bzw.} \qquad (1-\sqrt{3})p < x < (1+\sqrt{3})p$$

Dabei fallen die Lösungen mit $x \leq 0$ aufgrund der Fallannahme weg, und es bleibt (wegen $p < 0$) die Lösungsmenge

$$\{x | 0 < x < (1+\sqrt{3})p\}$$

für diesen Fall.

2. Fall: Sei nun $x < 0$.
Es ist $x = 0$ nicht Teil des Definitionsbereichs der in der zu betrachtenden Ungleichung auftretenden Terme.
Dann ist die zu betrachtende Ungleichung diesmal äquivalent zu $x^2 - 2p^2 > 2px$, was sich analog äquivalent umformen lässt zu

$$(x-p)^2 > 3p^2 \qquad \text{bzw.} \qquad (x - p < -\sqrt{3}p \quad \text{oder} \qquad x - p > \sqrt{3}p)$$

und damit $(x < (1-\sqrt{3})p$ oder $x > (1+\sqrt{3})p)$.
Der zweite Teil entfällt aufgrund der Fallannahme, sodass die Lösungsmenge für diesen Fall

$$\{x | x < (1-\sqrt{3})p\}$$

lautet. Zusammen ergibt sich also in Abhängigkeit vom Parameter $p > 0$ folgende Lösungsmenge:

$$\{x \in \mathbb{R} | x < (1-\sqrt{3})p \vee 0 < x < (1+\sqrt{3})p\}.$$

Aufgabe 071043:
Beweisen Sie folgende Behauptung!
Wenn a, b, c die Maßzahlen der Seitenlängen eines Dreiecks sind, dann hat die Gleichung

$$b^2x^2 + (b^2 + c^2 - a^2)x + c^2 = 0$$

keine reellen Lösungen.

Lösung von Nuramon:
Es ist zu zeigen, dass die Diskriminante des Polynoms $b^2x^2 + (b^2 + c^2 - a^2)x + c^2$ negativ ist, also dass

$$(b^2 + c^2 - a^2)^2 - 4b^2c^2 < 0$$

gilt. Nach Kosinussatz gilt $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ für den Winkel α zwischen den Dreiecksseiten b,c. Somit ist

$$(b^2 + c^2 - a^2)^2 - 4b^2c^2 = (2bc\cos\alpha)^2 - 4b^2c^2 = 4b^2c^2(\cos^2\alpha - 1) = -4b^2c^2\sin^2\alpha < 0.$$

Aufgabe 101043A:
Man ermittle alle positiven reellen Zahlen c, für die $[\log_{12} c] \leq [\log_4 c]$ gilt.
Dabei bedeutet $[x]$ die größte ganze Zahl, die nicht größer als x ist.

Lösung von cyrix:
Es ist $\ln 12 > \ln 4$, also $\frac{1}{\ln 12} < \frac{1}{\ln 4}$. Für $c \geq 1$ ist auch $\ln c \geq 0$ und damit $\log_{12} c = \frac{\ln c}{\ln 12} \leq \frac{\ln c}{\ln 4}$, woraus sofort die behauptete Ungleichung folgt. Diese ist also zumindest für alle $c \geq 1$ erfüllt.

Andernfalls ist $0 < c < 1$ und $\ln c < 0$. Dann folgt $\log_{12} c = \frac{\ln c}{\ln 12} > \frac{\ln c}{\ln 4}$.
Damit dennoch $[\log_{12} c] \leq [\log_4 c]$ gelten kann, müssen beide Logarithmen auf die gleiche ganze Zahl n abgerundet werden, d. h., es muss eine negative ganze Zahl n geben mit $n \leq \log_4 c < \log_{12} c < n+1$. Demnach muss $4^n \leq c < 12^{n+1}$.

Für $n = -1$ liefert dies $c \in \left[\frac{1}{4}; 1\right)$ und für $n = -2$ die Aussage $c \in \left[\frac{1}{16}; \frac{1}{12}\right)$.

Für $n \leq -3$ ist $3^n \leq \frac{1}{27} < \frac{1}{12}$, also $12^{n+1} = 12 \cdot 12^n = 12 \cdot 3^n \cdot 4^n < 4^n$, sodass die obere Intervallgrenze kleiner würde als die untere und damit keine weiteren Lösungen entstehen.
Die Gleichung ist also genau für alle c mit $\frac{1}{16} \leq c < \frac{1}{12}$ oder $\frac{1}{4} \leq c$ erfüllt.

Aufgabe 101045:
Es sei r eine von Null verschiedene reelle Zahl. Man ermittle alle reellen Zahlen $x \neq 0$, die die Ungleichung

$$\frac{2}{x} - \frac{3}{r} > \frac{1}{2}$$

erfüllen. Dabei sind folgende Fälle zu untersuchen:

a) Es sei $r < -6$. b) Es sei $r = -6$. c) Es sei $-6 < r < 0$. d) Es sei $r > 0$

Lösung von cyrix:
Die Ungleichung ist äquivalent zu $\frac{2}{x} > \frac{1}{2} + \frac{3}{r} = \frac{r+6}{2r}$.
a) Ist $r < -6$, dann $r + 6 < 0$ und $2r < 0$, also $\frac{r+6}{2r} > 0$. Damit wird die Ungleichung falsch für alle negativen x und nur wahr für alle positiven x, die $\frac{x}{2} < \frac{2r}{r+6}$, also $x < \frac{4r}{r+6}$ erfüllen. Es ist also $x \in \left(0; \frac{4r}{r+6}\right)$.

b) Für $r = -6$ ist $\frac{r+6}{2r} = 0$, sodass die Ungleichung genau von allen positiven x erfüllt wird: $x \in (0; \infty)$.

c) Ist $-6 < r < 0$ ist $r + 6 > 0$ aber $2r < 0$, sodass $\frac{r+6}{2r}$ negativ ist. Damit ist die Ungleichung auf jeden Fall für alle positiven x wahr und darüberhinaus für alle negativen x, die $\frac{x}{2} < \frac{2r}{r+6}$ also $x < \frac{4r}{r+6}$ erfüllen. Es folgt $x \in \left(-\infty; \frac{4r}{r+6}\right) \cup (0; \infty)$.

d) Ist $r > 0$, so auch $\frac{r+6}{2r} > 0$. Damit erfüllen wieder alle negativen x automatisch die Ungleichung nicht, da dann auch $\frac{2}{x} < 0$ ist. Darüber hinaus erfüllen nur diejenigen positiven x die Ungleichung, für die $\frac{x}{2} < \frac{2r}{r+6}$ gilt, sodass wir in diesem Fall die Lösungsmenge $x \in \left(\frac{4r}{r+6}; \infty\right)$ erhalten.

Aufgabe 111043B:
Dirk erklärt Jürgen den Nutzen der Differentialrechnung anhand der Lösung der folgenden Aufgabe:

Es sei $ABCDE$ ein ebenes konvexes Fünfeck derart, dass A, B, C, E die Eckpunkte eines Rechtecks und C, D, E die Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks bilden. Als Flächeninhalt des Fünfecks $ABCDE$ werde nun ein geeigneter Wert F vorgeschrieben.
Man ermittle, ob unter allen diesen Fünfecken eines von kleinstem Umfang u existiert! Ist das der Fall, so berechne man für alle derartigen Fünfecke minimalen Umfangs den Wert $a : b$, wobei $AB = a$ und $BC = b$ bedeutet.
Am nächsten Tage teilt Jürgen Dirk mit, dass er eine Lösung dieser Aufgabe ohne Verwendung der Differentialrechnung gefunden habe.
Man gebe eine Lösung an, die Jürgen gefunden haben könnte.

Lösung von cyrix:
Es ist $F = ab + \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ und $u = 3a + 2b$, also $b = \frac{u-3a}{2}$ und damit

$$F = a \cdot \frac{u}{2} - \frac{3}{2}a^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \quad \text{bzw.} \quad u = \frac{1}{a} \cdot \left(2F + 3a^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}a^2\right) = \frac{2F}{a} + \left(3 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) a$$

Es gilt für positive reelle Zahlen x und y die Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel: $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$ bzw. nach Multiplikation mit 2: $x + y \geq 2\sqrt{xy}$, wobei Gleichheit für $x = y$ eintritt.
Setzt man $x := \frac{2F}{a} > 0$ und $y := \left(3 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) a > 0$ in diese Ungleichung ein, erhält man

$$u = x + y \geq 2 \cdot \sqrt{\frac{2F}{a} \cdot \left(3 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) a} = 2 \cdot \sqrt{(6 - \sqrt{3})F}$$

Dabei nimmt u also seinen minimalen Wert genau dann an, wenn

$$\frac{2F}{a} = \left(3 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) a$$

bzw. $4F = (6 - \sqrt{3})a^2$, also $a = 2\sqrt{\frac{F}{6-\sqrt{3}}}$ und $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{\sqrt{3}}{6-\sqrt{3}} \cdot F$, sodass wir

$$ab = F - \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = F \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{6 - \sqrt{3}}\right) = F \cdot \frac{6 - 2\sqrt{3}}{6 - \sqrt{3}}$$

und schließlich

$$a : b = \frac{a}{b} = \frac{a^2}{ab} = \frac{4\frac{F}{6-\sqrt{3}}}{F \cdot \frac{6-2\sqrt{3}}{6-\sqrt{3}}} = \frac{4}{6 - 2\sqrt{3}} = \frac{2}{3 - \sqrt{3}} = \frac{2(3 + \sqrt{3})}{9 - 3} = \frac{3 + \sqrt{3}}{3} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$$

erhalten.

Aufgabe 181044:
Man beweise: Wenn a, b, c, d positive reelle Zahlen sind, dann gilt

$$\text{a)} \quad \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \qquad \text{und} \qquad \text{b)} \quad \frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Es gilt

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 \geq 0 \qquad \text{also} \qquad (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab$$

also wegen $a > 0, b > 0$

$$a + b \geq 2\sqrt{ab} \qquad ; \qquad \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \qquad (1)$$

womit die erste Behauptung gezeigt ist.

b) Ebenso zeigt man

$$\frac{c+d}{2} \geq \sqrt{cd} \qquad (2)$$

sowie für die Zahlen

$$x = \frac{a+b}{2}, \quad y = \frac{c+d}{2} \quad (3) \qquad \text{auch} \qquad \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \qquad (4)$$

Aus (1), (2), (3) und (4) folgt

$$\frac{a+b+c+d}{4} = \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} = \sqrt{\frac{a+b}{2} \cdot \frac{c+d}{2}} \geq \sqrt{\sqrt{ab} \cdot \sqrt{cd}} = \sqrt[4]{abcd}$$

d. h. die zweite Behauptung.

Aufgabe 201046:
Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen c, für die das folgende Ungleichungssystem (1), (2), (3) mindestens eine (aus reellen Zahlen x, y bestehende) Lösung hat!

$$y > x^2 - 2x + c \quad (1) \qquad ; \qquad y < x + c \quad (2) \qquad ; \qquad y < -2x + 1 \quad (3)$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, für ein reelles c habe das System (1), (2), (3) eine Lösung (x, y). Dann ergibt sich aus (1) und (3) die Beziehung

$$x^2 - 2x + c < -2x + 1 \qquad \text{d. h.} \qquad c < 1 - x^2$$

und somit $c < 1$. Eine Lösung kann daher höchstens für $c < 1$ existieren. Umgekehrt hat das System (1), (2), (3) für jedes c mit $c < 1$ eine Lösung, z. B. eine mit $y = c$. Für diesen Wert von y ist es nämlich äquivalent zu

$$x^2 - 2x < 0 \quad (4) \qquad ; \qquad 0 < x \quad (5) \qquad ; \qquad c < -2x + 1 \quad (6)$$

(4) und (5) sind äquivalent mit den Ungleichungen $0 < x < 2$ (7) und (6) ist äquivalent mit

$$x < \frac{1-c}{2} \tag{8}$$

Wegen $c < 1$ gilt $\frac{1-c}{2} > 0$, und demnach sind (7) und (8) durch reelle x erfüllbar.
Das System (1), (2), (3) hat folglich genau für alle reellen Zahlen c, die kleiner als 1 sind, eine Lösung.

Aufgabe 241045:
Es sei

$$T = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + ... + \frac{1}{\sqrt{999998}} + \frac{1}{\sqrt{999999}} + \frac{1}{\sqrt{1000000}}$$

Weisen Sie nach, dass dann $1998 < T < 1999$ gilt!

Lösung von cyrix:
Offensichtlich ist:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k}} > \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} = \sum_{k=1}^{n} \left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k} \right) = -1 + \sqrt{n+1}$$

und somit

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > -2 + 2\sqrt{n+1} > -2 + 2\sqrt{n}$$

Für die obere Schranke ergibt die Abschätzung für

$$\frac{1}{2}+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2\sqrt{k}}$$

analog das geforderte

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}<2\sqrt{n}-1 \qquad \text{für } (n>1)$$

Mit $n=100000$ ergibt sich dann die Behauptung.

Aufgabe 271043B:
Ein Verfahren zur näherungsweisen Berechnung von $\sqrt{2}$ besagt:
Aus einem Näherungswert $\frac{a}{b}$, dessen Zähler a und Nenner b positive ganze Zahlen sind, wird ein neuer Näherungswert $\frac{a'}{b'}$ nach der Vorschrift

$$a'=a^2+2b^2 \quad (1) \qquad ; \qquad b'=2ab \quad (2)$$

gewonnen. Um einschätzen zu können, ob $\frac{a}{b}$ ein geeigneter Anfangswert für dieses Verfahren sein kann, behandelt man die folgende Aufgabe (bei der die Zahl $\sqrt{2}$ wie ein bekannter Wert verwendet wird):
Man ermittle alle diejenigen $\frac{a}{b}$ (a,b positive ganze Zahlen), bei denen die Vorschrift (1), (2) auf einen besseren Näherungswert $\frac{a'}{b'}$ führt, d. h.

$$\left|\frac{a'}{b'}-\sqrt{2}\right|<\left|\frac{a}{b}-\sqrt{2}\right|$$

gilt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die zu diskutierende Ungleichung

$$\left|\frac{a^2+2b^2}{2ab}-\sqrt{2}\right|<\left|\frac{a}{b}-\sqrt{2}\right|$$

gilt wegen $a,b>0$ genau dann, wenn

$$|a^2+2b^2-2ab\sqrt{2}|<|2a^2-2ab\sqrt{2}|$$

und dies ist äquivalent mit

$$|a-b\sqrt{2}|^2<2a\cdot|a-b\sqrt{2}| \tag{3}$$

Da für ganze a,b wegen der Irrationalität von $\sqrt{2}$ stets $\frac{a}{b}\neq\sqrt{2}$, also $|a-b\sqrt{2}|>0$ gilt, ist (3) äquivalent mit

$$|a-b\sqrt{2}|<2a \quad\Rightarrow\quad -2a<a-b\sqrt{2}<2a \quad\Rightarrow\quad -a<b\sqrt{2}<3a \tag{4}$$

Für $b>0$ ist (4) äquivalent mit $b\sqrt{2}<3a$. Also führen (1), (2) genau für alle $\frac{a}{b}>\frac{1}{3}\sqrt{2}$ auf einen besseren Näherungswert.

Aufgabe 271046:
Beweisen Sie folgende Aussage:
Wenn für reelle Zahlen $a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,b_1,b_2,b_3,b_4,b_5$ gilt, dass jede dieser Zahlen im Intervall $5\leq x\leq 10$ liegt, dann gilt für diese Zahlen stets

$$2(a_1b_1+a_2b_2+...+a_5b_5)\leq a_1^2+b_1^2+a_2^2+b_2^2+...+a_5^2+b_5^2\leq\frac{5}{2}(a_1b_1+a_2b_2+...+a_5b_5)$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
1. Es gilt stets $(a_i - b_i)^2 \geq 0$, also

$$2a_ib_i \leq a_i^2 + b_i^2 \qquad (i = 1{,}2{,}3{,}4{,}5)$$

Addiert man diese fünf Ungleichungen, so ergibt sich die linke der behaupteten Ungleichungen.

2. Da nach Voraussetzung

$$a_i \leq 10 \leq 2b_i, \quad \text{also} \quad 2b_i - a_i \geq 0 \qquad ; \qquad b_i \leq 10 \leq 2a_i, \quad \text{also} \quad 2a_i - b_i \geq 0$$

gilt, folgt ferner

$$\begin{aligned} (2b_i - a_i)(2a_i - b_i) &\geq 0 \\ 5a_ib_i - 2b_i^2 - 2a_i^2 &\geq 0 \\ a_i^2 + b_i^2 &\leq \frac{5}{2}a_ib_i \quad (i = 1{,}2{,}3{,}4{,}5) \end{aligned}$$

Addiert man diese fünf Ungleichungen, so ergibt sich die rechte der behaupteten Ungleichung.

Aufgabe 311041:
Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen k, für die die folgende Aussage (1) wahr ist:
(1) Für jedes Paar $(a; b)$ reeller Zahlen a, b gilt $a^2 + b^2 \geq k \cdot ab$

Lösung von cyrix:
Die Aussage gilt genau für alle $-2 \leq k \leq 2$. Wir zeigen dies per vollständiger Fallunterscheidung nach der Größe von k:

Fall 1: $k > 2$. Dann ist für $a = b = 1$ die Ungleichung $a^2 + b^2 = 2 = 2 \cdot ab < k \cdot ab$ erfüllt, sodass die Aussage (1) falsch ist.

Fall 2: $0 \leq k \leq 2$.
Fall 2.1: Es ist $ab \geq 0$. Dann ist wegen $0 \leq (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ auch $a^2 + b^2 \geq 2 \cdot ab \geq k \cdot ab$.
Fall 2.2: Es ist $ab < 0$. Dann ist $a^2 + b^2 \geq 0 \geq k \cdot ab$. Damit ist in beiden Unterfällen Aussage (1) wahr.

Fall 3: $-2 \leq k < 0$.
Fall 3.1: Es ist $ab \geq 0$. Dann ist $a^2 + b^2 \geq 0 \geq k \cdot ab$.
Fall 3.2: Es ist $ab < 0$. Dann ist wegen $0 \leq (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ auch $a^2 + b^2 \geq (-2)ab \geq k \cdot ab$.
Damit ist in beiden Unterfällen Aussage (1) wahr.

Fall 4: $k < -2$. Dann ist für $a = 1$, $b = -1$ die Ungleichung $a^2 + b^2 = 2 = (-2) \cdot ab < k \cdot ab$ erfüllt, sodass die Aussage (1) falsch ist.

Die Aussage (1) wird also genau für $-2 \leq k \leq 2$ erfüllt, $\square$.

VII.VI Gleichungssysteme

I Runde 1

Aufgabe V01004:
Bestimmen Sie die Unbekannten aus:

$$2^x \cdot 2^y = 2^{22} \quad (1) \qquad ; \qquad x - y = 4 \quad (2)$$

Lösung von svrc:
Wir können (1) umschreiben zu

$$2^x \cdot 2^y = 2^{x+y} = 2^{22},$$

sodass wir das lineare Gleichungssystem

$$x + y = 22 \quad (3) \qquad , \qquad x - y = 4 \quad (4)$$

lösen müssen. Aus (4) folgt $x = y + 4$ und setzen wir dieses Ergebnis in (3) ein, so ergibt sich

$$x + y = (y + 4) + y = 2y + 4 = 22$$

und somit $y = 9$ und daher $x = 13$.

Aufgabe 091012:
In jedem von drei Betrieben I, II, III wurden drei Erzeugnisse E_1, E_2, E_3 produziert. Die Produktionskosten je Stück waren für gleichartige Erzeugnisse in allen drei Betrieben gleich. Aus nachstehender Tabelle sind die Stückzahlen der täglich produzierten Erzeugnisse sowie die täglichen Gesamtproduktionskosten zu ersehen.

Betrieb	Tägliche Stückzahlen			Tägliche Gesamtproduktionskosten in M
	E_1	E_2	E_3	
I	5	5	8	5950
II	8	6	6	6200
III	5	8	7	6450

Wie hoch waren die Produktionskosten je Stück der einzelnen Erzeugnisarten?

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:
Seien p_i die Produktionskosten für E_i, dann gilt

$$5p_1 + 5p_2 + 8p_3 = 5950 \quad (1); \qquad 8p_1 + 6p_2 + 6p_3 = 6200 \quad (2); \qquad 5p_1 + 8p_2 + 7p_3 = 6450 \quad (3)$$

Auflösung des linearen Gleichungssystems ergibt: $p_2 = 300$, $p_3 = 400$ und $p_1 = 250$.

Aufgabe 131011:
Ermitteln Sie alle Mengen $\{a,b,c\}$ aus rationalen Zahlen a, b, c mit der Eigenschaft, dass $\left\{\frac{10}{3}; -\frac{5}{12}; \frac{9}{4}\right\}$ die Menge der Summen aus je zwei Zahlen von $\{a,b,c\}$ ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Zu lösen sind die Gleichungssysteme

$$\begin{aligned}
&\text{I.} \quad a + b = 10/3 \quad ; \quad a + c = -5/12 \quad ; \quad b + c = 9/4 \\
&\text{II.} \quad a + b = 10/3 \quad ; \quad a + c = 9/4 \quad ; \quad b + c = -5/12 \\
&\text{III.} \quad a + b = -5/12 \quad ; \quad a + c = 10/3 \quad ; \quad b + c = 9/4 \\
&\text{IV.} \quad a + b = -5/12 \quad ; \quad a + c = 9/4 \quad ; \quad b + c = 10/3
\end{aligned}$$

V. $a + b = 9/4 \quad ; \quad a + c = 10/3 \quad ; \quad b + c = -5/12$

VI. $a + b = 9/4 \quad ; \quad a + c = -5/12 \quad ; \quad b + c = 10/3$

Jedes dieser Gleichungssysteme hat die Lösungen 3, -3/4 und 1/3. Die gesuchte Menge ist also $\{-3/4, 1/3, 3\}$.

Aufgabe 221011:
In einer Abteilung eines VEB werden drei Erzeugnisse E_1, E_2, E_3 hergestellt. Aus der nachfolgenden Tabelle sind die täglich anfallenden Rohstoff-, Energie- und Lohnkosten in Mark je Stück der drei Erzeugnisse ersichtlich. Ferner ist die Gesamthöhe der Mittel angegeben, die täglich für Rohstoffe, Energie und Löhne zur Verfügung stehen.

Beweisen Sie, dass es möglich ist, die täglich zu produzierenden Stückzahlen der Erzeugnisse E_1, E_2, E_3 so festzusetzen, dass alle zur Verfügung stehenden Mittel, die hier genannt sind, restlos ausgeschöpft werden!

Beweisen Sie, dass durch diese Forderung des Ausschöpfens die Stückzahlen eindeutig bestimmt sind, und ermitteln Sie diese!

Kostenart	Kosten in M je Stück für			Insgesamt zur Verfügung
	E_1	E_2	E_3	stehende Mittel in Mark
Rohstoffkosten	6	7	9	4950
Energiekosten	1	2	2	1100
Lohnkosten	5	6	8	4300

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Mittel werden genau dann bei Festsetzung von Stückzahlen e_1, e_2, e_3 für E_1, E_2 bzw. E_3 ausgeschöpft, wenn die Gleichungen

$$6e_1 + 7e_2 + 9e_3 = 4950 \qquad (1)$$
$$e_1 + 2e_2 + 2e : 3 = 1100 \qquad (2)$$
$$5e_1 + 6e_2 + 8e_3 = 4300 \qquad (3)$$

gelten. Angenommen, für Stückzahlen e_1, e_2, e_3 treffe diese zu. Dann folgt, indem man (1) von der Summe aus (2) und (3) subtrahiert, $e_2 + e_3 = 450 \quad (4)$.

Subtrahiert man (1) von der mit 6 multiplizierten Gleichung (2), so erhält man $5e_2 + 3e_3 = 1650 \quad (5)$.

Subtrahiert man (5) von der mit 5 multiplizierten Gleichung (4), so ergibt sich $2e_3 = 600$, also $e_3 = 300$.

Hieraus und aus (4) folgt $e_2 = 150$ und unter Berücksichtigung von (2) $e_1 = 200$.

Daher können nur diese Stückzahlen die Gleichungen (1), (2), (3) erfüllen. Sie erfüllen diese Gleichungen, wie eine Probe zeigt.

Damit ist bewiesen, dass es möglich ist, die gesamten Mittel auszuschöpfen, und dass die Stückzahlen durch diese Forderung eindeutig bestimmt sind. Für E_1, E_2, E_3 betragen sie 200, 150 bzw. 300.

Aufgabe 241013:
Ermitteln Sie alle Tripel (x, y, z) reeller Zahlen x, y, z, für die die folgenden Gleichungen (1) und (2) gelten!

$$x \cdot (y+z) = 0. \tag{VII.1}$$
$$y \cdot (x+z) = 0. \tag{VII.2}$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(1) Wenn ein Tripel (x,y,z) reeller Zahlen die Gleichungen (1) und (2) erfüllt, eo folgt:

So liegt genau einer der vier folgenden Fälle (A),(B),(C),(D) vor:

(A) Es gilt $x = 0$ und $y = 0$.

(B) Es gilt $x = 0$ und $y \neq 0$. In diesem Fall folgt aus (2), dass $z = -x = 0$ gilt.

(C) Es gilt $x \neq 0$ und $y = 0$. In diesem Fall folgt aus (1), dass $z = -y = 0$ gilt.

(D) Es gilt $x \neq 0$ und $y \neq 0$. In diesem Fell folgt aus (1) und (2), dass $z = -x = -y$ gilt.

Daher können nur die folgenden Tripel (1) und (2) erfüllen:

(a) Alle Tripel $(0,0,z)$ mit beliebigem reellem z.
(b) alle Tripel $(0,y,0)$ mit beliebigem reellem $y \neq 0$,
(c) alle Tripel $(x,0,0)$ mit beliebigem reellem $x \neq 0$,
(d) alle Tripel $(x,x,-x)$ mit beliebigem reellem $x \neq 0$.

(II) Es gilt für jedes Tripel

in (a): $0 \cdot (0+z) = 0$;
in (b): $0 \cdot (y+0) = 0$, $y \cdot (0+0) = 0$;
in (c): $x \cdot (0+0) = 0$, $0 \cdot (x+0) = 0$;
in (a): $x \cdot (x+x) = 0$;

womit in allen Fällen (1) und (2) bestätigt sind.

Aus (I) und (11) folgt, dass genau die in (a),(b),(c) und (d) genannten Tripel die Gleichungen (1) und (2) erfüllen.

II Runde 2

Aufgabe 151022:
Hubert hat drei Kästchen, deren jedes eine Anzahl von Kugeln enthält.
Er legt aus dem ersten Kästchen in jedes der beiden anderen so viele Kugeln hinein, wie jeweils schon darin sind. Dann legt er aus dem zweiten Kästchen in jedes der beiden anderen so viele Kugeln, wie nun zur Zeit jeweils darin sind. Schließlich legt er aus dem dritten Kästchen in jedes der beiden anderen so viele Kugeln, wie nun zur Zeit jeweils darin sind.
Danach stellt er fest, dass in jedem der Kästchen genau 64 Kugeln sind.
Ermitteln Sie die Anzahl der Kugeln, die jedes der Kästchen ursprünglich enthielt!

Lösung von Steffen Polster:
Zu Beginn seine im 1.Kastchen a Kugeln, im zweiten b Kugeln und im dritten c Kugeln. Die drei Umlegungen verändern die Inhalte der Kästchen wie folgt:

Aktion	1.Kästchen	2.Kästchen	3.Kästchen
	a	b	c
I	$a-b-c$	$2b$	$2c$
II	$2a-2b-2c$	$3b-a-c$	$4c$
III	$4a-4b-4c$	$6b-2a-2c$	$-a-b+7c$

Alle Kästchen enthalten dann 64 Kugeln. Es ergibt sich das Gleichungssystem

$$4a-4b-4c=64 \qquad -2a+6b-2c=64 \qquad -a-b+7c=64$$

mit der Lösung $a=104$, $b=56$ und $c=32$. Im ersten Kästchen waren zu Beginn 104 Kugeln, im zweiten 56 und im dritten 32 Kugeln.

Aufgabe 221023:
Von einem rechtwinkligen Dreieck wird gefordert:
(1) Der Umfang des Dreiecks beträgt 132 cm.
(2) Die Summe der Flächeninhalte der Quadrate über den drei Seiten des Dreiecks beträgt 6050 cm^2.
Beweisen Sie, dass es rechtwinklige Dreiecke gibt, die die Forderungen (1) und (2) erfüllen, und dass die Längen der Dreiecksseiten durch diese Forderungen eindeutig bestimmt sind!
Geben Sie diese Seitenlängen an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Ein Dreieck mit den Maßzahlen a,b,c der in Zentimeter gemessenen Seitenlängen ist nach dem dem Satz des Pythagoras und seiner Umkehrung genau dann rechtwinklige mit c als Maßzahl der Hypotenusenlänge, wenn $a^2+b^2=c^2$ (3) gilt.
Es erfüllt genau dann (1) und (2), wenn darüber hinaus der Gleichungen

$$a+b+c=132 \qquad (4)$$
$$a^2+b^2+c^2=6050 \qquad (5)$$

gelten.
I. Wenn (3), (4), (5) erfüllt sind, so folgt:
Nach (3) und (5) gilt $2c^2=6050, c^2=3025$, wegen $c>0$ als $c=55$ und damit nach (4) und (3)

$$a+b=77 \qquad (6)$$
$$a^2+b^2=3025 \qquad (7)$$

Aus (6) folgt $b=77-a$ und damit aus (7) $a^2-77a+1452=0$ (8) mit der Lösung $a=\frac{77}{2}\pm\frac{11}{2}$, d. h. entweder $a=44$ und $b=33$ oder $a=33$ und $b=44$.
Also können nur die Kathetenlängen 33 cm, 44 cm und die Hypotenusenlänge 55 cm den Forderungen (1) und (2) genügen.
Ein Probe zeigt, dass sie den Bedingungen genügen. Damit ist der geforderte Beweis geführt.

Aufgabe 241021:
Ermitteln Sie alle diejenigen Quadrupel (a,b,c,d) von reellen Zahlen a,b,c,d, die das folgende Gleichungssystem (1), (2), (3), (4) erfüllen!

$$a^2+bc=0 \qquad (1)$$
$$ab+bd=0 \qquad (2)$$
$$ac+cd=0 \qquad (3)$$
$$bc+d^2=0 \qquad (4)$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(I) Wenn reelle Zahlen a,b,c,d das Gleichungssystem erfüllen, so folgt: Ist $b=0$, so folgt aus (1) und (4),

dass $a = 0$ und $d = o$ gilt. Ist $b \neq 0$, so folgt aus (1), dass $c = -\frac{a^2}{b}$ gilt und aus (2) folgt $a + d = 0$, also $d = -a$.
Daher können nur die folgenden Quadrupel das Gleichungssystem erfüllen:
(A) Alle Quadrupel (0,0,c,0) mit beliebigem reellen c,
(B) alle Quadrupel $\left(a,b,-\frac{a^2}{b},-a\right)$ mit beliebigem reellem a und beliebigem reellem $b \neq 0$.
Die Probe durch Einsetzen der Werte in die Gleichungen des Systems bestätigt die Lösungen.

Aufgabe 291021:
Man ermittle alle diejenigen Paare $(x; y)$ reeller Zahlen x und y, für die das folgende Gleichungssystem (1), (2) erfüllt ist:

$$\frac{x}{y} = \frac{4}{9} \qquad (1)$$
$$\frac{x+\sqrt{x}}{y+\sqrt{y}} = \frac{1}{2} \qquad (2)$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn reelle Zahlen x und y die Gleichungen (1) und (2) erfüllen, so folgt:
Nach (1) gilt $y = \frac{9}{4}x$ (3), nach (2) gilt $2x + 2\sqrt{x} = y + \sqrt{y}$ (4).
Setzt man (3) in (4) ein, so folgt

$$2x + 2\sqrt{x} = \frac{9}{4}x + \frac{3}{2}\sqrt{x} \qquad \to \qquad \frac{1}{4}x = \frac{1}{16}x^2 \qquad (5)$$

Nach (1) ist $x \neq 0$, somit folgt aus (5) $x = 4$. Hieraus und aus (3) folgt $y = 9$.
Die Probe bestätigt, dass (1) und (2) genau von dem Paar $(x; y) = (4; 9)$ erfüllt werden.

III Runde 3

Aufgabe 031033:
Zwei Schüler erhalten die Aufgabe, zwei Zahlen a und b miteinander zu multiplizieren ($a > 0, b > 0$). Zur Probe dividieren sie das Produkt durch den kleineren Faktor. Dabei erhält der 1. Schüler 575 Rest 227. Der 2. Schüler erhält 572 Rest 308. Jeder hatte nämlich bei der Addition der Teilprodukte vergessen, eine 1 zu addieren, aber jeder an einer anderen Stelle. Daher hatte der 1. Schüler im Ergebnis 100 zu wenig und der 2. Schüler 1000 zu wenig erhalten.
Wie heißen die Zahlen a und b?

Lösung von Manuel Naumann:
Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei b die kleinere Zahl. Dann ergibt sich aus den Angaben folgendes Gleichungssystem:

$$575b + 227 = ab - 100 \qquad ; \qquad 572b + 308 = ab - 1000$$

Dieses Gleichungssystem kann man beispielsweise lösen, wenn man die erste Gleichung nach b umstellt. Man erhält $b = -\frac{327}{575-a}$.
Setzt man dies in die zweite Gleichung ein, führt das nach äquivalenten Umformungen auf die Lösung $a = 576$. Daraus ergibt sich durch die Beziehung $b = -\frac{327}{575-a} = 327$.

Aufgabe 071033:
Ingelore sagt zu ihrer Schwester Monika:

„Wir haben gestern im Mathematikunterricht Berechnungen an einer quadratischen Pyramide durchgeführt und dabei für das Volumen und den Oberflächeninhalt gleiche Maßzahlen erhalten.

Ich weiß zwar noch, dass alle Maßzahlen natürliche Zahlen waren, kann mich aber nicht mehr daran erinnern, wie sie lauten.“
„Welche Maßzahlen meintest du, als du ‚alle Maßzahlen‘ sagtest?“
„Ich meinte die Maßzahlen der Seitenlänge der Grundfläche, der Höhe, des Volumens und des Oberflächeninhalts der Pyramide.“
„Waren diese Stücke mit zusammenpassenden Maßeinheiten versehen, waren z. B. die Längen in cm der Oberflächeninhalt in cm^2 und das Volumen in cm^3 angegeben?“
„Ja so war es.“

Aus diesen Angaben kann Monika die Aufgabe rekonstruieren. Wie kann das geschehen?

Lösung von cyrix:
Wir gehen von einer geraden quadratischen Pyramide aus, da sonst die Aufgabe nicht eindeutig lösbar ist.
Sei $a \neq 0$ die Maßzahl der Kantenlänge der Grundfläche und $h \neq 0$ die der Höhe der Pyramide. Dann ist deren Volumen V gleich $V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h$ und ihr Oberflächeninhalt

$$A = a^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = a^2 + a \cdot \sqrt{4h^2 + a^2}$$

Aus $V = A$ folgt damit $\frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h = a^2 + a \cdot \sqrt{4h^2 + a^2}$ bzw. nach Division durch $\frac{a}{3}$ und Umsortieren $a \cdot (h - 3) = 3 \cdot \sqrt{4h^2 + a^2}$. Quadrieren liefert

$$a^2 \cdot (h - 3)^2 = 9 \cdot (4h^2 + a^2) \qquad \text{bzw.} \qquad a^2 \cdot (h^2 - 6h + 9) = 36h^2 + 9a^2$$

was nach Subtraktion von $9a^2$ und Division durch h die Gleichung $a^2 \cdot h - 6a^2 = 36h$, also $h \cdot (a^2 - 36) = 6a^2$ und damit $h = \frac{6a^2}{a^2-36}$ liefert.
Da h eine natürliche Zahl ist, muss der Nenner $a^2 - 36$ Teiler des Zählers $6a^2$ sein. Also muss auch $a^2 - 36$ ein Teiler von $6a^2 - 6 \cdot (a^2 - 36) = 216$ sein.

Für jeden Teiler t von 216, der durch 2, aber nicht 4 teilbar ist, wäre $t + 36$ gerade, aber nicht durch 4 teilbar, also keine Quadratzahl. Analog können wir auch die durch drei, aber nicht 9 teilbaren Teiler t von 216 ausschließen, da auch dann $t + 36$ nicht die Quadratzahl a^2 ergeben kann.
Es verbleiben die Teiler 1, 9, 27, 4, 36, 108, 8, 72 und 216. Von diesen erfüllt nur $t = 108$, dass $t + 36$ eine Quadratzahl ergibt, nämlich $t + 36 = 144 = 12^2 = a^2$. Also ist

$$a = 12 \qquad \text{und} \qquad h = \frac{6a^2}{a^2 - 36} = \frac{6 \cdot 12^2}{12^2 - 36} = \frac{6 \cdot 12}{12 - 3} = 8$$

Tatsächlich ist für diese Werte der Länge der Grundseite $a = 12$ und Höhe der Pyramide $h = 8$ das Volumen der Pyramide $V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h = 384$ und die Oberfläche

$$A = a^2 + a \cdot \sqrt{4h^2 + a^2} = 144 + 12 \cdot \sqrt{256 + 144} = 144 + 12 \cdot 20 = 384 = V.$$

Aufgabe 091034:
Man ermittle alle Paare reeller Zahlen a und b ($b < a$), für die die Summe beider Zahlen, das Produkt beider Zahlen und eine der Differenzen der Quadrate beider Zahlen untereinander gleich sind.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, a und b seien Zahlen der verlangten Art. Dann folgt $a \neq -b$; denn wäre $a = -b$, so erhielte man nach Aufgabenstellung $0 = a + b = ab = -b^2$, also $b = 0$, $a = 0$, im Widerspruch dazu, dass nach Aufgabenstellung $b < a$ sein müsste.
Nach Aufgabenstellung ist ferner entweder $a + b = a^2 - b^2$ oder $a + b = b^2 - a^2$. Die letzte Gleichung würde wegen $a + b \neq 0$ auf $1 = b - a$ und somit ebenfalls auf einen Widerspruch zu $b < a$ führen.

Daher verbleibt nur die Möglichkeit $a+b=a^2-b^2$, woraus wegen $a+b\neq 0$ weiter $1=a-b$, also $a=b+1$ folgt. Setzt man dies in $a+b=ab$ ein, so erhält man die Gleichung $2b+1=b^2+b$, d. h. $b^2-b-1=0$, die die Lösungen

$$b_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad ; \qquad b_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

und nur diese hat. Die zugehörigen Werte für a sind

$$a_1=\frac{3+\sqrt{5}}{2} \qquad ; \qquad a_2=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

Somit können höchstens die Paare (a_1,b_1) und (a_2,b_2) Lösung der Aufgabe sein, was die Probe bestätigt.

Aufgabe 111031:
Ermitteln Sie alle geordneten Paare $(a;b)$ reeller Zahlen a,b mit $a\neq 0, b\neq 0$, für die folgendes gilt:
(1) Die Summe der beiden Zahlen ist 6.
(2) Die Summe der Reziproken beider Zahlen ist ebenfalls 6.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, es gibt ein Zahlenpaar $(a;b)$, das die Bedingungen (1), (2) erfüllt. Dann gilt:

$$(3) \quad a+b=6 \qquad \text{und} \qquad (4) \quad \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=6$$

Aus (3) folgt $b=6-a$ und $a\neq 6$, hieraus und aus (4): $\frac{1}{a}+\frac{1}{6-a}=6$.
Nach Multiplikation mit $a(6-a)$, Subtraktion von $6a(6-a)$ und Division durch 6 ergibt sich $a^2-6a+1=0$.
Diese Gleichung hat die Lösungen

$$a_{1,2}=3\pm\sqrt{9-1}=3\pm 2\sqrt{2}$$

Als zugehörige Werte erhält man aus (3): $b_{1,2}=3\pm 2\sqrt{2}$. Also können höchstens die Paare $(3+2\sqrt{2};3-2\sqrt{2})$ und $(3-2\sqrt{2};3+2\sqrt{2})$ Lösung sein.
Tatsächlich gelten für die Gleichungen

$$3+2\sqrt{2}+3-2\sqrt{2}=6 \qquad \text{und} \qquad \frac{1}{3+2\sqrt{2}}+\frac{1}{3-2\sqrt{2}}=\frac{3-2\sqrt{2}+3+2\sqrt{2}}{9-8}=6$$

sowie diejenigen Gleichungen, die durch Vertauschung von $(+2\sqrt{2})$ mit $(-2\sqrt{2})$ entstehen.

Aufgabe 151033:
Beim Druck einer Mathematikaufgabe wurde statt $(1+a^2x^2):x^2=b$ (mit gegebenen Zahlen a,b) versehentlich die Gleichung $(1+a^2x^2)\cdot x^2=b$ (mit denselben Zahlen a,b) gedruckt.
Trotzdem hatte die so entstandene Gleichung dieselbe nichtleere Lösungsmenge wie die ursprünglich vorgesehene Gleichung.
Man ermittle diese Lösungsmenge!

Lösung von MontyPythagoras:
Wir nehmen an, dass $a,b\in\mathbb{R}$ und $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Aus der ersten, „eigentlich richtigen“ Aufgabe folgt einerseits:

$$(1) \qquad 1+a^2x^2=bx^2$$

Die zweite, „falsch gedruckte“ Aufgabe lautet andererseits: (2) $\quad (1+a^2x^2)\cdot x^2=b$, (1) in (2) eingesetzt ergibt:

$$(3) \qquad bx^2\cdot x^2=b$$

$b = 0$ erfüllt zwar diese Gleichung, würde aber wegen (1) erfordern, dass

$$1 + a^2x^2 = 0$$

ist, was in $\mathbb{R}$ nicht erfüllbar ist. Daher muss in (3) gelten: $x^4 = 1$. Da $x \in \mathbb{R}$, ist die Lösungsmenge $\{1, -1\}$.

Aufgabe 211033:
Ermitteln Sie alle diejenigen geordneten Paare $(a; b)$ reeller Zahlen, die das folgende Gleichungssystem erfüllen!

$$[a] + 2b = 6{,}6$$
$$[2a] + 3b = 11{,}9$$

Hinweis: Ist r eine reelle Zahl, so wird mit $[r]$ diejenige ganze Zahl g bezeichnet, für die $g \leq r < g + 1$ gilt.
So ist z. B. $[4{,}01] = 4$, da $4 \leq 4{,}01 < 5$ gilt; $[7] = 7$, da $7 \leq 7 < 8$ gilt; $[-\pi] = -4$, da $-4 \leq -\pi < -3$ gilt.

Lösung von cyrix:
Wegen $[a] \in \mathbb{Z}$ ist nach der ersten Gleichung der Nachkommaanteil von b entweder 0,3 oder 0,8, da nur für diese $2b$ den Nachkommaanteil 0,6 besitzt. Aber nur die erste Möglichkeit führt nicht zu einem Widerspruch mit der zweiten Gleichung, da der Nachkommaanteil von $3b$, und damit auch von $11{,}9 = [2a] + 3b$, bei der zweiten Möglichkeit wegen $3 \cdot 0{,}8 = 2{,}4$ also 0,4 betragen würde, was ein Widerspruch ist.

Also gilt $b = [b] + 0{,}3$ und die beiden Gleichungen gehen über in $[a] + 2[b] = 6$ sowie $[2a] + 3[b] = 11$.
Wir unterscheiden zwei Fälle bezüglich des Nachkommaanteils von a:

1. Fall: Es ist $0 \leq a - [a] < \frac{1}{2}$. Dann ist $0 \leq 2a - 2[a] < 1$, also $2[a] \leq 2a < 2[a] + 1$ und damit $[2a] = 2[a]$. Es ergibt sich das lineare Gleichungssystem

$$[a] + 2[b] = 6 \qquad ; \qquad 2[a] + 3[b] = 11$$

welches die Lösung $([a]; [b]) = (4; 1)$ besitzt. Damit sind für alle $0 \leq c < \frac{1}{2}$ die Paare $(a; b) = (4 + c; 1{,}3)$ Lösungen des Ausgangssystems.

2. Fall: Es ist $\frac{1}{2} \leq a - [a] < 1$. Dann ist $1 \leq 2a - 2[a] < 2$, also $2[a] + 1 \leq 2a < 2[a] + 2$ und damit $[2a] = 2[a] + 1$. Es ergibt sich das lineare Gleichungssystem

$$[a] + 2[b] = 6 \qquad ; \qquad 2[a] + 1 + 3[b] = 11$$

welches die Lösung $([a]; [b]) = (2; 2)$ besitzt. Damit sind für alle $0 \leq c < \frac{1}{2}$ die Paare $(a; b) = (2{,}5 + c; 2{,}3)$ Lösungen des Ausgangssystems.
Zusammenfassend ergibt sich also folgende Lösungsmenge:

$$\left\{ (a,b) \,\middle|\, \exists 0 \leq c \leq \frac{1}{2} : (a = 4 + c \wedge b = 1{,}3) \vee (a = 2{,}5 + c \wedge b = 2{,}3) \right\}.$$

Aufgabe 321032:
Gegeben sei ein Quadrat und eine positive ganze Zahl n. Jemand möchte ein Rechteck konstruieren, das denselben Flächeninhalt, aber einen n mal so großen Umfang wie das Quadrat hat.
a) Beweisen Sie, dass es bis auf Kongruenz genau ein solches Rechteck gibt!
b) Beweisen Sie, dass ein solches Rechteck mit Lineal und Zirkel aus der Seitenlänge des gegebenen Quadrats konstruierbar ist!

Lösung von cyrix:
a) Es sei q die Seitenlänge des Quadrats, a und b die beiden Seitenlängen des zu konstruierenden Rechtecks. Dann ist $a \cdot b = q^2$ der gemeinsame Flächeninhalt und $2(a+b) = n \cdot (4q)$ der Umfang des Rechtecks. Es gilt also $a + b = 2nq$ bzw. $b = 2nq - a$.
Einsetzen in die erste Gleichung liefert

$$q^2 = a \cdot (2nq - a) = 2nq \cdot a - a^2 \qquad \text{bzw.} \qquad a^2 - 2nq \cdot a + q^2 = 0$$

Diese quadratische Gleichung in a hat die Lösungen

$$nq \pm \sqrt{n^2q^2 - q^2} = (n \pm \sqrt{n^2-1})q$$

Wegen

$$b = \frac{q^2}{a} = q \cdot \frac{1}{n \pm \sqrt{n^2-1}} = q \cdot \frac{n \mp \sqrt{n^2-1}}{n^2 - (n^2-1)} = (n \mp \sqrt{n^2-1})q$$

stimmen die beiden Rechtecke aber bis auf die Reihenfolge der Kantenlängen a und b überein.

b) In einem rechtwinkligen Dreieck, dessen Hypotenuse die Länge nq und dessen eine Kathete die Länge q besitzt, hat nach dem Satz des Pythagoras die zweite Kathete die Länge $\sqrt{n^2q^2 - q^2} = \sqrt{n^2-1} \cdot q$.
Es genügt also ein solches Dreieck zu konstruieren und dann einerseits die Differenz und andererseits die Summe der beiden Kathetenlängen für a und b durch antragen zu erhalten.

Ein solches rechtwinkliges Dreieck erhält man mit dem Satz des Thales: Man zeichne eine Strecke AB der Länge nq (ggf. durch n-faches Abtragen einer Strecke der Länge q auf einer Geraden), halbiere sie und zeichne den Kreis um den Mittelpunkt durch die Endpunkte der Strecke.

Dann gilt für jeden Punkt $C \notin \{A,B\}$ auf dem Kreis, dass das Dreieck $\triangle ABC$ rechtwinklig in C ist. Sei nun C einer der beiden Schnittpunkte dieses Kreises mit dem Kreis um A mit Radius q. Dann ist $\triangle ABC$ ein solches gesuchtes Dreieck, sodass sich die Kantenlängen a und b des gesuchten Rechtecks daraus konstruieren lassen, $\square$.

IV Runde 4

Aufgabe 111044:
Ermitteln Sie alle Tripel (m,x,y) aus einer reellen Zahl m, einer negativen ganzen Zahl x und einer positiven ganzen Zahl y, die das folgende Gleichungssystem (1), (2) erfüllen!

$$-2x + 3y = 2m \quad (1) \qquad ; \qquad x - 5y = -11 \quad (2)$$

Lösung von cyrix:
Aus (2) folgt $5y - 11 = x < 0$, also wegen $y \in \mathbb{Z}_{>0}$ direkt $y = 1$ oder $y = 2$. Im ersten Fall ist $x = -6$ und $m = \frac{15}{2}$, im zweiten $x = -1$ und $m = 4$.
Damit ergeben sich die beiden Lösungstripel $(4,-1,2)$ und $\left(\frac{15}{2}, -6, 1\right)$. Die Probe bestätigt, dass beide angegebenen Tripel Lösungen des Gleichungssystems sind.

Aufgabe 171046:
Man ermittle alle reellen Lösungen des Gleichungssystems!

$$\begin{aligned} x + xy + y &= 2 + \sqrt{3} \\ x^2 + y^2 &= 6 \end{aligned}$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, es gibt eine Lösung (x,y), dann folgt mit

$$z = x + y \qquad \text{aus (1)} \qquad (3)$$
$$xy = 2 + 3\sqrt{2} - z \qquad (4) \qquad \text{bzw. mit}$$
$$z^2 = x^2 + 2xy + y^2 \qquad \text{aus (2)}$$
$$z^2 - 2xy = 6$$

Aus (4) und (5) ergibt sich für z eine quadratische Gleichung

$$z^2 + 2z - 10 - 6\sqrt{2} = 0$$

mit den Lösungen (6) und (7)

$$z_1 = 2 + \sqrt{2} \qquad ; \qquad z_2 = -4 - \sqrt{2}$$

Setzt man nun (6) bzw. (7) in (3) und (4) ein, so erhält man die folgenden Gleichungssysteme

$$x + y = 2 + \sqrt{2} \qquad ; \qquad xy = 2\sqrt{2} \qquad (6')$$
$$x + y = -4 - \sqrt{2} \qquad ; \qquad xy = 6 + 4\sqrt{2} \qquad (7')$$

In beiden kann man nach dem Einsetzungsverfahren etwa y eliminieren und erhält eine quadratische Gleichung für x. Diese hat im Falle (7') keine reellen Lösungen und im Falle (6') die Lösungen $x_1 = 2$ und $x_2 = \sqrt{2}$. Die zugehörigen y-Werte sind $y_1 = \sqrt{2}$ und $y_2 = 2$.
Hat das Gleichungssystem (1), (2) Lösungen, so können das höchstens $(2, \sqrt{2})$ und $(\sqrt{2}, 2)$ sein. Wie man durch Einsetzen in (1) und (2) zeigt, sind dies tatsächlich Lösungen.

Aufgabe 201043A:
Ermitteln Sie alle Paare $(x; y)$ reeller Zahlen mit $y > 0$ und $y \neq 1$, für die das folgende Gleichungssystem (1), (2) erfüllt ist!

$$x \log_y(\sqrt{3} - \sqrt{2})^x = 2 \log_y(5 - \sqrt{24}) \qquad (1)$$
$$y - x = 2 \qquad (2)$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, ein Paar $(x; y)$ reeller Zahlen mit $y > 0$ und $y \neq 1$ erfülle (1) und (2). Wegen

$$(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 = 5 - \sqrt{24} \quad \text{folgt dann} \quad x^2 \cdot \log_y(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = 4 \cdot \log_y(\sqrt{3} - \sqrt{2})$$

Da $\sqrt{3} \neq \sqrt{2}$ und $\sqrt{3} - \sqrt{2} \neq 1$ ist, ist $\log_y(\sqrt{3} - \sqrt{2})$ definiert und ungleich Null. Daraus folgt $x^2 = 4$. Wegen (2) und $y > 0$ ist $x = y - 2 > -2$, also muss $x - 2$ sein. Nach (2) ergibt sich $y = 4$. Folglich kann nur das Paar $(x; y) = (2; 4)$ das Gleichungssystem (1), (2) erfüllen. Wegen

$$2 \cdot \log_4(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 = 2 \cdot \log_4(5 - \sqrt{24})$$

und $4-2 = 2$ erfüllt es diese beiden Gleichungen tatsächlich. Daher ist genau das Paar $(2; 4)$ das gesuchte.

Aufgabe 251043B:
Gegeben seien reelle Zahlen a_1, a_2, a_3, a_4.
Man ermittle zu jedem möglichen Fall für diese $a_1, ..., a_4$ jeweils alle diejenigen Tripel (b_1, b_2, b_3) reeller Zahlen (bzw. beweise gegebenenfalls, dass es keine solchen Tripel gibt), für die das Gleichungssystem

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + x_3^2 = b_1 \qquad (1)$$
$$x_2^2 + a_3 x_3^2 = b_2 \qquad (2)$$
$$x_2^2 + a_4 x_3^2 = b_3 \qquad (3)$$

genau ein Tripel (x_1, x_2, x_3) reeller Zahlen als Lösung hat.

Lösung von cyrix:
Das Gleichungssystem ist linear in x_1^2, x_2^2 und x_3^2, sodass mit einem Lösungstripel (x_1,x_2,x_3) auch jedes Tripel der Form $(\pm x_1, \pm x_2, \pm x_3)$, wobei die Vorzeichen unabhängig voneinander gewählt werden können, eine weitere Lösung ist. Damit es nur eine eindeutig bestimmte Lösung gibt, muss also $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ gelten.
Damit das Tripel (0,0,0) aber überhaupt eine Lösung ist, muss $b_1 = b_2 = b_3 = 0$ gelten, denn sonst würde für ein $b_i \neq 0$ das Lösungstripel $(x_1,x_2,x_3) = (0,0,0)$ die i-te Gleichung nicht erfüllen.

Ergo hat das Gleichungssystem der Aufgabenstellung genau dann genau eine Lösung, wenn $b_1 = b_2 = b_3 = 0$ ist und das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_1y_1 + a_2y_2 + y_3 &= 0 \\ y_2 + a_3y_3 &= 0 \\ y_2 + a_4y_3 &= 0 \end{aligned}$$

allein die triviale Lösung $y_1 = y_2 = y_3 = 0$ besitzt, also die drei Gleichungen linear unabhängig sind. Dafür muss $a_3 \neq a_4$ gelten, denn sonst wären die zweite und dritte Gleichung identisch. Ist aber $a_3 \neq a_4$, so folgt aus diesen beiden Gleichungen direkt $y_2 = y_3 = 0$. Damit folgt, dass $a_1 \neq 0$ sein muss, denn sonst wäre etwa auch $(y_1,y_2,y_3) = (1,0,0)$ Lösung des betrachteten Gleichungssystems. Ist aber $a_1 \neq 0$, so folgt wieder direkt mit $y_2 = y_3 = 0$ auch $y_1 = 0$.

Zusammenfassend gilt also:

Aufgabe 261043A:
Ermitteln Sie alle diejenigen Tripel (x_1, x_2, x_3) von reellen Zahlen x_1, x_2, x_3, die das folgende Gleichungssystem (1), (2), (3) erfüllen!

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \qquad (1) \\ x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 &= 3 \qquad (2) \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 &= 1 \qquad (3) \end{aligned}$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn ein Tripel (x_1, x_2, x_3) reeller Zahlen das Gleichungssystem erfüllt, so folgt: Setzt man aus (1) $x_3 = 3 - x_1 - x_2 \quad (4)$ in (2) ein, so ergibt sich

$$x_1^3 + x_2^3 + 27 - 27(x_1 + x_2) + 9(x_1 + x_2)^2 - x_1^3 - 3x_1^2x_2 - 3x_1x_2^2 - x_2^3 = 3$$

nach Division durch 3 also

$$9(x_1 + x_2) - 3(x_1 + x_2)^2 + x_1x_2(x_1 + x_2) = 8 \qquad (5)$$

Setzt man (4) in (3) ein, so folgt

$$3x_1x_2 - x_1x_2(x_1 + x_2) = 1 \qquad (6)$$

Für die beiden Zahlen

$$p = x_1x_2 \quad (7) \qquad ; \qquad s = x_1 + x_2 \quad (8)$$

besagen (5) und (6) also

$$9s - 3s^2 + ps = 8 \quad (9) \qquad ; \qquad 3p - ps = 1 \quad (10)$$

Nach Addition und anschließender Division durch 3 folgt

$$p = s^2 - 3s + 3 \quad \Rightarrow \quad p = s^2 - 3s + 3 \qquad (11)$$

Einsetzen in (9) ergibt

$$9s - 3s^2 + s^3 - 3s^2 + 3s = 8 \quad \Rightarrow \quad (s - 2)^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad s = 2$$

Nach (11), (7), (8) folgt hieraus

$$p = 1 \quad ; \quad x_1 x_2 = 1 \quad ; \quad x_1 + x_2 = 2 \tag{12,13}$$

Setzt man $x_2 = 2 - x_1$ aus (13) in (12) ein, so folgt $x_1 = 1$ und damit aus (3) und (4) $x_2 = 1$, $x_3 = 1$. Also kann nur das Tripel (1,1,1) das Gleichungssystem (1), (2), (3) erfüllen, was die Probe bestätigt.

Aufgabe 281046:
Beweisen Sie, dass zu jedem Quadrupel (a, b, c, d) positiver reeller Zahlen, für das $a + b + c = \frac{d}{2}\sqrt{3}$ gilt, ein Tripel (x, y, z) reeller Zahlen existiert, das die drei Gleichungen

$$\sqrt{y^2 - a^2} + \sqrt{z^2 - a^2} = d$$
$$\sqrt{z^2 - b^2} + \sqrt{x^2 - b^2} = d$$
$$\sqrt{x^2 - c^2} + \sqrt{y^2 - c^2} = d$$

erfüllt!

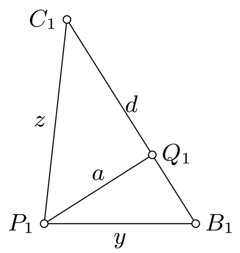
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es sei (a, b, c, d) ein beliebiges Quadrupel positiver reeller Zahlen mit $a+b+c = \frac{d}{2}\sqrt{3}$. Durch Anwendung des Satzes des Pythagoras erhält man die Aussage: Zahlen y, z mit

$$\sqrt{y^2 - a^2} + \sqrt{z^2 - a^2} = d$$

existieren dann, wenn zwei Dreiecke $B_1Q_1P_1$, $C_1Q_1P_1$, beide bei Q_1 rechtwinklig, mit $B_1P_1 = y$, $C_1P_1 = z$ und mit der gemeinsamen Seite P_1Q_1 der Länge $P_1Q_1 = a$ so existieren, dass

$$B_1Q_1 + C_1Q_1 = d$$

gilt. Dies ist der Fall, wenn es ein Dreieck $B_1C_1P_1$ mit $B_1P_1 = y$, $C_1P_1 = z$, $B_1C_1 = d$ gibt, in dem $P_1Q_1 = a$ die Länge der auf B_1C_1 senkrechten Höhe P_1Q_1 ist und diese Höhe ihren Fußpunkt Q_1 zwischen B_1 und C_1 hat; diese letzte Bedingung besagt, dass im Dreieck $B_1C_1P_1$ die Innenwinkel bei B_1 und C_1 spitz sind.



Entsprechend gilt: Zahlen z, x mit

$$\sqrt{z^2 - b^2} + \sqrt{x^2 - b^2} = d$$

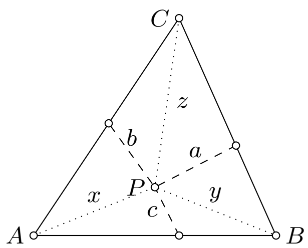
bzw. Zahlen x,y mit

$$\sqrt{x^2 - c^2} + \sqrt{y^2 - c^2} = d$$

existieren dann, wenn ein Dreieck $C_2A_2P_2$ mit $C_2P_2 = z$, $A_2P_2 = x$, $C_2A_2 = d$, spitzen Innenwinkeln be C_2, A_2 und mit der zu C_2A_2 senkrechten Höhe der Länge b existiert, bzw. wenn ein Dreieck $A_3B_3C_3$ mit $A_3P_3 = x$, $B_3P_3 = y$, $A_3B_3 = d$, spitzen Innenwinkeln bei A_3, B_3 und mit der zu A_3B_3 senkrechten Höhe der Länge c existiert. Wegen der Übereinstimmung

$$A_2P_2 = A_3P_3, \qquad B_3P_3 = B_1P_1, \qquad C_1P_1 = C_2P_2$$

in diesen Bedingungen gilt somit:



Wenn zu einem Dreieck ABC mit $BC = CA = AB = d$ ein Punkt P (in der Ebene oder im Raum) existiert, der von den Geraden durch B, C bzw. durch C, A bzw. durch A, B die Abstände a bzw. b bzw. c hat und für den in allen drei Dreiecken BCP, CAP, ABP die bei A, B und C auftretenden Innenwinkel spitz sind, dann existiert ein Tripel (x, y, z), das die drei geforderten Gleichungen erfüllt.

Nun existiert stets sogar in der Ebene durch A, B, C ein Punkt P, der diese Bedingungen erfüllt. Dies kann man folgendermaßen zeigen:

Man konstruiere drei von einem P ausgehende Strahlen, von denen je zwei einen Winkel der Größe 120° miteinander bilden. Auf ihnen trage man Strecken der Länge a, b bzw. c von P aus ab und errichte in deren Endpunkten jeweils die Senkrechte auf dem betreffenden Strahl. Diese drei Senkrechten bilden einen Dreieck ABC, in dem jeder Innenwinkel (nach dem Satz über die Innenwinkelsumme im Viereck) die Größe $360° - 2 \cdot 90° - 120° = 60°$ hat, das also gleichseitig ist.

Ist s seine Seitenlänge, so ist sein Flächeninhalt

$$F = \frac{1}{4}s^2\sqrt{3}$$

die Summe der Flächeninhalte der Dreiecke BCP, CAP, ABP, also

$$F = \frac{1}{2}s(a + b + c) = \frac{1}{4}s \cdot d\sqrt{3}$$

Daher gilt $a = d$, und alle Bedingungen werden von ABC mit P erfüllt.

VII.VII (quadratische) Funktionen, Folgen

I Runde 1

Aufgabe 091014:
Es sei $f(x)$ die für alle reellen Zahlen x durch die Gleichung $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$ definierte Funktion und x_0 eine beliebige reelle Zahl.

Beweisen Sie, dass dann $f(x_0 - 1) = f(x_0 + 1) - 8x_0 + 6$ gilt!

(Dabei bezeichnet $f(x_0 - 1)$ den Wert der Funktion an der Stelle $x_0 - 1$ und $f(x_0 + 1)$ den Wert der Funktion an der Stelle $x_0 + 1$.)

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wegen

$$f(x_0 - 1) = 2(x_0 - 1)^2 - 3(x_0 - 1) + 4 = 2x_0^2 - 7x_0 + 9 \qquad \text{und}$$
$$f(x_0 + 1) = 2(x_0 + 1)^2 - 3(x_0 + 1) + 4 = 2x_0^2 + x_0 + 3 \qquad \text{gilt}$$
$$f(x_0 - 1) = f(x_0 + 1) - 8x_0 + 6$$

w. z. b. w.

Aufgabe 121012:
In einem rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem sei eine Parabel durch die Gleichung $y = x^2$ gegeben.

Geben Sie eine Gleichung derjenigen Geraden an, die nicht parallel zur y-Achse verläuft und mit der Parabel genau einen Punkt P mit der Abszisse 3 gemeinsam hat!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Bedingung, nicht parallel zur y-Achse zu verlaufen, wird genau dann von einer Geraden erfüllt, wenn sie eine Gleichung der Form $y = mx + b$ hat. Jede Gerade mit einer solchen Gleichung hat genau dann gemeinsame Punkte mit der Parabel $y = x^2$ wenn die Gleichung

$$x^2 - mx - b = 0$$

reelle Lösungen besitzt, und zwar sind die Lösungen dann die Abszissen der gemeinsamen Punkte. Daher erfüllen m, b genau dann die Bedingungen der Aufgabe, wenn die Gleichung (1) genau die Lösung $x = 3$ besitzt, also genau dann, wenn (1) die Form $(x-3)^2 = 0$ hat, d. h, $m = 6$ und $b = -9$ ist. Demnach erfüllt genau die Gerade $y = 6x - 9$ die Bedingungen der Aufgabe.

Aufgabe 211014:

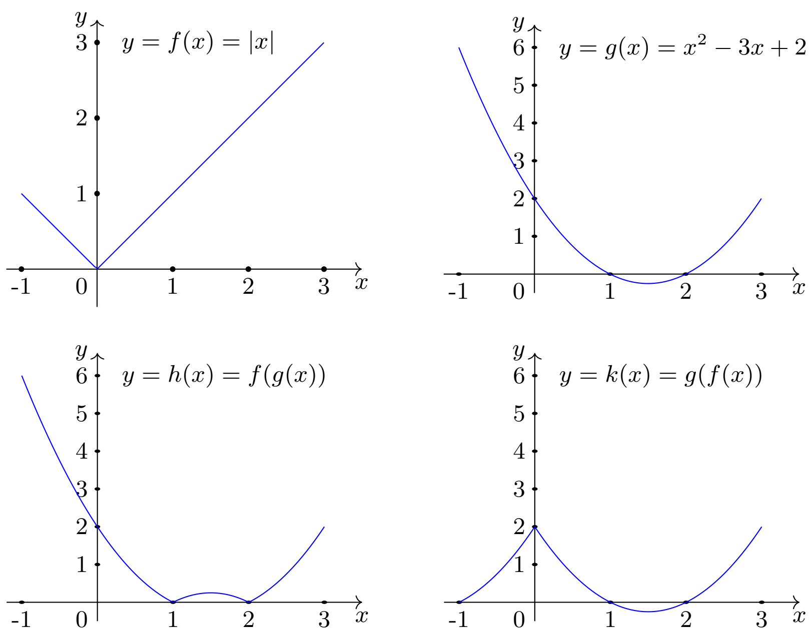
a) Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen f und g, die im Intervall $-1 \leq x \leq 3$ durch $f(x) = |x|$, $g(x) = x^2 - 3x + 2$ definiert sind!

b) Im Intervall $-1 \leq x \leq 3$ seien nun durch $h(x) = f(g(x))$, $k(x) = g(f(x))$ zwei weitere Funktionen h und k definiert.

Hinweis: Man erhält also z. B. den Funktionswert $h(x)$ zu einer Zahl x des Intervalls stets dadurch, dass man erst den Wert $z = g(x)$ und dann $f(z) = f(g(x)) = h(x)$ bildet. So ist etwa für $x = -1$ erst $z = g(-1) = (-1)^2 - 3 \cdot (-1) + 2 = 6$ und dann $h(-1) = g(6) = |6| = 6$ zu bilden. Entsprechend erhält man $k(-1) = g(f(-1)) = g(|-1|) = g(1) = 1^2 - 3 \cdot 1 + 2 = 0$.

Zeichnen Sie die Graphen der so definierten Funktionen h und k und beschreiben Sie, wie man diese Graphen dadurch aus dem Graphen von g gewinnen kann, dass man auf Teilstücke des Graphen von g geeignete Spiegelungen anwendet!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) siehe Abbildungen



b) Es ist

$$h(x) = |g(x)| = \begin{cases} g(x) & \text{, falls } g(x) \geq 0 \text{ ist} \\ -g(x) & \text{, falls } g(x) < 0 \text{ ist.} \end{cases}$$

Daher entsteht der Graph von h aus dem von g dadurch, dass man die unterhalb der x-Achse gelegenen Teilstücke des Graphen von g durch diejenigen Kurven ersetzt, die sich ergeben, wenn man diese Teilstücke an der x-Achse spiegelt.
Für $g(x) = x^2 - 3x + 2$ betrifft dies genau das eine Teilstück im Intervall $1 < x < 2$.

Ferner ist

$$k(x) = g(|x|) = \begin{cases} g(x) & \text{, falls } x \geq 0 \text{ ist} \\ g(-x) & \text{, falls } x < 0 \text{ ist.} \end{cases}$$

Daher entsteht der Graph von k aus dem von g dadurch, dass man das zum Intervall $-1 < x < 0$ gehörende Teilstück des Graphen von g durch diejenige Kurve ersetzt, die sich ergibt, wenn man das zum Intervall $0 < x < 1$ gehörende Teilstück des Graphen von g an der y-Achse spiegelt.

Aufgabe 291012:
Jens gibt in seinen Taschenrechner eine positive Zahl A ein und wendet dann folgenden Ablauf von Rechenoperationen an: Addition von 1, aus dem Ergebnis Ziehen der Quadratwurzel.

Nun wiederholt er denselben Ablauf von Rechenoperationen mehrere Male. Er beobachtet, dass nach genügend häufiger Wiederholung das Ergebnis auf einem Zahlenwert Z „stehenbleibt“, d. h., dass der Ablauf, auf Z angewandt, wieder Z ergibt (oder sich nur um einen - durch das interne Runden des Rechners entstandenen - sehr kleinen Betrag von Z unterscheidet).

a) Beweisen Sie, dass aus jeder positiven Zahl A, für die diese Beobachtung zutrifft, dieselbe Zahl Z entstehen muss, unabhängig von der Ausgangszahl A!

b) Falls Sie die Möglichkeit haben, an einem Kleincomputer zu arbeiten, sollten Sie mit einem geeigneten Programm die in a) zu beweisende Behauptung für die Anfangswerte $A = 1, 2, \dots, 10$ überprüfen.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Wenn aus einem positiven Wert A ein „stehenbleibender“ Wert Z entsteht, so ist er erstens positiv und hat zweitens die Eigenschaft $\sqrt{Z+1} = Z$.

Hieraus folgt, in der Tat unabhängig von A, dass $Z + 1 = Z^2$, also $Z^2 - Z - 1 = 0$ gilt und demnach, da wegen $Z > 0$ die negative Lösung dieser Gleichung ausscheidet

$$Z = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \approx 1{,}618034$$

sein muss.

b) Bei dem folgenden BASIC-Programm wird der Prozess abgebrochen, wenn die Differenz aufeinanderfolgender Ergebnisse dem Betrag nach kleiner als 10^{-6} ist. 100 FOR A=1 TO 10

```
110  Y=A
120  X=Y
130  Y=SQR(X+1)
140  IF ABS(Y-X) >= 1E-6 THEN 120
150  PRINT Y
160 NEXT A
```

Aufgabe 311013:
Eine Funktion f (die in einem Intervall reeller Zahlen definiert ist und reelle Funktionswerte hat)

heißt genau dann streng konkav, wenn für alle $x_1 \neq x_2$ ihres Definitionsbereiches und alle positiven q_1, q_2 mit $q_1 + q_2 = 1$ die folgende Ungleichung (1) gilt:

$$f(q_1x_1 + q_2x_2) > q_1f(x_1) + q_2f(x_2) \tag{1}$$

Man beweise: Wenn f eine für alle reellen Zahlen definierte streng konkave Funktion ist, dann gilt für alle reellen u, v mit $u \neq v$ die Ungleichung

$$f(u) + f(v) < 2 \cdot f\left(\frac{u+v}{2}\right) \tag{2}$$

und es gelten für alle reellen a, b mit $b \neq 0$ die Ungleichungen

$$\begin{aligned} f(a) + f(a+2b) &< 2 \cdot f(a+b), \\ f(a) + f(a+3b) &< f(a+b) + f(a+2b). \end{aligned} \tag{3}$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wendet man (*) mit $x_1 = u, x_2 = v, q_1 = q_2 = 5$ an, so folgt

$$f\left(\frac{u}{2} + \frac{v}{2}\right) > \frac{1}{2}f(u) + \frac{1}{2}f(v)$$

und daraus (1).
Für alle reellen a,b mit $b \neq 0$ erfüllen $u = a$ und $v = a + 2b$ die Ungleichung $u \neq v$, also ist (1) anwendbar und ergibt wegen

$$\frac{u+v}{2} = \frac{2a+2b}{2} = a + b$$

die Ungleichung (2).
Ferner erfüllen auch $u = a + b$ und $v = a + 3b$ die Ungleichung $u \neq v$, und damit führt (1) wegen

$$\frac{u+v}{2} = \frac{2a+4b}{2} = a + 2b$$

auf

$$f(a+b) + f(a+3b) < 2 \cdot f(a+2b) \tag{4}$$

Aus (2) und (4) folgt durch Addition

$$f(a) + f(a+2b) + f(a+b) + f(a+3b) < 2 \cdot f(a+b) + 2 \cdot f(a+2b)$$

und daraus, indem man auf beiden Seiten $f(a+b) + f(a+2b)$ subtrahiert, die Ungleichung (3).

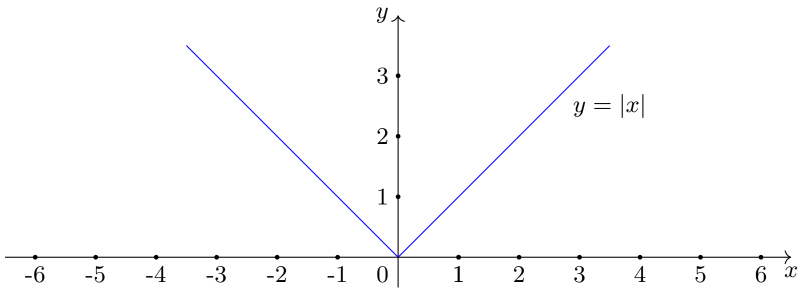
Aufgabe 341016:
Es seien Funktionen f_0, f_1, f_2, f_3, ... für alle reellen Zahlen x definiert durch

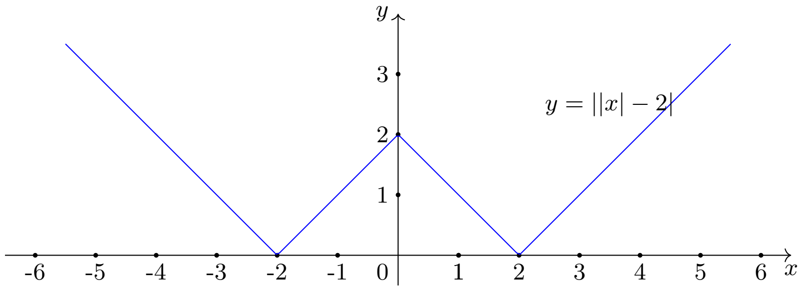
$$\begin{aligned} f_0(x) &= |x|, \\ f_1(x) &= ||x| - 2|, \\ f_2(x) &= |||x| - 2| - 2|, \\ &\ \ \vdots \end{aligned}$$

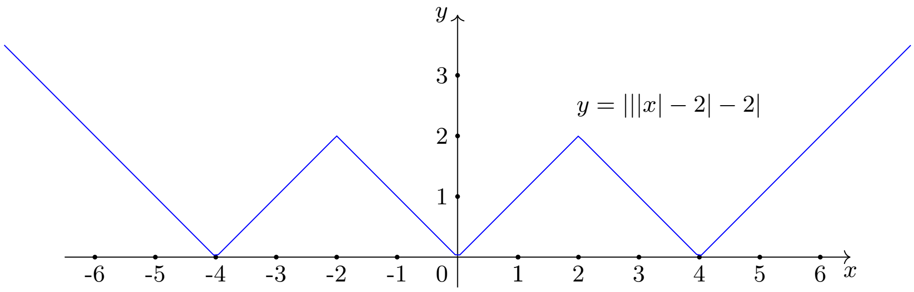
allgemein: $f_k(x) = |f_{k-1}(x) - 2|$ für alle ganzen Zahlen $k \geq 1$.

Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen f_0, f_1 und f_2! Beschreiben Sie allgemein das Aussehen des Graphen der Funktion f_k!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Abbildung zeigt die Graphen von f_0, f_1 und f_2.







Beschreibung des Graphen von f_k: Die Funktion hat $(k+1)$ Nullstellen, symmetrisch zum Nullpunkt gelegen und mit Abständen zu je 4 Einheiten voneinander. Jeweils in der Mitte zwischen zwei Nullstellen liegt ein lokales Maximum.

In den Intervallen, die durch diese Nullstellen und Maxima voneinander abgegrenzt werden, verläuft der Graph geradlinig, immer abwechselnd mit den Anstiegen -1 und 1.

Bemerkung: Ausgehend von f_0 kann man diese Graphen der Reihe nach folgendermaßen erhalten: Der Graph von f_k wird um 2 Einheiten nach unten verschoben, und dann werden alle Kurventeile, die dabei unterhalb von der x-Achse zu liegen kommen, an der x-Achse gespiegelt; so entsteht der Graph von f_{k+1}.

II Runde 2

Aufgabe V11021:
Die Industrieproduktion der Sowjetunion erhöhte sich 1960 um 10%. Auch in den folgenden Jahren wird die Produktion jährlich etwa in dieser Größenordnung weiter anwachsen.
Berechnen Sie, auf das Wievielfache die Industrieproduktion der UdSSR
a) in den nächsten 10 Jahren,
b) in den nächsten 20 Jahren,
c) bis zum Jahre 2000
anwachsen wird, wenn man eine jährliche Wachstumsrate von 10% zugrunde legt!

Lösung von J. Lehmann und W. Unze:
A sei die Anfangsproduktion. Dann gilt bei einer jährlichen Wachstumsrate von 10%:

1959	A		
1960	$A + \frac{1}{10}A$	$= A\left(1 + \frac{1}{10}\right)$	$A \cdot 1{,}1$
1961	$A \cdot 1{,}1 + \frac{1}{10}A \cdot 1{,}1$	$= A \cdot 1{,}1\left(1 + \frac{1}{10}\right)$	$A \cdot 1{,}1^2$
1962	$A \cdot 1{,}1^2 + \frac{1}{10}A \cdot 1{,}1^2$	$= A \cdot 1{,}1^2\left(1 + \frac{1}{10}\right)$	$A \cdot 1{,}1^3$

Nach n-jährigem Wachsen ergibt sich $A \cdot 1{,}1^n$, weil sich durch Ausklammern stets nur ein weiterer Faktor von 1,1 ergibt. Danach gilt die Formel:

$$x = A \cdot 1{,}1^n$$

Da es nach der Aufgabe nicht auf die Produktion selbst ankommt, sondern auf die Vervielfachung, kann $A = 1$ gesetzt werden; somit ergibt sich:
zu a) $x = 1{,}1^{10} = 2{,}59 \approx 2{,}6$,
zu b) $x = 1{,}1^{20} = 6{,}73 \approx 6{,}8$,
zu c) $x = 1{,}1^{40} = 45{,}26 \approx 45{,}3$.

Die Industrieproduktion der UdSSR wächst in den nächsten 10 Jahren auf das 2,6fache, in den nächsten 20 Jahren auf das 6,8fache ..., wenn eine jährliche Wachstumsrate von 10% zugrunde gelegt wird.

Aufgabe 081021:
Eine arithmetische Zahlenfolge ist eine Folge $\{a_1, a_2, \dots\}$ von Zahlen, bei der die sämtlichen Differenzen $a_{n+1} - a_n$ $(n = 1, 2, \dots)$ einander gleich sind.
Zeigen Sie, dass es genau eine arithmetische Zahlenfolge gibt, bei der für jedes $n = 1, 2, \dots$ die Summe $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ der ersten n Glieder $n^2 + 5n$ beträgt!

Lösung von StrgAltEntf:
Ist d die Differenz der arithmetischen Folge (a_n), so gilt $a_n = a_1 + (n-1)d$ für $n = 1, 2, \dots$. Es folgt

$$s_n = (a_1 + 0 \cdot d) + (a_1 + 1 \cdot d) + (a_1 + 2 \cdot d) + \dots + (a_1 + (n-1) \cdot d) =$$

$$= n \cdot a_1 + (0 + 1 + 2 + \dots + (n-1)) \cdot d = n \cdot a_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$$

Es soll $s_n = n^2 + 5n$, also $n \cdot a_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = n^2 + 5n$ für alle $n = 1, 2, \dots$ gelten. Es folgt $a_1 + \frac{n-1}{2}d = n + 5$ für alle $n = 1, 2, \dots$.
Für $n = 1$ erhalten wir $a_1 = 6$ und mit $n = 2$ dann $6 + \frac{1}{2}d = 7$, also $d = 2$.
Es handelt sich also um die arithmetische Folge $6, 8, 10, 12, \dots$.

Aufgabe 121023:
In einem rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem sind zwei Parabeln gezeichnet. Die eine ist der Graph der Funktion mit der Gleichung $y = x^2$. Die zweite liegt ebenfalls symmetrisch zur y-Achse; ihr Scheitelpunkt ist $S(0; 6)$.
Sie hat ferner folgende Eigenschaft:
Fällt man von den Schnittpunkten A und B beider Parabeln die Lote auf die x-Achse (Fußpunkte seien A_1 bzw. B_1), so ist das Viereck A_1B_1BA ein Quadrat.
Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte, in denen die zweite Parabel die x-Achse schneidet!

Lösung von Steffen Polster:
Auf Grund der Symmetrie zur y-Achse und ihres Scheitelpunktes muss die zweite Parabel eine Gleichung der Form $y = ax^2 + 6$ mit einem reellen a haben.
Die Schnittpunkte von $y = x^2$ und $y = ax^2 + 6$ haben die Abszissen

$$x_1 = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{1-a}} \qquad ; \qquad x_2 = -\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{1-a}}$$

Damit das Vierecke A_1B_1BA ein Quadrat wird, muss o. B. d. A. für x_1 die Ordinate gleich $2x_1$ sein. Aus

$$2 \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{1-a}} = \left(\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{1-a}}\right)^2$$

ergibt sich $a_1 = -\frac{1}{2}$. Die Funktion $y = -\frac{1}{2}x^2 + 6$ hat ihre Nullstellen bei

$$x_1 = 2\sqrt{3} \qquad ; \qquad x_2 = -2\sqrt{3}$$

Die gesuchten Punkte sind also $S_1(2\sqrt{3}; 0)$ und $S_2(-2\sqrt{3}; 0)$.

Aufgabe 281022:
Weisen Sie nach, dass es genau eine quadratische Funktion f gibt, die die Bedingung

$$\frac{f(x) + f(x+2)}{6} = x^2 - 3 \qquad (*)$$

für alle reellen Zahlen x erfüllt, und dass diese Funktion zwei ganzzahlige Nullstellen hat!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn eine quadratische Funktion f, d. h. eine mit reellen $a \neq 0$, b, c durch $f(x) = ax^2 + bx + c$ für alle reellen x definierte Funktion f die Bedingung (*) erfüllt, so folgt: Wegen

$$f(x+2) = a(x+2)^2 + b(x+2) + c = ax^2 + 4ax + bx + 4a + 2b + c \qquad \text{also}$$

$$f(x) + f(x+2) = 2ax^2 + 2(2a+b)x + 2(2a+b+c)$$

gilt für alle reellen x die Gleichung $f(x) + f(x+2) = 6^2 - 18$, d. h. die Gleichung

$$2ax^2 + 2(2a+b)x + 2(2a+b+c) = 6x^2 + 0 \cdot x - 18 \qquad (**)$$

Durch Koeffizientenvergleich ergeben sich aus (**) die Gleichungen

$$2a = 6; \qquad 2(2a+b) = 0; \qquad 2(2a+b+c) = -18$$

Aus ihnen folgt $a = 3$, $b = -6$, $c = -9$ und somit die Funktion $f(x) = 3x^2 - 6x - 9$. Diese Funktion erfüllt die Bedingung (*), wie eine Probe bestätigt.
Die Gleichung $f(x) = 0$, d. h. $3x^2 - 6x - 9 = 0$, hat genau die Lösungen

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+3}; \qquad x_1 = 3 \quad , \quad x_2 = -1$$

Da dies zwei ganze Zahlen sind, ist damit auch der zweite geforderte Nachweis geführt.

Aufgabe 301024:
Für jede ganze Zahl $n > 0$ sei

$$a_n = ((n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1})^{-1}$$

mit dieser Bezeichnung sei

$$s = a_1 + a_2 + ... + a_{1989} + a_{1990}$$

Beweisen Sie, dass hieraus $0{,}5 < s < 1$ folgt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Für jedes $n > 0$ gilt

$$a_n = \frac{(n+1)\sqrt{n} - n\sqrt{n+1}}{(n+1)^2 n - n^2(n+1)} = \frac{(n+1)\sqrt{n} - n\sqrt{n+1}}{n(n+1)} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n-1}}$$

Damit folgt

$$s = \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + ... + \frac{1}{\sqrt{1990}} - \frac{1}{\sqrt{1991}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{1991}} < 1$$

und wegen $\frac{1}{1991} < \frac{1}{4}$, also $\frac{1}{\sqrt{1991}} < \frac{1}{2}$ auch $s > \frac{1}{2}$.

III Runde 3

Aufgabe 081034:
Eine quadratische Funktion der Form $y = x^2 + px + q$ wird im rechtwinkligen Koordinatensystem dargestellt.
Die Schnittpunkte des Bildes der Funktion mit der Abszissenachse begrenzen auf dieser eine Strecke mit der Länge 7 Längeneinheiten. Das Bild der Funktion schneidet die Ordinatenachse im Punkt $S_y(0;8)$.
Ermitteln Sie die reellen Zahlen p und q!

Lösung von cyrix:
Aufgrund des angegebenen Punkts S_y auf der Parabel ist $q = 8$. Die Nullstellen der Funktion können angegeben werden durch $-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$, sodass sich ihr Abstand berechnet zu $2\sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = \sqrt{p^2 - 4q}$. Dieser ist nach Aufgabenstellung gleich 7, sodass sich $p^2 - 4q = 49$ bzw. $p^2 = 81$, also $p = \pm 9$ ergibt.
Damit ergeben sich zwei Lösungspaare: $(p,q) = (-9,8)$ oder $(p,q) = (9,8)$. Die Probe bestätigt beide Ergebnisse.

Aufgabe 091036:
Von einer quadratischen Funktion $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ denke man sich die Tabelle

x	1	2	3	4
y	1	2	n_1	n_2

gebildet.
Ermitteln Sie alle reellen Koeffizienten a, b, c, für die n_1 und n_2 einstellige natürliche Zahlen sind!

Lösung von StrgAltEntf:
Aus der Funktionsgleichung und der Tabelle ergibt sich für $x = 1$ bzw. $x = 2$

$$(1) \quad a + b + c = 1 \qquad , \qquad (2) \quad 4a + 2b + c = 2$$

Subtrahiert man (1) von (2) bzw. 2 mal (1) von (2), erhält man (3) $\quad 3a + b = 1$ und (4) $\quad 2a - c = 0$ und hieraus $b = 1 - 3a$ und $c = 2a$. Für die quadratische Funktion ergibt sich somit

$$(5) \quad y = ax^2 + (1 - 3a)x + 2a$$

Einsetzen von $x = 3$ bzw. $x = 4$ liefert

$$(6) \quad n_1 = 9a + 3(1 - 3a) + 2a = 2a + 3 \qquad , \qquad (7) \quad n_2 = 16a + 4(1 - 3a) + 2a = 6a + 4$$

Da n_1 aus {0,1,...,9} sein soll, ergibt sich aus (6) und (7) folgende Tabelle

n_1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3
n_2	-5	-2	1	4	7	10	13	16	19	22

Da auch n_2 aus {0,1,...,9} und außerdem a nicht 0 sein soll, verbleiben für a nur die beiden Lösungen $a = -\frac{1}{2}$ und $a = \frac{1}{2}$.
Für die Funktionsgleichung folgt dann aus (5):

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x - 1 \qquad \text{oder} \qquad y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 1$$

Aufgabe 101033:
Geben Sie für jede reelle Zahl a alle diejenigen linearen Funktionen $f(x)$ an, die die Eigenschaft haben, dass für jedes reelle x gilt: $f(x) = f(x+1) - a$

Lösung von cyrix:
Sei $f(x) = mx + n$ mit reellen Zahlen m und n. Dann geht die Bedingung über in die Aussage $mx + n = m(x+1) + n - a = mx + n + (m - a)$ bzw. $m = a$. Tatsächlich erfüllen auch alle linearen Funktionen $f(x) = ax + n$ mit Anstieg a die Bedingung, wie man leicht durch Einsetzen überprüft.

Aufgabe 111035:
Eine Funktion $f(x)$, die für alle reellen Zahlen x definiert sei, sei periodisch mit der Periode p, d. h. für alle reellen x gelte $f(x+p) = f(x)$, wobei p die kleinste positive Zahl sei, für die das gilt.
Welche kleinste positive Periode hat dann die Funktion

$$\text{a)} \quad F(x) = \frac{1}{2} f(x) \qquad ; \qquad \text{b)} \quad G(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)$$

Lösung von cyrix:
a) Die Funktion $F(x)$ hat auch die Periode p. Einerseits ist für alle reellen x die Gleichung

$$F(x+p) = \frac{1}{2} f(x+p) = \frac{1}{2} f(x) = F(x)$$

wahr, da f p-periodisch ist. Andererseits würde aber auch für jede kleinere positive Zahl q, für die für alle reellen x die Gleichung $F(x+q) = F(x)$ gilt, folgen, dass wiederum für alle reellen x auch $f(x+q) = 2 \cdot F(x+q) = 2 \cdot F(x) = f(x)$ erfüllt ist, was im Widerspruch zur Minimalität von p stünde. Also gibt es kein solches $0 < q < p$ und auch F ist p-periodisch.

b) Analog rechnet man nach, dass G $2p$-periodisch ist: Einerseits gilt für alle reellen x die Gleichung

$$G(x+2p) = f\left(\frac{x+2p}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2} + p\right) = f\left(\frac{x}{2}\right) = G(x)$$

da f p-periodisch ist. Und andererseits folgt aus der Existenz eines $0 < q < p$, welches für alle reellen x die Gleichung $G(x+2q) = G(x)$ erfüllt, dass auch für alle reellen x die Gleichung $f(x+q) = G(2x+2q) = G(2x) = f(x)$ erfüllt ist, was wieder der Minimalität von p widerspricht.

Aufgabe 141034:
Es seien a, b gegebene positive reelle Zahlen, und es sei f die für alle natürlichen Zahlen n durch die Gleichung

$$f(n) = a^n + b^n + (a+b)^n$$

definierte Funktion.
Beweisen Sie, dass dann $[f(2)]^2 = 2 \cdot f(4)$ gilt!

Lösung von Nuramon:
Betrachte die Polynome $p(x) = (a^2 + x^2 + (a+x)^2)^2$ und $q(x) = 2(a^4 + x^4 + (a+x)^4)$.
Wir beobachten:

1.) $p(x)$ und $q(x)$ sind beide Polynome vierten Grades in x und haben den Leitkoeffizienten 4.
2.) Es ist $p(0) = 4a^4 = q(0)$.
3.) Es ist $p(-a) = 4a^4 = q(-a)$

4.) Es ist $p(a) = 36a^4 = q(a)$
5.) Es ist $p(2a) = (1+4+9)^2a^4 = 196a^4 = 2 \cdot (1+16+81)a^4 = q(2a)$.
6.) Da a positiv ist, sind $0, -a, a, 2a$ vier paarweise verschiedene Zahlen.

Aus diesen Beobachtungen folgt, dass $p(x) = q(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Insbesondere ist

$$[f(2)]^2 = p(b) = q(b) = 2 \cdot f(4)$$

Aufgabe 151036:
Vorbemerkungen: Ist x eine reelle Zahl, so wird mit $[x]$ die größte ganze Zahl bezeichnet, die nicht größer als x ist: $[x] \leq x < [x] + 1$.
Beispielsweise ist $[\pi] = 3$, $[-4{,}2] = -5$, $[5] = 5$.

Eine Funktion f, die für alle reellen x erklärt ist, heißt periodisch, wenn es eine Zahl $p > 0$ gibt, so dass für alle x gilt: $f(x+p) = f(x)$.
Eine solche Zahl p heißt eine positive Periode von f.
Gibt es eine kleinste Zahl mit dieser Eigenschaft, so heißt sie die kleinste positive Periode von f.
Beispielsweise ist $f(x) = 1$ eine periodische Funktion f, die keine kleinste positive Periode besitzt, während z. B. $f(x) = \sin x$ die kleinste positive Periode 2π besitzt.
a) Beweisen Sie, dass durch $y = (-1)^{[x]}$ eine für alle reellen Zahlen x erklärte Funktion f definiert ist!
b) Beweisen Sie, dass die unter a) erklärte Funktion f periodisch ist!
c) Weisen Sie nach, dass diese Funktion f eine kleinste positive Periode besitzt, und ermitteln Sie diese!
d) Stellen Sie f graphisch dar!

Lösung von ochen:
a) Die Funktion $g\colon \mathbb{Z} \to \{-1{,}1\}$, $k \mapsto (-1)^k$ ist durch

$$g(k) = \begin{cases} 1, & 2 \mid k \\ -1, & 2 \nmid k \end{cases}$$

erklärt. Weiter ist die Funktion $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto [x]$ wie in der Aufgabenstellung erklärt. Da der Definitionsbereich von g eine Teilmenge des Wertebereichs von h ist, ist auch deren Komposition $f = g \circ h$ erklärt.

b) Offenbar gilt für jede reelle Zahl x und jede ganze Zahl k

$$[x+k] = [x] + k,$$

da $[x] + k$ ganzzahlig ist und $[x] + k \leq x + k < [x] + k + 1$ gilt.
Insofern folgt für alle reellen Zahlen x

$$f(x+2) = (-1)^{[x+2]} = f(x+2) = (-1)^{[x]+2} = (-1)^{[x]} \cdot (-1)^2 = (-1)^{[x]} = f(x).$$

Somit ist 2 eine Periode von f.

c) Angenommen, es gäbe eine reelle Zahl p mit $0 < p < 2$ und $f(x+p) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Wir unterscheiden die Fälle, ob $0 < p < 1$ oder $1 \leq p < 2$ gilt.
Falls $0 < p < 1$ gilt, setzen wir $x = 1 - p$, so folgt $0 < x < 1$ und insbesondere

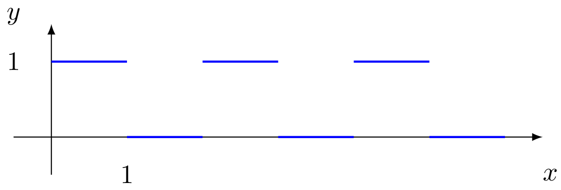
$$f(x+p) = (-1)^{[p+(1-p)]} = (-1)^1 = -1 \neq 1 = (-1)^0 = (-1)^{[x]} = f(x).$$

Falls $1 \leq p < 2$ gilt, betrachten wir $x = 0$, so folgt

$$f(x+p) = f(p) = (-1)^{[p]} = (-1)^1 = -1 \neq 1 = (-1)^0 = (-1)^{[x]} = f(x).$$

Somit ist 2 die kleinste Periode von f.

d)



Aufgabe 181031:
Beweisen Sie folgende Aussage!
Wenn eine Funktion f für alle reellen Zahlen x definiert ist und für alle x die Gleichung

$$x \cdot f(x+2) = (x^2 - 9) \cdot f(x)$$

erfüllt, so hat sie mindestens drei reelle Nullstellen.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Setzt man in der gegebenen Gleichung nacheinander $x = 0, x = 3, x = -3$, so erhält man:

$$\begin{aligned} 0 \cdot f(2) = -9 \cdot f(0), &\quad \text{also} \quad f(0) = 0 \\ 3 \cdot f(5) = 0 \cdot f(3), &\quad \text{also} \quad f(5) = 0 \\ -3 \cdot f(-1) = 0 \cdot f(-3), &\quad \text{also} \quad f(-1) = 0 \end{aligned}$$

Die Funktion f hat mithin mindestens die drei Nullstellen $x_0 = 0$, $x_1 = 5$, $x_2 = -1$.

Aufgabe 181035:
Man untersuche, ob es reelle Zahlen a, b, c, d mit folgender Eigenschaft gibt:
Wenn f die für alle reellen Zahlen x durch die Gleichung $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ definierte Funktion ist, so gilt $f(0) = 10$; $f(1) = 12$; $f(2) = 4$ und $f(3) = 1$.
Gibt es solche Zahlen a, b, c, d, so ermittle man alle derartigen Zahlen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Für alle reellen a, b, c, d sind genau dann die geforderten Bedingungen erfüllt, wenn für sie die folgenden Gleichungen (1) bis (4) gelten:

$$\begin{aligned} d = 10 \qquad (1) \qquad ; &\qquad a + b + c + d = 12 \qquad (2) \\ 8a + 4b + 2c + d = 4 \qquad (3) \qquad ; &\qquad 27a + 9b + 3c + d = 1 \qquad (4) \end{aligned}$$

I) Wenn (1) bis (4) für reelle a, b, c, d erfüllt sind, so folgt durch Einsetzen von (1) in (2), (3) und (4):

$$\begin{aligned} a + b + c = 2 &\quad \text{also} \quad c = 2 - a - b \qquad (5) \\ 8a + 4b + 2c = -6 &\quad \text{also} \quad 4a + 2b + c = -3 \qquad (6) \\ 27a + 9b + 3c = -9 &\quad \text{also} \quad 9a + 3b + c = -3 \qquad (7) \end{aligned}$$

Setzt man (5) in (6) und (7) ein, so erhält man

$$3a + b = -5 \quad \text{also} \quad b = -5 - 3a \qquad (8) \qquad \text{und} \qquad 8a + 2b = -5 \qquad (9)$$

Durch Einsetzen von (8) in (9) folgt $2a = 5$, woraus man $a = \frac{5}{2}$ (10) erhält. Aus (10) und (8) ergibt sich $b = -\frac{25}{2}$ (11).
Daraus und aus (10) und (5) folgt

$$x = 2 - \frac{5}{2} + \frac{25}{2} = 12 \qquad (12)$$

Daher können nur die in (10), (11), (12), (1) genannten Zahlen die Gleichungen (1) bis (4) erfüllen.
II) Wie man durch Einsetzen dieser Zahlen in (1) bis (4) zeigen kann, erfüllen sie diese Gleichungen. Die gesuchten Zahlen lauten somit $a = \frac{5}{2}, b = -\frac{25}{2}, c = 12, d = 10$.

Aufgabe 191035:
Von einer Funktion f, die für alle von 0 verschiedenen reellen Zahlen erklärt ist, sei vorausgesetzt, dass folgendes gilt:
(1) Es ist $f(1) = 1$.
(2) Für jedes $x \neq 0$ ist

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2} \cdot f(x)$$

(3) Für alle x_1, x_2 mit $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$, $x_1 + x_2 \neq 0$ ist $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$.
Beweisen Sie, dass für jede Funktion f, die diese Voraussetzungen erfüllt, gilt:

$$f\left(\frac{5}{7}\right) = \frac{5}{7}$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Aus (1) und (3) folgt

$$f(2) = f(1+1) = f(1) + f(1) = 1 + 1 = 2 \quad ; \quad f(3) = f(2+1) = f(2) + f(1) = 2 + 1 = 3$$
$$f(5) = f(3+2) = f(3) + f(2) = 3 + 2 = 5 \quad ; \quad f(7) = f(5+2) = f(5) + f(2) = 5 + 2 = 7$$

Aus (2) folgt daher

$$f\left(\frac{1}{7}\right) = \frac{1}{7^2} \cdot f(7) = \frac{1}{7}$$

Hieraus und aus (3) folgt

$$f\left(\frac{2}{7}\right) = f\left(\frac{1}{7} + \frac{1}{7}\right) = f\left(\frac{1}{7}\right) + f\left(\frac{1}{7}\right) = \frac{1}{7} + \frac{1}{7} = \frac{2}{7}$$
$$f\left(\frac{3}{7}\right) = f\left(\frac{2}{7} + \frac{1}{7}\right) = f\left(\frac{2}{7}\right) + f\left(\frac{1}{7}\right) = \frac{2}{7} + \frac{1}{7} = \frac{3}{7}$$
$$f\left(\frac{5}{7}\right) = f\left(\frac{3}{7} + \frac{2}{7}\right) = f\left(\frac{3}{7}\right) + f\left(\frac{2}{7}\right) = \frac{3}{7} + \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$$

Aufgabe 201035:
Tausend reelle Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_{1000}$ seien durch die Festsetzung bestimmt, dass $x_1 = 3$ und für alle $n = 1, 2, \ldots, 999$

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 4}{2x_n}$$

gelten soll.
Beweisen Sie, dass (nach diesen Festsetzungen) für jedes $n = 1, 2, \ldots, 1000$ die Ungleichung $x_n > 2$ gilt!

Lösung von Steffen Polster:
Für den Nachweis wird hier folgende Aussage verwendet:
Für eine positive reelle Zahl a gilt $a + \frac{1}{a} \geq 2$, wobei Gleichheit nur im Fall $a = 1$ gilt.

Der Beweis erfolgt über vollständige Induktion. Für $k = 1$ gilt die Behauptung, da $a_1 = 3 > 2$ nach Aufgabenstellung ist.

Angenommen die Aussage gelte für n, dann ist $x_n > 2$. Für $n+1$ wird dann

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2+4}{2x_n} = \frac{x_n}{2} + \frac{2}{x_n} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{\frac{x_n}{2}}$$

Da nach Voraussetzung $\frac{x_n}{2} > 0$ und $\neq 1$ ist, wird nach der Hilfsaussage $\frac{x_n}{2} + \frac{2}{x_n} > 2$. Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ist die Behauptung bewiesen.

Anmerkung: Die Hilfsaussage kann einfach bewiesen werden.

$$\forall a > 0: \; a + \frac{1}{a} = \left(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 + 2 \geq 2$$

mit Gleichheit genau dann, wenn der Klammerausdruck 0, d. h., $a = 1$ ist.

Aufgabe 221035:
Untersuchen Sie, ob die für alle reellen Zahlen x durch

$$f(x) = 1981x^4 + 1979x^3 + 1982x^2 + 1978x + 1980$$

definierte Funktion f eine Nullstelle hat!

Lösung von MontyPythagoras:
Man zerlege die Funktion wie folgt:

$$f(x) = 2 + 1978(1 + x + x^2 + x^3 + x^4) + x^2(3x^2 + x + 4)$$

$$f(x) = 2 + 1978 \cdot \frac{x^5-1}{x-1} + x^2\left(3\left(x + \frac{1}{6}\right)^2 + 4 - \frac{1}{12}\right)$$

Der Term $\frac{x^5-1}{x-1}$ hat keine Nullstelle, denn $x^5 - 1$ hätte nur die Nullstelle $x = 1$, die aber künstlich erzeugt wurde durch die Erweiterung mit dem Nenner $x-1$. Eine eventuelle andere Nullstelle von $1+x+x^2+x^3+x^4$ müsste dann aber auch Nullstelle von $x^5 - 1$ sein.
Daher ist der ganze Ausdruck $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 > 0$ für alle x. Alle anderen Terme sind auch immer größer als null, so dass man insgesamt festhalten kann, dass $f(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist und daher keine Nullstellen aufweist.

Aufgabe 241031:
In einer Diskussion über die Anzahl von Kurvenschnittpunkten behauptet Anne, ausgehend vom Beispiel der Kurven mit den Gleichungen $y = \cos x$ und $y = \frac{1}{2}x^2 - 1$:
„Die Kurve c mit der Gleichung $y = \cos x$ hat mit jeder quadratischen Parabel genau zwei Schnittpunkte.“
Bernd behauptet dagegen: „Es gibt auch eine quadratische Parabel, die mit der Kurve c genau 10 Schnittpunkte hat.“
Untersuchen Sie sowohl für Annes als auch für Bernds Behauptung, ob sie wahr oder falsch ist!

Lösung von MontyPythagoras:
Die Aussage von Anne ist falsch. Die Funktion $y = \cos x$ hat unendlich viele Nullstellen, sie ist nach oben beschränkt ($y \leq 1$).
Eine beliebige quadratische Parabel kann z. B. die Gleichung $y = ax^2$ aufweisen. Lässt man a sehr klein werden, wird die Parabel extrem flach und nähert sich zumindest für relativ kleine x der Funktion $y = 0$, so dass es beliebig viele Schnittpunkte geben kann. Erst, wenn $ax^2 > 1$ wird, also $|x| > \frac{1}{\sqrt{a}}$, gibt es keine weiteren Schnittpunkte.

Es ist also nur eine Frage der Wahl des Parameters a, wie viele Schnittpunkte es zwischen den Funktionen gibt. Daher ist die Aussage von Bernd korrekt, wobei durch Hinzufügen eines konstanten Summanden $y = ax^2 + b$ auch möglich ist, beliebig viele Parabeln zu erzeugen, die genau 10 Schnittpunkte mit der Funktion $y = \cos x$ haben.

Aufgabe 241036:
Man ermittle für jede Funktion f, die die folgenden Eigenschaften (1), (2) und (3) hat, die Funktionswerte $f(0)$, $f(-1)$ und $f(\frac{3}{7})$.
(1) Die Funktion f ist für alle reellen Zahlen definiert.
(2) Es gilt $f(1) = 2$.
(3) Für alle reellen Zahlen a und b gilt $f(a + b) = f(a) \cdot f(b)$.

Lösung von MontyPythagoras:
Wegen (3):

$$f(1+0) = f(1) \cdot f(0) \qquad ; \qquad f(0) = \frac{2}{2} = 1$$

Ebenfalls wegen (3):

$$f(0) = f(1) \cdot f(-1) \qquad ; \qquad f(-1) = \frac{f(0)}{f(1)} = \frac{1}{2}$$

Allgemein gilt:

$$f(2x) = f(x+x) = f(x)^2$$

$$f(3x) = f(2x+x) = f(2x) \cdot f(x) = f(x)^3$$

Auf diese Weise folgt allgemein weiter

$$f(nx) = f(x)^n \qquad ; \qquad f(nx)^{\frac{1}{n}} = f(x) \tag{4}$$

Wenn $nx = y$, gilt auch

$$f\left(\frac{y}{n}\right) = f(y)^{\frac{1}{n}} \tag{5}$$

Wegen (4) folgt:

$$f(k \cdot 1) = f(1)^k = 2^k$$

Zusammen mit (5):

$$f\left(\frac{k}{n} \cdot 1\right) = (2^k)^{\frac{1}{n}} = 2^{\frac{k}{n}}$$

Und somit:

$$f\left(\frac{3}{7}\right) = 2^{\frac{3}{7}}$$

Aufgabe 251032:
a) Es sei a eine beliebige positive reelle Zahl, und es sei f die im Intervall $0 \leq x \leq a$ (1) durch

$$f(x) = \sqrt{a+x} + \sqrt{a-x} \tag{2}$$

definierte Funktion.
Beweisen Sie, dass f im Intervall (1) streng monoton fallend ist!
b) Ermitteln Sie den größtmöglichen Definitionsbereich D, in dem durch (2) eine Funktion f definiert wird!
Untersuchen Sie, ob f im gesamten Bereich D streng monoton fallend ist!
Hinweis: Eine Funktion f heißt genau dann in einem Bereich B streng monoton fallend, wenn für alle reellen Zahlen x_1, x_2 in B gilt: Aus $x_1 < x_2$ folgt $f(x_1) > f(x_2)$.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Aus $0 \leq x_1 < x_2 \leq a \quad (3)$ folgt

$$x_1^2 < x_2^2 \leq a^2 \qquad \rightarrow \qquad a^2 - x_1^2 > a^2 - x_2^2 \geq 0 \qquad \rightarrow \qquad \sqrt{a^2 - x_1^2} > \sqrt{a^2 - x_2^2}$$

Multipliziert man hierin beide Seiten mit 2 und addiert $2a$, so folgt weiter

$$a + x_1 + 2\sqrt{a+x_1}\sqrt{a-x_1} + a - x_1 > a + x_2 + 2\sqrt{a+x_2}\sqrt{a-x_2} + a - x_2$$
$$(\sqrt{a+x_1} + \sqrt{a-x_1})^2 > (\sqrt{a+x_2}\sqrt{a-x_2})^2$$

Wegen $\sqrt{a+x_1} + \sqrt{a-x_1} > 0$ folgt hieraus

$$\sqrt{a+x_1} + \sqrt{a-x_1} > \sqrt{a+x_2} + \sqrt{a-x_2}$$

b) Durch (2) wird für genau diejenigen reellen Zahlen x eine Zahl $f(x)$ definiert, für die $a + x \geq 0$ und $a - x \geq 0$ gilt. Diese Bedingung ist gleichwertig mit $-a \leq x \leq a \quad (*)$.

Also gibt (*) den gesuchten größtmöglichen Definitionsbereich D an. Da beispielsweise $-a < 0$ und $f(-a) = \sqrt{2a} < 2\sqrt{a} = f(0)$ gilt, ist f in D nicht streng monoton fallend.

Aufgabe 271032:
Es sei a eine gegebene positive reelle Zahl.
Von einer Funktion f, die für alle reellen Zahlen x definiert ist, werde vorausgesetzt, dass sie die folgenden Bedingungen (1) und (2) erfüllt:
(1) Für jede reelle Zahl x gilt $f(x) + f(x+a) = 1$.
(2) Es gibt eine reelle Zahl c, so dass für alle reellen Zahlen x, die $c < x \leq c + a$ erfüllen, $f(x) > \frac{1}{2}$ gilt.
Beweisen Sie, dass aus diesen Voraussetzungen stets folgt:
Die Funktion f ist periodisch; es gibt eine kleinstmögliche Periode von f.
Ermitteln Sie diese kleinstmögliche Periode von f.
Hinweis:
Eine Funktion f heißt genau dann periodisch, wenn es eine positive reelle Zahl p gibt, so dass für alle reellen Zahlen x die Gleichung $f(x+p) = f(x)$ gilt.
Ist das der Fall, so heißt jede positive reelle Zahl p, mit der dies gilt, eine Periode von f.

Lösung von cyrix:
Es ist nach (1) für alle reellen Zahlen x die Gleichung $f(x+a) = 1 - f(x)$ gegeben, sodass für alle rellen Zahlen x die Gleichheit $f(x+2a) = 1 - f(x+a) = 1 - (1 - f(x)) = f(x)$ folgt, sodass f periodisch ist.

Wir zeigen indirekt, dass $2a$ bereits die kleinste Periode dieser Funktion ist, indem wir annehmen, dass $p < 2a$ eine weitere Periode von f wäre, also für alle x die Gleichung $f(x+p) = f(x)$ gilt.

Nach (2) gibt es eine reelle Zahl c mit $f(x) \geq \frac{1}{2}$ für alle $c < x \leq c+a$. Insbesondere ist dann $f(c+a) > \frac{1}{2}$, also nach (1) $f(c) = 1 - f(c+a) < \frac{1}{2}$, sodass $f(c) \neq f(c+p)$ für alle $0 < p \leq a$ gilt. Also muss $2a > p \geq a$ sein. Dann ist aber $0 < 2a - p \leq a$, also $f(c + 2a - p) = f(c + 2a) = f(c) < \frac{1}{2}$ im Widerspruch zu (2), da $c < c + 2a - p \leq c + a$ und damit $f(c + 2a - p) > \frac{1}{2}$ gilt.
Demnach gibt es keine Periode $p < 2a$, sodass $2a$ die kleinste Periode von f ist.

Aufgabe 281032:
Ermitteln Sie alle diejenigen Paare (f, g) von Funktionen f und g, die für alle reellen Zahlen definiert sind und die folgenden Bedingungen (1) bis (4) erfüllen!
(1) f ist eine quadratische Funktion, in deren Darstellung $y = f(x)$ der bei x^2 stehende Koeffizient

1 beträgt.
(2) Für alle reellen x gilt $f(x+1) = g(x)$.
(3) f hat genau eine reelle Nullstelle.
(4) Es gilt $g(5) = 4$.

Lösung von Steffen Polster:
Nach (1) hat die Funktion f die Gleichung $f(x) = x^2 + bx + c$ mit noch unbekannten reellen Zahlen b und c. Nach (2) wird

$$g(x) = f(x+1) = (x+1)^2 + b(x+1) + c = x^2 + (b+2)x + b + c + 1 \qquad (5)$$

Damit (3) erfüllt wird, muss der Term $x^2 + bx + c$ ein vollständiges Quadrat sein, d. h. es wird

$$0 = x^2 + bx + c = \left(x - \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4} + c \quad \Rightarrow \quad -\frac{b^2}{4} + c = 0 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{b^2}{4} \qquad (6)$$

Setzt man (6) in (5) und anschließend entsprechend (4) für $x = 5$ und den Funktionswert $g(x) = 4$ ergibt sich

$$\begin{aligned} g(x) &= x^2 + (b+2)x + \frac{b^2}{4} + b + 1 \\ g(5) &= 5^2 + (b+2)5 + \frac{b^2}{4} + b + 1 \\ 4 &= \frac{1}{4}(b^2 + 24b + 144) \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung hat die Lösungen $b_1 = -16$ und $b_2 = -8$. Rückrechnen ergibt $c_1 = 64$ und $c_2 = 16$ mit den 2 Lösungen

$$1) \qquad f(x) = x^2 - 16x + 64 \qquad ; \qquad g(x) = x^2 - 14x + 49$$
$$2) \qquad f(x) = x^2 - 8x + 16 \qquad ; \qquad g(x) = x^2 - 6x + 9$$

Die Probe bestätigt die Lösungen.

Aufgabe 301032:
Bekanntlich nennt man jede Folge von n Zahlen der Form

$$a_1 = z; \qquad a_2 = z + d; \qquad a_3 = z + 2d; \qquad a_n = z + (n-1)d \qquad (1)$$

($n \geq 1$ natürliche Zahl; z, d reelle Zahlen) eine (endliche) arithmetische Folge.
Ermitteln Sie die Anzahl aller derjenigen arithmetischen Folgen (1), in denen auch z und d natürliche Zahlen mit $z \geq 1$, $d \geq 1$ sind und für die $n \geq 3$ sowie gilt:

$$a_1 + a_2 + ... + a_n = 1991 \qquad (2)$$

Lösung von cyrix:
Es ist $11 \cdot 181 = 1991$, wobei 11 und 181 Primzahlen sind. Also hat 1991 genau die vier Teiler 1, 11, 181 und 1991.

Fall 1: Es ist n ungerade, d. h., es gibt eine natürliche Zahl $m \geq 2$ mit $n = 2m - 1$. Dann ist mit $x := z + (m-1) \cdot d$

$$a_1 = x - (m-1)d, \quad a_2 = x - (m-2)d, \quad \dots, \quad a_m = x, \quad a_{m+1} = x + d,$$
$$\dots \quad a_n = a_{m+(m-1)} = x + (m-1)d \qquad \text{und}$$

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = (x - (m-1)d) + \cdots + (x + (m-1)d) = (2(m-1)+1)x = nx$$

Insbesondere sind n und x Teiler und Gegenteiler von 1991. Da $x = z + (m-1)d > \frac{n}{2}$ gilt, entfallen die Teiler 181 und 1991 als Möglichkeiten für n, da der jeweils zugehörige Gegenteiler kleiner wäre als $\frac{n}{2}$, also auch als x. Wegen $n \geq 3$ verbleibt nur die eine Möglichkeit $n = 11$, was $181 = x = z + 5d$ bzw. $z = 181 - 5d$ bedeutet.
Damit gibt es für jedes ganzzahlige $1 \leq d \leq \frac{180}{5} = 36$ genau eine solche arithmetische Folge, da dann auch immer $z \geq 1$ eindeutig bestimmt ist. (Weitere kann es in diesem Fall nicht geben.) Also existieren in diesem Fall genau 36 Lösungen.

Fall 2: Es ist n gerade, d. h., es gibt eine natürliche Zahl $m \geq 2$ mit $n = 2m$. Dann ist für jedes $1 \leq i \leq m$,

$$a_i + a_{n+1-i} = (z + (i-1)d) + (z + (n-i)d) = 2z + (n-1)d =: x$$

also

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \cdots + (a_m + a_{m+1}) = m \cdot x$$

sodass auch hier m und x Teiler und Gegenteiler von 1991 sein müssen. Wegen $x = 2z + (n-1)d \geq 2 + (n-1) > n = 2m$ fallen für m die Teiler 181 und 1991 wieder wegen zu großem x weg und auch $m = 1$ entfällt wegen $m \geq 2$, sodass $m = 11$ und damit $181 = x = 2z + 21d$ bzw. $z = \frac{1}{2} \cdot (181 - 21d)$ folgt. Da z eine ganze Zahl ist, muss also d ungerade sein und wegen $z \geq 1$ folgt auch $1 \leq d \leq 7$, da $9 \cdot 21 = 189 > 181$ ist. Also existieren in diesem Fall genau 4 Lösungen.

Zusammen ergeben sich also genau 40 arithmetische Folgen, die den Bedingungen der Aufgabenstellung genügen.

Aufgabe 311036:
Beweisen Sie, dass es unendlich viele verschiedene Paare (f, g) von Funktionen gibt, für die die folgenden Aussagen (1), (2) und (3) gelten:
(1) Die Funktionen f und g sind für alle reellen Zahlen x definiert.
(2) Es gilt $f(0) = 1992$.
(3) Für jedes reelle x gilt $\frac{g(x) \cdot f(x+1)}{f(x)} = g(2x) + 1$.
Hinweis: Zwei Paare (f_1, g_1) und (f_2, g_2) von Funktionen, die für alle reellen Zahlen x definiert sind, sind genau dann voneinander verschieden, wenn es (mindestens) eine reelle Zahl x gibt, für die (mindestens) eine der Ungleichungen $f_1(x) \neq f_2(x)$, $g_1(x) \neq g_2(x)$ gilt.

Lösung von ochen:
Sei eine reelle $c > 0$ beliebig. Wir zeigen, dass

$$f(x) = 1992 \cdot \exp\left(x \ln\left(1 + \frac{1}{c}\right)\right), g(x) = c$$

alle Eigenschaften erfüllt. Es sind $f,g\colon \mathbb{R} \to (0,\infty)$ für alle reellen Zahlen x definiert. Weiter gilt $f(0) = 1992 \cdot \exp(0) = 1992$. Für alle reellen Zahlen x erhalten wir

$$\frac{g(x)f(x+1)}{f(x)} = \frac{c \cdot 1992 \cdot \exp\left((x+1)\ln\left(1+\frac{1}{c}\right)\right)}{1992 \cdot \exp\left(x \ln\left(1+\frac{1}{c}\right)\right)} = \frac{c \cdot \exp\left(x \ln\left(1+\frac{1}{c}\right)\right) \cdot \exp \ln\left(1+\frac{1}{c}\right)}{\exp\left(x\ln\left(1+\frac{1}{c}\right)\right)} =$$

$$= c \cdot \left(1 + \frac{1}{c}\right) = c + 1 = g(2x) + 1.$$

Da es unendlich viele unterschiedliche reelle Zahlen $c > 0$ gibt, existieren unendlich viele verschiedene Paare (f,g) mit den gewünschten Eigenschaften.

IV Runde 4

Aufgabe 081042:
Gegeben seien zwei reelle Zahlen a und b mit $a \neq b$ und $ab > 0$. Man untersuche, ob für

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \quad \text{der Ausdruck} \quad s = \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}$$

existiert! Ist dies der Fall, so drücke man s weitgehend vereinfacht durch a und b aus, in diesem Falle rational!

Lösung von cyrix:
Wegen $ab > 0$ sind a und b entweder beide positiv oder beide negativ, also die Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{b}{a}$ in jedem Falle positiv. Dann ist deren Summe wegen $a \neq b$ echt größer als 2 und $x > 1$, sodass $\sqrt{x-1}$ definiert ist. Aufgrund der strengen Monotonie der Wurzel-Funktion ist auch $\sqrt{x+1} > \sqrt{x-1}$, sodass der Nenner von s nie verschwindet und dieser Term also für jede solche Wahl von a und b wohldefiniert ist.

Zur Vereinfachung von s erweitern wir den Bruch mit $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}$ und erhalten

$$s = \frac{\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}\right)^2}{\sqrt{x+1}^2 - \sqrt{x-1}^2} = \frac{x+1+2\sqrt{x^2-1}+x-1}{x+1-x+1} = \frac{2x+2\sqrt{x^2-1}}{2} = x + \sqrt{x^2-1}$$

Dabei ist

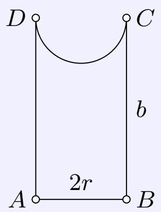
$$x^2 - 1 = \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^2 - 1 = \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{a^2}{b^2} + 2 + \frac{b^2}{a^2} - 4\right) = \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)^2$$

Setzt man dies ein, erhält man

$$s = x + \sqrt{x^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \frac{1}{2}\left|\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right|$$

Ist $|a| > |b|$, so ist die Differenz im Betrag positiv und man erhält $s = \frac{a}{b}$, andernfalls ist sie negativ und man erhält $s = \frac{b}{a}$.

Aufgabe 101043B:
Die Abbildung zeigt ein Flächenstück, das aus der Fläche des Rechtecks $ABCD$ mit den Seitenlängen $AB = CD = 2r$ und $BC = AD = b$, $b > r$, durch Herausschneiden einer Halbkreisscheibe mit dem Durchmesser CD entstanden ist.
Man denke sich nun eine positive reelle Zahl F beliebig gegeben. Dann sind alle geordneten Paare (r, b) positiver reeller Zahlen mit $r < b$ zu ermitteln, für die das entsprechende Flächenstück den Inhalt F und dabei möglichst kleinen Umfang hat.



Lösung von cyrix:
Der Umfang u des Flächenstücks ermittelt sich zu $u = 2b + 2r + \pi r = 2b + (2+\pi)r$ und sein Flächeninhalt zu $F = b\cdot 2r - \frac{1}{2}\pi r^2$. Damit ist $2b = \frac{F}{r} + \frac{\pi}{2}r$. Einsetzen liefert $u = \frac{F}{r} + \left(2 + \frac{3}{2}\cdot\pi\right)\cdot r$.

Fasst man u als Funktion von r auf, ergibt sich $u'(r) = -\frac{F}{r^2} + \left(2 + \frac{3}{2}\cdot\pi\right)$. Diese Funktion besitzt die einzige Nullstelle $r_0 = \sqrt{\frac{F}{2+\frac{3}{2}\cdot\pi}}$. Es ist wegen $F > 0$ die Funktion u' streng monoton wachsend für $r > 0$.

Insbesondere ist also $u'(r)$ negativ und $u(r)$ streng monoton fallend für $0 < r < r_0$ sowie $u'(r)$ positiv und $u(r)$ streng monoton wachsend für $r > r_0$. Damit hat also u nicht nur ein lokales, sondern auch sein globales Minimum an der Stelle r_0. Es ergibt sich

$$b_0 = \frac{F}{2r_0} + \frac{\pi}{4} r_0 = \frac{F}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\frac{3}{2}\cdot\pi}}{\sqrt{F}} + \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\sqrt{F}}{\sqrt{2+\frac{3}{2}\cdot\pi}} = \frac{\sqrt{F}}{\sqrt{2+\frac{3}{2}\cdot\pi}} \cdot (1+\pi) = r_0 \cdot (1+\pi)$$

und damit das gesuchte Lösungspaar $(r,b) = (r_0, (1+\pi)r_0)$ mit $r_0 = \sqrt{\frac{F}{2+\frac{3}{2}\cdot\pi}}$.

Bemerkung: Der Umfang ergibt sich dann zu $u_0 = 2b_0 + (2+\pi)r_0 = (4+3\pi)r_0 = 2 \cdot \left(2 + \frac{3}{2} \cdot \pi\right) \cdot r_0 = 2\sqrt{F} \cdot \sqrt{2+\frac{3}{2}\cdot\pi} = 2 \cdot \frac{F}{r_0}$.

Aufgabe 101044:
Man gebe alle quadratischen Funktionen $f(x)$ an, die für alle reellen x die Gleichung $f(x+1) = f(-x)$ erfüllen.

Lösung von cyrix:
Sei $f(x)$ die quadratische Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$mit $a \neq 0$. Dann ist die Bedingung der Aufgabenstellung äquivalent zur Aussage, dass für alle reellen Zahlen x die Gleichung

$$a(x+1)^2 + b(x+1) + c = a \cdot (-x)^2 + b \cdot (-x) + c \qquad \text{also}$$

$$ax^2 + (2a+b)x + (a+b+c) = ax^2 + (-b) \cdot x + c$$

bzw. $(2a+2b)x + (a+b) = 0$. Da dies für alle reellen Zahlen x gelten soll, muss $2a+2b = 0$, also $b = -a$ gelten.
Tatsächlich erfüllen auch alle quadratischen Funktionen $f(x) = ax^2 - ax + c$ mit beliebigen, reellen Zahlen $a \neq 0$ und c die gewünschte Gleichung, denn es gilt

$$f(x+1) = a(x+1)^2 - a(x+1) + c = a(x+1)(x+1-1) + c = a(x+1)x + c = a(x^2+x) + x =$$

$$= a(-x)^2 - a(-x) + c = f(-x)$$

Aufgabe 121044:
In einer Ebene mit rechtwinkligen kartesischen Koordinaten (x,y) sei k der Graph der Funktion mit der Gleichung $y = \frac{1}{4}x^2$ und g der Graph der Funktion mit der Gleichung $y = -1$.
Der Definitionsbereich beider Funktionen sei die Menge aller reellen Zahlen x.
Man beweise, dass k die Menge aller derjenigen Punkte der x-y-Ebene ist, die von der Geraden g denselben Abstand haben wie von dem Punkt $F(0;1)$!

Lösung von cyrix:
Es sei $P(s;t)$ ein beliebiger Punkt der Ebene. Sein Abstand von der Geraden g erhält man leicht als $|t-(-1)| = |t+1|$, da der Fußpunkt des Lots von P auf g die Koordinaten $(s;-1)$ besitzt. (Es ist g parallel zur x-Achse, also jede dazu senkrechte Gerade – wie etwa das Lot von P auf diese Gerade – parallel zur y-Achse, sodass auf dieser Senkrechten dann alle Punkte die gleiche x-Koordinate besitzen.)

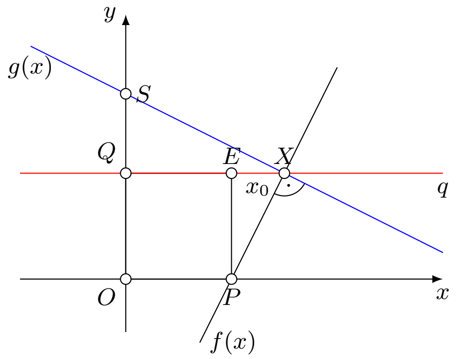
Und der Abstand von P und F ergibt sich durch Anwenden des Satzes von Pythagoras (man zeichne ggf. Parallelen zur x- und y-Achse durch F und P ein, um das entsprechende rechtwinklige Dreieck zu sehen) zu $\sqrt{(s-0)^2 + (t-1)^2} = \sqrt{s^2 + (t-1)^2}$.

Der Punkt P hat also genau dann denselben Abstand von g wie von F, wenn $|t+1| = \sqrt{s^2 + (t-1)^2}$ bzw. $(t+1)^2 = s^2 + (t-1)^2$, also $s^2 = (t+1)^2 - (t-1)^2 = 4t$ und schließlich $t = \frac{1}{4}s^2$ gilt.
Die Menge der Punkte, für die die y-Koordinate ein Viertel des Quadrats der x-Koordinate ist, wird genau durch den Graphen k angegeben, was das zu Zeigende beweist.

Aufgabe 131043A:
a) Beweisen Sie, dass man zu gegebenem reellen x_0 die Zahl $x_0^2 + x_0 + 1$ nach der folgenden Methode grafisch ermitteln kann!
Man konstruiert in einem rechtwinkligen Koordinatensystem mit dem Anfangspunkt O dasjenige Quadrat $OPEQ$, für das E die Koordinaten $(1;1)$ hat und Q, E auf einer Parallelen q zur x-Achse liegen.
Auf q zeichnet man einen Punkt X so, dass die gerichtete Strecke EX die Länge x_0 hat, unter Berücksichtigung des Vorzeichens von x_0. Im Punkt X errichtet man auf der Geraden durch P und X die Senkrechte; sie schneidet die y-Achse in einem Punkt Y. Dann hat Y die zu ermittelnde Zahl $x_0^2 + x_0 + 1$ als Ordinate.

b) Beweisen Sie mit diesem grafischen Verfahren, dass die durch $f(x) = x^2 + x + 1$ für alle reellen x definierte Funktion f keine reelle Nullstelle hat!

Lösung von Steffen Polster:



Die Darstellung des Koordinatensystems zeigt die Aufgabenstellung für einen o. B. d. A. gewählten reellen Wert $x_0 = \frac{1}{2}$.
Die lineare Funktion $f(x)$ sei die durch die Punkte P und X verlaufende Funktion. Für ein beliebiges reelles x_0 ($x_0 \neq 0$) ergibt sich als Anstieg der Funktion $m_{f(x)} = \frac{1}{x_0}$ und die Funktionsgleichung

$$f(x) = \frac{1}{x_0} \cdot x + 1 - \frac{1}{x_0}$$

Die zu $f(x)$ im Punkt X senkrechte lineare Funktion sei $g(x)$. Deren Anstieg ist $m_{g(x)} = \frac{1}{m_{f(x)}} = -x_0$.

Einsetzen der Koordinaten des Punktes $X(1+x_0;1)$ in die Gleichung $g(x) = -x_0 \cdot x + n$ ergibt für n:

$$n = 1 + x_0 + x_0^2 \quad \Rightarrow \quad g(x) = -x_0 \cdot x + 1 + x_0 + x_0^2$$

n ist die Ordinate des Schnittpunktes S der Senkrechten in X zu $f(x)$ mit der Ordinatenachse.
Für den Fall $x_0 = 0$ schneidet die Senkrechte in X zu PX die Ordinatenachse in $(0;1)$, was ebenfalls der Behauptung entspricht. w. z. b. w.

b) Angenommen $f(x) = 1+x+x^2$ hätte eine reelle Nullstelle x_0, so müsste nach a) der Schnittpunkt S für x_0 eine Ordinate gleich 0, d. h. $S(0;0)$, besitzen. Für die Lage des Punktes X existieren drei Möglichkeiten:

1. Fall: X liegt rechts von E, d. h. $x_0 > 0$
In diesem Fall hat die Gerade durch P und X einen positiven Anstieg m. Die dazu Senkrechte durch X hat einen negativen Anstieg. Da X im 1. Quadranten liegt und $y_X > 0$ ist, kann die Senkrechte nie durch den Koordinatenursprung verlaufen. Für ein $x_0 > 0$ hat $f(x)$ keine Nullstelle.

2. Fall: X liegt auf E, d. h. $x_0 = 0$
Wie schon in a) gezeigt, verläuft die Senkrechte durch X zu PX durch $S(0;1)$. Also liegt auch hier keine Nullstelle vor.

3. Fall: X liegt links von E, d. h. $x_0 < 0$

Für $x_0 < -1$ ist X im 2. Quadranten. Die durch X verlaufende Gerade, senkrecht zu PX, hat einen positiven Anstieg, womit sie nicht durch den Ursprung verlaufen kann.
Für $x_0 = -1$ ist X auf der Ordinatenachse und der Schnittpunkt S gleich $Q(0;1)$. Auch hier liegt folglich keine Nullstelle von $f(x)$ vor.

Für $-1 < x_0 < 0$ beträgt der Anstieg der Geraden durch X und P nach a) $m = \frac{1}{x_0}$. Die Senkrechte dazu durch X hat somit einen Anstieg $-x_0$. Da $-1 < x_0 < 0$ ist, entspricht diesem Anstieg $-x_0$ (> 0) ein Anstiegswinkel kleiner als $45°$ $(\tan 45° = 1)$.
Jede Gerade durch X und den Ursprung, mit X links von E und $x_X > 0$, hat aber einen Anstieg größer $45°$. Damit kann die Senkrechte durch X zu PX auch hier nicht durch den Ursprung verlaufen.
Jede Möglichkeit der Wahl eines reellen x_0 führt zu einem Widerspruch. $f(x) = 1 + x + x^2$ hat keine reelle Nullstelle. w. z. b. w.

Aufgabe 141045:
In einem Klub Junger Mathematiker gibt es Streit um das Monotonieverhalten von Funktionen. Bekannt ist von zwei Funktionen f und g, dass beide für alle reellen Zahlen x definiert sind, f im gesamten Definitionsbereich streng monoton wächst, und dass die Gleichung $g(x)^2 - f(x)^2 = 1$ für alle x erfüllt ist.
Annemarie folgert nun daraus: „Dann ist auch g eine auf dem gesamten Definitionsbereich streng monoton wachsende Funktion."
Brigitte widerspricht: „Es lässt sich nur schließen, dass g im gesamten Definitionsbereich entweder streng monoton wachsend oder streng monoton fallend ist."
Christa meint: „Ihr habt beide nicht recht."
Wer von diesen Schülern hat nun recht?

Anmerkung: Eine Funktion f wird genau dann streng monoton wachsend bzw. fallend in einem Intervall bezeichnet, wenn für alle Zahlen x_1, x_2 aus diesem Intervall, für die $x_1 < x_2$ gilt, die Ungleichung $f(x_1) < f(x_2)$ bzw. $f(x_1) > f(x_2)$ gilt.

Lösung von Nuramon:
Christa hat recht.
Ist zum Beispiel $f(x) = x$ und $g(x) = \sqrt{1 + x^2}$, so ist f streng monoton wachsend und es gilt $g(x)^2 - f(x)^2 = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
Aber $g(x)$ ist weder streng monoton wachsend, noch streng monoton fallend, denn $g(-1) = g(1)$, obwohl $-1 < 1$ ist.

Aufgabe 151043B:
In einer Ebene mit den rechtwinkligen kartesischen Koordinaten $(x; y)$ seien die Punkte $F_1(\sqrt{2}; \sqrt{2})$ und $F_2(-\sqrt{2}; -\sqrt{2})$ sowie der Graph k derjenigen Funktion f gegeben, die für alle reellen $x \neq 0$ durch $f(x) = \frac{1}{x}$ definiert ist.
Man beweise:
Es gibt eine Zahl c, so dass k in der xy-Ebene die Menge aller derjenigen Punkte der xy-Ebene ist, für die der Betrag der Differenz der Abstände zu den Punkten F_1 und F_2 gleich c ist. Man ermittle diese Zahl c!

Lösung von MontyPythagoras:
Ein Punkt auf dem Graphen k sei gegeben durch die Koordinate $(x, \frac{1}{x})$. Der Abstand d_1 zum Punkt F_1 ist:

$$d_1 = \sqrt{\left(x - \sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{x} - \sqrt{2}\right)^2}$$

Wurzelausdruck vereinfachen:

$$d_1 = \sqrt{x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 + \frac{1}{x^2} - 2\frac{\sqrt{2}}{x} + 2} = \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2} + 4 - 2\sqrt{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)}$$

Wir substituieren:

$$A = x^2 + \frac{1}{x^2} + 4 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 2 \qquad ; \qquad B = 2\sqrt{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

so dass gilt:

$$d_1 = \sqrt{A - B}$$

In analoger Weise erhält man

$$d_2 = \sqrt{A + B}$$

Es muss nun gelten:

$$|\sqrt{A + B} - \sqrt{A - B}| = c$$

Quadrieren:

$$A + B + A - B - 2\sqrt{(A + B)(A - B)} = c^2$$

$$c^2 = 2A - 2\sqrt{A^2 - B^2}$$

Es ist

$$A^2 - B^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^4 + 4\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 4 - 8\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = A^2 - B^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^4 - 4\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 4$$

$$A^2 - B^2 = \left(\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2\right)^2$$

Da $(x + \frac{1}{x})^2 \geq 4$, folgt:

$$\sqrt{A^2 - B^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2$$

und somit:

$$c^2 = 2\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 4 - 2\left(\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2\right) = 8$$

Also ist die gesuchte Zahl $c = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

Aufgabe 151046:
Es sei f eine für alle reellen Zahlen x definierte Funktion. Vorausgesetzt werde, dass f nullstellenfrei ist, d. h., dass keine reelle Zahl x mit $f(x) = 0$ existiert.
Untersuchen Sie, ob aus dieser Voraussetzung folgt, dass auch die durch $F(x) = f(2x) + f(3x)$ für alle reellen Zahlen x definierte Funktion F nullstellenfrei ist!

Lösung von Kornkreis:
Dies gilt nicht, was man an folgendem Gegenbeispiel sieht:
Wähle $f(x) = 1$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ und $f(2) = -1$. Dann erfüllt f die Bedingungen der Aufgabenstellung, aber es ist $F(1) = f(2) + f(3) = -1 + 1 = 0$.

Aufgabe 181043A:
Es sei a eine positive, von 1 verschiedene reelle Zahl. Ferner sei f die für alle reellen Zahlen x durch

$$f(x) = \frac{1}{2}(a^x - a^{-x})$$

definierte Funktion.
Man beweise, dass f eine für alle reellen Zahlen definierte Funktion g als Umkehrfunktion besitzt, und ermittle diese Funktion g!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es sei y eine beliebige reelle Zahl. Für x gelte die Gleichung

$$\frac{1}{2}(a^x - a^{-x}) = y \qquad (1)$$

Durch Multiplikation mit a^x erhalten wir eine quadratische Gleichung in $t = a^x > 0$:

$$t^2 - 2yt - 1 = 0$$

Diese hat die Lösungen

$$t_1 = y + \sqrt{y^2+1} \qquad \text{und} \qquad t_2 = y - \sqrt{y^2+1}$$

Nun ist $y - \sqrt{y^2+1} << 0$ im Widerspruch zu $t = ax > 0$. Daher gilt

$$a^2 = y + \sqrt{y^2+1} \qquad \text{bzw.} \qquad x = \log_a(y + \sqrt{y^2+1})$$

Damit ist für beliebiges reelles y ein reelles x eindeutig bestimmt, denn es ist

$$\sqrt{y^2+1} > |y| \geq -y \qquad \text{und somit} \qquad y + \sqrt{y^2+1} > 0$$

so dass $\log_a(y + \sqrt{y^2+1})$ als reelle Zahl definiert ist. Diese reelle Zahl x erfüllt auch die Gleichung (1). Die Funktion $f(x)$ besitzt also eine Umkehrfunktion und dies ist

$$g(y) = \log_a(y + \sqrt{y^2+1})$$

Aufgabe 191041:
Es seien a, b, c und d beliebig gegebene reelle Zahlen. f und g seien die für alle reellen x durch

$$f(x) = c \cdot 10^{ax} \qquad , \qquad g(x) = 10^{bx+d}$$

definierten Funktionen.
Ermitteln Sie (jeweils zu gegebenen a, b, c, d) alle diejenigen Punkte, die der Graph von f mit dem Graph von g gemeinsam hat!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Gegeben sind die reellen Zahlen a, b, c, d. Die Graphen von f und g haben genau dann den Punkt mit dem Koordinatenpaar (x_0,y_0) gemeinsam, wenn

$$y_0 = c \cdot 10^{ax_0} = 10^{bx_0+d} \qquad (1)$$

gilt.
I. (Analyse) Angenommen, es gäbe ein Paar (x_0, y_0), das (1) erfüllt.
Im Fall $c \leq 0$ ist dies wegen $10^{ax_0} > 0$, und $10^{bx_0+d} > 0$ unmöglich, und somit die Annahme falsch.
Im Fall $c > 0$ existiert $\lg c$, und aus (1) ergibt sich

$$10^{ax_0+\lg c} = 10^{bx_0+d} \qquad (2)$$

Hieraus folgt (wegen der eindeutigen Umkehrbarkeit der Exponentialfunktion)

$$ax_0 + \lg c = bx_0 + d \qquad (3)$$

Im Unterfall $a \neq b$ folgt weiter

$$x_0 = \frac{d - \lg c}{a - b} \qquad (4)$$

so dass höchstens das Paar $(x_0, c \cdot 10^{ax_0})$ mit x_0 aus (4) die Gleichungen (1) erfüllen kann.
Ist aber $a = b$ und auch noch $\lg c \neq d$, so stellt (3) einen Widerspruch dar, d. h., die eingangs gemachte Annahme ist falsch.

II. (Synthese, „Probe")
Im Fall $c > 0, a = b, \lg c = d$ ist die Gleichung (2) für beliebiges x_0 erfüllt, so dass die Paare (x_0, y_0), x_0 beliebig reell und $y_0 = c \cdot 10^{ax_0}$, die Gleichungen (1) erfüllen.
Im Fall $c > O, a \neq b$ stellen die Übergänge von der rechten Gleichung (1) über (2), (3) nach (4) äquivalente Umformungen dar, so dass das Paar (x_0, y_0), x_0 aus (4) und $y_0 = c \cdot 10^{ax_0}$ die Gleichungen (1) erfüllt.

III. Ergebnis:
Im Fall $c \leq 0$ und im Fall $c > 0$, $a = b$, $ßlgc \neq d$ haben die Graphen von f und g keinen gemeinsamen Punkt.
Im Fall $c > 0$, $a = b$, $\lg c = d$ haben die Graphen von f und g die Punkte mit den Koordinatenpaaren $(x, c \cdot 10^{ax})$, x beliebig reell, gemeinsam (die Graphen fallen zusammen).
Im Fall $c > 0$, $a \neq b$ haben die Graphen von f und g genau den Punkt mit dem Koordinatenpaar $(x_0, c \cdot 10^{ax_0})$, x_0 aus (4), gemeinsam.

Aufgabe 201045:
Tausend reelle Zahlen $x_1, x_2, ..., x_{1000}$ seien durch die Festsetzung bestimmt, dass $x_1 = 5$ und für alle $n = 1, 2, ..., 999$

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 16}{2x_n}$$

gelten soll.
Beweisen Sie, dass (nach diesen Festsetzungen) für jedes $n = 1, 2, ..., 1000$ die Ungleichung $4 \leq x_n \leq 5$ gilt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die endliche Folge $\{x_1, ..., x_{1000}\}$ ist induktiv vorgegeben, indem das erste Glied und jedes weitere Glied mit Hilfe des vorhergehenden angegeben wird:

$$x_1 = 5 \quad \text{und} \quad x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 16}{2x_n}$$

$(n = 1, ..., 999)$. Diese Vorgabe in der Aufgabe setzt stillschweigend voraus, dass stets $x_n \neq 0$ ist.
Zum Beweis der Behauptung $4 \leq x_n \leq 5$ für alle $n = 1, ..., 1000$ bietet sich damit die Methode der vollständigen Induktion an, wobei dann diese Ungleichung sogar für jede natürliche Zahl n bewiesen werden kann.

a) Beweis von $x \geq 4$.
Wir zeigen die Verschärfung $x_n > 4$. Für $n = 1$ gilt diese Behauptung wegen $x_1 = 5 > 4$. Es sei jetzt $x_k > 4$. Dann ergibt sich für das folgende Glied x_{k+1} ebenfalls

$$x_{k+1} = \frac{x_k^2 + 16}{2x_k} = \frac{(x_k - 4)^2}{2x_k} + 4 > 4$$

Demnach gilt $x_n > 4$ für alle natürlichen Zahlen.

b) Beweis von $x_n \leq 5$.

Aus $x_n > 4$ folgt $x_n^2 + 16 < 2x_n^2$ und damit weiter

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 16}{2x_n} < x_n$$

d. h., die Folgt x_n ist streng monoton fallend. Wegen $x_1 = 5$ gilt dann sogar $x_n < 5$ für alle natürlichen Zahlen $n > 1$.

Aufgabe 211043A:
In einem Mathematikzirkel wird über nichtkonstante Funktionen diskutiert, die für alle reellen Zahlen definiert sind und deren Funktionswerte wieder reelle Zahlen sind.
Sind f und g zwei solche Funktionen, so kann man die Funktion F für alle reellen x durch $F(x) = f(g(x))$ definieren.
Die Diskussion beschäftigt sich mit der Frage, ob derartige Funktionen f, g, F periodisch sind.
(Bekanntlich heißt eine Funktion ρ genau dann periodisch, wenn eine reelle Zahl $p > 0$ so existiert, dass für alle x die Gleichung $\rho(x + p) = \rho(x)$ gilt.)
Jens behauptet: Ist g eine periodische Funktion (und f periodisch oder nicht), so ist auch stets die - wie oben erklärte - Funktion F periodisch.
Dirk behauptet: Ist f eine periodische Funktion (und g periodisch oder nicht), so ist auch stets die Funktion F periodisch.
Christa behauptet: Sind beide Funktionen f und g nicht periodisch, so ist auch stets F nicht periodisch.
Untersuchen Sie für jeden dieser drei Schüler, ob er damit eine wahre oder eine falsche Aussage gemacht hat!

Lösung von cyrix:
Jens hat Recht, während Dirk und Christa falsch liegen:
zu Jens: Ist g eine periodische Funktion mit Periode p, dann gilt für alle reellen x auch $F(x + p) = f(g(x + p)) = f(g(x)) = F(x)$, sodass auch F mit der gleichen Periode wie g periodisch ist.

zu Dirk: Es sei $f(x) = \sin(x)$ eine periodische Funktion und $g(x) = 0$ für alle $x \neq 0$ sowie $g(0) = \frac{\pi}{2}$. (Dann ist g eine nichtkonstante Funktion.) Damit ist aber $F(x) = f(g(x)) = \sin(0) = 0$ für alle $x \neq 0$ und $F(0) = f(g(0)) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, sodass es keine reelle Zahl $p > 0$ geben kann, die $F(x+p) = F(x)$ für alle x erfüllt, denn zumindest für $x = 0$ gilt immer $F(0 + p) = F(p) = 0 \neq 1 = F(0)$.

zu Christa: Es sei $g(x)$ wie bei Dirk definiert und $f(x) = g(x - 1)$ für alle reellen Zahlen x. Dann sind (in analoger Weise wie bei der Betrachtung von F bei Dirk) beide Funktionen f und g nichtkonstant und nicht periodisch, erfüllen also Christas Voraussetzung. Weiterhin ist für alle rellen Zahlen $x \neq 0$ dann $F(x) = f(g(x)) = f(0) = g(-1) = 0$ und

$$F(0) = f(g(0)) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = g\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = 0$$

sodass für alle reellen Zahlen x und p die Gleichung $F(x + p) = 0 = F(x)$ gilt, also F periodisch (mit beliebiger Periodenlänge p) ist.

Aufgabe 231043B:
a) Geben Sie eine für alle reellen Zahlen definierte Funktion f an, die für alle reellen Zahlen x die Eigenschaft

$$f(x + 1) = f(x) + (-1)^{[f(x)]} \tag{1}$$

hat!
Dabei bezeichnet, wenn z eine reelle Zahl ist, $[z]$ diejenige ganze Zahl $[z] = g$, für die $g \leq z \leq g + 1$ gilt.

Beweisen Sie, dass die von Ihnen angegebene Funktion f die Eigenschaft (1) hat!
Zeichnen Sie den Graphen dieser Funktion f im Intervall aller x, für die $-3 \leq x \leq 3$ ist!
b) Beweisen Sie, dass jede Funktion f mit der Eigenschaft (1) periodisch mit der Periode 2 sein muss, d. h., dass sie für jedes reelle x die Gleichung $f(x+2) = f(x)$ erfüllt!

Lösung von cyrix:
a) Es sei die Funktion f definiert als $f(x) := [x] \pmod 2 := [x] - 2 \cdot \left[\frac{[x]}{2}\right]$. Dann ist $f(x)$ gleich 0, wenn $[x]$ gerade ist und 1, wenn $[x]$ ungerade ist. Diese Funktion ist offenbar für alle reellen Zahlen x definiert.
Wir führen zum Nachweis von (1) eine Fallunterscheidung durch:

1. Fall: $[x]$ ist gerade.
Dann ist $f(x) = 0$, $[x+1]$ ungerade, $f(x+1)$ also 1 und damit auch $f(x+1) = 1 = 0 + (-1)^0 = f(x) + (-1)^{[f(x)]}$.

2. Fall: $[x]$ ist ungerade.
Dann ist $f(x) = 1$, $[x+1]$ gerade, $f(x+1)$ also 0 und damit auch $f(x+1) = 0 = 1 + (-1)^1 = f(x) + (-1)^{[f(x)]}$.

Also erfüllt die angegebene Funktion f die Bedingung (1). Sie ist stückweise konstant, immer genau 0 in jedem Intervall $[2n, 2n+1)$ und immer genau 1 in jedem Intervall $[2n+1, 2n+2)$ für jede ganze Zahl n.

b) Sei f eine Funktion, die die Bedingung (1) erfüllt. Es ist dann für jedes x der Wert

$$[f(x+1)] = [f(x)] + (-1)^{[f(x)]} = [f(x)] \pm 1$$

sodass $[f(x+1)]$ und $[f(x)]$ niemals gleiche Parität haben können, d. h., von diesen beiden Werten ist immer genau einer gerade und genau einer ungerade.
Damit ist für jedes x der Term

$$(-1)^{[f(x+1)]} + (-1)^{[f(x)]} = (-1) + 1 = 0$$

wobei die -1 durch den ungeraden und die 1 durch den geraden Exponenten erzeugt wird.
Also ist für alle x

$$f(x+2) = f(x+1) + (-1)^{[f(x+1)]} = f(x) + (-1)^{[f(x)]} + (-1)^{[f(x+1)]} = f(x), \square$$

Aufgabe 241043A:
a) Man beweise, dass für jede reelle Zahl p mit $1 \leq p \leq 2$ eine Funktion f mit den folgenden Eigenschaften (1), (2), (3) existiert:
(1) Die Funktion f ist für alle reellen Zahlen definiert.
(2) Für alle reellen Zahlen x mit $2 \leq x < 4$ gilt $f(x) = p$.
(3) Für alle reellen Zahlen x gilt $f(x+2) = \frac{f(x)}{5 \cdot f(x) - 1}$.

b) Man ermittle für jede reelle Zahl p mit $1 \leq p \leq 2$ und jede Funktion f, die die Eigenschaften (1), (2), (3) hat, den Funktionswert $f(1985)$ in Abhängigkeit von p.

Lösung von MontyPythagoras:
a) Wegen (3) gilt:

$$f(x) = \frac{f(x-2)}{5f(x-2) - 1}$$

$$5f(x-2)f(x) - f(x) = f(x-2)$$

$$5f(x-2)f(x) - f(x-2) = f(x)$$
$$f(x-2)(5f(x)-1) = f(x)$$
$$f(x-2) = \frac{f(x)}{5f(x)-1} = f(x+2)$$

Die Funktion ist also periodisch mit der Periodenlänge 4, sie ist wegen (2) definiert auf $[2;4[$. Durch (3) ist sie auch auf $[4;6[$ definiert, wenn

$$p' = \frac{p}{5p-1}$$

eine reelle Zahl ergibt. Das ist für alle $p \neq \frac{1}{5}$ der Fall. Da laut Aufgabenstellung $1 \leq p \leq 2$, ist die Funktion auf dem Intervall $[2;6[$ definiert, und damit wegen der Periodizität auf ganz $\mathbb{R}$.

b) Wegen der Periodizität gilt $f(1985) = f(5)$. Es ist $f(3) = p$, und daher

$$f(1985) = f(3+2) = \frac{p}{5p-1}$$

Aufgabe 251046:
Es sei $F = (a_1, a_2, a_3, ...)$ diejenige unendliche Folge natürlicher Zahlen, die durch die Festsetzungen (1), (2) definiert ist:
(1) Die ersten vier Glieder der Folge F lauten $a_1 = 1$, $a_2 = 9$, $a_3 = 8$, $a_4 = 6$; sie bilden also die Teilfolge $(1, 9, 8, 6)$.
(2) Für jedes $n \geq 5$ ist a_n die Einerziffer der Summe der vier Glieder, die dem Glied a_n in der Folge F unmittelbar vorangehen.
Man untersuche, ob es in der Folge F außer der Teilfolge (a_1, a_2, a_3, a_4) noch eine weitere Teilfolge gibt, die aus vier unmittelbar aufeinanderfolgenden Gliedern von F besteht und $(1, 9, 8, 6)$ lautet.

Lösung von cyrix:
Wir zeigen im Folgenden, dass die Folge (rein)periodisch ist, dass also unendlich oft die Sequenz (1,9,8,6) in der Folge wiederholt auftritt:

Für jedes $n \geq 1$ betrachten wir das Quadrupel $q_n := (a_n,a_{n+1},a_{n+2},a_{n+3})$. Da alle Folgenglieder nach Definition Ziffern sind, kann es höchstens 10^4 verschiedene solcher Quadrupel geben. Also muss es nach spätestens $10^4 + 1$ Folgengliedern ein Quadrupel wiederholt erscheinen.
Sei also $q_m = q_n$ mit $m > n$, also $q_{m+i} = q_{n+i}$ für $i =$ 0,1,2,3. Dann ist aber auch $q_{m+4} = q_{n+4}$, da sich beide als Einerziffer der Summe $q_m + q_{m+1} + q_{m+2} + q_{m+3} = q_n + q_{n+1} + q_{n+2} + q_{n+3}$ berechnen. Analog folgt induktiv für alle natürlichen $k \geq 0$, dass $a_{m+k} = a_{n+k}$ gilt, sodass die Folge F ab a_n periodisch mit Periodenlänge $m - n$ (bzw. eines Teilers davon) ist.

Umgekehrt lässt sich aber auch aus vier aufeinanderfolgenden Folgengliedern das davor liegende (sofern existent) eindeutig berechnen: Es ist a_{m-1} die eindeutig bestimmte Ziffer, für die die Summe $a_{m-1} + a_m + a_{m+1} + a_{m+2}$ die Einerziffer a_{m+3} besitzt. Stimmen aber q_m und q_n überein, gilt also, wie oben, $a_{m+i} = a_{n+i}$ für $i =$ 0,1,2,3, so muss also auch $a_{m-1} = a_{n-1}$ gelten, sofern $n > 1$ ist. Induktiv folgt nun für jedes natürliche k mit $k < n$, dass auch $a_{m-k} = a_{n-k}$ ist.

Insbesondere ist dann für jedes natürliche ℓ

$$a_{\ell\cdot(m-n)+1} = a_{m-n+1} = a_1 = 1 \qquad , \qquad a_{\ell\cdot(m-n)+2} = a_{m-n+2} = a_2 = 9$$
$$a_{\ell\cdot(m-n)+3} = a_{m-n+3} = a_3 = 8 \qquad \text{und} \qquad a_{\ell\cdot(m-n)+4} = a_{m-n+4} = a_4 = 6$$

sodass sich die Teilfolge (1,9,8,6) in F unendlich oft wiederholt, $\square$.

Aufgabe 271042:
Es sei f eine Funktion, die für alle reellen Zahlen x definiert ist und für alle reellen Zahlen x_1, x_2 die folgenden Gleichungen erfüllt:

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1^3) + f(x_2^3) \qquad (1)$$
$$f(x_1 \cdot x_2) = x_1 \cdot f(x_2) + x_2 \cdot f(x_1) \qquad (2)$$

Beweisen Sie, dass durch diese Voraussetzungen der Funktionswert $f(2+\sqrt{5})$ eindeutig bestimmt ist, und ermitteln Sie diesen Funktionswert!

Lösung von cyrix:
Wir beweisen zuerst ein
Lemma: Ist für zwei reelle Zahlen x_1 und x_2 gegeben, dass $f(x_1) = f(x_2) = 0$ ist, so ist auch $f(x_1 \cdot x_2) = 0$.

Beweis: Es ist nach (2) $f(x_1 \cdot x_2) = x_1 \cdot f(x_2) + x_2 \cdot f(x_1) = x_1 \cdot 0 + x_2 \cdot 0 = 0$, $\square$.

Zur eigentlichen Aufgabe:
Es ist mit $x_1 = x_2 = 1$ nach (2) $f(1) = f(1 \cdot 1) = 1 \cdot f(1) + 1 \cdot f(1) = 2 \cdot f(1)$, also $f(1) = 0$.
Mit gleichen Werten für x_1 und x_2 folgt damit aus (1), dass

$$f(2) = f(1+1) = f(1^3) + f(1^3) = f(1) + f(1) = 0$$

ist. Nach dem Lemma folgt nun sukzessive, dass für alle positiven ganzen Zahlen n auch $f(2^n) = 0$ ist. Insbesondere ist $f(4) = 0$ und $f(4^3) = 0$.
Nach (1) ist dann mit $x_1 = 4$ und $x_2 = 1$ auch $f(5) = f(4+1) = f(4^3) + f(1^3) = 0 + 0 = 0$.
Nach (2) ist mit $x_1 = x_2 = \sqrt{5} \neq 0$ auch

$$0 = f(5) = f(\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}) = \sqrt{5} \cdot f(\sqrt{5}) + \sqrt{5} \cdot f(\sqrt{5}) = 2\sqrt{5} \cdot f(\sqrt{5})$$

also auch $f(\sqrt{5}) = 0$.
Nach dem Lemma ist dann auch $f(\sqrt{5}^3) = 0$ und $f(2^3) = 0$, also nach (1) mit $x_1 = 2$ und $x_2 = \sqrt{5}$ auch $f(2+\sqrt{5}) = f(2^3) + f(\sqrt{5}^3) = 0 + 0 = 0$.

Aufgabe 281042:
Zeigen Sie, dass es ein Paar von Funktionen f, g gibt, für das folgende Aussagen gelten:
(1) Die Funktionen f und g sind für alle reellen Zahlen x definiert.
(2) Es ist $f(0) = 7$.
(3) Für jedes reelle x gilt $\frac{g(x) \cdot f(x+1)}{f(x)} = g(2x) + 1$.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Für den geforderten Nachweis genügt es, ein Beispiel eines Paares von Funktionen f, g anzugeben und (1), (2), (3) für dieses Beispiel als erfüllt nachzuweisen.
Ein solches Beispiel ist etwa:
Für alle reellen x sei $f(x) = 7 \cdot 2^x; g(x) = 1$.
In der Tat erfüllen diese Funktionen (1) und (2) sowie wegen $f(x) \neq 0$ für alle x und

$$\frac{g(x) \cdot f(x+1)}{f(x)} = \frac{1 \cdot 7 \cdot 2^{x+1}}{7 \cdot 2^x} = 2 = g(2x) + 1$$

auch (3).
Heuristisches Hilfsmittel zum Auffinden derartiger Beispiel kann es sein, einen Ansatz $g(x) = \text{const.}$, z. B. $g(x) = 1$, zur Vereinfachung von (3) zu wählen und so zur Forderung $f(x+1) = 2 \cdot f(x)$ zu gelangen (oder auch umgekehrt mit diesem Ansatz zur Forderung $2 \cdot g(x) = g(2x) + 1$).

So kann man eine Vielzahl weiterer Funktionenpaare f, g erhalten, z. B. für alle reellen x sei

$$f(x) = 7 \cdot 8^x \qquad , \qquad g(x) = x^3 + \frac{1}{7}$$

oder mit unstetigem f: $f(x) = 7 \cdot 2^x$ in jedem Intervall $k \leq x < k+1$ (k ganzzahlig), $g(x) = x + 1$ für alle reellen x.

Aufgabe 291043A:
Man beweise folgende Aussage:
Die Folge $(2n-1)$ $(n = 1, 2, 3, ...)$ enthält für jede beliebige Zahl z einen Abschnitt, dessen Länge größer als z ist und in dem keine Primzahl vorkommt.
Hinweis:
Ist (a_n) $(n = 1, 2, 3, ...)$ eine Folge und sind $k \geq 1$ und m natürliche Zahlen, so heißt das k-Tupel $(a_{m+1}, a_{m+2}, ..., a_{m+k})$ ein Abschnitt der Folge (a_n) und k seine Länge.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
1. Für jede natürliche Zahl n gilt: Ist n zusammengesetzt, so ist $2^n - 1$ nicht Primzahl.
Beweis: Es sei $n = pq$ mit natürlichen Zahlen p,$q > 1$. Dann ist mit $x = 2^p$ die Zahl

$$2^n - 1 = x^q - 1 = (x-1)(x^{q-1} + ... + x + 1)$$

wegen $x + 1 > 1$ und $x^{q-1} + ... + x + 1 \geq x + 1 > 1$ zusammengesetzt. 2. Für jede natürliche Zahl $N > 1$ gilt: Keine der $N - 1$ Zahlen

$$n \in \{N! + 2; N! + 3; ...; N! + N\} \qquad (1)$$

ist Primzahl, denn diese Zahlen sind jeweils durch $2, 3, ..., N$ teilbar und größer als die genannten Teiler. Wählt man ein $N > 1$ mit $N > z + 1$, so hat der mit den Zahlen n aus (1) gebildete Abschnitt der Folgeglieder $2^n - 1$ die Länge $N - 1 > z$ und in diesem Abschnitt gibt es aufgrund 1. keine Primzahl.

Aufgabe 301044:
Untersuchen Sie, ob es eine für alle reellen Zahlen x definierte Funktion f so gibt, dass für alle natürlichen Zahlen a und b die Gleichung gilt:

$$f(a) + f(a+b) - f(a-b) = a^2 + 4b + 2$$

Lösung von Kornkreis:
Zunächst setze $b = 1$ und setze für a verschiedene Werte ein: $m, m+1, m-1, m+2$ (man erhält also 4 Gleichungen, m sei eine beliebige natürliche Zahl).
Dann setze $b = 2$ und setze für a: $m, m+1$ (man erhält somit 2 Gleichungen).

Das ergibt ein Gleichungssystem aus 6 Gleichungen mit den 6 Unbekannten $f(m), f(m+1), f(m+2), f(m-1), f(m+3), f(m-2)$.

Als Lösung ergibt sich beispielsweise $f(m) = m^2 + 4$ und $f(m+1) = m^2 + 5$, dies gilt für alle natürlichen m, woraus schon der Widerspruch folgt, es kann also kein solches f geben.

Aufgabe 311043A:
Es sei f eine Funktion, die für alle positiven ganzen Zahlen n und nur für diese definiert sei und deren sämtliche Funktionswerte $f(n)$ ganzzahlig sind. Ferner werde vorausgesetzt, dass für alle positiven ganzen Zahlen m, n die Gleichung $f(f(m) + f(n)) = m + n$ gilt.
Man ermittle alle diejenigen Zahlen, die als Funktionswert $f(1992)$ bei einer solchen Funktion f vorkommen können.

Lösung von Kornkreis:
Alle folgenden Variablen m,n,k seien positiv ganz.
Für $m = n$ lautet die Funktionalgleichung $f(2f(n)) = 2n$.
Das Argument $2f(n)$ der äußeren Funktion muss positiv ganz sein, also ist $f(n)$ stets positiv ganz.

f ist außerdem injektiv: aus $f(n) = f(k)$ folgt $2n = f(2f(n)) = f(2f(k)) = 2k$, also $n = k$.
Da in $f(f(m) + f(n)) = m + n$ die rechte Seite alle natürlichen Zahlen größer 1 annehmen kann, muss jede natürliche Zahl größer 1 ein Urbild haben.

Aus der Funktionalgleichung und der Injektivität von f folgt

$$2f(n) = f(n+1) + f(n-1) = f(n+2) + f(n-2) = ... = f(1) + f(2n-1)$$

denn wenn man f auf jede Seite dieses Gleichungssystems anwendet, erhält man immer $2n$.
$2f(n)$ besitzt also $n-1$ verschiedene Darstellungen als Summe zweier verschiedener Summanden (verschieden wegen der Injektivität von f). [zwei Darstellungen heißen genau dann verschieden, wenn sie nicht durch Vertauschung der Summanden ineinander übergehen] Also muss offenbar $f(n) \geq n$ gelten für alle $n \geq 2$.

Wäre $f(1) > 1$, so wäre $2 = f(f(1) + f(1)) \geq 4$, Widerspruch, also ist $f(1) = 1$.
Wäre nun $f(2) > 2$, hätte die 2 kein Urbild, Widerspruch, also ist $f(2) = 2$. Induktiv kriegt man nun $f(n) = n$ für alle natürlichen n, was die Funktionalgleichung erfüllt.

Anmerkung: Man erhält schon aus $2f(n) = f(n+1)+f(n-1)$ die Lösung: das charakteristische Polynom hat die doppelte Nullstelle 1, damit ist $f(n) = a + bn$. Da f einen natürlichen Wertebereich hat, ist a ganz und $b \geq 0$. Wegen der Injektivität gilt $b \neq 0$. Damit, und da jede natürliche Zahl größer gleich 2 ein Urbild hat, ist $b = 1$ und $a = 1$ oder $a = 0$. Damit und nach Einsetzen in die Funktionalgleichung erhält man $a = 0$.

Aufgabe 311046:
Es sei q die größere der beiden Lösungen der Gleichung $x^2 - 4x + 1 = 0$.
Man ermittle die letzte Ziffer (Einerstelle) in der dekadischen Zifferndarstellung der Zahl $[q^{1992}]$.
Hinweis: Ist z eine relle Zahl, so wird diejenige ganze Zahl g für die $g \leq z < g + 1$ gilt, mit $g = [z]$ bezeichnet.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Lösungen der Gleichung $x^2-4x+1 = 0$ sind $p = 2-\sqrt{3}$ und $q = 2+\sqrt{3}$. Für die Zahlen $a_n = p^n+q^n$ ($n = 0,1,2,3,\dots$) gilt $a_n > 0$ sowie

$$a_0 = 2, \quad a_1 = 4, \quad a_2 = 4 - 4\sqrt{3} + 3 + 4 + 4\sqrt{3} + 3 = 14 \qquad \text{und} \tag{1}$$

$$a_{n+2} - 4a_{n+1} + a_n = p^n(p^2 - 4p + 1) + q^n(a^2 - 4q + 1) = 0 \tag{2}$$

Durch vollständige Induktion wird nun bewiesen: Für $m = 0,1,2,\dots$ sind $a_{3m}, a_{3m+1}, a_{3m+2}$ ganze Zahlen mit 2 bzw. 4 bzw. 4 als letzter Ziffer:
Für $m = 0$ folgt dies aus (1), und trifft es für ein $m = k \geq 0$ zu, so ist nach (2) jeweils

$$a_{3(k+1)} = 4 \cdot a_{3k+2} - a_{3k+1}$$

eine ganze Zahl mit derselben letzten Ziffer wie $4 \cdot 4 - 4 = 12$,

$$a_{3(k+1)+1} = 4 \cdot a_{3k+3} - a_{3k+2}$$

eine ganze Zahl mit derselben letzten Ziffer wie $4 \cdot 2 - 4 = 4$,

$$a_{3(k+1)+2} = 4 \cdot a_{3k+4} - a_{3k+3}$$

eine ganze Zahl mit derselben letzten Ziffer wie $4 \cdot 4 - 2 = 14$.
Wegen $1992 = 3 \cdot 664$ hat somit a_{1992} die letzte Ziffer 2. Ferner ist $0 < p < 1$, also $p^{1992} - 1 < 0 < p^{1992}$. Nach Addition von q^{1992} folgt $a_{1992} - 1 < q^{1992} < a_{1992}$, d. h., q^{1992} liegt zwischen zwei ganzen Zahlen, deren letzte Ziffer 1 bzw. 2 ist. Damit ergibt sich $[q^{1992}] = 1$.

Aufgabe 321043B:
Man ermittle alle diejenigen ganzen Zahlen a, b, für die sich bei Division des Polynoms

$$f(x) = x^4 + 2ax^3 + 2x^2 + x - 2$$

durch das Polynom

$$g(x) = x^2 + ax + b$$

erweist, dass ohne Rest ein Polynom $h(x)$ entsteht (mit dem also für jede Zahl x, für die $g(x) \neq 0$ ist, die Gleichung $f(x) : g(x) = h(x)$ gilt).

Lösung von cyrix:
Es ist

$$f(x) - g(x) \cdot (x^2 + ax) = (x^4 + 2ax^3 + 2x^2 + x - 2) - (x^4 + ax^3 + bx^2 + ax^3 + a^2x^2 + abx) =$$

$$= (2 - b - a^2)x^2 + (1 - ab)x - 2 \qquad \text{und}$$

$$g(x) \cdot (2 - b - a^2) = (2 - b - a^2)x^2 + (2a - ab - a^3)x + (2b - b^2 - a^2b)$$

also mit $h(x) := x^2 + ax + 2 - b - a^2$:

$$f(x) - g(x) \cdot h(x) = (2 - b - a^2)x^2 + (1 - ab)x - 2 - ((2 - b - a^2)x^2 + (2a - ab - a^3)x + (2b - b^2 - a^2b)) =$$

$$= (1 - ab - 2a + ab + a^3)x - 2 - 2b + b^2 + a^2b = (1 - 2a + a^3)x - 2 - 2b + b^2 + a^2b$$

Damit für kein x ein Rest bleibt, muss sowohl $1 - 2a + a^3 = 0$ also auch $2 - 2b + b^2 + a^2b = 0$ gelten.

Betrachten wir zuerst die Gleichung $1 - 2a + a^3 = 0$. Diese hat die Lösung $a_1 = 1$, sodass wir die Gleichung durch $a - 1$ teilen können und erhalten $0 = a^2 + a - 1$, was die weiteren Lösungen $a_{2/3} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \notin \mathbb{Z}$ besitzt. Also ist die einzige ganzzahlige Lösung $a = 1$.

Setzen wir dies in die zweite Gleichung ein, so muss $2 - 2b + b^2 + b = 0$ bzw. $(-2 + b)(1 + b) = 0$, also $b \in \{-1,2\}$ gelten.

Demnach gibt es zwei ganzzahlige Paare $(a; b)$, sodass die Polynomdivision von f durch g keinen Rest lässt, nämlich $(1; -1)$ und $(1; 2)$. Die Probe bestätigt diese Lösungen.

Aufgabe 341044:
Zu jeder gegebenen reellen Zahl c sind zwei in einem Intervall $[a, b]$ definierte Funktionen f und g gesucht, die den folgenden Bedingungen (1), (2), (3) genügen:
(1) Für jedes x in dem Intervall $[a, b]$ gilt $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.
(2) Die Funktion f ist nicht konstant.
(3) Der Graph von g geht aus dem Graph von f durch Verschiebung um den Wert c in Richtung der y-Achse hervor.
Geben Sie (passend zu c) Zahlen a, b und im Intervall $[a, b]$ definierte Funktion f, g an, und weisen Sie nach, dass bei Ihren Angaben die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt sind!

Lösung von ochen:
Sei a,b,c beliebige reelle Zahlen mit $a < b$. Seien weiter $y_1,y_2 \in \mathbb{R}$ definiert als

$$y_1 := -\frac{c}{2} + \sqrt{1 + \frac{c^2}{4}}, \qquad y_2 := -\frac{c}{2} - \sqrt{1 + \frac{c^2}{4}}.$$

Es sind y_1,y_2 wohldefiniert und verschieden, da der Term unter der Wurzel $1 + \frac{c^2}{4}$ für alle reellen Zahlen c größer als Null ist. (Er ist sogar nicht kleiner als Eins.) Wir können weiter feststellen, dass y_1 und y_2 Nullstellen des Polynoms

$$p(y) = y^2 + cy - 1$$

sind.
Wir definieren $f,g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} y_1, & a \leq x \leq \frac{a+b}{2} \\ y_2, & \frac{a+b}{2} < x \leq b \end{cases}, \qquad g(x) = f(x) + c,$$

so gilt für alle reellen Zahlen x

$$f(x)g(x) = f(x)(f(x) + c) = (f(x))^2 + cf(x) - 1 + 1 = p(f(x)) + 1 = 1,$$

da f nur auf Nullstellen des Polynoms p abbildet. Weiter ist f nicht konstant, da $f(a) = y_1 \neq y_2 = f(b)$. Da definitionsgemäß $g(x) = f(x) + c$ für alle reellen x gilt, ist der Graph von g der um c in y-Richtung verschobene Graph von f.

VIII Oberstufe

VIII.I Gleichungen

I Runde 1

Aufgabe V01106:
Gibt es einen Winkel ε, für den die Gleichung gilt:

$$\sin\varepsilon \cdot \cos\varepsilon = 1 \qquad (1)$$

Lösung von Steffen Polster:
Mit dem Additionstheorem $2\sin x \cos x = \sin 2x$ wird aus (1)

$$\sin\varepsilon \cdot \cos\varepsilon = \frac{1}{2}\sin 2\varepsilon = 1$$
$$\sin 2\varepsilon = 2$$

Da der Funktionswertebereich der Sinusfunktion $[-1; 1]$ hat diese Gleichung keine reelle Lösung. Es gibt keinen Winkel ε, der (1) erfüllt.

Aufgabe 021214:
Es sind sämtliche Lösungen der Gleichung

$$\cos^2 x \cdot \cos^2 2x \cdot \cos^2 3x + \sin^2 x \cdot \sin^2 2x \cdot \sin^2 3x = \cos^2 x \cdot \cos^2 2x + \cos^2 x \cdot \cos^2 3x + \cos^2 3x \cdot \cos^2 2x$$

für $0° \leq x \leq 360°$ zu bestimmen!

Lösung von Eckard Specht:
Die gegebene Gleichung wird zunächst mittels $\sin^2(x) = 1-\cos^2(x)$ umgeformt, wobei wir zur Abkürzung $c_1 \equiv \cos(x), c_2 \equiv \cos(2x), c_3 \equiv \cos(3x)$ schreiben:

$$c_1^2 x_2^2 c_3^2 + (1-c_1^2)(1-c_2^2)(1-c_3^2) = c_1^2 c_2^2 + c_1^2 c_3^2 + c_3^2 c_2^2$$
$$c_1^2 c_2^2 c_3^2 + 1 - (c_1^2 + c_2^2 + c_3^2) + (c_1^2 c_2^2 + c_2^2 c_3^2 + c_3^2 c_1^2) - c_1^2 c_2^2 c_3^2 = c_1^2 c_2^2 + c_1^2 c_3^2 + c_3^2 c_2^2$$
$$c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1$$

Mit Hilfe der Additionstheoreme erhalten wir: $c^2 = 2c_1^2 - 1$ und $c_3 = 4c_1^3 - 3c_1$. Dies eingesetzt in (1) ergibt:

$$c_1^2 + (2c_1^2 - 1)^2 + (4c_1^3 - 3c_1)^2 = 1$$
$$16c_1^6 - 20c_1^4 + 6c_1^2 = 2c_1^2(8c_1^4 - 10c_1^2 + 3) = 0$$

Aus $c_1^2 = 0$ folgen die ersten beiden Lösungen: $x_1 = 90°, x_2 = 270°$.

Für weitere Lösungen muss der Klammerausdruck in (2) verschwinden, was auf eine biquadratische Gleichung mit den Lösungen $c_1^2 = \frac{5}{8} \pm \frac{1}{8}$ führt.

Aus $c_1^2 = \frac{3}{4}$ 4 folgen die vier Lösungen: $x_3 = 30°, x_4 = 150°, x_5 = 210°$ und $x_6 = 330°$, sowie aus $c_1^2 = \frac{1}{2}$ vier weitere Lösungen: $x_7 = 45°, x8 = 135°, x9 = 225°, x10 = 315°$.

Aufgabe 031214:
Man beweise:

Bezeichnen α, β, γ die Winkel eines Dreiecks, so gelten

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 1 \qquad \text{und}$$
$$\sin^2\alpha = \sin^2\beta + \sin^2\gamma - 2\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha.$$

Lösung von Henning Thielemann:
Herleitung der ersten Gleichung mit Hilfe des Additionstheorems

$$\begin{aligned}
\cos x\cos y &= \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y)) \\
4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma &= 2(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta))\cos\gamma \\
&= \cos(\alpha-\beta-\gamma) + \cos(\alpha-\beta+\gamma) + \cos(\alpha+\beta-\gamma) + \cos(\alpha+\beta+\gamma) \\
&= \cos(-\alpha+\beta+\gamma) + \cos(\alpha-\beta+\gamma) + \cos(\alpha+\beta-\gamma) + \cos(\alpha+\beta+\gamma)
\end{aligned}$$

Die Innenwinkelsumme beträgt $\alpha+\beta+\gamma = \pi$

$$\begin{aligned}
\alpha+\beta+\gamma &= \cos(\pi-2\alpha) + \cos(\pi-2\beta) + \cos(\pi-2\gamma) + \cos\pi \\
&= -\cos(2\alpha) - \cos(2\beta) - \cos(2\gamma) - 1
\end{aligned}$$

Es gilt das Additionstheorem $\cos^2\alpha - \frac{1}{2}\cos 2\alpha = \frac{1}{2}$ und analoges für β und γ.

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 3\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 1$$

Die zweite Gleichung lässt sich aus dem Kosinussatz $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos\gamma$ ableiten, wobei die Seiten a, b und c den Winkeln α, β bzw. γ gegenüberliegen.

Wegen $\alpha \neq 0$, gibt es ein $x \neq 0$ mit $a = x\cdot\sin\alpha$ und nach dem Sinussatz gilt dann $b = x\cdot\sin\beta$ und $c = x\cdot\sin\gamma$, womit aus dem Kosinussatz folgt:

$$\begin{aligned}
x^2\sin^2\alpha &= x^2\sin^2\beta + x^2\sin^2\gamma - x^2\sin\beta\sin\gamma\cos\gamma \text{und wegen} x \neq 0 \\
\sin^2\alpha &= \sin^2\beta + \sin^2\gamma - \sin\beta\sin\gamma\cos\gamma
\end{aligned}$$

Aufgabe 031116:
Die Summe von 100 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen betrage 1000050.
Wie heißt die kleinste, wie die größte dieser Zahlen?

Lösung von Steffen Weber:
Sei a die kleinste der 100 Zahlen, dann ist $a+99$ die größte der Zahlen. Die Summe der 100 Zahlen beträgt

$$a + (a+1) + ... + (a+98) + (a+99) = (a + (a+99)) + ((a+1) + (a+98)) + ... + ((a+49) + (a+50)) =$$
$$= \underbrace{(2a+99) + ... + (2a+99)}_{\text{50 Summanden}} = 100a + 4950$$

d. h. $100a = 995100$ bzw. $a = 9951$ und $a + 99 = 10050$. Also ist 9951 die kleinste und 10050 die größte der 100 Zahlen.

Aufgabe 031216:
Es ist

$$\frac{26}{65} = \frac{2\cancel{6}}{\cancel{6}5} = \frac{2}{5}.$$

Man darf also bei diesem Bruch die Ziffern 6 „kürzen“. Für welche Brüche mit zweistelligen Zählern und Nennern ist ein solches „Kürzen“ irgendeiner Ziffer des Zählers gegen eine Ziffer des Nenners gestattet, ohne dass sich die dargestellte rationale Zahl ändert?

Lösung von Henning Thielemann:
Fallunterscheidung:

1)
$$\frac{10a+c}{10b+c} = \frac{a}{b} \qquad \Rightarrow \qquad bc = ac$$

Das bedeutet $c = 0$ oder $a = b$. Erstes bedeutet, dass sich bei allen Brüchen mit Vielfachen von 10 in Zähler und Nenner bezüglich der Null „ kürzen“ lassen, und zweites bedeutet, dass Nenner und Zähler gleich sind.

2)
$$\frac{10c+a}{10c+b} = \frac{a}{b} \qquad \Rightarrow \qquad bc = ac$$

c kann nicht Null sein, denn dann wären die dargestellten Zahlen nicht zweistellig. Also ist $a = b$, das führt zu identischem Zähler und Nenner.

3)
$$\frac{10a+c}{10c+b} = \frac{a}{b} \qquad \Rightarrow \qquad a = \frac{bc}{10c-9b}$$

Die möglichen Belegungen für a, b und c sollen nun durch Ausprobieren herausgefunden werden. Dabei gibt es folgende Vereinfachungen:

a) Der Fall, dass alle Variablen gleich sind, wurde bereits behandelt.

b) Ist $a = x, b = y, c = z$ eine Lösung, so ist für alle natürlichen Zahlen k auch $a = kx, b = ky, c = kz$ eine Lösung, sofern jeder Wert kleiner als 10 ist.

c) Für festes c kann man den zulässigen Wertebereich weiter einschränken:

$$1 \le a = \frac{bc}{10c-9b} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{10c}{c+9} \le b$$

$$9 \ge a = \frac{bc}{10c-9b} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{10}{9}c \ge b$$

c	b	$\frac{bc}{10c-9b}$	Lösung?	c	b	$\frac{bc}{10c-9b}$	Lösung?
5	4	$20/14$		6	4	$24/24 = 1$	ja
6	5	$30/15 = 2$	ja	7	5	$35/25$	
7	6	$42/16$		8	5	$40/35$	
8	6	$48/26$		8	7	$56/17$	
9	5	$45/45 = 1$	ja	9	6	$54/36$	
9	7	$63/27$		9	8	$72/18 = 4$	ja

4)
$$\frac{10c+b}{10a+c} = \frac{b}{a}$$

Dieser Fall führt zum gleichen Zusammenhang wie der vorige Fall nur mit vertauschtem Zähler und Nenner.

Die gesuchten Brüche sind

$$\frac{16}{64}, \frac{26}{65}, \frac{19}{95}, \frac{49}{98}, \frac{64}{16}, \frac{65}{26}, \frac{95}{19}, \frac{98}{49}$$

und darüber hinaus alle Brüche mit gleichem Zähler und Nenner, sowie sämtliche Brüche mit Vielfachen von 10 in Zähler und Nenner.

Aufgabe 041116:
Ohne Benutzung einer Tafel oder die Benutzung des Rechenstabes ist zu entscheiden, ob die Zahl

$$z = \sqrt[3]{1620 + 12 \cdot \sqrt{17457}} + \sqrt[3]{1620 - 12 \cdot \sqrt{17457}}$$

größer, kleiner oder gleich 18 ist.

Lösung von Rainer Müller:
Mit den Abkürzungen $a = 1620$, $b = 12\sqrt{17457}$ ist $z = \sqrt[3]{a+b} + \sqrt[3]{a-b}$, also

$$z^3 = a + b + 3(a+b)^{\frac{2}{3}}(a-b)^{\frac{1}{3}} + 3(a+b)^{\frac{1}{3}}(a-b)^{\frac{2}{3}} + a - b = 2a + 3\sqrt[3]{a^2 - b^2} \cdot z =$$

$$= 3240 + 3\sqrt[3]{110592} \cdot z = 3240 + 144z$$

(wegen $110592 = 2^{12} \cdot 3^3 = (2^4 \cdot 3)^3$ braucht man für 110592 keinen Taschenrechner.
Demnach ist z eine reelle Nullstelle des Polynoms

$$p := x^3 - 144x - 3240 = (x-18)(x^2 + 18x + 180) = (x-18)(x + 9 + \sqrt{-99})(x + 9 - \sqrt{-99})$$

Da 18 die einzige reelle Nullstelle von p ist, muss z gleich 18 sein.

Aufgabe 041214:
Ohne Benutzung einer Zahlentafel oder eines Rechenstabes ist das Produkt

$$x = \cos 20° \cdot \cos 40° \cdot \cos 60° \cdot \cos 80°$$

zu berechnen.

Lösung von Peter Hieber:
Mit der Gesetzmäßigkeit $2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)$ und dem Wissen, dass $\cos 60° = \frac{1}{2}$ sowie $\cos 90° = 0$ gilt:

$$\begin{aligned} x &= \cos 20° \cdot \cos 40° \cdot \cos 60° \cdot \cos 80° = \frac{1}{2} \cdot (\cos 20° + \cos 60°) \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos 80° \\ &= \frac{1}{4} \cdot \cos 20° \cdot \cos 80° + \frac{1}{8} \cdot \cos 80° = \frac{1}{8} \cdot (\cos 60° + \cos 100° + \cos 80°) \\ &= \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{1}{2} + 2 \cdot \cos 10° \cdot \cos 90°\right) = \frac{1}{16} \end{aligned}$$

Es ergibt sich für $x = \frac{1}{16}$.

Aufgabe 091212:

a) Es sind alle reellen Lösungen der Gleichung $x(x+1)(x+2)(x+3) = \dfrac{9}{16}$ zu ermitteln.

b) Ferner sind alle reellen Zahlen a anzugeben, für die die Gleichung $x(x+1)(x+2)(x+3) = a$ keine, genau eine, genau zwei, genau drei, genau vier bzw. mehr als vier verschiedene reelle Lösungen in x hat.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es wird sogleich der allgemeine Fall b) gelöst:

b) Setzt man $z = x + \frac{3}{2}$, dann ist x eine Lösung der Gleichung

$$x(x+1)(x+2)(x+3) = a \tag{1}$$

genau dann, wenn z eine Lösung der Gleichung

$$\left(z-\frac{3}{2}\right)\left(z+\frac{3}{2}\right)\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z+\frac{1}{2}\right) = a \qquad \text{bzw.} \tag{2}$$

$$\left(z^2-\frac{9}{4}\right)\left(z^2-\frac{1}{4}\right) = a$$

$$z^4 - \frac{5}{2}z^2 + \frac{9}{16} - a = 0 \tag{3}$$

ist. Nun ist die Gleichung (3) erfüllt genau dann, wenn

$$z^2 = \frac{5}{4} + \sqrt{\frac{25}{16} - \frac{9}{16} + a} = \frac{5}{4} + \sqrt{1+a} \qquad \text{oder} \qquad z^2 = \frac{5}{4} - \sqrt{1+a} \tag{4,5}$$

gilt. Nun unterscheiden wir folgende Fälle:

1. Fall: (zugleich Antwort zu Aufgabe a):

Für $a = \frac{9}{16}$ folgt aus (4) und (5)

$$z^2 = \frac{5}{4} + \sqrt{1+\frac{9}{16}} = \frac{10}{4} \qquad ; \qquad z^2 = \frac{5}{4} - \sqrt{1+\frac{9}{16}} = 0$$

Daher hat die Gleichung (3) in diesem Fall genau drei Lösungen, nämlich

$$z_1 = 0; \qquad z_2 = \frac{1}{2}\sqrt{10}; \quad z_3 = -\frac{1}{2}\sqrt{10}$$

Die Gleichung (1) hat daher in diesem Fall ebenfalls genau drei Lösungen, nämlich

$$x_1 = -\frac{3}{2}; \qquad x_2 = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{10}; \quad x_3 = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{10}$$

2. Fall: Für $a < -1$ hat die Gleichung (3) und damit auch Gleichung (1) keine Lösung, weil $1 + a < 0$ ist.

3. Fall: Für $a = -1$ hat die Gleichung (3) genau zwei Lösungen, nämlich $z_1 = \frac{1}{2}\sqrt{5}$ und $z_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{5}$.

4. Fall: Für $a > -1$ und $\sqrt{1+a} < \frac{5}{4}$, d. h. $1+a < \frac{25}{16}$, also $a < \frac{9}{16}$, d. h. für $-1 < a < \frac{9}{16}$ hat die Gleichung (4) genau vier Lösungen, nämlich

$$z_1 = \sqrt{\frac{5}{4} + \sqrt{1+a}}; \qquad z_2 = -\sqrt{\frac{5}{4} + \sqrt{1+a}}; \qquad z_3 = \sqrt{\frac{5}{4} - \sqrt{1+a}}; \qquad z_1 = -\sqrt{\frac{5}{4} - \sqrt{1+a}}$$

5. Fall: Für $a > \frac{9}{16}$ wird $\frac{5}{4} - \sqrt{1+a} < \frac{5}{4} - \frac{5}{4}$; die Gleichung hat also genau zwei Lösungen, nämlich

$$z_1 = \sqrt{\frac{5}{4} + \sqrt{1+a}}; \qquad z_2 = -\sqrt{\frac{5}{4} + \sqrt{1+a}}$$

Zusammenfassung:

Daher hat die Gleichung (1), wenn man nur reelle Lösungen zulässt, keine Lösung, falls $a < -1$, genau eine Lösung in keinem Falle, genau zwei Lösungen falls $a = -1$, oder $a > \frac{9}{16}$, genau drei Lösungen, falls $a = \frac{9}{16}$, genau vier Lösungen, falls $-1 < a < \frac{9}{16}$, mehr als vier Lösungen in keinem Falle.

Aufgabe 301212:
Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen a, für die die Gleichung

$$3x^2 + ax - 2 = 0 \qquad (1)$$

zwei reelle Lösungen besitzt, die, wenn man sie in geeignet gewählter Reihenfolge mit x_1 und x_2 bezeichnet, der Bedingung

$$6x_1 + x_2 = 0 \qquad (2)$$

genügen.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Für jede reelle Zahl a gilt $\frac{a^2}{36} + \frac{2}{3} > 0$. Deshalb hat (1) für jede reelle Zahl a zwei reelle Lösungen, nämlich die beiden Zahlen

$$-\frac{a}{6} \pm \sqrt{\frac{a^2}{36} + \frac{2}{3}} = \frac{1}{6}(-a \pm \sqrt{a^2+24})$$

I. Wenn diese beiden Zahlen der Bedingung (2) genügen, so gilt entweder

$$(-a + \sqrt{a^2+24}) + \frac{1}{6}(-a - \sqrt{a^2+24}) = 0 \qquad \text{oder} \qquad (3)$$

$$(-a - \sqrt{a^2+24}) + \frac{1}{6}(-a + \sqrt{a^2+24}) = 0 \qquad (4)$$

Aus (3) folgt

$$\begin{aligned} -6a + 6\sqrt{a^2+24} - a - \sqrt{a^2+24} &= 0 \\ 5\sqrt{a^2+24} &= 7a \\ 25a^2 + 600 &= 49a^2 \qquad (5) \end{aligned}$$

aus (4) folgt ebenfalls (5). Daher folgt in beiden Fällen $24a^2 = 600$, $a = 5$ oder $a = -5$.

II. Für $a = 5$ lautet (1) $3x^2 + 5x - 2 = 0$ und hat als Lösungen die beiden Zahlen $\frac{1}{6}(-5 \pm 7)$, d. h. die Zahlen $\frac{1}{3}$ und -2. Beide erfüllen auch (2).

Für $a = -5$ lautet (1) $3x^2 - 5x - 2 = 0$ und hat als Lösungen die beiden Zahlen $\frac{1}{6}(5 \pm 7)$, d. h. die Zahlen $-\frac{1}{3}$ und 2. Beide erfüllen ebenfalls auch (2).

Somit sind die beiden Zahlen $a = 5$ und $a = -t5$ die gesuchten.

II Runde 2

Aufgabe 031122:
Bestimmen Sie die Menge aller reellen Zahlen x, die die folgende Gleichung erfüllen:

$$1 - \sin 5x = \left(\cos \frac{3}{2}x - \sin \frac{3}{2}x\right)^2$$

Lösung von Henning Thielemann:
Wende das Additionstheorem

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

auf $\alpha = \frac{\pi}{2} + \frac{3}{2}x$ und $\beta = \frac{3}{2}x$ an und erhalte:

$$\begin{aligned}
\cos\frac{3}{2}x - \sin\frac{3}{2}x &= \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{3}{2}x\right) - \sin\left(\frac{3}{2}x\right) \\
&= 2\cos\frac{\pi + 6x}{4}\sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}\cos\frac{\pi + 6x}{4} \\
\left(\cos\frac{3}{2}x - \sin\frac{3}{2}x\right)^2 &= 2\cos^2\frac{\pi + 6x}{4} = 1 + \cos\frac{\pi + 6x}{2} \\
&= 1 - \sin 3x
\end{aligned}$$

Damit wird die ursprüngliche Gleichung zu

$$1 - \sin 5x = 1 - \sin 3x \Rightarrow \sin 5x = \sin 3x$$

Die linke Seite wird genau dann null, wenn x ein Vielfaches von $\frac{\pi}{5}$ ist und die rechte Seite, genau dann wenn x ein Vielfaches von $\frac{\pi}{3}$ ist. Das kleinste gemeinsame Vielfache von $\frac{\pi}{5}$ und $\frac{\pi}{3}$ ist π, folglich ist die Gleichung genau dann erfüllt, wenn x Vielfaches von π ist.

Aufgabe 051224:
Man ermittle alle reellen Zahlen x, y, für die die Gleichung

$$\sin(x + y) = \sin x + \sin y$$

erfüllt ist.

Lösung von Manuela Kugel:
Es gelten folgende trigonometrische Beziehungen:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \qquad (1)$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad (2)$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad (3)$$

Damit gilt für die gegebene Gleichung mit (1) und (2):

$$\begin{aligned}
\sin(x+y) &= \sin x + \sin y \\
2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x+y}{2} &= 2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2} \qquad (4)
\end{aligned}$$

Fall 1: $\sin\frac{x+y}{2} = 0 \Rightarrow \frac{x+y}{2} = k\pi \Rightarrow x + y = 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$
Fall 2: $\sin\frac{x+y}{2} \neq 0$ in (4) und mit (3):

$$\begin{aligned}
\cos\frac{x+y}{2} - \cos\frac{x-y}{2} &= 0 \\
-2\cdot\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{y}{2} &= 0
\end{aligned}$$

Dieses Produkt ist dann Null, wenn mindestens einer der Faktoren Null ist:
Fall 2a: $\sin\frac{x}{2} = 0 \Rightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
Fall 2b: $\sin\frac{y}{2} = 0 \Rightarrow y = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Aufgabe 051225:
Man ermittle sämtliche reellen Zahlen x, für die das Polynom

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

a) seinen kleinsten Wert annimmt (Wie groß ist dieser?) und
b) seinen größten Wert annimmt, wenn x auf das Intervall $1 \leq x \leq 4$ beschränkt wird (Wie groß ist dieser?).

Lösung von Caban:
Verschiebt man die Funktion um zwei Einheiten nach links ergibt sich:

$$f(x) = (x+1{,}5) \cdot (x+0{,}5) \cdot (x-0{,}5) \cdot (x-1{,}5) = (x^2 - 2{,}25) \cdot (x^2 - 0{,}25)$$

Man setze $f(x) = k$. Dadurch ergibt sich:

$$x^4 - 2{,}5x^2 + 0{,}5625 - k = 0$$

Bei lokalen Extremas müssen sich Mehrfachlösungen ergeben.

$$(x^2 - 1{,}25)^2 = 1 + k$$

Fall 1: $(x^2 - 1{,}25)^2 = 0$: $k = -1$ Minimum Mehrfachlösung,
Fall 2: $x^2 = 0$: k=0,5625 Maximum

Im Intervall [1,4] gibt es vier Nullstellen, also 3 Intervalle an denen lokale Extremas liegen können. Es kann aus Symmetriegründen nur noch einmal das Maximum 0,5625 auftreten oder keins. Größere Werte kann es also im Bereich [1,4] nicht geben, da es nur drei lokale Extrempunkte geben kann.

Aufgabe 061221:
Beweisen Sie folgenden Satz:
Sind α, β, γ die Gradmaße der Winkel eines beliebigen ebenen Dreiecks, so gilt stets:

$$\cot\alpha \cdot \cot\beta + \cot\beta \cdot \cot\gamma + \cot\gamma \cdot \cot\alpha = 1$$

Lösung von Manuela Kugel:
Es gelten folgende Gesetzmäßigkeiten:
1. $\gamma = 180° - \alpha - \beta$ (Innenwinkelsumme im Dreieck)
2. $\sin(180° - x) = \sin x$
3. $\cos(180° - x) = -\cos x$
4. $\cot\gamma = \frac{\cos\gamma}{\sin\gamma} = \frac{\cos(180°-\alpha-\beta)}{\sin(180°-\alpha-\beta)} = -\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$ (mit (1), (2) und (3))
5. $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$ (Additionstheorem)
6. $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$ (Additionstheorem)

Damit ergibt sich für die Ausgangsgleichung mit (4), (5) und (6):

$$\cot\alpha \cdot \cot\beta + \cot\beta \cdot \cot\gamma + \cot\gamma \cdot \cot\alpha =$$

$$= \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \cdot \frac{\cos\beta}{\sin\beta} + \frac{\cos\beta}{\sin\beta} \cdot \left(-\frac{\cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta}{\sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta}\right) + \left(-\frac{\cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta}{\sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta}\right) \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$= \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \cdot \frac{\cos\beta}{\sin\beta} - \left(\frac{\cos\beta}{\sin\beta} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right) \cdot \frac{\cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta}{\sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta}$$

$$= \frac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta} - \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\sin\beta} \cdot \frac{\cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta}{\sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta}$$

...

$$= \frac{\sin^2\alpha\sin\beta\cos\beta + \sin\alpha\cos\alpha\sin^2\beta}{\sin\alpha\sin\beta\cdot(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)}$$
$$= \frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta} = 1$$

Das Kürzen ist problemlos möglich, da $\alpha > 0$ und $\beta > 0$ Winkel in einem nicht-entarteten Dreieck sind.

Aufgabe 081223:
Man gebe zwölf reelle Zahlen $a_1, ..., a_6, b_1, ..., b_6$ so an, dass für jede reelle Zahl x die Gleichung gilt:

$$x^{12}+1 = (x^2+a_1x+b_1)(x^2+a_2x+b_2)(x^2+a_3x+b_3)\cdot(x^2+a_4x+b_4)(x^2+a_5x+b_5)(x^2+a_6x+b_6)$$

Lösung von cyrix:
Wähle

$$b_1 = \cdots = b_6 = 1,\quad a_1 = \sqrt{2+\sqrt{3}},\quad a_2 = \sqrt{2},\quad a_3 = \sqrt{2-\sqrt{3}},$$
$$a_4 = -a_3,\quad a_5 = -a_2 \text{ und } a_6 = -a_1$$

Dann ist

$$(x^2+a_ix+b_i)(x^2+a_{7-i}x+b_{7-i}) = (x^2+1+a_ix)(x^2+1-a_ix) = x^4+(2-a_i^2)x^2+1$$

also

$$T := (x^2+a_1x+b_1)(x^2+a_2x+b_2)(x^2+a_3x+b_3)(x^2+a_4x+b_4)(x^2+a_5x+b_5)(x^2+a_6x+b_6)$$
$$= \left(x^4+\left(2-(2+\sqrt{3})\right)x^2+1\right)\cdot\left(x^4+(2-2)\,x^2+1\right)\cdot\left(x^4+\left(2-(2-\sqrt{3})\right)x^2+1\right)$$
$$= \left(x^4+1\right)\cdot\left(x^4+1-\sqrt{3}x^2\right)\cdot\left(x^4+1+\sqrt{3}x^2\right)$$
$$= \left(x^4+1\right)\cdot\left(x^8+2x^4+1-3x^4\right) = \left(x^4+1\right)\cdot\left(x^8-x^4+1\right)$$
$$= x^{12}+x^8-x^8-x^4+x^4+1 = x^{12}+1$$

Bemerkung:
Es ist $x^{24}-1 = (x^{12}-1)(x^{12}+1)$. Also sind die komplexen Nullstellen des Polynoms $x^{12}+1$ genau diejenigen von $x^{24}-1$, die keine Nullstellen von $x^{12}-1$ sind.
Die komplexen Nullstellen von x^n-1 lauten $\zeta_n^k = \cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{n}\right)+i\cdot\sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{n}\right)$, wobei i die ganzen Zahlen von 0 bis $n-1$ durchläuft.

Damit erhalten wir die komplexen Nullstellen des Polynoms $x^{12}+1$ als

$$x_k = \zeta_{24}^{2k-1} = \cos\left((2k-1)\cdot\frac{2\pi}{24}\right)+i\cdot\sin\left((2k-1)\cdot\frac{2\pi}{24}\right)$$

(Die vierundzwanzigsten Einheitswurzeln mit geradem k sind gleichzeitig auch zwölfte Einheitswurzeln, also Nullstellen von $x^{12}-1$, die hier ausgeschlossen sein sollen.)

Wir erhalten als Zerlegung des Polynoms $x^{12}+1$ in seine Linearfaktoren die Darstellung

$$x^{12}+1 = (x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_{12})$$

Wegen $\cos(2\pi-\phi) = \cos(-\phi) = \cos(\phi)$ und $\sin(2\pi-\phi) = \sin(-\phi) = -\sin(\phi)$ können wir nun den ersten und letzten dieser komplexen Linearfaktoren, den zweiten und vorletzten, usw., zusammenfassen: Für ein k aus $\{7;8;\ldots;12\}$ gilt

$$(x-x_k)(x-x_{13-k}) = \left(x-\cos\left((2k-1)\cdot\frac{2\pi}{24}\right)-i\cdot\sin\left((2k-1)\cdot\frac{2\pi}{24}\right)\right)\cdot$$

$$\cdot\left(x-\cos\left((2k-1)\cdot\frac{2\pi}{24}\right)+i\cdot\sin\left((2k-1)\cdot\frac{2\pi}{24}\right)\right)=$$
$$=x^2-2x\cos\left((2k-1)\cdot\frac{2\pi}{24}\right)+\cos^2\left((2k-1)\cdot\frac{2\pi}{24}\right)+\sin^2\left((2k-1)\cdot\frac{2\pi}{24}\right)$$
$$=x^2-2x\cos\left((2k-1)\cdot\frac{2\pi}{24}\right)+1$$

was nun ein rein reelles quadratisches Polynom ist. Setzt man $a_k := -2\cos\left((2k-1)\cdot\frac{2\pi}{24}\right)$, erhält man genau die oben genannten Werte.

Aufgabe 081224:
Es sind, alle reellen Zahlen x anzugeben, für die die Gleichung

$$|x+1|\cdot|x-2|\cdot|x+3|\cdot|x-4|=|x-1|\cdot|x+2|\cdot|x-3|\cdot|x+4|$$

erfüllt ist.

Lösung von StrgAltEntf:
Für die linke Seite der Gleichung gilt:

$$|x+1|\cdot|x-2|\cdot|x+3|\cdot|x-4|=\pm(x+1)\cdot(x-2)\cdot(x+3)\cdot(x-4)$$

Und für die rechte Seite:

$$|x-1|\cdot|x+2|\cdot|x-3|\cdot|x+4|=\pm(x-1)\cdot(x+2)\cdot(x-3)\cdot(x+4)$$

Somit folgt aus der Ausgangsgleichung

Fall 1: $(x+1)(x-2)(x+3)(x-4)=(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)$ oder
Fall 2: $(x+1)(x-2)(x+3)(x-4)=-(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)$

Wir ermitteln nun, für welche (nicht ganzzahligen) Werte x die Terme

$$a=(x+1)(x-2)(x+3)(x-4)\qquad\text{und}\qquad b=(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)$$

das gleiche oder unterschiedliche Vorzeichen haben, also für welche Werte x Fall 1 oder Fall 2 zu betrachten ist.

	$x<-4$	$-4<x<-3$	$-3<x<-2$	$-2<x<-1$	$-1<x<0$	$0<x<1$
a	>0	>0	<0	<0	>0	>0
b	>0	<0	<0	>0	>0	>0
	Fall 1	Fall 2	Fall 1	Fall 2	Fall 1	Fall 1

	$1<x<2$	$2<x<3$	$3<x<4$	$x>4$
a	>0	<0	<0	>0
b	<0	<0	>0	>0
	Fall 2	Fall 1	Fall 2	Fall 1

Ausmultiplizieren liefert

$$(x+1)(x-2)(x+3)(x-4)=x^4-2x^3-13x^2+14x+24\quad\text{und}$$
$$(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)=x^4+2x^3-13x^2-14x+24$$

Fall 1: Zu lösen ist

$$x^4-2x^3-13x^2+14x+24=x^4+2x^3-13x^2-14x+24\qquad\Longleftrightarrow\qquad 4x^3-28x=0$$
$$\Longleftrightarrow\qquad x^3-7x=0\qquad\Longleftrightarrow\quad x=0\text{ oder }x=\sqrt{7}\text{ oder }x=-\sqrt{7}$$

$x_0 = 0$ ist offenbar eine Lösung der Ausgangsgleichung. Für $x_1 = \sqrt{7}$ gilt $2 < x_1 < 3$. x_1 liegt somit in einem Bereich, für den Fall 1 zuständig ist (siehe Tabelle) und ist somit eine Lösung. Auch $x_2 = -\sqrt{7}$ ist wegen $-3 < x_2 < -2$ eine Lösung.

Fall 2: Zu lösen ist

$$x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 14x + 24 = -x^4 - 2x^3 + 13x^2 + 14x - 24 \quad \iff \quad 2x^4 - 26x^2 + 48 = 0$$

$$\iff \quad x^4 - 13x^2 + 24 = 0 \quad \iff x = \sqrt{\frac{13+\sqrt{73}}{2}}$$

$$\text{oder } x = -\sqrt{\frac{13+\sqrt{73}}{2}} \text{ oder } x = \sqrt{\frac{13-\sqrt{73}}{2}} \text{ oder } x = -\sqrt{\frac{13-\sqrt{73}}{2}}$$

Für $x_3 = \sqrt{\frac{13+\sqrt{73}}{2}}$ gilt $x_3 < \sqrt{\frac{13+\sqrt{81}}{2}} = \sqrt{11} < 4$ und $x_3 > \sqrt{\frac{13+\sqrt{64}}{2}} = \sqrt{10{,}5} > 3$. Somit liegt x_3 im Fall-2-Bereich und ist daher eine Lösung der Ausgangsgleichung.

Analog folgt mit $x_4 = -\sqrt{\frac{13+\sqrt{73}}{2}}$, $x_5 = \sqrt{\frac{13-\sqrt{73}}{2}}$ und $x_6 = -\sqrt{\frac{13-\sqrt{73}}{2}}$, dass $-4 < x_4 < -3$, $1 < x_5 < 2$ und $-2 < x_6 < -1$ und daher x_4, x_5 und x_6 Lösungen der Ausgangsgleichung sind.
Insgesamt haben wir also sieben Lösungen $x_0,...,x_6$.

Aufgabe 301221:
Man beweise die folgende Aussage:
Wenn a, b, c positive reelle Zahlen sind, für die $b^2 - a^2 = c^2 - b^2 \quad (1)$ gilt, dann gilt auch stets

$$\frac{1}{a+c} - \frac{1}{b+c} = \frac{1}{a+b} - \frac{1}{a+c} \tag{2}$$

Lösung von weird:
Der Beweis ergibt sich einfach aus folgenden Äquivalenzumformungen (man beachte, dass a,b,$c > 0$ vorausgesetzt war!), welche (2) schrittweise in (1) überführen, sodass diese Schlusskette dann auch umkehrbar ist:

$$\frac{1}{a+c} - \frac{1}{b+c} = \frac{1}{a+b} - \frac{1}{a+c}$$
$$\frac{b-a}{(a+c)(b+c)} = \frac{c-b}{(a+b)(a+c)}$$
$$\frac{b-a}{b+c} = \frac{c-b}{a+b}$$
$$b^2 - a^2 = (b-a)(a+b) = (c-b)(b+c) = c^2 - b^2$$

III Runde 3

Aufgabe 021134:
Es sind sämtliche Lösungen der Gleichung $\sin^3 x + \cos^3 x = 1$ zu bestimmen.

Lösung von Carsten Balleier:
Zuerst beobachtet man folgende Eigenschaft reeller Zahlen:

$$\forall t \in \mathbb{R} \text{ mit } t < 1, t \neq 0 : t^3 < t^2$$

Damit kann man zeigen, dass $1-\cos^3 x > 1-\cos^2 x$ gilt, außer wenn $\cos x = 0$ oder $\cos x = 1$, dann gilt Gleichheit. Ebenso gilt $\sin^2 x > \sin^3 x$ überall dort, wo $\sin x$ von 0 und 1 verschieden ist. Unter Verwendung des trigonometrischen Pythagoras in der Form $1-\cos^2 x = \sin^2 x$ folgt $1-\cos^3 x > \sin^3 x$, was in der Form $\sin^3 x + \cos^3 x < 1$ ein direkter Widerspruch zu der Gleichung ist, deren Lösungen wir suchen.
Also kann sie nur dort Lösungen besitzen, wo die Ungleichung nicht gilt.
Dies ist gerade dort der Fall, wo sowohl $\sin x$ als auch $\cos x$ einen der Werte 0 oder 1 annehmen, also bei $x_0 = 0$ und $x_1 = \frac{\pi}{2}$. Tatsächlich erfüllen diese beiden Werte die Gleichung, womit die vollständige Lösung (unter Berücksichtigung der Periodizität) aus allen Werten

$$x_{2k} = 2k\pi \qquad x_{2k+1} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{N})$$

besteht.

Aufgabe 041234:
Für welche reellen Zahlen x ist die Gleichung $\tan^2 x + \cot^2 x = 6$ erfüllt?

Lösung von Rainer Müller:
Wegen $\tan(x+\pi) = -\cot x$ und $\cot(x+\pi) = -\tan x$ ist

$$\tan^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right) + \cot^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \tan^2 x + \cot^2 x$$

und wegen $\tan\left(\frac{\pi}{4} \pm x\right) = \cot\left(\frac{\pi}{4} \mp x\right)$ ist

$$\tan^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right) + \cot^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \tan^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right) + \cot^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$$

d. h. $\tan^2 x + \cot^2 x$ ist $\frac{\pi}{2}$-periodisch und symmetrisch zu $x = \frac{\pi}{4}$. Wir müssen daher Lösungen von $\tan^2 x + \cot^2 x = 6$ nur im Intervall $I = \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ suchen (0 ausgeschlossen wegen Definitionslücke). Die gegebene Gleichung ist

$$\begin{aligned}
\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} &= 6 \\
\Leftrightarrow \sin^4 x + \cos^4 x &= 6\sin^2 x \cos^2 x \\
\Leftrightarrow (1-\cos^2 x)^2 + \cos^4 x &= 6(1-cos^2 x)\cos^2 x \\
\Leftrightarrow 2\cos^4 x - 2\cos^2 x + 1 &= 6\cos^2 x - 6\cos^4 x \\
\Leftrightarrow \cos^4 x - \cos^2 x + \frac{1}{8} &= 0 \\
\Leftrightarrow \cos^2 x &= \frac{2 \pm \sqrt{2}}{4} \\
\Leftrightarrow \cos x &= \frac{\sqrt{2 \pm \sqrt{2}}}{2}
\end{aligned}$$

Die letzte Umformung gilt, da cos auf I positiv ist.
$\cos x = \frac{1}{2}\sqrt{2 \pm \sqrt{2}}$ hat keine Lösung in I, weil cos auf I streng monoton fällt und $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2} > \frac{1}{2}\sqrt{2 \pm \sqrt{2}}$ gilt. Also hat die Ausgangsgleichung in I nur eine Lösung, nämlich

$$x = \arccos\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} = \frac{\pi}{8}$$

Die letzte Gleichheit gilt wegen

$$\cos\frac{\pi}{8} = \cos\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{\frac{1}{2}\cdot\frac{2+\sqrt{2}}{2}}$$

Wegen der anfangs genannten Symmetrie und Periodizität ist die Menge aller reellen Lösungen

$$\left\{\frac{\pi}{8},\frac{3\pi}{8}\right\}+\frac{\pi}{2}Z=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{4}Z=\left\{\pm\frac{\pi}{8},\pm\frac{3\pi}{8},\pm\frac{5\pi}{8},...\right\}$$

Alternativ-Lösung von weird:
Die Ausgangsgleichung lässt sich auch schreiben als

$$(\tan x+\cot x)^2=8$$

woraus sofort

$$\frac{2}{\sin(2x)}=\frac{2(\sin^2 x+\cos^2 x)}{2\sin x\cos x}=\tan x+\cot x=\pm 2\sqrt{2}$$

und weiter

$$\sin(2x)=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

folgt. Diese letzte Gleichung ist aber offensichtlich genau für

$$x=\frac{(2k+1)\pi}{8}\qquad (k\in\mathbb{Z})$$

erfüllt.

Aufgabe 051236:
Man beweise, dass für jede natürliche Zahl $n\geq 1$ die folgenden Beziehungen gelten:

$$(1)\qquad \sin x+\sin 3x+...+\sin(2n-1)x=\frac{\sin^2 nx}{\sin x}\qquad \text{für alle reellen x mit } \sin x\neq 0$$

$$(2)\qquad \sin x+\sin 3x+...+\sin(2n-1)x=0\qquad \text{für alle reellen x mit } \sin x=0$$

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:
1) Für $n=1$ ist die Behauptung offensichtlich richtig. Daher reicht es im Induktionsschritt

$$\frac{\sin^2 nx}{\sin x}+\sin(2n+1)x=\frac{\sin^2(n+1)x}{\sin x}$$

bzw.

$$\sin^2 nx+\sin(2n+1)x\cdot\sin x=\sin^2(n+1)x$$

zu zeigen. Mit $\sin^2 x-\sin^2 y=\sin(x+y)\cdot\sin(x-y)$ gilt:

$$\sin^2(n+1)x-\sin^2 nx=\sin((2n+1)x)\cdot\sin x.$$

2) Aus $\sin x=0$ folgt $x=k\pi$ mit $k\in\mathbb{Z}$. Insbesondere habe alle nx dieselbe Gestalt.
Daher sind alle Summanden auf der linken Seite der Gleichung 0.

Aufgabe 061234:
Man ermittle alle und nur diejenigen reellen Zahlen x, die der Gleichung

$$\left[\frac{5+6x}{8}\right]=\frac{15x-7}{5}$$

genügen.
Dabei bedeutet $[a]$ die größte ganze Zahl, die nicht größer als a ist; z. B. ist $\left[\frac{13}{2}\right]=6$, $[-6{,}5]=-7$ und $[6]=6$.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, es gäbe eine reelle Zahl x_0 derart, dass

$$\left[\frac{5+6x_0}{8}\right] = \frac{15x_0-7}{5}$$

gilt. Dann ist

$$\frac{15x_0-7}{5} \leq \frac{5+6x_0}{8} < \frac{15x_0-7}{5} + 1$$

Hieraus folgt durch Multiplikation mit 4:

$$12x_0 - \frac{28}{5} \leq \frac{5}{2} + 3x_0 < 12x_0 - \frac{8}{5} \qquad \text{also} \qquad \frac{41}{10} < 9x_0 \leq \frac{81}{10}$$

und weiter nach Division durch 3 und Subtraktion von $\frac{7}{5}$

$$-\frac{1}{30} < \frac{15x_0-7}{5} \leq \frac{13}{10}$$

Da $\frac{15x_0-7}{5}$ ganz ist, folgt weiter, dass entweder $\frac{15x_0-7}{5} = 0$ oder $\frac{15x_0-7}{5} = 1$ gilt. Hieraus ergibt sich $x_0 = \frac{7}{15}$ bzw. $x_0 = \frac{4}{5}$.
Durch Einsetzen in die Ausgangsgleichung zeigt man, dass diese beiden Werte Lösungen der Ausgangsgleichung sind. Also hat die Gleichung die beiden Lösungen $x = \frac{7}{15}$ und $x = \frac{4}{5}$ und keine weiteren.

Aufgabe 061236:
Die Zahl $\sin 10°$ genügt einer algebraischen Gleichung dritten Grades mit ganzzahligen Koeffizienten. Man stelle diese (bis auf einen gemeinsamen Teiler aller Koeffizienten eindeutig bestimmte) Gleichung auf und ermittle ihre beiden anderen Wurzeln.

Lösung von cyrix:
Es ist

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x) \qquad , \qquad \cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) \quad \text{und}$$

$$\sin(3x) = \sin(2x+x) = \sin(2x)\cos(x) + \cos(2x)\sin(x) =$$

$$= 2\sin(x)\cos^2(x) + \cos^2(x)\sin(x) - \sin^3(x) = 3(1-\sin^2(x))\sin(x) - \sin^3(x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x)$$

Mit $x = 10°$, $X_1 = \sin(x)$ und $\sin(3x) = \sin(30°) = \frac{1}{2}$ folgt, dass $X_1 = \sin(10°)$ Lösung der Gleichung

$$\frac{1}{2} = 3X - 4X^3 \qquad \text{bzw.} \qquad 8X^3 - 6X + 1 = 0$$

ist.
Da $\sin(30°) = \sin(390°) = \sin(750°)$ ist, erfüllen auch $X_2 = \sin(x_2)$ und $X_3 = \sin(x_3)$ mit $x_2 = \frac{390°}{3} = 130°$ und $x_3 = \frac{750°}{3} = 250°$ diese Gleichung.
Offensichtlich sind $X_1 = \sin(10°)$, $X_2 = \sin(130°) = \sin(50°)$ und $X_3 = \sin(250°) = \sin(-70°)$ paarweise verschieden, da die Sinus-Funktion streng monoton steigend im Intervall $[-90°, 90°]$ ist. Also stellen X_2 und X_3 die gesuchten weiteren Lösungen der angegebenen Gleichung dar.

Aufgabe 071232:
Es ist das Produkt

$$\sin 5° \sin 15° \sin 25° \sin 35° \sin 45° \sin 55° \sin 65° \sin 75° \sin 85°$$

in einen Ausdruck umzuformen, der aus natürlichen Zahlen lediglich durch Anwendung der Rechenoperationen des Addierens, Subtrahierens, Multiplizierens, Dividierens sowie des Radizierens mit natürlichen Wurzelexponenten gebildet werden kann.
Beispiel: $\sin 30° \sin 60° = \frac{1}{4}\sqrt{3}$

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:
Ich verwende

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) - \cos(x+y)\right)$$

und

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}\left(\sin(x-y) + \sin(x+y)\right)$$

Mit der Doppelwinkelfunktion des Sinus und den bekannten Sinuswerten für 30° und 45° lässt sich das Produkt zunächst schreiben als $\frac{1}{64}\sqrt{2}\sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ$. Das verbleibende Produkt der Sinuswerte lässt sich vereinfachen zu:

$$\sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ = \frac{1}{2}\left(\cos 40^\circ - \cos 60^\circ\right)\sin 70^\circ = \frac{1}{4}\left(2\cos 40^\circ \sin 70^\circ - \sin 70^\circ\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\sin 30^\circ + \sin 110^\circ - \sin 70^\circ\right) = \frac{1}{8}$$

Somit ist der Produktwert $\frac{1}{512}\sqrt{2}$.

Aufgabe 081231:
Man ermittle alle reellen Zahlen x, die die Gleichung

$$\frac{2x}{a(x+a)} + \frac{1}{x-2a} = \frac{4x+6-a}{a(x+a)(x-2a)}$$

erfüllen! Dabei sei a eine reelle Zahl. (Fallunterscheidung!)

Lösung von cyrix:
Damit die Brüche definiert sind, müssen die Nenner verschieden von Null sein. Also gilt $a \neq 0$, $x \neq -a$ und $x \neq 2a$. Unter diesen Bedingungen geht die Gleichung durch Multiplikation mit dem Hauptnenner über in
$2x(x-2a) + a(x+a) = 4x + 6 - a$ bzw.

$$0 = 2x^2 - 4ax + ax + a^2 - 4x - 6 + a = 2x^2 - (3a+4)x + (a^2 + a - 6)$$

Diese quadratische Gleichung in x hat die Lösungen

$$x_{1/2} = \frac{3a+4}{4} \pm \sqrt{\frac{(3a+4)^2}{16} - \frac{8\cdot(a^2+a-6)}{16}} = \frac{3a+4 \pm \sqrt{9a^2+24a+16-8a^2-8a+48}}{4} =$$

$$= \frac{3a+4 \pm \sqrt{a^2+16a+64}}{4} = \frac{3a+4 \pm (a+8)}{4}$$

Es ergibt sich

$$x_1 = \frac{3a+4-(a+8)}{4} = \frac{2a-4}{4} = \frac{a}{2} - 1 \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{3a+4+a+8}{4} = a+3$$

Es sind hierbei noch die auftretenden Scheinlösungen auszuschließen, die eine der drei Bedingungen $a \neq 0$, $x \neq -a$ bzw. $x \neq 2a$ nicht erfüllen.
1. Fall: $x_1 = -a$. Dann ist $\frac{a}{2} - 1 = -a$ bzw. $a - 2 = -2a$, also $a = \frac{2}{3}$.
2. Fall: $x_2 = -a$. Dann ist $a + 3 = -a$, also $a = -\frac{3}{2}$.
3. Fall: $x_1 = 2a$. Dann ist $\frac{a}{2} - 1 = 2a$ bzw. $a - 2 = 4a$, also $a = -\frac{2}{3}$.
4. Fall: $x_2 = 2a$. Dann ist $a + 3 = 2a$, also $a = 3$.
Für alle anderen reellen Werte von a sind genau die beiden Werte $x_1 = \frac{a}{2} - 1$ und $x_2 = a + 3$ Lösungen der Ausgangsgleichung, die genau für $a = -8$ zusammenfallen und sonst voneinander verschieden sind.

Aufgabe 081236:
Es sind alle reellen Zahlen a anzugeben, für die die Gleichung

$$\sin^6 x + \cos^6 x = a(\sin^4 x + \cos^4 x)$$

mindestens eine reelle Lösung hat. Ferner sind sämtliche Lösungen für $a = \frac{5}{6}$ anzugeben.

Lösung von weird:
Unter Verwendung von

$$\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3\sin^2 x \cos^2 x(\sin^2 x + \cos^2 x) = 1 - \frac{3}{4}\sin^2(2x)$$

sowie

$$\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2(2x)$$

wird die Ausgangsgleichung zu

$$1 - \frac{3}{4}\sin^2(2x) = a\left(1 - \frac{1}{2}\sin^2(2x)\right)$$

woraus sich unmittelbar

$$\sin^2(2x) = \frac{4(a-1)}{2a-3} \quad (*)$$

und wegen $0 \leq \sin^2(2x) \leq 1$ die Bedingung $\frac{1}{2} \leq a \leq 1$ für a ergibt. Speziell für $a = \frac{5}{6}$ ist (*) dann äquivalent zu

$$\sin(2x) = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

mit den offensichtlichen Lösungen

$$x = (2k+1)\frac{\pi}{8} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Aufgabe 121231:
Man ermittle alle reellen Zahlen x, die die Ungleichung $0 < x < \frac{\pi}{2}$ und die Gleichung

$$\tan x + \cot x = 4$$

erfüllen. (Eine Ausrechnung der Zahlenwerte als Dezimalbrüche wird nicht verlangt.)

Lösung von weird:
Unter Benutzung der Umformung

$$\tan x + \cot x = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{2}{\sin(2x)}$$

lässt sich die Ausgangsgleichung auch einfach schreiben als

$$\sin(2x) = \frac{1}{2}$$

mit den beiden Lösungen

$$x = \frac{\pi}{12} \quad \text{bzw.} \quad x = \frac{5\pi}{12}$$

im Intervall $(0, \frac{\pi}{2})$.

Aufgabe 171232:
Zu jeder ganzen Zahl a ermittle man alle reellen Lösungen x der Gleichung

$$x^4 + x^3 + a^2x^2 + x + 1 = 0$$

Lösung von Annika Heckel:
Die Gleichung kann folgendermaßen umgeformt werden:

$$x^4 + x^3 + a^2x^2 + x + 1 = x^3 \cdot (x+1) + a^2x^2 + (x+1) = (x^3+1) \cdot (x+1) + a^2x^2$$

$(x+1)$ ist genau dann negativ, wenn x kleiner als -1 ist ($x + 1 < 0 \Leftrightarrow x < -1$)
(x^3+1) ist ebenfalls genau dann negativ, wenn x kleiner als -1 ist ($x^3 + 1 < 0 \Leftrightarrow x^3 < -1 \Leftrightarrow x < -1$).

Folglich sind $(x+1)$ und (x^3+1) stets beide negativ oder beide größer oder gleich 0. Also ist ihr Produkt $(x+1)\cdot(x^3+1)$ stets größer gleich 0.
a^2x^2 ist als Quadratzahl stets größer oder gleich 0.
Es gilt also $(x^3+1)\cdot(x+1)+a^2x^2 \geq 0$, wobei der Gleichheitsfall nur eintritt, wenn sowohl $(x^3+1)\cdot(x+1)$ als auch a^2x^2 gleich 0 ist.
Also muss gelten:
(1) $(x^3+1)\cdot(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ sowie
(2) $a^2x^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0$ oder $x = 0$ aus $x = -1$ (s.o.) folgt also $a = 0$.
Folglich gibt es nur für $a = 0$ eine Lösung, nämlich $x = -1$.

Aufgabe 171236B:
Ist z eine reelle Zahl, so bezeichnet $[z]$ die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich z ist. Beispielsweise gilt $[\frac{7}{2}] = 3$; $[5] = 5$; $[-\pi] = -4$.
Man beweise:
Für jede reelle Zahl x und jede positive ganze Zahl n gilt

$$[x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + ... + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] = [nx]$$

Lösung von cyrix:
Es ist $0 \leq x - [x] < 1$. Also existiert eine eindeutig bestimmte, positive ganze Zahl $k \leq n$ mit

$$\frac{k-1}{n} \leq x - [x] < \frac{k}{n} \qquad \text{bzw.} \qquad [x] + \frac{k-1}{n} \leq x < [x] + \frac{k}{n}$$

sowie für alle ganzen Zahlen i:

$$[x] + \frac{k-1+i}{n} \leq x + \frac{i}{n} < [x] + \frac{k+i}{n}.$$

Da $[x]$ eine ganze Zahl ist, ist für $0 \leq i \leq n-k$ wegen

$$[x] \leq [x] + \frac{k-1+i}{n} \leq x + \frac{i}{n} < [x] + \frac{k+i}{n} \leq [x] + \frac{k+n-k}{n} = [x] + 1$$

also $\left[x + \frac{i}{n}\right] = [x]$.

Analog ist für $n - k + 1 = n - (k-1) \leq i \leq n-1$ wegen

$$[x]+1 = [x]+\frac{k-1+n-k+1}{n} \leq [x]+\frac{k-1+i}{n} \leq x+\frac{i}{n} < [x]+\frac{k+i}{n} \leq [x]+\frac{k+n-1}{n} < [x]+\frac{n+n}{n} = [x]+2$$

diesmal $\left[x + \frac{i}{n}\right] = [x] + 1$.
Also ist

$$[x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \dots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] = n \cdot [x] + k - 1,$$

da genau die $k-1$ Summanden für $i = n-1$ bis $i = n-(k-1)$ den Wert $[x]+1$ und die übrigen $n-k+1$ Summanden den Wert $[x]$ besitzen.

Weiterhin ist $n[x] + (k-1) \leq nx < n[x] + k$, also $[nx] = n[x] + k - 1$, woraus direkt das Gewünschte folgt, $\square$.

Aufgabe 241233B:
Man ermittle zu jeder geraden natürlichen Zahl $n \geq 2$ alle reellen Lösungen x der Gleichung

$$x \cdot (x+1) \cdot (x+2) \cdot \ldots \cdot (x+n-1) = (x+n) \cdot (x+n+1) \cdot (x+n+2) \cdot \ldots \cdot (x+2n-1)$$

Lösung von cyrix:
Mit der Substitution $y := x + n - \frac{1}{2} = x + \frac{2n-1}{2}$ geht die zu betrachtende Gleichung äquivalent über in

$$\left(y - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(y - \frac{3}{2}\right) \cdot \left(y - \frac{5}{2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(y - \frac{2n-1}{2}\right) = \left(y + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(y + \frac{3}{2}\right) \cdot \left(y + \frac{5}{2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(y + \frac{2n-1}{2}\right)$$

Multipliziert man die Produkte auf beiden Seiten aus, erhält man positive rationale Zahlen a_0 bis a_n mit

$$\left(y - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(y - \frac{3}{2}\right) \cdot \left(y - \frac{5}{2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(y - \frac{2n-1}{2}\right) = a_n \cdot y^n - a_{n-1} \cdot y^{n-1} + a_{n-2} \cdot y^{n-2} \pm \dots + (-1)^n \cdot a_0 \cdot y^0$$

und

$$\left(y + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(y + \frac{3}{2}\right) \cdot \left(y + \frac{5}{2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(y + \frac{2n-1}{2}\right) = a_n \cdot y^n + a_{n-1} \cdot y^{n-1} + a_{n-2} \cdot y^{n-2} + \dots + a_0 \cdot y^0$$

Die unterschiedlichen Vorzeichen kommen daher, dass in allen Faktoren auf der linken Seite der Gleichung jeweils Differenzen stehen, d. h., für Potenzen der Form y^{n-k} mit geradem k jeweils genau k solche negativen Faktoren ausgewählt und miteinander multipliziert (und deren Ergebnisse addiert) werden, was ein positives Vorzeichen im entstehenden Koeffizienten erzeugt, während bei ungeradem k nun ungeradzahlig viele negative Zahlen multipliziert (und dann die Produkte addiert) werden, sodass dies negative Vorzeichen erzeugt. Die a_i sind als Summe der Produkte von positiven Brüchen selbst offensichtlich positiv.

Setzt man diese beiden Terme gleich, so finden sich auf beiden Seiten der Gleichung für gerade k die gleichen Werte; für ungerade k jedoch verschiedene Vorzeichen. Durch Subtraktion der linken Seite erhält man die äquivalente Gleichung

$$0 = (-2) \cdot (a_{n-1} \cdot y^{n-1} + a_{n-3} \cdot y^{n-3} + \dots + a_1 \cdot y^1)$$

wobei $n-1$ ungerade ist, da n nach Aufgabenstellung gerade ist (sodass a_1 der letzte hier auftretende Koeffizient ist). Dies ist äquivalent zu

$$0 = y \cdot (a_{n-1} \cdot y^{n-2} + a_{n-3} \cdot y^{n-4} + \dots + a_1)$$

Diese Gleichung hat die eine offensichtliche Lösung $y = 0$ bzw. $x = \frac{2n-1}{2}$. Andernfalls ist aber auch wegen n gerade auch $n - 2k$ gerade und also $y^{n-2k} > 0$ für alle $0 < k \leq \frac{n}{2}$, sodass aufgrund der Positivität aller a_i auch $a_{n-1} \cdot y^{n-2} + a_{n-3} \cdot y^{n-4} + \dots + a_1 > 0$ folgt, es also keine weitere Lösung gibt.
Damit hat die Gleichung der Aufgabenstellung nur genau eine Lösung, nämlich $x = \frac{2n-1}{2}$, was die Probe auch schnell bestätigt.

Aufgabe 251235:
Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen x, für die die folgende Gleichung (1) gilt:

$$\frac{x^2+12x+4}{x+2} = 6\cdot\sqrt{x} \qquad (1)$$

Lösung von cyrix:
Es ist $6\cdot\sqrt{x} = \frac{(x+2)^2+8x}{x+2}$ bzw. $(x+2)^2+8x = 6\sqrt{x}\cdot(x+2)$. Nach Quadrieren und der Substitution $y := (x+2)^2$ erhält man $y^2+16xy+64x^2 = 36xy$, also $y^2-20xy+64x^2 = 0$ und damit $(y-10x)^2 = 36x^2$, mithin $y = (10\pm 6)x$, d. h. $y_1 = 4x$ und $y_2 = 16x$.

Setzt man dies ein, erhält man einerseits $4x = (x+2)^2 = x^2+4x+4$, also $x^2 = -4$, was auf keine reellen Lösungen führt, bzw. andererseits $16x = x^2+4x+4$, also $x^2-12x+4 = 0$ bzw. $x = 6\pm\sqrt{36-4} = 6\pm 4\sqrt{2}$.

Da beide Werte wegen $6 > 4\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{3}{2} > \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{9}{4} > 2$ positiv sind, waren sowohl das Multiplizieren mit $x+2 > 2 > 0$ als auch das Quadrieren Äquivalenzumformungen, sodass dies auch beides Lösungen der Ausgangsgleichung sind.

IV Runde 4

Aufgabe 031242:
Man bestimme alle reellen Werte x, die die folgende Gleichung befriedigen:

$$\frac{\sin 3x\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}-4x\right)+1}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-7x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)+m} = 0$$

Dabei ist m eine gegebene reelle Zahl.

Lösung von Henning Thielemann:
Ein Bruch ist genau dann null, wenn sein Zähler gleich null ist und der Nenner verschieden von null ist.

$$\sin 3x\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}-4x\right)+1 = 0 \qquad ; \qquad \sin 3x\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}-4x\right) = -1$$

Da der Betrag der Werte von Sinus und Kosinus immer kleiner oder gleich 1 ist, müssen für eine Lösung beide einen Wert vom Betrag 1 annehmen:

$$\sin 3x = 1; \qquad \cos\left(\frac{\pi}{3}-4x\right) = -1 \qquad \text{oder} \qquad \sin 3x = -1; \qquad \cos\left(\frac{\pi}{3}-4x\right) = 1$$

Wann nehmen Sinus und Kosinus Werte mit Betrag 1 an?

$$\begin{aligned} \sin y = 1 &\Leftrightarrow y \in \left\{2\pi k + \frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{N}\right\} \\ \sin y = -1 &\Leftrightarrow y \in \left\{2\pi k - \frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{N}\right\} \\ \cos z = 1 &\Leftrightarrow z \in \{2\pi j : j \in \mathbb{N}\} \\ \cos z = -1 &\Leftrightarrow z \in \{2\pi j + \pi : j \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

Das bedeutet für $y = 3x$ bzw. $z = \frac{\pi}{3} - 4x$:

$$\begin{aligned}
\sin 3x = 1 &\Leftrightarrow 3x \in \left\{\frac{\pi}{2}(4k+1) : k \in \mathbb{N}\right\}\\
&\Leftrightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{6}(4k+1) : k \in \mathbb{N}\right\}\\
\sin 3x = -1 &\Leftrightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{6}(4k-1) : k \in \mathbb{N}\right\}\\
\cos(\frac{\pi}{3} - 4x) = 1 &\Leftrightarrow \frac{\pi}{3} - 4x \in \{2\pi j : j \in \mathbb{N}\}\\
&\Leftrightarrow 4x \in \left\{\frac{\pi}{3} - 2\pi j : j \in \mathbb{N}\right\}\\
&\Leftrightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{12}(1-6j) : j \in \mathbb{N}\right\}\\
\cos(\frac{\pi}{3} - 4x) = -1 &\Leftrightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{12}(-2-6j) : j \in \mathbb{N}\right\}
\end{aligned}$$

Gesucht sind also Paare (k, j) ganzer Zahlen mit folgenden Bedingungen:

1. Fall: $\sin y = -1 \wedge \cos z = 1$:

$$\frac{\pi}{6}(4k-1) = \frac{\pi}{12}(1-6j) \Rightarrow 2(4k+3j) = 3$$

Das führt offensichtlich nicht zu einer Lösung, denn die linke Seite der Gleichung ist stets durch 2 teilbar, die rechte Seite hingegen nie.

2. Fall: $\sin y = 1 \wedge \cos z = -1$:

$$\frac{\pi}{6}(4k+1) = \frac{\pi}{12}(-2-6j) \Rightarrow 4k+3j = -2 \Rightarrow$$

Diese Gleichung ist für $(k, j) = (1, -2)$ erfüllt und ansonsten nur, wenn man zu dem Term $4k$ ein Vielfaches von $\text{kgV}(4, 3) = 12$ addiert und denselben Wert von $3j$ abzieht.

$$(k, j) \in \{(1+3l, -2-4l) : l \in \mathbb{Z}\}$$

Aus den oben gefundenen Werten für k ergeben sich folgende Werte für x:

$$x \in \left\{\frac{\pi}{6}(4k+1) : k \in \{1+3l : l \in \mathbb{Z}\}\right\} = \left\{\frac{\pi}{6}(12l+5) : l \in \mathbb{Z}\right\}$$

Zuletzt muss noch sichergestellt werden, dass der Nenner des Bruches in der Aufgabenstellung verschieden von null ist, wenn der Zähler null wird.

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} - 7x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) + m =$$
$$= \sin\left(\frac{\pi}{3} - 7\frac{\pi}{6}(12l+5)\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}(12l+5)\right) + m =$$
$$= \sin -\frac{11\pi}{2} - \cos\pi + m = 1 - (-1) + = 2 + m$$

Das bedeutet, dass der Nenner den Wert $2+m$ besitzt, wann immer der Zähler null wird. Ist $m = -2$ wird der Bruch niemals null, ist dagegen $m \neq -2$ wird der Bruch genau dann null, wenn es ein ganzzahliges l gibt mit $x = \frac{\pi}{6}(12l+5)$.

Aufgabe 041241:
Geben Sie alle reellen Lösungen der Gleichung

$$\sqrt{p+x} + \sqrt{p-x} = x$$

an, wobei p eine positive reelle Zahl (Parameter) bedeutet!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, die reelle Zahl x sei eine Lösung der Gleichung. Da die Radikanden nicht negativ sein dürfen, und $\sqrt{p+x}+\sqrt{p-x} \geq 0$ ist, gilt $0 \leq x \leq p$. Durch zweimaliges Quadrieren der Ausgangsgleichung erhält man $x^4 + 4x^2(1-p) = 0$.

(1) $0 < p \leq 1$

Für $p \leq 1$ ist also notwendig $x = 0$. Für $p \leq 1$ kann es also außer $x = 0$ keine Lösung geben.

Probe : $\sqrt{p+x} + \sqrt{p-x} = 2\sqrt{p} > 0 = x$, weil p positiv. Damit gibt es bei $p \leq 1$ keine Lösung!

(2) $1 < p$

Für $p > 1$ könnten $x = 0$ und $x = 2\sqrt{p-1}$ Lösungen sein.

Probe : $x = 0$ ist ebenso wie im 1. Fall keine Lösung.

Teste nun $x = 2\sqrt{p-1}$:

$$s = \sqrt{p+x} + \sqrt{p-x} = \sqrt{p + 2\sqrt{p-1}} + \sqrt{p - 2\sqrt{p-1}} =$$

$$= \sqrt{\left(\sqrt{p-1}+1\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{p-1}-1\right)^2} = |\sqrt{p-1}+1| + |\sqrt{p-1}-1|$$

Der Betrag des ersten Terms ist gleich dem Term selbst; der Betrag des zweiten Terms ist gleich dem Term selbst für $2 \leq p$ und dem Negativen dessen für $1 < p < 2$. Wir erhalten also für $1 < p < 2$:

$$s = \sqrt{p-1} + 1 + 1 - \sqrt{p-1} = 2 \neq 2\sqrt{p-1}$$

Für $2 \leq p$ ist

$$s = \sqrt{p-1} + 1 + \sqrt{p-1} - 1 = 2\sqrt{p-1} = x$$

und damit die einzige Lösung.

Die einzige Lösung dieser Gleichung ist $x = 2\sqrt{p-1}$ für den Fall, dass $p \geq 2$ gilt.

Aufgabe 051241:
Man ermittle alle reellen Zahlen a, b und alle ganzen Zahlen $n \geq 1$, für die $(a+b)^n = a^n + b^n$ gilt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die gegebene Gleichung gilt genau dann, wenn einer der folgenden Fälle vorliegt:

I. 1) $a = 0$, b beliebig reell; n beliebig ganz ≥ 1,
2) $b = 0$, a beliebig reell; n beliebig ganz ≥ 1,
II. $a) - b$, n ungerade,
III. $n = 1$, a,b beliebig reell.

Beweis: Dass die gegebene Gleichung in den genannten Fällen eine wahre Aussage wird, prüft man durch Einsetzen nach.
Jetzt wird gezeigt, dass die Gleichung in keinem anderen Fall erfüllt ist.
Angenommen, die gegebene Gleichung sei erfüllt und es liege keiner der angegebenen Fälle vor. Dann kann man aus Symmetriegründen o. B. d. A. annehmen, dass $|a| \geq |b|$, insbesondere also $a \neq 0$ ist. Dividiert man beide Seiten der gegebenen Gleichung durch a^n, so erkennt man, dass

$$\left(1 + \frac{b}{a}\right)^n = 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

oder mit $x = \frac{b}{a}$

$$0 < |x| = \frac{|b|}{|a|} \leq 1 \qquad ; \qquad (1+x)^n = 1 + x^n$$

gelten müsste. Ist nun $x > 0$, so gilt

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1} x + ... + x^n > 1 + x^n$$

denn da nicht der Fall III vorliegt, ist $n \geq 2$. Ist aber $n < 0$ und n gerade, so ist $(1+x)^n < 1$ und $1 + x^n > 1$. In beiden Fällen ergibt sich ein Widerspruch zu (1).
Wir betrachten nun noch den letzten möglichen Fall $n = 2k+1 \geq 3$ (k natürliche Zahl), $x = -t$, $0 < t < 1$. Dann ist

$$(1+x)^n = (1-t)^n < 1 - t < 1 - t^n = 1 + x^n$$

im Widerspruch zu (1).

Aufgabe 051245:
Man beweise, dass $\tan 7°30' = \sqrt{6} + \sqrt{2} - \sqrt{3} - 2$ gilt.

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:
Zur Lösung werden die Sinus- und Kosinuswerte für $0°, 30°, 45°, 60°, 90°$ benutzt, welche sich als $\frac{1}{2}\sqrt{k}$ schreiben lassen, wobei k beim Sinus die Werte von 0 bis 4 und beim Kosinus vom 4 bis 0 durchläuft. Zudem kann man wieder

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x \qquad \text{und} \qquad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$$

nutzen sowie die Additionstheoreme

$$\sin(x-y) = \sin x \cos x - \cos x \sin y \qquad \text{und} \qquad \cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

Damit:

$$\tan(7°30') = \frac{\sin(7°30')}{\cos(7°30')} = \frac{2\sin(7°30')\sin(7°30')}{2\sin(7°30')\cos(7°30')} = \frac{1-\cos(15°)}{\sin(15°)} = \frac{1-\cos(45°-30°)}{\sin(45°-30°)}$$

Und somit:

$$\frac{1-\cos(45°-30°)}{\sin(45°-30°)} = \frac{1-\cos(45°)\cos(30°)-\sin(45°)\sin(30°)}{\sin(45°)\cos(30°)-\cos(45°)\sin(30°)} =$$

$$\frac{1-\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{1-\frac{1}{4}\sqrt{6}-\frac{1}{4}\sqrt{2}}{\frac{1}{4}\sqrt{6}-\frac{1}{4}\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{(4-\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{6}+\sqrt{2})} = \frac{4\sqrt{6}+4\sqrt{2}-6-2\sqrt{3}-2\sqrt{3}-2}{4} = \sqrt{6}+\sqrt{2}-\sqrt{3}-2$$

Aufgabe 081245:
Beweisen Sie, dass für alle reellen Zahlen x gilt:

$$\sin 5x = 16 \sin x \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{5}\right) \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{5}\right) \cdot \sin\left(x - \frac{2\pi}{5}\right) \cdot \sin\left(x + \frac{2\pi}{5}\right)$$

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:
Es ist

$$\sin 5x = 5 \sin x \cos^{5-1} x - \binom{5}{3} \sin^3 x \cos^{5-3} x + \binom{5}{5} \sin^5 x \cos^{5-5} x = 5 \sin x \cos^4 x - 10 \sin^3 x \cos^2 x + \sin^5 x$$

$$= \sin x(5\cos^4 x - 10(1-\cos^2 x)\cos^2 x + (1-\cos^2 x)^2)$$

$$= \sin x(5\cos^4 x - 10\cos^2 x + 10\cos^4 x + 1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x) = \sin x(16\cos^4 x - 12\cos^2 x + 1)$$
$$= 16\sin x\left(\cos^4 x - \frac{3}{4}\cos^2 x + \frac{1}{16}\right)$$

Es bleibt also zu zeigen:

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{5}\right)\sin\left(x + \frac{\pi}{5}\right)\sin\left(x - \frac{2\pi}{5}\right)\sin\left(x + \frac{2\pi}{5}\right) = \cos^4 x - \frac{3}{4}\cos^2 x + \frac{1}{16}$$

Für die linke Seite nutzen wir nun (zweimal) die Produktformel:

$$\frac{1}{2}\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{5}\right) - \cos(2x)\right)\frac{1}{2}\left(\cos\left(-\frac{4\pi}{5}\right) - \cos(2x)\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left(-2\cos^2 x + 1 + \cos\left(-\frac{2\pi}{5}\right)\right)\left(-2\cos^2 x + 1 + \cos\left(-\frac{4\pi}{5}\right)\right)$$
$$= \cos^4 x - \frac{1}{2}\cos^2 x\left(2 + \cos\left(-\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(-\frac{4\pi}{5}\right)\right) +$$
$$+\frac{1}{4}\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(-\frac{4\pi}{5}\right) + \cos\left(-\frac{2\pi}{5}\right)\cos\left(-\frac{4\pi}{5}\right) + 1\right)$$

Direkte Berechnung der Summe und des Produkts:
Das Produkt ist einfach und braucht nur die Doppelwinkelfunktion des Sinus:

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)}{\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)}{2\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{8\pi}{5}\right)}{2\cdot 2\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)} = -\frac{1}{4}$$

Für die Summe braucht man zudem noch die Produktformel des Kosinus:

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{5} - \frac{\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{5} + \frac{\pi}{5}\right) = 2\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = -2\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$$
$$= \frac{-2\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)} = \frac{-\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)} = \frac{-\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)}{2\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)} = -\frac{1}{2}$$

Alternativ lassen sich Produkt und Summe auch über die Einzelwerte berechnen, welche Rainer Müller in 041244 verwendet. Im Gegensatz zu seiner Methode könnte man diese Werte wie folgt berechnen:
Es ist

$$\cos(72°) = 2\cos^2(36°) - 1 = 2\cos^2(144°) - 1 = 2(2\cos^2(72°) - 1)^2 - 1 = 8\cos^4(72°) - 8\cos^2(72°) + 1$$

Damit ist $t = \cos(72°)$ Nullstelle von $8t^4 + 8t^2 - t + 1$.
Offensichtlich ist $t = 1$ Nullstelle. Es folgt damit $8t^4 + 8t^2 - t + 1 = (t-1)(8t^3 + 8t^2 - 1)$
Der zweite Faktor ist offensichtlich

$$8t^3 + 4t^2 + 4t^2 - 1 = 4t^2(2t+1) + (2t-1)(2t+1) = (2t+1)(4t^2 + 2t - 1)$$

Die Kosinuswerte für $t = 1$ und $t = -\frac{1}{2}$ sind bekannt. Damit muss $4t^2 + 2t - 1$ der Faktor werden, welcher Null ergibt. Vom Verlauf der Kosinusfunktion weiß man, welche Nullstelle zu wählen ist.

Alternativ-Lösung von Nuramon:
Es sei $z := \cos x + i\sin x$ und es sei $\omega := e^{\frac{i\pi}{5}}$. Dann ist ω^2 eine primitive fünfte Einheitswurzel und somit gilt $u^5 - 1 = (u-1)(u-\omega^2)(u-\omega^4)(u-\omega^{-2})(u-\omega^{-4})$ für alle $u \in \mathbb{C}$. Außerdem haben z und ω beide Betrag 1, also gilt $\overline{z} = \frac{1}{z}$ und $\overline{\omega} = \frac{1}{\omega}$.
Somit ist

$$\sin(5x) = \operatorname{Im} z^5 = \frac{1}{2i}(z^5 - z^{-5})$$
$$= \frac{1}{2iz^5}(z^{10} - 1) = \frac{1}{2iz^5}((z^2)^5 - 1)$$
$$= \frac{1}{2iz^5}(z^2 - 1)(z^2 - \omega^2)(z^2 - \omega^4)(z^2 - \omega^{-2})(z^2 - \omega^{-4}).$$

Wegen

$$z^2 - \omega^{2k} = z\omega^k(z\omega^{-k} - z^{-1}\omega^k) = z\omega^k \cdot 2i\,\mathrm{Im}(z\omega^{-k}) = 2iz \cdot \omega^k \cdot \sin\left(x - \frac{k\pi}{5}\right),$$

folgt weiter:

$$\begin{aligned}\sin(5x) &= \frac{1}{2iz^5}(z^2-1)(z^2-\omega^2)(z^2-\omega^4)(z^2-\omega^{-2})(z^2-\omega^{-4})\\ &= \frac{1}{2iz^5}\cdot(2iz)^5\cdot\omega^{0+1+2-1-2}\cdot\sin x\sin\left(x-\frac{\pi}{5}\right)\sin\left(x-\frac{2\pi}{5}\right)\sin\left(x+\frac{\pi}{5}\right)\sin\left(x+\frac{2\pi}{5}\right)\\ &= 16\sin x\sin\left(x-\frac{\pi}{5}\right)\sin\left(x-\frac{2\pi}{5}\right)\sin\left(x+\frac{\pi}{5}\right)\sin\left(x+\frac{2\pi}{5}\right).\end{aligned}$$

Aufgabe 091245:
Es sind alle reellen Zahlen λ anzugeben, für die die Gleichung

$$\sin^4 x - \cos^4 x = \lambda(\tan^4 x - \cot^4 x)$$

a) keine, b) genau eine, c) genau zwei, d) mehr als zwei reelle Lösungen im Intervall $0 < x < \frac{\pi}{2}$ hat.

Lösung von weird:
Zunächst ist klar, dass die Ausgangsgleichung

$$\sin^4 x - \cos^4 x = \lambda(\tan^4 x - \cot^4 x) \quad (*)$$

für ein beliebiges $\lambda \in \mathbb{R}$ stets die Lösung $x = \frac{\pi}{4}$ besitzt.

Weiterhin ist jeder Lösung $\tilde{x} \in (0, \frac{\pi}{4})$ in umkehrbar eindeutiger Weise die Lösung $\frac{\pi}{2} - \tilde{x}$ zugeordnet, da (*) gegenüber einer Vertauschung $x \leftrightarrow \frac{\pi}{2} - x$ offensichtlich invariant ist.

Aus dieser Vorbemerkung folgt bereits, dass die Fälle a) und c) in der Aufgabenstellung für ein gegebenes $\lambda \in \mathbb{R}$ gar nicht auftreten können. Ferner dürfen wir uns bei der Suche nach weiteren Lösungen außer $x = \frac{\pi}{4}$ zu einem gegebenem $\lambda \in \mathbb{R}$ nun auf das Intervall $(0, \frac{\pi}{4})$ beschränken, was die Fälle b) und d) betrifft.
Wir betrachten dazu die Funktion $\tilde{\lambda} : (0, \frac{\pi}{4}) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\tilde{\lambda}(x) = \frac{\sin^4 x - \cos^4 x}{\tan^4 x - \cot^4 x}$$

was man Kürzen durch $\sin^4 x - \cos^4 x \neq 0$ auch einfacher schreiben kann als

$$\tilde{\lambda}(x) = \frac{\sin^4 x \cos^4 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} = \frac{\sin^4(2x)}{8(2 - \sin^2(2x))}$$

Aus der zweiten Darstellung folgt insbesondere sofort, dass $\tilde{\lambda}(x)$ auf $(0, \frac{\pi}{4})$ streng monoton steigend ist und dort jeden Wert in $(0, \frac{1}{8})$ genau einmal annimmt.

Der Fall d) (mit dann genau 3 Lösungen) tritt also genau für $\lambda \in (0, \frac{1}{8})$ ein, für die anderen $\lambda \in \mathbb{R} \setminus (0, \frac{1}{8})$ bleibt es bei der einen Lösung $x = \frac{\pi}{4}$, was also dann dem Fall b) entspricht.

Aufgabe 111244:
a) Man ermittle alle geordneten Tripel (x, y, z) reeller Zahlen, die die Gleichung $x^3z + x^2y + xz + y = x^5 + x^3$ erfüllen.
b) Man gebe unter den in a) gesuchten Tripeln alle diejenigen an, in denen von den drei Zahlen x, y, z genau eine positiv, genau eine negativ und genau eine gleich Null ist.

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:
a) Die Gleichung lässt sich äquivalent umformen zu $(x^2+1)(xz+y-x^3)=0$. Der erste Faktor ist für alle reelle Zahlen positiv. Daher reicht es den zweiten zu betrachten. Für $x=0$ ist $y=0$ und $z\in\mathbb{R}$ beliebig, also haben wir die Tripel $(0{,}0{,}z)$. Für $x\neq 0$ können wir die Gleichung nach z auflösen $z=x^2-\frac{y}{x}$ und erhalten für beliebige $x{,}y\in\mathbb{R}$ das Lösungstripel $(x{,}y{,}x^2-\frac{y}{x})$.

b) Aus $x=0$ folgt $y=0$. Aus $z=0$ folgt $y=x^3$. Also haben die beiden anderen Koordinaten dasselbe Vorzeichen. Daher bleibt nur $y=0$ übrig. In diesem Fall gilt $z=x^2$. Nur für $x<0$ haben wir unterschiedliche Vorzeichen und somit sind die gesuchten Triple $\{(x{,}0{,}x^2)|x<0\}$.

Aufgabe 181244:
Man beweise, dass für alle positiven ganzen Zahlen m,n mit $m>n$ die durch

$$s(m,n)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|i-j|$$

definierte Summe $s(m,n)$ den Wert hat:

$$s(m,n)=\frac{1}{3}(n-1)n(n+1)+\frac{1}{2}mn(m-n)$$

Lösung von Zeitschrift „Mathematik in der Schule“:
(I) Es wird bewiesen, dass die Behauptung für den kleinstmöglichen Wert 2 von m und alle zugehörigen Werte von n zutrifft: Als zugehörigen Wert gibt es genau $n=1$, und in der Tat gilt einerseits

$$s(2{,}1)=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{1}|i-j|=\sum_{i=1}^{2}|i-1]=0+1=1$$

und andererseits

$$\frac{1}{3}(1-1)\cdot 1\cdot(1+1)+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1\cdot(2-1)=1$$

(II) Für jede natürliche Zahl $k\geq 2$ wird gezeigt, dass aus der Richtigkeit der Behauptung für $m=k$ und alle zugehörigen Werte von n die Richtigkeit der Behauptung für $m=k+1$ und alle zugehörigen Werte von n folgt:
Für die zu $m=k+1$ gehörigen Werte von n gilt $k+1>n$, also $k\geq n$.

Fallunterscheidung:
1. Fall $k>n$. Es gilt

$$s(k+1{,}n)=\sum_{i=1}^{k+1}\sum_{j=1}^{n}|i-j|=s(k{,}n)+\sum_{j=1}^{n}|k+1-j|=s(k{,}n)+\sum_{j=1}^{n}(k+1-j)0$$

$$=s(k{,}n)+\frac{k+(k+1-n)}{2}\cdot n=\frac{1}{3}(n-1)n(n+1)+\frac{1}{2}kn(k-n)+\frac{1}{2}(2k+1-n)n=$$

$$=\frac{1}{3}(n-1)n(n+1)+\frac{1}{2}n(k+1)(k+1-n)$$

wie behauptet.
2. Fall $n=k$. Es gilt einerseits

$$s(k+1{,}k)=\sum_{i=1}^{k+1}\sum_{j=1}^{k}|i-j|=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}|i-j|+\sum_{j=1}^{k}|k+1-j|=$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{j=1}^{k-1} |i-j| + |i-k| \right) + \sum_{j=1}^{k} |k+1-j| = s(k,k-1) + \sum_{i=1}^{k} (k-j) + \sum_{j=1}^{k} |k+1-j| =$$

$$= \frac{1}{3}(k-2)(k-1)k + \frac{1}{2}k(k-1)\cdot 1 + \frac{1}{2}k(k-1) + \frac{1}{2}k(k+1) =$$

$$= \frac{1}{6}k(2k^2+3k+1) = \frac{1}{6}k(2k+1)(k+1)$$

andererseits erhält man für $m = k+1$ und $n = k$ auch

$$\frac{1}{3}(n-1)n(n+1) + \frac{1}{2}mn(m-n) = \frac{1}{3}(k-1)k(k+1) + \frac{1}{2}k(k+1)\cdot 1 = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$$

Damit ist die Behauptung durch vollständige Induktion bewiesen.

Aufgabe 201243:
Gegeben sei eine reelle Zahl $a \neq 0$ mit $|a| \neq 1$.
Man ermittle alle reellen Lösungen x der Gleichung

$$\frac{(x^4+1)(x^4+6x^2+1)}{x^2(x^2-1)^2} = \frac{(a^4+1)(a^4+6a^2+1)}{a^2(a^2-1)^2}$$

Lösung von Zeitschrift „Mathematik in der Schule“:
Eine reelle Zahl x ist genau dann Lösung der Gleichung

$$\frac{(x^4+1)(x^4+6x^2+1)}{x^2(x^2-1)^2} = A \qquad \text{mit} \qquad A = \frac{(a^4+1)(a^4+6a^2+1)}{a^2(a^2-1)^2} \qquad (1)$$

wenn $x \neq 0$ und $|x| \neq 1$ und

$$(x^4+1)(x^4+6x^2+1) = Ax^2(x^2-1)^2 \qquad \text{also}$$

$$x^8 + (6-A)x^6 + (2+2A)x^4 + (6-A)x^2 + 1 = 0 \qquad (2)$$

gelten. Diese Gleichung ist wegen $x \neq 0$ äquivalent mit

$$x^4 + \frac{1}{x^4} = (6-A)\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 2 + 2A = 0 \qquad (3)$$

Setzt man $x^2 + \frac{1}{x^2} = t$, so ist $x^4 - tx^2 + 1 = 0 \quad (4)$ und $x^4 + \frac{1}{x^4} = t^2 - 2$.
x ist also genau dann Lösung von (1), wenn gilt:

$$t^2 + (6-A)t + 2A = 0 \qquad (5)$$

Nun ist aus der Gleichung (1) ersichtlich, dass $x = a$ und $x = -a$ (6) Lösungen sind. Setzt man ferner $x = \frac{1}{a}$ oder $x = -\frac{1}{a}$ auf der linken Seite von (1) ein, so erhält man einen Term, der gleich A ist. Daher sind auch

$$x = \frac{1}{a} \qquad \text{und} \qquad x = -\frac{1}{a} \qquad (7)$$

Lösungen von (1). Daraus folgt, dass die quadratische Gleichung (5) die Lösung $t_1 = a^2 + \frac{1}{a^2}$ hat. Nach dem Vietaschen Wurzelsatz ist also ihre zweite Lösung gleich

$$t_2 = \frac{2A}{a^2 + \frac{1}{a^2}} = \frac{2(a^4+6a^2+1)}{(a^2-1)^2}$$

Da die Gleichung (5) höchstens zwei Lösungen t_1 und t_2 hat und die Gleichung (4) für $t = t_1$ die vier Lösungen $a, -a, \frac{1}{a}, -\frac{1}{a}$ und daher als Gleichung vierten Grades keine weiteren hat (auf Grund der

Voraussetzungen sind die vier Lösungen paarweise voneinander verschieden), erhält man alle weiteren reellen Lösungen x der Gleichung (1) wegen (4) aus der Gleichung

$$x^4 - \frac{2(a^4+6a^2+1)}{(a^2-1)^2}x^2 + 1 = 0 \qquad (8)$$

Diese Gleichung hat die Diskriminante

$$D = \left(\frac{a^4+6a^2+1}{a^4-2a^2+1}\right)^2 - 1 = \frac{16a^2(a^2+1)^2}{(x^2-1)^4} > 0$$

Daher hat die Gleichung (8) genau diejenigen x als Lösung, für die eine der Gleichungen

$$x^2 = \frac{a^4+6a^2+1}{(a^2-1)^2} \pm \frac{4a(a^2+1)}{(a^2-1)^2} \qquad \text{d. h.} \qquad x^2 = \frac{(a+1)^4}{(a^2-1)^2} \quad ; \quad x^2 = \frac{(a-1)^4}{(a^2-1)^2}$$

gilt. Da die rechten Seiten dieser Gleichungen positiv sind, sind das genau die Zahlen

$$x = \frac{a+1}{a-1}; \qquad x = -\frac{a+1}{a-1}; \qquad x = \frac{a-1}{a+1}; \qquad x = -\frac{a-1}{a+1} \qquad (9)$$

Wegen $|a| \neq 1$ gilt für jede dieser vier Zahlen $x \neq 0$. Ferner ist $a+1 \neq a-1$ und wegen $a \neq 0$ auch $a+1 \neq -a+1$, also gilt für jede dieser vier Zahlen $x \neq 1$ und $x \neq -1$.
Damit ist bewiesen, dass die gegebene Gleichung genau die in (6), (7) und (9) angegebenen Zahlen als Lösungen besitzt, nämlich die Zahlen:

$$a; \qquad -a; \qquad \frac{1}{a}; \qquad -\frac{1}{a}; \qquad \frac{a+1}{a-1}; \qquad -\frac{a+1}{a-1}; \qquad \frac{a-1}{a+1}; \qquad -\frac{a-1}{a+1}$$

Aufgabe 291241:
Für jede reelle Zahl a untersuche man, ob die Gleichung

$$a + \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{x}}}} = x \qquad (1)$$

(mindestens) eine reelle Lösung x hat, und ermittle alle reellen Lösungen der Gleichung (1).

Lösung von Zeitschrift „alpha“:
a) Zurückführen von (1) auf eine einfachere Gleichung:
I. Wenn (1) für ein reelles a ein reelles x als Lösung hat, so ist es auch Lösung der Gleichung

$$a + \sqrt{x} = x \qquad (2)$$

Beweis: Wäre $a + \sqrt{x} > x$, so folgte

$$a + \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{x}}}} > a + \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{x}}} > ... > a + \sqrt{x} > x$$

im Widerspruch gegen die Voraussetzung (1). Im wesentlichen läuft der Beweis analog für $a + \sqrt{x} < x$.

II. Wenn (2) für ein reelles a (einschließlich Probe und Rückschluss):
Für $a < -0{,}25$ hat (2) und damit (1) keine reelle Lösung x.
Für $a = -0{,}25$ ist $x = 0{,}25$ einzige Lösung von (2) und damit (1).
Für $-0{,}25 < a \leq 0$ sind genau die zwei Zahlen

$$x_{1,2} = 0{,}5 \cdot (2a + \pm\sqrt{4a+1})$$

Für $a > 0$ genau die Zahl

$$x = 0{,}5 \cdot (2a + 1 + \sqrt{4a+1})$$

Lösung von (2), also von (1).

VIII.II Ungleichungen

I Runde 1

Aufgabe V01101:
Man beweise, dass es kein Zahlentripel $(x; y; z)$ positiver reeller Zahlen gibt, für das die folgende Gleichung erfüllt ist.

$$x^3 + y^2 + z^3 = 2xyz$$

Lösung von Steffen Polster:
Es wird als bekannt vorausgesetzt, dass das arithmetische Mittel A dreier nicht negativer reeller Zahlen a, b, c nie kleiner als das geometrische Mittel G dieser Zahlen ist, d. h. es ist

$$A = \frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} = G \tag{1}$$

Setzt man: $x^3 = a, y^3 = b, z^3 = c$, so folgt aus (1), dass

$$\frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} \geq \sqrt[3]{x^3y^3z^3} \qquad \text{d. h.} \quad x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz$$

ist. Da weiter wegen $x > 0, y > 0, z > 0$

$$3xyz > 2xyz$$

ist, gilt stets

$$x^3 + y^3 + z^3 > 2xyz$$

und daher gibt es kein Tripel $(x; y; z)$ positiver reeller Zahlen, das den Bedingungen der Aufgabe genügt.

Aufgabe V01208:
Ein Trugschluss „Zwei ist größer als vier!“
Offensichtlich gilt:

$$\frac{1}{4} > \frac{1}{16} \qquad \text{oder} \qquad \left(\frac{1}{2}\right)^2 > \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

Wir logarithmieren und erhalten:

$$2\lg\left(\frac{1}{2}\right) > 4\lg\left(\frac{1}{2}\right)$$

Wie dividieren durch $\lg\left(\frac{1}{2}\right)$ und erhalten $2 > 4$.
Wo steckt der Fehler?

Lösung von OlgaBarati:

$$2\lg(\frac{1}{2}) > 4\lg(\frac{1}{2})$$
$$2\lg(1) - 2\lg(2) > 4\lg(1) - 4\lg(2)$$
$$-2\lg(2) > -4\lg(2) \;\equiv\; -2 > -4 \;\equiv\; 2 < 4$$

Die Division durch $\lg(\frac{1}{2})$ war in der Weise falsch. Da $\lg(\frac{1}{2}) < 0$ ist, hätte bei der Division das Relationszeichen gedreht werden müssen.

Aufgabe 021114:
Es ist zu beweisen, dass für $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ stets gilt:

$$\sin x + \cos x \geq \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2\sin x} \cdot \sqrt[4]{\cos x}$$

Lösung von Steffen Weber:
Beweis: Für $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ist $\sin(2x)$ nicht negativ, also gilt $(1-\sqrt{\sin(2x)})^2 \geq 0$ bzw. $1+\sin(2x) \geq 2\sqrt{\sin(2x)}$.
Nach Additionstheoremen ist das äquivalent zu

$$\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x \geq 2\sqrt{2}\sin x \cos x \qquad (1)$$

Da $2\sqrt{2}\sin x \cos x \geq 0$ und $2\sin x \cos x \geq 0$ für $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ folgt aus (1) die Behauptung.

Aufgabe 021116:
Es sind alle reellen Zahlen x zu bestimmen, welche die Ungleichung

$$\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} > \frac{1}{2}$$

erfüllen! Das Ergebnis ist zu überprüfen!

Lösung von Korinna Grabski:
Zunächst kann man bereits aus den Wurzeln folgende Bedingung ableiten: $-1 \leq x \leq 3$. Als nächstes sind die Stellen zu berechnen, an denen die Ungleichung ihren Wahrheitswert wechselt, also wo $\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} = \frac{1}{2}$ gilt.

$$\begin{aligned}
\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} &= \frac{1}{2} \\
\sqrt{3-x} &= \frac{1}{2} + \sqrt{x+1} \\
3-x &= \frac{1}{4} + x + 1 + \sqrt{x+1} \\
\frac{7}{4} - 2x &= \sqrt{x+1} \\
\frac{49}{16} + 4x^2 - 7x &= x+1 \\
4x^2 - 8x + \frac{33}{16} &= 0 \\
x^2 - 2x + \frac{33}{64} &= 0 \\
x_{1,2} &= 1 \pm \sqrt{1 - \frac{33}{64}} \\
x_1 = 1 + \frac{\sqrt{31}}{8} \quad ; \quad x_2 &= 1 - \frac{\sqrt{31}}{8}
\end{aligned}$$

Da quadriert wurde, kann es Scheinlösungen geben. Es muss also noch eingesetzt werden.
$\sqrt{3-x_1} - \sqrt{x_1+1} = -\frac{1}{2} \to$ Scheinlösung $\sqrt{3-x_2} - \sqrt{x_2+1} = \frac{1}{2} \to$ Lösung x_2 ist also die gesuchte Grenze.
Die Ungleichung wird wahr für alle x, für die gilt: $-1 \leq x < 1 - \frac{\sqrt{31}}{8}$.

Aufgabe 031114:
Bestimmen Sie alle reellen x, für die $\sin^2 x + \sin^2 2x > \sin^2 3x$ ist!

Lösung von Steffen Weber:
Nach Additionstheoremen gilt

$$\begin{aligned}
\sin^2 3x &= (\sin x \cos 2x + \cos x \sin 2x)^2 \\
&= \sin^2 x \cos^2 2x + \cos^2 x \sin^2 2x + 2\sin x \cos x \sin 2x \cos 2x \\
&= \sin^2 x(1-\sin^2 2x) + (1-\sin^2 x)\sin^2 2x + \sin^2 2x \cos 2x \\
&= \sin^2 x + \sin^2 2x - 2\sin^2 x \sin^2 2x + \sin^2 2x(1-2\sin^2 x)
\end{aligned}$$

Also erfüllen genau die reellen x die Ungleichung $\sin^2 x + \sin^2 2x > \sin^2 3x$, die auch die Ungleichung $2\sin^2 x \sin^2 2x > \sin^2 2x(1 - 2\sin^2 x)$ erfüllen. Ist x ein Vielfaches von $\frac{\pi}{2}$, so wird diese Ungleichung nie erfüllt, sonst folgt nach Division durch $\sin^2 x$

$$2\sin^2 x > 1 - 2\sin^2 x \Leftrightarrow |\sin x| > \frac{1}{2}$$

Da x kein Vielfaches von $\frac{\pi}{2}$ ist, erfüllen alle

$$x \in \left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi - \frac{\pi}{6}\right) \cup \left(k\pi + \frac{\pi}{6}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right), k \in \mathbb{Z}$$

die Ungleichung.

Aufgabe 041211:
Aus einer vierstelligen Tafel entnehmen wir die folgenden Näherungswerte:

$$\sqrt[3]{636000} \approx 86{,}00 \quad \text{und} \quad \sqrt[3]{389000} \approx 73{,}00$$

Daher ist $z = \sqrt[3]{636000} - \sqrt[3]{389000} \approx 13$.

Ohne Benutzung einer weiteren Tafel soll entschieden werden, ob z größer, kleiner oder gleich 13 ist.

Lösung von Rainer Müller:

Wir behandeln die drei Möglichkeiten $z > 13$, $z = 13$ und $z < 13$, indem wir die Relation $z \gtreqless 13$ umformen, bis wir eine Aussage erhalten, in der direkt erkennbar ist, für welches Relationszeichen sie gilt. Mit der Abkürzung $a = \sqrt[3]{389}$ gilt

$$z \gtreqless 13 \ \Leftrightarrow\ \sqrt[3]{636000} \gtreqless 13 + 10a$$

$$\Leftrightarrow\ 636000 \gtreqless 13^3 + 3 \cdot 13^2 \cdot 10a + 3 \cdot 13 \cdot 10^2 a^2 + 1000a^3$$

$$\Leftrightarrow\ 0 \gtreqless 3900a^2 + 5070a - 244803 \ \Leftrightarrow\ 0 \gtreqless 3900\left(a^2 + \frac{13}{10}a - \frac{6277}{100}\right)$$

$$\Leftrightarrow\ 0 \gtreqless \left(a - \frac{-13 + \sqrt{25277}}{20}\right) \cdot \left(a - \frac{-13 - \sqrt{25277}}{20}\right)$$

Wegen $a > 0 > (-13 - \sqrt{25277})/20$ ist der zweite Faktor der letzten Zeile positiv, so dass die Relation äquivalent ist zu

$$0 \gtreqless a - \frac{-13 + \sqrt{25277}}{20} \ \Leftrightarrow\ -13 + \sqrt{25277} \gtreqless 20a$$

$$\Leftrightarrow\ -13^3 + 3 \cdot 13^2\sqrt{25277} - 3 \cdot 13 \cdot 25277 + 25277\sqrt{25277} \gtreqless 20^3 \cdot 389$$

$$\Leftrightarrow\ -988000 + 25784\sqrt{25277} \gtreqless 3112000 \ \Leftrightarrow\ 25784\sqrt{25277} \gtreqless 4100000$$

$$\Leftrightarrow\ 3223\sqrt{25277} \gtreqless 512500$$

Da beide Seiten positiv sind, können wir quadrieren, und die Relation ist äquivalent zu

$$262570625933 \gtreqless 262656250000$$

Diese Aussage gilt nur für „<“, also ist $z < 13$.

Bemerkung: Die Aufgabenstellung ist heutzutage ohne Bedeutung, denn niemand würde heute Kubikwurzeln in einer vierstelligen Tafel nachschlagen, sondern einen Taschenrechner benutzen, der deutlich genauer und zudem platzsparender ist. Schon mit nur sechs Stellen Genauigkeit ist $\sqrt[3]{636000} - \sqrt[3]{389000} \approx 85.9975 - 72.9989 = 12.9986 < 13$. Interessant sind solche Aufgaben, wenn beide Seiten gleich sind (wie

z. B. in Aufgabe 041116), denn exakte Gleichheit lässt sich auch durch beliebig genaue Gleitkommarechnung nicht zeigen.

Aufgabe 081214:
Quadratwurzeln berechnet man häufig mit der folgenden Näherungsformel:

$$\sqrt{a^2+b} \simeq a + \frac{b}{2a}.$$

Dabei sind a und b positive reelle Zahlen.

a) Es ist zu beweisen, dass für den Fehler $\delta = a + \frac{b}{2a} - \sqrt{a^2+b}$ dieses Näherungswertes stets $0 < \delta < \frac{b^2}{8a^3}$ gilt.

b) Stellen Sie eine analoge Näherungsformel für $\sqrt[3]{a^3+b}$ auf, und geben Sie eine Abschätzung für den Fehler!

Bei der praktischen Anwendung wird b relativ klein gewählt. Wie lässt sich die Abschätzung vereinfachen, wenn man etwa a, b ganzzahlig voraussetzt, und zwar so, dass a^3+b zwischen den Kubikzahlen a^3 und $(a+1)^3$ liegt?

c) Berechnen Sie mit Hilfe der obigen Formeln Näherungswerte für $\sqrt{56}$ und $\sqrt[3]{80}$!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

a) Es gilt:

$$\delta \quad = \quad \frac{\left(x+\frac{y}{2x}\right)^2 - \left(\sqrt{x^2+y}\right)^2}{x+\frac{y}{2x}+\sqrt{x^2+y}} = \frac{y^2}{4x^2} \cdot \frac{1}{x+\frac{y}{2x}+x\sqrt{1+\frac{y}{x^2}}},$$

also $0 < \delta < \frac{y^2}{8x^3}$.

b) Entsprechend ergibt sich, wenn man $\sqrt[3]{x^2+y}$ durch $x + \frac{y}{3x^2}$ ersetzt, für den Fehler

$$\delta = x + \frac{y}{3x^2} - \sqrt[3]{x^3+y}$$

die Eingabelung

$$0 < \delta < \frac{x^2(9x^3+y)}{81x^8},$$

denn es gilt

$$\delta = \frac{\left(x+\frac{y}{3x^2}\right)^3 - (x^3+y)}{\left(x+\frac{y}{3x^2}\right)^2 + \left(x+\frac{y}{3x^2}\right)\sqrt[3]{x^3+y} + \left(\sqrt[3]{x^3+y}\right)^2} < \frac{(9x^3+y)y^2}{3x^2(3x^2)^3}.$$

c) $\sqrt{56} = \sqrt{49+7} = 7 + \frac{7}{2\cdot 7} - \delta = 7{,}5 - \delta$ mit $0 < \delta < \frac{49}{8\cdot 7^3} = \frac{1}{56}$, also $0 < \delta < 0{,}0179$. (Eine genauere Rechnung zeigt, dass $0 < \delta < 0{,}0167$ ist.)

$\sqrt[3]{80} = \sqrt[3]{64+16} = 4 + \frac{16}{3\cdot 16} - \delta = \frac{13}{3} - \delta$ mit $0 < \delta < \frac{16^2(9\cdot 64+16)}{81\cdot 4^8} = \frac{37}{16\cdot 81} < 0{,}029$. (Eine genauere Rechnung zeigt, dass $\delta < 0{,}025$ ist.)

Aufgabe 101213:
Beweisen Sie!
Für alle positiven reellen Zahlen a und b mit $a+b=1$ gilt: $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \geqslant \frac{25}{2}$.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es gilt

$$\begin{aligned} 2\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+2\left(b+\frac{1}{b}\right)^2 &= 2a^2+2b^2+\frac{2}{a^2}+\frac{2}{b^2}+8 \\ &= (a+b)^2+(a-b)^2+\frac{(a+b)^2+(a-b)^2}{(ab)^2}+8 \end{aligned}$$

Wegen $a+b=1$ ist also

$$2\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+2\left(b+\frac{1}{b}\right)^2=(a-b)^2+\frac{(a-b)^2+1}{(ab)^2}+9 \qquad (2)$$

Der Term (2) erreicht für positive a,b mit $a+b=1$ sein Minimum genau dann, wenn $a=b$ ist.

Beweis: Es gilt $(a-b)^2 \geq 0$ für alle positiven reellen Zahlen a und b, und das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn $a=b$ ist. In diesem Fall wird der erste Summand von (2) gleich 0, und beim zweiten Summanden erreicht der Zähler sein Minimum. Nun gilt

$$ab=\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{4} \leq \frac{(a+b)^2}{4}=\frac{1}{4}$$

und das Gleichheitszeichen tritt wieder genau ein, wenn $a=b$ ist. In diesem Fall erhält man daher für den Nenner des zweiten Summanden ein Maximum. Deshalb erreicht auch der zweite Summand und somit die Summe für $a=b$, d. h. wegen $a+b=1$ für $a=b=\frac{1}{2}$, ihr Minimum.

Folglich ist der kleinste Wert, den der Term (1) unter Berücksichtigung von $a+b=1$ annimmt,

$$2\left(\frac{1}{2}+2\right)^2+2\left(\frac{1}{2}+2\right)^2=25$$

Daher gilt für alle positiven reellen Zahlen a und b mit $a+b=1$

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \geqslant \frac{25}{2}$$

Aufgabe 131214:
Gegeben seien k reelle Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_k$ (k natürliche Zahl, $k \geq 1$), für die

(1) $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_k$ und

(2) $a_1+a_2+\ldots+a_k=1$ gilt.

Man beweise, dass dann für alle natürlichen Zahlen n mit $0<n\leq k$ die Ungleichung

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \leq \frac{1}{k} \quad \text{erfüllt ist.}$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wir setzen $x_1 = a_1$ und $x_m = a_m - a_{m-1}$, für $m = 2,3,...,k$. Dann gilt $x_m \geq 0$ für $m = 1,2,...,k$ sowie

$$\begin{aligned} a_1 &= x_1 \\ a_2 &= x_1 + x_2 \\ s_3 &= x_1 + x_2 + x_3 \\ &...... \\ a_n &= x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n \\ &...... \\ a_k &= x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n + ... + x_k \end{aligned}$$

Ferner gilt wegen $-\frac{k}{n} \leq -1$ und (2)

$$k\left(x_1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)x_2 + \left(1 - \frac{2}{n}\right)x_3 + ... + \left(1 - \frac{n-1}{n}x_n\right)\right) \leq$$
$$\leq kx_1 + (k-1)x_2 + (k-2)x_3 + ... + (k-(n-1))x_n + ... + x_k = a_1 + ... + a_k = 1$$

Daraus folgt
$$\frac{1}{n}(a_1 + .. + a_n) = \frac{1}{n}(nx_1 + (n-1)x_2 + (n-2)x_3 + ... + x_n) \leq \frac{1}{k}$$
w. z. b. w.

Aufgabe 261212:
Man beweise:

a) Für jedes Tripel (a, b, c) positiver reeller Zahlen, für das $c^4 = a^4 + b^4$ gilt, gibt es ein Dreieck mit a, b und c als Zahlenwerte seiner Seitenlängen.

b) Wenn für die Zahlenwerte a, b und c der Seitenlängen eines Dreiecks $a^4 + b^4 = c^4$ gilt, so ist das Dreieck spitzwinklig.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

a) Sind a, b und c beliebige positive reelle Zahlen, für die $c^4 = a^4 + b^4$ gilt, dann gilt:
$$c > a \qquad ; \qquad c > b \qquad ; \qquad a + b > c \tag{1,2,3}$$
denn es gilt
$$(a + b)^4 = a^4 + b^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 > a^4 + b^4 = c^4$$
also $(a + b)^4 > c^4$, und wegen $a + b > 0$ folglich $a + b > c$. Aus (1), (2), (3) folgt:

Ist (a,b,c) ein Tripel positiver reeller Zahlen mit $c^4 = a^4 + b^4$, so erfüllen a,b,c die Bedingungen der Dreiecksungleichung (dass jede Seite kürzer ist als die Summe der beiden anderen), also gibt es dann stets ein Dreieck mit a, b und c als Zahlenwerte seiner Seitenlängen.

b) Wenn für die Zahlenwerte a,b und c der Seitenlängen eines Dreiecks $a^4 + b^4 = c^4$ gilt, dann ist c der Zahlenwert der größten Seitenlänge der Dreiecks.

Angenommen, dieses Dreieck wäre nicht spitzwinklig, dann läge der genannten Seite ein rechter oder stumpfer Winkel gegenüber, und es würde nach dem Satz des Pythagoras $c^2 = a^2 + b^2$ oder nach dem Kosinussatz $c^2 > a^2 + b^2$, folglich in beiden Fällen $c^2 \geq a^2 + b^2$ gelten, also
$$c^4 \geq (a^2 + b^2)^2 = a^4 + b^4 + 2a^2b^2 > a^4 + b^4$$

mithin also $c^4 > a^4 + b^4$, im Widerspruch zu $c^4 = a^4 + b^4$.

Die Annahme ist also falsch. Das Dreieck ist daher spitzwinklig.

Aufgabe 271213:
Es seien wie üblich a, b, c die Seitenlängen eines beliebigen Dreiecks.

Man untersuche, ob für jedes Dreieck die Ungleichung $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + ac + bc)$ gilt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Nach dem Kosinussatz gilt für jedes Dreieck (mit den üblichen Bezeichnungen α, β, γ für die Winkelgrößen

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \quad ; \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \quad ; \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Daraus erhält man durch Addition

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= 2(a^2 + b^2 + c2) - 2(ab\cos\gamma + ac\cos\beta + bc\cos\alpha) \\ a^2 + b^2 + c^2 &= 2(ab\cos\gamma + ac\cos\beta + bc\cos\alpha) \qquad (1) \end{aligned}$$

Wegen $0° < \alpha, \beta, \gamma < 180°$, also $\cos\gamma < 1$, $\cos\beta < 1$, $\cos\alpha < 1$ (und $ab > 0$) folgt aus (1)

$$a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + ac + bc)$$

Die genannte Ungleichung gilt also für jedes Dreieck.

Hinweis: Statt des Kosinussatzes genügt es, aus der Dreiecksungleichung der Beziehungen $a^2 > (b - c)^2$, $b^2 > (c - a)^2$, $c^2 > (a - b)^2$ herzuleiten und zu addieren.

Aufgabe 321212:
Man beweise, dass für alle reellen Zahlen $a \geq 3$ die Ungleichung $\sqrt[3]{a} > \sqrt[4]{a+1}$ gilt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Für alle reellen Zahlen a gilt

$$\begin{aligned} a^4 - (a+1)^3 &= a^4 - a^3 - 3a^2 - 3a - 1 \\ &= a^3(a-3) + 2a^2(a-3) + 3a(a-3) + 6(a-3) + 17 \end{aligned}$$

Ist $a \geq 3$, so folgt hieraus $a^4 > (a+1)^3$ und damit wegen $a > 0$ die Behauptung $\sqrt[3]{a} > \sqrt[4]{a+1}$.

Aufgabe 341214:
Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen x, welche die Ungleichung

$$\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x+1}} < \frac{1}{x-1} \quad \text{erfüllen.}$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

I. Für $x \leq 1$ ist (mindestens) der Term $\frac{1}{\sqrt{x-1}}$ nicht definiert, x also nicht Lösung.

II. Für $x > 1$ gilt: Die Ungleichung

$$\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x-1}} < \frac{1}{\sqrt{x-1}} \tag{1}$$

ist äquivalent zu

$$\frac{1}{\sqrt{x}} < \frac{1}{\sqrt{x-1}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}} \tag{2}$$

Wegen $x+1 > x-1 > 0$ gilt $\frac{1}{\sqrt{x-1}} > \frac{1}{\sqrt{x+1}}$, also ist $\frac{1}{\sqrt{x-1}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ positiv. Auch $\frac{1}{\sqrt{x}}$ ist positiv. Daher ist (2) äquivalent zu

$$\frac{1}{x} < \frac{1}{x-1} - \frac{2}{\sqrt{x^2-1}} + \frac{1}{x+1}$$

dies zu

$$\frac{2}{\sqrt{x^2-1}} < \frac{x^2+1}{x(x^2-1)}$$

und dies wegen $x > 0$ und $x^2 - 1 > 0$ zu

$$2x \cdot \sqrt{x^2-1} < x^2 + 1 \tag{3}$$

Da auch hier beide Seiten der Ungleichung positiv sind, ist (3) der Reihe nach äquivalent zu

$$4x^2(x^2-1) < (x^2+1)^2$$
$$3(x^3 - 2x^2 - \frac{1}{3}) < 0$$
$$(x^2-1)^2 - \frac{4}{3} < 0$$
$$(x^2 - 1 - \frac{2}{\sqrt{3}})(x^2 - 1 + \frac{2}{\sqrt{3}}) < 0 \tag{4}$$

Mit $x > 1$ ist auch $x^2 - 1 + \frac{2}{\sqrt{3}} > 0$ und daher (4) äquivalent zu

$$x^2 - 1 - \frac{2}{\sqrt{3}} < 0$$

wegen $x > 0$ und $1 + \frac{2}{\sqrt{3}} > 0$ ist dies äquivalent zu

$$x < \sqrt{1 + \frac{2}{\sqrt{3}}}$$

Mit I. und II. ist gezeigt: Die Ungleichung (1) gilt genau für alle x mit $1 < x < \sqrt{1 + \frac{2}{\sqrt{3}}}$.

II Runde 2

Aufgabe 011221:
Im internationalen Postverkehr sind für Briefsendungen und Päckchen in rechteckiger Form (Form eines Quaders) die folgenden Höchst- und Mindestmaße vorgeschrieben:

Höchstmaße	Länge, Breite und Höhe zusammen 90 cm,
	größte Länge jedoch nicht mehr als 60 cm;
Mindestmaße	Länge 10 cm, Breite 7 cm.

1) Welches Höchstvolumen kann eine Sendung haben? Wie groß sind in diesem Falle Länge, Breite und Höhe?
2) Welches Mindestvolumen kann eine Sendung haben? Wie groß sind in diesem Falle die Kanten? (Begründung !)

Lösung von Korinna Grabski:
a) Bezeichnen wir die drei Abmessungen des Quaders mit x, y und z, so gilt es, das Produkt xyz nach oben durch die feste Summe $x+y+z=90$ cm abzuschätzen. Dafür ist die Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel bestens geeignet:

$$\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x+y+z}{3}; \qquad (x,y,z \leq 0)$$

Gleichheit nur für $x=y=z$,

$$\Rightarrow V = xyz \leq \frac{(x+y+z)^3}{27} = 27000cm^3 = 27l$$

Wir erkennen, dass das Volumen höchstens 27 l betragen kann, und zwar genau dann, wenn alle Abmessungen untereinander gleich sind: $x=y=z=30$ cm (Würfel).

b) Diese Frage stellt nur eine Art „Sophismus“ dar. Denn da für die Höhe keine Vorschriften gemacht werden, kann theoretisch $z=0$ sein, d. h. das Mindestvolumen ist gleich null.

Aufgabe 021122:
Beweisen Sie, dass stets $\sin\alpha + \cos\alpha \neq 1{,}5$ ist!

Lösung von Eckard Specht:
Nach der Ungleichung über das quadratische und arithmetische Mittel gilt:

$$\frac{|\sin\alpha| + |\cos\alpha|}{2} \leq \sqrt{\frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow |\sin\alpha| + |\cos\alpha| \leq \sqrt{2} < \frac{3}{2}$$

Die letzte Ungleichung folgt durch Wurzelziehen aus $2 = \frac{8}{4} < \frac{9}{4}$.
Schließlich bemühen wir noch die Dreiecksungleichung $|x+y| \leq |x| + |y|$ und erhalten

$$|\sin\alpha + \cos\alpha| \leq |\sin\alpha| + |\cos\alpha| < \frac{3}{2}$$

also das gewünschte Ergebnis $\sin\alpha + \cos\alpha \neq \frac{3}{2}$.

Aufgabe 021223:
a) Beweisen Sie, dass für jedes ebene Dreieck gilt:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma \geq \frac{3}{4}$$

b) In welchem Falle tritt Gleichheit ein?

Lösung von Nuramon:
Es seien a,b,c die Längen der Dreiecksseiten, die den Winkeln α,β,γ gegenüberliegen. Nach Kosinussatz ist die zu beweisende Ungleichung dann äquivalent zu

$$\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^2 + \left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2 + \left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\right)^2 \geq \frac{3}{4}.$$

Ausmultiplizieren und Vereinfachen zeigt, dass dies äquivalent ist zu

$$a^6 + b^6 + c^6 + 3a^2b^2c^2 \geq a^4b^2 + a^2b^4 + b^4c^2 + b^2c^4 + c^4a^2 + c^2a^4$$

Mit $x := a^2, y := b^2, z := c^2$ ist das gerade die Ungleichung von Schur:

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geq xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x).$$

Da $x,y,z > 0$ sind, tritt Gleichheit genau dann ein, wenn $x = y = z$, also $a = b = c$ ein, also genau dann, wenn das Dreieck gleichseitig ist.

Aufgabe 021225:
Beweisen Sie, dass für alle positiven reellen Zahlen a und b stets

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$$

ist! Anmerkung: Achten Sie auf die richtige Reihenfolge der Beweisschritte!

Lösung von Eckard Specht:
Beweis: Aus der bekannten Tatsache, dass das Quadrat einer beliebigen reellen Zahl (hier die Zahl $a-b$) stets nichtnegativ ist, folgt der Reihe nach

$$\begin{aligned} (a-b)^2 &\geq 0 \\ a^2 - 2ab + b^2 &\geq 0 \\ a^2 + b^2 &\geq 2ab \\ \frac{a^2+b^2}{ab} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} &\geq 2 \end{aligned}$$

Dabei bleibt bei der Division durch $ab > 0$ das Relationszeichen erhalten.

Aufgabe 041223:
Es ist zu zeigen, dass für alle reellen Zahlen a und c die Ungleichung

$$a^4 - 4ac^3 + 3c^4 \geq 0$$

richtig ist. Wann gilt das Gleichheitszeichen?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es ist

$$a^4 - 4ac^3 + 3c^4 = a^4 - 2a^2c^2 + c^4 + 2a^2c^2 - 4ac^3 + 2c^4 =$$

$$= (a^2 - c^2)2 + 2c^2(a^2 - 2ac + c^2) = (a^2 - c^2)^2 + 2c^2(a-c)^2 \geq 0.$$

Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn $a = c$ ist.

Aufgabe 061225:
Es seien n, p, r, s natürliche Zahlen. Ferner sei

$$u = \frac{(r + s\sqrt{p})^n + (r - s\sqrt{p})^n}{2}, \quad v = \frac{(r + s\sqrt{p})^n - (r - s\sqrt{p})^n}{2\sqrt{p}}, \quad t = r^2 - s^2p, \quad z = u^2 - t^n$$

a) u und v sind natürliche Zahlen.
b) Die (somit ganze) Zahl z ist durch v^2 ohne Rest teilbar.

Lösung von cyrix:
zu a) Nach dem binomischen Satz ist

$$(r+s\cdot\sqrt{p})^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}r^k(s\sqrt{p})^{n-k}$$

und analog

$$(r-s\cdot\sqrt{p})^n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}r^k(s\sqrt{p})^{n-k}$$

Addiert man nun die beiden Summen, so ergänzen sich die jeweiligen Summanden mit ungeradem $n-k$ zu 0, während die mit geradem $n-k$ in beiden Summen erhalten bleiben und identisch sind. In diesen Fällen erhält man also jeden Summanden doppelt, wobei diese aufgrund des geraden Exponenten von $s\sqrt{p}$ selbst natürliche Zahlen sind. Damit ist der Zähler eine gerade natürliche Zahl und auch nach der Division durch Zwei damit v eine natürliche Zahl.

Analog heben sich bei der Subtraktion die jeweiligen Summanden mit geradem $n-k$ weg, während für diejenigen mit ungeradem $n-k$ sich der doppelte Wert ergibt. In jedem solchem Summanden ist $\sqrt{p}$ in ungerader Potenz enthalten, lässt sich also als geradzahliges, natürliches Vielfaches von $\sqrt{p}$ darstellen, sodass nach der Division durch $2\sqrt{p}$ eine natürliche Zahl v verbleibt.

zu b) Es ist

$$u^2=\frac{(r+s\sqrt{p})^{2n}+(r-s\sqrt{p})^{2n}+2\cdot((r+s\sqrt{p})(r-s\sqrt{p}))^n}{4}=\frac{(r+s\sqrt{p})^{2n}+(r-s\sqrt{p})^{2n}}{4}+\frac{t^n}{2}$$

und analog

$$v^2=\frac{(r+s\sqrt{p})^{2n}+(r-s\sqrt{p})^{2n}}{4}-\frac{t^n}{2}$$

also $z=u^2-t^n=v^2$, was natürlich direkt $v^2|z$ beweist.

Aufgabe 071223:
Beweisen Sie, dass für alle nicht negativen reellen Zahlen a,b,c gilt:

$$a^3+b^3+c^3\geq a^2\sqrt{bc}+b^2\sqrt{ac}+c^2\sqrt{ab}$$

Lösung von Nuramon:
Die Umordnungsungleichung besagt insbesondere, dass für beliebige reelle Zahlen $x_1\geq x_2\geq x_3$ und $y_1\geq y_2\geq y_3$ gilt:

$$x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3\geq x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1$$

und

$$x_1y_1+x_2y_3+x_3y_2\geq x_1y_3+x_2y_2+x_3y_1.$$

Falls eine der Zahlen a,b,c Null ist, dann ist

$$a^3+b^3+c^3\geq a^2\sqrt{bc}+b^2\sqrt{ac}+c^2\sqrt{ab}$$

erfüllt, denn es steht auf der linken Seite eine nichtnegative Zahl und auf der rechten Seite 0.
Seien also a,b,c positiv. Da die zu beweisende Ungleichung symmetrisch in a,b,c ist, können wir o. B. d. A. annehmen, dass $a\geq b\geq c$. Nach Division durch $\sqrt{abc}$ auf beiden Seiten bleibt zu zeigen, dass

$$\frac{a^{2,5}}{\sqrt{bc}}+\frac{b^{2.5}}{\sqrt{ac}}+\frac{c^{2.5}}{\sqrt{ab}}\geq a^{1.5}+b^{1.5}+c^{1.5}$$

gilt. Wegen $a^{2.5} \geq b^{2.5} \geq c^{2.5}$ und $\frac{1}{\sqrt{bc}} \geq \frac{1}{\sqrt{ac}} \geq \frac{1}{\sqrt{ab}}$ gilt also nach Umordnungsungleichung

$$\begin{aligned} \frac{a^{2,5}}{\sqrt{bc}} + \frac{b^{2.5}}{\sqrt{ac}} + \frac{c^{2.5}}{\sqrt{ab}} &\geq \frac{a^{2,5}}{\sqrt{ac}} + \frac{b^{2.5}}{\sqrt{ab}} + \frac{c^{2.5}}{\sqrt{bc}} \\ &= \frac{a^2}{\sqrt{c}} + \frac{b^2}{\sqrt{a}} + \frac{c^2}{\sqrt{b}} \end{aligned}$$

Wegen $a^2 \geq b^2 \geq c^2$ und $\frac{1}{\sqrt{c}} \geq \frac{1}{\sqrt{b}} \geq \frac{1}{\sqrt{a}}$ gilt nach Umordnungsungleichung

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{\sqrt{c}} + \frac{b^2}{\sqrt{a}} + \frac{c^2}{\sqrt{b}} &\geq \frac{a^2}{\sqrt{a}} + \frac{b^2}{\sqrt{b}} + \frac{c^2}{\sqrt{c}} \\ &= a^{1.5} + b^{1.5} + c^{1.5}, \end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt.

Aufgabe 081225:
Man beweise $\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{3} < \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}$ ohne die Wurzeln auszurechnen.

Lösung von cyrix:
Für alle reellen Zahlen x, y ist $x^3 - y^3 = (x-y) \cdot (x^2 + xy + y^2)$, also $x - y = \frac{x^3-y^3}{x^2+xy+y^2}$. Mit $x = \sqrt[3]{4}$ und $y = \sqrt[3]{3}$ für die linke und $x = \sqrt[3]{3}$ sowie $y = \sqrt[3]{2}$ für die rechte Seite der zu zeigenden Ungleichung geht diese äquivalent über in

$$\frac{4-3}{\sqrt[3]{4}^2 + \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{3}^2} < \frac{3-2}{\sqrt[3]{3}^2 + \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2}^2}$$

bzw.

$$\frac{1}{\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{12} + \sqrt[3]{9}} < \frac{1}{\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}}$$

also

$$\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{12} + \sqrt[3]{9} > \sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}$$

was aufgrund der strengen Monotonie der dritten Wurzel und $16 > 9$; $12 > 6$ und $9 > 4$ eine wahre Aussage ist. Damit ist die Ungleichung aus der Aufgabenstellung gezeigt.

Aufgabe 161224:
Es seien x und y
a) nichtnegative reelle Zahlen,
b) nichtnegative ganze Zahlen,
für die die Ungleichungen

$$\begin{aligned} 8x + 3y &\leq 25 \qquad (1) \\ -2x + 3y &\leq 10 \qquad (2) \end{aligned}$$

erfüllt sind. Man weise nach, dass für die Summe

$$z = 2x + y \qquad (3)$$

in den Fällen a) bzw. b) jeweils ein größter Wert existiert, und gebe diesen für jeden der Fälle an.

Lösung von Kitaktus:
a) Multipliziert man dir Ungleichung (1) mit 4/15 und Ungleichung (2) mit 1/15 und addiert beide, so

ergibt sich:

$\frac{32}{15}x + \frac{12}{15}y - \frac{2}{15}x + \frac{3}{15}y \leq \frac{100}{15} + \frac{10}{15}$ bzw. zusammengefasst $2x + y \leq \frac{22}{3}$.(4) z ist also höchstens $\frac{22}{3}$.

Für $x = \frac{3}{2}$ und $y = \frac{13}{3}$ sind (1) und (2) erfüllt: $12 + 13 \leq 25$ und $-3 + 13 \leq 10$. Außerdem gilt $z = 2x + y = 3 + \frac{13}{3} = \frac{22}{3}$.

z ist also nach oben beschränkt und der größtmögliche Wert ist $\frac{22}{3}$.

b) Die hier zugelassenen Paare $(x; y)$ bilden eine Teilmenge der in a) zugelassenen Paare. z kann in diesem Fall also keinen größeren Wert annehmen als in a). Es gilt daher ebenfalls $z \leq \frac{22}{3}$ (5).
Da x und y ganzzahlig sind, ist auch $z = 2x + y$ ganzzahlig. Damit kann (5) verschärft werden zu $z \leq 7$.

Für $x = 2$ und $y = 3$ sind (1) und (2) erfüllt: $16 + 9 \leq 25$ und $-4 + 9 \leq 10$. Außerdem gilt $z = 2x + y = 4 + 3 = 7$.

z ist also auch hier nach oben beschränkt und der größtmögliche Wert ist 7.

Aufgabe 211222:
Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen x, für die $\sqrt{2x^2 - 1} < \frac{1}{x}$ gilt.

Lösung von weird:
Da der linksstehende Wurzelausdruck jedenfalls nichtnegativ und $\frac{1}{x}$ für $x = 0$ nicht definiert ist, können wir im Folgenden o. B. d. A. $x > 0$ voraussetzen. Des weiteren muss sogar

$$2x^2 - 1 \geq 0 \quad \text{bzw.} \quad x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

gelten, damit der linksstehende Wurzelausdruck überhaupt definiert ist. Durch Quadrieren der gegebenen Ungleichung erhält man dann

$$2x^2 - 1 < \frac{1}{x^2}$$

und durch Multiplizieren mit x^2 nach einer einfachen Umformung

$$2x^4 - x^2 - 1 = (2x^2 + 1)(x^2 - 1) < 0$$

Hier dürfen wir gewissermaßen durch $2x^2 + 1 > 0$ „kürzen“ und erhalten so $x^2 < 1$, wegen $x > 0$ also dann schließlich $x < 1$. Tatsächlich erfüllen alle

$$x \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$$

auch wirklich die angegebene Ungleichung.

Aufgabe 221223:
Man beweise:
Sind a und b von Null verschiedene natürliche Zahlen, d ihr größter gemeinsamer Teiler und v ihr kleinstes gemeinsames Vielfaches, so gilt $a + b \leq d + v$. (1)
Man untersuche, für welches a, b in (1) das Gleichheitszeichen gilt.

Lösung von weird:
Beweis: Ausgehend von der offensichtlich gültigen Ungleichung

$$(a-d)(b-d) \geq 0 \quad (*)$$

gelangt man unter Verwendung von $d > 0$ durch einfache Äquivalenzumformungen zu

$$a + b \leq d + \frac{ab}{d} \quad (**)$$

was wegen $v = \frac{ab}{d}$ genau die zu beweisende Ungleichung darstellt.
Da ferner für die ursprüngliche Ungleichung (*) das Gleichheitszeichen genau für $a = d$ oder $b = d$, also $a|b$ bzw. $b|a$ gilt, ist dies dann auch die entsprechende Bedingung für Gleichheit in (**).

Aufgabe 291222:
Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen m, die die Bedingung erfüllen, dass für jede reelle Zahl x die folgende Ungleichung (1) gilt:

$$x^2 + (m+2)x + 8m + 1 > 0 \qquad (1)$$

Lösung von MontyPythagoras:
Per quadratischer Ergänzung kann man die Ungleichung wie folgt darstellen:

$$\left(x + \frac{m+2}{2}\right)^2 + 8m + 1 - \left(\frac{m+2}{2}\right)^2 > 0$$

Diese Ungleichung ist für alle reellen x immer erfüllt, wenn

$$8m + 1 - \left(\frac{m+2}{2}\right)^2 > 0$$

$$32m + 4 - m^2 - 4m - 4 > 0$$

$$m^2 - 28m < 0$$

Die Ungleichung ist erfüllt für $0 < m < 28$.

Aufgabe 291223:
Über fünf Streckenlängen a, b, c, d, e werde vorausgesetzt, dass je drei von ihnen die Seitenlängen eines Dreiecks sind.
Man beweise, dass unter dieser Voraussetzung stets eines dieser Dreiecke spitzwinklig sein muss.

Lösung von Nuramon:
Aus dem Kosinussatz und der Tatsache, dass in einem Dreieck der größte Winkel der größten Seite gegenüberliegt, folgt, dass ein Dreieck mit Seitenlängen $x \leq y \leq z$ genau dann spitzwinklig ist, wenn $x^2 + y^2 > z^2$ gilt.
Sei O. B. d. A. $a \leq b \leq c \leq d \leq e$. Angenommen die Dreiecke c,d,e bzw. a,b,c bzw. a,b,d wären nicht spitzwinklig, dann wäre nach obiger Bemerkung

$$e \geq \sqrt{c^2 + d^2} \geq \sqrt{(a^2 + b^2) + (a^2 + b^2)} = \sqrt{2(a^2 + b^2)}.$$

Aus der Dreiecksungleichung im Dreieck a,b,e und der Ungleichung zwischen arithmetischem und quadratischem Mittel folgt andererseits

$$e < a + b \leq \sqrt{2(a^2 + b^2)}.$$

Somit erhalten wir widersprüchlicherweise, dass sowohl $e \geq \sqrt{2(a^2 + b^2)}$ als auch $e < \sqrt{2(a^2 + b^2)}$ gelten muss. Also muss eines der genannten Dreiecke spitzwinklig sein.

Aufgabe 301222:
Man ermittle alle diejenigen Paare $(x; y)$ ganzer Zahlen x und y, die dem System der folgenden Ungleichungen (1) und (2) genügen:

$$2x^2 + 2y^2 - 12x + 20y + 65 < 0 \tag{1}$$
$$4x + 2y > 5 \tag{2}$$

Lösung von weird:
Mittels quadratischer Ergänzung kann man (1) auch in der Form

$$(x-3)^2 + (y+5)^2 < \frac{3}{2}$$

schreiben, woraus sofort

$$(x,y) \in \{(3,-6),(2,-5),(3,-5),(4,-5),(3,-4)\}$$

für die ganzzahligen Lösungen (x,y) folgt. Von diesen Paaren erfüllt aber dann nur $(x,y) = (4,-5)$ auch die zweite Bedingung, welches somit auch die einzige Lösung hier ist.

Aufgabe 311224:
Man beweise, dass für alle reellen Zahlen x die Ungleichung

$$x^6 + x^5 + 4x^4 - 12x^3 + 4x^2 + x + 1 \geq 0$$

gilt.

Lösung von weird:
Beweis: Indem man

$$f(x) := x^6 + x^5 + 4x^4 - 12x^3 + 4x^2 + x + 1$$

setzt, rechnet man leicht nach, dass gilt

$$f(1) = f'(1) = 0$$

d. h., $x = 1$ ist (mindestens) eine doppelte Nullstelle von $f(x)$. Es reicht somit

$$g(x) := \frac{f(x)}{(x-1)^2} = x^4 + 3x^3 + 9x^2 + 3x + 1 \geq 0$$

zu zeigen. Wegen $g(0) = 1 > 0$ genügt dafür der Nachweis, dass $g(x)$ keine reellen Nullstellen hat. Dies folgt jedoch sofort aus

$$\frac{g(x)}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) + 7 = \left(x + \frac{1}{x} + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{19}{4} > 0$$

Alternativ-Lösung von cyrix:
Es sei

$$f(x) := x^6 + x^5 + 4x^4 - 12x^3 + 4x^2 + x + 1.$$

Dann ist offenbar $x = 1$ eine Nullstelle dieser Funktion, sodass sie sich auch schreiben lässt als

$$f(x) = (x-1) \cdot (x^5 + 2x^4 + 6x^3 - 6x^2 - 2x - 1).$$

Weiterhin ist $x = 1$ auch Nullstelle des zweiten Faktors, sodass ein weiteres mal der Faktor $(x-1)$ ausgelammert werden kann:

$$f(x) = (x-1)^2 \cdot (x^4 + 3x^3 + 9x^2 + 3x + 1).$$

Der erste Faktor $(x-1)^2$ ist in jedem Fall nicht-negativ, sodass nur zu zeigen bleibt, dass auch für alle reellen Zahlen x der Ausdruck $(x^4+3x^3+9x^2+3x+1)$ stets nicht-negativ ist, was man aber wegen

$$\begin{aligned} 0 &< (x^2+\frac{3}{2}x+1)^2+\frac{19}{4}x^2 \\ &= x^4+\frac{9}{4}x^2+1+2\cdot x^2\cdot\frac{3}{2}x+2\cdot x^2\cdot 1+2\cdot\frac{3}{2}x\cdot 1+\frac{19}{4}x^2 \\ &= x^4+3x^3+\left(\frac{9}{4}+2+\frac{19}{4}\right)x^2+3x+1 \\ &= x^4+3x^3+9x^2+3x+1 \end{aligned}$$

leicht einsieht, sodass das Gewünschte folgt.

Aufgabe 321222:
Man beweise, dass für jede positive ganze Zahl n die Ungleichung gilt:

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot ...\cdot 2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

Lösung von cyrix:
Mit

$$x:=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots\cdot 2n}$$

und $(k-1)(k+1)=k^2-1<k^2$ für alle natürlichen Zahlen k ist

$$x^2=\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot\ldots\cdot(2n-1)^2}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\ldots\cdot(2n)^2}<\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot\ldots\cdot(2n-1)^2}{(1\cdot 3)\cdot(3\cdot 5)\cdot(5\cdot 7)\ldots\cdot((2n-1)\cdot(2n+1))}=\frac{1}{2n+1}$$

also $x^2<\frac{1}{2n+1}$ bzw. $x<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$, $\square$.

Aufgabe 331222:
a) Beweisen, Sie, dass für jede natürliche Zahl $n\geq 4$ die Ungleichung

$$\frac{4^2-9}{4^2-4}\cdot\frac{5^2-9}{5^2-4}\cdot ...\cdot\frac{n^2-9}{n^2-4}>\frac{1}{6}$$

gilt!
b) Kann man die Zahl $\frac{1}{6}$ auf der rechten Seite dieser Ungleichung durch die Zahl 0,1667 ersetzen, ohne dass damit aus der in a) zu beweisenden Aussage eine falsche Aussage entsteht?

Lösung von MontyPythagoras:
Aufgabenteil a)

$$\frac{(4-3)(5-3)(6-3)...(n-3)}{(4-2)(5-2)(6-2)...(n-2)}\cdot\frac{(4+3)(5+3)(6+3)...(n+3)}{(4+2)(5+2)(6+2)...(n+2)}=$$
$$=\frac{1\cdot 2\cdot 3...(n-3)}{2\cdot 3\cdot 4...(n-2)}\cdot\frac{7\cdot 8\cdot 9...(n+3)}{6\cdot 7\cdot 8...(n+2)}=\frac{n+3}{6(n-2)}>\frac{1}{6}$$

Aufgabenteil b)

$$\frac{n+3}{6(n-2)}>0{,}1667$$
$$n+3>1{,}0002(n-2)$$
$$0{,}9996>0{,}0002\cdot n$$
$$n<4998$$

Für die Zahl 0,1667 anstatt $\frac{1}{6}$ ist die Ungleichung nur erfüllt für $n < 4998$, weshalb die Ungleichung dann nicht mehr für alle n erfüllt ist.

Aufgabe 341221:
Man beweise, dass für alle nichtnegativen reellen Zahlen x und y die Ungleichungen gelten:

$$0 \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} - \frac{x+y}{2} \leq \frac{|x-y|}{2}$$

Lösung von MontyPythagoras:
Zunächst die linke Ungleichung:

$$0 \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} - \frac{x+y}{2}$$
$$\frac{x+y}{2} \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$$
$$\frac{x^2+2xy+y^2}{4} \leq \frac{x^2+y^2}{2}$$
$$x^2+2xy+y^2 \leq 2x^2+2y^2$$
$$0 \leq x^2-2xy+y^2$$
$$0 \leq (x-y)^2$$

Das ist immer erfüllt. Rechte Ungleichung: es ist

$$\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} - \frac{x+y}{2} \leq \frac{|x-y|}{2}$$
$$\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \leq \frac{x+y}{2} + \frac{|x-y|}{2} = \max(x,y)$$
$$\frac{x^2+y^2}{2} \leq (\max(x,y))^2 = \max(x^2,y^2)$$

Auch das ist immer erfüllt, da $x^2 \leq \max(x^2,y^2)$ und $y^2 \leq \max(x^2,y^2)$ ist. q. e. d.

III Runde 3

Aufgabe 011235:
Es ist zu beweisen, dass $x + y \leq a\sqrt{2}$, wenn $x^2 + y^2 = a^2$ und $a \geq 0$ ist!

Lösung von Eckard Specht:
Die kürzeste Variante ist diejenige mit der Ungleichung über das quadratische und arithmetische Mittel, falls x, y positive Zahlen sind:

$$\frac{x+y}{2} \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} = \sqrt{\frac{a^2}{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}} \Rightarrow x+y \leq \sqrt{2}a$$

Wegen $a \geq 0$ gilt die Behauptung erst recht für nichtpositive x, y. Die Ungleichung selbst kann einfach wie folgt gezeigt werden:

$$\begin{aligned}
(x-y)^2 &\geq 0 \\
x^2 + y^2 &\geq 2xy \\
2(s^2 + y^2) &\geq x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2 \\
\frac{x^2+y^2}{2} &\geq \frac{(x+y)^2}{4} = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \\
\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} &\geq \frac{x+y}{2}
\end{aligned}$$

Aufgabe 021131:
Beweisen Sie, dass für alle positiven reellen Zahlen a, b, c gilt:

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} > \frac{3}{a+b+c}$$

Lösung von Eckard Specht:
Angewandt wird die Ungleichung zum Arithmetischen und Harmonischen Mittel: Arithmetisches Mittel $\geq$ Harmonisches Mittel.
Genutzt werden dabei die $x_1 = a+b$, $x_2 = b+c$, $x_3 = a+c$:

$$\frac{(a+b)+(b+c)+(a+c)}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c}}$$

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \frac{9}{(a+b)+(b+c)+(a+c)} = \frac{9}{2(a+b+c)} > \frac{3}{a+b+c}$$

Aufgabe 021231:
Für welche Werte von x gilt

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} - \frac{1}{\sqrt{1-x}} \geq 1$$

Lösung von Korinna Grabski:
Als erstes ist festzuhalten, dass der Wertebereich von x durch die Formel bereits wie folgt eingeschränkt ist: $-1 < x < 1$. Nun sucht man die Grenzstellen der Ungleichung, d. h. man berechnet zunächst:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1+x}} - \frac{1}{\sqrt{1-x}} &= 1 \\
\frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x^2}} &= 1 \\
\frac{1-x+1+x+2\sqrt{1-x^2}}{1-x^2} &= 1 \\
\frac{2-2\sqrt{1-x^2}}{1-x^2} &= 1 \\
2-2\sqrt{1-x^2} &= 1-x^2 \\
0 = 1-x^2-2+2\sqrt{1-x^2}
\end{aligned}$$

Jetzt wird substituiert mit $z = \sqrt{1-x^2}$.

$$0 = z^2 + 2z - 2 \Rightarrow z_{1,2} = -1 \pm \sqrt{3}$$

Über die Substitution kann x bestimmt werden: $x = \sqrt{1-z^2}$.
Für $z_2 = -1-\sqrt{3}$ lässt sich kein x berechnen. Für $z_1 = -1+\sqrt{3}$ ergibt sich $x \approx \pm 0{,}6813$. Um zu klären, wo jetzt tatsächlich eine Grenze liegt (durch das Quadrieren können Scheinlösungen entstehen) und wie sich die Kurve verhält, setzt man Werte aus jedem Intervall in die Gleichung ein.

$$\begin{aligned} x=-0{,}7: &\quad 1{,}059 \geq 1 \quad \text{w.A.}\\ x=0: &\quad 0 \geq 1 \quad \text{(f.A.)}\\ x=0{,}7: &\quad -1{,}059 \geq 1 \quad \text{(f.A.)} \end{aligned}$$

Damit gilt die Gleichung für $-1 < x \leq -0{,}6813$.

Aufgabe 021234:
Geben Sie (für alle positiven Winkel x) für

$$\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} \geq \frac{8}{3}$$

alle Lösungen an!

Lösung von Carsten Balleier:
Da $\sin^2 x > 0$ und $\cos^2 x > 0$ wegen der Formulierung der Ungleichung angenommen werden darf (Gleichheit ist nicht zulässig), kann die Ungleichung durch Multiplikation zu

$$\cos^2 x - \sin^2 x \geq \frac{8}{3} \sin^2 x \cos^2 x$$

umgeformt werden, was mittels Additionstheoremen gleichbedeutend ist mit

$$\cos 2x \geq \frac{2}{3} \sin^2 2x = \frac{2}{3}(1-\cos^2 2x)$$

Substituiert man nun $z = \cos 2x$, reduziert sich das Problem auf die quadratische Ungleichung $2z^2+3z-2 \geq 0$. Ihre Lösungsmenge ist $z \leq -2 \cup z \geq \frac{1}{2}$, wobei nur für $z \in [\frac{1}{2}, 1]$ die Rücksubstitution möglich ist. Diese ergibt, dass

$$x \in (0, \frac{\pi}{6}] \cup [\frac{5\pi}{6}, \pi)$$

gelten muss; nur für diese x (und deren Wiederholung mit der Periode π) ist die gegebene Ungleichung erfüllt.

Aufgabe 031234:
Für welche reellen Zahlen x ist

a) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+1} > \dfrac{2}{x+\frac{1}{2}}$ b) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{2}{x+\frac{1}{2}}$ c) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+1} < \dfrac{2}{x+\frac{1}{2}}$

Lösung von Carsten Balleier:
Zuerst wählen wir die Bezeichnungen $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}$ und $g(x) = \frac{2}{x+\frac{1}{2}}$. Dann betrachten wir den Fall b), da sich Gleichungen leichter handhaben lassen und Schlüsse auf die Ungleichungen zulassen. Folgende Umformungen führen zur Lösung:

$$f(x) = \frac{x+1+x+}{x(x+1)} = \frac{2x+1}{(x+\frac{1}{2})^2 - (\frac{1}{2})^2}$$

und $g(x) = \frac{4}{2x+1}$. Die Gleichung lautet nunmehr:

$$(2x+1)^2 = 4\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right]$$

Das führt auf die falsche Aussage $0 = 1$.
Nun waren aber alle Umformungen äquivalent, also kann die gestellte Gleichung keine Lösungen besitzen.
Das bedeutet aber auch, dass sich die Funktionen f und g nicht schneiden.
Daraus könnte man den voreiligen Schluss ziehen, dass entweder überall a) oder überall c) gilt.
Wir bemerken aber, dass f und g Polstellen haben, und zwar bei $x = -1$, $x = 0$ bzw. $x = -\frac{1}{2}$. Es müssen also die vier Intervalle $(-\infty, -1)$, $(-1, -\frac{1}{2})$, $(-\frac{1}{2}, 0)$ und $(0,\infty)$ getrennt untersucht werden.
Es würde genügen, f und g nur an einer Stelle aus jedem Intervall zu betrachten. Trotzdem wird hier die Lösung einer Ungleichung ausführlich vorgeführt. Mit obigen Umformungen erhält man (aus a):

$$\frac{2x+1}{(x+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}} > \frac{4}{2x+1}$$

Bei einer Multiplikation mit $(2x+1)$ muss man die Fälle $x > \frac{1}{2}$ und $x < \frac{1}{2}$ unterscheiden, bei letzterem würde das Relationszeichen umgekehrt. Im ersteren folgt:

$$\frac{2x+1}{(2x+1)^2-1} > 1 \qquad | \cdot [(2x+1)^2-1]$$

Die eckigen Klammern sind für $x < 0$ negativ, im Intervall $(-\frac{1}{2}, 0)$ ergibt sich $0 < -1$, also eine falsche Aussage. Dort gilt daher nicht a), sondern c).
Für die anderen Intervalle geht man analog vor. Dabei erhält man: c) gilt außerdem für $x < -1$, a) gilt für $x \in (-1, -\frac{1}{2})$ und $x > 0$.

Aufgabe 061233:
Es sind alle diejenigen reellen Zahlen x in den Intervallen $0 < x < \frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ anzugeben, für die

$$f(x) = \sin x + \cos x + \tan x + \cot x$$

positiv ist und alle diejenigen reellen Zahlen x, in denselben Intervallen, für die $f(x)$ negativ ist.
Gibt es einen kleinsten positiven Wert, den $f(x)$ in den obigen Intervallen annimmt, und wenn ja, welcher Wert ist dies?

Lösung von cyrix:
Für $0 < x < \frac{\pi}{2}$ sind sowohl $\sin x$ als auch $\cos x$, und damit auch

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \text{und}\cot x = \frac{1}{\tan x}$$

allesamt positiv, also auch $f(x)$.
Für $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ ist zwar weiterhin $\sin x$ positiv, aber $\cos x$ und damit auch $\tan x$ und $\cot x$ negativ. Wegen $0 > \cos x > -1$ ist $\frac{1}{\cos x} < -1$, also $\tan x < -\sin x$ und damit

$$f(x) < \sin x + \cos x - \sin x + \cot x = \cos x + \cot x < 0$$

Positive Werte nimmt f also nur auf dem ersten Intervall an. Dort betrachten wir nun die zwei Funktionen

$$f_1(x) = \sin x + \cos x \qquad \text{und} \qquad f_2(x) = \tan x + \cot x = \tan x + \frac{1}{\tan x}$$

Damit ist wegen $\tan x > 0$ direkt $f_2(x) \geq 2$, wobei Gleichheit nur für $\tan x = 1$, also $x = \frac{\pi}{4}$ als einzigem Wert im betrachteten Intervall, angenommen wird.
Für die Analyse von f_1 betrachten wir deren Ableitungsfunktion $f_1'(x) = \cos x - \sin x$, welche im betrachteten Intervall wieder nur genau für $x = \frac{\pi}{4}$ verschwindet. Da in diesem Intervall die Kosinus-Funktion streng monoton fallend und die Sinus-Funktion streng monoton steigend ist, ist auch f_1' streng monoton

fallend und nimmt demnach für Argumente x kleiner als $\frac{\pi}{4}$ positive, und für größere Argumente negative Werte an.
Demzufolge ist die Funktion f_1 im Intervall $0 < x < \frac{\pi}{4}$ streng monoton wachsend und im Intervall $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ streng monoton fallend. Also ist

$$f_1(x) \geq f_1\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

wobei Gleichheit nur für $x = \frac{\pi}{4}$ angenommen wird.
Zusammen ergibt sich also

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) \geq \sqrt{2} + 2$$

wobei Gleichheit genau für $x = \frac{\pi}{4}$ angenommen wird. Es ist also $2 + \sqrt{2}$ der gesuchte, kleinste positive Wert, den f im betrachteten Intervall annimmt.

Aufgabe 091234:
Beweisen Sie, dass das Produkt

$$p = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot ... \cdot \frac{2n-1}{2n} \cdot ... \cdot \frac{2499}{2500}$$

(n natürliche Zahl) kleiner als 0,02 ist!

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:
Nach der dritten binomischen Formel gilt $(2n+1)(2n-1) = (2n)^2 - 1^2 < (2n)^2$. Setzen wir ein paar Werte für n ein:

$$n = 1: \quad 3 \cdot 1 < 2^2 \qquad n = 2: \quad 5 \cdot 3 < 4^2$$

$$n = 3: \quad 7 \cdot 5 < 6^2 \qquad ... \qquad n = 1250: \quad 2501 \cdot 2499 < 2500^2$$

Multiplizieren wir die Ungleichungen:

$$1 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot ... \cdot 2499^2 \cdot 2501 < 2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot ... \cdot 2500^2$$

$$\frac{1 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot ... \cdot 2499^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot ... \cdot 2500^2} < \frac{1}{2501}$$

Ziehen wir noch die Wurzel:

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot 2499}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot ... \cdot 2500} < \frac{1}{\sqrt{2501}} < \frac{1}{\sqrt{2500}} = \frac{1}{50} = 0{,}02$$

Alternativ-Lösung von cyrix:
Es ist wegen $(n-1)(n+1) = n^2 - 1 < n^2$:

$$2501 \cdot p^2 = 1 \cdot \frac{1 \cdot 3}{2^2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4^2} \cdot \ldots \cdot \frac{2497 \cdot 2499}{2498^2} \cdot \frac{2499 \cdot 2501}{2500^2} < 1 \quad \text{also}$$

$$p < \sqrt{\frac{1}{2501}} < \frac{1}{\sqrt{2500}} = \frac{1}{50} = 0{,}02$$

Aufgabe 101231:
Beweisen Sie den folgenden Satz!
Sind α, β, γ die Größen der Innenwinkel eines beliebigen Dreiecks, so gilt:

$$\sin^2 \gamma \geq \sin 2\alpha \cdot \sin 2\beta$$

Lösung von cyrix:
Aufgrund der Innenwinkelsumme im Dreieck gilt $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$, also

$$\sin\gamma = \sin(180° - (\alpha+\beta)) = \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

Damit ist

$$\begin{aligned}\sin^2\gamma &= \sin^2\alpha\cos^2\beta + 2\sin\alpha\cos\beta\cdot\sin\beta\cos\alpha + \cos^2\alpha\sin^2\beta\\ &= \sin^2\alpha\cos^2\beta - 2\sin\alpha\cos\beta\cdot\sin\beta\cos\alpha + \cos^2\alpha\sin^2\beta + 4\sin\alpha\cos\alpha\cdot\sin\beta\cos\beta\\ &= (\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta)^2 + \sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta\\ &= \sin^2(\alpha-\beta) + \sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta \geq \sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta\end{aligned}$$

$\square$.

Aufgabe 111235:
Es ist zu beweisen, dass

$$\frac{1}{1-\sin 2x} + \frac{1}{1-\sin 2y} \geq \frac{2}{1-\sin(x+y)} \qquad (1)$$

für alle reellen Zahlenpaare (x,y) mit

$$0 < x < \frac{\pi}{4} \qquad \text{und} \qquad 0 < y < \frac{\pi}{4} \qquad (2)$$

erfüllt ist.
Ferner ist eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür anzugeben, dass in (1) unter der Nebenbedingung (2) Gleichheit eintritt.

Lösung von weird:
Eine zentrale Rolle in den folgenden Überlegungen wird die Funktion

$$f: (0,\frac{\pi}{2}) \to (1,\infty), \quad t \mapsto \frac{1}{1-\sin t}$$

spielen. Ihre Ableitungen

$$f'(t) = \frac{\cos t}{(1-\sin t)^2}$$

sowie

$$f''(t) = \frac{-\sin t(1-\sin t)^2 + 2(1-\sin t)(1-\sin^2 t)}{(1-\sin t)^4} = \frac{2+\sin t}{(1-\sin t)^2}$$

zeigen, dass sowohl f, als auch f' auf dem betrachteten Intervall $(0,\frac{\pi}{2})$ streng monoton steigend sind.

Um dies zu verwenden, formen wir (1) zunächst um zu

$$f(2y) - f(x+y) \geq f(x+y) - f(2x)$$

woraus wir in Verbindung mit der Monotonie von f sofort ersehen können, dass das Gleichheitszeichen in (1) genau für $x = y$ gilt. Insbesondere können wir daher im Folgenden o. B. d. A. $x < y$ voraussetzen. Damit wird dann (1) für diesen Fall zu

$$\frac{f(2y) - f(x+y)}{2y - (x+y)} > \frac{f(x+y) - f(2x)}{(x+y) - 2x} \qquad (*)$$

Dass dies gilt, ist aber nach dem schon Bewiesenen klar, denn nach dem Mittelwertsatz der Differenzialrechnung gilt

$$\exists u \in (x+y,2y): \ \frac{f(2y)-f(x+y)}{2y-(x+y)} = f'(u) \quad \text{bzw.} \quad \exists v \in (2x,x+y): \ \frac{f(x+y)-f(2x)}{(x+y)-2x} = f'(v)$$

und aus der simplen Tatsache

$$u > v \Rightarrow f'(u) > f'(v)$$

folgt also dann auch sofort (*) und damit unsere Behauptung hier.

Aufgabe 131232:
Man beweise, dass die Ungleichung

$$\sqrt[n]{a^n + b^n} < \sqrt[m]{a^m + b^m}$$

für alle positiven reellen Zahlen a, b und alle natürlichen Zahlen m, n mit $n > m$ gilt.

Lösung von cyrix:
Es sei o. B. d. A. $a \leq b$. Mit Division durch b und der Substitution $0 < x := \frac{a}{b} \leq 1$ geht die zu zeigende Ungleichung in die folgende äquivalente Ungleichung über $\sqrt[n]{1 + x^n} < \sqrt[m]{1 + x^m}$ bzw. nach Potenzieren mit nm in $(1 + x^n)^m < (1 + x^m)^n$. Da $0 < x \leq 1$ ist, gilt auch $0 < x^{n-m} \leq 1$ und damit

$$1 + x^n = 1 + x^m \cdot x^{n-m} \leq 1 + x^m \qquad \text{sowie} \qquad (1 + x^n)^m \leq (1 + x^m)^m < (1 + x^m)^n, \square$$

Aufgabe 141232:
Gegeben sei eine rationale Zahl c. Ferner sei M die Menge aller derjenigen Paare (a, b) aus rationalen Zahlen a, b, für die $a + b = c$ gilt.
Beweisen Sie, dass unter allen Produkten $a \cdot b$ mit $(a, b) \in M$ dasjenige am größten ist, das aus dem Paar (a, b) mit $a = b$ gebildet wurde!

Lösung von weird:
Wegen

$$a \cdot b = \left(\frac{c}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

für $(a,b) \in M$ wird der Maximalwert für $a \cdot b$, nämlich $a \cdot b = \left(\frac{c}{2}\right)^2$, genau für $a = b$, also dann für

$$(a,b) = \left(\frac{c}{2}, \frac{c}{2}\right) \in M$$

erreicht.

Aufgabe 171234:
Man beweise, dass für alle positiven reellen Zahlen a, b, c mit $a^2 + b^2 + c^2 = \frac{5}{3}$ die Ungleichung gilt:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c} < \frac{1}{abc}$$

Lösung von weird:
Beweis: Ausgehend von

$$(a + b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc \geq 0$$

erhält man durch Einsetzen von $a^2 + b^2 + c^2 = \frac{5}{3}$ und Kürzen durch 2 die weitere Ungleichung

$$bc + ac - ab \leq \frac{5}{6} < 1$$

und daraus nach Division durch $abc > 0$ schließlich

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c} < \frac{1}{abc}$$

wie behauptet.

Aufgabe 181235:
Es sei $n \geq 2$ eine gegebene ganze Zahl. Man untersuche, ob sich unter allen denjenigen reellen Zahlen $x_1, ..., x_n \geq 0$, für die $x_1 + ... + x_n = 1$ gilt, auch solche befinden, für die der Wert von $x_1^3 + ... + x_n^3$ a) möglichst groß, b) möglichst klein ist.
Ist dies der Fall, so ermittle man diesen größten bzw. kleinsten Wert.

Lösung von MontyPythagoras:
Aufgabenteil a)
Wir behaupten, dass die Summe $s = \sum_{k=1}^n x_i^3$ genau dann maximal ist, wenn von den n Summanden $n-1$ Summanden gleich null und ein Summand gleich 1 ist. Die Summe wäre dann $s_{max} = 1$, was den Maximalwert darstellt.

Beweis:
Wir betrachten zwei Summenglieder x_i und x_j. Im Rahmen der Randbedingung $\sum_{k=1}^n x_i = 1$ ist zulässig, zwei Summanden zu addieren als einen neuen Summanden, und den anderen null zu setzen. Sei $x_i' = x_i + x_j$ und $x_j' = 0$. Dann ist

$$x_i'^3 + x_j'^3 = (x_i + x_j)^3 = x_i^3 + 3x_i^2 x_j + 3x_i x_j^2 + x_j^3 = x_i^3 + x_j^3 + 3x_i x_j (x_i + x_j)$$

Da $x_{i,j} \geq 0$, folgt daraus, dass

$$x_i'^3 + x_j'^3 \geq x_i^3 + x_j^3$$

(Gleichheit tritt nur ein, wenn mindestens einer der Summanden ohnehin schon null ist). Die Summe der dritten Potenzen wird also größer, wenn man aus zwei Summanden einen macht und den anderen null setzt. Das wiederholt man so oft, bis nur noch ein Summand übrig ist, der voraussetzungsgemäß gleich eins ist.
Aufgabenteil b)
Es sei $x_i = \frac{1}{n} + z_i$. Damit die genannte Bedingung erfüllt ist, muss gelten:

$$\sum_{k=1}^n x_i = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{n} + z_i \right) = 1 + \sum_{k=1}^n z_i = 1$$

so dass

$$\sum_{k=1}^n z_i = 0$$

sein muss. Die zu minimierende Summe ist

$$s = \sum_{k=1}^n x_i^3 = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{n} + z_i \right)^3$$

$$s = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{n^3} + \frac{3}{n^2} z_i + \frac{3}{n} z_i^2 + z_i^3 \right)$$

$$s = \frac{1}{n^2} + \frac{3}{n^2} \sum_{k=1}^n z_i + \sum_{k=1}^n \left(\frac{3}{n} + z_i \right) z_i^2$$

$$s = \frac{1}{n^2} + \sum_{k=1}^n \left(\frac{2}{n} + x_i \right) z_i^2$$

Da $\left(\frac{2}{n} + x_i\right) > 0$ und $z_i^2 > 0$, sind alle Summanden positiv, so dass gilt

$$s \geq \frac{1}{n^2} = s_{min}$$

Das ist der gesuchte minimale Wert, der genau dann eintritt, wenn alle $z_i = 0$ bzw. alle $x_i = \frac{1}{n}$ sind.

Aufgabe 191233B:
Man untersuche, ob es natürliche Zahlen n gibt, für die

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n^2} > 1000 \qquad (1)$$

gilt.
Wenn dies der Fall ist, so untersuche man, ob es eine natürliche Zahl p derart gibt, dass jede (im Dezimalsystem) p-stellige Zahl n die Eigenschaft (1) hat. Trifft auch das zu, so ermittle man eine derartige Zahl p.

Lösung von MontyPythagoras:
Wir nutzen eine bekannte Ungleichung des natürlichen Logarithmus, und zwar:

$$x > \ln(1+x) \quad \forall \quad x > 0$$

Daher ist

$$\frac{1}{n} > \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln\frac{n+1}{n} = \ln(n+1) - \ln n$$

Die Summe in der Aufgabenstellung ist dann

$$s = \sum_{k=n}^{n^2} \frac{1}{k}$$

Mit obiger Ungleichung gilt:

$$s > \sum_{k=n}^{n^2} (\ln(k+1) - \ln k) = \ln(n^2+1) - \ln n$$

(Die Summe ist eine Teleskopsumme). Somit gilt

$$s > \ln\frac{n^2+1}{n}$$

Wenn dieser Term größer als 1000 ist, ist auch $s > 1000$. Daher ist eine hinreichende Bedingung:

$$\frac{n^2+1}{n} > e^{1000}$$

Offensichtlich ist n sehr groß, so dass man (n^2+1) durch n annähern kann. Dann gilt

$$n > e^{1000} \approx 1{,}97 \times 10^{434}$$

Das ist eine 435-stellige Zahl. $1{,}0 \times 10^{434}$ ist auch 435-stellig, aber deutlich kleiner als die genannte Untergrenze. Erst wenn die Zahl der Dezimalstellen mindestens 436 beträgt, ist die Ungleichung immer erfüllt. Somit gilt $p \geq 436$.

Alternativ-Lösung von MontyPythagoras:
Es ist

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{x}\mathrm{d}x < \frac{1}{n} < \int_{n-1}^{n} \frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

da $\frac{1}{x}$ streng monoton fallend ist. Damit ergibt sich als Abgrenzung für die Summe:

$$s = \sum_{k=n}^{n^2} \frac{1}{k}$$

$$\sum_{k=n}^{n^2} \int\limits_{k}^{k+1} \frac{1}{x} \mathrm{d}x < s < \sum_{k=n}^{n^2} \int\limits_{k-1}^{k} \frac{1}{x} \mathrm{d}x$$

Die Integrale reihen sich in den Summen nun „nahtlos“ aneinander, so dass man folgern kann:

$$\int\limits_{n}^{n^2+1} \frac{1}{x} \mathrm{d}x < s < \int\limits_{n-1}^{n^2} \frac{1}{x} \mathrm{d}x$$

Daraus folgt:

$$\ln(n^2+1) - \ln n < s < \ln(n^2) - \ln(n-1)$$

$$\ln \frac{n^2+1}{n} < s < \ln \frac{n^2}{n-1}$$

Die Ungleichung der Aufgabenstellung ist erfüllt, wenn gilt

$$\ln \frac{n^2+1}{n} > 1000$$

$$\frac{n^2+1}{n} = n + \frac{1}{n} > e^{1000}$$

Daraus folgt:

$$n = \lceil e^{1000} \rceil \approx 1{,}97 \times 10^{434}$$

Das ist eine 435-stellige Zahl. $1{,}0 \times 10^{434}$ ist auch 435-stellig, aber deutlich kleiner als die genannte Untergrenze. Erst wenn die Zahl der Dezimalstellen mindestens 436 beträgt, ist die Ungleichung immer erfüllt. Somit gilt $p \geq 436$.

Anmerkung: Man kann durch Verwendung der sogenannten „erzeugenden Funktion“ die Summe auch exakt berechnen: Sei

$$s(x) = \sum_{k=n}^{n^2} \frac{x^k}{k}$$

wobei s(1) die gesuchte Summe darstellt. Einmal ableiten:

$$s'(x) = \sum_{k=n}^{n^2} x^{k-1} = x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x^{n^2-1}$$

$$s'(x) = \sum_{k=0}^{n^2-1} x^k - \sum_{k=0}^{n-2} x^k$$

$$s'(x) = \frac{x^{n^2}-1}{x-1} - \frac{x^{n-1}-1}{x-1}$$

$$s'(x) = \frac{x^{n^2} - x^{n-1}}{x-1}$$

$$s(x) = \int\limits_{0}^{x} \frac{t^{n^2} - t^{n-1}}{t-1} \mathrm{d}t$$

da $s(0) = 0$. Daher gilt:

$$\sum_{k=n}^{n^2} \frac{1}{k} = \int\limits_{0}^{1} \frac{t^{n^2} - t^{n-1}}{t-1} \mathrm{d}t$$

Das hilft in Bezug auf die obige Abschätzung nicht weiter, da dieses Integral nicht elementar lösbar ist außer durch eine Summenbildung, die uns zum Startpunkt zurückbringt.

Aufgabe 201232:
Es sei f die durch

$$f(x) = x^4 - (x+1)^4 - (x+2)^4 + (x+3)^4$$

definierte Funktion, wobei der Definitionsbereich von f
a) die Menge aller ganzen Zahlen,
b) die Menge aller reellen Zahlen ist.
Man untersuche sowohl für den Fall a) als auch für den Fall b), ob die Funktion f einen kleinsten Funktionswert annimmt, und ermittle, falls das zutrifft, jeweils diesen kleinsten Funktionswert.

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:
An der Darstellung

$$f(x) = \left((x+\frac{3}{2}) - \frac{3}{2}\right)^4 - \left((x+\frac{3}{2}) - \frac{1}{2}\right)^4 - \left((x+\frac{3}{2}) + \frac{1}{2}\right)^4 + \left((x+\frac{3}{2}) + \frac{3}{2}\right)^4$$

sehen wir, dass f achsensymmetrisch bezüglich $x = -\frac{3}{2}$ und höchstens ein quadratisches Polynom ist. Insbesondere hat f ihr globales Minimum oder Maximum bei $x = -\frac{3}{2}$.
Aus $f(-1) = f(-2) = 16$ und $f(-\frac{3}{2}) = 10$ folgt, dass f eine nach oben geöffnete Parabel ist und somit bei $x = -\frac{3}{2}$ ihr reelles Minimum und bei $x = -1$, $x = -2$ ihr Minimum über den ganzen Zahlen annimmt.

Aufgabe 201233A:
Es sind alle natürlichen Zahlen n zu ermitteln, die die folgende Eigenschaft haben:
Für alle reellen Zahlen a und b mit $0 < a < b$ gilt

$$a + \frac{1}{1+a^n} < b + \frac{1}{1+b^n}$$

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:
Die Aufgabe ist äquivalent zu der Frage, ob $f_n(x) := x + \frac{1}{1+x^n}$ für $x > 0$ streng monoton steigend ist. Es gilt

$$f_n'(x) := 1 - \frac{nx^{n-1}}{(1+x^n)^2}; \qquad f_n'(1) := \frac{4-n}{4}$$

Daher ist für $n > 4$ die Funktion bei $x = 1$ streng monoton fallend. Für $n = 4$ folgt aus $f_4''(1) > 0$, dass diese dort ein lokales Minimum hat.
Wir zeigen nun, dass f_n für $n \leq 3$ und $x > 0$ streng monoton steigend ist.

$$f_n'(x) = \frac{(1+x^n)^2 - nx^{n-1}}{(1+x^n)^2} = \frac{(1-x^n)^2 + x^{n-1}(4x-n)}{(1+x^n)^2}$$

Der erste Summand im Zähler und der Nenner sind stets nicht negativ. Der zweite Summand ist für $x \geq 1 > \frac{n}{4}$ positiv. Also ist f_n für $x \geq 1$ streng monoton steigend. Für $0 < x < 1$ können wir den Zähler der Ableitung wie folgt darstellen:

$$(1+x^n)^2 - nx^{n-1} = 1 + 2x^n + x^{2n} - nx^{n-1} \geq 1 + 2x^n + x^{2n} - 3x^{n-1} = (1 - x^{n-1}) + 2x^{n-1}(1-x) + x^{2n}$$

Die drei Summanden sind wegen $0 < x < 1$ positiv und somit ist für $n \leq 3$ die Ableitung für alle $x > 0$ positiv.

Aufgabe 221235:
a) Man beweise:
Wenn a, b, c reelle Zahlen mit $a > 0$ und $ac - b^2 > 0$ sind, dann gilt für alle reellen x, y, die nicht beide 0 sind, $ax^2 + 2bxy + cy^2 > 0$.
b) Man beweise:
Wenn a, b, c reelle Zahlen mit $a > 0$ und $ac - b^2 < 0$ sind, dann gibt es in der x, y-Ebene im Innern jedes Kreises um den Koordinatenursprung $(0; 0)$ zwei Punkte P_1 und P_2 mit folgenden Eigenschaften:
Für die Koordinaten $(x_1; y_1)$ von P_1 gilt die Ungleichung $ax_1^2 + 2bx_1y_1 + cy_1^2 > 0$;
für die Koordinaten $(x_2; y_2)$ von P_2 gilt die Ungleichung $ax_2^2 + 2bx_2y_2 + cy_2^2 < 0$.

Lösung von weird:
Mit der Umformung
$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = a\left(x + \frac{b}{a}\,y\right)^2 + \frac{ac - b^2}{a}y^2 \quad (*)$$
sieht man sofort, dass unter den gegebenen Voraussetzungen jedenfalls
$$ax^2 + 2bxy + cy^2 > 0$$
also a) gelten muss. Insbesondere genügt es für den ersten Punkt (x_1,y_1) in b) einfach nur $x_1 > 0$ ausreichend klein und $y_1 = 0$ zu wählen, womit dann tatsächlich
$$x_1^2 + 2bx_1y_1 + cy_1^2 = ax_1^2 > 0$$
ist.
Für den zweiten Punkt (x_2,y_2) in b) benutzen wir (*) nochmals, aber nun in der Form
$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = a\left(x + \frac{b}{a}\,y\right)^2 - \frac{b^2 - ac}{a}y^2 \quad (**)$$
ist. Indem wir nun einfach $y_2 > 0$ ausreichend klein wählen, sodass mit $x_2 = -\frac{b}{a}\,y_2$ dann (x_2,y_2) dem Ursprung beliebig nahe kommt, gilt dann außerdem
$$x_2^2 + 2bx_2y_2 + cy_2^2 = -\frac{b^2 - ac}{a}\,y_2^2 < 0$$
wie verlangt.

Aufgabe 231232:
Die Kantenlängen eines beliebigen Quaders seien a, b, c und die Länge seiner Raumdiagonale sei d. Man beweise, dass dann stets die folgende Ungleichung (1) gilt:
$$(ab)^2 + (bc)^2 + (ac)^2 \geq abcd \cdot \sqrt{3} \qquad (1)$$
Ferner ermittle man alle diejenigen Quader, für die in (1) das Gleichheitszeichen gilt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Da a, b, c und $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ positive Zahlen sind, ist die zu beweisende Ungleichung (1) gezeigt, wenn man
$$(a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2)^2 \geq 3a^2b^2c^2(a^2 + b^2 + c^2) \qquad (2)$$
bewiesen hat. Hierfür genügt es,
$$a^4b^4 + b^4c^4 + a^4c^4 - a^2b^2c^2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 0 \qquad (3)$$
zu zeigen, und diese Ungleichung gilt, da sie sich aus der wahren Ungleichung
$$(a^2b^2 - a^2c^2)^2 + (a^2b^2 - b^2c^2)^2 - (a^2b^2 - b^2c^2)^2 \geq 0 \qquad (4)$$

ergibt.
Die Gültigkeit des Gleichheitszeichens in (1) ist der Reihe nach äquivalent mit der Gültigkeit des Gleichheitszeichens in (2), (3), (4), diese mit $a^2b^2 = a^2c^2 = b^2c^2$, was wegen $a, b, c > 0$ genau für $a = b = c$ gilt.
Also gilt das Gleichheitszeichen in (1) genau dann, wenn der Quader ein Würfel ist.

Aufgabe 241236:
Man ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen n, für die gilt:

$$99^n + 101^n > \frac{51}{25} \cdot 100^n \qquad (1)$$

Lösung von weird:
Indem wir beide Seiten der Ungleichung (1) durch 100^n dividieren, lässt sie sich auch schreiben in der Form

$$\left(1 - \frac{1}{100}\right)^n + \left(1 + \frac{1}{100}\right)^n > \frac{51}{25} = 2.04 \quad (*)$$

Nun gilt

$$\forall n \geq 21 : \left(1 - \frac{1}{100}\right)^n + \left(1 + \frac{1}{100}\right)^n = 2\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} 100^{-2k} > 2\left(1 + \binom{21}{2}\frac{1}{100^2}\right) = 2.042 > 2.04$$

d. h., (1) ist jedenfalls für alle $n \geq 21$ gültig, während für $n = 20$ diese einfache Abschätzung noch nicht ausreicht.
Dass sie andererseits für $n \leq 19$ falsch ist, ist ebenfalls klar und folgt unmittelbar aus

$$\forall n \leq 19 : \quad \left(1 - \frac{1}{100}\right)^n + \left(1 + \frac{1}{100}\right)^n < 2\cosh(\frac{n}{100}) \leq 2\cosh(\frac{19}{100}) \approx 2.0362$$

während der Fall $n = 20$ wegen $2\cosh(0.2) \approx 2.0401$ auch hier unentschieden ist. Um zu sehen, dass (1) für $n = 20$ nicht gilt, bleibt also nur die direkte Auswertung von (*) für diesen Wert von n, was dann

$$0.99^{20} + 1.01^{20} \approx 2.038$$

ergibt, d. h., es bleibt dabei, dass (1) genau für $n \geq 21$ gilt.

Aufgabe 251233B:
Beweisen Sie, dass es unter allen Zerlegungen $100 = z_1 \cdot z_2 \cdot ... \cdot z_n$ der Zahl 100 in reelle Faktoren $z_i \geq 2$ ($i = 1, 2, ..., n$; n positiv ganzzahlig) eine Zerlegung gibt, für die die Summe $s = z_1 + z_2 + ... + z_n$ einen kleinstmöglichen Wert hat!
Ermitteln Sie eine solche Zerlegung!

Lösung von cyrix:
Für fixiertes n gilt aufgrund der Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel der z_i die Ungleichung

$$\frac{z_1 + z_2 + \cdots + z_n}{n} \geq \sqrt[n]{z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_n}$$

also $s \geq n \cdot \sqrt[n]{100}$, wobei Gleichheit genau für $z_1 = z_2 = \cdots = z_n = \sqrt[n]{100}$ angenommen wird. Wir bezeichnen die minimal mögliche Summe für dieses n mit s_n, also $s_n := n \cdot \sqrt[n]{100}$.

Da alle $z_i \geq 2$ sind und $2^7 = 128 > 100$ ist, muss $n \leq 6$ gelten. Es ist $s_1 = 100$, $s_2 = 20$, $s_3 = 3 \cdot \sqrt[3]{100}$, $s_4 = 4 \cdot \sqrt{10}$, $s_5 = 5 \cdot \sqrt[5]{100}$ und $s_6 \cdot \sqrt[6]{100} = 6 \cdot \sqrt[3]{10}$.

Es ist $s_3 < 3 \cdot \sqrt[3]{125} = 15 < s_2$ und $s_4 < s_3 \Leftrightarrow s_4^2 < s_3^2$, also äquivalent zu $160 < 9 \cdot \sqrt[3]{100^2} = 90 \cdot \sqrt[3]{10}$, was wegen $90 \cdot \sqrt[3]{10} > 90 \cdot \sqrt[3]{8} = 180$ wahr ist.

Wegen $s_4 > s_5 \Leftrightarrow s_4^2 > s_5^2 \Leftrightarrow 160 > 25 \cdot \sqrt[5]{100^2} \Leftrightarrow \frac{64}{10} > \sqrt[5]{10^4} \Leftrightarrow \frac{2^{6\cdot 5}}{10^5} > 10^4 \Leftrightarrow 2^{30} > 10^9 \Leftrightarrow 2^{10} > 1000$, was wegen $2^{10} = 1024$ wahr ist.
Schließlich ist $s_5 < s_6 \Leftrightarrow s_5^3 < s_6^3 \Leftrightarrow 1250 \cdot \sqrt[5]{10} < 2160 \Leftrightarrow \sqrt[5]{10} < \frac{216}{125} = \frac{1696}{1000}$. Dies ist wegen $\frac{1696}{1000} > \frac{1667}{1000} > \frac{5}{3}$ einerseits und $\left(\frac{5}{3}\right)^5 = \frac{5^5}{3^5} = \frac{3125}{243} > 10$, also $\sqrt[5]{\frac{5}{3}} > \sqrt[5]{10}$, andererseits eine wahre Aussage.

Damit ist s_5 der kleinste der Werte, die gesuchte minimale Summe ist $s_5 = 5 \cdot \sqrt[5]{100}$ und die zugehörigen Werte, die diese liefern, lauten $z_1 = \cdots = z_5 = \sqrt[5]{10}$.

Aufgabe 271231:
Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen x, die das folgende Ungleichungssystem (1), (2) erfüllen:

$$x^4 - 6x^2 + 8 \leq 0 \qquad (1)$$
$$2x^2 - 3x > 0 \qquad (2)$$

Lösung von weird:
Mit Einführung der reellen Polynomfunktionen f und g definiert durch

$$f(x) = x^4 - 6x^2 + 8 = (x^2 - 2)(x^2 - 4) = (x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})(x - 2)(x + 2)$$

bzw.

$$g(x) = 2x^2 - 3x = x(2x - 3)$$

können wir die Lösungen der beiden Ungleichungen - also zunächst jede für sich - leicht durch den Vorzeichenwechsel von f bzw. g an deren einfachen Nullstellen beschreiben, und zwar jeweils für wachsendes x. Beide Funktionen starten dabei aufgrund des positiven Leitkoeffizienten im positiven Bereich.
Dieser Vorzeichenwechsel erfolgt für f bei
- $x = -2$ von + zu -,
- $x = -\sqrt{2}$ von - zu +,
- $x = \sqrt{2}$ von + zu -,
- $x = 2$ von - zu +

und für g bei
- $x = 0$ von + zu -,
- $x = \frac{3}{2}$ von - zu +.

Insgesamt gilt also (1) genau für $x \in [-2, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, 2]$ und (2) genau für $x < 0$ und $x > \frac{3}{2}$.
Beide Ungleichungen (1) und (2) zusammen sind somit genau dann erfüllt, wenn

$$x \in [-2, \sqrt{2}] \cup (\frac{3}{2}, 2]$$

Aufgabe 281235:
Beweisen Sie folgenden Satz!
Wenn (x_n) eine monoton fallende Folge positiver reeller Zahlen ist, die für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ die Ungleichung

$$\frac{x_1}{1} + \frac{x_4}{2} + \frac{x_9}{3} + ... + \frac{x_{n^2}}{n} \leq 1$$

erfüllt, dann erfüllt sie auch für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ die Ungleichung

$$\frac{x_1}{1} + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{3} + ... + \frac{x_n}{n} \leq 3$$

Lösung von MontyPythagoras:
Es gilt für alle $n \geq 1$, dass

$$x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq ... \geq x_n \geq 0$$

ist. Es sei

$$S_n = \frac{x_1}{1} + \frac{x_4}{2} + \frac{x_9}{3} + ... + \frac{x_{n^2}}{n} = \sum_{m=1}^{n} \frac{x_{m^2}}{m}$$

wobei $S_n \leq 1$ gilt. Es reicht, zu beweisen, dass

$$T_n = \sum_{k=1}^{n^2} \frac{x_k}{k} \leq 3$$

gilt, denn da alle Summanden positiv sind, gilt

$$\sum_{k=1}^{k<n^2} \frac{x_k}{k} < T_n \leq 3$$

dann erst recht. Den Beweis für $T_n \leq 3$ können wir führen, indem wir die fragliche Summe nach oben abgrenzen:

$$T_n = \sum_{k=1}^{n^2} \frac{x_k}{k} = \sum_{m=1}^{n-1} \left(\sum_{l=m^2}^{(m+1)^2-1} \frac{x_l}{l} \right) + \frac{x_{n^2}}{n^2}$$

Da sowohl $x_l \leq x_{m^2}$ als auch $\frac{1}{l} \leq \frac{1}{m^2}$ für $l \geq m^2$, gilt:

$$\frac{x_l}{l} \leq \frac{x_{m^2}}{m^2}$$

und daher

$$T_n \leq \sum_{m=1}^{n-1} \left(\frac{x_{m^2}}{m^2} \sum_{l=m^2}^{(m+1)^2-1} 1 \right) + \frac{x_{n^2}}{n^2} = \sum_{m=1}^{n-1} \left(\frac{x_{m^2}}{m^2} (2m+1) \right) + \frac{x_{n^2}}{n^2}$$

Als letzten Schritt zeigen wir, dass $T_n \leq 3S_n$ ist:

$$\sum_{m=1}^{n-1} \left(\frac{x_{m^2}}{m^2} (2m+1) \right) + \frac{x_{n^2}}{n^2} \leq 3 \sum_{m=1}^{n} \frac{x_{m^2}}{m}$$

Diese Ungleichung ist erfüllt, wenn sie für jeden Summanden einzeln gilt. Für den letzten Summanden ist das offenkundig der Fall, da $\frac{1}{n^2} < \frac{3}{n}$ ist. Für alle anderen Summanden muss gelten, dass

$$\frac{2m+1}{m^2} \leq \frac{3}{m}$$

ist. Wir multiplizieren mit m^2:

$$2m + 1 \leq 3m$$

was für alle $m \geq 1$ erfüllt ist. Damit ist erwiesen, dass

$$T_n < 3S_n$$

ist, und damit nach Voraussetzung auch $T_n \leq 3$.

Aufgabe 291233B:
Man untersuche für jede gegebene natürliche Zahl $n \geq 2$, ob es unter allen denjenigen n-Tupeln $(x_1, x_2, ..., x_n)$ reeller Zahlen, für die

$$x_i \geq \frac{1}{n^2} \qquad (i = 1, 2, ..., n) \qquad \text{und} \qquad x_1 + x_2 + ... + x_n = 1$$

gilt, eines gibt, für das der Term

$$s = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}$$

a) einen kleinsten Wert
b) einen größten Wert
annimmt. Ist das jeweils der Fall, so ermittle man in Abhängigkeit von n diesen kleinsten bzw. größten Wert.

Lösung von MontyPythagoras:
a) Behauptung: s ist genau dann minimal, wenn für alle $i = 1...n$ gilt:

$$x_i = \frac{1}{n}$$

Beweis: Die Bedingungen $x \geq \frac{1}{n^2}$ und $\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{n} = \frac{n}{n} = 1$ sind erfüllt. Die minimale Summe nennen wir s_0. Für eine beliebige andere Summe substituieren wir

$$x_i = \frac{1}{n}(1 + z_i)$$

Um die erste Nebenbedingungen einzuhalten, muss gelten:

$$(1) \qquad 1 + z_i \geq \frac{1}{n} > 0$$

Außerdem gilt wegen der zweiten Nebenbedingung

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{n}(1 + z_i) = \frac{n}{n} + \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} z_i = 1$$

so dass

$$(2) \qquad \sum_{i=0}^{n} z_i = 0$$

gelten muss. Die beliebige Summe der Kehrwerte ist demnach

$$(3) \qquad s = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{\frac{1}{n}(1 + z_i)} = n\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{1 + z_i}$$

Wir verwenden nun die Ungleichung

$$\frac{1}{1 + z_i} \geq 1 - z_i$$

Die Gültigkeit dieser Ungleichung kann man mithilfe von (1) leicht zeigen, indem man mit $1 + z_i$ multipliziert. Diese Ungleichung eingesetzt in (3) ergibt:

$$s \geq n\sum_{i=0}^{n}(1 - z_i) = n^2 - n\sum_{i=0}^{n} z_i = n^2 = s_0$$

so dass also auf jeden Fall $s \geq s_0$ gilt. q. e. d.

b) Behauptung: Die Summe s der Kehrwerte von x_i ist genau dann maximal, wenn von den n Summanden genau $(n - 1)$ den minimal zulässigen Wert $x_i = \frac{1}{n^2}$ annehmen. Beweis: Es gelte für $i = 1...(n - 1)$:

$$(4) \qquad x_i = \frac{1}{n^2}$$

Da dies der minimal zulässige Wert ist, ergibt sein Kehrwert natürlich den größtmöglichen Summanden. Nur der letzte Summand muss wegen der zweiten Nebenbedingung einen anderen Wert haben, denn es muss gelten:

$$1 = \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{n^2} + x_n = \frac{n-1}{n^2} + x_n$$

$$(5) \qquad x_n = 1 - \frac{n-1}{n^2} = \frac{n^2-n+1}{n^2}$$

Die Summe der Kehrwerte ist dann

$$s_1 = \sum_{i=1}^{n-1} n^2 + \frac{1}{x_n} = (n-1)n^2 + \frac{n^2}{n^2-n+1} = n^2\left(n-1+\frac{1}{n^2-n+1}\right) = n^2\left(n-1+\frac{n+1}{n^3+1}\right)$$

$$s_1 = n^2 \cdot \frac{n^4-n^3+2n}{n^3+1} = \frac{n^3(n^3-n^2+2)}{n^3+1}$$

Da wie oben schon festgestellt die ersten $n-1$ Summanden schon maximal sind, könnte eine Vergrößerung des letzten Summanden x_n nur zu Lasten mindestens eines anderen Summanden erfolgen. Das heißt, wenn $\frac{1}{x_n}$ größer werden soll, muss ich ein $\varepsilon > 0$ von x_n abziehen, aber dieses gleichzeitig zu einem der anderen x_i, z. B. x_1, hinzuaddieren, damit die zweite Nebenbedingung gültig bleibt. Für die neue Summe gilt dann:

$$s = \sum_{i=1}^{n-2} n^2 + \frac{1}{x_1+\varepsilon} + \frac{1}{x_n-\varepsilon}$$

$$s - s_1 = \frac{1}{x_1+\varepsilon} - \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_n-\varepsilon} - \frac{1}{x_n}$$

$$s - s_1 = \frac{x_1-x_1-\varepsilon}{x_1(x_1+\varepsilon)} + \frac{x_n-x_n+\varepsilon}{x_n(x_n-\varepsilon)} = \frac{-\varepsilon}{x_1(x_1+\varepsilon)} + \frac{\varepsilon}{x_n(x_n-\varepsilon)}$$

$$s - s_1 = \varepsilon\left(\frac{-1}{x_1(x_1+\varepsilon)} + \frac{1}{x_n(x_n-\varepsilon)}\right) = \varepsilon\,\frac{x_1^2+x_1\varepsilon-x_n^2+x_n\varepsilon}{x_1x_n(x_1+\varepsilon)(x_n-\varepsilon)}$$

$$s - s_1 = \varepsilon\,\frac{(x_1+x_n)(x_1-x_n+\varepsilon)}{x_1x_n(x_1+\varepsilon)(x_n-\varepsilon)}$$

Das Vorzeichen des gesamten Ausdrucks wird bestimmt durch die zweite Klammer im Zähler, denn alle anderen Terme sind auf Anhieb als größer null zu erkennen. Wegen (4) und (5) gilt:

$$x_n - x_1 = \frac{n^2-n+1}{n^2} - \frac{1}{n^2} = \frac{n^2-n}{n^2} = \frac{n-1}{n} \gg 0$$

Für ein kleines ε gilt daher auch, dass $(x_1 - x_n + \varepsilon) < 0$ ist, woraus $s - s_1 < 0$ bzw. $s < s_1$ folgt. q. e. d.

Alternativ-Lösung von cyrix:

a) Das arithmetische Mittel der x_i beträgt offenbar $A := \frac{1}{n}$, ihr harmonisches

$$H := \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}} = \frac{n}{s}$$

Nach der Ungleichung zwischen arithmetischem und harmonischem Mittel gilt (wegen $x_i > 0$ für alle $1 \le i \le n$) $A \ge H$, also $\frac{n}{s} \le \frac{1}{n}$ bzw. $s \ge n^2$, wobei Gleichheit genau für

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = A = \frac{1}{n}$$

eintritt.

b) Lemma: Für beliebige reelle Zahlen a,b,c mit $a \ge b > c > 0$ gilt

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \le \frac{1}{a+c} + \frac{1}{b-c},$$

denn nach Multiplikation mit dem Hauptnenner ist diese Ungleichung äquivalent zu $(a+c)(b-c)(b+a) \le ab(b-c+a+c)$ bzw. $ab - c(c+a-b) \le ab$, was offensichtlich wahr ist.

Wir zeigen im Folgenden nun, dass für jedes n-Tupel der Term s höchstens einen kleineren Wert annimmt, wenn es nicht (in irgendeiner Reihenfolge) die Form $\left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n^2}, \ldots, \frac{1}{n^2}, 1-(n-1)\cdot\frac{1}{n^2}\right)$ besitzt:

Sei also ein beliebiges n-Tupel $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ gegeben, was nicht diese Form besitzt, wobei o. B. d. A. $x_n \geq x_i$ für alle i gelte. (Dies dürfen wir annehmen, da die zu beweisende Aussage symmetrisch in den x_i ist.) Es sei nun i der kleinste Index mit $x_i > \frac{1}{n^2}$. Es muss dann $i < n$ gelten, denn sonst hätte es die genannte Form. Wenden wir nun das Lemma mit $a := x_n$, $b := x_i \leq a$ und $0 < c := x_i - \frac{1}{n^2} < b$, an, so erhalten wir

$$\frac{1}{x_i} + \frac{1}{x_n} \leq \frac{1}{\frac{1}{n^2}} + \frac{1}{x_n + x_i - \frac{1}{n^2}}$$

Das neue Tupel, in welchem wir $x_i' := \frac{1}{n^2}$ und $x_n' := x_n + x_i - \frac{1}{n^2} > x_n$ setzen erfüllt weiterhin wegen $x_i' + x_n' = x_n + x_i$ die Bedingung, dass die Summe aller Komponenten gleich 1 und jede Komponente $\geq \frac{1}{n^2}$ ist, ist also wieder ein zulässiges n-Tupel, welches aber zumindest keinen kleineren Wert für s liefert als das Ausgangstupel.
Jedoch besitzt es nun eine Komponente mehr als dieses, welche den Wert $\frac{1}{n^2}$ besitzt.
Führt man diesen Prozess wiederholt durch, so lässt sich die Anzahl der von $\frac{1}{n^2}$ verschiedenen Komponenten bis auf den Minimalwert 1 reduzieren, ohne den Wert für s zu senken. Also wird der Maximalwert für s von einem Tupel angenommen, bei welchem $n-1$ Komponenten (o. B. d. A. x_1 bis x_{n-1}) den Wert $\frac{1}{n^2}$ und die übrige den Wert $1-(n-1)\cdot\frac{1}{n^2} = \frac{n^2-n+1}{n^2}$ annimmt. Für dieses hat s dann den Wert

$$s = (n-1)\cdot n^2 + \frac{n^2}{n^2-n+1} = n^3 - n^2 + 1 + \frac{n-1}{n^2-n+1}$$

was also den größtmöglichen Wert für s darstellt.

Aufgabe 301231:
a) Man untersuche, ob für beliebige positive reelle Zahlen a,b,c,d stets $\sqrt{ac}+\sqrt{bd} \leq \sqrt{a+b}\cdot\sqrt{c+d}$ gilt.
b) Man untersuche, ob für beliebige positive reelle Zahlen a,b,c,d stets $\sqrt{ab}+\sqrt{cd} \leq \sqrt{a+b}\cdot\sqrt{c+d}$ gilt.

Lösung von weird:
Die Behauptung in a) ist korrekt, wie man dies ausgehend von

$$0 \leq (ad-bc)^2 = a^2d^2 - 2abcd + (bc)^2$$

durch folgende offensichtlichen und wegen $a,b,c,d > 0$ auch erlaubten Umformungen

$$\begin{aligned} 4abcd &\leq (ad)^2 + 2abcd + (bc)^2 = (ad+bc)^2 \\ 2\sqrt{abcd} &\leq ad + bc \\ (\sqrt{ac}+\sqrt{bd})^2 = ac + bd + 2\sqrt{abcd} &\leq ac + bd + ad + bc = (a+b)(c+d) \\ \sqrt{ac}+\sqrt{bd} &\leq \sqrt{a+b}\cdot\sqrt{c+d} \end{aligned}$$

sofort sehen kann.
Dagegen ist b) i.A. falsch, z. B. führt etwa

$$a = b = 1,\ c = d = 4$$

durch Einsetzen auf den Widerspruch

$$1 + 4 \leq \sqrt{2}\sqrt{8} = 4$$

Aufgabe 311234:
Für jede natürliche Zahl $a > 0$ ermittle man alle diejenigen natürlichen Zahlen $n > 0$, die die Ungleichung

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{3n+1} > a$$

erfüllen.

Lösung von MontyPythagoras:
Es gilt allgemein

$$\int\limits_{k}^{k+1} \frac{1}{x}\mathrm{d}x < \frac{1}{k} < \int\limits_{k-1}^{k} \frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

wie man sich aufgrund der Tatsache, dass die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ streng monoton fallend ist, leicht klar macht. Sei

$$s_n = \sum_{k=n+1}^{3n+1} \frac{1}{k}$$

Dann gilt mit obiger Relation:

$$\sum_{k=n+1}^{3n+1} \int\limits_{k}^{k+1} \frac{1}{x}\mathrm{d}x < s_n < \sum_{k=n+1}^{3n+1} \int\limits_{k-1}^{k} \frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

Da sich die Integrale in den Summen „nahtlos“ aneinander reihen, folgt:

$$\int\limits_{n+1}^{3n+2} \frac{1}{x}\mathrm{d}x < s_n < \int\limits_{n}^{3n+1} \frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

$$\ln \frac{3n+2}{n+1} < s_n < \ln \frac{3n+1}{n}$$

$$\ln\left(3 - \frac{1}{n+1}\right) < s_n < \ln\left(3 + \frac{1}{n}\right)$$

Für kleine n lässt sich s_n noch recht mühelos direkt berechnen, es ist $s_1 = 1\frac{1}{12}$ und $s_2 = 1\frac{13}{140}$. Für $n \geq 3$ folgt mit obiger Eingrenzung, dass $s_n > \ln(2{,}75) > 1$ ist, aber es wird auch nie größer als 2, da es durch $s_n < \ln\left(3 + \frac{1}{n}\right)$ auf Werte zwischen 1 und 2 eingeschränkt wird. Man kann also weiter eingrenzen, dass $1 < s_n < 2$ ist. Daher erfüllen alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung für $a = 1$, für $a > 1$ ist die Ungleichung mit keinem n erfüllbar.

Aufgabe 311233A:
Man beweise, dass es unter allen Werten, die der Term

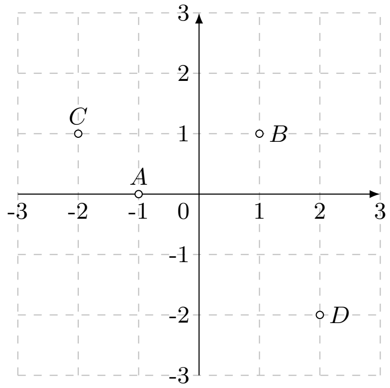
$$\sqrt{x^2+y^2+2x+1} + \sqrt{x^2+y^2-2x-2y+2} + \sqrt{x^2+y^2+4x-2y+5} + \sqrt{x^2+y^2-4x+4y+8}$$

für reelle Zahlen x, y annehmen kann, einen kleinsten Wert gibt, und man ermittle diesen kleinsten Wert.

Lösung von MontyPythagoras:
Nennen wir die Summe s. Dann ist:

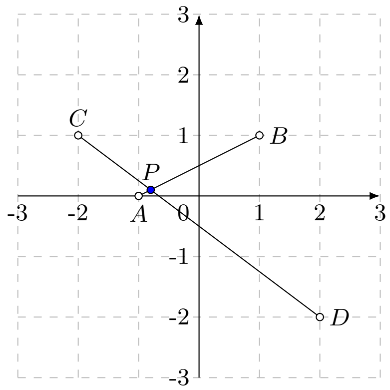
$$s = \sqrt{(x+1)^2+y^2} + \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2} + \sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2} + \sqrt{(x-2)^2+(y+2)^2}$$

Das bedeutet, man kann s als die Summe der Abstände eines gesuchten Punktes $(x; y)$ zu vier gegebenen Punkten auffassen. Die vier Punkte lauten $(-1; 0)$, $(1; 1)$, $(-2; 1)$ und $(2; -2)$. Hier graphisch dargestellt:



Es ist offensichtlich, dass es einen Punkt P geben muss, der in Summe einen minimalen Abstand zu den vier gegebenen Punkten haben muss, denn die Summe der Abstände ist „nach oben offen“, aber nach unten beschränkt (es gibt keinen Punkt mit negativen Abständen). Folglich muss es auch ein Minimum geben.

Betrachtet man nun die Punkte A und B isoliert, dann hat ein Punkt genau dann die minimale Abstandssumme zu A und B, wenn er sich auf der Strecke AB befindet. Die Abstandssumme ist auf der ganzen Strecke AB konstant, nämlich gleich der Länge der Strecke AB. Jeder Punkt außerhalb dieser Strecke hat zwangsläufig eine größere Abstandssumme.
Das gleiche gilt sinngemäß auch für die Punkte C und D. Der Punkt mit der gesuchten minimalen Abstandssumme zu allen vier Punkten muss daher der Schnittpunkt der Strecken AB und CD sein:



s ist dann die Summe der Längen von AB und CD:

$$s = \sqrt{2^2 + 1^2} + \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 + \sqrt{5}$$

Aufgabe 321235:
Man beweise, dass es zu jeder positiven ganzen Zahl n eine reelle Zahl c gibt, so dass für alle reellen Zahlen $a > 0$ die Ungleichung

$$a + a^2 + a^3 + ... + a^{2n} \leq c \cdot \left(1 + a^{2n+1}\right)$$

gilt.
Man beweise auch, dass es zu jedem n unter allen solchen Zahlen c eine kleinste gibt, und ermittle jeweils zu n dieses kleinste c.

Lösung von Nuramon:
Es sei $k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k \leq 2n$. Wenn $a \geq 1$ ist, dann gilt $a^k \leq a^{2n+1}$ und $1 \geq a^{-k}$. Wenn $a \leq 1$ ist, dann

gilt $a^k \geq a^{2n+1}$ und $1 \leq a^{-k}$.

In jedem Fall sind die Folgen a^k, a^{2n+1} bzw. $1, a^{-k}$ also unterschiedlich geordnet. Demnach gilt nach Umordnungsungleichung

$$\begin{aligned} a^k + a^{2n+1-k} &= a^k \cdot 1 + a^{2n+1} \cdot a^{-k} \\ &\leq a^k \cdot a^{-k} + a^{2n+1} \cdot 1 \\ &= 1 + a^{2n+1}. \end{aligned}$$

Also gilt

$$\begin{aligned} a + a^2 + \ldots + a^{2n} &= (a + a^{2n}) + (a^2 + a^{2n-1}) + \ldots + (a^n + a^{n+1}) \\ &\leq n \cdot (1 + a^{2n+1}). \end{aligned}$$

Wir können also $c = n$ wählen. Für $a = 1$ gilt sogar Gleichheit. Daher ist $c = n$ auch das gesuchte Minimum.

Aufgabe 331231:
Beweisen Sie, dass für alle positiven reellen Zahlen a, b, c, d die nachstehende Ungleichung gilt!

$$\frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} + \frac{1}{\frac{1}{c} + \frac{1}{d}} \leq \frac{1}{\frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+d}} \qquad (1)$$

Lösung von MontyPythagoras:

$$\frac{ab}{a+b} + \frac{cd}{c+d} \leq \frac{(a+c)(b+d)}{a+b+c+d}$$

$$(abc + abd + acd + bcd)(a+b+c+d) \leq (a+b)(a+c)(b+d)(c+d)$$

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right)(a+b+c+d) \leq \left(1 + \frac{b}{a}\right)\left(1 + \frac{a}{c}\right)\left(1 + \frac{d}{b}\right)\left(1 + \frac{c}{d}\right)$$

$$1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{d}{a} + \frac{a}{b} + 1 + \frac{c}{b} + \frac{d}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{c} + 1 + \frac{d}{c} + \frac{a}{d} + \frac{b}{d} + \frac{c}{d} + 1 \leq \left(1 + \frac{b}{a} + \frac{a}{c} + \frac{b}{c}\right)\left(1 + \frac{d}{b} + \frac{c}{d} + \frac{c}{b}\right)$$

$$4 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{d}{a} + \frac{a}{b} + \frac{c}{b} + \frac{d}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{c} + \frac{d}{c} + \frac{a}{d} + \frac{b}{d} + \frac{c}{d} \leq 1 + \frac{b}{a} + \frac{a}{c} + \frac{b}{c} + \frac{d}{b} + \frac{d}{a} + \frac{ad}{bc} + \frac{d}{c} + \frac{c}{d} + \frac{bc}{ad} + \frac{a}{d} + \frac{b}{d} + \frac{c}{b} + \frac{c}{a} + \frac{a}{b} + 1$$

$$2 \leq \frac{ad}{bc} + \frac{bc}{ad}$$

$$0 \leq a^2d^2 - 2abcd + b^2c^2$$

$$0 \leq (ad - bc)^2$$

q. e. d.

Aufgabe 341231:
Man beweise, dass für alle positiven reellen Zahlen x, y, z die Ungleichung gilt:

$$\frac{1}{1 + x + \frac{1}{y}} + \frac{1}{1 + y + \frac{1}{z}} + \frac{1}{1 + z + \frac{1}{x}} \leq 1$$

Lösung von Kornkreis:
Bezeichnen wir die Nenner jeweils mit A, B, C und multiplizieren die Ungleichung mit ABC, so erhalten wir äquivalent (beachte, dass ABC positiv ist) zur zu zeigenden Ungleichung

$$ABC \geq AB + BC + CA$$

$$\iff (A-1)(B-1)(C-1) \geq A + B + C - 1$$

$$\iff \left(x + \frac{1}{y}\right)\left(y + \frac{1}{z}\right)\left(z + \frac{1}{x}\right) \geq x + \frac{1}{y} + y + \frac{1}{z} + z + \frac{1}{x} + 2$$

$$\iff xyz + x + y + z + \frac{1}{xyz} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq x + \frac{1}{y} + y + \frac{1}{z} + z + \frac{1}{x} + 2$$

$$\iff xyz + \frac{1}{xyz} \geq 2$$

$$\iff \left(\sqrt{xyz} - \frac{1}{\sqrt{xyz}}\right)^2 \geq 0$$

und letzteres ist offensichtlich wahr (beachte, dass die Wurzeln wegen $xyz > 0$ wohldefiniert sind). Damit ist die Aussage bewiesen.

Aufgabe 341236:
Man ermittle für jede ungerade natürliche Zahl $n \geq 3$ die Zahl

$$\left[\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n^2-4}+\sqrt{n^2-3}} + \frac{1}{\sqrt{n^2-2}+\sqrt{n^2-1}}\right]$$

Hinweis: Ist z eine reelle Zahl, so bezeichnet $[z]$ diejenige ganze Zahl $g = [z]$, für die $g \leq z < g + 1$ gilt.

Lösung von MontyPythagoras:
Wir erweitern zunächst jeden Bruch wie folgt:

$$\frac{1}{\sqrt{k-1}+\sqrt{k}} = \frac{\sqrt{k}-\sqrt{k-1}}{(\sqrt{k-1}+\sqrt{k})(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})} = \sqrt{k} - \sqrt{k-1}$$

Dann sei die eingeklammerte Summe

$$s = -\sqrt{1} + \sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{4} - +... - \sqrt{n^2-2} + \sqrt{n^2-1}$$

$$s = \sum_{k=1}^{\frac{1}{2}(n^2-1)} \left(\sqrt{2k} - \sqrt{2k-1}\right) \tag{1}$$

Wir nutzen nun folgende Ungleichung:

$$\sqrt{2k} - \sqrt{2k-1} < \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}\right) \tag{2}$$

Beweis:

$$2\sqrt{k} - 2\sqrt{k - \frac{1}{2}} < \sqrt{k} - \sqrt{k-1}$$

$$\sqrt{k} + \sqrt{k-1} < 2\sqrt{k - \frac{1}{2}}$$

$$k + k - 1 + 2\sqrt{k(k-1)} < 4k - 2$$
$$2\sqrt{k^2 - k} < 2k - 1$$
$$4k^2 - k < 4k^2 - 4k + 1$$

Das ist offensichtlich immer erfüllt. Setzen wir das in (1) ein, erhalten wir:

$$s < \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\frac{1}{2}(n^2-1)} \left(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}\right)$$

Das ist eine Teleskopsumme, so dass folgt:

$$s < \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}(n^2-1)}$$
$$s < \frac{1}{2}\sqrt{n^2-1} < \frac{1}{2}n$$
$$s < \frac{1}{2}n \tag{3}$$

Wir stellen nun die Summe anders dar, indem wir die Summanden anders gruppieren:

$$s = -1 - (\sqrt{3} - \sqrt{2}) - (\sqrt{5} - \sqrt{4}) - ... - (\sqrt{n^2-2} - \sqrt{n^2-3}) + \sqrt{n^2-1}$$
$$s = \sqrt{n^2-1} - 1 - \sum_{k=1}^{\frac{1}{2}(n^2-3)} \left(\sqrt{2k+1} - \sqrt{2k}\right) \tag{4}$$

Wir modifizieren (2), indem wir dort k durch $k + \frac{1}{2}$ ersetzen:

$$\sqrt{2k+1} - \sqrt{2k} < \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{k + \frac{1}{2}} - \sqrt{k - \frac{1}{2}}\right) \tag{2a}$$

Wir setzen in (4) ein und erhalten:

$$s > \sqrt{n^2-1} - 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\frac{1}{2}(n^2-3)} \left(\sqrt{k + \frac{1}{2}} - \sqrt{k - \frac{1}{2}}\right)$$

Auch das ist wieder eine Teleskopsumme, und daher:

$$s > \sqrt{n^2-1} - 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{1}{2}(n^2-3) + \frac{1}{2}} - \sqrt{1 - \frac{1}{2}}\right)$$
$$s > \sqrt{n^2-1} - 1 - \frac{1}{2}\left(\sqrt{n^2-2} - 1\right)$$
$$s > \sqrt{n^2-1} - \frac{1}{2}\sqrt{n^2-2} - \frac{1}{2} \tag{5}$$

Wir zeigen nun, dass

$$\sqrt{n^2-1} - \frac{1}{2}\sqrt{n^2-2} > \frac{1}{2}n$$
$$2\sqrt{n^2-1} > n + \sqrt{n^2-2}$$
$$4n^2 - 4 > n^2 + n^2 - 2 + 2n\sqrt{n^2-2}$$
$$n^2 - 1 > n\sqrt{n^2-2}$$
$$n^4 - 2n^2 + 1 > n^4 - 2n^2$$

Auch das ist immer erfüllt, so dass wir in (5) setzen können:

$$s > \frac{1}{2}n - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(n-1)$$

Dies zusammen mit Gleichung (3) ergibt

$$\frac{1}{2}(n-1) < s < \frac{1}{2}n$$

Da n eine ungerade Zahl sein soll, gilt offensichtlich

$$g = \frac{n-1}{2}$$

IV Runde 4

Aufgabe 011244:
Gegeben sei ein konvexes ebenes Viereck.
Es ist zu beweisen, dass für den Quotienten q aus dem größten und dem kleinsten aller Abstände zweier beliebiger Eckpunkte voneinander stets gilt: $q \geq \sqrt{2}$.

Lösung von Carsten Balleier:
Für ein Quadrat ist offensichtlich, dass das Gleichheitszeichen gilt. Alle anderen Vierecke haben mindestens einen Innenwinkel, der größer als 90° ist; dieser sei o. B. d. A. α.
In einem konvexen Viereck kann man den Kosinussatz für die Diagonalen benutzen:

$$f^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos\alpha$$

Nun ist aber $-\cos\alpha > 0$ und daher gilt: $f^2 > a^2 + d^2$.
Folgende Kette gilt wegen der Monotonie von min und wegen $a, d > 0$:

$$a^2 + d^2 \geq 2min\{a^2, d^2\} = 2[min\{a, d\}]^2 \geq 2[min\{a, b, c, d, e, f\}]^2$$

Außerdem ist $max\{a, b, c, d, e, f\} \geq f$. Wir erhalten:

$$max\{a, b, c, d, e, f\} > \sqrt{2}min\{a, b, c, d, e, f\}$$

Aufgabe 011242:
Es seien u, v und w beliebig gewählte positive Zahlen, kleiner als 1.
Man soll zeigen, dass unter den Zahlen $u(1-v)$, $v(1-w)$, $w(1-u)$ stets mindestens ein Wert nicht größer als $\frac{1}{4}$ vorkommt.

Lösung von Eckard Specht:
Indirekter Beweis: Angenommen, keine der Zahlen $u(1-v)$, $v(1-w)$, $w(1-u)$ ist nicht größer als $\frac{1}{4}$, d. h., alle drei Zahlen sind größer als $\frac{1}{4}$. Deren Multiplikation liefert

$$uvw(1-u)(1-v)(1-w) > \frac{1}{64} \qquad (1)$$

Andererseits ist jedoch $u(1-u) = \frac{1}{4} - (u - \frac{1}{2})^2 \leq \frac{1}{4}$; analoge Ungleichungen gelten für v und w.
Multipliziert man diese drei Ungleichungen, zeigt sich, dass (1) nicht gilt. Somit war die obige Annahme falsch, und die Behauptung ist bewiesen.

Aufgabe 021242:
Für welche Zahlen x des Intervalls $0 < x < \pi$ gilt

$$\frac{\tan 2x}{\tan x} - \frac{2\cot 2x}{\cot x} \leq 1$$

Lösung von W. Engel und U. Pirl:
Zuerst kann man mit $\cot x = \frac{1}{\tan x}$ und $\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$ die Ungleichung umformen zu

$$0 \leq 1 - \frac{2}{1-\tan^2 x} + 2\frac{1-\tan^2 x}{2} = f(x)$$

($f(x)$ dient als Abkürzung des Ausdrucks).
Zuerst betrachtet man die zugehörige Gleichung, um alle Nulldurchgänge zu finden. Durch die Substitution $z = 1 - \tan^2 x$ erhält man die quadratische Gleichung $zf(x) = z^2 + z - 2 = 0$, die die Lösungen -2 und 1 besitzt.
Daraus folgt, dass das Gleichheitszeichen in der Ungleichung bei $x = \frac{\pi}{3}$ und $x = \frac{2\pi}{3}$ gilt (es gilt auch bei $x = 0$ und $x = \pi$, was aber nicht im gewünschten Intervall liegt).
Weiterhin stellt man fest, dass die Ungleichung bei $x \in \{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\}$ nicht definiert ist. Da $f(x)$ auf dem Rest des Intervalls $(0, \pi)$ stetig ist, wechselt das Vorzeichen der Funktion nur an Nullstellen und an Stellen, wo sie nicht definiert ist. Es reicht also, aus jedem Teilintervall einen Punkt zu überprüfen.
Zum Beispiel ist im Intervall $(0, \frac{\pi}{4})$ der Wert $f(\frac{\pi}{6}) = -\frac{4}{3}$ und f somit überall negativ; die Ungleichung ist hier nicht erfüllt.
Auf $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3})$ (mit der obigen Substitution: $z \in (-2, 0)$) nutzt man $zf(x) < 0$, um daraus $f(x) > 0$ zu folgern.
Ähnlich geht man auch mit den anderen Intervallen vor und findet, dass die Ungleichung auf der Menge gilt:

$$\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}\right)$$

Aufgabe 021243:
Es ist zu beweisen: Wenn mindestens zwei unter den reellen Zahlen a, b, c von Null verschieden sind, so gilt die Ungleichung

$$\frac{a^2}{b^2+c^2} + \frac{b^2}{c^2+a^2} + \frac{c^2}{a^2+b^2} \geq \frac{3}{2}$$

Unter welchen Bedingungen tritt Gleichheit ein?

Lösung von Eckard Specht:
Angenommen, alle drei Zahlen a, b, c sind von null verschieden. Dann sind die drei Nenner auf der linken Seite der vorgelegten Ungleichung positiv und wir können die Ungleichung vom Arithmetischen und Harmonischen Mittel hinschreiben:

$$\left[(b^2+c^2) + (c^2+a^2) + (a^2+b^2)\right]\left(\frac{1}{b^2+c^2} + \frac{1}{c^2+a^2} + \frac{1}{a^2+b^2}\right) \geq 9$$

Multiplizieren wir das Produkt auf der linken Seite der Ungleichung aus, bleibt gerade unser Term und ein Summand $1 + 1 + 1 = 3$ übrig:

$$\left(\frac{a^2}{b^2+c^2} + \frac{b^2}{c^2+a^2} + \frac{c^2}{a^2+b^2}\right) + \left(\frac{b^2+c^2}{b^2+c^2} + \frac{c^2+a^2}{c^2+a^2} + \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}\right) \geq \frac{9}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{b^2+c^2} + \frac{b^2}{c^2+a^2} + \frac{c^2}{a^2+b^2} \leq \frac{3}{2}$$

Ist dagegen eine Zahl gleich null (etwa a), vereinfacht sich die Ungleichung auf

$$\frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{b^2} \leq 2 > \frac{3}{2}$$

welche wegen

$$\left(\frac{b}{c} - \frac{c}{b}\right)^2 = \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{b^2} - 2 \geq 0$$

ebenfalls eine wahre Aussage ist.

Gleichheit tritt in der Ungleichung vom Arithmetischen und Harmonischen Mittel genau dann ein, wenn alle Größen untereinander gleich sind: $b^2 + c^2 = c^2 + a^2 = a^2 + b^2$. Diese Bedingungen sind äquivalent mit $a = b = c$.

Aufgabe 031241:
Beweisen Sie, dass für alle positiven ganzrationalen Zahlen a und b stets

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt[a+b]{a^b \cdot b^a}$$

ist! Wann gilt das Gleichheitszeichen?

Lösung von Eckard Specht:
Beweis:
Schreiben wir die rechte Seite der gegebenen Ungleichung um, erhalten wir den Ausdruck

$$a^{\frac{b}{a+b}} \cdot b^{\frac{a}{a+b}}$$

der uns sofort an die gewichtete AM-GM-Ungleichung erinnern sollte:
Sind $a_1, ..., a_n$ positive reelle Zahlen und $\delta_1, ..., \delta_n$ ebenfalls positive reelle Zahlen (Gewichte) mit $\delta_1 + ... + \delta_n = 1$, so gilt stets

$$\delta_1 a_1 + ... + \delta_n a_n \geq a_1^{\delta_1} ... a_n^{\delta_n}$$

wobei Gleichheit genau dann vorliegt, wenn alle a_i untereinander gleich sind. Diese bekannte Ungleichung für $n = 2$, $\delta_1 = \frac{b}{a+b}$ und $\delta_2 = \frac{a}{a+b}$ hingeschrieben, führt auf

$$\frac{2ab}{a+b} \geq a^{\frac{b}{a+b}} \cdot b^{\frac{a}{a+b}} = \sqrt[a+b]{a^b \cdot b^a}$$

Aus

$$(a-b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (a+b)^2 \geq 4ab \Leftrightarrow \frac{a+b}{2} \geq \frac{2ab}{a+b}$$

folgt mit (1) die Behauptung.

Aufgabe 041246:
Es ist folgender Satz zu beweisen:
Sind α, β und γ die Winkel eines Dreiecks, dann gilt:

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leq \frac{3}{2}$$

Wann gilt das Gleichheitszeichen?

Lösung von Daniel Gutekunst:
Ich eliminiere zunächst die Winkel über den Kosinussatz und bringe die Gleichung in geeignete Form.

$$\begin{aligned}
\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma &\leq \frac{3}{2} \\
\Leftrightarrow 2abc\cos\alpha + 2abc\cos\beta + 2abc\cos\gamma &\leq 3abc \\
\Leftrightarrow a(b^2+c^2-a^2) + b(a^2+c^2-b^2) + c(a^2+b^2-c^2) &\leq 3abc \\
\Leftrightarrow ab^2 + ac^2 - a^3 + ba^2 + bc^2 - b^3 + ca^2 + cb^2 - c^3 &\leq 3abc \\
\Leftrightarrow 0 \leq 2 \cdot (3abc + a^3 + b^3 + c^3 - ab^2 - ac^2 - ba^2 - bc^2 - ca^2 - cb^2) & \\
\Leftrightarrow 0 \leq (a+b-c)(a-b)^2 + (b+c-a)(b-c)^2 + (a+c-b)(a-c)^2 &
\end{aligned}$$

Die Ungleichung ist offensichtlich wahr, da im Dreieck

$$a+b-c>0, \quad b+c-a>0, \quad a+c-b>0$$

gilt.
Gleichheit tritt dann ein, wenn $(a-b)^2=0, (b-c)^2=0$ und $(a-c)^2=0$, also $a=b=c$ gilt. Und tatsächlich gilt im gleichseitigen Dreieck: $\cos 60° + \cos 60° + \cos 60° = \frac{3}{2}$

Aufgabe 061243:
Man beweise folgenden Satz:
Ist $n>2$ eine natürliche Zahl, sind $a_1,...,a_n$ positive reelle Zahlen und wird $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = s$ gesetzt, so gilt

$$\sum_{i_1}^{n} \frac{a_i}{s-a_i} \geq \frac{n}{n-1}$$

Lösung von cyrix:
Beweis:
Zuerst normieren wir via $b_i := \frac{a_i}{s}$ die zu zeigende Ungleichung, denn sie geht durch Kürzen der Brüche mit s äquivalent über in $\sum_{i=1} \frac{b_i}{1-b_i} \geq \frac{n}{n-1}$, wobei die b_i weiterhin positive reelle Zahlen sind, die aber nun zusätzlich $\sum_{i=1}^n b_i = 1$ erfüllen.

Setzen wir $\lambda_i := b_i$ und $f(x) := \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1}$, so können wir die linke Seite der Ungleichung auch schreiben als $\sum_{i=1}^n \lambda_i f(b_i)$, wobei natürlich weiterhin alle λ_i positiv sind und ihre Summe 1 ergibt. Da

$$f'(x) = -(1-x)^{-2} \cdot (-1) = (1-x)^{-2} > 0 \qquad \text{und}$$

$$f''(x) = -2(1-x)^{-3} \cdot (-1) = 2(1-x)^{-3} > 0$$

für alle $0<x<1$ ist, und da alle b_i aus diesem Intervall $(0;1)$ stammen, können wir die Jensensche-Ungleichung anwenden und erhalten

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(b_i) \geq f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot b_i\right) = f\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$$

Es ist das quadratische Mittel q der b_i definiert als

$$q := \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n b_i^2}{n}}$$

und ihr arithmetisches Mittel a als

$$a := \frac{\sum_{i=1}^n b_i}{n} = \frac{1}{n}$$

Nach der Ungleichung zwischen quadratischem und arithmetischem Mittel ist $q \geq a = \frac{1}{n}$, also

$$\frac{\sum_{i=1}^n b_i^2}{n} = q^2 \cdot n \geq \frac{1}{n}$$

Da f monoton wachsend ist, folgt damit

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \geq f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{1-\frac{1}{n}} = \frac{n}{n-1}$$

und insgesamt das zu zeigende. q. e. d.

Bemerkung: Aufgrund der strengen Monotonie und da die Ungleichung zwischen quadratischem und arithmetischen Mittel nur für Gleichheit aller b_i und damit aller a_i untereinander Gleichheit liefert, wird auch nur dann in der zu zeigenden Ungleichung der Gleichheitsfall angenommen.

Aufgabe 071245:
Es ist zu beweisen, dass für alle reellen Zahlen x des Intervalls $0 < x < \pi$ die Ungleichung

$$\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x > 0$$

erfüllt ist.

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:
Es ist

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x) \qquad , \qquad \cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) \quad \text{und}$$
$$\sin(3x) = \sin(2x + x) = \sin(2x)\cos(x) + \cos(2x)\sin(x) =$$
$$= 2\sin(x)\cos^2(x) + \cos^2(x)\sin(x) - \sin^3(x) = 3(1 - \sin^2(x))\sin(x) - \sin^3(x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x)$$

Damit lässt sich die linke Seite schreiben als:

$$\sin x + \frac{1}{2}\sin x\cos x + \frac{1}{3}\sin 3x = \sin x + \sin x\cos x + \frac{1}{3}\sin x\left(3 - 4\sin^2 x\right) =$$
$$= \sin x\left(1 + \cos x + 1 - \frac{4}{3}\left(1 - \cos^2 x\right)\right)$$

Und damit geht in die Ungleichung über in:

$$\sin x\left(\frac{4}{3}\cos^2 x + \cos x + \frac{2}{3}\right) > 0$$

$\sin x$ ist im gegebenen Intervall stets positiv.
$\frac{4}{3}\cos^2 x + \cos x + \frac{2}{3} = 0$ hat keine Nullstelle, da nach Substitution $u = \cos^2 x$ die quadratische Gleichung $\frac{4}{3}u^2 x + u + \frac{2}{3}$ keine reelle Lösung hat. Damit ist der Term $\frac{4}{3}\cos^2 x + \cos x + \frac{2}{3} > 0$ und das Produkt ebenfalls > 0.

Aufgabe 091246:
Es ist zu beweisen, dass für jedes Quadrupel positiver reeller Zahlen a, b, c, d die Beziehung

$$\sqrt[3]{\frac{abc + abd + acd + bcd}{4}} \leq \sqrt{\frac{ab + ac + ad + bc + bd + cd}{6}}$$

gilt, und es ist zu untersuchen, in welchen Fällen Gleichheit eintritt.

Lösung von Sonnhard Graubner:
Wir beweisen den folgenden Satz:
Gegeben seien n nichtnegative reelle Zahlen $x_1, x_2, ..., x_n$. Wir betrachten die n symmetrischen Funktionen

$$s_1 = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$
$$s_2 = \sqrt{\frac{x_1x_2 + x_1x_3 + ... + x_1x_n + ... + x_{n-1}x_n}{\binom{n}{2}}}$$
$$...$$
$$s_i = \sqrt[i]{\frac{1}{\binom{n}{i}} \cdot \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < ... < j_i \leq n} x_{j_1}x_{j_2} \cdot ... \cdot x_{j_i}}$$
$$s_n = \sqrt[n]{x_1x_2...x_n}$$

Dann gilt für alle $x_1,x_2,...,x_n$ die Ungleichungskette $s_1 \geq s_2 \geq ... \geq s_n$.
Offenbar ist $s_1 \geq s_n$ die Ungleichung zwischen dem arithmetischem und geometrischem Mittel.
Für $x_1 = x_2 = ... = x_n$ gilt: $s_1 = s_2 = ... = s_n = x_1$. Aus der Ungleichung zwischen dem arithmetischen und dem geometrischen Mittel folgt: $s_{n-1} >= s_n$ und $s_i \geq s_n, i = 1,...,n-1$.

Wir betrachten das Polynom
$$P(x) = (x - x_1(x - x_2) \cdot ... \cdot (x - x_n)$$
$P(x)$ hat genau n nichtnegative Nullstellen $x_1,x_2,...,x_n$ und ist ausmultipliziert:
$$P(x) = x^n - \binom{n}{1} x^{n-1} s_1 + \binom{n}{2} s_2^2 * x^{n-2} + ... + (-1)^n \binom{n}{n} s_n^n.$$
Es sei $i \in \{2,3,..,n-1\}$. Wir betrachten die $n-i$-te Ableitung von $P(x)$:
$$P^{(n-i)}(x) = n(n-1)(n-2) \cdot ... \cdot (i+1) \left(x^i - \binom{i}{1} s_1 x^{i-1} + \binom{i}{2} s_2^2 x^{i-2} \mp ... + (-1)^i \binom{i}{i} s_i^i \right)$$
Nach dem Satz von Rolle hat $P'(x)$ genau $n-1$ nichtnegative reelle Nullstellen. Per Induktion folgt sofort,dass $P^{(n-i)}(x)$ genau i nichtnegative reelle Nullstellen $(x_1)^*,(x_2)^*,...,(x_i)^*$ hat. Dabei ist
$$(x_1)^*(x_2)^* \cdot ... \cdot (x_i)^* = \binom{i}{i} s_i^i \quad \text{und}$$
$$(x_1)^* \cdot (x_2)^* \cdot ... \cdot (x_{i-1})^* + (x_1)^*(x_2)^* \cdot ... \cdot (x_{i-2})^*(x_i)^* + ... + (x_2)^*(x_3)^* \cdot ... \cdot (x_i)^* = \binom{i}{i-1} S_{i-1}^{i-1}$$
Nach der AGM folgt:
$$\frac{1}{i} \binom{i}{i-1} S_{i-1}^{i-1} \geq \sqrt[i]{x_1^{i-1} x_2^{i-1} \cdot ... \cdot x_i^{i-1}} = \sqrt[i]{(s_i^i)^{i-1}}$$
und $s_{i-1}^{i-1} \geq s_i^{i-1}$, also $s_{i-1} \geq s_i$. Insbesondere ist $s_2 \geq s_3$.

Aufgabe 101241:
Es sind alle reellen Zahlen a anzugeben, zu denen es reelle Zahlen x gibt, so dass $\sqrt{a+x}$ und $\sqrt{a-x}$ reell sind und die Ungleichung $\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x} > a$ erfüllt ist.
Wie lauten die Werte von x in Abhängigkeit von a?

Lösung von StrgAltEntf:
Mit (*) bezeichnen wir im folgenden die Ungleichung $\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x} > a$.
Wir betrachten zunächst den Fall, dass $a = 0$. In diesem Fall sind die beiden Wurzeln nur für $x = 0$ reell, (*) ist dann aber nicht erfüllt.
Für $a < 0$ können für keinen Wert x beide Wurzeln reell sein, da ansonsten $x \geq -a$ und $x \leq a$ gelten müsste.

Sei von nun an $a > 0$. Dann sind genau für alle $x \in [-a,a]$ beide Wurzeln reell.
Quadrieren von (*) ist eine Äquivalenzumformung, da beide Seiten positiv sind; (*) ist also äquivalent zu
$$a + x + 2\sqrt{a^2 - x^2} + a - x > a^2 \iff (**)\ 2\sqrt{a^2 - x^2} > a^2 - 2a$$
Für $0 < a < 2$ ist $a^2 - 2a < 0$, (**) also für alle $x \in [-a,a]$ erfüllt.

Es verbleibt der Fall $a \geq 2$.
Quadrieren von (**) ist wieder eine Äquivalenzumformung, da beide Seiten ≥ 0 sind; (**) ist also äquivalent zu
$$4(a^2 - x^2) > a^4 - 4a^3 + 4a^2 \iff (***)\ 4x^2 < 4a^3 - a^4 = a^2 a(4-a)$$

Falls $a \geq 4$, ist die rechte Seite von (***) ≤ 0, (***) kann also von keinem x erfüllt werden.

Schließlich sei nun $2 \leq a < 4$.
Dann ist (***) äquivalent zu $|x| < \frac{1}{2}a\sqrt{a(4-a)}$. Da $\frac{1}{2}a\sqrt{a(4-a)} \leq a \iff a(4-a) \leq 4$ und letzteres für alle $a \in [2,4)$ erfüllt ist, ist das Intervall $I = \left(-\frac{1}{2}a\sqrt{a(4-a)}, \frac{1}{2}a\sqrt{a(4-a)}\right)$ im intervall $[-a,a]$ enthalten und somit erfüllen alle $x \in I$ die Ungleichung (***).

Zusammenfassend:

- $a < 0$: Für kein x sind beide Wurzeln reell und somit ist (*) für kein x erfüllt.
- $a = 0$: Genau für $x = 0$ sind beide Wurzeln reell, aber für kein x ist (*) erfüllt.
- $0 < a < 2$: Genau für $x \in [-a,a]$ sind beide Wurzeln reell und ist (*) erfüllt.
- $2 \leq a < 4$: Genau für $x \in [-a,a]$ sind beide Wurzeln reell, und genau für
$$x \in \left(-\frac{1}{2}a\sqrt{a(4-a)}, \frac{1}{2}a\sqrt{a(4-a)}\right)$$
ist zusätzlich (*) erfüllt.
- $a \geq 4$: Genau für $x \in [-a,a]$ sind beide Wurzeln reell, aber für kein x ist (*) erfüllt.

Aufgabe 111241:
Es sind alle reellen Zahlen x anzugeben, für die der Ausdruck
$$\frac{2x}{|x-3|-5} + \frac{1}{x+2} \qquad (1)$$
existiert, und unter diesen alle x zu ermitteln, die folgende Ungleichung (2) erfüllen:
$$\frac{2x}{|x-3|-5} + \frac{1}{x+2} \geq 1 \qquad (2)$$

Lösung von StrgAltEntf:
In (1) dürfen alle x eingesetzt werden, für die keiner der beiden Nenner 0 wird, also alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2,8\}$.
Wir unterscheiden die Fälle $x \geq 3$ und $x < 3$.

Fall 1: $x \geq 3$
Dann ist der Ausdruck (1) gleich
$$\frac{2x}{x-3-5} + \frac{1}{x+2} = \frac{2x^2+5x-8}{(x-8)(x+2)}$$

Fall 1.1: Für $x > 8$ (oder $x < -2$, was in Fall 1 aber nicht möglich ist) ist der Nenner positiv und die Ungleichung (2) dann äquivalent zu
$$2x^2+5x-8 \geq (x-8)(x+2) \iff x^2+11x+8 \geq 0 \iff (x+\frac{5}{2})^2 + \frac{7}{4} \geq 0$$
Letzteres ist immer erfüllt. Dieser Fall liefert also alle $x > 8$ als Lösung von (2).
Fall 1.2: Für $-2 < x < 8$ ist der Nenner negativ und das Ungleichheitszeichen dreht sich. Die Rechnung bleibt aber identisch, und (2) ist dann äquivalent zu $(x+\frac{5}{2})^2 + \frac{7}{4} \leq 0$. Dies ist nie erfüllt.

Fall 2: $x < 3$

Dann ist der Ausdruck (1) gleich

$$\frac{2x}{-x+3-5}+\frac{1}{x+2}=\frac{1-2x}{x+2}$$

Fall 2.1: Für $x > -2$ ist der Nenner positiv und die Ungleichung (2) dann äquivalent zu

$$1-2x \geq x+2 \iff x \leq -\frac{1}{3}$$

Dieser Fall liefert also alle x mit $-2 < x \leq -\frac{1}{3}$ als Lösung von (2).
Fall 2.2: Für $x < -2$ ist der Nenner negativ und das Ungleichheitszeichen dreht sich. Ungleichung (2) ist dann äquivalent zu $1-2x \leq x+2 \iff x \geq -\frac{1}{3}$, was in diesem Fall nicht möglich ist.

Zusammenfassend: Genau alle $x \in (-2, -\frac{1}{3}] \cup (8,\infty)$ sind Lösung von (2).

Aufgabe 121241:
Man untersuche, ob unter allen Paaren (a, b) positiver reeller Zahlen solche existieren, für die

$$f(a,b)=\frac{a^4}{b^4}+\frac{b^4}{a^4}-\frac{a^2}{b^2}-\frac{b^2}{a^2}+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$$

einen kleinsten Wert annimmt. Wenn ja, dann ist dieser kleinste Wert anzugeben.

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:
Wegen der Symmetrie der Funktion können wir statt $f(a,b)$ auch $g(x)=x^4+\frac{1}{x^4}-x^2-\frac{1}{x^2}+x+\frac{1}{x}$ mit $x:=\frac{a}{b}>0$ betrachten. Es gilt

$$\begin{aligned}
g(x)-x-\frac{1}{x} &= \left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-\left(x+\frac{1}{x}\right)^2\\
&= \left(x^2+\frac{1}{x^2}+x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}-x-\frac{1}{x}\right)\\
&= \left(x^2+\frac{1}{x^2}+x+\frac{1}{x}\right)\frac{(x-1)^2(x^2+x+1)}{x^2}
\end{aligned}$$

Die Faktoren in der letzten Zeile sind alle nicht negativ. Nur $(x-1)^2$ wird für $x=1$ null. Somit erhalten wir $g(x) \geq x+\frac{1}{x} \geq 2$, wobei Gleichheit nur für $x=1$ gilt. Daher nimmt f ihr Minimum bei $f(a,a)=2$ an.

Aufgabe 121246A:
Man zeige , dass der Term

$$\frac{(14+\cos x)\cdot\sin x}{9+6\cdot\cos x}$$

im Intervall $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ eine gute Näherung für den Term x darstellt, indem bewiesen wird, dass für alle x in dem angegebenen Intervall der Betrag der Differenzen beider Terme kleiner als 10^{-4} ist.
Anmerkung: Es gilt $\pi = 3{,}14159+\delta$ mit $0<\delta<10^{-5}$ und $\sqrt{2}=1{,}41421+\varepsilon$ mit $0<\varepsilon<10^{-5}$.

Lösung von Zeitschrift „Mathematik in der Schule“:
Man betrachte die Funktion

$$f(x)=x-\frac{(14+\cos x)\cdot\sin x}{9+6\cdot\cos x}$$

Dann ist zu zeigen, $|f(x)| < 10^{-4}$ für $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$. Für die 1.Ableitung gilt:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 1 - \frac{(14\cos x + \cos^2 x - \sin^2 x)(9 + 6\cos x) + (14 + \cos x)6\sin^2 x}{(9 + 6\cos x)^2} \\
&= 1 - \frac{42\cos x + 6\cos^2 x + 2\cos^3 x + 25}{3(3 + 2\cos x)^2} \\
&= \frac{2(1 - \cos x)^3}{3(3 + 2\cos x)^2}
\end{aligned}$$

Wegen $1 - \cos x \geq 0$ gilt für alle x des zu untersuchenden Intervall $f'(x) \geq 0$. Damit ist $f(x)$ im Intervall $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ monoton wachsend, und es gilt für $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$

$$f(0) \leq f(x) \leq f\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

Offenbar ist $f(0) = 0$. Um die Behauptung nachzuweisen, genügt es also $\left|f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right| = f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ abzuschätzen:

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{\pi}{4} - \frac{\left(14 + \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\frac{1}{2}\sqrt{2}}{9 + 3\sqrt{2}} \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{\left(7\sqrt{2} + \frac{1}{2}\right)(3 - \sqrt{2})}{3(3 + \sqrt{2})(3 - \sqrt{2})} \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{\frac{41}{2}\sqrt{2} - \frac{25}{2}}{21} = \frac{1}{84}(21\pi - 82\sqrt{2} + 50)
\end{aligned}$$

Es ist $21\pi = 21(3{,}14159 + \delta) = 65{,}97339 + 21\delta$ und $82\sqrt{2} = 82(1{,}41421 + \varepsilon) = 115{,}96522 + 82\varepsilon$.
Damit ist

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{84}(0{,}00817 + 21\delta + 82\varepsilon) < \frac{81{,}7 + 2{,}1}{84} \cdot 10^{-4} = \frac{83{,}8}{84} \cdot 10^{-4} < 10^{-4}$$

und somit gilt für $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$

$$0 = f(0) \leq f(x) = |f(x)| \leq f\left(\frac{\pi}{4}\right) < 10^{-4}$$

Aufgabe 141241:
Man beweise, dass für alle reellen Zahlen a, b, c, d mit $0 < a \leq b \leq c \leq d$ gilt:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} \geq \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{d}{c} + \frac{a}{d} \qquad (1)$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Die Ungleichung (1) ist wegen $0 < a \leq b \leq c \leq d$ äquivalent mit

$$\begin{aligned}
\frac{a^2cd + b^2ad + c^2ab + d^2bc}{abcd} &\geq \frac{b^2cd + c^2ad + d^2ab + a^2bc}{abcd} \\
a^2cd + b^2ad + c^2ab + d^2bc &\geq a^2bc + b^2cd + c^2ad + d^2ab \\
a^2c(d - b) + b^2d(a - c) + c^2a(b - d) + d^2b(c - a) &\geq 0 \\
(d - b)(a^2c - ac^2) + (c - a)(bd^2 + b^2d) &\geq 0 \\
(d - b)(a - c)ac + (c - a)(d - b)bd &\geq 0 \\
(d - b)(c - a)(bd - ac) &\geq 0 \qquad (2)
\end{aligned}$$

Wegen $0 < a \leq b \leq c \leq d$ gilt $d - b \geq 0$, $c - a \geq 0$ und $bd - ac \geq 0$.
Daher gilt die Ungleichung (2) und wegen Äquivalenz aller Ungleichungen auch die Ungleichung (1) für alle reellen Zahlen a, b, c, d mit $0 < a \leq b \leq c \leq d$.

b) Aus (2) ergibt sich, dass das Gleichheitszeichen (1) genau dann gilt, wenn $a-c=0$, d. h. $a=c$, oder $d-b=0$, d. h. $d=b$, oder $bd-ac=0$, d. h. $ac=bd$ ist.
Wegen $a \leq b \leq c$ ist $a=c$ gleichbedeutend mit $a=b=c$. Wegen $b \leq c \leq d$ ist $b=d$ gleichbedeutend mit $b=c=d$. Aus $ac=bd$ folgt $a=b$. Wäre $a<b$, so wäre wegen $c \leq d$ auch $ac<bd$.
Ebenso folgt, dass $c=d$ gelten muss. Daher ist $ac=bd$ gleichbedeutend mit $a=b$ und $c=d$.
Notwendig und hinreichend dafür, dass in (1) das Gleichheitszeichen gilt, ist die Bedingung, dass in mindestens zwei der drei Ungleichungen $a \leq b \leq c \leq d$ das Gleichheitszeichen gilt.

Aufgabe 141242:
Von einem Dreieck seien die Innenwinkel gemessen worden. Die Summe der dabei (als Näherungswerte der wahren Innenwinkelgrößen) erhaltenen Messwerte u,v,w sei $180°+\delta$ mit $\delta \neq 0°$.
Durch drei Korrekturwerte x,y,z sollen die Messwerte so verändert werden, dass die Summe der dann entstehenden Werte $u+x$, $v+y$, $w+z$ gleich $180°$ ist.
Es ist zu beweisen, dass für alle unter diesen Bedingungen möglichen Korrekturwerte x,y,z der Wert $S=x^2+y^2+z^2$ genau dann am kleinsten ist, wenn $x=y=z=-\frac{\delta}{3}$ gilt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wegen $u+v+w=180°+\delta$ und $(u+x)+(v+y)+(w+z)=180°$ gilt $x+y+z=-\delta$.
Für $x=y=z=-\frac{\delta}{3}$ ist $S=x^2+y^2+z^2=-\frac{\delta^2}{3}$.
Sind aber x,y,z beliebige den gegebenen Bedingungen entsprechende Korrekturwerte mit $a=x+\frac{\delta}{3}$, $b=y+\frac{\delta}{3}$, $c=z+\frac{\delta}{3}$ so gilt $a+b+c=0$ und

$$x^2+y^2+z^2=\left(a-\frac{\delta}{3}\right)^2+\left(b-\frac{\delta}{3}\right)^2+\left(c-\frac{\delta}{3}\right)^2=a^2+b^2+c^2-\frac{2}{3}(a+b+c)+\frac{\delta^2}{3}=a^2+b^2+c^2+\frac{\delta^2}{3}$$

Da a,b,c reelle Zahlen sind, ist $a^2 \geq 0$, $b^2 \geq 0$ und $c^2 \geq 0$ und wir erhalten

$$x^2+y^2+z^2 \geq \frac{\delta^2}{3}$$

Das Gleichheitszeichen gilt genau da, wenn $a^2=0$, $b^2=0$ und $c^2 00$, also $a=b=c=0$ gilt. Damit ist $S=x^2+y^2+z^2$ genau dann am kleinsten, wenn $x=-\frac{\delta}{3}$, $y=-\frac{\delta}{3}$ und $z=-\frac{\delta}{3}$ ist.

Aufgabe 161244:
Man beweise, dass für alle reellen Zahlen a und b gilt:

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|} \qquad (1)$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Ungleichung (1) ist wegen $1+|a+b|>0$, $1+|a|>0$, $1+|b|>0$ für alle reellen a,b erfüllt, wenn jede der folgenden Ungleichungen erfüllt ist:

$$|a+b|(1+|a|)(1+|b|) \leq |a|(1+|a+b|)(1+|b|)+|b|(1+|a+b|)(1+|a|) \qquad (2)$$

$$|a+b|+|a|\cdot|a+b|+|b|\cdot|a+b|+|a|\cdot|b|\cdot|a+b| \leq |a|+|b|+|a|\cdot|a+b|+|b|\cdot|a+b|+2|a|\cdot|b|+2|a|\cdot|b|\cdot|a+b| \qquad (3)$$

$$|a+b| \leq |a|+|b|+|a|\cdot|b|\cdot|a+b| \qquad (4)$$

Nun ist für alle reellen Zahlen a und b die Ungleichung

$$|a+b| \leq |a|+|b| \leq |a|+|b|+|a|\cdot|b|\cdot|a+b| \qquad (5)$$

erfüllt, also sind auch die Ungleichung (4) und daher die Ungleichungen (3), (2) und (1) erfüllt. w. z. b. w.

Aufgabe 171246A:
Es sei n eine positive Zahl, $(a_1, ..., a_n)$ sei ein n-Tupel reeller Zahlen mit $a_1 \leq a2 \leq ... \leq a_n$.
Man untersuche, ob es zu diesen gegebenen $a_1, ..., a_n$ eine reelle Zahl x derart gibt, dass die Zahl

$$z = |x - a_1| + |x - a_2| + ... + |x - a_n|$$

möglichst klein ist.
Gibt es ein derartiges x, so bestimme man alle reellen Zahlen x mit dieser Eigenschaft und gebe den dazugehörigen minimalen Wert von z an.

Lösung von Zeitschrift „Mathematik in der Schule“:
Die Funktion

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} |x - a_i|$$

ist auf $(-\infty, \infty)$ definiert und als Summe endlich vieler stetiger Funktionen stetig. In der Aufgabe ist nach der Existenz des Minimums - und falls eines existiert - der Menge der Minimalpunkte gefragt.
Für $x - a_1 \leq 0$ folgt $x - a_i \leq 0$ für $i = 1,...,n$, d. h.

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} -(x - a_i) = -nx + c_0 \qquad \text{mit} \qquad c_0 = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Der Graph der Funktion in $(-\infty, a_1)$ ist ein Strahl mit dem Anstieg $-n$, also für $x \to -\infty$ gilt $f(x) \to \infty$.
Für $x - a_n \geq 0$ folgt analog $f(x) = nx - c_0$; der Graph von $f(x)$ in (a_n, ∞) ist ein Strahl mit dem Anstieg n, und es gilt für $x \to \infty \quad f(x) \to \infty$.
Es existiert also eine reelle Zahl $R > 0$, so dass für ein $x \in [-R, R]$ gilt $f(x) < f(y)$ für alle y mit $|y| > R$.
Nach einem Satz von Weierstrass existiert dann in dem abgeschlossenen Intervall $[-R, R]$ ein x^*, in dem die stetige Funktion $f(x)$ bzgl. $(-\infty, \infty)$ ihr Minimum erreicht.
Damit ist der erste Teil der Aufgabe gelöst.

Für $(a_1, a_2, ..., a_n)$ unterscheiden wir zwei Möglichkeiten:
Falls $a_i = a_1$ für $i = 1,...,n$, so ist offenbar $f(a_1) = \min f(x)$; es ist dann der Wert des Minimums $f(a_1) = 0$ und die Menge der Minimalpunkte ist $\{a_1\}$.

Andernfalls existieren $i, k \in \{1,...,n\}$ mit $i < k$, wobei k der kleinste Index mit $a_i \neq a_k$ ist. Für $x \in (a_i, a_k)$ gilt nun

$$x - a_1 \geq ... \geq x - a_i \geq 0 \qquad ; \qquad 0 \geq x - a_{i+1} \geq ... \geq x - a_n \qquad \text{, so dass}$$

$$f(x) = \sum_{\mu=1}^{i} x - a_\mu + \sum_{\mu=i+1}^{n} -(x - a_\mu) = ix - (n - i)x - \sum_{\mu=1}^{i} a_\mu + \sum_{\mu=i+1}^{n} a_\mu = (2i - n)x + c_i$$

Der Graph von $f(x)$ ist somit in jedem solchen Intervall eine Strecke; das Minimum bez. eines jeden solchen Intervalls $[a_i, a_k]$ wird in a_i erreicht, falls der Anstieg $(2i - n)$ der Strecke nicht negativ, und in a_k, falls der Anstieg nicht positiv ist.

Zusammenfassend lässt sich (unter Verwendung dessen, dass $2i - n \geq 0$ genau dann, wenn $i \left[\frac{n+1}{2}\right]$ ist) dies in folgender Weise sagen:
Es ist $f(x)$ über $(-\infty, \infty)$ für $x \in (-\infty, a_{\left[\frac{n+1}{2}\right]})$ stückweise linear mit nichtpositivem Anstieg; das Minimum wird auf Grund der Stetigkeit in $a_{\left[\frac{n+1}{2}\right]}$ erreicht.
Für $x \in (a_{\left[\frac{n+2}{2}\right]}, \infty)$ ist $f(x)$ eine stückweise lineare Funktion mit nichtnegativem Anstieg; das Minimum wird auf Grund der Stetigkeit in $a_{\left[\frac{n+2}{2}\right]}$ erreicht.

Ist nun n eine ungerade Zahl, so ist $a_{\left[\frac{n+1}{2}\right]} = a_{\left[\frac{n+2}{2}\right]}$, und es gilt

$$\min f(x) = f(a_{\left[\frac{n+1}{2}\right]}) = \sum_{\mu=1}^{\frac{n+1}{2}} a_{n-\mu+1} - a_\mu$$

die Menge der Minimalpunkte ist $\{a_{\left[\frac{n+1}{2}\right]}\}$.
Ist n eine gerade Zahl, so gilt für $x \in [a_{\left[\frac{n+1}{2}\right]}, a_{\left[\frac{n+2}{2}\right]}]$, da der Anstieg der Geraden in diesem Intervall gleich 0 ist, dass

$$f(x) = \text{const} = \min f(x) = -\sum_{\mu=1}^{\frac{n}{2}} a_\mu + \sum_{\mu=\frac{n}{2}+1}^{n} a_\mu$$

ist; die Menge der Minimalpunkte ist $[a_{\left[\frac{n+1}{2}\right]}, a_{\left[\frac{n+2}{2}\right]}]$ (wobei dieses Intervall gegebenenfalls aus nur einem einzigen Punkt bestehen kann).

Aufgabe 181246B:
a) Es sei M die Menge aller Tripel (x, y, z) von reellen Zahlen, für die die folgenden Ungleichungen (1) bis (5) erfüllt sind:

$$55x + z \leq 54 \qquad (1)$$
$$55y + z \leq 54 \qquad (2)$$
$$55x - 4z \geq 4 \qquad (3)$$
$$55y - 4z \geq 4 \qquad (4)$$
$$z \geq -1 \qquad (5)$$

Man untersuche, ob für den Ausdruck

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \qquad (6)$$

ein Tripel $(x_0, y_0, z_0) \in M$ mit der Eigenschaft existiert, dass für alle Tripel $(x, y, z) \in M$ die Ungleichung

$$f(x_0, y_0, z_0) \geq f(x, y, z)$$

gilt. Ist dies der Fall, so ermittle man hierzu $f(x_0, y_0, z_0)$.
b) Es sei M' die Menge aller Tripel (x, y, z) von ganzen Zahlen, für die die Ungleichungen (1) bis (5) erfüllt sind.
Man untersuche, ob für den Ausdruck (6) ein Tripel $(x_1, y_1, z_1) \in M'$ mit der Eigenschaft existiert, dass für alle Tripel $(x, y, z) \in M'$ die Ungleichung

$$f(x_1, y_1, z_1) \geq f(x, y, z)$$

gilt. Ist dies der Fall, so ermittle man hierzu $f(x_1, y_1, z_1)$.

Lösung von Zeitschrift „Mathematik in der Schule“:
a) Es seien x, y, z reelle Zahlen, für die Ungleichungen (1) bis (5) erfüllt sind. Dann gilt wegen (3) und (1)

$$4z - 55x \leq -4; \qquad z + 55x \leq 54 \qquad \text{also} \qquad 5z \leq 40 \to z \leq 10$$

Wegen (5) gilt daher $-1 \leq z \leq 10$ (7). Nun folgt aus (1) und (3)

$$\frac{4+4z}{55} \leq x \leq \frac{54-z}{55} \qquad (8)$$

aus (2) und (4)

$$\frac{4+4z}{55} \leq y \leq \frac{54-z}{55} \qquad (9)$$

Wegen (7) ist $\frac{4 \cdot 4z}{55} \geq 0$, $0 < \frac{44}{45} \leq \frac{54-z}{55} \leq 1$, also $0 \leq x \leq 1$ und $0 \leq y \leq 1$ (10). Daraus folgt:

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 \leq 2\left(\frac{54-z}{55}\right)^2 + z^2 \qquad (11)$$

Nun gilt für die quadratische Fuktion

$$g(z) = 2\left(\frac{54-z}{55}\right)^2 + z^2 \quad \text{mit} \quad -1 \leq z \leq 10$$

$$g(z) > 0; \qquad g(-1) = 3; \qquad g(10) = 101{,}28$$

also nimmt diese Funktion in ihrem Definitionsbereich ein Maximum für $z = 10$ an. Daher gilt: $f8x{,}y{,}z) \leq 101{,}28 \quad (12)$. Für $z_0 = 10$, $x_0 = y_0 = \frac{54-z_0}{55} = 0{,}8 \quad (13)$ wird nun $f(x_0, y_0{,}z_0) = 101{,}28 \quad (14)$, d. h. das Tripel $(x_0, y_0, z_0) = (0{,}8; 0{,}8; 10)$ hat die in der Aufgabe verlangte Eigenschaft.

b) Es seien nun x, y, z ganze Zahlen, für die die Ungleichungen (1) bis (5) erfüllt sind. Dann gelten wieder die Ungleichungen (7), (8), (9) und (10), also kann nur entweder $x = 0$ oder $x = 1$ sein. Ferner gilt entweder $y = 0$ oder $y = 1$.
Ist $x = 0$, so folgt aus (3) $z \leq -1$, und daher wegen $z \geq -1$: $z = -1$.
Ist $x = 1$, so folgt aus (1) $z \leq -1$, also erneut $z = -1$.

Daher gibt es höchstens die folgenden ganzzahligen Tripel für die die Ungleichungen (1) bis 85) erfüllt sind:

$$(0; 0; -1), \qquad (0; 1; -1), \qquad (1; 0; -1), \qquad (1; 1; -1)$$

Sie erfüllen in der Tat diese Ungleichungen, ferner gilt:

$$f(0; 0; -1) = 1, \qquad f(0; 1; -1) = f(1; 0; -1) = 2, \qquad f(1; 1; -1) = 3$$

Also hat das Tripel $(x_1, y_1, z_1) = (1; 1; -1)$ die in der Aufgabe verlangte Eigenschaft mit $f(x_1, y_1, z_1) = 3$.

Aufgabe 191245:
Man beweise:
Für jede ganze Zahl $n \geq 2$ und jede ganze Zahl $k \geq 2$ gilt:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n^k - 1} + \frac{1}{n^k} > k \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right)$$

Lösung von Zeitschrift „Mathematik in der Schule“:
Für die Summe $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n^{i+1}}$ ist die folgende Darstellung möglich

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n^{i+1}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n^i} + \sum_{k=1}^{n-1} S_k \qquad (1)$$

$$\text{mit} \qquad S_k = \sum_{j=1}^{n^i} \frac{1}{kn^i + j} \qquad (2)$$

Weiterhin gilt

$$S_k > \frac{n^i}{(k+1)n^i} = \frac{1}{k+1} \qquad (3)$$

Aus (1), (2), (3) folgt

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n^i} + ... + \frac{1}{n^{i+1}} > \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n^i} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \qquad (4)$$

Subtrahiert man auf beiden Seiten von (4) den Ausdruck $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n^i}$, so folgt nach dem Monotoniegesetz der Addition (Subtraktion) bei Ungleichungen:

$$\frac{1}{n^i + 1} + \frac{1}{n^i + 2} + ... + \frac{1}{n^{i+1}} > \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} \qquad (5)$$

Diese Ungleichung besteht für alle natürliche Zahlen $i \geq 1$. Ist $i - j \geq 1$, so gilt auch:

$$\frac{1}{n^{i-j}+1} + \frac{1}{n^{i-j}+2} + ... + \frac{1}{n^{i-j+1}} > \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} \qquad (5)$$

Notiert man die Ungleichung (6) nacheinander für $j = 0,1,...,i-1$, so erhält man i Ungleichungen, deren rechte Seiten untereinander gleich sind. Nach bekannten Sätzen über das Rechnen mit Ungleichungen dürfen gleichgerichtete Ungleichungen addiert werden. Addiert man außerdem auf beiden Seiten die Summe $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$, so ergibt sich die Ungleichung

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n^{i+1}} > (i+1)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}\right) \qquad (7)$$

Setzt man in Ungleichung (7) $i + 1 = k$, so folgt die zu beweisende Ungleichung in der vorgelegten Form.

Aufgabe 221243:
Man untersuche, ob es nichtnegative
a) reelle Zahlen x_1, x_2, x_3, x_4,
b) ganze Zahlen x_1, x_2, x_3, x_4
mit $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4$ und $x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4$ gibt, so dass die Summe

$$s = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

einen kleinsten Wert annimmt. Ist das der Fall, so ermittle man jeweils zu a) bzw. b) solche Zahlen x_1, x_2, x_3, x_4 sowie den zugehörigen Wert s.

Lösung von Kitaktus:
a) Löst man die beiden Gleichungsnebenbedingungen nach x_2 und x_1 auf, so erhält man:

$$x_2 = 4 - 2x_3 - 3x_4 \qquad (1)$$
$$x_1 = x_3 + 2x_4 \qquad (2)$$

Eingesetzt in die Gleichung $s = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}
s &= (x_3 + 2x_4)^2 + (4 - 2x_3 - 3x_4)^2 + x_3^2 + x_4^2 \\
&= x_3^2 + 4x_3x_4 + 4x_4^2 + 16 - 16x_3 - 24x_4 + 4x_3^2 + 12x_3x_4 + 9x_4^2 + x_3^2 + x_4^2 \\
&= 6x_3^2 + 16x_3x_4 + 14x_4^2 - 16x_3 - 24x_4 + 16 \\
&= 6(x_3 + (4/3)(x_4 - 1))^2 + (14 - 32/3)x_4^2 - (24 - 64/3)x_4 + (16 - 32/3) \\
&= 6(x_3 + (4/3)(x_4 - 1))^2 + (10/3)(x_4^2 - (4/5)x_4 + (8/5)) \\
&= 6(x_3 + (4/3)(x_4 - 1))^2 + (10/3)(x_4 - 2/5)^2 + (10/3)(8/5 - 4/25)) \\
&= 6(x_3 + (4/3)(x_4 - 1))^2 + (10/3)(x_4 - 2/5)^2 + 24/5 \geq 24/5
\end{aligned}$$

s ist also durch 24/5 nach unten beschränkt.

Für $x_1 = 8/5; x_2 = 6/5; x_3 = 4/5; x_4 = 2/5$ sind die beiden Nebenbedingungen erfüllt, da $(8+6+4+2)/5 = 20/5 = 4$ und $(6 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 2)/5 = 20/5 = 4$ gilt. Für diese Variablenbelegung ist

$$s = (8^2 + 6^2 + 4^2 + 2^2)/5^2 = 120/25 = 24/5$$

Die untere Schranke wird also angenommen.

Fazit: Die Summe s nimmt den kleinsten Wert 24/5 an, wenn $x_1 = 8/5; x_2 = 6/5; x_3 = 4/5; x_4 = 2/5$ ist.

b) Sind die Zahlen x_1, x_2, x_3 und x_4 ganzzahlig, so ist auch $s = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$ ganzzahlig. Eine Zahl x_i und ihr Quadrat x_i^2 haben die gleiche Parität (d. h. den gleichen Rest bei Division durch 2). Daher hat

s die gleiche Parität wie $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4$. s ist also in jedem Fall gerade.

Genauso wie in a) gilt die Ungleichung $s \geq 24/5 > 20/5 = 4$. Da s ganzzahlig und gerade ist, kann das verschärft werden zu $s \geq 6$.

Für $x_1 = 1; x_2 = 2; x_3 = 1; x_4 = 0$ sind die beiden Nebenbedingungen erfüllt, da $1 + 2 + 1 + 0 = 4$ und $2 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 = 4$ gilt. Für diese Variablenbelegung ist $s = 1^2 + 2^2 + 1^2 + 0^2 = 6$. Die untere Schranke wird also angenommen.

Fazit: Die Summe s nimmt den kleinsten Wert 6 an, wenn $x_1 = 1; x_2 = 2; x_3 = 1; x_4 = 0$ ist.

Aufgabe 221245:
Es seien $a_1, a_2, ..., a_n$ reelle Zahlen. Bei einem ungestörten technischen Prozess sei

$$x_1 = a_1 + a_2 + ... + a_n \qquad (1)$$

die Maßzahl einer von $a_1, a_2, ..., a_n$ abhängigen Größe. Bei einem gestörten technischen Prozess betrage die Maßzahl dieser Größe dagegen

$$x_2 = \frac{a_1}{1+\varepsilon_1} + \frac{a_2}{1+\varepsilon_2} + ... + \frac{a_n}{1+\varepsilon_n} \qquad (2)$$

Dabei seien $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n$ reelle Zahlen, zu denen es eine natürliche Zahl $m \geq 1$ derart gibt, dass für alle $\mu = 1, 2, ..., n$ die Ungleichung $|\varepsilon_\mu| \leq 10^{-m}$ (3) gilt.
Beweisen Sie, dass aus diesen Voraussetzungen (1), (2), (3) stets die Ungleichung

$$|x_2 - x_1| \leq \frac{1}{10^m - 1}(|a_1| + |a_2| + ... + |a_n|)$$

folgt!

Lösung von cyrix:
Es gilt für alle $\mu = 1,2,\ldots,n$ die Ungleichung

$$\left|1 - \frac{1}{1+\varepsilon_\mu}\right| = \left|\frac{1+\varepsilon_\mu - 1}{1+\varepsilon_\mu}\right| = \frac{|\varepsilon_\mu|}{|1+\varepsilon_\mu|} \leq \frac{|\varepsilon_\mu|}{1-|\varepsilon_\mu|} \leq \frac{10^{-m}}{1-10^{-m}} = \frac{1}{10^m - 1}$$

Also ist auch für alle $\mu = 1,2,\ldots,n$

$$\left|\frac{a_\mu}{1+\varepsilon_\mu} - a_\mu\right| = |a_\mu| \cdot \left|1 - \frac{1}{1+\varepsilon_\mu}\right| \leq |a_\mu| \cdot \frac{1}{10^m - 1}$$

Die behauptete Ungleichung folgt nun durch Addition der gerade gezeigten für $\mu = 1,2,\ldots,n$, $\square$.

Aufgabe 251242:
Es seien $q_1, q_2, ..., q_n$ $(n \geq 2)$ paarweise verschiedene Primzahlen. Man beweise, dass aus dieser Voraussetzung stets folgt

$$\frac{q_1^3+1}{q_1^3-1} \cdot \frac{q_2^3+1}{q_2^3-1} \cdot ... \cdot \frac{q_n^3+1}{q_n^3-1} < \frac{36}{25}$$

Lösung von weird:
Seien im Folgenden die reellen Funktion f und g definiert durch

$$f(x) := \frac{2}{(2x+1)^3 - (2x+1)} = \frac{1}{2x} - \frac{2}{2x+1} + \frac{1}{2x+2}$$

und

$$g(x) := \frac{x^3+1}{x^3-1} = 1 + \frac{2}{x^3-1}$$

Unter Benutzung von

$$\forall x > 1: \quad g(x) = 1 + \frac{2}{x^3-1} < \exp\left(\frac{2}{x^3-1}\right) < \exp\left(\frac{2}{x^3-x}\right)$$

gilt dann zunächst

$$\prod_{k=1}^{n} g(q_k) < \prod_{p\in\mathbb{P}} g(p) < g(2)g(3)\prod_{k=2}^{\infty} g(2k+1) < g(2)g(3)\exp\left(\sum_{k=2}^{\infty} f(k)\right)$$

und unter Verwendung der Abschätzung

$$\sum_{k=2}^{\infty} f(k) < f(2) + \int_2^{\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{60} + \frac{1}{2}\ln(\frac{25}{24})$$

erhalten wir schließlich als obere Schranke für unser Produkt

$$\frac{18}{13}\exp\left(\frac{1}{60} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{25}{24}\right)\right) \approx 1.4369$$

was also dann tatsächlich noch knapp unter der „angepeilten“ Marke von

$$\frac{36}{25} \approx 1.44$$

hier liegt.

Alternativ-Lösung von ochen:
Lemma: Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 6$ gilt

$$\prod_{k=6}^{n} \frac{k^3+1}{k^3-1} = \frac{31}{30}\frac{n(n+1)}{n^2+n+1}.$$

Beweis: Wir zeigen die Aussage mittels vollständiger Induktion. Für $n = 6$ gilt

$$\prod_{k=6}^{n} \frac{k^3+1}{k^3-1} = \frac{6^3+1}{6^3-1} = \frac{217}{215} = \frac{31}{30}\frac{6(6+1)}{6^2+6+1} = \frac{31}{30}\frac{n(n+1)}{n^2+n+1}.$$

Unter der Voraussetzung, dass die obige Aussage für eine natürliche Zahl $n \geq 5$ gilt, folgt auch die Aussage für $n+1$, denn wir erhalten

$$\prod_{k=5}^{n+1} \frac{k^3+1}{k^3-1} = \frac{31}{30}\frac{n(n+1)}{n^2+n+1}\frac{(n+1)^3+1}{(n+1)^3-1} = \frac{31}{30}\frac{n^2+n}{n^2+n+1}\frac{(n+1)+1}{(n+1)-1}\frac{(n+1)^2-(n+1)+1}{(n+1)^2+(n+1)+1}$$

$$= \frac{31}{30}\frac{n(n+1)}{n^2+n+1}\frac{n+2}{n}\frac{n^2+n+1}{(n+1)^2+(n+1)+1} = \frac{31}{30}\frac{(n+1)(n+2)}{(n+1)^2+(n+1)+1}.$$

Damit ist das Lemma gezeigt. □

Seien nun die Folgen (a_n), (b_n) und (c_n) gegeben durch

$$a_n = \prod_{k=6}^{2n+1} \frac{k^3+1}{k^3-1},\ b_n = \prod_{k=3}^{n} \frac{(2k)^3+1}{(2k)^3-1} \quad \text{und} \quad c_n = \prod_{k=3}^{n} \frac{(2k+1)^3+1}{(2k+1)^3-1}.$$

Aus

$$\frac{(2k+1)^3+1}{(2k+1)^3-1} = 1 + \frac{2}{(2k+1)^3-1} < 1 + \frac{2}{(2k)^3+1} = \frac{(2k)^3+1}{(2k)^3-1}.$$

folgt $c_n < b_n$ für alle natürlichen Zahlen $n \geq 3$. Weiter erhalten wir mit obigem Lemma

$$c_n^2 < b_n \cdot c_n = a_n < \frac{31}{30}.$$

Für m paarweise verschiedene Primzahlen $q_1, \dots, q_m$, gibt es eine natürlich Zahl n, sodass gilt

$$\prod_{k=1}^{m} \frac{q_k^3+1}{q_k^3-1} < \frac{2^3+1}{2^3-1}\frac{3^3+1}{3^3-1}\frac{5^3+1}{5^3-1} \cdot \prod_{k=3}^{n} \frac{(2k+1)^3+1}{(2k+1)^3-1} < \frac{2^3+1}{2^3-1}\frac{3^3+1}{3^3-1}\frac{5^3+1}{5^3-1} \cdot \sqrt{\frac{31}{30}} < \frac{36}{25}.$$

Aufgabe gelöst von ochen

Anmerkung:
Das unendliche Produkt (erstmal ohne Einschränkung auf Primzahlen) ist ein Teleskopprodukt ist, welches eine Lösung über Induktion motiviert. Wir haben nämlich

$$\frac{k^3+1}{k^3-1} = \frac{(k+1)(k^2-k+1)}{(k-1)(k^2+k+1)} = \frac{k+1}{k-1}\frac{k(k-1)+1}{k(k+1)+1}$$

und wenn man das Produkt aufeinanderfolgender Faktoren (beginnend mit irgendeinem $k \geq 2$) hinschreibt,

$$\frac{k+1}{\boldsymbol{k-1}}\frac{\boldsymbol{k(k-1)+1}}{k(k+1)+1} \cdot \frac{\boldsymbol{k+2}}{\boldsymbol{k}}\frac{(k+1)k+1}{(k+1)(k+2)+1} \cdot \frac{\boldsymbol{k+3}}{k+1}\frac{(k+2)(k+1)+1}{\boldsymbol{(k+2)(k+3)+1}},$$

so sieht man, dass nach Wegkürzen „links“ nur der blau markierte Teil übrig bleibt und „rechts“ nur der orange Teil. Das Produkt von einem Index $k \geq 2$ zu einem $n > k$ ist also gleich

$$\left(\boldsymbol{1+\frac{1}{k(k-1)}}\right)\left(\boldsymbol{1-\frac{1}{n(n+1)+1}}\right)$$

und da der rechte Faktor für $n \to \infty$ gegen 1 geht, ist der Wert des unendlichen Produktes gleich $1+\frac{1}{k(k-1)}$.
Und tatsächlich lässt sich nun die Aufgabe schnell lösen, indem man ausrechnet, dass

$$\frac{q_1^3+1}{q_1^3-1} \cdots \frac{q_n^3+1}{q_n^3-1} < \frac{2^3+1}{2^3-1} \cdot \frac{3^3+1}{3^3-1} \cdot \frac{5^3+1}{5^3-1} \cdot \frac{7^3+1}{7^3-1} \cdot \left(\boldsymbol{1+\frac{1}{11 \cdot 10}}\right) < \frac{36}{25}$$

gilt (beachte, dass das Produkt durch Hinzunehmen von Faktoren größer wird, da jeder Faktor größer als 1 ist).

Anmerkung von Kornkreis

Aufgabe 261246B:
Es seien $x_1, x_2, ..., x_{1987}$ nichtnegative reelle Zahlen, für die die Summe der Quadrate gleich 10 und die Summe der dritten Potenzen größer als 1 ist.
Untersuchen Sie, ob es unter diesen Voraussetzungen stets möglich ist, eine Auswahl
a) von 9 dieser Zahlen
b) von 10 dieser Zahlen
so zu treffen, dass die Summe der ausgewählten Zahlen größer als 1 ist!
(Kommt eine Zahl mehrmals unter den $x_1, x_2, ..., x_{1987}$ vor, so darf sie auch höchstens ebenso oft unter die ausgewählten Zahlen aufgenommen werden.)

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Eine solche Auswahl ist nicht stets möglich, z. B. nicht für

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{50}}, \quad x_2 = ... = x_{999} = \frac{1}{10}, \quad x_{1000} = ... = x_{1987} = 0$$

Für die Zahlen ist nämlich

$$x_1^2 + ... + x_{1987}^2 = \frac{1}{50} + \frac{998}{100} = 10 \qquad \text{und}$$

$$x_1^3 + ... + x_{1987}^3 = \frac{1}{50} \cdot \frac{1}{\sqrt{50}} + \frac{998}{1000} > \frac{1}{50 \cdot 10} + \frac{499}{500} = 1$$

Die Voraussetzungen sind also erfüllt, aber für jede Auswahl von neun dieser Zahlen ist (wegen $0 < \frac{1}{10} < \frac{1}{\sqrt{50}}$) deren Summe

$$s \leq \frac{1}{\sqrt{50}} + \frac{8}{10} < \frac{1}{5} + \frac{4}{5} = 1$$

b) Eine solche Auswahl ist unter den genannten Voraussetzungen stets möglich. Zum Beweis sei für nichtnegative $x_1, ..., x_{1987}$

$$x_1^2 + ... + x_{1987}^2 = 10 \qquad (1)$$
$$x_1^3 + ... + x_{1987}^3 > 1 \qquad (2)$$

und o. B. d. A.

$$x_1 \geq x_2 \geq ... \geq x_{1987} \qquad (3)$$

vorausgesetzt.
Wählt man dann die zehn Zahlen $x_1, x_2, ..., x_{10}$ aus, so gilt:
Falls $x_1 > 1$, ist erst recht $x_1 + ... + x_{10} > 1$.
Falls aber $1 \geq x_1$ ist, folgt hieraus und aus (3)

$$1 \geq x_i^2 \quad (i = 1,...,10)$$

Nochmals wegen (3), also $x_i - x_{10} \geq 0$ $(i = 1,...,10)$, folgt hieraus

$$x_i - x_{10} \geq x_i^3 - x_{10} \cdot x_i^2 \qquad (i = 1,...,10)$$

Summiert man dies und wendet (1), (3) und (2) an, so erhält man

$$\sum_{i=1}^{10} \geq \sum_{i=1}^{10} x_i^3 + x_{10} \cdot \left(10 - \sum_{i=1}^{10} x_i^2\right) = \sum_{i=1}^{10} x_i^3 + x_{10} \cdot \sum_{i=11}^{1987} x_i^2$$
$$\geq \sum_{i=1}^{10} x_i^3 + \sum_{i=11}^{1987} x_i^3 > 1$$

Aufgabe 281246A:
Man beweise:
Für jede natürliche Zahl $n > 1$ und für je $n + 2$ reelle Zahlen p, q, a_1, a_2, ..., a_n, die

$$0 < p \leq ai \leq q \qquad (i = 1, 2, ..., n) \qquad (1)$$

erfüllen, gelten die beiden Ungleichungen

$$n^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}\right) \leq n^2 + \left[\frac{n^2}{4}\right] \cdot \left(\sqrt{\frac{p}{q}} - \sqrt{\frac{q}{p}}\right)^2 \qquad (2)$$

Hinweis: Zu reellem x bezeichnet wie üblich $[x]$ die ganze Zahl $[x] = g$ mit $g \leq x < g + 1$.
Man ermittle ferner zu gegebenen n, p, q mit $0 < p \leq q$ alle diejenigen a_i mit (1), für die in (2)
a) zwischen der ersten und zweiten Zahl,
b) zwischen der zweiten und dritten Zahl
das Gleichheitszeichen gilt.

Lösung von Zeitschrift „alpha“:
Bezeichnen wir für $0 < x \leq y$ mit $f(x,y)$ die Funktion

$$f(x,y) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$$

so folgt durch Ausmultiplizieren

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}\right) = n + \sum_{1 \leq i < k \leq n} f(a_i, a_k) \qquad (3)$$

Für jedes positive z gilt bekanntlich $z + \frac{1}{z} \geq 2$ mit Gleichheit genau für $z = 1$. Damit gilt stets $f(x,y) \geq 2$, da die rechte Summe in (3) aus $\frac{n(n-1)}{2}$ Summanden besteht, folgt

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}\right) \geq n + \frac{2n(n-1)}{2} = n^2$$

Damit ist die linke Ungleichung von (2) bewiesen. Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn $a_1 = a_2 = ... = a_n$.
Wir betrachten nun den Ausdruck auf der rechten Seite von (3) in folgendem Schema angeordnet:

$$\begin{aligned} 1 + f(a_1,a_2) + f(a_1, a3)\\ +... + f(a_1,a_{n-1}) + f(a_1,a_n)\\ +1 + f(a_2,a_3)\\ +... + f(a_2,a_{n-1}) + f(a_2,a_n)\\ +........\\ +1 + f(a_{n-1},a_n)\\ +1 \end{aligned}$$

Um diesen Ausdruck abzuschätzen, betrachten wir zwei Hilfsungleichungen (hier ohne Beweis):
1. Für $0 < w \leq x \leq y \leq z$ gilt $f(w,z) \leq f(x,y)$. Gleichheit gilt genau für den Fall $w = x$, $y = z$.
2. Für $0 < x \leq y \leq z$ gilt $f(x,y) + f8y,z) \leq 2 + f(x,z)$. Gleichheit gilt genau für die zwei Fälle $y = x$ und $y = z$.

Betrachten wir nun zwei Zahlen i,k mit $1 \leq i < k \leq n$ und $i + k \leq n + 1$ in unserem Schema die Summanden in der k-ten Spalte der i-ten Zeile und er $(n + 1 - i)$-ten Spalte der k-ten Zeile, so gilt für deren Summen nach der zweiten Hilfsungleichung

$$f(a_1, a_k) + f(a_k, a_{n+1-i}) \leq 2 + f(a_1, a_{n+1-i})$$

Nach der ersten Hilfsungleichung folgt daraus wegen (1)

$$f(a_1, a_k) + f(a_k, a_{n+1-i}) \leq 2 + f(p,q)$$

Damit können wir unsere Summe verkleinern, wenn wir für alle möglichen Werte von i und k die Summanden $f(a_i,a_k)$ und $f(a_k, a_{n+1-i})$ jeweils durch $\left(1 + \frac{1}{2}f(p,q)\right)$ ersetzen.
Die einzigen Summanden in unserem Schema, die noch nicht ersetzt sind, sind die Summanden auf der Diagonalen (a_1,a_n), $f(a_2, a_{n-1})$, ... Nach der ersten Hilfsungleichung können wir jeden durch $f(p,q)$ ersetzen. Unser Schema hat dann die Gestalt

$$\begin{aligned} 1 + \left(1 + \frac{1}{2}f(p,q)\right) + \left(1 + \frac{1}{2}f(p,q)\right)\\ +... + \left(1 + \frac{1}{2}f(p,q)\right) + f(p,q)\\ +1 + \left(1 + \frac{1}{2}f(p,q)\right)\\ +... + f(p,q) + \left(1 + \frac{1}{2}f(p,q)\right)\\ +........\\ +1 + \left(1 + \frac{1}{2}f(p,q)\right)\\ +1 \end{aligned}$$

Durch Abzählen der Summanden erhält man: ist n ungerade, so hat das neue Schema die Summe

$$\frac{n^2+1}{2} + f(p,q)\frac{n^2-1}{4}$$

ist n gerade

$$\frac{n^2}{2} + f(p,q)\frac{n^2}{4}$$

Berücksichtigt man noch, dass

$$f(p,q) = \frac{p}{q} + \frac{q}{p} = \left(\sqrt{\frac{p}{q}} - \sqrt{\frac{q}{p}}\right)^2 + 2$$

so folgt daraus die Behauptung der Aufgabe.
Gleichheit gilt, falls in unseren Hilfsungleichungen stets Gleichheit galt, d. h. für $p = x_1 = ... = x_m$, $x_{m+1} = ... = x_n = q$ mit $m = \frac{n}{2}$ für n gerade und $m = \frac{n-1}{2}$ und $m = \frac{n+1}{2}$ für n ungerade.

Aufgabe 311241:
Es sei

$$x = e^{0{,}000009} - e^{0{,}000007} + e^{0{,}000002} - e^{0{,}000001}; \qquad y = e^{0{,}000008} - e^{0{,}000005}$$

Man untersuche, ob $x = y$ oder $x > y$ oder $x < y$ gilt.

Lösung von MontyPythagoras:
Wir setzen

$$z = e^{0{,}000001} \approx 1{,}000001 > 1$$

Dann ist

$$x - y = z^9 - z^8 - z^7 + z^5 + z^2 - z$$
$$x - y = z(z^8 - z^7 - z^6 + z^4 + z - 1)$$
$$x - y = z(z-1)\left(z^7 - z^4(z+1) + 1\right)$$
$$x - y = z(z-1)\left(z^7 - z^5 - z^4 + 1\right)$$
$$x - y = z(z-1)(z^2-1)\left(z^5 - z^2 - 1\right)$$

Da $z > 1$ ist, sind die Faktoren z, $(z-1)$ und (z^2-1) jeweils größer als null. Da $(z^5 - z^2 - 1) \approx -1 < 0$ ist, ist auch $x - y < 0$ bzw. $x < y$.

Aufgabe 311246A:
Man untersuche, ob es eine Anzahl $n \geq 2$ sowie eine positive reelle Zahl c und n positive reelle Zahlen a_i $(i = 1, 2, ..., n)$ derart gibt, dass die Summe der a_i gleich $n \cdot c$, die Summe der Quadrate der a_i gleich $2n \cdot c^2$ und mindestens eine der Zahlen a_i größer als $(1 + \sqrt{n-1}) \cdot c$ ist.

Lösung von MontyPythagoras:
Wir setzen zunächst

$$a_n = (1 + \sqrt{n-1})c + \varepsilon_n$$

mit $\varepsilon_n > 0$, und

$$a_i = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)c + \varepsilon_i$$

Dann ist die Summe:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = (1+\sqrt{n-1})c + \varepsilon_n + \sum_{i=1}^{n-1}\left[\left(1-\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)c+\varepsilon_i\right]$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = (1+\sqrt{n-1})c + \varepsilon_n + (n-1)\left(1-\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)c + \sum_{i=1}^{n-1}\varepsilon_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = (1+\sqrt{n-1})c + \left(n-1-\sqrt{n-1}\right)c + \sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = nc + \sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i$$

Damit die Vorgabe der Summe erfüllt ist, muss gelten:

$$\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i = 0 \tag{1}$$

Für die Summe der Quadrate gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = \left((1+\sqrt{n-1})c+\varepsilon_n\right)^2 + \sum_{i=1}^{n-1}\left[\left(1-\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)c+\varepsilon_i\right]^2 =$$

$$= (1+\sqrt{n-1})^2c^2 + 2(1+\sqrt{n-1})c\varepsilon_n + \varepsilon_n^2 + \sum_{i=1}^{n-1}\left[\left(1-\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)^2c^2 + 2\left(1-\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)c\varepsilon_i + \varepsilon_i^2\right] =$$

$$= (n+2\sqrt{n-1})c^2 + 2(1+\sqrt{n-1})c\varepsilon_n + \varepsilon_n^2 + (n-1)\left(1-\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)^2c^2 + 2c\left(1-\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)\sum_{i=1}^{n-1}\varepsilon_i + \sum_{i=1}^{n-1}\varepsilon_i^2 =$$

$$= (n+2\sqrt{n-1})c^2 + 2(1+\sqrt{n-1})c\varepsilon_n + \left(n-1-2\sqrt{n-1}+1\right)c^2 + 2c\left(1-\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)\sum_{i=1}^{n-1}\varepsilon_i + \sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 2nc^2 + 2(1+\sqrt{n-1})c\varepsilon_n + 2c\left(1-\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)\sum_{i=1}^{n-1}\varepsilon_i + \sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2$$

Wegen (1) gilt

$$\sum_{i=1}^{n-1}\varepsilon_i = -\varepsilon_n$$

und daher:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 2nc^2 + 2(1+\sqrt{n-1})c\varepsilon_n + 2c\left(1-\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)(-\varepsilon_n) + \sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 2nc^2 + 2\left(\sqrt{n-1}+\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)c\varepsilon_n + \sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2 > 2nc^2$$

Daher ist es nicht möglich, alle Vorgaben zu erfüllen, bei Vorgabe der Summen gilt stattdessen $a_i \leq (1+\sqrt{n-1})c$.

VIII.III Gleichungssysteme

I Runde 1

Aufgabe 031213:
Man bestimme alle reellen Werte von x_1, x_2, x_3, die den Gleichungen

$$x_2 + x_3 = px_1, \tag{1}$$
$$x_1 + x_3 = px_2, \tag{2}$$
$$x_1 + x_2 = px_3 \tag{3}$$

genügen, und ihre Abhängigkeit von der reellen Zahl p (Parameter)!

Lösung von Steffen Weber:
Angenommen es gibt eine Lösung (x_1,x_2,x_3), die den Gleichungen (1), (2), (3) genügt, so genügt diese Lösung auch den äquivalenten Gleichungen

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= (p+1)x_1, \\ x_1 + x_2 + x_3 &= (p+1)x_2, \\ x_1 + x_2 + x_3 &= (p+1)x_3. \end{aligned}$$

Ist $p \neq -1$, so ist $(x_1 + x_2 + x_3)(p+1)^{-1} = x_1 = x_2 = x_3 = x$. Aus (1) bis (3) folgt nun $2x = px$, also ist $(x_1,x_2,x_3) = (0,0,0)$ die einzige Lösung für $p \notin \{-1,2\}$. Für $p = 2$ genügen alle $(x_1,x_2,x_3) = (x,x,x)$, x reell, den Gleichungen.

Ist $p = -1$, so sind die Gleichungen (1) bis (3) äquivalent zu $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Somit genügen alle $(x_1,x_2,x_3) = (x_1,x_2,-x_1-x_2)$, x_1,x_2 reell, den Gleichungen.

Aufgabe 041115:
Man berechne alle gemeinsamen Lösungen der beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} 3x^4 + 13x^3 + 20x^2 + 17x + 7 = 0 \\ 3x^4 + x^3 - 8x^2 + 11x - 7 = 0 \end{aligned}$$

(Dabei sollen keine Näherungsverfahren benutzt werden.)

Lösung von Rainer Müller:
Wir definieren Polynome

$$\begin{aligned} p_1(x) &:= 3x^4 + 13x^3 + 20x^2 + 17^x + 7 \\ p_2(x) &:= 3x^4 + x^3 - 8x^2 + 11x - 7 \end{aligned}$$

Sei x eine Lösung der gegebenen Gleichungen, $p_1(x) = p_2(x) = 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} 0 = p_1(x) - p_2(x) &= 12x^3 + 28x^2 + 6x + 14 =: p_3(x) \\ 0 = 4p_2(x) - (x-2)p_3(x) &= 18x^2 + 42x =: p_4(x) \\ 0 = 3p_3(x) - 2xp_4(x) &= 18x + 42 =: p_5(x) \end{aligned}$$

Umgekehrt folgt wegen $p_4(x) = xp_5(x)$ aus $p_5(x) = 0$, dass auch $p_3(x) = 0$ ist (denn $p_3(x) = \frac{1}{3}(p_5(x) + 2xp_4(x)))$ und ebenso, dass auch $p_1(x)$ und $p_2(x)$ Null sind.

Die gesuchten gemeinsamen Lösungen der Gleichungen sind also genau die Nullstellen von p_5, also $\{-\frac{7}{3}\}$.

Aufgabe 141214:
Für alle reellen Wertetripel (a, b, c) ist zu untersuchen, ob das Gleichungssystem

$$xy^2z^3 = a, \quad ; \quad x^2y^3z = b, \quad ; \quad x^3yz^2 = c \qquad (*,**,***)$$

1) keine,
2) genau eine,
3) genau zwei,
4) mehr als zwei, jedoch endlich viele,
5) unendlich viele

reelle Lösungen (x, y, z) hat. Ferner sind sämtliche vorhandenen Lösungen anzugeben.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Ist (x, y, z) eine reelle Lösung des gegebenen Gleichungssystems, dann folgt aus (*), (**), (***) durch Multiplikation, dass

$$x^6y^6z^6 = abc \qquad (1)$$

gelten muss. Daher hat das gegebene Gleichungssystem im Fall $abc < 0$ keine reelle Lösung. Im Fall $abc = 0$ kann es nur dann eine Lösung haben, wenn $a = b = c = 0$ ist; denn aus (1) ergibt sich, dass wenigstens eine der Zahlen x,y,z gleich null sein muss. Tatsächlich sind im Fall $a = b = c = 0$ die Tripel $(0, y, z), (x, 0, z), (x, y, 0)$ für alle reellen x, y, z Lösungen.

Im Fall $abc > 0$ setzen wir

$$g = \sqrt[6]{abc} \qquad (2)$$

Dann ergibt sich aus (*), (**), (***)

$$yz^2 = \frac{a}{g} \quad ; \quad xy^2 = \frac{b}{g} \quad ; \quad zx^2 = \frac{c}{g} \qquad (3,4,5)$$

Hieraus erhält man durch Multiplikation von (3) und (4) bzw. von (3) und (5) bzw. von (4) und (5)

$$xy^3z^2 = \frac{ab}{g2} \quad ; \quad x^2yz^3 = \frac{ac}{g2} \quad ; \quad x^3y^2z = \frac{bc}{g2} \qquad (6,7,8)$$

Aus (7) und (***) bzw. (8) und (**) ergibt sich

$$\frac{z}{x} = \frac{a}{g^2} \qquad \text{also} \qquad z = \frac{a}{g^2}x \qquad \text{bzw.} \qquad (9)$$

$$\frac{y}{x} = \frac{g^2}{c} \qquad \text{also} \qquad y = \frac{g^2}{c}x \qquad (10)$$

Aus (*), (9) und (10) folgt schließlich

$$x^6\frac{g^4}{c^2}\frac{a^3}{g^6} = a \qquad \text{also} \qquad x^6 = \frac{c^2}{a^2}g^2$$

so dass als Lösungen nur die beiden Tripel

$$\left(\pm\sqrt[3]{\left|\frac{c}{a}\right|g}, \pm\frac{g^2}{c}\sqrt[3]{\left|\frac{c}{a}\right|g}, \pm\frac{a}{g^2}\sqrt[3]{\left|\frac{c}{a}\right|g}\right)$$

in Betracht kommen, die wegen $abc \neq 0$ voneinander verschieden sind. Wie man durch Einsetzen in (*),(**),(***) nachprüft, sind beide Tripel auch wirklich Lösungen.

Damit ergibt sich:
a) Im Fall $abc < 0$ und im Fall $abc = 0, |a| + |b| + |c| > 0$ hat das System keine Lösung.
b) und d) Diese Fälle kommen nicht vor.

c) In Fall $abc > 0$ hat das System genau zwei Lösungen.
e) Im Fall $a = b = c = 0$ hat das System unendlich viele Lösungen.

Aufgabe 151213:
Man ermittle alle Tripel (x, y, z) reeller Zahlen, für die

$$\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x+z} = \frac{7}{12} \tag{VIII.1}$$
$$\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} = \frac{8}{15} \tag{VIII.2}$$
$$\frac{1}{x+z} + \frac{1}{y+z} = \frac{9}{20} \quad \text{gilt.} \tag{VIII.3}$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen (x,y,z) ist Lösung des Gleichungssystems. Dann erhält man aus (1), (2), (3) durch Addition und Halbierung

$$\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{x+z} = \frac{47}{60} \tag{4}$$

Subtrahiert man (1) bzw. (2) bzw. (3) von (4), so erhält man

$$\frac{1}{y+z} = \frac{1}{5} \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{1}{x+z} = \frac{1}{4} \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{1}{x+y} = \frac{1}{3}$$

woraus $x + y = 3$, $y + z = 5$, $x + z = 4$ folgt. Die Addition dieser drei Gleichungen ergibt nach Division durch 2

$$x + y + z = \frac{1}{2}(3 + 4 + 5) = 6$$

woraus sich analog zum oben dargelegten Vorgehen

$$x = (x + y + z) - (y + z) = 1 \quad ; \quad y = 2 \quad ; \quad z = 3$$

ergibt. Daher kann höchstens das Tripel (1,2,3) Lösung sein. Tatsächlich ist

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12} \quad ; \quad \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15} \quad ; \quad \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{9}{20}$$

Aufgabe 161211:
Man ermittle alle Tripel reeller Zahlen $(x,\ y,\ z)$, die das Gleichungssystem erfüllen:

$$x + yz = 7 \tag{1}$$
$$xy + z = 5 \tag{2}$$
$$x + y + z = 6 \tag{3}$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es sei (x,y,z) eine Lösung des Gleichungssystems (1), (2), (3). Nach (3) gilt dann

$$x = 6 - y - z \tag{4}$$

Setzt man dies in (1), (2) ein, so folgt

$$6 - y - z + yz = 7 \quad ; 6y - y^2 - yz + z = 5 \tag{5,6}$$

Addiert man (5), (6), so ergibt sich

$$6 + 5y - y^2 = 12 \quad ; \quad y^2 - 5y + 6 = 0$$

Daher kann nur $y = 2$ oder $y = 3$ sein.
Aus $y = 2$ und (5);(4) folgt $4 - z + 2z = 7$; $z = 3, x = 1$
Aus $y = 3$ und (5);(4) folgt $3 - z + 3z = 7$; $z = 2, x = 1$

Das gegebene System kann somit nur die Lösungen (1,2,3) und (1,3,2) haben. Die Probe bestätigt, dass beide Tripel tatsächlich Lösungen sind.

Aufgabe 171212:
Man ermittle alle reellen Lösungen $(x,\, y)$ des Gleichungssystems

$$2 \cdot \sqrt{x+y} + x + y = 8 \tag{1}$$
$$x^3 + y^3 = 40. \tag{2}$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, es sei (x,y) eine reelle Lösung des Gleichungssystems (1), (2). Dann gilt $x + y \geq 0$. Setzt man $z = \sqrt{x+y}$, so gilt $z \geq 0$ und wegen (1)

$$z^2 + 2z - 8 = 0 \tag{3}$$

Die quadratische Gleichung (3) hat genau eine nichtnegative reelle Lösung, nämlich $z = 2$. Daraus folgt

$$x + y = 4 \qquad ; \qquad y = 4 - x \tag{4}$$

also wegen (2)

$$x^3 + (4-x)^3 = 40$$
$$x^3 + (64 - 48x + 12x^2 - x^3 - 40 = 0$$
$$x^2 - 4x + 2 = 0 \tag{5}$$

Die quadratische Gleichung (5) hat genau zwei reelle Lösungen, nämlich $x_1 = 2\sqrt{2}$; dann ist wegen (4) $y_1 = 2 - \sqrt{2}$, und $x_2 = 2 - \sqrt{2}$, dann ist $y_2 = 2 + \sqrt{2}$.

Wenn also das Gleichungssystem (1), (2) überhaupt reelle Lösungen hat, so können es nur die Paare $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ sein.

Für $(x,y) = (2 + \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2})$ sowie für $(x,y) = (2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$ gilt nun

$$2\sqrt{x+y} + x + y = 2\sqrt{4} + 4 = 8$$
$$x^3 + y^2 = (2 + \sqrt{2})^3 + (2 - \sqrt{2})^3 = 2(8 + 12) = 40$$

d. h., die Gleichungen (1) und (2) sind erfüllt. Daher hat das Gleichungssystem (1), (2) genau zwei reelle Lösungen, nämlich $(2 + \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2})$ und $(x,y) = (2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$.

Aufgabe 181213:
Man ermittle alle Paare $(x,\, y)$ reeller Zahlen, die das folgende Gleichungssystem erfüllen:

$$x + \frac{1}{y} + \frac{y}{x} = 3, \qquad y + \frac{1}{x} + \frac{x}{y} = 3.$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, (x,y) sei eine Lösung des gegebenen Gleichungssystems. Dann ist $x \neq 0$ (und $y \neq 0$), und es gilt

$$x^2y + x + y^2 = 3xy \qquad (1)$$
$$xy^2 + y + x^2 = 3xy$$

Durch Subtraktion erhält man daraus

$$(x-y)(xy+1-x-y) = 0 \qquad \text{also} \qquad (x-y)(x-1)(y-1) = 0$$

hieraus folgt, dass (mindestens) eine der Gleichungen $x = y$, $x = 1$, $y = 1$ gilt.
Aus $x = y$ und (1) folgt $x^3 - 2x^2 + x = 0, x(x-1)^2 = 0$, wegen $x = y$ also $x = 1$ $y = 1$.
Aus $x = 1$ und (1) folgt $y^2 - 2y + 1 = 0, (y-1)^2 = 0$, also $y = 1$.
Aus $y = 1$ und (1) folgt $x^2 - 2x + 1 = 0, (x-1)^2 = 0$, also $x = 1$.
Also kann nur das Paar $(1,1)$ Lösung des Gleichungssysteme sein. In der Tat erfüllt es wegen $1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} = 3$ beide Gleichungen des Systems.

Aufgabe 191214:
a) Zeigen Sie, dass das Gleichungssystem

$$7x + 100y = 0 \qquad (1)$$
$$0{,}069x + y = 0{,}3 \qquad (2)$$

eine eindeutig bestimmte Lösung $(x_0,\, y_0)$ hat, und ermitteln Sie diese!
Im folgenden werde in Gleichung (2) des Systems (1), (2) der Koeffizient von x *innerhalb einer gegebenen -Umgebung von 0,069 verändert*, d. h., für gegebenes reelles $\delta > 0$ sei eine reelle Zahl h auf das Intervall

$$-\delta \leq h \leq \delta$$

eingeschränkt, und für jedes solche h sei das Gleichungssystem

$$7x + 100y = 0 \qquad (3)$$
$$(0{,}069 + h)x + y = 0{,}3 \qquad (4)$$

betrachtet. Man möchte erreichen, dass sich x_0 durch diese Veränderung des Koeffizienten 0,069 *um höchstens 1% ändern kann*. Damit ist die folgende Aufgabenstellung b), c) gemeint.

Zunächst wird definiert:

Besitzt für irgendein h das Gleichungssystem (1), (4) eine eindeutige Lösung, so sei diese mit $(x_h; y_h)$ bezeichnet. Ist dies (bei gegebenem $\delta > 0$) für alle in (3) genannten h der Fall und gibt es unter diesen Werten h einen, für den die Zahl

$$\eta = \frac{|x_0 - x_h|}{|x_0|}$$

möglichst groß ist, so werde dieser möglichst große Wert von η mit $\eta_{\max}$ (*bezüglich (3) maximaler relativer Fehler* von x) bezeichnet.

b) Ermitteln Sie alle diejenigen $\delta > 0$, für die ein bezüglich (3) maximaler relativer Fehler $\eta_{\max}$ existiert!
c) Ermitteln Sie unter den in b) gefundenen Werten von δ alle diejenigen, für die sogar $\eta_{\max} \leq 0{,}01$ gilt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, $(x; y)$ sei eine Lösung (1), (4). Dann folgt

$$7x + 100y = 0$$
$$(6{,}9 + 100h)x + 100y = 30$$
$$(0{,}1 - 100h)x = -30$$

Ist $h = 0{,}001$, so bedeutet dies einen Widerspruch.
Ist $h \neq 0{,}001$, so folgt $x = -\frac{30}{0{,}1-100h}$; hieraus und aus (1) erhält man

$$y = -\frac{7}{100}x = \frac{2{,}1}{0{,}1 - 100h}$$

Daher kann das System (1), (4) nur im Fall $h \neq 0{,}001$ eine Lösung haben, und zwar nur die angegebenen x, y. Diese erfüllen in der Tat (1) und (4).

Also gibt es genau dann für alle h aus (3) eine eindeutig bestimmte Lösung des Systems (1), (4), wenn $\delta < 0{,}001$ ist, und für alle diese h ist

$$x_h = -\frac{30}{0{,}1 - 100h} \qquad , \qquad y_h = \frac{2{,}1}{0{,}1 - 100h}$$

a) Insbesondere ergibt sich $x_0 = -300, y_0 = 21$.

b) Hieraus folgt weiter

$$x_0 - x_h = \frac{-30 + 30000h + 30}{0{,}1 - 100h} = \frac{30000h}{0{,}1 - 100h}$$

unter Berücksichtigung von $h < 0{,}001$ also

$$\eta = \frac{|x_0 - x_h|}{|x_0|} = \frac{100|h|}{0{,}1 - 100h}$$

Aus (3) folgt nun einerseits $|h| \leq \delta$, andererseits $0{,}1 - 100h \geq 0{,}1 - 100\delta$ (> 0), also

$$\eta \leq \frac{100\delta}{0{,}1 - 100\delta}$$

und für $h = \delta$ gilt hierin das Gleichheitszeichen. Damit ist für jedes $\delta < 0{,}001$ die Existenz des bezüglich (3) maximalen relativen Fehlers von x nachgewiesen, und zwar ist

$$\eta_{\max} = \frac{100\delta}{0{,}1 - 100\delta}$$

Ist dagegen $\delta \geq 0{,}001$, so kann ein bezüglich (3) maximaler relativer Fehler von x schon deswegen nicht existieren, weil nun in (3) auch der Wert $h = 0{,}001$ zugelassen ist, für den nicht einmal eine Lösung $(x_h; y_h)$ existiert.

Also sind die in b) gesuchten δ alle diejenigen, für die $0 < \delta < 0{,}001$ gilt.

c) Die Forderung

$$\frac{100\delta}{0{,}1 - 100\delta} \leq 0{,}01$$

ist für $0 < \delta < 0{,}001$ äquivalent mit $100\delta \leq 0{,}001 - \delta$, also $\delta \leq \frac{0{,}001}{101} = \frac{1}{10100}$.

Daher sind die in c) gesuchten δ alle diejenigen, für die gilt

$$0 < \delta \leq \frac{1}{10100} \quad (= 0{,}000\overline{0099})$$

Aufgabe 211212:
Man ermittle alle geordneten Paare $(x; y)$ von Null verschiedener reeller Zahlen x, y, die das folgende Gleichungssystem erfüllen:

$$\begin{aligned} (x+y)^2 + 3(x+y) &= 4, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} &= -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn ein Paar $(x; y)$ von Null verschiedener reeller Zahlen das Gleichungssystem (1), (2) erfüllt, so folgt: Die Zahl

$$z = x + y \tag{3}$$

erfüllt nach (1) die Gleichung

$$z^2 + 3z - 4 = 0$$

Daraus ergibt sich

$$z_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 4} = -\frac{3}{2} \pm \frac{5}{2}$$

also entweder $z = 1$ oder $z = -4$.

Aus (2) folgt ferner durch Multiplikation mit $6xy$, dass

$$6(x+y) = -xy \qquad \text{also} \qquad xy = -6z \tag{4}$$

gilt. Im Fall $z = 1$ besagen (3) und (4)

$$x + y = 1 \qquad ; \qquad xy = -6 \tag{5,6}$$

Im Fall $z = -4$ besagen (3) und (4)

$$x + y = -4 \qquad ; \qquad xy = 24 \tag{5',6'}$$

Setzt man y aus (5) bzw. (5') in (6) bzw. (6') ein, so folgt

$$x(1-x) = -6 \qquad \text{bzw.} \qquad x(-4-x) = 24 \tag{7,7'}$$

Aus (7) folgt

$$x^2 - x - 6 = 0 \qquad ; \qquad x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}$$

also entweder $x = 3$ und dann nach (5) weiter $y = -2$ oder $x = -2$ und dann nach (5) weiter $y = 3$.

Aus (7') dagegen folgt $x^2 + 4x + 24 = 0$, und diese Gleichung hat wegen $2^2 - 24 < 0$ keine reellen Lösungen x. Daher können nur die Paare $(3; -2)$ und $(-2; 3)$ das Gleichungssystem erfüllen.

Aufgabe 221211:
Man ermittle alle Paare $(x; y)$ reeller Zahlen mit $x \neq 0$ und $y \neq 0$, die das folgende Gleichungssystem (1), (2) erfüllen:

$$x + \frac{x}{y} = \frac{8}{3} \tag{1}$$

$$y - \frac{1}{x} = \frac{5}{2} \tag{2}$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn ein Zahlenpaar $(x;y)$ mit $x \neq 0, y \neq 0$ das Gleichungssystem (1), (2) erfüllt, so folgt: Nach (2) gilt

$$y = \frac{5x+2}{2x} \tag{3}$$

Wegen $y \neq 0$ ist $5x+2 \neq 0$, und aus (1) folgt durch Einsetzen von (3)

$$x + \frac{2x^2}{5x+2} = \frac{8}{3}$$
$$3x(5x+2) + 6x^2 = 8(5x+2)$$
$$x^2 - \frac{34}{21}x - \frac{16}{21} = 0$$

Wegen $\left(\frac{17}{21}\right)^2 + \frac{16}{21} = \frac{625}{21^2} = \left(\frac{25}{21}\right)^2 > 0$, also

$$x = \frac{17}{21} \pm \sqrt{\left(\frac{17}{21}\right)^2 + \frac{16}{21}} = \frac{17}{21} \pm \frac{25}{21}$$

d.z. $x = 2$ oder $x = -\frac{8}{21}$ und damit nach (3) $y = 3$ bzw. $y = -\frac{1}{8}$.

Daher können nur die Paare $(2;3)$ und $\left(-\frac{8}{21}; -\frac{1}{8}\right)$ das Gleichungssystem erfüllen. Die Probe bestätigt dies.

Aufgabe 231212:
Man ermittle alle Tripel $(x;y;z)$ von Null verschiedener reeller Zahlen, die das folgende Gleichungssystem (1), (2), (3) erfüllen:

$$x + \frac{1}{y} = -2 \tag{1}$$
$$y + \frac{1}{z} = -\frac{1}{2} \tag{2}$$
$$\frac{1}{x} + z = 1. \tag{3}$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn $(x;y;z)$ ein Tripel mit den geforderten Eigenschaften ist, so folgt: Wegen (1) gilt

$$xb = -2 - \frac{1}{y} = -\frac{2y+1}{y}$$

Hieraus und aus $x \neq 0$ folgt

$$\frac{1}{x} = -\frac{y}{2y+1} \tag{4}$$

Wegen (2) gilt $\frac{1}{z} = -\frac{1}{2} - y = -\frac{2y+1}{2}$, also

$$z = -\frac{2}{2y+1} \tag{5}$$

Setzt man (4) und (5) in (3) ein, so folgt

$$-\frac{y}{2y+1} - \frac{2}{2y+1} = 1 \quad \Rightarrow \quad y = -1$$

und damit weiter

$$x = -1 \qquad ; \qquad z = 2$$

Also kann nur das Tripel $(x;y;z) = (-1;-1;2)$ die geforderten Eigenschaften haben. Es hat diese Eigenschaften, wie ein Probe zeigt.

Aufgabe 241212:
Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen x, y mit $x \neq 0$ und $y \neq 0$, die das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x^2y - \frac{6}{xy} &= 13 \\ xy + x^2y &= 6 \quad \text{erfüllen.} \end{aligned}$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es seien x und y reelle Zahlen mit $x \neq 0$ und $y \neq 0$, die das geforderte Gleichungssystem erfüllen. Dann folgt:

Die Zahlen $a = xy$ und $b = x^2y$ erfüllen das Gleichungssystem

$$b - \frac{6}{a} = 13 \qquad (1)$$

$$a + b = 6 \qquad (2)$$

Subtrahiert man (1) von (2), so folgt $a + \frac{6}{a} = -7$, also

$$a^2 + 7a + 6 = 0$$

Diese Gleichung hat nur $a_1 = -1$ und $a_2 = -6$ als Lösungen. Nach (2) gehören hierzu die Werte $b_1 = 7$ bzw. $b_2 = 12$. Aus $a = xy$ und $b = x^2y$ folgt $b = ax$, also, da man durch x ($\neq 0$) und durch a ($= xy \neq 0$) dividieren kann

$$x = \frac{b}{a} \quad ; \quad y = \frac{a}{x}$$

Damit kommen als Lösungen des geforderten Gleichungssystems nur $x_1 = -7$, $y_1 = \frac{1}{7}$ sowie $x_2 = -2$, $y_2 = 3$ in Betracht, was die Probe bestätigt. Die angegebenen x_1, y_1 und x_2, y_2 sind die Lösungen des Gleichungssystems.

Aufgabe 251211:
Man ermittle alle diejenigen Paare $(x; y)$ reeller Zahlen, die das folgende Gleichungssystem (1), (2) erfüllen.

$$x^2 + y = 1, \qquad (1)$$

$$x + y^2 = 1. \qquad (2)$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn ein Paar $(x; y)$ reeller Zahlen das Gleichungssystem (1), (2) erfüllt, so folgt: Nach (1) gilt

$$y = 1 - x^2 \qquad (3)$$

Setzt man dies in (2) ein, so folgt

$$x + (1 - x^2) = 1$$

$$x(x^3 - 2x + 1) = 0 \qquad (4{,}5)$$

Da die Gleichung $x^3 - 2x + 1 = 0$ offenbar die Zahl 1 als eine Lösung hat, führt die Division

$$(x^3 - 2x + 1) : (x - 1) = x^2 + x - 1$$

auf die Zerlegung $x^3 - 2x + 1 = (x - 1)(x^2 + x - 1)$, wonach (4) in $x(x - 1)(x^2 + x - 1) = 0$ oder $x^2 + x - 1 = 0$. Da diese quadratische Gleichung die Lösungen

$$-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$$

hat, ist somit x einer der Zahlen

$$x_1 = 0 \quad , \quad x_2 = 1 \quad , \quad x_{3,4} = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5})$$

Nach (3) und wegen

$$\frac{1}{4}(-1 \pm \sqrt{5})^2 = \frac{1}{4}(1 \mp 2\sqrt{5} + 5) = \frac{1}{2}(3 \mp \sqrt{5})$$

gehören hierzu für y die Werte

$$y_1 = 1 \quad , \quad y_2 = 0 \quad , \quad y_{3,4} = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5})$$

Also können nur die Paare

$$(0;1) \quad ; \quad (1;0) \quad ; \quad \left(\frac{1}{2}(-1+\sqrt{5}); \frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})\right) \quad ; \quad \left(\frac{1}{2}(-1-\sqrt{5}); \frac{1}{2}(-1-\sqrt{5})\right) \tag{6}$$

das Gleichungssystem (1), (2) erfüllen, wie die Probe zeigt. Daher wird (1), (2) genau von den Paaren (6) erfüllt.

Aufgabe 271211:
Man ermittle alle diejenigen Paare (x, y) reeller Zahlen x, y, die das folgende Gleichungssystem (1), (2) erfüllen:

$$x + xy + y = -1 \tag{1}$$
$$x^2 + y^2 = 5! \tag{2}$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, ein Paar (x,y) sei Lösung von (1) und (2). Dann folgt aus (1)

$$(x+1)(y+1) = 0$$

d. h., wenigstens eine der Zahlen x oder y muss gleich -1 sein.

Für $x = -1$ erhält man aus (2) $y = \pm 2$, und für $y = -1$ folgt aus (2) $x = \pm 2$. Somit können nur die Paare $(-1, -2)$, $(-1,2)$, $(-2, -1)$, $(2, -1)$ Lösungen des Systems (1), (2) sein. Tatsächlich erfüllen diese vier Paare, wie eine Probe zeigt, die Gleichungen (1), (2).

Aufgabe 281213:

a) Man gebe zwei Quadrupel (x, y, z, u) reeller Zahlen an, die das folgende Gleichungssystem (1) bis (4) erfüllen.

b) Man ermittle ein Quadrupel (x, y, z, u) ganzer Zahlen so, dass eine der Variablen x, y, z, u den Wert 1988 besitzt und das Gleichungssystem (1) bis (4) erfüllt wird.

$$1x + 9y + 8z + 8u = 1 \tag{1}$$
$$9x + 9y + 24z + 24u = 9 \tag{2}$$
$$8x - 13y + 8z + 7u = 8 \tag{3}$$
$$8x - 21y - 10z + 8u = 8 \tag{4}$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Angenommen, es gibt ein Quadrupel (x,y,z,u) reeller Zahlen, das das Gleichungssystem (1) bis (4) erfüllt. Dann ist nach (1)

$$x = 1 - 9y - 8z - 8u$$

Wird dies in (2) bis (4) eingesetzt, so folgt

$$3y + 2z + 2u = 0 \quad (5)$$
$$85y + 56z + 57u = 0 \quad (6)$$
$$93y + 74z + 56u = 0 \quad (7)$$

Nach (5) ist $z = -\frac{3}{2}y - u$. Wird dies in (6) und (7) eingesetzt, so ergibt sich $y + u = 0$ (8) in beiden Fällen.

Nun sei $y = t$, wobei t eine beliebige reelle Zahl ist. Nach (8), (5) und (1) ergibt sich $u = -t$, $z = -\frac{1}{2}t$ und $x = 1 + 3t$. Die Probe bestätigt, dass für beliebiges t das Quadrupel

$$\left(1 + 3t,\ t,\ -\frac{1}{2}t,\ -t\right) \quad (9)$$

Lösung ist. Damit ist die Lösung des Gleichungssystems (1) bis (4) durch (9) gegeben, wobei der Parameter t die Menge aller reellen Zahlen durchläuft.

b) Nachfolgend wird eine Auswahl von Quadrupeln angegeben.

t	x	y	z	u
0	1	0	0	0
1988	5965	1988	-994	-1988
-1988	-5963	-1988	994	1988

$x = 1998$ liefert wegen $t = \frac{x-1}{3}$ für y keine ganze Zahl.

Aufgabe 291212:
Man ermittle alle Paare $(x,\ y)$ reeller Zahlen, die das folgende Gleichungssystem erfüllen:

$$x^3 + y^3 = 7 \quad (1)$$
$$x + xy + y = -1 \quad (2)$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es seien x,y reelle Zahlen, die das Gleichungssystem (1), (2) erfüllen. Dann gilt nach Umformung der Gleichung (2)

$$(x + 1)(y + 1) = 0 \quad (3)$$

Diese Gleichung gilt genau dann, wenn $x = -1$ oder $y = -1$ gilt.

Es sei $x = -1$. Aus (1) folgt dann $y^3 = 8$, also $y = 2$.
Es sei $y = -1$. Dann folgt aus (1) analog $y = 2$.
Mithin können höchstens die Paare $(-1{,}2), (2, -1)$ die Gleichungen (1), (2) erfüllen. Wie die Probe zeigt, sind diese beiden Paare tatsächlich Lösungen.

Aufgabe 301213:
Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen x, für die die beiden folgenden Gleichungen (1) und (2) gelten:

$$3x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 2x^2 - x - 1 = 0, \quad (1)$$
$$3x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 2x^2 - x + 1 = 0. \quad (2)$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(1) und (2) sind äquivalent mit

$$(x+1)(3x^2-1)(x^2+1)=0$$
$$(x-1)(3x^2-1)(x^2+1)=0$$

Da stets $x^2+1>0$ gilt und für kein reelles x beide Gleichungen xß$1=0$ und $x-1=0$ gelten, werden (1) und (2) genau dann erfüllt, wenn $3x^2-1=0$ ist.

Dies ist genau für $x_{1,2}=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ der Fall.

Aufgabe 311214:
Man ermittle alle diejenigen Tripel $(x,\ y,\ z)$ reeller Zahlen mit $x \leq y \leq z$, für die das folgende Gleichungssystem (1), (2), (3) erfüllt ist:

$$x+y+z=5, \tag{1}$$
$$x^2+y^2+z^2=15, \tag{2}$$
$$xyz=-3. \tag{3}$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn reelle Zahlen x,y,z mit $x \leq y \leq z$ das Gleichungssystem (1), (2), (3) erfüllen, so folgt: Nach (1),(2) ist

$$x+y=5-z \tag{4}$$
$$x^2+y^2=15-z \tag{5}$$

aus (3) folgt $z \neq 0$ und dann

$$xy=-\frac{3}{2} \tag{6}$$

Nun gilt $(x+y)^2=x^2+y^2+2xy$; nach (4),(5),(6) besagt dies:

$$(5-z)^2=15-z^2+2\cdot\left(-\frac{3}{z}\right)$$
$$z(25-10z+z^2)=15z-z^3-6$$
$$2(z^3-5z^2+5z+3)=0$$
$$(z-3)(x^2-2z-1)=0$$

und daher $z=3$ oder $z=1+\sqrt{2}$ oder $z=1-\sqrt{2}$.

Ist $z=3$, so folgt aus (4) und (6) das Gleichungssystem

$$x+y=2 \qquad ; \qquad xy=-1$$

Es führt vermittels $x(2-x)=-1$, $x^2-2x-1=0$ auf $x=1+\sqrt{2}$, $y=1-\sqrt{2}$ oder $x=1-\sqrt{2}$, $y=1+\sqrt{2}$.

Ist $z=1+\sqrt{2}$, so folgt entsprechend

$$x+y=4-\sqrt{2}$$
$$xy=-\frac{3}{1+\sqrt{2}}=3-3\sqrt{2}$$
$$x^2-(4-\sqrt{2})x+3-3\sqrt{2}=0$$

mit den Lösungen

$$x = 2 - \frac{1}{2}\sqrt{2} + \sqrt{\left(2 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2 - 3 + 3\sqrt{2}} = 2 - \frac{1}{2}\sqrt{2} + \sqrt{\frac{3}{2} + \sqrt{2}} = 2 - \frac{1}{2}\sqrt{2} + 1 + \frac{1}{2}\sqrt{2} = 3$$

und $y = 1 - \sqrt{2}$ oder $x = 1 - \sqrt{2}$, $y = 3$.

Ist $z = 1 - \sqrt{2}$, so folgt ebenso mit $-\sqrt{2}$ statt $\sqrt{2}$: $x = 3$, $y = 1 + \sqrt{2}$ oder $x = 1 + \sqrt{2}$, $y = 3$.

Da $1 - \sqrt{2} < 1 + \sqrt{2} < 3$ gilt, kann nur das Tripel

$$(x,y,z) = (1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}, 3)$$

sowohl die Bedingungen (1),(2),(3) als auch $x \leq y \leq z$ erfüllen. Die Probe bestätigt das Ergebnis. Damit erfüllt genau dieses Tripel die Bedingungen der Aufgabe.

II Runde 2

Aufgabe 031223:
Bestimmen Sie die Menge aller Paare (x, y) von reellen Zahlen x, y, die die folgenden Gleichungen befriedigen:

$$\cos\frac{x+y}{2} \cdot \cos\frac{x-y}{2} = \frac{1}{2} \qquad ; \qquad \cos x \cdot \cos y = \frac{1}{4}$$

Lösung von W. Engel und U. Pirl:
Mit Hilfe des Additionstheorems

$$\cos\frac{x+y}{2} \cdot \cos\frac{x-y}{2} = \frac{1}{2}(\cos x + \cos y)$$

erhält man das folgende, dem gegebenen Gleichungssystem äquivalente Gleichungssystem:

$$\cos x + \cos y = 1 \qquad ; \qquad \cos x \cos y = \frac{1}{4} \qquad (1)$$

Hieraus folgt:

$$(1 - \cos y) \cdot \cos y = \frac{1}{4} \qquad \text{und} \qquad \left(\cos y - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$$

d. h. $\cos x = \frac{1}{2}$ und $\cos y = \frac{1}{2}$. Dies ist die einzige Lösung des Gleichungssystems (1). Daraus folgt:

$$x = 2m\pi \pm \frac{\pi}{3} \qquad ; \qquad y = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

wobei m und n ganze Zahlen sind.

Aufgabe 041224:
Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\frac{\sin x + \sin y}{\sin x - \sin y} = \frac{5}{3}$$
$$x + y = 90^\circ$$

Es soll eine Näherungslösung mit ganzzahligen Gradzahlen angegeben werden.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es ist

$$\frac{\sin x + \sin y}{\sin x - \sin y} = \frac{2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}}{2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}} = \cot\frac{x-y}{2}$$

da wegen $x + y = 90°$ hier $\sin\frac{x+y}{2} = \cos\frac{x+y}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ ist.
Ferner ist $\frac{x-y}{2} = \frac{x}{2} - (45° - \frac{x}{2}) = x - 45°$.
Also ist das Gleichheitszeichen für alle x und y erfüllt, für die $\cot(x - 45°) = \frac{5}{3}$ und $y = 90° - x$ ist.
Man erhält dann $x - 45° \approx 31° + k \cdot 180°$ (k ganzzahlig).

$$x \approx 76° + k \cdot 180° \qquad ; \qquad y \approx 14° - k \cdot 180°$$

Aufgabe 061226:

a) Geben Sie alle Tripel reeller Zahlen (x, y, z) an, die das Gleichungssystem (1)

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 1 \\ 4x - y + 2z &= 2 \\ 8x + 5y + 3z &= 4 \end{aligned}$$

erfüllen!

b) Bilden Sie alle Gleichungssysteme, die sich von dem Gleichungssystem (1) in genau einem Koeffizienten unterscheiden und unendlich viele Lösungen besitzen!
Als „Koeffizienten“ seien hier sowohl die auf der „linken Seiten“ stehenden „Vorzahlen“ der Variablen als auch die „absoluten Glieder“ auf den „rechten Seiten“ bezeichnet.
Geben Sie auch in diesen Fällen alle Tripel reeller Zahlen an, die die jeweiligen Gleichungssysteme erfüllen!

c) Bilden Sie ein Gleichungssystem, das sich von (1) in genau zwei Koeffizienten unterscheidet, das aber von keinem Tripel reeller Zahlen erfüllt wird!

Lösung von cyrix:
a) Addition des doppelten der ersten zur zweiten Gleichung liefert $8x+5y+4z = 4$, woraus mit der dritten Gleichung $z = 0$ folgt. setzt man dies ein und zieht vom Doppelten der ersten Gleichung die zweite ab, erhält man $y = 0$ und schließlich $x = \frac{1}{2}$. Damit ist $\left(\frac{1}{2}; 0; 0\right)$ das einzige Lösungstripel, was auch durch die Probe bestätigt wird.

b) Unendlich viele Lösungen hat das Gleichungssystem nur dann, wenn es eine Kombination der Gleichungen gibt, die sich zu $0 = 0$ reduziert. (Die Gleichungen sind linear abhängig.) Dazu unterscheiden wir zwei Fälle:

1. Fall: Es gibt eine reelle Zahl k, sodass das k-fache der ersten Gleichung, die zweite ergibt. Daraus ergibt sich folgende Beziehung: $2k = 4$, falls kein x-Koeffizient geändert wurde, oder $k = 2$, falls kein z-Koeffizient geändert wurde.
Da mindestens eine dieser beiden Fälle eintreten muss, ist $k = 2$. Damit muss aber das Doppelte des Koeffizienten von y in der ersten Gleichung dem Koeffizienten von y in der zweiten Gleichung entsprechen, sodass entweder der Koeffizient von y in der ersten Gleichung auf $-\frac{1}{2}$, oder der von y in der zweiten Gleichung auf $+6$ abgeändert werden muss.
In der ersten Variante hat das Gleichungssystem nun die Form

$$\begin{aligned} 2x - \frac{1}{2}y + z &= 1 \\ 4x - y + 2z &= 2 \\ 8x + 5y + 3z &= 4 \end{aligned}$$

und hat (Subtraktion des Doppelten der zweiten von der dritten Gleichung) die Lösungen

$$\left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{13}{4} \cdot t, t, 7 \cdot t \right) \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$$

In der zweiten Variante hat das Gleichungssystem die Form

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 1 \\ 4x + 6y + 2z &= 2 \\ 8x + 5y + 3z &= 4 \end{aligned}$$

und hat (Subtraktion der dritten Gleichung vom doppelten der zweiten) die Lösungen

$$\left\{ \left(\frac{1}{2} + 2 \cdot t, t, -7 \cdot t \right) \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$$

2. Fall: Es gibt reelle Zahlen k und ℓ, sodass die Summe des k-fachen der ersten und ℓ-fachen der zweiten Gleichung die dritte ergibt. Daraus erhält man folgende Beziehungen:

$2k + 4\ell = 8$, falls kein x-Koeffizient geändert wurde,
$3k - \ell = 5$, falls kein y-Koeffizient geändert wurde,
$k + 2\ell = 4$, falls keine rechte Seite verändert wurde und schließlich
$k + 2\ell = 3$, falls kein z-Koeffizient geändert wurde.

Da nicht sowohl einer der x-Koeffizienten als auch eine der rechten Seiten modifiziert worden sind, gilt in jedem Fall $k+2\ell = 4$. Dies widerspricht aber der Bedingung, die eintreten würde, wenn kein z-Koeffizient verändert werden würde. Also kann nur durch die Änderung eines dieser Koeffizienten der Variablen z ein Gleichungssystem konstruiert werden, welches unendlich viele Lösungen hat.

Insbesondere bleiben neben den x-Koeffizienten auch die y-Koeffizienten unangetastet und es ergibt sich zusammen $k = 2$ und $\ell = 1$. Die summe aus dem doppelten der ersten Gleichung und der zweiten Gleichung muss also die dritte ergeben. Dafür gibt es drei Möglichkeiten, den Koeffizient von z in je einer der drei Gleichungen anzupassen:
In der ersten Variante setzt man in der ersten Gleichung den Koeffizienten von z auf $\frac{3-2}{2} = \frac{1}{2}$ und erhält das neue Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x + 3y + \frac{1}{2}z &= 1 \\ 4x - y + 2z &= 2 \\ 8x + 5y + 3z &= 4 \end{aligned}$$

welches die Lösungen $\left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{13}{4} \cdot t, t, 7 \cdot t \right) \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$ besitzt.
In der zweiten Variante ändert man den Koeffizienten von z in der zweiten Gleichung auf $3 - 2 \cdot 1 = 1$ ab und erhält das neue Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 1 \\ 4x - y + z &= 2 \\ 8x + 5y + 3z &= 4 \end{aligned}$$

welches die Lösungen $\left\{ \left(\frac{1}{2} + 2 \cdot t, t, -7 \cdot t \right) \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$ besitzt.
Und schließlich in der dritten Variante wird der Koeffizient von z in der dritten Gleichung auf $2 \cdot 1 + 2 = 4$ gesetzt, sodass man das neue Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 1 \\ 4x - y + 2z &= 2 \\ 8x + 5y + 4z &= 4 \end{aligned}$$

erhält, welches die Lösungen $\left\{ (t, 0, 1 - 2 \cdot t) \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$ besitzt.

Insgesamt hat man also fünf verschiedene Möglichkeiten je einen der Koeffizienten des ursprünglich gegebenen Gleichungssystems anzupassen, so dass das jeweilige neue Gleichungssystem dann unendlich viele Lösungen hat.

c) Man ändere den Koeffizienten von y in der zweiten Gleichung auf $+6$ und die rechte Seite der zweiten Gleichung auf 0 ab. Dann erhält man das neue Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x+3y+z&=1\\ 4x+6y+2z&=0\\ 8x+5y+3z&=4 \end{aligned}$$

wobei aus der ersten Gleichung $4x+6y+2z=2\neq 0$ folgt, was der zweiten Gleichung widerspricht. Damit hat dieses Gleichungssystem keine Lösung.

Aufgabe 071225:
Es sind alle geordneten Paare reeller Zahlen (x,y) anzugeben, für die das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x\cdot(ax^2+by^2-a)&=0 \qquad (1)\\ y\cdot(ax^2+by^2-b)&=0 \qquad (2) \end{aligned}$$

erfüllt ist. Dabei sind a und b reelle Zahlen mit $a\neq 0, b\neq 0$ und $a\neq b$.

Lösung von cyrix:
Wir führen eine Fallunterscheidung durch:

1. Fall: $x=0$.

   Dann geht die zweite Gleichung über in $y\cdot b\cdot(y^2-1)=0$, was wegen $b\neq 0$ auf $y=0$ oder $y=\pm 1$ führt. Für alle drei Elemente $(x,y)\in\{(0,-1),(0,0),(0,1)\}$ bestätigt die Probe, dass es sich tatsächlich um Lösungen des Gleichungssystems handelt.

2. Fall: $x\neq 0$.

   Dann folgt aus der ersten Gleichung $ax^2+by^2-a=0$, also aufgrund $a\neq b$ damit $ax^2+by^2-b\neq 0$, sodass aus aus der zweiten Gleichung direkt $y=0$ folgt. Dies in die eben erhaltene Gleichung eingesetzt, liefert $ax^2-a=0$ bzw. $x=\pm 1$. Auch hier sind wieder alle Elemente der Menge $\{(-1,0),(1,0)\}$ Lösungen des Gleichungssystems, wie die Probe bestätigt.

Damit hat das angegebene Gleichungssystem insgesamt fünf Lösungen, die in den beiden Fällen notiert wurden.

Alternativ-Lösung von weird:
Es muss $xy=0$ sein, da andernfalls die Klammerausdrücke in den zwei gegebenen Gleichungen 0 wären, was dann sofort auf den Widerspruch $a=b$ führen würde.
Durch Ausmultiplizieren der Gleichungen, Einsetzen von $xy=0$ und Kürzen durch a bzw. b ergibt sich dann, dass das gegebene Gleichungssystem äquivalent ist zu einem anderen, in dem a und b dann gar nicht mehr vorkommen, nämlich

$$xy=0,\ x^3=x,\ y^3=y$$

mit den 5 offensichtlichen Lösungen $(x,y)\in\{(0,0),(0,1),(0,-1),(1,0),(-1,0)\}$.

Aufgabe 091223:
Es sind alle reellen Lösungen des folgenden Gleichungssystems anzugeben:

$$x+y=az \quad (1) \quad ; \quad x-y=bz \quad (2) \quad ; \quad x^2+y^2=cz \quad (3)$$

Dabei sind a,b,c reelle Zahlen. (Fallunterscheidung!)

Lösung von Manuela Kugel:
Aus (1) und (2) folgt:

$$x = az - y = bz + y \Rightarrow az - bz = 2y \Rightarrow y = \frac{a-b}{2}z \qquad (4) \text{ und}$$

$$x = \frac{2a-(a-b)}{2} = \frac{a+b}{2}z \qquad (5)$$

Hieraus ergibt sich für (3):

$$cz = x^2 + y^2 = [(\frac{a+b}{2})^2 + (\frac{a-b}{2})^2]z^2$$

und weiter:

$$cz = \frac{z^2}{4}(a^2 + b^2 + 2ab + a^2 + b^2 - 2ab) = \frac{z^2}{2}(a^2 + b^2) \qquad (6)$$

1. Fall: $z = 0 \Rightarrow$ mit (4) und (5) $x = 0, y = 0$
2. Fall: $z \neq 0 \Rightarrow$ mit (6) $z = \frac{2c}{a^2+b^2}c$ und weiter mit (4) und (5): $x = \frac{a+b}{a^2+b^2}c$ und $y = \frac{a-b}{a^2+b^2}c$.
Die Probe bestätigt die Richtigkeit beider Lösungen.

Aufgabe 101221:
Es sind alle geordneten Paare (x, y) reeller Zahlen anzugeben, für die das Gleichungssystem

$$x^2 + y^2 = 1 \qquad (1) \qquad ; \qquad x^6 + y^6 = \frac{7}{16} \qquad (2)$$

erfüllt ist.

Lösung von weird:
Aus

$$3x^2y^2 = 3x^2y^2(x^2 + y^2) + (x^6 + y^6 - \frac{7}{16}) = (x^2 + y^2)^3 - \frac{7}{16} = 1 - \frac{7}{16} = \frac{9}{16}$$

erhält man sofort

$$x^2y^2 = \frac{3}{16} \qquad (3)$$

und durch Einsetzen in (1) weiter

$$x^4 - x^2 + \frac{3}{16} = \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)\left(x^2 - \frac{3}{4}\right) = 0 \qquad (4)$$

mit den Lösungen

$$x \in \left\{\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$$

was dann in Verbindung mit (3) die 8 endgültigen Lösungen

$$(x,y) \in \left\{\left(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(\pm\frac{1}{2}, \mp\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \pm\frac{1}{2}\right), \left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \mp\frac{1}{2}\right)\right\}$$

ergibt.

Aufgabe 131224:
Man ermittle alle Paare (x, y) reeller Zahlen, die Lösungen des Gleichungssystems sind:

$$x^3 + y^2 + x + 1 = 0 \qquad (1)$$
$$y^3 + x^2 + y + 1 = 0 \qquad (2)$$

Lösung von weird:
Multipliziert man Gleichung (2) mit x und zieht davon (1) ab, so erhält man

$$xy(y^2+1)-(y^2+1)=0$$

Hier dürfen wir wegen $y^2+1>0$ durch y^2+1 kürzen, was auf die einfache Beziehung

$$xy=1$$

führt. Multipliziert man nun (1) mit x^2 und führt dann hierin die Ersetzung $xy=1$ durch, so erhält man als neue Gleichung

$$x^5+x^3+x^2+1=0$$

in der Variablen x allein.

Eine offensichtliche Lösung davon ist $x=-1$ und nach Kürzen durch den Linearfaktor $x+1$ ergibt sich daraus weiter

$$x^4-x^3+2x^2-x+1=0$$

Diese dividieren wir nun durch $x^2\neq 0$ und erhalten so mit der Substitution $z:=x+\frac{1}{x}$ die einfache Gleichung

$$z^2-z=0$$

in z mit den beiden Lösungen $z\in\{0{,}1\}$. Für beide Werte von z ist aber

$$x+\frac{1}{x}=z \quad \text{bzw.} \quad x^2-zx+1=0$$

in reellen Zahlen unlösbar, wie man leicht nachprüft.

Zusammenfassend bleibt es also bei der einen Lösung $x=-1$ für x und wegen $xy=1$ gilt dann auch $y=-1$. Tatsächlich erfüllt $(x,y)=(-1,-1)$ beide Gleichungen (1) und (2) und ist somit die einzige reelle Lösung hier.

Aufgabe 141224:
Es sind alle reellen Zahlen a anzugeben, für die das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x+y+z&=0 \qquad (1)\\ x^2+y^2+z^2&=1 \qquad (2)\\ x^4+y^4+z^4&=a \qquad (3)\end{aligned}$$

a) keine reellen Lösungen (x,y,z)
b) genau eine reelle Lösung,
c) mehr als eine reelle Lösung hat.

Lösung von weird:
Es gilt zunächst

$$2xy=(x+y)^2-(x^2+y^2)=z^2-(1-z^2)=2z^2-1$$

und analog natürlich auch

$$2xz=2y^2-1,\quad 2yz=2x^2-1$$

Daraus folgt unmittelbar

$$\begin{aligned} a&=x^4+y^4+z^4=(x^2+y^2+z^2)^2-2x^2y^2-2x^2z^2-2y^2z^2=\\ &=1-\frac{1}{2}((2z^2-1)^2+(2y^2-1)^2+(2x^2-1)^2)=\\ &=1-\frac{1}{2}(4(x^4+y^4+z^4)-4(x^2+y^2+z^2)+3)=1-\frac{1}{2}(4a-4+3)=-2a+\frac{3}{2}\end{aligned}$$

also dann $a = \frac{1}{2}$.
Zusammenfassend ist also a) genau für $a \neq \frac{1}{2}$, b) nie und c) genau für $a = \frac{1}{2}$ erfüllt, in welchem Fall die unendlich vielen Lösungen von (1) und (2) ((3) ist ja dann automatisch erfüllt!) geometrisch gesprochen alle auf einem speziellen Großkreis der Einheitskugel um den Ursprung liegen.

Aufgabe 151224:
Man ermittle alle Tripel (x, y, z) reeller Zahlen, für die das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x + y + z &= a \qquad (1)\\ x^2 + y^2 + z^2 &= a^2 \qquad (2)\\ x^3 + y^3 + z^3 &= a^3 \qquad (3) \end{aligned}$$

erfüllt ist, wobei a eine reelle Zahl ist.

Lösung von weird:
Zunächst gilt

$$xy + xz + yz = \frac{1}{2}((x + y + z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2)) = \frac{1}{2}(a^2 - a^2) = 0$$

Daraus folgt unmittelbar

$$\begin{aligned} a^3 = (x + y + z)^3 &= x^3 + y^3 + z^3 + 3x(xy + xz) + 3y(xy + yz) + 3z(xz + yz) + 6xyz = \\ &= a^3 + 3x(-yz) + 3y(-xz) + 3z(-xy) + 6xy = a^3 - 3xyz \end{aligned}$$

und damit weiter $xyz = 0$, d. h., mindestens eine der 3 Variablen x,y,z muss 0 sein.
Sei nun o. B. d. A. $z = 0$. Aus

$$2xy = (x + y)^2 - (x^2 + y^2) = a^2 - a^2 = 0$$

folgt aber weiter, dass dann auch x oder y den Wert 0 haben muss. Ist etwas $y = 0$, so ist dann $x = a$, $y = 0$, $z = 0$ tatsächlich eine Lösung und alle insgesamt 3 Lösungen erhält man daraus durch eine einfache Vertauschung der Variablen x,y,z.

Aufgabe 191221:
Man ermittle alle Tripel (x, y, z) reeller Zahlen, für die das folgende Gleichungssystem erfüllt ist:

$$\begin{aligned} x - \frac{1}{y} &= 1 \\ y - \frac{1}{z} &= 1 \qquad (1) \\ z - \frac{1}{x} &= 1 \end{aligned}$$

Lösung von weird:
Mittels paarweiser Subtraktion von je zwei der drei Gleichungen erhält man sofort das neue Gleichungssystem

$$x - y = \frac{z - y}{yz}, \quad x - z = \frac{x - y}{xy}, \quad y - z = \frac{x - z}{xz} \qquad (*)$$

und daraus durch Multiplizieren wiederum die neue Gleichung

$$(x - y)(x - z)(y - z) = \frac{(x - y)(x - z)(z - y)}{(xyz)^2}$$

Ware hier $(x-y)(x-z)(y-z) \neq 0$, so könnte hier durch diesen Ausdruck kürzen, was sofort auf den Widerspruch $(xyz)^2 = -1$ führen würde. Es muss also

$$(x-y)(x-z)(y-z) = 0$$

gelten, d. h., mindestens eine der Differenzen $x-y$,$x-z$,$y-z$ hat den Wert 0. Durch Einsetzen in (*) sieht man aber sofort, dass dann auch die beiden anderen Differenzen verschwinden, d. h., dass $x=y=z$ gelten muss.
Der Rest ist sehr einfach: Unter Benutzung von $x=y$ wird etwa die erste Gleichung des ursprünglichen Gleichungssystems zu

$$x - \frac{1}{x} = 1 \quad \text{bzw.} \quad x^2 - x - 1 = 0$$

woraus sich dann sofort auch dessen insgesamt zwei Lösungen zu

$$x = y = z = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

ergeben.

Aufgabe 201222:
Man ermittle alle diejenigen positiven reellen Zahlen k, für die die Zahlen

$$a = \frac{2k}{k+1}, \qquad b = \frac{k+1}{2}, \qquad c = \sqrt{k}$$

die Maßzahlen der (mit gleicher Maßeinheit gemessenen) Seitenlängen eines rechtwinkligen Dreiecks sind.

Lösung von MontyPythagoras:
Für jedes positive reelle k gilt $(k+1)^2 = (k-1)^2 + 4k \geq 4k$, also $\frac{k+1}{2} \geq \frac{2k}{k+1}$ und $\frac{k+1}{2} \geq \sqrt{k}$.
Wenn nun k eine positive reelle Zahl ist, für die die Zahlen

$$a = \frac{2k}{k+1}; \qquad b = \frac{k+1}{2}; \qquad c = \sqrt{k}$$

die Maßzahlen der Seitenlängen eines rechtwinkligen Dreiecks sind, so folgt:
Es gilt $b \geq a$ und $b \geq c$, also ist b die Maßzahl der Hypotenusenlänge und nach dem Satz des Pythagoras gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{(k+1)^2}{4} &= \frac{4k^2}{(k+1)^2} + k \\
(k+1)^4 &= 16k^2 + 4k(k+1)^2 \\
(k+1)^2\left((k+1)^2 - 4k\right) &= 16k^2 \\
(k+1)^2(k^2 + 2k + 1 - 4k) &= 16k^2 \\
(k+1)^2(k-1)^2 - 16k^2 &= 0 \\
(k^2 - 4k - 1)(k^2 + 4k - 1) &= 0
\end{aligned}$$

Eine von beiden Klammern muss null sein, woraus sich folgende Lösungen ergeben:

$$k = \pm 2 \pm \sqrt{5}$$

Da $\sqrt{5} > 2$ ist, aber $k > 0$ sein soll, muss das Vorzeichen vor der $\sqrt{5}$ auf jeden Fall + sein, und damit folgt

$$k = \sqrt{5} \pm 2 \tag{1}$$

Umgekehrt erfüllen diese beiden Werte die angegebene Gleichungen; daher haben sie nach der Umkehrung des Satzes von Pythagoras die geforderte Eigenschaft.
Somit sind genau die beiden in (1) angegebenen Zahlen die gesuchten.

Aufgabe 221221:
Man ermittle alle Tripel (x, y, z) reeller Zahlen, die das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x \cdot (y+z) &= 5 \\ y \cdot (x+z) &= 8 \\ z \cdot (x+y) &= 9 \end{aligned}$$

erfüllen!

Lösung von weird:
Setzt man

$$u := xy,\ v := xz,\ w := yz$$

so erhält man das lineare(!) Gleichungssystem

$$u + v = 5u + w = 8v + w = 9$$

in u,v,w mit den offensichtlichen Lösungen

$$u = xy = 2,\ v = xz = 3,\ w = yz = 6 \quad (*)$$

Insbesondere gilt also dann

$$(xyz)^2 = uvw = 36 \Rightarrow xyz = \pm 6$$

und damit

$$x = \frac{xyz}{yz} = \pm 1,\ y = \frac{xyz}{xz} = \pm 2,\ z = \frac{xyz}{xy} = \pm 3$$

Da wegen (*) alle Variablen jedenfalls das gleiche Vorzeichen haben müssen, gibt es also dann hier genau die 2 Lösungen

$$(x,y,z) \in \{(1,2,3),(-1,-2,-3)\}$$

Aufgabe 241222:
Ermitteln Sie alle diejenigen Paare $(x; y)$ reeller Zahlen, die das folgende Gleichungssystem (1), (2) erfüllen!

$$x^2y^2 + x^2 + y^2 - 6 = 9xy \qquad (1)$$
$$(x+y)^2 = 36 \qquad (2)$$

Lösung von MontyPythagoras:
Wir substituieren $x + y = a$ und $xy = b$:

$$b^2 + a^2 - 2b - 6 = 9b$$

und

$$a^2 = 36$$

Die zweite in die erste Gleichung eingesetzt:

$$b^2 - 11b + 30 = 0$$

Mithilfe des Satzes von Vieta erraten wir $b_1 = 5$ und $b_2 = 6$, sowie von oben $a_1 = 6$ und $a_2 = -6$. Allgemein folgt für x und y:

$$y = \frac{b}{x}$$

$$x + \frac{b}{x} = a$$

$$x^2 - ax + b = 0$$

$$x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$$

Wir müssen nun jedes a_i mit jedem b_i kombinieren, um alle Lösungen zu finden. a_1 und b_1:

$$x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9-5} = 3 \pm 2$$

Lösungspaare: (5,1) und (1,5). a_1 und b_2:

$$x_{3,4} = 3 \pm \sqrt{9-6} = 3 \pm \sqrt{3}$$

Lösungspaare: $(3+\sqrt{3}{,}3-\sqrt{3})$ und $(3-\sqrt{3}{,}3+\sqrt{3})$. a_2 und b_1:

$$x_{5,6} = -3 \pm \sqrt{9-5} = -3 \pm 2$$

Lösungspaare: $(-5,-1)$ und $(-1,-5)$. a_2 und b_2:

$$x_{7,8} = -3 \pm \sqrt{9-6} = -3 \pm \sqrt{3}$$

Lösungspaare: $(-3+\sqrt{3},-3-\sqrt{3})$ und $(-3-\sqrt{3},-3+\sqrt{3})$. Es gibt somit 8 Lösungspaare.

Aufgabe 251221:
Man ermittle alle diejenigen Paare $(x;y)$ reeller Zahlen x,y, die das folgende Gleichungssystem (1), (2) erfüllen.

$$x^2 + y^2 = 5 \qquad (1)$$
$$x^2 + xy = 2 \qquad (2)$$

Lösung von cyrix:
Addiert man das Doppelte von Gleichung (2) zu Gleichung (1) erhält man

$$9 = 3x^2 + 2xy + y^2 = 2x^2 + (x+y)^2$$

Aus der zweiten Gleichung folgt einerseits $x \neq 0$, da man sonst den Widerspruch $0 = 2$ erhalten würde, und andererseits damit dann $x + y = \frac{2}{x}$. Setzt man dies in die eben erhaltene Gleichung ein und multipliziert mit x^2, erhält man

$$9x^2 = 2x^4 + 4 \qquad \text{bzw.} \qquad 2z^2 - 9z + 4 = 0$$

mit $z := x^2$. Die Lösungen dieser quadratischen Gleichung in z lauten $\frac{9}{4} \pm \sqrt{\frac{81}{16} - 2} = \frac{9 \pm \sqrt{81-32}}{4} = \frac{9 \pm 7}{4}$, also $z_1 = \frac{1}{2}$ und $z_2 = 2$.

Damit ergeben sich für $z_1 = \frac{1}{2}$ die Werte $x_{1/2} = \pm\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$ und damit nach Gleichung (2) $y_{1/2} = \pm\frac{3}{2} \cdot \sqrt{2}$, wobei jeweils das gleiche Vorzeichen zu wählen ist. Dass diese Lösungen auch die erste Gleichung erfüllen, rechnet man leicht nach.
Andererseits ergäbe sich aus $x^2 = z_2 = 2$ mit der zweiten Gleichung $y = 0$, was jedoch im Widerspruch zur ersten Gleichung steht.
Es ergeben sich also genau zwei Lösungen, nämlich $(x,y) \in \left\{ \left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}, \frac{3}{2} \cdot \sqrt{2}\right); \left(-\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}, -\frac{3}{2} \cdot \sqrt{2}\right) \right\}$.

Aufgabe 261221:
Man ermittle alle diejenigen Tripel reeller Zahlen $(x;y;z)$, die Lösung des folgenden Gleichungssystems (1), (2), (3) sind:

$$x \cdot y = 2 \qquad (1)$$
$$x \cdot z = 3 \qquad (2)$$
$$x^2 + y^2 = 5 \qquad (3)$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn ein Tripel $(x;y;z)$ reeller Zahlen Lösung des Gleichungssystems (1), (2), (3) ist, so folgt:
Nach (1) ist $y \neq 0$, also folgt aus (1) $x = \frac{2}{y}$. Setzt man dies in (3) ein, so ergibt sich $x^2 + \frac{4}{x^2} = 5$, also

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \qquad (4)$$

Somit erfüllt die Zahl $u = x^2 \quad (5)$ die Gleichung $u^2 - 5u + 4 = 0 \quad (6)$.
Aus (6) folgt: u ist eine der Zahlen

$$u_{1,2} = \frac{1}{2}(5 \pm \sqrt{25-16}) \quad \Rightarrow u_1 = 4, \quad u_2 = 1$$

Somit ist x nach (5) eine der Zahlen

$$x_1 = 2; \quad x_2 = -2; \quad x_3 = 1; \quad x_4 = -1 \qquad (7)$$

Nach (1) gehört hierzu als Wert für y jeweils die Zahl

$$y_1 = 1; \quad y_2 = -1; \quad y_3 = 2; \quad y_4 = -2 \qquad (8)$$

und nach (2) als Wert für z jeweils

$$z_1 = \frac{3}{2}; \quad z_2 = -\frac{3}{2}; \quad z_3 = 3; \quad z_4 = -3 \qquad (9)$$

Daher können nur die Tripel

$$\left(2;1;\frac{3}{2}\right); \quad \left(-2;-1;-\frac{3}{2}\right); \quad (1;2;3); \quad (-1;-2;-3)$$

das Gleichungssystem (1), (2), (3) erfüllen. Sie erfüllen es wie es aus der Probe ersichtlich wird.

Alternativ-Lösung von cyrix:
Betrachtet man die Gleichung „$(3)+2\cdot(1)$“, so erhält man $9 = x^2+2xy+y^2 = (x+y)^2$, also $x+y = \pm 3$.
Analog erhält man aus „$(3)+2\cdot(1)$“ die Gleichung $1 = x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2$, also $x - y = \pm 1$.

Wir führen eine vollständige Fallunterscheidung nach den Vorzeichen von $x+y$ und $x-y$ durch:

Fall 1: Es ist $x+y=3$.
Fall 1.1: Es ist $x-y=1$. Es folgt $(x,y,z) = \left(2,1,\frac{3}{2}\right)$.
Fall 1.2: Es ist $x-y=-1$. Es folgt $(x,y,z) = (1,2,3)$.

Fall 2: Es ist $x+y=-3$.
Fall 2.1: Es ist $x-y=1$. Es folgt $(x,y,z) = (-1,-2,-3)$.
Fall 2.2: Es ist $x-y=-1$. Es folgt $(x,y,z) = \left(-2,-1,-\frac{3}{2}\right)$.

Damit lösen genau die vier genannten Tripel das Gleichungssystem, was die Probe bestätigt.

Aufgabe 271221:
Man ermittle alle Paare (x,y) von Null verschiedener reeller Zahlen x,y, die das folgende Gleichungssystem (1), (2) erfüllen:

$$x \cdot \left(1 + \frac{x}{y}\right) = 6 \qquad (1)$$
$$y \cdot \left(1 + \frac{y}{x}\right) = 3 \qquad (2)$$

Lösung von weird:
Der Term $x+y$ berechnet sich aus (1) und (2) zu

$$x+y=\frac{6y}{x} \quad \text{bzw.} \quad x+y=\frac{3x}{y}$$

woraus sich durch Gleichsetzung dann sofort die Gleichung

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2=2 \quad \text{bzw.} \quad x=\pm\sqrt{2}\,y \quad (*)$$

ergibt. Durch Einsetzen von (*) etwa in (1) erhält man daraus zunächst x zu

$$x=\frac{6}{1+\frac{x}{y}}=\frac{6}{1\pm\sqrt{2}}=6(\pm\sqrt{2}-1)$$

und damit dann auch y zu

$$y=\pm\frac{x}{\sqrt{2}}=3(2\mp\sqrt{2})$$

d. h., jede der beiden Vorzeichenwahlen in (*) liefert eine Lösung.

Aufgabe 281221:
Man ermittle alle diejenigen Tripel (x,y,z) von Null verschiedener reeller Zahlen x,y und z, die das folgende Gleichungssystem (1), (2), (3) erfüllen:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=z \tag{1}$$
$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=-x \tag{2}$$
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x}=y \tag{3}$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen es gibt ein Tripel (x,y,z) von Null verschiedener reeller Zahlen, für das (1), (2) und (3) gilt. Aus (1), (2), (3) folgt dann

$$x+y=xyz \tag{1'}$$
$$y+z=-xyz \tag{2'}$$
$$x+z=xyz \tag{3'}$$

Aus (1') und (3') folgt $y=z$ (4). Damit folgt aus (1') und (2') durch Addition $x+3z=0$, also $x=-3z$ (5). Mit (4) und (5) ergibt (2'): $2z=3z^3$.
Wegen $z\neq 0$ folgt hieraus $z=\pm\frac{1}{3}\sqrt{6}$.
Hiernach ergibt sich aus (4) und (5) $y=\pm\frac{1}{3}\sqrt{6}$ und $x=\mp\sqrt{6}$.
Als Lösungen des Gleichungssystems (1), (2), (3) kommen also nur die Tripel

$$\left(-\sqrt{6};\frac{1}{3}\sqrt{6};\frac{1}{3}\sqrt{6}\right) \quad \text{und} \quad \left(\sqrt{6};-\frac{1}{3}\sqrt{6};-\frac{1}{3}\sqrt{6}\right)$$

in Frage. Tatsächlich erfüllen die Tripel die Probe mit (1), (2) und (3).

Aufgabe 291221:
Man ermittle alle diejenigen Paare $(x;y)$ reeller Zahlen x,y, die das folgende Gleichungssystem (1), (2), (3) erfüllen:

$$x + xy + xy^2 = -21 \qquad (1)$$
$$y + xy + x^2y = 14 \qquad (2)$$
$$x + y = -1 \qquad (3)$$

Lösung von weird:
Addition von (1) und (2) führt auf die neue Gleichung

$$(x+y) + 2xy + xy(x+y) = -7$$

aus der man mittels (3) sofort $xy = -6$ erhält.
Indem man dies etwa in (1) einsetzt, erhält man daraus die weitere lineare Gleichung

$$x - 6y = -15$$

welche in Verbindung mit (3) schließlich auf die eindeutige Lösung $x = -3$, $y = 2$ hier führt.

Aufgabe 311221:
Ist c eine reelle Zahl, so werde das Gleichungssystem

$$x + y = 1 \qquad (1)$$
$$x^2 + y^2 = c \qquad (2)$$

gebildet.
a) Man ermittle für $c = 2$ alle Paare $(x;y)$, die das Gleichungssystem (1), (2) erfüllen.
Man ermittle ferner jeweils alle diejenigen reellen Zahlen c, für die das Gleichungssystem (1), (2)
b) keine Lösung $(x;y)$ aus reellen Zahlen x,y hat,
c) genau eine Lösung $(x;y)$ hat,
d) zwei verschiedene Lösungen $(x_1;y_1),(x_2;y_2)$ aus reellen Zahlen hat.

Lösung von Steffen Polster:
Umstellen von (1) nach y und Einsetzen in (2) ergibt die quadratische Gleichung

$$x^2 + (1-x)^2 = 2x^2 - 2x + 1 = c \Rightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{2c-1}}{2}$$

mit den zwei Paaren (x,y):

$$\left(\frac{1-\sqrt{2c-1}}{2}; \frac{1+\sqrt{2c-1}}{2}\right) \qquad ; \qquad \left(\frac{1+\sqrt{2c-1}}{2}; \frac{1-\sqrt{2c-1}}{2}\right) \qquad (3)$$

Für $c = 2$ wird damit $(x;y) \in \left\{\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right); \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}$.
Über die Anzahl verschiedener Lösung entscheidet der Radikand von $\sqrt{2c-1}$.
Keine Lösung existiert für $2c - 1 < 0 \Rightarrow c < \frac{1}{2}$, genau eine Lösung für $c = \frac{1}{2}$ und stets zwei Lösungen der Form (3) für $c > \frac{1}{2}$.

Aufgabe 321221:
Man ermittle zu jeder ganzen Zahl k alle diejenigen Paare $(x; y)$ ganzer Zahlen, die das Gleichungssystem aus den beiden folgenden Gleichungen (1), (2) erfüllen:

$$x^2 + k \cdot y^2 = 4 \qquad (1)$$
$$k \cdot x^2 - y^2 = 2 \qquad (2)$$

Lösung von MontyPythagoras:
Multipliziert man (1) mit k und subtrahiert (2), dann erhält man

$$(k^2 + 1)y^2 = 4k - 2$$
$$y^2 = \frac{4k - 2}{k^2 + 1}$$

Es muss $k \geq 1$ sein, weil sonst y nicht reell wäre. Außerdem kann y nicht gleich null sein. Daher muss gelten:

$$y^2 = \frac{4k - 2}{k^2 + 1} \geq 1$$
$$4k - 2 \geq k^2 + 1$$
$$k^2 - 4k + 3 \leq 0$$

Daraus folgt $1 \leq k \leq 3$. Die in Frage kommenden Lösungen kann man daher schnell durchprobieren und man findet heraus, dass nur für $k = 3$ ganzzahlige Lösungen herauskommen, und zwar $x^2 = y^2 = 1$. Die Lösungspaare sind also $(1; 1)$, $(1; -1)$, $(-1; 1)$ und $(-1; -1)$.

Aufgabe 331221:
Ermitteln Sie alle diejenigen Paare $(x; y)$ reeller Zahlen, die das folgende Gleichungssystem (1), (2) erfüllen!

$$2 - x + y = \sqrt{18 + x - y} \qquad (1)$$
$$\sqrt{1 + x + y} + \sqrt{2 + x - y} = 5 \qquad (2)$$

Lösung von weird:
Durch Quadrieren von (1) erhält man zunächst

$$(x - y)^2 - 4(x - y) + 4 = 18 + x - y$$

und durch eine einfache Umformung daraus weiter

$$(x - y)^2 - 5(x - y) - 14 = (x - y + 2)(x - y - 7) = 0$$

Von den beiden Möglichkeiten

$$x - y = -2 \quad \text{bzw.} \quad x - y = 7$$

ist aber nur

$$x - y = -2 \quad (3)$$

auch wirklich eine Lösung von (1), wie man durch Einsetzen sofort feststellt, die zweite ist dagegen eine durch das Quadrieren entstandene Scheinlösung, denn sie würde auf den Widerspruch $-5 = \sqrt{25}$ führen. Durch Einsetzen von $x - y = -2$ vereinfacht sich (2) nun sofort zu

$$\sqrt{1 + x + y} = 5 \quad \text{bzw.} \quad x + y = 24 \quad (4)$$

woraus man in Verbindung mit (3) dann unmittelbar

$$x = 11,\ y = 13$$

erhält, was auch tatsächlich das Gleichungssystem (1) und (2) hier löst.

III Runde 3

Aufgabe 031233:
Bestimmen Sie – in Abhängigkeit von der reellen Zahl p – alle reellen Werte x, y, die die folgenden Gleichungen befriedigen:

$$xy + \frac{x}{y} = 3p(x^2 + y^2) \qquad ; \qquad xy - \frac{x}{y} = p(x^2 + y^2)$$

Lösung von Korinna Grabski:

$$xy - \frac{x}{y} = p(x^2+y^2) \Rightarrow x^2+y^2 = \frac{xy - \frac{x}{y}}{p} \quad ; \quad xy + \frac{x}{y} = 3p(x^2+y^2) = 3p\frac{xy - \frac{x}{y}}{p} = 3xy - 3\frac{x}{y}$$

$$\Rightarrow 4\frac{x}{y} = 2xy \Rightarrow 2x = xy^2$$

1. Fall: $x = 0$
Einsetzen in die 2. Gleichung: $0 = py \to y$ müsste 0 sein. Dies ist aber nicht möglich, da durch y geteilt wird. Also gibt es nur eine Lösung für den Spezialfall, dass $p = 0$ ist. In diesem Fall kann y beliebig ($\neq 0$) sein.

2. Fall: $x \neq 0$ mit $2 = y^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{2}$
Fall 2.1: $y = \sqrt{2}$
Einsetzen in die 2. Gleichung:

$$\sqrt{2}x - \frac{1}{\sqrt{2}}x = p(x^2+2)$$
$$0 = px^2 + 2p - \sqrt{2}x + \frac{1}{\sqrt{2}}x \Rightarrow 0 = x^2 - \frac{1}{\sqrt{2}p}x + 2$$
$$x_{1,2} = \frac{1}{2\sqrt{2}p} \pm \sqrt{\frac{1}{8p^2} - 2}$$

Damit gilt als Nebenbedingung $\frac{1}{8p^2} - 2 \geq 0$, also $-\frac{1}{4} \leq p \leq \frac{1}{4}$. Um festzustellen, ob wirklich eine Lösung gefunden wurde, wird noch in die 1. Gleichung eingesetzt:

$$\left(\frac{1}{2\sqrt{2}p} \pm \sqrt{\frac{1}{8p^2} - 2}\right)\sqrt{2} + \left(\frac{1}{2\sqrt{2}p} \pm \sqrt{\frac{1}{8p^2} - 2}\right)\frac{1}{\sqrt{2}} = 3p\left(\left(\frac{1}{2\sqrt{2}p} \pm \sqrt{\frac{1}{8p^2} - 2}\right)^2 + 2\right)$$
$$\left(\frac{1}{2\sqrt{2}p} \pm \sqrt{\frac{1}{8p^2} - 2}\right)\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3}{4p} \pm \frac{3}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{1}{8p^2} - 2}$$

Damit gibt es unter der Nebenbedingung $-\frac{1}{4} \leq p \leq \frac{1}{4}$ in diesem Fall die Lösungen

$$x_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}p} + \sqrt{\frac{1}{8p^2} - 2}; \quad y_1 = \sqrt{2} \qquad \text{sowie} \qquad x_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}p} - \sqrt{\frac{1}{8p^2} - 2}; \quad y_2 = \sqrt{2}$$

Fall 2.2: $y = -\sqrt{2}$
Einsetzen in die 2. Gleichung:

$$-\sqrt{2}x + \frac{1}{\sqrt{2}}x = p(x^2+2)$$
$$0 = px^2 + 2p + \sqrt{2}x - \frac{1}{\sqrt{2}}x \Rightarrow 0 = x^2 + \frac{1}{\sqrt{2}p}x + 2$$
$$x_{3,4} = -\frac{1}{2\sqrt{2}p} \pm \sqrt{\frac{1}{8p^2} - 2}$$

Damit gilt als Nebenbedingung $\frac{1}{8p^2} - 2 \geq 0$, also $-\frac{1}{4} \leq p \leq \frac{1}{4}$. Einsetzen in die 1. Gleichung zeigt wieder, dass eine Lösung vorliegt.

Damit gibt es unter der Nebenbedingung $-\frac{1}{4} \leq p \leq \frac{1}{4}$ in diesem Fall die Lösungen

$$x_3 = -\frac{1}{2\sqrt{2}p} + \sqrt{\frac{1}{8p^2} - 2}; \quad y_3 = -\sqrt{2} \qquad \text{sowie} \qquad x_2 = -\frac{1}{2\sqrt{2}p} - \sqrt{\frac{1}{8p^2} - 2}; \quad y_4 = -\sqrt{2}$$

Aufgabe 131231:
Die in vollen Lebensjahren gerechneten Altersangaben einer Familie sollen folgende Bedingungen erfüllen:
Vor zehn Jahren war der Vater so alt wie seine beiden Kinder zusammen. Vor einigen vollen Jahrzehnten war er achtmal so alt wie sein Sohn, während gleichzeitig seine Tochter dreimal so alt war wie ihr Bruder.
Der Altersunterschied zwischen Vater und Tochter beträgt mehr als 20 Jahre und zwischen Vater und Sohn weniger als 40 Jahre.
Man ermittle für das jetzige Alter von Vater, Sohn und Tochter alle Angaben, die diesen Bedingungen entsprechen.

Lösung von OlgaBarati:
Es seien jeweils v das Alter des Vaters, t das Alter der Tochter und s das Alter des Sohnes in vollen Jahren. Die Anzahl voller Jahrzehnte sei mit n ausgedrückt. Mit $v,s,t,n \in \mathbb{N}$.
Dem Aufgabentext ist zu entnehmen:

$$n > 1 \quad (i)$$
$$v - t > 20 \quad (ii)$$
$$v - s < 40 \quad (iii)$$
$$v - 10 = t - 10 + s - 10 \qquad ; \qquad t = v + 10 - s \quad (1)$$
$$v - 10n = 8(s - 10n) \qquad ; \qquad v = 8s - 70n \quad (2)$$
$$t - 10n = 3(s - 10n) \qquad ; \qquad t - 10n = 3s - 30n \quad (3)$$

Wir setzen (1) in (3) ein und erhalten

$$v + 10 - s - 10n = 3s - 30n \qquad ; \qquad v = 4s - 20n - 10 \quad (4)$$

Durch Gleichsetzen von(2) und (4) ergibt sich nach Umformung

$$s = 12{,}5n - 2{,}5 \quad (5)$$

woraus folgt dass n für ganzzahlige Werte ungerade - und mit (i) größer als 1 sein muss. Mit dem Wert 3 in (5) eingesetzt berechnet sich zunächst das Alter des Sohnes

$$s = 12{,}5 \cdot 3 - 2{,}5 = 35$$

Wir setzen weiter ein und erhalten

$$v = 8 \cdot 35 - 70 \cdot 3 = 70$$
$$t = 70 + 10 - 35 = 45$$

Mit der Überprüfung von (ii) und (iii)

$$70 - 45 = 25 > 20 \quad (ii)$$
$$70 - 35 = 35 < 40 \quad (iii)$$

sind auch diese Kriterien erfüllt.
Der Vater ist 70, die Tochter ist 45 und der Sohn ist 35 Jahre alt.

Aufgabe 161231:
Man gebe alle Paare (x, y) reeller Zahlen an, für die gilt:

$$x^2 + y = 2 \quad (1) \qquad \text{und} \qquad y^2 + x = 2 \quad (2)$$

Lösung von weird:
Indem man die beiden Gleichungen voneinander abzieht, erhält man die neue Gleichung

$$x^2 - y^2 = x - y \quad (*)$$

Wir machen hier folgende Fallunterscheidung:
1. Fall: $x = y$
Einsetzen in (1) ergibt dann

$$x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2) = 0$$

was auf die Lösungen

$$(x,y) \in \{(1,1),(-2,-2)\}$$

führt.
2. Fall: $x \neq y$.
Indem man (*) durch $x - y$ kürzt, ergibt sich daraus

$$x + y = 1 \quad \text{bzw.} \quad y = 1 - x$$

Durch Einsetzen in (1) erhält man damit weiter

$$x^2 - x - 1 = 0$$

was auf die weiteren zwei Lösungen

$$(x,y) \in \{(1 \pm \sqrt{5})/2,(1 \mp \sqrt{5})/2)\}$$

führt.

Aufgabe 161234:
a) Man beweise, dass für alle reellen Zahlen x, y, z mit $x + y + z = \pi$ die Ungleichung gilt:

$$\cos 2x + \cos 2y - \cos 2z \leq \frac{3}{2} \qquad (1)$$

b) Es sind diejenigen Werte von x, y, z zu ermitteln, für die in (1) das Gleichheitszeichen gilt.

Lösung von MontyPythagoras:
Wir substituieren z:

$$\cos 2x + \cos 2y - \cos(2\pi - 2x - 2y) \leq \tfrac{3}{2}$$
$$\cos 2x + \cos 2y - \cos(2x + 2y) \leq \tfrac{3}{2}$$
$$\cos 2x + \cos 2y - \cos 2x \cos 2y + \sin 2x \sin 2y \leq \tfrac{3}{2}$$
$$1 - (1 - \cos 2x)(1 - \cos 2y) + \sin 2x \sin 2y \leq \tfrac{3}{2}$$
$$-(2\sin^2 x)(2\sin^2 y) + (2\sin x \cos x)(2\sin y \cos y) \leq \tfrac{1}{2}$$
$$-4\sin^2 x \sin^2 y + 4\sin x \sin y \cos x \cos y \leq \tfrac{1}{2}$$
$$4\sin x \sin y(\cos x \cos y - \sin x \sin y) \leq \tfrac{1}{2}$$
$$4\sin x \sin y \cos(x + y) \leq \tfrac{1}{2}$$

Wir setzen noch $2\sin x \sin y = \cos(x-y) - \cos(x+y)$ ein:

$$2\left(\cos(x-y) - \cos(x+y)\right)\cos(x+y) \leq \tfrac{1}{2}$$

$$\left(\cos(x-y) - \cos(x+y)\right)\cos(x+y) \leq \tfrac{1}{4} \tag{2}$$

Wir substituieren nun

$$x + y = u \tag{3}$$

und

$$x - y = w \tag{4}$$

und betrachten die linke Seite der Ungleichung (2) als Funktion $f(u,w)$, deren absolutes Maximum wir suchen:

$$f(u,w) = (\cos w - \cos u)\cos u = \cos u \cos w - \cos^2 u \tag{5}$$

Bei gegebenem u nimmt f offensichtlich extremale Werte an, wenn $\cos w$ extremal ist, also bei Vielfachen von π:

$$w = k\pi \tag{6}$$

mit $k \in \mathbb{Z}$. Leiten wir dagegen nach u ab, erhalten wir Extremstellen oder Sattelpunkte bei:

$$\frac{\partial f(u,w)}{\partial u} = -\cos w \sin u + 2\sin u \cos u = 0$$

$$\sin u(2\cos u - \cos w) = 0$$

$\sin u = 0$ kommt als Maximum nicht in Frage, da dann $\cos u = \pm 1$ ist, und laut (5) die Funktion f je nach dem gewählten w die Werte -2 oder 0 annimmt, was nicht maximal sein kann. Also muss stattdessen gelten:

$$2\cos u = \cos w$$

$$\cos u = \tfrac{1}{2}\cos w \tag{7}$$

Setzt man das in (5) ein, erhält man für diese speziellen Werte:

$$f_u(w) = \tfrac{1}{2}\cos w \cos w - (\tfrac{1}{2}\cos w)^2 = \tfrac{1}{4}\cos^2 w \leq \tfrac{1}{4}$$

Damit sind Ungleichungen (2) und letztlich auch (1) erfüllt. Die Gleichheit tritt ein, wenn $\cos^2 w = 1$ ist, was laut (6) bei Vielfachen von π der Fall ist. Wegen (4) gilt:

$$x - y = k\pi$$

$$x = y + k\pi \tag{8}$$

Setzt man (3) in (7) ein, erhält man:

$$\cos(x+y) = \cos(2y + k\pi) = \tfrac{1}{2}\cos(k\pi)$$

$$(-1)^k \cos 2y = \tfrac{1}{2}(-1)^k$$

$$\cos 2y = \tfrac{1}{2} \tag{9}$$

Dann gilt wegen (8):

$$\cos 2x = \cos(2y + 2k\pi) = \cos(2y) = \tfrac{1}{2}$$

was wegen der Symmetrie bezüglich x und y zu erwarten war. Da in Ungleichung (1) nur $2x$, $2y$ und $2z$ vorkommen, können aufgrund der Periodizität der Kosinus-Funktion Vielfache von π beliebig zu jeder Variablen addiert werden. Wir betrachten nachfolgend daher nur die Hauptwerte $-\frac{\pi}{2} \leq x,y \leq \frac{\pi}{2}$. (9) ist erfüllt, wenn

$$2y = \pm\tfrac{\pi}{3}$$

$$y = \pm\tfrac{\pi}{6}$$

Desgleichen gilt für x, wobei allerdings x und y nicht unterschiedliche Vorzeichen haben dürfen, denn dann wäre $z = \pi$ und die Ungleichung (1) nicht erfüllt. Zusammenfassend muss also gelten:

$$x = \pm\tfrac{\pi}{6} + n\pi$$

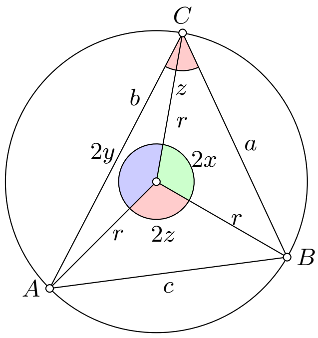
$$y = x - k\pi$$

und

$$z = \pi - (x + y) = \pi - 2x + k\pi$$
$$z = -2x + (k+1)\pi$$

mit $k,n \in \mathbb{Z}$.

Alternativ-Lösung von MontyPythagoras:



Laut Kosinussatz gilt z. B.

$$a^2 = 2r^2 - 2r^2 \cos 2x$$
$$2r^2 \cos 2x = 2r^2 - a^2$$
$$\cos 2x = 1 - \frac{a^2}{2r^2}$$

Sinngemäß genauso für y und z. Setzt man das in (1) ein, erhält man

$$1 - \frac{a^2}{2r^2} + 1 - \frac{b^2}{2r^2} - 1 + \frac{c^2}{2r^2} \leq \tfrac{3}{2}$$
$$\frac{c^2 - a^2 - b^2}{2r^2} \leq \tfrac{1}{2}$$
$$c^2 - a^2 - b^2 \leq r^2$$
$$c^2 \leq r^2 + a^2 + b^2$$

Man kann weiter schlussfolgern (wiederum per Kosinussatz):

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos z$$

Setzt man das in die vorige Gleichung ein, erhält man:

$$a^2 + b^2 - 2ab \cos z \leq r^2 + a^2 + b^2$$
$$-2ab \cos z \leq r^2$$

Außerdem ist

$$c = 2r \sin z$$

Wir multiplizieren die vorige Gleichung daher mit $4 \sin^2 z$. Es muss also gelten:

$$-8ab \sin^2 z \cos z \leq c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos z$$

Und daher:

$$0 \leq (a-b)^2 + 2ab(1 - \cos z) + 8ab \sin^2 z \cos z$$

Da $(a-b)^2$ durchaus gleich null sein kann, muss man verschärfend fordern:

$$0 \leq 2ab(1 - \cos z) + 8ab \sin^2 z \cos z$$

Wir teilen durch $2ab$:

$$0 \leq 1 - \cos z + 4\sin^2 z \cos z$$
$$0 \leq 1 + 3\cos z - 4\cos^3 z$$
$$0 \leq 1 - \cos 3z$$

Diese Ungleichung ist tatsächlich immer erfüllt, womit die Ungleichung der Aufgabenstellung bewiesen ist. Gleichheit tritt ein, wenn einerseits $a = b$ ist, und andererseits $\cos 3z = 1$.
Allerdings erfüllt $z = 0$ die Ungleichung der Aufgabenstellung tatsächlich nicht, weil wir oben die Ungleichung mit $\sin^2 z$ multipliziert und dadurch die Phantomlösung $z = 0$ erzeugt haben. Es muss stattdessen gelten, dass

$$3z = 2\pi$$
$$z = \tfrac{2}{3}\pi = 120°$$

ist. Da außerdem $a = b$ sein muss, ist $x = y$ und aufgrund der Innenwinkelsumme gilt dann $x = y = \frac{1}{6}\pi = 30°$. Über die rein geometrischen Überlegungen hinaus kann man festhalten, dass die Kosinus-Funktion gerade und periodisch ist. Daher ist $x = y = -30°$ in Kombination mit $z = -120°$ ebenfalls eine gültige Lösung. Außerdem können wegen der Periodizität beliebige Vielfache von $\pi = 180°$ zu allen drei Variablen addiert werden.

Aufgabe 191236:
Gegeben sei eine positive reelle Zahl a.
Man ermittle (zu jedem Wert dieser gegebenen Zahl a jeweils) alle reellen Lösungen $(x; y)$ des Gleichungssystems

$$x^5 + y^5 = 1 \qquad , \qquad x + y = a$$

Lösung von MontyPythagoras:
Wir nutzen die Symmetrie, indem wir $x = \frac{a}{2} + z$ und $y = \frac{a}{2} - z$ substituieren. Die zweite Bedingung ist dadurch automatisch erfüllt. Aus der ersten Bedingung folgt:

$$\left(\frac{a}{2} + z\right)^5 + \left(\frac{a}{2} - z\right)^5 = 1$$
$$2\left(\frac{a}{2}\right)^5 + 2 \cdot 10 \left(\frac{a}{2}\right)^3 z^2 + 2 \cdot 5 \left(\frac{a}{2}\right) z^4 = 1$$

Das ist eine biquadratische Gleichung, die leicht zu lösen ist:

$$\frac{a^5}{16} + \frac{5a^3}{2} z^2 + 5az^4 = 1$$
$$z^4 + \frac{1}{2}a^2 z^2 + \frac{a^4}{80} - \frac{1}{5a} = 0$$
$$z^2 = -\frac{1}{4}a^2 + \sqrt{\frac{1}{16}a^4 - \frac{1}{80}a^4 + \frac{1}{5a}}$$

(Da $z^2 \geq 0$ gelten muss, kommt nur diese Lösung in Frage).

$$z^2 = -\frac{1}{4}a^2 + \sqrt{\frac{1}{20}a^4 + \frac{1}{5a}} = -\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^5 + 4}{5a}}$$

Damit gilt:

$$z = \pm\sqrt{-\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^5 + 4}{5a}}}$$
$$x_{1,2} = \frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{\frac{a^5 + 4}{5a}} - a^2}$$

Die Lösungen lauten dann aufgrund der Symmetrie $(x,y) = (x_1,x_2)$ und $(x,y) = (x_2,x_1)$.

Aufgabe 201231:
Man ermittle alle reellen Zahlen x, für die das folgende System von Ungleichungen (1), (2), (3) erfüllt ist:

$$x^4 + x^2 - 2x \geq 0 \qquad (1)$$
$$2x^3 + x - 1 < 0 \qquad (2)$$
$$x^3 - x > 0 \qquad (3)$$

Lösung von cyrix:
Wir führen eine Fallunterscheidung nach dem Vorzeichen von x durch:

1. Fall: $x \geq 0$. Dann ist nach (3) $0 < x^3 - x = x \cdot (x^2 - 1)$ also $x > 0$ und $0 < x^2 - 1$, d. h. $x^2 > 1$ und damit auch $x > 1$. Dann jedoch ist $2x^3 + x - 1 > 2x^3 > 0$ im Widerspruch zu (2), sodass es hier keine Lösung gibt.

2. Fall: $x < 0$. Dann ist $-2x > 0$ und wegen $x^4 > 0$ sowie $x^2 > 0$ (1) erfüllt. Offensichtlich ist auch $2x^3 < 0$ und $x - 1 < 0$, also auch (2) erfüllt. Wegen $0 < x^3 - x = x \cdot (x^2 - 1)$ wird (3) genau dann erfüllt, wenn $x^2 - 1$ negativ ist, also $0 < x^2 < 1$ und damit $-1 < x < 0$ gilt.

Das Ungleichungssystem wird also genau für diejenigen reellen Zahlen x mit $-1 < x < 0$ erfüllt.

Aufgabe 221231:
Es sind alle nichtnegativen ganzzahligen Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x_1 + 11x_2 + 21x_3 + 31x_4 + 41x_5 &= 55 \\ 2x_1 + 12x_2 + 22x_3 + 32x_4 + 42x_5 &= 60 \\ 3x_1 + 13x_2 + 23x_3 + 33x_4 + 43x_5 &= 65 \\ 4x_1 + 14x_2 + 24x_3 + 34x_4 + 44x_5 &= 70 \\ 5x_1 + 15x_2 + 25x_3 + 35x_4 + 45x_5 &= 75 \end{aligned}$$

zu ermitteln.

Lösung von weird:
Das obige Gleichungssystem ist offensichtlich äquivalent zu dem einfacheren

$$x_1 + 11x_2 + 21x_3 + 31x_4 + 41x_5 = 55 \qquad (1)$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 5 \qquad (2)$$

da sich (2) durch einfache Differenzbildung aus den beiden ersten Gleichungen ergibt und sich auch umgekehrt durch Addition eines geeigneten Vielfachen von (2) zu (1) alle Gleichungen des ursprünglichen Gleichungssystems ergeben. Subtrahiert man (2) von (1) und kürzt durch 10, erhält man so sofort die weitere Gleichung

$$x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 5 \qquad (3)$$

Wir unterscheiden nun die folgenden einander ausschließenden 3 Fälle:
1.Fall: $x_5 = 1$.
Wegen (3) muss dann auch sofort

$$x_2 = 1,\ x_3 = x_4 = 0$$

gelten, womit sich aus (2) dann auch $x_1 = 3$ ergibt, was tatsächlich eine Lösung unseres Gleichungssystems hier ist.

2.Fall: $x_5 = 0$, $x_4 = 1$
Hier ergeben sich aus (3) die beiden Unterfälle:
a) $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, sowie $x_1 = 3$ aus (2)
b) $x_2 = 2$, $x_3 = 0$, sowie $x_1 = 2$ aus (2)
welche beide ebenfalls hier zusätzlich (1) lösen, also dann Lösungen sind.

3.Fall: $x_4 = x_5 = 0$
Hier ergeben sich wieder unter Verwendung von (3) dann sogar drei Unterfälle, nämlich
a) $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, sowie $x_1 = 2$ aus (2)
b) $x_2 = 3$, $x_3 = 1$, sowie $x_1 = 1$ aus (2)
c) $x_2 = 5$, $x_3 = 0$, sowie $x_1 = 0$ aus (2)

welche ebenfalls alle auch (1) lösen und somit Lösungen sind.
Zusammenfassend haben sich somit die folgenden 6 Lösungen

$$(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \{(0,5,0,0,0),(1,3,1,0,0),(2,1,2,0,0),(2,2,0,1,0),(3,0,1,1,0),(3,1,0,0,1)\}$$

des gegebenen Gleichungssystems ergeben.

Aufgabe 231234:
Man ermittle alle diejenigen Paare $(x;y)$ reeller Zahlen mit $0 \leq x < 2\pi$ und $0 \leq y < 2\pi$, die das Gleichungssystem erfüllen:

$$3 \cdot \sin x \cdot \cos y = \cos x \cdot \sin y \qquad (1)$$

$$\sin^2 x + \sin^2 y = 1 \qquad (2)$$

Lösung von MontyPythagoras:
Aus (2) folgt: $\sin^2 y = \cos^2 x$ bzw.

$$\sin y = \pm \cos x \qquad (3)$$

aber auch

$$\cos y = \pm \sin x \qquad (4)$$

wobei die beiden $\pm$-Symbole nicht notwendigerweise miteinander korrespondieren. Das in (1) eingesetzt:

$$\pm 3 \sin x \sin x = \pm \cos x \cos x$$

Die beiden $\pm$-Symbole können gleich oder entgegengesetzt sein, so dass allgemein gelten muss:

$$\pm 3 \sin^2 x = \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$(1 \pm 3) \sin^2 x = 1$$

Hier kommt allerdings nur das + in Frage, weil sonst $\sin x$ imaginär würde. Daher gilt:

$$4 \sin^2 x = 1$$

$$\sin x = \pm \frac{1}{2}$$

Aus (4) folgt außerdem

$$\cos y = \pm \frac{1}{2}$$

Die Lösungsmenge für x lautet $\{\frac{1}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi\}$, die für y lautet $\{\frac{1}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi\}$. Teilt man Gleichung (1) durch die Kosinus-Terme, so gilt

$$3 \tan x = \tan y$$

Der Tangens von x und der Tangens von y müssen also das gleiche Vorzeichen haben, so dass nicht jedes Element der Lösungsmenge von x mit jedem aus der Menge für y kombinierbar ist. Die Lösungspaare lauten daher: $(\frac{1}{6}\pi; \frac{1}{3}\pi)$, $(\frac{1}{6}\pi; \frac{4}{3}\pi)$, $(\frac{5}{6}\pi; \frac{2}{3}\pi)$, $(\frac{5}{6}\pi; \frac{5}{3}\pi)$, $(\frac{7}{6}\pi; \frac{1}{3}\pi)$, $(\frac{7}{6}\pi; \frac{4}{3}\pi)$, $(\frac{11}{6}\pi; \frac{2}{3}\pi)$, $(\frac{11}{6}\pi; \frac{5}{3}\pi)$.

Aufgabe 261231:
Man ermittle alle diejenigen Tripel $(x; y; z)$ reeller Zahlen, die das folgende Gleichungssystem (1), (2), (3) erfüllen:

$$x + y - z = 1 \qquad (1)$$
$$x^2 - y^2 + z^2 = 1 \qquad (2)$$
$$-x^3 + y^3 + z^3 = -1 \qquad (3)$$

Lösung von weird:
Indem man $z = x + y - 1$ aus Gleichung (1) in (2) einsetzt, erhält man

$$x^2 - y^2 + z^2 - 1 = x^2 - y^2 + (x + y)^2 - 2(x + y) = 2(x + y)(x - 1) = 0$$

Es bietet sich daher folgende Fallunterscheidung an:
1. Fall: $x + y = 0$ bzw. $y = -x$.
Wegen (1) folgt daraus sofort $z = -1$ und aus (3) dann $2x^3 = 0$, also dann weiter $x = y = 0$.

2. Fall: $x = 1$.
Einsetzen in (1) führt dann auf $y = z$ und aus (3) folgt dann wieder $2y^3 = 0$, also dann $y = z = 0$.
Insgesamt muss also

$$(x,y,z) \in \{(0,0,-1),(1,0,0)\}$$

gelten, und das sind auch tatsächlich Lösungen, wie man sofort nachrechnet.

Aufgabe 321233B:
Für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ ermittle man alle diejenigen n-Tupel $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ positiver ganzer Zahlen $x_1, x_2, \dots, x_n$, die das folgende Gleichungssystem erfüllen:

$$x_1 \cdot x_2 = 3 \cdot (x_1 + x_2)$$
$$x_2 \cdot x_3 = 3 \cdot (x_2 + x_3)$$
$$\dots$$
$$x_{n-1} \cdot x_n = 3 \cdot (x_{n-1} + x_n)$$
$$x_n \cdot x_1 = 3 \cdot (x_n + x_1)$$

Lösung von weird:
Obiges Gleichungssystem lässt sich auch einfach umschreiben zu

$$(x_1 - 3)(x_2 - 3) = 9 \qquad (x_2 - 3)(x_3 - 3) = 9$$
$$...$$
$$(x_{n-1} - 3)(x_n - 3) = 9 \qquad (x_n - 3)(x_1 - 3) = 9$$

Sehen wir uns also etwa die Lösung der ersten Gleichung

$$(x_1 - 3)(x_2 - 3) = 9$$

an, so ist sofort klar, dass hier nur die Lösungspaare

$$(x_1,x_2) \in \{(4,12),(6,6),(12,4)\}$$

bestehend aus positiven ganzen Zahlen in Frage kommen. Gleiches gilt für die andere Gleichungen, wobei die Lösungen aber in der folgenden Weise „gekoppelt“ sind:

Wählt man für (x_1,x_2) ein Paar (a,b) wie oben, so muss dann für die 2. Gleichung das Lösungspaar $(x_2,x_3) = (b,a)$, für die dritte Gleichung wieder $(x_3,x_4) = (a,b)$ usw. genommen werden. Speziell für ungerades n muss dann aber $a = b = 6$ sein, da sich sonst für x_1 verschiedene Lösungen aus der ersten und der letzte Gleichung ergeben würden.

Zusammenfassend gilt somit, dass es für jedes $n \geq 2$ auf jeden Fall die Lösung

$$(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n) = (6,6,6,\dots,6)$$

gibt, für ein gerades $n \geq 2$ aber dann noch jeweils die zwei weiteren Lösungen

$$(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n) \in \{(4,12,4,12,\dots,4,12),(12,4,12,4,\dots,12,4)\}$$

Aufgabe 341233A:
Man ermittle alle diejenigen Paare (x, y) reeller Zahlen x, y, die die folgenden Gleichungen (1) und (2) erfüllen:

$$\sin^4 x = y^4 + x^2y^2 - 4y^2 + 4 \qquad (1)$$
$$\cos^4 x = x^4 + x^2y^2 - 4x^2 + 1 \qquad (2)$$

Lösung von MontyPythagoras:
Wir substituieren:

$$y^2 + x^2 = a \qquad y^2 - x^2 = b$$

bzw.

$$x^2 = \frac{1}{2}(a-b) \qquad y^2 = \frac{1}{2}(a+b)$$

Dann folgt aus (1):

$$\sin^4 x = \frac{1}{2}(a+b)(a-4) + 4 \qquad (3)$$

und aus (2):

$$\cos^4 x = \frac{1}{2}(a-b)(a-4) + 1 \qquad (4)$$

Die beiden Gleichungen (3) und (4) ziehen wir voneinander ab und nutzen $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$:

$$\sin^4 x - \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^2 x - \cos^2 x) = \sin^2 x - \cos^2 x$$

$$\sin^2 x - \cos^2 x = b(a-4) + 3$$
$$2\sin^2 x = b(a-4) + 4 \qquad (5a)$$
$$2\cos^2 x = -b(a-4) - 2 \qquad (5b)$$

Wir setzen (5a) in (3) ein:

$$4\left(\frac{1}{2}(a+b)(a-4) + 4\right) = (b(a-4)+4)^2$$

$$2(a+b)(a-4) + 16 = b^2(a-4)^2 + 8b(a-4) + 16$$
$$2(a+b) = b^2(a-4) + 8b \qquad (6)$$

In gleicher Art und Weise erhalten wir, wenn wir (5b) in (4) einsetzen:

$$4\left(\frac{1}{2}(a-b)(a-4) + 1\right) = (b(a-4)+2)^2$$

$$2(a-b) = b^2(a-4) + 4b \tag{7}$$

Wir addieren (6) und (7):

$$4a = 2b^2(a-4) + 12b$$
$$2a = b^2 a - 4b^2 + 6b$$
$$(2-b^2)a = b(6-4b)$$
$$a = \frac{b(6-4b)}{2-b^2} \tag{8}$$

(8) in (6) eingesetzt:

$$2\left(\frac{b(6-4b)}{2-b^2} + b\right) = b^2\left(\frac{b(6-4b)}{2-b^2} - 4\right) + 8b$$

Durch $2b$ teilen:

$$\frac{6-4b}{2-b^2} + 1 = b\left(\frac{b(3-2b)}{2-b^2} - 2\right) + 4$$
$$6 - 4b + 2 - b^2 = b^2(3-2b) + (4-2b)(3-2b)$$
$$8 - 4b - b^2 = 3b^2 - 2b^3 + 12 - 6b - 8b + 4b^2$$
$$0 = b^3 - 4b^2 + 5b - 2$$

Eine Lösung, die man leicht errät, ist $b = 1$. Polynomdivision durch $(b-1)$ liefert

$$b^2 - 3b + 2 = 0$$

mit den Lösungen $b = 1$ (doppelte Nullstelle) und $b = 2$, so dass wir insgesamt unter Nutzung von (8) die folgenden Lösungen haben:

$$b_1 = 1 \qquad a_1 = 2 \qquad \text{und} \qquad b_2 = 2 \qquad a_2 = 2$$

Lösung a): Setzt man in die Substitution ein, folgt

$$y^2 = \frac{3}{2} \qquad x^2 = \frac{1}{2}$$

Laut (5a) muss aber auch gelten

$$2\sin^2 x = 2$$

was mit

$$x^2 = \frac{1}{2}$$

unvereinbar ist. Dies ist also nur eine Scheinlösung.

Lösung b): Aus der Substitution erhält man

$$x^2 = 0 \qquad y^2 = 2$$

$x = 0$ ist auch mit (5a) und (5b) vereinbar.
Wir haben daher als einzige Lösungen $(x; y) \in \{(0; \sqrt{2}), (0; -\sqrt{2})\}$.

Alternativ-Lösung von weird:

Aus

$$1 - 2\sin^2 x\cos^2 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x = \sin^4 x + \cos^4 x =$$
$$= x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 4(x^2+y^2) + 5 = (x^2+y^2-2)^2 + 1$$

folgt zunächst

$$2(x^2+y^2-2)^2 = -\sin^2(2x)$$

und da für eine reelle Lösung jedenfalls beide Seiten dieser Gleichung 0 sein müssen und wegen $x^2+y^2 = 2$ auch noch die Beschränkung $x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ gilt, bleibt hier dann wirklich nur die einzige Möglichkeit

$$x = 0,\ y = \pm\sqrt{2}$$

über, welche aber dann auch tatsächlich das Gleichungssystem löst, wie man durch Einsetzen sofort feststellt.

IV Runde 4

Aufgabe 051244:
Man ermittle alle geordneten Quadrupel reeller Zahlen (x_1, x_2, x_3, x_4), für die das folgende Gleichungssystem erfüllt ist:

$$\begin{aligned}
(*) \qquad & x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_4 = 2 \\
(**) \qquad & x_1x_2 + x_1x_4 + x_2x_4 + x_3 = 2 \\
& x_1x_3 + x_1x_4 + x_3x_4 + x_2 = 2 \\
& x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 + x_1 = 2
\end{aligned}$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, (x_1, x_2, x_3, x_4) sei eine Lösung des gegebenen Gleichungssystems, dann folgt aus (*) und (**) durch Subtraktion

$$x_1x_3 - x_1x_4 + x_2x_3 - x_2x_4 + x_4 - x_3 = 0 \qquad \text{also} \qquad (x_3 - x_4)(x_1 + x_2 - 1) = 0$$

Da das Gleichungssystem bei jeder zyklischen Vertauschung der Indizes in sich übergeht, ergeben sich weiter die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
(x_1 - x_2)(x_3 + x_4 - 1) = 0 \qquad & (1) \\
(x_1 - x_3)(x_2 + x_4 - 1) = 0 \qquad & (2) \\
(x_1 - x_4)(x_2 + x_3 - 1) = 0 \qquad & (3) \\
(x_2 - x_3)(x_1 + x_4 - 1) = 0 \qquad & (4) \\
(x_2 - x_4)(x_1 + x_3 - 1) = 0 \qquad & (5) \\
(x_3 - x_4)(x_1 + x_2 - 1) = 0 \qquad & (6)
\end{aligned}$$

Diese Gleichungen sind genau dann erfüllt, wenn in jeder der Gleichungen wenigstens ein Faktor gleich Null ist. Wir unterscheiden folgende Fälle:

1) $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$ 2) $x_1 = x_2 = x_3 \neq x_4$
3) $x_1 = x_2 \neq x_3; x_1 \neq x_4$ 4) $x_i \neq x_k$ für $i \neq k$

Alle anderen Fälle ergeben sich durch zyklische Vertauschung des Indizes, da jedes Quadrupel, das aus einer Lösung durch zyklische Vertauschung der Indizes entsteht, ebenfalls Lösung ist und man jedes Quadrupel durch zyklische Vertauschung in einen der Fälle 1) bis 4) überführen kann.

1. In diesem Fall erhält man aus (*):

$$x_1^2 + x_1^2 + x_1^2 + x_1 = 2 \Rightarrow x_1^2 + \frac{x_1}{3} - \frac{2}{3} = 0$$

Diese Gleichung ist nur dann erfüllt, wenn

$$x_1 = \frac{-1 + 5}{6} = \frac{2}{3} \qquad \text{oder} \qquad x_1 = \frac{-1 - 5}{6} = -1$$

ist. Man überzeugt sich leicht, dass für

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \frac{2}{3} \qquad \text{und} \qquad x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = -1$$

das gegebene Gleichungssystem erfüllt ist.

2. In diesem Fall erhält man wegen $x_3 \neq x_4$ aus (6):

$$x_1 + x_2 = 1 \quad ; \quad 2x_1 = 1 \qquad ; \qquad x_1 = x_2 = x_3 = \frac{1}{2}$$

$$\text{Ferner folgt aus (*):} \qquad 3x_1^2 + x_4 = 2 \qquad ; \qquad x_4 = 2 - \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$$

Man überzeugt sich leicht, dass für $x_1 = x_2 = x_3 = \frac{1}{2}$, $x_4 = \frac{5}{4}$ das gegebene Gleichungssystem erfüllt ist.

3. In diesem Fall müsste wegen (2), (3), (4), (5)
$$x_2 + x_4 = x_2 + x_3 = x_1 + x_4 = x_1 + x_3 = 1 \qquad \text{also} \qquad x_3 = x_4$$
und wegen der aus (*) folgenden Beziehung $x_3 = 1 - x_1$
$$x_1^2 + 2x_1(1 - x_1) + 1 - x_1 = 2 \qquad ; \qquad x_1^2 - x_1 + 1 = 0$$
gelten. Das ist aber auf Grund von
$$x_1^2 - x_1 + 1 = \left(x_1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$$
nicht möglich. In diesem Fall existiert also keine Lösung.
4. In diesem Fall folgt aus (1) und (2): $x_3 + x_4 = x_2 + x_4 = 1$, das ist aber wegen $x_1 \neq x_2$ unmöglich.

Das gegebene Gleichungssystem ist also für die Quadrupel
$$\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right); \quad (-1,-1,-1,-1); \quad \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{5}{4}\right); \quad \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{5}{4},\frac{1}{2}\right); \quad \left(\frac{1}{2},\frac{5}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right); \quad \left(\frac{5}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

Aufgabe 071241:
Man ermittle alle geordneten Quadrupel reeller Zahlen (x_1, x_2, x_3, x_4), für die das folgende Gleichungssystem erfüllt ist:
$$\begin{aligned} x_1 + ax_2 + x_3 &= b \qquad (1)\\ x_2 + ax_3 + x_4 &= b \qquad (2)\\ x_3 + ax_4 + x_1 &= b \qquad (3)\\ x_4 + ax_1 + x_2 &= b \qquad (4) \end{aligned}$$
Dabei sind a und b reelle Zahlen (Fallunterscheidung!).

Lösung von cyrix:
Fall 1: $a = 0$. Dann ist das Gleichungssystem äquivalent zu $x_1 + x_3 = b = x_2 + x_4$, sodass alle Lösungsquadrupel die Form $(s,t,b-s,b-t)$ mit zwei reellen Parametern s und t besitzen. Einsetzen bestätigt, dass das alles auch Lösungen sind.

Fall 2: $a \neq 0$. Dann führt das Gleichsetzen von Gleichung (1) mit (3) auf $ax_2 = ax_4$ bzw. $x_2 = x_4$. Analog erhält man mit Gleichungen (2) und (4) die Identität $x_1 = x_3$. Einsetzen liefert nun $2x_1 + ax_2 = b = 2x_2 + ax_1$, also $(2-a)x_1 = (2-a)x_2$.

Fall 2.1: $a \neq 2$. Dann folgt $x_1 = x_2$, also sind alle vier Variablen gleich und man erhält $(2+a)x_1 = b$.
Fall 2.1.1: $a \neq -2$. Dann sind genau die Quadrupel $\left(\frac{b}{2+a},\frac{b}{2+a},\frac{b}{2+a},\frac{b}{2+a}\right)$ Lösungen des Gleichungssystems, wie man durch Einsetzen leicht bestätigt.
Fall 2.1.2: $a = -2$ und $b = 0$. Dann sind die Lösungsquadrupel gegeben durch (t,t,t,t), wobei t die reellen Zahlen durchläuft. Auch hier bestätigt die Probe das Ergebnis.
Fall 2.1.3: $a = -2$ und $b \neq 0$. Dann gibt es wegen $(2+a)x_1 = (2-2)x_1 = 0 \neq b$ keine Lösung.

Fall 2.2: $a = 2$. Dann ist $2x_1+2x_2 = b$, sodass man genau alle Lösungstripel erhält durch $\left(t, \frac{b}{2} - t, t, \frac{b}{2} - t\right)$, wobei auch hier der Parameter t die reellen Zahlen durchläuft, und man durch Einsetzen bestätigt, dass dies alles Lösungen sind.

Aufgabe 081244:
Lösen Sie das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} |\log_2(x+y)| + |\log_2(x-y)| &= 3 \\ xy &= 3 \end{aligned}$$

Lösung von cyrix:
Aufgrund der zweiten Gleichung haben beide Variablen das gleiche Vorzeichen. Wären beide negativ, so auch $x+y$. Dann wäre aber $\log_2(x+y)$ nicht definiert. Demnach sind sowohl x als auch y positiv. Damit $\log_2(x-y)$ definiert ist, muss $x > y$ gelten, also aufgrund der zweiten Gleichung dann $x+y > x > \sqrt{3}$. Damit ist $\log_2(x+y)$ stehts positiv und die Betragsstriche können entfallen.
Es verbleiben zwei Fälle:
1. Fall: $x - y \geq 1$.
Dann ist auch $\log_2(x-y) \geq 0$ und die erste Gleichung wird zu

$$3 = \log_2(x+y) + \log_2(x-y) = \log_2(x^2 - y^2)$$

also $x^2 - y^2 = 8$ bzw. $x^4 - (xy)^2 = x^4 - 9 = 8x^2$, was mit der Substitution $t = x^2$ übergeht in die quadratische Gleichung $t^2 - 8t - 9 = 0$, die die Lösungen $4 \pm \sqrt{16+9} = 4 \pm 5$ hat. Da $t = x^2 \geq 0$ ist, entfällt die negative Lösung -1 und es verbleibt $t = x^2 = 9$, also $x = 3$ und $y = 1$. Die Probe bestätigt, dass diese Variablenbelegung auch das Ausgangsgleichungssystem löst.
2. Fall: $x - y < 1$.
Dann ist $\log_2(x-y) < 0$, sodass die erste Gleichung übergeht in

$$3 = \log_2(x+y) - \log_2(x-y) = \log_2\left(\frac{x+y}{x-y}\right)$$

also $8 = \frac{x+y}{x-y}$ bzw. $x + y = 8(x-y)$, also $9y = 7x$ bzw. $y = \frac{7}{9}x$ und damit $3 = xy = \frac{7}{9}x^2$, welches auf $x^2 = 9 \cdot \frac{3}{7}$ und (wegen $x > 0$) auf $x = 3 \cdot \sqrt{\frac{3}{7}} = 3 \cdot \frac{\sqrt{21}}{7}$ sowie $y = \frac{7}{9}x = \frac{\sqrt{21}}{3}$.

Zur Probe: Es ist $x \cdot y = \frac{3}{7} \cdot \sqrt{21} \cdot \frac{1}{3} \cdot \sqrt{21} = \frac{1}{7} \cdot 21 = 3$, sodass die zweite Gleichung erfüllt ist. Weiterhin ist

$$x + y = \frac{3}{7} \cdot \sqrt{21} + \frac{1}{3} \cdot \sqrt{21} = \frac{9+7}{21} \cdot \sqrt{21} = \frac{16}{\sqrt{21}}$$

sodass man $\log_2(x+y) = \log_2(16) - \log_2(\sqrt{21}) = 4 - \frac{1}{2}\log_2(21)$ erhält. Da $21 < 256$ ist, folgt $\frac{1}{2}\log_2(21) < \frac{1}{2}\log_2(256) = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4$, sodass $|\log_2(x+y)| = \log_2(x+y) = 4 - \frac{1}{2}\log_2(21)$ gilt.
Darüber hinaus ist $x - y = \frac{3}{7} \cdot \sqrt{21} - \frac{1}{3} \cdot \sqrt{21} = \frac{9-7}{21} \cdot \sqrt{21} = \frac{2}{\sqrt{21}}$, sodass man

$$\log_2(x-y) = \log_2(2) - \log_2(\sqrt{21}) = 1 - \frac{1}{2}\log_2(21)$$

erhält. Wegen $21 > 4$ ist $\frac{1}{2}\log_2(21) > \frac{1}{2}\log_2(4) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$, sodass $|\log_2(x-y)| = -\log_2(x-y) = \frac{1}{2}\log_2(21) - 1$ ist. Zusammen mit dem zuvor berechneten ist dann $|\log_2(x+y)| + |\log_2(x-y)| = 4 - \frac{1}{2}\log_2(21) - \frac{1}{2}\log_2(21) - 1 = 4 - 1 = 3$, sodass auch die zweite Gleichung von diesem Paar erfüllt wird.
Zusammen ergeben sich also genau zwei Lösungspaare, nämlich $(x,y) = (3,1)$ oder $(x,y) = \left(\frac{3}{7} \cdot \sqrt{21}, \frac{1}{3} \cdot \sqrt{21}\right)$

Aufgabe 141244:
Man ermittle alle Paare (x, y) reeller Zahlen x und y, für die die Gleichungen gelten:

$$\begin{aligned} 24x^2 - 25xy - 73x + 25y - 35 &= 0 \qquad (1) \quad \text{und} \\ x^2 - y^2 - 2x - 2y - 7 &= 0 \qquad (2) \end{aligned}$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, für ein Paar $(x;y)$ gelten (1) und (2). dann setzen wir $u=x-1$ und $v=y+1$, so dass (1) äquivalent mit

$$24(u+1)^2-25(u+1)(v-1)-73(u+1)+25(v+1)-35=0$$
$$24u^2-84-25uv=0 \qquad (3)$$

ist, während (2) mit

$$u^2-v^2=7 \qquad (7)$$

äquivalent ist, Nun setzen wie $a=u+v$, $b=u-v$ und damit $u=\frac{a+b}{2}$, $v=\frac{a-b}{2}$. Dann geht (4) über in die äquivalente Gleichung $a\cdot b=7 \quad (5)$, während aus 83) die Gleichung

$$6a^2+12ab+6b^2-84-\frac{25}{4}a^2+\frac{25}{4}b^2=0$$

folgt. Hieraus erhält man in Verbindung mit (5)

$$-\frac{1}{4}a^2+84+\frac{49}{4}b^2-84=0 \qquad ; \qquad a^2=49b^2 \qquad (6)$$

Nun haben nach (5) a und b dasselbe Vorzeichen, und darum folgt aus (6) $a=7b$ und hieraus $a^2=7ab=49 \quad (7)$. Es kommen also höchstens $(a;b)=(7;1)$ und $(a;b)=(-7;-1)$ als Lösungen von (7) und (5) in Frage.
Wegen $x=u+1=\frac{a+b}{2}+1$, $y=v-1=\frac{a-b}{2}-1$ können daher höchstens mit $(x;y)=(5;2)$ und $(x;y)=(-3;-4)$ die Gleichungen (1) und (2) erfüllt werden. Die Probe bestätigt die gefundenen Lösungen.

Aufgabe 191243:
Man ermittle alle diejenigen Tripel (x,y,z) reeller Zahlen, für die

$$2x+x^2y=y \qquad ; \qquad 2y+y^2z=z \qquad ; \qquad 2z+z^2x=x$$

gilt. Dabei sind x,y und z durch Ausdrücke anzugeben, die aus gegebenen reellen Zahlen durch wiederholte Anwendung von Operationen $+$, $-$, $\cdot$, $:$, von reellwertigen Potenzfunktionen, Exponentialfunktionen, trigonometrischen Funktionen oder von deren reellwertigen Umkehrfunktionen gebildet sind.

Lösung von weird:
Betrachten wir etwa die letzte Gleichung $2z+z^2x=x$, so kann man auch in der Form $2z=x(1-z^2)$ schreiben, wobei hier $1-z^2\neq 0$ ist, da $1-z^2=0$ sofort auf den Widerspruch $\pm 2=0$ führen würde. Nach zyklischer Vertauschung der Variablen x,y,z, gegen welche unser Gleichungssystem ja ersichtlich invariant ist, ergeben sich daraus sofort die drei weiteren Gleichungen

$$x=\frac{2z}{1-z^2}, \quad y=\frac{2x}{1-x^2}, \quad z=\frac{2y}{1-y^2} \qquad (*)$$

welche von ihrer Form her sofort an die Formel

$$\tan(2\varphi)=\frac{2\tan\varphi}{1-\tan^2\varphi}$$

aus der Trigonometrie erinnern. Es ist daher der Ansatz

$$x=\tan\alpha, \quad y=\tan\beta, \quad z=\tan\gamma \quad (\alpha,\beta,\gamma\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}))$$

sehr naheliegend, womit sich dann (*) auch einfach schreiben lässt als

$$\alpha\equiv 2\gamma \pmod{\pi}, \quad \beta\equiv 2\alpha \pmod{\pi}, \quad \gamma\equiv 2\beta \pmod{\pi} \qquad (**)$$

Einsetzen führt dann auf

$$7\alpha = 8\alpha - \alpha \equiv 4\beta - \alpha \equiv 2\gamma - \alpha \equiv 0 \pmod{\pi}$$

d. h., im Intervall $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ hat α die insgesamt 7 Lösungen

$$\alpha \in \{0, \pm \frac{\pi}{7}, \pm 2\frac{\pi}{7}, \pm 3\frac{\pi}{7}\}$$

womit wir in Verbindung mit (**) nun auch die vollständige Lösung des gegebenen Gleichungssystems leicht angeben können:

$$x = \tan\alpha, \quad y = \tan(2\alpha), \quad z = \tan(4\alpha) \quad (\alpha \in \{0, \pm \frac{\pi}{7}, \pm 2\frac{\pi}{7}, \pm 3\frac{\pi}{7}\})$$

Aufgabe 221242:
Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen a, zu denen es nichtnegative reelle Zahlen x_1, x_2, x_3, x_4 gibt, die die folgenden Gleichungen (1), (2), (3), (4) erfüllen:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \qquad (1) \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= a \qquad (2) \\ x_1 + 2^2x_2 + 3^2x_3 + 4^2x_4 &= a^2 \qquad (3) \\ x_1 + 2^3x_2 + 3^3x_3 + 4^3x_4 &= a^3 \qquad (4) \end{aligned}$$

Lösung von weird:
Zunächst geht es darum, das obige lineare Gleichungssystem in x_1,x_2,x_3,x_4 zu lösen. Dafür gibt es hier aufgrund seiner besonderen Form einen netten Trick, den ich am Beispiel der Berechnung von x_1 hier einmal explizit vorführe:

$$\begin{aligned} f_1(a) := (a-2)(a-3)(a-4) = a^3 - 9a^2 + 26a - 24 = \\ = (x_1 + 2^3x_2 + 3^3x_3 + 4^3x_4) - 9(x_1 + 2^2x_2 + 3^2x_3 + 4^2x_4) + 26(x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4) - \\ -24(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = f_1(1)x_1 + f_1(2)x_2 + f_1(3)x_3 + f_1(4)x_4 = f_1(1)x_1 \end{aligned}$$

und damit also

$$x_1 = \frac{1}{f_1(1)}(a-2)(a-3)(a-4) = -\frac{1}{6}(a-2)(a-3)(a-4)$$

In analoger Weise ergeben sich unter Verwendung der polynomialen Ausdrücke

$$f_2(a) := (a-1)(a-3)(a-4), \; f_3(a) := (a-1)(a-2)(a-4), \; f_4(a) := (a-1)(a-2)(a-3)$$

in a die Werte der anderen Variablen zu

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{1}{f_2(2)}(a-1)(a-3)(a-4) = \frac{1}{2}(a-1)(a-3)(a-4) \\ x_3 &= \frac{1}{f_3(3)}(a-1)(a-2)(a-4) = -\frac{1}{2}(a-1)(a-2)(a-4) \\ x_4 &= \frac{1}{f_4(4)}(a-1)(a-2)(a-3) = \frac{1}{6}(a-1)(a-2)(a-3) \end{aligned}$$

Daraus kann man aber durch Einsetzen sofort ersehen, dass für $a \notin \{1,2,3,4\}$ mindestens eine der 4 Variablen negativ ist, während für $a \in \{1,2,3,4\}$ jeweils 3 der Variablen x_1,x_2,x_3,x_4 den Wert 0 annehmen, die vierte aber dann positiv ist, d. h., genau diese vier Werte von a stellen die Lösung der Aufgabe hier dar.

Aufgabe 241244:
Es seien a, b und c positive reelle Zahlen mit $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}$. Man beweise, dass das Gleichungssystem

$$\sqrt{y-a} + \sqrt{z-a} = 1 \qquad (1)$$
$$\sqrt{z-b} + \sqrt{x-b} = 1 \qquad (2)$$
$$\sqrt{x-c} + \sqrt{y-c} = 1 \qquad (3)$$

genau eine Lösung (x, y, z) hat, wobei x, y, z reelle Zahlen sind.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Man wähle in einer Ebene einen Punkt P sowie Punkte K, L, M derart, dass $PK = \sqrt{a}$, $PL = \sqrt{b}$ und $PM = \sqrt{c}$ gilt und dass benachbarte Strecken einen Winkel von 120° bilden.
Legt man durch die Punkte K, L, M Geraden senkrecht zu PK, PL bzw. PM, so entsteht ein gleichseitiges Dreieck. Es sei mit ABC bezeichnet, wobei $K \in BC$, $L \in AC$, $M \in AB$ gelte. Sein Flächeninhalt $J(ABC)$ ist

$$J(ABC) = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin\angle BAC = \frac{1}{2} AB^2 \cdot 60° = \frac{1}{4}\sqrt{3} \cdot AB^2$$

Andererseits ist der Flächeninhalt

$$J(ABC) = \frac{1}{2}\sqrt{a} \cdot BC + \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot AC + \frac{1}{2}\sqrt{c} \cdot AB$$
$$= \frac{1}{2} \cdot AB \cdot (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) = \frac{1}{4}\sqrt{3} \cdot AB$$

Also ist $AB = 1$. Jetzt erkennt man sofort durch Anwendung des Satzes des Pythagoras, dass $x = PA^2$, $y = PB^2$ und $z = PC^2$ dem Gleichungssystem genügen.

Also gibt es mindestens eine Lösung (x,y,z). Sei (x',y',z') ein andere Lösung.
Sei etwa $x' \neq x$ und dabei $x' > x$. Nach Gleichung (2) ist dann $z' < z$ und nach Gleichung (3) $y' < y$. Dann ist jedoch

$$\sqrt{y'-a} + \sqrt{z'-a} < \sqrt{y-a} + \sqrt{z-a} = 1$$

und (x',y',z') erfüllt nicht das Gleichungssystem.

Aufgabe 271242:
Man ermittle alle diejenigen Tripel (x, y, z) reeller Zahlen, die das folgende Gleichungssystem (1), (2), (3) erfüllen:

$$1 \cdot x^3 + 9 \cdot y^2 + 8 \cdot y + 8 = 1988 \qquad (1)$$
$$1 \cdot y^3 + 9 \cdot z^2 + 8 \cdot z + 8 = 1988 \qquad (2)$$
$$1 \cdot z^3 + 9 \cdot x^2 + 8 \cdot x + 8 = 1988 \qquad (3)$$

Lösung von MontyPythagoras:
Es ist offensichtlich, dass die drei Gleichungen durch zyklische Vertauschung von x, y und z ineinander übergehen. Daher wäre ein Tripel mit $x = y = z$ automatisch eine Lösung, wenn x die Gleichung

$$x^3 + 9x^2 + 8x = 1980 \qquad (4)$$

erfüllt. Eine ebenso offensichtliche Lösung ist $x = 10$, so dass schon einmal das Tripel $(x,y,z) = (10,10,10)$ eine Lösung darstellt. Wir werden nun zeigen, dass es weitere Lösungen in $\mathbb{R}$ nicht geben kann. Wir führen eine Polynomdivision von Gleichung (4) durch $x - 10$ durch, und erhalten

$$x^2 + 19x + 198 = 0$$

Diese quadratische Gleichung hat in $\mathbb{R}$ keine Lösungen. Weitere Lösungstripel erfordern somit, dass die drei Variablen paarweise verschieden sind. Wir betrachten nun die zwei Funktionen

$$f(x) = x^3 \tag{5}$$

und

$$g(y) = 9y^2 + 8y + 8 \tag{6}$$

Letztere ist eine nach oben offene Parabel, das Minimum liegt bei $y = -\frac{4}{9}$. (Jede Schlussfolgerung bezüglich der Eigenschaft einer Variablen gilt aufgrund der zyklischen Vertauschbarkeit immer für alle drei Variablen gleichermaßen.) Sowohl (6) für $y \geq -\frac{4}{9}$ als auch (5) generell sind monoton steigend.

Wir nehmen nun zunächst an, dass alle drei Variablen $x,y,z \geq -\frac{4}{9}$ sind. In Gleichung (1) bedeutet das wegen der Monotonie ausgehend vom Tripel (10,10,10), wenn man x größer als 10 ansetzt, dass y kleiner als 10 sein muss. Wenn y aber kleiner als 10 ist, dann hat das in Gleichung (2) zur Folge, dass z größer als 10 werden muss. Damit sind sowohl x als auch z jeweils größer als 10, was Gleichung (3) unerfüllbar macht und somit zu einem Widerspruch führt. Gleiches gilt für die entgegengesetzte Richtung. Wir untersuchen daher als letztes, ob eine Lösung möglich ist, wenn (mindestens) eine der Variablen kleiner als $-\frac{4}{9}$ wäre. Es ist durch Nullsetzen der ersten Ableitung von (6) und Einsetzen sehr einfach, zu zeigen, dass

$$9y^2 + 8y + 8 \geq \frac{56}{9}$$

ist. Verwendet man das in Gleichung (1), so folgt:

$$9y^2 + 8y + 8 = 1988 - x^3 \geq \frac{56}{9}$$

$$x \leq \sqrt[3]{1988 - \frac{56}{9}} = a$$

Es gibt also eine obere Schranke

$$(7) \qquad x,y,z \leq a$$

mit $a = \sqrt[3]{1981\frac{7}{9}} \approx 12{,}56$. Nehmen wir nun an, dass $x \leq -\frac{4}{9}$ sei. Aus Gleichung (1) folgt:

$$(8) \qquad 9y^2 + 8y = 1980 - x^3 \geq 1980 + \left(\frac{4}{9}\right)^3$$

Da $y = a$ diese Ungleichung nicht erfüllt, müsste entweder im Widerspruch zu (7) $y > a$ gelten, oder es muss kleiner sein als die andere, negative Lösung der quadratischen Gleichung. Das heißt:

$$y \leq -\frac{4}{9} - \sqrt{\frac{16}{81} + \frac{1980 - x^3}{9}}$$

Wir behaupten, dass

$$(9) \qquad -\frac{4}{9} - \sqrt{\frac{16}{81} + \frac{1980 - x^3}{9}} < x \quad \forall \quad x \leq -\frac{4}{9}$$

gilt. Mit dieser Behauptung können wir folgern, dass

$$y < x$$

ist, woraus aber wegen Gleichung (2) $z < y$ folgt, und das wiederum führt wegen Gleichung (3) zu $x < z$, was einen widersprüchlichen Zirkelschluss $x < x$ darstellt. Es genügt daher, zu zeigen, dass (9) gilt, um zu beweisen, dass es keine weitere Lösungen geben kann:

$$-\left(x + \frac{4}{9}\right) < \sqrt{\frac{16}{81} + \frac{1980 - x^3}{9}}$$

Beide Seiten sind größer als null, daher dürfen wir quadrieren:

$$\left(x + \frac{4}{9}\right)^2 < \frac{16}{81} + \frac{1980 - x^3}{9}$$

$$x^2 + \frac{8}{9}x + \frac{x^3}{9} < \frac{1980}{9}$$
$$x^3 + 9x^2 + 8x - 1980 < 0$$
$$(x-10)(x^2 + 19x + 198) < 0$$

Da $(x-10) < 0$, bleibt zu zeigen, dass

$$x^2 + 19x + 198 > 0$$

was tatsächlich der Fall ist für alle x, wie schon oben gezeigt. q. e. d. Das einzige Lösungstripel ist somit $(x,y,z) = (10,10,10)$.

Aufgabe 281241:
Man ermittle alle reellen Lösungen (x, y, z) des Gleichungssystems

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$
$$x + 2y + 3z = \sqrt{14}$$

Lösung von Kornkreis:
Mit der Ungleichung von Cauchy-Schwarz ist

$$x + 2y + 3z = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \leq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\sqrt{14},$$

wobei Gleichheit genau dann eintritt, wenn beide Vektoren parallel sind. Wegen $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ tritt in der Tat Gleichheit ein, sodass ein $a > 0$ existiert mit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Eingesetzt in die zweite Gleichung folgt $a + 4a + 9a = \sqrt{14}$, insgesamt muss also $x = a$, $y = 2a$, $z = 3a$ mit $a = \sqrt{14}/14$ gelten. Eine Probe (Einsetzen ins Gleichungssystem) ergibt, dass dies tatsächlich eine Lösung ist.

Aufgabe 301241:
Man ermittle zu jedem Tripel (a, b, c) positiver reeller Zahlen a, b, c alle diejenigen Tripel (x, y, z) reeller Zahlen, die das folgende Gleichungssystem (1), (2), (3) erfüllen:

$$\begin{array}{ll} (1) & x^2 - (y-z)^2 = a \\ (2) & y^2 - (z-x)^2 = b \\ (3) & z^2 - (x-y)^2 = c \end{array}$$

Lösung von weird:
Aus

$$(x+y-z)^2(x-y+z)^2(-x+y+z)^2 = = ((x+y-z)(x-y+z))((y+z-x)(y-z+x))((z+x-y)(z-x+y)) = abc$$

erhält man zunächst

$$(x+y-z)(x-y+z)(-x+y+z) = \pm\sqrt{abc}$$

und indem man darin

$$a = (x+y-z)(x-y+z),\ b = (y+z-x)(y-z+x),\ c = (z+x-y)(z-x+y)$$

jeweils substituiert das neue Gleichungssystem

$$(4) \qquad -x+y+z = \pm\sqrt{\frac{bc}{a}}$$

$$(5) \quad x-y+z = \pm\sqrt{\frac{ac}{b}}$$

$$(6) \quad x+y-z = \pm\sqrt{\frac{ab}{c}}$$

Unter der Prämisse, dass auf der rechten Seite von (4),(5),(6) jeweils das gleiche Vorzeichen gewählt wird, was wir nun voraussetzen wollen, kann man daraus das ursprüngliche Gleichungssystem ersichtlich sofort wieder zurückgewinnen, d. h., es ist zu diesem äquivalent.

Das Gleichungssystem (4),(5),(6) ist aber nun linear und damit problemlos lösbar, z. B. indem man hier je zwei der drei Gleichungen addiert. Damit erhält man dann die 2 Lösungen

$$x = \pm\sqrt{\frac{a}{bc}}\,\frac{b+c}{2},\ y = \pm\sqrt{\frac{b}{ac}}\,\frac{a+c}{2},\ x = \pm\sqrt{\frac{c}{ab}}\,\frac{a+b}{2}$$

Aufgabe 321244:
Man beweise: Wenn reelle Zahlen a, b, c das Gleichungssystem

$$a+b+c = 2 \qquad ; \qquad ab+ac+bc = 1$$

erfüllen, so gilt

$$0 \leq a \leq \frac{4}{3}; \qquad 0 \leq b \leq \frac{4}{3}; \qquad 0 \leq c \leq \frac{4}{3}$$

Lösung von MontyPythagoras:
Aufgrund der Symmetrie zwischen a, b und c reicht es, die Extremwerte nur für eine der drei Variablen zu berechnen. Sie gelten dann für die anderen beiden Variablen in gleicher Weise. Es ist

$$c = 2-(a+b)$$

Also:

$$ab + (a+b)\,(2-(a+b)) = 1$$

$$ab + 2a + 2b - a^2 - 2ab - b^2 = 1$$

$$(1) \qquad 2a + 2b - a^2 - ab - b^2 = 1$$

(Dies ist eine Kegelschnittgleichung, konkret eine Ellipse, wenn man a und b als zwei voneinander abhängige Größen betrachtet und in einem Koordinatensystem darstellt). Die Extremwerte für a erhält man, indem man die Gleichung (1) implizit nach b ableitet und gleich null setzt:

$$2 - a - 2b = 0$$

$$b = 1 - \tfrac{1}{2}a$$

Dies wieder in (1) eingesetzt:

$$2a + 2 - a - a^2 - a(1 - \tfrac{1}{2}a) - 1 + a - \tfrac{1}{4}a^2 = 1$$

$$a - \tfrac{3}{4}a^2 = 0$$

Daraus folgt offenkundig, dass die beiden Extremwerte $a = 0$ und $a = \frac{4}{3}$ sind, so dass gilt:

$$0 \leq a,b,c \leq \tfrac{4}{3}$$

q. e. d.

Alternativ-Lösung von Nuramon:
Nach Voraussetzung ist

$$b + c = 2 - a$$

und

$$bc = 1 - a(b + c) = 1 - a(2 - a) = 1 - 2a + a^2 = (a - 1)^2.$$

Nach Vieta hat das quadratische Polynom $x^2 - (b + c)x + bc$ die Nullstellen $b,c \in \mathbb{R}$. Daher ist die Diskriminante dieses Polynom nichtnegativ, d. h. es gilt

$$\begin{aligned} 0 &\leq (b + c)^2 - 4bc \\ &= (2 - a)^2 - 4(a - 1)^2 \\ &= (2 - a - 2(a - 1))(2 - a + 2(a - 1)) \\ &= a(4 - 3a) \\ &= -\frac{1}{3}a\left(a - \frac{4}{3}\right). \end{aligned}$$

Also folgt, dass $0 \leq a \leq \frac{4}{3}$. Die Abschätzungen für b und c folgen analog.

Zweite Alternativ-Lösung von weird:
Zunächst folgt aus den gegebenen Gleichungen

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + ac + bc) = 4 - 2 = 2$$

sowie

$$2ab = (a + b)^2 - (a^2 + b^2) = (2 - c)^2 - (2 - c^2) = 2(c^2 - 2c + 1) = 2(c - 1)^2$$

insgesamt also

$$ab = (c - 1)^2 \quad \text{und analog} \quad ac = (b - 1)^2,\ bc = (a - 1)^2$$

Da damit a,b,c nicht ein unterschiedliches Vorzeichen haben können und andererseits auch $a+b+c = 2 > 0$ gilt, folgt daraus zunächst einmal die Abschätzung

$$a,b,c \geq 0$$

von a,b,c nach unten. Die entsprechende Abschätzung nach oben ergibt sich schließlich aus

$$0 \leq (a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab = (2 - c)^2 - 4(c - 1)^2 = -3c^2 + 4c = c(4 - 3c)$$

Da wir nun schon wissen, dass $c \geq 0$ ist, gilt damit auch $4 - 3c \geq 0$, also $c \leq \frac{4}{3}$, und somit insgesamt und zusammen mit den anlogen Beziehungen für a und b tatsächlich

$$a,b,c \in \left[0, \frac{4}{3}\right]$$

wie behauptet.

VIII.IV Gruppen

I Runde 3

Aufgabe 111236A:
Eine Menge M von Elementen $u, v, w, ...$ heißt eine Gruppe bezüglich einer Operation A, wenn die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:
a) Jedem geordneten Paar (u, v) von Elementen aus M ist vermöge der Operation A genau ein Element w aus M zugeordnet (man schreibt $u \circ v = w$).
b) Die Operation A ist assoziativ, d. h., für alle Elemente u, v, w aus M gilt: $(u \circ v) \circ w = u \circ (v \circ w)$.
c) Zu je zwei Elementen u und v aus M existiert mindestens ein Element x aus M, so dass $u \circ x = v$ gilt, und mindestens ein Element y aus M, so dass $y \circ u = v$ gilt.

Es sei nun K die Menge aller geordneten Paare (a, b) reeller Zahlen a und b, für die $a^2 + b^2 = 1$ gilt. Ferner sei in K eine Operation A wie folgt definiert:

$$(a, b) \circ (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

Man beweise, dass K eine Gruppe bezüglich A ist.

Lösung von weird:
Für die Lösung dieser Aufgabe erweist es sich als zweckmäßig, die Elemente von K in der Form

$$(\cos\varphi, \sin\varphi) \quad (\varphi \in [0,2\pi))$$

anzuschreiben, wobei hier für jedes $(a,b) \in K$ in der umkehrbar eindeutigen Zuordnung $(a,b) \leftrightarrow \varphi$ der Winkel $\varphi \in [0,2\pi)$ jeweils eindeutig bestimmt ist. Die Verknüpfung $\circ$ ist für $\varphi,\psi \in [0,2\pi)$ gegeben durch

$$(\cos\varphi, \sin\varphi) \circ (\cos\psi, \sin\psi) = (\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi, \cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi)$$

wofür man bekanntlich auch einfacher

$$(\cos\varphi, \sin\varphi) \circ (\cos\psi, \sin\psi) = (\cos(\varphi + \psi), \sin(\varphi + \psi)))$$

schreiben kann. Insbesondere gilt somit für $\alpha,\beta,\gamma \in [0,2\pi)$

$$((\cos\alpha, \sin\alpha) \circ (\cos\beta, \sin\beta)) \circ (\cos\gamma, \sin\gamma) = (\cos((\alpha + \beta) + \gamma), \sin((\alpha + \beta) + \gamma))$$

was also dann ident ist mit

$$(\cos\alpha, \sin\alpha) \circ ((\cos\beta, \sin\beta) \circ (\cos\gamma, \sin\gamma)) = (\cos(\alpha + (\beta + \gamma)), \sin(\alpha + (\beta + \gamma)))$$

und somit die Assoziativität von $\circ$ beweist.
Für den Punkt c) genügt es wegen der Kommutativät von $\circ$ nur die Lösbarkeit der ersten Gleichung zu zeigen. Diese folgt aber für $\mu, \nu \in [0,2\pi)$ sofort aus

$$(\cos\mu, \sin\mu) \circ (\cos(\nu - \mu), \sin(\nu - \mu)) = (\cos\nu, \sin\nu)$$

Alternativ-Lösung von cyrix:
Wir identifizieren dass Paar (a,b) reeller Zahlen mit der komplexen Zahl $a + ib$. Dann ist die beschriebene Verknüpfung $\circ$ zweier Paare reeller Zahlen genau die Multiplikation der entsprechenden komplexen Zahlen und K genau die Menge der komplexen Zahlen vom Betrag 1. Diese bilden mit der Multiplikation eine Gruppe:

Für zwei komplexe Zahlen u und v mit $|u| = |v| = 1$ gilt $|u \cdot v| = |u| \cdot |v| = 1 \cdot 1 = 1$.

Die Multiplikation komplexer Zahlen ist assoziativ und kommutativ.

Für zwei komplexe Zahlen u und v mit $|u| = |v| = 1$ seien die komplexen Zahlen x und y definiert durch $x := y := v \cdot \bar{u}$, wobei $\bar{u}$ die zu u komplex konjugierte Zahl sei. Dann gilt wegen $|\bar{u}| = |u| = 1$ sowie $\bar{u} \cdot u = 1^2$ auch $|x| = |y| = 1$ und $u \cdot x = y \cdot u = v \cdot \bar{u} \cdot u = v \cdot 1^2 = v$.

Also bildet auch K bezüglich der Verknüpfung $\circ$ eine Gruppe, $\square$.

Aufgabe 131236A:
Eine Menge G von Elementen $u, v, w, ...$ heißt genau dann eine Gruppe, wenn die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:
(1) In G ist eine Operation definiert, d. h., jedem Paar (u,v) von Elementen u und v aus G ist eindeutig ein Element w aus G zugeordnet, wofür man $u \circ v = w$ schreibt.
(2) Diese Operation ist assoziativ, d. h., für alle Elemente u, v, w aus G gilt $(u \circ v) \circ w = u \circ (v \circ w)$.
(3) Zu jedem Paar von Elementen u und v aus G existiert mindestens ein Element x aus G, so dass $u \circ x = v$ gilt, und mindestens ein Element y aus G, so dass $y \circ u = v$ gilt.

Es sei P die Menge aller reeller Zahlen. Für je zwei Elemente a, b aus P ist durch $a \circ b = a\sqrt{b^2+1} + b\sqrt{a^2+1}$ eine Operation definiert.
Man beweise, dass die Menge P mit dieser Operation eine Gruppe ist.

Lösung von weird:
Da die oben definierte Operation $\circ$ offenbar die Gruppeneigenschaft erfüllt, wenden wir uns nun dem Nachweis von (2) zu, indem wir $(u \circ v) \circ w$ für drei beliebige Elemente $u,v,w \in P$ explizit berechnen. Zunächst ist

$$(u \circ v) \circ w = (u\sqrt{v^2+1} + v\sqrt{u^2+1})\sqrt{w^2+1} + w\sqrt{(u\sqrt{v^2+1} + v\sqrt{u^2+1})^2+1}$$

und indem man hier die Identität

$$\sqrt{(u\sqrt{v^2+1} + v\sqrt{u^2+1})^2+1} = \sqrt{(u^2+1)(v^2+1)} + uv$$

verwendet, welche man etwa durch Quadrieren und Ausmultiplizieren leicht bestätigen kann, folgt daraus weiter

$$(u \circ v) \circ w = u\sqrt{(v^2+1)(w^2+1)} + v\sqrt{(u^2+1)(w^2+1)} + w\sqrt{(u^2+1)(v^2+1)} + uvw \quad (*)$$

Hier fällt sofort auf, dass der rechtsstehende Ausdruck in (*) gegenüber einer beliebigen Vertauschung von u,v,w invariant ist, sodass wir also auch für $(v \circ w) \circ u$ das gleiche Ergebnis erhalten würden. Da aber $\circ$ offensichtlich kommutativ ist, folgt daraus schließlich

$$(u \circ v) \circ w = (v \circ w) \circ u = u \circ (v \circ w)$$

also die zu beweisende Assoziativität.
Für den Nachweis von (3) zeigen wir schließlich wegen der Kommutativität von $\circ$ nur die Lösbarkeit der Gleichung $u \circ x = v$, indem wir einfach eine Lösung, nämlich

$$x = (-u) \circ v$$

explizit angeben, was äquivalent ist zum Bestehen der Gleichung

$$u \circ (-u) \circ v = v$$

ist, welche man mithilfe von (*) sofort wie folgt nachrechnen kann

$$u\sqrt{((-u)^2+1)(v^2+1)} + (-u)\sqrt{(u^2+1)(v^2+1)} + v\sqrt{(u^2+1)^2} + u(-u)v = v$$

womit dann auch (3) bewiesen ist.

Aufgabe 151232:
Ist M eine Menge von reellen Zahlen, so soll eine reelle Zahl $e \neq 0$ aus dieser Menge als eine „Einheit von M“ bezeichnet werden, wenn für jedes Element x aus M die Beziehung $\frac{x}{e} \in M$ gilt.
(So besitzt z. B. die Menge aller ganzen Zahlen nur die Einheiten +1 und -1, während z. B. in der Menge aller rationalen Zahlen jedes von 0 verschiedene Element eine Einheit ist.)
Es sei nun M die Menge aller Zahlen $a + b\sqrt{2}$, wobei a und b beliebige ganze Zahlen sind. In dieser Menge sind z. B. +1 und -1 Einheiten.
a) Man gebe noch 5 weitere Einheiten von M an.
b) Man beweise, dass M unendlich viele verschiedene Einheiten enthält.

Lösung von Nuramon:
Man sieht per Induktion leicht: Ist e eine Einheit von M, dann sind auch alle Potenzen e^n für $n \in \mathbb{N}$ Einheiten von M. Daher genügt es eine einzige Einheit $e \neq \pm 1$ anzugeben um zu zeigen, dass es unendlich viele verschiedene gibt.
Wir zeigen, dass $3+2\sqrt{2}$ eine Einheit von M ist. Für $a+b\sqrt{2} \in M$ gilt nämlich:

$$\frac{a+b\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}} = \frac{(a+b\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})}{3^2-(2\sqrt{2})^2} = (3a-4b)+(3b-2a)\sqrt{2} \in M.$$

Aufgabe 161236B:
Es sei M eine Menge, für die folgendes gilt:
(1) Jedem geordneten Paar (a,b) von Elementen aus M ist genau ein Element aus M zugeordnet, das mit $a \circ b$ bezeichnet sei.
(2) Zu jedem $b \in M$ und jedem $c \in M$ gibt es genau ein $x \in M$ so, dass $x \circ b = c$ gilt; dieses Element x werde mit $x = \frac{c}{b}$ bezeichnet.

Unter diesen Voraussetzungen beweise man folgende Aussage:
Wenn für alle $a \in M, b \in M, c \in M, d \in M$ die Beziehung $(a \circ b) \circ (c \circ d) = (a \circ c) \circ (b \circ d)$ g ilt, dann gilt für alle $p \in M, q \in M, r \in M, s \in M$ die Beziehung

$$\frac{p}{q} : \frac{r}{s} = \frac{p}{r} : \frac{q}{s}$$

Lösung von svrc:
Zunächst sammeln wir nochmal alle unsere Voraussetzungen:

(1) Jedem geordneten Paar (a,b) von Elementen aus M ist genau ein Element aus M zugeordnet, das mit $a \circ b$ bezeichnet sei;
(2) Zu jedem $b \in M$ und jedem $c \in M$ gibt es ein genau ein $x \in M$ derart, dass $x \circ b = c$ gilt. Dieses Element x werde mit $x = \dfrac{c}{b}$ bezeichnet;
(3) Für alle $a \in M, b \in M, c \in M, d \in M$ gilt die Beziehung

$$(a \circ b) \cdot (c \circ d) = (a \circ c) \circ (b \circ d)\,.$$

Es gilt für beliebige $p \in M$, $q \in M$, $r \in M$, $s \in M$

$$\begin{aligned} p &\overset{(2)}{=} \left(\frac{p}{q}\right) \circ q \overset{(2)}{=} \left(\frac{\left(\frac{p}{q}\right)}{\left(\frac{r}{s}\right)} \circ \left(\frac{r}{s}\right)\right) \circ q \overset{(2)}{=} \left(\frac{\left(\frac{p}{q}\right)}{\left(\frac{r}{s}\right)} \circ \left(\frac{r}{s}\right)\right) \circ \left(\left(\frac{q}{s}\right) \circ s\right) \\ &\overset{(3)}{=} \left(\frac{\left(\frac{p}{q}\right)}{\left(\frac{r}{s}\right)} \circ \left(\frac{q}{s}\right)\right) \circ \left(\left(\frac{r}{s}\right) \circ s\right) \overset{(2)}{=} \left(\frac{\left(\frac{p}{q}\right)}{\left(\frac{r}{s}\right)} \circ \left(\frac{q}{s}\right)\right) \circ r. \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung (2) folgt somit

$$\left(\frac{p}{r}\right) = \left(\frac{\left(\frac{p}{q}\right)}{\left(\frac{r}{s}\right)} \circ \left(\frac{q}{s}\right)\right).$$

Ein letztes Mal folgt mit Voraussetzung (2) somit

$$\frac{\left(\frac{p}{r}\right)}{\left(\frac{q}{s}\right)} = \frac{\left(\frac{p}{q}\right)}{\left(\frac{r}{s}\right)}$$

und die Behauptung.

Aufgabe 081243:
Eine Menge M von Elementen u, v, w heißt eine Halbgruppe, wenn in ihr eine Operation definiert ist, die jedem geordneten Paar (u, v) von Elementen aus M eindeutig ein Element w aus M zuordnet (man schreibt $u \otimes v = w$) und wenn diese algebraische Operation assoziativ ist, d. h. wenn für alle Elemente u, v, w aus M gilt:

$$(u \otimes v) \otimes w = u \otimes (v \otimes w).$$

Es sei nun c eine positive reelle Zahl, und es sei M die Menge aller nichtnegativen reellen Zahlen, die kleiner als c sind. Für je zwei Zahlen u, v aus M werde definiert:

$$u \otimes v = \frac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}}$$

Man untersuche
a) ob M eine Halbgruppe ist;
b) ob diese Halbgruppe regulär ist, d. h. ob aus $u \otimes v_1 = u \otimes v_2$ stets $v_1 = v_2$ und aus $v_1 \otimes u = v_2 \otimes u$ ebenfalls $v_1 = v_2$ folgt.

Lösung von cyrix:
a) Zum Beweis der Abgeschlossenheit seien $u,v \in M$, also $0 \leq u < c$ und $0 \leq v < c$. Dann ist offensichtlich auch $u \otimes v$ als Quotient einer nichtnegativen reellen Zahl $u+v$ und einer positiven reellen Zahl $1+\frac{uv}{c^2} \geq 1+\frac{0 \cdot 0}{c^2} = 1 > 0$ selbst nichtnegativ. Weiterhin ist

$$u \otimes v < c \Leftrightarrow \frac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}} < c \Leftrightarrow cu + cv < c^2 + uv \Leftrightarrow 0 < c^2 - cu - cv + uv = (c-u)(c-v)$$

was offensichtlich wegen $u < c$ und $v < c$ wahr ist.
Für den Beweis der Assoziativität berechnen wir beide Terme:

$$(u \otimes v) \otimes w = \frac{u+v}{1+\frac{uv}{c}^2} \otimes w = \left(c^2 \cdot \frac{u+v}{c^2+uv}\right) \otimes w =$$

$$= c^2 \cdot \frac{c^2 \frac{u+v}{c^2+uv} + w}{c^2 + c^2 \frac{u+v}{c^2+uv} \cdot w} = \frac{\frac{c^2(u+v)+c^2 w + uvw}{c^2+uv}}{1+\frac{(u+v)w}{c^2+uv}} == \frac{c^2(u+v+w)+uvw}{c^2+uv+uw+vw}$$

und

$$u \otimes (v \otimes w) = u \otimes \left(c^2 \cdot \frac{v+w}{c^2+vw}\right) =$$

$$= c^2 \cdot \frac{u + c^2 \cdot \frac{v+w}{c^2+vw}}{c^2 + u \cdot c^2 \cdot \frac{v+w}{c^2+vw}} = \frac{\frac{c^2 \cdot u + uvw + c^2 \cdot (v+w)}{c^2+vw}}{1+\frac{u(v+w)}{c^2+vw}} = \frac{c^2(u+v+w)+uvw}{c^2+vw+uv+uw}$$

sodass offenbar $(u \otimes v) \otimes w = u \otimes (v \otimes w)$ gilt. Damit ist M bezüglich der Verknüpfung $\otimes$ eine Halbgruppe.

b) Es ist

$$u \otimes v_1 = u \otimes v_2 \Leftrightarrow c^2 \cdot \frac{u+v_1}{c^2+uv_1} = c^2 \cdot \frac{u+v_1}{c^2+uv_1} \Leftrightarrow (u+v_1)(c^2+uv_2) = (u+v_2)(c^2+uv_1)$$

$$\Leftrightarrow uc^2 + u^2 v_2 + v_1 c^2 + uv_1 v_2 = uc^2 + u^2 v_1 + v_2 c^2 + uv_1 v_2$$

$$\Leftrightarrow u^2(v_2 - v_1) - (v_2 - v_1)c^2 = (v_2 - v_1)(u^2 - c^2) = 0$$

Da aber $u < c$ gilt, ist $u^2 - c^2 \neq 0$, also $u \otimes v_1 = u \otimes v_2 \Leftrightarrow v_2 - v_1 = 0 \Leftrightarrow v_1 = v_2$.
Weiterhin ist $\otimes$ kommutativ, da für alle $uv \in M$ die Beziehung

$$u \otimes v = \frac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}} = \frac{v+u}{1+\frac{vu}{c^2}} = v \otimes u$$

gilt.
Insbesondere folgt also aus $v_1 \otimes u = v_2 \otimes u$ sofort durch Ausnutzung der Kommutativität auf beiden Seiten der Gleichung $u \otimes v_1 = u \otimes v_2$, und daraus – wie eben gezeigt – wieder $v_1 = v_2$.
Damit ist die (kommutative) Halbgruppe $(M,\otimes)$ regulär.

Aufgabe 101246A:
Definition: Eine Menge M von Elementen $u, v, w, ...$ heißt genau dann eine Gruppe, bezüglich der algebraischen Operation A, wenn die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:
a) Jedem geordneten Paar $[u, v]$ von Elementen aus M ist vermöge der Operation A ein Element w aus M zugeordnet (man schreibt $u \circ v = w$).
b) Die algebraische Operation A ist assoziativ, d. h., für alle Elemente u, v, w aus M gilt: $(u \circ v) \circ w = u \circ (v \circ w)$.
c) Zu je zwei Elementen u und v aus M existiert mindestens ein Element x aus M, so dass $u \circ x = v$ gilt, und mindestens ein Element y aus M, so dass $y \circ u = v$ gilt.

Es sei nun P die Menge aller Polynome ersten Grades $f(x) = a_0 + a_1x$, wobei a_0, a_1 rationale Zahlen sind und $a_1 \neq 0$ gilt.
Ferner sei in P eine algebraische Operation A wie folgt definiert:
Sind $f(x)$ und $g(x)$ Polynome aus P, so ist $f(x) \circ g(x) = g[f(x)]$.
Es ist zu entscheiden, ob P eine Gruppe bezüglich A ist.

Lösung von StrgAltEntf:
Bei P mit der Operation A handelt es sich um eine Gruppe. Zu zeigen sind die Eigenschaften a, b und c.

a) Seien $f(x) = a_0 + a_1x$ und $g(x) = b_0 + b_1x$ Elemente von P. Dann ist

$$f(x) \circ g(x) = g(f(x)) = b_0 + b_1(a_0 + a_1x) = b_0 + b_1a_0 + b_1a_1x = c_0 + c_1x$$

mit $c_0 = b_0 + b_1a_0$ und $c_1 = b_1a_1$. Da $a_1,b_1 \neq 0$, ist auch $c_1 \neq 0$ und somit $f(x) \circ g(x) = c_0 + c_1x$ ein Element von P.

b) Seien $f(x), g(x), h(x) \in P$. Dann ist

$$(f(x) \circ g(x)) \circ h(x) = g(f(x)) \circ h(x) = h(g(f(x))) = f(x) \circ h(g(x)) = f(x) \circ (g(x) \circ h(x))$$

c) Seien $f(x) = a_0 + a_1x$ und $g(x) = b_0 + b_1x$ Elemente aus P. Definiere dann

$$h(x) = b_0 - \frac{a_0b_1}{a_1} + \frac{b_1}{a_1}x$$

Da $a_1 \neq 0$, ist $h(x)$ ein Element aus P, und es ist

$$f(x) \circ h(x) = h(f(x)) = b_0 - \frac{a_0b_1}{a_1} + \frac{b_1}{a_1}(a_0 + a_1x) = b_0 + b_1x = g(x)$$

Sei weiterhin $k(x) = \frac{b_0-a_0}{a_1} + \frac{b_1}{a_1}x$. $k(x)$ ist ebenfalls ein Element aus P, und es ist

$$k(x) \circ f(x) = f(k(x)) = a_0 + a_1(\frac{b_0 - a_0}{a_1} + \frac{b_1}{a_1}x) = b_0 + b_1x = g(x)$$

Aufgabe 131246A:
Erklärungen: Auf einem Schaltbrett sei eine Anzahl n von Knöpfen $K_1, \ldots, K_n$ zum Ein- und Ausschalten von Stromkreisen $S_1, \ldots, S_n$ angebracht.

Für jeden Knopf K_i werde durch einmaliges Drücken der Stromkreis S_i vom ausgeschalteten Zustand in den eingeschalteten Zustand bzw. umgekehrt vom eingeschalteten in den ausgeschalteten Zustand überführt, unabhängig von den anderen Stromkreisen.
Unter einem „Schaltbild“ B sei die gleichzeitige Angabe der Zustände aller Stromkreise S_i verstanden; z. B. stellt die Ausgangsstellung, bei der alle Stromkreise S_i ausgeschaltet sind, ein Schaltbild dar, das mit B_0 bezeichnet sei.
Sind B und B' Schaltbilder, so werde unter der „Summe“ $B \oplus B'$ dasjenige Schaltbild verstanden, das nach folgender Vorschrift entsteht:

Es sei B dadurch gekennzeichnet, dass genau die Stromkreise $S_{n_1}, \ldots, S_{n_p}$ eingeschaltet sind; es sei B' dadurch gekennzeichnet, dass genau die Stromkreise $S_{k_1}, \ldots, S_{k_p}$ eingeschaltet sind.
Dann beginne man mit dem Schaltbild B_0 und
(a) drücke die Knöpfe $K_{n_1}, \ldots, K_{n_p}$, jeden genau einmal. Anschließend (ohne nach B_0 zurückzugehen!)
(b) drücke man genau die Knöpfe $K_{k_1}, \ldots, K_{k_q}$, jeden genau einmal.

Unter dem „Produkt“ $B \otimes B'$ werde dasjenige Schaltbild verstanden, das nach folgender Vorschrift entsteht:
Man beginne mit dem Schaltbild B_0, verfahre nach den Vorschriften (a), (b) und anschließend
(c) drücke man genau diejenigen Knöpfe, die bei mindestens einem der beiden Teilprozesse (a), (b) bereits gedrückt worden waren, jedoch noch genau einmal.
Man beweise die folgenden beiden Aussagen:
(1) Sind B, B', B'' Schaltbilder, so gilt

$$(B \oplus B') \otimes B'' = (B \otimes B'') \oplus (B' \otimes B'')$$

(2) Sind B, B' Schaltbilder, so gibt es genau ein Schaltbild B^* mit der Eigenschaft $B^* \oplus B' = B$, nämlich $B^* = B \oplus B'$.

Lösung von cyrix:
zu (1): Offenbar sind die Schaltvorgänge für alle Stromkreise jeweils unabhängig voneinander, sodass es genügt, sich auf einen einzelnen Stromkreis zu konzentrieren: Gilt für diesen die Aussage, dann gilt sie für alle Stromkreise, also auch die gesamten Schaltbilder.

Enthält ein Schaltbild B einen Knopf, der den Stromkreis S schaltet, so weisen wir B den Wert 1 zu, sonst 0. Dann gilt offenbar $B \oplus B' \equiv B + B' \pmod 2$, denn zweimaliges Schalten verändert den Zustand des Stromkreises nicht. Analog folgt $B \otimes B' \equiv B \cdot B' \pmod 2$, wie man leicht für alle vier möglichen Fälle nachrechnet.
Dann ist aber

$$B \oplus B') \otimes B'' \equiv (B + B') \cdot B'' = (B \cdot B'') + (B' \cdot B'') \equiv (B \otimes B'') \oplus (B' \otimes B'') \pmod 2$$

sodass (1) folgt.

zu (2): Wieder betrachten wir nur genau einen Stromkreis, da die Behauptung für alle Stromkreise unabhängig ist. Für einen Schaltplan B^* mit $B^* \oplus B' = B$ muss also für jeden Stromkreis S die Kongruenz $B^* + B' \equiv B \pmod 2$ bzw. $B^* \equiv B - B' \equiv B + B' \pmod 2$ erfüllen:
Ist diese Restklasse 0, so darf in B^* kein Knopf für den zugehörigen Stromkreis S enthalten sein; ist sie 1, dann muss der entsprechende Knopf in B^* enthalten sein. Umgekehrt gilt dann aber auch die gewünschte Gleichung $B^* \oplus B' = B$. Damit ist B^* eindeutig bestimmt und hat die Form $B \oplus B'$, $\square$.

Aufgabe 151246A:
Mit R^n wird die Menge aller n-Tupel reeller Zahlen bezeichnet. In R^n ist durch

$$(x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$$

eine Addition und durch

$$\lambda(x_1, x_2, ..., x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n), \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

die Multiplikation mit einer beliebigen reellen Zahl λ definiert.
Es sei M eine Teilmenge von R^n, für die gilt:
Mit $(x_1, x_2, ..., x_n), (y_1, y_2, ..., y_n) \in M$ gilt für jedes λ mit $0 \leq \lambda \leq 1$

$$\lambda(x_1, x_2, ..., x_n) + (1 - \lambda)(y_1, y_2, ..., y_n) \in M \qquad (1)$$

Ein n-Tupel $(s_1, s_2, ..., s_n) \in M$ heißt x-Element von M, wenn aus

$$(s_1, s_2, ..., s_n) = \frac{1}{2}(x_1, x_2, ..., x_n) + \frac{1}{2}(y_1, y_2, ..., y_n)$$

mit $(x_1, x_2, ..., x_n), (y_1, y_2, ..., y_n) \in M$ stets

$$s_1 = x_1 = y_1, \quad s_2 = x_2 = y_2, \quad ..., \quad s_n = x_n = y_n$$

und damit $(s_1, s_2, ..., s_n) = (x_1, x_2, ..., x_n) = (y_1, y_2, ..., y_n)$ folgt.

Man zeige: $(s_1, s_2, ..., s_n)$ ist $*$-Element genau dann, wenn für beliebiges λ mit $0 < \lambda < 1$ aus

$$(s_1, s_2, ..., s_n) = \lambda(x_1, x_2, ..., x_n) + (1 - \lambda)(y_1, y_2, ..., y_n)$$

mit $(x_1, x_2, ..., x_n), (y_1, y_2, ..., y_n) \in M$ stets

$$s_1 = x_1 = y_1, \quad s_2 = x_2 = y_2, \quad ..., \quad s_n = x_n = y_n$$

also

$$(s_1, s_2, ..., s_n) = (x_1, x_2, ..., x_n) = (y_1, y_2, ..., y_n)$$

folgt.

Lösung von Zeitschrift „Mathematik in der Schule“:
a) Wenn für beliebiges r mit $0 < r < 1$ aus der Darstellung

$$(s_1,s_2,...,s_n) = r(x_1,x_2,...,x_n) + (1 - r)(y_1,y_2,...,y_n)$$

stets $(s_1, s_2, ..., s_n) = (x_1, x_2, ..., x_n) = (y_1, y_2, ..., y_n)$ folgt, so gilt das insbesondere für $r = \frac{1}{2}$. Also ist $(s_1, s_2, ..., s_n)$ ein $*$-Element.

b) Es sei $(s_1, s_2, ..., s_n) \in M$ ein $*$-Element, und es seien $(x_1, x_2, ..., x_n), (y_1, y_2, ..., y_n) \in M$ und eine reelle Zahl r mit $0 < r < 1$ derart gegeben, das

$$(s_1,s_2,...,s_n) = r(x_1,x_2,...,x_n) + (1 - r)(y_1,y_2,...,y_n)$$

ist. Dann existiert eine reelle Zahl $t > 0$ derart, dass für $p = r + t$ und $q = r - t$ gilt: $0 < p,q < 1$ (Jedes $0 < t < \min(r,1 - r)$ leistet das Verlangte). Es wird

$$p(x_1,x_2,...,x_n) + (1 - p)(y_1,y_2,...,y_n) = (a_1,a_2,...,a_n) \qquad \text{und}$$

$$q(x_1,x_2,...,x_n) + (1 - q)(y_1,y_2,...,y_n) = (b_1,b_2,...,b_n)$$

gesetzt. Wegen (1) ist dann $(a_1,a_2,...,a_n), (b_1,b_2,...,b_n) \in M$ und es gilt:

$$\frac{1}{2}(a_1,a_2,...,a_n) + \frac{1}{2}(b_1,b_2,...,b_n) = \left(\frac{p+q}{2}x_1, \frac{p+q}{2}x_2, ..., \frac{p+q}{2}x_n\right) + \left(\frac{2-p-q}{2}y_1, ..., \frac{2-p-q}{2}y_n\right)$$

Wegen $\frac{p+q}{2} = r$ und $\frac{2-p-q}{2} = 1 - r$ folgt

$$\frac{1}{2}(a_1,a_2,...,a_n) + \frac{1}{2}(b_1,b_2,...,b_n) = (s_1, s_2, ..., s_n)$$

Da $(s_1, s_2, ..., s_n)$ ein $*$-Element ist, folgt hieraus $a_i = b_i$ für $i = 1,2,...,n$, also

$$a_i - b_i = px_i + (1-p)y_i - qx_i - (1-q)y_i = (p-q)(x_i - y_i) = 0$$

Wegen $p - q = 2t > 0$ folgt hieraus $x_i = y_i$ für $i = 1,2,...,n$ und damit gilt

$$s_i = rx_i + (1-r)x_i = x_i = y_i$$

VIII.V Funktionalgleichungen; Funktion gesucht; Polynome; Kurvendiskussion

I Runde 1

Aufgabe V01102:
Bestimmen Sie den Grenzwert der Funktion:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1-x)^6 \sin 3x - \sin 3x}{3x^2}$$

Lösung von Steffen Polster:
Für $x = 0$ entsteht ein unbestimmter Term $\frac{0}{0}$. Nach der Regel von l'Hospital ist der Grenzwert in diesem Fall von

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Zweimaliges Ableiten von Nenner und Zähler (keine Quotientenregel !) ergibt:

$$\begin{aligned} f''(x) &= 36(x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1)\cos 3x - \\ &\quad - 3(3x^6 - 18x^5 + 35x^4 - 20x^3 - 15x^2 + 22x - 10)\sin 3x \\ g''(x) &= 6 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich der Wert

$$\lim_{x\to 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = -6$$

als Grenzwert des anfänglichen Ausdrucks.

Aufgabe V01105:
Differenzieren Sie folgende Funktion

$$y = x \cdot \sqrt[5]{x \cdot \sqrt[5]{x}} + \sqrt[5]{\frac{1+x}{1-x}}$$

Lösung von Steffen Polster:
Zuerst werden beide Summanden einzeln betrachtet. Für den ersten Summanden wird

$$x \cdot \sqrt[5]{x \cdot \sqrt[5]{x}} = x \cdot \sqrt[5]{x^{\frac{6}{5}}} = x^{\frac{31}{25}}$$

mit der Ableitung

$$(x \cdot \sqrt[5]{x \cdot \sqrt[5]{x}})' = \frac{31}{25} x^{\frac{6}{25}} = \frac{31}{25} \sqrt[25]{x^6}$$

Die innere Ableitung der zweiten Summanden ist $\frac{2}{(1-x)^2}$. Es wird

$$\left(\sqrt[5]{\frac{1+x}{1-x}}\right)' = \frac{1}{5}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-\frac{4}{5}} \cdot \frac{2}{(1-x)^2}$$

Umformungen ergeben

$$\begin{aligned}
\frac{1}{5}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-\frac{4}{5}}\cdot\frac{2}{(1-x)^2} &= \frac{2}{5}\sqrt[5]{\frac{(1-x)^4}{(1+x)^4}}\cdot\frac{1}{(1-x)^2}\\
&= \frac{2}{5}\sqrt[5]{\frac{(1-x)^4}{(1+x)^4}\frac{1}{(1-x)^{10}}} = \frac{2}{5}\sqrt[5]{\frac{1}{(1+x)^4(1-x)^6}}\\
&= \frac{2}{5(1-x)}\sqrt[5]{\frac{1}{(1+x)^4(1-x)}} = \frac{2}{5(1-x)}\sqrt[5]{\frac{(1+x)}{(1+x)^5(1-x)}}\\
&= \frac{2}{5(1-x)(1+x)}\sqrt[5]{\frac{(1+x)}{(1-x)}}
\end{aligned}$$

Der gesuchte Ableitungsterm ist damit

$$y' = \frac{31}{25}\sqrt[25]{x^6} + \frac{2}{5(1-x)(1+x)}\sqrt[5]{\frac{(1+x)}{(1-x)}}$$

Aufgabe V01107:
Für welche Werte von a schneidet die Kurve

$$y = \frac{1}{4}(ax - x^3) \tag{1}$$

die x-Achse unter einem Winkel von 45°?

Lösung von Steffen Polster:
Die x-Achse wird unter einem Winkel von 45° geschnitten, wenn der Anstieg m der Tangente in den Nullstellen von (1) gleich $\tan 45° = 1$ oder $\tan 135° = -1$ ist. D. h., der Funktionswert der 1.Ableitung von (1) muss in den Nullstellen gleich ± 1 sein.

1. Ableitungsfunktion: $y' = f'(x) = \frac{1}{4}(a - 3x^2)$
Nullstellen von $f(x)$: $x_{1;2} = \pm\sqrt{a}$; $x_3 = 0$
Funktionswert von $f'(x)$ an den Nullstellen:

$$f'(x_1) = \frac{1}{4}(a - 3\sqrt{-a}^2) = -\frac{a}{2}; \qquad f'(x_2) = \frac{1}{4}(a - 3\sqrt{a}^2) = -\frac{a}{2}; \qquad f'(x_3) = \frac{1}{4}(a - 3\cdot 0^2) = \frac{a}{4}$$

Aus $-\frac{a}{2} = \pm 1$ ergeben sich die Werte für $a = -2$ und $a = 2$. Allerdings existieren die Nullstellen x_1 und x_2 für $a < 0$ nicht, so dass nur $a = 2$ als Lösung verbleibt. Aus $\frac{a}{4} = \pm 1$ folgen die Werte für $a = -4$ und $a = 4$ (die Nullstelle x_3 existiert für alle a), mit der Lösungsmenge der Aufgabe

$$a \in \{-4, 2, 4\}$$

Aufgabe V01215:
Für welche Werte von a schneidet die Kurve

$$y = \frac{1}{4}(ax - x^3)$$

die x-Achse unter einem Winkel von 45°?

Lösung von Steffen Polster:
Die x-Achse wird unter einem Winkel von 45° geschnitten, wenn der Anstieg m der Tangente in den Nullstellen von (1) gleich $\tan 45° = 1$ oder $\tan 135° = -1$ ist. D. h., der Funktionswert der 1.Ableitung von (1) muss in den Nullstellen gleich ± 1 sein.

1. Ableitungsfunktion: $y' = f'(x) = \frac{1}{4}(a - 3x^2)$
Nullstellen von $f(x)$: $x_{1;2} = \pm\sqrt{a}$; $x_3 = 0$
Funktionswert von $f'(x)$ an den Nullstellen:

$$f'(x_1) = \frac{1}{4}(a - 3\sqrt{-a}^2) = -\frac{a}{2}; \qquad f'(x_2) = \frac{1}{4}(a - 3\sqrt{a}^2) = -\frac{a}{2}; \qquad f'(x_3) = \frac{1}{4}(a - 3 \cdot 0^2) = \frac{a}{4}$$

Aus $-\frac{a}{2} = \pm 1$ ergeben sich die Werte für $a = -2$ und $a = 2$. Allerdings existieren die Nullstellen x_1 und x_2 für $a < 0$ nicht, so dass nur $a = 2$ als Lösung verbleibt. Aus $\frac{a}{4} = \pm 1$ folgen die Werte für $a = -4$ und $a = 4$ (die Nullstelle x_3 existiert für alle a), mit der Lösungsmenge der Aufgabe

$$a \in \{-4, 2, 4\}$$

Aufgabe 021213:
Beweisen Sie, dass die Funktion

$$y = \frac{|x-1|}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}}$$

die folgenden Eigenschaften hat:

a) sie ist für alle reellen Zahlen definiert,
b) sie ist für alle $x \geq 1$ wachsend,
c) sie hat den Wertevorrat $0 \leq y < 1$,
d) ihr Bild ist achsensymmetrisch!
Bestimmen Sie die Symmetrieachse und beweisen Sie die Symmetrieeigenschaften der Kurve!

Lösung von Carsten Balleier:
Beweis:

a) Damit sie für alle reellen x definiert ist, darf der Nenner nicht Null und der Radikand nicht negativ sein. Das ist erfüllt, wenn $\forall x : x^2 - 2x + 2 > 0$.
Nach der Lösungsformel für quadratische Gleichungen hat die zugehörige Gleichung die Lösungen $x = 1 \pm \sqrt{1-2} \notin \mathbb{R}$, der quadratische Ausdruck hat also keine reellen Nullstellen.

Da er stetig ist, reicht es zu wissen, dass er an einem Punkt größer Null ist (z. B. $x = 0$ und $x^2 - 2x + 2 = 2 > 0$), um zu folgern, dass er überall größer Null ist. Damit ist die Funktion auf der gesamten reellen Achse definiert.

b) Wir untersuchen die erste Ableitung für $x \geq 1$ (also $|x - 1| = x - 1$):

$$y' = \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 2} - \frac{(x-1)(2x-2)}{2\sqrt{x^2-2x+2}}}{x^2 - 2x + 2} = \frac{1}{(x^2 - 2x + 2)^{\frac{3}{2}}}$$

Der quadratische Ausdruck ist wie in a) gezeigt positiv und daher gilt $y' > 0 \forall x \geq 1$. Da in y ein Betrag vorkommt, haben wir bei $x = 1$ die rechtsseitige Ableitung genommen.

c) Per Definition haben wir $y \geq 0$. Außerdem sind folgende Aussagen einander äquivalent:

$$y < 1 \Leftrightarrow |x - 1| < \sqrt{x^2 - 2x + 2} \Leftrightarrow (x - 1)^2 < x^2 - 2x + 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 < x^2 - 2x + 2 \Leftrightarrow 1 < 2 \qquad \text{wahre Aussage}$$

Die zweite Äquivalenz ist wahr, weil wir nur positive Ausdrücke betrachten.

d) Die Funktion ist symmetrisch bezüglich der Achse $x = 1$, d. h. sie geht unter $1 + x \to 1 - x$ in sich selbst über. Für den Zähler gilt:

$$|(1-x)-1| = |-x| = |x| = |(1+x)-1|$$

Im Nenner haben wir:

$$(1-x)^2 - 2(1-x) + 2 = (1 - 2x + x^2) + (-2 + 2x) + 2 =$$

$$= (1 + 2x + x^2) + (-2 - 2x) + 2 = (1+x)^2 - 2(1+x) + 2$$

Damit sind die Eigenschaften a) bis d) bewiesen.

Aufgabe 031212:
Beim Eichen eines Dynamometers wurden die Größen der Belastung P gemessen, die erforderlich waren, um den Zeiger bis zu bestimmten Teilstrichen der Skala ausschlagen zu lassen. Man erhielt die folgenden Werte:

Zahl der Teilstriche N	Belastung in kp P
0	0
5	4,87
10	10,52
15	17,24
20	25,34

Die Belastung P kann durch die folgende ganze rationale Funktion von N dargestellt werden:

$$P(N) = a_1 N + a_2 N^2 + a_3 N^3 + a_4 N^4.$$

a) Es sind die Koeffizienten a_1, a_2, a_3, a_4 zu berechnen!

b) Welchen Wert hat die Funktion für $N = 25$? Vergleichen Sie mit dem durch Messung gefundenen Wert $P = 35{,}16 km$!

*) Ein Dynamometer ist ein Gerät zur Messung von Kräften, bei dem die elastische Deformation einer Feder über ein Hebelwerk auf einer (meist kreisförmigen) Skala angezeigt wird (Federwaage).

Lösung von Henning Thielemann:

a) Man kann beobachten, dass sich der angesetzte polynomielle Zusammenhang zwischen der Anzahl der Teilstriche N und der Belastung $P(N)$ vereinfacht, wenn man zu Differenzen zwischen aufeinanderfolgenden Werten in der Wertetabelle übergeht. Genaugenommen reduziert sich der Polynomgrad und damit die Anzahl der unbestimmten Parameter um eins.

Die Differenzen zwischen diesen Differenzen verringern den Polynomgrad erneut um eins. Diese Differenzenbildung kann man so lange fortsetzen, bis nur noch ein Koeffizient bleibt.

Zum einfacheren Rechnen werden die Werte so normiert, dass man nur Dezimalbrüchen ohne Perioden erhält.

$$\begin{aligned}
f_0(x) &:= \frac{3}{5x}\cdot P(5x) = 3\cdot(a_1+5a_2x+25a_3x^2+125a_4x^3) =: b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3\\
f_1(x) &:= f_0(x+1)-f_0(x) = b_1+b_2(2x+1)+b_3(3x^2+3x+1)\\
&= b_1+b_2+b_3+(2b_2+3b_3)x+3b_3x^2 =: c_0+c_1x+c_2x^2\\
f_2(x) &:= f_1(x+1)-f_1(x) = c_1+c_2(2x+1) = c_1+c_2+2c_2x =: d_0+d_1x\\
f_3(x) &:= f_2(x+1)-f_2(x) =: d_1
\end{aligned}$$

x	$f_0(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
1	2.922	0.234	0.058	0.003
2	3.156	0.292	0.061	
3	3.448	0.353		
4	3.801			

Daraus erhält man Schritt für Schritt die Koeffizienten aller Polynome zurück:

$$\begin{array}{lclcll}
d_1 &=& f_3(1) & & &= 0.003\\
d_0 &=& f_2(1)-1\cdot d_1 & & &= 0.055\\
c_2 &=& d_1/2 & & &= 0.0015\\
c_1 &=& d_0-c_2 & & &= 0.0535\\
c_0 &=& f_1(1)-1\cdot c_1-1^2\cdot c_2 &=& f_1(1)-d_0 &= 0.179\\
b_3 &=& c_2/3 & & &= 0.0005\\
b_2 &=& (c_1-3b_3)/2 &=& (c_1-c_2)/2 &= 0.026\\
b_1 &=& c_0-b_2-b_3 & & &= 0.1525\\
b_0 &=& f_0(1)-1\cdot b_1-1^2\cdot b_2-1^3\cdot b_3 &=& f_1(1)-c_0 &= 2.743
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
3a_4 &= b_3/125\\
3a_3 &= b_2/25\\
3a_2 &= b_1/5\\
3a_1 &= b_0
\end{aligned}$$

i	a_i	$3a_i$	b_i	c_i	d_i
0			2.7430	0.1790	0.055
1	0.914333333	2.743	0.1525	0.0535	0.003
2	0.010166667	0.0305	0.0260	0.0015	
3	0.000346667	0.00104	0.0005		
4	0.000001333	0.000004			

b)
$$\begin{aligned}
P(25) &= \frac{25}{3}\cdot f_0(5) = \frac{25}{3}\cdot(((0.0005\cdot 5+0.026)\cdot 5+0.1525)\cdot 5+2.743)\\
&= \frac{25}{3}\cdot((0.0285\cdot 5+0.1525)\cdot 5+2.743) = \frac{25}{3}\cdot(0.295\cdot 5+2.743) = \frac{25}{3}\cdot 4.218\\
&= 25\cdot 1.406 = 35.15
\end{aligned}$$

Aufgabe 071212:
Die Rentabilität des Einsatzes von Rohbraunkohle oder Braunkohlenbriketts wird auch durch die Transportkosten beeinflusst. Die folgende Tabelle zeigt die Kosten (in M je Mill. kcal) einschließlich der Transportkosten für Rohbraunkohle bzw. Braunkohlenbriketts, und zwar für Transportentfernungen von 0 km, 100 km und 200 km.

Transportentfernung in km	Kosten in M je Mill. kcal Rohbraunkohle	Braunkohlenbriketts
x	y	z
0	4,0	8,0
100	8,6	9,2
200	12,1	10,0

Allgemein lassen sich die Kosten für die Entfernungen bis etwa 400 km durch eine Funktion vom Typ $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$ darstellen.

Ermitteln Sie die Koeffizienten a_0, a_1, a_2 in beiden Fällen! Entscheiden Sie, für welche Transportentfernungen bis 400 km der Einsatz von Rohbraunkohle billiger ist!

Lösung von Daniel Gutekunst:

(a) Ermittelt werden sollen die Kostenfunktionen $f_1(x)$ für Rohbraunkohle und $f_2(x)$ für Braunkohlenbriketts. Für Rohbraunkohle gelten die Beziehungen:

$$f_1(0) = 4$$
$$f_1(100) = \frac{43}{5}$$
$$f_1(200) = \frac{121}{10}$$

Dadurch ist das Polynom zweiten Grades vollständig bestimmt, und es gilt:

$$f_1(x) = 4 + \frac{103}{2000}x - \frac{11}{200000}x^2$$

Für Braunkohlebriketts gelten die Beziehungen:

$$f_2(0) = 8$$
$$f_2(100) = \frac{46}{5}$$
$$f_2(200) = 10$$

Dadurch ist das Polynom zweiten Grades vollständig bestimmt, und es gilt:

$$f_2(x) = 8 + \frac{7}{500}x - \frac{1}{50000}x^2$$

(b) Gesucht sind die Entfernungen, in denen Rohbraunkohle günstiger ist und umgekehrt. Die markanten Entfernungen sind die, für die $f_1(x) = f_2(x)$ gilt. Diese quadratische Gleichung hat die positiven Lösungen

$$x_1 = \frac{3750 - 50\sqrt{3385}}{7} \approx 120 \quad \text{und}$$
$$x_2 = \frac{3750 + 50\sqrt{3385}}{7} \approx 951$$

Bei rund 120 km sind beide Preise gleich (der zweite Wert entfällt, da er außerhalb der zu betrachtenden 400 km Entfernung liegt). In der Tabelle steht, dass bei 0 km die Rohbraunkohle billiger sei, also ist bis zu einer Entfernung von etwa 120 km Rohbraunkohle vorzuziehen, während danach Braunkohlebriketts billiger werden.

Aufgabe 101214:
Es seien a, b, c reelle Zahlen; für jede reelle Zahl x sei ferner $f(x) = ax^2 + bx + c$ gesetzt.

a) Man beweise, dass folgender Schluss richtig ist:

Voraussetzung:	$f(0)$, $f(1)$ und $f(-1)$ sind ganze Zahlen.
Behauptung:	Für jede ganze Zahl x ist $f(x)$ ebenfalls eine ganze Zahl.

b) Man untersuche, ob ein richtiger Schluss entsteht, wenn die Voraussetzung des in a) genannten Schlusses durch die Voraussetzung ersetzt wird, $f(0), f(2)$ und $f(-1)$ seien ganze Zahlen.

c) Man gebe mindestens drei weitere Tripel (p, q, r) ganzer Zahlen mit der Eigenschaft an, dass ein richtiger Schluss entsteht, wenn die Voraussetzung des in a) genannten Schlusses durch die Voraussetzung ersetzt wird, $f(p)$, $f(q)$ und $f(r)$ seien ganze Zahlen.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Auf Grund der Voraussetzung sind $f(0) = c$, $f(1) = a + b + c$ und $f(-1) = a + b + c$ ganzzahlig, also auch $f(1) + f(-1) - 2f(0) = 2a$ und $f(1) - f(-1) = 2b$. Daher gilt $a = \frac{m}{2}$ und $b = \frac{n}{2}$ mit ganzen Zahlen m und n.

Ferner ist $f(1) - f(0) = a + b = \frac{m+n}{2}$ ganzzahlig, also sind m und n entweder gleichzeitig gerade oder gleichzeitig ungerade. Nun gilt

$$f(x) = \frac{mx^2 + nx}{2} + c$$

Daraus folgt, dass $f(x)$ für alle geraden x ganzzahlig ist.
Sind nun x sowie m und n ungerade, so sind auch mx^2 und nx ungerade, also ist $f(x)$ ganzzahlig. Ist x ungerade und sind m und n gerade, so sind auch mx^2 und nx gerade, also ist $f(x)$ ganzzahlig.
Damit ist bewiesen, dass $f(x)$ für alle ganzen Zahlen x ganzzahlig ist.

b) Unter der nun zugrunde gelegten Voraussetzung kann nicht auf die angegebene Behauptung geschlossen werden; denn z. B. für $a = \frac{1}{3}, b = \frac{1}{3}, c = 0$ ist zwar $f(0) = 0$, $f(2) = 2$, $f(-1) = 0$ jedoch $f(1) = \frac{2}{3}$.

c) Weitere Tripel ganzer Zahlen, die die geforderte Eigenschaft haben, bestehen z. B. aus

$$p = n - 1 \qquad , \qquad q = n \qquad , \qquad r = n + 1$$

wobei n eine beliebige ganze Zahl ist. Sind nämlich

$$f(n-1) = (n-1)^2 a + (n-1)b + c$$
$$f(n) = n^2 a + nb + c$$
$$f(n+l) = (n+1)^2 a + (n+1)b + c$$

ganzzahlig, so sind auch die paarweise gebildeten Differenzen $(2n-1)a+b$ und $(2n+1)a+b$ sowie $4na+2b$ ganzzahlig. Daraus folgt, dass auch $2a$, also auch $4na$ und mithin $2b$ ganzzahlig sind, woraus wiederum eie unter a) die Ganzzahligkeit von $a + b$ abgeleitet werden kann.
Da von den Zahlen $n - 1, n, n + 1$ mindestens eine gerade ist, folgt unter Berücksichtigung der Ganzzahligkeit von $2a$ und $2b$, dass c ebenfalls ganzzahlig ist.
Wie unter a) lässt sich dann zeigen, dass $f(x)$ für alle ganzzahligen x ganzzahlig ist.

Aufgabe 111213:
Es sind alle nichtnegativen reellen Zahlen k anzugeben, für die das Polynom $f(x) = (x + 1)^4 - (kx)^2$

a) genau eine,
b) genau zwei voneinander verschiedene,
c) genau drei paarweise verschiedene
d) genau vier paarweise verschiedene,
e) keine

reelle(n) Nullstelle(n) hat.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es sei $k = 0$. Dann gilt $f(x) = (x+1)^4$; die Funktion $f(x)$ hat also genau eine reelle Nullstelle, nämlich $x = -1$.

Es sei $k > 0$. Dann können wir folgende Umformung vornehmen: $f(x) = g(x)h(x)$ mit

$$\begin{aligned} g(x) &= (x+1)^2 + kx = \left(x+1+\frac{k}{2}\right)^2 - \left(\frac{k^2}{4}+k\right) \\ &= \left(x+1+\frac{k}{2}+\sqrt{\frac{k^2}{4}+k}\right)\left(x+1+\frac{k}{2}-\sqrt{\frac{k^2}{4}+k}\right) \\ h(x) &= (x+1)^2 - kx = \left(x+1+\frac{k}{2}\right)^2 - \left(\frac{k^2}{4}-k\right) \end{aligned}$$

Zur weiteren Umrechnung von $h(x)$ unterscheiden wir folgende Fälle:

Fall 1: $\frac{k^2}{4} - k > 0$ oder, wegen $k > 0$ hiermit äquivalent, $k > 4$. Dann gilt:

$$h(x) = \left(x+1+\frac{k}{2}+\sqrt{\frac{k^2}{4}-k}\right)\left(x+1+\frac{k}{2}-\sqrt{\frac{k^2}{4}-k}\right)$$

und $h(x)$ hat daher genau zwei voneinander verschiedene reelle Nullstellen.

Fall 2: $\frac{k^2}{4} - k = 0$ oder, wegen $k > 0$ hiermit äquivalent, $k = 4$. Dann gilt: $h(x) = \left(x+1+\frac{k}{2}\right)^2$ und $h(x)$ hat daher genau eine Nullstelle.

Fall 3: $\frac{k^2}{4} - k < 0$ oder, wegen $k > 0$ hiermit äquivalent, $k < 4$. Dann gilt:

$$h(x) > \left(x+1+\frac{k}{2}\right)^2 \geq 0$$

und $h(x)$ hat daher keine Nullstelle.

In alle drei Fällen hat $g(x)$ wegen $k > 0$ genau zwei voneinander verschiedene Nullstellen. Weiterhin ist keine der Nullstellen von $g(x)$ gleich einer der Nullstellen von $h(x)$ (falls solche existieren); denn wäre eine Zahl x_0 sowohl Nullstelle von $g(x)$ als auch Nullstelle von $h(x)$, so wäre für sie:

$$(x_0+1)^2 + kx_0 = (x_0+1)^2 - kx_0 \qquad (1)$$
$$(x_0+1)^2 + kx_0 = 0 \qquad (2)$$

Aus (1) folgte dann wegen $k > 0$ aber $x_0 = 0$, und dies steht im Widerspruch zu (2).

Also erhalten wir für $k = 0$ die Antwort a), für $k > 0$ im Fall 1 die Antwort d), im Fall 2 die Antwort c), im Fall 3 die Antwort b) und niemals die Antwort e).

Aufgabe 121213:
Gegeben seien drei reelle Zahlen a, b und c. Zu der Funktion

$$y = x^3 + ax^2 + bx + c \qquad (*)$$

soll eine Funktion

$$y = x^3 + mx + n \qquad (**)$$

ermittelt werden, so dass der Graph von (2) in einem rechtwinkligen, kartesischen Koordinatensystem durch eine Verschiebung des Graphen von (1) parallel zur x-Achse entsteht.

Man zeige, dass dies immer möglich ist und dass die Funktion (2) eindeutig bestimmt ist. Die dabei auftretenden Zahlen m und n sind anzugeben.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Verschiebung werde durch die Transformation $x \to x - h$ charakterisiert. Da

$$(x-h)^3 = x^3 - 3x^2h + 3xh^2 + h^3 \qquad \text{und} \qquad a(x-h)^2 = ax^2 - 2axh + ah^2$$

ist und $b(x - h) + c$ kein quadratisches Glied mehr enthält, hat die aus der Funktion (*) entstehende Funktion (**) genau die gewünschte Gestalt, wenn $h = \frac{a}{3}$ gilt. Für die Funktion (**) erhält man in diesem Fall

$$y = x^2 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right)x + \frac{2}{27}a^3 - \frac{ab}{3} + c \qquad \text{also}$$

$$m = b - \frac{a^2}{3} \qquad \text{und} \qquad n = \frac{2}{27}a^3 - \frac{ab}{3} + c$$

Aufgabe 191211:
Es sei (bezüglich eines kartesischen x,y-Koordinatensystems) p die Parabel mit $y = x^2$ als Gleichung.

a) Man beweise: Durch den Punkt (0; 1) gibt es genau eine Sehne von p mit der Länge 2.

b) Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen $c \geq 0$, für die folgende Aussage gilt: Durch den Punkt $(0; c)$ gibt es genau zwei Sehnen von p mit der Länge 2.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Für jede reelle Zahl $c \geq 50$ gilt:
Jede Sehne von p durch den Punkt $(0; c)$ liegt auf einer Geraden, die

$$y = mx + c \tag{1}$$

(mit einer reellen Zahl m) als Gleichung hat. Ein Punkt $(x; y)$ ist genau dann Schnittpunkt dieser Geraden mit p wenn x und y das Gleichungssystem

$$y = mx + c \qquad , \qquad y = x^2$$

erfüllen. Daher schneidet p die Gerade (1) genau in den Punkten $(x_l; y_1)$, $(x_2; y_2)$, wobei

$$x_{1;2} = \frac{1}{2}(m \pm \sqrt{m^2 + 4c}) \qquad , \qquad y_{1;2} = \frac{1}{2}(m^2 + 2c \pm m\sqrt{m^2 + 4c})$$

ist. Die Sehne, die diese beiden Punkte verbindet, hat wegen

$$x_1 - x_2 = \sqrt{m^2 + 4c} \qquad , \qquad y_1 - y_2 = m\sqrt{m2 + 3c}$$

die Länge

$$s = \sqrt{m^2 + 4c + m2(m2 + 4c)} = \sqrt{m^4 + (4c + 1)m^2 + 4c}$$

Daher gilt genau dann $s = 2$, wenn

$$m^4 + (4c + 1)m^2 + 4c - 4 = 0 \tag{2}$$

ist. Diese Gleichung wird (bei gegebenem $c \geq 0$) genau dann von einer reellen Zahl m erfüllt, wenn m und eine reelle Zahl r die Gleichungen

$$r = m^2 \qquad ; \qquad r^2 + (4c + 1)r + 4c - 4 = 0 \tag{3,4}$$

erfüllen. Wegen $(4c-1)^2 - 4(4c-4) = (4c-1)^2 + 26 > 0$ ist (4) gleichbedeutend damit, dass entweder

$$r = \frac{1}{2}\left(-(4c+1) + \sqrt{(4c-1)^2+16}\right) \qquad \text{oder} \tag{5}$$
$$r = \frac{1}{2}\left(-(4c+1) - \sqrt{(4c-1)^2+16}\right) \tag{6}$$

gilt. Hiervon führt (6) auf $r < 0$ im Widerspruch zu (3). Ferner ist die in (5) angegebene Zahl r genau dann positiv, wenn

$$\sqrt{(4c-1)^2+16} > 4c+1$$

oder, wegen $4c+1>0$, der Reige nach äquivalent hiermit

$$4c^2 - 8c + 17 > 4c^2 + 8c + 1 \Rightarrow c < 1$$

gilt; entsprechend ist die in (5) angegebene Zahl r genau dann gleich 0, wenn $c = 1$ gilt. Daraus folgt:

a) Für $c = 1$ hat das Gleichungssystem (3), (4) genau die Lösung $r = 0$, $m = 0$. Also hat genau für $m = 0$ die durch (1) gegebene Gerade die Eigenschaft, dass die auf ihr gelegene Sehne von p die Länge 2 besitzt. Damit ist der in a) verlangte Beweis geführt.

b) Für $c > 1$ hat das Gleichungssystem (3), (4) keine Lösung, also gibt es keine Sehne von p, die durch den Punkt $(0; c)$ geht und die Länge 2 hat.

Für $0 \leq c < 1$ hat das Gleichungssystem (3), (4) genau diejenigen Lösungen, in denen r die in (5) angegebene Zahl und $m = \sqrt{r}$ oder $m = -\sqrt{r}$ ist. Daher haben genau für diese beiden Werte von m die durch (1) gegebenen Geraden die Eigenschaft, dass die auf der betreffenden Geraden gelegene Sehne von p die Länge 2 besitzt. Wegen $r > 0$ sind diese beiden Geraden, also auch dje auf ihnen gelegenen Sehnen, voneinander verschieden.

Die in b) gesuchten Zahlen c sind folglich genau die Zahlen mit $<\leq c < 1$.

Aufgabe 291214:
Für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ sei f_n diejenige Funktion, die für alle reellen $x \neq 0$ durch

$$f_n(x) = \frac{1-x}{x} + \frac{2^2-2x}{x} + \frac{3^2-3x}{x} + \ldots + \frac{n^2-nx}{x}$$

definiert ist.

a) Ermitteln Sie die Nullstellen der Funktionen f_1, f_2, f_3 und f_4!

b) Beweisen Sie: Für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ hat die Funktion f_n genau eine Nullstelle! Geben Sie diese Nullstelle in Abhängigkeit von n an!

c) Beweisen Sie, dass es eine natürliche Zahl n gibt, mit der die Nullstelle der Funktion f_n größer als 100 ist! Ermitteln Sie die kleinste derartige Zahl n!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

a) Genau dann gilt $f_1(x) = 0$, wenn $1 - x = 0$ gilt. Also hat f_1 genau die Nullstelle $x = 1$.

Für alle $x \neq 0$ ist $f_2(x) = \frac{1}{x}(5-3x)$. Also hat f_2 genau die Nullstelle $x = \frac{5}{3}$.

Für alle $x \neq 0$ ist $f_3(x) = \frac{1}{x}(14-6x)$. Also hat f_3 genau die Nullstelle $x = \frac{7}{3}$.

Für alle $x \neq 0$ ist $f_4(x) = \frac{1}{x}(30-10x)$. Also hat f_4 genau die Nullstelle $x = 3$.

b) Für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ und jedes reelle $x \neq 0$ ist

$$f_n(x) = \frac{1}{x}(1 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2) - (1 + 2 + 3 + ... + n)$$

Nach den Formeln für die hier auftretenden Summen folgt

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \frac{1}{6x} n \cdot (n+1) \cdot (2n+1) - \frac{1}{2} n \cdot (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{6x} \cdot (2n - 1 - 3x) \end{aligned}$$

Also hat f_n genau die Nullstelle $x = \frac{2n+1}{3}$.

c) Es gilt genau dann $\frac{2n+1}{3} > 100$ wenn $2n + 1 > 100$, d. h. $n > 149{,}5$ gilt.

Natürliche Zahlen, für die das gilt, gibt es: die kleinste von ihnen ist $n = 150$.

II Runde 2

Aufgabe 051223:
Es seien a eine von Null verschiedene reelle Zahl und f eine reelle Funktion mit den folgenden Eigenschaften:

(1) Ist die Funktion f an der Stelle x definiert, so ist sie auch an den Stellen $x+a$ und $x-a$ definiert.

(2) Für alle x, für die die Funktion f definiert ist, gilt

$$f(x + a) = \frac{1 + f(x)}{1 - f(x)}$$

a) Es ist zu beweisen, dass die Funktion f periodisch ist, d. h., dass es eine von Null verschiedene reelle Zahl b gibt, so dass $f(x) = f(x + kb)$ für alle x, für die die Funktion f definiert ist, und für alle ganzen Zahlen k gilt.
b) Geben Sie eine Funktion an, die die obigen Eigenschaften hat!

Lösung von StrgAltEntf:
Sei y beliebig und $x = y + a$. Dann ist

$$f(y + 2a) = f(x + a) = \frac{1 + f(x)}{1 - f(x)} = \frac{1 + f(y + b)}{1 - f(y + b)} = \frac{1 + \frac{1+f(y)}{1-f(y)}}{1 - \frac{1+f(y)}{1-f(y)}} = \cdots = -\frac{1}{f(y)}$$

(„...“ steht für eine einfache algebraische Umformung.) Sei nun z beliebig und $y = z + 2a$. Dann ist

$$f(z + 4a) = f(y + 2a) = -\frac{1}{f(y)} = -\frac{1}{f(z + 2a)} = -\frac{1}{-\frac{1}{f(z)}} = f(z)$$

Folglich ist die Funktion 4a-periodisch.

b) $f(x) = \tan(x)$ mit $a = \frac{\pi}{4}$ erfüllt beide Bedingungen, wobei aus dem Definitionsbereich des Tangens zusätzlich $\frac{\pi}{4}\mathbb{Z}$ entfernt werden muss.

2. Möglichkeit: Sei $f(x) = 2$ für $0 \leq x < 1$, , $f(x) = -3$ für $1 \leq x < 2$,$f(x) = -1/2$ für $2 \leq x < 3$, $f(x) = 1/3$ für $3 \leq x < 4$.
Setze diese Funktion 4-periodisch auf R fort. Für $a = 1$ ist die Funktionalgleichung erfüllt.

Aufgabe 121222:
Es sind alle geordneten Paare (a, b) reeller Zahlen a, b anzugeben, für die das Polynom $f(x) = x^2 + ax + b$ ein Teiler des Polynom $g(x) = x^4 + ax^2 + b$ ist.
Definition: Ein Polynom $f(x)$ heißt genau dann Teiler eines Polynom $g(x)$, wenn es ein Polynom $h(x)$ gibt, so dass $f(x) \cdot h(x) = g(x)$ gilt.

Lösung von weird:
Gemäß Angabe muss für gewisse $c,d \in \mathbb{R}$ die Gleichung

$$(x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d) = x^4 + ax^2 + b$$

gelten. Durch Ausmultiplizieren und Koeffizientenvergleich erhält man daraus das folgende nichtlineare Gleichungssystem für die Variablen a,b,c,d:
(1) $a + c = 0$. (2) $b + ac + d = a$. (3) $ad + bc = 0$. (4) $bd = b$.
Zu seiner Lösung führen wir folgende Fallunterscheidung durch:

1.Fall: $b = 0$.
(3) wird dann zu $ad = 0$. Gilt hier $a = 0$, so folgt daraus sofort auch $c = d = 0$, ansonsten können wir hierin durch a kürzen, woraus dann $d = 0$, $c = 1$, $a = -1$, $b = 0$ in dieser Reihenfolge folgt. Insgesamt entsprechen diese beiden Fälle den Zerlegungen

$$x^2\, x^2 = x^4 \quad \text{bzw.} \quad (x^2 - x)(x^2 + x) = x^4 - x^2$$

2.Fall: $b \neq 0$.
Damit muss wegen (4) dann jedenfalls $d = 1$ gelten und (3) kann man wegen $c = -a$ auch schreiben in der Form $a = ab$. Hier gilt nun entweder $b = 1$, wonach aus (2) dann $a^2 + a - 2 = (a - 1)(a + 2) = 0$ folgt, was die Lösungen

$$(a,bc,d) = (1,1,-1,1) \quad \text{bzw.} \quad (a,b,c,d) = (-2,1,2,1)$$

impliziert, oder es ist $a = 0$, was auf die Lösung

$$(a,b,c,d) = (0,-1,0,1)$$

führt. Diese weiteren Lösungen entsprechen damit folgenden Zerlegungen

$$(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) = x^4 + x^2 + 1$$
$$(x^2 - 2x + 1)(x^2 + 2x + 1) = x^4 - 2x^2 + 1$$
$$(x^2 - 1)(x^2 + 1) = x^4 - 1$$

welche offensichtlich wieder die Bedingungen der Aufgabe erfüllen.

Aufgabe 181222:
Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen x, für die durch $k = \frac{x}{x^2-5x+7}$ eine ganze Zahl k definiert ist.

Lösung von weird:
Die Aufgabe wird im wesentlichen gelöst durch eine Kurvendiskussion der Funktion

$$f(x) := \frac{x}{x^2 - 5x + 7}$$

welche auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist, da der Nenner keine reellen Nullstellen besitzt. Mithilfe der beiden Ableitungen

$$f'(x) = \frac{7 - x^2}{x^2 - 5x + 7)^2} \quad \text{bzw.} \quad f''(x) = \frac{2(x^3 - 21x + 35)}{(x^2 - 5x + 7)^3}$$

sowie

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$$

sieht man sofort, dass die Funktion bei $x = -\sqrt{7}$ ein absolutes Minimum und bei $x = \sqrt{7}$ ein absolutes Maximum hat, sodass also dann

$$[f(-\sqrt{7}),f(\sqrt{7})] \approx [-0.097,3.43]$$

der Wertebereich der Funktion ist, der also insbesondere als einzige ganze Zahlen k nur die Werte $k = 0,1,2,3$ enthält. Dabei liefert dann

- $f(x) = 0$ die Lösung $x_1 = 0$,
- $f(x) = 1$, also $x^2 - 6x + 7 = 0$, die beiden Lösungen $x_{2,3} = 3 \pm \sqrt{2}$
- $f(x) = 2$, also $2x^2 - 11x + 14 = (2x - 7)(x - 2) = 0$, die beiden Lösungen $x_4 = \frac{7}{2}$, $x_5 = 2$
- $f(x) = 3$, also $3x^2 - 16x + 21 = (3x - 7)(x - 3) = 0$, die beiden Lösungen $x_6 = \frac{7}{3}$, $x_7 = 3$

was somit die in der Aufgabe gestellte Frage beantwortet.

Aufgabe 191224:
a) Man untersuche, ob die für alle reellen Zahlen x durch

$$f_1(x) = \frac{\sin(x\sqrt{2})}{1 + \sin^2(x\sqrt{2})}$$

definierte Funktion f_1 periodisch ist.
b) Man untersuche, ob die für alle reellen Zahlen x durch

$$f_2(x) = \frac{\sin x}{1 + \sin^2(x\sqrt{2})}$$

definierte Funktion f_2 periodisch ist.

Lösung von Nuramon:
Was a) betrifft, hat der Zähler von $f_1(x)$ die Periode $\pi\sqrt{2}$ und sein Nenner die Periode $\frac{\pi}{2}\sqrt{2}$. f_1 hat daher insgesamt die Periode $\pi\sqrt{2}$.

Nur leicht komplizierter liegen die Dinge bei b). Hier hat die Funktion f_2 Nullstellen bei $k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), sodass als ev. Periode nur ein Vielfaches von π in Frage kommt. Wäre f_2 aber wirklich periodisch, so hätte die (stetig ergänzte) Funktion

$$f_3(x) = \frac{f_2(x)}{\sin x} = \frac{1}{1 + \sin^2(x\sqrt{2})}$$

aufgrund dieser zwei Darstellungen einerseits eine Periode $p \geq 2\pi$, anderseits aber die Periode $p = \frac{\pi}{2}\sqrt{2} < 2\pi$, Widerspruch! f_2 ist daher nicht periodisch.

b) Die Funktion f_2 hat Nullstellen bei $k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), sodass als ev. Periode nur ein Vielfaches von π in Frage kommt.

Angenommen es gäbe $k \in \mathbb{N}, k \neq 0$, so dass f_2 die Periode $k\pi$ hat. Da dann auch $2k\pi$ eine Periode von f_2 wäre, können wir o. B. d. A. annehmen, dass k gerade ist.
Aus $f_2(\frac{\pi}{2}) = f_2(\frac{\pi}{2} + k\pi)$ würde somit

$$\sin^2\left((\frac{\pi}{2} + k\pi)\sqrt{2}\right) = \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{2}\right)$$

folgen.

Wegen $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - 2\cos(2x))$ und $\cos(y) = \cos(z) \iff y + z \in 2\pi\mathbb{Z} \vee y - z \in 2\pi\mathbb{Z}$ wäre dann

$$2\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)\sqrt{2} + 2\frac{\pi}{2}\sqrt{2} \in 2\pi\mathbb{Z} \qquad \vee \qquad 2\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)\sqrt{2} - 2\frac{\pi}{2}\sqrt{2} \in 2\pi\mathbb{Z},$$

also

$$(1+k)\sqrt{2} \in \mathbb{Z} \qquad \vee \qquad k\sqrt{2} \in \mathbb{Z}.$$

Das ist aber unmöglich, da $\sqrt{2}$ irrational ist und $k \neq 0 \neq 1 + k$ gilt.

Also ist f_2 nicht periodisch.

Aufgabe 201224:
Man untersuche, ob es ein Polynom

$$p(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$$

mit ganzzahligen Koeffizienten $a_0, a_1, ..., a_n$ gibt, das
a) für drei ganzzahlige paarweise voneinander verschiedene Werte von x den Wert 1 und für einen weiteren ganzzahligen Wert von x den Wert 30 annimmt;
b) für vier ganzzahlige paarweise voneinander verschiedene Werte von x den Wert 1 und für einen weiteren ganzzahligen Wert von x den Wert 30 annimmt.
Bejahendenfalls gebe man im Falle a) bzw. im Falle b) ein solches Polynom an.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, es gibt ein Polynom $p(x)$ mit ganzzahligen Koeffizienten und m ($m = 3$ oder $m = 4$) paarweise verschiedene ganze Zahlen $x_1, x_2, ..., x_m$, so dass

$$p(x_1) = p(x_2) = ... = p(x_m) = 1$$

und eine weitere ganze Zahl x_0, so dass $p(x_0) = 30$ ist.
Dann gilt, wenn man $f(x) = p(x) - 1$ setzt,

$$f(x_1) = f(x_2) = ... = f(x_m) = 0$$

also ist das Polynom $f(x)$ durch die Polynome $x - x_1$, $x - x_2$, ..., $x - x_m$ teilbar, und wenn man die Division ausführt, entsteht

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2)...(x - x_m)g(x) \qquad (1)$$

wobei $g(x)$ ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten ist. Ferner gilt dann

$$p(x_0) = 30 \qquad \text{also} \qquad f(x_0) = p(x_0) - 1 = 29 \qquad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt

$$(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)...(x_0 - x_m)g(x_0) = 29 \qquad (3)$$

Dabei sind die Faktoren $x_0 - x_1$, $x_0 - x_2$, ... , $x_0 - x_m$, $g(x)$ sämtlich ganzzahlig, sie können also, weil 29 eine Primzahl ist, nur gleich 1, -1, 29, -29 sein. Ferner sind die Faktoren $x_0 - x_1$, $x_0 - x_2$, ... , $x_0 - x_m$ paarweise verschieden, und es kann nur einer dieser Faktoren den Betrag 29 haben, weil sonst die linke Seite von (3) durch 29^2 teilbar wäre.

Daher können insgesamt höchstens drei solche Faktoren auftreten; d. h., es folgt $m \leq 3$ und somit zu b) das Ergebnis: Es gibt kein Polynom mit diesen Eigenschaften.
Umgekehrt kann man (3) für $m = 3$ z. B. dadurch erfüllen, dass man

$$x_0 - x_1 = 1, \qquad x_0 - x_2 = -1, \qquad x_0 - x_3 = -29$$

erreicht, für x_0 eine beliebige ganze Zahl, etwas $x_0 = 0$, setzt und für $g(x)$ ein beliebiges Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten wählt, das die Bedingung $g(x_0) = 1$ erfüllt, etwa das konstante Polynom $g(x) = 1$. Hiermit, d. h. mit $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 29$, wird das in (1) angegebene Polynom

$$f(x) = (x+1)(x-1)(x-29) = x^3 - 29x^2 - x + 29$$

also

$$p(x) = f(x) + 1 = x^3 - 29x^2 - x + 30 \qquad (4)$$

Für dieses Polynom gilt in der Tat

$$p(-1) = p(1) = p(29) = 1 \qquad ; \qquad p(0) = 30$$

Damit ist a) gezeigt: Es gibt ein Polynom mit den genannten Eigenschaften, z. B. das in (4) genannte Polynom.

Aufgabe 271223:
a) Für jede natürliche Zahl n werde eine Funktion f (mit dem Definitionsbereich aller reellen $x \neq 0$) durch

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} (k-2) \cdot x^k$$

definiert. Man ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen n, für die die so erklärte Funktion f die Gleichung $f(-1) = -f(1)$ erfüllt.
b) Für jede natürliche Zahl n werde eine Funktion g (mit demselben Definitionsbereich) durch

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3k-2} \cdot x^k$$

definiert. Man untersuche, ob es eine natürliche Zahl n gibt, für die die so erklärte Funktion g die Gleichung $g(-1) = -g(1)$ erfüllt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(a) Es gilt genau dann $f(-1) = -f(1)$, wenn $f(1) + f(-1) = 0$ gilt. Für jede natürliche Zahl n ist nun

$$f(1) = (-2) + (-1) + 0 + 1 + 2 + ... + (n-2)$$
$$f(-1) = (-2) - (-1) + 0 - 1 + 2 - +... + (-1)^{n-2}(n-2)$$

Daraus folgt: Ist n gerade, etwa $n = 2m$ mit natürlichem m, so gilt

$$f(1) + f(-1) = 2((-2) + 0 + 2 + ... + (2m-2)) \qquad (1)$$

ist n ungerade, etwa $n = 2m+1$ mit natürlichem m, so gilt (für dieses m) ebenfalls die Gleichung (1).
Für $m = 0,1,2$ nimmt die rechte Seite von (1) die Werte $2(-2)$, $2(-2)$, $2 \cdot 0$ an. Für größere m kommen nur noch positive Summanden hinzu. Also gilt $f(1) + f(-1) = 0$ genau für $m = 2$; damit ist gezeigt: $f(-1) = -f(1)$ gilt genau für $n = 4$ und $n = 5$.

(b) Es gilt genau dann $g(-1) = -g(1)$, wenn $g(1) + g(-1) = 0$ gilt. Für jede natürliche Zahl n ist

$$g(1) = \frac{1}{-2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + ... + \frac{1}{3n-2}$$
$$g(-1) = \frac{1}{-2} - \frac{1}{1} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + -... + (-1)^{n-2} \cdot \frac{1}{3n-2}$$

Daraus folgt: Ist mit natürlichem m entweder $n = 2m$ oder $n = 2m+1$ so ist

$$g(1) + g(-1) = 2\left(\frac{1}{-2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{10} + ... + \frac{1}{6m-2}\right) = -1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + ... + \frac{1}{3m-1}$$

Für $m \leq 5$ ist nun

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+...+\frac{1}{3m-1} \leq \frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{8}+\frac{1}{11}+\frac{1}{14} < \frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{2}{15}+\frac{2}{21}+\frac{1}{14} = 1$$

also $g(1)+g(-1) < 0$.
Für $m \geq 6$ ist nun

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+...+\frac{1}{3m-1} \geq \frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{8}+\frac{1}{11}+\frac{1}{14}+\frac{1}{17} > \frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{20} = 1$$

also $g(1)+g(-1) > 0$.
Daher gibt es keine natürliche Zahl m mit $g(1)+g(-1)=0$ und folglich auch keine natürliche Zahl n mit $g(-1)=-g(1)$.

Aufgabe 311223:
Man ermittle alle diejenigen Tripel $(a;b;c)$ natürlicher Zahlen, mit denen durch

$$f(x)=\frac{x^2+ax+b}{x^2+cx+b}$$

eine Funktion f definiert wird, die folgende Bedingungen erfüllt:
(1) Die Funktion f ist für alle reellen x definiert.
(2) Es gilt $1 < f(2) < f(1) < 2$.
(3) Die Funktion f besitzt zwei verschiedene reelle Nullstellen.

Lösung von MontyPythagoras:
Die Funktion kann mittels quadratischer Ergänzung auch wie folgt dargestellt werden:

$$f(x)=\frac{\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+b-\frac{a^2}{4}}{\left(x+\frac{c}{2}\right)^2+b-\frac{c^2}{4}}$$

Wegen (1) darf der Nenner keine Nullstelle haben, was genau dann der Fall ist, wenn

$$b > \frac{c^2}{4} > 0 \qquad (I)$$

Der Nenner ist somit immer positiv. Wegen (3) muss außerdem gelten:

$$b < \frac{a^2}{4} \qquad (II)$$

Aus (2) folgen drei Ungleichungen:

$$1 < \frac{4+2a+b}{4+2c+b} \qquad (III)$$

$$\frac{4+2a+b}{4+2c+b} < \frac{1+a+b}{1+c+b} \qquad (IV)$$

$$\frac{1+a+b}{1+c+b} < 2 \qquad (V)$$

Aus (III):

$$4+2a+b > 4+2c+b$$

Also:

$$a > c$$

Mithilfe von (IV) erhält man:

$$(4+2a+b)(1+c+b) < (4+2c+b)(1+a+b)$$

$$4+4c+4b+2a+2ac+2ab+b+bc+b^2 < 4+4a+4b+2c+2ac+2bc+b+ab+b^2$$
$$2c+ab < 2a+bc$$
$$0 < (2-b)(a-c)$$

Da $(a-c) > 0$ ist, muss auch
$$b < 2$$
sein. Deswegen und wegen (I) muss schon einmal $b=1$ sein. Wegen (I) muss aber auch
$$0 < c^2 < 4$$
sein. Daraus folgt $c=1$. Aus Gleichung (II) folgt
$$a > 2$$
und aus (V) erhält man:
$$\frac{2+a}{3} < 2$$
$$2+a < 6$$
$$a < 4$$
Daher muss $a=3$ sein. Das Lösungstripel lautet deshalb $(a;b;c)=(3;1;1)$, alle Ungleichungen sind erfüllt.

III Runde 3

Aufgabe 041232:
Es sei
$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$$
mit reellen Zahlen a,b,c,d als Koeffizienten $(c\neq 0)$.
Für welche reellen Zahlen x wird durch die Zuordnung $x \to y = f(x)$ eine Funktion definiert?
Ohne Anwendung der Differentialrechnung ist anzugeben, welchen Bedingungen die Koeffizienten a,b,c,d genügen müssen, damit diese Funktion in jedem ihrer Definitionsbereiche streng monoton abnehmend ist.

Lösung von Kitaktus:
Die erste Frage ist etwas eigenwillig formuliert. Gefragt ist vermutlich nach dem maximalen Definitionsbereich innerhalb der reellen Zahlen.
Der Nenner darf nicht 0 sein, es muss also $cx \neq -d$ bzw. $x \neq -\frac{d}{c}$ gelten ($c \neq 0$!).
Für alle anderen reellen x ist der Zähler definiert und der Nenner ungleich 0, so dass der Quotient $\frac{ax+b}{cx+d}$ definiert ist.
Der maximale Definitionsbereich ist demnach $D = R \setminus \left(\{-\frac{d}{c}\}\right.$.
Es gilt
$$ax+b=\frac{a}{c}\cdot(cx+d)+\left(b-\frac{ad}{c}\right)$$
$f(x)$ lässt sich daher umschreiben zu
$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{\frac{a}{c}\cdot(cx+d)}{cx+d}+\frac{b-\frac{ad}{c}}{cx+d}=\frac{a}{c}+\frac{b-\frac{ad}{c}}{cx+d}$$
Es seien x_1 und x_2 beliebige reelle Zahlen mit $x_1 < x_2 < -\frac{d}{c}$ oder $-\frac{d}{c} < x_1 < x_2$
$$f(x_1) > f(x_2) \Leftrightarrow \frac{a}{c}+\frac{b-\frac{ad}{c}}{cx_1+d} > \frac{a}{c}+\frac{b-\frac{ad}{c}}{cx_2+d} \Leftrightarrow \frac{b-\frac{ad}{c}}{cx_1+d} > \frac{b-\frac{ad}{c}}{cx_2+d}$$

Multiplikation mit $(cx_1+d)(cx_2+d)$, was in beiden Fällen positiv ist, ergibt:

$$f(x_1) > f(x_2) <=> \left(b - \frac{ad}{c}\right) \cdot (cx_2+d) > \left(b - \frac{ad}{c}\right) \cdot (cx_1+d) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(b - \frac{ad}{c}\right) \cdot c \cdot (x_2 - x_1) > 0 \Leftrightarrow (bc - ad) > 0 \quad (\text{da } x_2 - x_1 > 0).$$

Die Funktion f ist also genau dann in den beiden Intervallen $\left(-\infty, -\frac{d}{c}\right)$ und $\left(-\frac{d}{c},\infty\right)$ streng monoton fallend, wenn $bc > ad$ gilt.

Aufgabe 051233:
a) Man ermittle sämtliche Funktionen $y = f(x)$, die für alle reellen Zahlen definiert sind und der Gleichung

$$a \cdot f(x-1) + b \cdot f(1-x) = cx$$

(a, b, c reelle Zahlen) genügen, falls $|a| \neq |b|$ gilt.
b) Man diskutiere ferner den Fall $|a| = |b|$.

Lösung von Nuramon:
Die Substitution $z := x-1$ zeigt, dass die Funktionalgleichung dann erfüllt ist, wenn $af(z) + bf(-z) = c(z+1)$ (*) für alle $z \in \mathbb{R}$ gilt.
Daher gilt auch $af(-z) + bf(z) = c(1-z)$ (**).
Multipliziert man (*) mit a und addiert das $-b$-fache von (**), erhält man

$$(a^2 - b^2)f(z) = ((a+b)z + a - b)c \qquad (***)$$

Falls $|a| \neq |b|$, dann ist $a^2 - b^2 \neq 0$ und es folgt $f(z) = c(\frac{z}{a-b} + \frac{1}{a+b})$. Eine Probe zeigt, dass dies tatsächlich eine Lösung der Funktionalgleichung ist:

$$ac(\frac{z}{a-b} + \frac{1}{a+b}) + bc(\frac{-z}{a-b} + \frac{1}{a+b}) = c(\frac{z(a-b)}{a-b} + \frac{a+b}{a+b}) = c(z+1)$$

Falls $a = b$, so ist (***) äquivalent zu $0 = acz$. Einsetzen von $z = 1$ zeigt, dass die Funktionalgleichung nur dann eine Lösung haben kann, wenn $ac = 0$, also $a = 0 \vee c = 0$ ist.
Ist $a = 0$, so ist die Funktionalgleichung äquivalent zu $0 = cx$ ist. Einsetzen von $x = 1$ zeigt, dass $c = 0$ gelten muss.
Ist $a \neq 0$, aber $c = 0$, so ist (*) äquivalent zu $f(y) + f(-y) = 0$. In diesem Fall ist also jede ungerade Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Lösung der Funktionalgleichung.
Falls $a = -b$ und $a \neq b$ (insbesondere also $a \neq 0$), dann zeigt (***), dass $0 = c$ gelten muss.
Damit ist (*) äquivalent zu $f(z) - f(-z) = 0$, was genau dann erfüllt ist, wenn $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine gerade Funktion ist.

Zusammenfassend gilt also:
Falls $|a| \neq |b|$, dann ist $f(x) = c(\frac{x}{a-b} + \frac{1}{a+b})$ die einzige Lösung der Funktionalgleichung.
Falls $|a| = |b|$ und $c \neq 0$, dann hat die Funktionalgleichung keine Lösung.
Falls $a = b \neq 0$ und $c = 0$, dann ist f eine Lösung genau dann, wenn f eine ungerade Funktion ist.
Falls $a = -b \neq 0$ und $c = 0$, dann ist f eine Lösung genau dann, wenn f eine gerade Funktion ist.
Falls $a = b = c = 0$ ist, dann erfüllen alle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktionalgleichung.

Aufgabe 071234:
Es sei $y = f(x)$ eine für alle reellen Zahlen x definierte Funktion, die für alle derartigen x folgende Gleichung erfüllt

$$f(x+1) = (x+1) \cdot f(x) \qquad (1)$$

Außerdem sei $y = g(x)$ eine ebenfalls für alle reellen x definierte Funktion. Für alle x sei $f(x)$ von 0 verschieden.
Beweisen Sie!
Die Funktion $\phi(x) = f(x) \cdot g(x)$ erfüllt genau dann für alle reellen x die Gleichung

$$\phi(x+1) = (x+1)\phi(x) \qquad (2)$$

wenn $g(x)$ eine periodische Funktion mit der Periodenlänge 1 ist.

Lösung von cyrix:
Zuerst nehmen wir an, dass g 1-periodisch ist, für alle reellen x also $g(x+1) = g(x)$ gilt. Dann ist

$$\phi(x+1) = f(x+1) \cdot g(x+1) = (x+1) \cdot f(x) \cdot g(x) = (x+1) \cdot \phi(x)$$

erfüllt also die gewünschte Funktionalgleichung.

Anders herum sei nun für jedes x die Gleichung $\phi(x+1) = (x+1) \cdot \phi(x)$ erfüllt, was nach Einsetzen der Definition von ϕ äquivalent ist zu

$$f(x+1) \cdot g(x+1) = (x+1) \cdot f(x) \cdot g(x) = f(x+1) \cdot g(x)$$

Da $f(x+1) \neq 0$, kann man diese zweite Gleichheit durch Division durch $f(x+1)$ zum Gewünschten $g(x+1) = g(x)$ äquivalent umformen.

Bemerkung: Die Annahme aus der Aufgabenstellung, dass $f(x)$ für alle reellen Zahlen ungleich 0 wäre, steht im Widerspruch zur Funktionalgleichung, die f erfüllen soll, denn es ist sonst $f(0) = 0 \cdot f(-1) = 0$. Man kann die Aufgabe aber leicht retten, indem man sich nur auf positive Argumente x einschränkt.

Aufgabe 091236:
a) Ermitteln Sie den Wertevorrat W der für alle reellen x durch $y = \sin x + \cos x$ erklärten Funktion (d. h. alle diejenigen y, zu denen ein x mit $y = \sin x + \cos x$, x reell, existiert)!
b) Zeigen Sie, dass es eine ganzrationale Funktion $g(y)$ mit folgender Eigenschaft gibt!
Gehört y zu W und ist x eine Zahl mit $\sin x + \cos x = y$, so ist $\sin^7 x + \cos^7 x = g(y)$.

Lösung von cyrix:
a) Mit $\sin x$ und $\cos x$ ist auch die Funktion $y = \sin x + \cos x$ 2π-periodisch stetig und differenzierbar. Also nimmt sie ihre globalen Extremwerte an Stellen an, für die die Ableitungsfunktion $y' = \cos x - \sin x$ verschwindet, für die also $\cos x = \sin x$ gilt.

Dies ist im Intervall $[0; 360°)$ genau für $x = 45°$ und $x = 225°$ der Fall. Dann nimmt y die Werte $y = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ bzw. $y = 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2}$ an, welche dann Maximum und Minimum der Funktion sind. Aufgrund der Stetigkeit werden auch alle Werte dazwischen angenommen (Zwischenwertsatz), sodass sich $W = [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$ ergibt.

b) Wir zeigen allgemeiner, dass für jedes nicht-negative ganze n ein Polynom $g_n(y)$ mit $\sin^n x + \cos^n x = g_n(y) = g_n(\sin x + \cos x)$ existiert:

Für $n = 0$ wähle man $g_0(y) := 2$, da $\sin^0 x + \cos^0 x = 1 + 1 = 2$ gilt.
Für $n = 1$ wähle man $g_1(y) := y$, da $\sin^1 x + \cos^1 x = \sin x + \cos x = y$ gilt.
Für $n = 2$ wähle man $g_1(y) := 1$, da $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ gilt. Insbesondere ist auch

$$\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \cdot ((\sin x + \cos x)^2 - (\sin^2 x + \cos^2 x)) = \frac{1}{2} \cdot (y^2 - 1) =: h(y)$$

ein Polynom in y.
Sei ab nun die Aussage schon für alle Werte $k \leq n$ bewiesen. Dann ist

$$y^{n+1} = (\sin x + \cos x)^{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} \sin^i x \cos^{n+1-i} x =$$

$$= \sin^{n+1} x + \cos^{n+1} x + \sum_{i=1}^{n} \binom{n+1}{i} \sin^i \cos^{n+1-i}$$

also

$$\sin^{n+1} x + \cos^{n+1} x = y^{n+1} - \sum_{i=1}^{n} \binom{n+1}{i} \sin^i \cos^{n+1-i}$$

Wegen $\binom{n+1}{i} = \binom{n+1}{n+1-i}$ können wir nun je zwei solche Summanden zusammenfassen und erhalten für ein solches Paar mit $i < \frac{n+1}{2}$:

$$\binom{n+1}{i} \cdot (\sin^i x \cos^{n+1-i} x + \sin^{n+1-i} x \cos^i x) = \binom{n+1}{i} \cdot \sin^i x \cos^i x \cdot (\cos^{n+1-2i} x + \sin^{n+1-2i} x) =$$

$$= \binom{n+1}{i} \cdot h(y)^i \cdot g_{n+1-2i}(y)$$

Existiert ein „mittlerer Summand", also eine ganze Zahl i mit $i = \frac{n+1}{2}$, so lässt sich der zugehörige Summand $\binom{n+1}{i} \sin^i x \cos^{n+1-i} x$ mit keinem anderen zusammenfassen. Er ist aber wegen $i = n+1-i$ gleich dem Wert $\binom{n+1}{i} h(y)^i$.
Damit ist auch $\sin^{n+1} x + \cos^{n+1} x$ darstellbar als Differenz eines Polynoms mit einer Summe von Produkten von Polynomen, also insgesamt einem Polynom, in der Variablen $y = \sin x + \cos x$, $\square$.
Einsetzen von $n = 7$ liefert dann die Behauptung der Aufgabenstellung.

Aufgabe 101233:
Es sei f die für alle reellen Zahlen x durch $f(x) = \frac{1-x^2}{x^6+4}$ definierte Funktion.
Es ist zu entscheiden, ob unter allen Funktionswerten $f(x)$ ein größter und ein kleinster Wert vorkommen. Diese Werte sind gegebenenfalls zu ermitteln.

Lösung von cyrix:
Da $x^2 \geq 0$ ist, ist die Frage äquivalent zur Untersuchung der Funktion $g(z) := \frac{1-z}{z^3+4}$, wobei man nur diejenigen z mit $z \geq 0$ betrachtet, denn es ist $g(x^2) = f(x)$.

Wegen $z \geq 0$ ist $1 - z \leq 1$ und $z^3 + 4 \geq 4 > 0$, also $g(z) \leq \frac{1}{4}$. Tatsächlich ist $g(0) = f(0) = \frac{1}{4}$, sodass dies der größte Funktionswert ist, den g bzw. f in ihren jeweiligen betrachteten Definitionsbereichen annehmen.
Wir betrachten nun die Funktion

$$g'(z) = \frac{-(z^3+4) - (1-z) \cdot 3z^2}{(z^3+4)^2} = -\frac{1}{(z^3+4)^2} \cdot (z^3 + 4 + 3z^2 - 3z^3)$$

Es ist

$$g'(z) = 0 \Leftrightarrow z^3 + 4 + 3z^2 - 3z^3 = 0 \Leftrightarrow 0 = 2z^3 - 3z^2 - 4 = (z-2) \cdot (2z^2 + z + 2)$$

Da

$$2z^2 + z + 2 = (z^2 + 2z + 1) + z^2 + 1 = (z+1)^2 + z^2 + 1 \geq 1 > 0$$

gilt, verschwindet also $g'(z)$ genau für $z = 2$.
Im Intervall $[0; \infty)$ nimmt g, wie schon gesehen, an der Stelle 0 sein globales Maximum von $\frac{1}{4} > 0$ an. Für $z > 1$ ist $g(z)$ sogar negativ, aber aufgrund des größeren Grades des Polynoms im Nenner im Vergleich zu dem des Zählers ist $\lim_{z\to\infty} g(z) = 0$. Also kann nicht g monoton fallend sein, sodass, da es stetig differenzierbar ist, seine Ableitungsfunktion mindestens eine Nullstelle haben muss, an welcher

die Funktion g von monoton fallend auf monoton steigend wechselt. Diese Stelle ist, wie oben berechnet, eindeutig bestimmt mit $z = 2$.

Also ist $g(z)$ für alle z im Intervall $[0, 2]$ monoton fallend und für alle z im Intervall $[2, \infty)$ monoton steigend, sodass an der Stelle $z = 2$ die Funktion g ihr globales Minimum mit $g(2) = \frac{1-2}{2^3+4} = -\frac{1}{12}$ annimmt.
Damit ist auch das globale Minimum von f gleich diesem Wert $-\frac{1}{12}$ und wird an den Stellen $x = \pm\sqrt{2}$ angenommen.

Aufgabe 101234:
Es sind alle ganzrationalen Funktionen $y = f(x)$ anzugeben, die für alle reellen x die Gleichungen $f(t \cdot x) = t \cdot f(x)$ erfüllen. Dabei sei t eine beliebig gegebene und dann festgehaltene zu denkende reelle Zahl.

Lösung von cyrix:
Ist $t = 1$, so erfüllen offenbar alle ganzrationalen Funktionen f die Eigenschaft $f(1 \cdot x) = f(x) = 1 \cdot f(x)$.
Ist $t = 0$, so folgt $f(0) = f(0 \cdot x) = 0 \cdot f(x) = 0$ für beliebige reelle x. Dies wird offenbar von allen ganzrationalen Funktionen mit Absolutglied 0 erfüllt.
Sei ab nun $t \notin 0; 1$. Dann sind die Potenzen $t, t^2, t^3, \ldots$ alle paarweise verschieden. Dann folgt induktiv für alle positiven ganzen Zahlen k die Gleichheit

$$f(t^k) = f(t \cdot t^{k-1}) = t \cdot f(t^{k-1}) = \cdots = t^k \cdot f(1)$$

Wir betrachten die ganzrationale Funktion $g(x) := f(x) - x \cdot f(1)$.
Dann gilt mit der eben gezeigten Eigenschaft für alle positiven ganzen Zahlen k die Gleichung $g(t^k) = f(t^k) - t^k \cdot f(1) = 0$, sodass g die unendlich vielen paarweise verschiedenen Nullstellen t^k, $k \in \mathbb{N}$ besitzt.
Da aber nur eine einzige ganzrationale Funktion, nämlich die Nullfunktion, unendlich viele Nullstellen besitzt, ist $g(x) = 0$ für alle x, womit $f(x) = x \cdot f(1)$ für alle reellen Zahlen x folgt.
Die einzigen Funktionen, die dies erfüllen, sind die linearen Funktionen ohne Absolutglied, also $f(x) = a \cdot x$ mit einer reellen Zahl a. (Dann ist $f(1) = a$.) Die Probe bestätigt, dass diese Funktionen tatsächlich die Funktionalgleichung erfüllen: $f(t \cdot x) = a \cdot (t \cdot x) = t \cdot (a \cdot x) = t \cdot f(x)$.

Aufgabe 121236A:
Es sei f eine Funktion, die für alle reellen Zahlen x definiert ist und die folgenden Eigenschaften hat:

(1) Für alle x gilt $f(x) = x \cdot f(x + 1)$.
(2) Es gilt $f(1) = 1$.

a) Man ermittle alle ganzen Zahlen n, für die $f(n) = 0$ gilt.
b) Es seien m und n beliebige ganze Zahlen, und es sei $f(x + m)$ gegeben. Man berechne $f(x + n)$.
c) Man gebe eine spezielle Funktion f_0 an, die die obigen Eigenschaften besitzt, und zeichne den Graph dieser Funktion im Intervall $-3 \leq x \leq 4$.

Lösung von cyrix:
a) Induktiv zeigt man leicht für alle positiven ganzen Zahlen n die Gleichung $f(n) = \frac{1}{(n-1)!} \neq 0$: Sicherlich stimmt diese Aussage für $n = 1$, denn $f(1) = 1 = \frac{1}{1} = \frac{1}{(1-1)!}$. Und gilt die Aussage für ein $n > 0$ so wegen $f(n+1) = \frac{1}{n} \cdot f(n) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{(n-1)!} = \frac{1}{n!} = \frac{1}{(n+1-1)!}$ auch für $n + 1$, also für alle positiven ganzen Zahlen.

Dagegen ist $f(0) = 0 \cdot f(1) = 0$ und somit folgt für alle negativen ganzen Zahlen n wegen $f(n) = n \cdot f(n+1) = n \cdot 0 = 0$ auch $f(n) = 0$. Es ist also $f(n)$ für ganzzahlige n genau dann gleich Null, wenn n eine nichtpositive ganze Zahl ist.

b) Ist x eine ganze Zahl, so auch $n+x$. Dann ist $f(n+x)=0$, falls $n+x\leq 0$ gilt, und sonst $f(n+x)=\frac{1}{(n+x-1)!}$. Sei ab nun $x\notin\mathbb{Z}$.

Ist $m=n$, so gilt $f(n+x)=f(m+x)$.

Ist $n>m$, so erhält man durch wiederholtes Anwenden der Bedingung (1) $f(n+x)=\frac{1}{n-1+x}\cdot\frac{1}{n-2+x}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{m+x}\cdot f(m+x)$.

Und ist $n<m$, so erhält man durch wiederholtes Anwenden von (1) $f(n+x)=(m-1+x)\cdot(m-2+x)\cdot\ldots\cdot(n+x)\cdot f(m+x)$.

c) Die folgende Funktion f_0 erfüllt alle genannten Eigenschaften: $f_0(x):=\begin{cases}\frac{1}{(x-1)!} & \text{, wenn } x\in\mathbb{Z}_{>0}\\ 0 & \text{, sonst}\end{cases}$.

Offenbar erfüllt f_0 die Bedingung (2), da $f_0(1)=\frac{1}{0!}=1$ gilt und, wie in Aufgabenteil a) nachgerechnet, auch die Bedingung (1) für alle ganzen Zahlen x. Ist dagegen $x\notin\mathbb{Z}$, so gilt erst recht $0=f(x)=x\cdot 0=x\cdot f(x+1)$, sodass f_0 eine solche Funktion ist.

Aufgabe 141234:
Es ist zu untersuchen, ob es eine Funktion $y=\log_a(bx+c)$ mit a,b,c reell; $a>1$ gibt, deren Graph in einem x,y-Koordinatensystem durch die Punkte $(2;2)$, $(-1;0)$ und $(0;1)$ verläuft.
Man gebe, falls es eine solche Funktion gibt, alle reellen geordneten Zahlentripel (a,b,c) an, für die das zutrifft.

Lösung von cyrix:
Wegen $1=y(0)=\log_a(c)$ ist $c=a$. Wegen

$$0=y(-1)=\log_a((1-)\cdot b+c)=\log_a(c-b)$$

ist $c-b=1$, also $b=c-1=a-1$. Und wegen

$$2=y(2)=\log_a(2b+c)=\log_a(3a-2)$$

ist $a^2=3a-2$, also $a^2-3a+2=0$ bzw.

$$a=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}-2}=\frac{3\pm 1}{2}$$

wobei die Lösung der quadratischen Gleichung mit negativem Vorzeichen der Wurzel entfällt, da sie auf $a=1$ führt, was im Widerspruch zur Aufgabenstellung steht. Also muss $a=c=2$ und $b=1$ gelten. Einsetzen dieser Werte bestätigt, dass die entsprechende Funktion durch die drei Punkte verläuft, sodass es genau eine solche Funktion gibt, nämlich die mit den Parametern $(a,b,c)=(2,1,2)$.

Aufgabe 141236B:
Es sei p eine von Null verschiedene reelle Zahl und f eine für alle reellen Zahlen x definierte Funktion mit der Eigenschaft

$$f(x+p)=\frac{f(x)}{3f(x)-1}$$

für alle reellen x. (1)
a) Man beweise, dass jede derartige Funktion f (sofern es solche gibt) periodisch ist, d. h., dass es zu ihr eine von Null verschiedene reelle Zahl q gibt, so dass $f(x+q)=f(x)$ für alle reellen x gilt. (2)

b) Man gebe für einen speziellen Wert von p eine solche nicht konstante Funktion f an.
Hinweis: Man kann insbesondere untersuchen, ob eine Funktion vom Typ

$$f(x) = \frac{a + b \cdot \sin^2 x}{c + d \cdot \sin^2 x}$$

bei geeigneten Werten der Konstanten a, b, c, d für alle reellen x definiert ist, die Eigenschaft (1) hat und nicht konstant ist.

Lösung von ochen:
a) Für eine beliebige reelle Zahl x berechnen wir $f(x + 2p)$.

$$f(x+2p) = \frac{f(x+p)}{3f(x+p)-1} = \frac{\frac{f(x)}{3f(x)-1}}{\frac{3f(x)}{3f(x)-1} - 1} = \frac{\frac{f(x)}{3f(x)-1}}{\frac{3f(x)-(3f(x)-1)}{3f(x)-1}} = \frac{\frac{f(x)}{3f(x)-1}}{\frac{1}{3f(x)-1}} = f(x).$$

Die Funktion f ist also $2p$-periodisch. Es erfüllt also $q = 2p$ die gewünschte Eigenschaft.

b) Sei p beliebig. Wir wählen

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{falls } [\frac{x}{p}] \text{ gerade ist} \\ 1 & \text{falls } [\frac{x}{p}] \text{ ungerade ist} \end{cases}.$$

So gilt für alle x mit geradem $[\frac{x}{p}]$

$$\frac{f(x)}{3f(x)-1} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}-1} = 1 = f(x+p),$$

da $[\frac{x+p}{p}] = [\frac{x}{p}] + 1$ ungerade ist.

Für alle x mit ungeradem $[\frac{x}{p}]$ gilt

$$\frac{f(x)}{3f(x)-1} = \frac{1}{3-1} = \frac{1}{2} = f(x+p),$$

da $[\frac{x+p}{p}] = [\frac{x}{p}] + 1$ gerade ist.

Aufgabe 151234:
Definition: Eine gebrochene rationale Funktion f heißt echt gebrochen, wenn sie sich in ihrem Definitionsbereich in der Form

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \qquad \text{mit}$$
$$u(x) = a_m x^m + ... + a_1 x + a_0; \quad a_m \neq 0$$
$$v(x) = b_n x^n + ... + b_1 x + b_0; \quad b_n \neq 0 \quad \text{und} \quad m < n$$

darstellen lässt.
Es ist zu untersuchen, ob die Summe zweier echt gebrochener rationaler Funktionen wieder eine echt gebrochene rationale Funktion ist, wenn die Summe von der Funktion

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \qquad \text{mit}$$
$$u(x) = a_m x^m + ... + a_1 x + a_0; \quad \text{alle} \quad a_m = ... = a_0 = 0$$

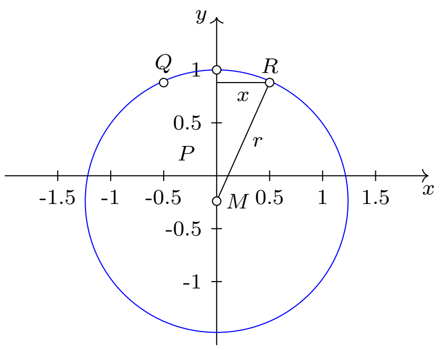
verschieden ist.

Lösung von cyrix:
Es seien $f_1(x) = \frac{u_1(x)}{v_1(x)}$ und $f_2(x) = \frac{u_2(x)}{v_2(x)}$ echt gebrochen rationale Funktionen, wobei für $i = 1{,}2$ die Polynome u_i den jeweiligen Grad z_i und die Polynome v_i den jeweiligen Grad n_i haben, wobei jeweils $z_i < n_i$ gilt.

Dann ist
$$f_1(x) + f_2(x) = \frac{u_1(x) \cdot v_2(x) + u_2(x) \cdot v_1(x)}{v_1(x) \cdot v_2(x)}$$
Das Nenner-Polynom besitzt den Grad $n_1 + n_2$, während das Zähler-Polynom höchstens den Grad $max(z_1 + n_2, z_2 + n_1) < n_1 + n_2$ besitzt, sodass auch die Summe $f_1(x) + f_2(x)$ in jedem Fall echt gebrochen ist.

Aufgabe 161236A:
Für jede reelle Zahl x mit $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$ werde in einem ebenen rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem der Kreis durch die Punkte $P(0;1)$, $Q(x;\cos x)$ und $R(-x;\cos(-x))$ gelegt.
a) Man gebe eine Funktion f so an, dass für jede dieser Zahlen x der genannte Kreis den Radius $r = f(x)$ hat.
b) Man berechne $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, falls dieser Grenzwert existiert.
c) Man ermittle den Wertebereich der Funktion f mit der Menge aller Zahlen x, für die $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$ gilt, als Definitionsbereich.

Lösung von MontyPythagoras:
Mit $\cos(-x) = \cos(x)$ ergibt sich folgende Skizze:



Es gilt
$$(r - (1 - \cos x))^2 + x^2 = r^2$$
$$r^2 - 2r(1 - \cos x) + (1 - \cos x)^2 + x^2 = r^2$$
$$2r(1 - \cos x) = (1 - \cos x)^2 + x^2$$
$$r = \frac{1}{2}\left(1 - \cos x + \frac{x^2}{1 - \cos x}\right)$$
Also lautet die in Aufgabenteil a) gesuchte Funktion
$$f(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \cos x + \frac{x^2}{1 - \cos x}\right)$$
Aufgabenteil b): Während x gegen unendlich geht, wird der Nenner im letzten Term periodisch gleich null. Es existiert daher kein Grenzwert.

Aufgabenteil c): Wir benutzen $1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2}$. Dann ist
$$f(x) = \sin^2 \tfrac{x}{2} + \frac{x^2}{4\sin^2 \frac{x}{2}}$$

$$f(x) = \sin^2 \tfrac{x}{2} + \left(\frac{\frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}\right)^2$$

Da im Definitionsbereich $\frac{x}{2} > \sin \frac{x}{2} > 0$, gilt $f(x) > 1$. Außerdem ist $\left(\frac{\frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}\right)$ streng monoton steigend. Der größte Funktionswert liegt daher bei $x = \frac{\pi}{2}$ vor, und es ist

$$f(\tfrac{\pi}{2}) = \sin^2 \tfrac{\pi}{4} + \left(\frac{\frac{\pi}{4}}{\sin \frac{\pi}{4}}\right)^2 = \frac{1}{2} + (\frac{\pi}{2\sqrt{2}})^2 = \frac{\pi^2+4}{8}$$

Der Wertebereich ist somit $\left]1; \frac{\pi^2+4}{8}\right]$.

Aufgabe 151236B:
Es seien $P(x)$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten und p, q, r, s reelle Zahlen, für die $p \neq q$ gelte.
Bei der Division dieses Polynoms durch $(x-p)$ ergebe sich als Rest die Zahl r, bei der Division des gleichen Polynoms durch $(x-q)$ als Rest die Zahl s.
Welcher Rest ergibt sich unter diesen Voraussetzungen bei der Division des Polynoms $P(x)$ durch $(x-p)(x-q)$?

Lösung von ochen:
Sei $R(x)$ das Polynom, dass bei der Division des Polynoms $P(x)$ durch $(x-p)(x-q)$ entsteht. Da $(x-p)(x-q)$ den Grad 2 hat, kann R maximal den Grad 1 haben. Es gibt weiter Polynome P_1,P_2,P_3 mit

$$P(x) = (x-p)P_1(x) + r = (x-q)P_2(x) + s = (x-p)(x-q)P_3(x) + R(x).$$

Somit folgt

$$P(p) = r = R(p) \quad \text{und} \quad P(q) = s = R(q).$$

Da R höchstens den Grad 1 hat, ist es damit eindeutig bestimmt und es gilt

$$R(x) = \frac{s-r}{q-p}(x-p) + r.$$

Aufgabe 171236A:
Es sei n eine natürliche Zahl mit $n > 1$.
a) Man ermittle alle diejenigen in der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen definierten Funktionen f, die in $\mathbb{R}$ stetig sind und die Eigenschaft haben, dass für jede reelle Zahl x die Gleichung $f(x^n) = f(x) \quad (1)$ gilt.
b) Man gebe eine in $\mathbb{R}$ definierte und unstetige Funktion f an, die die Eigenschaft (1) hat.

Lösung von ochen:
Es sei f eine stetige Funktion mit $f(x) = f(x^n)$ für alle reellen Zahlen x. Weiter sei $c := f(1)$. Sei eine beliebige reelle Zahl $x > 0$. Wir betrachten die Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $x_k = x^{1/n^k}$ für alle natürlichen Zahlen k. Weiter gilt $x_0 = x$. Mit der Stetigkeit der e-Funktion folgt

$$\lim_{k\to\infty} x_k = \lim_{k\to\infty} \exp\left(\frac{1}{n^k}\ln(x)\right) = \exp\left(\lim_{k\to\infty}\frac{1}{n^k}\ln(x)\right) = 1.$$

Anderseits ist die Folge $(f(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ konstant, da für natürlichen Zahl $k > 0$ gilt

$$f(x_k) = f(x_k^n) = f(x_k^n) = f(x^{n\cdot 1/n^k}) = f(x^{1/n^{k-1}}) = f(x_{k-1}) = \ldots = f(x_0) = f(x).$$

Mit der Stetigkeit von f folgt

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f(x_k) = f(\lim_{k\to\infty} x_k) = f(1) = c$$

Da $x > 0$ beliebig gewählt war, gilt $f(x) = c$ für alle reellen Zahlen $x > 0$. Wir betrachten nun die Folge $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $y_k = \frac{1}{k}$ für alle natürlichen Zahlen k. So folgt $f(y_k) = c$ aus $y_k > 0$ für alle natürlichen Zahlen k. Wir erhalten mit der Stetigkeit von f

$$f(0) = f(\lim_{k\to\infty} y_k) = \lim_{k\to\infty} f(y_k) = c.$$

Es gilt also sogar $f(x) = c$ für alle reellen Zahlen $x \geq 0$.
Wir untersuchen nun, wie sich f für negative reelle Zahlen verhält.
Wenn n gerade ist, erhalten wir

$$f(x) = f(x^n) = c$$

für jede reelle Zahl $x < 0$, da $x^n > 0$ ist.
Wenn n ungerade ist, betrachten wir eine beliebige reelle Zahl $x < 0$ und definieren die Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $x_k = -|x|^{1/n^k}$ ur alle natürlichen Zahlen k. Weiter gilt $x_0 = x$. Mit der Stetigkeit der e-Funktion folgt

$$\lim_{k\to\infty} x_k = \lim_{k\to\infty} -\exp\left(\frac{1}{n^k}\ln|x|\right) = -\exp\left(\lim_{k\to\infty}\frac{1}{n^k}\ln|x|\right) = -1.$$

Anderseits ist die Folge $(f(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ konstant, da für natürlichen Zahl k gilt

$$f(x_k) = f(x_k^n) = f(x_k^n) = f(-|x|^{n\cdot 1/n^k}) = f(-|x|^{1/n^{k-1}}) = f(x_{k-1}) = \ldots = f(x_0) = f(x).$$

Mit der Stetigkeit von f folgt

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f(x_k) = f(\lim_{k\to\infty} x_k) = f(-1) = d$$

Da $x > 0$ beliebig gewählt war, gilt $f(x) = c$ für alle reellen Zahlen $x > 0$. Wir betrachten nun die Folge $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $y_k = -\frac{1}{k}$ für alle natürlichen Zahlen k. So folgt $f(y_k) = d$ aus $y_k < 0$ fuer alle natürlichen Zahlen k. Wir erhalten mit der Stetigkeit von f

$$c = f(0) = f(\lim_{k\to\infty} y_k) = \lim_{k\to\infty} f(y_k) = d.$$

Es gilt also sogar $f(x) = c$ für alle reellen Zahlen x.

b) Wir betrachten

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{2\pi}{\ln(n)}\ln|\ln|x||\right), & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases},$$

so gilt

$$\begin{aligned} f(x^n) &= \sin\left(\frac{2\pi}{\ln(n)}\ln|n\ln|x||\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{\ln(n)}(\ln(n) + \ln|\ln|x||)\right) \\ &= \sin\left(2\pi + \frac{2\pi}{\ln(n)}\ln|\ln|x||)\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{\ln(n)}\ln|\ln|x||)\right) = f(x) \end{aligned}$$

Aufgabe 181231:
Man ermittle alle diejenigen Polynome $f(x)$ mit reellen Koeffizienten, die für alle reellen x die Gleichung $f(x+1) - f(x) = x + 1$ erfüllen.

Lösung von MontyPythagoras:
Wir wählen den Ansatz

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Dann ist

$$f(x+1) = ax^2 + 2ax + a + bx + b + c$$

Durch Einsetzen in die Aufgabenstellung erhält man:

$$2ax + a + b = x + 1$$

woraus $a = \frac{1}{2}$ und $b = \frac{1}{2}$ folgt. Somit erfüllen alle Funktionen

$$f(x) = \frac{1}{2}(x^2 + x) + c$$

die Gleichung.

Aufgabe 181234:
Man beweise: Ist $n \geq 2$ eine ganze Zahl, so ist die für alle reellen x durch

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \cos(x\sqrt{k})$$

definierte Funktion f nicht periodisch.

Lösung von weird:
Es genügt dafür offenbar zu zeigen, dass die Gleichung $f(x) = n$ genau eine Lösung, nämlich $x = 0$ besitzt, da dies mit einer Periodizität von f klarerweise nicht vereinbar ist.
Aus $f(x) = n$ folgt nämlich, dass alle Summanden in obiger Summe den Wert 1 haben müssten, d. h., es müsste insbesondere

$$\cos(x) = \cos(x\sqrt{2}) = 1$$

gelten. Daraus folgen aber insbesondere die Gleichungen $x = 2j\pi$ für ein $j \in \mathbb{Z}$, sowie $x\sqrt{2} = 2k\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$, und die daraus resultierende Gleichung

$$j\sqrt{2} = k$$

führt nur dann nicht auf einen Widerspruch zur Irrationalität von $\sqrt{2}$, wenn $j = k = 0$, also $x = 0$ ist, q. e. d.

Aufgabe 191233A:
Man ermittle alle diejenigen Funktionen f, die für alle reellen Zahlen x definiert sind und den folgenden Bedingungen genügen:
(1) Für alle Paare $(x_1; x_2)$ reeller Zahlen gilt $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$.
(2) Es gilt $f(1) = 1$.
(3) Für alle reellen Zahlen $x \neq 0$ gilt $f(\frac{1}{x}) = \frac{1}{x^2} f(x)$.

Lösung von Kornkreis:
Aus (1) folgt $f(0+0) = f(0) + f(0)$, also $f(0) = 2f(0)$ und damit, nach Subtraktion von $f(0)$ auf beiden Seiten, $f(0) = 0$. Weiterhin gilt $f(x - x) = f(x) + f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, d. h. $0 = f(x) + f(-x)$ bzw. $f(-x) = -f(x)$. Wegen $f(1) = 1$ haben wir insbesondere $f(-1) = -1$ und $f(x+1) = f(x) + 1$.
Für alle $x \notin \{0, -1\}$ haben wir nun

$$\frac{f(x)}{x^2} + 1 = f\left(\frac{1}{x}\right) + 1 = f\left(\frac{1}{x} + 1\right) = f\left(\frac{1+x}{x}\right) = f\left(\frac{x}{1+x}\right) \cdot \left(\frac{1+x}{x}\right)^2$$

und

$$f\left(\frac{x}{1+x}\right) = f\left(1 - \frac{1}{1+x}\right) = 1 - f\left(\frac{1}{1+x}\right) = 1 - \frac{f(1+x)}{(1+x)^2} = 1 - \frac{1+f(x)}{(1+x)^2}$$

was kombiniert dann

$$\frac{f(x)}{x^2}+1=\left(1-\frac{1+f(x)}{(1+x)^2}\right)\left(\frac{1+x}{x}\right)^2=\left(\frac{1+x}{x}\right)^2-\frac{1+f(x)}{x^2}$$

also

$$2\frac{f(x)}{x^2}=\frac{2}{x}$$

und damit, zusammen mit $f(0)=0$ und $f(-1)=-1$ (aus den Vorüberlegungen bzw. (1) und (2)), gilt $f(x)=x$ für alle x.

Aufgabe 201233B:
Ist f eine im Intervall $0\le x\le 1$ definierte Funktion, so seien für sie die folgenden Bedingungen (1), (2), (3) betrachtet:
(1) Für jedes reelle x mit $0\le x\le 1$ gilt $f(x)\ge 0$.
(2) Es gilt $f(1)=1$.
(3) Für jedes reelle x_1 mit $0\le x_1\le 1$ und jedes reelle x_2 mit $0\le x_2\le 1$ und $x_1+x_2\le 1$ gilt $f(x_1+x_2)\ge f(x_1)+f(x_2)$.
a) Man beweise:
Wenn f eine Funktion ist, die den Bedingungen (1), (2), (3) genügt, so gilt $f(x)<2x$ für jedes reelle x mit $0<x\le 1$.
b) Man überprüfe, ob auch die folgende Aussage wahr ist:
Wenn f eine Funktion ist, die den Bedingungen (1), (2), (3) genügt, so gilt $f(x)\le 1{,}99\cdot x$ für jedes reelle x mit $0<x\le 1$.

Lösung von cyrix:
a) Mit $x_1:=1$ und $x_2:=0$ folgt aus den Eigenschaften $1=f(1)=f(1+0)\ge f(1)+f(0)=1+f(0)$, also $f(0)\le 0$ und wegen (1) dann $f(0)=0$.

Sei nun n eine beliebige positive ganze Zahl. Dann ist für jedes reelle x mit $0\le x\le\frac{1}{n}$ mit $x_1:=(n-1)x$ und $x_2:=x$ die Ungleichung $f(nx)\ge f((n-1)x)+f(x)$ erfüllt, woraus induktiv $f(nx)\ge n\cdot f(x)$ folgt. Insbesondere ist mit $x=\frac{1}{n}$ dann $1=f\left(\frac{n}{n}\right)\ge n\cdot f\left(\frac{1}{n}\right)$, also $f\left(\frac{1}{n}\right)\le\frac{1}{n}$.

Weiterhin ist die Funktion f monoton steigend, denn gilt $0\le x<y\le 1$, so gilt mit $x_1:=x$ und $0<x_2:=y-x$ die Ungleichung $f(y)=f(x_1+x_2)\ge f(x_1)+f(x_2)\ge f(x)+0=f(x)$.

Damit gilt also für jede positive ganze Zahl k und jedes reelle x mit $\frac{1}{2^k}<x\le\frac{1}{2^{k-1}}$ die Ungleichung $f(x)\le\frac{1}{2^{k-1}}=2\cdot\frac{1}{2^k}\le 2\cdot x$. Da jedes $0<x\le 1$ in einem dieser Intervalle liegt, ist diese Ungleichung damit für alle solchen x gezeigt, $\square$.

b) Wir zeigen zuerst, dass die Funktion $f(x):=\begin{cases}0 & \text{, wenn } x\le\frac{1}{2}\\ 1 & \text{, wenn } x>\frac{1}{2}\end{cases}$ alle drei Bedingungen erfüllt: Offensichtlich ist für alle $0\le x\le 1$ der Funktionswert $f(x)\ge 0$ und auch ist $f(1)=1$, sodass (1) und (2) erfüllt sind. Weiterhin ist f auch monoton steigend. Seien nun $0\le x_1\le 1$ und $0\le x_2\le 1$ mit $x_1+x_2\le 1$. Wäre $x_1>\frac{1}{2}$ und auch $x_2\frac{1}{2}$, so, im Widerspruch zur Voraussetzung $x_1+x_2>1$. Also muss mindestens einer der beiden Werte kleiner als oder höchstens gleich $\frac{1}{2}$ sein. Sei o. B. d. A. $x_1\le\frac{1}{2}$, so ist $f(x_1+x_2)\ge f(x_2)=0+f(x_2)=f(x_1)+f(x_2)$. Also erfüllt diese Funktion f auch Bedingung (3).

Sei nun $x=\frac{1}{1{,}995}>\frac{1}{2}$. Dann ist $f(x)=1=1{,}995\cdot x>1{,}99\cdot x$, sodass die in der Aufgabenstellung formulierte Bedingung nicht für alle $0<x\le 1$ und alle Funktionen f, die die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllen, wahr ist.

Aufgabe 211231:
Es sei $P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ ein Polynom mit rationalen Koeffizienten a_0, a_1, a_2, a_3.
Man beweise:
Wenn $P(x)$ eine Nullstelle der Form $x_0 = b + \sqrt{c}$ mit rationalen Zahlen b, c besitzt, für die $\sqrt{c}$ irrational ist, so ist auch $x_1 = b - \sqrt{c}$ eine Nullstelle von $P(x)$.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Nach Voraussetzung gilt: $P(x_0) = 0$, d. h.

$$a_3(b+\sqrt{c})^3 + a^2(b+\sqrt{c})^2 + a_1(b+\sqrt{c}) + a_0 = 0 \qquad \text{also}$$
$$a_3b^3 + 3a_3bc + a_2b^2 + a_2c + a_1b + a_0 + \sqrt{c}(3a_3b2 + a_3c + 2a_2b + a_1) = 0$$

Für die Zahlen

$$A_1 = a_3b^2 + 3a_3bc + a_2b^2a_2c + a_1b + a_0 \qquad (1)$$
$$A_2 = 3a_3b^2 + a_3c + 2a_2b + a_1 \qquad (2)$$

gilt also $A_1 + A_2\sqrt{c} = 0 \quad (3)$.
Wäre nun $A_2 \neq 0$, so folgte $\sqrt{c} = -\frac{A_1}{A_2}$ und daraus der Widerspruch, dass $\sqrt{c}$ rational wäre; denn nach Voraussetzung (1) und (2) sind A_1 und A_2 rational. Also ist $A_2 = 0 \quad (4)$. Aus (3) und (4) folgt $A_1 = 0 \quad (5)$.
Weiterhin errechnet man (unter Verwendung von (1) und (2)), dass

$$P(x_1) = P(b-\sqrt{c}) = a_3(b-\sqrt{c})^3 + a_2(b-\sqrt{c})^2 + a_1(b-\sqrt{c}) + a_0 = A_1 - A_2\sqrt{c} \qquad (6)$$

gilt. Aus (4), (5), (6) folgt $P(x_1) = 0$, womit die Behauptung bewiesen ist.

Aufgabe 211233:
Ermitteln Sie alle diejenigen Tripel (a, b, c) reeller Zahlen, für die folgendes gilt:
Die für alle reellen Zahlen $x \neq -c$ durch $f(x) = \frac{ax+b}{x+c}$ definierte Funktion f genügt den folgenden Bedingungen:
(1) Es gibt reelle Zahlen x, für die $f(x)$, $f(f(x))$ und $f(f(f(x)))$ definiert ist.
(2) Für jede solche Zahl x mit $x \neq -1$ gilt $f(f(f(x))) = \frac{x-1}{x+1}$.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Angenommen, ein Tripel (a,b,c) besitzt die verlangten Eigenschaften. Dann folgt:

Die durch $f(x) = \frac{ax+b}{x+c}$ definierte Funktion f ist nicht konstant; denn im Falle $f(x) = d \neq -c$ für alle $x \neq -c$ wäre auch $f(f(fx))) = d$ für alle $x \neq -c$, also (2) nicht erfüllt, da $\frac{x-1}{x+1} = d$ für höchstens ein x gelten kann; im Falle $f(x) = -c$ für alle $x \neq -c$ aber gäbe es kein x, für das $f(x)$ und $f(f(x))$ definiert sind, im Widerspruch zu (1).

Für jedes d hat folglich die Gleichung $ax + b = xd + cd$ nicht alle $x \neq -c$ als Lösung. Somit hat sie als lineare Gleichung höchstens eine Lösung.
Daher gibt es höchstens jeweils ein x mit $f(x) = -c$ bzw. mit $f(f(x)) = -c$. Hiernach und wegen (2) gibt es unendlich viele Zahlen $x \neq 1$, für die $f(x)$ sowie

$$f(f(x)) = \frac{(a^2+b)x + (a+c)b}{(a+c)x + (b+c^2)} \qquad \text{und}$$

$$f(f(f(x))) = \frac{(a^3+2ab+bc)x + (a^2+ac+b+c^2)b}{(a^2+ac+b+c^2)x + (ab+2bc+c^3)} \qquad (3)$$

existieren und für die

$$((a^3+2ab+bc)x+(a^2+ac+b+c^2)b)(x+1)=((a^2+ac+b+c^2)x+(ab+2bc+c^3))(x-1)$$

gilt. Aus dieser Gleichheit zweier Polynome für unendlich viele x folgen die Koeffizientengleichheiten

$$a^3+2ab+bc=a^2+ac+b+c^2 \qquad (4)$$
$$a^3+2ab+bc+(a^2+ac+b+c^2)b=-(a^2+ac+b+c^2)+ab+2bc+c^3 \qquad (5)$$
$$(a^2+ac+b+c^2)b=-(ab+2bc+c^3) \qquad (6)$$

Aus (4), (5), (6) folgt durch Addition, dass beide Seiten von (5) gleich 0 sind; hieraus und aus (4) erhält man

$$a^3+2ab+bc=ab+2bc+c^3 \qquad \text{also} \qquad a(a^2+b)=c(b+c^2)$$

und durch Addition von $ac(a+c)$

$$a(a^2+ac+b+c^2)=c(a^2+ac+b+c^2) \qquad (7)$$

Wäre $a^2+ac+b+c^2=0$, so folgte aus (6), dass (3) für kein x definiert wäre. Also ist

$$a^2+ac+b+c^2\neq 0 \qquad (8)$$

und aus (7) ergibt sich $a=c$. Hiernach und nach (4), (2) ist

$$(a^2+ac+b+c^2)b=-(a^2+ac+b+c^2)$$

wegen (8) also $b=-1$. Damit geht (4) über in

$$a^3-3a^2-3a+1=0$$

Da eine Lösung hiervon $a=-1$ lautet (bzw. nach der bekannten Abspaltung des Faktors $a+1$ von a^3+1 und von $3a^2+3a$) folgt $(a+1)(a^2-4a+1)=0$ und daraus

$$a=-1 \qquad \text{oder} \qquad a=2\pm\sqrt{3}$$

Also können nur die Funktionen f mit

$$f(x)=\frac{-x-1}{x-1} \qquad \text{für alle } x\neq 1$$
$$f(x)=\frac{(2\pm\sqrt{3})x-1}{x+(2\pm\sqrt{3}} \qquad \text{für alle } x\neq -(2\pm\sqrt{3})$$

(jeweils stets mit dem oberen oder stets mit dem unteren Vorzeichen) die die Bedingungen (1), (2) erfüllen, d. h., es können nur die Tripel

$$(-1,-1,-1) \quad ; \quad (2+\sqrt{3},-1,2+\sqrt{3}) \quad ; \quad (2-\sqrt{3},-1,2-\sqrt{3})$$

die verlangten Eigenschaften haben.

II. Für das Tripel $(-1,-1,-1)$ existieren

$$f(f(x))=\frac{-x-1}{x-1}=-\frac{1}{x}$$

für alle x mit $x\neq 1, x\neq 0$ und

$$f(f(f(x)))=f\left(-\frac{1}{x}\right)=\frac{x-1}{x+1}$$

für alle x mit $x\neq 1, x\neq 0, x\neq -1$. Für die beiden anderen Tripel existieren

$$f(f(x))=f\left(\frac{(2\pm\sqrt{3})x-1}{x+(2\pm\sqrt{3}}\right)=\frac{(3\pm 2\sqrt{3})x-(2\pm\sqrt{3})}{(2\pm\sqrt{3})x+(3\pm 2\sqrt{3})}$$

für alle x mit $x \neq -(2 \pm \sqrt{3})$, $x \neq \mp\sqrt{3}$ und

$$f(f(f(x))) = f\left(\frac{(3 \pm 2\sqrt{3})x - (2 \pm \sqrt{3})}{(2 \pm \sqrt{3})x + (3 \pm 2\sqrt{3})}\right) = \frac{(5 \pm 3\sqrt{3})(x-1)}{(5 \pm 3\sqrt{3})(x+1)}$$

für alle x mit $x \neq -(2 \pm \sqrt{3})$, $x \neq \mp\sqrt{3}$, $x \neq -1$.
Daher und wegen $5 \pm 3\sqrt{3} \neq 0$ erfüllen diese Funktionen die Bedingungen (1), (2). Folglich haben genau die Tripel

$$(-1, -1, -1) \quad ; \quad (2+\sqrt{3}, -1, 2+\sqrt{3}) \quad ; \quad (2-\sqrt{3}, -1, 2-\sqrt{3})$$

die verlangten Eigenschaften.

Aufgabe 221234:
Ist c eine positive reelle Zahl, so bezeichnet f die für alle reellen $x \neq 0$ durch $f(x) = \sin\frac{c}{x}$ definierte Funktion.
Gegeben sei nun eine beliebige natürliche Zahl $m > 1$.
a) Man ermittle (in Abhängigkeit von m) alle diejenigen positiven reellen Zahlen c, für die die Funktion f im Intervall $10 \leq x \leq 20$ genau m Nullstellen hat, unter denen sich auch die Zahlen 10 und 20 selbst befinden.
b) Für jede in a) gefundene Zahl c beweise man, dass f im Intervall $20 \leq x < \infty$ nur endlich viele Nullstellen hat.
Ferner ermittle man (in Abhängigkeit von m und für jede zu dem betreffenden m gefundene Zahl c) die größte Nullstelle von f.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Für jedes positive reelle c gilt: Eine positive Zahl x ist genau dann Nullstelle von f, wenn eine ganze Zahl k mit

$$\frac{c}{x} = k\pi \qquad (1)$$

existiert. Nun ist (1) äquivalent mit

$$x = \frac{c}{k\pi} \qquad (2)$$

Daher führt eine ganze Zahl k genau dann auf eine Nullstelle x mit $10 \leq x \leq 20$, wenn sie $10 \leq \frac{c}{k\pi} \leq 20$ erfüllt. Dies ist äquivalent mit

$$\frac{c}{20\pi} \leq k \leq \frac{c}{10\pi}$$

Insbesondere führt eine ganze Zahl k_1 bzw. k_2 genau dann vermöge (2) auf 10 bzw. 20 als Nullstelle, wenn

$$k_1 = \frac{c}{10\pi} \qquad ; \qquad k_2 = \frac{c}{20\pi}$$

gilt. Sie für ein positives reelles c diese beiden Zahlen ganz, so befinden sich im Intervall $10 \leq xleq 20$ genau dann m Nullstellen, wenn es genau m ganze Zahlen k mit

$$\frac{c}{20\pi} \leq k \leq \frac{c}{10\pi} \qquad (3)$$

gibt. Das trifft genau dann zu, wenn erstens $\frac{c}{20\pi}$ eine ganze Zahl (4) ist, und zweitens

$$\frac{c}{10\pi} = \frac{c}{20\pi} + m - 1 \qquad (5)$$

gilt. Angenommen, für ein positives reelles c seien (4) und (5) erfüllt. Dann folgt $2c = c + 20(m-1)\pi$, also $c = 20(m-1)\pi$.
Umgekehrt ist für dieses c in der Tat $\frac{c}{20\pi} = m - 1$ eine ganze Zahl, also (4) erfüllt, und es gilt (5). Daher hat genau die Zahl $c = 20(m-1)\pi$ die in a) verlangte Eigenschaft.

b) Für sie gilt weiter: Eine ganze Zahl k führt genau dann vermöge (2) auf eine Nullstelle $x \geq 20$, wenn sie $\frac{c}{k\pi} \geq 20$ erfüllt. Das ist äquivalent mit

$$0 < k \leq \frac{c}{20\pi} = m - 1 \qquad (6)$$

Da es nur endlich viele solche ganzen Zahlen gibt, hat f im Intervall $20 \leq x < \infty$ nur endlich viele Nullstellen, wie behauptet.

Für die jeweils zu zwei ganzen Zahlen $k, k' > 0$ gehörenden Nullstellen $x = \frac{c}{k\pi}$, $x' = \frac{c}{k'\pi}$ gilt genau dann $x < x'$, wenn $k > k'$ gilt. Also gehört die größte Nullstelle von f zum kleinsten Wert von k mit (6), d. h. zum Wert $k = 1$. Somit ist die in b) gesuchte größte Nullstelle

$$x = \frac{c}{\pi} = 20(m-1)$$

Aufgabe 241233A:
Man ermittle alle Funktionen f mit den folgenden Eigenschaften:
(1) f ist für alle rationalen Zahlen definiert.
(2) Es gilt $f(1) = 1$.
(3) Für alle rationalen Zahlen x und y gilt $f(x+y) = f(x) + f(y) + xy(x+y)$.

Lösung von cyrix:
Es ist $f(0) = f(0+0) = 2 \cdot f(0) + 0$, also $f(0) = 0$ und für alle rationale Zahlen x damit

$$0 = f(0) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x) + x \cdot (-x) \cdot (x - x) = f(x) + f(-x)$$

und damit $f(-x) = -f(x)$.
Weiterhin gilt für alle natürlichen Zahlen n die Gleichung

$$f(n+1) = f(n) + f(1) + n \cdot 1 \cdot (n+1) = f(n) + n^2 + n + 1$$

sodass sich für alle natürlichen Zahlen n direkt

$$f(n) = \sum_{k=0}^{n-1} k^2 + k + 1 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + \frac{(n-1)n}{2} + n = \frac{(n-1)n(2n-1+3)}{6} + n =$$

$$= n \cdot \left(\frac{(n-1)(n+1)}{3} + 1 \right) = \frac{n^3 + 2n}{3}$$

Damit gilt sogar für alle ganzen Zahlen p die Gleichung $f(p) = \frac{p^3+2p}{3}$.

Darüber hinaus ist für alle rationalen Zahlen x und alle natürlichen Zahlen n

$$f((n+1)x) = f(nx + x) = f(nx) + f(x) + n \cdot (n+1) \cdot x^3$$

sodass induktiv

$$\frac{f(nx) - nf(x)}{x^3} = \sum_{k=0}^{n-1} k^2 + k = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + \frac{(n-1)n}{2} = \frac{2n-1+3}{6} \cdot n \cdot (n-1) =$$

$$= \frac{(n-1)n(n+1)}{3} = \frac{n^3 - n}{3}$$

also $f(nx) = nf(x) + \frac{n^3-n}{3} \cdot x^3$.

Damit gilt für jede rationale Zahl $x = \frac{p}{q}$ mit ganzzahligem p und natürlichem $q > 0$:

$$\frac{p^3 + 2p}{3} = f(p) = f\left(q \cdot \frac{p}{q}\right) = q \cdot f\left(\frac{p}{q}\right) + \frac{q^3 - q}{3} \cdot \frac{p^3}{q^3}$$

bzw.

$$f(x) = f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{q} \cdot \left(\frac{p^3 + 2p}{3} - \frac{q^3 - q}{3} \cdot \frac{p^3}{q^3} \right) = \frac{1}{q} \cdot \left(\frac{p^3 + 2p}{3} - \frac{p^3}{3} + \frac{p^3}{3q^2} \right) = \frac{2pq^2 + p^3}{3q^3} =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{p}{q} + \frac{1}{3} \cdot \frac{p^3}{q^3} = \frac{2x + x^3}{3}$$

Damit kann höchstens die für alle rationalen Zahlen x definierte Funktion $f(x) = \frac{2x+x^3}{3}$ alle genannten Bedingungen erfüllen. Tatsächlich ist auch $f(1) = \frac{2+1}{3} = 1$ und für beliebige rationale Zahlen x und y dann

$$f(x) + f(y) + xy(x + y) = \frac{2x + x^3 + 2y + y^3 + 3xy(x + y)}{3} = \frac{2(x + y) + x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3}{3} =$$

$$= \frac{2(x + y) + (x + y)^3}{3} = f(x + y)$$

sodass die Funktion $f(x) = \frac{2x+x^3}{3}$ die einzige ist, die die Aufgabenstellung erfüllt.

Aufgabe 241234:
Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen z mit $1 \leq z \leq 5$, die die Bedingung erfüllen, dass die Gerade mit der Gleichung $y = \frac{1}{3}x + z$ und die Parabel mit der Gleichung $y = 2x^2$ mindestens einen Schnittpunkt mit ganzzahliger Abszisse haben.
Zu jeder Zahl z, die diese Bedingung erfüllt, gebe man - für die betreffende Gerade und die Parabel - die Koordinaten aller Schnittpunkte mit ganzzahliger Abszisse an.

Lösung von cyrix:
Sei x die Abszisse eines Schnittpunkts der beiden Kurven. Dann gilt $2x^2 = \frac{1}{3}x + z$ bzw. $x^2 - \frac{1}{6}x - \frac{1}{2}z = 0$, also

$$x = \frac{1}{12} \pm \sqrt{\frac{1}{144} + \frac{z}{2}} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 72z}}{12}$$

Fall 1: Es ist $x = \frac{1+\sqrt{1+72z}}{12} \in \mathbb{Z}$. Dann ist wegen

$$0 < \frac{1 + \sqrt{1 + 72z}}{12} \leq \frac{1 + \sqrt{72 \cdot 5}}{12} = \frac{1 + \sqrt{361}}{12} = \frac{1 + 19}{12} < \frac{24}{12} = 2$$

also $x = 1$ und $y = 2x^2 = 2$, woraus schließlich $z = y - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$ folgt.

Fall 2: Es ist $x = \frac{1-\sqrt{1+72z}}{12} \in \mathbb{Z}$. Dann ist wegen

$$0 = \frac{1 - 1}{12} > \frac{1 - \sqrt{1 + 72 \cdot 1}}{12} \geq x = \frac{1 - \sqrt{1 + 72z}}{12} \geq \frac{1 - \sqrt{1 + 72 \cdot 5}}{12} = \frac{1 - 19}{12} > \frac{-24}{12} = -2$$

also $x = -1$. Dann ist $y = 2x^2 = 2$ und damit $z = y - \frac{1}{3}x = \frac{7}{3}$.

Es gibt also genau in den beiden Fällen $z = \frac{5}{3}$ und $z = \frac{7}{3}$ im zu betrachtenden Intervall für z Schnittpunkte mit ganzzahligen Abszissen, nämlich im ersten Fall den Punkt $(1|2)$ und im zweiten den Punkt $(-1|2)$. (Die jeweils anderen Schnittpunkte, sofern sie existieren, haben dagegen keine ganzzahligen Abszissen, da sie sonst als Lösungen in den entsprechenden Fällen hätten erscheinen müssen.)

Aufgabe 271233B:
Es sei f diejenige für alle geordneten Paare $(x; y)$ natürlicher Zahlen x, y definierte Funktion, die für alle natürlichen Zahlen x, y die folgenden Gleichungen (1), (2), (3) erfüllt:

$$f(0, y) = y + 1 \qquad (1)$$
$$f(x + 1, 0) = f(x, 1) \qquad (2)$$
$$f(x + 1, y + 1) = f(x, f(x + 1, y)) \qquad (3)$$

Man ermittle a) den Funktionswert $f(3,3)$, b) den Funktionswert $f(4,2)$.
Hinweis: Gegebenenfalls kann die Angabe eines gesuchten Funktionswertes durch einen rechnerischen Ausdruck mit konkret angegebenen Rechenoperationen erfolgen, wenn deren zahlenmäßige Ausführung ohne Rechenhilfsmittel eine zu lange Rechenzeit erfordern würde.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
1. Behauptung: Für alle $y = 0,1,2,...$ gilt

$$f(1,y) = y + 2 \tag{4}$$

Beweis durch vollständige Induktion:
I. Nach (2) und (1) gilt $f(1,0) = f(0,1) = 2$.
II. Nach (3) folgt aus der Induktionsannahme, für ein y gelte (4), sowie aus (1)

$$f(1,y+1) = f(0,f(1,y)) = f(0,y+2) = y + 3 = (y + 1) + 2$$

also (4) mit $y + 1$ statt y.

2. Behauptung: Für alle $y = 0,1,2,...$ gilt

$$f(2,y) = 2y + 3 \tag{5}$$

Beweis:
I. Nach (2) und (4) gilt $f(2,0) = f(1,1) = 3$.
II. Nach (3) folgt aus der Induktionsannahme, für ein y gelte (5), sowie aus (4)

$$f(2,y+1) = f(1,f(2,y)) = f(1,2y+3) = 2y + 5 = 2(y + 1) + 3$$

3. Behauptung: Für alle $y = 0,1,2,...$ gilt

$$f(3,y) = 2^{y+3} - 3 \tag{6}$$

Beweis:
I. Nach (2) und (5) gilt $f(3,0) = f(2,1) = 5 = 2^3 - 3$.
II. Nach (3) folgt aus der Induktionsvoraussetzung, für ein y gelte (6), sowie aus (5)

$$f(3,y+1) = f(2,f(3,y)) = f(2,2^{y+3} - 3) = 2(2^{y+3} - 3) + 3 = 2^{(y+1)+3} - 3$$

a) Aus (6) ergibt sich $f(3,3) = 2^6 - 3 = 61$.
b) Aus (2), (3) und (6) ergibt sich

$$\begin{aligned}
f(4,0) &= f(3,1) = 2^4 - 3 = 13 \\
f(4,1) &= f(3,f(4,0)) = f(3,13) = 2^{16} - 3 = 65533 \\
f(4,2) &= f(3,f(4,1)) = f(3,65533) = 2^{65533} - 3
\end{aligned}$$

Aufgabe 311231:
Es sei f eine Funktion, die für alle reellen Zahlen x definiert ist; ferner sei folgende Voraussetzung erfüllt:
Mit zwei voneinander verschiedenen reellen Zahlen a, b gelten für jedes reelle x die Gleichungen $f(a - x) = f(a + x)$ und $f(b - x) = f(b + x)$.
Man beweise, dass aus diesen Voraussetzungen stets folgt: Die Funktion f ist periodisch.
Hinweis: Eine Funktion f heißt genau dann periodisch, wenn eine positive reelle Zahl p existiert, mit der für jedes reelle x die Gleichung $f(x + p) = f(x)$ gilt.

Lösung von cyrix:
O. B. d. A. sei $a < b$. Dann ist $p := 2(b-a) > 0$ und es gilt für jedes relle x die Gleichung

$$f(x+p) = f(x+2b-2a) = f(b+(x+b-2a)) = f(b-(x+b-2a)) = f(2a-x) = f(a-(x-a)) =$$

$$= f(a+(x-a)) = f(x), \square$$

Aufgabe 321232:
Man beweise:
Zu jeder Primzahl p gibt es eine reelle Zahl c, mit der Zahlenfolge $(a_k)_{k=1,2,3,...}$, die durch

$$a_1 = c, \qquad a_{k+1} = a_k^2 + c \qquad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

definiert wird, periodisch ist und die Zahl p als kleinste Periodenlänge hat.
Hinweis: Eine Zahlenfolge $(a_k)_{k=1,2,3,...}$ heißt genau dann periodisch, wenn es eine positive ganze Zahl n gibt, mit der für alle $k = 1, 2, 3, \dots$ die Gleichung $a_k = a_{k+n}$ gilt.
Ist das der Fall, so heißt jede positive ganze Zahl n, mit der das zutrifft, eine Periodenlänge der Zahlenfolge $(a_k)_{k=1,2,3,...}$.

Lösung von weird:
Wir ergänzen zunächst die Folge durch das Folgenglied $a_0 = 0$, da dies mit obiger Rekursionsvorschrift offensichtlich kompatibel ist und einige der folgenden Überlegungen etwas einfacher macht. Rechnet man nun für ein fest vorgegebenes $c \in \mathbb{R}$ die ersten paar Folgenglieder a_n für $n > 0$ als Funktionen von c einmal konkret aus, nämlich

$$a_1(c) = c$$
$$a_2(c) = c^2 + c$$
$$a_3(c) = c^4 + 2c^3 + c^2 + c$$
$$a_4(c) = c^8 + 4c^7 + 6c^6 + 6c^5 + 5c^4 + 2c^3 + c^2 + c$$
$$\dots$$

so führt dies als unmittelbare Konsequenz aus der obigen Rekursionsvorschrift dann auf eine Folge von Polynomfunktionen in c vom jeweiligen Grad 2^{n-1}, wobei der konstante Term stets fehlt. Damit eine Folge die Periodenlänge $p \in \mathbb{N}^*$ hat, reicht es offenbar

$$a_p(c) = 0$$

zu fordern, weil damit dann auch

$$a_p = a_0,\ a_{p+1} = a_1,\ a_{p+2} = a_2, \dots$$

gilt.

Soll p sogar die minimale, also dann kleinstmögliche Periodenlänge sein, wie dies in der Aufgabe gefordert wird, so darf c dann jedenfalls nicht auch Nullstelle der Polynomfunktionen $a_k(c)$ sein, wobei k ein „echter“ (also von n verschiedener) Teiler von n ist. Ist daher p sogar eine Primzahl, wie dies hier in der Aufgabe noch vorausgesetzt wird, so müssen wir also dann nur den einzigen Fall ausschließen, dass c auch Nullstelle von $a_1(c) = c$ ist, was somit auf die Bedingung $c \neq 0$ hinausläuft.
Und ja, so eine reelle und von Null verschieden Nullstelle von $a_p(c)$ muss es hier immer geben, da nach Abspaltung des Linearfaktors c aus $a_p(c)$ ja eine Polynomfunktion von ungeradem Grad mit konstantem Term $\neq 0$ verbleibt, für welche das bekanntermaßen sicher zutrifft, womit auch diese letzte Frage dann hier noch geklärt ist.

Aufgabe 321233A:
Man ermittle alle diejenigen Funktionen f, die für alle reellen Zahlen x mit $x \neq 0$ und $x \neq 1$ definiert sind sowie für alle reellen Zahlen x mit $x \neq 0$, $x^2 - x - 1 \neq 0$ und $x^2 + x - 1 \neq 0$ die folgende Gleichung (1) erfüllen:

$$2 \cdot f\left(\frac{x^2+x-1}{x^2-x-1}\right) - 3 \cdot f\left(\frac{x^2-x-1}{x^2+x-1}\right) = 5 \cdot \left(x - \frac{1}{x}\right) \qquad (1)$$

Lösung von weird:
Gelten die Voraussetzungen der Aufgabe für ein $x \in \mathbb{R}$, dann offensichtlich auch für $-x$ und durch Einsetzen in

$$2f\left(\frac{x^2+x-1}{x^2-x-1}\right) - 3f\left(\frac{x^2-x-1}{x^2+x-1}\right) = 5\left(x - \frac{1}{x}\right) \qquad (1)$$

erhält man

$$2f\left(\frac{x^2-x-1}{x^2+x-1}\right) - 3f\left(\frac{x^2+x-1}{x^2-x-1}\right) = -5\left(x - \frac{1}{x}\right) \qquad (2)$$

also insgesamt ein lineares Gleichungssystem in $f\left(\frac{x^2+x-1}{x^2-x-1}\right)$ und $f\left(\frac{x^2-x-1}{x^2+x-1}\right)$, aus dem sich insbesondere

$$f\left(\frac{x^2+x-1}{x^2-x-1}\right) = x - \frac{1}{x} \qquad (3)$$

ergibt. Nun kann man (3) unter Zuhilfenahme der Abbildungen

$$\tilde{f} : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad x \mapsto \frac{x+1}{x-1} \qquad (4)$$

bzw.

$$g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad x \mapsto x - \frac{1}{x} \qquad (5)$$

auch in der Form

$$f(\tilde{f}(g(x))) = g(x) \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}) \qquad (6)$$

schreiben, wie man leicht nachrechnet. Da aber $g(x)$ für $x \neq 0$ alle reellen Zahlen durchläuft, muss also für alle reelle Zahlen $x \neq 1$ auch $f(\tilde{f}(x)) = x$ gelten. Andererseits gilt aber auch $\tilde{f}(\tilde{f}(x)) = x$ für alle $x \neq 1$, wie man sofort nachrechnet, womit sich wegen $f(\tilde{f}(x)) = \tilde{f}(\tilde{f}(x))$ ähnlich wie vorher schlussendlich

$$f(x) = \tilde{f}(x) = \frac{x+1}{x-1} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}) \qquad (7)$$

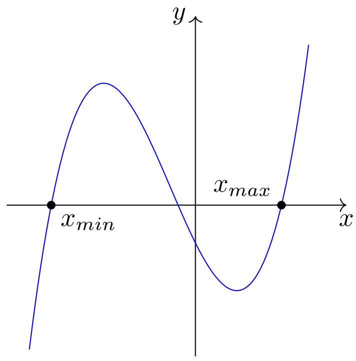
ergibt. Durch Einsetzen in (1) kann man sich schließlich noch davon überzeugen, dass dies auch tatsächlich eine Lösung unserer Funktionalgleichung hier ist.

Aufgabe 331233B:
Für jede ganze Zahl n mit $n \geq 0$ sei f_n die durch

$$f_n(x) = x^3 + (n+3) \cdot x^2 + 2n \cdot x - \frac{n}{n+1}$$

für alle reellen x definierte Funktion.
Man ermittle alle diejenigen ganzen Zahlen n mit $n \geq 0$, für die gilt:
Alle Nullstellen von f_n liegen in einem Intervall der Länge 3.

Lösung von MontyPythagoras:
Die Funktion $f(x)$ verläuft prinzipiell so:



Das heißt, bei den „äußeren“ Nullstellen x_{min} als auch bei x_{max} ist die Steigung positiv. Für $n = 0$ sieht man sofort, dass die Nullstellen $x_{min} = -3$ und $x_{max} = 0$ sind (in diesem Fall ist $x = 0$ doppelte Nullstelle). Das Intervall zwischen kleinster und größter Nullstelle (mit „klein“ und „groß“ ist natürlich der x-Wert gemeint) hat hier also genau eine Länge von 3.
Betrachtet man sehr große n, wird die Funktion näherungsweise zu

$$g(x) = x^3 + (n + 3)x^2 + 2nx$$

Eine Lösung ist wieder $x = 0$. Die anderen lauten:

$$x^2 + (n + 3)x + 2n = 0$$

$$x = -\frac{1}{2}(n + 3) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(n + 3)^2 - 8n} = -\frac{1}{2}(n + 3) \pm \frac{1}{2}\sqrt{n^2 - 2n + 9}$$

Wiederum für große n kann man überschlägig berechnen:

$$x_1 \approx -\frac{1}{2}(n + 3) - \frac{1}{2}(n - 1) = -n - 1$$

$$x_2 \approx -\frac{1}{2}(n + 3) + \frac{1}{2}(n - 1) = -2$$

Es ist klar, dass die approximative Lösung $x \approx -2$ zwischen den beiden anderen Nullstellen liegt, denn die größte Nullstelle muss auf jeden Fall $x_{max} > 0$ sein, weil $f(0) = -\frac{n}{n+1} < 0$ ist. Setzen wir $x = -n - 1$ ein, so erhalten wir

$$f(-n - 1) = -(n + 1)^3 + (n + 1 + 2)(n + 1)^2 - 2n(n + 1) - 1 + \frac{1}{n + 1}$$

$$f(-n - 1) = 2(n + 1)^2 - 2n(n + 1) - 1 + \frac{1}{n + 1} = 2(n + 1) - 1 + \frac{1}{n + 1} = 2n + 1 + \frac{1}{n + 1} > 0$$

Daraus kann man schließen, dass auf jeden Fall

$$x_{min} < -n - 1$$

ist. Da außerdem $x_{max} > 0$, ist die Intervallbreite d auf jeden Fall

$$d = x_{max} - x_{min} > n + 1$$

Damit ist für $n \geq 2$ die zulässige Intervallbreite überschritten. Bleibt noch zu untersuchen, ob für $n = 1$ die Intervallbreite eingehalten wird. Das tun wir, indem wir einfach $n = 1$ und $x = -3$ einsetzen. Es zeigt sich, dass $f_1(-3) = \frac{5}{2} > 0$ ist. Daraus folgt, dass für $n = 1$ die kleinste Nullstelle $x_{min} < -3$ ist, so dass auch für $n = 1$ die Intervallbreite von 3 nicht eingehalten wird. Daher ist $n = 0$ die einzige Lösung.

Aufgabe 341233B:
Man ermittle alle diejenigen Funktionen f, die für alle reellen Zahlen definiert sind und für alle reellen x und y den folgenden Bedingungen (1), (2), (3) genügen:

$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y) - f(x) - f(y) + 2 \qquad (1)$$

$$f(x + y) = f(x) + f(y) + 2xy - 1 \qquad (2)$$

$$f(1) = 2 \qquad (3)$$

Lösung von MontyPythagoras:
Mit $x = y = 0$ folgt wegen (2):

$$f(0) = 2f(0) - 1 \qquad ; \qquad f(0) = 1$$

Mit $x = 1$ und $y = -1$ erhält man wegen (2):

$$f(0) = f(1) + f(-1) - 3 \qquad ; \qquad f(-1) = 1 - 2 + 3$$

$$f(-1) = 2 \qquad ; \qquad y = -1$$

liefert in (1):

$$f(-x) = f(x) \cdot f(-1) - f(x) - f(-1) + 2$$
$$f(-x) = 2f(x) - f(x) - 2 + 2$$
$$f(-x) = f(x)$$

Die Funktion ist also gerade. Setzen wir nun $y = -x$ in (2):

$$f(0) = f(x) + f(x) + 2x(-x) - 1$$

$$1 = 2f(x) - 2x^2 - 1$$

Dann folgt letztlich

$$f(x) = x^2 + 1$$

IV Runde 4

Aufgabe 011241:
Bei 27000 Düngungsversuchen mit Phosphordüngemitteln stellte man die folgenden mittleren Ernteerträge für Kartoffeln fest:

Düngergabe bezogen auf P2O5 (dt/ha)	Ernteertrag (dt/ha)
0,0	237
0,3	251
0,9	269

Die zwischen der Düngergabe x (in dt/ha) und dem Ernteertrag y (in dt/ha) bestehende Beziehung kann durch die folgende Relation angenähert wiedergegeben werden:

$$y = a - b \cdot 10^{-kx}$$

wobei a, b und k Konstanten sind.
a) Berechnen Sie mit Hilfe der oben angegebenen Werte diese Konstanten!
b) Berechnen Sie den Ernteertrag für eine Düngergabe von 0,6 dt/ha und 1,2 dt/ha!
c) Stellen Sie die prozentuale Abweichung der errechneten Werte von den im Versuch ermittelten Werten 261 dt/ha bzw. 275 dt/ha fest!

Lösung von Korinna Grabski:
a) Es gilt:

$$237 = a - b$$
$$251 = a - b \cdot 10^{-0,3k}$$
$$269 = a - b \cdot 10^{-0,9k}$$

Gleichung (1) kann man leicht nach a umstellen und in die anderen beiden Gleichungen einsetzten. Man erhält:

$$14 = b - b \cdot 10^{-0,3k} \qquad ; \qquad 32 = b - b \cdot 10^{-0,9k}$$

Dies kann man umstellen zu:

$$10^{-0,3k} = \frac{b-14}{b} \qquad ; \qquad 10^{-0,9k} = \frac{b-32}{b} = (10^{-0,3k})^3$$

Setzt man beide Gleichungen ineinander ein, erhält man:

$$\begin{aligned}
(\frac{b-14}{b})^3 &= \frac{b-32}{b} \\
\frac{b^3-42b^2+588b-2744}{b^3} &= \frac{b-32}{b} \\
b^4-42b^3+588b^2-2744b &= b^4-32b^3 \\
0 &= 10b^3-588b^2+2744b \\
0 &= 10b \cdot (b^2-\frac{588}{10}b+\frac{2744}{10})
\end{aligned}$$

Durch Anschauen der Ausgangsgleichungen kann man leicht sehen, dass die Lösung $b = 0$ entfällt. Damit gilt:

$$b_{1,2} = \frac{294}{10} \pm \sqrt{\frac{86436}{100} - \frac{2744}{10}}$$

$$b_1 = 53{,}69 \quad ; \quad a_1 = 290{,}69 \quad ; \quad k_1 = 0{,}44 \quad \text{und} \quad b_2 = 5{,}11 \quad ; a_2 = 242{,}11$$

Für die zweiten Werte lässt sich kein k berechnen. Damit entfällt diese Lösung.
Die Konstanten haben damit folgende Werte: $b = 53{,}69, a = 290{,}69$ und $k = 0{,}44$.
b) $x = 0{,}6$ dt/ha $\rightarrow y = 261{,}46$ dt/ha ; $x = 1{,}2$ dt/ha $\rightarrow y = 274{,}77$ dt/ha
c) $x = 261{,}46/261 = 1{,}0018 \rightarrow$ Für den ersten Versuch gibt es eine prozentuale Abweichung von 0,18%.
$x = 274{,}77/275 = 0{,}9992 \rightarrow$ Für den zweiten Versuch gibt es eine prozentuale Abweichung von 0,08%.

Aufgabe 071243:
Geben Sie alle Funktionen $y = f(x)$ an, die jeweils in größtmöglichem Definitionsbereich (innerhalb des Bereichs der reellen Zahlen) der Gleichung

$$a \cdot f(x^n) + f(-x^n) = bx$$

genügen, wobei b eine beliebige reelle Zahl, n eine beliebige ungerade natürliche Zahl und a eine reelle Zahl mit $|a| \neq 1$ ist!

Lösung von cyrix:
Da n ungerade ist, gilt für alle reellen x die Identität $(-x)^n = -x^n$. Insbesondere erhält man also durch Einsetzen von $-x$ in die Funktionalgleichung eine zweite:

$$a \cdot f(-x^n) + f(x^n) = -bx$$

Addition dieser beiden Gleichungen liefert $(a+1) \cdot (f(x^n) + f(-x^n)) = 0$, also wegen $a \neq -1$ schließlich $f(-x^n) = -f(x^n)$. Setzt man dies wiederum in die Ausgangs-Funktionalgleichung ein, erhält man $(a-1) \cdot f(x^n) = bx$ bzw. nach Division durch $a-1 \neq 0$ und der passenden Substitution

$$f(x) = \frac{b}{a-1} \cdot \sqrt[n]{x}$$

Man überprüft schnell, dass diese Funktion tatsächlich auch die Funktionalgleichung erfüllt, da

$$f(x^n) = \frac{b}{a-1} \cdot \sqrt[n]{x^n} = \frac{b}{a-1} \cdot x \qquad \text{und}$$

$$f(-x^n) = \frac{b}{a-1} \cdot \sqrt[n]{-x^n} = \frac{b}{a-1} \cdot \sqrt[n]{(-x)^n} = \frac{b}{a-1} \cdot (-x)$$

also gilt:

$$a \cdot f(x^n) + f(-x^n) = a \cdot \frac{b}{a-1} \cdot x - \frac{b}{a-1} \cdot x = (a-1) \cdot \frac{b}{a-1} \cdot x = bx$$

Bemerkung: Damit diese Funktionen wohldefiniert sind, muss man für negative reelle Zahlen x und ungerade Wurzelexponenten n die Wurzel-Funktion in ihrem Definitionsbereich auf die gesamten reellen Zahlen erweitern via $\sqrt[n]{x} = -\sqrt[n]{-x}$, sodass sie auf dem Bereich der gesamten reellen Zahlen die Umkehrfunktion der Potenzfunktion $p : x \mapsto x^n$ ist.
Dies ist möglich, da p eine eineindeutige Abbildung von den reellen Zahlen auf die reellen Zahlen ist.

Aufgabe 081246:
Es seien n eine positive ganze Zahl, h eine reelle Zahl und $f(x)$ ein Polynom (ganze rationale Funktion) mit reellen Koeffizienten vom Grade n, das keine reellen Nullstellen besitzt.
Man beweise, dass dann auch das Polynom

$$F(x) = f(x) + h \cdot f'(x) + h^2 \cdot f''(x) + ... + h^n \cdot f^{(n)}(x)$$

keine reellen Nullstellen hat!

Lösung von Nuramon:
Es ist unmittelbar klar, dass F ebenfalls ein Polynom vom Grade n mit reellen Koeffizienten ist.
Da f keine reellen Nullstellen hat, muss n gerade sein und es muss entweder $\forall x \in mathbbR : f(x) > 0$ oder $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) < 0$ gelten. O. B. d. A. gelte $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) > 0$.
Da F den gleichen Grad und den gleichen Leitkoeffizienten wie f hat, hat F ein globales Minimum, d. h. es existiert ein $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $\forall x \in \mathbb{R} : F(x) \geq F(x_0)$. Es genügt daher zu zeigen, dass $F(x_0) > 0$ gilt.
Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $f(x) = F(x) - hF'(x)$. Das kann man leicht nachrechnen oder es sich abstrakt mit der geometrischen Reihe herleiten (beachte, dass die Ableitung auf der Menge der Polynome vom Grad $\leq n$ ein nilpotenter Operator ist):

$$F = \sum_{k=0}^{\infty} h^k \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} f = \left(1 - h\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^{-1} f.$$

Wegen $F'(x_0) = 0$ folgt somit

$$F(x_0) = f(x_0) + hF'(x_0) = f(x_0) > 0.$$

Aufgabe 091243:
Es ist zu beweisen, dass für jedes ganzzahlige $n \geq 1$ die Funktion f mit

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!}$$

höchstens eine reelle Nullstelle haben kann.

Lösung von cyrix:
Wir definieren für alle nicht-negativen ganzzahligen n die Funktion

$$f_n(x) := 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

(Insbesondere ist f_0 die Funktion, die konstant 1 ist.) Dann gilt für alle $n \geq 1$ offenbar $f_n'(x) = f_{n-1}(x)$.
Wir zeigen nun im Folgenden induktiv für alle nicht-negativen ganzzahligen n die schärfere Aussage: „Ist n gerade, so ist $f_n(x)$ stets positiv. Und ist n ungerade, so hat f_n genau eine Nullstelle.“

Für $n = 0$ und $n = 1$ gilt (wegen $f_1(x) = 1 + x$) diese Behauptung offenbar. Sei ab nun $n \geq 2$ und es gelte diese Behauptung für $n - 1$. Wir betrachten nun die Funktion f_n mit ihrer Ableitungsfunktion f_{n-1}.
Ist n ungerade, so ist f_{n-1} nach Annahme stets positiv, also f_n streng monoton steigend. Da die höchste Potenz von x einen ungeraden Exponenten (und positiven Koeffizienten) besitzt, ist $\lim_{x \to -\infty} f_n(x) =$

$-\infty$ und $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$. Da die Funktion f_n also negative wie positive Funktionswerte annimmt, stetig und streng monoton steigend ist, gibt es genau eine Stelle, an der sie den Funktionswert 0 annimmt.

Ist n dagegen gerade, so besitzt nach Annahme f_{n-1} genau eine Nullstelle x_0. Für kleinere Argumente ist f_{n-1}, wie gerade gesehen, negativ, und für größere positiv. Also ist f_n im Intervall $(-\infty, x_0)$ streng monoton fallend und im Intervall (x_0, ∞) streng monoton steigend. Damit nimmt sie an der Stelle x_0 ihr globales Maximum an. Jedoch ist $f_n(x_0) = f_{n-1}(x_0) + \frac{x_0^n}{n!} = 0 + \frac{1}{n!} \cdot x_0^n > 0$. Letzteres gilt, da der Exponent n eine gerade Zahl ist und wegen $f_{n-1}(0) = 1 \neq 0$ auch $x_0 \neq 0$ ist.
Die Behauptung der Aufgabenstellung folgt aus dieser strengeren sofort, $\square$.

Aufgabe 101242:
Es ist der folgende Satz zu beweisen:
Wenn h eine reelle Zahl ist und wenn eine ganzrationale Funktion f vom Grade n mit reellen Koeffizienten keine reellen Nullstellen besitzt, so gilt dasselbe von der ganzrationalen Funktion F, die durch

$$F(x) = f(x) + h \cdot f'(x) + h^2 \cdot f''(x) + ... + h^n \cdot f^{(n)}(x)$$

definiert ist.

Lösung von Nuramon:
Es ist unmittelbar klar, dass F ebenfalls ein Polynom vom Grade n mit reellen Koeffizienten ist.
Da f keine reellen Nullstellen hat, muss n gerade sein und es muss entweder $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) > 0$ oder $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) < 0$ gelten. O. B. d. A. gelte $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) > 0$.
Da F den gleichen Grad und den gleichen Leitkoeffizienten wie f hat, hat F ein globales Minimum, d. h. es existiert ein $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $\forall x \in \mathbb{R} : F(x) \geq F(x_0)$. Es genügt daher zu zeigen, dass $F(x_0) > 0$ gilt.
Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $f(x) = F(x) - hF'(x)$. Das kann man leicht nachrechnen oder es sich abstrakt mit der geometrischen Reihe herleiten (beachte, dass die Ableitung auf der Menge der Polynome vom Grad $\leq n$ ein nilpotenter Operator ist):

$$F = \sum_{k=0}^{\infty} h^k \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} f = \left(1 - h\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^{-1} f.$$

Wegen $F'(x_0) = 0$ folgt somit

$$F(x_0) = f(x_0) + hF'(x_0) = f(x_0) > 0.$$

Aufgabe 111242:
Es sei

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2+\tan^2 x} & \text{für alle reellen } x,\ \text{für die } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ gilt } (k = 0, \pm 1, \pm 2, ...) \\ 0 & \text{für alle } x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}$$

Man beweise, dass die für alle reellen x durch $F(x) = f(x) + f(ax)$ definierte Funktion F genau dann periodisch ist, wenn die Konstante a eine rationale Zahl ist.

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:
f ist periodisch mit der Periode π. Falls $a = \frac{m}{n}$ rational ist, gilt

$$F(x + n\pi) = f(x + n\pi) + f(\frac{m}{n}x + m\pi) = F(x)$$

$f(x)$ ist nicht negativ und $f(x) \leq \frac{1}{2}$ mit $f(x) = \frac{1}{2} \iff \exists n \in \mathbb{Z} : x = n\pi$.
Sei nun F periodisch mit der Periode p. Dann gilt: $1 = F(0) = F(p) = f(p) + f(ap)$.

Diese Gleichung ist nur für $f(p) = \frac{1}{2} \wedge f(ap) = \frac{1}{2}$ erfüllt. Also gibt es ganze Zahlen $m,n \in \mathbb{Z}$, so dass $p = n\pi$ und $ap = m\pi$ gilt. Hieraus folgt $a = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$.

Aufgabe 111246B:
Als „Abstand“ zweier Funktionen f und g, die im gleichen Intervall definiert sind, bezeichne man den größten aller in diesem Intervall auftretenden Werte $|f(x) - g(x)|$, falls ein solcher größter Wert existiert.
Es seien die im Intervall $-2 \leq x \leq 2$ durch $f(x) = 2 - |x|$ und die im gleichen Intervall durch $g(x) = -ax^2 + 2$ (a eine positive reelle Zahl) definierten Funktionen f und g gegeben.
Man untersuche, ob es einen Wert a gibt, für den der „Abstand“ von f und g möglichst klein ist. Gibt es ein solches a, so gebe man alle derartigen Werte a an.

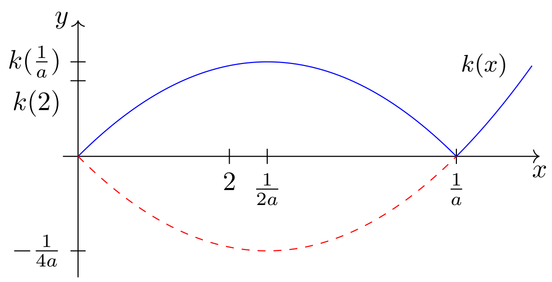
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Da für alle $x \in (-2,2)$: $f(x) = f(-x)$ und $g(x) = g(-x)$ richtig ist, braucht man die Funktion k

$$k(x,a) = |h(x,a)| \qquad \text{mit} \qquad h(x,a) = f(x) - g8x)$$

(a ist ein Parameter, der allen reellen Zahlen größer als Null annehmen darf) nur im Intervall (0,2) zu betrachten. Es ist

$$h(x,a) = ax^2 - x = a\left(x - \frac{1}{2a}\right)^2 - \frac{1}{4a}$$

Das Bild von h ist für jedes zugelassene a eine Parabel, die nach oben geöffnet ist, die die x-Achse bei 0 und $\frac{1}{a}$ schneidet und die den Scheitelpunkt $\left(\frac{1}{2a}, -\frac{1}{4a}\right)$ besitzt.



Um die Funktion l

$$l(a) = \max_{x\in(0,2)} k(x,a) \qquad , \quad a > 0$$

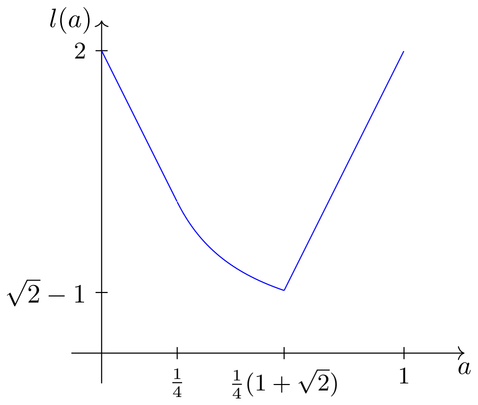
auf absolutes Minimum zu untersuchen, werden drei Fälle unterschieden:

1. Fall: $2 \leq \frac{1}{2a} \leftrightarrow a \leq \frac{1}{4}$ (Abbildung)
$$l(a) = k(2,a) = -h(2,a) = -4a + 2$$
2. Fall: $\frac{1}{2a} \leq 2 \leq \frac{1}{a} \leftrightarrow \frac{1}{4} \leq a \leq \frac{1}{2}$
$$l(a) = k\left(\frac{1}{2a},a\right) = -h\left(\frac{1}{2a},a\right) = \frac{1}{4a}$$
3. Fall: $\frac{1}{a} \leq 2 \leftrightarrow \frac{1}{2} \leq a$; das Intervall $\left[\frac{1}{2}, \infty\right)$ wird wegen die hier möglichen Fälle
$$(3'): \quad l(a) = k\left(\frac{1}{2a}, a\right) = \frac{1}{4a} \qquad ; \qquad (3''): \quad l(a) = k(2,a) = 4a - 2$$
noch zerlegt. Zur Ungleichung $\frac{1}{4a} \geq 4a - 2$ gehört der Fall 3'. Es ist
$$\frac{1}{4a} \geq 4a - 2 \leftrightarrow 0 \geq 16a^2 - 8a - 1 \leftrightarrow a \in \left[\frac{1}{4}(1-\sqrt{2}), \frac{1}{4}(1+\sqrt{2})\right]$$
Wegen $a \in \left[\frac{1}{2}, \infty\right)$ und $\left[\frac{1}{2}, \infty\right) \cap \left[\frac{1}{4}(1-\sqrt{2}), \frac{1}{4}(1+\sqrt{2})\right] = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{4}(1+\sqrt{2})\right]$ ist also $l(a) = \frac{1}{4a}$ für $a \in \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{4}(1+\sqrt{2})\right]$ und $l(a) = 4a - 2$ für $a \in \left[\frac{1}{4}(1+\sqrt{2}), \infty\right)$.

Damit ist insgesamt

$$l(a) = \begin{cases} -4a+2 & \text{für } a \in \left(0, \frac{1}{4}\right] \\ \frac{1}{4a} & \text{für } a \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{4}(1+\sqrt{2})\right] \\ \frac{1}{4a-2} & \text{für } a \in \left[\frac{1}{4}(1+\sqrt{2}), \infty\right). \end{cases}$$

Da l im Intervall $\left(0, \frac{1}{4}(1+\sqrt{2})\right]$ streng monoton fallend ist und in $\left[\frac{1}{4}(1+\sqrt{2}), \infty\right)$ streng monoton wachsend ist, besitzt l an der Stellen $a = \frac{1}{4}(1+\sqrt{2})$ und nur an dieser Stelle das absolute Minimum.



Aufgabe 131244:
Man ermittle alle Paare (f, g) von Funktionen, die für alle von $-1; 0$ und 1 verschiedenen reellen Zahlen x definiert sind und für alle diese x die Gleichungen erfüllen:

$$x \cdot f(x) - \frac{1}{x} \cdot g\left(\frac{1}{x}\right) = 1 \qquad (1)$$

$$\frac{1}{x^2} \cdot f(x) = x^2 \cdot g(x) \qquad (2)$$

Lösung von cyrix:
Gleichung (2) ist äquivalent zu $\frac{1}{x} \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = x^3 \cdot g(x)$.
Führt man in der ersten Gleichung die Substitution $x \leftarrow \frac{1}{x}$ durch, erhält man $\frac{1}{x} \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + x \cdot g(x)$, zusammen also

$$1 + (x - x^3) \cdot g(x) = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad g(x) = \frac{1}{x^3 - x}$$

und

$$\frac{1}{x} \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + x \cdot \frac{1}{x^3 - x} = 1 + \frac{1}{x^2 - 1} = \frac{x^2}{x^2 - 1} = \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{x}\right)^2}$$

also $x \cdot f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ und damit

$$f(x) = \frac{1}{x - x^3} = -g(x)$$

Aufgabe 131246B:
a) Man beweise folgende Behauptung:
Es gibt keine ganzrationale Funktion f, bei der für jedes x die beiden Ungleichungen gelten:

$$f(x) > f''(x) \qquad (1)$$

$$f'(x) > f''(x) \qquad (2)$$

b) Entsteht eine richtige Behauptung, wenn man in der bei a) gemachten Behauptung die Ungleichung (2) durch $f(x) > f'(x) \quad (3)$ ersetzt?

Lösung von cyrix:
a) Wir nehmen an, es gäbe eine ganzrationale Funktion f, die beiden angegebenen Bedingungen (1) und (2) genügt.

Es kann f keine konstante Funktion sein, da wegen $f'(x) = f''(x) = 0$ die Bedingung (2) nicht erfüllt ist. Auch kann f keine lineare (und nicht konstante) Funktion sein, da diese eine Nullstelle x besitzt, für die dann wegen $f(x) = 0 = f''(x)$ die Bedingung (1) nicht erfüllt ist.

Habe also ab nun f mindestens den Grad $n \geq 2$. Dann hat f' den Grad $n-1$ sowie f'' den Grad $n-2$, sodass die ganzrationalen Funktionen $g := f - f'$ und $h := f' - f''$ den Grad n bzw. $n-1$ besitzen.
Eine der beiden natürlichen Zahlen n und $n-1$ ist ungerade. Ist dies n, dann hat g ungeraden Grad, besitzt also eine Nullstelle x, für die $f(x) = f'(x)$ gilt, was ein Widerspruch zu (1) ist. Ist dagegen $n-1$ ungerade, so folgt analog, dass h eine Nullstelle x besitzt, was dann zu $f'(x) = f''(x)$, also einem Widerspruch zu (2) führt.

Damit kann es also keine solche Funktion f geben, was die Behauptung beweist, $\square$.

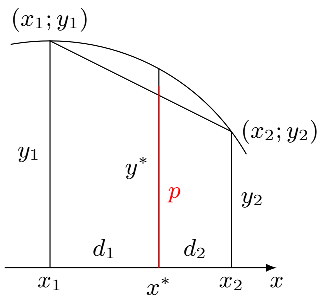
b) Ersetzt man die Bedingung (2) durch (3), so erhält man keine wahre Aussage mehr, wie die Funktion $f(x) = 1$, die für alle reellen x konstant den Funktionswert 1 besitzt, zeigt, denn es ist für diese Funktion und alle reellen Zahlen x

$$f(x) = 1 > 0 = f'(x) = f''$$

sodass sie beide Bedingungen (1) und (3) erfüllt.

Aufgabe 141243:
In einem Mathematikzirkel, in dem Eigenschaften von Funktionen f bei Kehrwertbildung untersucht werden, vermutet ein Zirkelteilnehmer, allgemein gelte für Funktionen f, die in einem Intervall J definiert sind und nur positive Funktionswerte haben, der folgende Satz:
(a) Ist f in J streng konkav, so ist $\frac{1}{f}$ in J streng konvex.
Ein anderer Zirkelteilnehmer meint, es gelte auch der folgende Satz:
(b) Ist f in J streng konvex, so ist $\frac{1}{f}$ in J streng konkav.
Man untersuche jeden dieser Sätze auf seine Richtigkeit.
Hinweise:
(1) Genau dann heißt $f(x)$ in J streng konvex bzw. konkav, wenn für je drei Zahlen x_1, x^*, x_2 aus J mit $x_1 < x^* < x_2$ der auf der von den Punkten $[x_1; f(x_1)]$ und $[x_2; f(x_2)]$ begrenzten Sehne gelegenen Punkt, dessen Abszisse x^* ist, eine Ordinate hat, die größer bzw. kleiner als $f(x^*)$ ist.
(2) Mit $\frac{1}{f}$ ist die durch die Festsetzung $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ für alle Zahlen x des Intervalls J definierte Funktion g bezeichnet.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(A) ist richtig.
Zum Beweis nehmen wir an, dass f in J streng konkav ist und dass x_1, x^*, x_2 mit $x_1 < x^* < x_2$ drei Abszissenwerte in J seien.
Wir setzen $y_1 = f(x_1)$, $y^* = f(x^*)$, $y_2 = f(x_2)$ und bezeichnen mit p bzw. q die Ordinate des auf der Sehne mit den Endpunkten $(x_1; y_1), (x_2; y_2)$ bzw. des auf der Sehne mit den Endpunkten $\left(x_1, \frac{1}{y_1}\right)$, $\left(x_2, \frac{1}{y_2}\right)$ gelegenen Punktes, dessen Abszisse x^* ist. (siehe Abbildung)



Ferner setzen wir $d_1 = x^* - x_1$, $d_2 = x_2 - x^*$. Dann gilt

$$p - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x^* - x_1) \qquad (1)$$
$$q - \frac{1}{y_1} = \frac{\frac{1}{y_2} - \frac{1}{y_1}}{x_2 - x_1}(x^* - x_1) \quad \text{also} \qquad (2)$$
$$p = \frac{y_2 - y_1}{d_1 + d_2} d_1 + y_1 = \frac{d_1 y_2 + d_2 y_1}{d_1 + d_2} \qquad (3)$$
$$q = \frac{d_1 \cdot \frac{1}{y_1} + d_2 \cdot \frac{1}{y_2}}{d_1 + d_2} - \frac{d_1 y_1 + d_2 y_2}{(d_1 + d_2) y_1 y_2} \qquad (4)$$

Nun gilt nach Voraussetzung

$$d_1 > 0, \quad d_2 > 0, \quad y_1 > 0 \quad y_2 > 0 \quad \text{also} \qquad (5)$$
$$p > 0 \qquad (6)$$
$$p < y^* \qquad (7)$$

Ferner gilt $d_1 d_2 (y_1 - y_2)^2 \geq 0$, also

$$d_1^2 y_1 y_2 + d_1 d_2 y_1^2 + d_1 d_2 y_2^2 + d_2^2 y_1 y_2 \geq d_1^2 y_1 y_2 + 2 d_1 d_2 y_1 y_2 + d_2^2 y_1 y_2$$
$$(d_1 y_2 + d_2 y_1)(d_1 y_1 + d_2 y_2) \geq (d_1 + d_2)^2 y_1 y_2$$

also wegen (3), (4), (5), (6) und (7)

$$q = \frac{d_1 y_1 + d_2 y_2}{(d_1 + d_2) y_1 y_2} \geq \frac{d_1 + d_2}{d_1 y_2 + d_2 y_1} = \frac{1}{p} > \frac{1}{y^*}$$

Die Funktion $\frac{1}{f}$ ist also in J streng konvex, w. z. b. w.

(B) ist falsch.
Zum Beweis genügt die Angabe eines Beispiels, nämlich einer Funktion f, die in einem Intervall J nur positive Funktionswerte annimmt und dort streng konvex ist, während die Funktion $\frac{1}{f}$ in diesem Intervall streng konkav ist.
Eine solche Funktion ist z. B. die im Intervall $J = (0, +\infty)$ definierte Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x}$.

a) Diese Funktion nimmt wegen $\frac{1}{x} > 0$ im Intervall J nur positive Funktionswerte an.
b) Diese Funktion ist in J streng konvex. Für je drei Zahlen x_1, x^*, x_2 aus J mit $0 < x_1 < x^* < x_2$ gilt nämlich

$$(x^* - x_1)(x_2 - x^*) > 0, \quad \text{also}$$
$$-x^{*2} + x_1 x^* + x_2 x^* > x_1 x_2, \quad \text{d. h.} \quad -x^* + x_1 + x_2 > \frac{x_1 x_2}{x^*}$$

Daher gilt für die Ordinate p eines auf der Sehne durch $\left(x_1; \frac{1}{x_1}\right)$, $\left(x_2; \frac{1}{x_2}\right)$ gelegenen Punktes mit der Abszisse x^*:

$$p = \frac{\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}}{x_2 - x_1}(x^* - x_1) + \frac{1}{x_1} = \frac{-x^* + x_1}{x_1 x_2} + \frac{1}{x_1} = \frac{-x^* + x_1 + x_2}{x_1 x_2} > \frac{1}{x^*}$$

Daraus folgt, dass die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x}$ in J streng konvex ist.

c) Die Funktion $\frac{1}{f}$ ist aber wegen $\frac{1}{f(x)} = x$ nicht streng konkav. Es gilt nämlich sogar für drei beliebige Zahlen x_1, x^*, x_2 aus J mit $0 < x_1 < x^* < x_2$, dass die Ordinate q eines auf der Sehne durch $(x_1; x_1)$, $(x_2; x_2)$ gelegenen Punktes mit der Abszisse x gleich x ist, so dass also insbesondere $\frac{1}{f}$ nicht streng konkav ist.

Aufgabe 151241:
Man untersuche, ob es ein Polynom $P(x)$ dritten Grades gibt, so dass $P(0) = 74$, $P(1) = 19$, $P(2) = 65$ und $P(3) = 92$ gilt.
Ist dies der Fall, so ermittle man $P(4)$ und $P(5)$.

Lösung von cyrix:
Eine Folge $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$, ... wird genau dann durch ein Polynom k-ten Grades mit $k > 0$, $k \in \mathbb{N}$ beschrieben, wenn ihre Differenzenfolge $P'(0) := P(1) - P(2)$, $P'(1) := P(2) - P(1)$, ... durch ein Polynom $(k-1)$-sten Grades beschrieben wird.

Angewendet auf die Zahlenwerte der Aufgabe erhält man:

$$P'(0) = -55, \quad P'(1) = 46, \quad P'(2) = 27, \quad P''(0) = 101, \quad P''(1) = -19$$

also genügt kein Polynom zweiten Grades $P'''(0) = -120$.
Setzt man also nun P''' mit dem Wert von $P'''(0)$ identisch fort, erhält man entsprechend ein kubisches Polynom für P mit den geforderten Anfangswerten.
Insbesondere ergibt sich

$$P'''(1) = -120, \quad P'''(2) = -120; \quad P''(2) = -139, \quad P''(3) = -259;$$

$$P'(3) = -112, \quad P'(4) = -371; \quad P(4) = -20 \quad \text{und} \quad P(5) = -391$$

Bemerkung: Die Funktion P' ist die „diskrete Ableitung“ der Funktion P.

Alternativ-Lösung von Kornkreis:
Das Polynom hat die Form $P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. Mit den angegebenen Bedingungen erhält man das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_0 &= 74 \\ a_3 + a_2 + a_1 + a_0 &= 19 \\ 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + a_0 &= 65 \\ 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + a_0 &= 92 \end{aligned}$$

Daraus kann man leicht a_0,a_1,a_2,a_3 bestimmen und erhält $P(x) = -20x^3 + 110{,}5x^2 - 145{,}5x + 74$. Damit errechnet man $P(4) = -20$ und $P(5) = -391$.

Aufgabe 151242:
Man ermittle die Menge aller derjenigen positiven reellen Zahlen r, für die folgende Aussage wahr ist:
Für jede positive reelle Zahl a hat die für alle reellen x durch $f(x) = 4 - x^2 - ax^3$ definierte Funktion f zwischen den Zahlen $2 - ar$ und 2 eine Nullstelle.

Lösung von Zeitschrift „Mathematik in der Schule“:
Da $f(0) = 4 > 0$ und wegen $a > 0$, $f(2) = -8a < 0$ gilt und die Funktion f stetig ist, besitzt f im Intervall $0 < x < 2$ wenigstens eine reelle Nullstelle.
Da für alle $x > 0$ sicher $f(x) = -2x - 3ax^2 < 0$ ist, folgt, dass f für alle positive x streng monoton fallend ist. Somit liegt im Intervall $0 < x < 2$ genau eine Nullstelle von f. Es genügt daher, $2 - ar > 0$ zu betrachten.

Im Intervall $2-ar < x < 2$ liegt genau dann eine Nullstelle von f, wenn für alle positiven a: $f(2-ar) > 0$ gilt. Nun ist

$$\begin{aligned} f(2-ar) &= 4 - (2-ar)^2 - a(2-ar)^3 \\ &= a[a^3r^2 + ar(12-r) - 6a^2r^2 - 4(2-r)] \end{aligned}$$

für alle positiven a genau dann größer als null, wenn für alle positiven a

$$g(a) = a^3r^3 + ar(12-r) - 6a^2r^2 - 4(2-r) > 0$$

ausfällt. Ist nun $r > 0$ eine reelle Zahl, die den Bedingungen der Aufgabe genügt, so gilt:

$$\lim_{a\to 0} g(a) = 4r - 8 \geq 0$$

Das bedeutet $r \geq 2$.
Umgekehrt hat auch jedes $r \geq 2$ die geforderte Eigenschaft. Für $r = 2$ ist nämlich wegen

$$\begin{aligned} \left(a - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} &> 0 \\ a^2 - 3a + \frac{5}{2} &> 0 \qquad \text{also} \\ 8a^3 + 20a - 24a^2 = f(2-2a) &> 0 \end{aligned}$$

für alle positiven reellen s.
Ist aber $r > 2$, so folgt wegen des monotonen Fallens von f und der soeben bewiesenen Ungleichung $f(2-2a) > 0$ aus $0 < 2-ar < 2-2a$, dass $f(2-ar) > 0$ ist. Damit haben genau alle $r \geq 2$ die geforderte Eigenschaft.

Aufgabe 151244:
Es sei f diejenige Funktion, die als Definitionsbereich die Menge aller Tripel (x, y, z) von nichtnegativen reellen Zahlen x, y, z mit $x + y + z = \pi$ hat und die jedem solcher Tripel jeweils die Zahl

$$f(x, y, z) = \sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z$$

zuordnet. Ermitteln Sie den Wertebereich der Funktion f und weisen Sie nach, dass jeder Wert in diesem Bereich angenommen wird!

Lösung von Zeitschrift „Mathematik in der Schule“:
Es gilt für alle x,y,z:

$$\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z \geq 0 \qquad (1)$$

Für $x = y = 0$, $z = \pi$ folgt $f(x,y,z) = 0$, d. h., die untere Grenze wird in Gleichung (1) angenommen.
Weiterhin gilt:

$$\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z < 3 \qquad (2)$$

Für $x = y = z = \frac{\pi}{3}$ folgt: $f(x,y,z) = \frac{9}{4}$ (3).
Behauptung: $W_f = \left\{a | 0 \leq a \leq \frac{9}{4}\right\}$.
Beweis: Für alle r ($r \in \mathbb{R}$) gilt:

$$\left(|r| - \frac{1}{2}\right) \geq 0 \quad \text{d. h.} \quad |r|^2 - |r| + \frac{1}{4} \geq 0 \quad \text{oder} \quad r^2 - |r| + \frac{1}{4} \geq 0$$

Sei $s \in \mathbb{R}$ und $|s| \leq 1$. Dann gilt erst recht

$$r^2 - |rs| + \frac{1}{4} \geq 0 \qquad \text{und somit} \qquad r^2 + rs + \frac{1}{4} \geq 0 \qquad (4)$$

Sei nun $r := \cos(x+y)$ und $:= \cos(x-y)$. Dann erhält aus (4):

$$\cos^2(x+y) + \cos(x+y) \cdot \cos(x-y) \geq -\frac{1}{4} \quad \text{bzw.}$$

$$[2\cos^2(x+y) - 1] + [2\cos(x+y) \cdot \cos(x-y)] \geq -\frac{3}{2}$$

Da $2\cos^2\alpha - 1 = \cos 2\alpha$ und $2\cos(\alpha+\beta) \cdot \cos(\alpha-\beta) = \cos 2\alpha + \cos 2\beta$ gilt, erhält man

$$\cos(2x+2y) + \cos 2x + \cos 2y \geq -\frac{3}{2}$$
$$\cos 2(x+y) + \cos 2x + \cos 2y \geq -\frac{3}{2}$$
$$3 - \cos 2x - \cos 2y - \cos 2(x+y) \leq \frac{9}{4}$$

Diese Ausdruck kann wir folgt zerlegt werden:

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2y\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2(x+y)\right) \leq \frac{9}{4}$$

Da $\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$, ergibt sich:

$$\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2(x+y) \leq \frac{9}{4}$$

Mit $x + y = \pi - z$ erhält man schließlich

$$0 \leq \sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z \leq \frac{9}{4}$$

Da $f(x,y,z)$ eine stetige Funktion von (x,y,z) ist und ihr Definitionsbereich der gesamte dreidimensionale euklidische Raum zusammenhängend ist, sind die Voraussetzungen zur Anwendung des Zwischenwertsatzes für Funktionen von mehreren Variablen erfüllt. Daher nimmt f jeden Wert aus $\left[0; \frac{9}{4}\right]$ an.
Somit ist der Wertebereich von f die Mengen der reellen Zahlen

$$W_f = \left\{ a | 0 \leq a \leq \frac{9}{4} \right\}$$

Aufgabe 161241:
Es seien a, b, x_0 drei reelle Zahlen mit $a < x_0 < b$; das Intervall aller reeller Zahlen x mit $a < x < b$ sei I genannt.
Eine in I definierte Funktion f, sei an der Stelle x_0 differenzierbar. Ferner sei g die in I durch $g(x) = |f(x)|$ definierte Funktion.
Man beweise: Unter diesen Voraussetzungen ist g genau dann an der Stelle x_0 nicht differenzierbar, wenn gilt:

$$f(x_0) = 0 \qquad \text{und} \qquad f'(x_0) \neq 0$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Der geforderte Beweis ist erbracht, wenn die folgenden drei Aussagen als richtig nachgewiesen sind:

(1) Ist $f(x_0) \neq 0$, so ist g an der Stelle x_0 differenzierbar.
(2) Ist $f(x_0) = 0$ und $f'(x_0) = 0$, so ist g an der Stelle x_0 differenzierbar.

(3) Ist $f(x_0) = 0$ und $f'(x_0) \neq 0$, so ist g an der Stelle x_0 nicht differenzierbar.

Zu (1): Ist $f(x_0) > 0$, so existiert wegen der (aus der Differenzierbarkeit folgenden) Stetigkeit von f an der Stelle x_0 eine Umgebung von $_0$, in der $f(x_0) > 0$ ist. In dieser Umgebung (einschließlich x_0) gilt somit $g(x) = f(x)$, also ist g ebenso wie f an der Stelle x_0 differenzierbar.
Ist $f(x_0) < 0$, so existiert entsprechend eine Umgebung von x_0, in der $g(x) = -f(x)$ gilt, woraus die Behauptung in analoger Weise folgt.

Zu (2): Wegen $f'(x_0) = 0$, also $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{x-x_0} = 0$, existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Umgebung von x_0, in der (für $x \neq x_0$) $\frac{|f(x)|}{x-x_0} < \varepsilon$ gilt.
Daher und wegen $\frac{|g(x)|}{x-x_0} = \frac{|f(x)|}{x-x_0}$ hat auch g an der Stelle x_0 die Ableitung 0.

Zu (3) beweise wir die äquivalente Aussage:
(3'): Ist $f(x_0) = 0$ und g an der Stelle x_0 differenzierbar, so ist $f'(x_0) = 0$.
Nach Voraussetzung existiert $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{g(x)}{x-x_0}$. Da für alle $x > x_0$ aus I nun $\frac{g(x)}{x-x_0} \geq 0$ gilt, folgt $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{g(x)}{x-x_0} \geq 0$; da für alle $x < x_0$ aus I aber $\frac{g(x)}{x-x_0} \geq 0$ gilt, folgt $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{g(x)}{x-x_0} \leq 0$.
Hieraus ergibt sich entsprechend wie in (2) wegen $|\frac{f(x)}{x-x_0}| = |\frac{g(x)}{x-x_0}|$ auch $f'(x_0)$.

Aufgabe 161246A:
Es sind alle Polynome
$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$$
mit reellen Koeffizienten $a_0, a_1, ..., a_n$ anzugeben, die die folgende Eigenschaft haben:
Für alle reellen Zahlen x gilt $x \cdot f(x-1) = (x-2) \cdot f(x)$.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Für $x = 2$ folgt: $2 \cdot f(1) = 0$, d. h., $x = 1$ ist Nullstelle von $f(x)$.
Für $x = 1$ folgt daraus: $1 \cdot f(0) = 0$, d. h., $x = 0$ ist Nullstellen von $f8x)$.
Somit kann $f(x)$ dargestellt werden, als
$$f(x) = x \cdot (x-1) \cdot g(x)$$
mit einem Polynom $g(x)$. Setzt man diesen Ansatz in die Funktionalgleichung ein, so ergibt sich:
$$x \cdot [(x-1)(x-2)g(x-1)] = (x-2) \cdot [x \cdot (x-1)g(x)]$$
Hieraus folgt für alle $x \neq 0, 1, 2$ die Beziehung $g(x-1) = g(x)$, d. h., $g(x)$ ist eine periodische Funktion mit der Periode 1. Daraus folgt, da $g(x)$ ein Polynom ist:
$$g(x) = c = \text{const.}$$
Somit erhält man, dass alle Polynome der geforderten Art in der Form
$$f(x) = c \cdot x \cdot (x-1) \qquad (2)$$
mit reellem c darstellbar sind. Setzt man die gefundene Darstellung in die Funktionalgleichung ein, so entsteht die Identität
$$x \cdot c \cdot (x-1)(x-2) = (x-2) \cdot c \cdot x \cdot (x-1)$$
so dass auch tatsächlich jedes Polynom der Form (1) den Bedingungen der Aufgabe genügt.

Aufgabe 171241:
Sind f und g im Intervall $-1 \leq x \leq 1$ stetige Funktionen, so seien $d_1(f,g)$ und $d_2(f,g)$ wie folgt definiert:

$$d_1(f,g) = \max |f(x) - g(x)|$$

$d_2(f,g)$ ist der in Flächeneinheiten eines rechtwinkligen Koordinatensystems ausgedrückte Inhalt derjenigen Fläche, die durch die Bilder der Funktionen f und g sowie zwei Strecken auf den Geraden $x = -1$ bzw. $x = 1$ begrenzt wird.
(Dabei werde der Inhalt jeder Teilfläche, unabhängig von ihrem Umlaufsinn, als positiv aufgefasst.)
Es seien nun f_n $(n = 1, 2, 3, ...)$ und h die im Intervall $-1 \leq x \leq 1$ durch

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (1-x)x^{k-1} \quad \text{und} \quad h(x) = 1$$

definierte Funktionen.
a) Man ermittle $\lim\limits_{n\to\infty} d_1(f_n, h)$, falls dieser Grenzwert existiert.
b) Man ermittle $\lim\limits_{n\to\infty} d_2(f_n, h)$, falls dieser Grenzwert existiert.

Lösung von Zeitschrift „Mathematik in der Schule“:
Die Funktionen f_n und h im Intervall $-1 \leq x \leq 1$ stetig. Mit Hilfe der Summenformel für endliche geometrische Partialsummen ergibt sich, sofern $x \neq 1$ ist:

$$f_n(x) = (1-x)\frac{x^n - 1}{x - 1} \qquad \text{also} \qquad f_n(x) = 1 - x^n \qquad (1)$$

Wegen $f_n(1) = 0$ gilt die Beziehung (1) auch für $x = 1$. Daher gilt $|f_n(x) - (x)| = |1 - x^n - 1| = |x^n|$, also $d_1(f_n,h) = \max |x^n| = 1$. Ferner ist die Definition von $d_2(f,g)$ gleichwertig mit

$$d_2(f,g) = \int_{-1}^{1} |f(x) - g(x)| dx \qquad \text{somit gilt} \qquad d_2(f_n,h) = \int_{-1}^{1} |x^n| dx$$

Da das Bild von $y = |x^n|$ für $-1 \leq x \leq 0$ durch Spiegelung an der y-Achse in das Bild von $y = x^n (= |x^n|)$ für $0 \leq x \leq 1$ übergeht, ist demnach

$$d_2(f_n,h) = 2 \cdot \int_0^1 x^n dx = 2 \cdot \frac{1^{n+1} - 0^{n+1}}{n+1} = \frac{2}{n+1}$$

Somit ergibt sich

$$\text{a)} \quad \lim_{n\to\infty} d_1(f_n,h) = 1 \qquad ; \qquad \text{b)} \quad \lim_{n\to\infty} d_2(f_n,h) = 0$$

Aufgabe 171242:
Es seien g und h die in der (zweielementigen) Menge $\{1, -1\}$ als Definitionsbereich durch

$$g(1) = 1, \quad g(-1) = -1 \qquad (1)$$
$$h(1) = -1, \quad h(-1) = 1 \qquad (2)$$

definierten Funktionen. Ferner seien f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7 Funktionen, von denen einige gleich g und die übrigen gleich h sind. Für diese Funktionen gelten:

$$f_1(1) = -1, \quad f_6(1) = f_7(1) = 1 \qquad (3)$$
$$f_3(f_4(1)) = -1 \qquad (4)$$
$$f_1(f_2(f_3(f_4(f_5(f_6(f_7(1))))))) = -1 \qquad (5)$$

Man beweise, dass in allen Fällen, in denen diese Bedingungen erfüllt sind, die Anzahl derjenigen f_i, die gleich g sind, die gleiche ist, und gebe diese Anzahl an.

Lösung von Kornkreis:
Zunächst stellen wir fest, dass jede der gegebenen Funktionen bereits festgelegt sind, wenn man ihren Funktionswert in genau einem Argument kennt. Daher folgt sofort $f_6 \equiv f_7 \equiv g$ und $f_1 \equiv h$, womit Gleichung (5) äquivalent ist zu

$$(f_2 \circ \cdots \circ f_5)(1) = 1. \quad (6)$$

Aus $f_3(f_4(1)) = -1$ folgt, dass $f_3 \equiv g$ und $f_4 \equiv h$, oder $f_3 \equiv h$ und $f_4 \equiv g$ gilt. Insbesondere ist

$$f_3(f_4(-1)) = 1. \quad (7)$$

Wenn nun $f_5 \equiv g$ gilt, so folgt aus Gleichung (6) $f_2(-1) = 1$, also $f_2 \equiv h$. Aus $f_5 \equiv h$ würde zusammen mit Gleichung (7) hingegen $f_2 \equiv g$ folgen.
Da also genau eine Funktion von f_2, f_5 gleich g ist und genau eine Funktion von f_3, f_4 gleich g ist, ergibt sich die gesuchte Anzahl zu 4.

Aufgabe 181241:
Man ermittle alle ganzen Zahlen a mit der Eigenschaft, dass zu den Polynomen

$$f(x) = x^{12} - x^{11} + 3x^{10} + 11x^3 - x^2 + 23x + 30$$
$$g(x) = x^3 + 2x + a$$

ein Polynom $h(x)$ so existiert, dass für alle reellen x die Gleichung $f(x) = g(x) \cdot h(x)$ gilt.

Lösung von Zeitschrift „Mathematik in der Schule“:
Zu den gegebenen Polynomen $f(x)$ und $g(x)$ gibt es genau zwei eindeutig bestimmte Polynome $h(x)$ und $q(x)$ derart, dass $f(x) = g(x) \cdot h(x) + q(x)$ für alle reellen x gilt und $q(x)$ das Nullpolynom ist oder kleineren Grad als $g(x)$ hat.
Durch Polynomdivision erhält man

$$f(x) = g(x)[x^9 - x^8 + x^7 + (-a+2)x^6 + (a-2)x^5 + (a-4)a^4 + (a^2 - 4a + 4)x^3 + (-a^2 + 8)x^2 +$$

$$+(-3a^2+12a-8)x+(-a^3+6a^2+4a+5)]+(a^3+6a^2+32a+15)x^2+(5a^3-24a^2+16a+33)x+a^4-6a^3+4a^2+5a+30$$

Eine ganze Zahl a hat daher genau dann die verlangte Eigenschaft, wenn für sie alle reellen x

$$q(x) = (a^3 + 6a^2 + 32a + 15)x^2 + (5a^3 - 24a^2 + 16a + 33)x + a^4 - 6a^3 + 4a^2 + 5a + 30 = 0$$

ist, d. h., wenn die Gleichungen

$$a^3 + 6a^2 - 32a + 15 = 0 \qquad (1)$$
$$5a^3 - 24a^2 + 16 + 33 = 0 \qquad (2)$$
$$a^4 - 6a^3 + 4a^2 + 5a + 30 = 0 \qquad (3)$$

gelten.
Angenommen, eine ganze Zahl a erfüllt (1), (2), (3). Dann folgt $a|33$ und $a|30$, also $a|3$, d. h. a ist eine der Zahlen 1, -1, 3, -3.
Wegen

$$1^3 + 6 \cdot 1^2 - 32 \cdot 1 + 15 = -10$$
$$(-1)^3 + 6 \cdot (-1)^2 - 32 \cdot (-1) + 15 = 52$$
$$(-3)^3 + 6 \cdot (-3)^2 - 32 \cdot (-3) + 15 = 138$$

verbleibt nur die Möglichkeit $a = 3$. In der Tat erfüllt $a = 3$ die Gleichungen (1), (2), (3). Daher hat genau die Zahl $a = 3$ die geforderten Eigenschaften.

Aufgabe 191241:
Man ermittle alle Paare $(f(x); g(x))$ von Polynomen 3. Grades

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$
$$g(x) = b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0$$

deren Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, a_3, b_0, b_1, b_2, b_3$ reelle Zahlen sind und für die die folgenden Bedingungen erfüllt sind:
(1) Jeder der Werte, die $f(x)$ und $g(x)$ für $x = 1, 2, 3$ und 4 annehmen, ist eine der Zahlen 0 und 1.
(2) Wenn $f(1) = 0$ oder $f(2) = 1$ ist, so ist $g(3) = 0$ und $g(4) = 1$.
(3) Wenn $f(1) = 1$ oder $f(4) = 1$ ist, so ist $g(1) = 1$ und $g(3) = 1$.
(4) Wenn $f(2) = 0$ oder $f(4) = 0$ ist, so ist $g(2) = 0$ und $g(4) = 0$.
(5) Wenn $f(3) = 1$ oder $f(4) = 1$ ist, so ist $g(1) = 0$.

Lösung von Zeitschrift „Mathematik in der Schule“:
Angenommen, für zwei Polynome $f(x), g(x)$ seien die Bedingungen der Aufgabenstellung erfüllt.
1. Zunächst wird gezeigt, dass durch die Bedingungen (1) bis (5) die Funktionswerte $f(k), g(k)$ für $k =$ 1,2,3,4 eindeutig bestimmt sind. Wäre $f(4) = 1$, so führten (3) und (5) auf den Widerspruch $g(1) = 1$, $g(1) = 0$. Also ist nach (1) $f(4) = 0$. Nach (4) folgt hieraus $g(2) = 0, g(4) = 0$.
Aus (2) ergibt sich daher, dass weder $f(1) = 0$ noch $f(2) = 1$ sein kann, somit ist nach (1) $f(1) = 1, f(2) = 0$. Hiernach erhält man aus (3) $g(1) = 1, g(3) = 1$.
Somit ergibt (5), dass nicht $f(3) = 1$ gelten kann; nach (1) ist also $f(3) = 0$. Wir erhalten also

$$f(1) = 1; \quad f(2) = 0; \quad f(3) = 0; \quad f(4) = 0; \quad g(1) = 1; \quad g(2) = 0; \quad g(3) = 1; \quad g(4) = 0 \qquad (6)$$

2. Die Gleichungen (6) lauten ausführlich geschrieben:

$$\begin{aligned} a_3 + a_2 + a_1 + a_0 &= 1 \\ 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + a_0 &= 0 \\ 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + a_0 &= 0 \\ 64a_3 + 16a_2 + 4a_1 + a_0 &= 0 \qquad \text{und} \\ b_3 + b_2 + b_1 + b_0 &= 1 \\ 8b_3 + 4b_2 + 2b_1 + b_0 &= 0 \\ 27b_3 + 9b_2 + 3b_1 + b_0 &= 1 \\ 64b_3 + 16b_2 + 4b_1 + b_0 &= 0 \end{aligned}$$

Dies sind zwei lineare Gleichungssysteme für die Koeffizienten, die man z. B. durch schrittweise Elimination einer Unbekannten auflösen kann. Man erhält so:

$$a_0 = 4; \quad a_1 = -\frac{13}{3}; \quad a_2 = \frac{3}{2}; \quad a_3 = -\frac{1}{6} \qquad \text{und}$$
$$b_0 = 8; \quad b_1 = -\frac{34}{3}; \quad b_2 = 5; \quad b_3 = -\frac{2}{3}$$

Es können daher nur die Polynome

$$f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{13}{3}x + 4 \qquad \text{und} \qquad g(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 5x^2 - \frac{34}{3}x + 8$$

die Bedingungen der Aufgabenstellung erfüllten. Dass (1) erfüllt ist, kann man mit einer Probe leicht nachprüfen. (2) ist erfüllt, denn es ist weder $f(1) = 0$ noch $f(2) = 1$. (3) ist erfüllt, denn es ist $g(1) = 1$ und $g(3) = 1$. (4) ist erfüllt, denn es ist $g(2) = 0$ und $g(4) = 0$ und (5) ist erfüllt, denn es ist weder $f(3) = 1$ noch $f(4) = 1$.
Daher erfüllt genau das Paar $(f(x), g(x))$ mit $f(x), g(x)$ aus (7) alle Bedingungen der Aufgabenstellung.

Aufgabe 211244:
Es sei $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten $a_0, a_1, ..., a_n$, wobei $n \geq 1$ und $a_n \neq 0$ gelte.
Man setze
$$r = \frac{|a_0| + |a_0| + ... + |a_{n-1}|}{|a_n|}$$
und beweise:
a) Ist $r \geq 1$, so liegt jede reelle Nullstelle von $f(x)$ (falls eine solche existiert) im Intervall $-r \leq x \leq r$.
b) Ist $r \leq 1$, so liegt jede reelle Nullstelle von $f(x)$ (falls eine solche existiert) im Intervall $-1 \leq x \leq 1$.

Lösung von Zeitschrift „Mathematik in der Schule“:
Zunächst wird folgender Hilfssatz bewiesen:
c) Wenn $f(x)$ eine Nullstelle x_0 mit $|x_0| > 1$ besitzt, so gilt $|x_0| \leq r$.
Beweis von c):
Wenn $f(x)$ eine Nullstelle x_o mit $|x_0| > 1$ besitzt, dann folgt mittels Dreiecksungleichung (für beliebige reelle Zahlen s und t gilt $|s + t| \leq |s| + |tY)$

$$\begin{aligned} |a_n||x_0|^n &= |-a_0 - a_1x_0 - ... - a_{n-1}x_0^{n-1}| \\ &\leq |a_0| + |a_1||x_0| + ... + |a_{n-1}||x_0|^{n-1} \\ &\leq (|a_0| + |a_1| + ... + |a_{n-1}|)|x_0|^{n-1} \qquad \text{(wegen } |x_0| > 1) \\ \text{also} \quad |x_0| &\leq \frac{|a_0| + |a_1| + ... + |a_{n-1}|}{a_n} = r \end{aligned}$$

da $|a_n| \neq 0$ und $|x_0| \neq 0$ ist. Aus der Richtigkeit der Aussage c) folgt die Richtigkeit der Aussage a).

Beweis: Jede Nullstelle x_0 mit $|x_0| \leq 1$ liegt wegen der Voraussetzung $r \geq 1$ im Intervall $-r \leq x_0 \leq r$. Gilt aber $|x_0| > 1$, so folgt mit c): $-r \leq x_0 \leq r$.

Aus der Richtigkeit der Aussage c) folgt die Richtigkeit der Aussage b).
Beweis: Angenommen, es gibt eine Nullstelle x_0, die nicht im Intervall $-1 \leq x_0 \leq 1$ liegt, so folgt mit c) $r \leq |x_0| > 1$ im Widerspruch zur Voraussetzung $r \leq 1$.

Aufgabe 211246B:
Man ermittle alle diejenigen Funktionen f und g, die für alle nichtnegativen reellen Zahlen x definiert sind, reelle Funktionswerte haben und folgende Bedingungen erfüllen:
(1) Für alle $x \geq 0$ gilt $f(x) \geq 1$ und $g(x) \geq 0$.
(2) Für alle $x \geq 0$ gilt $(f(x))^2 - (g(x))^2 = 1$.
(3) Für alle $x \geq 0$ und alle $y \geq 0$ gilt
$$f(\sqrt{x^2 + y^2}) = f(x) \cdot f(y) + g(x) \cdot g(y)$$
(4) Für alle $x \geq 0$ und alle $y \geq 0$ gilt
$$g(\sqrt{x^2 + y^2}) = f(x) \cdot g(y) + g(x) \cdot f(y)$$

Lösung von Zeitschrift „Mathematik in der Schule“:
I. Angenommen f und g seien Funktionen, die den Bedingungen der Aufgabe entsprechen. Dann werden durch
$$u(x) = f(x) + g(x) \quad ; \quad v(x) = f(x) - g(x) \qquad \text{für alle } x \geq 0$$

Funktionen u,v definiert, die nach (1) und (2) $u(x) \geq 1$, $u(x) \cdot v(x) = 1$ für alle $x \geq 0$ und nach (3) und (4)

$$u(\sqrt{s^2+t^2}) = [f(s)+g(s)] \cdot [f(t)+g(t)] = u(s) \cdot u(t)$$

für alle $s,t \geq 0$ und somit

$$u(\sqrt{x+y}) = u(\sqrt{x}) \cdot u(\sqrt{y})$$

für alle $x,y \geq 0$ erfüllen.
Somit wird durch $F(x) := \ln[u(\sqrt{x})]$ für alle $x \geq 0$ eine Funktion F definiert, die den Bedingungen $F(x) \geq 0$ für alle $x \geq 0$ und $F(x-y) = F(x) + F(y)$ für alle $x,y \geq 0$ genügt.

Hieraus folgt: Es gibt eine reelle Zahl k mit $k \geq 0$, so dass $F(x) = kx$ für alle $x \geq 0$ gilt. Mit den eingeführten Funktionen u, v, F gilt somit für alle $x \geq 0$

$$u(x) = e^{kx^2} \qquad ; \qquad v(x) = e^{-kx^2};$$
$$f(x) = \frac{1}{2}\left(e^{kx^2} + e^{-kx^2}\right) \qquad ; \qquad g(x) = \frac{1}{2}\left(e^{kx^2} - e^{-kx^2}\right) \qquad (1)$$

Daher gilt: Ein Funktionspaar (f,g) kann nur dann die geforderten Eigenschaften haben, wenn sich f und g beide mit einem und demselben reellen $k \geq 0$ durch (1) für alle $x \geq 0$ darstellen lassen.

II. Nachweis dieser Eigenschaften
zu (1): Für alle $x \geq 0$ gilt: Wegen $kx^2 \geq 0$ ist $e^{kx^2} \geq 1 \geq e^{-kx^2} > 0$. Daraus ergibt sich einerseits

$$g(x) = \frac{1}{2}\left(e^{kx^2} - e^{-kx^2}\right) \geq 0$$

und andererseits aus $\left(e^{kx^2} - 1\right)^2 \geq 0$ über $e^{kx^2} + 1 \geq 2e^{kx^2}$

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(e^{kx^2} + e^{-kx^2}\right) \geq 1$$

zu (2): Für alle $x \geq 0$ ist

$$[f(x)]^2 - [g(x)]^2 = \frac{1}{4}\left(e^{2kx^2} + 2 + e^{kx^2} - e^{2kx^2} + 2 - e^{-2kx^2}\right) = 1$$

zu (3): Für alle $x,y \geq 0$ ist

$$f(x) \cdot f(y) + g(x) \cdot g(y) = \frac{1}{4}\left(e^{k(x^2+y^2)} + e^{k(-x^2+y^2)} + e^{k(x^2-y^2)} + e^{k(-x^2-y^2)}\right) +$$
$$+\frac{1}{4}\left(e^{k(x^2+y^2)} - e^{k(-x^2+y^2)} + e^{k(x^2-y^2)} - e^{k(-x^2-y^2)}\right) = f(\sqrt{x^2+y+2})$$

zu (4): Für alle $x,y \geq 0$ ist

$$f(x) \cdot g(y) + g(x) \cdot f(y) = \frac{1}{4}\left(e^{k(x^2+y^2)} + e^{k(-x^2+y^2)} - e^{k(x^2-y^2)} - e^{k(-x^2-y^2)}\right) +$$
$$+\frac{1}{4}\left(e^{k(x^2+y^2)} - e^{k(-x^2+y^2)} + e^{k(x^2-y^2)} - e^{k(-x^2-y^2)}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{k(x^2+y^2)} - e^{-k(x^2+y^2)}\right) = g(\sqrt{x^2+y+2})$$

Somit entsprechen die in (1) genannten Funktionen f und g genau den Bedingungen der Aufgabe.

Aufgabe 221241:
a) Untersuchen Sie, ob es reelle Zahlen $a \neq 0$, b und c so gibt, dass die für alle reellen x durch

$$f(x) = ax^4 + bx^2 + c \qquad (1)$$

definierte Funktion f die Funktionswerte $f(0) = 1$, $f(2) = 1$ hat und bei $x = 1$ einen lokalen Extremwert besitzt!
b) Gegeben seien zwei beliebige reelle Zahlen x_1 und x_2 mit $0 < x_1 < x_2$.
Ermitteln Sie (in Abhängigkeit von x_1 und x_2) alle diejenigen reellen $a \neq 0$, b, c mit der Eigenschaft, dass die durch (1) definierte Funktion f die Funktionswerte $f(0) = 1$, $f(x_2) = 1$ hat und bei $x = x_1$ einen lokalen Extremwert besitzt!

Lösung von weird:
Für den Aufgabenteil a) erhält man aus $f(0) = 1$ sofort den Wert $c = 1$ und die weiteren Gleichungen $f(2) = 16a + 4b + 1 = 1$ und $f'(1) = 4a + 2b = 0$ ergeben dann $a = b = 0$, im Widerspruch dazu, dass $a \neq 0$ vorausgesetzt war. Es gibt somit hier keine Lösung.

Auch für b) ergibt sich aus f(0)=1 sofort wieder $c = 1$. Die weiteren zwei Gleichungen für a und b sehen hier dann allgemeiner so aus:

$$f(x_2) = ax_2^4 + bx_2^2 + 1 = 1$$

$$f'(x_1) = 4ax_1^3 + 2bx_1 \;\; = 0$$

wofür wir wegen der Voraussetzung $0 < x_1 < x_2$ auch einfacher

$$ax_2^2 + b = 0$$

$$2ax_1^2 + b = 0$$

schreiben können. Insbesondere sieht man, dass wegen $a \neq 0$ sich für $x_2^2 \neq 2x_1^2$ ein Widerspruch ergibt, wie schon im Aufgabenteil a). Ist aber die Bedingung $x_2^2 = 2x_1^2$, also hier dann $x_2 = \sqrt{2}\,x_1 > 0$ erfüllt, so kann dann $a \neq 0$ sogar beliebig sein und für $b = -ax_2^2$ sind dann die Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

Aufgabe 221246B:
Bei der Untersuchung von Häufigkeitsverteilungen in der mathematischen Statistik treten Funktionen auf, die für endlich viele natürliche Zahlen definiert sind und für die gefordert wird, dass sie sogenannte Funktionalgleichungen (Gleichungen zwischen verschiedenen Funktionswerten) erfüllen.
Ein Beispiel hierfür ist das folgende:
Gegeben seien eine natürliche Zahl $n \geq 2$ und eine reelle Zahl p mit $0 < p < 1$.
Man ermittle (in Abhängigkeit von n und p) diejenigen Funktionen f mit der Menge $\{1, 2, ..., n\}$ als Definitionsbereich, die für $k = 1, 2, ..., n$ die folgende Gleichung (1) erfüllen:

$$\sum_{x=0}^{n} x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot ... \cdot (x-k+1) \cdot f(x) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot (n-k+1) \cdot p^k \qquad (1)$$

Hinweis: Für $k = 1$ ist die Gleichung (1) sinngemäß als

$$\sum_{x=0}^{n} x \cdot f(x) = n \cdot p$$

aufzufassen.

Lösung von MontyPythagoras:
Etwas vereinfachend kann man schreiben:

$$\sum_{x=0}^{n} \frac{x!}{(x-k)!} f(x) = \frac{n!}{(n-k)!} p^k$$

Wir teilen auf beiden Seiten durch $k!$:

$$\sum_{x=0}^{n} \binom{x}{k} f(x) = \binom{n}{k} p^k$$

Da $\binom{a}{b} = 0$ für $a < b$ ist, kann man den Index x auch bei k beginnen lassen, denn die Summanden für $x < k$ wären alle null:

$$\sum_{x=k}^{n} \binom{x}{k} f(x) = \binom{n}{k} p^k \qquad (2)$$

Das bedeutet, dass ein lineares Gleichungssystem für die $f(x)$ vorliegt, welches eine Dreiecksform aufweist. Bei $k = n$ lautet die Gleichung nämlich nur

$$f(n) = p^n$$

Man kann dann rekursiv die Werte für $f(k)$ aus $f(k+1)...f(n)$ berechnen. Führt man das von Hand für ein kleines n aus, z. B. $n = 3$, erkennt man ein Muster. Es scheint zu gelten:

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \tag{3}$$

Wir versuchen, die Gültigkeit dieser Formel zu beweisen, indem wir sie in (2) einsetzen:

$$\sum_{x=k}^{n} \binom{x}{k}\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \binom{n}{k} p^k$$

$$\sum_{x=k}^{n} \frac{x!}{k!(x-k)!} \cdot \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x} = \binom{n}{k} p^k$$

$$\sum_{x=k}^{n} \frac{n!}{k!(n-x)!(x-k)!} p^x (1-p)^{n-x} = \binom{n}{k} p^k$$

Terme, in denen nicht x vorkommt, können vor die Summe gezogen werden:

$$\frac{n!}{k!} \sum_{x=k}^{n} \frac{1}{(n-x)!(x-k)!} p^x (1-p)^{n-x} = \binom{n}{k} p^k$$

Wir teilen durch $\binom{n}{k}$:

$$(n-k)! \sum_{x=k}^{n} \frac{1}{(n-x)!(x-k)!} p^x (1-p)^{n-x} = p^k$$

$$\sum_{x=k}^{n} \binom{n-k}{x-k} p^x (1-p)^{n-x} = p^k$$

Wir substituieren $x = k + m$ mit $m = 0...(n-k)$:

$$\sum_{m=0}^{n-k} \binom{n-k}{m} p^{k+m} (1-p)^{n-k-m} = p^k$$

Wir teilen noch einmal durch p^k:

$$\sum_{m=0}^{n-k} \binom{n-k}{m} p^{m} (1-p)^{n-k-m} = 1$$

Die linke Seite entspricht dem binomischen Lehrsatz, denn es ist

$$\sum_{m=0}^{n-k} \binom{n-k}{m} p^{m} (1-p)^{n-k-m} = (p + (1-p))^{n-k} = 1^{n-k} = 1$$

Daher ist die Gleichung (2) tatsächlich erfüllt, und die gesuchte Funktionsvorschrift entspricht der in (3) angegebenen Formel.

Aufgabe 231245:
Man ermittle alle Funktionen f, die für alle von 0 verschiedenen reellen Zahlen x definiert sind und die die folgenden Bedingungen erfüllen:
(1) Für alle x_1, x_2 mit $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$, $x_1 + x_2 \neq 0$ ist $f(\frac{1}{x_1+x_2}) = f(\frac{1}{x_1}) + f(\frac{1}{x_2})$.
(2) Für alle x_1, x_2 mit $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$, $x_1 + x_2 \neq 0$ ist $(x_1 + x_2) \cdot f(x_1 + x_2) = x_1 x_2 \cdot f(x_1) \cdot f(x_2)$.
(3) Es gilt $f(1) = 1$.

Lösung von cyrix:
Es sei $r \neq 0$ eine beliebige von Null verschiedene reelle Zahl. Setzen wir $x_1 = x_2 = \frac{1}{r}$, so sind x_1 und x_2 wohldefiniert und (sowie auch $x_1 + x_2$ von Null verschieden, sodass wir aus (1) die Beziehung

$$f\left(\frac{r}{2}\right) = f\left(\frac{1}{\frac{1}{r}+\frac{1}{r}}\right) = f\left(\frac{1}{\frac{1}{r}}\right) + f\left(\frac{1}{\frac{1}{r}}\right) = 2f(r)$$

erhalten. Setzen wir dagegen $x_1 = x_2 = \frac{r}{2}$, so sind wieder die Voraussetzungen für (2) erfüllt, womit wir

$$r \cdot f(r) = \left(\frac{r}{2}+\frac{r}{2}\right) \cdot f\left(\frac{r}{2}+\frac{r}{2}\right) = \frac{r}{2} \cdot \frac{r}{2} \cdot f\left(\frac{r}{2}\right) \cdot \left(\frac{r}{2}\right) = \frac{r^2}{4} \cdot (2f(r))^2 = (r \cdot f(r))^2$$

erhalten, woraus $r \cdot f(r) \in \{0; 1\}$ folgt, da dies die einzigen reellen Zahlen sind, die gleich ihrem Quadrat sind.

Wäre für ein $r \neq 0$ das Produkt $r \cdot f(r)$ gleich 0, so also auch $f(r)$. Dann kann aber r wegen (3) einerseits nicht 1 sein, sodass wir $x_1 = r$ und $x_2 = 1 - r$ wählen und dies in (2) einsetzen können. Wegen $f(x_1) = f(r) = 0$ folgt damit dann aber auch

$$f(1) = f(x_1 + x_2) = x_1 x_2 \cdot f(x_1) \cdot f(x_2) = 0$$

was ein Widerspruch zu (3) ist.

Also muss für alle $r \neq 0$ die Gleichung $r \cdot f(r) = 1$ bzw. $f(r) = \frac{1}{r}$ gelten. Tatsächlich erfüllt diese Funktion auch alle drei geforderten Eigenschaften, wie man durch Einsetzen leicht nachprüft.

Aufgabe 241241:
a) Man beweise, dass durch

$$f(x) = \frac{(x^2 - x) \cdot (x^2 - x + 5) + 6}{(x^2 - x) \cdot (x^2 - x + 6) + 9}$$

eine Funktion f für alle reellen Zahlen x definiert wird.
b) Man ermittle den Wertebereich dieser Funktion.

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:
Es ist:

$$\frac{(x^2-x)(x^2-x+5)+6}{(x^2-x)(x^2-x+6)+9} = \frac{x^4 - x^3 + 5x^2 - x^3 + x^2 - 5x + 6}{x^4 - x^3 + 6x^2 - x^3 + x^2 - 6x + 9} =$$

$$= \frac{x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 5x + 6}{x^4 - 2x^3 + 7x^2 - 6x + 9} = 1 - \frac{x^2 - x + 3}{x^4 - 2x^3 + 7x^2 - 6x + 9}$$

Der Zähler hat offensichtlich keine (reelle) Nullstelle - lässt sich also nicht weiter faktorisieren. Wir könnten also nur noch prüfen, ob er als Faktor selbst im Nenner steckt. Wir prüfen also:

$$(x^2 - x + 3)(x^2 + ax + 3) \stackrel{?}{=} x^4 - 2x^3 + 7x^2 - 6x + 9$$

$$x^4 + (a-1)x^3 + (6-a)x^2 + (-3+3a)x + 9 = x^4 - 2x^3 + 7x^2 - 6x + 9$$

Das gilt offensichtlich für $a = -1$. Wir erhalten somit:

$$f(x) = \frac{(x^2-x)(x^2-x+5)+6}{(x^2-x)(x^2-x+6)+9} = 1 - \frac{1}{x^2 - x + 3}$$

Der Rest ist dann einfache Analysis.

Aufgabe 241243:
Man ermittle alle diejenigen Funktionen f, die für alle reellen Zahlen x mit $x \neq 0$ definiert sind und den folgenden Bedingungen (1), (2), (3) genügen:
(1) Für alle reellen Zahlen x mit $x \neq 0$ gilt $f(\frac{1}{x}) = x \cdot f(x)$.
(2) Für alle reellen Zahlen x und y mit $x \neq 0$, $y \neq 0$ und $x + y \neq 0$ gilt $f(\frac{1}{x}) + f(\frac{1}{y}) = 1 + f(\frac{1}{x+y})$.
(3) Es gilt $f(1) = 2$.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn eine für alle $x \neq 0$ definierte Funktion f den Bedingungen (1), (2), (3) genügt, so folgt: Für alle $x \neq 0$ gilt nach (2)

$$2 \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + f\left(\frac{1}{2x}\right) \tag{4}$$

Setzt man hierin $\frac{1}{2x} = u$, so folgt: Für alle $u \neq 0$ gilt

$$2 \cdot f(2u) = 1 + f(u) \tag{5}$$

Aus (5), (1), (4) folgt für alle $x \neq 0$

$$x(1 + f(x)) = 2xf(2x) = f\left(\frac{1}{2x}\right) = 2f\left(\frac{1}{x}\right) - 1 = 2xf(x) - 1$$

also $1 + f(x) = 2f(x) - \frac{1}{x}$. Daher kann nur die für alle $x \neq 0$ durch

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x} \tag{6}$$

definierte Funktion f die verlangten Eigenschaften haben.

II. Sie hat diese Eigenschaften; denn es gilt für alle x, y mit $x \neq 0$, $y \neq 0$, $x + y \neq 0$:

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + x = x\left(1 + \frac{1}{x}\right) = xf(x)$$
$$f\left(\frac{1}{x}\right) + f\left(\frac{1}{y}\right) = 1 + x + 1 + y = 1 + (1 + x + y) = 1 + f\left(\frac{1}{x+y}\right)$$
$$f(1) = 1 + \frac{1}{1} = 2$$

Daher hat genau die in (6) angegebene Funktion die verlangten Eigenschaften.

Aufgabe 251243:
Gibt es eine Funktion f, die für alle reellen Zahlen definiert ist, reelle Funktionswerte hat und die folgenden Bedingungen (1), (2) erfüllt?
(1) Für alle reellen Zahlen x und y gilt $f(x + y) = \frac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)}$.
(2) Es gilt $f(1) = \frac{1}{2}$.

Lösung von cyrix:
Die Funktion $f(x) := 1 - \frac{2}{1+3^x}$ erfüllt alle Eigenschaften. Wegen $3^x > 0$ für alle reellen Zahlen x ist die Funktion für alle solchen auch definiert und nimmt reelle Funktionswerte an. Genauer ist sogar $f(1) = 1 - \frac{2}{1+3} = 1 - \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, also Eigenschaft (2) erfüllt. Zum Nachweis von Eigenschaft (1) seien x und y zwei beliebige reelle Zahlen. Dann gilt einerseits

$$f(x + y) = 1 - \frac{2}{1 + 3^{x+y}}$$

und andererseits

$$1+f(x)f(y)=1+\left(1-\frac{2}{1+3^x}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{1+3^y}\right)=2-\frac{2}{1+3^x}-\frac{2}{1+3^y}+\frac{4}{(1+3^x)(1+3^y)}$$

sowie

$$f(x)+f(y)=2-\frac{2}{1+3^x}-\frac{2}{1+3^y}$$

also

$$\frac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)}=1-\frac{\frac{4}{(1+3^x)(1+3^y)}}{2-\frac{2}{1+3^x}-\frac{2}{1+3^y}+\frac{4}{(1+3^x)(1+3^y)}}=1-\frac{2}{(1+3^x)(1+3^y)-(1+3^y)-(1+3^x)+2}$$

sodass es nun noch genügt zu zeigen, dass

$$1+3^{x+y}=(1+3^x)(1+3^y)-(1+3^y)-(1+3^x)+2$$

ist, was man aber leicht durch Ausmultiplizieren und Zusammenfassen nachrechnet.

Alternativ-Lösung von MontyPythagoras:
Wegen (1) gilt

$$1+f(x+y)=1+\frac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)}=\frac{1+f(x)+f(y)+f(x)f(y)}{1+f(x)f(y)}$$

$$1+f(x+y)=\frac{(1+f(x))(1+f(y))}{1+f(x)f(y)} \tag{3}$$

In der gleichen Art und Weise erhält man:

$$1-f(x+y)=\frac{(1-f(x))(1-f(y))}{1+f(x)f(y)} \tag{4}$$

Teilt man (3) durch (4), folgt:

$$\frac{1+f(x+y)}{1-f(x+y)}=\frac{1+f(x)}{1-f(x)}\cdot\frac{1+f(y)}{1-f(y)}$$

Das erinnert stark an das Potenzgesetz $a^{x+y}=a^x\cdot a^y$, so dass wir setzen können:

$$\frac{1+f(x)}{1-f(x)}=a^x$$

Mithilfe von Gleichung (2) haben wir

$$\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}=3=a^1$$

also $a=3$, so dass gilt:

$$\frac{1+f(x)}{1-f(x)}=3^x$$

Nun noch nach $f(x)$ auflösen:

$$f(x)(3^x+1)=(3^x-1)$$

$$f(x)=\frac{3^x-1}{3^x+1}$$

Damit wäre die Lösung prinzipiell gefunden. Man kann noch Zähler und Nenner durch $3^{\frac{x}{2}}$ teilen:

$$f(x)=\frac{3^{\frac{x}{2}}-3^{-\frac{x}{2}}}{3^{\frac{x}{2}}+3^{-\frac{x}{2}}}$$

$$f(x)=\tanh\left(\frac{x}{2}\ln 3\right)$$

Aufgabe 271246B:
Man beweise:
Für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ und für je n im Intervall $0 \leq x \leq 1$ definierte Funktionen $f_1, f_2, ..., f_n$ gibt es reelle Zahlen $a_1, a_2, ..., a_n$ mit $0 \leq a_i \leq 1$ $(i = 1, ..., n)$, für die gilt:

$$\left| a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n - \sum_{i=1}^{n} f_i(a_i) \right| \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Zur Abkürzung sei gesetzt:

$$\begin{aligned} A_1 = A_2 = ... = A_{n-1} &= 1 - f_1(1) - f_2(1) - ... - f_{n-1}(1) - f_n(1) \\ A_n &= -f_1(0) - f_2(0) - ... - f_{n-1}(0) - f_n(0) \\ A_{n+1} &= f_1(0) + f_2(1) + ... + f_{n-1}(1) + f_n(1) \\ A_{n+2} &= f_1(1) + f_2(0) + f_3(1) + ... + f_{n-1}(1) + f_n(1) \\ &... \\ A_{2n} &= f_1(1) + f_2(1) + f_3(1) + ... + f_{n-1}(1) + f_n(0) \end{aligned}$$

Damit gilt

$$A_1 + A_2 + ... + A_{2n} = n - 1 \qquad \text{also} \qquad |A_1| + |A_2| + ... + |A_{2n}| \geq n - 1$$

Daher muss für mindestens einen der $2n$ Summanden

$$|A_i| \geq \frac{n-1}{2n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$$

gelten; d. h.: Es gibt unter den Systemen

$$\begin{aligned} (a_1,a_2,a_3,...,a_{n-1},a_n) &= (1,1,1,...,1,1), \\ &= (0,0,0,...,0,0), \\ &= (0,1,1,...,1,1), \\ &= (1,0,1,...,1,1), ... \\ &= (1,1,1,...,1,0) \end{aligned}$$

mindestens eines, für das

$$\left| a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n - \sum_{i=1}^{n} f_i(a_i) \right| \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$$

gilt. Die Existenz solcher a_i war zu beweisen.

Alternativ-Lösung von Nuramon:
Wir definieren eine Funktion $e : [0,1]^n \to \mathbb{R}$ durch

$$e(a_1,a_2,\ldots,a_n) := a_1 a_2 \cdots a_n - \sum_{k=1}^{n} f_k(a_k)$$

Außerdem sei

$$E := \max_{a \in \{0,1\}^n} |e(a)|.$$

Die zu zeigende Behauptung folgt aus $E \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$.

Wir betrachten die folgenden Ungleichungen:

$$(n-1)E \geq (n-1)e(1,1,1\dots,1,1) = n-1-(n-1)\sum_{k=1}^{n} f_k(1)$$
$$E \geq e(0,0,0,\dots,0,0) = -\sum_{k=1}^{n} f_k(0)$$
$$E \geq -e(0,1,1,\dots,1,1) = \sum_{k=1}^{n} f_k(1) - f_1(1) + f_1(0)$$
$$E \geq -e(1,0,1,\dots,1,1) = \sum_{k=1}^{n} f_k(1) - f_2(1) + f_2(0)\vdots$$
$$E \geq -e(1,1,1,\dots,0,1) = \sum_{k=1}^{n} f_k(1) - f_{n-1}(1) + f_{n-1}(0)$$
$$E \geq -e(1,1,1,\dots,1,0) = \sum_{k=1}^{n} f_k(1) - f_n(1) + f_n(0)$$

Durch Aufsummieren dieser Ungleichungen erhalten wir $2nE \geq n-1$, also die Behauptung.

Aufgabe 281242:
Man untersuche, ob es zu jeder natürlichen Zahl $n \geq 1$ jeweils eine Funktion f gibt, die die folgenden Bedingungen erfüllt:
(1) Die Funktion f ist für alle reellen Zahlen x definiert.
(2) Es gibt eine reelle Zahl x mit $f(x) \neq 0$.
(3) Wenn man Funktionen $f_1, f_2, ..., f_{n+1}$ durch die Festsetzungen definiert, für alle reellen x gelte

$$f_1(x) = f(x) \quad \text{sowie} \quad f_{k+1}(x) = f(f_k(x)) \quad \text{für} \quad k = 1, 2, ..., n$$

dann gilt für alle reellen x die Gleichung

$$\sum_{k=1}^{n} f_k(x) = f_{n+1}(x)$$

Lösung von Zeitschrift „alpha“:
Für eine feste natürliche Zahl $n \geq 1$ machen wir den Ansatz $f(x) = ax$ mit einer Konstanten a. Nach (3) ist dann $f_k(x) = a^k x$ für $k = 1,2,...,n+1$ und es soll gelten $ax + a^2x + ... + a^n x = a^{n+1}x$.
Wegen (2) ist $a \neq 0$ und es folgt

$$\frac{1}{a^n} + \frac{1}{a^{n-1}} + ... + \frac{1}{a} = 1 \qquad (4)$$

Zum Nachweis, dass es eine Zahl $a \neq 0$ gibt, die die Gleichung (4) erfüllt, betrachten wir die für $t > 0$ stetige Funktion

$$g(t) = \frac{1}{t^n} + \frac{1}{t^{n-1}} + ... + \frac{1}{t}$$

Wegen $\lim\limits_{t\to 0} = \infty$ und $g(1) = \frac{1}{n}$ folgt unter Beachtung der Stetigkeit von $g(t)$ die Existenz einer Zahl a mit $0 < a \leq 1$ und $g(a) = 1$. Die Funktion $f(x) = ax$ mit dieser Zahl a erfüllt alle drei Bedingungen (1), (2), (3).

Aufgabe 291246B:
Man ermittle für jede natürliche Zahl n mit $n > 1$ alle diejenigen Funktionen f, die mit dieser Zahl n den folgenden Bedingungen (1), (2), (3) genügen:
(1) Die Funktion f ist für alle reellen Zahlen x definiert.
(2) Die Funktion f ist an der Stelle $x = 0$ stetig.
(3) Für jede reelle Zahl x gilt $n \cdot f(nx) = f(x) + nx$.

Lösung von Zeitschrift „alpha“:
I. Angenommen, f und g seien zwei Funktionen, die beide den (für g entsprechend umzuformulierenden) Bedingungen (1), (2), (3) genügen.
Es sei x_0 eine beliebige reelle Zahl und hierzu $c = f(x_0) - g(x_0)$. Dann folgt aus (3), mit $x = \frac{x_0}{n}$ auf f und g angewandt

$$c = f(x_0) - g(x_0) = \frac{1}{n} \cdot \left(f\left(\frac{x_0}{n}\right) - g\left(\frac{x_0}{n}\right)\right)$$

Durch vollständige Induktion beweist man hieraus für jedes natürliche

$$k \geq 1 : \qquad n^k \cdot c = f\left(\frac{x_0}{n^k}\right) - g\left(\frac{x_0}{n^k}\right)$$

Wegen (2) existieren mit $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0$ auch die Grenzwerte

$$\lim_{k\to\infty} f\left(\frac{x_0}{n^k}\right) = f\left(\lim_{k\to\infty} \frac{x_0}{n^k}\right) = [f(0)] \qquad \text{und} \qquad \lim_{k\to\infty} g\left(\frac{x_0}{n^k}\right) = [g(0)]$$

also existiert auch der Grenzwert $\lim\limits_{k\to\infty} (n^k \cdot c)$. das ist aber nur für $c = 0$ möglich.

Da diese Schlüsse mit jeder beliebigen reellen Zahl x_0 ausgeführt werden können, gilt folglich $f(x) = g(x)$ für alle reellen Zahlen x. Es kann also höchstens eine Funktion f geben, die den Bedingungen (1), (2), (3) genügt.
II. Die oben definierte Funktion genügt diesen Bedingungen (Nachweis wie im 1. Lösungsweg).

Aufgabe 301243:
Man ermittle alle diejenigen Funktionen f, die den folgenden Bedingungen (1) und (2) genügen:
(1) Die Funktion f ist für alle reellen Zahlen x definiert und stetig.
(2) Für jede reelle Zahl x gilt $f(x) - 4f(x^2) = x - 16x^4$.

Lösung von weird:
Wir versuchen zunächst mit dem Ansatz

$$f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 \quad (a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R})$$

eine Polynomfunktion f mit den geforderten Eigenschaften zu finden. Einsetzen in (2) führt dann auf

$$-4a_2x^4 + (a_2 - 4a_1)x^2 + a_1x - 3a_0 = x - 16x^4$$

und ein einfacher Koeffizientenvergleich ergibt

$$a_2 = 4,\ a_1 = 1,\ a_0 = 0$$

d. h.,

$$f(x) = 4x^2 + x$$

erfüllt tatsächlich unsere Bedingungen hier und ist somit eine Lösung. Wir zeigen im Folgenden, dass sie auch die einzige ist. Setzt man nämlich

$$g(x) := f(x) - 4x^2 - x$$

so ist natürlich auch g für alle reellen Zahlen definiert und stetig, erfüllt aber nun die wesentlich einfachere Funktionalgleichung

$$g(x) = 4g(x^2)$$

Aus ihr folgt durch Einsetzen sofort

$$g(0) = g(1) = 0$$

sowie

$$g(-x) = g(x)$$

d. h., g ist jedenfalls eine gerade Funktion. Unser Ziel ist es zu zeigen, dass sie unter diesen Bedingungen nur identisch 0 sein kann, d. h., $f(x) = 4x^2 + x$ ist tatsächlich die einzige Lösung hier.
Angenommen nämlich, es gäbe ein $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $g(x_0) = y_0 \neq 0$, wobei wir o. B. d. A. $x_0 > 0$ voraussetzen dürfen, so gibt es dann wegen der Stetigkeit von g für $x = 1$ ein $\delta > 0$, sodass $|g(x)| < |y_0|$ für alle x mit $|x - 1| < \delta$. Nun gilt aber auch

$$g(x_0) = \frac{1}{4}\, g(\sqrt{x_0}) = \frac{1}{4^2}\, g(\sqrt[4]{x_0}) = \ldots = \frac{1}{4^k}\, g(\sqrt[2^k]{x_0}) = ... \quad (k \in \mathbb{N})$$

und indem wir hier nur k genügend groß wählen, dann weiter

$$|\sqrt[2^k]{x_0} - 1| < \delta \Rightarrow \left|g(\sqrt[2^k]{x_0})\right| < |y_0| \Rightarrow |g(x_0)| < |y_0|$$

ein klarer Widerspruch, der somit die Behauptung beweist.

Aufgabe 301245:
Man ermittle ein Polynom

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n \qquad (a_0, a_1, ..., a_n reell; a_n \neq 0) \qquad (1)$$

das die Bedingungen

$$f(-4) = 0, f(-3) = 1, f(-2) = 0, f(-1) = -1, f(0) = 0, f(1) = 1, f(2) = 0, f(3) = -1, f(4) = 0(2)$$

erfüllt und dabei möglichst niedrigen Grad n hat.

Lösung von cyrix:
Wegen $f(-4) = f(-2) = f(0) = f(2) = f(4) = 0$ ist $f(x)$ durch

$$g(x) := (x + 4)(x + 2)x(x - 2)(x - 4) = (x^2 - 16)(x^2 - 4)x = x^5 - 20x^3 + 64x$$

teilbar, sodass ein Polynom $h(x)$ mit $f(x) = g(x) \cdot h(x)$ existiert. Es ist $g(-3) = 105$, $g(-1) = -45$, $g(1) = 45$ und $g(3) = -105$, sodass nun ein Polynom $h(x)$ möglichst geringen Grades mit $h(\pm 3) = \frac{1}{105}$ und $h(\pm 1) = \frac{1}{45}$ gesucht wird.

Betrachten wir das Polynom $h_2(x) := 315 \cdot h(x) - 3$, welches den gleichen Grad wie h besitzt. Dann gilt $h_2(\pm 3) = 3 - 3 = 0$ und $h_2(\pm 1) = 7 - 3 = 4$.
Offensichtlich kann h_2 nicht vom Grad 0 oder 1 sein, da es sonst wegen $h_2(\pm 3) = 0$ konstant Null sein müsste, was der zweiten Bedingung an h_2 widerspricht. Jedoch erfüllt offenbar

$$h_2(x) = -\frac{1}{2} \cdot (x^2 - 9) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{9}{2}$$

alle Bedingungen, kann also als Polynom kleinsten Grades gewählt werden. Damit ist

$$h(x) = \frac{h_2(x) + 3}{315} = -\frac{1}{630}x^2 + \frac{1}{42}$$

und

$$f(x) = g(x) \cdot h(x) = -\frac{1}{630}x^7 + \left(\frac{2}{63} + \frac{1}{42}\right) x^5 - \left(\frac{32}{315} + \frac{10}{21}\right) x^3 + \frac{32}{21} = -\frac{1}{630}x^7 + \frac{1}{18}x^5 - \frac{26}{45}x^3 + \frac{32}{21}x$$

Aufgabe 311245:
Es sei a eine beliebige reelle Zahl mit $a \geq 2$. Man ermittle zu a alle Funktionen, die den nachstehenden Bedingungen (1), (2), (3) genügen:
(1) Die Funktion f ist für alle nichtnegativen ganzen Zahlen x definiert; alle Funktionswerte $f(x)$ sind reelle Zahlen.
(2) Für alle nichtnegativen ganzen Zahlen x, y mit x, y mit $x \geq y$ gilt:

$$f(x) \cdot f(y) = f(x+y) + f(x-y)$$

(3) Es gilt $f(1) = a$.
Bemerkung: f soll als elementare Funktion in geschlossenem Ausdruck angegeben werden, d. h.:
Die formelmäßige Angabe der Funktionswerte $f(x)$ soll dadurch erfolgen, dass auf x sowie auf Konstanten, Potenz-, Exponentialfunktionen, trigonometrische Funktionen von x oder auf Umkehrfunktionen solcher Funktionen Rechenoperationen (Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division) angewandt werden, und zwar in einer von x unabhängigen Anzahl der Anwendungsschritte.

Lösung von MontyPythagoras:
Setzt man $y = 0$ ein, erhält man:

$$f(x) \cdot f(0) = 2f(x)$$

so dass $f(0) = 2$ ist. Setzt man nun $y = 1$ ein, erhält man eine rekursive Definition:

$$af(x) = f(x+1) + f(x-1)$$

$$f(x+1) = af(x) - f(x-1)$$

mit $f(0) = 2$ und $f(1) = a$. Dies ist eine lineare Rekursion, so dass $f(x)$ als Summe aller Funktionen $f(x) = c^x$ dargestellt werden kann, die die Rekursion erfüllen:

$$c^{x+1} = ac^x - c^{x-1}$$

$$c \cdot c^x = ac^x - \frac{1}{c}c^x$$

$$c = a - \frac{1}{c}$$

$$c^2 - ac + 1 = 0$$

$$c_{1,2} = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - 1}$$

Die Funktion lautet also

$$f(x) = k_1 \left(\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - 1}\right)^x + k_2 \left(\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - 1}\right)^x$$

Für $x = 0$ muss gelten:

$$k_1 + k_2 = 2$$

und für $x = 1$ gilt:

$$k_1 \left(\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - 1}\right) + k_2 \left(\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - 1}\right) = a$$

$$(k_1 + k_2)\frac{a}{2} + (k_1 - k_2)\sqrt{\frac{a^2}{4} - 1} = a$$

Setzt man $k_1 + k_2 = 2$ in diese letzte Gleichung ein, kann man direkt schlussfolgern, dass $k_1 = k_2 = 1$ sein muss. Daher lautet die Funktion:

$$f(x) = \left(\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - 1}\right)^x + \left(\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - 1}\right)^x$$

Anmerkung: Da in der quadratischen Gleichung, wegen des Satzes von Vieta, $c_1 = \frac{1}{c_2}$ gilt, kann man die Funktion auch schreiben als:

$$f(x) = \left(\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - 1}\right)^x + \left(\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - 1}\right)^{-x}$$

Dies lässt sich durch die Hyperbelcosinus-Funktion darstellen:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Im vorliegenden Fall folgt daraus:

$$f(x) = 2\cosh\left(x \cdot \operatorname{arcosh}\frac{a}{2}\right)$$

Aufgabe 321246B:
Eine Funktion f erfülle folgende Voraussetzungen:
f ist für alle reellen Zahlen x definiert und stetig, alle Funktionswerte $f(x)$ sind reelle Zahlen, und für jedes reelle x gilt $f(f(f(x))) = x$.
Man beweise:
Diese Voraussetzungen werden nur von derjenigen Funktion f erfüllt, die für alle reellen x durch $f(x) = x$ definiert ist.

Lösung von Nuramon:
Wenn x,y reelle Zahlen sind mit $f(x) = f(y)$, dann folgt $x = f(f(f(x))) = f(f(f(y))) = y$. Also ist f injektiv.
Eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die injektiv ist, muss nach Zwischenwertsatz notwendig streng monoton sein.

Angenommen f wäre streng monoton fallend. Aus $0 < 1$ folgte dann $f(0) > f(1)$ und somit $f(f(0)) < f(f(1))$ und schließlich $0 = f(f(f(0))) > f(f(f(1))) = 1$, was offenbar falsch ist.

Daher muss f streng monoton wachsend sein. Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig. Wäre $x < f(x)$, so wäre auch $f(x) < f(f(x))$ und damit $f(f(x)) < f(f(f(x))) = x$. Das führt zum Widerspruch $x < f(x) < f(f(x)) < x$. Analog kann auch nicht $x > f(x)$ gelten.
Damit folgt $f(x) = x$, also die Behauptung.

Aufgabe 331246A:
Für alle positiven ganzen Zahlen n werde definiert:

$$f(n) = [2\sqrt{n}] - [\sqrt{n-1} + \sqrt{n+1}]$$

Man ermittle alle diejenigen positiven ganzen Zahlen n, für die
a) $f(n) = 1$, b) $f(n) = 0$
gilt.
Hinweis: Ist r eine reelle Zahl, so wird diejenige ganze Zahl g, für die $g \leq r < g + 1$ gilt, mit $g = [r]$ bezeichnet.

Lösung von MontyPythagoras:
Wir nennen

$$a_n = 2\sqrt{n} \qquad b_n = \sqrt{n-1} + \sqrt{n+1}$$

Wir zeigen zunächst, dass $a_n > b_n$ gilt, und dass die Differenz sehr schnell fallend ist:

$$a_n - b_n = 2\sqrt{n} - (\sqrt{n-1} + \sqrt{n+1})$$

$$a_n - b_n = \frac{\left(2\sqrt{n} - (\sqrt{n-1} + \sqrt{n+1})\right)\left(2\sqrt{n} + (\sqrt{n-1} + \sqrt{n+1})\right)}{2\sqrt{n} + (\sqrt{n-1} + \sqrt{n+1})}$$

$$a_n - b_n = \frac{4n - \left(n-1+n+1+2\sqrt{(n-1)(n+1)}\right)}{2\sqrt{n} + \sqrt{n-1} + \sqrt{n+1}}$$

$$a_n - b_n = \frac{2n - 2\sqrt{n^2-1}}{2\sqrt{n} + \sqrt{n-1} + \sqrt{n+1}}$$

$$a_n - b_n = \frac{2\left(n - \sqrt{n^2-1}\right)\left(n + \sqrt{n^2-1}\right)}{\left(2\sqrt{n} + \sqrt{n-1} + \sqrt{n+1}\right)\left(n + \sqrt{n^2-1}\right)}$$

$$a_n - b_n = \frac{2\left(n^2 - (n^2-1)\right)}{\left(2\sqrt{n} + \sqrt{n-1} + \sqrt{n+1}\right)\left(n + \sqrt{n^2-1}\right)}$$

$$a_n - b_n = \frac{2}{\left(2\sqrt{n} + \sqrt{n-1} + \sqrt{n+1}\right)\left(n + \sqrt{n^2-1}\right)}$$

Da im Nenner nur positive Terme stehen, ist damit einerseits der Nachweis erbracht, dass $a_n - b_n > 0$ ist, aber andererseits ist auch

$$a_n - b_n < \frac{2}{4\sqrt{n-1} \cdot 2\sqrt{n^2-1}} = \frac{1}{4\sqrt{n-1}\sqrt{n^2-1}}$$

Wie man sieht, fällt die Differenz mit wachsendem n schnell. Schon bei $n = 2$ ist die Differenz kleiner als $\frac{\sqrt{3}}{12}$. Es wird also überwiegend der Fall sein, dass a_n und b_n auf die gleiche ganze Zahl abgerundet werden, und daher $f(n) = 0$ ist. In seltenen Fällen könnte es aber passieren, dass a_n schon die nächste ganze Zahl erreicht hat, während b_n noch darunter liegt, also dass $[a_n] = [b_n] + 1$ und daher $f(n) = 1$ ist. Ein solcher Sprung passiert ganz sicher, wenn $n = k^2$ ist, denn dann ist $a_n = 2\sqrt{n} = 2k$ ganzzahlig. Da $b_n < a_n$ ist, aber auch $b_n > a_n - 1$, ist $[b_n] = 2k - 1$ und somit $f(k^2) = 1$. Wir zeigen nun, dass für alle anderen Fälle $f(n) = 0$ ist:

1. Für $n \in \{k^2+1, k^2+2, ..., k^2+k\}$ gilt

$$[a_n] = 2k$$

Beweis: Selbst für das größte Element in der Menge, nämlich $k^2 + k$, gilt:

$$2k < 2\sqrt{k^2+k} < 2k+1$$

Die linke Ungleichung ist offensichtlich. Für die zweite muss gelten:

$$4k^2 + 4k < 4k^2 + 4k + 1$$

Diese Ungleichung ist ebenfalls erfüllt. Wenn es aber für das größte Element der Menge gilt, gilt es für die kleineren Elemente erst recht. Es gilt aber auch

$$[b_n] = 2k$$

Hier führen wir den Beweis für das kleinste Element der Menge:

$$\sqrt{k^2+1-1} + \sqrt{k^2+1+1} > 2k$$

$$k + \sqrt{k^2+1+1} > 2k$$

$$\sqrt{k^2+1+1} > k$$

Wenn schon für das kleinste n aus der Menge die Behauptung gilt, dann auch für die größeren. Daher gilt für $n \in \{k^2+1, k^2+2, ..., k^2+k\}$, dass $[a_n] = [b_n] = 2k$ ist, und daher $f(n) = 0$.

2. Für $n \in \{k^2+k+1, k^2+k+2, ..., k^2+2k\}$ gilt

$$[a_n] = 2k+1$$

Beweis: (kleinstes Element)

$$2k+1 < 2\sqrt{k^2+k+1}$$
$$4k^2+4k+1 < 4k^2+4k+4$$

(größtes Element)

$$2\sqrt{k^2+2k} < 2k+2$$
$$4k^2+8k < 4k^2+8k+4$$

Daher gilt $[a_n] = 2k+1$. Es gilt aber auch für alle $[b_n] = 2k+1$. Beweis für das kleinste Element ist ausreichend:

$$\sqrt{k^2+k+1-1}+\sqrt{k^2+k+1+1} > 2k+1$$
$$\sqrt{k^2+k}+\sqrt{k^2+k+2} > 2k+1$$
$$k^2+k+k^2+k+2+2\sqrt{(k^2+k)(k^2+2k+2)} > 4k^2+4k+1$$
$$2\sqrt{(k^2+k)(k^2+2k+2)} > 2k^2+2k-1$$
$$4(k^2+k)^2+8(k^2+k) > 4(k^2+k)^2-4(k^2+k)+1$$
$$12(k^2+k) > 1$$

Aufgrund dessen gilt für diese Menge $n \in \{k^2+k+1, k^2+k+2, ..., k^2+2k\}$, dass $[a_n] = [b_n] = 2k+1$, und daher ebenfalls $f(n) = 0$. Das nächstgrößere n wäre nun $k^2+2k+1 = (k+1)^2$, was wieder eine Quadratzahl ist. Zusammenfassend kann man also festhalten, dass nur dann $f(n) = 1$ ist, wenn n eine Quadratzahl ist.

Alternativ-Lösung von Nuramon:
Es ist $f(1) = 1$. Von nun an sei $n \geq 2$.
Es gilt $f(n) = 0$ genau dann, wenn $\lfloor 2\sqrt{n} \rfloor = \lfloor \sqrt{n-1}+\sqrt{n+1} \rfloor$. Dies ist genau dann der Fall, wenn es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$k \leq 2\sqrt{n} < k+1 \quad \text{und} \quad k \leq \sqrt{n-1}+\sqrt{n+1} < k+1.$$

Dies wiederum ist äquivalent zu

$$\exists k \in \mathbb{N}: \quad k^2 \leq 4n < (k+1)^2 \quad \text{und} \quad k^2 \leq 2n+2\sqrt{n^2-1} < (k+1)^2.$$

Da $2n+2\sqrt{n^2-1} < 2n+2n = 4n$ ist, ist somit $f(n) = 0$ genau dann, wenn

$$\exists k \in \mathbb{N}: \quad k^2 \leq 2n+2\sqrt{n^2-1} \quad \text{und} \quad 4n < (k+1)^2,$$

was wiederum äquivalent ist zu

$$\exists k \in \mathbb{N}: \quad k^2 \leq 2n+\lfloor 2\sqrt{n^2-1} \rfloor \quad \text{und} \quad 4n < (k+1)^2,$$

Da wir $n \geq 2$ annehmen, gilt

$$2n-1 = \sqrt{4n^2-4n+1} \leq \sqrt{4n^2-4} = 2\sqrt{n^2-1} < 2n$$

und somit

$$\lfloor 2\sqrt{n^2-1} \rfloor = 2n-1.$$

Also ist $f(n) = 0$ genau dann, wenn

$$\exists k \in \mathbb{N}: \quad k^2 \leq 4n-1 \quad \text{und} \quad 4n < (k+1)^2,$$

d. h. genau dann, wenn

$$\exists k \in \mathbb{N}: \quad k^2 < 4n < (k+1)^2.$$

Dies ist offenbar genau dann erfüllt, wenn $4n$ keine Quadratzahl ist. Also gilt $f(n) = 0$ genau dann, wenn n keine Quadratzahl ist.

Ist umgekehrt $n = m^2$ eine Quadratzahl, so gilt wegen

$$\begin{aligned} 2m-1 &= \sqrt{(m-1)^2} + \sqrt{m^2} \\ &\leq \sqrt{m^2-1} + \sqrt{m^2+1} = \sqrt{2m^2 + 2\sqrt{m^4-1}} \\ &< \sqrt{2m^2+2m^2} = 2m, \end{aligned}$$

dass

$$f(n) = f(m^2) = 2m - \lfloor \sqrt{m^2-1} + \sqrt{m^2+1} \rfloor = 2m - (2m-1) = 1.$$

Zusammenfassend gilt also für alle $n > 0$, dass

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{falls } n \text{ Quadratzahl ist,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

VIII.VI Folgen

I Runde 1

Aufgabe V01204:
Gegeben ist die Folge

$$\frac{1}{1\cdot 2}, \quad \frac{1}{2\cdot 3}, \quad \frac{1}{3\cdot 4}, \quad ..., \quad \frac{1}{n\cdot(n+1)}, \quad ...$$

Welchem Grenzwert streben die Summen von n Gliedern dieser Folge für $n \to \infty$ zu?

Lösung von svrc:
Wir bezeichnen mit $a_n := \frac{1}{n \cdot n+1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ die Glieder der Folge. Es handelt sich bei der Summe der Glieder um eine Teleskopsumme, d. h.:

$$s_n := \sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{j} - \frac{1}{j+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Somit gilt $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 1$.

Aufgabe 261214:
Für jede reelle Zahl b sei (a_n) diejenige Zahlenfolge, die durch

$$a_n = \frac{3n+b}{2n-1} \quad (n = 1, 2, ...) \tag{1}$$

definiert ist.

Man ermittle alle diejenigen ganzen Zahlen b, für die die durch (1) definierte Zahlenfolge genau drei Glieder besitzt, die die Ungleichungen

$$1{,}45 < a_n < 1{,}47 \tag{2}$$

erfüllen. Zu jeder so ermittelten Zahl b (falls es eine solche gibt) gebe man die drei Glieder a_n an, die (2) erfüllen.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Für jede reelle Zahl b gilt: Ein Glied a_n der durch (1) definierten Zahlenfolge erfüllt genau dann (2), wenn sowohl

$$1{,}45 < \frac{3n+b}{2n-1} \qquad (3) \qquad \text{als auch} \qquad \frac{3n+b}{2n-1} < 1{,}47 \qquad (4)$$

gilt. Da n nur Werte mit $n \geq 1$, also $2n-1 > 0$ durchläuft, ist (3) äquivalent mit $2{,}9n - 1{,}45 < 3n + b$ und dies mit

$$n > -14{,}5 - 10b \qquad (5)$$

ferner ist (4) äquivalent mit $3n + b < 2{,}94n - 1{,}47$ und dies mit

$$n < -24{,}5 - \frac{50}{3}b \qquad (6)$$

II. Wenn nun eine Zahl b die Eigenschaft hat, dass die Folge (a_n) genau drei Glieder besitzt, die (2) und folglich sowohl (5) als auch (6) erfüllen, so ist die Zahl $z_1 = (-14{,}5 - 10b)$ kleiner als die Zahl $z_2 = (-24{,}5 - \frac{50}{3}b)$, und zwischen diesen beiden Zahlen liegen genau drei natürliche Zahlen n. Daraus folgt:

Die Differenz

$$d = (-24{,}5 - \frac{50}{3}b) - (-14{,}5 - 10b)$$

zwischen diesen beiden Zahlen erfüllt die Ungleichung $2 < d < 4$, also gilt dann

$$2 < -24{,}5 - \frac{50}{3}b + 14{,}5 + 10b < 4$$
$$12 < -\frac{20}{3}b < 14$$
$$-\frac{9}{5} > b > -\frac{42}{20}$$

Die einzige ganze Zahl b, die diese Ungleichung erfüllt, ist $b = -2$. Daher kann nur diese Zahl den Bedingungen der Aufgabe genügen.

III. Umgekehrt gilt für diese Zahl $b = -2$ nach I., dass genau diejenigen Glieder a_n (der durch (1) definierten Zahlenfolge) die Ungleichungen (2) erfüllen, deren Index n sowohl (5) als auch (6), d. h.

$$-14{,}5 + 20 < n < -24{,}5 + \frac{100}{3} \quad \to \quad 5\frac{1}{2} < n < 8\frac{5}{6}$$

erfüllt, d. h. genau die drei Glieder a_n mit $n = 6{,}7{,}8$. (7)

Aus II., III. folgt, dass genau eine ganze Zahl $b = -2$ den Bedingungen genügt und dass die zugehörigen drei Glieder a_n die (2) erfüllen, sich aus (1) mit (7) ergeben:

$$a_6 = \frac{16}{11} \quad ; \quad a_7 = \frac{19}{13} \quad ; \quad a_8 = \frac{22}{15}$$

II Runde 2

Aufgabe 091221:
Gegeben sei eine reelle Zahlenfolge $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ durch die (independente) Darstellung

$$a_n = c_2 n^2 + c_1 n + c0 \qquad (1)$$

wobei c_0, c_1, c_2 reelle Zahlen sind. Als erste Differenzenfolge bezeichnet man die Folge $D(1)_n = a_{n+1} - a_n$ und als zweite Differenzenfolge die Folge $D(2)_n = D(1)_{n+1} - D(1)_n$, $(n = 1, 2, 3, ...)$.
a) Es seien $c_0 = 1, c_1 = -1, c_2 = 1$. Unter dieser Voraussetzung sind a_n, $D(1)_n$, $D(2)_n$ für $n = 1, 2, 3, 4$ und 5 zu berechnen.
b) Es ist allgemein zu beweisen, dass für (1) die Folge $D(2)_n$ konstant ist.

Lösung von cyrix:
a)

n	1	2	3	4	5	6	7
a_n	1	3	7	13	21	31	43
$D(1)_n$	2	4	6	8	10	12	
$D(2)_n$	2	2	2	2	2		

b) Es ist für alle nicht-negativen ganzen Zahlen n

$$D(1)_n = a_{n+1} - a_n = c_2((n+1)^2 - n^2) + c_1((n+1) - n) + c_0 - c_0 = 2c_2 n + c_2 + c_1 \quad \text{und}$$

$$D(2)_n = D(1)_{n+1} - D(1)_n = 2c_2((n+1) - n) + (c_2 + c_1) - (c_2 + c_1) = 2c_2$$

was die Behauptung zeigt, □.

Aufgabe 101223:
Die ersten Zeilen eines (beliebig fortsetzbaren) dreieckigen Zahlenschemas lauten

Zeile 0	1
Zeile 1	1 1 1
Zeile 2	1 2 3 2 1
Zeile 3	1 3 6 7 6 3 1
...	

Die allgemeine Vorschrift zur Bildung dieses Zahlenschemas lautet:
Die einzige Zahl in der Zeile 0 sei die Zahl 1. Jede weitere Zahl sei gleich der Summe aus der unmittelbar über ihr stehenden Zahl und deren beiden Nachbarzahlen, wobei links und rechts von den Rändern fehlende Zahlen durch Nullen ersetzt zu denken sind.
Es ist für jede natürliche Zahl n zu beweisen, dass in diesem Schema die Summe s_n aller Zahlen der Zeile n den Wert 3^n hat.

Lösung von cyrix:
Für die Zeile 0 stimmt die Aussage offenbar.
Summieren wir nun alle Elemente der Zeile $n+1$, und stellen uns jede einzelne Zahl in dieser Zeile $n+1$ ersetzt vor durch die Summe der drei Zahlen aus Zeile n, aus der sie entsteht, dann erhalten wir eine Summe, deren Summanden ausschließlich Zahlen aus der n-ten Zeile sind (sowie Rand-Nullen).
Jede Zahl aus Zeile n taucht dabei in der Summe s_{n+1} genau drei mal auf: Sie ist nämlich beteiligt an der Bildung der Zahl direkt unter sich, sowie jeweils rechts bzw. links daneben. Damit gilt $s_{n+1} = 3 \cdot s_n$, was dann induktiv die Behauptung zeigt.

Aufgabe 131221:
Es seien a_0 und q reelle Zahlen mit $a_0 \neq 0; q \neq 0; q \neq 1$. Ferner sei $\{a_i\}$ eine geometrische Folge, für die $a_i = a_0 \cdot q^i$ $(i = 0, 1, 2, 3, ...)$ gilt.
a) Man beweise, dass die Folgen

$$\{b_i\} \text{ mit } b_i = a_{i+1} - a_i \quad \text{und} \quad \{c_i\} \text{ mit } c_i = b_{i+1} - b_i$$

ebenfalls geometrische Folgen sind.
b) Es sind alle Werte von a_0 und q (mit $a_0 \neq 0; q \neq 0$) anzugeben, für die die in a) definierten Folgen $\{a_i\}$ und $\{c_i\}$ die Eigenschaft haben, dass $a_i = c_i$ für alle natürlichen Zahlen i gilt.

Lösung von cyrix:
a) Es sind $b_i = a_0 \cdot q^{i+1} - a_0 \cdot q^i = (a_0 \cdot (q-1)) \cdot q^i$ und analog $c_i = (b_0 \cdot (q-1)) \cdot q^i = (a_0 \cdot (q-1)^2) \cdot q^i$

geometrische Folgen.

b) Aus $a_i = c_i$ folgt mit der eben hergeleiteten Form von c_i wegen $a_0 \neq 0$ direkt $(q-1)^2 = 1$, also $q = 1 \pm 1$, wobei $q = 1-1 = 0$ als Lösung entfällt, sodass nur $q = 1+1 = 2$ für beliebige $a_0 \neq 0$ verbleibt. Einsetzen dieser Werte zeigt $b_i = a_0 \cdot 2^{i+1} - a_0 \cdot 2^i = a_0 \cdot 2^i$ und damit auch $c_i = a_0 \cdot 2^{i+1} - a_0 \cdot 2^i = a_0 \cdot 2^i = a_i$.

Aufgabe 141221:
Es sei x_n $(n = 0, 1, 2, 3, ...)$ diejenige Zahlenfolge, für die $x_0 = 1$ und

$$x_n = \frac{x_{n-1}}{x_{n-1} + 1}$$

$(n = 1, 2, 3, ...)$ gilt.
Man gebe die Glieder x_1, x_2 und x_3 dieser Zahlenfolge an. Man gebe einen Term $f(n)$ mit der Eigenschaft $f(n) = x_n$ $(n = 1, 2, 3, ...)$ an.

Lösung von weird:
Es gilt

$$x_0 = 1, \quad x_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + 1} = \frac{1}{3}, \quad x_3 = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3} + 1} = \frac{1}{4}$$

was die Vermutung nahelegt, dass allgemein die Formel

$$x_n = \frac{1}{n+1} \quad (n \in \mathbb{N})$$

gelten könnte. Tatsächlich trifft sie für $n = 0$ offenbar zu, und falls sie für ein $n \in \mathbb{N}$ bereits bewiesen ist, so gilt sie wegen

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{x_n + 1} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+1} + 1} = \frac{1}{(n+1)+1}$$

dann auch für $n + 1$, was also dann induktiv ihre Gültigkeit für alle $n \in \mathbb{N}$ beweist.

Aufgabe 161222:
Einer Kugel K_1 mit gegebenem Radius r sei ein Zylinder Z_1 mit quadratischem Achsenschnitt einbeschrieben.
Diesem Zylinder Z_1 sei eine Kugel K_2 und dieser wieder ein Zylinder Z_2 mit quadratischem Achsenschnitt einbeschrieben.
Dieses Verfahren sei weiter fortgesetzt, d. h., liegen für eine natürliche Zahl n bereits eine Kugel K_n und ein Zylinder Z_n mit quadratischem Achsenschnitt vor, so sei dem Zylinder Z_n eine Kugel K_{n+1} und dieser wieder ein Zylinder Z_{n+1} mit quadratischem Achsenschnitt einbeschrieben.
Für jedes $n = 1, 2, ...$ sei V_n das Volumen der Kugel K_n, und es sei $S_n = V_1 + V_2 + ... + V_n$.
a) Man ermittle das Volumen V_{10}.
b) Man ermittle S_{10}.
c) Man berechne $\lim\limits_{n \to \infty} S_n$, falls dieser Grenzwert existiert.
Hinweis:
Ein Zylinder heißt einer Kugel einbeschrieben, wenn die Kreislinien, die seine beiden Grundflächen beranden, auf der Kugel liegen. Eine Kugel in einem Zylinder mit quadratischem Achsenschnitt heißt diesem Zylinder einbeschrieben, wenn sie seine beiden Grundflächen berührt.

Lösung von cyrix:
Sei K eine Kugel mit Radius R, Z ein ihr einbeschriebener Zylinder mit quadratischem Achsenabschnitt und k eine diesem Zylinder einbeschriebene Kugel mit Radius r.

Ein ebener Schnitt, der den Achsenabschnitt des Zylinders enthält, erzeugt als Schnittfigur einen Kreis mit Radius R, dem ein Quadrat einbeschrieben ist, welchem ein Kreis mit Radius r einbeschrieben ist. Also ist $2R$ die Länge der Diagonalen des Quadrats und $2r$ dessen Kantenlänge, sodass $R = \sqrt{2}r$ bzw. $r = \frac{\sqrt{2}}{2}R$ gilt. Ist $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ das Volumen der Kugel K, so beträgt also das Volumen v von k genau $v = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 = V \cdot \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Damit ergibt sich für die Aufgabe

$$V_n = \frac{4}{3}\pi \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^{n-1} \cdot r^3$$

und

$$S_n = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 \cdot \left(\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^k\right) = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 \cdot \frac{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^n}{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)} = \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{4^n - \sqrt{2}^n}{4^n - \sqrt{2} \cdot 4^{n-1}}$$

Insbesondere ist also

$$V_{10} = \frac{4}{3}\pi \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^9 \cdot r^3 = \frac{2^2}{3} \cdot \pi \cdot \frac{2^4 \cdot \sqrt{2}}{2^{18}} \cdot r^3 = \frac{\sqrt{2}}{2^{12} \cdot 3} \cdot \pi \cdot r^3$$

und

$$S_{10} = \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{4^{10} - \sqrt{2}^{10}}{4^{10} - \sqrt{2} \cdot 4^9} = \frac{2^2}{3}\pi \cdot \frac{2^{20} - 2^5}{2^{20} - \sqrt{2} \cdot 2^{18}} = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{2^{15} - 1}{2^{13} - \sqrt{2} \cdot 2^{11}} = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{32767}{8192 - 2048\sqrt{2}}$$

sowie

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 \cdot \frac{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^n}{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)} = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)} = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 \cdot \frac{4}{4 - \sqrt{2}} = \frac{16}{3}\pi \cdot r^3 \cdot \frac{4 + \sqrt{2}}{(4 - \sqrt{2})(4 + \sqrt{2})} =$$

$$= \frac{16}{3}\pi \cdot r^3 \cdot \frac{4 + \sqrt{2}}{4^2 - 2^2} = \frac{16 + 4\sqrt{2}}{9}\pi \cdot r^3$$

Aufgabe 171221:
Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen a_1, d, b_1, q, für die folgende Aussage gilt:
Wenn
(1) a_1 das Anfangsglied und d die Differenz einer arithmetischen Folge (a_n) ist und wenn
(2) b_1 ($\neq 0$) das Anfangsglied und q der Quotient einer geometrischen Folge (b_n) ist, so haben diese Folgen die Eigenschaften
(3) $a_1 = -3b_1$,
(4) $a_2 = 2b_2$,
(5) $a_3 = b_3$,
(6) d ist eine ganze Zahl.

Lösung von OlgaBarati:
Für die arithmetische Folge gilt: $a_{i+1} = a_i + d$.
Für die geometrische Folge gilt: $b_{i+1} = b_i \cdot q$ mit $q = \frac{b_{i+1}}{b_i}$. Mit (3),(4),(5) lassen sich sich zunächst die Gleichungen für d: (i) und für q: (ii) ermitteln.

$$\frac{b_2}{b_1} = q = \frac{\frac{a_2}{2}}{\frac{a_1}{-3}} = -\frac{3}{2}\frac{a_2}{a_1} \quad ; \quad \frac{b_3}{b_2} = q = \frac{a_3}{\frac{a_2}{2}} = 2\frac{a_3}{a_2}$$

$$\frac{b_3}{b_2} = q = \frac{a_3}{\frac{a_2}{2}} = 2\frac{a_3}{a_2} \quad ; \quad -\frac{3}{2}\frac{a_2}{a_1} = \frac{2a_3}{a_2}$$

$$-\frac{3}{2}\frac{a_2}{(a_2 - d)} = 2\frac{(a_2 + d)}{a_2} \quad ; \quad -\frac{3}{2}a_2^2 = 2(a_2 + d)(a_2 - d)$$

$$-\frac{3}{2}a_2^2 = 2a_2^2 - 2d^2 \quad ; \quad d = \pm\sqrt{7}\cdot\frac{a_2}{2} \quad (i)$$

$$q = 2\frac{a_3}{a_2} = 2\frac{a_2+d}{a_2} = a_2\frac{(2+\sqrt{7})}{a_2} = \pm\sqrt{7}+2 \quad (ii)$$

Aus der Summe der Glieder $\sum_{i=1}^{3} a_i$ berechnet sich b_2 und daraus mit (4) auch sofort a_2.

$$a_1 + a_2 + a_3 = a_2 - d + a_2 + a_2 + d = 3a_2 = -\frac{3b_2}{2+\sqrt{7}} + 2b_2 + 2b_2 + \sqrt{7}b_2$$

$$3a_2(2+\sqrt{7}) = 3b_2 + 2b_2(2+\sqrt{7}) + b_2\sqrt{7}(2+\sqrt{7})$$
$$6b_2(2+\sqrt{7}) = 3b_2 + 4b_2 + 2b_2\sqrt{7} + 2\sqrt{7}b_2 + 7b_2$$
$$b_2 = \sqrt{7} \quad ; \quad a_2 = 2\sqrt{7}$$

Mit (i) und (ii) existieren jeweils zwei Lösungen für $d = \pm 7$ und $q = \pm\sqrt{7}+2$, woraus sich die nachstehenden Werte ergeben.

d	a_1	a_2	a_3	q	b_1	b_2	b_3	a_1/b_1	a_2/b_2	a_3/b_3
7	$2\sqrt{7}-7$	$2\sqrt{7}$	$2\sqrt{7}+7$	$2+\sqrt{7}$	$\sqrt{7}/(2+\sqrt{7})$	$\sqrt{7}$	$\sqrt{7}\cdot(2+\sqrt{7})$	-3	2	1
7	-1,71	5,28	12,29	4,64	0,57	2,64	12,29	-3	2	1
-7	$2\sqrt{7}+7$	$2\sqrt{7}$	$2\sqrt{7}-7$	$2-\sqrt{7}$	$\sqrt{7}/(2-\sqrt{7})$	$\sqrt{7}$	$\sqrt{7}\cdot(2-\sqrt{7})$	-3	2	1
-7	12,29	5,28	-1,71	-0,64	-4,097	2,64	-1,71	-3	2	1

Aufgabe 181221:
Man untersuche, ob es reelle Zahlen b, c, d so gibt, dass durch $a_n = \frac{n+b}{cn+d}$ $(n = 1, 2, 3, ...)$ eine Zahlenfolge definiert ist, für die $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{3}{8}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$ gilt.
Wenn es derartige b, c, d gibt, so stelle man fest, ob sie durch diese Forderungen eindeutig bestimmt sind, und gebe sie in diesem Fall an.

Lösung von ochen:
Eine solche Folge kann es nicht geben. Aus

$$\frac{1}{2} = \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{c}$$

folgt $c = 2$. Weiter folgt $2 + 2b = c + d = 2 + d$ aus

$$\frac{1}{2} = a_1 = \frac{1+b}{c+d} = \frac{1+b}{2+d}.$$

Wir erhalten also $2b = d$. Setzen wir dies ein, bekommen wir

$$a_n = \frac{n+b}{cn+d} = \frac{n+b}{2n+2b} = \frac{1}{2}$$

Aus $a_1 = \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$ folgt also bereits, dass die Folge konstant 2 ist. Somit kann insbesondere nicht mehr $a_2 = \frac{3}{8}$ gelten.

Aufgabe 201221:
Für jedes $n = 1, 2, 3, ...$ sei

$$a_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k$$

Ferner seien I_1, I_2, I_3 und I_4 die abgeschlossenen Intervalle

$$I_1 = [1; 2], \quad I_2 = [0{,}53; 0{,}531], \quad I_3 = [0{,}509; 0.51], \quad I_4 = [0{,}4; 0{,}5]$$

Man untersuche für jedes dieser Intervalle, ob in ihm Glieder der Zahlenfolge $\{a_n\}$ liegen.
Ist dies der Fall, so ermittle man jeweils die Indizes n aller Glieder a_n in dem betreffenden Intervall.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Für jedes $n = 1{,}2{,}3{,}...,$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1), \qquad \text{also} \qquad a_n = \frac{1}{2n^2})n^2 + n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$$

Somit ist $a_n \in I_1$, $a_n \in I_2$, $a_n \in I_3$ bzw. $a_n \in I_4$ jeweils der Reihe gleichbedeutend mit den anschließend gegebenen Ungleichungen:

- $a_n \in I_1$

$$1 \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \leq 2 \qquad ; \qquad \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2n} \leq \frac{3}{2}$$
$$2 \geq 2n \geq \frac{2}{3} \qquad ; \qquad \frac{1}{3} \leq n \leq 1$$

- $a_n \in I_2$

$$0{,}53 \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \leq 0{,}531 \qquad ; \qquad \frac{3}{100} \leq \frac{1}{2n} \leq \frac{31}{1000}$$
$$\frac{100}{3} \geq 2n \geq \frac{1000}{31} \qquad ; \qquad \frac{500}{31} \leq n \leq \frac{50}{3}$$

- $a_n \in I_3$

$$0{,}509 \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \leq 0{,}51 \qquad ; \qquad \frac{9}{100ß} \leq \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{100}$$
$$\frac{1000}{9} \geq 2n \geq 100 \qquad ; \qquad 50 \leq n \leq \frac{500}{9}$$

- $a_n \in I_4$

$$0{,}4 \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \leq 0{,}5 \qquad ; \qquad -0{,}1 \leq \frac{1}{2n} \leq 0$$

Wegen $16 < \frac{500}{31}, \frac{50}{3} < 17$; $55 < \frac{500}{9} < 56$ sowie wegen $\frac{1}{2n} > 0$ für alle $n = 1{,}2{,}3{,}...$ ergibt sich damit: Es gilt
$a_n \in I_1$ genau für $n = 1$,
$a_n \in I_2$ für kein n,
$a_n \in I_3$ genau für $n = 50, 51, 52, 53, 54, 55$,
$a_n \in I_4$ für kein n.

Aufgabe 211221:
Sind a_1 und d gegebene reelle Zahlen, so sei (a_n) die arithmetische Zahlenfolge mit $a_n = a_1 + (n-1)d$ für $n = 1, 2, 3, ...$ Ferner werde für $n = 1, 2, 3, ...$ definiert:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \qquad ; \qquad z_n = \sum_{k=1}^{n} s_k$$

a) Man ermittle a_1 und d so, dass $s_4 = 4$ und $z_4 = 15$ gilt.
b) Man beweise, dass für beliebige reelle a_1, d und alle $n = 1, 2, 3, ...$ gilt:

$$z_n = \frac{n(n+1)}{2}\left(a_1 + \frac{n-1}{3}d\right)$$

Lösung von cyrix:
b) Es ist $z_1 = s_1 = a_1 = \frac{1 \cdot 2}{2} \cdot \left(a_1 + \frac{1-1}{3} \cdot d\right)$, sodass die Aussage für $n = 1$ wahr ist. Weiter folgt induktiv

$$z_{n+1} = z_n + s_{n+1} = z_n + (n+1) \cdot a_1 + \frac{n(n+1)}{2}d = \frac{n}{n+1}2\left(a_1 + \frac{n-1}{3}d\right) + (n+1) \cdot a_1 + \frac{n(n+1)}{2}d =$$

$$= \frac{(n+2)(n+1)}{2} \cdot a_1 + \frac{n(n+1)}{2} \cdot \left(\frac{n-1}{3} + 1\right) d = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \cdot \left(a_1 + \frac{n}{3} d\right)$$

sodass die Aussage für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ gilt, $\square$.

a) Mit b) folgt $15 = z_4 = 10 \cdot (a_1 + d)$ und $4 = s_4 = 4 \cdot a_1 + 6 \cdot d$, also $a_1 = \frac{5}{2}$ und $d = -1$. Die Probe bestätigt das Ergebnis.

Aufgabe 231221:
Ist (a_n) eine Folge reeller Zahlen, so bezeichne s_n ihre n-te Partialsumme:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Man ermittle
a) von jeder arithmetischen Folge (a_n), für die $s_4 = 15$ und $s_8 = 255$ gilt,
b) von jeder geometrischen Folge (a_n), für die $s_4 = 15$ und $s_8 = 255$ gilt,
die ersten fünf Glieder $a_1, a_2, ..., a_5$.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Wenn (a_n) eine arithmetische Folge mit dem Anfangsglied a_1 und der konstanten Differenz d ist, so gilt

$$s_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

Daher erfüllt die Folge genau dann $s_4 = 14$ und $s_8 = 255$, wenn

$$15 = 2(2a_1 + 3d) \qquad ; \qquad 255 = 4(2a_1 + 7d)$$

gilt. Dieses Gleichungssystem hat genau die Lösungen $a_1 = -\frac{555}{32}$ und $d = \frac{225}{16}$. Also hat genau die arithmetische Folge mit diesen a_1 die verlangten s_4 und s_8. Ihre ersten fünf Glieder sind

$$-\frac{555}{32}; \quad -\frac{105}{32}; \quad \frac{345}{32}; \quad \frac{795}{32}; \quad \frac{1245}{32}$$

b) (I) Es sei (a_n) eine geometrische Folge, die $s_4 = 15$ und $s_8 = 255$ erfüllt. Für ihr Anfangsglied und ihren konstanten Quotienten q folgt dann:
Es gilt $q \neq 1$; denn aus $q = 1$ würde $s_8 = 8a_1 = s_4$ folgen, im Widerspruch zur Voraussetzung.
Für geometrische Folgen mit $q \neq 1$ ist $s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q-1}$; daher ergibt sich

$$15 = a_1 \frac{q^4 - 1}{q - 1} \qquad ; \qquad 255 = a_1 \frac{q^8 - 1}{q - 1}$$

also $a_1 \neq 0$, $q^4 - 1 \neq 0$ und

$$17 = \frac{q^8 - 1}{q^4 - 1} = q^4 + 1 \quad \rightarrow \quad q = 2 \quad \text{oder} \quad q = -2$$

und hierzu

$$a_1 = 15 \frac{q - 1}{q^4 - 1} \quad \rightarrow \quad a_1 = 1 \quad \text{bzw.} \quad a_1 = -3$$

Daher könne nur die beiden geometrischen Folgen mit $a_1 = 1, q = 2$ bzw. mit $a_1 = -3, q = -2$ die verlangten s_4, s_8 haben. Sie haben diese Partialsummen, wie die Proben bestätigen. Ihre ersten fünf Glieder sind $1, 2, 4, 8, 16$ bzw. $-3, 6, -12, 24, -48$.

Aufgabe 241221:
Es sei (a_n) diejenige Zahlenfolge, für die $a_1 = 2$ und

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 1}{a_n + 1} \qquad (n = 1, 2, 3, ...)$$

gilt.
a) Berechnen Sie a_2 und a_3, und beweisen Sie, dass $a_n > 1$ für alle $n = 1, 2, 3, ...$ gilt!
b) Beweisen Sie, dass die Folge (a_n) streng monoton fallend ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Es gilt

$$a_2 = \frac{a_1^2 + 1}{a_1 + 1} = \frac{5}{3} \qquad ; \qquad a_3 = \frac{a_2^2 + 1}{a_2 + 1} = \frac{17}{12}$$

Ferner gilt:
(I) Es ist $a_1 = 2 > 1$.
(II) Wenn für eine natürliche Zahl $n \geq 1$ die Ungleichung $a : n > 1$ gilt, so folgt

$$a_n^2 > a_n \qquad ; \qquad a_n^2 + 1 > a_n + 1$$

und daraus, da wegen $a_n > 1$ erst recht $a_n + 1 > 0$ gilt

$$\frac{a_n^2 + 1}{a_n + 1} > 1 \qquad \text{d. h.} \qquad a_{n+1} > 1$$

Mit (I) und (II) ist durch vollständige Induktion bewiesen, dass $a_n >$ für alle $n =$ 1,2,3,... gilt.

b) Für jedes $n =$ 1,2,3... gilt nach a) $1 < a_n$, also $a_n^2 + 1 < a_n^2 + a_n = a_n(a_n + 1)$. Hieraus folgt, da wegen $a_n > 1$ erst recht $a_n + 1 > 0$ ist

$$\frac{a_n^2 + 1}{a_n + 1} < a_n \qquad \text{d. h.} \qquad a_{n+1} < a_n \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Aufgabe 251223:
a) Es seien (a_n) und (b_n) die durch $a_n = 3n - 2, b_n = a_n^2$ $(n = 1, 2, 3, ...)$ definierten Zahlenfolgen.
Beweisen Sie, dass dann die Folge der Differenzen $b_{n+1} - b_n$ $(n = 1, 2, 3, ...)$ eine arithmetische Zahlenfolge ist!
b) Eine Verallgemeinerung der in a) zu beweisenden Aussage lautet:
Wenn (a_n) eine beliebige arithmetische Folge und (b_n) die durch $b_n = a_n^2$ $(n = 1, 2, 3, ...)$ definierte Folge ist, dann ist die Folge der Differenzen $b_{n+1} - b_n$ $(n = 1, 2, 3, ...)$ ebenfalls eine arithmetische Folge.
Beweisen Sie auch diese Verallgemeinerung!

Lösung von cyrix:
Wir beweisen die Aussage aus Aufgabenteil b), womit direkt auch der Spezialfall in Aufgabenteil a) gezeigt ist.

Sei dazu die Folge (a_n) definiert durch $a_n = c \cdot n + d$ mit reellen Zahlen c und d und

$$b_n := a_n^2 = c^2 \cdot n^2 + 2cd \cdot n + d^2$$

Dann ist

$$\Delta_n := b_{n+1} - b_n = c^2 \cdot ((n + 1)^2 - n^2) + 2cd \cdot ((n + 1) - n) + d^2 - d^2 = 2c^2 \cdot n + (c^2 + 2cd) = p \cdot n + q$$

mit $p := 2c^2$ und $q := c^2 + 2cd$.
Damit ist (Δ_n) eine arithmetische Folge, $\Box$.

Aufgabe 281222:
Für jede natürliche Zahl $n > 0$ sei f_n die durch

$$\begin{aligned} & f_1(x) = (x-1)^2 \\ & f_2(x) = (x-1)^2 + (2x-1)^2 \\ \text{allgemein}\quad & f_n(x) = (x-1)^2 + (2x-1)^2 + ... + (nx-1)^2 \end{aligned}$$

für alle reellen x definierte Funktion. Der Graph dieser Funktion, jeweils eine Parabel, habe den Scheitel S_n.
a) Man berechne die Koordinaten von S_1, S_2 und S_3.
b) Hat jeweils S_n die Koordinaten (x_n, y_n), so beweise man, dass die Folge (x_n) streng monoton fällt und die Folge (y_n) streng monoton steigt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Nach der Definition von f_n ist mit bekannten Summenformeln

$$\begin{aligned} f_n(x) &= x^2(1^2 + 2^2 + ... + n^2) - 2x(1 + 2 + ... + n) + n \\ &= \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)x^2 - n(n+1)x + n \\ &= \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)\left(x - \frac{3}{2n+1}\right)^2 - \frac{3}{2} n(n+1)\frac{1}{2n+1} + n \\ &= \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)\left(x - \frac{3}{2n+1}\right)^2 + \frac{n(n-1)}{2(2n+1)} \end{aligned}$$

Daraus ist ersichtlich, dass der Scheitel S_n dieser Parabel die Koordinaten

$$x_n = \frac{3}{2n+1} \qquad ; \qquad y_n = \frac{n(n-1)}{2(2n+1)}$$

hat.
a) Insbesondere sind die Koordinaten von S_1, S_2 und S_3

$$x_1 = 1, y_1 = 0; \qquad x_2 = \frac{3}{5}, y_2 = \frac{1}{5}; \qquad x_3 = \frac{3}{7}, y_3 = \frac{3}{7}$$

b) Für alle natürlichen Zahlen $n > 0$ ist $2n + 1 < 2n + 3$. Wegen $2n + 1 > 0$ folgt daraus $\frac{3}{2n+3} < \frac{3}{2n+1}$, d. h. $x_{n+1} < x_n$. Also ist die Folge (x_n) streng monoton fallend.
Für alle natürlichen Zahlen $n > 0$ ist

$$\begin{gathered} 2n^2 + 3n + 1 > 2n^2 + n - 3 \\ (n+1)(2n+1) > (n-1)(2n+3) \\ \frac{(n+1)n}{2(2n+3)} > \frac{n(n-1)}{2(2n+1)} \end{gathered}$$

d. h., $y_{n+1} > y_n$. Also ist die Folge (y_n) streng monoton steigend.

Aufgabe 281224:
Die ganzen Zahlen x_n und y_n seien durch $x_1 = y_1 = 1988$ und die Vorschriften
(1) $x_{n+1} = 2x_n - 1, \qquad n = 1, 2, 3, ...$
(2) $y_{n+1} = 2y_n - 2^{n+1}, \qquad n = 1, 2, 3, ...$
festgelegt. Man untersuche, ob a) alle Zahlen x_n, b) alle Zahlen y_n positiv sind.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Durch Rechnung ergibt sich

$$\begin{aligned}
x_2 &= 2x_1 - 1 = 2(x_1 - 1) + 1 \\
x_3 &= 2x_2 - 1 = 2(2x_1 - 1) - 1 = 2^2(x_1 - 1) + 1 \\
x_4 &= 2x_3 - 1 = 2(2^2(x_1 - 1) + 1) - 1 = 2^3(x_1 - 1) + 1
\end{aligned}$$

Hierdurch wird die Vermutung nahegelegt, dass

$$x_n = 2^{n-1}(x_1 - 1) + 1 \qquad , \qquad (n = 1,2,3,...) \tag{3}$$

gilt. Dies kann durch vollständige Induktion bewiesen werden. Für alle n gilt folglich $x_n > 0$.

b) Durch vollständige Induktion beweist man

$$y_n = (995 - n) \cdot 2^n \tag{4}$$

Für $n = 1$ gilt $y_1 = 1988 = (995 - 1) \cdot 2$.
Wenn (4) für $n = k$ richtig ist, folgt für $n = k + 1$:

$$y_{k+1} = 2y_k - 2^{k+1} = 2(995 - k)2^k - 2^{k+1} = (995 - (k + 1)) \cdot 2^{k+1}$$

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt (4) somit für alle $n = 1,2,3,...$. Folglich ist y_n für alle $n \geq 996$ negativ.

III Runde 3

Aufgabe 051234:
Die Paare (x_n, y_n) reeller Zahlen x_n, y_n $(n = 0, 1, 2, ...)$ seien wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}
x_0 &= 1, \\
y_0 &= 0, \\
x_{n+1} &= x_n + 2y_n, \\
y_{n+1} &= x_n + y_n
\end{aligned}$$

für $n \geq 0$. Man beweise, dass für alle natürlichen Zahlen n die Gleichung gilt:

$$x^2 - 2y_n^2 = (-1)^n$$

Lösung von ZePhoCa:
Für $n = 0$ gilt die Aussage offenbar. Gelte nun die Aussage für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$x_{n+1}^2 - 2y_{n+1}^2 = (x_n + 2y_n)^2 - 2(x_n + y_n)^2 = 2y_n^2 - x_n^2 = -(-1)^n = (-1)^{n+1}$$

Mit Induktion folgt die Aussage also für alle n.

Aufgabe 081232:
a) Man untersuche, ob die Zahlenfolge $a_n = \sqrt{25n^2 + 7n + 1} - 5n$, streng monoton fallend ist.
b) Beweisen Sie, dass alle Glieder a_n dieser Folge größer als 0,7 sind.

Lösung von cyrix:
Die Folge a_n ist streng monoton fallend genau dann, wenn es auch die Folge $b_n = a_n - \frac{7}{10}$ auch ist. Dabei ist

$$b_n = \sqrt{25n^2+7n+1} - \left(5n + \frac{7}{10}\right)$$

$$= \frac{\left(\sqrt{25n^2+7n+1} - \left(5n+\frac{7}{10}\right)\right) \cdot \left(\sqrt{25n^2+7n+1} + 5n + \frac{7}{10}\right)}{\sqrt{25n^2+7n+1} + 5n + \frac{7}{10}} = \frac{(25n^2+7n+1) - \left(5n+\frac{7}{10}\right)^2}{\sqrt{25n^2+7n+1} + 5n + \frac{7}{10}}$$

$$= \frac{(25n^2+7n+1) - \left(25n^2+7n+\frac{49}{100}\right)}{\sqrt{25n^2+7n+1} + 5n + \frac{7}{10}}$$

$$= \frac{\frac{51}{100}}{\sqrt{25n^2+7n+1} + 5n + \frac{7}{10}}$$

Da der Zähler dieses Bruchs konstant, der Nenner aber eine in n streng monoton wachsende Funktion ist, ist die Folge b_n – und mit ihr auch die Folge a_n streng monoton fallend. Darüber hinaus sind für alle n Zähler und Nenner von b_n offensichtlich positiv, sodass für alle n $b_n > 0$ und $a_n = b_n + \frac{7}{10} > \frac{7}{10}$ folgt.

Aufgabe 081234:
Durch die Verbesserung der Lebensbedingungen und des Gesundheitsschutzes konnte in der DDR die Tuberkulose mit großem Erfolg bekämpft werden.
Während im Jahre 1950 noch 92760 Erkrankungen an aktiver Tuberkulose auftraten, ging diese Zahl in den folgenden 16 Jahren auf 13777 im Jahre 1966 zurück.

a) Um wie viel Prozent nahm jährlich die Anzahl der Erkrankungen ab, wenn man eine gleichbleibende jährliche prozentuale Abnahme voraussetzt (was, abgesehen von geringen Schwankungen, der Wirklichkeit entspricht)?
b) Wieviel Jahre betrug in dem Zeitraum 1950 bis 1966 die sogenannte Halbwertzeit, d. h. diejenige Zeit, in der die Anzahl der Fälle auf die Hälfte gesenkt wurde (Angabe in Jahren mit einer Stelle nach dem Komma)?
c) Mit wie viel Erkrankungsfällen ist im Jahre 1970 zu rechnen, wenn man weiter eine gleichbleibende jährliche prozentuale Abnahme voraussetzt?

Lösung von cyrix:
a) Es sei q der (als konstant angenommene) Quotient der Anzahl der Krankheitsfälle in einem Jahr bezogen auf die des Vorjahres.
Dann gilt aufgrund der Aufgabenstellung $92760 \cdot q^{16} = 13777$ bzw. $q = \sqrt[16]{\frac{13777}{92760}}$. Mit einem Taschenrechner erhält man $q \approx 0.8876$, sodass die Anzahl der Krankheitsfälle im Schnitt pro Jahr um ca. 11.24% zurückgegangen ist.

Bemerkung: Als diese Aufgabe gestellt wurde, waren Taschenrechner noch nicht verfügbar, wohl aber Logarithmentafeln.
An diesen liest man leicht $\lg(1.3777) \approx 0.139$ und $\lg(9.2670) \approx 0.967$ ab, woraus man $\lg\left(\frac{13777}{92760}\right) \approx 0.139 - 0.967 = -0.828$ und damit $\lg(q) \approx -\frac{0.828}{16} \approx -0.052$ erhält. Wieder kann man an einer solchen Tafel den Wert $10^{1-0.052} = 10^{0.948} \approx 8.872$ ablesen, was auf $q \approx 0.8872$ führt. Die Rechnung wird natürlich genauer, wenn man nicht nur drei-stellige Mantissen, wie hier angenommen, zur Verfügung hat. Es stellt sich auch die Frage, für welche Werte die Tabellen vorlagen...

b) Für die Halbwertszeit t, gemessen in Jahren, gilt $q^t = \frac{1}{2}$, also $t \cdot \lg(q) = -\lg(2)$ bzw. $t = -\frac{\lg(2)}{\lg(q)} \approx 5.8$, sodass knapp alle Jahre eine Halbierung der Anzahl der Krankheitsfälle eintritt.

c) Nimmt man weiter eine gleichbleibende prozentuale Verringerung der Krankheitsfälle pro Jahr an, so sinkt deren Anzahl von 1966 bis 1970 um den Faktor q^4, sodass man dann etwa noch ca. $13777 \cdot 0.8876^4 \approx$

8500 Krankheitsfälle erwartet.

Aufgabe 111234:
a) Es seien $a_0 = -4$ und $a_1 = 2$ die ersten beiden Glieder einer unendlichen Folge a_n. Ferner sei a_n für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ das arithmetische Mittel der beiden vorhergehenden Glieder.
Man zeige, dass die so definierte Folge a_n eine geometrische Folge ist, und berechne für sie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$.
b) Es seien a_0 und a_1 die ersten beiden Glieder einer Folge a_n. Ferner sei a_n für jede natürliche Zahl $n > 2$ arithmetisches Mittel der beiden vorhergehenden Glieder.
Geben Sie in Form von Relationen zwischen a_0 und a_1 eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür an, dass a_n eine geometrische Folge ist!

Lösung von Kitaktus:
Wir zeigen induktiv, dass $a_n = -4(-\frac{1}{2})^n$ gilt.

Induktionsanfang: $n = 0$ und $n = 1$:

$$-4(-\frac{1}{2})^0 = -4 = a_0$$

$$-4(-\frac{1}{2})^1 = -4(-\frac{1}{2}) = 2 = a_1$$

Induktionsschritt:
Die Gleichung $a_n = -4(-\frac{1}{2})^n$ gelte für alle $n \leq k$ (mit $k \geq 1$). Nun ist

$$a_{k+1} = \frac{a_k + a_{k-1}}{2} = \frac{-4(-\frac{1}{2})^k + -4(-\frac{1}{2})^{k-1}}{2} = -4 \cdot \frac{(-\frac{1}{2})^k + (-\frac{1}{2})^{k-1}}{2} =$$

$$= -4 \cdot \frac{-2(-\frac{1}{2})^{k+1} + (-2)^2(-\frac{1}{2})^{k+1}}{2} = -4 \cdot \frac{-2 + (-2)^2}{2} \cdot (-\frac{1}{2})^{k+1} =$$

$$= -4 \cdot \frac{-2+4}{2} \cdot (-\frac{1}{2})^{k+1} = -4 \cdot (-\frac{1}{2})^{k+1}$$

a_n ist also tatsächlich eine geometrische Folge mit dem Startglied -4 und dem Faktor $-\frac{1}{2}$.

Für die Summe der a_n gilt nach der Summenformel geometrischer Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} -4 \cdot (-\frac{1}{2})^n = -4 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-\frac{1}{2})^n = -4 \cdot \frac{1}{1-(-\frac{1}{2})} = -4 \cdot \frac{2}{3} = -\frac{8}{3}$$

Zu b) Ist $a_0 = a_1 = 0$, so sind alle weiteren Folgenglieder ebenfalls 0 und es liegt eine geometrische Reihe vor.
Ist $a_0 = 0$ und $a_1 \neq 0$, so liegt keine geometrische Reihe vor, da es keinen Faktor f mit $a_1 = f \cdot a_0$ gibt.
Ist $a_0 \neq 0$ und $a_1 = 0$, so liegt keine geometrische Reihe vor, da es wegen $a_1 = 0$ und $a_2 = \frac{a_0+a_1}{2} = \frac{a_0}{2} \neq 0$ keinen Faktor f mit $a_2 = f \cdot a_1$ gibt.

Seien im Folgenden also a_0 und a_1 von 0 verschieden.
Notwendigerweise müssen zumindest die ersten drei Glieder eine geometrische Reihe bilden. Es muss also $\frac{a_1}{a_0} = \frac{a_2}{a_1}$ gelten. Daraus folgt $a_1^2 = a_0 \cdot a_2 = a_0 \cdot \frac{a_0+a_1}{2}$ bzw. $2a_1^2 = a_0^2 + a_0 a_1$.

a_0 ist also Lösung der Gleichung: $a_0^2 + a_0 a_1 - 2a_1^2 = 0$.
Diese Gleichung hat zwei Lösungen $-a_1/2 \pm \sqrt{a_1^2/4 + 2a_1^2} = -a_1/2 \pm 3|a_1|/2$. Es gilt also $a_0 = -a_1/2 + 3a_1/2 = a_1$ oder $a_0 = -a_1/2 - 3a_1/2 = -2a_1$. Die Betragsstriche dürfen im letzten Schritt weggelassen werden, da ja sowieso beide Fälle - mit negativem und mit positivem Vorzeichen - erfasst werden.

Dieses Kriterium deckt auch die Fälle, in denen eines der beiden Anfangsglieder gleich 0 ist mit ab, so dass sich folgendes notwendige Kriterium ergibt: Entweder ist $a_0 = a_1$ oder $a_0 = -2a_1$.

Dieses Kriterium ist gleichzeitig hinreichend.
Ist $a_0 = a_1$ so sind alle Folgenglieder identisch und es ergibt sich eine geometrische Reihe mit dem Faktor 1.
Gilt $a_0 = -2a_1$, so lässt sich der Induktionsbeweis aus a) direkt übertragen, es muss lediglich der Faktor -4 durch a_0 ersetzt werden. Beim Nachweis des Induktionsanfangs kommt die Bedingung $a_0 = -2a_1$ zum Tragen.

Aufgabe 171231:
Gegeben sei die Folge (a_n) durch

$$a_n = \frac{4n}{4n^2 + 121} \qquad (1)$$

für $n = 1, 2, 3, ...$
Man ermittle die obere Grenze und die untere Grenze von (a_n), sofern diese existieren.

Lösung von Annika Heckel:
1. Untere Grenze:
$\frac{4n}{4n^2+121}$ ist, da n eine natürliche Zahl ist, immer positiv. Lässt man n gegen Unendlich laufen, gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n}{4n^2 + 121} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4}{n}}{4 + \frac{121}{n^2}} = \frac{0}{0 + 4} = 0$$

(a_n) ist also eine Nullfolge. Da alle ihre Folgenglieder positiv sind, ist 0 die untere Grenze (die aber niemals in der Folge vorkommt).
2. Obere Grenze:
Man subtrahiere a_{n+1} von a_n:

$$a_n - a_{n+1} = \frac{4n}{4n^2 + 121} - \frac{4(n+1)}{4(n+1)^2 + 121} = \frac{4n \cdot (4n^2 + 8n + 125) - (4n + 4) \cdot (4n^2 + 121)}{(4n^2 + 121) \cdot (4(n+1)^2 + 121)} =$$

$$= \frac{16n^2 + 16n - 484}{(4n^2 + 121) \cdot ((2n + 2)^2 + 121)}$$

Der Nenner ist, weil n eine natürliche Zahl ist, immer positiv. Der Zähler wird mit größer werdendem n auch immer größer. Die einzige zutreffende Nullstelle des Zählers liegt zwischen $n = 5$ und $n = 6$:

$$n = 5: \quad 16n^2 + 16n - 484 = -4 < 0$$
$$n = 6: \quad 16n^2 + 16n - 484 = 188 > 0$$

Für alle $n \leq 5$ ist also $16n^2 + 16n - 484$ und damit $a_n - a_{n+1} < 0 \Leftrightarrow a_{n+1} > a_n$ für $n < 6$.
(a_n) steigt also bis zu a_6 streng monoton. Für alle $n > 5$ ist $16n^2 + 16n - 484$ und damit an $-a_{n+1} > 0 \Leftrightarrow a_{n+1} < a_n$. (a_n) fällt also bis a_6 streng monoton.
Folglich nimmt die Folge bei a_6 ihren größten Wert an. $a_6 = \frac{24}{265}$ ist die obere Grenze der Folge.

Aufgabe 181236A:
Es sei (a_n) $(n = 0, 1, 2, ...)$ eine Folge reeller Zahlen, für die $a_0 = 0$ sowie $a_{n+1}^3 = \frac{1}{2} \cdot a_n^2 - 1$ für alle $n = 1, 2, ...$ gelte.
Man zeige, dass es dann eine positive reelle Zahl $q < 1$ gibt, so dass für alle $n = 1, 2, ...$

$$|a_{n+1} - a_n| \leq q \cdot |a_n - a_{n-1}|$$

gilt, und gebe eine derartige reelle Zahl q an.

Lösung von svrc:
Zum Beweis benötigen wir zwei Aussagen.

Lemma 1:

Für alle reellen Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$a^3 - b^3 = (a-b) \cdot \left(a^2 + a \cdot b + b^2\right).$$

Beweis - Lemma 1:

Der Beweis erfolgt durch Ausmultiplizieren:

$$(a-b) \cdot \left(a^2 + a \cdot b + b^2\right) = a^3 + a^2 \cdot b + a \cdot b^2 - a^2 \cdot b - a \cdot b^2 - b^3 = a^3 - b^3.$$

Lemma 2:

Die Folge (a_n) ist beschränkt und es gilt

$$-1 \leq a_n \leq -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

für alle $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Beweis - Lemma 2:

Diese Aussage wird mittels vollständiger Induktion bewiesen.

Induktionsanfang: Es gilt $a_1^3 = \dfrac{1}{2} \cdot a_0^2 - 1 = -1$ und somit $-1 \leq a_1 \leq -\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$.
Induktionsvoraussetzung: Es gelte $-1 \leq a_n \leq \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ für ein $n \in \mathbb{N}$.
Induktionsschritt: Es gilt nach der Induktionsvoraussetzung

$$-1 \leq \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^2 - 1 \leq \frac{1}{2} \cdot a_n^2 - 1 = a_{n+1}^3 = \frac{1}{2} \cdot a_n^2 - 1 \leq -\frac{1}{2}$$

und somit

$$-1 \leq a_{n+1} \leq -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$

Lösung:

Mit Lemma 1 und der Definition der Folge (a_n) sehen wir, dass

$$\left|a_{n+1}^3 - a_n^3\right| = |a_{n+1} - a_n| \cdot \left|a_{n+1}^2 + a_{n+1} \cdot a_n + a_n^2\right| = \frac{1}{2} \cdot \left|a_n^2 - a_{n-1}^2\right| = \frac{1}{2} \cdot |a_n - a_{n-1}| \cdot |a_n + a_{n-1}|$$

für alle $n = 1, 2, 3, \ldots$ gilt. Somit ergibt sich

$$|a_{n+1} - a_n| \cdot \left|a_{n+1}^2 + a_{n+1} \cdot a_n + a_n^2\right| = \frac{1}{2} \cdot |a_n - a_{n-1}| \cdot |a_n + a_{n-1}|$$

und daher wegen Lemma 2

$$|a_{n+1} - a_n| = |a_n - a_{n-1}| \cdot \frac{|a_{n+1} + a_n|}{2 \cdot \left|a_{n+1}^2 + a_{n+1} \cdot a_n + a_n^2\right|}$$

für alle $n = 1, 2, 3, \ldots$, da der Bruch auf der rechten Seite definiert ist. Mit Lemma 2 kann die rechte Seite durch

$$|a_{n+1} - a_n| = |a_n - a_{n-1}| \cdot \frac{|a_{n+1} + a_n|}{2 \cdot |a_{n+1}^2 + a_{n+1} \cdot a_n + a_n^2|} \leq |a_n - a_{n-1}| \cdot \frac{|2|}{2 \cdot \left|3 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^2\right|} = \frac{\left(\sqrt[3]{2}\right)^2}{3} \cdot |a_n - a_{n-1}|$$

nach oben abgeschätzt werden. Wähle folglich $q = \frac{\left(\sqrt[3]{2}\right)^2}{3} < 0{,}53$.

Aufgabe 211234:
Man ermittle alle diejenigen von 0 verschiedenen reellen Zahlen q, die die folgende Eigenschaft haben: Es gibt eine von 0 verschiedene Zahl a_1 und eine natürliche Zahl $k \geq 3$ so, dass in der durch $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ $(n = 1, 2, 3, ...)$ definierte Zahlenfolge (a_n) das Glied a_k gleich dem arithmetischen Mittel der beiden vorangehenden Glieder a_{k-1} und a_{k-2} ist.

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:
Nach Voraussetzung gibt es a_1,k,q, so dass

$$a_1 q^{k-1} = a_k = \frac{1}{2}(a_{k-1} + a_{k-2}) = \frac{1}{2}(a_1 q^{k-2} + a_1 q^{k-3})$$

Kürzen mit a_1,q^{k-3} ergibt $q^2 = \frac{1}{2}(q+1)$ und somit $q = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{3})$.

Aufgabe 231233A:
Man untersuche, ob es eine Folge $a_1, a_2, ..., a_n, ...$
a) von positiven rationalen Zahlen a_i,
b) von positiven ganzen Zahlen a_i
mit folgenden Eigenschaften (1) und (2) gibt:
(1) Nicht alle Glieder der Folge sind einander gleich.
(2) Für alle $n \geq 2$ gilt

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}}\right)$$

d. h. an ist das harmonische Mittel von a_{n-1} und a_{n+1}.
Falls eine solche Folge im Falle a) bzw. im Falle b) existiert, so sind ihre Glieder anzugeben. Falls sie nicht existiert, so ist das zu beweisen.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Eine Folge positiver rationaler Zahlen a_i erfüllt genau dann (1) und (2), wenn die Folge der Zahlen $b_i = \frac{1}{a_i}$ eine arithmetische Folge positiver rationaler Zahlen mit einer von 0 verschiedenen Differenz ist.
Nachweis:
Die Folge ist genau arithmetische Folge, wenn für jedes $n \geq 2$ die Differenz $b_n - b_{n-1}$ gleich der Differenz $b_{n-1} - b_n$ ist. Diese Gleichheit ist äquivalent mit

$$b_n = \frac{1}{2}(b_{b-1} + b_{n+1}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}}\right) = \frac{1}{a_n}$$

Aus dieser Feststellung ergibt sich:
a) Da es arithmetische Folgen positiver rationaler Zahlen b_i mit einer von 0 verschiedenen Differenz gibt, z. B. $b_n = n$ $(n = 1,2,3,...)$, gibt es auch Folgen positiver rationaler Zahlen a_i mit den Eigenschaften (1) und 82), z. B. $a_n = \frac{1}{n}$.

b) Gäbe es eine arithmetische Folge von Zahlen $b_i = \frac{1}{a_i}$ mit von 0 verschiedener Differenz d, für die alle a_i positive ganze Zahlen wären, so folgte $\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1} + (n-1)d$ ($n = 1,2,3,...$). Im Fall $d > 0$ ergäbe sich: Für alle

$$n > 1 + \frac{1}{d}\left(1 - \frac{1}{a_1}\right)$$

wäre $(n-1)d > 1 - \frac{1}{a_1}$, also $\frac{1}{a_n} > 1$, was für positive ganze Zahlen a_n nicht möglich ist.

Im Fall $d < 0$, ergäbe sich: Für alle

$$n > 1 - \frac{1}{d \cdot a_1}$$

wäre $(n-1)d < -\frac{1}{a_1}$, also $\frac{1}{a_n} < 0$, was ebenfalls für positive (ganze) Zahlen a_n nicht möglich ist.
Also gibt es keine Folge positiver ganzer Zahlen a_i mit den Eigenschaften (1) und (2).

Aufgabe 241231:
Man ermittle die ersten sechs Glieder $a_1, a_2, ..., a_6$ von allen denjenigen Folgen (a_n) reeller Zahlen, die die nachstehenden Eigenschaften (1) bis (5) haben:
(1) Es gilt $a_1 = -\frac{5}{2}$
(2) Es gilt $a_5 = 3$.
(3) a_1, a_2, a_3, a_4 sind (in dieser Anordnung) Glieder einer arithmetischen Zahlenfolge.
(4) a_4, a_5, a_6 sind (in dieser Anordnung) Glieder einer geometrischen Zahlenfolge.
(5) Die Summe der ersten sechs Glieder der Folge (a_n) beträgt $\frac{13}{2}$.

Lösung von cyrix:
Nach (3) gibt es eine reelle Zahl d mit $a_2 = a_1 + d$, $a_3 = a_1 + 2d$ und $a_4 = a_1 + 3d = 3d - \frac{5}{2}$. Insbesondere ist

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 4 \cdot (-\frac{5}{2}) + 6d = 6d - 10$$

Nach (4) gibt es eine reelle Zahl q mit $a_5 = a_4 \cdot q$ und $a_6 = a_5 \cdot q$. Wegen (2) ist $a_5 = 3$, also $a_6 = 3q$ und $a_4 = 3d - \frac{5}{2} = \frac{3}{q}$. (Dabei ist wegen $0 \neq 3 = a_5 = q \cdot a_4$ auch $q \neq 0$.)
Daraus folgt $d = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3}{q} + \frac{5}{2}\right) = \frac{1}{q} + \frac{5}{6}$.
Weiterhin ist $a_5 + a_6 = 3 + 3q$, also nach (6)

$$\frac{13}{2} = a_1 + \cdots + a_6 = 6d - 10 + 3 + 3q = \frac{6}{q} + 5 - 10 + 3 + 3q = \frac{6}{q} - 2 + 3q$$

bzw. $3q^2 - \left(2 + \frac{13}{2}\right) q + 6 = 0$, also $q^2 - \frac{17}{6} q + 2 = 0$, was auf $q_{1/2} = \frac{17}{12} \pm \sqrt{\frac{289}{144} - \frac{288}{144}} = \frac{17 \pm 1}{12}$, also $q_1 = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$ und $q_2 = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$ führt.

Im Fall $q = q_1 = \frac{4}{3}$ ist $a_6 = 3q = 4$, $a_5 = 3$, $a_4 = \frac{3}{q} = \frac{9}{4}$ und $d = \frac{1}{q} + \frac{5}{6} = \frac{3}{4} + \frac{5}{6} = \frac{19}{12}$, also $a_1 = -\frac{5}{2}$, $a_2 = d - \frac{5}{2} = \frac{19-30}{12} = -\frac{11}{12}$ und $a_3 = a_2 + d = \frac{19-11}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$.
(Tatsächlich ist dann

$$a_3 + d = \frac{8+19}{12} = \frac{27}{12} = \frac{9}{4} = a_4 \qquad \text{und} \qquad a_1 + \cdots + a_6 = \frac{-30 - 11 + 8 + 27 + 36 + 48}{12} = \frac{78}{12} = \frac{13}{2}.)$$

Und im Fall $q = q_2 = \frac{3}{2}$ ist $a_6 = 3q = \frac{9}{2}$, $a_5 = 3$, $a_4 = 2$ und $d = \frac{1}{q} + \frac{5}{6} = \frac{3}{2}$, also $a_1 = -\frac{5}{2}$, $a_2 = a_1 + d = -1$ und $a_3 = a_2 + d = \frac{1}{2}$. Tatsächlich ist dann $a_3 + d = 2 = a_4$ und

$$a_1 + \cdots + a_6 = \frac{-5 - 2 + 1 + 4 + 6 + 9}{2} = \frac{13}{2}$$

Aufgabe 261236:
Es sei (x_n) diejenige Folge reeller Zahlen, für die

$$x_1 = \sqrt{3} \quad (1) \qquad \text{und} \qquad x_{n+1} = \sqrt{9x_n^2 + 11x_n + 3} \quad (n = 1, 2, 3, ...) \qquad (2)$$

gilt. Für jede reelle Zahl $a \neq 0$ sei ferner (y_n) die durch

$$y_n = \frac{x_n}{a^n} \qquad (n = 1, 2, 3, ...) \qquad (3)$$

definierte Zahlenfolge.
Man ermittle alle diejenigen $a \neq 0$, für die die Folge (y_n) konvergent ist.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Aus (1) und (2) folgt durch vollständige Induktion $x_n > 0$ für alle n = 1,2,3,... und dann

$$\begin{aligned} &9x_n^2 < x_{n+1}^2 < 9x_n^2 + 12x_n + 4 = (3x_n + 2)^3 \\ &3x_n < x_{n+1} < 3x_n + 2 \end{aligned} \qquad (4)$$

Das ergibt zunächst (durch vollständige Induktion) $x_n > \frac{3^n}{2}$ für alle n = 1,2,3,... und dann

$$3 < \frac{x_{n+1}}{x_n} < 3 + \frac{2}{x_n} < 3 + \frac{4}{3^n}$$

Nach (3) folgt damit

$$\frac{3}{|a|} < \frac{|y_{n+1}|}{|y_n|} < \frac{3}{|a|} + \frac{4}{|a| \cdot 3^n} \qquad (5)$$

1. Ist nun $|a| < 3$ (und $a \neq 0$), so gilt für die Zahl $q = \frac{3}{|a|}$ einerseits $q > 1$, also $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = +\infty$; andererseits folgt aus (5) durch vollständige Induktion (n = 1,2,3,...)

$$|y_{n+1}| > q \cdot |y_n| \qquad ; \qquad |y_{n+1}| > q^n \cdot |y_1|$$

und wegen $|y_1| > 0$ damit $\lim\limits_{n\to\infty} |y_n| = +\infty$. Also ist die Folge (y_n) in diesem Fall divergent.

2. Ist $|a| > 3$, so existiert wegen

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{|a|} + \frac{4}{|a| \cdot 3^n} \right) = \frac{3}{|a|} < 1 \qquad (6)$$

eine Zahl q mit $\frac{3}{|a|} < q < 1$. Für diese Zahl gilt einerseits $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$; andererseits gibt es wegen (6) eine Zahl N so, dass für alle $n \geq N$

$$\frac{3}{|a|} + \frac{4}{|a| \cdot 3^n} < q$$

nach (5) also (durch vollständige Induktion)

$$|y_{n+1}| < q \cdot |y_n| \qquad , \qquad |y_{N+k}| < q^k \cdot |y_N|$$

(k = 1,2,3,...) ist. Daher gilt $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$, also ist die Folge (y_n) in diesem Fall konvergent.

3. Ist $a = 3$, so folgt aus (4) nach Division durch 3^{n+1}

$$y_n < y_{n+1} < y_n + \frac{2}{3^{n+1}} \qquad (7)$$

Daraus folgt einerseits: Die Folge (y_n) ist monoton steigend. (8)
Andererseits ergibt sich durch vollständige Induktion für alle n = 2,3,4...

$$\begin{aligned} y_n &< y_{n-1} + \frac{2}{3^n} < y_{n-2} + \frac{2}{3^{n-1}} + \frac{2}{3^n} < ... \\ &< y_1 + \frac{2}{3^2} + ... + \frac{2}{3^{n-1}} + \frac{2}{3^n} \end{aligned}$$

wegen der Konvergenz der unendlichen Reihe $\frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + ...$ gilt somit: Die Folge (y_n) ist nach oben beschränkt. (9)
Aus (8) und (9) ergibt sich: Die Folge (y_n) ist konvergent.

4. Ist $a = -3$, so gilt: Ist n gerade, so hat y_n denselben Wert wie für $a = 3$. Ist n ungerade, so hat y_n entgegengesetzt gleichen Wert wie für $a = 3$.
Bezeichnet g den Grenzwert der für $a = 3$ gebildeten Folge (y_n), so hat also für $a = -3$ die Teilfolge mit geradem n den Grenzwert g und die Teilfolge der y_n mit ungeradem n den Grenzwert $-g$.
Nach (7) gilt $g \geq y_1$, also $g > 0$ und damit $g \neq -g$. Also ist die gesamte Folge (y_n) im Fall $a = -3$ divergent.

Damit ist gezeigt: Die Folge (y_n) ist genau für alle diejenigen a konvergent, für die $a < -3$ oder $a \geq 3$ gilt.

Aufgabe 281231:
Man ermittle alle diejenigen aus je drei Gliedern bestehenden Folgen (a_1, a_2, a_3) und (b_1, b_2, b_3), die mit zwei geeigneten von Null verschiedenen reellen Zahlen p, r sowie mit $q = 5$ die folgenden Bedingungen erfüllen:
(1) Es gilt $a_1 = \frac{1}{p}$, $a_2 = \frac{2}{q}$, $a_3 = \frac{1}{r}$.
(2) Es gilt $b_1 = \frac{1}{a_1}$, $b_2 = \frac{1}{a_1 \cdot a_2}$, $b_3 = \frac{1}{a_2 \cdot a_3}$.
(3) Die Folge (a_1, a_2, a_3) ist eine arithmetische Folge.
(4) Die Folge (b_1, b_2, b_3) ist eine arithmetische Folge.

Lösung von MontyPythagoras:
Wenn die Folgen arithmetisch sein sollen, muss gelten $a_2 - a_1 = a_3 - a_2$ bzw. $2a_2 = a_1 + a_3$. Das ergibt als erste Bedingung:

$$\frac{4}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{r}$$

$$4pr = qr + pq \tag{1}$$

Ebenso gilt $2b_2 = b_1 + b_3$, beziehungsweise

$$pq = p + \frac{1}{2}qr$$

$$(q-1)p = \frac{1}{2}qr$$

$$r = 2\frac{q-1}{q}p \tag{2}$$

Das setzen wir in (1) ein:

$$8\frac{q-1}{q}p^2 = 2(q-1)p + qp$$

Eine Lösung dieser Gleichung wäre $p = 0$, die aber in der Folge a_i zur Division durch null führen würde. Daher ist die Lösung nur:

$$8\frac{q-1}{q}p = 3q - 2$$

$$p = \frac{q(3q-2)}{8(q-1)}$$

und

$$r = \frac{3q-2}{4}$$

Mit $q = 5$ ergibt sich $p = \frac{65}{32}$ und $r = \frac{13}{4}$.

Aufgabe 291234:
Man ermittle alle diejenigen positiven reellen Zahlen a, mit denen die durch

$$x_1 = \sqrt{a}, \qquad x_{n+1} = \sqrt{a + x_n} \quad (n = 1, 2, ...)$$

definierte Folge (x_n) konvergent ist; man ermittle zu jeder solchen Zahl a den Grenzwert der Folge (x_n).

Lösung von MontyPythagoras:
Wir zeigen zunächst per vollständiger Induktion, dass $x_{n+1} > x_n$ für alle $n > 1$ gilt:
Induktionsanfang: es ist $x_2 = \sqrt{a + \sqrt{a}} > \sqrt{a} = x_1$.
Induktionsschritt: damit $x_{n+1} > x_n$ ist, muss gelten:

$$\sqrt{a + x_n} > x_n$$

Da beide Seiten positiv sind, kann man quadrieren:

$$a + x_n > x_n^2$$

bzw.

$$x_n^2 - x_n - a < 0$$

Das ist der Fall für

$$\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + a} < x_n < \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + a}$$

Wir zeigen nun per vollständiger Induktion, dass immer $x_n < \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + a}$ erfüllt ist:
Induktionsanfang: es ist $x_1 = \sqrt{a} < \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + a}$.
Induktionsschritt: Damit $x_{n+1} < \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + a}$ gültig ist, muss gelten:

$$\sqrt{a + x_n} < \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + a}$$

Quadrieren:

$$a + x_n < \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + a + \sqrt{\frac{1}{4} + a}$$

$$x_n < \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + a}$$

q. e. d. x_n ist somit streng monoton wachsend und nach oben beschränkt, so dass ein Grenzwert

$$x = \lim_{n \to \infty} x_n$$

existiert für alle $a > -\frac{1}{4}$. Da per Aufgabenstellung sowieso $a > 0$ vorgegeben ist, besteht keine weitere Einschränkung hinsichtlich a. Den Grenzwert erhält man durch lösen der Gleichung $x = \sqrt{x + a}$, und es ist dann die einzige positive Lösung

$$x = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + a} \quad \forall \quad a > 0$$

Aufgabe 301235:
Man untersuche, ob die durch

$$x_1 = 1, \qquad x_{n+1} = \frac{1}{x_n + 1} \qquad (n = 1, 2, 3,$$

...)definierte Folge (x_n) konvergent ist, und ermittle, wenn das der Fall ist, ihren Grenzwert.

Lösung von weird:
Zunächst werden die Rechnungen hier alle etwas einfacher, wenn wir auch noch das Folgenglied $x_0 = 0$ dazunehmen, was mit obiger Rekursionsvorschrift offensichtlich kompatibel ist. Da x_0 und mit jedem x_n $(n \in \mathbb{N})$ dann auch x_{n+1} rational ist, können wir hier auch mit dem Ansatz

$$x_n = \frac{a_n}{b_n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

arbeiten, wobei (a_n) und (b_n) hier zwei Folgen natürlicher Zahlen mit $\mathrm{ggT}(a_n{,}b_n) = 1$ sind und die folgenden Gleichungen gelten

$$\frac{a_0}{b_0} = \frac{0}{1}, \quad \frac{a_1}{b_1} = \frac{1}{1}, \quad \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \frac{1}{\frac{a_n}{b_n} + 1} = \frac{b_n}{a_n + b_n}$$

aus denen wir sofort die einfache Rekursionsbeziehung

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_{n+2} = b_{n+1} = b_n + a_n = a_{n+1} + a_n \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{*}$$

herleiten können. Die Folge (b_n) ist dann wegen

$$b_n = a_{n+1} \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{**}$$

der Folge (a_n) sehr ähnlich und gegenüber ihr einfach nur um eine Position nach hinten verschoben.
Als nächstes bestimmen wir aus der Rekursion (*) eine explizite Formel für die Folge (a_n) mit dem üblichen Ansatz

$$a_n = c_1 q_1^n + c_2 q_2^n$$

wobei q_1 und q_2 die zwei Lösungen der Gleichung $q^2 - q - 1 = 0$, also dann

$$q_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

sind und sich die Werte von c_1 und c_2 aus

$$c_1 q_1^0 + c_2 q_2^0 = a_0 = 0, \quad c_1 q_1 + c_2 q_2 = a_1 = 1$$

zu

$$c_1 = -c_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

ergeben, womit also dann letztendlich

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(q_1^n - q_2^n), \quad b_n = a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}(q_1^{n+1} - q_2^{n+1}) \Rightarrow x_n = \frac{q_1^n - q_2^n}{q_1^{n+1} - q_2^{n+1}} \quad (n \in \mathbb{N})$$

gilt. Insbesondere folgt daraus wegen $q_2 \approx -0.61$, dass (q_2^n) eine Nullfolge ist und somit die Folge (x_n) konvergiert und zwar mit dem Grenzwert

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \frac{1}{q_1} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

was also dann alle Fragen hier beantwortet.

Aufgabe 331236:
Man ermittle für jede natürliche Zahl n die größte Zweierpotenz, die ein Teiler der Zahl $\left[(4 + \sqrt{18})^n\right]$ ist.
Hinweis: Ist r eine reelle Zahl, so wird diejenige ganze Zahl g, für die $g \leq r < g + 1$ gilt, mit $g = [r]$ bezeichnet.

Lösung von weird:
Wir halten zunächst fest, dass der nachstehende Ausdruck

$$A_n := (4+\sqrt{18})^n + (4-\sqrt{18})^n = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \binom{n}{2k} 2^{2n-3k+1} 3^{2k} \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (*)$$

stets ganz ist, und zwar wegen

$$4-\sqrt{18} \approx -0.24$$

genauer jene ganze Zahl g, welche aus $(4+\sqrt{18})^n$ durch Runden hervorgeht, wobei für gerades n stets aufgerundet, für ungerades n aber stets abgerundet wird. Mit der abkürzenden Bezeichnung

$$B_n := [(4+\sqrt{18})^n] \quad (n \in \mathbb{N})$$

gilt somit folgender Zusammenhang

$$B_n := \begin{cases} A_n - 1, & \text{falls n gerade} \\ A_n, & \text{falls n ungerade} \end{cases}$$

Da aber die A_n aufgrund ihrer Bauart für gerades n stets gerade sind, sind die B_n dann automatisch ungerade, d. h., die größte Zweierpotenz, welche B_n für ein gerades n teilt ist somit nur 1.

Setzt man also nun im Folgenden n als ungerade voraus, so ist die Beobachtung von besonderer Bedeutung, dass wir in Formel (*) nur jeweils den letzten Summanden für $k = [\frac{n}{2}] = \frac{n-1}{2}$ betrachten müssen, da die anderen Summanden ersichtlich durch eine höhere Zweierpotenz teilbar sind. Die höchste Zweierpotenz, durch welche dieser letzte Summand aber teilbar ist, ist jedoch

$$2^{\frac{n+5}{2}}$$

wie man durch Einsetzen von $k = \frac{n-1}{2}$ sofort sieht, was obige Frage somit auch für ungerade n beantwortet.

Alternativ-Lösung von cyrix:
Es sei $s_n := (4+\sqrt{18})^n + (4-\sqrt{18})^n$. Dann erfüllt die Folge (s_n) die Rekursion $s_{n+2} = 8s_{n+1} + 2s_n$, wie man leicht nachrechnet:

$$8s_{n+1} + 2s_n = 8\cdot(4+\sqrt{18})\cdot(4+\sqrt{18})^n + 8\cdot(4-\sqrt{18})\cdot(4-\sqrt{18})^n + 2\cdot(4+\sqrt{18})^n + 2\cdot(4-\sqrt{18})^n =$$
$$= (32+8\sqrt{18}+2)\cdot(4+\sqrt{18})^n + (32-8\sqrt{18}+2)\cdot(4-\sqrt{18})^n =$$
$$= (16+2\cdot4\cdot\sqrt{18}+18)\cdot(4+\sqrt{18})^n + (16-2\cdot4\cdot\sqrt{18}+18)\cdot(4-\sqrt{18})^n =$$
$$= (4+\sqrt{18})^{n+2} + (4-\sqrt{18})^{n+2} = s_{n+2}$$

Zusammen mit $s_0 = 2$ und $s_1 = 8$ folgt für gerade n, dass s_n durch $2^{\frac{n}{2}+1}$, und für ungerade n, dass s_n durch $2^{\frac{n+5}{2}}$ aber keine größere Zweierpotenz teilbar ist:

Für $n = 0$ und $n = 1$ ist dies offenbar der Fall. Sei nun $n \geq 2$ und es gelte die Aussage für $n-1$ und $n-2$. Ist n gerade, dann ist also s_{n-2} durch $2^{\frac{n-2}{2}+1} = 2^{\frac{n}{2}}$ und s_{n-1} durch $2^{\frac{n-1+5}{2}} = 2^{\frac{n}{2}+2}$, aber keine größere Zweierpotenz teilbar, sodass $s_n = 8\cdot s_{n-1} + 2\cdot s_{n-2}$ durch $2^{\frac{n}{2}+1}$ und keine größere Zweierpotenz teilbar ist. Ist dagegen n ungerade, dann ist s_{n-2} durch $2^{\frac{n-2+5}{2}} = 2^{\frac{n+5}{2}-1}$ und s_{n-1} durch $2^{\frac{n-1}{2}+1} = 2^{\frac{n+5}{2}-2}$, aber keine größere Zweierpotenz teilbar, also ist $s_n = 8\cdot s_{n-1} + 2\cdot s_{n-2}$ durch $2^{\frac{n+5}{2}}$ aber keine größere Zweierpotenz teilbar.

Damit haben wir für jedes n bestimmt, durch welche höchste Zweierpotenz s_n teilbar ist.
Es ist $4 = \sqrt{16} < \sqrt{18} < \sqrt{25} = 5$, also $-1 < 4-\sqrt{18} < 0$ und damit gilt für $n = 0$ die Gleichung $(4-\sqrt{18})^n = 1$, für ungerade n die Ungleichung $-1 < (4-\sqrt{18})^n < 0$ und für gerade $n \geq 2$ die Ungleichung $0 < (4-\sqrt{18})^n < 1$. Also ist

- für $n = 0$ der Term $[(4+\sqrt{18})^n] = [1] = 1$ genau durch 2^0,

- für ungerades n der Term $[(4+\sqrt{18})^n] = [s_n - (4-\sqrt{18})^n] = s_n$ genau durch $2^{\frac{n+5}{2}}$ und
- für gerades $n \geq 2$ der Term $[(4+\sqrt{18})^n] = [s_n - (4-\sqrt{18})^n] = s_n - 1$ genau durch 2^0,

aber keine größere Zweierpotenz teilbar. Im letzten Fall gilt dies, da dann s_n durch $2^{\frac{n}{2}+1} \geq 2^2$ teilbar, also $s_n - 1$ ungerade ist.

Bemerkung: Auf die Rekursionsbedingung gelangt man, indem man die beiden Basen $4 \pm \sqrt{18}$ als Nullstellen des charakteristischen Polynoms einer rekursiv definierten Folge auffasst. Das Polynom mit diesen Nullstellen hat die Form $x^2 - 8x - 2$, sodass sich die Rekursionsbedingung $s_{n+2} - 8s_{n+1} - 2s_n = 0$ bzw. eben $s_{n+2} = 8s_{n+1} + 2s_n$ ergibt.

IV Runde 4

Aufgabe 061242:
Es sei $n \neq 0$ eine natürliche Zahl. Eine Zahlenfolge werde kurz eine Folge „F_n“ genannt, wenn n untereinander verschiedene Zahlen $z_1, z_2, \ldots, z_n$ existieren, so dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

(1) Jedes Glied der Folge ist eine der Zahlen $z_1, z_2, \ldots, z_n$.

(2) Jede der Zahlen $z_1, z_2, \ldots, z_n$ kommt mindestens einmal in der Folge vor.

(3) Je zwei unmittelbar aufeinanderfolgende Glieder der Folge sind voneinander verschiedene Zahlen.

(4) Keine Teilfolge der Folge hat die Form $\{a, b, a, b\}$ mit $a \neq b$.
Bemerkung: Als Teilfolge einer gegebenen Folge $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ oder $\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_s\}$ bezeichnet man jede Folge der Form $\{x_{m_1}, x_{m_2}, x_{m_3}, \ldots\}$ oder $\{x_{m_1}, x_{m_2}, x_{m_3}, \ldots, x_{m_t}\}$ mit natürlichen Zahlen $m_1 < m_2 < m_3 < \ldots$

Beantworten Sie folgende Fragen:
a) Gibt es bei fest gegebenen n beliebig lange Folgen F_n?
b) Wenn Frage a) für ein n zu verneinen ist:
Welches ist die größtmögliche Anzahl von Gliedern, die (bei gegebenem n) eine Folge F_n haben kann?

Lösung von Kornkreis:
a) Nein, denn
b) Mit vollständiger Induktion beweisen wir im Folgenden, dass für $n \geq 1$ immer eine Folge F_n der Länge $2n-1$ existiert und diese Länge maximal ist. Für $n = 1$ ist dies klar. Sei nun $n > 1$ beliebig und die Behauptung für $F_1, \ldots, F_{n-1}$ bewiesen.
Betrachte die Folge

$$F = z_1, S_1, z_1, S_2, \ldots, z_1, S_r, z_1$$

wobei S_i $(i \in \{1,\ldots,r\}, 1 \leq r < n)$ die Folgeglieder einer Folge von Zahlen aus $\{z_2,\ldots,z_n\}$ bezeichne, welche die Bedingungen (3) und (4) der Aufgabenstellung erfüllt.
Wie man leicht sieht, erfüllt die obige Folge F genau dann die Bedingungen der Aufgabe, wenn die S_i paarweise disjunkt sind und die Gesamtheit der S_i alle Zahlen außer z_1 beinhaltet.

Es ist klar, dass die Länge von F maximal ist, wenn jedes S_i maximale Länge hat. Nach Induktionsvoraussetzung ist dann die Länge von F gleich $(r+1) + 2(s_1 + \cdots + s_r) - r$, wobei s_i die Anzahl der verschiedenen Zahlen in S_i bezeichnet und $r+1$ die Anzahl der z_1 in F ist.
Es ist $s_1 + \cdots + s_r = n - 1$ und folglich ist die Länge von F gleich $2n - 1$.

Die Folge F ist optimal: Eine beliebige Folge F_n startet o.B. d. A. mit z_1. Falls danach nicht noch mal z_1 auftritt, können nach z_1 nur noch $2(n-1)-1$ Zahlen folgen (nach Induktionsvoraussetzung), die Länge wäre also nur $1 + 2(n-1) - 1 = 2n - 2$.

In einer Folge maximaler Länge kommen also mindestens zwei z_1 vor. Keine der Zahlen z_i, die zwischen zwei nächstgelegenen z_1 stehen, dürfen später noch einmal vorkommen, da man sonst eine Teilfolge $\{z_1,z_i,z_1,z_i\}$ hätte. Diese Bedingungen werden von der Folge F aber allgemein erfüllt, sodass die Länge $2n-1$ optimal ist und die Behauptung bewiesen.

Aufgabe 131241:
Es seien in einer Ebene zwei vom Nullvektor verschiedene Vektoren ψ und ζ gegeben. Dann wird durch

$$c_n = |\psi - n\zeta| \qquad \text{für } n = 1, 2, 3, ... \qquad (1)$$

eine Folge reeller Zahlen definiert. Es sind notwendige und hinreichende Bedingungen dafür anzugeben, dass die Folge (1)
a) streng monoton steigend,
b) streng monoton fallend ist.
c) Für den Fall, dass die Folge (1) nicht streng monoton ist, ist zu untersuchen, ob es eine natürliche Zahl n_0 gibt, so dass die Folge (1) die Monotonieintervalle $1 \leq n \leq n_0$ und $n_0 < n$ besitzt.

Lösung von svrc:
Da die beiden Vektoren ψ und ζ in einer Ebene liegen sollen, können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass diese Ebene von den Einheitsvektoren $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ aufgespannt wird. Dies kann durch Drehung der Ebene erreicht werden. Deshalb können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $\psi = \begin{pmatrix}\psi_1\\\psi_2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \setminus \left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}$ und $\zeta = \begin{pmatrix}\zeta_1\\\zeta_2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \setminus \left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}$ gelten. Mit $|\psi - n\zeta|$ wird die Länge des Vektors $\psi - n\zeta$ bezeichnet. Deshalb kann die Folge durch

$$c_n = |\psi - n\zeta| = \left|\begin{pmatrix}\psi_1\\\psi_2\end{pmatrix} - n \cdot \begin{pmatrix}\zeta_1\\\zeta_2\end{pmatrix}\right| = \sqrt{(\psi_1 - n\zeta_1)^2 + (\psi_2 - n\zeta_2)^2}$$

für alle $n = 1, 2, 3, \ldots$ beschrieben werden. Ferner bezeichne

$$\langle\psi,\zeta\rangle = \langle\begin{pmatrix}\psi_1\\\psi_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\zeta_1\\\zeta_2\end{pmatrix}\rangle \; = \psi_1\zeta_1 + \psi_2\zeta_2$$

das Skalarprodukt zwischen den beiden Vektoren ψ und ζ.

a) Eine Folge (c_n) heißt nach Definition streng monoton wachsend, falls

$$c_n < c_{n+1}$$

für alle $n = 1, 2, 3, \ldots$ gilt. Offensichtlich gilt $c_n \geq 0$ für alle $n = 1, 2, 3, \ldots$. Somit erhalten wir die Äquivalenzen

$$\begin{aligned}
& c_n < c_{n+1} \\
\iff & \sqrt{(\psi_1 - n\zeta_1)^2 + (\psi_2 - n\zeta_2)^2} < \sqrt{(\psi_1 - (n+1)\,\zeta_1)^2 + (\psi_2 - (n+1)\,\zeta_2)^2} \\
\iff & (\psi_1 - n\zeta_1)^2 + (\psi_2 - n\zeta_2)^2 < (\psi_1 - (n+1)\,\zeta_1)^2 + (\psi_2 - (n+1)\,\zeta_2)^2 \\
\iff & \psi_1^2 - 2n\psi_1\zeta_1 + n^2\zeta_1^2 + \psi_2^2 - 2n\psi_2\zeta_2 + n^2\zeta_2^2 < \psi_1^2 - 2\,(n+1)\,\psi_1\zeta_1 + (n+1)^2\,\zeta_1^2 + \psi_2^2 \\
& \qquad - 2\,(n+1)\,\psi_2\zeta_2 + (n+1)^2\,\zeta_2^2 \\
\iff & 2\,(\psi_1\zeta_1 + \psi_2\zeta_2) < (2n+1) \cdot \left(\zeta_1^2 + \zeta_2^2\right) \\
\iff & \frac{2\langle\psi,\zeta\rangle}{|\zeta|^2} < 2n+1 \\
\iff & \frac{\langle\psi,\zeta\rangle}{|\zeta|^2} - \frac{1}{2} < n.
\end{aligned}$$

Damit die Folge streng monoton wachsend ist, muss

$$\frac{\langle\psi,\zeta\rangle}{|\zeta|^2}-\frac{1}{2}<1$$

sein. Dies ist äquivalent zu

$$\frac{\langle\psi,\zeta\rangle}{|\zeta|^2}<\frac{3}{2}$$

und dies entspricht unserer notwendigen und hinreichenden Bedingung für strenges, monotones Wachsen der Folge (c_n).

b) Da sich in der Definition der Definition das Relationszeichen umkehrt, folgt somit die Äquivalenz

$$\begin{aligned} c_n &> c_{n+1} \\ \Longleftrightarrow \frac{\langle\psi,\zeta\rangle}{|\zeta|^2}-\frac{1}{2} &> n \end{aligned}$$

für alle $n=1,2,3,\ldots$. Dies ist allerdings nicht für alle $n=1,2,3,\ldots$ möglich, da die Vektoren ψ und ζ fixiert sind. Somit gibt es keine notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass die Folge (c_n) streng monoton fallend ist.

c) Dies ist möglich. Aufgrund der Äquivalenz

$$\begin{aligned} c_n &< c_{n+1} \\ \Longleftrightarrow \frac{\langle\psi,\zeta\rangle}{|\zeta|^2}-\frac{1}{2} &< n. \end{aligned}$$

aus a) sehen wir, dass eine natürliche Zahl n_0 derart existiert, dass die Folge (c_n) für alle $n>n_0$ monoton wachsend ist. Dementsprechend ist sie vorher monoton fallend.

Aufgabe 131242:
Ist x eine reelle Zahl, so bezeichne $[x]$ die größte ganze Zahl, die nicht größer als x ist. (So ist z. B. $[\pi]=3$; $[0{,}7]=0$; $[-0{,}7]=-1$.)
a) Man zeige, dass es zwei rationale Zahlen a,b derart gibt, dass die Zahlen

$$c_n=a\cdot n+b-[a\cdot n+b], \qquad (n=1,2,...)$$

eine nicht-konstante Zahlenfolge bilden und dass dabei alle $c_n\neq 0$ sind.
b) Man beweise, dass für je zwei rationale Zahlen a,b die in a) definierte Zahlenfolge ein Minimum besitzt.

Lösung von ochen:
a) Seien $a=1/2$ und $b=1/3$, so folgt

$$c_{n+2}=\frac{1}{2}(n+2)+\frac{1}{3}-\left[\frac{1}{2}(n+2)+\frac{1}{3}\right]=\frac{1}{2}n+\frac{1}{3}+1-\left[\frac{1}{2}n+\frac{1}{3}+1\right]==\frac{1}{2}n+\frac{1}{3}+1-\left[\frac{1}{2}n+\frac{1}{3}\right]-1=c_n$$

Die Folge ist also periodisch mit Periode 2. Rechnen wir die ersten beiden Folgeglieder aus, gilt

$$c_n=\frac{1}{2}n+\frac{1}{3}-\left[\frac{1}{2}n+\frac{1}{3}\right]=\begin{cases}\frac{1}{3}, & 2\mid n\\ \frac{5}{6}, & 2\nmid n\end{cases}.$$

Somit erfüllt c_n die gewünschten Anforderungen.

b) Wir zeigen sogar, dass die Folge nur endlich viele Werte annimmt. Da a rational ist, gibt es teilerfremde ganze Zahlen p,q mit $q > 0$ und $a = p/q$. Somit folgt

$$c_{n+q} = \frac{p}{q}(n+q) + b - \left[\frac{p}{q}(n+q) + b\right] = \frac{p}{q}n + b + p - \left[\frac{p}{q}n + b + p\right] = \frac{p}{q}n + b + p - \left[\frac{p}{q}n + b\right] - p = c_n.$$

Es werden also höchstens q paarweise verschiedene Werte angenommen. Somit gibt es unter diesem einen minimalen.

Aufgabe 171245:
Es seien $f_1, f_2, ...$ eine Folge von Funktionen, die für alle reellen Zahlen x definiert sind, und zwar durch

$$f_1(x) = \sqrt{x^2 + 48}$$

$$f_{k+1}(x) = \sqrt{x^2 + 6f_k(x)}$$

für $k = 1, 2, 3, ...$
Man ermittle für jedes $n = 1, 2, 3, ...$ alle reellen Zahlen x, die Lösungen der Gleichung $f_n(x) = 2x$ sind.

Lösung von Zeitschrift „Mathematik in der Schule“:
Wir werden mittels vollständiger Induktion nach n zeigen:
Für $x > 4$ gilt $f_n(x) < 2x$ (1).
Zunächst folgt aus $x > 4$: $16 < x^2$ bzw. $x^2 + 48 < x^2 + 3x^2 = 4x^2$. Hieraus erhält man unter Beachtung von $x > 4$

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + 48} < 2x$$

d. h., die Behauptung (1) ist für $n = 1$ richtig. Es sei (1) für ein festes b richtig. Dann gilt

$$f_n(x) < 2x \qquad \text{und damit} \qquad 6f_n(x) < 12x < 3x^2 \quad (x > 4)$$

Hieraus erhalten wir

$$(f_{n+1}(x))^2 = x^3 + 6f_n x < 4x^2$$

und damit die Behauptung (1).
Völlig analog lässt sich zeigen: Für $0 \leq x < 4$ gilt $f_n(x) > 2x$ (2).
Wegen $f_n(x) \geq 0$ kommen für die Gleichung $f_n(x) = 2x$ nur nichtnegative x in Betracht. Aus (1) und (2) folgt unter der Beachtung der Stetigkeit der Funktionen $f_n(x)$, dass $x = 4$ die einzige reelle Lösung der Gleichung $f_n(x) = 2x$ ist.

Aufgabe 191246A:
Eine Folge $\{x_k\}$ reeller Zahlen heiße genau dann C-konvergent gegen eine reelle Zahl z, wenn

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right) = z$$

gilt.
Eine Funktion f heiße genau dann C-stetig an der Stelle a ihres Definitionsbereiches, wenn für jede Folge $\{x_k\}$, die C-konvergent gegen a ist und deren sämtliche Glieder x_k im Definitionsbereich von f liegen, die Folge $\{f(x_k)\}$ stets C-konvergent gegen $f(a)$ ist.
Man zeige:
a) Sind A, B und a beliebige reelle Zahlen, so gilt:
Die durch $f(x) = Ax + B$ für alle reellen Zahlen x definierte Funktion f ist C-stetig an der Stelle a.
b) Wenn eine für alle reellen Zahlen x definierte Funktion f an der Stelle $a = 0$ den Funktionswert $f(0) = 0$ hat und an dieser Stelle C-stetig ist, so gilt für beliebige reelle p, q die Gleichung $f(p+q) = f(p) + f(q)$.

Lösung von Zeitschrift „Mathematik in der Schule“:
a) Für jede Folge (x_k), die C-konvergent gegen a ist, gilt

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(Ax_k+B)\right)$$
$$= A\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right) + B = Aa+B = f(a)$$

da nach Voraussetzung gilt:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right) = a$$

Damit ist bewiesen, dass für jede solche Folge (x_k) die Folge $(f(x_k))$ stets C-konvergent gegen $f(a)$ ist, w. z. b. w.

b) Für den Beweis dieses Teils der Behauptung wird die C-Konvergenz einer spezielle ausgewählten Folge benutzt.
Für beliebige reelle Zahlen p, q wird die Folge

$$(x_k) = (p, q, -(p+q)mp, q, -(p+q), ...)$$

betrachtet. Für sie gilt offenbar

$$\sum_{k=1}^{1} x_k = p \quad ; \quad \sum_{k=1}^{2} x_k = p+q \quad ; \quad \sum_{k=1}^{3} x_k = 0 \quad ; \quad \sum_{k=1}^{4} x_k = p \quad ; \quad \sum_{k=1}^{5} x_k = p+q \quad ; \quad \sum_{k=1}^{6} x_k = 0$$

und allgemein für $m = 0,1,2,...$:

$$\text{im Falle } n = 3m+1: \quad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k = \frac{p}{n}$$
$$\text{im Falle } n = 3m+2: \quad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k = \frac{p+q}{n}$$
$$\text{im Falle } n = 3m+3: \quad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k = 0$$

Da die Folgen $\left(\frac{p}{q}\right)$ und $\left(\frac{p+q}{n}\right)$ gegen Null konvergieren, konvergiert auch die Folge $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right)$ gegen Null. Die Folge (x_k) ist daher C-konvergent gegen Null.

Sei f eine für alle reelle Zahlen x definierte Funktion, die an der Stelle $a = 0$ den Funktionswert $f(0) = 0$ hat und an dieser Stelle $C-stetig$ ist.
Dann ist nach Voraussetzung die Folge $(f(x_k))$ C-konvergent gegen $f(0) = 0$, d. h. die Folge $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\right)$ konvergiert gegen Null. Das gilt dann auch für ihre Teilfolge $\left(\frac{1}{3m}\sum_{k=1}^{3m} f(x_k)\right)$, d. h. es ist

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{3m} f(x_k)\right) = 0$$

Da für beliebiges m

$$\left(\frac{1}{3m}\sum_{k=1}^{3m} f(x_k)\right) = \frac{1}{3}[(f(p)+f(q)+(f-(p+q))]$$

gilt, ist diese Teilfolge eine Folge mit konstanten Gliedern. Folglich gilt für beliebige p, q:

$$f(p) + f(q) + f(-(p+q)) = 0 \qquad (1)$$

Aus (1) folgt für $p = 0$ und beliebiges reelles q' wegen $f(0) = 0$:

$$f(0) + f(q') = f(q') = -f(-q') \qquad (2)$$

Für $q' = p + q$ folgt somit $f(p+q) = -f(-(p+q))$. Damit ergibt sich aus (1) und 82) die zu beweisende Behauptung $f(p) + f(q) = f(p+q)$.

Aufgabe 201244:
Es sei $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ diejenige Folge reeller Zahlen, für die

$$a_1 = 1 \qquad \text{und} \qquad a_{n+1} = 2a_n + \sqrt{3a_n^2 + 1} \quad (n = 1, 2, 3, ...)$$

gilt. Man ermittle alle diejenigen Glieder dieser Folge, die ganzzahlig sind.

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:
Die ersten Werte der Folge sind $a_1 = 1; a_2 = 4; a_3 = 15; a_4 = 56; a_5 = 209$. Daher beweisen wir die Gleichung $a_{n+2} = 4a_{n+1} - a_n$ für $n \geq 1$.
Daraus folgt dann, dass alle Folgenglieder ganzzahlig sind. Die Folge ist streng monoton steigend. Insbesondere gilt $2a_{n+1} > a_n$.

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 2a_n + \sqrt{3a_n^2 + 1} \\ \Rightarrow (a_{n+1} - 2a_n)^2 &= 3a_n^2 + 1 \\ \Rightarrow a_{n+1}^2 - 4a_{n+1}a_n + a_n^2 &= 1 \\ \Rightarrow (2a_{n+1} - a_n)^2 = 4a_{n+1}^2 - 4a_{n+1}a_n + a_n^2 &= 3a_{n+1}^2 + 1 \\ \Rightarrow 2a_{n+1} - a_n &= \sqrt{3a_{n+1}^2 + 1} \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung wenden wir nun auf a_{n+2} an.

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} + \sqrt{3a_{n+1}^2 + 1} = 2a_{n+1} + 2a_{n+1} - a_n = 4a_{n+1} - a_n$$

q. e. d.

Aufgabe 201245:
Für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ sei

$$f(n) = \sum_{k=1}^{n^2} \frac{n - [\sqrt{k-1}]}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}} \qquad (1)$$

Man ermittle einen geschlossenen Ausdruck für $f(n)$ (d. h. einen Ausdruck, der $f(n)$ in Abhängigkeit von n so darstellt, dass zu seiner Bildung nicht wie in (1) eine von n abhängende Anzahl von Rechenoperationen verlangt wird).
Hinweis:
Ist x eine beliebige reelle Zahl, so bezeichnet $[x]$ diejenige ganze Zahl, für die $[x] \leq x < [x] + 1$ gilt.

Lösung von Zeitschrift „Mathematik in der Schule“:
Jeder der in (1) gegebenen Summanden wird mit dem passenden Faktor $(\sqrt{k} - \sqrt{k-1})$ erweitert, wodurch im Nenner die Zahl 1 entsteht. Durch teilweises Ausmultiplizieren der Klammerausdrücke für die Summanden ergibt sich:

$$f(n) = \sum_{k=1}^{n^2} (n(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}) - [\sqrt{k-1}](\sqrt{k} - \sqrt{k-1})$$

Die Summe lässt sich wie folgt zerlegen:

$$f(n) = \sum_{k=1}^{n^2} n(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}) - \sum_{k=1}^{n^2} [\sqrt{k-1}](\sqrt{k} - \sqrt{k-1}) \qquad (2)$$

Nach den Regeln für das Rechnen mit dem Summenzeichen wird die erste Summe in (2) umgeformt, und man erhält:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n^2} n(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}) &= \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{k=m^2+1}^{(m+1)^2} [\sqrt{k-1}](\sqrt{k} - \sqrt{k-1}) \\
&= \sum_{m=1}^{n-1} m \sum_{k=m^2+1}^{(m+1)^2} (\sqrt{k} - \sqrt{k-1}) \\
&= \sum_{m=1}^{n-1} m \left(\sum_{k=m^2+1}^{(m+1)^2} \sqrt{k} - \sum_{k=m^2}^{(m+1)^2-1} \sqrt{k} \right) \\
&= \sum_{m=1}^{n-1} m(m+1-m) = \sum_{m=1}^{n-1} m = \frac{1}{2} n(n-1)
\end{aligned}$$

Unter Verwendung der Ergebnisse für beide Summen in (2) ergibt sich schließlich

$$f(n) = n^2 - \frac{1}{2} n(n-1) = \frac{1}{2} n(n+1)$$

also ein Ausdruck der gewünschten Art.

Aufgabe 201246A:
Eine Strecke AB von 10 m Länge soll auf folgende Weise durch wiederholtes Halbieren in 10 näherungsweise gleichlange Strecken zerlegt werden:
(1) Zunächst wählt man beliebige Punkte $P_1^{(0)}, P_2^{(0)}, \dots, P_9^{(0)}$ auf der Strecke AB und definiert $P_0^{(0)} = A$ und $P_{10}^{(0)} = B$.
(2) Liegen nun für eine natürliche Zahl n bereits als n-te Näherung Punkte $P_0^{(n)}, P_1^{(n)}, \dots, P_{10}^{(n)}$ vor, so definiert man $P_0^{(n+1)} = A$, $P_{10}^{(n+1)} = B$ sowie für $j = 1, 2, \dots, 9$ jeweils $P_j^{(n+1)}$ als Mittelpunkt der Strecke $P_{j-1}^{(n+1)} P_{j+1}^{(n)}$.

Es seien $Q_1, Q_2, \dots, Q_9$ die Punkte auf AB, die AB in 10 genau gleich lange Teilstrecken zerlegen, für die also $AQ_1 = Q_1Q_2 = \dots = Q_8Q_9 = Q_9B = 1$ m gilt.
Beweisen Sie, dass eine natürliche Zahl N so existiert, dass für jede Wahl der Punkte $P_1^{(0)}$, $P_2^{(0)}, \dots, P_9^{(0)}$ auf AB gilt:
Bei der n-ten Näherung weicht jeder der Punkte $P_j^{(N)}$ ($j = 1, 2, \dots, 9$) um weniger als 1 mm von der Lage des Punktes Q_j ab, d. h., es gilt $P_J^{(N)} Q_j < 1$ mm.

Lösung von Zeitschrift „Mathematik in der Schule“:
Die Lösung wird hier für de allgemeinen Fall einer Strecke AB der ganzzahligen Länge $M \geq 2$ (in Metern), die in M Teilstrecken zerlegt wird, formuliert. Im Falle $M = 10$ ergibt sich eine Lösung der gestellten Aufgabe.
Für die Maßzahlen $x_j^{(n)} = AP_j^{(n)}$ der Strecken erhält man aus der Aufgabenstellung:

$$x_j^{(n+1)} = \frac{1}{2} \left(x_{j-1}^{(n+1)} + x_{j+1}^{(n)} \right) \qquad (1 \leq j \leq M-1) \qquad (1)1$$

$$x_j^{(n+1)} = j \qquad (j = 0, M) \qquad (2)$$

Die Aufgabe ist nun äquivalent mit dem Nachweis, dass ein N ist

$$\left|x_j^{(N)} - j\right| < 0{,}001 \qquad (0 \leq j \leq M) \qquad (3)$$

existiert. Mit der Bezeichnung $e_j^{(n)} = x_j^{(n)} - j$ gehen die Formeln (1), (2) über in:

$$e_j^{(n+1)} = \frac{1}{2}\left(e_{j-1}^{(n+1)} + e_{j+1}^{(n)}\right) \qquad (1 \leq j \leq M-1) \qquad (4)$$

$$e_j^{(n+1)} = 0 \qquad (j = 0, M) \qquad (5)$$

Für die „größten Abweichungen“ $m^{(n)} = \max\limits_{0 \leq j \leq N} \left|e_j^{(n)}\right|$ erhält man aus (4), (5) über die Beziehungen

$$\left|e_j^{(n+1)}\right| \leq \frac{1}{2}\left(\left|e_{j-1}^{(n=1)}\right| + m^{(n)}\right) \qquad (1 \leq j \leq M-1)$$

$$\left|e_j^{(n+1)}\right| \leq \left(\frac{1}{2^j} + \frac{1}{2^{j+1}} + \cdots + \frac{1}{2}\right) m^{(n)}$$

$$\frac{1}{2^j} + \frac{1}{2^{j-1}} + \cdots + \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2^j} \leq 1 - \frac{1}{2^{M-1}} = q < 1$$

die Abschätzung

$$m^{(n+1)} \leq q m^{(n)} \leq q^{n+1} m^{(0)}$$

Nach Definition der Größen $x_j^{(0)}$ gilt (wegen $P_j^{(0)} \in AB$) $m^{(0)} \leq M-1$, so dass für alle $n \geq 0$ die Abschätzung

$$\left|x_j^{(n)} - j\right| \leq (M-1)q^n \qquad (6)$$

bewiesen ist. Da für $0 < q < 1$ bekanntlich $\lim\limits_{n \to \infty} q^n = 0$ gilt, existiert sicherlich ein N mit

$$q^N < \frac{1}{M-1} 0{,}001 \qquad (7)$$

Für jedes solches N folgt dann (3) aus (6).

Aufgabe 231241:
Es sei (x_n) diejenige Folge von reellen Zahlen, für die $x_1 = 1$ und gilt:

$$x_{n+1} = \frac{4x_n^2 + 1}{5x_n + 1} \qquad (n = 1, 2, 3, ...)$$

Man untersuche, ob diese Folge konvergent ist, und ermittle, falls das zutrifft, ihren Grenzwert.

Lösung von Kitaktus:
Sei g die positive Lösung der Gleichung $x^2 + x - 1 = 0$, also $g = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. (Das ist das Reziprok des goldenen Schnittes $g = 1/\phi = \phi - 1$).

Wir werden zeigen, dass die Folge (x_n) monoton fallend und durch g nach unten beschränkt, also konvergent ist. Danach werden wir zeigen, dass g der Grenzwert dieser Folge ist.

Lemma 1. Für $x > g$ gilt $x^2 + x - 1 > 0$.

Beweis: g ist positiv, die zweite Nullstelle der Gleichung ist dagegen negativ $(\frac{-\sqrt{5}-1}{2})$, daher ist g die größere der beiden Nullstellen und rechts der größeren Nullstelle nimmt eine quadratische Funktion mit positivem Vorfaktor vor x^2 nur positive Werte an.

Lemma 2. Für $x > g > 0$ gilt $\frac{4x^2+1}{5x+1} > g$.

Beweis: Sei $d := x - g > 0$. Dann gilt $3gd + 4d^2 > 0$ äquivalente Umformungen ergeben

$$4g^2 + 8gd + 4d^2 + 1 > 4g^2 + 5gd + 1 = 4g^2 + 5gd + (g^2 + g)$$

(nach Def. von g) und weiter

$$4(g + d)^2 + 1 > 5g^2 + 5gd + g = g(5g + 5d + 1)$$

bzw. $4x^2 + 1 > g(5x + 1)$. Division durch $5x + 1 > 0$ liefert die Behauptung.

Lemma 3. Für $x > g > 0$ gilt $\frac{4x^2+1}{5x+1} < x$.

Beweis: Nach Lemma 1 gilt $x^2 + x > 1$. Addition von $4x^2$ ergibt $5x^2 + x = x(5x + 1) > 4x^2 + 1$. Division durch $5x + 1 > 0$ liefert die Behauptung.

Mit Lemma 2 und 3 können wir nun induktiv beweisen, dass $g < x_{n+1} = \frac{4x_n^2+1}{5x_n+1} < x_n$ für alle natürlichen $n \geq 1$ gilt.

Induktionsanfang: $x_1 = 1 = \frac{3-1}{2} > \frac{\sqrt{5}-1}{2} = g$.

Induktionsschritt: Es gelte $x_n > g$. Nach Lemma 2 und 3 gilt nun $g < x_{n+1} = \frac{4x_n^2+1}{5x_n+1} < x_n$.

Damit ist gezeigt, dass (x_n) streng monoton fällt und durch $g > 0$ nach unten beschränkt ist. (x_n) ist daher konvergent. Sei $x > 0$ der Grenzwert von (x_n), dann muss für x die Gleichung $x = \frac{4x^2+1}{5x+1}$ gelten(*). Multiplikation mit $5x+1$ ergibt nach Zusammenfassung: $x^2 + x - 1 = 0$. x ist also die positive Nullstelle von $x^2 + x - 1$ und das ist gerade g.

(*) Wenn $x_{n+1} = \frac{4x_n^2+1}{5x_n+1}$ für alle n gilt und (x_n) gegen x konvergiert, dann gilt auch

$$x = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{4x_n^2 + 1}{5x_n + 1} = \frac{\lim_{n\to\infty} 4x_n^2 + 1}{\lim_{n\to\infty} 5x_n + 1} = \frac{4(\lim_{n\to\infty} x_n)^2 + 1}{5\lim_{n\to\infty} x_n + 1} = \frac{4x^2 + 1}{5x + 1}$$

Alternativ-Lösung von weird:
Wir benutzen hier ganz wesentlich die einfache Umformung

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 + x_n - 1}{5x_n + 1}$$

aus der man zunächst sieht, dass wenn die Folge (x_n) konvergiert, ihr Grenzwert dann nur die positive Nullstelle $g = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ von $x^2 + x - 1 =$ sein kann. Von daher liegt es nahe, das Verhalten der Differenzfolge

$$d_n = x_n - g \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

zu betrachten, für welche dann die Rekursion

$$d_1 = 1 - g \approx 0.38, \quad d_{n+1} = d_n - \frac{(x_n^2 - g^2) + (x_n - g)}{5(x_n - g) + 5g + 1} = d_n \left(1 - \frac{d_n + 2g + 1}{5d_n + 5g + 1}\right)$$

gelten muss. Daraus kann man aber induktiv sofort ersehen, dass die Folge (d_n) nur positive Glieder enthält und sie daher mithilfe der Grobabschätzung

$$0 < \frac{d_{n+1}}{d_n} = \frac{4d_n + 3g}{5d_n + 5g + 1} < \frac{4d_n + 4g}{5d_n + 5g} = \frac{4}{5}$$

eine Nullfolge sein muss, womit also dann auch die ursprüngliche Folge (x_n) tatsächlich gegen g konvergiert.

Aufgabe 241246B:
Man ermittle alle diejenigen positiven reellen Zahlen k, für welche die durch

$$x_1 = 1, \qquad x_{n+1} = \sqrt{k(x_n^2 + x_n)} \qquad (n = 1, 2, 3, ...)$$

definierte Zahlenfolge (x_n) konvergent ist.
Zu jeder solchen Zahl k ermittle man den Grenzwert der Zahlenfolge (x_n).

Lösung von cyrix:
Für $k = 1$ ist $x_{n+1}^2 = x_n^2 + x_n \geq x_n^2 + 1 \geq n + 1$, wie man leicht induktiv beweist. Insbesondere divergiert also die Folge (x_n^2) bestimmt gegen $+\infty$ und damit auch die Folge (x_n).
Für größere Werte von k vergrößern sich aufgrund der Monotonie der Rekursionsbedingung zur Berechnung von x_{n+1} aus k und x_n nur die Folgenglieder weiter, was sich wieder simpel per Induktion zeigen lässt, sodass auch dann die Folgen gegen $+\infty$ divergieren.
Für $0 < k < 1$ ist $0 < g := \frac{k}{1-k}$ und

$$x_{n+1} - g = \sqrt{k(x_n^2 + x_n)} - g = \frac{k(x_n^2 + x_n) - g^2}{\sqrt{k(x_n^2 + x_n)} + g}$$

Weiterhin ist

$$g^2 \cdot (k-1) + kg = -g^2 \cdot (1-k) + kg = \frac{-k^2}{(1-k)^2} \cdot (1-k) + k \cdot \frac{k}{1-k} = \frac{-k^2}{1-k} + \frac{k^2}{1-k} = 0$$

Damit ist $g^2 = k(g^2 + g)$, also

$$k(x_n^2 + x_n) - g^2 = k(x_n^2 - g^2 + x_n - g) = k(x_n - g)(x_n + g + 1)$$

Setzt man dies ein, erhält man

$$x_{n+1} - g = \sqrt{k(x_n^2 + x_n)} - g = \frac{k(x_n^2 + x_n) - g^2}{x_{n+1} + g} = (x_n - g) \cdot k \cdot \frac{x_n + 1 + g}{x_{n+1} + g}$$

Ist also $g = x_1 = 1$, was im Fall $k = \frac{1}{2}$ eintritt, so ist die Folge x_n damit konstant gleich g, da aus $x_n - g = 0$ sofort auch $x_{n+1} - g = 0$ folgt. Ist dagegen $g < x_1$, was für $0 < k < \frac{1}{2}$ eintritt, dann gilt auch für alle weiteren Folgenglieder $g < x_n$, da $x_{n+1} - g$ und $x_n - g$ das gleiche Vorzeichen besitzen müssen, da alle weiteren Faktoren positiv sind. Analog ist in den verbleibenden Fällen mit $\frac{1}{2} < k < 1$ schließlich $x_1 < g$ und damit für alle Folgenglieder $x_n < g$.

Analog erhält man

$$x_{n+1} - x_n = \sqrt{k(x_n^2 + x_n)} - x_n = \frac{k(x_n^2 + x_n) - x_n^2}{x_{n+1} + x_n} = \frac{x_n}{x_{n+1} + x_n} \cdot ((k-1)x_n + k)$$

sodass die Differenz $x_{n+1} - x_n$ das gleiche Vorzeichen besitzt wie $(k-1)x_n + k$.
Da $(k-1) \cdot g + k = -(1-k) \cdot \frac{k}{1-k} + k = -k + k = 0$ ist, lässt sich die zuvor erhaltene Summe auch schreiben als $(k-1)x_n + k = (k-1) \cdot (x_n - g) = (1-k) \cdot (g - x_n)$, sodass wegen $k < 1$ also $x_{n+1} - x_n$ genau das gleiche Vorzeichen besitzt wie $x_n - g$.

Damit ergibt sich, dass im Fall $0 < k < \frac{1}{2}$ der Wert g eine untere Schranke an die Folgenglieder ist, während die Folge wegen $g - x_n < 0$ und damit $x_{n+1} - x_n < 0$ monoton fallend ist. Also muss die Folge konvergieren. Analog ist im Fall $\frac{1}{2} \leq k < 1$ der Wert g eine obere Schranke an die Folgenglieder, während die Folge wegen $g - x_n \geq 0$ und damit $x_{n+1} - x_n \geq 0$ monoton steigend ist, also auch in diesem Fall konvergiert.

Ein möglicher Grenzwert x muss aber die Rekursionsbedingung erfüllen, sodass $x = \sqrt{k(x^2 + x)}$ bzw. $x^2 = k(x^2 + x)$, also $x^2 \cdot (1-k) = x$ und wegen $1 - k \neq 0$ auch $x^2 = x \cdot \frac{1}{1-k}$ sowie schließlich $x = 0$ oder $x = g$ folgt. Es kann aber nie $x = 0$ der Grenzwert sein, da im Fall $0 < k < \frac{1}{2}$ die Folge nach unten durch $g > 0$ beschränkt ist und im Fall $\frac{1}{2} \leq k < 1$ aufgrund des monotonen Wachstums nach unten durch $x_1 = 1 > 0$ beschränkt ist. Also muss g der gesuchte Grenzwert sein.

Zusammenfassend ergibt sich, dass die Folge für $k \geq 1$ (gegen $+\infty$) divergiert und für $0 < k < 1$ gegen $g = \frac{k}{1-k}$ konvergiert.

Aufgabe 261242:
Man ermittle alle diejenigen Zahlenfolgen (a_n) mit $n = 1, 2, 3, ...$, die die folgenden Bedingungen (1), (2) erfüllen:
(1) Für alle ganzen Zahlen m, n mit $n > m > 0$ gilt $a_{n+m} \cdot a_{n-m} = a_n^2 - a_m^2$.
(2) Es gilt $a_1 = 1$ und $a_2 = \frac{5}{2}$.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn eine Zahlenfolge (a_n) die Bedingungen erfüllt, so folgt durch vollständige Induktion, dass

$$a_n = \frac{2}{3}(2^n - 2^{-n})$$

for $n =$ 1,2,3,... gilt:
(a) Es gilt $a_1 = 1 = \frac{2}{3}(2 - \frac{1}{2}$ und $a_2 = \frac{5}{2} = \frac{2}{3}(4 - \frac{1}{4}$ also die Behauptung für $n = 1$ und $n = 2$.

(b) Wenn $k \geq 2$ ist und die Behauptung für $n = k$ und $n = k - 1$ gilt, d. h. wenn

$$a_k = \frac{2}{3}(2^k - 2^{-k}) \qquad , \qquad a_{k-1} = \frac{2}{3}(2^{k-1} - 2^{-k+1})$$

ist, so folgt: Wegen $k \geq 2$ ist $a_{k-1} \neq 0$, also ergibt sich aus (1) und (2)

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= \frac{a_k^2 - a_1^2}{a_{k-1}} = \frac{\frac{4}{9}((2^k - 2^{-k})^2 - \frac{9}{4})}{\frac{2}{3}(2^{k-1} - 2^{-k+1})} \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{2^{2k} - 4 - (\frac{1}{4} - 2^{-2k})}{2^{k-1} - 2^{-k+1}} = \frac{2}{3}(2^{k+1} - 2^{-k-1}) \end{aligned}$$

d. h. die Behauptung für $n = k + 1$. Daher kann nur die durch (3) gegebene Folge die Bedingungen (1), (2) erfüllen.

II. Sie erfüllte sich auch, denn (2) und in I(a) bestätigt, und für alle ganzen $n > m > 0$ folgt auch (3)

$$\begin{aligned} a_{n+m} \cdot a_{n-m} &= \frac{2}{3}(2^{n+m} - 2^{-n-m}) \cdot \frac{2}{3}(2^{n-m} - 2^{-n+m}) \\ &= \frac{4}{9}(2^{2n} + 2^{-2n} - 2 + 2 - 2^{2m} - 2^{-2m}) = a_n^2 - a_m^2 \end{aligned}$$

Somit erfüllt genau die Folge (3) die Bedingungen der Aufgabe.

Aufgabe 271245:
Es sei (x_n) die durch

$$x_1 = 1, \qquad x_2 = 1, \qquad x_{n+1} = \frac{x_n + 1}{x_{n-1} + 4}$$

$(n = 2, 3, 4, ...)$ definierte Zahlenfolge.
Man untersuche, ob diese Folge konvergent ist, und ermittle, falls dies zutrifft, ihren Grenzwert.

Lösung von Kornkreis:
Wenn die Folge gegen einen Grenzwert a konvergiert, muss

$$a = \frac{a+1}{a+4}$$

und damit $a = \frac{-3+\sqrt{13}}{2}$ gelten (die negative Lösung für a kann ausgeschlossen werden, da alle Folgeglieder positiv sind).

Nun ist die Konvergenz der Folge nicht ganz einfach nachzuweisen, da sie nicht monoton ist, sondern um a oszilliert.
Man könnte den Banach'schen Fixpunktsatz anwenden und nachweisen, dass die der Bildungsvorschrift der Zahlenfolge entsprechende zweidimensionale Funktion eine Kontraktion ist, was aber aufwändig ist und eben einen recht starken Satz voraussetzen würde.

Stattdessen wollen wir für hinreichend große n die plausible Abschätzung $|x_n - a| < c\lambda^n$ mit geeigneten Konstanten $c > 0$ und $0 < \lambda < 1$ zeigen (dass eine Abschätzung dieser Form existiert, folgt aus dem Beweis des Banach'schen Fixpunktsatzes).
Wir wählen $c = 3$, $\lambda = \frac{1}{2}$ und $n \geq 2$.

Beweis mit vollständiger Induktion: Wegen $\frac{1}{4} < a$ sind für $n = 2$ und $n = 3$ die Ungleichungen

$$|x_2 - a| = 1 - a < c \cdot \lambda^2 = \frac{3}{4} \qquad \text{und} \qquad |x_3 - a| = \frac{2}{5} - a < c \cdot \lambda^3 = \frac{3}{8}$$

erfüllt. Sei nun ein $n \geq 4$ gegeben und die Behauptung für $a_2,...,a_{n-1}$ bewiesen. Dann haben wir im Falle $x_n > a$

$$|x_n - a| = \frac{x_{n-1}+1}{x_{n-2}+4} - a < \frac{a + c\lambda^{n-1} + 1}{a - c\lambda^{n-2} + 4} - a,$$

und falls $x_n \leq a$

$$|x_n - a| = a - \frac{x_{n-1}+1}{x_{n-2}+4} < a - \frac{a - c\lambda^{n-1} + 1}{a + c\lambda^{n-2} + 4}\,.$$

Betrachten wir zunächst den Fall $x_n > a$. Wir gehen von der zu zeigenden Ungleichung

$$\frac{a + c\lambda^{n-1} + 1}{a - c\lambda^{n-2} + 4} - a \overset{?}{<} c\lambda^n$$

aus und formen äquivalent um (beachte $a - c\lambda^{n-2} + 4 > 0$) zu

$$0 < c\lambda^n(a+4) - c^2\lambda^{2n-2} + a(a+4) - ca\lambda^{n-2} - (a + c\lambda^{n-1} + 1)$$

Wegen $a(a+4) - (a+1) = 0$ (siehe die Bestimmungsgleichung für a) ist dies äquivalent zu

$$0 < \lambda^{n-2}(\lambda^2(a+4) - c\lambda^n - a - \lambda)$$

und tatsächlich ist wegen $\frac{1}{4} < a < \frac{3}{8}$ und mit Einsetzen der Werte von c und λ

$$\lambda^2(a+4) - c\lambda^n - a - \lambda > \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4} + 4\right) - \frac{3}{2^n} - \frac{3}{8} - \frac{1}{2} > \frac{1}{16} + 1 - \frac{3}{16} - \frac{3}{8} - \frac{1}{2} = 0$$

für $n \geq 4$, womit die behauptete Ungleichung verifiziert ist.
Für $x_n \leq a$ analog:

$$a - \frac{a - c\lambda^{n-1} + 1}{a + c\lambda^{n-2} + 4} \overset{?}{<} c\lambda^n$$

äquivalent zu

$$0 < c\lambda^n(a+4) + c^2\lambda^{2n-2} - a(a+4) - ca\lambda^{n-2} + (a - c\lambda^{n-1} + 1)$$

bzw.

$$0 < \lambda^{n-2}(\lambda^2(a+4) + c\lambda^n - a - \lambda)$$

und es ist

$$\lambda^2(a+4) + c\lambda^n - a - \lambda > 0$$

für $n \geq 4$, womit die behauptete Ungleichung verifiziert ist.

Insgesamt haben wir also für jedes $n \geq 2$ die Abschätzung $|x_n - a| < c\lambda^n$ mit $\lambda = \frac{1}{2}$ und $c = 3$, was wegen $c\lambda^n \to 0$ $(n \to \infty)$ die Konvergenz zeigt. Damit ist bewiesen, dass x_n gegen $a = \frac{-3+\sqrt{13}}{2}$ konvergiert.

Bemerkung: Interessanterweise kann man nicht ohne Weiteres $|x_n - a| < \frac{1}{n}$ per Induktion zeigen, obwohl dies schwächer ist als die in diesem Beweis gezeigte Fehlerabschätzung (schwächer, da Polynome langsamer fallen als Exponentialfunktionen). Das ist ein bekanntes Phänomen, das sich damit erklären lässt, dass man zwar etwas Schwächeres zeigen will, aber daher in der Induktionsvoraussetzung auch nur etwas Schwächeres voraussetzen kann.

Aufgabe 331242:
Für $n = 1, 2, 3, ...$ sei

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$$

$$t_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k \cdot s_k^2} = \frac{1}{1 \cdot s_1^2} + \frac{1}{2 \cdot s_2^2} + ... + \frac{1}{n \cdot s_n^2}$$

Man beweise für alle $n = 1, 2, 3, ...$ die Ungleichung $t_n < 2$.

Lösung von MontyPythagoras:
Es ist

$$\frac{1}{k} = s_k - s_{k-1}$$

Daher kann man die Summe t_n auch wie folgt darstellen:

$$t_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k \cdot s_k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{1}{k}}{s_k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{\frac{1}{k}}{s_k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{s_k - s_{k-1}}{s_k^2}$$

Da $s_n > s_{n-1}$ für alle n ist, s_n also streng monoton steigend ist, gilt:

$$t_n < 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{s_k - s_{k-1}}{s_k \cdot s_{k-1}}$$

$$t_n < 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{s_{k-1}} - \frac{1}{s_k} \right)$$

Das ist eine Teleskopsumme, so dass folgt:

$$t_n < 1 + \frac{1}{s_1} - \frac{1}{s_n}$$

Mit $s_1 = 1$ erhält man:

$$t_n < 2 - \frac{1}{s_n} < 2$$

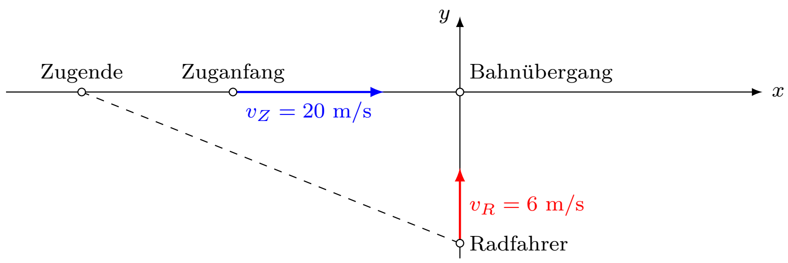
q. e. d.

VIII.VII Weitere Aufgaben

I Runde 1

Aufgabe V01104:
Ein 90 m langer D-Zug fährt mit einer Geschwindigkeit von 72 $km \cdot h^{-1}$. Er ist 150 m vom Bahnübergang entfernt, als ein Radfahrer ihn bemerkt, der, 100 m vom Bahnübergang entfernt, sich mit einer Geschwindigkeit von 6 $m \cdot s^{-1}$ in der Richtung zum Bahnübergang bewegt.
Nach wie viel Sekunden hat der Radfahrer vom Zugende den geringsten Abstand?

Lösung von Steffen Polster:
Unter der Annahme, dass der Bahnübergang senkrecht zur Bahnstrecke erfolgt, betrachten wir ein Koordinatensystem, bei dem sich der Bahnübergang im Koordinatenursprung befindet und der Zug sich längs der x-Achse bewegt, der Radfahrer längs der y-Achse.



Zum Zeitpunkt $t = 0$ s ist der Radfahrer 100 m vom Übergang entfernt, das Zugende (= Zugentfernung + Zuglänge) 240 m. Der Ort des Zugendes wird mit den Koordinaten $(240 + 20 \cdot t)$ beschrieben, wobei t in Sekunden gemessen wird. Die Geschwindigkeit des Zuges ist 72 km/h = 20 m/s.
Der Ort des Radfahrers ist analog $(0, 6 \cdot t - 100)$.

Die Entfernung des Radfahrers zum Zugende ist

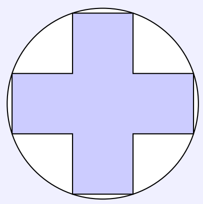
$$d = \sqrt{(240 + 20 \cdot t)^2 + (6 \cdot t - 100)^2}$$

Die Entfernung d wird minimal, wenn der Radikand minimal wird. Der Radikand wird durch

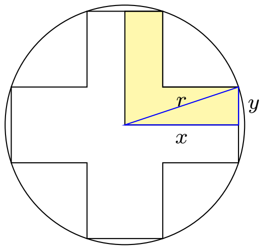
$$f(t) = 4(109t^2 - 2700t + 16900)$$

beschrieben. Die 1. Ableitung ist $f'(t) = 8(109t - 1350)$ mit der Nullstelle bei $t_1 = \frac{1350}{109} \approx 12{,}39$. Da der Radikand eine quadratische Funktion mit einem positiven Faktor des quadratischen Gliedes ist, ist t_1 der Zeitpunkt des kürzesten Abstandes zwischen Zugende und Fahrradfahrer. Nach 12,39 s ist der Abstand minimal.

Aufgabe V01113:
Der zylinderförmige Hohlraum (Radius r) einer Rundspule soll mit einem kreuzförmigen Eisenkern ausgefüllt werden.
Wie ist der Kern zu dimensionieren, damit sein Querschnitt maximal wird?
Den wievielten Teil des Spuleninneren kann man im günstigsten Fall in dieser Weise mit Eisen ausfüllen?
(Auf die Untersuchung mit der 2. Ableitung dürfen Sie verzichten!)



Lösung von Steffen Polster:



Das Spuleninnere setzt sich auf 4 Flächen der Form in der Abbildung zusammen. Eine solche Fläche hat den Flächeninhalt

$$F = \frac{F_I}{4} = 2x \cdot y - y \cdot y$$

wobei $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ gilt (siehe Abbildung). Die Zielfunktion der Fläche des Spuleninneren ist somit

$$F(x) = 2x\sqrt{r^2 - x^2} - (r^2 - x^2) \tag{1}$$

Die 1. Ableitung der Flächenfunktion wird dann

$$F'(x) = 2\sqrt{r^2 - x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} + 2x$$

Für die Suche nach dem Maximum der inneren Fläche wird $F'(x)$ gleich 0 gesetzt und die Gleichung gelöst.

$$\begin{aligned} 0 &= 2\sqrt{r^2 - x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} + 2x \\ 0 &= 2(r^2 - x^2) - 2x^2 + 2x\sqrt{r^2 - x^2} \\ x\sqrt{r^2 - x^2} &= 2x^2 - r^2 \\ 0 &= 5x^4 - 5r^2x^2 + r^4 \end{aligned}$$

Mit $u = x^2$ hat die quadratische Gleichung $0 = 5i^2 - 5r^2u + r^4$ die Lösungen

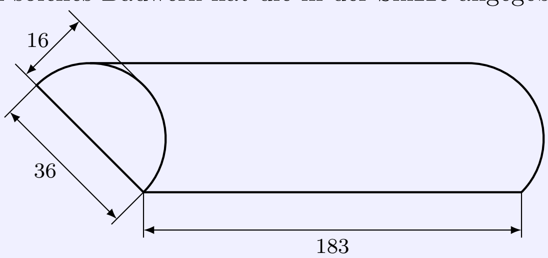
$$u_1 \approx 0{,}7236r^2 \qquad ; \qquad u_2 \approx 0{,}2764r^2$$

und folglich, da die negativen Lösungen entfallen:

$$x_1 \approx 0{,}8506r; \quad y_1 \approx 0{,}5257r \qquad ; \qquad x_2 \approx 0{,}5257r; \quad y_2 \approx 0{,}8506r$$

Setzt man x_1 in (1) ein, so ergibt sich für die Gesamtfläche des Spuleninneren $F_I \approx 2{,}4721r^2$. Dies entspricht 78,69 % der Kreisfläche πr^2.

Aufgabe V01115:
Beim Bau großer Hallen verwendet man neuerdings parabolische Bogenkonstruktionen aus Beton. Ein solches Bauwerk hat die in der Skizze angegebenen Maße: (Maßangaben in m)



a) Berechnen Sie die Fläche des Querschnitts der Halle!
b) Bestimmen Sie den Rauminhalt der Halle!
c) Wie verhält sich die Fläche des Querschnitts zu der Fläche des Rechtecks von gleicher Grundlinie und gleicher Höhe?

Lösung von Steffen Polster:
a) Durch die Punkte $P_1\,(-18;0)$, $P_2\,(0;16)$ und $P_3\,(18;0)$ wird eine Parabel gelegt, deren Funktionsgleichung mit $f\,(x) = ax^2 + bx + c$ angesetzt wird. Es ergibt sich das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 324a - 18b + c &= 0, \\ c &= 16, \\ 324a + 18b + c &= 0. \end{aligned}$$

Damit gilt $c = 16$. Gleichsetzen der ersten und dritten Gleichung liefert $b = 0$. Es folgt $a = -\frac{4}{81}$. Die Funktionsgleichung der Parabel lautet

$$f\,(x) = -\frac{4}{81}x^2 + 16.$$

Um die Querschnittsfläche zu berechnen, muss das Integral $\int\limits_{-18}^{18} f(x)\,\mathrm{d}x$ gelöst werden. Es gilt

$$\begin{aligned}\int\limits_{-18}^{18} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int\limits_{-18}^{18} \left\{-\frac{4}{81}x^2+16\right\}\mathrm{d}x = \left[-\frac{4}{243}x^3+16x\right]_{-18}^{18} \\ &= -\frac{4}{243}\cdot(18)^3+16\cdot 18-\left(-\frac{4}{243}\cdot(-18)^3-16\cdot 18\right) = 576-\frac{8}{243}\cdot(18)^3 = 384.\end{aligned}$$

Die Querschnittsfläche der Halle beträgt $384\,\mathrm{m}^2$.

b) Für den Rauminhalt der Halle gilt

$$V = 384\,\mathrm{m}^2\cdot 183\,\mathrm{m} = 70272\,\mathrm{m}^3$$

und somit 70272 Kubikmeter.

c) Für das Verhältnis gilt

$$\frac{A_{\text{Parabel}}}{A_{\text{Rechteck}}} = \frac{384\,\mathrm{m}^2}{36\cdot 16\,\mathrm{m}^2} = \frac{384}{576} = \frac{2}{3}.$$

Aufgabe V01116:
Ein Graben mit parabolischem Querschnitt soll ausgeschachtet werden. Seine Breite beträgt 3 Meter, seine Tiefe b Meter.
Berechnen Sie den Querschnitt des Grabens!

Lösung von Steffen Polster:
Um die Querschnittsfläche des Grabens zu berechnen, müssen wir zuerst eine Funktionsgleichung einer Parabel ermitteln, welche durch die Punkte $P_1(-1{,}5;0)$, $P_2(0,b)$ und $P_3(1{,}5;0)$ verläuft. Wir setzen mit der quadratischen Funktionsgleichung $f(x)=\widetilde{a}x^2+\widetilde{b}+\widetilde{c}$ an. Dies führt auf das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}2{,}25\cdot\widetilde{a}-1{,}5\widetilde{b}+\widetilde{c} &= 0,\\ \widetilde{c} &= b,\\ 2{,}25\cdot\widetilde{a}+1{,}5\widetilde{b}+\widetilde{c} &= 0.\end{aligned}$$

Es gilt $\widetilde{c}=b$ und setzen wir die beiden übrigen Gleichungen gleich, so folgt $\widetilde{b}=0$. Es bleibt $\widetilde{a}=-\frac{4}{9}b$. Somit lautet die Funktionsgleichung

$$f(x) = -\frac{4b}{9}x^2+b.$$

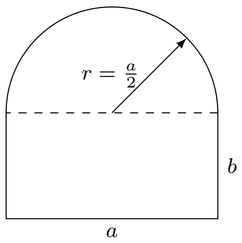
Um die Querschnittsfläche zu bestimmen, muss das Integral $\int\limits_{-1{,}5}^{1{,}5} f(x)\,\mathrm{d}x$ gelöst werden. Es gilt

$$\begin{aligned}\int\limits_{-1{,}5}^{1{,}5} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int\limits_{-1{,}5}^{1{,}5}\left(-\frac{4b}{9}x^2+b\right)\mathrm{d}x = \left[-\frac{4b}{27}x^3+bx\right]_{-1{,}5}^{1{,}5} \\ &= -\frac{4b}{27}\cdot(1{,}5)^3+1{,}5b+\frac{4b}{27}\cdot(-1{,}5)^3+1{,}5b = 3b-\frac{8b}{27}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^3 = 3b-b = 2b.\end{aligned}$$

Damit entspricht die Querschnittsfläche gerade dem Doppelten der Tiefe.

Aufgabe V01117:
Ein Entwässerungskanal hat als inneren Querschnitt ein Rechteck mit darübergesetztem Halbkreis. Welche Abmessungen muss der Kanal haben, wenn bei konstantem Umfang U der Querschnitt möglichst groß sein soll?
Wie groß ist der größte Querschnitt?

Lösung von Steffen Polster:



a sei die Breite des Kanals, b die Höhe des rechteckigen Teils und $r = \frac{a}{2}$ der Radius des aufgesetzten Halbkreises. Für den Umfang des Kanals wird dann

$$u = a + 2b + \pi a \quad \rightarrow \quad b = \frac{u - a - \pi a}{2} \tag{1}$$

Der Flächeninhalts des Querschnitts setzt sich aus dem Rechteck und dem Halbkreis zusammen:

$$A = a \cdot b + \frac{1}{2}\pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 \tag{2}$$

Einsetzen von (1) in (2) und vereinfachen ergibt als Zielfunktion des Flächeninhaltes

$$A(a) = \frac{a \cdot u}{2} - \frac{a^2(3\pi + 4}{8}$$

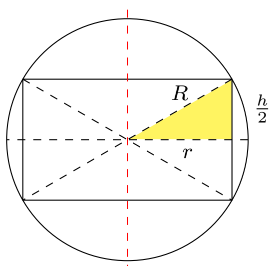
mit den Ableitungen

$$A'(a) = \frac{u}{2} - \frac{a(3\pi + 4)}{4} \qquad ; \qquad A''(a) = -\frac{3\pi + 4}{4} < 0$$

Die Nullstelle der 1. Ableitung ist $a = \frac{2u}{3\pi+4}$. Da die zweite Ableitung stets negativ ist, liegt ein lokales Maximum vor.
Für b wird $b = \frac{u(\pi+2)}{6\pi+8}$.
Der Kanal muss eine Breite von $a = \frac{2u}{3\pi+4}$ und eine rechteckige Höhe $b = \frac{u(\pi+2)}{6\pi+8}$ erhalten, um einen maximalen Flächeninhalt des Querschnitts von $A = \frac{u^2}{6\pi+8}$ zu erreichen.

Aufgabe V01118:
Einer gegebenen Kugel soll ein gerader Kreiszylinder einbeschrieben werden.
Wie groß muss man das Verhältnis der Höhe h zum Durchmesser d des Zylinders wählen, damit
a) der Rauminhalt,
b) die Mantelfläche,
c) die gesamte Oberfläche des Zylinders möglichst groß werden?

Lösung von Steffen Polster:
Es sei R der Radius der Kugel, r der Radius des Zylinders und h die Höhe des Zylinders. Um ihren Zusammenhang zu finden legen wir eine Schnittebene durch Kugel und Zylinder, die normal auf die Deck- und Bodenfläche des Zylinder steht und durch den Kugelmittelpunkt geht.



In der Abbildung ist die Drehachse des Zylinders rot dargestellt. Für das rechtwinklige Dreieck gilt nach dem Satz des Pythagoras

$$R^2 = r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 \tag{1}$$

a) Das Volumen des Zylinders berechnet sich zu

$$V(r,h) = \pi r^2 h$$

Umstellen von (1) nach r^2 und einsetzen ergibt

$$V(h) = \pi \left(R^2 - \frac{h^2}{4}\right) h$$

Die Nullstellen der 1. Ableitung $V'(h) = \pi\left(R^2 - \frac{3h^2}{4}\right)$ sind

$$h_{1,2} = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}R$$

Die negative Lösung entfällt. Die 2. Ableitung $V'' = -\frac{3}{2}\pi h$ ist für alle positive h negativ. Damit liegt ein lokales Maximum vor.

Der Zylinder hat bei maximalem Volumen den Radius $r = \frac{2\sqrt{3}}{3}R$ und die Höhe $h = \frac{4\sqrt{3}}{3}R$. Das Verhältnis ist $h : r = \sqrt{2} : 1$.

b) Die Mantelfläche des Zylinders berechnet sich zu

$$M = 2\pi r \cdot h$$

Erneutes Einsetzen von (1) ergibt die Zielfunktion

$$M = 2\pi\sqrt{R^2 - \frac{h^2}{4}}h$$

mit der 1. Ableitung

$$M' = \pi\sqrt{4R^2 - h^2} - \frac{\pi h^2}{\sqrt{4R^2 - h^2}}$$

Die Nullstellen ergeben sich mit etwas Umstellen zu $h_{1,2} = \sqrt{2}R$. $h = \sqrt{2}R$ erweist sich mit etwas Rechenaufwand wieder als das gesuchte lokale Maximum.

Der Zylinder hat bei maximaler Mantelfläche den Radius $r = \frac{\sqrt{2}}{2}R$ und die Höhe $h = \sqrt{2}R$. Das Verhältnis ist $h : r = 2 : 1$.

c) Die Oberfläche des Zylinders berechnet sich zu

$$O = 2\pi r \cdot h + 2\pi r^2$$

Erneutes Einsetzen von (1) ergibt die Zielfunktion

$$O = \pi h\sqrt{4R^2 - h^2} - \frac{\pi(h^2 - 4R^2)}{2}$$

mit der 1. Ableitung

$$O' = \pi\sqrt{4R^2 - h^2} - \frac{\pi h^2}{\sqrt{4R^2 - h^2}} - \pi h$$

Eine Nullstelle, die auch das lokale Maximum ergibt, ist $h = \sqrt{\frac{2\sqrt{5}}{5} + 2}R$. (Der rechnerische Nachweis ist sehr aufwendig). Der Zylinder hat bei maximaler Oberfläche den Radius $r = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}}R$ und die Höhe $\sqrt{\frac{2\sqrt{5}}{5} + 2}R$. Das Verhältnis ist $h : r = (1 + \sqrt{5}) : 1$.

Aufgabe V01203:
Eine Uhr, mit Synchronmotor ausgerüstet, habe ideal gleichförmig bewegte Zeiger.
Bestimmen Sie genau die Uhrzeiten, bei denen die Zeiger so stehen, dass eine Stunde später der zwischen den Zeigern befindliche Winkel dieselbe Größe hat!
(Hinweis: Die betreffenden Winkel sind kleiner als 180°.)

Lösung von MontyPythagoras:
Sei der Winkel im Uhrzeigersinn von der 12 aus gerechnet $\sigma(t)$ für den Stundenzeiger und $\mu(t)$ für den

Minutenzeiger. Zu einem gegebenen Startzeitpunkt $t = 0$ sei die Stellung der Zeiger σ_0 und μ_0. Dann lauten die Winkelgleichungen der Zeiger

$$\sigma(t) = \sigma_0 + 30^\circ \cdot t \qquad ; \qquad \mu(t) = \mu_0 + 360^\circ \cdot t$$

Dabei werde t in Stunden angegeben. Allgemein kann man formulieren:

$$|\mu(t) - \sigma(t)| \equiv |\mu_0 - \sigma_0| \pmod{360^\circ}.$$

Es soll nach Aufgabenstellung genau eine Stunde später wieder der gleiche Winkel zwischen den Zeigern liegen. Das heißt:

$$\frac{12}{11}\left(z - \frac{\mu_0 - \sigma_0}{180^\circ}\right) = 1$$

Nach $\mu_0 - \sigma_0$ aufgelöst:

$$\mu_0 - \sigma_0 = 180^\circ(z - \tfrac{11}{12})$$
$$\mu_0 - \sigma_0 = 180^\circ \cdot z - 165^\circ$$

Da $z = 2$ im Grunde das gleiche ergibt wie $z = 0$, gilt also entweder:

$$\mu_0 = \sigma_0 - 165^\circ \qquad \text{oder} \qquad \mu_0 = \sigma_0 + 15^\circ$$

Der Minutenzeiger muss also ursprünglich entweder 165° hinter dem Stundenzeiger sein, oder 15° weiter. Dies geschieht aller $\frac{12}{11}$. Ersteres wäre zum Beispiel um 11:30:00 Uhr der Fall, aber nicht nur, denn wie oben gezeigt, wäre es auch bei Startzeit 12:35:27 Uhr der Fall, usw.. 15° ist der Minutenzeiger dem Stundenzeiger voraus um 05:30:00 Uhr.
Singemäß gilt das gleiche, d. h. weitere Startuhrzeiten wären zum Beispiel 06:35:27, 07:40:55 und so weiter.

Aufgabe V01205:

Es ist der folgende Ausdruck zu berechnen:

$$(\sqrt{2})^{1,5+\sqrt[-4]{11+\frac{\sqrt[5]{5}}{5^{-0.8}}}}$$

Lösung von OlgaBarati:

$$(\sqrt{2})^{1,5+\sqrt[-4]{11+\frac{\sqrt[5]{5}}{5^{-0,8}}}} = (\sqrt{2})^{1,5+\sqrt[-4]{11+5^{0,2}\cdot 5^{0,8}}}$$
$$(\sqrt{2})^{1,5+\sqrt[-4]{11+5}} = (\sqrt{2})^{1,5+\sqrt[-4]{16}} = (2^{0,5})^{1,5+0.5} = 2^{0,5\cdot 2} = 2^1 = 2$$

Aufgabe V01207:
Zur Zeit t_0 verlässt ein PKW, der mit der Geschwindigkeit v_1 fährt, den Berliner Autobahnring in Richtung Dresden. Dieser PKW begegnet eine halbe Stunde später (zur Zeit t_1) einem PKW, der mit der gleichen Geschwindigkeit entgegenkommt, und 5 Minuten danach (zur Zeit t_2) einem LKW, dessen Geschwindigkeit v_2 ($v_2 < v_1$) beträgt.
Wenn und wo (bezogen auf Ort und Zeit der Ausfahrt alle dem Berliner Ring) überholten der entgegenkommende PKW den LKW?
Zu welchem speziellen Ergebnis gelangt man für den Fall $t_0 = 10$ Uhr, $v_1 = 100$ km/h, $v_2 = 80$ km/h?

Lösung von OlgaBarati:
Seien die beiden mit der Geschwindigkeit v_1 fahrenden PKW als PKW_1 und PKW_2 bezeichnet. Dann berechnet sich der Treffpunkt P_1 der beiden PKW mit

$$P_1 = v_1 t_1.$$

Für Treffpunkt P_2 von PKW_1 und LKW in Fahrtrichtung von PKW_1 gilt:

$$P_2 = P_1 + v_1 t_2 = v_1 t_1 + v_1 t_2 = v_1(t_1 + t_2).$$

Und für Treffpunkt P_3 von PKW_2 und LKW in Fahrtrichtung von PKW_1 muss damit gelten:

$$P_3 = P_2 + v_2 t_2 = v_1(t_1 + t_2) + v_2 t_2.$$

Und für den Zeitpunkt von P_3: $t_3 = t_1 - t_2 - \frac{P_3 - P_2}{v_1}$

$$t_3 = t_1 - t_2 - \frac{v_1(t_1 + t_2) + v_2 t_2 - v_1(t_1 + t_2)}{v_1} = t_1 - t_2 - \frac{v_2 t_2}{v_1}.$$

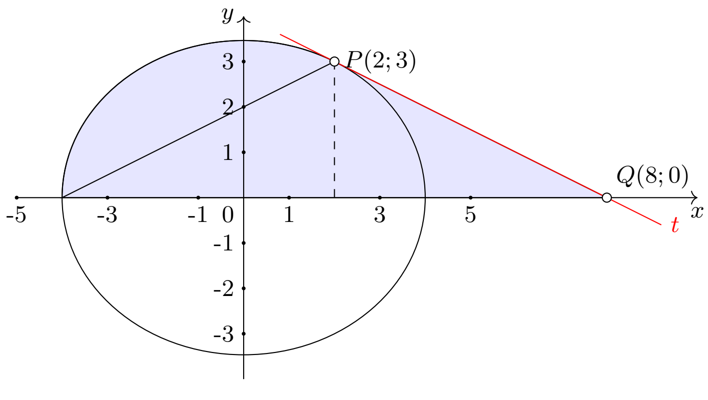
Im speziellen Fall wird P_1 um 10:30 Uhr und 50 km vom Startpunkt Berliner Ring entfernt, P_2 um 10:35 Uhr und 58,33 km entfernt und P_3 um 10:21 Uhr und 65 km entfernt, erreicht.

Aufgabe V01211:
Der links von $P_1(2;3)$ liegende Bogen einer Ellipse (Mittelpunkt im Koordinatenursprung) und deren Tangente in P_1 begrenzen mit der x-Achse ein Flächenstück, durch dessen Rotation um die x-Achse ein tropfenförmiger Körper mit dem größten Querschnitt $q = 12\pi$ Flächeneinheiten entsteht.
Wie groß ist das Volumen des Rotationskörpers?

Lösung von Steffen Polster:
In der Abbildung ist die um die x-Achse rotierende Fläche farbig hervorgehoben. Ihr größter Querschnitt ist ein Kreis und tritt bei $x = 0$ auf, womit aus $\pi b^2 = 12\pi$ sofort $b = \sqrt{12}$ folgt.
Aus der Ellipsengleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ergibt sich mit $b^2 = 12$ bei Einsetzen des Punktes $P(2;3)$, dass die große Halbachse $a = 4$ ist, d. h. $a^2 = 16$. Mit der Tangentengleichung $\frac{xx_P}{a^2} + \frac{yy_P}{b^2} = 1$ wird für die Tangente

$$\frac{2x}{16} + \frac{3y}{12} = 1 \to y = 4 - \frac{x}{2}$$

mit der Nullstelle $x = 8$.



Damit setzt sich die rotierende Fläche aus einem rechtwinkligen Dreieck (Kathetenlängen 3 cm und 6 cm) und einem Ellipsensegment von $x = -4$ bis $x = 2$ der Ellipse $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$. Es wird

$$V = V_{\text{Dreieck}} + V_{\text{Segment}} = \pi \cdot 3^2 \cdot 6 + \int\limits_{-4}^{2} \left[\frac{1}{4}\sqrt{192 - 12x^2}\right]^2 dx$$

$$= 54\pi + \left[\frac{x}{4}(48 - x^2)\right]_{-4}^{2} = 54\pi + 54$$

Der Rotationskörper hat ein Volumen von $54(\pi + 1) \approx 223{,}6$ cm^3.

Aufgabe V01218:
Ein Porzellantiegel (äußere Höhe $h = 10$ cm, Dichte des Porzellans: 2,5 g/cm^3), dessen äußere und innere Begrenzung durch Umdrehung der Parabeln

$$y = \frac{1}{40}x^2 \qquad \text{und} \qquad y = \frac{1}{10}(x^2 + 10)$$

entsteht, schwimmt aufrecht in einem Wasserbecken.
Wie tief taucht der Tiegel ein, wenn er 1 cm hoch mit Quecksilber gefüllt ist? (Dichte des Quecksilbers 13,5 g/cm^3)

Lösung von cyrix:
Da die zweite Parabel für alle Werte von x oberhalb der ersten verläuft, aber die innere Begrenzung des Porzellantiegels beschreibt, muss die Rotation dieser Parabeln zur Beschreibung der Begrenzung des Porzellantiegels um die y- (und nicht die x)-Achse erfolgen.

Die beiden Parabeln schneiden sich nie. Zur Lösung der Aufgabe wird angenommen, dass die Größen in cm angegeben sind, sodass also die y-Koordinate des Tiegels das Intervall $[0; 10]$ durchläuft.

Das Volumen V_1 des Rotationskörpers, der durch die äußere Parabel bis zur maximalen Höhe von $y = 10$ entsteht, erhält man durch die Integration über die Kreisscheiben mit Radius $x(y)$, wobei y von 0 bis 10 läuft. Dabei ist $x(y)$ die zugehörige Umkehrfunktion, die man mit $x(y) = \sqrt{40y}$ erhält. Die zugehörige Kreisscheibe in der Höhe y hat also eine Fläche von $\pi \cdot x(y)^2 = \pi \cdot 40y$. Es ist also

$$V_1 = \int_{y=0}^{10} \pi \cdot 40y \mathrm{d}y = \left[\pi \cdot 20y^2\right]_0^{10} = \pi \cdot 2000.$$

Analog berechnet man das Volumen V_2 des durch die Rotation der zweiten Parabel entstehenden Rotationskörpers, der den nicht aus Porzellan bestehenden Teil im Innern des ersten Rotationskörpers ausschneidet, sodass dann nur noch der Porzellantiegel verbleibt mit

$$V_2 = \int_{y=1}^{10} \pi \cdot (10y - 10)\mathrm{d}y = \pi \cdot \left[5y^2 - 10y\right]_1^{10} = \pi \cdot (500 - 100 - 5 + 10) = \pi \cdot 405.$$

Damit hat der Porzellantiegel ein Volumen von $V_P = V_1 - V_2 = \pi \cdot 1595$.

Das Quecksilber-Volumen V_Q erhält man analog zu V_2, indem man den gleichen Integranden (sprich: Fläche der jeweiligen Kreisscheibe bis zum inneren Rand des Porzellantiegels) vom inneren Grund des Tiegels bei $y = 1$ bis eben zur Höhe $1 + 1 = 2$ integriert. Dabei kommt der Unterschied dadurch zu Stande, dass das Quecksilber genau die Höhe von einem Zentimeter einnimmt. Es gilt also

$$V_Q = \pi \cdot \left[5y^2 - 10y\right]_1^2 = \pi \cdot (20 - 20 - 5 + 10) = \pi \cdot 5.$$

Der mit Quecksilber befüllte Porzellantiegel hat eine in Gramm gemessene Masse von

$$m_P = 2{,}5 \cdot V_P + 13{,}5 \cdot V_Q = \pi \cdot \left(\frac{5}{2} \cdot 1595 + \frac{27}{2} \cdot 5\right) = \pi \cdot \frac{7975 + 135}{2} = \pi \cdot \frac{8110}{2} = \pi \cdot 4055.$$

Hat der mit Quecksilber befüllte Porzellantiegel einen Tiefgang von $t > 0$, so verdrängt er Wasser mit einem Volumen von

$$V_W = \int_{y=0}^{t} \pi \cdot 40y \mathrm{d}y = \left[\pi \cdot 20y^2\right]_0^t = \pi \cdot 20t^2,$$

was eine Masse m_W von $\pi \cdot 20t^2$ g besitzt. Da bei einem schwimmendem Körper dessen Masse genau der des verdrängten Wassers entspricht, gilt $m_P = m_W$, also $20t^2 = 4055$ bzw. $t = \frac{\sqrt{811}}{2} \approx 14{,}24$ cm, was mehr ist als die Höhe des Tiegels, sodass dieser vollständig untergeht.

Aufgabe 011112:
Ein Dampfer fährt auf einem Fluss von A nach B 3 Stunden und bei gleicher Maschinenleistung von B nach A $4\frac{1}{2}$ Stunden. Wie lange braucht ein nur von der Strömung getriebenes Fahrzeug für den Weg von A nach B?

Lösung von Korinna Grabski:
In beiden Fahrtrichtungen auf dem Fluss können wir das Weg-Zeit-Gesetz der gleichförmigen Bewegung $s = vt$ annehmen. Für die Fahrt in Strömungsrichtung gilt damit $v = v_D + v_S$, für die Fahrt entgegen der Strömung gilt $v = v_D - v_S$, wobei v_D die Eigengeschwindigkeit des Dampfers und v_S die Strömungsgeschwindigkeit des Flusses ist. Es ist also

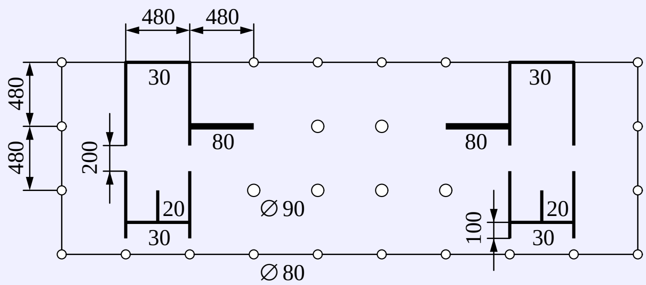
$$s = (v_D + v_S) \cdot (3h) = (v_D - v_S) \cdot (4{,}5h)$$
$$v_D = \frac{4{,}5h + 3h}{4{,}5h - 3h} v_S = 5v_S$$

und damit $s = (v_D + v_S) \cdot (3h) = 6v_S \cdot (3h)$. Für ein Boot, das nur mit der Strömung treibt, gilt $s = v_S t$; mit obiger Gleichung also

$$s = 6v_S \cdot (3h) = v_S t$$

Daraus folgt die Fahrzeit für ein nur von der Strömung getriebenes Fahrzeug von $t = 18$ h.

Aufgabe 021211:
Das „Haus des Lehrers“ in Berlin ist ein monolithischer Stahlbetonskelettbau. Der (idealisierte!) Horizontalquerschnitt durch das Erdgeschoß zeigt die wichtigsten aus Stahlbeton gefertigten Teile.



Die Höhe des Erdgeschosses beträgt 6,00 m, die vier eingezeichneten 2,00 m breiten Zugänge zum Treppenhaus sind jeweils 2,15 m hoch. Sämtliche Achsmaße betragen 4,80 m. Berechnen Sie den Bedarf an Beton für das gesamte Erdgeschoss! Dabei bleibt die Bewehrung unberücksichtigt.

Lösung von Eckard Specht:
Die Grundfläche für eine Höhe von 6 m beträgt:
20 Säulen mit 0,9 m Durchmesser, 6 Säulen mit 0,8 m Durchmesser, 9,6 m Wände der Stärke 0,8 m, 31,6 m Wände der Stärke 0,3 m und 4,8 m Wände der Stärke 0,2 m, insgesamt ein Volumen von 248,8 m^3. Hinzu kommen noch 8 m der Wandstärke 0,3 m und der Höhe 3,85 m über den Zugängen zum Treppenhaus, also 9,2 m^3.
Somit werden ca. 258 m^3 Beton benötigt.

Aufgabe 031112:
Eine Tasse enthält Milch und eine andere die gleiche Menge Kaffee. Man nimmt aus der ersten Tasse einen Löffel Milch und gießt ihn in die zweite Tasse. Man rührt um und gießt jetzt wieder einen Löffel (gleiche Menge wie oben) „Milchkaffee“ in die erste Tasse.
a) Befindet sich jetzt in der ersten Tasse mehr Kaffee als in der zweiten Tasse Milch? (Exakte Begründung der Antwort!)
b) Welches Ergebnis erhält man, wenn sich ursprünglich in der zweiten Tasse doppelt soviel Kaffee befand wie in der ersten Tasse Milch? (Begründung!)

Lösung von Korinna Grabski:
a) Zu Beginn enthält die erste Tasse a Einheiten Milch, und die zweite Tasse a Einheiten Kaffee. Ein Löffel enthält $x \cdot a$ Einheiten Flüssigkeit, wobei $0 < x < 1$ gilt.
Jetzt wird ein Löffel von Tasse 1 nach Tasse 2 gegeben. Dann enthält die erste Tasse $a - x \cdot a$ Einheiten Milch, und die zweite Tasse a Einheiten Kaffee und $x \cdot a$ Einheiten Milch.
Jetzt wird ein Löffel von Tasse 2 nach Tasse 1 gegeben. Dieser enthält $x \cdot a$ Einheiten Flüssigkeit.
Wichtig ist jetzt die Zusammensetzung der Flüssigkeit. In der 2. Tasse gibt es $\frac{a}{a+x\cdot a} = \frac{1}{1+x}$ Anteile Kaffee und $x \cdot \frac{a}{a+x\cdot a} = \frac{x}{1+x}$ Anteile Milch.
Damit enthält der Löffel

$$\frac{1}{1+x} \cdot x \cdot a = x \cdot \frac{a}{1+x}$$

Einheiten Kaffee und

$$\frac{x}{1+x} \cdot x \cdot a = x^2 \cdot \frac{a}{1+x}$$

Einheiten Milch. Somit enthält die erste Tasse jetzt $a - x \cdot a + x^2 \cdot \frac{a}{1+x}$ Einheiten Milch und $x \cdot \frac{a}{1+x}$ Einheiten Kaffee, und die zweite Tasse $a - x \cdot \frac{a}{1+x}$ Einheiten Kaffee und $x \cdot a - x^2 \cdot \frac{a}{1+x}$ Einheiten Milch.
Jetzt soll der Kaffee in der ersten Tasse mit der Milch in der zweiten Tasse verglichen werden. In der zweiten Tasse befinden sich

$$x \cdot a - x^2 \cdot \frac{a}{1+x} = \frac{x \cdot a + x^2 \cdot a - x^2 \cdot a}{1+x} = x \cdot \frac{a}{1+x}$$

Einheiten Milch. Das ist genauso viel, wie Kaffee in der ersten Tasse.
Es befindet sich also gleichviel Kaffee in der ersten Tasse wie Milch in der zweiten Tasse.

b) Analog zur ersten Teilaufgabe kann hier das Ergebnis bestimmt werden. Die Tasseninhalte sehen wie folgt aus:

Anfangszustand:	Tasse 1:	a Einheiten Milch
	Tasse 2:	$2a$ Einheiten Kaffee
Nach dem 1. Umgießen:	Tasse 1:	$a - xa$ Einheiten Milch
	Tasse 2:	$2a$ Einheiten Kaffee, xa Einheiten Milch

Nach dem 2. Umgießen: Löffel: $\frac{2xa}{2+x}$ Einheiten Kaffee, $\frac{x2a}{2+x}$ Einheiten Milch

Tasse 1:	$a - xa + \frac{x2a}{2+x}$ Einheiten Milch, $\frac{2xa}{2+x}$ Einheiten Kaffee
Tasse 2:	$2a - \frac{2xa}{2+x}$ Einheiten Kaffee, $xa - \frac{x^2a}{2+x} = \frac{2xa}{2+x}$ Einheiten Milch

Auch hier befindet sich gleichviel Kaffee in der ersten Tasse wie Milch in der zweiten Tasse.

Aufgabe 041111:
Ein Betrieb liefert jährlich an die Betriebe (1) und (2) 600 t und 400 t eines bestimmten Erzeugnisses. Für den Transport stehen die LKW 1 und 2 mit Nutzlasten von 1 Mp bzw. 4 Mp zur Verfügung. Der kleinere Wagen steht jährlich höchstens für 300 Fahrten, der größere für 200 Fahrten zur Verfügung. Die Transportkosten in M betragen je Fahrt für

	LKW 1	LKW 2
zur Fahrt nach Betrieb 1	10	20
zur Fahrt nach Betrieb 2	30	60

Wie viele Fahrten muss jeder Wagen zu jedem der beiden Betriebe im Jahr durchführen, wenn die gesamten Transportkosten möglichst gering sein sollen?

Lösung von W. Engel und U. Pirl:
Die Anzahl der Fahrten pro Jahr des LKW L_i zum Betrieb B_j wird mit x_{ij} bezeichnet ($i = 1, 2; j = 1, 2$). Es gilt dann:

$$x_{11} + 4x_{21} \geq 600 \geq x_{11} + 1 + 4(x_{21} - 1) \tag{1}$$
$$x_{12} + 4x_{22} \geq 400 \geq x_{12} + 1 + 4(x_{22} - 1) \tag{2}$$
$$x_{11} + x_{12} \leq 300 \tag{3}$$
$$x_{21} + x_{22} \leq 200 \tag{4}$$
$$x_{ij} \geq 0 \quad \text{und ganzzahlig} \tag{5}$$

Bezeichnet man die gesamten Transportkosten mit K, dann gilt

$$K = 10x_{11} + 20x_{21} + 30x_{12} + 60x_{22} \tag{6}$$

Es ist zu untersuchen, für welche Werte x_{ij} die Kosten unter Berücksichtigung der Beziehungen (1) bis (5) möglichst gering werden. Aus (1) folgt:

$$600 - 4x_{21} \leq x_{11} \leq 603 - 4x_{21} \tag{7}$$

und aus (2)

$$400 - 4x_{22} \leq x_{12} \leq 403 - 4x_{22} \tag{8}$$

Wegen (7) und (8) folgt aus (6)

$$18000 - 20x_{21} - 60x_{22} \leq K \leq 18120 - 20x_{21} - 60x_{22}$$

und hieraus wegen (4)

$$14000 - 40x_{22} \leq K \leq 18120 - 20x_{21} - 60x_{22} \tag{9}$$

Aus (8) folgt $x_{22} \leq \frac{403 - x_{12}}{4}$ und daraus wegen (5) $x_{22} \leq 100 \quad (10)$.
Wegen (9) werden die Transportkosten genau dann möglichst gering, wenn x_{22} möglichst groß, wenn also x_{22} wegen (10) gleich 100 ist. Aus den Bedingungen der Aufgabe ergibt sich daher $x_{12} = 0$. Daher kann K keinen kleineren Wert als 1000 annehmen. Für $K = 1000$ müsste wegen (6)

$$10x_{11} + 20x_{21} = 4000, \qquad \text{also} \qquad x_{11} + 2x_{21} = 400 \tag{11}$$

sein. Aus (1) und (11) folgt dann weiter $x_{21} \leq 100$ und aus (4) wegen $x_{22} = 100 : x_{21} \leq 100$. Daher müsste $x_{21} = 100$ und wegen (11) $x_{11} = 200$ sein. Daher kann nur in dem Fall

	L_1	L_2
Anzahl der jährlichen Fahrten zu B_1	200	100
Anzahl der jährlichen Fahrten zu B_2	0	100

$K = 1000$ sein. Wie man leicht nachprüft, ist in diesem Fall auch tatsächlich $K = 1000$, womit die Aufgabe vollständig gelöst ist.

II Runde 2

Aufgabe V01220:
Berechnen Sie die innere Maße einer zylindrischen Roheisenpfanne von 20 t Fassungsvermögen, die durch geeignete Formgebung möglichst geringe Wärmeverluste aufweisen soll!
Auf Grund von Erfahrungen nimmt man an, dass die Wärmeverluste der Oberfläche des flüssigen Roheisens (auf die Flächeneinheit bezogen) das Doppelte der Wärmeverluste durch Wand- und Bodenfläche betragen. (Wichte des flüssigen Roheisens: 7,2 Mp/m^3)

Lösung von cyrix:
Mit der Dichte von $7{,}2\frac{t}{m^3}$ des Roheisens nimmt dieses einen Zylinder mit Volumen $V = \frac{20}{7{,}2}m^3$ ein. Sei $r > 0$ der in Metern gemessene Innenradius der Roheisenpfanne und $h > 0$ entsprechend die Höhe des eingefüllten flüssigen Roheisens, so gilt also $\pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{20}{7{,}2}$ bzw. $h = \frac{20}{7{,}2\cdot\pi\cdot r^2}$. Zu minimieren ist nun der Wärmeverlust, der proportional zur Oberfläche des vom Roheisen gebildeten Zylinders ist, wobei die Deckfläche als Oberfläche doppelt zu werten ist. Also ist der Term $\pi \cdot (2rh + 3r^2)$ bzw. äquivalent der Term $3r^2 + 2rh$ zu minimieren. Setzt man die zuvor erhaltene Bedingung an r ein, erhält man als zu minimierenden Term also

$$f(r) = 3 \cdot r^2 + 2 \cdot \frac{20}{7{,}2 \cdot \pi} \cdot r^{-1}.$$

Diese Funktion in Abhängigkeit von r besitzt als Ableitung die Funktion

$$f'(r) = 6r - 2 \cdot \frac{20}{7{,}2 \cdot \pi} \cdot r^{-2},$$

welche genau für diejenigen $r > 0$ verschwindet, für die die Gleichung

$$3r^3 = \frac{20}{7{,}2 \cdot \pi} \qquad \text{bzw.} \qquad r = \left(\frac{20}{3 \cdot 7{,}2 \cdot \pi}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 0{,}6655$$

gilt. Eine Grenzbetrachtung mit $r \to 0$ bzw. $r \to \infty$ zeigt, dass $f(r)$ dann jeweils gegen unendlich geht, also an der einzigen kritischen Stelle ein globales Minimum besitzen muss.
Also hat die Roheisenpfanne einen Innenradius von $r \approx 0{,}6655$ m und eine Innenhöhe von $h = \frac{20}{7{,}2\cdot\pi\cdot r^2} \approx 6{,}272$ m.

Aufgabe V01221:
Der Querschnitt eines Abwasserkanals soll die Form eines Rechtecks mit aufgesetztem Halbkreis erhalten.
Welche Höhe und Breite wird man ihm geben, wenn der Flächeninhalt des Querschnitts 1 m^2 beträgt und die Herstellungskosten möglichst gering werden sollen?
Es soll dabei berücksichtigt werden, dass das Baugelände nur eine Höhe von höchstens 0,9 m zulässt.

Lösung von cyrix:
Es sei $h > 0$ die in Metern gemessene Höhe und $b > 0$ analog die Breite des Rechtecks. Dann beträgt seine in Quadratmetern gemessene Querschnittsfläche also $1 = h \cdot b + \frac{\pi}{8} \cdot b^2$ und damit $h = b^{-1} - \frac{\pi}{8} \cdot b$. Weiterhin besitzt der Kanal eine in Metern gemessene Höhe von $0{,}9 \geq h + \frac{b}{2}$.

Die Produktionskosten hängen monoton vom Umfang der Querschnittsfläche des Kanals ab, sodass diese und mit ihr der Term $2h + b + \frac{\pi}{2} \cdot b$ unter den genannten Nebenbedingungen zu minimieren ist. Setzen wir die zuvor aus der Größe der Querschnittsfläche erhaltene Beziehung zwischen h und b ein, so erhalten wir den Term

$$f(b) = 2b^{-1} - \frac{\pi}{4} \cdot b + b + \frac{\pi}{2} \cdot b = 2b^{-1} + \frac{\pi + 4}{4} \cdot b,$$

welcher die Ableitung $f'(b) = \frac{\pi+4}{4} - 2b^{-2}$ besitzt, die genau für $b = \sqrt{\frac{\pi+4}{8}}$ verschwindet. Eine kurze Betrachtung für $b \to 0$ bzw. $b \to \infty$ zeigt, dass $f(b)$ in beiden Fällen gegen unendlich geht, also bis zur einzigen kritischen Stelle monoton fallend und ab dann monoton steigend ist; an der kritischen Stelle also ein globales Minimum vorliegt.

Die Produktionskosten werden also – ohne Beachtung der Höhenbedingung – minimal, wenn $b = \sqrt{\frac{\pi+4}{8}} \approx 0{,}945$ m und $h = b^{-1} - \frac{\pi}{8} \cdot b \approx 0{,}687$ m betragen würde. Dann jedoch hätte der Kanal eine Gesamthöhe von mehr als 0,9 m. Also muss die Breite b des Kanals soweit verändert werden, dass diese Höhenbedingung eingehalten wird.
Da jede Vergrößerung von b über den kritischen Wert hinaus bzw. jede Verkleinerung unter diesen den Umfang der Querschnittsfläche und damit die Produktionskosten weiter erhöht, werden sie unter Beachtung der Höhenbedingung dann minimal, wenn in der Höhenbedingung der Gleichheitsfall vorherrscht.

Also können wir nun zusätzlich $0{,}9 = h + \frac{b}{2}$ annehmen. Setzen wir dies in die aus der Querschnittsfläche erhaltenen Beziehung zwischen h und b ein, so erhalten wir die Gleichung

$$0{,}9 - \frac{b}{2} = h = b^{-1} - \frac{\pi}{8} \cdot b \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{4-\pi}{8} \cdot b^2 - 0{,}9b + 1 = 0$$

was die beiden Lösungen

$$b_1 = \frac{3{,}6}{4-\pi} + \sqrt{\frac{3{,}6^2}{(4-\pi)^2} - \frac{8}{4-\pi}} \approx 7 \qquad \text{und} \qquad b_2 = \frac{3{,}6}{4-\pi} - \sqrt{\frac{3{,}6^2}{(4-\pi)^2} - \frac{8}{4-\pi}} \approx 1{,}318$$

besitzt. Die erste Lösung entfällt, da nur ein negatives h dann die Höhenbedingung erfüllen könnte, was ausgeschlossen ist. Also muss $b = b_2$ gelten und wir erhalten $h = 0{,}9 - \frac{b}{2} \approx 0{,}241$.
Damit muss das Rechteck, welches dem Kanal zu Grunde liegt, eine Breite von ca. 1,318 m und eine Höhe von ca. 0,241 m besitzen.

Aufgabe V11121:
Bei Bodenuntersuchungen in der Agrochemie wendet man die sogenannte stufenweise Verdünnung an. Man schwemmt 1 cm^3 einer Bodenprobe (x) mit 10 cm^3 chemisch reinem Wasser (y) auf. Von der so erhaltenen Mischung nimmt man wieder 1 cm^3 und schwemmt es ebenfalls mit 10 c^3 reinem Wasser auf!
a) Wie oft muss man diese Aufschwemmung vornehmen, um ein Mischverhältnis von etwa 1 : 2000000 zu erreichen?
b) Wieviel Bakterien sind dabei in 1 cm^3 der Aufschwemmung durchschnittlich vorhanden, wenn 1 cm^3 der unverdünnten Bodenprobe etwa 10 Millionen Bakterien enthält ?

Lösung von OlgaBarati:
a) Mit $x = 1$ cm^3, $y = 10$ cm^3, $x + y = 11$ cm^3 ist das Verhältnis 1:10 und für das Mischungsverhältnis 1:2000000 ergibt sich damit:

$$(\frac{1}{11})^n = \frac{1}{2000000} \qquad ; \qquad n = \frac{\log(2000000)}{\log(11)} \approx 6$$

b)

$$n_{Bak} = \frac{10000000}{2000000} = 5$$

Aufgabe V11122:
Der Octavia-Touring-Sportwagen der Skoda-Automobilwerke Prag erreicht in 14 Sekunden nach dem Start eine Geschwindigkeit von 80 $\frac{km}{h}$.
a) Wieviel Kilometer hat er in dieser Zeit zurückgelegt (gleichmäßige Beschleunigung vorausgesetzt)?
b) In welcher Zeit hat er, vom Zeitpunkt des Startes ab gerechnet, 1 km zurückgelegt? (Es sei angenommen, dass der Wagen nach dem Erreichen der Geschwindigkeit von 80 $\frac{km}{h}$ mit dieser Geschwindigkeit weiterfährt.)

Lösung von svrc:
a) Wir suchen zuerst die konstante Beschleunigung

$$a(t) = a_0$$

für alle $0\text{s} \leq t \leq 14\text{s}$. Es gilt für die Geschwindigkeit

$$v(t) = a_0 t$$

für alle $0\text{s} \leq t \leq 14\text{s}$ wegen $v(0\text{s}) = 0\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Da

$$v(14\text{s}) = a_0 \cdot (14\text{s}) = 80\frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{80000}{3600}\frac{\text{m}}{\text{s}} = \frac{200}{9}\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

ist, folgt

$$a_0 = \left(\frac{200}{9}\frac{\text{m}}{\text{s}}\right) \cdot \frac{1}{14\text{s}} = \frac{100}{63}\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

und somit für die zurückgelegte Wegstrecke nach 14 Sekunden

$$w(14\text{s}) = \frac{a_0}{2} \cdot (14\text{s})^2 = \frac{19600}{126}\text{m} = \frac{1400}{9}\text{m} \approx 0{,}156\text{km}.$$

Also legt das Fahrzeug in der Beschleunigungsphase eine Strecke von ungefähr 0,156km zurück.

b) Für die Gesamtstrecke von 1km gilt

$$w_{\text{gesamt}} = \frac{1400}{9}\text{m} + \left(\frac{200}{9}\frac{\text{m}}{\text{s}}\right) \cdot t_2 = \frac{9000}{9}\text{m}.$$

Somit folgt

$$\left(\frac{200}{9}\frac{m}{s}\right) \cdot t_2 = \frac{7600}{9}\text{m}$$

und daher $t_2 = 38\text{s}$. Damit ist 1km entsprechend nach

$$t_{\text{gesamt}} = 14\text{s} + 38\text{s} = 52\text{s}$$

zurückgelegt.

Aufgabe V11131:
Bei der volkswirtschaftlichen Planung werden auch mathematische Methoden angewandt. Im folgenden ein stark vereinfachtes Beispiel aus unserer sozialistischen Bauwirtschaft:
In einer Stadt sollen im Jahre 1962 Wohnungen gebaut werden, und zwar vom Typ A (Ziegelbauweise) und vom Typ B (Montagebauweise). Es werden je Wohnungseinheit benötigt:

	Zement	Wandfertigteile
Typ A	5,23 t	-
Typ B	4,19 t	22,1 t

Insgesamt stehen zur Verfügung 8000 t Zement und 24000 t Wandfertigteile. Nimmt man an, dass x Wohnungen vom Typ A und y Wohnungen vom Typ B gebaut werden, so müssen die folgenden Ungleichungen erfüllt sein:

$$5{,}23x + 4{,}19y \leq 8000 \qquad ; \qquad 22y \leq 24000$$

Dabei soll die Gesamtzahl der Wohnungen $(x + y)$ möglichst groß sein.
Wie groß ist die Zahl x der Wohnungen vom Typ A und die Zahl y der Wohnungen vom Typ B?

Lösung von svrc:
Vom Materialverbrauch ist es am günstigsten, zunächst das Baumaterial für die Wohnungen vom Typ B zu verwenden. Es ist

$$y \leq \frac{24000}{22} \approx 1090{,}9$$

und somit werden 1090 Wohnungen vom Typ B gebaut. Damit muss

$$\begin{aligned} 5{,}23x + 4{,}19y &\leq 8000; \\ 5{,}23x &\leq 3432{,}9; \\ x &\leq \frac{3432{,}9}{5{,}23} \approx 656{,}386 \end{aligned}$$

sein, also werden 656 Wohnungen vom Typ A gebaut. Es muss also $x = 656$ und $y = 1090$ gelten.

Wollte man nur Wohnungen vom Typ A bauen, wäre $x < 1600$ und damit ist oben der günstigste Fall beschrieben, um die Gesamtanzahl zu maximieren.

Aufgabe V11223:
Diskutieren Sie die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & \text{für } |x| > 1 \\ x^3 & \text{für } |x| \leq 1 \end{cases}$$

Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von der Bildkurve der Funktion, der Abszissenachse und den Geraden $x = -2$ und $x = 2$ begrenzt wird!

Lösung von svrc:
1) Wir diskutieren die Funktion. Es gilt

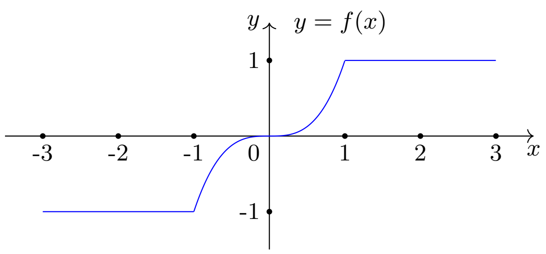
$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } x < -1, \\ x^3 & \text{für } -1 \leq x \leq 1, \\ 1 & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

für die Funktion. Damit ist die Funktion f für $x < -1$ konstant mit Funktionswert -1. An der Stelle $x = -1$ ist der Übergang stetig, aber nicht differenzierbar. Für $-1 \leq x \leq 1$ gilt die Vorschrift $f(x) = x^3$ und somit liegt an $x = 0$ ein Wendepunkt vor, da $f''(0) = 6 \cdot 0 = 0$ und $f'''(0) = 6 > 0$ gilt. An der Stelle $x = 1$ ist der Übergang stetig, aber nicht differenzierbar. Ferner ist die Funktion f für $x > 1$ konstant mit Funktionswert 1.

Die Funktion f ist punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung, da

$$-f(-x) = f(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.



2) Wegen der Punktsymmetrie kann der betrachtete Flächeninhalt nach

$$A_{\text{gesamt}} = 2 \cdot \int_0^2 f(x)\, \mathrm{d}x = 2 \cdot \left\{ \int_0^1 x^3\, \mathrm{d}x + \int_1^2 1\, \mathrm{d}x \right\}$$

berechnet werden. Daher gilt

$$A_{\text{gesamt}} = 2 \cdot \left\{ \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^1 + 1 \right\} = 2 \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{2}.$$

Aufgabe 021121:
Auf dem internationalen Symposium in Moskau über Probleme der höheren technischen und humanistischen Bildung erklärte der sowjetische Nobelpreisträger Nikolai Semjonow, dass mit dem in der UdSSR erreichten Wachstumstempo die jährliche Erzeugung von Elektroenergie in 100 Jahren auf das 10000fache gesteigert werden kann.
a) Welche jährliche Steigerung (in Prozent) liegt dieser Perspektive zugrunde?
b) Wie groß war die bisherige durchschnittliche Steigerung (in Prozent) der Elektroenergie in der UdSSR in den Jahren 1955 bis 1961? (1955 wurden 170 Mrd. kWh und 1961 insgesamt 327 Mrd. kWh erzeugt.)
Vergleichen Sie die Ergebnisse!

Lösung von Carsten Balleier:

a) Wenn die Energieerzeugung E ein konstantes prozentuales Jahreswachstum x hat, erhält man die Gleichung $10000E = E \cdot (1+x)^{100}$.
Die Lösung ist $x = \sqrt[100]{10000} - 1 = 9{,}65\%$.

b) Die Gleichung lautet: $327 = 170 \cdot (1+y)^6$.
Die Lösung ist $y = \sqrt[6]{\frac{327}{170}} - 1 = 11{,}53\%$.

Vergleich:
$y > x$, das tatsächliche Wachstum ist größer als das angenommene.

III Runde 3

Aufgabe V11231:
In einem volkseigenen Großbetrieb der Elektroindustrie werden jährlich 12000 Stück eines bestimmten Halbfabrikats von einem Zulieferbetrieb zum Preise von 1,00 DM je Stück bezogen. Die Bestellung erfolgte bisher zweimal im Jahr, und zwar am 1. Januar und am 1. Juli.
Die Verwaltungskosten für jede Bestellung (Ausschreiben und Versenden der Bestellung, Überwachung des Liefertermins, Rechnungsprüfung, Verbuchung usw.) betragen 30,00 DM. Die Kosten der Lagerhaltung (Raumkosten, Verwaltung, „Schwund“ durch Verderben und Beschädigung usw.) betragen jährlich 20 % des Wertes des durchschnittlich am Lager befindlichen Materials. Die Kosten für Bestellung und Lagerhaltung betrugen also jährlich

2 Bestellungen ... 60,00 DM
Kosten der Lagerhaltung 20 % vom durchschnittlichen Lagerbestand (3000 Stück), also 20 % von 3000,00 DM, das sind 600,00 DM
Zusammen 660,00 DM

In einer Produktionsberatung wird vorgeschlagen, die Kosten dadurch zu senken, dass viermal im Jahr die für jeweils ein Quartal benötigte Menge (3000 Stück) bestellt wird.
a) Wie hoch sind nach diesem Vorschlag die Kosten?
b) Bei welcher Zahl von Bestellungen entstehen die geringsten Kosten? Wie hoch sind in diesem Fall die Kosten?

Hinweis: Erst im Jahr 1964 wurde in der DDR die Bezeichnung „Deutsche Mark“ in „Mark der Deutschen Notenbank“ (MDN) und anschließend 1968 in „Mark“ geändert.

Lösung von OlgaBarati:
Seien x die Bestellungen pro Jahr und die jährlichen Gesamtkosten, bestehend aus den Bestellkosten und den Lagerkosten für dieses Halbfabrikat,

$$K_G = K_B + K_L = 30x + \frac{1200}{x}$$

so ergeben sich die Kosten für a)

$$K_G = K_B + K_L = 30 \cdot 4 + \frac{1200}{4} = 420.$$

und die geringsten Gesamtkosten für b)

$$K'_G = 30 - \frac{1200}{x^2}$$
$$30x^2 - 1200 = 0$$
$$x = [\sqrt{40}] = 6$$

Für $x = 6$ eingesetzt erhält man tatsächlich der geringsten Wert von 380. Mit $x = 5$, $x = 7$ steigen die Kosten bereits wieder an.

Aufgabe V11232:
Vom Fenster (Breite 100 cm, Höhe 85 cm) eines fahrenden Zuges aus scheinen Regentropfen; bei völliger Windstille; in Richtung der Fensterdiagonalen zu fallen.
Wie groß ist die Fallgeschwindigkeit der Tropfen (in $\frac{m}{s}$), wenn der Zug in 3 Minuten 3 km zurücklegt?

Lösung von MontyPythagoras:
Da der Zug 3000m in 180s zurücklegt, beträgt seine Geschwindigkeit $v_Z = \frac{3000\text{m}}{180\text{s}}$. Das Verhältnis der Tropfen-Fallgeschwindigkeit v_T zur Zuggeschwindigkeit muss gleich dem Verhältnis der Fensterhöhe zur -breite sein. Daher ist die Fallgeschwindigkeit:

$$v_T = \frac{85}{100} \cdot \frac{3000\text{m}}{180\text{s}} = 14{,}17\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Aufgabe 011131:
Ein Kraftwagen, der mit einer Geschwindigkeit von 90 $\frac{km}{h}$ fährt, wird gebremst und kommt nach 70 m zum Stehen.
Ist die in der Straßenverkehrsordnung vorgeschriebene Bremsverzögerung von mindestens 4,0 $\frac{m}{s^2}$ eingehalten worden oder nicht? Begründen Sie Ihre Feststellung!

Lösung von Steffen Weber:
Nach den bekannten Formeln für die gleichmäßig beschleunigte Bewegung $\Delta s = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t$ und $\Delta v = at$ folgt

$$\Delta s = \frac{-v_0}{2}t + v_0 t \Rightarrow t = \frac{2\Delta s}{v_0} \Rightarrow a = -\frac{v_0^2}{2\Delta s}$$

Mit den gegebenen Werte $v_0 = 90\frac{km}{h} = 25\frac{m}{s}$ und $\Delta s = 70$ m ist die Bremsverzögerung $-a \approx 4{,}464\frac{m}{s^2}$, d. h. die vorgeschriebene Bremsverzögerung wurde eingehalten.

Aufgabe 011133:
In einem Betrieb werden Ventilatoren hergestellt. Die Kosten für Material, Lohn und Energie betrugen bisher 19,20 M je Ventilator.
Eine Arbeitsgemeinschaft von Arbeitern und Ingenieuren macht den Vorschlag, durch Umbau der vorhandenen Maschinen und durch Anschaffung einer neuen Maschine die Arbeitszeit und die Materialkosten wesentlich zu senken, so dass die oben genannten Kosten je Stück nur noch 13,15 M je Ventilator betragen.
Für den Umbau und die Anschaffung der neuen Maschine müssen aber insgesamt 13500,- M aufgewandt werden.
Wieviel Ventilatoren müssten mindestens jährlich hergestellt werden, damit das neue Verfahren rentabel wird?
Dabei soll ein Drittel der Kosten für die neuen Einrichtungen jährlich abgeschrieben werden, d. h. um diesen Betrag müssen sich die Gesamtkosten verringern.

Lösung von Korinna Grabski:
$\text{Preis}_{\text{alt}} = 19{,}20\frac{M}{\text{Ventilator}}$; $\text{Preis}_{\text{neu}} = 13{,}15\frac{M}{\text{Ventilator}}$; Gesamtkosten = 13500 M;

$$\text{Jahreskosten} = \frac{13500M}{3} = 4500M$$

$$19{,}20\frac{M}{\text{Ventilator}} \cdot x = 4500M + 13{,}15\frac{M}{\text{Ventilator}} \cdot x \Rightarrow x = 743{,}8 \text{ Ventilatoren}$$

Aufgabe 101236:
Es sei M_1 die Menge aller Punkte, deren Koordinaten x, y in einem ebenen rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem die folgenden Ungleichungen erfüllen (x, y reell):

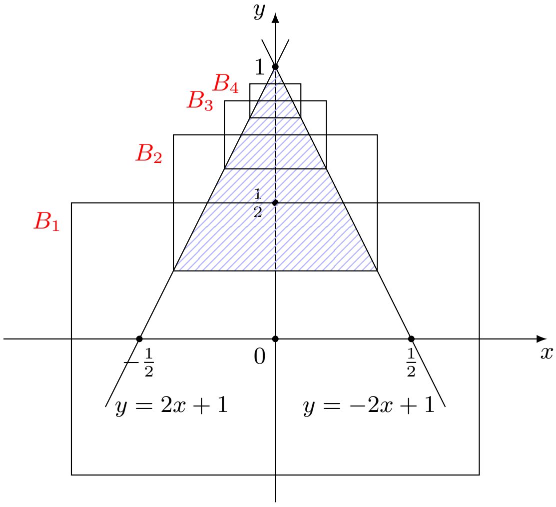
$$y \geq 0 \qquad (1)$$
$$y - 2x \leq 1 \qquad (2)$$
$$y + 2x \leq 1 \qquad (3)$$

Ist ferner n eine positive ganze Zahl, so sei B_n die Menge aller Punkte, für deren Koordinaten die folgenden Ungleichungen gelten:

$$\frac{2^n - 3}{2^n} < y < \frac{2^n - 1}{2^n} \qquad (4)$$
$$-\frac{3}{2^{n+1}} < x < \frac{3}{2^{n+1}} \qquad (5)$$

a) Stellen Sie M_1, B_1, B_2, B_3, B_4 graphisch dar.
b) Es ist zu beweisen, dass es einen Punkt $P \in M_1$ gibt, der in keiner der Punktmengen B_n enthalten ist.
c) Es sei M_2 die Punktmenge, für die (1), (2), (3) und $y \leq 1 - \frac{1}{1000}$ gilt.
Es ist zu beweisen, dass es ein n_1 gibt mit der Eigenschaft, dass jedes Element von M_2 auch Element der Vereinigungsmenge $B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_{n_1}$ ist.
Ermitteln Sie die kleinste Zahl n_1, die diese Bedingung erfüllt?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Die Menge M_1 besteht aus allen Punkten der schraffiert gezeichneten Dreiecksfläche, einschließlich der Randpunkte. Die Mengen B_1, B_2, B_3, B_4 bestehen jeweils aus allen im Innern der gezeichneten Rechtecke gelegenen Punkte (also ohne die jeweiligen Randpunkte).



b) Wegen (1), (2), (3) gilt $P_1(0;1) \in M_1$. Die Abstände der oberen Seiten der B_n enthaltenden Rechtecke von der x-Achse sind

$$a_n = \frac{2^n - 1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

Für alle $n = 1,2,...$ gilt $a_n < 1$, also $P_1 \notin B_n$ $(n = 1,2,3,...)$. Der Punkt $(0;1)$ gehört zu M_1, da der die Ungleichungen (1), (2), (3) erfüllt, wie man aus $1 \geq 0$, $1 - 2 \cdot 0 \leq 1$, $1 + 2 \cdot 0 \leq 1$, ersieht.

Andererseits ist dieser Punkt für kein $n = 1,2,...$ in B_n enthalten, da für jedes $n = 1,2,...$ die Beziehung $1 > 1 - \frac{1}{2^n}$ gilt, also die rechte Ungleichung aus (4) von diesem Punkt nicht erfüllt wird.

c) 1. Wir zeigen: Ist eine positive ganze Zahl $n_0 \leq 9$, so hat sie nicht die Eigenschaft, dass jedes Element von M_2 auch Element von $B_1 \cup ... \cup B_{n_0}$ ist.

Beweis:
Zu M_2 gehört auch der Punkt $(0; \frac{999}{1000})$, da er die Ungleichungen (1), (2), (3), (6) erfüllt. Andererseits ist dieser Punkt für kein $n = 1,...,n_0$ in B_n enthalten, da für jedes $n = 1,...,n_0$, die Beziehung $1 - \frac{1}{1000} > 1 - \frac{1}{2^n}$ gilt, also die rechte Ungleichung aus (4) von diesem Punkt nicht erfüllt wird.

2. Wir zeigen: Ist eine ganze Zahl $n_1 \geq 10$, so hat sie die Eigenschaft, dass jedes Element von M_2 auch Element von $B_1 \cup ... \cup B_{n_0}$ ist.

Beweis:
Sei (x,y) irgendein Punkt aus M_2. Dann erfüllt er die Ungleichungen (1), (29, (3), (6). Aus (1), (6) folgt

$$\frac{1}{1000} \leq 1 - y \leq 1 \qquad \text{also} \qquad \frac{1}{2^{n_1}} < 1 - y \leq 1$$

Wegen

$$1 > \frac{1}{2^1} > \frac{1}{2^2} > ... > \frac{1}{2^{n_1}}$$

gibt es somit unter den Zahlen $n = 1,2,...,n:1$ eine, für die $\frac{1}{2^n} < 1 - y \leq \frac{1}{2^{n_1}}$ gilt. Für diese gilt dann erst recht

$$\frac{1}{2^n} < 1 - y < \frac{3}{2^n} \qquad \text{also} \qquad 1 - \frac{3}{2^n} < y < 1 - \frac{1}{2^n}$$

ferner wegen (2), (3) auch $y - 1 \leq 2x \leq 1 - y$, also

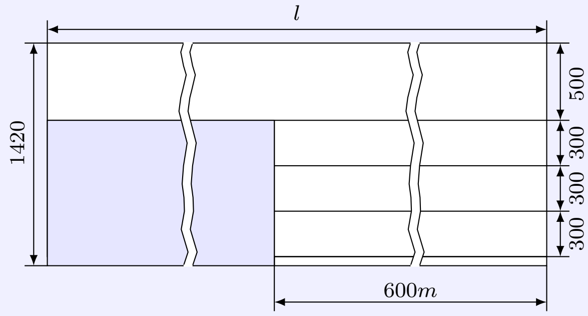
$$-\frac{3}{2^{n+1}} < x < \frac{3}{2^{n+1}}$$

und somit insgesamt $(x,y) \in B_n$, womit die Behauptung gezeigt ist.

3. Aus 2. folgt die zu beweisende Existenz einer Zahl n_1 mit der genannten Eigenschaft; aus 1. und 2. folgt, dass die gesuchte kleinste Zahl n_1 mit der genannten Eigenschaft die Zahl $n_1 = 10$ ist.

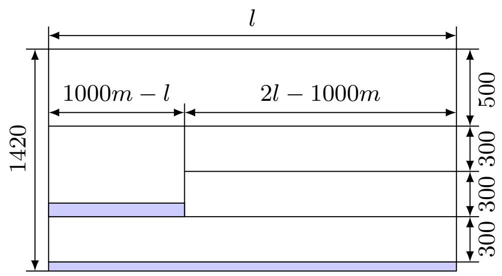
IV Runde 4

Aufgabe 011243:



Mit einer Rollenschere sollen aus Blechen von 1420 mm Breite rechteckige Bleche, und zwar mit einer Breite von 500 mm und einer Gesamtlänge von 1000 m sowie mit einer Breite von 300 mm und einer Gesamtlänge von 1800 m geschnitten werden. Bisher wurde nach der beigefügten Zeichnung geschnitten, in der die graue Fläche den Abfall darstellt, der ziemlich groß ist.
Eine sozialistische Brigade macht den Vorschlag, so zu schneiden, dass der Abfall erheblich geringer wird.
a) Wieviel Prozent beträgt der Abfall, wenn wie bisher geschnitten wird?
b) Wie muss die Brigade schneiden, damit der Abfall möglichst gering wird, und welche Gesamtlänge der Ausgangsbleche ist in diesem Fall erforderlich?
c) Wieviel Prozent beträgt jetzt der Abfall?

Lösung von Eckard Specht:



a) Der bisherige Abfall besteht aus zwei rechteckigen Flächen, wobei die größere 1000 m - 600 m = 400 m lang und 1,42 m - 0,5 m = 0,92 m breit ist und somit eine Fläche von 368 m^2 hat.
Die kleinere Fläche ist 600 m lang und 0,02 m breit, entsprechend 12 m^2.
Der Abfall beträgt also insgesamt 380 m^2, gemessen an der Gesamtfläche von 1420 m^2 sind das 26,8%.

b) Da die Gesamtbreite vorgegeben ist, kann zur Optimierung nur die Gesamtlänge l variiert werden. Dazu werden die Bleche mit einer Breite von 500 mm wie im Bild gezeigt auf zwei Bahnen aufgeteilt, wobei das kürzere Stück eine Länge von $1000m - l$ hat (eine Aufteilung auf drei Bahnen kommt wegen $3 \cdot 500mm > 1420$ mm nicht in Betracht).
Gleichzeitig wird der verbleibende Platz für zwei Bahnen der schmaleren Bleche genutzt, die dann jeweils eine Länge von $2l - 1000$ m haben.

Aus der gegebenen Gesamtlänge der schmaleren Bleche folgt nun $2(2l-1000m)+l = 5l-2000m = 1800m$ und daraus $l = 760$ m.

c) Der Abfall beträgt jetzt $240m \cdot 0{,}1m = 24m^2$ plus $760m \cdot 0{,}02m = 15{,}2m^2$, also insgesamt 39,2 m^2. Das sind nur noch 2,8% der Gesamtfläche.