Thema: Kombinatorik
Aufgaben und Lösungen
der I. bis IV. Runde
der Klassenstufen 5 bis 12
der Mathematik-Olympiaden
von 1960 bis 1994

Zentrales Komitee für die
Olympiaden Junger Mathematiker

unter Nutzung von Manuela Kugels
`https://www.olympiade-mathematik.de/`

zusammengestellt von Steffen Polster
`https://mathematikalpha.de`
Chemnitz, 2019/22

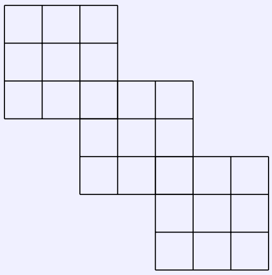
bearbeitet von Christian Hercher
Flensburg, 2022

I. Klasse 5

I.I. Kryptogramme, Figuren (mit Zahlen)

Runde 1

Aufgabe V00509:

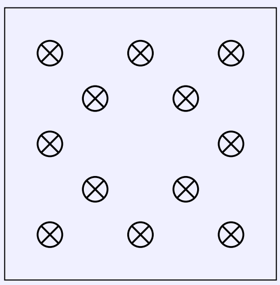


Setze in der Figur Zahlen zwischen 1 und 9 so ein, dass die waagerechte und senkrechte Addition stets die Summe von 18 ergibt!

Lösung von Steffen Polster:

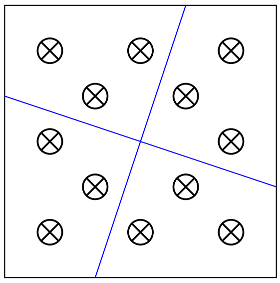
7	8	3				
6	8	4				
5	2	6	4	1		
		3	9	6		
		2	5	4	6	1
				6	3	9
				1	9	8

Aufgabe V00511:



In einem quadratischen Obstgarten sind 12 Obstbäume so angeordnet, wie die Zeichnung zeigt.
Der Garten soll durch zwei gerade Linien so in vier Teile zerlegt werden, dass auf jedem Stück drei Bäume stehen.

Lösung von Steffen Polster:



Aufgabe 010513:

Ersetze die fehlenden Ziffern!
Wie hast du die fehlenden Ziffern gefunden?

$$\begin{array}{ccccccc} & \square & \square & \square & \cdot & \square & 2 \\ \hline & \square & 0 & 8 & & & \\ \square & 6 & \square & & & & \\ \hline \square & 1 & 2 & \square & & & \end{array}$$

Lösung von Steffen Polster:
Die Addition der zwei Zwischenprodukte ergibt sofort

$$\begin{array}{ccccccc} & \square & \square & \square & \cdot & \square & 2 \\ \hline & 5 & 0 & 8 & & & \\ \square & 6 & 2 & & & & \\ \hline \square & 1 & 2 & 8 & & & \end{array}$$

Da das erste Zwischenprodukt 508 vollständig ist und durch Multiplikation des ersten Faktors mit 2 entsteht, ist der erste Faktor folglich 254.
Die letzten Stelle der zweiten Multiplikation ist 2 erhalten. Damit muss die Einerstelle von 254 entweder mit 3 oder 8 multipliziert werden. Nur mit 3 ergibt sich aber die Zehnerstelle 6 des zweiten Produkts und somit

$$\begin{array}{ccccccc} & 2 & 5 & 4 & \cdot & 3 & 2 \\ \hline & 5 & 0 & 8 & & & \\ \square & 6 & 2 & & & & \\ \hline \square & 1 & 2 & 8 & & & \end{array}$$

Die Ausgangsaufgabe ist vollständig bestimmt und ergibt damit als vollständige Lösung:

$$\begin{array}{ccccccc} & 2 & 5 & 4 & \cdot & 3 & 2 \\ \hline & 5 & 0 & 8 & & & \\ 7 & 6 & 2 & & & & \\ \hline 8 & 1 & 2 & 8 & & & \end{array}$$

Aufgabe 020514:

Bei dieser Multiplikationsaufgabe sind einige Ziffern unleserlich.
Sie sollen ergänzt werden.
Beschreibe, wie du die fehlenden Ziffern gefunden hast!

$$\begin{array}{ccccccc} 4 & \square & \square & \cdot & \square & 2 & \square \\ \hline & \square & 3 & \square & \square & & \\ & & & \square & 1 & 2 & \\ & & & \square & \square & 4 & \square \\ \hline & \square & \square & \square & \square & \square & 8 \end{array}$$

Lösung von Steffen Polster:
Aus den letzten zwei Spalten ergibt sich, dass das Ergebnis auf 68 und das dritte Zwischenprodukt auf 48 endet.

Die letzte Stelle des linken Faktors kann nur 1 oder 6 sein, um als letzte Stelle des zweiten Zwischenprodukts eine 2 zu erhalten. Die 1 im Zehner dieses Produkts muss aber durch einen Übertrag entstehen,

womit die letzte Stelle des linken Faktors sicher eine 6 ist. Für die Zehnerstelle dieses Faktors ist damit eine 0 oder 5 möglich.
Die Ziffer 0 kann ausgeschlossen werden, da dann die 3 im ersten Zwischenprodukt ohne einen Übertrag aus einer Multiplikation der 4 mit einer anderen Ziffer folgen müsste, was nicht möglich ist:

4	5	6	·	□	2	□
	□	3	□	□		
			9	1	2	
			□	□	4	8
	□	□	□	□	6	8

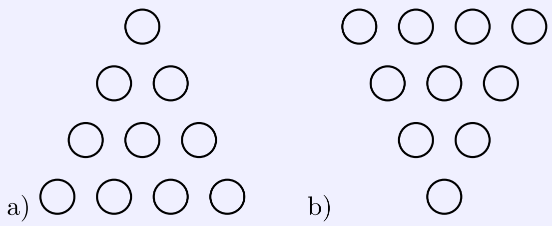
Der Einer des rechten Faktors kann nur noch 3 oder 8 sein. Die 3 entfällt, da das letzte Produkt dann nicht auf 48 enden kann.

4	5	6	·	□	2	8
	□	3	□	□		
			9	1	2	
			3	6	4	8
	□	□	□	□	6	8

Die noch offen erste Multiplikation wird durch Probieren gelöst, wobei nur die 3 die erste Stelle der zweiten Faktors sein kann. Werden noch alle Zwischenergebnisse addiert, ergibt sich als Ergebnis:

4	5	6	·	3	2	8
	1	3	6	8		
			9	1	2	
			3	6	4	8
	1	4	9	5	6	8

Aufgabe 030514:



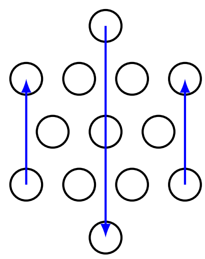
Zehn Pfennige liegen in der Anordnung auf dem Tisch, die die Abbildung a) zeigt. Es sollen einige Pfennige so umgelegt werden, dass die auf der Abbildung b) dargestellte Anordnung entsteht.

a) Wie viel Pfennige muss man mindestens umlegen?

b) Welche Pfennige sind das? Kreuze sie an!

Lösung von Steffen Polster:

Es müssen nur 3 Pfennige umgelegt werden, wie die Abbildung zeigt.



Aufgabe 080512:
Setze die Vielfachen der Zahl 3 von 3 bis 27 so in die einzelnen Felder des Quadrates ein, dass die Summen jeder Zeile (waagerecht), jeder Spalte (senkrecht) und jeder Diagonale (von links oben nach rechts unten und von rechts oben nach links unten) gleich sind!

Lösung von Steffen Polster:
Die Summe der Vielfachen von 3 bis 27 beträgt: $3 + 6 + 9 + 12 + 15 + 18 + 21 + 24 + 27 = 135$.
Da das Quadrat 3 Spalten und Zeilen hat, muss die Summe längs einer Zeile, Spalte oder Diagonalen gleich $\frac{135}{3} = 45$ sein.
Setzt man die mittlere Zahl 15 der Vielfachen von 3 in das Zentrum des Quadrates, ergibt sich durch Probieren u.a. die Lösung:

18	3	24
21	15	9
6	27	12

Aufgabe 090511:

Gib eine Möglichkeit an, die Ziffern 1; 2; 3; 4 und 5 so in das gegebene quadratische Netz einzutragen, dass in jeder Zeile, jeder Spalte und in jeder der beiden Hauptdiagonalen jede der 5 Ziffern genau einmal vorkommt!
Anmerkung: Es genügt ein Beispiel. Begründungen werden nicht verlangt.

Lösung von Steffen Polster:

Eine mögliche Lösung ist

1	5	2	3	4
4	2	1	5	3
5	4	3	2	1
3	1	5	4	2
2	3	4	1	5

Aufgabe 100513:
Gib eine Möglichkeit an, die Zahlen 1; 1; 2; 2; 3; 3; 4; 4; 5; 5; 6; 6; 7; 7; 8; 8 so in die Felder des abgebildeten quadratischen Netzes einzutragen, dass als Summe der Zahlen jeder Zeile (waagerecht), jeder Spalte (senkrecht), jeder der beiden Diagonalen (von links oben nach rechts unten und von rechts oben nach links unten) und als Summe der Zahlen in den vier Eckfeldern die Zahl 18 erhalten wird!
(Keine Begründung erforderlich)

Lösung von Steffen Polster:

Eine mögliche Lösung ist

1	7	2	8
4	6	3	5
7	1	8	2
6	4	5	3

Aufgabe 180513:

	31		
	26	20	
			8

In die freien Felder des abgebildeten Rechtecks sind Zahlen so einzutragen, dass sie von links nach rechts gelesen und von oben nach unten gelesen immer kleiner werden und dass für jede Zeile und jede Spalte gilt:

Alle Differenzen, die man in einer Zeile bzw. Spalte zwischen zwei unmittelbar neben- bzw. untereinanderstehenden Zahlen bilden kann, sind für diese Zeile bzw. Spalte gleich.
Gib ferner für jede Zeile und jede Spalte diese Differenz an! Der Lösungsweg ist zu beschreiben.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Aus 26 - 20 = 6 folgt, dass die Differenz benachbarter Zahlen in der zweiten Zeile 6 beträgt. Entsprechend folgt wegen 31 - 26 = 5 für die zweite Spalte 5 als Differenz. Hiermit ergeben sich die eingetragenen Zahlen in der zweiten Zeile und Spalte:

	31		
32	26	20	14
	21		
	16		8

In der vierten Spalte ist 14 - 8 = 6 das Doppelte der Differenz benachbarter Zahlen. Damit erhält man für diese Spalte die Differenz 3 sowie die in der folgenden Abbildung eingetragenen Zahlen der vierten Spalte.
Jetzt erhält man für die erste Zeile 31 - 17 = 14 als Doppeltes der Differenz dieser Zeile, also die Differenz 7 und damit die eingetragenen Zahlen der Abbildung.

38	31	24	17
32	26	20	14
	21		11
	16		8

Für die erste Spalte folgt dann 38 - 32 = 6, und für die dritte Spalte ergibt sich 24 - 20 = 4 als Differenz. Das vollständig ausgefüllte Rechteck sieht folgendermaßen aus, wobei die Differenzen für die Spalten und Zeilen am unteren bzw. rechten Rand angegeben sind.

38	31	24	17	7
32	26	20	14	6
26	21	16	11	5
20	16	12	8	4
6	5	4	3	

Aufgabe 190512:

In die sieben leeren Felder des folgenden Bildes sind Zahlen derart einzutragen, dass alle vier waagerechten und alle vier senkrechten Aufgaben richtig gerechnet sind.
Eine Begründung wird nicht verlangt.

4	+	□	-	□	=	2
+		-		+		+
□	-	2	+	0	=	□
-		+		-		-
□	+	□	-	6	=	6
=		=		=		=
1	+	5	-	□	=	3

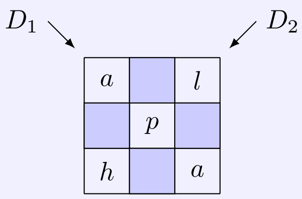
Lösung von Steffen Polster:

4	+	7	-	9	=	2
+		-		+		+
9	-	2	+	0	=	7
-		+		-		-
12	+	0	-	6	=	6
=		=		=		=
1	+	5	-	3	=	3

Jede Gleichung, in der nur ein leeres Kästchen steht, ist sofort lösbar; die anderen anschließend:

Aufgabe 200511:

Ralph, ein eifriger Leser der mathematischen Schülerzeitschrift alpha stellt in einer Arbeitsgemeinschaft seinen Mitschülern folgende Aufgabe:



In der abgebildeten Figur sind für a, h, l, p natürliche Zahlen so einzutragen, dass sich in jeder der beiden Diagonalen D_1, D_2 die Summe 135 ergibt. Dabei soll die Zahl p das Dreifache der Zahl a sein, und die Zahl h soll das Fünffache der Zahl l sein.
Ermittle alle derartigen Eintragungen, und erkläre, wie man sie finden kann!
Überprüfe dabei auch, ob alle geforderten Bedingungen erfüllt sind!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn eine Eintragung von natürlichen Zahlen für a, h, l, p die Bedingungen erfüllt, so folgt $p = 3a$.
In der Diagonalen $_{D}1$ steht also die Summe $a + 3a + a = 5a$. Somit ist $5a = 135$, also $a = 135 : 5 = 27$, und, da $p = 3a$ ist, $p = 3 \cdot 27 = 81$. Ferner folgt $h = 5l$.
Also steht in der Diagonalen D_2 die Summe $l + 81 + 5l = 6l + 81$. Somit ist $6l + 81 = 135$ und daher $6l = 135 - 81 = 54$, mithin $l = 54 : 6 = 9$, und, da $h = 5l$ ist, $h = 5 \cdot 9 = 45$. Also kann nur die Eintragung

27		9
	81	
45		27

alle geforderten Bedingungen erfüllen.

Aufgabe 210513:

8	0	0	-	□	□	=	□	□	□
	:				+	=		-	
	□	□	·	□	□	=	6	0	8
	2	5	+	□	3	=	□	□	□

In jedes leere Kästchen der Abbildung soll eine der Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 so geschrieben werden, dass die drei waagerechten und die senkrechten Aufgaben richtig gerechnet sind.
Eine Beschreibung und Begründung der Lösung wird nicht verlangt.

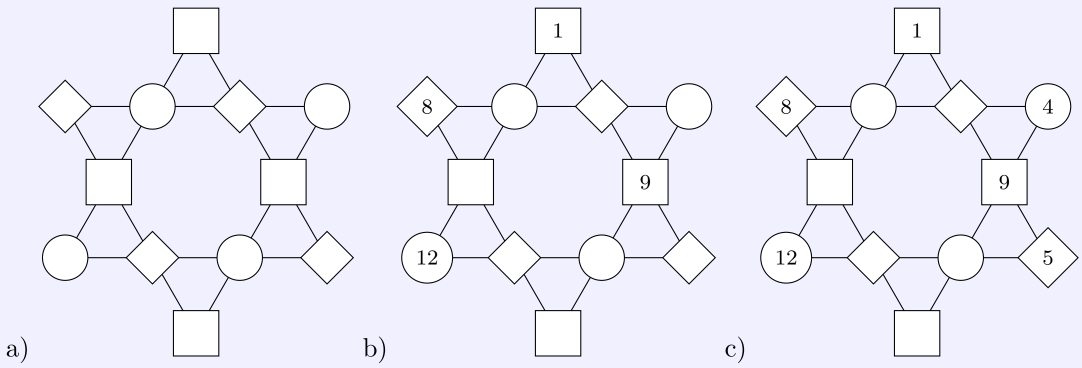
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
8 & 0 & 0 & - & 7 & 4 & = & 7 & 2 & 6 \\
 & : & & & & + & = & & - & \\
 & 3 & 2 & \cdot & 1 & 9 & = & 6 & 0 & 8 \\
\hline
 & 2 & 5 & + & 9 & 3 & = & 1 & 1 & 8
\end{array}$$

Aufgabe 220511:
In die 12 Felder des Bildes a sind die Zahlen von 1 bis 12 so einzutragen, dass folgendes gilt:

Auf jeder eingezeichneten Geraden beträgt die Summe der Zahlen in den vier Feldern 26;
die Summe der Zahlen in den vier auf einer Ecke stehenden Quadrate beträgt 26;
die Summe der Zahlen in den vier Kreisfeldern beträgt 26;
die Summe der Zahlen in den vier Quadratfeldern beträgt 26.

a) Vervollständige die Eintragung Bild b), und überprüfe, ob dann alle Forderungen erfüllt sind!
b) Nenne einen Rechenweg, der zu derselben vollständigen Eintragung führt, aber nur die Vorgabe aus Bild c) benutzt!
c) Versuche, noch andere Eintragungen für Bild a) zu finden, z. B. solche, bei denen die Zahl 12 nicht in einem der sechs „äußeren“ Felder steht!

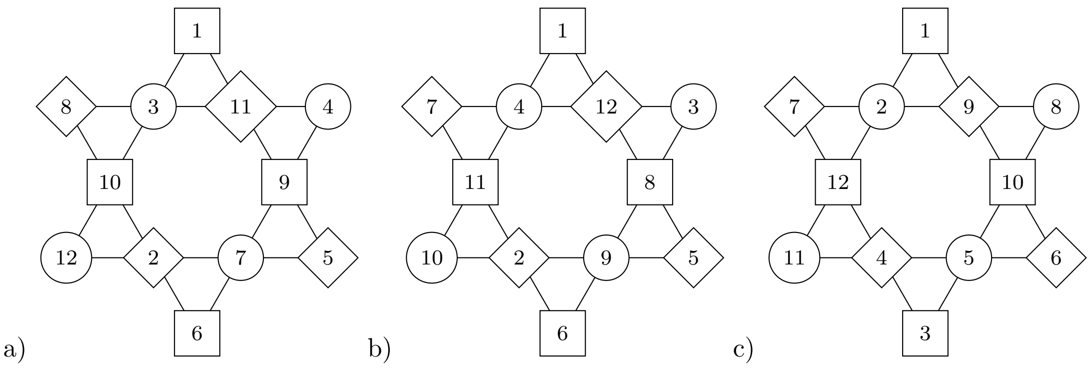


Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Die Eintragung in Abbildung a) erfüllt alle Forderungen; denn es gilt

$$8+3+11+4=26 \quad , \quad 12+2+7+5=26 \quad , \quad 12+10+3+1=26$$

$$6+7+9+4=26 \quad , \quad 6+2+10+8=26 \quad , \quad 5+9+11+1=26$$

$$1+10+6+9=26 \quad , \quad 8+2+5+11=26 \quad , \quad 12+7+4+3=26$$



b) Die Summe der beiden auf der Spitze stehenden Quadratfelder muss 26 - 1 - 9 = 16 betragen, für das linke untere auf der Spitze stehende Quadratfeld ergibt sich also 26 - 8 - 16 = 2. Es verbleiben die Zahlen 3, 4, 5, 6, 7, 10, 11.
Mit ihnen kann die Summe 16 der beiden rechten auf der Spitze stehenden Quadratfelder nur durch 5, 11 oder 6, 10 erreicht werden.

Die Summe des rechten unteren Kreis- bzw. auf der Spitze stehenden Quadratfeldes beträgt 26 - 12 - 2 = 12; sie kann nur durch 5, 7 erreicht werden. Also muss 5 in das rechte untere auf der Spitze stehende Quadratfeld, 7 in das rechte untere Kreisfeld, 11 in das rechte obere auf der Spitze stehende Quadratfeld kommen.
Es verbleiben 3, 4, 6, 10. Die Summe der beiden oberen Kreisfelder beträgt 26-8-11 = 7; sie kann nur durch 3, 4 erreicht werden. Die Summe des unteren Quadratfeldes und des rechten oberen Kreisfeldes beträgt 26 - 7 - 9 = 10; sie kann nur durch 4, 6 erreicht werden.
Also muss 4 in das rechte obere, 3 in das linke obere Kreisfeld, 6 in das untere Quadratfeld und hiernach 10 in das linke Quadratfeld kommen.

c) Zwei weitere Eintragungen liegen z. B. in Abbildung b und c vor.

Aufgabe 220513:
Rolf, ein Mitglied im Bezirksklub Junger Mathematiker, schreibt seinen Mitschülern die folgenden drei Gleichungen auf:

$$B \cdot J \cdot M = 135$$
$$M + A + T + H + E = 32$$
$$(H + E + I) : (T - E - R) = 3$$

Er verlangt, jeden der Buchstaben A, B, E, H, I, J, M, R, T so durch eine der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 zu ersetzen, dass alle drei Gleichungen wahr sind. Dabei sollen gleiche Buchstaben durch gleiche Zahlen, verschiedene Buchstaben durch verschiedene Zahlen ersetzt werden.

a) Anke antwortet: „Ich finde schon aus der ersten Gleichung, welche drei Zahlen für B, J und M einzusetzen sind. Nur ihre Reihenfolge weiß ich noch nicht.“
Welche drei Zahlen sind dies!
b) Bertolt sagt: „Dann erhält man aus der zweiten Gleichung, welche Zahl M bedeutet.“ Wie könnte Bertolt die beiden anderen von Anke genannten Zahlen ausgeschlossen haben?
c) Nach weiterem Probieren finden die Mitschüler eine vollständige Lösung. Welche könnte es z. B. sein?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Die Primfaktorzerlegung von 135 ist $135 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$. Da bereits $3 \cdot 5$ (und erst recht $3 \cdot 3 \cdot 5$ bzw. $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$) größer als jede der Zahlen $1, 2, \ldots, 9$ ist, muss der Primfaktor 5 als eine der Zahlen für B, J, M genommen werden. Aus den verbleibenden drei Faktoren 3 kann man die beiden anderen der Zahlen für B, J, M nur so bilden, dass sie 3 und $3 \cdot 3 = 9$ lauten.
Also sind 3, 5 und 9 die drei Zahlen für B, J, M.

b) Für A, T, H, E kommen dann nur noch vier der Zahlen 1, 2, 4, 6, 7, 8, in Frage.
Wäre $M = 3$ oder $M = 5$, so müssten wegen der zweiten Gleichung die Zahlen für A, T, H, E die Summe 29 oder 27 haben. Das ist aber nicht möglich, da selbst die Summe der vier größten unter den Zahlen 1, 2, 4, 6, 7, 8 nur 25 beträgt. Also muss $M = 9$ sein.

c) Eine Lösung ist z. B.:

$$A = 8, \quad B = 3, \quad E = 2, \quad H = 6, \quad I = 4, \quad J = 5, \quad M = 9, \quad R = 1, \quad T = 7$$

denn die Gleichungen $3 \cdot 5 \cdot 9 = 135$, $9 + 8 + 7 + 6 + 2 = 32$, $(6 + 2 + 4) : (7 - 2 - 1) = 3$ sind wahr.

Es gibt noch genau eine weitere Lösung. Sie entsteht aus der genannten durch Vertauschen von B und J.

Aufgabe 230513:
Für die Buchstaben a, b, c, d, e, f sind in den nachstehenden Aufgaben (1) bis (6) natürliche Zahlen so einzusetzen, dass richtig gerechnete Aufgaben entstehen. Dabei sollen gleiche Buchstaben gleiche Zahlen und verschiedene Buchstaben verschiedene Zahlen bedeuten.

(1) $a + b + c = 21$,
(2) $b \cdot c = 42$,
(3) $c + d = 70 : b$,
(4) $e : a = d$,
(5) $c = 54 : 9$,
(6) $a + b + c + d + e + f = 60$

Finde eine solche Eintragung und überprüfe, ob sie alle Forderungen erfüllt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Aus (5) folgt c = 6.
Setzt man das in (2) ein, so ergibt sich $b \cdot 6 = 42$, also $b = 42 : 6$, d. h. $b = 7$.
Damit folgt aus (1), dass $a + 7 + 6 = 21$, also $a = 21 - 13$, d. h. $a = 8$ gilt.
Aus (3) erhält man ferner $d + 6 = 70 : 7$, also $d = 10 - 6$, d. h. $d = 4$.
Aus (4) erhält man daher $e : 8 = 4$, also $e = 4 \cdot 8$, d. h. $e = 32$.
Aus (6) ergibt sich schließlich $8 + 7 + 6 + 4 + 32 + f = 60$, also $f = 60 - 57$, d. h. $f = 3$.

Die so gefundenen Zahlen a, b, c, d, e, f sind paarweise verschieden und erfüllen (1) bis (6).

Aufgabe 230514:

In die leeren Felder der Abbildung sind natürliche Zahlen so einzusetzen, dass alle waagerechten und senkrechten Aufgaben richtig gelöst werden.
a) Gib eine solche Einsetzung an!
b) Es gibt insgesamt vier solche Einsetzungen. Erkläre, wie man diese finden kann und gib sie an!

3	+		−		= 7
·		+		·	
	·		:		= 3
−		−		+	
	+		−	7	= 6
= 2		= 4		= 7	

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Siehe eine der unter b) erhaltenen Einsetzungen. b) Wir bezeichnen die leeren Felder und die darin einzusetzenden Zahlen so mit a, b, c, d, e, f, g wie in der Abbildung angegeben. Für jede der gesuchten Einsetzungen gilt dann:

Zeile 1:	3	+	a	−	b	= 7
	·		+		·	
Zeile 2:	c	·	d	:	e	= 3
	−		−		+	
Zeile 3:	f	+	g	−	7	= 6
	= 2		= 4		= 7	
	Sp.1:		Sp.2:		Sp.3:	

Da in der 2. Zeile durch e dividiert wird, gilt $e \neq 0$. Aus der 3. Spalte folgt $b \cdot e = 0$, wegen $e \neq 0$ also $b = 0$. Daher ergibt sich aus der 1. Zeile $a = 4$.
Aus der 3. Zeile folgt $f + g = 13$. Da f und g natürliche Zahlen sind, kommen folglich für sie nur die Zahlen 0, 1, 2, $\cdots$, 13 in Frage.
Nach der 1. Spalte ist $3 \cdot c = 2 + f$, also ist $2 + f$ durch 3 teilbar. Daher verbleiben nur die Möglichkeiten

$f = 1$, $c = 1$, $g = 12$; (1) $f = 4$, $c = 2$, $g = 9$; (2)
$f = 7$, $c = 3$, $g = 6$; (3) $f = 10$, $c = 4$, $g = 3$; (4)

$f = 13$, $c = 5$, $g = 0$. (5)

Aus der 2. Spalte und $a = 4$ folgt $d - g = 0$, also $d = g$. Daher führen (1) bis (5) in der 2. Zeile auf folgende Gleichungen und Werte für e:

(1) $1 \cdot 12 : e = 3$, $e = 4$;
(2) $2 \cdot 9 : e = 3$, $e = 6$;
(3) $3 \cdot 6 : e = 3$, $e = 6$;
(4) $4 \cdot 3 : e = 3$, $e = 4$;
(5) $5 \cdot 0 : e = 3$, kein möglicher Wert für e.

Mithin können nur die folgenden Einsetzungen alle genannten Aufgaben lösen:

3	+	4	−	0	= 7
·		+		·	
1	·	12	:	4	= 3
−		−		+	
1	+	12	−	7	= 6
= 2		= 4		= 7	

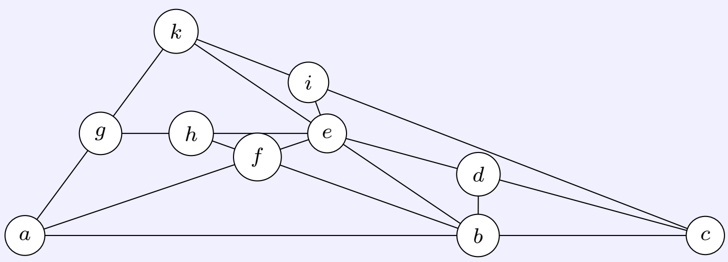
3	+	4	−	0	= 7
·		+		·	
2	·	9	:	6	= 3
−		−		+	
4	+	9	−	7	= 6
= 2		= 4		= 7	

3	+	4	−	0	= 7
·		+		·	
3	·	6	:	6	= 3
−		−		+	
7	+	6	−	7	= 6
= 2		= 4		= 7	

3	+	4	−	0	= 7
·		+		·	
4	·	3	:	4	= 3
−		−		+	
10	+	3	−	7	= 6
= 2		= 4		= 7	

Man bestätigt, dass bei diesen Einsetzungen alle waagerechten und alle senkrechten Aufgaben richtig gelöst sind.

Aufgabe 240514:

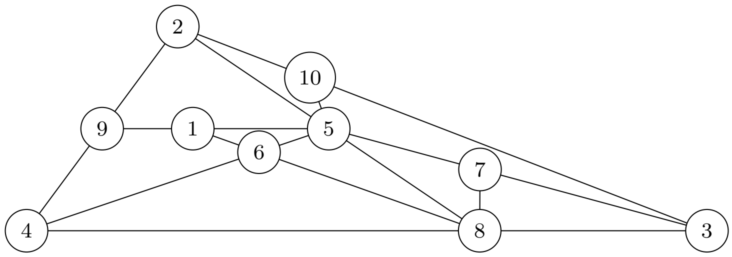


In die Felder der Abbildung soll für jeden Buchstaben eine der Zahlen von 1 bis 10 eingetragen werden. Jede dieser Zahlen soll genau einmal vorkommen. Auf jeder eingezeichneten Geraden soll die Summe der Zahlen 15 betragen; es soll also gelten:

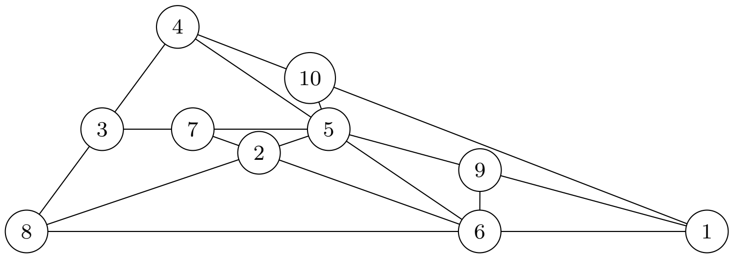
$$15 = a+b+c = a+f+e = a+g+k = b+d = b+e+k = b+f+h = c+d+e = c+i+k = e+h+g = e+i$$

(a) Gib eine solche Eintragung an, bei der zusätzlich festgelegt wird, dass $e = 5$ und $k = 2$ ist!
(b) Gib eine weitere von (a) verschiedene Eintragung an, die die Bedingungen der Aufgabe erfüllt! (Für e und k dürfen auch andere als die in (a) eingesetzten Zahlen verwendet werden.)
(c) Beweise, dass es keine Eintragung gibt, bei der alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt sind und außerdem $e = 10$ gilt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(a) Für $e = 5$ und $k = 2$ gibt es genau eine Eintragung, die alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt; es ist die Eintragung in der Abbildung



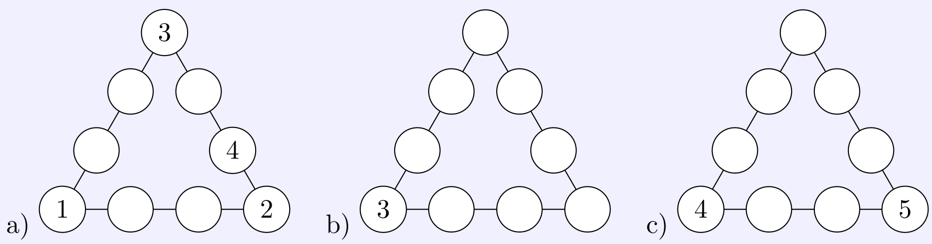
(b) Eine weitere Eintragung, die alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt, zeigt die 2.Abbildung.



(c) Wäre eine Eintragung mit $e = 10$ möglich, die alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt, so folgte: Wegen $a + f + e = b + e + k = c + d + e (= e + h + g) = 15$ müsste $a + f = b + k = c + d (= h + g) = 5$ sein, also wären die Zahlen a, f, b, k, e, d (, h, g) sämtlich kleiner als 5. Das ist unmöglich, da es unter den Zahlen von 1 bis 10 nur vier gibt, die kleiner als 5 sind. Also kann es keine Eintragung mit $e = 10$ geben, die alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

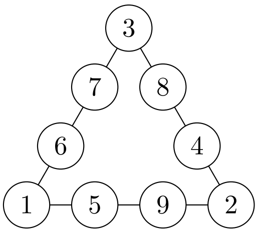
Aufgabe 250514:
In jede der Abbildungen a), b), c) sollen die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 in die Kreise eingetragen werden.
Jede dieser Zahlen soll (jeweils bei einer solchen Eintragung) genau einmal vorkommen. Für einige Kreise ist die einzutragende Zahl bereits vorgeschrieben. Ferner soll für jede Eintragung folgendes gelten:

Addiert man auf je einer Dreiecksseite die vier Zahlen, so ergibt sich bei jeder der drei Seiten dieselbe Summe.
a) Finde eine Eintragung in Abbildung a), bei der sich für jede der drei Seiten die Summe 17 ergibt!
b) Finde möglichst viele Eintragungen in Abbildung b), bei denen sich für jede der drei Seiten die Summe 21 ergibt!
c) Finde möglichst viele Eintragungen in Abbildung c), bei denen sich für jede der drei Seiten derselbe Wert der Summe ergibt! Gib zu jeder dieser Eintragungen diesen Wert an!

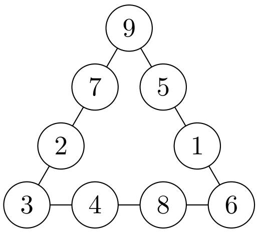


Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Abbildung a zeigt eine Lösung der Aufgabe a);
die Abbildungen b 1, 2, 3, 4 zeigen vier Lösungen von Aufgabe b);

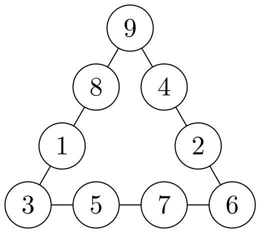
die Abbildungen c 1, 2 zeigen zwei Lösungen der Aufgabe c), für jede Dreiecksseite beträgt die Summe in diesen beiden Lösungen 20.



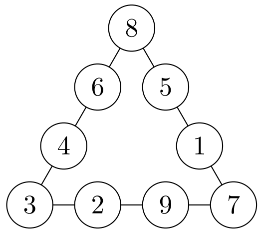
a



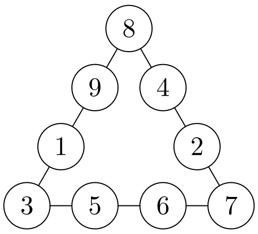
*b*1



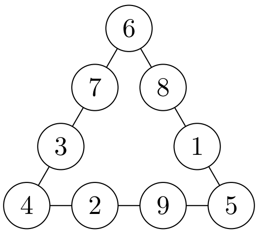
*b*2



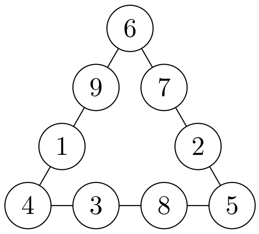
*b*3



*b*4

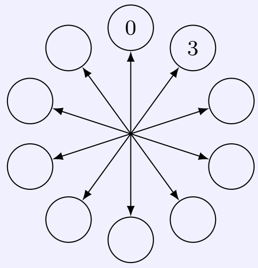


*c*1



*c*2

Aufgabe 260512:
a) Die Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 sollen so in die kleinen Kreise der Abbildung eingetragen werden, dass jedes Paar benachbarter Kreise dieselbe Summe wie das Paar an den beiden entgegengesetzten Pfeilspitzen ergibt.



Jede der zehn Zahlen soll genau einmal vorkommen. Die Zahlen 0 und 3 sollen wie angegeben eingetragen werden.

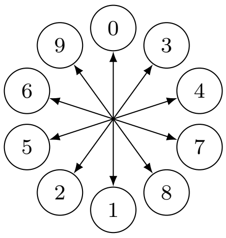
Gib eine Eintragung an, die alle diese Forderungen erfüllt!

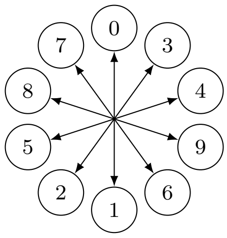
b) Für die Zahlen 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19 lässt sich eine entsprechende Aufgabe stellen. Wie kann man für sie auf einfache Weise eine Lösung aus der Lösung von a) gewinnen?

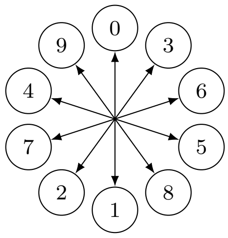
c) Löse die entsprechende Aufgabe für die natürlichen Zahlen n, $n+1$, $n+2$, $n+3$, $n+4$, $n+5$, $n+6$, $n+7$, $n+8$, $n+9$!

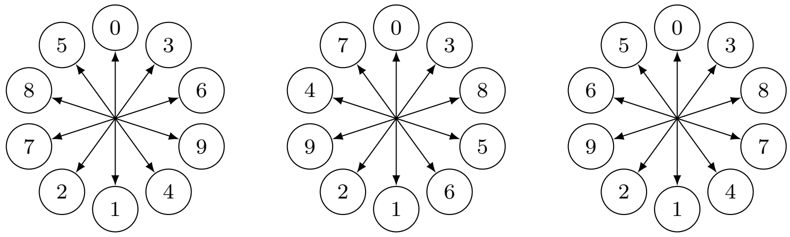
d) Begründe deine Lösung von c)!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Jede der Eintragungen in der Abbildung ist eine Eintragung der geforderten Art. Als vollständige Lösung zu a) gilt eine dieser Eintragungen.





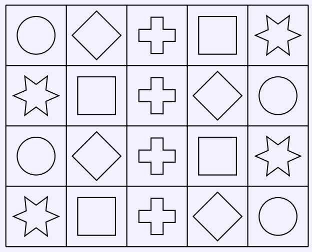




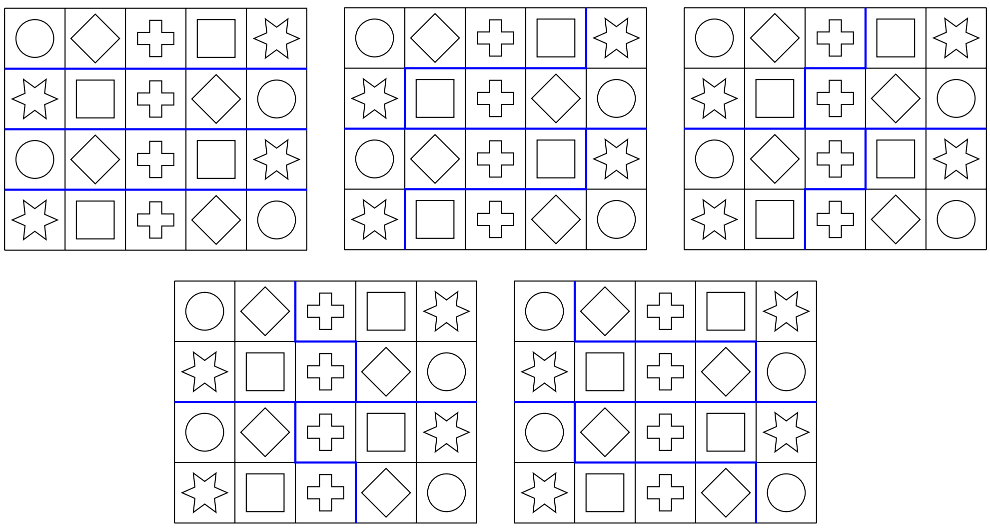
b) Man erhält z. B. aus der Lösung von a) eine Lösung von b), wenn man zu jeder Zahl der Figur 10 addiert.
c) Indem man in der Lösung von a) zu jeder Zahl der Figur die Zahl n addiert, erhält man eine mögliche Lösung der Aufgabe.
d) Bei dem in c) beschriebenen Vorgehen vergrößern sich jeweils beide in Aufgabe a) betrachtete Summen um den gleichen Wert, und zwar um das Doppelte von n.
Die Gleichheit der beiden Summen bleibt somit bei dieser Veränderung erhalten. Aus einer jeden Lösung von a) ergibt sich so bei der Veränderung eine Lösung von c).

Aufgabe 270511:

Jemand will die abgebildete Figur in genau vier Teile zerschneiden. Keines der 20 kleinen Quadrate soll dabei zerschnitten werden. Die vier Teile sollen sich so übereinander legen lassen, dass sie sich dann völlig gleichen (gleiche Gestalt und gleiche Verteilung der Muster).
Es gibt fünf Möglichkeiten für eine derartige Zerlegung.
Zeichne diese fünf Zerlegungen! Eine Begründung wird nicht verlangt.



Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Aufgabe 280511:
In jedes der acht freien Felder der Figur ist genau eine natürliche Zahl so einzutragen, dass die Summe der drei in jeder waagerechten und jeder senkrechten Reihe stehenden Zahlen jeweils 39 beträgt.
Finde eine derartige Eintragung, bei der neun Zahlen vorkommen, von denen keine zwei einander gleich sind!

	9	

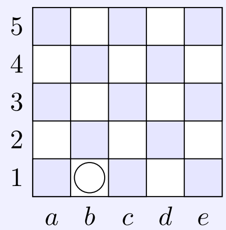
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

10	14	15
17	9	13
12	16	11

Eine mögliche Eintragung, die die Bedingungen der Aufgabe erfüllt, zeigt die Abbildung. Es gibt noch weitere derartige Eintragungen.

Aufgabe 290513:
Das Bild zeigt ein Spielbrett mit einem Damestein auf dem Feld b1. Er darf, wie im Damespiel üblich, stets einen Schritt nach links oben oder nach rechts oben gehen. So kann er in vier Schritten auf die oberste Zeile (d. h. auf irgendeines der beiden Felder b5, d5) gelangen.

Gesucht ist die Anzahl aller verschiedenen Wege, auf denen dieses Ziel erreichbar ist.
Gib diese Anzahl an und beschreibe, wie du sie gefunden hast!



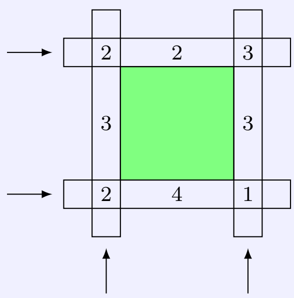
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

5		5		4	
4	2		3		1
3		2		1	
2	1		1		0
1		1		0	
	a	*b*	*c*	*d*	*e*

Die Anzahl aller genannten Wege ist 9. Man kann sie finden, indem man in jedes (weiße) Feld die Anzahl aller derjenigen Wege einträgt, auf denen dieses Feld von b1 aus erreichbar ist, und dabei der Reihe nach die Felder der Zeilen 1, 2, 3, 4, 5 abarbeitet:
Das Feld b1 erhält die Anzahl 1, das Feld d1 die Anzahl 0.
In jedes weitere Feld wird die Summe der (höchstens zwei) Anzahlen eingetragen, die schräg unter diesem Feld liegen, denn genau aus solchen Feldern führen alle Wege auf das betrachtete Feld.

So kommt man zu den Eintragungen in der Abbildung und damit wegen $5 + 4 = 9$ zur gesuchten Anzahl 9 aller genannten Wege.

Aufgabe 300514:
In einem Schema wie im Bild sollen natürliche Zahlen eingetragen werden. Das Bild zeigt ein Beispiel. Darin beträgt die Summe aller acht Zahlen 20. In jeder Zeile und in jeder Spalte (siehe die Pfeile) entsteht dieselbe Teilsumme, nämlich 7.

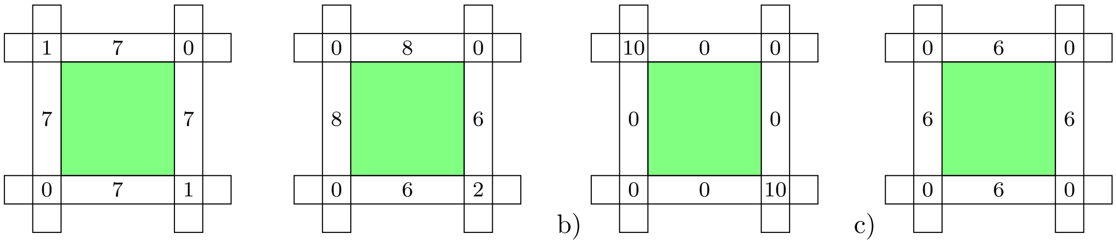


a) Gib zwei verschiedene Eintragungen an, bei denen jeweils die Summe aller acht Zahlen 30 beträgt und in jeder Zeile sowie in jeder Spalte die Teilsumme 8 entsteht!

b) Gib eine Eintragung an, bei der in jeder Zeile, und in jeder Spalte die Teilsumme 10 entsteht und die Summe aller acht Zahlen möglichst klein ist!

c) Gib eine Eintragung an, bei der die Summe aller acht Zahlen 24 beträgt und in jeder Zeile sowie in jeder Spalte ein einheitlicher Wert als Teilsumme entsteht, der möglichst klein ist! Eine Begründung zu den Eintragungen wird nicht verlangt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Abbildungen a bis c Es gibt noch andere Lösungsmöglichkeiten.



a) b) c)

Aufgabe 310511:
a) In die neun Felder eines 3 × 3 - Quadrates sollen die Zahlen 11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33 so eingetragen werden, dass folgende Bedingungen erfüllt sind:
In jeder Zeile kommt jede der Ziffern 1, 2, 3 sowohl an der Einerstelle als auch an der Zehnerstelle je genau einmal vor. Dasselbe gilt auch in jeder Spalte.

b) In die Felder eines 4 × 4 - Quadrates sollen die zweistelligen Zahlen eingetragen werden, die sich unter Verwendung der Ziffern 1, 2, 3, 4 bilden lassen. Dabei sollen für die Ziffern 1, 2, 3, 4 dieselben Bedingungen wie bei a) erfüllt sein.
Gib je eine geforderte Eintragung an!
Stelle bei a) und b) jeweils fest, ob sich zwei Eintragungen finden lassen, die sich nicht durch Vertauschen von Zeilen oder Spalten miteinander, durch Vertauschen von Spalten miteinander oder durch Umwandeln der Zeilen in Spalten (oder durch mehrere solche Vorgänge) ineinander überführen lassen!
Eine Begründung wird nicht verlangt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die (bis auf die genannten Vertauschungen einzige) Eintragung zu a) ist:

11	22	33
23	31	12
32	13	21

zwei Eintragungen zu b) sind z. B.

11	22	33	44
23	14	41	32
34	43	12	21
42	31	24	13

11	22	33	44
24	13	42	31
32	41	14	23
43	34	21	12

Aufgabe 340513:

$$
\begin{array}{ccccccc}
\square & \square & 8 & \cdot & 4 & \square & \square \\
\hline
 & 1 & 4 & 3 & \square & & \\
 & & 2 & 1 & \square & \square & \\
 & & & \square & \square & \square & 6 \\
\hline
 & \square & \square & \square & \square & \square & \square
\end{array}
$$

In die leeren Felder der Abbildung sind derart Ziffern einzutragen, dass eine richtig gerechnete Multiplikationsaufgabe entsteht.

Dabei soll die Regel beachtet werden, dass in jeder Zeile am Anfang eine von 0 verschiedene Ziffer steht.
Zeige, dass es genau eine Eintragung der gesuchten Art gibt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

A	B	8	$\cdot$	4	C	D
	1	4	3	E		
		2	1	F	G	
			H	J	K	6
	L	M	N	P	Q	R

3	5	8	$\cdot$	4	6	7
	1	4	3	2		
		2	1	4	8	
			2	5	0	6
	1	6	7	1	8	6

Bezeichnet man die fehlenden Ziffern wie in der linken Abbildung, so folgt:
Wegen $8 \cdot 4 = 32$ muss $E = 2$ sein.
Daher muss das Vierfache des ersten Faktors 1432 betragen, also ist der erste Faktor $1432 : 4 = 358$. Weiter muss die Zahl $358 \cdot C$ mit den Ziffern 21.. beginnen. Probiert man die Werte ≤ 5, C = 6, $C \geq 7$, so findet man wegen

$$358 \cdot 5 = 1790, \quad 358 \cdot 6 = 2148, \quad 358 \cdot 7 = 2506$$

dass nur $C = 6$ in Frage kommt. Die Zahl $358 \cdot D$ muss auf die Ziffer 6 enden; das ist nur mit $D = 2$ oder $D = 7$ möglich. Da aber $358 \cdot 2 = 716$ nicht vier Ziffern H, J, K, 6 mit von 0 verschiedener Anfangsziffer H ergibt, verbleibt nur $D = 7$und damit insgesamt nur die Multiplikation $358 \cdot 467$.
Wie die rechte Abbildung zeigt, führt diese Multiplikation auf eine Eintragung der gesuchten Art.

Runde 2

Aufgabe 050524:
Ermittle die fehlenden Ziffern!

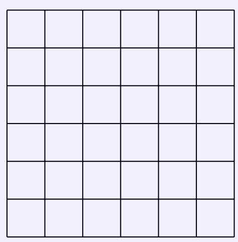
6	☐	$\cdot$	☐	☐	☐
☐	☐				
	☐	☐			
		☐	☐		
☐	☐	☐	6		

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Da alle Teilprodukte zweistellige Zahlen sind, muss der zweite Faktor 111 sein.
An der Einerstelle des ersten Faktors muss eine 6 stehen, da das Produkt von 111 mit einer natürlichen Zahl, an deren letzter Stelle keine 6 steht, nicht 6 als letzte Ziffer haben kann.
Die ergänzte Aufgabe lautet daher:

6	6	$\cdot$	1	1	1
6	6				
	6	6			
		6	6		
7	3	2	6		

Aufgabe 080521:

Kreuze 6 der 36 Felder des gegebenen quadratischen Netzes so an, dass in jeder Zeile und in jeder Spalte genau ein angekreuztes Feld und in jeder der Diagonalen höchstens ein angekreuztes Feld liegt!



Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Eine Lösungsmöglichkeit ist z. B. die in der Abbildung dargestellte.

			×		
×					
				×	
	×				
					×
		×			

Aufgabe 100522:

A	B	+	8	=	3	C
	-		-			-
1	D	+	C	=	1	C
1	B	+	3	=	A	D

Gib sämtliche Lösungen des Kryptogramms (siehe Abbildung) an, d. h. ersetze die Buchstaben so durch je eine der Ziffern 0 bis 9, dass zusammen mit den bereits angegebenen Ziffern sämtliche (waagerecht und senkrecht stehenden) Aufgaben richtig gelöst sind. Dabei bedeuten gleiche Figuren gleiche Ziffern.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Aus $8 - C = 3$ folgt $C = 5$. Setzt man für C in Spalte 5 jeweils 5 ein, so erhält man $D = 0$ und $A = 2$. Schließlich ermittelt man auf diese Weise aus Zeile 1, dass $B = 7$ sein muss.

2	7	+	8	=	3	5
	-		-			-
1	0	+	5	=	1	5
1	7	+	3	=	2	0

Tatsächlich erfüllen die angegebenen Ziffern alle Bedingungen der Aufgabe; denn in sind alle waagerecht und senkrecht stehenden Aufgaben richtig gelöst.

Aufgabe 120521:

4	□	□	·	3	□	□
	□	□	□	5		
		3	□	□	□	
				8	□	□
	□	□	□	□	3	□

In der folgenden Aufgabe ist jedes Kästchen □ so durch eine der Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 zu ersetzen, dass eine richtig gelöste Multiplikationsaufgabe entsteht.
Dabei muss jede Zeile mit einer von 0 verschiedenen Ziffer beginnen.
Als Ergebnis wird nur eine richtig ergänzte Aufgabe ohne Begründung verlangt.

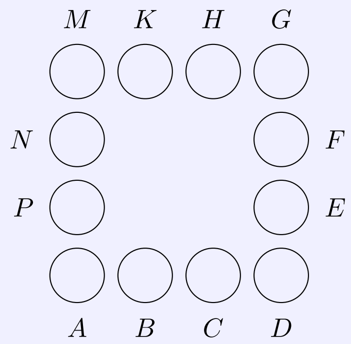
Lösung von Steffen Polster:
4□□ · 3 kann nur auf 5 enden, wenn der erste Faktor 4□5 ist. Der Faktor 3□□ muss auf zwei enden, da nur so das 3. Teilergebnis dreistellig mit einer 8 am Anfang ist. Das erste Zwischenprodukt beginnt mit 1. Das 2. Produkt endet auf 0. Würde es auf 5 enden, so müsste das 3. Produkt 880 sein, was nicht möglich ist. Damit wird vorerst

4	□	5	·	3	□	2
	1	□	□	5		
		3	□	□	0	
				8	□	0
	□	□	□	□	3	0

Das dritte Produkt ist durch die Endsumme gleich 830. Damit ist der erste Faktor 415 und das erste Zwischenprodukt 1245. Damit wird der Zehner im 2. Faktor gerade. Diese ist nur mit 8 möglich. Die Lösung ist somit eindeutig.

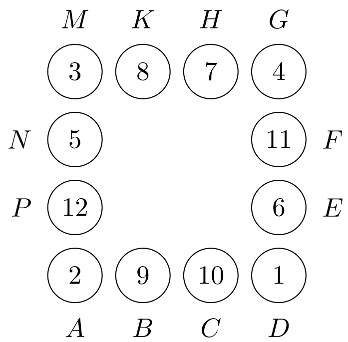
4	1	5	·	3	8	2
	1	2	4	5		
		3	3	2	0	
				8	4	0
	1	5	8	5	3	0

Aufgabe 130523:
In die 12 Felder A, B, C, D, E, F, G, H, K, M, N, P der Figur sollen die natürlichen Zahlen von 1 bis 12, jede genau in eines der Felder, so eingetragen werden, dass die Summe der in den Feldern A, B, C, D stehenden Zahlen 22 beträgt, ebenso die Summe der in den Feldern D, E, F, G stehenden Zahlen, gleichfalls die Summe der in den Feldern G, H, K, M stehenden Zahlen und auch die Summe der in den Feldern M, N, P, A stehenden Zahlen.



a) Gib eine derartige Eintragung von Zahlen an!
b) Untersuche, welche Zahlen bei jeder derartigen Eintragung in den Feldern A, D, G und M stehen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



a) Die Abbildung zeigt ein Beispiel dafür, wie die geforderte Eintragung lauten kann.

b) Es liege eine Eintragung vor und es seien a, b, c, d, e, f, g, h, k, m, n, p die in dieser Reihenfolge in den Feldern A, B, C, D, E, F, G, H, K, M, N, P stehenden Zahlen. Ferner sei

$$s_1 = e + b + c + d \qquad s_2 = d + e + f + g$$
$$s_3 = g + h + k + m \qquad s_4 = m + n + p + a$$

Dann gilt laut Aufgabe $s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = 22$. Daraus folgt $s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = 88$.

Die Summe der natürlichen Zahlen von 1 bis 12 beträgt 78. Sie ist also um 10 kleiner als die Summe $s_1 + s_2 + s_3 + s_4$.

Nun werden aber die in den Eckfeldern A, D, G, M stehenden Zahlen bei der Bildung der vier Summen je zweimal berücksichtigt. Daher muss die Summe dieser Zahlen 10 betragen.
Wären nun a, g, d, m nicht die Zahlen 1, 2, 3, 4, so wäre mindestens eine von ihnen größer als 4, und die anderen wären nicht kleiner als 1, 2, 3, also wäre ihre Summe größer als 10.
Daher müssen bei jeder richtigen Eintragung der genannten Art in den Eckfeldern die Zahlen 1, 2, 3 und 4 und keine anderen stehen.

Aufgabe 160521:

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{A} & \cdot & \mathrm{A} & = & \mathrm{B} \\
+ & & \cdot & & - \\
\mathrm{C} & \cdot & \mathrm{D} & = & \mathrm{E} \\
\hline
\mathrm{F} & - & \mathrm{G} & = & \mathrm{H}
\end{array}$$

In das obenstehende Kryptogramm sind für die Buchstaben Ziffern (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) so einzutragen, dass für gleiche Buchstaben gleiche Ziffern stehen und dass alle angegebenen Rechenaufgaben richtig gerechnet sind.
Stelle fest, ob es eine solche Eintragung gibt, ob sie die einzige ist und wie sie in diesem Falle lautet!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn es eine solche Eintragung gibt, so ist nach der 1. Zeile B das Quadrat von A ($\neq B$), also $B = 4$ oder $B = 9$.
Ferner ist B das Produkt zweier einstelliger Zahlen C, D, also nicht 0 und nicht 1. Daher ist auch keine der Zahlen C, D gleich 0 bzw. gleich 1.

Wegen $2 \cdot 3 = 6$ ist E mithin mindestens gleich 6. Da ferner E nach der 3. Spalte kleiner als B ist, scheidet $B = 4$ aus. Es folgt $B = 9$, also $A = 3$.
Da G ($\neq 3$) somit das Dreifache von D ($\neq 3$), aber größer als 0 und kleiner als 10 ist, verbleibt nur die Möglichkeit $D = 2$, $G = 6$.

Nach der dritten Zeile ist F größer als 6, also wegen $F \neq B$, $B = 9$, entweder $F = 7$ oder $F = 8$. Nach der zweiten Zeile ist E gerade, nach der dritten Spalte ist H ungerade, nach der dritten Zeile also F ungerade. Daher folgt $F = 7$ und somit $H = 1$, $E = 8$ sowie $C = 4$. Also kann nur die folgende Eintragung alle Bedingungen erfüllen:

$$\begin{array}{ccccc} 3 & \cdot & 3 & = & 9 \\ + & & \cdot & & - \\ 4 & \cdot & 2 & = & 8 \\ \hline 7 & - & 6 & = & 1 \end{array}$$

Sie erfüllt die Bedingungen; denn die für A, B, C, D, E, F, G, H eingetragenen Ziffern 3, 9, 4, 2, 8, 7, 6, 1 sind sämtlich verschieden, und die angegebenen Rechenaufgaben sind richtig gerechnet.

Aufgabe 190524:
Das untenstehende Muster einer Multiplikationsaufgabe soll so ausgefüllt werden, dass in jedes Kästchen genau eine Ziffer eingetragen wird und dass dabei eine richtig gerechnete Aufgabe entsteht.
Für gleiche Variable sind gleiche Ziffern einzusetzen. Wie üblich soll 0 nicht als Anfangsziffer vorkommen. Für das Ausfüllen der leeren Kästchen werden sonst keine weiteren Vorschriften gemacht.

$$\begin{array}{ccccccc} x & y & z & \cdot & 8 & x & z \\ \hline & x & x & 8 & 8 & & \\ & & & \square & \square & x & \\ & & & \square & \square & \square & \square \\ \hline & \square & \square & \square & \square & \square & \square \end{array}$$

Begründe, wie sich aus diesen Forderungen eine vollständige Eintragung ergibt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Aus dem ersten Teilprodukt ist ersichtlich, dass $z \cdot 8$ auf 8 endet; daher muss $z = 1$ oder $z = 6$ gelten.
Wäre $z = 1$, so könnte das dritte Teilprodukt nicht aus vier Ziffern bestehen, sondern nur aus drei. Folglich verbleibt nur die Möglichkeit $z = 6$.
Aus dem zweiten Teilprodukt ist nun ersichtlich, dass $6 \cdot x$ auf x endet. Da x auch als Anfangsziffer vorkommt, also $x \neq= 0$ gilt, kann folglich nur $x = 2$ oder $x = 4$ oder $x = 6$ oder $x = 8$ sein.
Wäre x eine der Ziffern 4, 6, 8, so würde das zweite Teilprodukt nicht dreistellig, sondern vierstellig. Also verbleibt nur die Möglichkeit $x = 2$.

Hiernach lautet das erste Teilprodukt 2288. Wegen $2288 : 8 = 286$ muss daher der erste Faktor der Multiplikationsaufgabe die Zehnerziffer $y = 8$ enthalten.
Nun kann die vollständige Eintragung durch Fertigstellen des schriftlichen Multiplizierens erfolgen. Man erhält:

$$\begin{array}{ccccccc} 2 & 8 & 6 & \cdot & 8 & 2 & 6 \\ \hline & 2 & 2 & 8 & 8 & & \\ & & & 5 & 7 & 2 & \\ & & & 1 & 7 & 1 & 6 \\ \hline & 2 & 3 & 6 & 2 & 3 & 6 \end{array}$$

Aufgabe 250523:
Auf die Randlinie eines Quadrates sollen zwölf Damesteine so verteilt werden, dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

(1) Auf jeder Ecke des Quadrates liegen gleich viele Damesteine. Dabei ist es zulässig, dass die Ecken frei von Damesteinen sind; es dürfen aber auch mehrere Damesteine übereinander auf den Ecken liegen.
(2) Auf jeder Seite des Quadrates (einschließlich ihrer beiden Eckpunkte) sind gleich viele Damesteine. Dabei sollen alle Damesteine, die auf einer Quadratseite, aber zwischen deren Eckpunkten liegen, übereinander gestapelt sein.

a) Gib vier verschiedene Verteilungen der zwölf Damesteine an, so dass jede dieser Verteilungen die Bedingungen (1) und (2) erfüllt!
b) Begründe, dass es nicht mehr als vier verschiedene Verteilungen dieser Art geben kann!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Die folgenden Verteilungen erfüllen die Bedingungen (1) und (2):

0	3	0	1	2	1	2	1	2	3	0	3
3		3	2		2	1		1	0		0
0	3	0	1	2	1	2	1	2	3	0	3

b) Für jede Verteilung der geforderten Art gilt:
Wenn auf einer Ecke genau x Damesteine liegen, dann nach (1) auf jeder Ecke. Wenn ferner auf einer Seite außer den $2x$ Damesteinen, die auf beiden Endpunkten liegen, noch genau y Damesteine vorhanden sind, dann gilt das nach (2) auf jeder Seite mit derselben Anzahl y.

Daher sind insgesamt $4x + 4y$ Damesteine verteilt, also ist $4 \cdot x + 4 \cdot y = 12$, d. h. $x + y = 3$.
Dies kann aber mit den Anzahlen x und y nur durch $0 + 3 = 3$, $1 + 2 = 3$, $2 + 1 = 3$ oder $3 + 0 = 3$ erfüllt werden. Daher kann es nur die vier in a) genannten Verteilungen geben.

Aufgabe 290521:
Die leeren Felder im Bild sind so mit Zahlen 1, 2, 3, 4 auszufüllen, dass jede dieser Zahlen in jeder Zeile und in jeder Spalte genau einmal vorkommt.
Gib alle solche Eintragungen an!
(Ein Beweis, dass es keine weiteren derartigen Eintragungen gibt, wird nicht verlangt.)

1			
		2	
	3		
			4

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

Die Abbildung zeigt alle geforderten Eintragungen:

1	2	4	3
3	4	2	1
4	3	1	2
2	1	3	4

1	4	3	2
4	1	2	3
2	3	4	1
3	2	1	4

Aufgabe 290523:
Gesucht ist eine natürliche Zahl z, die folgende Bedingungen erfüllt:

(1) An der Zehnerstelle von z steht die Ziffer 0.
(2) Wenn man aus z durch Weglassen der Ziffer 0 an der Zehnerstelle eine neue Zahl z' bildet und dann die Summe $z + z'$ ausrechnet so erhält man 5174.

Zeige, dass es nur eine Zahl geben kann, die diese Bedingungen erfüllt, und gib diese Zahl an! Überprüfe auch, dass die von dir angegebene Zahl z die Bedingungen erfüllt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn eine Zahl z die Bedingungen erfüllt, so muss sie vierstellig sein; denn hätte sie mehr Stellen, so erst recht $z + z'$; hätte sie aber 3 oder weniger Stellen, so könnte $z + z'$ höchstens mit der Anfangsziffer 1 vierstellig sein.
Sind nun a, b, c, d die Ziffern von z, so folgt aus (1), dass $c = 0$ ist, und wegen (2) wird das Kryptogramm

$$\begin{array}{ccccc} & \mathrm{a} & \mathrm{b} & 0 & \mathrm{d} \\ + & & \mathrm{a} & \mathrm{b} & \mathrm{d} \\ \hline & 5 & 1 & 7 & 4 \end{array}$$

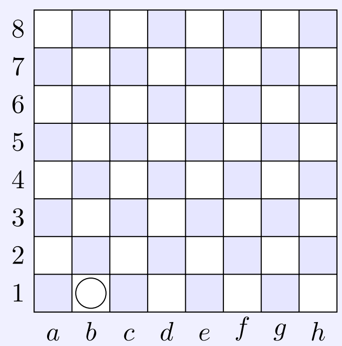
erfüllt. An der Einerstelle ist ersichtlich, dass $2d = 4$ oder $2d = 14$ gilt.
Im Fall $2d = 4$, also $d = 2$, folgt für die Zehnerstelle $b = 7$, und an der Hunderterstelle kann wegen $7 + a = 11$ nur $a = 4$ stehen.
Im Fall $2d = 14$, also $d = 7$, folgte für die Zehnerstelle $b = 6$, für die Hunderterstelle wegen $6 + a = 11$ also $a = 5$, und wegen des Übertrags ergäbe sich in der Tausenderstelle der Summe nicht 5, sondern 6. Also scheidet der Fall $2d = 14$ aus.

Daher können die Bedingungen nur von der Zahl $z = 4702$ erfüllt werden. Die Überprüfung

$$\begin{array}{ccccc} & 4 & 7 & 0 & 2 \\ + & & 4 & 7 & 2 \\ \hline & 5 & 1 & 7 & 4 \end{array}$$

zeigt, dass diese Zahl die Bedingungen erfüllt.

Aufgabe 290524:



Das Bild zeigt ein Spielbrett mit einem Damenstein aus dem Feld b1. Er darf, wie im Damespiel üblich, nur stets einen Schritt nach links oben oder nach rechts oben gezogen werden.
a) Ermittle die Anzahl aller Wege, auf denen der Stein von b1 bis zum Feld g8 gelangen kann!
b) Ermittle die Anzahl aller Wege, auf denen der Stein von b1 bis zum Feld e8 gelangen kann!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

	a	b	c	d	e	f	g	h
8					20		7	
7				14		6		1
6			9		5		1	
5		5		4		1		0
4	2		3		1		0	
3		2		1		0		0
2	1		1		0		0	
1		1		0		0		0

Die gesuchten Anzahlen lassen sich ermitteln, indem man in jedes (weiße) Feld die Anzahl aller derjenigen Wege einträgt, auf denen dieses Feld von b1 aus erreichbar ist, und dabei der Reihe nach die Felder der Zeilen 1, 2,...,8 abarbeitet.
(Wie man feststellen kann, genügt es, nur die in der Abbildung eingetragenen Zahlen zu berücksichtigen.)
Das Feld b1 erhält die Anzahl 1, die anderen Felder der Zeile 1 die Anzahl 0. In jedes weitere Feld wird die Summe der (höchstens zwei) Anzahlen eingetragen, die schräg unter diesem Feld liegen; denn genau aus solchen Feldern führen alle Wege auf das betrachtete Feld.

So kommt man zu den Eintragungen in der Abbildung und damit zu den Angaben:
a) Von b1 nach g8 führen genau 7 Wege.
b) Von b1 nach e8 führen genau 20 Wege.

Aufgabe 300523:

	1	2	3	→ 6
	4	5	9	→ 18
	6	8	7	→ 21
↙ 14	↓ 11	↓ 15	↓ 19	↘ 13

a) Die Zahlen 1, 2, ..., 9 lassen sich so in ein Quadrat von 3 x 3 Feldern eintragen, dass keine zwei der acht Summen in den drei Zeilen, den drei Spalten und den beiden Diagonalen einander gleich sind. Die Abbildung zeigt ein Beispiel hierfür.

Gib zwei weitere Beispiele an, die aus der Abbildung weder durch Spiegeln noch durch Drehen zu erhalten sind und die auch nicht auseinander durch Spiegeln oder Drehen hervorgehen!

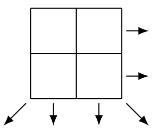
b) Ist es möglich, in ein Quadrat von 2 x 2 Feldern die Zahlen 1, 2, 3, 4 so einzutragen, dass keine zwei der Summen in den Zeilen, den Spalten und den Diagonalen einander gleich sind?
Begründe Deine Antwort!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

a) Zwei Beispiele der geforderten Art:

	2	5	1	→ 8
	3	8	7	→ 18
	6	9	4	→ 19
↙ 15	↓ 11	↓ 22	↓ 12	↘ 14

	7	2	1	→ 10
	4	3	6	→ 13
	5	9	8	→ 22
↙ 9	↓ 16	↓ 14	↓ 15	↘ 18



b) Wäre eine solche Eintragung möglich, so müssten sechs verschiedene Summen auftreten, wie die Abbildung zeigt. Es gibt aber überhaupt nur die fünf verschiedenen Summen

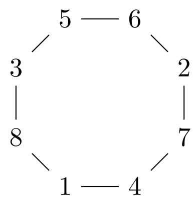
$$1+2=3, \quad 1+3=4, \quad 1+4=2+3=5, \quad 2+4=6, \quad 3+4=7$$

aus je zwei der Zahlen 1, 2, 3, 4. Daher ist eine Eintragung der in b) genannten Art nicht möglich.

Aufgabe 310524:
Klaus möchte an die Ecken eines Achtecks die Zahlen 1, 2, ..., 8 schreiben, an jede Ecke eine Zahl. Er will dann für jede Ecke die Summe aus den drei Zahlen bilden, die an dieser Ecke und an ihren beiden Nachbarecken stehen. Er möchte erreichen, dass jede der so gebildeten acht Summen
a) größer als 11 ist,

b) größer als 13 ist.
Gib für jedes der beiden Vorhaben a), b) an, ob es sich erfüllen lässt!
Ist es erfüllbar, so belege dies durch ein Beispiel mit der Angabe der acht Summen!
Ist das betreffende Vorhaben a) bzw. b) nicht erfüllbar, so begründe, warum nicht!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



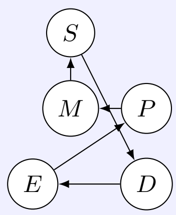
a) Das Vorhaben ist erfüllbar. Ein mögliches Beispiel zeigt die Abbildung; die acht Summen sind

$$8+1+4=13, \quad 1+4+7=12, \quad 4+7+2=13, \quad 7+2+6=15,$$

$$2+6+5=13, \quad 6+5+3=14, \quad 5+3+8=16, \quad 3+8+1=12$$

b) Bei jeder Verteilung der Zahlen 1, 2, ..., 8 auf die Ecken gibt es von den drei Zahlen 1, 2, 3 mindestens zwei, zwischen denen keine oder nur eine Ecke liegt (denn lägen sowohl zwischen 1 und 2 als auch zwischen 1 und 3 als auch zwischen 2 und 3 jeweils mindestens zwei Ecken, so gäbe es insgesamt mindestens $3+3\cdot 2=9$ Ecken).
Bei jeder Verteilung hat daher eine der acht zu bildenden Summen zwei Summanden aus den drei Zahlen 1, 2, 3, der dritte Summand ist nicht größer als 8; diese Summe ist also nicht größer als $2+3+8=13$.
Damit ist bewiesen: Es ist nicht möglich, die Zahlen so zu verteilen, dass jede der zu bildenden Summen größer als 13 ist.

Aufgabe 320521:
Ein Handelsvertreter mit Wohnsitz in Dresden (D) möchte jede der Städte Erfurt (E), Magdeburg (M), Potsdam (P), Schwerin (S) genau einmal aufsuchen und danach zu seinem Wohnsitz zurückkehren.
Die erste auswärtige Stadt dieser Reise soll Erfurt sein, die Reihenfolge der anderen Städte ist noch nicht festgelegt. Die Abbildung zeigt eine mögliche Reiseroute.



Gib alle Reiserouten an, die unter den genannten Bedingungen gewählt werden können!
Wie viele Reiserouten sind das insgesamt? Eine Begründung wird nicht verlangt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es kann unter genau den folgenden Reiserouten gewählt werden:

$$D-E-M-P-S-D, \quad D-E-M-S-P-D, \quad D-E-P-M-S-D,$$

$$D-E-P-S-M-D, \quad D-E-S-M-P-D, \quad D-E-S-P-M-D.$$

Das sind insgesamt 6 Reiserouten. Die Angabe der Routen kann in dieser oder ähnlicher Abkürzung oder zeichnerisch erfolgen.

Aufgabe 330524:
Rita berechnet die drei Zahlen

$$1+9-9+3=a, \qquad 1\cdot 9+9-3=b, \qquad 1\cdot 9\cdot 9\cdot 3=c$$

Sie betrachtet weitere Möglichkeiten, in die Kästchen der Zeile

$$1 \square 9 \square 9 \square 3 =$$

Zeichen einzusetzen, die entweder + oder − oder · sind. Dabei sucht sie alle diejenigen Einsetzungen, bei denen die auszurechnende Zahl größer als 30, aber kleiner als 100 ist.
Finde alle diese Einsetzungen; weise nach, dass du alle gefunden hast!
Addiere die dabei entstandenen auszurechnenden Zahlen!
Zur so gefundenen Summe addiere weiterhin das Produkt der beiden kleinsten unter den zwischen 30 und 100 gefundenen Zahlen! Addiere schließlich die oben als a, b und c berechneten Zahlen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die auszurechnende Zahl kann nur dann größer als 30 sein, wenn mindestens in einem der beiden Kästchen zwischen 9 und 9 bzw. zwischen 9 und 3 das Zeichen · steht.
Steht es zwischen 9 und 3, so kann davor nicht − stehen (es würde eine zu große Zahl subtrahiert), aber auch nicht · (denn 1 durch eine Rechenoperation +, − oder · mit $9 \cdot 9 \cdot 3 = 243$ verbunden, gibt kein Ergebnis zwischen 30 und 100). Also muss davor dann + stehen.

Ferner kann dann zwischen 1 und 9 nicht − stehen (wieder würde eine zu große Zahl subtrahiert). Steht das Zeichen zwischen 9 und 9, so kann danach nur + oder − stehen (weil · eben schon widerlegt wurde) und davor nicht − (es würde eine zu große Zahl subtrahiert).

Also entstehen genau bei den Ersetzungen

$$\begin{aligned} 1+9+9\cdot 3 &= 37,\\ 1\cdot 9+9\cdot 3 &= 36,\\ 1+9\cdot 9+3 &= 85,\\ 1\cdot 9\cdot 9+3 &= 84,\\ 1+9\cdot 9-3 &= 79,\\ 1\cdot 9\cdot 9-3 &= 78 \end{aligned}$$

auszurechnende Zahlen zwischen 30 und 100.

Mit der Summe s dieser Zahlen ergeben die weiteren geforderten Additionen $s = 37+36+85+84+79+78 = 399$; $36 \cdot 37 = 1332$, $a + b + c = 4 + 15 + 243 = 262$, in der Summe 1993.

I.II. Logik, Mengen

Runde 1

Aufgabe V00508:
Drei Freunde sitzen in einer Gaststätte. Jeder hat 10 DM zu zahlen. Das sind insgesamt 30 DM. Der Wirt beauftragt jedoch den Ober, den Gästen 5 DM zurückzuzahlen.
Der Ober gibt jedem Gast aber nur 1 DM zurück, also insgesamt 3 DM, und behält 2 DM für sich. Die Freunde haben also für die Zeche zusammen 27 DM bezahlt. 2 DM hat der Ober behalten. Das sind 29 DM.
Wo ist die restliche Mark?

Lösung von Steffen Polster:
Jeder Gast hatte $(30 - 5) : 3 = 8\frac{1}{3}$ DM zu bezahlen, zahlte jedoch $(30 - 3) : 3 = 9$ DM, also $\frac{2}{3}$ DM zu viel.
Das sind $\frac{2}{3} \cdot 3 = 2$ DM, die der Ober für sich behielt. Die Bezugnahme auf die restliche 1 DM ist eine Irreführung.

Aufgabe 020515:
An einem Tisch sitzen sieben Schüler. Einer hört auf den Vornamen Fred, einer heißt Willi, vier heißen Lutz und einer heißt Christian.
Weiter wissen wir nur, dass unter ihnen zwei Brüder mit dem Familiennamen Scheibner, einer mit dem Zunamen Franke und vier Schüler mit dem Namen Schulz sind.

a) Von wem können wir mit absoluter Sicherheit Vor- und Zunamen angeben?
b) Warum muss er so heißen?

Lösung von Steffen Polster:
a) Einer der Schüler muss Lutz Schulz heißen.

b) Vier der sieben Schülern heißen mit Vornamen Lutz. Ebenso heißen vier von sieben Schülern mit Nachnamen Schulz.
Nur drei Schüler haben nicht den Nachnamen Schulz. Da aber vier Jungen Lutz heißen, muss mindestens einer den Familiennamen Schulz tragen.

Aufgabe 050512:

```
1 2 = 3
1 2 3 = 4
1 2 3 4 = 5
1 2 3 4 5 = 6
1 2 3 4 5 6 = 7
1 2 3 4 5 6 7 = 8
1 2 3 4 5 6 7 8 = 9
1 2 3 4 5 6 7 8 9 = 10
```

Setze auf der linken Seite Rechenzeichen derart, dass wahre Ausagen in Form von Gleichungen entstehen.
(Nebeneinanderstehende Ziffern dürfen als eine Zahl betrachtet, doch die Reihenfolge darf nicht geändert werden. Du darfst auch Klammern verwenden. Zu jeder Aufgabe genügt eine Lösung.)

Lösung von Steffen Polster:
Mögliche Lösungen sind:

$$1+2=3$$
$$12:3=4$$
$$(1+2)\cdot 3-4=5$$
$$1+2\cdot 3+4-5=6$$
$$1+2-3-4+5+6=7$$
$$1+2+3-4+5-6+7=8$$
$$1\cdot 2+3+4+5-6-7+8=9$$
$$1\cdot 2+3+4+5+6+7-8-9=10$$

Aufgabe 100514:
Hans und Günter wollen Briefmarken tauschen. Auf die Frage nach der Anzahl seiner Tauschmarken antwortet Günter:

„Ich habe heute polnische, sowjetische und bulgarische Briefmarken und sonst keine anderen zum Tausch anzubieten. Es sind insgesamt 30 Stück.
Die Anzahl der sowjetischen Marken ist größer als die der polnischen, aber kleiner als die der bulgarischen. Die Anzahl der bulgarischen Marken dagegen ist größer als das Vierfache, aber kleiner als das Fünffache der Anzahl meiner sowjetischen Marken.“

Gib alle Möglichkeiten an, die folgende Tabelle so auszufüllen, dass diese Bedingungen erfüllt sind!

Anzahl der polnischen Marken	...
Anzahl der sowjetischen Marken	...
Anzahl der bulgarischen Marken	...
Ungleichung zwischen der Anzahl der sowjetischen und der Anzahl der polnischen Marken	...
Ungleichung zwischen der Anzahl der sowjetischen und der Anzahl der bulgarischen Marken	...
Ungleichung zwischen der Anzahl der bulgarischen Marken und dem Vierfachen der Anzahl der sowjetischen Marken	...
Ungleichung zwischen der Anzahl der bulgarischen Marken und dem Fünffachen der Anzahl der sowjetischen Marken	...

Lösung von Steffen Polster:
Die Anzahl der sowjetischen Marken sei s, die der polnischen p und die der bulgarischen b.Dann gilt nach der Aufgabenstellung

$$s + p + b = 30 \quad ; \quad p < s < b \quad ; \quad 4s < b < 5s$$

s, b und p sind größer als 0. p muss aber kleiner als 5 sein, da andernfalls s mindestens 6 und $b > 4s > 24$ wäre. Damit würde die Summe $p + s + b$ größer als 30 sein.

Addiert man zur letzten Ungleichung p und b, so ergibt sich $4s + s + p < s + p + b = 30 < 5s + s + p$, also $5s < 30 - p < 6s$. Das bedeutet für die möglichen Werte für p:

p	1	2	3	4
$5s < 30 - p < 6s$	$5s < 29 < 6s$	$5s < 28 < 6s$	$5s < 27 < 6s$	$5s < 26 < 6s$
mögliche Werte für s	5	5	5	5

D. h., s ist stets 5. Damit erhält man für die Anzahl der bulgarischen Briefmarken aus $b = 30 - p - s$ für $p = 1,2,3,4$ die Werte $b = 24,23,22,21$.

Es gibt damit genau die folgenden 4 Tripel (p,s,b): (1,5,24), (2,5,23), (3,5,22), (4,5,21), die auch alle Bedingungen erfüllen, wie die Tabelle zeigt.

Anzahl der polnischen Marken	1	2	3	4
Anzahl der sowjetischen Marken	5	5	5	5
Anzahl der bulgarischen Marken	24	23	22	21
Ungleichung zwischen der Anzahl der sowjetischen und der Anzahl der polnischen Marken	$5 > 1$	$5 > 2$	$5 > 3$	$5 > 4$
Ungleichung zwischen der Anzahl der sowjetischen und der Anzahl der bulgarischen Marken	$5 < 24$	$5 < 23$	$5 < 22$	$5 < 21$
Ungleichung zwischen der Anzahl der bulgarischen Marken und dem Vierfachen der Anzahl der sowjetischen Marken	$24 > 4 \cdot 5 = 20$	$23 > 20$	$22 > 20$	$21 > 20$
Ungleichung zwischen der Anzahl der bulgarischen Marken und dem Fünffachen der Anzahl der sowjetischen Marken	$24 < 5 \cdot 5 = 25$	$23 < 25$	$22 < 25$	$21 < 25$

Aufgabe 110512:
Rolf behauptet, dass sich eine Additionsaufgabe mit der Summe 1000 bilden lässt, wobei sämtliche Summanden natürliche Zahlen sind, in deren dekadischer Darstellung ausschließlich die Ziffer 8 auftritt, und zwar insgesamt genau 8 mal.

Stelle fest, ob Rolfs Behauptung richtig ist!
Wenn sie es ist, so gib alle derartigen Additionsaufgaben an und ordne darin die Summanden der Größe nach, beginnend mit dem größten!

Lösung von Steffen Polster:
Das Ergebnis der Additionsaufgabe soll auf Null enden, was nur möglich ist, wenn mindestens 5 Summanden auf 8 enden. 10 Summanden oder mehr sind nach der Aufgabenstellung nicht möglich.

Um 8 Ziffern 8 in 5 Summanden unterzubringen, müssen 3 Ziffern 8 als Zehner, Hunderter oder Tausender auftreten. Damit gibt es nur die Möglichkeiten

$$88 + 88 + 88 + 8 + 8 = 280 \tag{1}$$
$$888 + 88 + 8 + 8 + 8 = 1000 \tag{2}$$
$$8888 + 8 + 8 + 8 + 8 = 8920 \tag{3}$$

Nur (2) ergibt eine Summe von 1000 und ist damit die einzige mögliche Lösung. Rolf hat recht, es gibt so eine Additionsaufgabe und zwar genau eine.

Aufgabe 120512:
Heinz, Gerd und Jochen haben sich in einem Zeltlager für Thälmann-Pioniere kennengelernt. Von diesen drei Jungen ist folgendes bekannt:

(1) Mindestens zwei von ihnen spielen Tischtennis, mindestens zwei Fußball.
(2) Einer von ihnen wohnt in Berlin, einer in Leipzig und einer in Rostock. Keiner von ihnen wohnt gleichzeitig in zwei dieser Orte.
(3) Nur Heinz und der Berliner sind Tischtennisspieler.
(4) Nur Gerd und der Leipziger sind Fußballspieler.
(5) Jochen, der Handball spielt, ist älter als der Leipziger.
(6) Keiner der Tischtennisspieler spielt auch Handball.
(7) Der Handballspieler ist nicht der älteste der drei Jungen.

Gib von jedem der drei Jungen an, wo er wohnt und welche der drei Sportarten er betreibt!
Wer ist der älteste und wer der jüngste der drei Jungen?

Lösung von Steffen Polster:
Aus (2) und (4) bzw. (5) folgen, dass Gerd und Jochen nicht in Leipzig wohnen, also Heinz.
Dann folgt aus (4), dass Gerd und Heinz Fußball spielen; außerdem aus (5) und (6), dass Jochen kein Tischtennisspieler ist und somit Heinz und Gerd Tischtennis spielen.

Ergebnis: Heinz und Gerd spielen sowohl Fußball als auch Tischtennis; Jochen ist der Handballspieler.

Nach (3) muss Gerd nun aus Berlin sein, also Jochen in Rostock, da (siehe oben) Heinz in Leipzig wohnt.
Weiterhin ist ist Jochen nach (5) älter als Heinz (Leipziger) und nach (6) Jochen (Handball) nicht der Älteste.
Damit ergibt ist Gerd der Älteste, Jochen der Mittlere und Heinz der Jüngste.

Aufgabe 170512:
Von drei Pionieren, die sich in einem Rätelager treffen, ist folgendes bekannt:

(1) Ihre Vornamen sind Frank, Gerd und Harald.
(2) Ihre Familiennamen lauten Schulze, Müller und Krause.
(3) Frank heißt mit Familiennamen nicht Krause.
(4) Der Vater von Gerd ist Offizier der NVA.
(5) Gerd besucht die 6. Klasse, der Pionier mit dem Familiennamen Krause geht in die 7. Klasse.
(6) Der Vater des Pioniers mit dem Familiennamen Schulze arbeitet als Dreher.

Wie heißen diese drei Pioniere mit Vor- und Zunamen?

Lösung von Steffen Polster:
Da Frank wegen (3) und Gerd wegen (5) nicht Krause heißen, ist Haralds Familienname Krause. Gerd kann nicht Schulze heißen nach Bedingung (4) und (6). Er heißt Gerd Müller. Damit ist Franks Familienname Schulze.

D. h., die Namen sind Frank Schulze, Gerd Müller, Harald Krause.

Aufgabe 180511:
Gerda, Peter und Renate sehen auf dem Tisch einen Teller mit Haselnüssen stehen. Sie wissen nicht, wie viel Nüsse es sind.

Gerda meint: „Wenn man fünfmal nacheinander 19 Nüsse vom Teller wegnimmt, bleiben noch mehr als 5 Nüsse auf dem Teller zurück."
Renate meint: „Wollte man aber fünfmal nacheinander 20 Nüsse von dem Teller wegnehmen, so würden die Nüsse dafür nicht ausreichen."
Peter sagt: „Eine von euch beiden hat bestimmt recht."

Nach dem Auszählen wurde festgestellt, dass Peter sich geirrt hatte.
Wie viel Nüsse lagen insgesamt auf dem Teller?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Gerda hatte wegen $5 \cdot 19 + 5 = 100$ gemeint, es seien mehr als 100 Nüsse auf dem Teller gewesen. Renate hatte wegen $5 \cdot 20 = 100$ gemeint, es seien weniger als 100 Nüsse gewesen. Da Peter sich geirrt hatte, hatte keines der beiden Mädchen recht. Daher lagen genau 100 Nüsse auf dem Teller.

Aufgabe 190513:
Kurt, Peter und Konrad sind jeweils in genau einer der drei Arbeitsgemeinschaften „Mathematik", „Biologie", „Zeichnen". Ferner ist bekannt:

(1) Peter geht häufiger zum Schwimmen als der Junge aus der AG „Mathematik".
(2) Der Junge aus der AG „Mathematik" und Konrad haben nicht gleich viele Urkunden bei einem Sportwettkampf erhalten.
(3) Peter geht in eine niedrigere Klasse als der Junge aus der AG „Biologie".
Welcher der drei Jungen besucht die AG „Mathematik", welcher die AG „Biologie" und welcher die AG „Zeichnen"?

Lösung von Steffen Polster:
Aus den ersten beiden Aussagen folgt, dass nur Kurt die AG „Mathematik" besucht. Damit ergibt die dritte Aussage dann, dass Peter gern zeichnet und Konrad sich besonders für Biologie interessiert.

Aufgabe 200514:
Von den sieben Schülern Annette, Beate, Christine, Dieter, Frank, Gerd und Hans hatte jeder in mindestens einem der beiden Fächer Mathematik und Russisch die Note 1.
Auf die Frage, wer in genau einem dieser beiden Fächer die Note 1 hat, meldeten sich von diesen Schülern nur Annette, Christine, Frank, Gerd und Hans. In Mathematik hatten von ihnen nur Beate, Christine, Dieter und Frank die Note 1.
Ermittle aus diesen Angaben alle diejenigen der sieben Schüler, die

a) in Mathematik und in Russisch,
b) in Mathematik, aber nicht in Russisch,
c) in Russisch, aber nicht in Mathematik die Note 1 hatten!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
b) Von allen denjenigen unter den sieben Schülern, die in Mathematik die Note 1 hatten, haben sich genau Christine und Frank gemeldet, als gefragt wurde, wer in genau einem der beiden Fächer die Note 1 hat. Also hatten genau diese beiden Schüler in Mathematik, aber nicht in Russisch die Note 1.

a) Genau die übrigen unter denjenigen Schülern, die in Mathematik die Note 1 hatten, d.s. genau Beate und Dieter, hatten folglich in Mathematik und in Russisch die Note 1.

c) Genau diejenigen unter den sieben Schülern, die nicht in Mathematik die Note 1 hatten, d.s. genau Annette, Gerd und Hans, hatten in Russisch, aber nicht in Mathematik die Note 1.

Aufgabe 210514:
Eine Aufgabe aus einer Leningrader Mathematikolympiade:

Ein „Oktoberkind“ (das ist ein Jungpionier bis zur 3. Klasse), ein Pionier und ein Komsomolze fuhren in ein Pionierlager. Ihre Vornamen sind (nicht unbedingt in derselben Reihenfolge) Kolja, Igor und Sascha. Aus ihren Gesprächen im Zug erfuhren wir:

(1) Kolja und der Komsomolze sind zwei begeisterte Angler.
(2) Das Oktoberkind wohnt in Leningrad; Sascha auch, aber in einer anderen Straße.
(3) Sascha ist jünger als der Komsomolze.

Welchen Vornamen hat das Oktoberkind, welchen Vornamen hat der Pionier, und welchen Vornamen hat der Komsomolze?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Aus (1) folgt: Der Komsomolze heißt nicht Kolja.
Aus (3) folgt: Der Komsomolze heißt nicht Sascha. Also hat er den Vornamen Igor. Daher heißt das Oktoberkind nicht Igor.
Aus (2) folgt: Das Oktoberkind heißt nicht Sascha. Somit hat es den Vornamen Kolja. Damit verbleibt für den Pionier nur der Vorname Sascha.

Aufgabe 230511:
Bernd, Peter und Fred nahmen mit Erfolg an der Schulolympiade teil. Jeder von ihnen bekam genau eine der folgenden drei Auszeichnungen: 1. Preis, 2. Preis oder Diplom. Ferner ist bekannt:

(1) Der Schüler mit den 2. Preis ist älter als Bernd.
(2) Fred erhielt nicht den 1. Preis.
(3) Bernd gehört keiner mathematischen Arbeitsgemeinschaft an.
(4) Der Schüler, der den 1. Preis errang, ist in einer mathematischen Arbeitsgemeinschaft.

Wer von ihnen erhielt den 1. Preis, wer von ihnen erhielt den 2. Preis, und wer von ihnen erhielt das Diplom? Begründe deine Antwort!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Aus (3) und (4) folgt, dass Bernd nicht den 1. Preis errang. Da genau einer der drei Schüler einen 1. Preis erhielt, folgt dann aus (2): Peter erhielt den 1. Preis. (5)
Wegen (1) erhielt Bernd nicht den 2. Preis; wegen (5) erhielt auch Peter nicht den 2. Preis. Daraus folgt: Fred erhielt den 2. Preis. (6)
Da jeder der drei Schüler genau eine Auszeichnung bekam, folgt dann: Bernd bekam das Diplom.

Aufgabe 250512:
Bei einem Gruppenfest im Pionierlager verabreden 17 Kinder folgendes Spiel:
Es wird im Kreis herum immer wieder von 1 bis 7 gezählt, wobei sich jedes siebente Kind aus dem Kreis entfernen soll und dann auch beim weiteren Zählen nicht mehr berücksichtigt wird. Wer zuletzt übrigbleibt, hat verloren und muss einen Pfand geben.

Frank Pfiffig darf vorschlagen, bei welchem Kind mit dem Abzählen begonnen werden soll. Er will seinen Freund Norbert Nörgel ärgern und beginnt mit dem Abzählen so, dass dieser verliert.
Wie kann er das erreichen?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Bezeichnet man die am Spiel beteiligten Kinder mit den Zahlen 1 bis 17 und beginnt bei 1 mit dem Abzählen, so findet man durch Probieren, dass das Kind mit der Nr. 2 als Verlierer übrigbleibt. Das Probieren kann z. B. in einer Tabelle der folgenden Art geschehen:

Pionier Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
scheidet als ...ter aus	16		5	3	14	7	1	11	10	12	9	4	6	2	15	13	8

Frank Pfiffig kann also sein Ziel erreichen, indem er mit den Abzählen einen Platz vor seinem Freund Herbert Nörgel beginnt.

Aufgabe 260511:
Die Mädchen Grit, Regina und Beate tragen jede eine einfarbige Bluse. Von diesen drei Blusen ist eine gelb, eine rot und eine blau.
Grit stellt fest, dass keines der Mädchen eine Bluse von der Farbe trägt, die den gleichen Anfangsbuchstaben wie der Vorname des Mädchens hat.
Das Mädchen mit der roten Bluse antwortet darauf: „Das hatte ich noch gar nicht bemerkt, aber du hast recht. Grit!“
Welche Bluse trägt jedes der Mädchen?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Aus Grits Feststellung folgt:
(1) Grits Bluse ist nicht gelb.
(2) Regina hat nicht die rote Bluse an.
(3) Beate trägt nicht die blaue Bluse.
Da das Mädchen mit der roten Bluse nicht Grit ist (denn es hatte Grits Feststellung noch nicht bemerkt), folgt:
(4) Grits Bluse ist nicht rot.
Aus (1) und (4) folgt, dass Grit die blaue Bluse trägt. Dann aber muss wegen (2) Regina die gelbe Bluse anhaben. Daraus folgt weiter, dass Beate die rote Bluse trägt.

Aufgabe 260514:
Der Pionier Klaus Knobler tritt als Zauberkünstler vor seiner Pioniergruppe auf. Nachdem ihm die Augen verbunden wurden, bittet er einen Zuschauer, aus einer Streichholzschachtel eine beliebige ungerade Anzahl von Hölzern, jedoch mindestens 13, zu entnehmen.
Diese Hölzer sollen in zwei parallelen Reihen auf den Tisch gelegt werden, wobei die obere Reihe genau ein Streichholz mehr enthalten soll als die untere. Nachdem dies geschehen ist, lässt Klaus Knobler

(1) irgendeine von ihm selbst genannte Anzahl a (mindestens 1, jedoch weniger als 7) Streichhölzer aus der oberen Reihe fortnehmen, dann
(2) aus der unteren Reihe so viele Streichhölzer wegnehmen, wie oben noch liegen, und dann
(3) aus der oberen Reihe alle übrigen Streichhölzer entfernen.

Danach nennt Klaus Knobler den staunenden Zuschauern die Anzahl der auf dem Tisch verbliebenen Hölzer. Wie groß ist sie?
Durch welche Überlegung kann Klaus Knobler sie finden, ohne die Anzahl der zu Beginn auf dem Tisch liegenden Hölzer zu kennen?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Klaus Knobler kann folgendermaßen überlegen:

Angenommen, zu Beginn haben in der oberen Reihe außer den a Streichhölzern noch weitere b Hölzer gelegen. Dann lagen also anfangs in der oberen bzw. unteren Reihe $\begin{matrix} a+b \\ a+b-1 \end{matrix}$ Hölzer. Nach Ausführen von (1) liegen in der oberen bzw. unteren Reihe $\begin{matrix} b \\ a+b-1 \end{matrix}$ Hölzer. Nach Ausführen von (2) liegen in der oberen bzw. unteren Reihe $\begin{matrix} b \\ a-1 \end{matrix}$ Hölzer. Schließlich verbleiben nach Ausführen von (3) noch $a-1$ Hölzer auf dem Tisch. Klaus Knobler braucht also nur den Vorgänger der von ihm bei (1) genannten Zahl a zu bilden und als Anzahl der auf dem Tisch verbliebenen Streichhölzer anzugeben.

Aufgabe 270514:
a) Die Figur der Abbildung a soll so „in einem Zuge“ gezeichnet werden, dass dabei keine Linie zweimal durchlaufen wird.
Ein solcher „Zug“ kann z. B. im Punkt L beginnen und über die Punkte M, J, K, L, B, A, H, G, H, J, F, G, F, M, D, F, E, D, C, B, H, K, B, C, D nach Punkt L zurückführen.
Suche mindestens einen weiteren derartigen „Zug“ und schreibe ihn wie im Beispiel mit Hilfe der bei ihm zu durchlaufenden Punkte auf!
b) Auch die Figur der Abbildung b lässt sich in einem Zuge so zeichnen, dass jede Linie genau einmal durchlaufen wird. Gib mindestens einen derartigen „Zug“ an!
c) Vergleiche Anfangs- und Endpunkt der von dir in den Abbildungen a und b gefundenen Wege! Was stellst du fest?

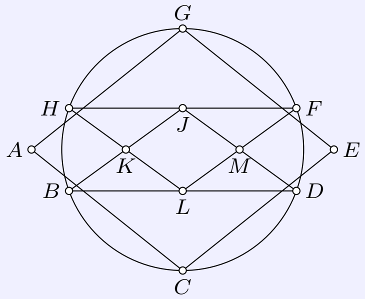


Abbildung a)

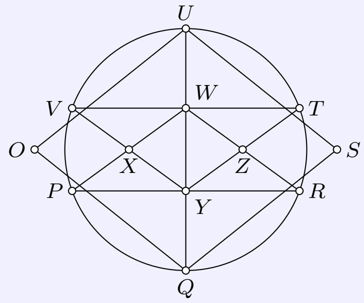


Abbildung b)

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es gibt zu a) und b) jeweils mehrere Lösungen, z. B.

a) $J, M, L, K, J, H, A, B, C, B, L, D, C, D, M, F, D, E, F, G, H, B, K, H, G, F, J,$

b) U, V, U, W, V, X, W, Y, X, P, O, V, P, Y, Q, P, Q, R, S, T, R, Z, T, U, T, W, Z, Y, R, Q.
Für alle Lösungen gelten die Aussagen zu c).

c) Jeder Zug bei a) endet im gewählten Anfangspunkt. (Man sagt dafür auch: Der Zug ist ein „geschlossener Weg“. Dabei kann jeder Punkt Anfangs- und damit auch Endpunkt sein.)
Die Züge bei b) beginnen alle entweder im Punkt U oder im Punkt Q und enden je nachdem im Punkt Q oder im Punkt U. Anfangs- und Endpunkt fallen also bei b) nicht zusammen, es handelt sich um einen „offenen Weg“.

Aufgabe 300512:
Die Schüler Arnim, Bert, Conny und Detlef wohnen in verschiedenen Städten der DDR, und zwar jeder in genau einer der Städte Dresden, Magdeburg, Potsdam, Schwerin. Darüber macht Arnim folgende vier Aussagen:

(1) Ich bin weder aus Potsdam noch aus Dresden.
(2) Bert ist entweder aus Potsdam oder aus Schwerin.
(3) Conny ist weder aus Dresden noch aus Magdeburg.
(4) Detlef ist entweder aus Potsdam oder aus Magdeburg.

Stelle fest, ob alle diese Aussagen Arnims gleichzeitig wahr sein können! Begründe deine Feststellung!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wären alle Aussagen wahr, dann wäre wegen (1) Arnim nicht aus Dresden, wegen (2) Bert ebenfalls nicht. Wegen (3) wohnte auch Conny nicht in Dresden und wegen (4) schließlich auch Detlef nicht.

Das steht aber im Widerspruch zu den Angaben der Aufgabe. Folglich können nicht alle vier Aussagen Arnims gleichzeitig wahr sein.

Aufgabe 310512:
Maik trifft sich mit sechs Mitschülern. Einer davon hat den Vornamen Heino, einer den Vornamen Torsten, und vier heißen mit Vornamen Steffen. Ferner haben vier von diesen sieben Schülern den Familiennamen Lehmann, einer heißt mit Familiennamen Krull und zwei haben den Familiennamen Pfitzner, aber unterschiedliche Vornamen.

a) Zeige, dass für zwei der sieben Schüler der Vor- und Familienname eindeutig aus diesen Angaben hervorgeht! Gib den Vor- und Familiennamen dieser beiden Schüler an!
b) Untersuche, ob noch für weitere Schüler Vor- und Familiennamen eindeutig aus den Angaben hervorgeht oder ob für jeden weiteren Schüler mehr als eine Möglichkeit besteht, die obigen Angaben durch Zusammenstellen von Vor- und Familiennamen zu erfüllen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Wenn kein Schüler Steffen Lehmann hieße, so wären die vier Schüler Steffen und die vier Schüler Lehmann acht verschiedene Schüler, was nicht möglich ist. Also heißt mindestens einer der Schüler Steffen Lehmann.
Wenn von den anderen sechs Schülern ebenfalls keiner Steffen Lehmann hieße, so wären drei Schüler Steffen und drei Schüler Lehmann bereits diese sechs verschiedenen Schüler. Also käme der Familienname Pfitzner nur für Schüler mit dem Vornamen Steffen in Betracht, was ebenfalls den Angaben widerspricht.
Somit heißt noch mindestens ein zweiter Schüler Steffen Lehmann.

b) Für die übrigen fünf Schüler entspricht es aber z. B. sowohl den Angaben zu den Vornamen
Steffen, Steffen, Maik, Heino, Torsten die Familiennamen Lehmann, Lehmann, Pfitzner, Pfitzner, Krull als auch die Familiennamen Pfitzner, Krull, Lehmann, Lehmann, Pfitzner
zusammenzustellen. Daher geht für keinen der übrigen fünf Schüler der Vor- und Familienname eindeutig aus den Angaben hervor.

Aufgabe 310514:
Thomas schreibt die Zahl 2375246895 an die Tafel und erklärt, sie sei durch Hintereinanderschreiben von drei Zahlen entstanden. Diese drei Zahlen habe er der Größe nach geordnet aufgeschrieben, beginnend mit der kleinsten. Keine der drei Zahlen enthalte eine Ziffer zweimal.

a) Sebastian vermutet, die drei Zahlen seien 2, 375 und 246895; denn sie entsprechen den Angaben von Thomas.
Werner entgegnet: „Die Angaben von Thomas können auch durch drei andere Zahlen erfüllt werden.“
Stimmt das? Begründe Deine Antwort!

b) Ändere in der von Thomas angeschriebenen Zahl eine Ziffer so, dass es dann nur noch genau eine Möglichkeit gibt, die Angaben durch drei Zahlen zu erfüllen. Nenne (bei der von Dir gewählten Änderung) diese eine Möglichkeit für die drei Zahlen!
Ein Begründung wird nicht verlangt.

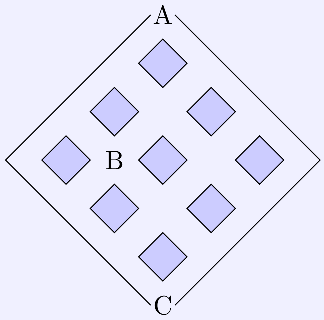
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Die Angaben können auch durch drei andere Zahlen erfüllt werden. Zur Begründung genügt es, zwei der folgenden Möglichkeiten anzugeben (wobei zu 2, 375, 246895 ein Hinweis genügt):

$$2, 3, 75246895; \quad 2, 37, 5246895; \quad 2, 375, 246895; \quad 2, 3752, 46895;$$

$$23, 75, 246895; \quad 23, 752, 46895; \quad 237, 524, 6895$$

b) Ändert man z. B. die Ziffer 4 in 6, wählt also 2375266895 als anzuschreibende Zahl, so gibt es nur die Möglichkeit, dass 237, 526, 6895 die drei Zahlen sind.

Aufgabe 340514:
In das Gefäß aus der Abbildung können Kugeln durch die Öffnung A hineinfallen. Auf ihrem Weg nach unten werden sie jedesmal, wenn sie an die obere Ecke eines Hindernisses kommen, entweder nach links oder nach rechts abgelenkt.



a) Wie viele derartige Wege von A nach B gibt es insgesamt?
b) Wie viele derartige Wege von B nach C gibt es insgesamt?
c) Wie viele derartige Wege von A über B nach C gibt es insgesamt?
d) Wie viele derartige Wege von A nach C gibt es insgesamt?

Erläutere für wenigstens eine der Teilaufgaben a), b), c), d), wie du die gesuchte Anzahl möglicher Wege gefunden hast!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Zur Beschreibung des Weges einer Kugel werde die Ablenkung nach links bzw. rechts durch l bzw. r angegeben.

a) Auf jedem Weg von A nach B kommt man dreimal an eine Weggabelung. Um B zu erreichen, muss man an genau zwei Gabelungen nach links, an genau einer Gabelung nach rechts gehen. Daher gibt es genau die 3 Wege llr, lrl, rll.

b) Um von B nach C zu gelangen, muss man genau einmal nach links und genau zweimal nach rechts gehen. (Dabei handelt es sich in jedem dieser drei Fälle entweder um die Entscheidung an einer Weggabelung oder um die Fortsetzung, die durch den Rand des Gefäßes eindeutig erzwungen ist.)
Hiernach gibt es genau die 3 Wege lrr, rlr, rrl.

c) Um von A über B nach C zu gelangen, hat man nach jedem der drei Wege aus a) die Möglichkeit, jeden der drei Wege aus b) anzuschließen. Also gibt es insgesamt $3 \cdot 3 = 9$ derartige Wege.

d) Um von A nach C zu gelangen, muss man genau dreimal nach links und genau dreimal nach rechts gehen (jeweils entweder bei einer Weggabelung oder durch den Rand des Gefäßes erzwungen). Damit gibt es genau die Wege
beginnend mit lll: lllrrr,
beginnend mit llr: llrlrr, llrrlr, llrrrl,
beginnend mit lrr: lrllrr, lrlrlr, lrlrrl,
beginnend mit lrr: lrrllr, lrrlrl, lrrrll,
beginnend mit rll: rlllrr, rllrlr, rllrrl,
beginnend mit rlr: rlrllr, rlrlrl, rlrrll,
beginnend mit rrl: rrlllr, rrllrl, rrlrll,
beginnend mit rrr: rrrlll,
das sind insgesamt 20 Wege.

Runden 2 & 3

Aufgabe 040524:
Während einer Vorstellung im „Theater der Jungen Welt“ in Leipzig blieben einige Plätze frei. Alfred zählte 17, Annerose dagegen 16 freie Plätze.
Heinz sagte, Alfred habe sich auf jeden Fall verzählt.
Wie konnte Heinz seine Aussage begründen, wenn er wusste, dass es im Theater 520 Plätze gibt und in dieser Vorstellung 68 Mädel mehr als Jungen anwesend waren?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn die Anzahl der Jungen ungerade ist, so ist es auch die der Mädchen. Die Summe zweier ungerader Zahlen ist aber eine gerade Zahl.

Wenn die Anzahl der Jungen gerade ist, so ist es auch die der Mädchen. Die Summe zweier gerader Zahlen ist ebenfalls eine gerade Zahl. Die Anzahl der freien Plätze muss somit gerade sein, denn die Differenz zweier gerader Zahlen ist wieder eine gerade Zahl.

Oder: Ist a die Anzahl der Jungen, so ist $2a + 68$ die Anzahl der Jungen und Mädel im Theater. Die Anzahl der freien Plätze muss somit gerade sein.

Aufgabe 070524:
Nachdem der Mathematiklehrer sämtliche 4 Olympiadeaufgaben seiner 36 Schüler korrigiert und ausgewertet hatte, gab er den Mitgliedern seiner Arbeitsgemeinschaft die folgende Tabelle und führte dazu aus:

„Die Anzahl der Schüler, die keine Aufgabe richtig lösten, ist gleich der Anzahl derjenigen, die alle Aufgaben richtig lösten.
Die Anzahl derjenigen, die nur 1 Aufgabe richtig bewältigten, ist doppelt so groß wie die An- zahl der Teilnehmer, die alle Aufgaben richtig lösten, und gleich der Anzahl derjenigen, die genau 3 richtige Lösungen abgaben.
Die Anzahl der richtigen (s. Spalte III, Zeile f) ist genau dreimal so groß wie die Anzahl der Teilnehmer mit genau 2 richtigen Lösungen und doppelt so groß wie die Anzahl aller Teilnehmer. Mit diesen Angaben seid ihr in der Lage, die Tabelle zu vervollständigen.“

	I Anzahl der richtigen Lösungen pro Schüler	II Anzahl der Schüler	III Anzahl der richtigen Lösungen insgesamt
a)	0	...	...
b)	1	...	...
c)	2	...	...
d)	3	...	...
e)	4	...	...
f)	Gesamtzahlen	36	...

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Da die Anzahl aller Teilnehmer 36 ist, ist die Anzahl der richtigen Lösungen insgesamt laut Aufgabe 72 und die Anzahl der Schüler mit genau 2 richtigen Lösungen 72 = 3 - 24.

Da die Anzahl der Schüler in Zeile a) gleich der in Zeile 0) und gleich der Hälfte der Anzahlen in Zeile b) bzw. in d) sein soll, sind die restlichen 12 Schüler wie folgt zu verteilen, und die Tabelle kann danach vervollständigt werden:

	I Anzahl der richtigen Lösungen pro Schüler	II Anzahl der Schüler	III Anzahl der richtigen Lösungen insgesamt
a)	0	2	0
b)	1	4	4
c)	2	24	48
d)	3	4	12
e)	4	2	8
f)	Gesamtzahlen	36	72

Aufgabe 080523:
Heinz fragt Gerd: „Wie viel Jahre bist du alt?“
Gerd antwortet: „Meine Schwester ist viermal so alt wie mein Bruder. Ich bin mehr als doppelt, aber weniger als viermal so alt wie meine Schwester. Zusammen sind wir drei Geschwister 17 Jahre alt.“

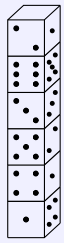
Berechne, wie viel Jahre Gerd alt ist!
(Alle Altersangaben sollen in vollen Jahren erfolgen.)

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Da Gerd mehr als doppelt so alt ist wie seine Schwester und seine Schwester viermal so alt ist wie ihr Bruder, muss Gerd mehr als achtmal so alt sein wie sein Bruder.
Wäre sein Bruder zwei oder mehr Jahre alt, dann müsste Gerd mehr als 16 Jahre alt sein. Das widerspräche der Angabe, dass die Summe der Jahre 17 beträgt.

Also ist der Bruder 1 Jahr alt, die Schwester demnach 4 Jahre, und wegen 17 - 1 - 4 = 12 muss Gerd 12 Jahre alt sein.

Wegen $4 \cdot 4 > 12$ ist auch die Bedingung erfüllt, dass Gerd weniger als viermal so alt ist wie seine Schwester. Die angegebene Lösung genügt damit allen Bedingungen und ist zugleich die einzig mögliche.

Aufgabe 090521:
Auf einem Tisch sind sechs gleichgroße Spielwürfel so übereinandergesetzt, wie es die Abbildung zeigt. Auf der obersten Fläche ist die Augenzahl 1 zu sehen.



Ermittle die Summe der Augenzahlen der verdeckten Flächen dieser Würfel!

Beachte dabei, dass die Augenzahl von je zwei gegenüberliegenden Würfelflächen eines jeden Spielwürfels stets 7 beträgt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Bei genau 5 Würfeln sind je zwei gegenüberliegende Würfelflächen verdeckt. Die Summe ihrer Augenzahlen beträgt daher $5 \cdot 7 = 35$.
Bei dem obersten Würfel ist nur die der Fläche mit der Augenzahl 1 gegenüberliegende Fläche verdeckt. Sie hat aus dem in der Aufgabe genannten Grunde die Augenzahl 6.
Mithin beträgt die Summe der Augenzahlen aller verdeckten Flächen $35 + 6 = 41$.

Aufgabe 110522:
Bernd hat an Monika insgesamt 21 Mark an Beiträgen abzurechnen. Er hat 8 Zweimarkstücke und 6 Fünfmarkstücke und kein weiteres Geld bei sich.
In Monikas Kasse befinden sich genau 20 Mark, und zwar in Form von 10 Zweimarkstücken.
Sie behauptet, dass es unter diesen Umständen 3 verschiedene Möglichkeiten gibt, den angegebenen Betrag abzurechnen.

Dabei sollen keine Möglichkeiten gezählt werden, bei denen ein Geldstück einmal zwischen Bernd und Monika hin- und ein gleichwertiges später wieder zurückgegeben wird. Auch sollen Möglichkeiten, die sich nur in der Reihenfolge unterscheiden, in der Geldstücke gegeben werden, nicht als verschieden gelten.
Ebenso soll es nicht darauf ankommen, welches Fünfmark- oder welches Zweimarkstück gegeben wird.

Stelle fest, ob Monikas Behauptung richtig ist.
Anmerkung: Eine Untersuchung, ob diese 3 Möglichkeiten, falls es sie gibt, die einzigen sind, ist nicht erforderlich.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
1. Möglichkeit: Bernd gibt Monika 1 Fünfmarkstück und 8 Zweimarkstücke. Wegen $5 + 8 \cdot 2 = 21$ sind das genau 21 Mark.
2. Möglichkeit: Bernd gibt Monika 3 Fünfmarkstüche und 3 Zweimarkstücke. Wegen $3 \cdot 5 + 3 \cdot 2 = 21$ sind das ebenfalls genau 21 Mark.
3. Möglichkeit: Bernd gibt Monika 5 Fünfmarkstücke und erhält von ihr 2 Zweimarkstücke zurück. Wegen $5 \cdot 5 - 2 \cdot 2 = 21$ sind das wiederum genau 21 Mark.

Aufgabe 150523:
Als eine Pioniergruppe über ihre in den letzten Jahren durchgeführten Ferienreisen berichtete, stellte sich folgendes heraus:

(1) Genau 13 Mitglieder dieser Gruppe waren schon einmal an der Ostsee.
(2) Genau 15 Pioniere waren schon einmal im Harz.
(3) Genau 6 Pioniere waren schon einmal sowohl an der Ostsee als auch im Harz.
(4) Genau 4 Pioniere waren bisher weder an der Ostsee noch im Harz.

Ermittle die Anzahl aller Pioniere, die dieser Gruppe angehören!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Nach (1) waren genau 13 der Pioniere schon einmal an der Ostsee.

Nach (2) und (3) betrug die Anzahl der Pioniere, die schon einmal im Harz, aber noch nicht an der Ostsee waren, wegen 15 - 6 = 9 genau 9 Pioniere. Also waren wegen 13 + 9 = 22 genau 22 Pioniere dieser Gruppe schon einmal in wenigstens einer der genannten Feriengegenden.

Nach (4) und weil damit jeder der anwesenden Pioniere erfasst wurde; betrug wegen 22 + 4 = 26 deren Anzahl 26.

Aufgabe 200524:
Ein Mathematiklehrer, ein Physiklehrer und ein Deutschlehrer treffen sich auf einer Tagung. Sie heißen Meyer, Peters und Siewert. (Die Reihenfolge der Familiennamen braucht nicht mit der Reihenfolge der Berufe übereinzustimmen.)

Im Gespräch stellen sie fest, dass einer von ihnen mit Vornamen Otmar, ein anderer Kurt und der dritte Karl heißt und dass einer in Leipzig, einer in Suhl und einer in Schwerin wohnt. Ferner wissen wir:

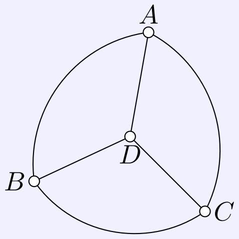
(1) Herr Meyer erzählt dem Physiklehrer, dass er den Mathematiklehrer in Leipzig besucht habe.
(2) Darauf erwidert ihm Herr Peters: „Das weiß ich schon, Kurt.“
(3) Karl hatte ihm nämlich berichtet, dass er Besuch aus Suhl gehabt habe.

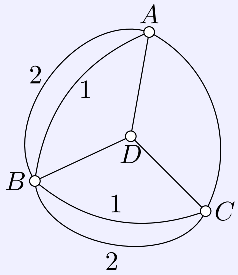
In diesem Gespräch ist nur von diesen drei Personen die Rede. Ordne jedem Familiennamen den zugehörigen Vornamen, Wohnort und Beruf zu!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wegen (1) ist Herr Meyer weder der Physiklehrer noch der Mathematiklehrer, also muss er der Deutschlehrer sein.
Wegen (2) heißt er Kurt mit Vornamen, und wegen (3) wohnt er in Suhl.
Wegen (1) und (2) ist Herr Peters der Physiklehrer und hat nicht den Vornamen Kurt.
Wegen (3) heißt er auch nicht Karl; also heißt er Otmar mit Vornamen. In Suhl kann er nicht wohnen, denn dies trifft ja für Herrn Meyer zu. In Leipzig kann er auch nicht wohnen, denn dies trifft wegen (1) für den Mathematiklehrer zu. Also wohnt er in Schwerin.
Folglich verbleibt für Herrn Siewert nur die Möglichkeit, dass er der Mathematiklehrer ist, in Leipzig wohnt und mit Vornamen Karl heißt.

Aufgabe 210522:
Die vier Springbrunnen A, B, C, D eines Parkes sind so durch Wege verbunden, wie es das Bild zeigt.
Ein Spaziergänger möchte so durch den Park gehen, dass er jeden dieser Wege genau einmal durchläuft. Ein solcher Spaziergang soll bei einem beliebigen Brunnen beginnen und bei einem beliebigen Brunnen (nicht unbedingt bei demselben) enden.

a) Untersuche, ob ein derartiger Spaziergang möglich ist!
b) Später wurde noch ein weiterer Weg zwischen B und A und ein weiterer Weg zwischen B und C angelegt, wie das Bild zeigt.
Untersuche, ob es danach möglich ist, einen Spaziergang der gewünschten Art zu machen!





Hinweis: Lautet bei a) oder b) die Antwort, dass ein derartiger Spaziergang nicht möglich ist, so beweise, warum nicht!
Lautet die Antwort aber, dass er möglich ist, so gib einen solchen Spaziergang an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Angenommen, ein Spaziergang der genannten Art wäre möglich. Dann gäbe es unter den vier Springbrunnen A, B, C, D einen, der nicht Ausgangspunkt und nicht Endpunkt des Spaziergangs wäre.
Zu diesem Springbrunnen käme man bei dem Spaziergang auf einem der drei Wege, die von ihm, wie von jedem der vier Brunnen abgehen; auf einem zweiten Weg müsste man ihn wieder verlassen. Es verbleibt ein dritter Weg zu diesem Springbrunnen, und dieser Weg müsste während des Spaziergangs ebenfalls durchlaufen werden und somit entweder zum betrachteten Springbrunnen hin oder von ihm weg fuhren.

Es gäbe dann aber keinen vierten Weg, auf dem man wieder von diesem Springbrunnen weg oder vorher zu ihm hin kommen könnte; d. h., der Springbrunnen wäre doch End- oder Anfangspunkt des Spaziergangs.
Damit ist die Annahme, es gäbe einen derartigen Spaziergang, zu einem Widerspruch geführt. Sie muss also falsch sein, d. h.: Es gibt in diesem Fall keinen Spaziergang der genannten Art.

b) Ein möglicher Spaziergang nach dem Einrichten der beiden weiteren Verbindungswege ist z. B.

$$B \to A \to D \to C \to B \to A \to C \to B \to D$$

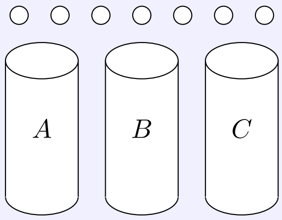
Aufgabe 210523:
Vier Schüler mit den Familiennamen Erdborn, Freimuth, König und Meyer haben die Vornamen Alfred, Martin, Norbert und Torsten (nicht unbedingt in derselben Reihenfolge).
Sie treffen sich auf der Geburtstagsfeier ihres Mitschülers Franz Neubert. Außer ihnen nahmen keine weiteren Personen an dieser Feier teil. Es ist bekannt:
(1) Als ersten Gast konnte Franz seinen Mitschüler Meyer begrüßen, als zweiten Norbert und danach Erdborn und später Martin.
(2) Jeder Gast brachte genau ein Geschenk mit: Meyer hatte ein Würfelspiel, Alfred einen Kugelschreiber, Martin einen Strauß Rosen und König ein Buch mitgebracht.

Wie heißen die vier Schüler mit ihren Vor- und Familiennamen?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Meyer heißt nach (1) weder Norbert noch Martin. Nach (2) heißt er auch nicht Alfred. Daher gilt: Meyer heißt Torsten.
König heißt folglich nicht Torsten. Nach (2) heißt er auch weder Alfred noch Martin. Hieraus folgt: König heißt Norbert.
Erdborn heißt demnach weder Torsten noch Norbert. Nach (1) heißt er auch nicht Martin. Somit ergibt sich: Erdborn heißt Alfred.
Es verbleibt nun noch: Freimuth heißt Martin.
Damit sind alle zusammengehörigen Vor- und Familiennamen (eindeutig) ermittelt.

Aufgabe 220521:

Sieben Kugeln sind so auf drei Becher A, B und C zu verteilen, dass im Becher C nicht weniger Kugeln als im Becher B und im Becher B nicht weniger als im Becher A liegen.
Es dürfen auch Becher leer bleiben.
Gib alle verschiedenen Möglichkeiten einer solchen Verteilung an!



Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es gibt genau die folgenden Verteilungen der geforderten Art:

A	0	0	0	0	1	1	1	2
B	0	1	2	3	1	2	3	2
C	7	6	5	4	5	4	3	3

Aufgabe 230521:
Die Zahlen von 1 bis 10 sollen als Ergebnisse von Rechenaufgaben auftreten, bei denen außer den Zeichen für die vier Grundrechenoperationen und Klammern jeweils nur die Ziffer 3 auftreten soll, und zwar genau 5 mal. Für zwei Aufgaben wurden Beispiele angegeben.
Gib für die Ergebnisse 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 und 10 je eine derartige Aufgabe an!

Beispiele:
$1 = 3 - 3 : 3 - 3 : 3 = (3 + 3 + 3) : 3 : 3$
$7 = (33 - 3) : 3 - 3 = 3 \cdot 3 + 3 : 3 - 3$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Lösungen sind z. B.:

$$2 = 3 - 33 : 33 = 3 + 3 - 3 - 3 : 3 \qquad 3 = 3 + 3 + 3 - 3 - 3 = 3 + 33 - 33$$
$$4 = 3 + 33 : 33 = 3 + 3 : 3 + 3 - 3 \qquad 5 = 3 + 3 : 3 + 3 : 3 = 3 \cdot 3 - 3 : 3 - 3$$
$$6 = (3 \cdot 3 + 3 \cdot 3) : 3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 : 3 - 3 \qquad 8 = 3 + 3 + 3 - 3 : 3 = (33 - 3 \cdot 3) : 3$$
$$9 = 3 + 3 + 3 + 3 - 3 = (33 + 3) : 3 - 3 \qquad 10 = 3 + 3 + 3 + 3 : 3 = 33 : 3 - 3 : 3$$

Aufgabe 240521:
Harald will an der Wandzeitung über die rege Freizeitbeschäftigung der Pioniere Marion, Petra und Ruth berichten. Ihm ist bekannt:

(1) Jedes der drei Mädchen betreibt genau eine der Sportarten Schwimmen, Tischtennis, Volleyball. Jede dieser drei Sportarten wird von einem der drei Mädchen betrieben.
(2) Marion liest in ihrer Freizeit außerdem gern Abenteuerbücher, die Volleyballspielerin aber nicht.
(3) Die Volleyballspielerin beschäftigt sich dagegen gern mit Mathematik, sie hat bei der letzten Mathematik-Olympiade mehr Aufgaben richtig gelöst als Petra.
(4) In der Russisch-Olympiade hat Marion besser abgeschnitten als die Tischtennisspielerin.

Beweise, dass die Verteilung der drei Sportarten auf die drei Mädchen durch die Angaben (1), (2), (3), (4) eindeutig bestimmt ist! Welches Mädchen betreibt welche Sportart?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Aus (2) und (3) folgt, dass die Volleyballspielerin weder Marion noch Petra ist. Nach (1) ist also Ruth die Volleyballspielerin und somit die Tischtennisspielerin nicht Ruth.
Nach (4) ist sie auch nicht Marion. Also ist Petra die Tischtennisspielerin.
Nochmals wegen (1) verbleibt daher für Marion die Sportart Schwimmen.
Damit ist bewiesen, dass die Verteilung der Sportarten durch (1), (2), (3), (4) eindeutig bestimmt ist.

Aufgabe 260521:
Auf der DDR-Olympiade Junger Mathematiker treffen sich Andreas, Britta, Dirk und Kerstin. Sie kommen jeder aus einer anderen Stadt, und zwar aus Berlin, Dresden, Halle und Schwerin. Wir wissen folgendes über sie:

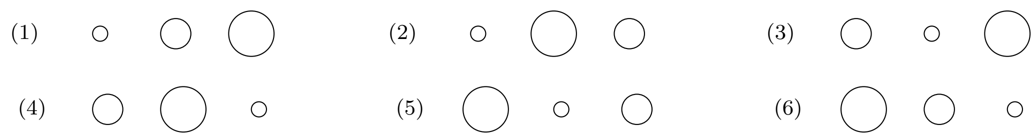
(1) Andreas und der Teilnehmer aus Berlin sind von den vier Schülern die beiden einzigen, die schon im Vorjahr auf der DDR-Olympiade waren;
(2) die beiden anderen, nämlich Kerstin und der Teilnehmer aus Dresden sind zum ersten Mal bei der DDR-Olympiade anwesend.
(3) Dirk ist älter als der Teilnehmer aus Berlin.
(4) Kerstin ist jünger als der Teilnehmer aus Schwerin.

Welcher Teilnehmer kommt aus welcher Stadt?
Wer sind die beiden, die schon in Vorjahr an der DDR- Olympiade teilgenommen haben?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Aus (2) und (4) folgt, dass Kerstin nicht aus Dresden, aber auch nicht aus Schwerin sein kann. Wegen (1) und (2) ist Kerstin auch nicht aus Berlin, also folgt: (5) Kerstin kommt aus Halle.
Aus (1) und (2) folgt, dass Andreas nicht aus Berlin, aber auch nicht aus Dresden kommt. Daraus und wegen (5) folgt: (6) Andreas kommt aus Schwerin.
Aus (3), (5) und (6) ergibt sich: (7) Dirk kommt aus Dresden.
Weiter folgt: (8) Britta kommt aus Berlin.
Aus (1) und (8) ergibt sich: Andreas und Britta nahmen schon im Vorjahr an der DDR-Olympiade teil.

Aufgabe 260522:
Fritz hat drei rot und drei blau angestrichene kreisförmige Spielmarken. Keine zwei von diesen sechs Spielmarken sind in der Größe einander gleich.
a) Fritz legt zuerst nur die drei verschieden großen roten Spielmarken nebeneinander auf den Tisch.
Zeichne alle möglichen Anordnungen dieser drei Spielmarken auf! Wie viele Anordnungsmöglichkeiten sind dies insgesamt?
b) Nun möchte Fritz alle sechs Spielmarken so nebeneinander legen, dass sich stets die Farben der Spielmarken abwechseln.
Wie viele Anordnungsmöglichkeiten der Spielmarken gibt es hierfür insgesamt? Nenne die Anzahl und erkläre, warum es genau diese Anzahl der Anordnungsmöglichkeiten gibt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Es gibt genau sechs derartige Anordnungen für die drei roten Spielmarken, und zwar:



b) Ebenso wie für die drei roten Spielmarken gibt es genau sechs Anordnungsmöglichkeiten für die drei blauen Spielmarken. Da die Farben sich abwechseln sollen und sich jede Anordnung der roten Spielmarken mit jeder Anordnung der blauen Spielmarken zu einer neuen Reihe vereinigen lässt, gibt es wegen $6 \cdot 6 = 36$ insgesamt 36 Anordnungen, die mit einer roten Spielmarke beginnen, und ebenso viele Anordnungen, die mit einer blauen Spielmarke beginnen.
Folglich gibt es insgesamt 72 unterschiedliche Anordnungen der geforderten Art für die drei roten und die drei blauen Spielmarken.

Aufgabe 280524:
a) In einer Kiste sind 3 grüne und 4 gelbe Kugeln und keine weiteren. Kerstin und Steffen überlegen, wie viel Kugeln sie mindestens aus der Kiste herausholen müssen, um zu sichern, dass von jeder Farbe (mindestens) eine dabei ist. Beim Herausholen der Kugeln soll nicht in die Kiste geschaut werden.

Kerstin meint, man müsse mindestens 5 Kugeln herausholen; dies würde aber auch ausreichen, um das Gewünschte zu sichern. Steffen ist dagegen der Ansicht, dass dafür schon 4 Kugeln reichen.
Wer von beiden hat recht? Begründe deine Entscheidung.

b) Jetzt seien in der Kiste 23 rote, 33 blaue, 21 schwarze, 21 weiße, 2 grüne Kugeln und keine weiteren.
Gib an und begründe, wie viel Kugeln man mindestens herausnehmen muss, um zu sichern, dass 6 dieser Kugeln einander gleiche Farbe haben!
Zeige, dass die von dir angegebene Zahl dafür auch ausreicht!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Steffen hat nicht recht; denn werden 4 Kugeln herausgeholt, so besteht auch die Möglichkeit, dass dies 4 gelbe Kugeln sind, also keine grüne Kugel dabei ist.
Also muss man mindestens 5 Kugeln herausholen, um das Gewünschte zu sichern. Dies reicht aber auch; denn unter 5 herausgeholten Kugeln können nicht nur gelbe sein (da es nur 4 gelbe gibt), und es können nicht nur grüne sein (da es nur 3 grüne gibt). Kerstin hat also recht.

b) 22 Kugeln reichen nicht aus; denn diese können 5 rote, 5 blaue, 5 schwarze, 5 weiße Kugeln und die beiden grünen sein, und dann haben keine 6 dieser Kugeln einander gleiche Farbe.
Also muss man mindestens 23 Kugeln herausnehmen, um das Gewünschte zu erreichen.

Das reicht aber auch; denn wären unter den herausgeholten Kugeln keine 6 von einander gleicher Farbe, so wären dabei höchstens 5 rote, 5 blaue, 5 schwarze, 5 weiße Kugeln und höchstens 2 grüne (da es nicht mehr grüne gibt). Dann wären aber höchstens 22 Kugeln herausgeholt worden, im Widerspruch zu der Voraussetzung, dass 23 Kugeln herausgeholt wurden.

Aufgabe 310521:
Blaue, gelbe und rote Würfel sollen in eine Reihe gelegt werden. Der erste Würfel der Reihe soll blau, der zweite soll gelb sein. In der Reihe sollen niemals zwei gleichfarbige Würfel nebeneinander liegen, und es soll sich auch niemals die Farbfolge von zwei nebeneinanderliegenden Würfeln wiederholen.

a) Nenne ein Beispiel für eine Reihe, die diese Bedingungen erfüllt und nicht mehr durch Anlegen eines weiteren Würfels verlängert werden kann!
b) Es gibt insgesamt vier solche Reihen; sie sind nicht alle gleichlang. Nenne alle diejenigen, die möglichst große Länge haben!
Eine Begründung wird nicht verlangt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Alle Reihen, von denen zu a) eine zu nennen ist, sind:

$$bgbrb, \quad bgbrgrb, \quad bgrbrgb, \quad bgrgbrb.$$

Möglichst große Länge haben, also in b) zu nennen sind die drei letzten.

Aufgabe 320522:
In einem Schrank befinden sich 11 karierte, 7 liniierte und 12 unliniierte Schreibblöcke und keine weiteren.
Es ist zu dunkel, um die Blöcke unterscheiden zu können, und sie liegen ungeordnet.
Jemand will eine Anzahl Schreibblöcke herausnehmen und erst dann feststellen, wie viele Blöcke der einzelnen Sorten er herausgenommen hat.

a) Welches ist die kleinste Anzahl von Blöcken, durch deren Herausnehmen gesichert wird, dass sich unter den herausgenommenen Blöcken auch 5 karierte befinden?
b) Welches ist die kleinste Anzahl von Blöcken, durch deren Herausnehmen gesichert wird, dass sich unter den herausgenommenen Blöcken auch 5 befinden, die von einander gleicher Sorte sind?
Begründe deine Antworten, indem du jedesmal nachweist, dass die von dir angegebene Anzahl, aber keine kleinere Anzahl, das Gewünschte sichert!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Nimmt man 24 Blöcke heraus, so können sich darunter höchstens 7 liniierte und höchstens 12 unliniierte befinden (da es von diesen Sorten nicht mehr gibt); also muss die Anzahl der herausgenommenen karierten Blöcke mindestens $24 - 7 - 12 = 5$ betragen.
Nimmt man dagegen 23 Blöcke oder weniger heraus, so kann es sein, dass dabei nur 4 oder weniger karierte sind; denn die restlichen höchstens 19 Blöcke können liniiert bzw. unliniiert sein (da es von diesen Sorten zusammen so viele gibt).
Also ist 24 die in a) gesuchte kleinste Anzahl.

b) Nimmt man 13 Blöcke heraus, so ist es nicht möglich, dass sich darunter von jeder der drei Sorten nur 4 Blöcke befinden (denn $3 \cdot 4$ ist kleiner als 13); d. h., dann müssen sich unter den herausgenommenen Blöcken auch 5 befinden, die von einander gleicher Sorte sind.
Nimmt man dagegen höchstens 12 Blöcke heraus, so kann es sein, dass dies von jeder der drei Sorten höchstens 4 Blöcke sind; denn dazu reichen die von den einzelnen Sorten vorhandenen Anzahlen aus, die alle größer als 4 sind.
Also ist 13 die in b) gesuchte kleinste Anzahl.

Aufgabe 340521:
In einem Zirkus treten vier Artisten auf. Sie heißen Meier, Neumann , Opitz und Pfeifer. Ihre Vornamen sind, möglicherweise in anderer Reihenfolge: Dieter, Erich, Fritz und Gert. Außerdem ist bekannt:

(1) Die Reihenfolge ihrer Auftritte ist: Pfeifer, Fritz, Meier, Erich.
(2) Diese Auftritte sind, möglicherweise in anderer Reihenfolge: Dieter jongliert, Erich zaubert, Neumann tritt als Clown auf und Pfeifer arbeitet auf dem Drahtseil.

Zeige, dass durch diese Angaben für jeden der Artisten Meier, Neumann, Opitz und Pfeifer eindeutig bestimmt ist, welchen Vornamen er hat!
Nenne diese vier zusammengehörenden Vor- und Familiennamen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Nach (1) heißt Pfeifer weder Fritz noch Erich, nach (2) heißt er auch nicht Dieter. Daher gilt: Pfeifer heißt Gert. (3)
Nach (1) heißt Meier weder Fritz noch Erich, nach (3) heißt er auch nicht Gert. Daher gilt: Meier heißt Dieter. (4)
Nach (2) heißt Neumann nicht Erich, nach (3) und (4) heißt er weder Gert noch Dieter. Daher gilt: Neumann heißt Fritz. (5)
Wegen (3), (4), (5) verbleibt schließlich nur: Opitz heißt Erich. (6)
Damit ist gezeigt, dass die Vornamen zu den Familiennamen eindeutig bestimmt sind, und diese zusammengehörenden Namen sind angegeben.

Aufgabe 340533:
Annette, Bernd, Christiane, Dieter und Ruth spielen folgendes Spiel: die vier Kinder außer Ruth verabreden, dass eines von ihnen einen Brief bei sich versteckt und dass dann jedes dieser Kinder drei Aussagen macht, von denen mindestens zwei wahr sind.
Ruth, die nur diese Regeln und die Aussagen der vier erfährt, soll herausfinden, wer den Brief hat. Eines der vier Kinder Annette, Bernd, Christiane, Dieter hatte sich das Spiel ausgedacht, sie wissen auch, wer es war; nur Ruth weiß das nicht. Folgende Aussagen werden gemacht:

Annette: Ich habe den Brief nicht. Entweder hat Bernd den Brief, oder Bernd hat den Brief nicht. Christiane hat sich das Spiel ausgedacht.
Bernd: Wenn ich den Brief nicht habe, dann hat ihn Dieter. Ich habe den Brief nicht. Annette oder Christiane oder Dieter hat den Brief.
Christiane: Entweder Bernd oder Dieter hat den Brief. Bernd hat drei wahre Aussagen ge- macht. Annette hat den Brief nicht.
Dieter: Wenn ich den Brief nicht habe, dann hat ihn Christiane. Ich habe den Brief nicht. Alle drei Aussagen von Christiane sind wahr.

Untersuche, ob durch die Regeln und die Aussagen eindeutig bestimmt ist, wer den Brief hat!
Wenn das der Fall ist, gib diesen Spieler an! Stelle dann auch fest, ob alle Aussagen den Regeln entsprechen, wenn der Brief bei dem von dir angegebenen Spieler ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Da Bernds zweite und dritte Aussage einander gleichwertig sind, sind sie entweder beide wahr oder beide falsch. Nach den Regeln können sie nicht beide falsch sein, also sind sie beide wahr. Also hat Bernd den Brief nicht.
Wenn auch Bernds erste Aussage wahr ist, so folgt daher weiter: Dieter hat den Brief.
Wenn aber Bernds erste Aussage falsch ist, so folgt: Christianes zweite Aussage ist falsch. Nach den Regeln müssen also Christianes erste und dritte Aussage wahr sein. Aus der ersten Aussage und daraus, dass Bernd den Brief nicht hat, folgt damit wieder: Dieter hat den Brief.

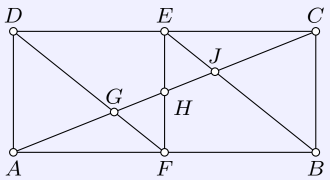
Damit hat sich insgesamt ergeben: Wenn alle Aussagen den Regeln entsprechen, so kann eindeutig nur Dieter den Brief haben.

II. Wenn Dieter den Brief hat, so haben Bernd, Christiane und Dieter je drei wahre Aussagen gemacht, und mindestens die ersten beiden Aussagen von Annette sind wahr. Also entsprechen dann alle Aussagen den Regeln.

I.III. Anzahlen berechnen

Runde 1

Aufgabe 010514:

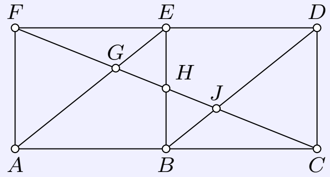


Wie viel Dreiecke sind in der Figur enthalten? Schreibe alle Dreiecke auf (z. B. ABC)!

Lösung von Steffen Polster:
Die Figur besteht aus 8 Teilflächen, wovon 2 unregelmäßige Vierecke und sechs Dreiecke sind. Diese Dreiecke sind: AGD, AFG, GFH, EHJ, EJC und JBC.

Verbindet man zwei, drei oder vier der insgesamt 8 Teilflächen, so können weitere Dreiecke entstehen.
Aus zwei Teilflächen sind die sechs Dreiecke AFD, AFH, FED, EFB, EHC und EBC zusammengesetzt, aus drei Teilflächen die zwei Dreiecke ABJ und DGC und sogar aus vier Teilflächen die zwei Dreiecke ABC und DAC. Verbindet man mehr als vier Teilflächen, so entsteht kein Dreieck.
Damit gibt es ist der Figur insgesamt $6 + 6 + 2 + 2 = 16$ Dreiecke.

Aufgabe 040511:



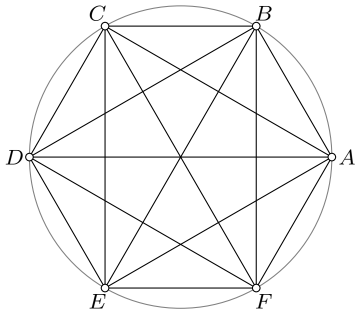
Wie viel Dreiecke erkennst du in der obigen Figur?
Stelle eine Übersicht dieser Dreiecke auf, z. B. $\triangle ABE$; $\triangle ACF$.

Lösung von Steffen Polster:
Es gibt in der Figur 16 Dreiecke:

$$ABE,\quad BCD,\quad CDI,\quad DFI,\quad EGH,\quad ACF,\quad BCI,\quad CDF,$$
$$EFG,\quad ACG,\quad BCH,\quad EFH,\quad AEF,\quad BIH,\quad AGF,\quad BDE$$

Aufgabe 050513:
Konstruiere ein regelmäßiges Sechseck! Zeichne in das Sechseck alle möglichen Diagonalen ein!
Wie viel Diagonalen findest Du? Zähle sie auf, indem du sie benennst (z. B. AB, ...)!

Lösung von Steffen Polster:



Von jedem Endpunkt des Sechsecks gehen je fünf Strecken zu den anderen Eckpunkten aus. Da aber jede Strecke einen Anfangs- und einen Endpunkt besitzt und bei dieser Überlegung somit zweimal gezählt wird, gibt es $\frac{6\cdot 5}{2} = 15$ Strecken am Sechseck.

Da die sechs Seiten des Sechsecks nicht als Diagonalen gelten, verbleiben noch 9, d. h. in einem Sechseck gibt es neun verschiedene Diagonalen, in der Abbildung:

$$AC, AD, AE, BD, BE, BF, CE, CF, DF$$

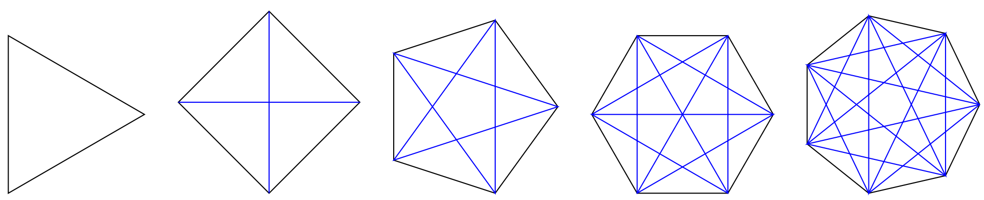
Aufgabe 060513:
Ein Betrieb kann unter Verwendung des gleichen Uhrwerks verschiedene Ausführungen von Uhren herstellen. Dazu stehen ihm drei verschiedene Gehäuse, vier verschiedene Zifferblätter und zwei verschiedene Zeigerausführungen zur Verfügung.
Gib die größte Anzahl voneinander verschiedener Ausführungen von Uhren an, die sich unter Verwendung der angegebenen Teile herstellen lassen!

Lösung von Steffen Polster:
Für jede Uhr können 3 verschiedene Gehäuse, vier Ziffernblätter und zwei Zeigerarten gewählt werden, so dass es insgesamt $3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$ verschiedene Ausführungen der Uhren mit dem gleichen Uhrwerk gibt.

Aufgabe 070511:
Unter einer Diagonalen eines ebenen Vielecks mit 3 oder mehr Ecken versteht man die Verbindungsstrecken zweier nicht benachbarter Ecken des ebenen Vielecks.
Gibt es ebene konvexe Vielecke (d. h. Vielecke, bei denen jeder Innenwinkel kleiner als 180° ist), bei denen

a) die Anzahl der Diagonalen halb so groß ist wie die Anzahl der Eckpunkte?
b) die Anzahl der Diagonalen doppelt so groß ist wie die Anzahl der Eckpunkte?
Wenn es solche Vielecke gibt, dann zeichne jeweils ein Beispiel dafür!

Lösung von Steffen Polster:



Ein Dreieck besitzt keine Diagonalen, ein Viereck 2 Diagonalen (siehe Abbildung) und ist somit die Lösung von Aufgabe a).

Das Fünfeck hat 5 Diagonalen, das Sechseck 9 Diagonalen und das Siebeneck 14 Diagonalen. Es ist die Lösung von Teilaufgabe b).

Vergleicht man die Diagonalenanzahl eines $n-1$-Ecks mit der Anzahl im n-Eck, so hat das n-Eck eine Ecke mehr von der zu $n-3$ Ecken eine Diagonale gezogen werden kann (zu den Nachbarecken und zu sich selbst nicht). Außerdem liegt eine Seite des $n-1$-Ecks jetzt im Inneren und ist damit Diagonale.
D. h., die Diagonalenzahl nimmt um $n-2$ zu, so dass die Anzahl der Diagonalen schneller als die Eckenzahl n für größere n wächst.
Die gefundenen Lösungen für a) und b) sind damit jeweils die einzigen.

Aufgabe 070514:
Im Ferienlager erhält eine Zeltbelegung von ihrem Pionierleiter den Auftrag, in der Küche beim Kartoffelschälen zu helfen. Von sechs Jungen sollen drei für diese Tätigkeit ausgewählt werden.
Welches ist die Anzahl aller Möglichkeiten, verschiedene Gruppen zusammenzustellen?

Lösung von Steffen Polster:
Die Jungen seien mit A, B, C, D, E, F bezeichnet. Davon sind immer drei auszuwählen, wobei für unterschiedliche Gruppen nur die ausgewählten Jungen, aber nicht die Reihenfolge des Auswählens von Bedeutung ist.
Durch systematisches Vorgehen findet man folgende 20 Gruppen:

$$\begin{array}{cccccccccc} ABC & BCD & CDE & DEF & ABD & BCE & CDF & ABE & BCF & CEF \\ ABF & BDE & ACD & BDF & ACE & BEF & ACF & ADE & ADF & AEF \end{array}$$

Anmerkung: Die gesuchte Anzahl ist gleich der Kombinationen von 3 Elementen aus einer Gesamtheit von 6 Elementen.

Aufgabe 130514:
Aus einer Schulklasse arbeiten einige Thälmann-Pioniere im Klub der internationalen Freundschaft mit. Auf die Frage, wer von ihnen im Dolmetscherbüro dieses Klubs mitarbeitet, melden sich 7.
Dann wird gefragt, wer im Länderzirkel des Klubs mitarbeitet; hierauf melden sich 6. Ebenso wird festgestellt, dass 5 der Pioniere im Zirkel junger Korrespondenten des Klubs tätig sind. Andere als diese 3 Zirkel gibt es in diesem Klub nicht.

Als Nächstes wird die Frage gestellt, wer gleichzeitig mindestens im Dolmetscherbüro und im Länderzirkel mitarbeitet; diesmal melden sich 4 der Pioniere. Ebenso ermittelt man, dass 3 von ihnen gleichzeitig mindestens im Dolmetscherbüro und im Zirkel junger Korrespondenten tätig sind und 2 von den Pionieren gleichzeitig mindestens zum Länderzirkel und zum Zirkel junger Korrespondenten gehören.
Genau einer der Pioniere der genannten Schulklasse gehört allen drei Zirkeln an.

Ermittle die Anzahl aller derjenigen Pioniere dieser Klasse, die im Klub der internationalen Freundschaft mitarbeiten! (Sämtliche Zahlenangaben gelten als genau)

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Werden die Schülerzahlen je Zirkel nach deren Anfangsbuchstaben bezeichnet, so gilt $(d)=7$, $(l)=6$ und $k=6$. Weiterhin sind in mehreren Zirkeln $(d+l)=4$, $(d+k)=3, (l+k)=2, (d+k+l)=1$.

In d und l ohne k sind entsprechend $(d+l)-(d+k+l): 4-1=3$ Schüler, (*)
in l und k ohne d sind entsprechend $(l+k)-(d+k+l): 2-1=1$ Schüler, (**)
in k und d ohne l sind entsprechend $(d+k)-(d+k+l): 3-1=2$ Schüler. (***)

In d ohne k und l sind entsprechend $(d)-(*)-(**)-(***): 7-3-2-1=1$ Schüler. Analog ist in l ohne k und d 1 Schüler, und ebenso in k ohne l und d entsprechend 1 Schüler.

Insgesamt wird damit $1+1+1+3+1+2+1=10$.
10 Schüler der Klasse arbeiten folglich im Klub der internationalen Freundschaft mit.

Aufgabe 140514:
Einige Schüler einer Klasse 5 trugen ein Schachturnier aus. Jeder Teilnehmer spielte gegen jeden anderen genau 2 Partien. Insgesamt wurden an 24 Tagen je 3 Partien ausgetragen.
Ermittle die Anzahl der Teilnehmer an diesem Turnier!

Lösung von Steffen Polster:
Es gab insgesamt $24 \cdot 3 = 72$ Partien.
Wenn Jeder gegen Jeden 2 Partien spielt, gibt es $n \cdot (n-1)$ Partien bei n Teilnehmern. Damit kommt man zu der Gleichung $n \cdot (n-1) = 72$, die im Bereich der natürlichen Zahlen (da es ja nur eine natürliche Zahl von Teilnehmern geben kann) nur durch $n = 9$ erfüllt wird. Auf diese Lösung kommt man durch systematisches Probieren.
Dazu prüft man nacheinander die Produkte $n(n-1)$, d. h. $2 \cdot 1$, $3 \cdot 2$, $\ldots$ bis zum Erreichen von $9 \cdot 8 = 72$.

Eine Lösung über die Lösungsformel für quadratische Gleichungen $n^2 - n - 72 = 0$ mit $n_1 = 9$, $n_2 = -8$ ist für Schüler der Klassenstufe 5 im Allgemeinen nicht möglich.

Aufgabe 280512:
Aus den Ziffern 1, 2 und 3 sollen dreistellige Zahlen gebildet werden.

a) Jede dieser drei gegebenen Ziffern soll in jeder der zu bildenden Zahlen genau einmal vorkommen.
Schreibe alle dreistelligen Zahlen auf, die sich auf diese Art und Weise bilden lassen!
b) In weiteren dreistelligen Zahlen aus den drei gegebenen Ziffern dürfen Ziffern auch mehr als einmal auftreten; dafür brauchen sie nicht alle vorzukommen.
Schreibe alle diejenigen dreistelligen Zahlen auf, die nun zusätzlich zu den in a) aufgezählten Zahlen noch gebildet werden können!

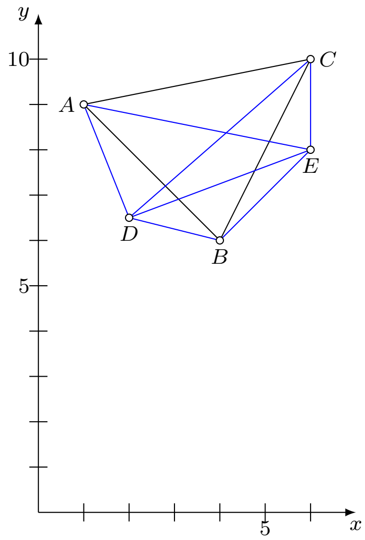
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Die gesuchten Zahlen sind 123, 132, 213, 231, 312 und 321.

b) Die zusätzlich zu den in a) schon aufgezählten Zahlen noch zu bildenden Zahlen sind:

111, 112, 113, 121, 122, 131, 133, 211, 212, 221, 222, 223, 232, 233, 311, 313, 322, 323, 331, 332, 333.

Aufgabe 280514:
a) Zeichne in ein Koordinatensystem die Punkte $A(1;9)$, $B(4;6)$ und $C(6;10)$!
Verbinde je zwei dieser drei Punkte durch eine Strecke! Wie viel Verbindungsstrecken sind das insgesamt?
b) Zeichne zwei weitere Punkte D und E; wähle sie so, dass jede Verbindungsstrecke von zwei der fünf Punkte A, B, C, D, E keinen weiteren der fünf Punkte enthält! Verbinde je zwei der fünf Punkte durch eine Strecke! Wie viel Verbindungsstrecken sind das insgesamt?
c) Man kann die in b) gesuchte Anzahl von Verbindungsstrecken auch durch eine Überlegung ermitteln, ohne die Punkte und die Strecken zu zeichnen.
Beschreibe eine solche Überlegung!
d) Ermittle auf die in c) beschriebene Weise die Anzahl aller Verbindungsstrecken zwischen je zwei von zehn Punkten, für die dasselbe wie in b) gilt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



a) Es gibt genau 3 solcher Verbindungsstrecken.

b) Eine mögliche Lage der Punkte D und E, bei der die geforderten Bedingungen erfüllt sind, zeigt die Abbildung. Es gibt genau 10 solcher Verbindungsstrecken.

c) Eine mögliche Überlegung dafür, dass es bei der geforderten Lage der Punkte A, B, C, D, E genau 10 Verbindungsstrecken gibt, wäre:
Von A aus lassen sich genau 4 Strecken zu den von A verschiedenen Punkten zeichnen, von B aus dann noch genau 3 Strecken zu den von A und von B verschiedenen Punkten, von C aus noch genau 2 Strecken zu den von A, B und C verschiedenen Punkten und von D aus noch genau eine Strecke zu dem von A, B, C und D verschiedenen Punkt E.
Das sind wegen $4+3+2+1=10$ insgesamt genau 10 Strecken.

d) Durch entsprechende Überlegungen wie in c) erhält man, dass es unter den angeführten Bedingungen wegen

$$9+8+7+6+5+4+3+2+1=45$$

(bzw. wegen $9 \cdot 10 = 90$ und $90 : 2 = 45$) genau 45 Strecken gibt, die die zehn Punkte auf die geforderte Weise miteinander verbinden.

Aufgabe 340511:
In einer Schachtel liegen 20 Buntstifte. Jeder Stift hat eine der Farben blau, gelb, rot, violett.
Jede Farbe kommt mindestens einmal vor. Es gibt mehr blaue Stifte als gelbe, es gibt ebenso viele gelbe Stifte wie rote, es gibt weniger violette Stifte als rote.
Gib alle hiernach möglichen Verteilungen an!
(Eine Verteilung wird angegeben, indem man angibt, wie viele Stifte von jeder Farbe in der Schachtel liegen.)

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die folgende Tabelle zeigt alle Möglichkeiten.

violett	rot	gelb	blau	violett	rot	gelb	blau	violett	rot	gelb	blau
1	2	2	15	1	3	3	13	1	4	4	11
1	5	5	9	1	6	6	7	2	3	3	12
2	4	4	10	2	5	5	8	3	4	4	9
3	5	5	7	4	5	5	6				

Runden 2 & 3

Aufgabe 030524:
Klaus, Ingrid, Peter und Susanne sollen bei einem Sportfest an einem Staffellauf teilnehmen.

a) Wie viel verschiedene Möglichkeiten gibt es für die Reihenfolge, in der sie laufen? Begründe deine Antwort!
b) Wie viel Möglichkeiten gäbe es, wenn die Staffel aus fünf Läufern bestehen würde?

Lösung von Steffen Polster:
a) An erster Stelle können Klaus, Ingrid, Peter oder Susanne stehen. Dies sind 4 Möglichkeiten.
Ist ein Kind ausgewählt, so können an zweiter Stelle noch 3 Kinder stehen, d. h. 3 Möglichkeiten. Übrig bleiben 2 Kinder für die letzten beiden Stellen. Dazu gibt es noch 2 Möglichkeiten.
Insgesamt sind dies $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ verschiedene Reihenfolgen.

b) Für jede Reihenfolge der vier Schüler aus der Teilaufgabe a) kann der fünfte Schüler vor dem ersten, vor dem zweiten, vor dem dritten, vor dem vierten oder am Ende eingeordnet werden. Dies sind 5 Möglichkeiten.
Damit ist das Ergebnis das Fünffache des Ergebnisses von a), also 120.

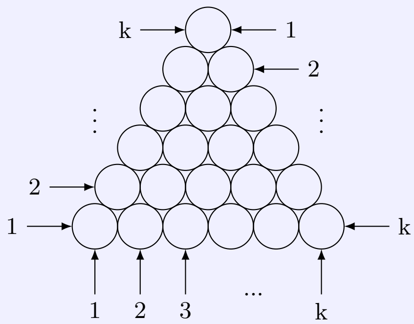
Aufgabe 120523:
In einem Kasten befinden sich insgesamt 100 gleichgroße Kugeln, nämlich 28 rote, 28 blaue, 26 schwarze, 16 weiße und 2 grüne.
Ulrike soll aus diesem Kasten im Dunkeln (also ohne bei irgendeiner der herausgenommenen Kugeln die Farbe erkennen zu können) eine Anzahl von Kugeln herausnehmen. Diese Anzahl soll sie so wählen, dass unter den herausgenommenen Kugeln mindestens 9 die gleiche Farbe haben müssen.

Welches ist die kleinste Kugelanzahl, die Ulrike wählen kann, um diese Aufgabe zu erfüllen?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Im ungünstigsten Falle kann Ulrike zunächst 8 rote, 8 blaue 8 schwarze, 8 weiße und die beiden grünen Kugeln herausnehmen.

Nimmt sie zu diesen 34 Kugeln nun noch eine weitere heraus, dann kann diese Kugel nur eine der vier Farben rot, blau, schwarz oder weiß tragen.
In diesem Fall erhält Ulrike also 9 Kugeln gleicher Farbe.
Die kleinste Anzahl von Kugeln, bei denen das mit Sicherheit der Fall ist, beträgt daher 35.

Aufgabe 130524:



Im Centrum-Warenhaus sind zu Dekorationszwecken gleichgroße Konservenbüchsen zu einer „Pyramide“ aufgeschichtet worden.
In jeder Schicht sind die Büchsen so „im Dreieck“ angeordnet, wie die Abbildung zeigt.

Die dort mit k bezeichnete Anzahl der Büchsen längs einer jeden „Seitenkante des Dreiecks“ beträgt für die unterste Schicht 9. In jeder weiteren Schicht ist die entsprechende Anzahl k um 1 kleiner als in der unmittelbar darunterliegenden Schicht. Die oberste Schicht besteht aus einer Büchse.
Ermittle die Anzahl aller in der „Pyramide“ enthaltenen Büchsen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die unterste Schicht besteht aus 9 Reihen, von denen die erste genau 1 Büchse und jede weitere genau eine Büchse mehr als die unmittelbar vorhergehende hat. Die neunte Reihe enthält danach genau 9 Büchsen.
Folglich ist die Zahl aller Büchsen dieser Schicht gleich der Summe der natürlichen Zahlen von 1 bis 9, also gleich 45.

Die unmittelbar darüberstehende Schicht von Konservenbüchsen enthält genau eine Reihe, nämlich die mit 9 Büchsen, weniger. Entsprechendes gilt auch für alle übrigen Schichten. Somit erhält man:

Erste Schicht:	45
zweite Schicht:	36 = 45 - 9
dritte Schicht:	28 = 36 - 8
vierte Schicht:	21 = 28 - 7
fünfte Schicht:	15 = 21 - 6
sechste Schicht:	10 = 15 - 5
siebente Schicht:	6 = 10 - 4
achte Schicht:	3 = 6 - 3
neunte Schicht:	1 = 3 - 2
insgesamt:	165

Für den Bau der „Pyramide“ wurden insgesamt 165 Konvervenbüchsen verwendet.

Aufgabe 140524:
Schülerinnen und Schüler einer Klasse 5 trugen ein 14tägiges Schachturnier aus. Dabei wurden an jedem der 14 Tage genau 6 Spiele ausgetragen.
Die Anzahl der teilnehmenden Jungen war größer als die der teilnehmenden Mädchen. Jedes Mädchen spielte gegen jedes andere Mädchen und jeder Junge gegen jeden anderen Jungen genau zweimal. Keines der Mädchen spielte gegen einen Jungen.
Ermittle die Anzahl der Mädchen und die der Jungen, die an diesem Turnier teilnahmen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Laut Aufgabe wurden wegen $14 \cdot 6 = 84$ in diesem Turnier insgesamt 84 Spiele ausgetragen. Diese Anzahl setzt sich additiv zusammen aus der Anzahl der Spiele, die die Mädchen gegeneinander durchführten, und der Anzahl der Spiele, an denen die Jungen beteiligt waren.

Bei n Spielern, von denen jeder gegen jeden $(n|1)$ der anderen Spieler genau zwei Spiele austrägt, beträgt die Anzahl aller Spiele $n(n-1)$.
Damit lässt sich folgende Tabelle aufstellen:

Anzahl der Spieler	Anzahl der Spiele	Ergänzung zu 84
2	2	82
3	6	78
4	12	72
5	20	64
6	30	54
7	42	42
8	56	28
9	72	12
≥ 10	≥ 90	-

Da laut Aufgabe 84 Spiele insgesamt durchgeführt wurden, kann die Anzahl der teilnehmenden Jungen bzw. die der Mädchen nicht größer als 9 gewesen sein.
Als Summanden können nur die in der Tabelle ermittelten Zahlen auftreten, und zwar müssen es genau zwei Summanden der Form $n(n-1)$ sein, deren Summe 84 beträgt. Das ist, wie ein Vergleich der Zahlen der zweiten und dritten Spalte der Tabelle zeigt, nur für $42 + 42 = 84$ und $12 + 72 = 84$ möglich.

Da die Anzahl der teilnehmenden Jungen größer war als die der Mädchen, kann die gesuchte Lösung nur lauten: Es nahmen 4 Mädchen und 9 Jungen an dem in der Aufgabe erwähnten Turnier teil.

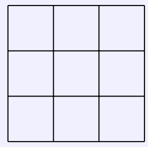
Aufgabe 190521:
In einer Konsumverkaufsstelle werden genau vier verschiedene Waschpulversorten A, B, C und D angeboten. Insgesamt sind 900 Pakete Waschpulver im Lager der Verkaufsstelle vorhanden; jedes Paket hat 250 g Inhalt. Ein Drittel des gesamten Lagerbestandes an Waschpulver ist von der Sorte A. Ein Viertel des übrigen Bestandes ist von der Sorte B. Von der Sorte C sind ebenso viele Pakete im Lager wie von der Sorte D.

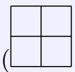
a) Wie viel Pakete beträgt für jede einzelne der vier Sorten der Lagerbestand?
b) Wie viel Kilogramm Waschpulver sind insgesamt in den Paketen enthalten?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Für die Sorte A beträgt wegen $900 : 3 = 300$ der Lagerbestand 300 Pakete.
Für die Sorte B beträgt wegen $900 - 300 = 600$ und $600 : 4 = 150$ der Bestand 150 Pakete.
Wegen $600 - 150 = 450$ und $450 : 2 = 225$ beträgt für die Sorten C und D der Bestand je 225 Pakete.

b) Wegen $250 \cdot 900 = 225000$ und 225000 g = 225 kg sind insgesamt 225 kg Waschpulver in den Paketen enthalten.

Aufgabe 250521:

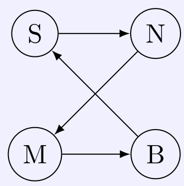


In einem (3×3)-Felderbrett (siehe Abbildung) sind genau neun Quadrate enthalten, die aus einem Feld bestehen (), außerdem genau vier Quadrate, die aus vier Feldern bestehen (), und genau ein Quadrat, das aus neun Feldern besteht.

Insgesamt sind in dem (3×3)-Felderbrett also 14 Quadrate enthalten.
Beantworte folgende Fragen:
a) Wie viel Quadrate sind insgesamt in einem (4×4)-Felderbrett enthalten?
b) Wie viel Quadrate sind insgesamt in einem (5×5)-Felderbrett enthalten?
c) Wie viel Quadrate sind insgesamt in einem (6×6)-Felderbrett enthalten?
Eine Begründung der Antworten wird nicht verlangt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) In einem (4×4)-Felderbrett sind insgesamt $16 + 9 + 4 + 1 = 30$ Quadrate enthalten.
b) In einem (5×5)-Felderbrett sind insgesamt $25 + 16 + 9 + 4 + 1 = 55$ Quadrate enthalten.
c) In einem (8×8)-Felderbrett sind insgesamt $64 + 49 + 36 + 25 + 16 + 9 + 4 + 1 = 204$ Quadrate enthalten.

Aufgabe 270522:
Ein Tourist, der in Magdeburg (M) wohnt, möchte bei einer Rundreise jede der Städte Schwerin (S), Neubrandenburg (N) und Berlin (B) genau einmal aufsuchen und erst dann in seinen Wohnort zurückkehren.
Eine mögliche Reiseroute wäre von Magdeburg aus über Berlin, Schwerin und Neubrandenburg zurück nach Magdeburg (siehe Abbildung).
Gib alle Reiserouten an, die der Tourist unter den genannten Bedingungen wählen kann!
Wie viel Reiserouten sind das insgesamt?
Eine Begründung wird nicht verlangt.



Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die geforderte Angabe der Reiserouten kann in zeichnerischer Darstellung oder durch die Angabe der jeweils zu wählenden Reihenfolge der Städte erfolgen.
Ein Beispiel für eine vollständige Angabe ist etwa: $MBNSM$, $MBSNM$, $MNBSM$, $MNSBM$, $MSBNM$, $MSNBM$.
Die Anzahl der Reiserouten beträgt 6.

Aufgabe 300524:
An einem Sportwettkampf sollen 10 Mannschaften teilnehmen. Sie sollen so mit einfarbigen Turnhemden und mit einfarbigen Turnhosen ausgestattet werden, dass sie an den damit erreichbaren Farbkombinationen voneinander zu unterscheiden sind.

a) Welches ist die kleinste Anzahl von Farben, mit der das zu erreichen ist?
b) Wie lautet die Antwort, wenn zusätzlich verlangt wird, dass bei jeder Mannschaft die beiden Farben von Turnhemd und Turnhose voneinander verschieden sind?
Begründe deine beiden Antworten!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Mit drei Farben, etwa blau, gelb, rot, lassen sich nur 9 verschiedene Farbkombinationen bilden, nämlich $bb, bg, br, gb, gg, gr, rb, rg, rr$.
Zur Unterscheidung von 10 Mannschaften reichen daher drei Farben nicht aus. Fügt man jedoch eine weitere Farbe, etwa weiß, hinzu, so lassen sich 10 Mannschaften unterscheiden, da es außer den genannten 9 Farbkombinationen z. B. noch die Kombination ww gibt.
Die kleinste Anzahl von Farben, mit der eine Unterscheidung von 10 Mannschaften erreichbar ist, beträgt daher 4.

b) Das gilt auch unter der in b) geforderten Bedingung.
Begründung: Mit drei Farben kann man schon, ohne diese Bedingung zu fordern, nicht 10 Mannschaften ausstatten. Also geht das erst recht nicht, wenn durch die zusätzliche Bedingung noch Kombinationen ausgeschlossen werden.
Mit vier Farben hat man aber zur Unterscheidung von 10 Mannschaften die Kombinationen

$$bg, br, bw, gb, gr, gm, rb, rg, rw, wb, wg, wr$$

zur Verfügung, was ausreichend ist.

Aufgabe 330522:
Rolf sucht vierstellige Zahlen, in denen keine zwei gleichen Ziffern vorkommen. Der Unterschied zwischen der Zehner- und der Hunderterziffer soll 3 betragen, der Unterschied zwischen der Hunderter- und der Tausenderziffer soll 4 betragen.
Beim Berechnen dieser Unterschiede soll es nicht auf die Reihenfolge der betreffenden beiden Ziffern ankommen.
Wie viele vierstellige Zahlen der gewünschten Art gibt es insgesamt?
Begründe, warum es nicht mehr als von dir angegeben sein können!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Tausenderziffer einer gesuchten Zahl kann nicht 0 sein, da die Zahl sonst nicht vierstellig wäre.
Ist die Tausenderziffer 1, 2 oder 3, so kann die Hunderterziffer nicht um 4 kleiner sein, sie muss also um 4 größer sein, d. h. 5, 6 bzw. 7 lauten. Bei der Tausenderziffer 6, 7, 8 bzw. 9 kann die Hunderterziffer nicht um 4 größer sein. Nur wenn die Tausenderziffer 4 oder 5 lautet, ist jeweils sowohl die um 4 kleinere als auch die um 4 größere Hunderterziffer möglich.

Ähnlich gibt es zu den Hunderterziffern 0, 1, 2 nur die um 3 größere und zu 7, 8, 9 nur die um 3 kleinere Zehnerziffer, während für die Hunderterziffern 3, 4, 5, 6 beide Möglichkeiten bestehen.

Daher gibt es genau die folgenden Möglichkeiten, die ersten drei Ziffern gesuchter Zahlen zusammenzustellen:

$$158, 152, 269, 263, 374, 403, 485, 514, 596, 625, 730, 736, 841, 847, 958, 952$$

Da in jeder dieser 16 Zusammenstellungen genau drei verschiedene Ziffern auftreten, gibt es jedesmal für die noch fehlende Einerziffer genau 7 Möglichkeiten. Die Anzahl aller Zahlen der gesuchten Art beträgt daher $7 \cdot 16 = 112$.

Aufgabe 340532:
Aus genau 4 Stäbchen, von denen jedes etwas weniger als 1 cm Länge hat, lässt sich ein kleines Quadrat der Seitenlänge 1 cm legen:

```
 __
|__|
```

Für ein Quadrat, das aus vier der zuvor betrachteten kleinen Quadrate besteht, benötigt man genau 12 Stäbchen:

```
 __ __
|__|__|
|__|__|
```

(a) Wie viele Stäbchen genau benötigt man für ein Quadrat, das aus (1) neun, (2) sechzehn dieser kleinen Quadrate besteht?

```
 __ __ __ ...
|__|__|__ ...
|__|__|__ ...
|  |  |
:  :  :
```

Wie viele Stäbchen genau benötigt man, um mit diesen kleinen Quadraten ein Quadratgitter auszulegen, das 1 m lang und 1 m breit ist?
Eine Begründung wird nicht verlangt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(a) Man benötigt
(1) genau $(3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 =)$ 24 Stäbchen,
(2) genau $(4 \cdot 5 + 4 \cdot 5 =)$ 40 Stäbchen.

(b) Für dieses Quadratgitter aus $100 \cdot 100$ kleinen Quadraten benötigt man (in jeder waagerechten Reihe 101 senkrechte Stäbchen, in allen waagerechten Reihen zusammen also $100 \cdot 101$ senkrechte Stäbchen; ebenso viele waagerechte Stäbchen in allen senkrechten Reihen; insgesamt also) genau $(100 \cdot 101 + 100 \cdot 101 =)$ 20200 Stäbchen.

Aufgabe 340534:
In einem Schachverein wurde ein Turnier für Anfänger und für Fortgeschrittene durchgeführt. Jeder Anfänger spielte gegen jeden anderen Anfänger genau zwei Partien; jeder Fortgeschrittene spielte gegen jeden anderen Fortgeschrittenen genau zwei Partien.
Diese Partien wurden so angesetzt, dass an jedem von genau 28 Spieltagen genau 3 Partien gespielt wurden.
Es nahmen an dem Turnier mehr Anfänger als Fortgeschrittene teil.

Zeige, dass durch diese Angaben eindeutig bestimmt ist, wie viele Anfänger und wie viele Fortgeschrittene an dem Turnier teilnahmen! Nenne diese beiden Anzahlen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Multipliziert man die Anzahl der Anfänger mit der um 1 kleineren Zahl, so erhält man die Anzahl aller von diesen Spielern gespielten Partien. Entsprechendes gilt für die von den Fortgeschrittenen gespielten Partien.

Zum Beweis kann man z. B. annehmen, dass für je zwei der betreffenden Spieler die beiden Partien so festgelegt werden, dass jeder der beiden einmal die weißen Steine bekommt. Dann kann man für jeden Spieler alle diejenigen Partien abzählen, die er insgesamt mit den weißen Steinen spielt. Einerseits hat man damit für jeden Spieler als Beitrag zu der so errechneten Zahl gerade die um 1 verringerte Anzahl der Spieler genommen; andererseits hat man insgesamt jede Partie genau einmal erfasst.

Die folgende Tabelle zeigt, welche Anzahlen von Partien so zustandekommen können:

Anzahl der Spieler	2	3	4	5	6	7	8	9	> 10
Anzahl der Partien	$2 \cdot 1$ $= 2$	$3 \cdot 2$ $= 6$	$4 \cdot 3$ $= 12$	$5 \cdot 4$ $= 20$	$6 \cdot 5$ $= 30$	$7 \cdot 6$ $= 42$	$8 \cdot 7$ $= 56$	$9 \cdot 8$ $= 72$	$> 10 \cdot 9$ $= 90$

Da genau $28 \cdot 3 = 84$ Partien gespielt wurden, muss 84 als Summe von zwei der hier aufgezählten Anzahlen darstellbar sein; dabei müssen diese beiden Summanden (wegen der unterschiedlichen Spielerzahlen) von einander verschieden sein.
Die einzige Möglichkeit hierfür ist, 84 als Summe von 12 und 72 darzustellen, das sind die Anzahlen der Partien für 4 bzw. 9 Spieler. Da mehr Anfänger als Fortgeschrittene teilnahmen, ist folglich eindeutig bestimmt: Es nahmen genau 9 Anfänger und genau 4 Fortgeschrittene teil.

II. Klasse 6

II.I. Kryptogramme, Zahlen in Figuren

I. Runde 1

Aufgabe V00612:
Edgar hat während einer Mathematikarbeit eine Nebenrechnung so flüchtig hingeschrieben, dass er viele Ziffern selbst nicht mehr lesen kann.
Kannst Du die unleserlichen Ziffern herausfinden? Wie lautet die Aufgabe?
(Das Zeichen □ ist anstelle der unleserlichen Ziffern gesetzt).

□	□	5	□	□	:	□	9	=	□	□	□
1	□	□									
-	-	-									
	1	0	□								
		□	7								
	-	-	-								
		□	□	3							
		□	□	□							
		-	-	-							
				0							

Lösung von Steffen Polster:
Da die Division aufgeht, muss die letzte Zeile 2□3 lauten und der Dividend auf 3 enden. Die Einer von Divisor und Quotient können nur 3 ergeben, wenn der Quotient auf 7 endet. Ebenso wird die 2. Zeile zu 1□5, d. h.

□	□	5	□	3	:	□	9	=	□	□	7
1	?	5									
-	-	-									
	1	0	□								
		□	7								
	-	-	-								
		2	□	3							
		2	□	3							
		-	-	-							
				0							

Nur für einen Divisor 29 oder 39 ergibt das Produkt mit 7 eine dreistellige Zahl zwischen 200 und 300. Da aber das Produkt der Zehnerstelle des Quotienten mit dem Divisor die zweistellige Zahl □7 ergeben soll, ist die Zehnerstelle eine 3 und der Divisor 29. Andernfalls wäre das Produkt dreistellig. Mit der Multiplikation von 29 mit 7 und 3 wird somit

□	□	5	□	3	:	2	9	=	□	3	7
1	□	5									
-	-	-									
	1	0	□								
		8	7								
	-	-	-								
		2	0	3							
		2	0	3							
		-	-	-							
				0							

Die Zeile 10□ wird zu 107 und der Dividend zu □□573. Gleichzeitig muss der Quotient mit 5 beginnen, da sonst die 2. Zeile 1?5 nicht möglich wäre. Einsetzen und Rückmultiplikation ergibt die eindeutige Lösung:

1	5	5	7	3	:	2	9	=	5	3	7
1	4	5									
-	-	-									
	1	0	7								
		8	7								
	-	-	-								
		2	0	3							
		2	0	3							
		-	-	-							
				0							

Aufgabe 130613:
In die leeren Felder des abgebildeten Quadrats sind Zahlen so einzutragen, dass die eingetragenen Zahlen, von links nach rechts gelesen und auch von oben nach unten gelesen, immer größer werden und dass dabei für jede Zeile und für jede Spalte folgendes gilt:

2				
	8			
	11	16		

Alle Differenzen, die man in dieser Zeile bzw. in dieser Spalte zwischen zwei unmittelbar neben- bzw. untereinanderstehenden Zahlen bilden kann, haben einen für diese Zeile bzw. Spalte einheitlichen Wert.

Dabei heiße „Differenz“: „rechte Zahl minus linke Zahl“ bzw. „untere Zahl minus obere Zahl“.
Gib ferner für jede Zeile und für jede Spalte die für sie charakteristische Differenz an!

Lösung von Steffen Polster:

2	5	8	11	14	3
4	8	12	16	20	4
6	11	16	21	26	5
8	14	20	26	32	6
10	17	24	31	39	7
2	3	4	5	6	Differenz

Die dritte Zeile und zweite Spalte ergeben sich durch die jeweils zwei gegebenen Zahlen. Trägt man diese ein, so ergeben sich alle anderen Zeilen.

Aufgabe 140611:

In der abgebildeten Tabelle sind statt der Buchstaben a, b, c, d, e Zweierpotenzen so einzutragen, dass die aus den drei Zweierpotenzen jeder Zeile, jeder Spalte und jeder Diagonalen gebildeten Produkte jeweils einander gleich sind.
Beweise, dass es genau eine Möglichkeit für eine derartige Eintragung gibt, und nenne diese Eintragung!

2^6	2^2	2^7
e	b	2^4
d	c	a

Lösung von Steffen Polster:

Die oberste Zeile hat als Produkt 2^{15}. Damit ergibt sich für $a = \frac{2^{15}}{2^4 \cdot 2^7} = 2^4$.
Da in der Diagonale von links oben nach rechts unten nur noch b fehlt, kann dies berechnet werden, zu $b = 2^5$.
Die restlichen Werte ergeben sich dann zu $c = 2^8$, $d = 2^3$ und $e = 2^6$.
Zur Kontrolle aller Zeilen, Spalten und Diagonalen sind in der Abbildung deren Produkt eingetragen.

	2^6	2^2	2^7	2^{15}
	2^6	2^5	2^4	2^{15}
	2^3	2^8	2^4	2^{15}
2^{15}	2^{15}	2^{15}	2^{15}	2^{15}

Aufgabe 150612:

$$\begin{array}{ccccc} a & \cdot & a & = & b \\ - & & & & - \\ c & \cdot & a & = & d \\ \hline e & \cdot & a & = & a \end{array}$$

In dem abgebildeten Kryptogramm sind in die Kästchen statt der Buchstaben Ziffern so einzusetzen, dass alle fünf angegebenen Aufgaben richtig gelöst sind.
Dabei sollen gleiche Buchstaben gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern bedeuten.

Als Lösung genügt nicht, wie bei solchen „Zahlenrätseln“ sonst üblich, die Angabe von gesuchten Zahlen. Es muss nachgewiesen werden, dass die angegebenen Zahlen alle gestellten Forderungen erfüllen und dass sie die einzigen Zahlen sind, die das tun.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die fünf im Kryptogramm enthaltenen Aufgaben lauten:

$$(1)\quad a\cdot a=b,\qquad (2)\quad c\cdot a=d,\qquad (3)\quad e\cdot a=a,\qquad (4)\quad a-c=e,\qquad (5)\quad b-d=a.$$

Wenn fünf Ziffern a, b, c, d, e diese Aufgaben richtig lösen und sämtlich untereinander verschieden sind, so folgt $a\neq 0$; denn für $a=0$ wäre wegen (1) auch $b=0$. Aus (3) folgt hiernach $e=1$.
Ferner folgt $c\neq 0$; denn für $c=0$ wäre wegen (2) auch $d=0$.
Hiernach und wegen $c\neq e$ ist $c\geq 2$, nach (4) also $a=c+e=3$. Andererseits gilt nach (1) und weil b einstellig ist, $a\cdot a\leq 9$, also $a\leq 3$. Folglich muss $a=3$ sein, nach (4) somit $c=a-e=2$.

Aus (1), (2) erhält man nun $b=9$, $d=6$. Daher kann nur die Eintragung den Bedingungen der Aufgabenstellung entsprechen.
Sie genügt diesen Bedingungen; denn die für a,b,c,d,e eingesetzten Ziffern 3, 9, 2, 6, 1 sind untereinander verschieden, und alle im Kryptogramm enthaltenen Aufgaben sind mit diesen Ziffern richtig gelöst. Also hat genau die angegebene Eintragung die geforderten Eigenschaften.

$$\begin{array}{cccc} 3 & \cdot & 3 & = & 9\\ - & & & & -\\ 2 & \cdot & 3 & = & 6\\ \hline 1 & \cdot & 3 & = & 3 \end{array}$$

Aufgabe 160611:

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{AAA} & \cdot & \mathrm{A} & = & \mathrm{BBB}\\ + & & & & -\\ \mathrm{CCC} & \cdot & \mathrm{E} & = & \mathrm{DDD}\\ \hline \mathrm{FFF} & : & \mathrm{F} & = & \mathrm{GGG} \end{array}$$

In diesem Schema sind für die Buchstaben Ziffern (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) so einzutragen, dass für gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und für verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern stehen und dass alle fünf angegebenen Rechenaufgaben richtig gerechnet sind.
Ermittle alle möglichen derartigen Eintragungen!

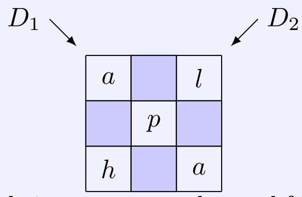
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn es eine derartige Eintragung gibt, so folgt aus der 3. Zeile $G=1$. Ferner folgt aus der 1. Zeile, dass B das Quadrat von A ($\neq B$) ist, also $B=4$ oder $B=9$ gilt und daher $D=3$ oder $D=8$ sein muss.
Andererseits ist D (nach der 2. Zeile) das Produkt zweier von D verschiedener Ziffern C, E, also keine Primzahl. Daher verbleibt nur die Möglichkeit $D=8$, $B=9$, $A=3$.

Da $8=2\cdot 4$ bis auf die Reihenfolge die einzige Zerlegung von 8 in zwei von 8 verschiedene Faktoren ist, folgt entweder $C=2$, $E=4$ oder $C=4$, $E=2$. Im ersten Fall ergibt sich $F=5$, im zweiten Fall $F=7$. Also können nur die Eintragungen

$$\begin{array}{ccccc} 333 & \cdot & 3 & = & 999\\ + & & & & -\\ 222 & \cdot & 4 & = & 888\\ \hline 555 & : & 5 & = & 111 \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{ccccc} 333 & \cdot & 3 & = & 999\\ + & & & & -\\ 444 & \cdot & 2 & = & 888\\ \hline 777 & : & 7 & = & 111 \end{array}$$

alle Bedingungen der Aufgabe erfüllen. Sie erfüllen diese Bedingungen auch; denn die für A, B, C, D, E, F, G eingesetzten Ziffern 3, 9, 2, 8, 4, 5, 1, bzw. 3, 9, 4, 8, 2, 7, 1 sind jeweils sämtlich voneinander verschieden, und die angegebenen Rechenaufgaben sind richtig gerechnet.

Aufgabe 200611:
Petra, eine eifrige Leserin der mathematischen Schülerzeitschrift alpha, stellt in einer Arbeitsgemeinschaft ihren Mitschülern folgende Aufgabe:



In der abgebildeten Figur sind für a, h, l, p natürliche Zahlen so einzutragen, dass sich in jeder der beiden Diagonalen D_1, D_2 die Summe 80 ergibt.

Dabei soll die Zahl a doppelt so groß wie die Zahl p sein; für l soll eine Primzahl eingetragen werden und für h eine Primzahl, die größer als das Zehnfache von l ist.
Ermittle alle Eintragungen, die diese Bedingungen erfüllen! Gib an, wie du sie gefunden hast!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn eine Eintragung von natürlichen Zahlen für a, h, l, p die Bedingungen erfüllt, so folgt: Es gilt $a = 2p$.
In der Diagonalen D_1 steht daher die Summe $2p + p + 2p = 5p$.
Laut Aufgabe ist $5p = 80$, also $p = 16$ und $a = 32$. Ferner folgt $l + 16 + h = 80$, also $l + h = 64$.

Wäre die Primzahl l größer oder gleich 7, so wäre h größer als das Zehnfache hiervon, d. h. $h > 70$ und daher $l + h > 77$, im Widerspruch zu $l + h = 64$. Daher kann l nur eine der Primzahlen 2, 3, 5 sein.
Für $l = 2$ ergäbe sich $h = 62$, also keine Primzahl. Demnach verbleiben nur die Möglichkeiten, dass entweder $l = 3$, $h = 61$ oder $l = 5$, $h = 59$ ist.

32		3
	16	
61		32

32		5
	16	
59		32

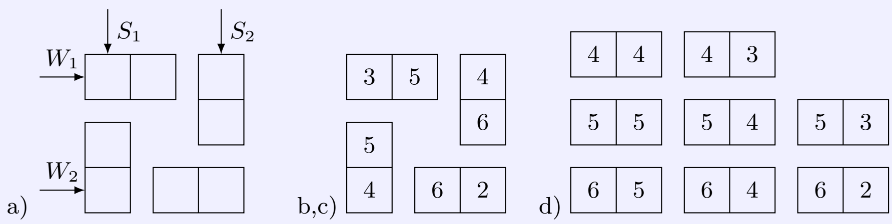
Daher können nur die Eintragungen der Abbildung alle geforderten Bedingungen erfüllen.
Sie erfüllen diese Bedingungen; denn es gilt: 32 + 16 + 32 = 80, 3 + 16 + 61 = 80, 5 + 16 + 59 = 80, 32 ist doppelt so groß wie 16, die Zahlen 3, 61, 5, 59 sind Primzahlen, 61 ist größer als das Zehnfache von 3, ebenso ist 59 größer als das Zehnfache von 5.

Also erfüllen genau die beiden angegebenen Eintragungen die geforderten Bedingungen.

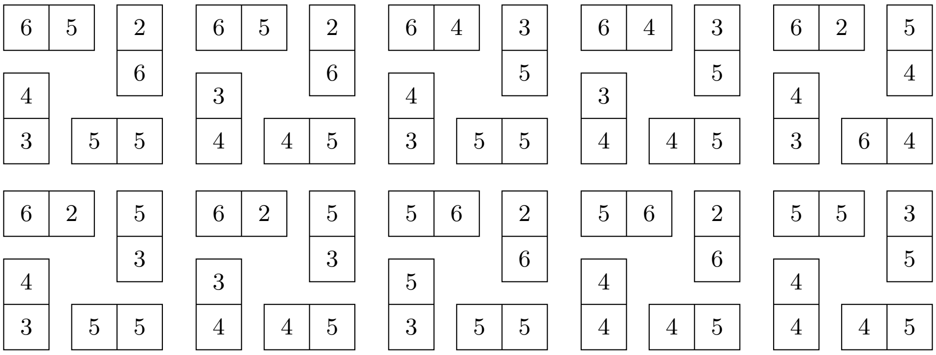
Aufgabe 200614:
Klaus spielt mit Dominosteinen. Er legt jeweils vier Dominosteine so zusammen, wie es das Bild a) zeigt. Dabei entstehen zwei waagerechte Streifen W_1, W_2 und zwei senkrechte Streifen S_1, S_2. Jeder dieser vier Streifen enthält drei Zahlenfelder. Diese sollen für jeden der vier Streifen dieselbe Summe ergeben; in Bild b) z. B. ist diese Summe 12.
Die sonst übliche Regel, dass benachbarte Steine nur mit gleichlautenden Zahlenfeldern aneinanderstoßen dürfen, braucht nicht befolgt zu werden. Anstelle der üblichen Punktsymbole seien die Dominosteine einfacher mit Zahlenzeichen wiedergegeben; siehe Bild c).

Nachdem Klaus mehrmals Steine in der genannten Weise zusammengelegt hat, verbleiben ihm noch die acht in Bild d) abgebildeten Steine. Er will vier von diesen Steinen in der beschriebenen Art zusammenlegen, wobei in jedem der vier Streifen W_1, W_2, S_1, S_2 die Summe 13 entsteht.

Gib mindestens fünf Möglichkeiten hierfür an! Dabei sollen keine zwei der anzugebenden Möglichkeiten dieselben vier Steine enthalten. Eine Begründung für die anzugebenden Möglichkeiten wird nicht verlangt.



Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es genügt, fünf der Möglichkeiten aus der Abbildung anzugeben (oder jeweils statt einer dieser Möglichkeiten eine, die sich aus ihr durch Drehung oder Spiegelung gewinnen lässt).



Aufgabe 210612:

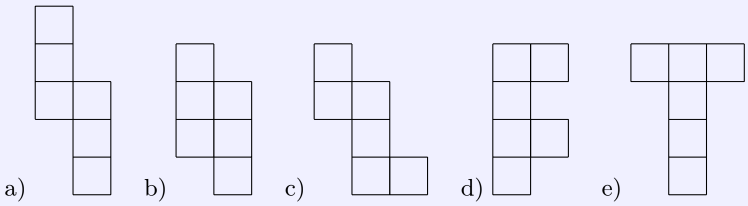
6	4	6	:		□	9	=		□	□
	-					·			+	
□	□	□	-		□	6	=	□	4	□
□	8	□	-	□	□	□	=	□	□	0

In jedes leere Kästchen der Abbildung soll eine der Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ,8, 9 so geschrieben werden, dass die drei waagerechten und die drei senkrechten Aufgaben richtig gerechnet sind.
Eine Beschreibung und Begründung der Lösung wird nicht verlangt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

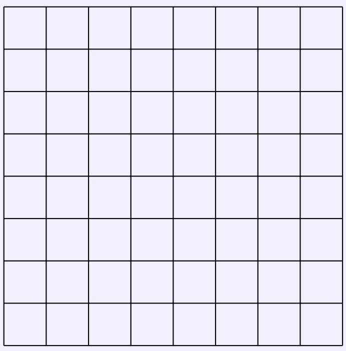
6	4	6	:		1	9	=		3	4
	-					·			+	
1	6	2	-		1	6	=	1	4	6
4	8	4	-	3	0	4	=	1	8	0

Aufgabe 240612:
Michael zeichnet fünf verschiedene Bilder: Bild a) bis e). Er behauptet, dass es Körpernetze von Würfeln seien.



(1) Gib alle diejenigen unter den Bildern a) bis e) an, für die Michaels Behauptung wahr ist! (Eine Begründung wird nicht verlangt.)

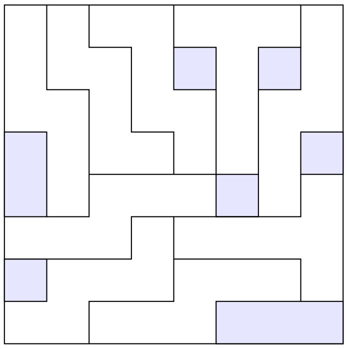
(2) Zeige, dass es möglich ist, aus einem quadratischen Gitternetz von 8 cm Seitenlänge, wie es Bild f) darstellt, neun Würfelnetze der in Aufgabe (1) gefundenen Art auszuschneiden!



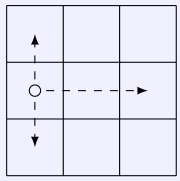
Es soll erlaubt sein, die Würfelnetze unverändert oder umgeklappt (spiegelbildlich) zu erhalten. Jedes in (1) gefundene Würfelnetz soll mindestens einmal vorkommen. Die Seitenlänge der einzelnen Quadrate in (1) soll dieselbe sein wie in (2), also 1 cm.
Zeichne derartige neun Würfelnetze in ein Gitternetz ein! Wie viele Felder des Gitternetzes werden dabei nicht benötigt?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(1) Genau die Bilder a), c) und e) sind Würfelnetze.

(2) Eine mögliche Anordnung von neun Würfelnetzen der geforderten Art zeigt die Abbildung. Zehn Felder des Gitternetzes werden nicht benötigt.

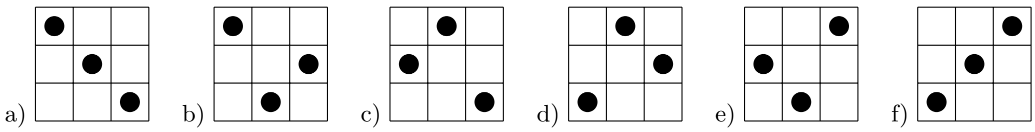


Aufgabe 250611:
Auf einem (3×3)-Felderbrett sollen drei Spielsteine so aufgestellt werden, dass sie sich gegenseitig nicht bedrohen. Dabei soll ein Spielstein genau diejenigen Felder bedrohen, die in der gleichen waagerechten oder in der gleichen senkrechten Reihe wie er liegen.



a) Zeichne alle möglichen Stellungen der geforderten Art für drei solche Spielsteine!
b) Wie viele verschiedenartige Stellungen gibt es, wenn je zwei Stellungen genau dann als verschiedenartig gelten, wenn die eine nicht aus der anderen durch Drehung um das Mittelfeld hervorgehen kann?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Es gibt genau folgende sechs Stellungen der geforderten Art:



b) Da in Stellung (a) das Mittelfeld besetzt ist, in Stellung (b) dagegen nicht, kann es keine Drehung um das Mittelfeld geben, bei der eine dieser beiden Stellungen aus der anderen hervorgeht.
Die Stellung (c), (d) bzw. (e) geht aus der Stellung (b) durch Drehung um 180°, 90° bzw. 270° um das Mittelfeld hervor. Die Stellung (f) geht aus der Stellung (a) durch Drehung um 180° um das Mittelfeld hervor.
Folglich gibt es genau zwei verschiedenartige Stellungen (nämlich die Stellungen (a) und (b)).

Aufgabe 250612:

$$\begin{array}{cccccc}
 & m & a & t & h & e \\
+ & & o & l & y & m \\
+ & & & & p & i \\
+ & & & a & d & e \\
\hline
k & l & a & s & s & e
\end{array}$$

In dem abgebildeten Kryptogramm sind für die Buchstaben Ziffern (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) so einzutragen, dass für gleiche Buchstaben gleiche Ziffern stehen und die Aufgabe richtig gerechnet ist. Ferner wird folgendes gefordert:

(1) Es gilt $o = m$ und $p = t$ und $y = a$, während sonst für verschiedene Buchstaben stets verschiedene Ziffern einzusetzen sind.
(2) a ist zwei Drittel von m.

(3) e ist zwei Drittel von a.
(4) Die Summe von a und s ist gleich m.
(5) d ist kleiner als h.

a) Zeige, dass es genau eine Eintragung gibt, die alle diese Forderungen erfüllt, und gib diese Eintragung an!
b) Wie viel solche Eintragungen gibt es, wenn man auf Forderung (5) verzichtet?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Wenn eine Eintragung alle Forderungen der Aufgabe erfüllt, so folgt:
Wegen (2) und (3) ist sowohl m als auch a durch 3 teilbar, wobei a zwei Drittel von m beträgt. Folglich ist m sogar durch 9 teilbar.
Da m als Anfangsziffer nicht 0 ist, gilt somit $m = 9$.
Wegen (2) und (3) folgt hieraus $a = 6$ und $e = 4$. Wegen (4) gilt dann $6 + s = 9$, also $s = 3$. Offensichtlich gilt $k = 1$ und $l = 0$ (da die Summe kleiner als $96994+9969+99+694 = 107756$ ist). Unter Beachtung von (1) erhält man daher:

	9	6	t	h	4
+		9	0	6	9
+				t	i
+			6	d	4
1	0	6	3	3	4

Nur für $i = 7$ endet die Summe der Einerziffern auf 4, wobei ein Übertrag von 2 entsteht.
Für h, t und d bleiben noch die Ziffern 2, 5 und 8, deren Summe 15 beträgt, so dass die Summe aus den Zehnerziffern und dem Übertrag 2 insgesamt 23 ergibt. Unter Beachtung des sich aus 23 ergebenden neuen Übertrags folgt aus der Summe der Hunderterziffern, dass $t = 5$ gilt. Damit ist entweder $d = 2$ und $h = 8$ oder $d = 8$ und $h = 2$. (*)
Wegen (5) entfällt der letztgenannte Fall. Folglich kann nur die Eintragung

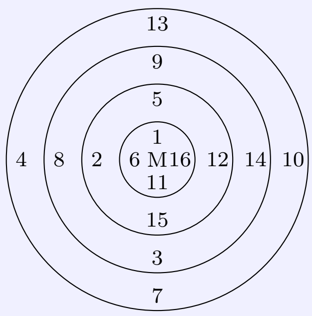
	9	6	5	2	4
+		9	0	6	9
+				5	7
+			6	8	4
1	0	6	3	3	4

alle Forderungen der Aufgaben erfüllen. Da man für diese Eintragung in der Tat alle Forderungen bestätigt, ist damit bewiesen, dass es genau diese eine Eintragung der geforderten Art gibt.

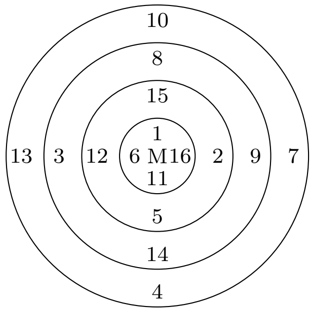
b) Verzichtet man auf die Forderung (5), dann können beide in (*) genannten Fälle eintreten, und es gibt genau zwei Lösungen des Kryptogramms.

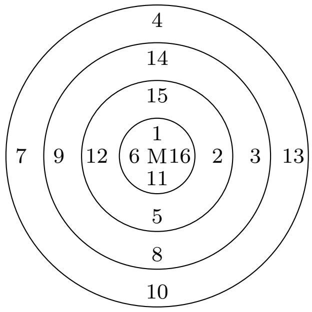
Aufgabe 270611:

Vier Kreisscheiben (siehe Abbildung) sind jede für sich um ihren gemeinsamen Mittelpunkt M so zu drehen, dass danach immer vier Zahlen auf je einem Strahl mit dem Anfangspunkt M liegen. Dabei soll die Summe der vier Zahlen auf jedem Strahl 34 betragen.
Gib mindestens eine Möglichkeit solcher Drehungen an!
Eine Begründung wird nicht verlangt.



Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Abbildung zeigt zwei Möglichkeiten:





Durch systematisches Erfassen aller möglichen Fälle kann man nachweisen, dass dies die einzigen Möglichkeiten sind, abgesehen von einer Drehung der gesamten Figur um einen beliebigen Winkel.

Aufgabe 270612:
In jedes leere Feld des abgebildeten Quadrats (siehe Abbildung) ist eine der Zahlen 2, 3, 4, 5 einzutragen. Dabei soll in keiner Spalte oder Zeile eine dieser Zahlen mehrfach vorkommen. Ferner soll in keiner Spalte oder Zeile neben einer Zahl deren Nachfolger oder Vorgänger stehen.
Gib mindestens zwei solche Eintragungen an!
Eine Begründung wird nicht verlangt.
Hinweis: Es gibt sogar mehr als zwei solche Eintragungen.

1			
	1		
		1	
			1

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es gibt die folgenden Eintragungen, von denen laut Aufgabenstellung mindestens zwei anzugeben sind:

1	3	5	2
4	1	3	5
2	4	1	3
5	2	4	1

1	3	5	2
4	1	3	5
2	5	1	3
5	2	4	1

1	4	2	5
3	1	4	2
5	3	1	4
2	5	3	1

1	4	2	5
3	1	5	2
5	3	1	4
2	5	3	1

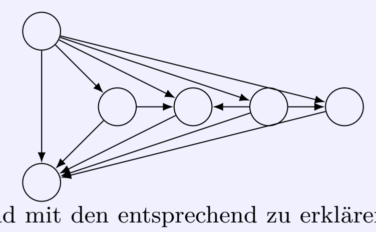
1	4	2	5
4	1	5	2
2	5	1	4
5	2	4	1

1	4	2	5
5	1	4	2
2	5	1	4
4	2	5	1

1	5	2	4
4	1	5	2
2	4	1	5
5	2	4	1

1	5	2	4
5	1	4	2
2	4	1	5
4	2	5	1

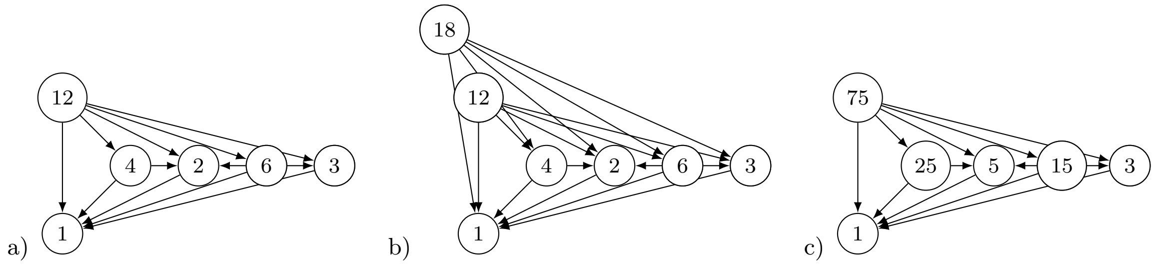
Aufgabe 290612:



a) Trage in die sechs Kreise des Bildes je eine der Zahlen 1, 2, 3, 4, 6, 12 so ein, dass jeder Pfeil von einer Zahl zu einem ihrer Teiler führt! Dabei soll jede der genannten Zahlen genau einmal verwendet werden.

b) Ergänze die Figur durch einen weiteren Kreis mit der Zahl 18 und mit den entsprechend zu erklärenden Pfeilen!
c) Zeichne eine neue Figur, wieder bestehend aus Kreisen und entsprechend zu erklärenden Pfeilen, in der die Zahl 75 und alle ihre Teiler vorkommen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



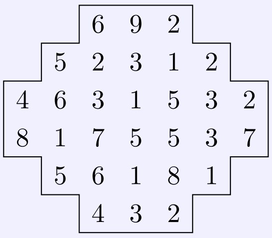
Aufgabe 320611:

$$\begin{array}{ccccc} A & \cdot & A & = & B \\ \cdot & & - & & - \\ C & \cdot & C & = & D \\ \hline E & - & F & = & G \end{array}$$

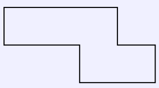
Für die Buchstaben sind Grundziffern (0; 1; 2; ...; 8; 9) so einzutragen, dass für gleiche Buchstaben gleiche Grundziffern und für unterschiedliche Buchstaben unterschiedliche Grundziffern stehen und dass die angegebenen Rechenoperationen richtig gelöst sind.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die einzigen natürlichen Zahlen, deren Quadrate von der ursprünglichen Zahl verschieden und einstellig sind, sind Zwei und Drei, also sind A und C Zwei bzw. Drei.
$A = 2$ und $C = 3$ führt wegen $A - C = F$ zum Widerspruch, also gelten $A = 3, C = 2$ und somit $B = 9$, $D = 4$, $E = 6$, $F = 1$ und $G = 5$, was die Probe bestätigt.

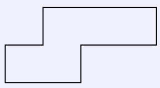
Aufgabe 330611:
Zerlege die Figur aus Abbildung a) so in Teilstücke, dass jedes Teilstück die Gestalt von Abbildung b) oder von Abbildung c) hat und dass auf jedem Teilstück die Summe der Zahlen 20 beträgt!



a)



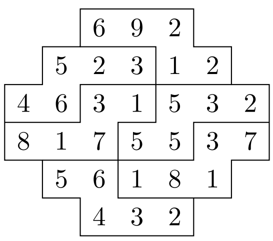
b)

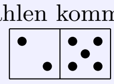


c)

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

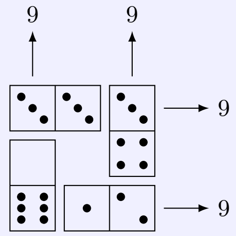
Die Abbildung zeigt eine Zerlegung der geforderten Art.



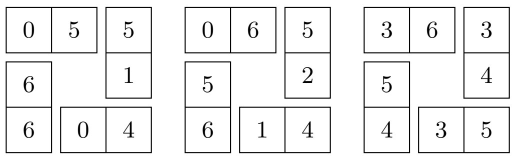
Aufgabe 340614:
a) Zu einem Dominospiel mit den Zahlen von 0 bis 6 gehören 28 Steine. Jede Zusammenstellung von zwei der Zahlen kommt auf einem dieser Steine vor. Die Abbildung zeigt als Beispiel den Stein mit den Zahlen 2 und 5: 

Nenne alle Steine eines Dominospiels!

b) Aus vier geeignet ausgewählten Steinen eines Dominospiels kann man ein „Fenster“ wie in Abb. b) legen, und zwar so, dass auf jeder der vier „Seiten“ des Fensters dieselbe Summe auftritt (im Beispiel beträgt diese „Seitensumme“ 9). Nenne je ein Beispiel für ein Fenster mit der Seitensumme 10, eines mit der Seitensumme 11 und eines mit der Seitensumme 12!
Eine Begründung wird nicht verlangt.



Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Alle Steine eines Dominospiels sind (0,0), (0,1), (0,2), (0,3), (0,4), (0,5), (0,6), (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,4), (4,5), (4,6), (5,5), (5,6), (6,6). Es genügt eine Angabe wie z. B. in der obigen Ziffernschreibweise; eine zeichnerische Wiedergabe mit Punktsymbolen wird nicht vom Schüler verlangt.
b) Beispiele der verlangten Art zeigen die Abbildungen.



II. Runden 2 & 3

Aufgabe 160621:
Ludwig sagt: „Ich kann die Leserzahl 58125 der mathematischen Schülerzeitschrift ‚alpha‘ als Ergebnis der Additionsaufgabe

$$\begin{array}{cccccc} & A & L & P & H & A \\ + & & & H & E & I \\ + & & & T & E & R \\ \hline & 5 & 8 & 1 & 2 & 5 \end{array}$$

erhalten, indem ich für die Buchstaben Ziffern (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) einsetze, und zwar für gleiche Buchstaben gleiche Ziffern, für verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern, und wenn ich noch weiß, dass $I < R$ ist und die Ziffern $EHPL$ in dieser Reihenfolge hintereinander gelesen die Zahl 1976 ergeben.“
Welche Ziffern sind für die Buchstaben einzusetzen, damit alle diese Angaben zutreffen?
Überprüfe, ob die ermittelte Einsetzung alle Forderungen erfüllt, und ob es noch andere derartige Eintragungen gibt!

Lösung von Steffen Polster:
Wenn bei einer Einsetzung alle Angaben zutreffen, so folgt aus den Angaben über die Zehntausenderziffer, dass $A = 5$ ist. Aus den Angaben über die Einerziffer folgt daher $I + R = 10$.
Von den möglichen Darstellungen der 10 als Summe von zwei verschiedenen einstelligen Zahlen

$$10 = 1 + 9 = 2 + 8 = 3 + 7 = 4 + 6$$

scheiden diejenigen aus, in denen die Ziffern schon für andere Buchstaben als I und R eingesetzt wurden, also $E = 1$, $H = 9$, $P = 7$, $L = 6$. Daher verbleibt nur die Darstellung 10 = 2 + 8.

Wegen $I < R$ ist also $I = 2$, $R = 8$. Da bei der Addition der Zehnerziffern eine Zehnerübertragung von genau 1 auftritt, ergibt sich aus den Angaben über die Hunderterziffern $T = 4$.
Also kann nur die Einsetzung $ALPHA$ (56795) $HEITER$ (912418) alle Forderungen erfüllen.

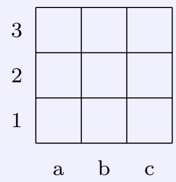
Sie erfüllt diese Forderungen; denn die für verschiedene Buchstaben eingesetzten Ziffern sind sämtlich verschieden, es gilt $EHPL = 1976$ und $I < R$, und die Addition

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & 5 & 6 & 7 & 9 & 5 \\
+ & & & 9 & 1 & 2 \\
+ & & & 4 & 1 & 8 \\
\hline
 & 5 & 8 & 1 & 2 & 5
\end{array}$$

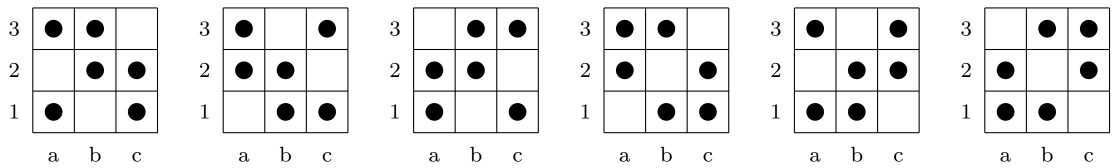
ergibt die Summe 58125.

Aufgabe 250621:

Auf einem (3 × 3)-Spielbrett (siehe Abbildung) sind sechs Spielsteine so aufzustellen, dass jede waagerechte und jede senkrechte Reihe genau zwei Steine enthält. Auf jedem Feld des Spielbrettes darf höchstens ein Spielstein stehen.
Zeichne alle möglichen Stellungen für diese sechs Spielsteine!
Eine Begründung wird nicht verlangt.

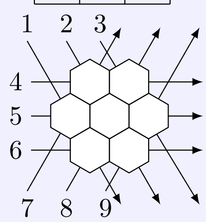


Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Aufgabe 290624:

4	9	2
3	5	7
8	1	6



a) In ein 3 × 3-Quadrat sollen die Zahlen 1 bis 9 so eingetragen werden, dass jede Zahl in genau ein Feld kommt, in jedes Feld genau eine Zahl kommt und dass sich in jeder Zeile, in jeder Spalte und in jeder der beiden Diagonalen die gleiche Summe ergibt. Das linke Bild zeigt dafür ein Beispiel.
Gib eine weitere Eintragung der geforderten Art an!
b) Als in der Mathematik-AG über solche Aufgaben gesprochen wurde, versuchte Peter, eine Aufgabe mit sechseckigen Feldern zu stellen. Er wählt die Figur aus dem rechten Bild und stellt die Aufgabe:

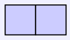
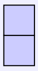
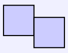
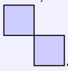
In die sieben Felder sollen die Zahlen 1 bis 7 so eingetragen werden, dass jede Zahl in genau ein Feld kommt, in jedes Feld genau eine Zahl kommt und dass sich in jeder der neun gekennzeichneten Linien die gleiche Summe ergibt.
Gibt es eine derartige Eintragung? Wenn das der Fall ist, gib ein Beispiel an!
Wenn es unmöglich ist, eine solche Eintragung zu bilden, begründe das!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

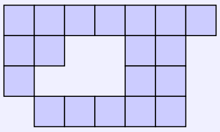
8	3	4
1	5	9
6	7	2

a) Ein Beispiel zeigt die Abbildung a.
b) Es gibt keine derartige Eintragung.
Da es drei der gekennzeichneten Linien gibt, die die gesamte Figur überdecken, ohne ein Feld mehrmals zu erfassen, müsste bei einer Eintragung der geforderten Art das Dreifache der in jeder Linie zu erreichenden Summe gleich 28 sein; denn es gilt $1+2+\dots+7 = 28$.
Da aber 28 nicht durch 3 teilbar ist, ist das nicht möglich.

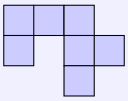
Aufgabe 330632:
Aus 21 Quadraten der Seitenlänge 1 cm soll eine Figur F zusammengesetzt werden:

An das erste Quadrat legt man ein zweites so an, dass sie beide genau eine Seite gemeinsam haben: 
oder  (dagegen nicht  und auch nicht .
Dann legt man immer das nächste Quadrat so an, dass es ebenfalls genau eine Seite mit einem schon hingelegten Quadrat gemeinsam hat.
Am Ende soll die Figur F folgende Bedingungen erfüllen:

(1) Es soll keine freie Fläche geben, die ganz von Quadraten der Figur F umschlossen wäre, zum Beispiel:

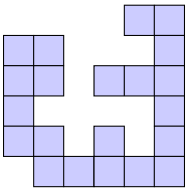


(2) Die Figur F soll ganz in ein großes Quadrat der Seitenlänge 6 cm hineinpassen.
(3) Die Figur F soll den Umfang 42 cm haben.
Beispiel: Der Umfang der folgenden Figur beträgt 16 cm.



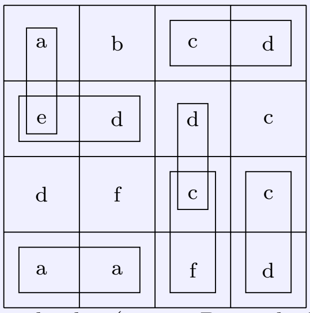
Zeichne eine solche Figur F!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es gibt viele Möglichkeiten. Ein Beispiel:



Aufgabe 330635:

Ein 4×4 - Feld soll mit Buchstaben so gefüllt werden, wie folgendes Bild an einem Beispiel zeigt:
In jedem so gefüllten Feld kann man „Wörter“ lesen, die aus zwei Buchstaben bestehen. Die „Wörter“ liest man entweder von links nach rechts oder von oben nach unten.
(Als Beispiele sind die „Wörter“ ae, cd, ed, dc, cf, cd und aa hervorgehoben. Man hat also auch solche „Wörter“ zu beachten, die einen Buchstaben gemeinsam haben, wie im Beispiel ae mit ed und dc mit cf.)



„Wörter“, die sich nur in der Reihenfolge der Buchstaben voneinander unterscheiden (wie im Beispiel cd und dc), gelten nicht als einander gleich.
Folgende Bedingungen werden zusätzlich verlangt:

(1) In keinem „Wort“ dürfen die beiden Buchstaben einander gleich sein (wie im Beispiel im „Wort“ aa).
(2) Kein „Wort“ darf mehrfach vorkommen (wie im Beispiel das „Wort“ cd).
a) Finde eine Eintragung, die diese Bedingungen erfüllt und nur die 7 Buchstaben a, b, c, d, e, f, g verwendet!
b),c) Gibt es auch eine Eintragung, die diese Bedingungen erfüllt und
b) nur 6 Buchstaben, c) nur 5 Buchstaben
verwendet? Begründe Deine Antworten!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(a) Als Lösung genügt es, eine Eintragung der geforderten Art anzugeben, zum Beispiel Abb. a):

a)

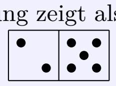
a	b	c	d
e	f	g	a
d	b	e	c
e	g	b	a

b)

a	b	a	c
d	c	e	a
f	d	b	f
b	e	d	a

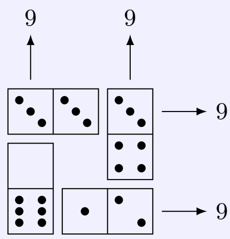
(b) Es gibt auch eine Eintragung der geforderten Art mit nur 6 verwendeten Buchstaben. Dies wird etwa durch Abb. b) bewiesen.

(c) Eine Eintragung der geforderten Art mit nur 5 verwendeten Buchstaben kann es nicht geben.
Beweis: Im 4×4 - Feld lassen sich in jeder der 4 Zeilen und in jeder der 4 Spalten 3 „Wörter“ lesen, zusammen also $(4+4)\cdot 3 = 24$ „Wörter“.
Es sind aber nur 20 „Wörter“ zugelassen, nämlich mit einem der 5 Buchstaben am Anfang und dann jeweils mit einem der 4 anderen Buchstaben am Ende. Bei jeder Eintragung, die nur zugelassene „Wörter“ aufweist, muss es also auch mehrfach auftretende „Wörter“ geben; daher ist sie nicht von der geforderten Art.

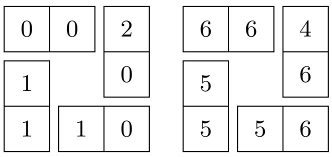
Aufgabe 340624:
Zu einem Dominospiel mit den Zahlen von 0 bis 6 gehören 28 Steine. Jede Zusammenstellung von zwei der Zahlen kommt auf einem dieser Steine vor.
Die Abbildung zeigt als Beispiel den Stein mit den Zahlen 2 und 5. (Auch die 0 wird hier als natürliche Zahl bezeichnet.) 

Aus vier geeignet ausgewählten Steinen eines Dominospiels kann man ein „Fenster“ wie in der unteren Abbildung legen, und zwar so, dass auf jeder der vier „Seiten“ des Fensters dieselbe Summe auftritt. Im Beispiel beträgt diese „Seitensumme“ 9.

a) Nenne je ein Beispiel für ein Fenster mit der Seitensumme 2 und eines mit der Seitensumme 16!
b) Begründe, dass es kein Fenster mit der Seitensumme 18 gibt!
c) Es gibt noch drei weitere natürliche Zahlen kleiner 19 mit der Eigenschaft, dass kein Fenster die betreffende Zahl als Seitensumme hat.
Finde diese Zahlen und begründe für sie die Unmöglichkeit, Seitensumme eines Fensters zu sein!



Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(a) Die Abbildung zeigt je ein Beispiel der geforderten Art.



(b) Die einzige Darstellung von 18 als Summe dreier Zahlen von 0 bis 6 ist $18 = 6 + 6 + 6$.
Ein Fenster mit der Seitensumme 18 könnte daher nur aus Dominosteinen (6,6) bestehen. Da nach dem Aufgabentext das Fenster aber aus Steinen eines Dominospiels zu legen wäre und das Dominospiel den Stein (6,6) nur einmal enthält, ist ein solches Fenster nicht möglich.

(c) Drei solche Zahlen sind 0, 1 und 17. Die einzige Summendarstellung (ohne Beachtung der Reihenfolge) ist nämlich $0 = 0 + 0 + 0$ bzw. $1 = 0 + 0 + 1$ bzw. $17 = 6 + 6 + 5$. Daher könnte ein Fenster mit der Seitensumme 0 nur aus Steinen (0,0) bestehen, ist also nicht möglich; und zur Seitensumme 1 bzw. 17 müsste gelten:

Um auf der oberen waagerechten Seite diese Summe zu erreichen, müsste entweder links oben der Stein (0,1) bzw. der Stein (6,5) liegen und rechts davon eine 0 bzw. 6 vorkommen, oder es müsste links oben (0,0) bzw. (6,6) liegen und rechts davon 1 bzw. 5.

Da auch auf der rechten Seite die Summe 1 bzw. 17 zu erreichen ist, folgt in beiden Fällen:
Mindestens einer der Steine links oben, rechts oben müsste (0,1) bzw. (6,5) sein.

Ebenso folgt: Mindestens einer der Steine rechts unten, links unten müsste (0,1) bzw. (6,5) sein. Da das Dominospiel auch diesen Stein nur einmal enthält, sind somit ebenfalls die Seitensummen 1 und 17 als nicht erreichbar nachgewiesen.

Aufgabe 340635:
In das Schema der Abbildung a kann man anstelle der Buchstaben Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 so eintragen, dass die vier „Seitensummen“ einander gleich sind:

$$a + b + c = c + d + e = e + f + g = g + h + a$$

Ein Beispiel, hier mit dem Wert 14 der vier „Seitensummen“, zeigt die Abbildung b.

(a) Gib drei solcher Eintragungen an, eine mit dem Wert 2 der vier „Seitensummen“, eine mit dem Wert 13 der vier „Seitensummen“ und eine mit dem Wert 17 der vier „Seitensummen“!
(b) Auch mit dem Wert 18 der vier „Seitensummen“ ist eine solche Eintragung möglich; dagegen nicht, wenn das Schema so mit Steinen des Dominospiels gebildet werden soll, wie die Abbildung c zeigt.
Zeige, dass das stimmt; erkläre den Unterschied!
(c) Fritz Schlaumeier schaut das ausgefüllte Schema für die „Seitensumme“ 14 an, überlegt eine ganze Weile und meint dann:
„Die vier Zahlen für b, d, f und h stehen in einer ganz besonderen Beziehung zueinander. Diese Beziehung gilt auch für jede Ausfüllung mit einer anderen ‚Seitensumme‘.“
Gib eine solche Beziehung an und weise nach, dass Fritz recht hat!

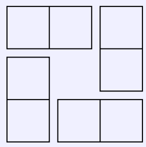
a)

a	b	c
h		d
g	f	e

b)

4	4	6
5		5
5	6	3

c)



Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(a) Die Abbildung zeigt je ein Beispiel für Eintragungen mit den „Seitensummen“ 2, 13 und 17.

1	1	0
0		2
1	1	0

4	6	3
5		4
4	3	6

5	6	6
6		5
6	5	6

(b) Der Unterschied kann folgendermaßen erklärt werden:
Für das Schema aus Abbildung zur Aufgabe a ist eine Eintragung mit der „Seitensumme“ 18 möglich, indem man in alle acht Felder eine 6 einträgt.
Daraus jedoch, dass ein Dominospiel nur einen Stein (6;6) enthält, folgt: Mit den Steinen eines Dominospiels ist eine solche Eintragung nicht möglich.
Die einzige Möglichkeit, 18 als Summe von drei Summanden darzustellen, die nur Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 sein dürfen, lautet nämlich 18 = 6 + 6 + 6. Demzufolge gibt es keine andere Möglichkeit, die „Seitensumme“ 18 zu erreichen, als mit der 6 in allen Feldern.
Dazu wäre aber mehr als ein Stein (6;6) erforderlich.

(c) Eine Beziehung zwischen den Zahlen für b, d, f, h ist $b + f = d + h$.

Beweis:
Wegen der Gleichheit aller vier „Seitensummen“ gelten z. B. auch die Gleichungen $a + b + c = c + d + e$ und $e + f + g = g + h + a$, die auf beiden Seiten eine Eckenzahl enthalten.
Daher gelten auch die Gleichungen $a + b = d + e$, $e + f = a + h$.
Aus ihnen folgt $(a+b)+(e+f) = (d+e)+(h+a)$. Da auch in dieser Gleichung auf beiden Seiten übereinstimmende Summanden, nämlich a und e, vorkommen, folgt $b + f = d + h$.

II.II. Logik, Mengen

I. Runde 1

Aufgabe 020614:
Drei Fluggäste aus der DDR fliegen mit der TU 104 von Prag nach Kairo.
Ihre Namen sind Baumann, Eichler und Hahn. Einer von ihnen ist Elektriker, einer Monteur und einer Ingenieur. Aus ihrer Unterhaltung entnehmen wir folgendes:

a) Zwei Fluggäste, und zwar Herr Baumann und der Ingenieur, sollen in Bombay eine von der DDR gelieferte Anlage aufbauen helfen.
b) Zwei Fluggäste, und zwar Herr Hahn und der Elektriker, kommen aus Berlin, während der dritte aus Dresden kommt.
c) Herr Eichler ist jünger als der Monteur.
d) Herr Hahn ist älter als der Ingenieur.

Wie heißt der Ingenieur? Wie heißt der Elektriker? Wie heißt der Monteur? Die Lösung ist zu begründen!

Lösung von Steffen Polster:
Nach Aussage a) heißt der Ingenieur nicht Baumann, nach Aussage b) ist Herr Hahn kein Elektriker.
Nach d) ist Herr Hahn auch kein Ingenieur, d. h., er ist Monteur. Herrn Baumann muss somit Elektriker sein, und folglich Herr Eichler der Ingenieur.

Aufgabe 030614:
Peter, ein junger Mathematiker, sagt zu seinem Vater:

„Ich weiß ein Kunststück. Jeder von uns beiden hat 30 Streichhölzer zur Verfügung und nimmt einige davon in die Hand. Du sagst mir, ob die Anzahl der Streichhölzer, die du in die Hand genommen hast, gerade oder ungerade ist. Ich werde dir dann, ohne nachzuzählen, sagen, ob die Gesamtzahl der übriggebliebenen Streichhölzer gerade oder ungerade ist.“

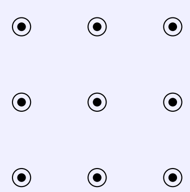
Wieso weiß Peter das?

Lösung von Steffen Polster:
Die Summe zweier gerader Zahlen ist gerade, ebenso die Summe zweier ungerader Zahlen. Eine ungerade Summe entsteht nur, wenn ein Summand gerade und der andere ungerade ist.

Nimmt Peter eine gerade Anzahl Streichhölzer in die Hand, bleibt eine gerade Anzahl zurück.
Wählt der Vater eine gerade Anzahl, bleibt eine gerade Anzahl übrig. Wählt er „ungerade“, bleibt eine ungerade Anzahl zurück.

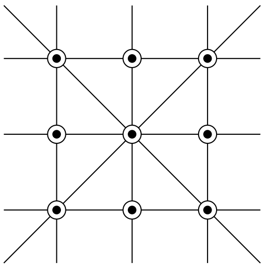
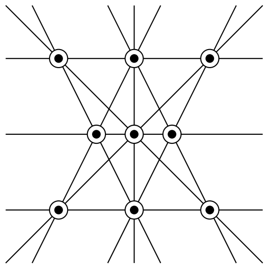
Nimmt Peter eine ungerade Anzahl Streichhölzer in die Hand, bleibt eine ungerade Anzahl zurück.
Wählt der Vater nun eine gerade Anzahl, bleibt eine ungerade Anzahl übrig. Wählt er „ungerade“, bleibt eine gerade Anzahl zurück.

Aufgabe 030615:
a) Zeichne 9 Punkte so, wie es die Abbildung zeigt. Lege durch diese Punkte acht verschiedene Geraden so, dass auf jeder dieser Geraden drei Punkte liegen! Fertige eine Zeichnung an!



b) Es sollen nun 2 von diesen 9 Punkten so verschoben werden, dass man genau zehn verschiedene Geraden zeichnen kann, wobei wieder auf jeder dieser Geraden drei Punkte liegen sollen.
Fertige auch dazu eine Zeichnung an!

Lösung von Steffen Polster:

a)  b) 

Aufgabe 040612:

J	U	N	G	E	W
U	N	G	E	W	E
N	G	E	W	E	L
G	E	W	E	L	T

Auf wie viel verschiedene Weisen kann man in der nebenstehenden Tabelle die Wörter „Junge Welt“ lesen, ohne dabei Zeilen oder Spalten zu überspringen?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Man kann die Wörter „Junge Welt“ ohne Überspringen genau 56 mal lesen.

Anmerkung: Von jedem Buchstaben, der nicht in der letzten Zeile oder in der letzten Spalte steht, kann man entweder zum rechts daneben stehenden Buchstaben (Schritt a) oder zum darunter stehenden Buchstaben (Schritt b) weitergehen.
Jeder Möglichkeit, das Wort „Junge Welt“ in der angegebenen Weise zu lesen, ist also eine Folge von Schritten zugeordnet. z. B. ist a a b a b a b a. Die Aufgabe besteht nun in der Berechnung der Anzahl der verschiedenen Anordnungen von 5 Buchstaben a und 3 Buchstaben b. Diese ist $\frac{(5+3)!}{5!\cdot 3!} = 56$.

Aufgabe 060614:
In einem Haus wohnen genau die Mietsparteien Albrecht, Becker, Conrad, Dietrich, Ermler, Fritsche, Geißler, Hamann, Ilgner, Keies, Lorenz, Männig, Nolte, Oswald, Richter und Pätzold.
Im Erdgeschoss und in jeder Etage wohnen genau zwei Mietsparteien, außerdem ist folgendes bekannt:

Albrechts wohnen zwei Stockwerke tiefer als Beckers.
Beckers wohnen sechs Stockwerke höher als Conrads.
Familie Fritsche wohnt neben Familie Geißler.
Familie Männig wohnt vier Stockwerke höher als Familie Nolte und zwei Stockwerke tiefer als Familie Fritsche.
Ein Stockwerk über Familie Nolte wohnt Familie Oswald.
Familie Albrecht wohnt drei Etagen über Familie Richter,
und Familie Pätzold wohnt fünf Stockwerke unter Familie Geißler.

a) Wie viel Stockwerke hat das Haus?
b) In welchem Stockwerk wohnt Familie Albrecht?

Lösung von Steffen Polster:
Die 16 Mietsparteien werden durch Anfangsbuchstaben ihrer Namen bezeichnet.
a) Da jeweils zwei Familien eine Etage bewohnen, hat das Haus neben dem Erdgeschoss noch 7 Stockwerke.

b) Es gelten die folgenden Beziehungen:

$$a+2=b \quad (1) \qquad ; \qquad c+6=b \quad (2) \qquad ; \qquad f=g \quad (3) \qquad ; \qquad n+4=m \quad (4)$$

$$m+2=f \quad (5) \qquad ; \qquad n+1=o \quad (6) \qquad ; \qquad r+3=a \quad (7) \qquad ; \qquad p+5=g \quad (8)$$

Aus (3) bis (6) folgt $n+6=o+5=m+2=f=g$. Da außerdem (8) gilt, müssen Pätzold und Oswald auf der gleichen Etage wohnen ($o=p$).
Weiterhin ergeben die Gleichungen (1), (2), (7) $c+6=r+5=a+2=b$. c und n können damit nur im

Erdgeschosse oder in der 1. Etage wohnen.

c und n können aber nicht in der gleichen Etage wohnen, da dann auch r, o und p unmittelbare Nachbarn wären. Wohnt im Erdgeschoss n, dann müssten in der 1. Etage o, p und c wohnen, was nicht möglich ist.
Damit wohnt Nolte im 1. Stock und Conrad im Erdgeschoss und Albrecht folglich im 4. Stock.

Aufgabe 080614:
Von drei Pionieren einer Klasse ist uns folgendes bekannt:

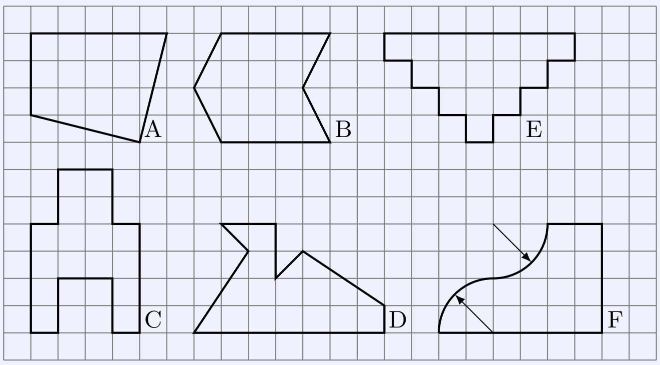
(1) Sie haben die Vornamen Alex, Bodo und Dietmar.
(2) Ihre Familiennamen lauten Neumann, Siebert und Keller. Dabei braucht die Reihenfolge der Vornamen nicht der Reihenfolge der Familiennamen zu entsprechen.
(3) Alex heißt nicht Neumann.
(4) Der Pionier mit dem Familiennamen Keller ist älter als der Pionier mit dem Vornamen Bodo.
(5) Die Mutter des Pioniers Neumann ist eine geborene Mittag.
(6) Die Mutter Bodos trägt den Geburtsnamen Rößler.

Ermittle die Familiennamen, die den Vornamen der Pioniere zugeordnet sind!

Lösung von Steffen Polster:
Bodo kann nach den Aussagen (5) und (6) nicht Neumann heißen. Da Bodo auch nicht Neumann heißt (Aussage 4), muss sein Nachname Siebert sein.

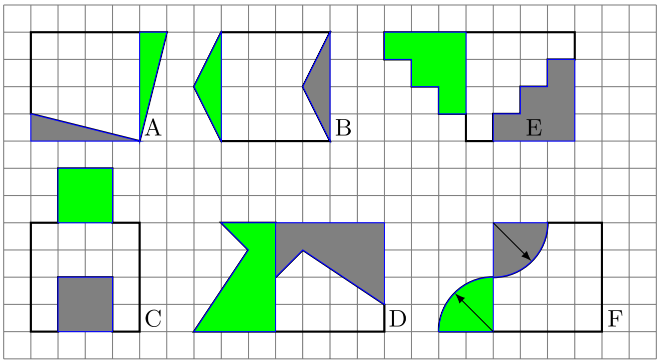
Damit folgt aus (3), dass Alex Keller heißen muss und somit der dritte Pionier den Namen Dietmar Neumann hat.

Aufgabe 100612:
Untersuche, welche der in der Abbildung dargestellten Figuren A bis F sich auf wenigstens eine Weise durch einen einzigen geraden Schnitt so in zwei Teilflächen zerlegen lässt, dass sich diese beiden zur gleichen Figur gehörenden Teilflächen jeweils zu einer Quadratfläche zusammensetzen lassen!



Als Lösung genügt in den Fällen, in denen eine Zerlegung der genannten Art möglich ist, je eine entsprechende Zeichnung oder die jeweils zum Quadrat zusammengesetzten aufgeklebten Teilflächen.
In den Fällen dagegen, in denen eine Zerlegung und Zusammensetzung der genannten Art nicht möglich ist, genügt als Lösung eine entsprechende Angabe (ohne Begründung).

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Sämtliche Figuren lassen sich der Aufgabe gemäß zerlegen:



Aufgabe 100614:
An 15 Teilnehmer am Wettbewerb der mathematischen Schülerzeitschrift „alpha“ wurden insgesamt 25 Antwortkarten „sehr gut gelöst“ von der Redaktion geschickt, und zwar erhielt jeder dieser Teilnehmer mindestens eine solche Antwortkarte.

Außerdem ist über diese 15 Teilnehmer bekannt, dass mindestens ein Teilnehmer genau 2 Antwortkarten, mindestens ein Teilnehmer genau 3 Antwortkarten, mindestens ein Teilnehmer genau 4 Antwortkarten und mindestens ein Teilnehmer genau 5 Antwortkarten erhielt. An einige der 15 Teilnehmer wurde je genau eine Antwortkarte geschickt.

Ermittle die Anzahl dieser Teilnehmer!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Laut Aufgabe gibt es unter den 15 Teilnehmern mindestens 4, für die folgendes zutrifft:

der erste von ihnen erhielt genau 2 Antwortkarten,
der zweite von ihnen erhielt genau 3 Antwortkarten,
der dritte von ihnen erhielt genau 4 Antwortkarten und
der vierte von ihnen erhielt genau 5 Antwortkarten.

Diese 4 Teilnehmer erhielten folglich zusammen genau 14 Antwortkarten. Da von den restlichen 11 Teil- nehmern jeder mindestens eine Antwortkarte erhielt, sind damit schon sämtliche 25 Antwortkarten verteilt.
Keiner dieser 11 Teilnehmer kann daher mehr als eine Antwortkarte erhalten haben.
Unter den 15 erwähnten Teilnehmern gibt es mithin genau 11 mit je genau einer Antwortkarte.

Aufgabe 170614:
Bei einem Sportwettkampf beteiligten sich die Pioniere Anton, Bernd, Christian, Detlef, Ernst und Frank am Hochsprungwettbewerb. Über das Ergebnis gelten folgende Aussagen:

(1) Anton sprang höher als Frank, erreichte aber eine kleinere Sprunghöhe als Detlef.
(2) Frank und Ernst erreichten verschiedene Sprunghöhen; es ist jedoch nicht wahr, dass Frank höher sprang als Ernst.
(3) Christian sprang genau so hoch wie Anton, aber höher als Ernst.
(4) Es ist falsch, dass Bernd die Sprunghöhe eines anderen Schülers erreichte oder übertraf.

Ermittle die Reihenfolge der Sprunghöhen, die die Pioniere bei diesem Wettkampf erreichen! Beginne bei der Angabe der Reihenfolge mit dem Schüler, der die größte Sprunghöhe erreichte!

Lösung von Steffen Polster:
Aus der vierten Aussage folgt sofort, dass Bernd Letzter war. Aus (2) und (3) folgt, dass Anton und Christian gleich hoch und höher als Ernst sprangen. Ernst sprang aber auch höher als Frank. Andererseits folgt aus (1), dass Detlef höher als Anton war und somit der Beste.

Damit ergibt sich die Reihenfolge: Detlef, Anton und Christian (gleiche Sprunghöhe), Ernst, Frank, Bernd.

Aufgabe 180613:
Fred, Gerd, Hans und Ingo sind Schüler der Klassen 6a, 6b, 7a, 7b, und zwar ist in jeder dieser Klassen einer der vier Schüler.
In einem Gespräch, an dem nur Fred und die beiden Schüler der 7. Klasse beteiligt waren, stellt Hans fest, dass drei der vier Schüler nur je eine der Zeitschriften „alpha“ und „technikus“ lesen, nämlich Fred, Gerd und der Schüler der 6a.
Der Schüler der 7b dagegen liest sowohl den „technikus“ als auch die Zeitschrift „alpha“.
Zu welcher Klasse gehört nach diesen Angaben jeder der vier Schüler, und welcher Schüler liest die beiden Zeitschriften „alpha“ und „technikus“?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Fred ist keiner der beiden Schüler der 7. Klasse, mit denen er sich unterhielt. Er ist auch nicht der Schüler der 6a, da dieser in der von Hans gegebenen Aufzählung außer Fred erwähnt wird. Also gehört Fred der 6b an.

Zur Klasse 6a gehören nach dieser Aufzählung weder Fred noch Gerd. Da ferner Hans einer der Schüler der 7. Klasse ist, mit denen Fred sich unterhielt, gehört auch Hans nicht zur 6a. Folglich gehört Ingo der 6a an. Die beiden Schüler der 7. Klasse sind also Gerd und Hans.

Der Schüler der 7b kann nicht Gerd sein, da er beide Zeitschriften liest, Gerd aber nur eine. Also gehört Gerd der 7a und Hans der 7b an. Der Schüler, der beide Zeitschriften liest, ist folglich Hans.

Aufgabe 180614:
Drei Pioniere einer Schule, Klaus, Silvia und Frank, wurden zur Kreisolympiade Junger Mathematiker delegiert und errangen dort einen ersten, einen zweiten bzw. einen dritten Preis. Als später Rainer nach dem Abschneiden seiner Mitschüler gefragt wurde, sagte er:

„Ich glaube, Silvia errang keinen ersten Preis, Klaus bekam keinen zweiten Preis, den erhielt nämlich Frank.“

Wie sich anschließend herausstellte, war unter den drei Aussagen Rainers genau eine wahr, die anderen beiden waren dagegen falsch.
Welcher von den drei genannten Pionieren erhielt den ersten, welcher den zweiten und welcher den dritten Preis?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, die Aussage „Frank erhielt einen zweiten Preis“ wäre wahr.
Dann müssten die beiden anderen Aussagen falsch sein. Das würde aber bedeuten, dass Klaus ebenfalls einen zweiten Preis erhielt, im Widerspruch zur Aufgabe. Also ist die betrachtete Aussage falsch.

Angenommen, die Aussage „Klaus erhielt keinen zweiten Preis“ wäre wahr.
Dann müssten die beiden anderen Aussagen falsch sein. Das würde jedoch bedeuten, dass keiner einen zweiten Preis erhielt, im Widerspruch zur Aufgabe. Also ist auch diese Aussage falsch.

Mithin kann nur die Aussage ”Silvia erhielt keinen ersten Preis” wahr sein. Da damit die beiden anderen Aussagen falsch sind, erhielt Klaus einen zweiten Preis.
Ferner kann nur Frank einen ersten Preis und mithin Silvia einen dritten Preis errungen haben. Nur bei dieser Preisverteilung ist genau eine von Rainers Aussagen wahr, und die anderen beiden sind falsch.

Aufgabe 190613:
In einem Kästchen befinden sich 12 rote, 15 blaue und 8 gelbe Kugeln, die sich nur durch ihre Farbe unterscheiden. Anke will mit verbundenen Augen eine Anzahl dieser Kugeln herausnehmen. Die Anzahl will sie so wählen, dass sie mit Sicherheit erreicht, dass sich unter den herausgenommenen Kugeln 5 von gleicher Farbe befinden.

Sie meint: „Es genügt hierzu, 15 Kugeln herauszunehmen.“
Birgit meint: „Es genügen sogar 13 Kugeln.“
Cornelia behauptet: „Es genügen dafür 12 Kugeln.“
Entscheide für jede der drei Meinungen, ob sie wahr ist, und begründe deine Entscheidung!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Cornelias Meinung ist falsch; denn greift man 12 Kugeln heraus, so erreicht man nicht mit Sicherheit, dass sich darunter 5 von gleicher Farbe befinden. Es können nämlich 4 rote, 4 blaue und 4 gelbe Kugeln herausgegriffen worden sein.

Birgits Meinung ist wahr; denn hat man 13 Kugeln herausgegriffen, so gibt es nur folgende Möglichkeiten:
1. Die ersten 12 herausgegriffenen Kugeln sind 4 rote, 4 blaue und 4 gelbe. Dann muss die 13. Kugel eine dieser Farben haben; von dieser Farbe befinden sich also insgesamt 5 unter den 13 herausgegriffenen Kugeln, wie es erreicht werden sollte.

2. Die Farbverteilung unter den ersten 12 Kugeln ist eine andere als 4 rote, 4 blaue und 4 gelbe. Dann hat sich gegenüber dieser Verteilung die Anzahl für mindestens eine dieser Farben erhöht, da sonst nicht insgesamt 12 Kugeln in der geänderten Verteilung vorliegen könnten. Also befinden sich bereits unter 12 Kugeln von mindestens einer Farbe mindestens 5 Kugeln. Damit ist dies erst recht für die 13 herausgegriffenen Kugeln der Fall.

Ankes Meinung ist ebenfalls wahr; denn schon unter 13, erst recht also unter 15 Kugeln befinden sich 5 von gleicher Farbe.

Aufgabe 190614:
Drei Pioniere einer Schule, Karin, Dieter und Frank, wurden zur Kreisolympiade Junger Mathematiker delegiert und errangen einen ersten, einen zweiten und einen dritten Preis (jeder der drei Pioniere genau einen dieser Preise). Später erkundigte sich Anette nach dem Abschneiden der drei Olympiadeteilnehmer. Man sagte ihr:

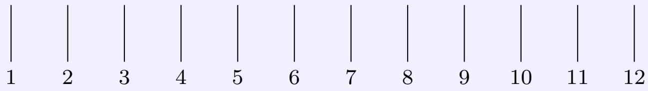
„Dieter erhielt keinen ersten Preis.“ (1)
„Karin erhielt keinen zweiten Preis.“ (2)
„Frank erhielt einen zweiten Preis“ (3)

Später stellte sich heraus, dass von diesen drei Aussagen genau eine wahr, die anderen dagegen falsch waren. Welcher der drei Schüler erhielt hiernach den ersten, welcher den zweiten und welcher den dritten Preis?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Dieter erhielt keinen zweiten Preis; denn hätte er einen zweiten Preis erhalten, so wären die 1. und die 2. Aussage wahr gewesen.
Auch Frank erhielt keinen zweiten Preis; denn hätte er einen zweiten Preis erhalten, so wären die 2. und die 3. Aussage wahr gewesen.
Also erhielt Karin einen zweiten Preis. Somit waren die 2. und die 3. Aussage falsch, die erste dagegen wahr.
Folglich erhielt Dieter, da er weder einen ersten noch einen zweiten Preis erhalten haben konnte, einen dritten Preis. Den ersten Preis konnte schließlich nur Frank errungen haben; denn die beiden übrigen Preise hatten ja Karin und Dieter bekommen.

Aufgabe 210614:
Zwölf Hölzchen, die einzeln in einer Reihe liegen (siehe Abbildung), sollen folgendermaßen in eine Anordnung von sechs „Doppelhölzchen“ (d. h. Häufchen von je zwei zusammenliegenden Hölzchen) gebracht werden:

Es soll mehrere Male jeweils ein einzeln liegendes Hölzchen entweder nach rechts oder nach links springen und dabei jedesmal (mit Ausnahme des letzten Males) genau drei Hölzchen (entweder drei einzeln liegende oder ein einzeln liegendes und ein Doppelhölzchen) überspringen. Beim letzten Male sollen genau drei Doppelhölzchen übersprungen werden.



Beschreibe eine Serie von Sprüngen die diese Forderungen erfüllt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Eine Serie der gesuchten Art ist z. B.: 1 auf 5, 7 auf 11, 9 auf 12, 4 auf 8, 2 auf 6, 3 auf 10.

Aufgabe 220613:
Bei einem Sportwettkampf beteiligten sich die Pioniere Anton, Bernd, Christian, Detlef, Ernst und Frank am Hochsprungwettbewerb. Über das Ergebnis gelten folgende Aussagen:

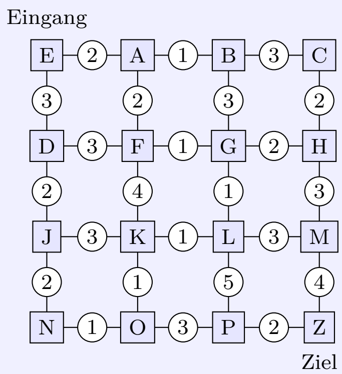
(1) Anton sprang höher als Frank, erreichte aber eine kleinere Sprunghöhe als Detlef.
(2) Frank und Ernst erreichten verschiedene Sprunghöhen; es ist jedoch nicht wahr, dass Frank höher als Ernst sprang.
(3) Christian erreichte die gleiche Höhe wie Anton, sprang aber höher als Ernst.
(4) Es ist falsch, dass Bernd die Sprunghöhe eines anderen Pioniers erreichte oder übertraf.

Untersuche, ob sich aus diesen Angaben die Reihenfolge der Sprunghöhen der sechs Pioniere eindeutig erhalten lässt!
Wenn dies möglich ist, so nenne diese Reihenfolge, und beginne dabei mit der größten Sprunghöhe!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Bezeichnet man jeweils die Sprunghöhe eines Pioniers mit dem Anfangsbuchstaben seines Vornamens, so erhält man:

Aus (1) folgt $D > A$, aus (3) folgt $A = C$ und $C > E$, aus (2) folgt $E > F$, aus (4) folgt $F > B$.
Die gesuchte Reihenfolge lautet daher:
$$D > A = C > E > F > B$$

Aufgabe 230614:



Luise will so rasch wie möglich vom Eingang (E) zum Ort des Pionierpressefestes (Ziel (Z)) gehen.
Auf dem skizzierten (nicht maßstäblichen) Plan sind alle möglichen Wege vom Eingang zum Ziel sowie jeweils die Minuten angegeben, die für die verschiedenen Teilstrecken gebraucht werden. Jeder Teilnehmer erhält einen derartigen Plan und soll angeben, wie er auf dem schnellsten Wege zum Ziel kommt.

a) Gib einen Weg an, für den möglichst wenig Zeit gebraucht wird!
Wie viel Minuten sind für diesen Weg ausreichend?
b) Gib noch mindestens zwei weitere derartige Wege an!

Hinweis: Um die Angabe der Wege zu erleichtern, werden die Abzweigungs- bzw. Kreuzungspunkte mit A, B, C, D, E, F, ..., P bezeichnet, wie es in der Abbildung angegeben ist.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Um in kürzester Zeit zum Ziel zu kommen, sind 13 Minuten ausreichend.
Es gibt insgesamt genau vier verschiedene Wege, bei denen 13 Minuten ausreichend sind, nämlich

$$EAFGLKOPZ, \qquad EAFGLMZ, \qquad EAFGLPZ, \qquad EDJNOPZ$$

Als Lösung zu a) gilt die Angabe eines dieser Wege, als Lösung zu b) die Angabe zweier weiterer.

Aufgabe 250613:
Dirk und Jörg trafen sich in der Erfassungsstelle für Sekundärrohstoffe. Jörg hat sein Altpapier in mehrere Päckchen zu je 5 kg gebündelt und außerdem noch 3 kg loses Papier.
Dirk liefert 32 kg Papier ab. Als beide ihr Sammelergebnis vergleichen, stellen sie auch fest, dass sie zusammen mehr als 50 kg Altpapier gesammelt hatten.
Wie viele Bündel zu je 5 kg kann Jörg abgeliefert haben, wenn wir außerdem noch wissen, dass Dirk mehr Altpapier als Jörg hatte?
Gib alle Möglichkeiten an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Jörg hat weniger als (die von Dirk gebrachten) 32 kg abgeliefert. Wegen $50 - 32 = 18$ hat er aber mehr als 18 kg abgeliefert. Hätte er drei oder weniger Bündel zu 5 kg gebracht, so hätte er wegen $3 \cdot 5 + 3 = 18$ nur 18 kg oder weniger geliefert.
Hätte er sechs oder mehr Bündel zu 5 kg gebracht, so hätte er wegen $6 \cdot 5 + 3 = 33$ mehr als 32 kg geliefert. Also kann er nur vier oder fünf Bündel zu 5 kg gebracht haben.
Diese beiden Fälle sind in der Tat möglich, da sie auf $4 \cdot 5 + 3 = 23$ bzw. $5 \cdot 5 + 3 = 28$ führen.

Aufgabe 260612:
Zur Durchführung eines Geländespiels war es nötig, dass jeder Teilnehmer ein Schreibgerät bei sich hatte.
Es waren nur folgende Sorten Schreibgeräte von Teilnehmern mitgebracht worden. Kugelschreiber, Rotstifte und Grünstifte; keine dieser drei Sorten kam doppelt bei einem der Teilnehmer vor. Im einzelnen wurde festgestellt:

(1) Es waren insgesamt 100 Teilnehmer bei diesen Geländespiel.
(2) Genau 20 der Teilnehmer hatten einen Kugelschreiber, aber keinen Rotstift.
(3) Genau 15 der Teilnehmer hatten einen Kugelschreiber, aber keinen Grünstift.
(4) Genau 5 der Teilnehmer hatten einen Kugelschreiber, aber weder einen Rotstift noch einen Grünstift.
(5) Genau 65 der Teilnehmer hatten keinen Kugelschreiber.
(6) Genau 55 der Teilnehmer hatten keinen Rotstift.
(7) Genau 40 der Teilnehmer hatten keinen Grünstift.
(8) Genau 15 der Teilnehmer hatten weder einen Rotstift noch einen Grünstift.

a) Ermittle aus diesen Angaben die Anzahl derjenigen Teilnehmer, die wenigstens ein Schreibgerät mitgebracht hatten!
b) Reichten die mitgebrachten Schreibgeräte aus, um bei geeigneter Verteilung jeden der 100 Teilnehmer mit einem Schreibgerät zu versorgen?

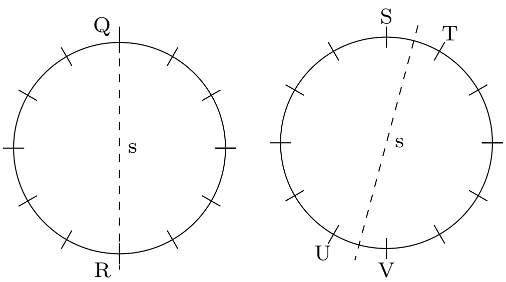
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Unter den 15 in (8) genannten Teilnehmern ohne Rot- und Grünstift befanden sich auch die 5 in (4) genannten Teilnehmer (ohne Rot- und Grünstift, aber) mit Kugelschreiber; die anderen 10 hatten folglich überhaupt kein Schreibgerät.
Aus (8) und (1) folgt ferner: Alle 85 in (8) nicht genannten Teilnehmer hatten ein Schreibgerät (nämlich mindestens eines der Geräte Rot- oder Grünstift). Also hatten nur die genannten 10 Teilnehmer kein Schreibgerät.
Damit ist gezeigt: Genau 90 der Teilnehmer hatten wenigstens ein Schreibgerät mitgebracht.

b) Unter den 20 in (2) genannten sämtlichen Teilnehmern mit Kugelschreiber, aber ohne Rotstift befanden sich auch die 5 in (4) genannten (mit Kugelschreiber, ohne Rotstift und) ohne Grünstift; die anderen 15 hatten folglich außer dem Kugelschreiber einen Grünstift mitgebracht. Daraus folgt:

Die mitgebrachten Schreibgeräte reichten aus, um alle Teilnehmer zu versorgen. Es genügte z. B., 10 der genannten Grünstifte an die in a) ermittelten Teilnehmer ohne mitgebrachtes Schreibgerät zu verteilen.

Aufgabe 260614:
Auf einem Kreis werden wie beim Zifferblatt einer Uhr zwölf Punkte eingetragen. Auf jeden der Punkte wird genau ein Spielstein gelegt. Zwei Spieler A und B sollen abwechselnd jeweils entweder genau einen Stein oder genau zwei Steine, die auf benachbarten Punkten liegen, wegnehmen.
Spieler A beginnt. Gewonnen hat der Spieler, der den letzten Spielstein wegnimmt.
Wie kann Spieler B vorgehen, um in jedem Fall zu gewinnen?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Spieler B kann die Axialsymmetrie der Figur ausnutzen. Für den ersten Zug von Spieler A sind genau die folgenden zwei Fälle möglich

1. Spieler A nimmt nur einen Stein weg, wir bezeichnen ihn mit Q. Dann wählt Spieler B als Symmetrieachse s der Figur diejenige Symmetrieachse, die durch Q geht.
Auf s liegt noch ein Stein R. Diesen nimmt Spieler B in seinem ersten Zug weg.

2. Spieler A nimmt zwei nebeneinanderliegende Steine S und T weg. Dann wählt Spieler B als Symmetrieachse s der Figur diejenige Symmetrieachse, die zwischen S und T verläuft.
Die Gerade s verläuft dann noch zwischen zwei weiteren nebeneinanderliegenden Steinen U und V. Diese nimmt Spieler B in seinem ersten Zug weg.

Nach dem ersten Zug von Spieler B liegen zwei zueinander bezüglich s symmetrische Steine niemals nebeneinander, sondern sind durch mindestens einen Punkt ohne Spielstein voneinander getrennt. Daher kann Spieler A niemals in einem Zug gleichzeitig einen Stein P und den zu ihm bezüglich s symmetrisch gelegenen Stein P' wegnehmen.

Folglich wird Spieler B in jedem Fall zum Wegnehmen des letzten Steines, also zum Gewinn, kommen, wenn er zu jedem Stein, den Spieler A wegnimmt, im Gegenzug den bezüglich s symmetrisch gelegenen Stein wegnimmt.

Aufgabe 270613:
Auf einer Wippe stellt sich heraus:

(1) Andreas ist leichter als Frank, aber schwerer als Dirk.
(2) Stefan ist leichter als Andreas, aber schwerer als Dirk.
(3) Peter ist leichter als Jürgen, aber schwerer als Michael.
(4) Jürgen ist leichter als Dirk.

Ordne die Jungen nach ihren Gewicht; beginne bei dem schwersten!
Überprüfe, ob bei der von dir angegebenen Reihenfolge alle Aussagen (1) bis (4) wahr sind!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Reihenfolge lautet: Frank, Andreas, Stefan, Dirk, Jürgen, Peter, Michael.

Probe:
zu (1): Frank ist schwerer als Andreas und als Dirk.
zu (2): Andreas ist schwerer als Stefan, und dieser ist schwerer als Dirk.
zu (3): Jürgen ist schwerer als Peter, und dieser ist schwerer als Michael.
zu (4): Dirk ist schwerer als Jürgen.

Aufgabe 280613:
Mario, Petra, Rigo und Tanja unterhalten sich darüber, welche Plätze sie bei der Schulolympiade wohl belegen werden. Dabei äußern sie folgende Meinungen:

(1) Tanja wird den ersten Platz erreichen und Petra den zweiten.
(2) Tanja wird Zweite werden und Rigo Dritter.
(3) Mario wird den zweiten Platz und Rigo den vierten belegen.
(4) Keine zwei Schüler werden auf den gleichen Platz kommen.

Nach Abschluss der Schulolympiade stellt sich heraus, dass die Aussage (4) wahr ist und dass in den Meinungen (1), (2) und (3) jeweils genau eine der beiden Aussagen wahr und die andere falsch ist.
Gib an, welcher Schüler hiernach welchen Platz bei der Schulolympiade belegte!
Zeige, dass die von dir genannte Platzverteilung die Bedingungen der Aufgabe erfüllt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Eine mögliche Verteilung lautet:
Tanja - 1. Platz; Mario - 2. Platz; Rigo - 3. Platz; Petra - 4. Platz.

Bei dieser Verteilung ist die Angabe (4) wahr. In (1) ist „Tanja erreicht den ersten Platz“ wahr und „Petra den zweiten“ falsch. In (2) ist „Tanja wird Zweite“ falsch und „Rigo Dritter“ wahr.
In (3) ist „Mario belegt den zweiten Platz“ wahr und „Rigo den vierten“ falsch. Somit ist in den Meinungen (1) bis (3) jeweils genau eine der beiden Aussagen wahr und die andere falsch.

Aufgabe 290611:
Peter möchte aus einer Kanne, in der sich mehr als 13 Liter Milch befinden, genau 13 Liter abmessen.
Das genaue Fassungsvermögen der Kanne ist nicht bekannt, und es ist auch nicht bekannt, wie viel Milch genau in der Kanne ist. Außer der Kanne stehen noch genau zwei weitere Gefäße zur Verfügung.
Das eine hat ein Fassungsvermögen von genau 5 Liter, das andere ein Fassungsvermögen von genau 17 Liter.
(Eine Skaleneinteilung oder ähnliche Möglichkeiten zum Abmessen anderer Mengen gibt es jedoch nicht.)
Beschreibe, wie Peter allein mit diesen Hilfsmitteln genau 13 Liter Milch abmessen kann!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Peter kann folgendermaßen verfahren:
Er entnimmt zuerst durch Füllen des kleinen Gefäßes mit anschließendem Umgießen in das große Gefäß dreimal je 5 Liter aus der Kanne. Wegen $3 \cdot 5 = 15$ enthält das große Gefäß dann genau 15 Liter; wegen $417 - 15 = 2$

passen noch genau 2 Liter Milch hinein. Diese werden aus dem noch einmal gefüllten kleinen Gefäß in das große Gefäß gegossen, so dass nun in dem kleinen Gefäß wegen $5 - 2 = 3$ noch genau 3 Liter sind.

Danach wird das große Gefäß wieder durch Zurückgießen in die Kanne entleert, und die 3 Liter werden anschließend in das große Gefäß gegossen. Gießt man nun noch zweimal je 5 Liter Milch hinzu, so enthält das große Gefäß wegen $3 + 2 \cdot 5 = 13$ genau 13 Liter Milch, wie es verlangt war.

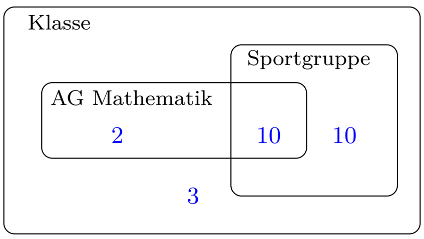
Aufgabe 290614:
Von den 25 Schülern einer Klasse gehören genau 20 einer Sportgruppe an. An der AG Mathematik nehmen genau 12 Schüler dieser Klasse teil. Genau 3 Schüler dieser Klasse gehören weder einer Sportgruppe noch der AG Mathematik an.
Zeige, wie man aus diesen Angaben erhalten kann, dass es auf folgende Fragen eindeutig bestimmte Zahlenangaben als Antworten gibt! Gib diese Antworten an!

a) Wie viele Schüler dieser Klasse insgesamt gehören zwar der AG Mathematik, aber nicht einer Sportgruppe an?
b) Wie viele Schüler dieser Klasse insgesamt gehören zwar einer Sportgruppe, aber nicht der AG Mathematik an?
c) Wie viele Schüler dieser Klasse insgesamt gehören sowohl der AG Mathematik als auch einer Sportgruppe an?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Aus der ersten Angabe des Aufgabentextes folgt wegen 25 - 20 = 5:
Genau 5 Schüler der Klasse gehören nicht einer Sportgruppe an. Unter diesen müssen sich die 3 in der dritten Angabe des Aufgabentextes genannten Schüler befinden, die außerdem auch nicht der AG Mathematik angehören.
Damit folgt wegen 5 - 3 = 2 als Antwort zu a): Insgesamt 2 Schüler der Klasse gehören zwar der AG Mathematik, aber nicht einer Sportgruppe an.
Diese 2 Schüler müssen zu den 12 in der zweiten Angabe des Aufgabentextes genannten Schülern gehören.

Wegen 12 - 2 = 10 folgt damit als Antwort zu c): Insgesamt 10 Schüler der Klasse gehören sowohl der AG Mathematik als auch einer Sportgruppe an. Hieraus und aus der ersten Angabe des Aufgabentextes folgt wegen 20 - 10 = 10 als Antwort zu b):
Insgesamt 10 Schüler der Klasse gehören zwar einer Sportgruppe an, aber nicht der AG Mathematik.

Hinweis: Zur Probe kann man die Anzahlen in das Diagramm Abbildung eintragen und damit durch $10+10+2+3 = 25$, $10 + 10 = 20$, $10 + 2 = 12$ bestätigen, dass die Angaben des Aufgabentextes erfüllt sind.



II. Runde 2

Aufgabe 010623:
Auf einer Wanderung sagt Rudolf: „Die Entfernung von hier bis Neustadt ist größer als 5 km.“
Emil sagt: „Die Entfernung bis Neustadt ist kleiner als 5 km.“
Robert sagt: „Einer von beiden hat recht.“

Nun wissen wir, dass Robert eine falsche Aussage gemacht hat. Wie groß ist die Entfernung tatsächlich?

Lösung von Steffen Polster:
Rudolf und Emil können nicht Recht haben, da sich ihre Aussagen widersprechen. Deshalb hat keiner von beiden

Recht. D. h., dass die Entfernung bis Neustadt ist weder größer noch kleiner als 5 km war, sie ist also genau 5 km.

Aufgabe 040624:
Fritz gibt Heinz folgendes Rätsel auf:

„In unserer Klasse können 26 Schüler Rad fahren und 12 Schüler schwimmen. Jeder Schüler kann mindestens eins von beiden. Multipliziert man die Schülerzahl mit 5, so ist die Quersumme dieses Produkts doppelt so groß wie die Quersumme der Schülerzahl. Außerdem ist das Produkt durch 6 teilbar.
Wie viel Schüler besuchen die Klasse?“

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Aus der ersten Angabe erfolgt, dass die Klasse mindestens 26, höchstens 38 Schüler haben kann.
Die letzte Angabe schränkt diese Möglichkeit auf die Zahlen 30 bzw. 36 ein. Von diesen Zahlen erfüllt nur 30 alle Bedingungen.

Aufgabe 050624:
Die Schüler Eva, Renate, Monika, Ingrid, Jürgen, Hans und Gerd haben sich in einer Reihe der Größe nach aufgestellt.
Der größte steht vorn, und von zwei gleichgroßen steht der, dessen Vorname einen im Alphabet vorangehenden Anfangsbuchstaben hat, vor dem anderen. Folgendes ist bekannt:

(1) Es ist wahr, dass Ingrid 2 cm kleiner als Monika ist.
(2) Es ist falsch, dass Eva nicht dieselbe Größe wie Gerd besitzt.
(3) Es ist nicht wahr, dass keiner dieser Schüler kleiner als Hans ist.
(4) Es ist wahr, dass Jürgen kleiner als Ingrid, aber größer als Hans ist.
(5) Es ist unwahr, dass Hans größer als Monika ist.
(6) Es ist nicht falsch, dass Monika 2 cm größer als Gerd und auch größer als Jürgen ist.

Es soll festgestellt werden:
a) Welche Schüler sind gleich groß?
b) Wie lautet die Reihenfolge der Vornamen, in der sich die Schüler aufgestellt haben? (Man beginne beim größten Schüler.)

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Bezeichnet man die Größe jedes der Schüler (in cm gemessen) mit dem Anfangsbuchstaben seines Vornamens, so kann man die Aussagen (1) bis (6) in folgender Form schreiben:

(1) $I = M - 2$
(2) $E = G$
(3) H ist größer als der Kleinste von (E,R,M,I,J,G) also $H >$ Minimum(E,R,M,I,J,G)
(4) $H < J < I$
(5) $H \leq M$
(6a) $M = G + 2$
(6b) $M > J$

Aus (1) und (4) folgt (7) $H < J < I < M$. Aus (1) und (6a) folgt (8) $I = G$. Aus (2) und (8) folgt (9) $E = G = I$. Aus (9) und (7) folgt (10) $H < J < E = G = I < M$ und aus (5) und (10) folgt (11) $R < H$.
Daher lauten die Antworten:
a) Eva, Gerd und Ingrid sind gleich groß. Außer ihnen gibt es keine zwei Schüler, die gleich groß sind.
b) Monika, Eva, Gerd, Ingrid, Jürgen, Hans, Renate.

Aufgabe 070623:
Nach einem Scheibenschießen verglichen Elke, Regina, Gerd und Joachim ihre Schießleistungen. Es ergab sich folgendes:

(1) Joachim erzielte mehr Ringe als Gerd.
(2) Elke und Regina erreichten zusammen dieselbe Ringzahl wie Joachim und Gerd zusammen.
(3) Elke und Joachim erzielten zusammen weniger Ringe als Regina und Gerd.

Ermittle auf Grund dieser Angaben die Reihenfolge der Schützen nach fallender Ringzahl!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Bezeichnet man die Ringzahl der Schützen mit den Anfangsbuchstaben der entsprechenden Vornamen, so erhält man aus den Abgaben der Aufgabe

(1) $J > G$
(2) $E + R = J + G$
(3) $E + J < R + G$

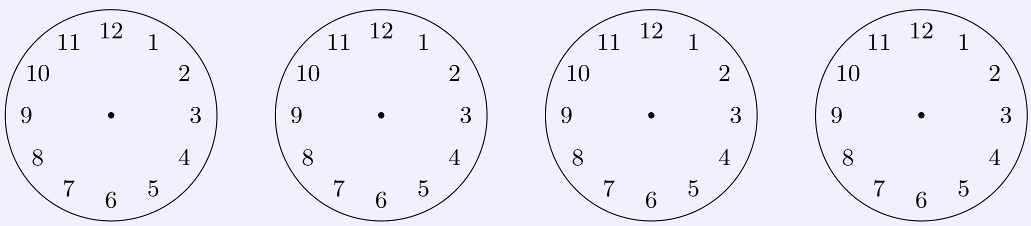
Aus (2) und (3) ergibt sich durch Addition $2E + J + R < 2G + J + R$, also $E < G$. Hieraus und aus (2) folgt $R - J = G - E > 0$, also $J < B$.
Daher gilt $R > J > G > E$. Die gesuchte Reihenfolge ist: Regina, Joachim, Gerd, Elke.

Aufgabe 080621:
In einer 6. Klasse erhielt als Jahresendzensur im Fach Mathematik kein Schüler die Note 5, jeder neunte die Note 1, jeder dritte die Note 2 und jeder sechste die Note 4.
Über die Schülerzahl n dieser Klasse ist folgendes bekannt: $20 < n < 40$.
Berechne die Anzahl der Schüler, die als Jahresendzensur die Note 3 erhielten!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Gesamtschülerzahl n muss ein Vielfaches der Zahlen 3, 6 und 9 sein und dabei gleichzeitig der Bedingung $20 < n < 40$ genügen. Das trifft nur auf die Zahl 36 zu. $\frac{1}{9}$ von 36 beträgt 4, $\frac{1}{3}$ von 36 beträgt 12, $\frac{1}{6}$ von 36 beträgt 6.

Insgesamt 22 Schüler erhielten also entweder die Note 1, 2 oder 4. Demnach erreichten 14 Schüler die Note 3, denn die Differenz von 36 und 22 beträgt 14.

Aufgabe 090622:
Auf der Abbildung sind wie auf dem Ziffernblatt einer Uhr die Zahlen 1 bis 12 abgebildet.
Untersuche, ob sich diese vier Kreisscheiben durch Einzeichnen von Linien (z. B. Geraden), die keine der Ziffern treffen, so in Teilstücke zerlegen lassen, dass die Summen der auf jedem Teilstück derselben Kreisscheibe liegenden Zahlen jeweils untereinander gleich sind!
Dabei ist die erste Kreisscheibe in 2 Teile, die zweite in 3 Teile, die dritte in 4 Teile und die vierte in 6 Teile zu zerlegen.

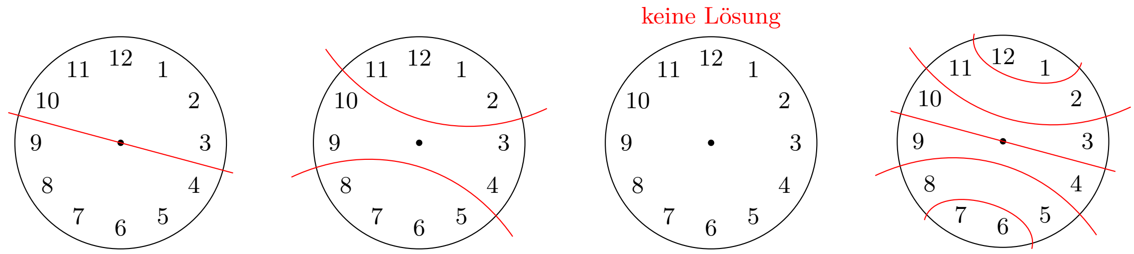


Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Summe der auf jeder Kreisscheibe aufgetragenen Zahlen beträgt jeweils 78.

Die Kreisscheibe lässt sich daher höchstens dann in die laut Aufgabe geforderten Teile zerlegen, wenn die verlangte Teilanzahl (also 2; 3; 4; 6) ein Teiler von 78 ist. Das gilt für 2, 3 und 6, für 4 dagegen nicht.

Daher lassen sich höchstens die erste, die zweite und die vierte Kreisscheibe in der geforderten Weise zerlegen. Eine Zerlegung in 4 derartige Teile (Kreisscheibe 3) ist nicht möglich.
Wie die Abbildung zeigt, können die genannten Kreisscheiben tatsächlich der Aufgabe entsprechend geteilt werden. Dabei beachten wir, dass für die Zahlen 1, 2, ..., 12 gilt:

$$1 + 12 = 2 + 11 = 3 + 10 = 4 + 9 = 5 + 8 = 6 + 7 = 13$$



Aufgabe 110622:
Ruth, Marion und Petra verbringen einen Teil ihrer Ferien in einem Pionierlager. Jede von ihnen betreibt genau eine der Sportarten Tischtennis, Volleyball und Schwimmen. Außerdem ist bekannt:

(1) Marion leiht sich von der Volleyballspielerin gern gute Bücher.
(2) Die Volleyballspielerin und Petra haben nicht gleichviele Preise bei der Mathematikolympiade errungen.
(3) Marion geht in eine höhere Klasse als die Tischtennisspielerin.

Welche Sportart treibt jedes der drei Mädchen?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(4) Wegen der Aussagen (1) und (2) ist die Volleyballspielerin weder Marion noch Petra. Ruth ist also die Volleyballspielerin.
(5) Da die Tischtennisspielerin wegen (3) nicht Marion und wegen (4) nicht Ruth sein kann, ist Petra die Tischtennisspielerin.
(6) Aus (4) und (5) ergibt sich: Marion ist die Schwimmerin.

Aufgabe 120623:
Nach einer Solidaritätssammlung für Vietnam verglichen die Thälmann-Pioniere Rita, Werner, Margot, Beate und Jan ihre Sammelergebnisse. Dabei stellten sie fest:

(1) Beate hatte mehr als Jan, jedoch weniger als Werner gesammelt.
(2) Rita sammelte 13 M, das war weniger, als Jan gesammelt hatte.
(3) Beates Sammelergebnis war um 4 M höher als das Ergebnis Ritas.
(4) Margot sammelte zwar 2 M weniger als Werner, aber 1 M mehr als Jan.
(5) Zwei Pioniere erzielten das gleiche Sammelergebnis.

Stelle fest, welches Sammelergebnis jeder der fünf Pioniere erzielt hatte.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die von den Pionieren erzielten Sammelergebnisse seien mit r, w, m, b, j (in Mark) bezeichnet. Dann gilt laut Aufgabe:

(1) $w > b > j$
(2) $j > r$; $r = 13$
(3) $b = r + 4$

(4) $w = m + 2$; $m = j + 1$

Aus (2) und (3) folgt $b = 17$. Aus (1) und (2) folgt $w > b > j > r$, aus (4) $w > m > j$ und daraus sowie aus (5) $m = b$, also $m = 17$.
Daher sammelten: Werner 19 M, Beate und Margot je 17 M, Jan 16 M und Rita 13 M.

Aufgabe 130623:
Klaus hat gehört, dass in einer 6. Klasse von allen Schülern eine Mathematik-Klassenarbeit geschrieben wurde, bei der kein Schüler die Note „5“ bekam.
Ein Sechstel der Klasse schrieb eine „1“, ein Drittel eine „2“ und nur ein Neuntel eine „4“. Über die Anzahl der Schüler dieser Klasse wusste Klaus nur, dass sie größer als 10, aber kleiner als 40 war. Er fragt sich, wie viel Schüler insgesamt bei der erwähnten Klassenarbeit eine „3“ geschrieben hatten.

Stelle fest, ob diese Anzahl mit den in der Aufgabe enthaltenen Angaben eindeutig zu ermitteln ist!
Wenn das nicht der Fall ist, dann ermittle alle mit den Angaben vereinbaren Antworten auf Klaus’ Frage!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es sei x die Anzahl aller Schüler dieser Klasse. Dann ist x durch 9 teilbar, also wegen $10 < x < 40$ eine der Zahlen 18; 27; 36. Ferner ist x auch durch 6 teilbar, daher entfällt 27.
Für die beiden verbleibenden Möglichkeiten zeigt die nachstehende Tabelle in ihrer 2. bis 4. Spalte die aus den Angaben folgenden Anzahlen von Schülern mit den Noten 1; 2; 4. In der 5. Spalte stehen alle mit den Angaben vereinbaren Anzahlen von Schülern mit der Note „3“. Klaus konnte die gesuchte Anzahl also nicht eindeutig ermitteln.

Klassenstärke	Anzahl der Schüler mit der Note			
	1	2	4	3
18	3	6	2	7
36	6	12	4	14

Aufgabe 140623:
Anita, Brigitte, Christa und Dana trugen untereinander einen Wettkampf aus. Auf die Frage, wer den ersten, zweiten, dritten bzw. vierten Platz belegte, wurden folgende drei Aussagen gemacht:

(1) Anita siegte, Brigitte belegte den zweiten Platz.
(2) Anita belegte den zweiten Platz, Christa den dritten.
(3) Dana belegte den zweiten, Christa den vierten Platz.

Wie sich herausstellte, wurde in jeder der drei Aussagen (1), (2), (3) eine Platzierung richtig und eine falsch angegeben.
Wer belegte den ersten, zweiten, dritten bzw. vierten Platz?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, in Aussage (1) wäre Brigittes Platzierung richtig angegeben, dann wären die Plätze von Anita in (2) und Dana in (3) falsch angegeben, und demnach müsste Christa den dritten und zugleich den vierten Platz belegt haben, was nicht möglich ist.
Folglich ist in (1) die Platzierung von Anita richtig und die von Brigitte falsch angegeben, d. h., Anita belegte den ersten Platz und Brigitte nicht den zweiten Platz.

Danach ist in (2) der Platz Anitas falsch und der Christas richtig angegeben. Daraus folgt, dass in (3) der Platz Christas falsch und der Danas richtig angegeben wurde. Mithin belegten Anita den ersten, Dana den zweiten, Christa den dritten und Brigitte den vierten Platz.

Aufgabe 170622:
Bei einem Schulsportfest bestritten Christa, Doris, Elke, Franziska und Gitta den 60-m-Endlauf. Auf die Frage, welche Plätze diese fünf Schülerinnen beim Einlauf ins Ziel belegen würden, machten einige der zuschauenden

Klassenkameraden folgende Voraussagen:

(1) Christa wird nicht unmittelbar vor Elke ins Ziel kommen.
(2) Elke wird entweder als Vorletzte einlaufen oder sogar einen noch besseren Platz belegen.
(3) Es ist nicht wahr, dass Doris nicht schneller als Gitta laufen wird.
(4) Franziska wird einen anderen als den dritten Platz belegen.

Als der Endlauf vorbei war, wurde festgestellt, dass die fünf Schülerinnen sämtlich verschiedene Zeiten gelaufen waren und dass alle vier Voraussagen über den Einlauf falsch waren.
Wie lautet nach diesen Angaben die tatsächliche Reihenfolge des Einlauf?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Da (2) falsch ist, belegte Elke weder den vorletzten noch einen besseren Platz, sie wurde also Fünfte.
Da (1) falsch ist, kam Christa unmittelbar vor Elke ins Ziel und wurde daher Vierte.
Da (4) falsch ist, belegte Franziska den dritten Platz. Folglich verblieben der erste und zweite Platz für Doris und Gitta.
Da (3) falsch ist, lief Doris nicht schneller als Gitta. Da ihre Zeit ferner nicht dieselbe war wie die Gittas, belegte sie folglich den zweiten Platz und Gitta den ersten.

Die tatsächliche Reihenfolge des Einlaufs lautete mithin: Gitta, Doris, Franziska, Christa, Elke.

Aufgabe 200624:
Vier Schüler, je einer aus der Klasse 5a, 5b, 6a, 6b, unterhalten sich über die Zeitschriften, die sie regelmäßig lesen. Die Schüler heißen Fred, Gerd, Hans und Ingo mit Vornamen. Wie sich herausstellt, liest jeder von ihnen genau eine der beiden Zeitschriften „alpha“ bzw. „Frösi“ regelmäßig. Ferner werden folgende Angaben gemacht:

(1) Der Schüler aus der Klasse 5b liest nicht die Zeitschrift „alpha“.
(2) Hans und außer ihm der Schüler der Klasse 5a lesen die Zeitschrift „alpha“ regelmäßig.
(3) Fred und außer ihm der Schüler der Klasse 6b lesen die Zeitschrift „Frösi“ regelmäßig. Gerd dagegen nicht.
(4) Der Schüler der Klasse 6a, der Schüler der Klasse 5b und außer diesen beiden noch Gerd wurden von Ingo zum Geburtstag eingeladen.

Gesucht ist eine Zuordnung, durch die beschrieben wird, welcher der vier Schüler welche Klasse besucht und welche der beiden Zeitschriften er regelmäßig liest.
Untersuche, ob es eine solche Zuordnung gibt, die alle Angaben (1), (2), (3), (4) erfüllt, und ob sie durch diese Angaben eindeutig festgelegt ist!
Wenn dies der Fall ist, dann gib diese Zuordnung an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, es gibt eine solche Zuordnung, für die die gemachten Angaben zutreffen.
Dann ist Gerd wegen (3) und (4) weder der Schüler der Klasse 6b noch der Schüler der Klasse 6a noch der der Klasse 5b. Also besucht Gerd die Klasse 5a und liest wegen (2) [oder wegen (3)] die Zeitschrift „alpha“ regelmäßig.

Folglich gehört Ingo nicht der Klasse 5a an, nach (4) auch keiner der Klassen 6a oder 5b. Somit besucht Ingo die Klasse 6b und liest wegen (3) die Zeitschrift „Frösi“ regelmäßig.

Hans gehört demnach weder der Klasse 5a noch der Klasse 6b an. Da er nach (2) regelmäßig die Zeitschrift „alpha“ liest, ist er wegen (1) auch nicht der Schüler der Klasse 5b. Also besucht Hans die Klasse 6a. Für Fred verbleibt somit nur noch die Klasse 5b. Hiernach und nach (1) liest er regelmäßig die Zeitschrift „Frösi“.

Damit ist gezeigt: Wenn es eine Zuordnung gibt, für die die gemachten Angaben zutreffen, dann kann es nur die folgende Zuordnung sein:

Vorname	Klasse	Zeitschrift
Gerd	5a	„alpha“
Fred	5b	„Frösi“
Hans	6a	„alpha“
Ingo	6b	„Frösi“

Man überzeugt sich leicht, dass für diese Zuordnung die gemachten Angaben tatsächlich zutreffen. Damit ist gezeigt, dass genau diese Zuordnung mit den gemachten Angaben übereinstimmt.

Aufgabe 230623:
Die vier Schüler Erdbach, Freimuth, Giebler und Hausmann haben die Vornamen Alfred, Bernd, Christian und Detlef (möglicherweise nicht in dieser Reihenfolge).
Sie trafen sich auf Siegfried Zanders Geburtstagsfeier. Folgenden ist bekannt:

(1) Als ersten Gast konnte Siegfried seinen Mitschüler Hausmann begrüßen, als zweiten Christian und danach Erdbach. Zuletzt kam Bernd.
(2) Jeder dieser vier Gäste brachte für das Geburtstagskind genau ein Geschenk mit: Hausmann ein Würfelspiel, Alfred einen Kugelschreiber, Bernd einen Strauß Rosen und Giebler ein Buch.

Zeige, dass sich aus diesen Angaben für die vier Geburtstagsgäste eindeutig ermitteln lässt, wie ihre zusammengehörenden Vor- und Familiennamen lauten!
Gib diese zusammengehörenden Namen an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wegen (1) heißt Hausmann weder Christian noch Bernd. Wegen (2) heißt er auch nicht Alfred. Daraus folgt: (3) Hausmann hat den Vornamen Detlef.
Wegen (2) heißt Giebler weder Alfred noch Bernd und wegen (3) auch nicht Detlef. Daraus folgt: (4) Giebler hat den Vornamen Christian.
Wegen (1) heißt Erdbach weder Christian noch Bernd und wegen (3) auch nicht Detlef. Daraus folgt: (5) Erdbach hat den Vornamen Alfred.
Wegen (3), (4) und (5) bleibt für Freimuth nur der Vorname Bernd. Die zusammengehörenden Namen sind mithin: Alfred Erdbach, Bernd Freimuth, Christian Giebler und Detlef Hausmann.

Aufgabe 240621:
Drei Geschwisterpaare, jeweils ein Mädchen und ein Junge, sitzen bei der Geburtstagsfeier von Jörg, dem einen der drei Jungen, im Kreis um einen Tisch. Es ist folgendes bekannt:

(1) Keines der sechs Kinder hat seinen Bruder oder seine Schwester als Tischnachbar.
(2) Steffen sitzt dem ältesten der drei Jungen gegenüber.
(3) Rechts von Agnes sitzt Ines, links von Agnes sitzt Michael.
(4) Kerstin ist nicht Steffens Schwester.

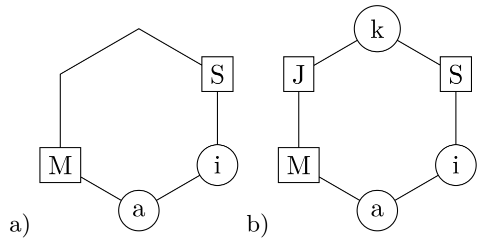
Beweise, dass man aus diesen Angaben sowohl die zusammengehörenden Geschwisterpaare als auch die Sitzordnung eindeutig ermitteln kann, und gib beides an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wegen (3) sitzen Michael (M), Agnes (a) und Ines (i) in der Reihenfolge nebeneinander, die in der Abbildung a) gezeigt wird. Wegen (2) sitzt Steffen (S) einem Jungen, also weder Ines noch Agnes gegenüber; damit verbleibt für ihn nach der Abbildung a nur der Platz rechts neben Ines.
Für Jörg (J) und Kerstin (k) sind nur die in der Abbildung a) noch freigelassenen Plätze möglich. Da sie einander benachbart sind, ist Kerstin nach (1) nicht Jörgs Schwester. Da sie nach (4) auch nichts Steffens Schwester ist, muss Kerstin Michaels Schwester (*) sein und sitzt wegen (1) nicht neben ihm.

Wie Abbildung a) zeigt, ergibt sich damit die Sitzordnung in Abbildung b).
Weiter folgt aus Abbildung a) oder b): Ines ist wegen (1) nicht Steffens Schwester und nach (*) nicht Michaels Schwester. Also ist Ines Jörgs Schwester, (**)

und als drittes zusammengehörendes Geschwisterpaar verbleiben Agnes und Steffen. (***)

Damit ist bewiesen, dass man die zusammengehörenden Geschwisterpaare und die Sitzordnung eindeutig aus den Angaben ermitteln kann. Sie lauten wie in (*), (**), (***) bzw. Abbildung b) angegeben.



Aufgabe 250624:
Anke, Bernd und Claudia wollen 21 Limonadeflaschen, von denen 7 voll, 7 halbvoll und 7 leer sind, untereinander verteilen. Dabei soll jedes Kind die gleiche Anzahl Flaschen und auch gleich viel Limonade erhalten, und es soll nichts umgegossen werden. Ferner soll Anke nicht weniger volle Flaschen als Bernd bekommen, und Bernd soll nicht weniger volle Flaschen als Claudia bekommen.

a) Gib zwei Verteilungen an, die diese Bedingungen erfüllen!
b) Weise nach, dass es keine weiteren Verteilungen geben kann, die diese Bedingungen erfüllen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Die in den folgenden Tabellen genannten Verteilungen erfüllen alle gestellten Bedingungen; denn bei diesen Verteilungen bekommt jedes der drei Kinder genau 7 Flaschen und soviel Limonade, wie in $3\frac{1}{2}$ Flaschen passt. Außerdem ist ersichtlich, dass jeweils 7 volle, 7 halbvolle und 7 leere Flaschen verteilt werden und dass für die Anzahlen der an Anke, Bernd und Claudia verteilten vollen Flaschen $3 \geq 3 \geq 1$ bzw. $3 \geq 2 \geq 2$ gilt.

	voll	halbvoll	leer
A	3	1	3
B	3	1	3
C	1	5	1

	voll	halbvoll	leer
A	3	1	3
B	2	3	2
C	2	3	2

b) Für jede Verteilung, die die geforderten Bedingungen erfüllt, gilt: Da 21 Flaschen und der Inhalt von $7+\frac{7}{2}=\frac{21}{2}$ Flaschen Limonade zu verteilen sind, bekommt jedes Kind 7 Flaschen und den Inhalt von $3\frac{1}{2}$ Flaschen Limonade. Daher folgt weiter: Anke könnte höchstens 3 volle Flaschen erhalten, da sie sonst mehr Limonade bekommen würde, als in $3\frac{1}{2}$ Flaschen passt. Anke kann aber auch nicht weniger als 3 volle Flaschen erhalten, weil dann eines der beiden anderen Kinder von den verbleibenden mindestens 5 vollen Flaschen mehr Flaschen bekommen müsste als Anke. Anke erhält genau 3 volle Flaschen.

Als einzige Möglichkeiten, die restlichen 4 vollen Flaschen so zu verteilen, dass von ihnen Anke nicht weniger als Bernd und Bernd nicht weniger als Claudia bekommt, ergeben sich die Verteilungen gemäß $4 = 3 + 1$ und $4 = 2 + 2$ (Spalte „voll“ der obigen Tabellen).
Aus den Anzahlen der vollen und halbvollen Flaschen, die jedes Kind erhält, ergibt sich schließlich eindeutig, wie viel leere Flaschen es bekommen muss, um insgesamt 7 Flaschen zu erhalten (Spalte „leer“).
Damit ist gezeigt, dass nur die beiden in a) angegebenen Verteilungen alle Bedingungen der Aufgabe erfüllen.

Aufgabe 260622:
Die Mädchen Britta, Petra und Anja wünschen sich einen Ball, eine Puppe und ein Album für Briefmarken. Dabei wünscht sich jedes der Mädchen genau einen der genannten Gegenstände, und zwar jedes Mädchen einen anderen. Marie soll feststellen, wer von den Mädchen sich welchen Gegenstand wünscht. Auf ihre Frage erhält sie folgende Antworten:

(1) Britta wünscht sich den Ball.
(2) Petra wünscht sich den Ball nicht.
(3) Anja wünscht sich das Album nicht.

Von diesen drei Antworten ist genau eine wahr, die anderen beiden sind falsch.

Wenn man das weiß, kann man für jedes der drei Mädchen eindeutig feststellen, welchen Gegenstand es sich wünscht.
Erkläre, wie sich diese Feststellungen gewinnen lassen und gib die Feststellungen an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wir unterscheiden drei Fälle, je nachdem welche von den drei Antworten wahr ist:

1. Angenommen, die Antwort (1) wäre wahr, die Antworten (2) und (3) wären also falsch. Dieser Fall kann nicht eintreten, weil sich dann nämlich Britta und Petra beide den Ball wünschen würden.
2. Angenommen, die Antwort (2) wäre wahr und die Antworten (1) und (3) wären falsch. Dieser Fall kann nicht eintraten; denn dann würden sich weder Petra noch Britta den Ball wünschen, aber auch Anja nicht (da sie sich das Album wünschen würde.)

Also muss der folgende Fall zutreffen:
3. Die Antwort (3) ist wahr und die Antworten (1) und (2) sind falsch. Dass (2) falsch ist, besagt: Petra wünscht sich den Ball (in Übereinstimmung damit, dass auch (1) falsch ist). Anja wünscht sich also nicht den Ball; und dass (3) wahr ist, bedeutet folglich nunmehr eindeutig: Anja wünscht sich die Puppe, Britta wünscht sich das Album.

Aufgabe 260624:
Der Schüler Frank Schludrig meint, über seine Klasse folgendes herausgefunden zu haben:

In der Klasse sind genau 28 Schüler, davon sind genau 16 Jungen. An Arbeitsgemeinschaften nehmen genau 20 Schüler der Klasse teil, davon sind genau 8 Jungen. An der Kreisolympiade Junger Mathematiker beteiligten sich genau 4 Schüler der Klasse, davon waren genau 2 Jungen. Von diesen Olympiadeteilnehmern sind genau 1 Junge und genau 1 Mädchen auch Mitglied einer Arbeitsgemeinschaft.

Der Schüler Rolf Schlauberger hört sich diese Angaben an und behauptet nach einigem Überlegen, dass Frank Schludrig ein Irrtum unterlaufen sein muss.
Weise nach, dass die Angaben von Frank Schludrig nicht stimmen können!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Aufgrund der Gesamtzahl der Mitglieder von Arbeitsgemeinschaften (20) und der Zahl der Jungen unter ihnen (8) und wegen $20 - 8 = 12$ müsste es in der Klasse 12 Mädchen geben, die in Arbeitsgemeinschaften tätig sind.

Aufgrund der Gesamtzahl der Olympiadeteilnehmer (4) und der Zahl der Jungen unter ihnen (2) und wegen $4 - 2 = 2$ müsste es in der Klasse genau 2 Mädchen geben, die an der Olympiade teilgenommen haben. Es wird nun ausgesagt, dass genau eines dieser Mädchen auch Mitglied einer Arbeitsgemeinschaft ist.

Also folgt aus den Angaben, dass es außer 12 Mädchen, die Mitglieder von Arbeitsgemeinschaften sind, noch ein weiteres Mädchen in der Klasse geben müsste. Da somit die Zahl der Mädchen in der Klasse mindestens 13 sein würde, die Zahl der Jungen mit 16 angegeben wird, $13 + 16 = 29$ ist, die Klasse aber nur 28 Schüler umfassen soll, können die Angaben von Frank Schludrig nicht stimmen.

Aufgabe 270621:
Über einen 100 m-Lauf, den die drei Schüler Jens, Michael und Peter austrugen, wurden folgende Vorhersagen gemacht:

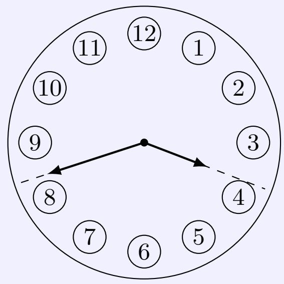
Frank sagte: „Jens oder Peter wird gewinnen.“
Horst sagte: „Wenn Jens nicht gewinnt, dann gewinnt Michael.“
Norbert sagte: „Wenn Michael gewinnt, dann wird Jens Zweiter.“
Stefan sagte: „Michael wird schlechter abschneiden als Jens und Peter.“

(a) Nach dem Lauf wurde festgestellt: Alle vier Voraussagen sind wahre Aussagen.
(b) Nach dem Lauf wurde festgestellt: Als einziger hatte Horst eine wahre Aussage gemacht.
Gib in beiden Fällen (a), (b) an, wer Erster, Zweiter bzw. Dritter wurde! In beiden Fällen (a), (b) ist noch bekannt, dass Jens, Peter und Michael alle drei verschiedene Zeiten liefen.
Erkläre, wie du deine Angaben gefunden hast!

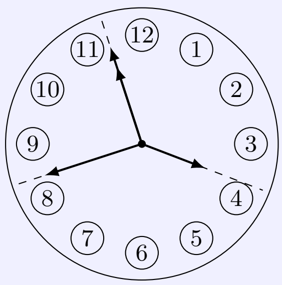
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(a) Nach Stefans Aussage wurde Michael Dritter. Jens muss gewonnen haben; denn andernfalls ergäbe sich aus Horsts Vorhersage die falsche Aussage, dass Michael gewonnen hätte. Also wurde Jens Erster und Peter Zweiter.

(b) Da Franks Aussage falsch war, hat Michael gewonnen. Deshalb, und weil Norberts Aussage falsch war, kann Jens nicht Zweiter geworden sein; folglich wurde er Dritter und Peter Zweiter.

Aufgabe 270623:
(a) Der Stundenzeiger einer Uhr (siehe Abbildung) zeigt um 3.42 Uhr in die Lücke zwischen den Zahlen 3 und 4, der Minutenzeiger in die Lücke zwischen 8 und 9.
Dadurch wird das Zifferblatt so aufgeteilt, dass in einem Teil die Summe $4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 30$ und im anderen Teil die Summe $9 + 10 + 11 + 12 + 1 + 2 + 3 = 48$ steht.



Gesucht werden Uhrzeiten folgender Art: Jeder Zeiger zeigt in eine der zwölf Lücken zwischen benachbarten Zahlen und dadurch wird das Zifferblatt in zwei Teile aufgeteilt, in denen die gleiche Summe steht.
Nenne zwei solche Uhrzeiten zwischen 0.00 Uhr und 12.00 Uhr, die sich voneinander um mehr als 5 Minuten unterscheiden!



(b) Bei einer anderen Uhr (siehe Abbildung) zeigt 57 Sekunden nach 3.42 Uhr der Sekundenzeiger in die Lücke zwischen den Zahlen 11 und 12.
Hierdurch und durch die anderen Zeiger wird das Zifferblatt in Teile mit den Summen $4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 30$, $9 + 10 + 11 = 20$, $12 + 1 + 2 + 3 = 18$ aufgeteilt.
Warum gibt es keine Uhrzeit, bei der (jeder Zeiger in eine der zwölf Lücken zeigt und) das Zifferblatt in drei Teile aufgeteilt wird, in denen die gleiche Summe steht?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(a) Anzugeben ist eine Uhrzeit zwischen 3.45 Uhr und 3.50 Uhr sowie eine Uhrzeit zwischen 9.15 Uhr und 9.20 Uhr.
Zur Überprüfung beider Angaben ist die Gleichheit der Summen $4+5+6+7+8+9 = 39$, $10+11+12+1+2+3 = 39$ zu bestätigen.

(b) Die Summe aller zwölf Zahlen des Zifferblattes beträgt 78. Gäbe es eine Uhrzeit der genannten Art, so müsste wegen $78 : 3 = 26$ in jedem der Teile die Summe 26 stehen. Dass dies nicht möglich ist, kann z. B. folgendermaßen gezeigt werden:

Die Zahl 10 kann nicht als erster Summand auftreten, da $10 + 11 < 26$ und bereits $10 + 11 + 12 > 26$ ist, also alle weiteren Summen mit 10 als erstem Summanden erst recht größer als 26 sind.
Die Zahl 10 kann nicht als zweiter Summand auftreten, da $9 + 10 < 26$ und bereits $9 + 10 + 11 > 26$ ist, also alle weiteren Summen mit 10 als zweitem Summanden erst recht größer als 26 sind.
Die Zahl 10 kann aber auch nicht als dritter oder weiterer Summand auftreten, da bereits $8 + 9 + 10 > 26$ ist, also alle anderen Summen, in denen 10 als dritter oder weiterer Summand auftritt, erst recht größer als 26 sind.

Aufgabe 270624:
In einer Werkhalle stehen vier Maschinen zur Herstellung von Werkstücken. Jeweils in 24 Stunden werden

auf Maschine A genau 2 Werkstücke, auf Maschine B genau 3 Werkstücke,
auf Maschine C genau 8 Werkstücke, auf Maschine D genau 12 Werkstücke

hergestellt. Für jede der Maschinen gilt, dass zum Herstellen der Werkstücke auf dieser Maschine stets die gleiche Zeit gebraucht wird. Dabei ist die Zeiteinteilung so angelegt, dass jeweils die Herstellung des nächsten Werkstückes genau dann beginnt, wenn das vorhergehende fertig ist.

An einem Tag beginnen alle vier Maschinen gleichzeitig um 0.00 Uhr mit der Herstellung eines neuen Werkstücks. Wie oft kommt es an diesem Tag bis einschließlich 24.00 Uhr insgesamt vor, dass
(a) auf allen vier Maschinen,
(b) auf genau drei der vier Maschinen,
(c) auf genau zwei der vier Maschinen
zum gleichen Zeitpunkt ein Werkstück fertig wird?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Zeitpunkte, zu denen Werkstücke fertig werden, sind die folgenden Uhrzeiten:

Maschine	Uhrzeiten															
A								12								24
B					8						16					24
C		3		6		9		12		15		18		21		24
D	2		4	6	8		10	12	14		16	18	20		22	24

Daraus ist ersichtlich: Es kommt insgesamt
(a) genau einmal (nämlich um 24.00 Uhr)
(b) genau einmal (nämlich um 12.00 Uhr für A, C, D)
(c) genau viermal (nämlich um 6.00 Uhr und 18.00 Uhr für C, D sowie um 8.00 und 16.00 Uhr für B, D) vor, dass auf (a) allen, (b) genau drei bzw. (c) genau zwei Maschinen zum gleichen Zeitpunkt ein Werkstück fertig wird.

Aufgabe 280624:
Heidi, Manuela, Peggy und Simone starteten beim Schulsportfest, jedes dieser Mädchen in genau einer der Sportarten „Handball“, „Mehrkampf“, „Pop-Gymnastik“, „Schwimmen“. Ferner ist bekannt:

(1) Jedes der vier Mädchen errang genau eine Medaille; zwei Mädchen Gold, die beiden anderen Silber.
(2) Für Mädchen mit gleicher Medaille gilt stets: Bei jedem dieser Mädchen beginnt der Name mit demselben Buchstaben wie die Sportart des anderen Mädchens.
(3) Heidi erhielt eine Medaille geringeren Wertes als Manuela.
(4) Simone erkämpfte nicht die gleiche Medaille wie die Handballerin.

Zeige, dass aus diesen Angaben eindeutig gefunden werden kann,
a) in welcher Sportart jedes der Mädchen gestartet ist,
b) welche Medaille jedes der Mädchen errungen hat!
Überprüfe auch, ob mit den so gefundenen Sportarten und Medaillen alle Angaben (1) bis (4) erfüllt werden!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Aus (1) und (3) folgt: (5) Heidi erhielt Silber, (6) Manuela erhielt Gold. Wegen (5) folgt aus (2): (7) Die Handballerin erhielt Silber.

Aus (4) und (7) folgt: (8) Simone erhielt Gold. In (5), (6) und (8) sind bereits drei Medaillenträgerinnen ermittelt; damit folgt aus (1): (9) Peggy erhielt Silber.

Nach (5), (9) ist (2) auf Heidi und Peggy anzuwenden und ergibt: (10) Heidi startete in Pop-Gymnastik, (11) Peggy ist die Handballerin.

Nach (6), (8) ist (2) auf Manuela und Simone anzuwenden und ergibt: (12) Manuela ist die Schwimmerin, (13) Simone startete im Mehrkampf.

In (10), (11), (12), (13) ist damit für jedes der Mädchen die Sportart und in (5), (6), (8), (9) auch die Medaillenart eindeutig gefunden. Die Überprüfung ergibt: (1) ist wegen (5), (6). (8), (9) erfüllt; (2) ist hiernach und wegen (10), (11) für die Mädchen mit Silbermedaillen sowie wegen (12), (13) für die Mädchen mit Goldmedaillen erfüllt; (3) ist wegen (5), (6) erfüllt; (4) ist wegen (8). (11) und (9) erfüllt.

Aufgabe 290621:
Jana will an der Wandzeitung über Christians, Alexanders und Martins Erfolge in der außerunterrichtlichen Tätigkeit berichten. Sie befragt die drei Schüler und notiert sich folgendes:

(1) Alle drei Schüler nahmen an der Mathematikolympiade teil. Einer dieser Schüler errang einen ersten Preis, ein weiterer von ihnen einen zweiten Preis und der restliche Schüler einen dritten Preis.
(2) Martin und der Gewinner des zweiten Preises betreiben gern Leichtathletik. Beide erkämpften beim letzten Sportfest je eine Silbermedaille.
(3) Im Wettbewerb der Jungen Rezitatoren schnitt der Gewinner des zweiten Preises bei der Mathematikolympiade besser als Christian ab.
(4) Der Gewinner des ersten Preises bei der Mathematikolympiade spielt in seiner Freizeit gern Schach; sein häufigster Gegner dabei ist Martin.

Als Jana ihre Notizen durchliest, stellt sie fest, dass sie gar nicht aufgeschrieben hat, welcher der drei Schüler welchen der drei Preise bei der Mathematikolympiade errang.
Stelle fest, ob sich das trotzdem aus den Notizen von Jana eindeutig ermitteln lässt!
Wenn dies der Fall ist, so gib die Verteilung der drei Preise an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Aus den Notizen folgt:
Nach (2) sind Martin und der Gewinner des zweiten Preises zwei Schüler, d. h., Martin gewann nicht den zweiten Preis. Nach (3) gewann auch Christian nicht den zweiten Preis. Also folgt aus (1): (5) Den zweiten Preis gewann Alexander.

Nach (4) ist Martin nicht der Gewinner des ersten Preises. Hieraus und aus (5), (1) folgt: (6) Den ersten Preis gewann Christian, (7) den dritten Preis gewann Martin.

Damit ist gezeigt, dass sich diese Verteilung (5), (6), (7) eindeutig aus Janas Notizen ermitteln lässt.

II.III. Altersaufgaben

I. Runde 1

Aufgabe 020613:
Paul erzählt: „Mein Bruder Emil ist 3 Jahre älter als ich, meine Schwester Lotte ist 4 Jahre älter als Emil, und mein Vater ist dreimal so alt wie Lotte. Meine Mutter ist 5 Jahre jünger als mein Vater und ist gestern 40 Jahre alt geworden.“
Wie alt ist Paul? Die Antwort ist zu begründen!

Lösung von Steffen Polster:
Wenn Pauls Mutter 40 Jahre ist, ist sein Vater folglich 45 Jahre. Lotte ist $\frac{1}{3} \cdot 45 = 15$ und Emil also 11. Paul ist damit 8 Jahre alt.

Aufgabe 310614:
An einem Ausflug nahmen insgesamt 20 Personen teil. Man bemerkte:

(1) Genau 5 der Teilnehmer waren 30 Jahre alt oder jünger.
(2) Von den Teilnehmern, die älter als 30 Jahre waren, kauften sich genau 10 bei der ersten Rast etwas zu trinken, genau 12 bei der zweiten Rast. Kein Teilnehmer verzichtete beide Male auf diesen Kauf.
(3) Genau 6 der Teilnehmer waren 40 Jahre alt oder älter, darunter genau 2, die bei der ersten Rast nichts zu trinken kauften, und genau 2, die bei der zweiten Rast nichts zu trinken kauften.

Wie viele der Teilnehmer, die älter als 30, aber jünger als 40 Jahre waren, kauften sich sowohl bei der ersten als auch bei der zweiten Rast etwas zu trinken?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Nach (1) waren genau 20 - 5 = 15 Teilnehmer älter als 30 Jahre.
Von ihnen kauften nach (2) genau 15 - 10 = 5 bei der ersten Rast und genau 15 - 12 = 3 bei der zweiten Rast nichts zu trinken. Da niemand auf beide Käufe verzichtete, waren diese 5 + 3 = 8 Teilnehmer bereits alle, die nicht zweimal zu trinken kauften. Von den 15 Teilnehmern über 30 Jahre kauften also 15-8 = 7 zweimal zu trinken.

II. Nach (3) kauften von den 6 Teilnehmern, die 40 Jahre oder älter waren, genau 2 bei der ersten Rast und genau 2 bei der zweiten Rast nichts zu trinken, Daraus folgt entsprechend, dass 6 - (2 + 2) = 2 dieser Teilnehmer zweimal zu trinken kauften.
Aus I. und II. folgt: Von den Teilnehmern, die älter als 30, aber jünger als 40 Jahre waren, kauften genau 7 - 2 = 5 zweimal zu trinken.

Aufgabe 320612:
Von drei Mädchen aus unterschiedlichen Familien sei folgendes bekannt:

(1) Sie heißen Sabine, Christiane und Miriam.
(2) Miriam hätte lieber blondes Haar wie eines der drei Mädchen.
(3) Jedes der drei Mädchen hat eine andere Haarfarbe.
(4) Das rothaarige Mädchen hat dieselbe Haarfarbe wie ihr Bruder.
(5) Christiane hätte lieber solches schwarzes Haar wie die Schwester von Miriam.
(6) Das schwarzhaarige Mädchen hat keine Geschwister und ist mit seiner Haarfarbe zufrieden.

Welche Haarfarbe hat jedes der drei Mädchen?

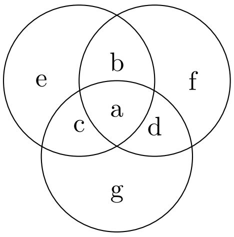
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Das schwarzhaarige Mädchen kann wegen (5) und (6) nicht Miriam, wegen (5) aber auch nicht Christiane sein, somit ist es Sabine.
Miriam kann wegen (2) nicht blond sein, ist also rothaarig.
Damit kann das blonde Mädchen nur Christiane heißen.
In der Tat erfüllt diese Zuordnung alle sechs Forderungen.

Aufgabe 340613:
Nach einem Wandertag wurden die Kinder gefragt, welche Erfrischungen sie sich gekauft hatten. Es hatte Cola, Hamburger und Popcorn gegeben. Die Befragung ergab das folgende Ergebnis:

Jeder der Teilnehmer hatte wenigstens eine der drei Waren gekauft.
Von ihnen genau 22 mindestens Cola, genau 14 mindestens einen Hamburger und genau 13 wenigstens Popcorn. Mindestens Cola und Hamburger kauften genau 10 Teilnehmer, mindestens Cola und Popcorn genau 4 und genau 5 wenigstens Hamburger und Popcorn. Alle drei Waren gleichzeitig wurden nur von 2 Teilnehmern gekauft.

Weise nach, dass durch diese Angaben die Anzahl der Teilnehmer eindeutig bestimmt ist!
Berechne diese Anzahl!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Für die Anzahl t aller Teilnehmer und für die in der Abbildung dargestellten Anzahlen gilt nach den Angaben
$a+b+c+d+e+f+g=t$, (1)
$a+b+c+e=22$, (2)
$a+b+d+f=4$, (3)
$a+c+d+g=13$, (4)
$a+b=10$, (5) $a+c=4$, (6)
$a+d=5$, (7) $a=2$. (8)

Aus (5) und (8) folgt $b=8$, aus (6) und (8) folgt $c=2$, aus (7) und (8) folgt $d=3$.
Aus (2) und (8), (9), (10) folgt $e=10$, aus (3) und (8), (9), (ll) folgt $f=1$, aus (4) und (8), (10), (ll) folgt $g=6$.
Damit folgt aus (1) und (8) - (14), dass die Anzahl t eindeutig bestimmt ist; sie beträgt $t=32$.

II. Runden 2 & 3

Aufgabe 020624:
Brigitte liebt lustige Knobelaufgaben. Sie erzählt:
„Mein Vater, meine Mutter und ich sind zusammen 88 Jahre alt. Meine Mutter ist genau dreimal so alt wie ich und vier Jahre jünger als mein Vater.“

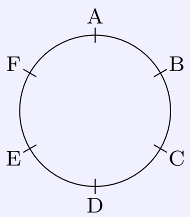
Wie alt ist Brigitte? Wie alt sind ihre Eltern? Beschreibe, wie man die Lösung finden kann!

Lösung von Steffen Polster:
Brigitte sei a Jahre alt. Dann ist ihre Mutter $3a$ und ihr Vater $3a+4$ Jahre alt und somit

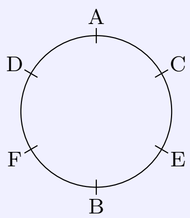
$$a+3a+(3a+4)=7a+4=88 \quad \Rightarrow \quad 7a=84$$

Die Lösung ist $a=12$, womit Brigitte 12 Jahre alt ist, ihre Mutter 36 Jahre und ihr Vater 40 Jahre.

Aufgabe 300622:



a)



b)

Sechs Personen A, B, C, D, E, F wollen ihre Sitzordnung (Abbildung a) so ändern, dass in der neuen Sitzordnung jede Person feststellen kann:
Unter meinen beiden Nachbarn befindet sich jetzt keiner der beiden, die ich vorher (in Abbildung a) als Nachbarn hatte.

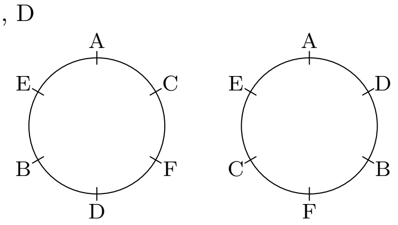
a) Abbildung b zeigt eine solche neue Sitzordnung. Fülle zur Überprüfung, dass tatsächlich eine Sitzordnung der geforderten Art vorliegt, die folgende Tabelle aus!
b) Gib alle weiteren Möglichkeiten in einer neuen Sitzordnung der geforderten Art an!
Dabei sollen jeweils außer einer schon angegebenen Möglichkeit diejenigen nicht mehr angegeben werden, die aus ihr durch Drehung oder Spiegelung zu erhalten sind. Eine Begründung wird nicht verlangt.

Person	Nachbarn in Abb. a	Nachbarn in Abb. b
A		
B		
C		
D		
E		
F		

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

Person	Nachbarn in Abb. a	Nachbarn in Abb. b
A	F, B	D, C
B	A, C	E, F
C	B, C	A, E
D	C, E	F, A
E	C, F	C, B
F	E, A	B, D

b) Alle weiteren Möglichkeiten (bis auf Drehung und Spiegelung) zeigt Abbildung b.



Aufgabe 310621:
a) Eine sechsstellige Zahl soll mit den Ziffern 1, 1, 2, 2, 3, 3 geschrieben werden. Die Reihenfolge dieser sechs Ziffern soll so gewählt werden, dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

(1) Zwischen den beiden Ziffern 1 soll genau eine andere Ziffer stehen.
(2) Zwischen den beiden Ziffern 2 sollen genau zwei andere Ziffern stehen.
(3) Zwischen den beiden Ziffern 3 sollen genau drei andere Ziffern stehen.

b) Eine achtstellige Zahl soll mit den Ziffern 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4 geschrieben werden. Für die Reihenfolge soll außer den Bedingungen (1), (2), (3) auch die folgende Bedingung erfüllt werden:

(4) Zwischen den beiden Ziffern 4 sollen genau vier andere Ziffern stehen.

Gib zu a) und zu b) jeweils alle Zahlen an, die die Bedingungen erfüllen! Eine Begründung wird nicht verlangt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Bedingungen werden genau durch die Zahlen
a) 231213 und 312132,
b) 23421314 und 41312432
erfüllt.
a) An die zwei Stellen zwischen den Ziffern $2 \cdot \cdot 2$ können weder die beiden Ziffern 1 noch die beiden Ziffern 3 kommen. Also enthält die gesuchte Zahl die Teilfolge 2132 (oder umgekehrt 2312).
Nun kann die Ziffer 1 nur so hinzugefügt werden, dass 12132 (bzw. die umgekehrte Folge) entsteht. Daran anschließend ist nur 312132 (bzw. umgekehrt) möglich.

b) An den vier Stellen zwischen den Ziffern $4 \cdot \cdot \cdot \cdot 4$ muss eine der drei Ziffern 1, 2, 3 zweifach vorkommen.
Die 3 kann dies nicht sein (da zwischen zwei Ziffern 3 dann nicht genug Platz wäre). Wäre es die 2, so müsste sie an die Stellen $42 \cdot \cdot 24$ kommen; zwischen den Ziffern 2 könnte dann keine Ziffer 1 stehen, also müssten dort beide Ziffern 3 stehen, was nicht möglich ist. Somit kommt nur $41 \cdot 1 \cdot 4$ (oder umgekehrt) in Betracht.

Nun würde die Eintragung $41 \cdot 134$ aber $41 \cdot 134 \cdot \cdot 3$ verlangen, obwohl nur noch zwei Ziffern 2 einzutragen wären. Also kann nur mit $41 \cdot 124$ und anschließend eindeutig mit $41 \cdot 124 \cdot 2$ sowie mit 41312432 (bzw. umgekehrt 23421314) fortgesetzt werden.

Aufgabe 310622:
Zwischen vier Mannschaften A, B, C, D wurde ein Fußballturnier ausgetragen. Jede Mannschaft spielte genau einmal gegen jede andere.
Für ein gewonnenes Spiel gab es zwei Punkte, für ein unentschiedenes einen Punkt und für ein verlorenes Spiel keinen Punkt. Das Spiel zwischen den Mannschaften C und D endete als einziges unentschieden. Keine zwei Mannschaften erreichten die gleiche Punktzahl. Die Mannschaft B wurde Letzter.

a) Untersuche, ob durch diese Informationen eindeutig bestimmt ist, welchen Platz die Mannschaft A belegte und wie viel Punkte sie erreichte!
Wenn das der Fall ist, gib beides an!
b) Sind die gegebenen Informationen auch ausreichend, um den genauen Endstand (Platzierungen der einzelnen Mannschaften und jeweils erreichte Punkte) des Turniers angeben zu können?
Begründe deine Antwort!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) In eine Tabelle sei zunächst das unentschiedene Spiel C gegen D eingetragen. Aus der Information, dass dies das einzige unentschiedene Spiel war, folgt: Alle anderen Punktzahlen sind 0 oder 2.

Hätte A gegen C und D verloren (Tabelle 1), so müsste wegen der von C und D erreichten unterschiedlichen Punktzahlen B gegen C und D unterschiedlich gespielt haben und hätte damit mindestens so viele Punkte wie A erreicht; dieser Fall scheidet also aus.
Hätte A gegen B und eine der Mannschaften C, D verloren (ohne Beschränkung der Allgemeinheit gegen C; Tabelle 2), so hätte schon deswegen B mindestens so viele Punkte wie A.

Tabelle 1

	A	B	C	D
A	-		0	0
B		-		
C	2		-	1
D	2		1	-

Tabelle 2

	A	B	C	D
A	-	0	0	
B	2	-		
C	2		-	1
D			1	-

Also hat A mindestens zwei Spiele gewonnen.
Hätte A gegen C und D gewonnen (Tabelle 3), so müsste B gegen C und D unterschiedlich gespielt haben und hätte damit mehr Punkte als die von B besiegte dieser beiden Mannschaften. Also folgt:
A hat gegen B und genau eine der Mannschaften C, D gewonnen, o. B. d. A. gegen C (Tabelle 4).

Tabelle 3

	A	B	C	D
A	-		2	2
B		-		
C	0		-	1
D	0		1	-

Tabelle 4

	A	B	C	D
A	-	2	2	0
B	0	-		
C	0		-	1
D	2		1	-

Weiter folgt: B hat weniger Punkte als A, also höchstens ein Spiel gewonnen. Hätte B gegen C und D dieselben Ergebnisse wie A gegen C und D erreicht, so ergäbe das 2 Punkte für B und 1 Punkt für die Verlierermannschaft.
Hätte aber B gegen C, D entgegengesetzte Ergebnisse wie A, so hätten C und D beide 3 Punkte.
Also kann B überhaupt kein Spiel gewonnen haben, eine der Mannschaften C, D hat 3, die andere 5 Punkte.
Daher hat sich eindeutig ergeben: A belegte mit 4 Punkten den zweiten Platz.

b) Da beide Tabellen 5 und 6 allen Informationen entsprechen, jedoch voneinander abweichende Endstände angeben, folgt: Die Informationen sind nicht ausreichend, um den genauen Endstand des Turniers angeben zu können.

Tabelle 5

	A	B	C	D
A	-	2	0	0
B	0	-	0	0
C	0	2	-	1
D	2	2	1	-

Tabelle 6

	A	B	C	D
A	-	2	2	0
B	0	0	0	0
C	2	2	-	1
D	0	2	1	-

Aufgabe 330634:
Sechs Kugeln, und zwar drei blaue und drei gelbe, werden an Annette, Bernd und Christiane verteilt. Jedes dieser drei Kinder bekommt wenigstens eine Kugel, aber höchstens drei Kugeln. Damit die Verteilung nicht so leicht zu erkennen ist, macht Dieter drei falsche Aussagen.

Erika meint dennoch: Wenn man weiß, dass alle diese Aussagen falsch sind, ist die Verteilung der Kugeln (für jedes Kind die Anzahlen der blauen und der gelben Kugeln) dadurch eindeutig bestimmt. Die drei Aussagen von Dieter lauten:

(1) Die blauen Kugeln wurden an weniger als drei Kinder verteilt.

(2) Annette bekam genau zwei Kugeln.
(3) Bernd bekam Kugeln unterschiedlicher Farben.

Hat Erika recht? Begründe Deine Antwort!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Da Dieters Aussagen falsch sind, gilt:

(1') Jedes Kind bekam eine der blauen Kugeln.
(2') Annette bekam entweder genau eine Kugel oder genau drei Kugeln.
(3') Bernd bekam keine verschiedenfarbigen Kugeln.

Nach (1') und weil nur drei blaue Kugeln vorhanden waren, bekam jedes Kind genau eine der blauen Kugeln.
Nach (3') kann Bernd überhaupt keine weitere Kugel bekommen haben. Hätte Annette genau eine Kugel bekommen, so wären auf Christiane vier Kugeln entfallen. Da sie aber (wie jedes der Kinder) höchstens drei Kugeln bekam, scheidet dieser Fall aus; d. h. nach (2'): Annette muss genau drei Kugeln bekommen haben, also außer der einen blauen Kugel noch genau zwei gelbe Kugeln. Die restliche gelbe Kugel verblieb für Christiane.
Damit sind die Zahlen der Verteilung eindeutig bestimmt:
Annette bekam genau 1 blaue Kugel und genau 2 gelbe Kugeln. Bernd bekam genau 1 blaue Kugel und keine gelbe Kugel. Christiane bekam genau 1 blaue Kugel und genau 1 gelbe Kugel.

II.IV. Abzählen

I. Runde 1

Aufgabe V00611:
Ein Würfel von 12 cm Kantenlänge wird schwarz angestrichen. Dann wird er so zerschnitten, dass 27 kleinere Würfel entstehen.
Dabei entstehen Würfel mit drei schwarzen Seitenflächen, andere mit zwei, andere nur mit einer und Wieder andere, die überhaupt keine schwarzen Seitenflächen haben.
Wie viel Würfel sind in jeder Gruppe vorhanden und welche Länge haben die Kanten der 27 kleinen Würfel?

Lösung von Steffen Polster:
Es ergeben sich
a) 8 Würfel mit 3 schwarzen Seitenflächen
b) 12 Würfel mit 2 schwarzen Seitenflächen
c) 6 Würfel mit 1 schwarzen Seitenfläche
d) 1 Würfel ohne schwarze Seitenfläche
d. h. insgesamt 27 Würfel. Deren Kantenlänge ist $\frac{1}{3}$ der ursprünglichen Kantenlänge, d. h. also 4 cm.

Aufgabe 010615:
Wie viel verschiedene Arten von Personenzug-Fahrkarten II. Klasse braucht man für eine Strecke mit 15 Stationen, wenn es für jede mögliche Verbindung eine Fahrkarte geben soll?
Wie hast du die Anzahl ermittelt?

Lösung von Steffen Polster:
Da es ein Unterschied ist, ob man von einem Ort A nach einem Ort B fährt oder in der entgegengesetzten Richtung von B nach A, braucht man von jeder Station 14 Fahrkarten zu den anderen Stationen, d. h. insgesamt $15 \cdot 14 = 210$ Fahrkarten.

Aufgabe 030616:
Gegeben seien neun Quadrate mit den Seitenlängen
$a = 36$ mm, $d = 20$ mm, $g = 14$ mm, $b = 30$ mm, $e = 18$ mm, $h = 8$ mm, $c = 28$ mm, $f = 16$ mm, $i = 2$ mm.
Füge diese Quadrate so zusammen, dass sie ein Rechteck bilden! Fertige dazu eine Zeichnung an!

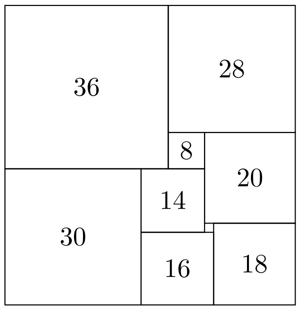
Lösung von Steffen Polster:
Addiert man die Flächeninhalte der 9 Quadrate, so hat das Rechteck einen Flächeninhalt von

$$A = (2^2 + 8^2 + 14^2 + 16^2 + 18^2 + 20^2 + 28^2 + 30^2 + 36^2)\ \text{mm}^2 = 4224\ \text{mm}^2$$

4224 hat die Primfaktoren 2, 3 und 11, da $4224 = 2^7 \cdot 3 \cdot 11$ gilt. Geht man von natürlichen Zahlen als Längen der Rechteckseiten aus und beachtet dass jede Seite mindestens 36 mm lang sein muss (sonst würde das 1. Quadrat nicht hineinpassen), so könnten die 44 mm und 96 mm bzw. 48 mm und 88 mm bzw. 64 mm und 66 mm lang sein.

Eine Seitenlänge 44 mm ist nicht möglich, da man zwar mit dem 36 mm-Quadrat und dem 8 mm-Quadrat eine Rechteckseite erhält, aber die entstehende Lücke am 8 mm-Quadrat nicht mehr schließen kann.
Eine ähnliche Überlegung schließt die Seitenlänge 48 mm aus (30 mm-Quadrat und 18 mm-Quadrat).

Das gesuchte Rechteck hat die Seitenlängen 64 mm und 66 mm.
Setzt man die zwei großen Quadrate (36 mm, 30 mm) an eine Seite, so ergibt sich mit etwas Probieren eine gesuchte Lösung (siehe Abbildung).



Aufgabe 110613:
Vier Flächen eines Holzwürfels von 3 cm Kantenlänge werden rot angestrichen, die beiden übrigen bleiben ohne Anstrich. Danach wird der Würfel in genau 27 Würfel von je 1 cm Kantenlänge zersägt.
Ermittle von diesen kleinen Würfeln die Anzahl derjenigen, die

keine rot angestrichene Fläche,
genau eine rot angestrichene Fläche,
genau zwei rot angestrichene Flächen,
genau drei rot angestrichene Flächen besitzen!

Unterscheide dabei die folgenden Fälle:
a) Die nicht angestrichenen Flächen haben keine gemeinsame Kante.
b) Die nicht angestrichenen Flächen haben eine gemeinsame Kante.
Als Lösung genügt die Angabe der Anzahlen ohne Begründung.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Genau 3 kleine Würfel haben keine rot angestrichene Fläche.
Genau 12 kleine Würfel haben genau eine rot angestrichene Fläche.
Genau 12 kleine Würfel haben genau zwei rot angestrichene Flächen.
Keiner der Würfel hat drei rot angestrichene Flächen.

b) Die Anzahlen lauten in diesem Falle in der oben angegebenen Reihenfolge: 4; 12; 9; 2.

Aufgabe 120612:
Ein Betrieb will unter Verwendung des gleichen Uhrwerks Uhren verschiedener Ausführung herstellen.
Zu diesem Zwecke stehen sechs verschiedene Gehäuseausführungen, vier verschiedene Ausführungen von Ziffer blättern und drei verschiedene Zeigerausführungen zur Verfügung.
Gib die Anzahl aller verschiedenen Ausführungen von Uhren an, die sich unter diesen Umständen herstellen lassen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Jedes der sechs Gehäuse muss mit einem der vier Zifferblätter ausgestattet werden. Das ergibt genau $6 \cdot 4 = 24$ verschiedene Möglichkeiten einer Ausstattung mit Gehäuse und Zifferblatt.
Jede dieser Möglichkeiten muss mit je einer der drei verschiedenen Zeigerausführungen verbunden werden. Das gibt insgesamt genau $24 \cdot 3 = 72$ verschiedene Ausführungsmöglichkeiten.

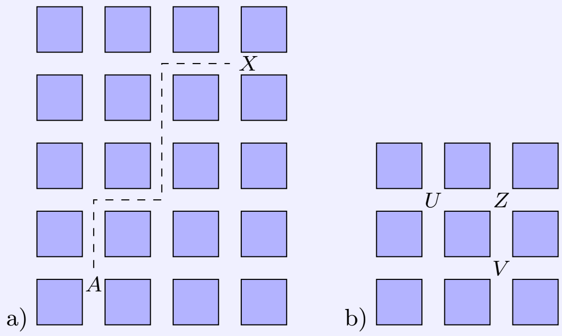
Aufgabe 130614:
Jörg und Claudia streiten sich darüber, ob es unter den natürlichen Zahlen von 0 bis 1000 mehr solche gibt, bei deren dekadischer Darstellung (mindestens) eine 5 vorkommt, als solche, bei denen das nicht der Fall ist. Stelle fest, wie die richtige Antwort auf diese Frage lautet!

Lösung von Steffen Polster:
Für die Zahlen zwischen 0 und 100, die mindestens eine Ziffer 5 enthalten, gilt für einzelne Teilbereiche:

zwischen 0 und 49 gibt es 5 solche Zahlen,
zwischen 50 und 59 gibt es 10 solche Zahlen,
zwischen 60 und 100 gibt es 4 solche Zahlen.

Zwischen 0 und 99 gibt es somit 19 derartige Zahlen. Analog können auch die Bereiche 100 bis 199, 200 bis 299 usw. untersucht werden, mit Ausnahme von 500 bis 599. Es ergeben sich insgesamt $9 \cdot 19 = 171$ solche Zahlen. Zusätzlich gibt es noch die Zahlen von 500 bis 599.
Damit existieren 271 Zahlen zwischen 0 und 1000 gibt, die mindestens eine Ziffer 5 enthalten. $1001 - 271 = 730$ Zahlen haben keine Ziffer 5. Es gibt damit weniger solche Zahlen mit 5 als Zahlen in diesem Bereich ohne Ziffer 5.

Aufgabe 220614:
Das Bild a) zeigt einen Teil eines Stadtplanes. Ein Auto soll auf einem möglichst kurzen Weg von A zu einer anderen Kreuzung, z. B. X fahren. Als Beispiel ist ein solcher Weg eingetragen. Man will - für jede von A verschiedene Kreuzung Z - wissen, wie viel verschiedene möglichst kurze Wege von A nach Z es insgesamt gibt.



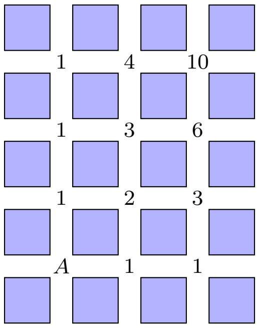
a) Suche zunächst alle diejenigen Kreuzungen, zu denen genau ein möglichst kurzer Weg von A aus hinführt!

b) Das Bild b) bedeute einen Ausschnitt aus Bild a), wobei Z eine der in a) nicht betrachteten Kreuzungen sein soll. Wenn man schon weiß, wie viel möglichst kurze Wege von A nach U es gibt und wie viel möglichst kurze Wege von A nach V es gibt, wie kann man dann die Anzahl aller möglichst kurzen Wege von A nach Z berechnen?

c) Benutze die Überlegungen zu a) und b), um für jede der elf von A verschiedenen Kreuzungen Z die gesuchte Anzahl zu finden!

d) Ermittle die Anzahl der möglichst kurzen Wege von A nach X in Bild a) noch einmal auf andere Weise: Schreibe jeden dieser Wege durch Angabe der Richtungen seiner fünf Teilstrecken auf! Benutze dabei Abkürzungen, z. B. w für waagerecht, s für senkrecht!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



a)

a) In der Abbildung sind die gesuchten Kreuzungen mit 1 bezeichnet.

b) Jeder mögliche kurze Weg von A nach Z führt entweder über U oder über V. Von U oder V aus hat man aber jeweils nur genau eine Möglichkeit, auf möglichst kurzem Wege nach Z zu kommen.
Also kann man die Anzahl aller möglichst kurzen Wege von A nach Z berechnen, indem man die entsprechenden Anzahlen für U und V addiert.

c) Ausgehend von den in a) gefundenen Kreuzungen findet man mit Hilfe der Überlegung aus b) der Reihe nach die Anzahlen

$$2 = 1 + 1, \quad 3 = 1 + 2, \quad 4 = 1 + 3, \quad 6 = 3 + 3, \quad 10 = 4 + 6$$

in der Abbildung.

d) Es gibt genau die folgenden möglichst kurzen Wege von A nach X:

s s s w w,
s s w s w,
s s w w s,
s w s s w,
s w s w s,
s w w s s,
w s s s w,
w s s w s,
w s w s s,
w w s s s.

Ihre Aufzählung erfolgte hier „lexikographisch“ (d. h. nach der Regel für die Anordnung in einem Lexikon), was eine bessere Übersicht zur Sicherung der Vollständigkeit ergibt.

Aufgabe 300614:
Die Seiten eines Buches sind mit den Zahlen von 1 bis 235 durchnummeriert.
a) Wie oft wurde bei der Nummerierung insgesamt die Ziffer 4 verwendet?
b) Wie oft wurde bei der Nummerierung insgesamt die Ziffer 0 verwendet?
c) Wie viele Ziffern sind insgesamt bei dieser Nummerierung zu drucken?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Die Ziffer 4 wird in der Einerstelle jeweils genau einmal für die Zahlen 1 bis 10, 11 bis 20, ..., 221 bis 230, 231 bis 235 gebraucht, d. h. zusammen 24 mal.

An der Zehnerstelle wird sie jeweils genau einmal für die Zahlen 40, 41, ..., 49, 140, 141, ..., 149 gebraucht und für die anderen der Zahlen von 1 bis 235 nicht, d. h. zusammen 20 mal.

An der Hunderterstelle wird sie für die Zahlen 1 bis 235 nicht gebraucht. Also wurde die Ziffer 4 bei der Nummerierung insgesamt 44 mal verwendet.

b) Die Ziffer 0 wird in der Einerstelle jeweils genau einmal für die Zahlen 1 bis 10, 11 bis 20, ..., 221 bis 230 gebraucht, aber nicht für die Zahlen 231 bis 235, d. h. zusammen 23 mal.

An der Zehnerstelle wird sie jeweils genau einmal für die Zahlen 100, 101, ... 109, 200, 201, . . . , 209 gebraucht und für die anderen der Zahlen von 1 bis 235 nicht, d. h. zusammen 20 mal.

An der Hunderterstelle wird sie für die Zahlen von 1 bis 235 nicht gebraucht. Also wird die Ziffer 0 bei der Nummerierung insgesamt 43 mal verwendet.

c) Unter den Zahlen von 1 bis 235 gibt es genau die 9 einstelligen 1, 2, . . . , 9, genau die 90 zweistelligen 10, 11, . . . , 99 und genau die 136 dreistelligen 100, 101, . . . , 235.
Daher sind bei der Nummerierung insgesamt $9 + 90 \cdot 2 + 136 \cdot 3 = 9 + 180 + 408 = 597$ Ziffern zu drucken.

II. Runden 2 & 3

Aufgabe 030624:
Wie viel Streichhölzer von je 5 cm Länge werden gebraucht, um eine quadratische Fläche von 1 m^2 in gleichgroße Quadrate aufzuteilen, die von je vier Streichhölzern begrenzt werden?
(Dabei dürfen zwei benachbarte Quadrate nur durch ein Streichholz getrennt werden.)

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Man erhält insgesamt 400 Quadrate.
In jeder horizontalen Reihe liegen 20 Streichhölzer, also gibt es zusammen $20 \cdot 21 = 420$ horizontal liegende Streichhölzer.
In jeder vertikalen Reihe liegen ebenfalls 20 Streichhölzer, also gibt es zusammen $20 \cdot 21 = 420$ vertikal liegende Streichhölzer. Daher werden insgesamt 840 Streichhölzer benötigt.

Aufgabe 120622:
An 11 Werktätige eines volkseigenen Betriebes wurden für insgesamt 2650 M Prämien in Höhe von 150 M, 250 M, 350 M, 400 M und 500 M vergeben, wobei jede Prämienstufe mindestens einmal vorkam.
Ermittle die Anzahl aller Werktätigen, die mit je 150 M ausgezeichnet wurden!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Da jede Prämienstufe mindestens einmal vertreten war, gibt es mindestens 1 Werktätigen, der 150 M, einen, der 250 M, einen, der 350 M, einen, der 400 M und einen, der 500 M erhalten hatte.
An diese fünf Werktätigen wurden daher insgesamt 1650 M ausgezahlt.

Für die restlichen 6 Werktätigen stehen mithin noch genau 1000 M zur Verfügung.
Hätte jeder dieser Werktätigen genau 150 M erhalten, dann wären das zusammen 900 M. Also muss mindestens einer der 6 Werktätigen mehr als 150 M Prämie bekommen haben.

Laut Aufgabe hat er dann aber mindestens 250 M Prämie bekommen. Für die restlichen 5 Werktätigen verbleiben nun höchstens 750 M, es konnte also kein weiterer der fünf Werktätigen mehr als 150 M Prämie erhalten haben. Folglich beträgt die gesuchte Anzahl 6.

Aufgabe 150622:
Das Wohnschiff „Kuhle Wampe“, das im Berliner Stadtbezirk Köpenick ständig vor Anker liegt, beherbergt FDGB-Urlaubsgäste. Aus einem Prospekt ist ersichtlich, dass es insgesamt für 41 Urlauber Plätze bietet und dass diese Plätze sich in Zweibett- und Dreibettkabinen aufteilen.
Ermittle alle Möglichkeiten für die Aufteilung der Plätze, die sich mit diesen Angaben vereinbaren lassen.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Anzahl dar Dreibett-Kabinen muss mindestens 1 und kann wegen $3 \cdot 14 = 42 > 41$ höchstens 13 betragen.
Außerdem muss ihre Anzahl ungerade sein, da sonst (bei gerader Anzahl von Drei-Bett-Kabinen) eine gerade Zahl von Plätzen dadurch belegt waren und als Differenz zur ungeraden Zahl 41 mithin eine ungerade Zahl von Betten

auftreten würde, die sich nicht ausschließlich auf Zweibett-Kabinen verteilen lässt.

Für jede der ungeraden Zahlen von Dreibett-Kabinen von 1 bis 13 gibt es nun jeweils genau eine (zugehörige) Anzahl von Zweibett-Kabinen, wie nachstehende Tabelle ausweist:

Anzahl der Dreibett-K.	Anzahl der damit vorh. Betten	Anzahl der darüber hinaus vorh. Betten	Anzahl der Zweibett-K.	Gesamtplätze
1	3	38	19	41
3	9	32	16	41
5	15	26	13	41
7	21	20	10	41
9	27	14	7	41
11	33	8	4	41
13	39	2	1	41

Aufgabe 190624:
Ein automatischer Nummernstempel für ein Serienprodukt druckt in jeder Sekunde genau eine natürliche Zahl. Er beginnt mit der Zahl 0 und setzt dann das Drucken der Reihe nach mit den aufeinanderfolgenden Zahlen $1, 2, 3, \cdots$ fort.
Ermittle die Anzahl aller Ziffern 1, die der Stempel in der ersten Viertelstunde insgesamt zu drucken hat!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Jede Minute hat 60 Sekunden, wegen $15 \cdot 60 = 900$ hat der Stempel also genau 900 Zahlen zu drucken, d. h. die natürlichen Zahlen von 0 bis 899.

Beim Drucken der Zahlen von 0 bis 9 kommt die Ziffer 1 genau 1 mal vor.
Setzt man vor jede dieser Zahlen (also an die Zehnerstelle) jede der neun Ziffern $1, \cdots, 9$, so erhält man alle natürlichen Zahlen von 10 bis 99, jede genau einmal. Somit kommt in diesen Zahlen die Ziffer 1 an der Einerstelle insgesamt genau 9 mal vor. Ferner gibt es unter diesen Zahlen genau zehn mit der Zehnerziffer 1 (nämlich die Zahlen $10, \cdots, 19$). Somit kommt in den Zahlen von 10 bis 99 die Ziffer 1 an der Zehnerstelle insgesamt genau 10 mal vor.

Setzt man vor jede der Zahlen von 0 bis 99 (nachdem die Zahlen von 0 bis 9 durch Vorschalten einer Zehnerziffer 0 zweistellig geschrieben wurden) an die Hunderterstelle jede der acht Ziffern $1, \cdots, 8$, so erhält man alle natürlichen Zahlen von 100 bis 899, jede genau einmal. Somit kommt in diesen Zahlen die Ziffer 1 an den Einer- und Zehnerstellen insgesamt achtmal so oft vor wie das bisher ermittelte Vorkommen $(1 + 9 + 10 = 20)$, d. h. genau 160 mal. Ferner gibt es unter diesen Zahlen genau 100 mit der Hunderterziffer 1 (nämlich die Zahlen $100, \cdots, 199$). Somit kommt in den Zahlen von 100 bis 899 die Ziffer 1 an der Hunderterstelle insgesamt genau 100 mal vor.

Damit sind alle zu erfassenden Ziffern 1 berücksichtigt; ihre Anzahl beträgt somit $1 + 9 + 10 + 160 + 100 = 280$.

Aufgabe 240622:
Die sechs Flächen eines Quaders mit den Kantenlängen $a = 3$ cm, $b = 4$ cm, $c = 5$ cm werden rot angestrichen.
Danach wird der Quader in genau 60 Würfel von 1 cm Kantenlänge zersägt.
Wie viele der so entstehenden Würfel haben 0, 1, 2, 3, 4, 5 bzw. 6 rot angestrichene Flächen?
(Eine Begründung wird nicht verlangt.)

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Anzahl der Würfel mit 0 rot angestrichenen Flächen: 6
Anzahl der Würfel mit 1 rot angestrichenen Fläche: 22
Anzahl der Würfel mit 2 rot angestrichenen Flächen: 24
Anzahl der Würfel mit 3 rot angestrichenen Flächen: 8
Anzahl der Würfel mit 4 rot angestrichenen Flächen: 0
Anzahl der Würfel mit 5 rot angestrichenen Flächen: 0
Anzahl der Würfel mit 6 rot angestrichenen Flächen: 0

Aufgabe 250622:
Gesucht sind vier Zahlen mit folgenden Eigenschaften:

(1) Die Summe der vier Zahlen beträgt 60.
(2) Es ergibt sich viermal dasselbe Ergebnis, wenn man
(2.1.) zur ersten Zahl 4 addiert,
(2.2.) zur zweiten Zahl 3 addiert,
(2.3.) von der dritten Zahl 2 subtrahiert,
(2.4.) von der vierten Zahl 1 subtrahiert.

Ermittle aus diesen Forderungen vier solche Zahlen! Überprüfe, ob die von dir gefundenen Zahlen die geforderten Eigenschaften haben!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn vier Zahlen die geforderten Eigenschaften haben und dabei e das in (2) genannte Ergebnis ist, so ist $e-4$ die erste Zahl, $e-3$ die zweite Zahl, $e+2$ die dritte Zahl, $e+1$ die vierte Zahl.

Nach (1) gilt daher $e-4+e-3+e+2+e+1=60$ und somit $e=64$; also lauten die vier gesuchten Zahlen: 12, 13, 18, 17.

II. Für die Zahlen gilt 12 + 13 + 18 + 17 = 60, also ist (1) erfüllt, und es gilt 12 + 4 = 16, 13 + 3 = 16, 18 - 2 = 16, 17 - 1 = 16, also ist (2) erfüllt.

Aufgabe 270622:
(a) Bei einem Wettkampf, an dem sich genau vier Mannschaften A, B, C und D beteiligten, spielte jede dieser Mannschaften gegen jede andere dieser Mannschaften genau ein Spiel. Zähle diese Spiele auf!

(b) Bei einem anderen Wettkampf spielte ebenfalls jede der teilnehmenden Mannschaften gegen jede andere der teilnehmenden Mannschaften genau ein Spiel. So kamen genau 21 Spiele zustande.
Wie viele Mannschaften nahmen insgesamt an diesem Wettkampf teil?
Zeige, dass bei der von dir angegebenen Anzahl von Mannschaften genau 21 Spiele zustandekommen!

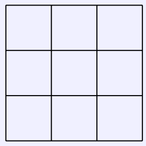
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(a) Die Spiele (bezeichnet durch Hintereinanderschreiben der Buchstaben) sind AB, AC, AD, BC, BD, CD.

(b) Kommt noch eine fünfte Mannschaft E hinzu, so ergeben sich außer diesen sechs Spielen noch weitere vier (AE, BE, CE, DE), insgesamt also zehn Spiele.
Kommt eine sechste Mannschaft hinzu, so ergeben sich zusätzlich genau die fünf weiteren Spiele, die sie mit A, B, C, D, E auszutragen hat, insgesamt also 15 Spiele.
Eine siebente Mannschaft hat genau sechs weitere Spiele auszutragen. Damit ist gezeigt, dass bei sieben Mannschaften genau 21 Spiele zustandekommen.

Aufgabe 280621:
An der Bahnstrecke von Pfiffigstadt nach Knobelshausen liegen zwischen diesen beiden Orten noch drei Bahnstationen: Adorf, Bedorf, Cedorf.
In jedem dieser fünf Bahnhöfe kann man Fahrkarten nach jedem anderen dieser Bahnhöfe kaufen. André besitzt zu jeder dieser möglichen Verbindungen genau eine Fahrkarte. Weitere Fahrkarten hat er noch nicht in seiner Sammlung.
Wie viel Fahrkarten hat André insgesamt?
(Hinweis: Hin- und Rückfahrt gelten als verschiedene Verbindungen, kombinierte „Hin- und Rückfahrkarten“ gibt es jedoch nicht.)

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Von jedem der fünf Orte gibt es genau vier Bahnverbindungen. Da alle diese Bahnverbindungen verschieden sind und André zu jeder von ihnen genau eine Fahrkarte besitzt, hat er wegen $5\cdot 4=20$ insgesamt 20 Fahrkarten.

Aufgabe 290623:



Das Bild zeigt ein Quadrat, das sich aus neun Feldern zusammensetzt. Die Seitenlänge jedes einzelnen Feldes sei 1 cm.
a) Ermittle die Anzahl aller derjenigen Rechtecke, die aus solchen Feldern bestehen!
b) Ermittle die Summe der Flächeninhalte aller dieser Rechtecke!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Für jede mögliche Größe von Rechtecken der genannten Art erhält man die in der folgenden Tabelle aufgeführten Angaben:

Rechtecke	Flächeninhalt	Anzahl der Rechtecke	Summe der Flächeninhalte
1 cm · 1 cm	1 cm^2	9	9 cm^2
1 cm · 2 cm	2 cm^2	12	24 cm^2
1 cm · 3 cm	3 cm^2	6	18 cm^2
2 cm · 2 cm	4 cm^2	4	16 cm^2
2 cm · 3 cm	6 cm^2	4	24 cm^2
3 cm · 3 cm	9 cm^2	1	9 cm^2
		36	100 cm^2

a) Die Anzahl der genannten Rechtecke beträgt 36.
b) Die Summe ihrer Flächeninhalte beträgt 100 cm^2.

Aufgabe 320622:
Ein Holzwürfel, dessen sechs Seitenflächen mit roter Farbe angestrichen wurden, wird anschließend in eine Anzahl untereinander gleichgroßer Teilwürfel zersägt.
a) Wie groß ist diese Anzahl, wenn bekannt ist, dass sich unter den entstandenen Teilwürfeln genau 72 mit je genau zwei roten Seitenflächen befinden?
b) Wie viele der übrigen entstandenen Teilwürfel haben je genau eine rote Seitenfläche,
c) Wie viele haben keine rote Seitenfläche?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Je genau zwei rote Seitenflächen befinden sich an genau denjenigen Teilwürfeln, die vor dem Zersägen an eine Kante des ursprünglichen Würfels angrenzten, aber nicht eine seiner Ecken enthielten.
Da der ursprüngliche Würfel genau 12 Kanten hatte, lagen an jeder seiner Kanten also genau $72 : 12 = 6$ derartige Teilwürfel. In der Verlängerung einer Reihe solcher Teilwürfel folgte nach beiden Seiten noch je genau ein Würfel, der eine Ecke des ursprünglichen Würfels enthielt. Einschließlich dieser beiden Würfel bestand eine solche Reihe also aus genau 8 Teilwürfeln. Daher wurde der ursprüngliche Würfel in $8^3 = 512$ Teilwürfel zersägt.

b) Je genau eine rote Seitenfläche befindet sich an genau denjenigen Teilwürfeln, die an eine Seitenfläche, aber nicht an eine Kante des ursprünglichen Würfels angrenzten. Für je eine der 6 Seitenflächen des ursprünglichen Würfels bildeten diese Teilwürfel eine quadratförmige Anordnung von 6 = 36 Stück; daher gibt es insgesamt 6-36 = 216 solche Teilwürfel.

c) Die Teilwürfel ohne rote Seitenfläche bildeten vor dem Zersägen eine würfelförmige Anordnung, die ganz im Innern des ursprünglichen Würfels lag und aus genau $6^3 = 216$ Teilwürfeln bestand.

Aufgabe 330624:
In einer Schachtel sind Kugeln; jede von ihnen hat eine der Farben blau, gelb, rot. Von jeder Farbe sind mindestens 3, aber höchstens 7 Kugeln vorhanden. Die Anzahl aller Kugeln in der Schachtel ist eine Primzahl. Die Anzahl der roten Kugeln ist durch die Anzahl der gelben Kugeln teilbar. Nimmt man eine gelbe und zwei rote Kugeln heraus, so ist die Anzahl aller Kugeln in der Schachtel durch 5 teilbar, außerdem ist dann wieder die Anzahl der roten Kugeln in der Schachtel durch die Anzahl der gelben Kugeln in der Schachtel teilbar. Wie viele Kugeln waren zu Anfang von jeder Farbe in der Schachtel?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Für die Anzahlen b, g, r der blauen, gelben bzw. roten Kugeln gilt $9 \leq b + g + r \leq 21$, da jede der drei Zahlen b,

g, r mindestens 3 und höchstens 7 beträgt. Da $b+g+r$ eine Primzahl ist, kann dies nur eine der Zahlen 11, 13, 17, 19 sein.
Nach dem Herausnehmen von einer gelben und zwei roten Kugeln verbleibt eine der Anzahlen 8, 10, 14, 16. Von ihnen ist nur 10 durch 5 teilbar; also musste $b+g+r=13$ sein.
Alle Möglichkeiten, 13 in drei Summanden zu zerlegen, die mindestens 3 und höchstens 7 betragen, sind

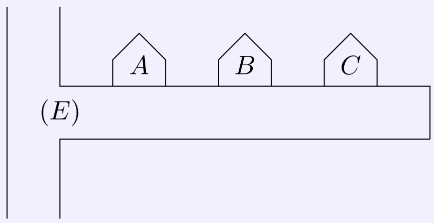
$$\begin{array}{lllll}
3+3+7, & 4+3+6, & 5+3+5, & 6+3+4, & 7+3+3 \\
3+4+6, & 4+4+5, & 5+4+4, & 6+4+3 & \\
3+5+5, & 4+5+4, & 5+5+3 & & \\
3+6+4, & 4+6+3 & & & \\
3+7+3 & & & &
\end{array}$$

Nur bei den blauen Zerlegungen ist der dritte Summand durch den zweiten teilbar. Verringert man in diesen Zerlegungen den zweiten Summanden um 1 und den dritten um 2, so entsteht

$$3+4+3, \qquad 4+2+4, \qquad 5+3+2, \qquad 7+2+1$$

Nur bei der blau markierten Zerlegung (entstanden aus der Zerlegung $4+3+6$) ist der dritte Summand durch den zweiten teilbar.
Also waren zu Anfang 4 blaue, 3 gelbe und 6 rote Kugeln in der Schachtel.

Aufgabe 330633:
In einer Sackgasse, die an einer Ecke (E) beginnt, stehen drei Häuser A, B, C in einer Reihe:



Ein Briefträger, der die Sackgasse an der Ecke (E) betritt, dann zu jedem Haus Post bringt und danach zur Ecke (E) zurückkehrt, kann dies z. B. in der Reihenfolge $(E) \Rightarrow A \Rightarrow C \Rightarrow B \Rightarrow (E)$ tun. Er kann es aber z. B. auch in der Reihenfolge $(E) \Rightarrow B \Rightarrow A \Rightarrow C \Rightarrow (E)$ tun; dabei macht er jedoch einen Umweg, weil er die Strecke zwischen A und B öfter als nötig durchläuft.

(a) Wie viele Möglichkeiten der Reihenfolge, bei denen kein Umweg vorkommt, gibt es insgesamt? Nenne alle diese Möglichkeiten!
(b) Jetzt sollen in der Sackgasse vier Häuser in einer Reihe stehen.
Wie viele Möglichkeiten der Reihenfolge, bei denen kein Umweg vorkommt, gibt es hierzu insgesamt? Nenne auch alle diese Möglichkeiten!
(c) Wie viele Möglichkeiten der Reihenfolge, bei denen kein Umweg vorkommt, gibt es insgesamt, wenn in der Sackgasse 10 Häuser in einer Reihe stehen?
Hinweis: Für diese Aufgabe kann man Überlegungen beim Lösen von (a) und (b) nutzen.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Beim Angeben der Reihenfolge seien die Pfeile und die Angabe von (E) am Anfang und Ende weggelassen.
(a) Es gibt genau die 4 Möglichkeiten ABC, ACB, BCA, CBA.
(b) Für 4 Häuser A, B, C, D gibt es genau die 8 Möglichkeiten $ABCD$, $ABDC$, $ACDB$, $ADCB$, $BCDA$, $BDCA$, $CDBA$, $DCBA$.

(c) Auf dem Hinweg zum letzten der 10 Häuser hat man bei jedem der vorangehenden 9 Häuser zu entscheiden, ob man dieses Haus sogleich auf dem Hinweg beliefert oder seine Belieferung erst für den Rückweg vorsieht.
Da diese 9 Entscheidungen unabhängig voneinander sind, ergeben sie insgesamt $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 512$ Möglichkeiten.

Aufgabe 340632:
Man kann die Buchstaben eines Wortes in eine andere Reihenfolge bringen. Jede so entstandene Aneinanderreihung von Buchstaben soll ebenfalls ein „Wort“ genannt werden, auch wenn sie (in der deutschen Sprache) keinen Sinn ergibt. Wichtig ist nur, dass jeder Buchstabe genau so oft vorkommt wie im ursprünglichen Wort.

Zum Beispiel lassen sich aus dem Wort TAL insgesamt folgende Wörter bilden:

$$ALT, \quad ATL, \quad LAT, \quad LTA, \quad TAL, \quad TLA$$

Sie sind hier alphabetisch geordnet (zum Beispiel steht ATL vor LAT, weil der erste Buchstabe A von ATL im Alphabet früher vorkommt als der erste Buchstabe L von LTA; über die Reihenfolge von LAT und LTA mit gleichem ersten Buchstaben entscheidet der zweite Buchstabe usw.).

Wie man sieht, steht bei dieser Anordnung das Wort TAL an der 5. Stelle der Aufzählung.

(a) Gib alle Wörter an, die sich ebenso aus dem Wort LAND bilden lassen (das Wort LAND ist dabei mit aufzuzählen)!
(b) Wenn die Wörter in (a) alphabetisch geordnet werden, an welcher Stelle steht dann das Wort LAND?
(c) Wie viele Wörter lassen sich aus dem Wort UMLAND bilden? (Wieder ist UMLAND mitzuzählen.)
(d) An wievielter Stelle steht bei alphabetischer Ordnung der Wörter aus (c) das Wort UMLAND?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(a) Die gesuchten Wörter, bereits alphabetisch geordnet, sind:

$ADLN$, $ADNL$, $ALDN$, $ALND$, $ANDL$, $ANLD$, $DALN$, $DANL$, $DLAN$, $DLNA$, $DNAL$, $DNLA$, $LADN$, $LAND$, $LDAN$, $LDNA$, $LNAD$, $LNDA$, $NADL$, $NALD$, $NDAL$, $NDLA$, $NLAD$, $NLDA$

(b) Das Wort LAND steht hierbei an der 14. Stelle.

(c) Für die Wahl des 1. Buchstabens (aus den 6 Buchstaben U, M, L, A, N, D) hat man genau 6 Möglichkeiten. In jeder dieser Möglichkeiten hat man für die Wahl des 2. Buchstabens genau 5 Möglichkeiten. Damit ergeben sich $6 \cdot 5$ Möglichkeiten für die Wahl der ersten beiden Buchstaben.
Entsprechend folgt:

Für die Wahl der ersten drei Buchstaben hat man $6 \cdot 5 \cdot 4$ Möglichkeiten. So fortfahrend ergibt sich: Es gibt genau $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ Wörter aus den 6 Buchstaben des Wortes UMLAND.

(d) Um die Wörter zu kennzeichnen, die dem Wort UMLAND vorangehen, betrachten wir zunächst die mit A beginnenden Wörter. Sie werden gebildet, indem man auf A alle Wörter aus den 5 Buchstaben D, L, M, N, U folgen lässt.
Wie in (c) ergibt sich, dass dies genau $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ Wörter sind.
In dieser Weise fortfahrend kommt man zu folgender Aufzählung. Dem Wort UMLAND gehen insgesamt voran: Für jeden der 5 Buchstaben A, D, L, M, N jeweils $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ Wörter, die mit diesem betreffenden Buchstaben beginnen;

weitere, mit U beginnende Wörter, und zwar für jeden der 3 Buchstaben A, D, L jeweils $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ Wörter, in denen dieser betreffende Buchstabe auf den Anfangsbuchstaben U folgt;

weitere, mit UM beginnende Wörter, und zwar für jeden der 2 Buchstaben A, D jeweils $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ Wörter, in denen dieser betreffende Buchstabe auf den Wort-Anfang UM folgt;

schließlich (nach den zuletzt erfassten Wörtern mit dem Wort-Anfang UMD) das eine Wort UMLADN.

Zusammen sind das $5 \cdot 120 + 3 \cdot 24 + 2 \cdot 6 + 1 = 685$ Wörter. Also steht das Wort UMLAND an der 686. Stelle.

III. Klasse 7

III.I. Kryptogramme, Zahlen in Figuren

I. Runde 1

Aufgabe V00702:

Auf das Heft von Fritz ist Wasser gespritzt. Viele Ziffern sind nicht mehr leserlich. Wie muss die wiederhergestellte Aufgabe lauten:

$$\begin{array}{l}
1\,1\,7\,\square\,\square\,\square : \square\,\square\,3 = \square\,\square\,\square\\
\;\;\square\,\square\,6\\
-\,-\,-\,-\\
\;\;1\,8\,\square\,\square\\
\;\;\square\,\square\,\square\,\square\\
\;\;-\,-\,-\,-\\
\;\;\;\;\square\,\square\,\square\,\square\\
\;\;\;\;\square\,\square\,\square\,\square\\
\;\;\;\;-\,-\,-\,-\\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;0
\end{array}$$

Lösung von Steffen Polster:

Aus der ersten Subtraktion $117x - yz6 = 187$ ergibt sich schrittweise rückwärts $x = 3$, aus $1173 - yz6 = 187$ folgt $z = 8$ und abschließend $y = 9$.
Damit ist 986 das größte Vielfaches des Divisors kleiner 1173, der dreistellig und auf 3 endet. 986 : □□3 kann nur 2 ergeben, andernfalls würde bei Multiplikation der Einerstelle „3“ keine „6“ entstehen. Damit ist die Divisionsaufgabe 117334 : 493 zu lösen, d. h.

$$\begin{array}{l}
1\,1\,7\,3\,3\,4 : 4\,9\,3 = 2\,3\,8\\
\;\;9\,8\,6\\
-\,-\,-\,-\\
\;\;1\,8\,7\,3\\
\;\;1\,4\,7\,9\\
\;\;-\,-\,-\,-\\
\;\;\;\;3\,9\,4\,4\\
\;\;\;\;3\,9\,4\,4\\
\;\;\;\;-\,-\,-\,-\\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;0
\end{array}$$

Aufgabe V00708:

In die 9 Felder des abgebildeten Quadrats sind die Zahlen 1 bis 9 so einzutragen, dass du waagerecht, senkrecht und diagonal die Summe 15 erhältst.

Lösung von Steffen Polster:

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Aufgabe V00709:

Löse folgendes Zahlenrätsel, in dem gleiche Buchstaben gleiche Ziffern bedeuten:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
a & b & b & - & c & d & b & = & e & b & d\\
 & : & & & & + & & & & - & \\
 & f & g & \cdot & & c & h & = & g & i & c\\
\hline
 & f & k & + & c & f & c & = & c & b & i
\end{array}$$

Lösung von Steffen Polster:
Aus der obersten Subtraktionsaufgabe ergibt sich sofort $d = 1$. Angenommen es wäre $f = 1$, so kann a nur 2 oder 3 sein. Beides ist nicht möglich, da c und e kleiner als a sein müssen und $f = 1$ wäre. Angenommen $f = 3$ gelte, so wäre $a = 9$ und g und k 1 bzw. 2 oder umgekehrt. $fg = 31$ und $fg = 32$ sind beide nicht möglich, da dann $ch > 45$ wäre und deren Produkt vierstellig. D. h., $f = 2$.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
a & b & b & - & c & 0 & b & = & e & b & 0 \\
 & : & & & & + & & & & - & \\
 & 2 & g & \cdot & & c & h & = & g & i & c \\
\hline
 & 2 & k & + & c & 2 & c & = & c & b & i
\end{array}$$

g und k können nicht 1 sein, da dann b mit g oder k identisch wäre. Damit ist a 5, 6, 7 oder 8. Von allen Produkt der Faktoren 23 bis 29 miteinander enden 4 auf 00 und nur $23 * 28 = 644$ auf zwei gleiche Ziffern, die 4. Also sind $a = 6$ und $b = 4$. g und k sind 3 bzw. 8.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
6 & 4 & 4 & - & c & 0 & 4 & = & e & 4 & 0 \\
 & : & & & & + & & & & - & \\
 & 2 & g & \cdot & & c & h & = & g & i & c \\
\hline
 & 2 & k & + & c & 2 & c & = & c & 4 & i
\end{array}$$

Angenommen $g = 8$, dann ergibt sich ein Widerspruch, da $g < e < a = 6$ gilt. g ist damit 3 und $k = 8$. Für c verbleibt dann nur 1, da sonst die mittlere Multiplikationsaufgabe nicht lösbar wäre.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
6 & 4 & 4 & - & 1 & 0 & 4 & = & e & 4 & 0 \\
 & : & & & & + & & & & - & \\
 & 2 & 3 & \cdot & & 1 & h & = & 3 & i & 1 \\
\hline
 & 2 & 8 & + & 1 & 2 & 1 & = & 1 & 4 & i
\end{array}$$

Die restlichen Ziffern sind dann $e = 5$, $h = 7$ und $i = 9$.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
6 & 4 & 4 & - & 1 & 0 & 4 & = & 5 & 4 & 0 \\
 & : & & & & + & & & & - & \\
 & 2 & 3 & \cdot & & 1 & 7 & = & 3 & 9 & 1 \\
\hline
 & 2 & 8 & + & 1 & 2 & 1 & = & 1 & 4 & 9
\end{array}$$

Die Aufgabe ist eindeutig lösbar.

Aufgabe 090711:
Schneide ein rechteckiges Stück Papier aus, teile es durch gerade Linien in acht kongruente Rechtecke und schreibe jeweils auf Vorder- und Rückseite einer jeden Rechtecksfläche denselben Buchstaben, wie es in der Abbildung angedeutet ist!

O	N	G	A
W	G	F	L

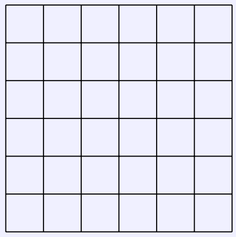
Falte das Stück Papier so, dass die Buchstaben in der Reihenfolge W O L F G A N G übereinander liegen! Als Lösung gilt das entsprechend gefaltete Papier oder eine Beschreibung des Vorgehens.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
In der 3. und 4. Spalte liegt im Uhrzeigersinn die verlangte Buchstabenfolge L F G A vor. Damit L und F sowie A und G jeweils übereinander liegen, beginnt man, indem man $\frac{A}{L}$ unter $\frac{G}{F}$ faltet.

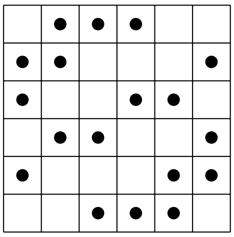
Um zu erreichen, dass G und F aufeinander liegen, faltet man O N G (wobei A mitgeführt wird) auf W G F (worunter L liegt). Nun liegen O W daneben N G sowie daneben A G F L jeweils in dieser Reihenfolge untereinander.

Die letztgenannten vier Buchstaben legt man um auf N (worunter G liegt), um L F G A N G zu erhalten. Schließlich faltet man O (wobei W mitgeführt wird) auf L (worunter F G A N G liegt) und erhält dadurch W O L F G A N G.

Aufgabe 290711:
Auf ein 6×6 - Felderbrett (siehe Bild) sollen 18 Steine so verteilt werden, dass jeder Stein in genau einem Feld liegt, in jedem Feld nicht mehr als ein Stein liegt sowie in jeder Zeile, in jeder Spalte und in jeder Diagonalen nicht mehr als drei Steine liegen.
Gib eine derartige Verteilung an!
Hinweis: Unter einer Diagonale wollen wir in dieser Aufgabe jede Gerade verstehen, die in einer Diagonalrichtung des Quadrates durch die Mittelpunkte von mehreren (mindestens 2, höchstens 6) Feldern verläuft.
Es gibt folglich auf diesem Brett genau 18 verschiedene Diagonalen.

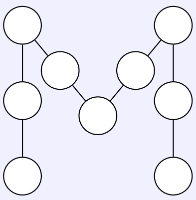


Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Eine mögliche Verteilung zeigt die Abbildung.

Aufgabe 340714:

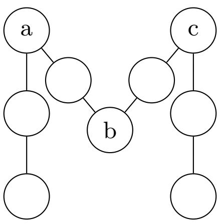


In die Kreise der Zeichnung sollen die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 eingetragen werden. Dabei soll folgende Bedingung erfüllt werden:
Auf jeder der vier Dreiergruppen, die mit geradliniger Verbindung gezeichnet sind, ergibt sich dieselbe Summe s.

a) Welches ist der kleinste Wert von s, mit dem diese Bedingung erfüllbar ist? Gib eine Eintragung an, bei der diese Summe s vorliegt!
Beweise, dass keine kleinere Summe möglich ist!

b) Welches ist der größte Wert s, mit dem die genannte Bedingung erfüllbar ist? Gib auch hierzu eine Eintragung an!
c) Ist die Bedingung auch mit allen denjenigen natürlichen Zahlen s erfüllbar, die zwischen dem kleinsten und dem größten Wert aus a) bzw. b) liegen?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Für jede geforderte Eintragung der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 gilt:
Addiert man die vier im Aufgabentext genannten (einander gleichen) Summen, so werden dabei die Zahlen a, b, c (siehe Abbildung) je zweimal, die anderen Zahlen je einmal als Summanden herangezogen. Also gilt

$$4s = 1 + 2 + ... + 9 + a + b + c \tag{1}$$

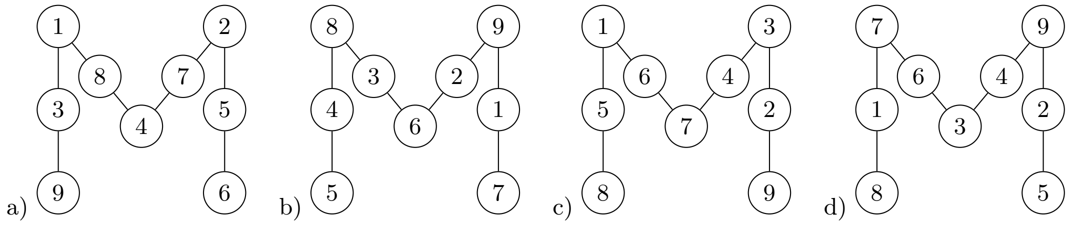
Die Summe s ist folglich für diejenigen Eintragungen am kleinsten bzw. am größten, für die $a+b+c$ am kleinsten bzw. am größten ist.

a) Die kleinstmögliche Summe aus drei verschiedenen der Zahlen 1, 2, ..., 9 ist $1+2+3 = 6$. Wäre eine Eintragung mit diesen Zahlen als a, b, c möglich, so folgte aus (1) die Gleichung $4s = 45 + 6$, die mit ganzzahligem s nicht erfüllbar ist.
Die nächstgrößere Möglichkeit $1 + 2 + 4 = 7$ führt auf $4s = 45 + 7 = 52$, also $s = 13$. Wie Abbildung a zeigt, ist dieser Wert s durch eine Eintragung erreichbar. Damit ist also 13 als kleinster Wert s bewiesen, und eine

zugehörige Eintragung ist angegeben.

b) Die größtmögliche Summe aus drei verschiedenen der Zahlen 1, 2, ..., 9 ist $7+8+9=24$. Wieder ist eine Eintragung mit diesen a, b, c nicht möglich, da (1) auf $4s = 45+24$ führen würde. Die nächstkleinere Möglichkeit $6+8+9=23$ mit $45 = 45+23 = 68$, $s = 17$ ist durch eine Eintragung erreichbar; siehe z. B. Abbildung b.

c) Auch mit $s = 14$ und mit $s = 16$ sind Eintragungen möglich, wie Abbildungen c und d zeigen. Dagegen gibt es keine Eintragung mit $s = 15$.
Für eine solche müsste nach (1) nämlich $60 = 45 + a + b + c$, also auch $a + b + c = 5$ sein. In das Feld zwischen a und b müsste folglich wegen $s = 15$ wieder die Zahl c kommen, was der Verschiedenheit der einzutragenden Zahlen widerspricht.



II. Runde 2

Aufgabe 210724:
Albrecht Dürer bringt auf seinem Stich „Melancholie“ ein „magisches Quadrat“ aus den Zahlen 1 bis 16, d. h. ein Quadrat, in dem jede Zeile, jede Spalte und jede Diagonale denselben Summenwert hat.
In den beiden Mittelfeldern der untersten Zeile ist das Entstehungsjahr des Stiches abzulesen.
In der Abbildung ist dieses Quadrat mit unvollständiger Eintragung wiedergegeben. Begründe, wie das magische Quadrat auszufüllen ist, und gib das Entstehungsjahr an!

16	3	2	13
			9
9			12
4			

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wegen $16 + 3 + 2 + 13 = 34$ ist die Zeilen-, Spalten- und Diagonalensumme 34.
Daraus folgt, dass die fehlende Zahl in der ersten Spalte 5 und die fehlende Zahl in der vierten Spalte 1 beträgt.
Die Summe der beiden fehlenden Zahlen der vierten Zeile beträgt 29, sie lässt sich nur mit den Zahlen 15 und 14 bilden; die Summe der fehlenden Zahlen der dritten Zeile, beträgt 13, sie lässt sich nur mit den Zahlen 6 und 7 bilden. Die Summe der restlichen Zahlen 10 und 11 beträgt 21. Sie ergibt zusammen mit den bereits in der zweiten Zeile stehenden Zahlen die verlangte Summe 34.

Die Anordnung der beiden mittleren Zahlen der zweiten bzw. dritten Zeile muss nun so erfolgen, dass auch in beiden Diagonalen die Summe 34 erreicht wird. Da jeder der beiden Diagonalen zu dieser Summe noch 17 fehlt, kann die Anordnung nur oder

11	10
7	6

oder

10	11
6	7

lauten. In der zweiten Spalte fehlt an der Summe 34 noch 16 oder 17, je nachdem, ob die zweite Zahl der vierten Zelle 14 oder 15 lautet. Daher erfüllt nur die zweite der oben angeführten Anordnungen die gestellten Bedingungen. Somit ergibt sich als einzige Möglichkeit die folgende Eintragung:

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Sie erfüllt alle Bedingungen eines magischen Quadrates. Das Entstehungsjahr des Stiches lautet mithin 1514.

III. Runde 3

Aufgabe V10733:

Setze für $\square$ die entsprechenden Ziffern ein:

$$\begin{array}{ccccc}
3 & \square & 7 & \cdot & 8\ \square \\
\hline
2 & \square & 7 & \square & \\
 & \square & \square & \square & 2 \\
\hline
\square & \square & \square & \square & \square
\end{array}$$

Versuche, deinen Lösungsweg zu erläutern.

Lösung von Steffen Polster:
Die letzte Ziffer des Produktes muss 2 sein. Da die 7 nur bei Multiplikation mit der 6 eine Endziffer 2 liefert, ist der 2. Faktor folglich 86. Weiterhin ist $8 \cdot 7 = 56$, so dass das 1. Zwischenergebnis auf 6 endet.

$$\begin{array}{ccccc}
3 & \square & 7 & \cdot & 8\ 6 \\
\hline
2 & \square & 7 & 6 & \\
 & \square & \square & \square & 2 \\
\hline
\square & \square & \square & \square & 2
\end{array}$$

Es ist $307 \cdot 8 = 2456$. Die fehlenden zwei Zehner zu 2?76 sind nur möglich, wenn die 2. Ziffer des ersten Faktors eine 4 ist. Die noch fehlenden Ziffern ergeben sich durch Ausmultiplizieren von $347 \cdot 86$.

$$\begin{array}{ccccc}
3 & 4 & 7 & \cdot & 8\ 6 \\
\hline
2 & 7 & 7 & 6 & \\
 & 2 & 0 & 8 & 2 \\
\hline
2 & 9 & 8 & 4 & 2
\end{array}$$

Aufgabe 040735:
Ein Zirkel Junger Mathematiker beschäftigt sich damit, Aufgaben für die Knobelecke zusammenzustellen. Folgende Aufgabe wurde vorgeschlagen:

$$\begin{array}{ccccc}
 & D & R & E & I \\
+ & E & I & N & S \\
\hline
 & V & I & E & R
\end{array}$$

Die Buchstaben sollen durch Ziffern ersetzt werden. Gleiche Buchstaben bedeuten gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern. Es stellt sich aber heraus, dass es keine Lösung dieser Aufgabe geben kann. Begründe das!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Betrachte man zunächst die zweite Spalte von rechts: $E + N = E$. So gibt es nur 2 Möglichkeiten für N:

(1) $N = 0, E + 0 = E$ wahr, kein Übertrag
Nun betrachten wir die 3. Spalte von rechts. $R + I = I \Rightarrow R = 0$ nicht möglich, da $R = N = 0$ und es dürfen keine zwei Buchstaben den gleichen Wert annehmen.

(2) Von der Aufgabe $I + S = R$ bleibt ein Übertrag zurück, dieser kann maximal 1 sein da I und S maximal 8 und 9 (I und S müssen ja einstellig sein) sein können und demnach maximal 17 für $I + S$ infrage kommt.
$N = 9, E + 9 + 1 = E + 10$ es bleibt wieder eins als Übertrag, wahr.
Nun betrachten wir die 3. Spalte von rechts.
$R + I + 1 = I + 10$ (hier muss ein Übertrag entstehen denn würde $R + I + 1 = I$ so wäre $R = -1$, die Buchstaben können aber nur positive Zahlen annehmen damit eine Additionsaufgabe entsteht.)
$R = 9$ nicht möglich, da $R = N = 9$ und es dürfen keine zwei Buchstaben den gleichen Wert annehmen.

Also gibt es keine Lösung für die Aufgabe.

Aufgabe 120734:
Als die Klasse 7a den Fachunterrichtsraum für Mathematik betrat, war an der Wandtafel eine Multiplikationsaufgabe angeschrieben. Jemand hatte jedoch die Ziffern derart verwischt, dass nur noch vier „Einsen“ leserlich geblieben waren und von den unleserlichen Ziffern lediglich noch zu erkennen war, an welcher Stelle sie gestanden hatten.

Das Bild an der Wandtafel hatte folgendes Aussehen: (Die unleserlichen Ziffern sind hier durch die Buchstaben $a, b, c, \ldots$ angegeben. Dabei können also verschiedene Buchstaben auch die gleiche Ziffer, möglicherweise auch nochmals die Ziffer 1, bezeichnen.)

		1	a	b	·	c	d
	e	f	g	1			
h	i	j	1				
k	m	n	1	p			

Einige Schüler versuchten sofort, die fehlenden Ziffern zu ermitteln, und schon nach kurzer Zeit rief Bernd:
„Ich weiß genau, wie die beiden Faktoren hießen!“
Doch Gerd entgegnete ihm:
„Es lässt sich nicht eindeutig feststellen, wie die beiden Faktoren lauteten.“

Stelle fest, ob Bernd oder Gerd recht hatte! Gib in jedem Falle alle Lösungen (Realisierungen) des Multiplikationsschemas an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Offensichtlich gilt $p = 1$ und $g = 0$. Da in der zweiten und in der dritten Zeile je eine vierstellige Zahl steht, gilt $d \neq 1$ und $c \neq 1$. Das Produkt $b \cdot d$ endet ebenso wie das Produkt $b \cdot c$ mit 1. Es sind nun genau die folgenden drei Fälle möglich:

1. Fall: Es sei $b = 9$, $c = d = 9$.
Daraus folgt $b \cdot d = 81$. Wegen $g = 0$ muss das Produkt $a \cdot d$, also $a \cdot 9$, mit der Ziffer 2 enden, (denn $2 + 8 = 10$). Das ist aber genau für $a = 8$ der Fall. Der erste Faktor heißt somit 189, der zweite 99.
Tatsächlich führt die Rechnung $189 \cdot 99$ zu einem Tafelbild, das der Aufgabenstellung entspricht.

2. Fall: Es sei $b = 7$, $c = d = 3$.
Da der erste Faktor kleiner als 200 ist, ist sein Dreifaches kleiner als 600, also eine dreistellige Zahl, was im Widerspruch zur zweiten Zeile steht. Dieser Fall führt somit zu keiner Lösung.

3. Fall: Es sei $b = 3$, $c = d = 7$.
Daraus folgt $b \cdot d = 21$. Das Produkt $a \cdot d$, also $a \cdot 7$, muss dann mit der Ziffer 8 enden (denn $2 + 8 = 10$). Das ist genau für $a = 4$ der Fall. Als erster Faktor ergibt sich damit 143, der zweite lautet 77.
Tatsächlich führt die Rechnung $143 \cdot 77$ zu einem Tafelbild, das der Aufgabenstellung entspricht.

Das Multiplikationsschema hat somit genau zwei, und zwar die beiden folgenden Realisierungen:

		1	8	9	·	9	9
	1	7	0	1			
1	7	0	1				
1	8	7	1	1			

		1	4	3	·	7	7
	1	0	0	1			
1	0	0	1				
1	1	0	1	1			

Gerd hatte also recht, Bernd dagegen nicht.

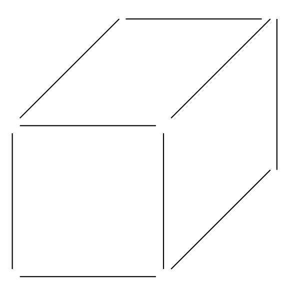
III.II. Logik, Mengenlehre

I. Runde 1

Aufgabe V10714:
Neun Streichhölzer sind so zu legen, dass sie drei Vierecke bilden. Jede Viereckseite soll die Länge eines Streichholzes haben. Zeichne die Figur auf.

Lösung von Steffen Polster:

Die Streichhölzer können so gelegt werden, dass sie ein Schrägbild eines Quaders darstellen. Die drei Vierecke sind ein Quadrat und zwei Rhomben.



Aufgabe 010714:
Im vorigen Schuljahr meldete die „Berliner Zeitung“ folgende Ergebnisse des Berliner Schülerfußballturniers nach dem 2. Spieltag:
Ergebnisse:

12. Oberschule Treptow – Max-Kreuziger-Oberschule	1:0
4. Oberschule Köpenick – 8. Oberschule Lichtenberg	2:0

Tabellenstand:

Platz	Mannschaft	Punkte	Tore
1.	4. Oberschule Köpenick	2:2	2:1
2.	12. Oberschule Treptow	2:2	2:2
3.	Max-Kreuziger-Oberschule	2:2	1:1
4.	8. Oberschule Lichtenberg	2:2	2:3

Welche Ergebnisse gab es am ersten Spieltag?
Anmerkung: Für jeden Sieg gibt es 2 : 0 Punkte, für jedes unentschiedene Spiel 1 : 1 Punkte, für jede Niederlage 0:2 Punkte.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Da die 12. Oberschule und die 4. Oberschule am 2. Spieltag gewonnen und damit 2 : 0 Punkte bekommen haben, müssen die Max-Kreuziger-OS und die 8. Oberschule gemäß der Tabelle am 1. Spieltag je 2:0 Punkte geholt, d. h. gewonnen haben.
Diese beiden haben also nicht gegeneinander gespielt. Die Max-Kreuziger-OS muss also die 4. Oberschule Köpenick mit 1 : 0 geschlagen haben beim gegebenen Torverhältnis, während die 8. Oberschule Lichtenberg die 12. Oberschule Treptow mit 2:1 besiegt hat.

Aufgabe 020716:
In einem Haus mit 28 Fenstern sollen einige fehlende Fensterläden beschafft werden, so dass an jedem Fenster 2 Läden vorhanden sind. Einige Fenster haben noch 2 Läden, bei der gleichen Anzahl von Fenstern fehlen beide, der Rest hat je einen Laden.
Wie viel neue Fensterläden braucht man? Begründe die Antwort!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Man kann (in Gedanken) von jedem Fenster, das noch zwei Läden hat, einen an einem Fenster anbringen, das keinen Laden mehr hat (schließlich ist die Anzahl dieser beiden „Arten“ von Fenstern gleich!).
Dann hätte jedes Fenster einen Fensterladen, überall würde einer fehlen. Also braucht man 28 neue Fensterläden.

Aufgabe 090713:
Eine Touristengruppe aus der DDR von genau 100 Personen fuhr ins Ausland. Über diese Gruppe sind folgende Angaben bekannt:

(1) Genau 10 Touristen beherrschen weder Russisch noch Englisch.
(2) Genau 75 Touristen beherrschen Russisch.
(3) Genau 83 Touristen beherrschen Englisch.

Ermittle die Anzahl aller Touristen dieser Gruppe, die beide Sprachen beherrschen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Aus (1) folgt: Genau 90 Touristen beherrschen mindestens eine der beiden Sprachen. Somit beherrschen nach (2) genau $(90-75)$ Personen der Gruppe Englisch, aber nicht Russisch, das sind 15 Personen.
Nach (3) beherrschen genau $(90-83)$ Personen der Gruppe Russisch, aber nicht Englisch, das sind 7 Personen.
Wegen $90-7-15=68$ folgt: Genau 68 Personen beherrschen beide Sprachen.

Aufgabe 130714:
An einer Kreisolympiade Junger Mathematiker nahmen in der Olympiadeklasse 7 Anneliese, Bertram, Christiane, Detlev, Erich und Franziska teil. Genau zwei von ihnen erhielten Preise. Auf die Frage, welche beiden Teilnehmer das waren, wurden folgende fünf Antworten gegeben:

(1) Anneliese und Christiane
(2) Bertram und Franziska
(3) Anneliese und Franziska
(4) Bertram und Erich
(5) Anneliese und Detlev.

Wie sich später herausstellte, waren in genau einer Antwort beide Namen falsch angegeben, während in jeder der übrigen vier Antworten genau ein Name richtig angegeben war.
Wie heißen die beiden Preisträger?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, Anneliese hätte keinen Preis erhalten. Dann wären, da laut Aufgabe in zwei der Antworten (1), (3), (5) je ein Name richtig wäre, zwei der Teilnehmer Christiane, Franziska, Detlev die Preisträger.
Hiernach waren aber in der Aussage (4) und außerdem noch in einer der Aussagen (1), (3), (5) beide Angaben falsch, im Widerspruch zur Aufgabe.
Folglich ist Anneliese eine Preisträgerin. Dann sind laut Aufgabe Christiane, Franziska und Detlev keine Preisträger.
Da von den Aussagen (2), (4) genau eine zwei falsche Namen enthalten muss und Bertram in beiden Aussagen vorkommt, ist Erich der andere Preisträger.
Also sind Anneliese und Erich die beiden Preisträger.

Aufgabe 160711:
Bei der 3. Stufe der XV. Mathematikolympiade erhielten die sechs Thälmann-Pioniere Anita, Bernd, Christine, Doris, Erich und Fritz je einen Preis. Genau zwei von ihnen erhielten volle Punktzahl.
Auf die Frage, welche beiden Pioniere volle Punktzahl erhielten, wurden folgende fünf Antworten gegeben:

(1) Anita und Christine;
(2) Anita und Fritz;
(3) Bernd und Fritz;
(4) Anita und Doris;
(5) Bernd und Erich.

Anschließend wurde festgestellt, dass in genau einer dieser fünf Antworten beide Angaben falsch sind, während in den übrigen vier jeweils eine Angabe wahr und eine falsch ist.
Wie heißen nach dieser Feststellung die beiden Preisträger, die die volle Punktzahl erhielten? Überprüfe, ob sich diese Frage aus den vorliegenden Antworten eindeutig beantworten lässt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, Anita hätte keine volle Punktzahl erreicht. Dann hätten nach den Feststellungen über die Antworten (1), (2), (4) genau zwei der Schüler Christine, Fritz und Doris volle Punktzahl bekommen, d. h., in genau einer der Aussagen (1), (2), (4) wären beide Angaben falsch.
Im Widerspruch zur Aufgabe müssten dann aber auch in (5) beide Angaben falsch sein. Also hat Anita volle Punktzahl erreicht und Christine, Fritz und Doris demzufolge nicht.

Hätte außerdem Bernd volle Punktzahl erreicht, dann wären in keiner der Antworten (1) bis (5) beide Angaben falsch. Also hat Bernd keine volle Punktzahl bekommen. Daraus folgt, dass außer Anita nur Erich volle Punktzahl erreicht haben kann.

Tatsächlich steht diese Antwort mit allen Bedingungen der Aufgabe in Einklang: denn bei ihr sind in (3) beide Angaben falsch und in (1), (2), (4), (5) je genau eine Angabe falsch.
Die Preisträger mit voller Punktzahl sind also aus den vorliegenden Angaben eindeutig zu ermitteln; sie heißen Anita und Erich.

Aufgabe 180711:
Vier Schüler, Ernst, Franz, Karl und Martin, deren Familiennamen (möglicherweise in anderer Reihenfolge) Altmann, Müller, Neubert und Tauber lauten, trafen sich auf einer Geburtstagsfeier. Jeder von ihnen brachte für das Geburtstagskind genau ein Geschenk mit. Außerdem ist bekannt:

(1) Martin hatte Rosen, Altmann einen Kugelschreiber, Müller ein Buch und Karl eine Schachtel Pralinen mitgebracht.
(2) Als erster verabschiedete sich im Verlaufe des Abends Martin, als zweiter Neubert, danach Ernst und zuletzt Müller.

Wie heißen diese Schüler mit Vor- und Zunamen?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Schüler heißen Ernst Altmann, Franz Müller, Karl Neubert und Martin Tauber.
Begründung: Wegen (1) können sowohl Martin als auch Karl nicht Altmann oder Müller heißen.
Wegen (2) heißt Martin auch nicht Neubert, also muss Martin Tauber heißen.
Daher heißt Karl nicht Tauber, sondern Neubert. Ernst und Franz heißen folglich Altmann oder Müller. Ernst kann nach (2) nicht Müller heißen.

Aufgabe 190714:
Sechs Schüler halfen bei der Obsternte. Sie erhielten Anerkennungsprämien entsprechend ihren Leistungen. Jeder von ihnen übergab die Hälfte des erhaltenen Geldbetrages dem Solidaritätskonto. Über diese Schüler ist ferner folgendes bekannt:

(1) Keiner von ihnen spendete weniger als 6M und keiner mehr als 12M.
(2) Konrad spendete mehr als Peter.
(3) Helga spendete mehr als Gisela, Gisela mehr als Peter, Peter mehr als Inge.
(4) Frank spendete mehr als Helga und Helga mehr als Konrad.
(5) Helga spendete 2M weniger als Frank, Peter 2M mehr als Inge.
(6) Alle spendeten volle Markbeträge.

Wie viel Geld erhielt jeder der Schüler für das Obstpflücken?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es seien f, g, h, i, k, p die von Frank, Gisela, Helga, Inga, Konrad bzw. Peter gespendeten Geldbeträge in Mark. Aus den Angaben der Aufgabenstellung folgt damit:

(7) $h > g > p$, $f > h > k > p > i$ aus (2), (3), (4)
(8) $f = h + 2$, $p = i + 2$ aus (5)
(9) $f \leq 12$, $i \geq 6$ aus (1)
(10) $h \leq 10$, $p \geq 8$ aus (8)
(11) Wäre in (9) sogar $f < 12$ oder $i > 6$ so folgte aus (8) $h < 10$ oder $p > 8$;

unter der Bedingung (10) kann jedoch $h > g > p$ durch keine ganze Zahl g erfüllt werden. Daher scheidet dieser Fall aus,

(12) d. h. in (9) muss $f = 12, i = 6$ gelten.
(13) Somit folgt aus (8) $h = 10$, $p = 8$;
(14) hiernach können die Ungleichungen $h > g > p$ und $h > k > p$ ganzzahlig nur durch $g = 9$, $k = 9$ erfüllt werden.

Da die somit ermittelten Spenden [(12), (13), (14)] die Hälfte der erhaltenen Beträge waren, folgt: Frank erhielt 24 M, Gisela 18 M, Helga 20 M, Inge 12 M, Konrad 18 M und Peter 16 M.

Aufgabe 210713:
Zur Vorbereitung eines Sportfestes soll für die Schülerinnen Andrea, Beate, Christine, Doris, Eva, Frauke und Gerda eine Reihenfolge festgelegt werden. Dabei soll stets von zwei verschieden großen Schülerinnen die größere vor der kleineren stehen. Sind aber zwei Schülerinnen gleichgroß, so soll stets diejenige, deren Vorname einen im Alphabet vorangehenden Anfangsbuchstaben hat, vor der anderen stehen. Der Organisator, der eine derartige Reihenfolge festlegen soll, kennt die Schülerinnen nicht, aber er meint, sich an folgende Informationen erinnern zu können:

(1) Es ist wahr, dass Doris um genau 2 cm kleiner als Christine ist.
(2) Es ist falsch, dass Andrea nicht dieselbe Größe wie Gerda hat.
(3) Es ist nicht wahr, dass keine der Schülerinnen kleiner als Frauke ist.
(4) Es ist wahr, dass Eva kleiner als Doris, aber größer als Frauke ist.
(5) Es ist unwahr, dass Frauke größer als Christine ist.
(6) Es ist nicht falsch, dass Christine um genau 2 cm größer als Gerda ist und dass Christine größer als Eva ist.

Untersuche, ob es mehr als eine, genau eine oder keine Möglichkeit für die Reihenfolge der Schülerinnen gibt, bei der alle Informationen (1) bis (6) zutreffen!
Falls es sie gibt, ermittle alle möglichen Reihenfolgen, die den genannten Bedingungen entsprechen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Bezeichnet man für jede Schülerin ihre in Zentimeter gemessene Größe mit dem Anfangsbuchstaben ihres Vornamens, so lauten die Informationen:

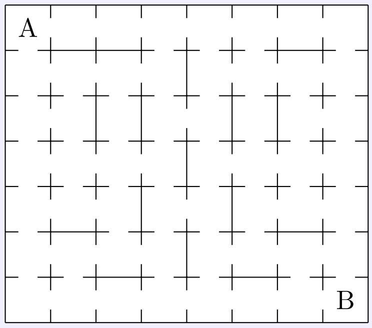
(1) Es gilt $D = C - 2$.
(2) Es gilt $A = G$.
(3) Es gilt mindestens eine der Ungleichungen $A < F, B < F, C < F, D < F, E < F, G < F$.
(4) Es gilt $E < D$ und $E > F$.
(5) Es gilt $F \leq C$. (6) Es gilt $C = G + 2$ und $C > E$.

I. Angenommen, bei einer Reihenfolge der Schülerinnen treffen alle Informationen (1) bis (6) zu.
(7) Aus (1) und (6) folgt dann $D = G = C - 2$.
(8) Aus (2) und (7) folgt $A = D = G$.
(9) Aus (1), (4) und (8) folgt $C > A = D = G > E > F$.
(10) Aus (3) und (9) folgt $B < F$.
Daher können nur bei der Reihenfolge $C > A = D = G > E > F > B$ alle Informationen (1) bis (6) zutreffen.

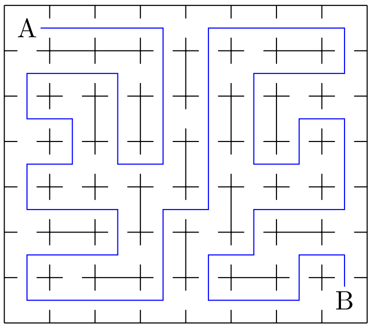
II. Wenn diese Reihenfolge vorliegt und überdies $A = D = G = C - 2$ ist, so gilt:
Es ist $D = C - 2$, also ist (1) erfüllt.
Es ist $A = G$, also ist (2) erfüllt.
Es ist $B < F$, also ist (3) erfüllt.
Es ist $E < D$ und $E > F$, also ist (4) erfüllt.
Es ist $F < C$, also ist (5) erfüllt.
Es ist $C = G + 2$ und $C > E$, also ist (6) erfüllt.
Damit ist bewiesen, dass es genau eine Reihenfolge gibt, bei der alle Informationen (1) bis (6) zutreffen. Sie lautet wie in (10) angegeben.

Aufgabe 230711:

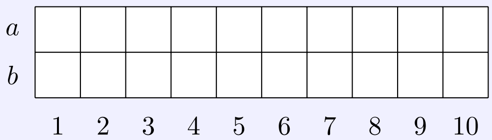
Der Weg von A nach B soll durch alle 56 Felder der untenstehenden Figur führen. Dabei soll jedes Feld nur einmal betreten und jede „Tür“ höchstens einmal benutzt werden.
Gib einen solchen Weg an! Eine Begründung wird nicht verlangt.



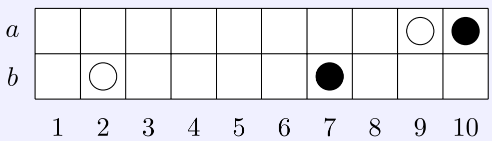
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Aufgabe 230714:
Zwei Spieler A und B spielen auf einem „2×10 - Brett“ folgendes Spiel:



Zu Beginn lost A in jeder der Zeilen a und b ein Feld aus und besetzt es jeweils mit einem weißen Stein. Danach lost B ebenfalls in jeder der Zeilen a und b ein Feld aus, das aber stets rechts von dem von A ausgelosten Feld liegen muss, und besetzt es jeweils mit einem schwarzen Stein. Beispielsweise ist „Weiß: a9, b2; Schwarz: a10, b7“ (Abbildung unten), eine mögliche Anfangsstellung.



Nun ziehen A und B abwechselnd, wobei A beginnt. Wer am Zug ist, muss (genau) einen seiner beiden Steine in dessen Zeile um mindestens ein Feld, jedoch höchstens bis zum Spielfeldrand bzw. bis zum Feld unmittelbar neben dem gegnerischen Stein beliebig nach links oder nach rechte ziehen.
Sieger ist, wer die Steine des Gegners so blockiert, dass dieser nicht mehr ziehen kann.

a) Gib für folgende Anfangsstellungen an, wie A ziehen und dann auf jede Zugmöglichkeit von B so antworten kann, dass er mit Sicherheit siegt:

(1) Weiß: a9, b2; Schwarz: a10, b7.
(2) Weiß: a3, b5; Schwarz: a8, b6.
(3) Weiß: a8, b4; Schwarz: a10, b7.
(4) Weiß: a4, b2; Schwarz: a8, b9.

b) Entscheide, ob A von den folgenden Anfangsstellungen aus den Sieg erzwingen kann:

(5) Weiß: a2, b4; Schwarz: a7, b9.
(6) Weiß: a6, b2; Schwarz: a8, b5.
(7) Weiß: a5, b3; Schwarz: a8, b6.

c) An welchen Merkmalen einer Anfangsstellung kann man stets erkennen, ob A den Sieg erzwingen kann?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) (1) A zieht b2 nach b6. Dann kann B nur noch den Stein b7 nach rechts ziehen. Jedesmal antwortet A, indem er seinen b-Stein wieder unmittelbar links neben den schwarzen Stein zieht.
Dadurch wird B schließlich auf b10 gezwungen und von A mit b9 blockiert.

(2) A zieht a3 nach a7. Dann kann B jeden seiner Steine nur noch nach rechts ziehen. A rückt wieder nach, unmittelbar links daneben. Dadurch wird einer der schwarzen Steine auf Spalte 10 gezwungen, und es geht entsprechend wie in (1) weiter.

(3) A zieht b4 nach b5. Zieht dann B einen Stein nach links, so ist er unmittelbar rechts neben einem weißen Stein, und A kann wie in (2) den Sieg erzwingen. Will B das aber vermeiden, indem er seinen b-Stein nach rechts zieht, so rückt A stets ebenso viele Felder mit seinem b-Stein nach rechts. Spätestens wenn B so auf b10 gezogen hat, ist er gezwungen, einen Stein nach links zu ziehen, also kann A den Sieg erzwingen.

(4) A zieht b2 nach b5. Zieht dann B nach rechts, so rückt A mit seinem Stein auf derselben Zeile ebenso viele Felder nach. Schließlich muss B nach links ziehen; dann kann A erreichen, dass der Zwischenraum zwischen den Steinen für beide Zeilen dieselbe Länge hat, aber eine kleinere als drei Felder. Das lässt sich wiederholen, so dass A zu Stellungen der Art (2) oder (3) - nämlich auf beiden Zeilen mit Zwischenraum ein Feld bzw. ohne Zwischenraum zwischen den zwei Steinen - gelangt und so den Sieg erzwingt.

b) (5) Hier kann A nicht gewinnen, wenn B das aus (4) ersichtliche Verfahren einschlägt, d. h.:
Falls A nach links zieht, rückt B ebenso viele Felder nach; falls A nach rechts zieht, erzielt B auf beiden Zeilen gleichlange Zwischenräume, aber kürzer als vorher. Schließlich hat B beide Steine unmittelbar rechts neben die weißen Steine gebracht und folgt ihnen unmittelbar, bis sie auf Spalte 1 blockiert sind.

(6),(7) Dasselbe gilt für (7), während (6) wieder wie bei (4) die Möglichkeit für A bietet, den Sieg zu erzwingen.

c) Von einer Anfangsstellung aus kann A genau dann den Sieg erzwingen, wenn die Zwischenräume, die sich in den Zeilen a und b jeweils zwischen dem weißen und dem schwarzen Stein befinden, verschieden lang sind.

Beweis:
I. Wenn die genannten Zwischenräume verschieden lang sind, kann A den Sieg folgendermaßen erzwingen:
Im ersten Zug erreicht er, dass die Zwischenräume gleich lang werden. Zieht B dann nach rechts, so rückt A in derselben Zeile um ebenso viele Felder nach. Schließlich muss B nach links rücken, und A kann eine Stellung mit gleichlangen aber kürzeren Zwischenräumen in beiden Zeilen erreichen.
Auf diese Weise erzwingt A nach endlich vielen Zügen stets, dass in beiden Zeilen die Steine unmittelbar benachbart sind, B muss daher nach rechts ziehen, worauf A dichtauf folgen kann, bis B blockiert ist.

II. Wenn die genannten Zwischenräume gleich lang sind, so kann A den Sieg nicht erzwingen. A muss nämlich (falls er nicht schon in der Anfangsstellung blockiert ist) im ersten Zug eine Stellung herbeiführen, in der die genannten Zwischenräume verschieden lang sind. Von dieser Stellung aus kann dann B nach dem in I. geschilderten Verfahren den Sieg erzwingen.

Aufgabe 240711:
Über die Jungen einer Schulklasse ist folgendes bekannt:
Jeder Junge dieser Klasse gehört mindestens einer der drei Arbeitsgemeinschaften „Foto“, „Junge Mathematiker“, „Turnen“ an. Ferner gelten folgende Aussagen:

(1) Genau sechs Jungen der Klasse sind Mitglieder der AG „Foto“.
(2) Genau fünf Jungen der Klasse sind Mitglieder der AG „Junge Mathematiker“.
(3) Genau fünf Jungen der Klasse sind Mitglieder der AG „Turnen“.

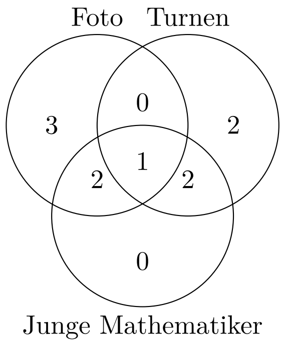
Weiterhin gelten über die Jungen dieser Klasse auch die folgenden Aussagen:

(4) Genau drei der Jungen gehören sowohl zur AG „Foto“ als auch zur AG „Junge Mathematiker“.
(5) Genau ein Junge gehört sowohl zur AG „Foto“ als auch zur AG „Turnen“.
(6) Genau drei der Jungen gehören sowohl zur AG „Junge Mathematiker“ als auch zur AG „Turnen“.

Schließlich gilt auch die Aussage
(7) Genau einer der Jungen dieser Klasse nimmt an allen drei Arbeitsgemeinschaften teil.

(Dagegen ist zu beachten, dass in (1) bis (6) nichts darüber ausgesagt wird, ob die betreffenden Jungen außer den jeweils genannten Arbeitsgemeinschaften noch weiteren Arbeitsgemeinschaften angehören.)
Untersuche, ob durch diese Angaben die Anzahl aller Jungen dieser Klasse eindeutig bestimmt ist! Ist dies der Fall, dann gib die Anzahl an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Außer dem einen Jungen, der nach (7) alle drei Arbeitsgemeinschaften besucht, gibt es nach (4), (5) bzw. (6) (und wegen $3-1=2$, $1-1=0$ bzw. $3-1=2$) genau 2 Jungen, die genau zu den AG „Foto“ und „Junge Mathematiker“ gehören, keinen Jungen, der genau zu den AG „Foto“ und „Turnen“ gehört, genau 2 Jungen, die genau zu den AG „Junge Mathematiker“ und „Turnen“ gehören.

Hiernach und nach (1), (2) bzw. (3) (sowie wegen $6-2-0-1=3$, $5-2-2-1=0$ bzw. $5-0-2-1=2$) gibt es genau 3 Jungen, die genau zur AG „Foto“ gehören, keinen Jungen, der genau zur AG „Junge Mathematiker“ gehört, genau 2 Jungen, die genau zur AG „Turnen“ gehören.

Mit dieser Aufzählung sind alle Möglichkeiten erfasst, mindestens einer der drei Arbeitsgemeinschaften anzugehören, und zwar jede solche Möglichkeit genau einmal.
Daher ist $1+2+0+2+3+0+2=10$ die gesuchte Anzahl aller Jungen dieser Klasse.

Aufgabe 240712:
Peter und Klaus würfeln mit drei Würfeln. Sie notieren nach jedem Wurf die drei erhaltenen Augenzahlen a, b, c in der Darstellung (a, b, c), wobei sie diese drei Zahlen so angeordnet haben, dass $a \geq b \geq c$ gilt. Sie bezeichnen zwei Würfe genau dann als voneinander „verschieden“, wenn bei dieser Schreibweise mindestens ein Unterschied zwischen den beiden Darstellungen auftritt.

(1) Welches ist die kleinste Summe und welches ist die größte Summe der drei Augenzahlen, die bei einem Wurf auftreten kann?
(2) Beim Spiel fragt Peter: „Wie viel verschiedene Würfe gibt es insgesamt, bei denen als Summe der Augenzahlen der Wert 12 auftritt?“ Beantworte diese Frage!
(3) Klaus überlegt: „Wie viel verschiedene Würfe gibt es insgesamt, bei denen wenigstens einer der Würfel die Augenzahl 6 aufweist?“ Ermittle auch diese Anzahl!
(4) Nach genau 50 Würfen beenden die beiden Schüler ihr Würfelspiel. Sie fragen sich, ob dabei alle möglichen verschiedenen Würfe vorgekommen sein können. Beantworte diese Frage und beweise deine Antwort!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(1) Die kleinste Summe der Augenzahlen wird mit dem Wurf (1, 1, 1) erreicht und beträgt somit 3, die größte

Summe tritt beim Wurf (6, 6, 6) auf und beträgt somit 18.

(2) Es gibt genau die folgenden sechs verschiedenen Würfe, bei denen als Summe der Augenzahlen der Wert 12 auftritt: $(6,5,1),(5,5,2),(4,4,4),(6,4,2),(5,4,3),(6,3,3)$.

(3) Es gibt genau die folgenden verschiedenen Würfe, bei denen wenigstens einer der Würfel die Augenzahl 6 aufweist:

$(6,6,6)$, $(6,6,5)$, $(6,5,5)$, $(6,6,4)$, $(6,5,4)$, $(6,4,4)$, $(6,6,3)$, $(6,5,3)$, $(6,4,3)$, $(6,3,3)$, $(6,6,2)$, $(6,5,2)$, $(6,4,2)$, $(6,3,2)$, $(6,2,2)$, $(6,6,1)$, $(6,5,1)$, $(6,4,1)$, $(6,3,1)$, $(6,2,1)$, $(6,1,1)$

Ihre Anzahl beträgt $6+5+4+3+2+1=21$.

(4) In entsprechender Weise gibt es genau die folgenden $5+4+3+2+1=15$ verschiedenen Würfe mit 5 als höchster Augenzahl

$(5,5,5)$, $(5,5,4)$, $(5,4,4)$,..., $(5,5,1)$, $(5,4,1)$, ..., $(5,1,1)$;

analog genau $4+3+2+1=10$ verschiedene Würfe mit 4 als höchster Augenzahl und $3+2+1=6$ verschiedene Würfe mit 3 als höchster Augenzahl.

Wegen $21+15+10+6>50$ sind dies bereits mehr als 50 verschiedene Würfe. Also können in 50 Würfen nicht alle möglichen verschiedenen Würfe vorgekommen sein.

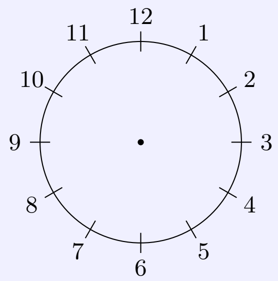
Aufgabe 250711:
In einer Tüte befindet sich 1 kg Zucker. Mit Hilfe einer Balkenwaage mit zwei Waagschalen (jede ausreichend groß für 1 kg losen Zucker) und genau einem 50 g-Wägestück sollen 300 g Zucker abgewogen werden.
Zeige, dass das mit nur drei Wägungen möglich ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Man halbiert zunächst ohne Wägestück das Kilogramm Zucker und erhält zweimal 500 g. Auf die gleiche Art halbiert man die 500 g Zucker und erhält zweimal 250 g. Mit Hilfe des 50 g-Wägestückes ermittelt man 50 g Zucker und gibt sie zu den 250 g dazu. Somit hat man 300 g Zucker.

Anderer Lösungsweg:
Mit dem 50 g-Wägestück ermittelt man 50 g Zucker. Mit diesen 50 g und dem 50 g-Wägestück ermittelt man (aus dem restlichen Zucker) in einer zweiten Wägung 100 g Zucker, der mit den 50 g Zucker zusammen 150 g Zucker ergibt.
Mit diesen 150 g Zucker ermittelt man nochmals 150 g Zucker, so dass die Inhalte der zwei Waagschalen zusammen 300 g Zucker ergeben.

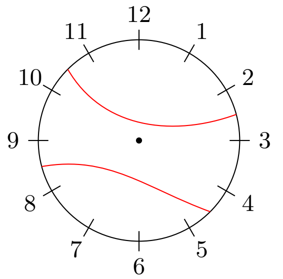
Aufgabe 270711:

Klaus ließ versehentlich seinen Wecker zu Boden fallen. Dabei zersprang das Zifferblatt in drei Flächenstücke.
Nachdem der erste Schreck über das Missgeschick vorüber war, bemerkte Klaus, dass keine der 12 Zahlen beim Zerspringen des Zifferblattes auseinandergerissen worden war. Er berechnete für jedes der drei Flächenstücke die Summe derjenigen Zahlen, die auf diesem Flächenstück standen.
Dabei stellte er fest, dass sich in allen drei Fällen dieselbe Summe ergab.



Wie könnte das Zifferblatt zersprungen sein?
Gib eine Möglichkeit hierfür an und überprüfe, dass die von Klaus gemachte Feststellung für deine Angabe zutrifft!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Das Zifferblatt könnte so zersprungen sein, wie die Abbildung zeigt. Dies überprüft man, indem man bestätigt, dass

$$11 + 12 + 1 + 2 = 3 + 4 + 9 + 10 = 5 + 6 + 7 + 8 = 26$$

gilt.

Aufgabe 270713:
In einen Dreieck seien die Maßzahlen der in Zentimeter gemessenen Längen aller Seiten ganzzahlig, gerade und untereinander verschieden. Bekannt ist $a = 6$ cm und $b = 4$ cm.
Untersuche, ob aus diesen Angaben der Umfang des Dreiecks eindeutig ermittelt werden kann! Ist dies der Fall, dann gib den Umfang an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
In jedem Dreieck gilt: Eine Seite ist stets kleiner als die Summe und stets größer als die Differenz der beiden anderen Seiten.
Folglich gilt laut Aufgabe 2 cm $< c <$ 10 cm, wobei c die Länge der dritten Seite des betrachteten Dreiecks ist.
Da nach Voraussetzung die Maßzahl von c gerade und von 4 und 6 verschieden ist, erfüllt nur $c = 8$ cm alle Bedingungen.
Der Umfang u des Dreiecks lässt sich somit eindeutig ermitteln, und es gilt: $u = 6 + 4 + 8 = 18$ cm.

Aufgabe 280711:
Ein Spiel für zwei Mitspieler hat folgende Regel:
Einer der beiden nennt eine beliebige einstellige Zahl. Der andere nennt eine größere natürliche Zahl, die jedoch höchstens um 10 größer sein darf als die vorhergenannte. So wechselt man ab.
Gewonnen hat derjenige, der unter Beachtung der Spielregeln die Zahl 100 nennen kann.

a) Gibt es für den beginnenden Spieler eine Möglichkeit, das Spiel in jedem Fall zu gewinnen?
b) Gibt es aber auch einen Spielbeginn, der anschließend dem zweiten Spieler eine Möglichkeit gibt, das Spiel in jedem Fall zu gewinnen?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Für den beginnenden Spieler gibt es eine Möglichkeit, das Spiel in jedem Fall zu gewinnen. Man kann dies folgendermaßen zeigen:

Der Spieler kann den Gewinn erzwingen, wenn sich (im Verlauf des Spiels) herausstellt:
Der Spieler kann erreichen, dass sein Gegenspieler eine der Zahlen 90, 91, ..., 99 nennen muss. (1)
Von jeder dieser Zahlen aus ist nämlich die Zahl 100 im nächsten Schritt erreichbar. Wenn nun der Spieler selbst die Zahl 89 nennen kann, so trifft für ihn (1) zu, und er kann den Gewinn erzwingen. Diese Zahl 89 ist um 11 kleiner als 100. Verkleinert man sie nochmals um 11 und wendet entsprechende Überlegungen an, so folgt:
Wenn der Spieler selbst die Zahl 78 nennen kann, so muss sein Gegenspieler eine der Zahlen 79, 80, ..., 88 nennen. Damit hat wiederum der Spieler in jedem Fall die Möglichkeit, 89 zu nennen und kann den Gewinn erzwingen.

Weitere Zahlen, deren Erreichen die Möglichkeit ergibt, den Gewinn zu erzwingen, sind entsprechend durch Subtraktion von 11 zu erhalten. Sie lauten 67, 56, 45, 34, 23, 12 und 1.
Damit ist gezeigt:
Der beginnende Spieler kann das Spiel dadurch in jedem Fall gewinnen, dass er der Reihe nach (stets, wenn er am Spiel ist) die Zahlen 1, 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89 und dann 100 nennt. (2)

b) Es gibt auch einen Spielbeginn, der anschließend dem zweiten Spieler eine Möglichkeit gibt, das Spiel in jedem Fall zu gewinnen.
Ein solcher Spielbeginn liegt vor, wenn der beginnende Spieler als erste Zahl eine der Zahlen 2, 3, ... 9 nennt. Dann nämlich hat der zweite Spieler die Möglichkeit, die Zahl 12 zu nennen, und von da ab kann er der Reihe nach (stets, wenn er am Spiel ist) die weiteren in (2) angeführten Zahlen nennen.

Wie in a) gezeigt ist, erzwingt er damit den Gewinn.

Aufgabe 290712:
Thomas, Uwe und Volker belegten bei einer Mathematikolympiade die ersten drei Plätze, jeder von ihnen einen anderen Platz als die beiden anderen. Über diese Platzierung wurden nun die folgenden drei Aussagen gemacht:

(1) Thomas wurde nicht Erster.
(2) Uwe wurde nicht Zweiter.
(3) Volker wurde Zweiter.

Von diesen drei Aussagen (1), (2), (3) ist genau eine wahr.
Untersuche, ob sich hieraus ermitteln lässt, wer von den drei Schülern den ersten, den zweiten und den dritten Platz belegte! Ist dies der Fall so gib die Platzierung an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wäre (3) die wahre Aussage, dann folgte, da (3) wahr und (2) falsch wäre, dass sowohl Volker als auch Uwe den zweiten Platz belegt hätten; im Widerspruch zum Aufgabentext.
Wäre (2) die wahre Aussage, dann folgte, da (2) wahr und (1), (3) falsch wären, dass keiner der drei Schüler den zweiten Platz belegt hätte; ebenfalls im Widerspruch zum Aufgabentext.
Somit kann nur (1) wahr sein. Da folglich (2) falsch ist, ergibt sich: Uwe wurde Zweiter. Hiernach und da (1) wahr ist, folgt: Thomas wurde Dritter, Volker wurde Erster.
Hiermit ist auch gezeigt, dass sich diese Platzierung aus den Bedingungen des Aufgabentextes ermitteln lässt.

Aufgabe 300711:
Während eines mathematischen Spielnachmittages wurden alle Mitspieler vom Spielleiter aufgefordert, in eine Hand eine gerade Anzahl und in die andere Hand eine ungerade Anzahl von Hölzchen zu nehmen.
Anschließend erhielt jeder Mitspieler die Aufgabe, die Anzahl der Hölzchen in seiner rechten Hand mit 2 zu multiplizieren und das entstandene Produkt zur Anzahl der Hölzchen in seiner Hand zu addieren.
Jedes Mal, wenn ein Spieler die so gebildete Summe dem Spielleiter mitteilte, war dieser in der Lage, zutreffend zu sagen, ob der Mitspieler eine gerade Anzahl von Hölzchen in seiner rechten oder in seiner linken Hand hatte.
Wie war das möglich?

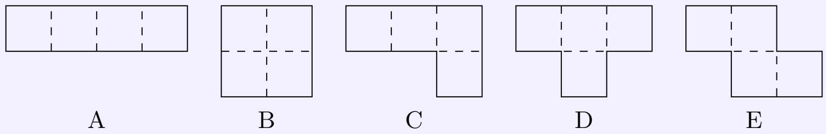
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Der Spielleiter kann folgendermaßen überlegen:
Angenommen, ein Mitspieler hat in seiner rechten Hand eine ungerade Anzahl von Hölzchen. Nach dem Verdoppeln erhält er eine gerade Zahl als Produkt, zu dem die gerade Anzahl der Hölzchen in seiner linken Hand addiert werden muss. Folglich ist die Summe eine gerade Zahl.
Befindet sich in der rechten Band des Mitspielers dagegen eine gerade Anzahl von Hölzchen, so ist das Doppelte davon ebenfalls eine gerade Zahl. Nach Addition mit der ungeraden Anzahl der Hölzchen der linken Hand ergibt sich eine ungerade Zahl als Summe.
Kennt der Mitspieler also eine gerade Zahl als Summe, so hat er die gerade Anzahl von Hölzchen in seiner linken Hand. Nennt er eine ungerade Zahl als Summe, so hat er die gerade Anzahl von Hölzchen in seiner rechten Hand.

Aufgabe 320711:
Karsten, Lutz, Mike und Norbert sammelten Pilze. Anschließend vergleichen sie ihre Sammelergebnisse und stellen fest:

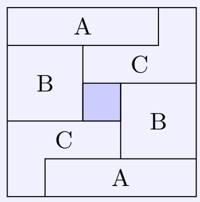
(1) Norbert sammelte mehr als Mike.
(2) Karsten und Lutz sammelten zusammen ebenso viel wie Mike und Lutz zusammen.
(3) Karsten und Norbert sammelten zusammen weniger als Lutz und Mike zusammen.
Untersuche, ob aus diesen Angaben
a) genau einer der vier Jungen als Sammler der meisten Pilze,
b) genau einer der vier Jungen als Sammler der wenigsten Pilze
hervorgeht! Gib jeweils, wenn das der Fall ist, den Namen des betreffenden Jungen an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Für die Sammelergebnisse K, L, M, N von Karsten, Lutz, Mike bzw. Norbert folgt aus den Angaben: Nach (1) gilt $N > M$. (4)
Nach (2) gilt $K + L = M + L$, also $K = M$. (5) Nach (3) gilt $K + N < L + M$; hieraus und aus (5) folgt $N < L$. (6)
Mit (6), (4), (5), also $L > N > M = K$, ist gezeigt:
a) Aus den Angaben geht genau Lutz als Sammler der meisten Pilze hervor.
b) Aus den Angaben geht nicht genau einer der vier Jungen als Sammler der wenigsten Pilze hervor (sondern jeder der beiden Jungen Mike und Karsten).

Aufgabe 330714:
Ein Legespiel besteht aus je vier Legesteinen der in der ersten Abbildung gezeigten Formen A, B, C, D und E. Jeder dieser 20 Legesteine ist aus vier Quadraten der Seitenlänge 1 cm zusammengesetzt.



a) Die Fläche eines Quadrates der Seitenlänge 4 cm soll durch Legesteine einer einheitlichen Form vollständig bedeckt werden, ohne dass Legesteine sich dabei ganz oder teilweise überlappen oder über das Quadrat hinausragen.
Untersuche, mit welchen der Formen A, B, C, D, E dies möglich ist, und mit welchen dieser Formen es sogar verschiedene Möglichkeiten gibt!

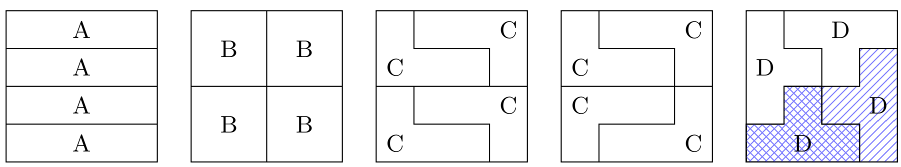


b) In der Abbildung ist gezeigt, wie die Fläche eines Quadrates der Seitenlänge 5 cm mit herausgenommenem schraffiertem Mittelquadrat durch sechs Legesteine bedeckt werden kann. Dabei ist die zusätzliche Forderung erfüllt, dass drei verschiedene Sorten von Steinen verwendet werden, und zwar von jeder dieser Sorten genau zwei Steine.
Gib mindestens vier weitere Möglichkeiten an, diese Forderung zu erfüllen!

c) Die Fläche einen Rechtecks mit den Seitenlängen 8 cm und 4 cm soll durch acht Legesteine bedeckt werden. Dabei sollen vier verschiedene Sorten von Steinen verwendet werden, und zwar von jeder dieser Sorten genau zwei Steine.
Gib zwei Möglichkeiten an, die sich in den verwendeten Sorten unterscheiden!

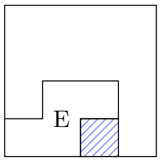
Hinweis: Zwei Bedeckungen gelten genau dann als verschieden, wenn es keine Spiegelung oder Drehung gibt, die sie ineinander überführt. Bei den Legesteinen wird nicht zwischen „Oberseite“ und „Unterseite“ unterschieden; jeder Stein darf also auch „gewendet“ werden.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Für die Formen A, B, C, D gibt es z. B. die in der Abbildung gezeigten Möglichkeiten:



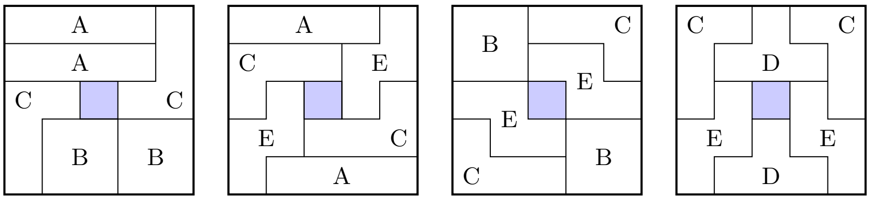
Für A gibt es (im Sinne des „Hinweises“) keine weitere Möglichkeit, da jeder Stein A bereits eine Länge von 4 cm einnimmt.
Für B gibt es ebenfalls keine weitere Möglichkeit, da jeder Stein B Länge und Breite von 2 cm hat, also die Steine nur zu zweien neben- und untereinander gelegt werden können.

Auch für D gibt es keine weitere Möglichkeit; denn an eine Ecke (z. B. links unten) des zu bedeckenden Quadrats kann ein Stein D (bis auf Drehung und Spiegelung) nur so gelegt werden, wie die doppelt schraffierte Fläche angibt; das fehlende Teilfeld rechts unten erfordert die Lage der einfach schraffierten Fläche, worauf für die beiden letzten Steine D ebenso ihre Lage folgt.

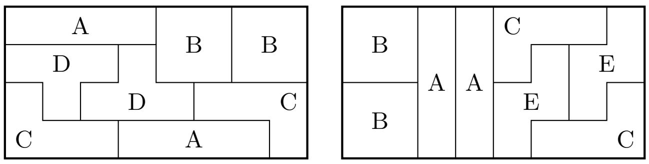


Für die Form E gibt es keine Möglichkeit; denn an eine Ecke könnte ein Stein E nur so gelegt werden, wie die obere Abbildung zeigt, und bei jeder Möglichkeit, das schraffierte Feld mit einem weiteren Stein E zu bedecken (ohne den vorigen zu überlappen), würde dieser über das Quadrat hinausragen.

b) Die Abbildung zeigt vier Beispiele der geforderten Art.



c) Die Abbildung zeigt (mit A, B, C, D bzw. A, B, C, E als verwendeten Sorten) zwei Beispiele der geforderten Art. (Auch andere Anordnungen der Legesteine sind möglich.)



II. Runde 2

Aufgabe 020722:
Bei einem Preisschießen der GST gaben Günther und Heidrun je 5 Schuss ab. Auf den Scheiben wurden folgende Treffer ermittelt:

Einmal die 3, zweimal die 5, zweimal die 6, zweimal die 7, einmal die 8, einmal die 9, einmal die 10.

Günther erzielte mit seinen letzten vier Schüssen neunmal so viele Ringe wie mit seinem ersten Schuss. Heidrun dagegen erreichte mit ihren ersten vier Schüssen fünfmal so viele Ringe wie mit ihrem letzten Schuss; ihre beiden ersten Schüsse ergaben zusammen genau so viele Ringe wie ihre beiden letzten zusammen. Günther schoss die 9.
a) Wer gewann den Wettkampf?
b) Wer schoss die 10?
Die Antworten sind zu begründen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Im für ihn günstigsten Fall konnte Günther in den letzten vier Schüssen $10 + 9 + 8 + 7 = 34$ Ringe schießen.
Da seine letzten vier Schüsse aber zusammen durch neun teilbar sein müssen, kann er nur 27 Ringe erzielt haben und sein erster Schuss muss die 3 gewesen sein. Da er die 9 geschossen hat, hat er in den übrigen drei Schüssen insgesamt 18 erzielt. Also hat er zusammen 30 Ringe, die 10 ist nicht dabei.

Für Heidrun bleiben 36 von den insgesamt 66 geschossen Ringen übrig, sie hat also gewonnen.

Aufgabe 040722:
In einer 7. Klasse erhielt zum Abschluss des letzten Schuljahres im Fach Mathematik kein Schüler die Zensur „5“, jeder neunte Schüler erhielt die Zensur „1“, jeder dritte die Zensur „“ und jeder sechste die Zensur „4“. Über die Schülerzahl n ist bekannt: $20 < n < 40$.
Wie viel Schüler erhielten die Zensur „3“?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Anzahl n muss ein Vielfaches von 9, von 6 und von 3, d. h. ein Vielfaches von 18 sein. Wegen $20 < n < 40$ kommt nur $n = 36$ in Frage.

Zensur	1	2	3	4
Schüler	4	12	14	6

$x = 14$ Schüler haben die Zensur „3“.

Aufgabe 080721:
Ulrike geht einkaufen. Sie hat genau 9,27 M bei sich, darunter genau 12 Einpfennigstücke, und kauft im Konsum für insgesamt 2,36 M ein. Beim Bezahlen stellt sie fest, dass sie nicht passend bezahlen kann. Der kleinstmögliche ausreichende Betrag, den sie der Verkäuferin geben kann, beträgt 4 M.
Ermittle, was für Geldstücke oder Geldscheine und wie viel von jeder Sorte Ulrike nach diesen Angaben bei sich haben konnte!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wegen des Gesamtbetrages muss Ulrike wenigstens ein Fünfpfennigstück bei sich gehabt haben.
Da 4M der kleinstmögliche Betrag ist, kann Ulrike kein Einmarkstück, kein Fünfzigpfennigstück und auch nicht mehr als ein Zehnpfennigstück oder mehr als drei Fünfpfennigstücke besessen haben.
Andernfalls hätte sie entweder passend oder mit einem kleineren Betrag (z. B. 3 M; 2, 50 M; 2, 40 M) bezahlen können. Sie konnte daher nur folgende Geldstücke bzw. Geldscheine bei sich haben:
Entweder: 1 Fünfmarkschein, 2 Zweimarkstücke, 1 Zehnpfennigstück, 1 Fünfpfennigstück, 12 Einpfennigstücke
oder: 1 Fünfmarkschein, 2 Zweimarkstücke, 3 Fünfpfennigstücke, 12 Einpfennigstücke.

Aufgabe 100721:
In einem Ferienlager der Thälmann-Pioniere erwarben genau 70% aller Teilnehmer das Sportabzeichen und genau 30% aller Teilnehmer das Touristenabzeichen. Vorher besaß kein Teilnehmer eines dieser Abzeichen.
Bei den folgenden Aussagen (1) bis (4), die sich sämtlich auf dieses Lager beziehen, ist zu untersuchen, ob sie wahr sind oder falsch sind oder ob das allein aufgrund der gemachten Angaben nicht entschieden werden kann:

(1) Weniger als die Hälfte aller Pioniere, die das Sportabzeichen erwarben, erwarben auch das Touristenabzeichen.
(2) Alle Teilnehmer erwarben entweder das Sportabzeichen oder das Touristenabzeichen.
(3) Unter den Trägern des Sportabzeichens gibt es mehr solche, die auch das Touristenabzeichen erwarben, als solche, die dies nicht taten.
(4) Wenn sich die Anzahl der Pioniere, die das Sportabzeichen erwarben, um 10% erhöhen würde, so gäbe es mehr Träger des Sportabzeichens als Träger des Touristenabzeichens.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Aussage (1) ist wahr, weil höchstens 30% aller Teilnehmer beide Abzeichen erworben haben konnten und 30% weniger als die Hälfte von 70% sind.
Bei Aussage (2) kann allein mit den vorliegenden Angaben nicht entschieden werden, ob sie wahr oder falsch ist. Sie ist genau dann wahr, wenn jeder Teilnehmer genau ein Abzeichen erworben hat.
Aussage (3) ist falsch, weil höchstens 30% aller Teilnehmer beide Abzeichen erworben haben konnten, also mindestens 40% aller Teilnehmer nur das Sportabzeichen erhielten.
Aussage (4) ist wahr, weil es (bereits vor, also erst recht) nach einer Erhöhung der Anzahl der Sportabzeichenträger von diesen mehr gibt als Träger des Touristenabzeichens.

Aufgabe 110722:
Andreas, Birgit und Claudia trugen untereinander ein kleines Schachturnier aus. Folgendes ist hierüber bekannt:

(1) Jeder spielte gegen jeden die gleiche Anzahl von Partien.
(2) Keine Partie endete unentschieden (remis).
(3) Andreas gewann genau $\frac{2}{3}$ seiner Spiele.
(4) Birgit gewann genau $\frac{3}{4}4$ ihrer Spiele.
(5) Claudia gewann genau ein Spiel.

Ermittle die Anzahl aller Spiele, die in dem Turnier insgesamt ausgetragen wurden!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(6) Da es genau 3 Möglichkeiten gibt, aus den drei Spielern ein Paar von gegeneinander Spielenden auszuwählen, so ist nach (1) die Anzahl aller Spiele das Dreifache derjenigen Partiezahl, die jeweils ein solches Paar gegeneinander austrug.

(7) Das Doppelte dieser Partienzahl und somit $\frac{2}{3}$ aller Spiele des Turniers beträgt daher die Anzahl derjenigen Spiele, an denen jeweils einer der Spieler überhaupt teilnahm, d. h., jeder der 3 Spieler nahm an genau $\frac{2}{3}$ aller Spiele teil.

Wegen (3) und (7) gewann infolgedessen Andreas genau $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$ aller Spiele und wegen (4) und (7) Birgit genau $\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$ aller Spiele.
Somit gewannen Andreas und Birgit zusammen wegen genau $\frac{17}{18}$ aller Spiele. Daher und weil wegen (2) jedes Spiel von genau einem Spieler gewonnen sein musste, gewann Claudia genau $\frac{1}{18}$ aller Spiele.
Da dies andererseits nach (5) genau ein Spiel war, wurden folglich genau 18 Spiele bei diesem Turnier ausgetragen.

Aufgabe 130721:
Die 36 Schüler einer 7. Klasse nehmen am außerunterrichtlichen Sport teil, und zwar jeder in genau einer der Sektionen Leichtathletik, Tischtennis, Schwimmen, Judo und Schach. Über die Teilnahme der Schüler dieser Klasse an diesen Sektionen ist weiter bekannt:

(1) Mehr als die Hälfte betreibt Leichtathletik.
(2) Es gehören mehr der Sektion Schwimmen als der Sektion Tischtennis an.
(3) Die Summe aus der Anzahl der Mitglieder der Sektion Schach und der Sektion Judo beträgt genau ein Neuntel aller Schüler.
(4) In der Sektion Tischtennis befinden sich doppelt so viele Schüler wie in der Sektion Schach.
(5) Die Anzahl der Sektionsmitglieder Schach ist größer als das Doppelte, jedoch kleiner als das Vierfache der Anzahl der Sektionsmitglieder Judo.

Ermittle für jede der genannten Sektionen die Anzahl der Schüler der erwähnten Klasse, die Mitglieder dieser Sektion sind!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Aus (3) folgt, dass die Summe aus der Anzahl der Schachspieler und der Anzahl der Judosportler 4 beträgt. Von allen möglichen Zerlegungen der Zahl 4 in zwei ganzzahlige Summanden erfüllt nur diejenige (5), nach der die Anzahl der Schachspieler 3 und die der Judosportler 1 ist. Daraus folgt nach (4), dass genau 6 Schüler Mitglied der Sektion Tischtennis sind.

Nach (1) betreiben mindestens 19 Schüler Leichtathletik und nach (2) mindestens 7 Schüler Schwimmen. Da für diese beiden Sportarten nur noch genau 26 Schüler in Betracht kommen, sind 19 und 7 die einzig möglichen Anzahlen.

Von den 36 Schülern betreiben mithin genau 19 Leichtathletik, genau 7 Schwimmen, genau 6 Tischtennis, genau 3 Schach, und genau 1 Schüler betreibt Judo.

Aufgabe 140721:
Drei Schülerinnen mit den Vornamen Angelika, Beate und Christine und den Zunamen Müller, Naumann und Richter beteiligten sich am alpha-Wettbewerb. Folgendes ist über sie bekannt:

(1) Die Schülerin Naumann nahm zum ersten Mal teil.
(2) Die Schülerin Richter erhielt eine schlechtere Bewertung als mindestens eine der anderen Schülerinnen.
(3) Die Schülerin Müller benutzte nur liniertes Papier.
(4) Angelika erzielte das schlechteste Ergebnis.
(5) Beate hatte bereits im Vorjahr das alpha-Abzeichen erhalten.
(6) Die erfolgreichste der drei Schülerinnen verwendete nur unliniertes Papier.

Ermittle den Vor- und Zunamen der erfolgreichsten der drei Schülerinnen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Aus (6), (3) und (2) folgt, dass weder die Schülerin Müller noch die Schülerin Richter am besten abschnitt. Folglich lautet der Zuname der erfolgreichsten Schülerin Naumann. Wegen (4) lautet ihr Vorname nicht Angelika und wegen (1) sowie (5) auch nicht Beate. Folglich heißt sie Christine.
Die erfolgreichste der drei Schülerinnen heißt Christine Naumann.

Aufgabe 170721:
Anja hatte zum Geburtstag ihre beiden Freundinnen Cathrin und Eva eingeladen, mit denen sie nicht verwandt ist. Außerdem waren die Jungen Bernd, Dirk, Frank und Gerold eingeladen, von denen jeder ein Bruder eines der drei Mädchen ist.
Nachdem diese sieben Personen an einem runden Tisch in der alphabetischen Reihenfolge ihrer Vornamen Platz genommen hatten, stellte man fest:

(1) Keiner der Jungen saß neben seiner Schwester.
(2) Frank und Gerold sind Zwillinge.

Untersuche, ob aus den vorstehenden Aussagen die Namen der anwesenden Brüder jedes der drei Mädchen zu ermitteln sind; ist das der Fall, so sind diese Namen anzugeben!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Bernd saß neben Anja und Cathrin. Daher kann er wegen (1) nur Evas Bruder sein.
Dirk saß zwischen Cathrin und Eva, kann also ebenfalls wegen (1) nur Anjas Bruder sein.
Wegen (1) und (2) können Frank und Gerold weder Anjas noch Evas Brüder sein. Sie sind mithin Cathrins Brüder.

Aufgabe 180721:
An einer Schule unterrichteten die drei Lehrer Schulze, Ufer und Krause in den Fächern Deutsch, Russisch, Geschichte, Mathematik, Physik und Biologie. Es sei folgendes bekannt:

(1) Jeder dieser drei Lehrer unterrichtet in genau zwei dieser sechs Fächer, und jedes dieser sechs Fächer wird von genau einem dieser drei Lehrer unterrichtet.
(2) Sowohl der Lehrer für Biologie als auch der Lehrer für Physik sind älter als Herr Schulze.
(3) In ihrer Freizeit spielen der Lehrer für Russisch, der Lehrer für Mathematik und Herr Schulze gern Skat. Dabei gewinnt Herr Krause öfter als der Lehrer für Biologie und der Lehrer für Russisch.

Weise nach, dass man aus diesen Angaben die Verteilung der drei Lehrer auf die Fächer eindeutig ermitteln kann, und gib diese Verteilung an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wir bezeichnen die Namen der Lehrer abkürzend mit S, U bzw. K, die der Fächer mit d, r, g, m, p bzw. b. Dabei bedeute $S = d$, dass Schulze das Fach Deutsch unterrichtet; $S \neq b$ bedeute, dass Schulze nicht im Fach Biologie

unterrichtet; usw.

Aus (1) und (2) folgt $S \neq b$ und $S \neq p$; aus dem ersten Teil von (3) folgt analog $S \neq r$ und $S \neq m$. Wegen (1) muss daher $S = d$ und $S = g$ gelten.
Ebenfalls wegen (1) gilt $K \neq d$ und $K \neq g$, und da aus dem zweiten Teil von (3) die Beziehungen $K \neq b$ und $K \neq r$ folgen, gilt wegen (1) mithin $K = m$ und $K = p$.
Ebenfalls wegen (1) folgt schließlich $U = r$ und $U = b$. Damit ist gezeigt, dass auf Grund der Angaben nur folgende Verteilung möglich ist:

Herr Schulze unterrichtet Deutsch und Geschichte,
Herr Ufer unterrichtet Russisch und Biologie,
Herr Krause unterrichtet Mathematik und Physik.

Aufgabe 190721:
Dieter, Hans, Klaus und Peter sowie ihre Ehefrauen Erika, Gabi, Rita und Simone tauschen Erinnerungen aus. Ein Zuhörer entnimmt der Unterhaltung folgendes:

(1) Simone und ihr Mann sowie außer ihnen Erika und Hans waren zur Hochzeit von Dieter eingeladen.
(2) Auf der Hochzeit von Hans waren Gabi und Erika zu Gast.
(3) Zu den Hochzeitsgästen von Peter gehörten Klaus und Simone.

Untersuche, ob für jeden der vier Männer der Name seiner Ehefrau allein aus den Aussagen (1) bis (3) eindeutig zu ermitteln ist; wenn dies der Fall ist, so gib die Namen der Ehepaare an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wegen (2) ist Hans weder mit Gabi noch mit Erika verheiratet, wegen (1) auch nicht mit Simone. Folglich gilt: (4) Hans ist mit Rita verheiratet.

Wegen (1) ist Dieter weder mit Erika noch mit Simone verheiratet, wegen (4) auch nicht mit Rita. Daher gilt: (5) Dieter ist mit Gabi verheiratet.

Wegen (3) ist Peter nicht mit Simone, wegen (4) nicht mit Rita und wegen (5) auch nicht mit Gabi verheiratet. Also gilt: (6) Peter ist mit Erika verheiratet.

Aus (4), (5), (6) folgt schließlich: (7) Klaus ist mit Simone verheiratet.

Damit ist gezeigt, dass für jeden der vier Männer der Name seiner Ehefrau eindeutig ermittelt werden kann. Die Ehepaare sind somit in (4), (5), (6) und (7) angegeben.

Aufgabe 200721:
Auf einer internationalen Mathematikerversammlung werden Vorträge in russischer, englischer, deutscher, französischer und ungarischer Sprache gehalten. Ferner wissen wir:

(1) Diejenigen Tagungsteilnehmer, die sowohl die russische als auch die französische Sprache verstehen, verstehen außerdem auch alle Englisch.
(2) Diejenigen Teilnehmer, die Ungarisch verstehen, verstehen auch Französisch und Deutsch.

Untersuche, ob diejenigen Tagungsteilnehmer, die sowohl Ungarisch als auch Russisch verstehen, zum Verstehen einer der Vortragssprachen einen Dolmetscher brauchen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die genannten Teilnehmer verstehen nach (2), da sie Ungarisch verstehen, auch die französische Sprache. Daher, und weil sie Russisch verstehen, gehören sie zu den in (1) genannten Teilnehmern; sie verstehen also Englisch.
Aus (2) folgt ferner, dass sie auch Deutsch verstehen. Also brauchen sie für keine der fünf Sprachen einen Dolmetscher.

Aufgabe 240721:
Drei Ehepaare sitzen zum Romméspiel im Kreis um einen Tisch. Die Vornamen der Männer sind Anton, Bernd und Christian, die Vornamen der Frauen sind Ulrike, Vera und Waltraud. Ferner ist bekannt:

(1) Keiner der sechs Teilnehmer sitzt seinem Ehepartner gegenüber.
(2) Vera sitzt zwischen zwei Männern.
(3) Anton sitzt neben seiner Frau.
(4) Rechts von Ulrikes Mann sitzt Waltraud, links von ihm sitzt Christian.

Beweise, dass man aus diesen Angaben sowohl von jedem Teilnehmer den Ehepartner als auch die Sitzordnung eindeutig ermitteln kann, und gib beides an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

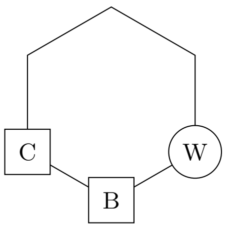


Abbildung a

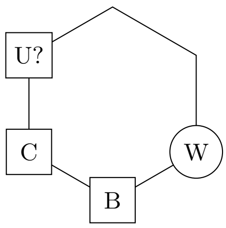


Abbildung b

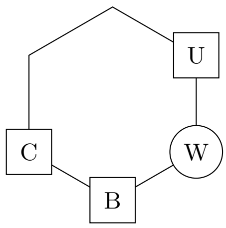


Abbildung c

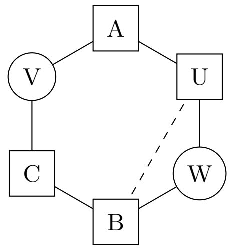


Abbildung c

Nach (4) ist Ulrikes Mann nicht Christian. Aus (4) folgt auch, dass Ulrikes Mann nicht neben seiner Frau sitzt; er ist wegen (3) also auch nicht Anton. Daher gilt: Ulrikes Mann ist Bernd, (*) und man erhält Abbildung a.

Hiernach kann Ulrike wegen (1) nur entweder links von Christian oder rechts von Waltraud sitzen. Säße sie links von Christian (Abbildung b), so blieben für Vera nur solche Plätze übrig, die jeweils einer Frau benachbart wären, im Widerspruch zu (2). Also sitzt Ulrike rechts von Waltraud (Abbildung c).

Nach (2) müssen dann die Plätze von Anton und Vera so angeordnet sein, wie in Abbildung d angegeben. Wegen (*) ist Antons Frau nicht Ulrike; daher folgt aus Abbildung d und (3): Antons Frau ist Vera, (**) und es verbleibt als drittes Ehepaar: Christians Frau ist Waltraud. (***)

Damit ist bewiesen, dass man die Ehepartner und die Sitzordnung eindeutig ermitteln kann. Sie lauten wie in (*), (**), (***) bzw. Abbildung d angegeben.

Aufgabe 250721:
Annett, Birgit und Cornelia haben in der letzten Klassenarbeit unterschiedliche Leistungen gezeigt; denn eine dieser Schülerinnen erhielt die Note 1, eine andere die Note 2 und die dritte die Note 3.
Kerstin, eine Klassenkameradin, erzählt zu Hause: „Annett hat keine 1, Birgit keine 2, aber Cornelia hat eine 2.“
Es stellt sich jedoch heraus, dass sich Kerstin bei genau zwei dieser drei Aussagen geirrt hatte.
Kann man aus diesen Angaben die Noten der einzelnen Schülerinnen eindeutig ermitteln? Ist dies der Fall, so gib die Notenverteilung an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wäre Kerstins erste und zweite Aussage falsch und die dritte wahr, hätten Birgit und Cornelia eine 2, was der Voraussetzung widerspricht, dass die drei Schülerinnen unterschiedliche Noten haben.
Wäre Kerstins erste und dritte Aussage falsch und die zweite wahr, dann hätte Annett eine 1, Birgit und Cornelia keine 2, was der Voraussetzung widerspricht, dass die Note 2 erteilt wurde.
Damit bleibt nur noch die Möglichkeit: Kerstins zweite und dritte Aussagen sind falsch, und die erste Aussage ist wahr.
Das führt auf die Notenverteilung: Birgit 2, Annett (daher keine 2 und auch) keine 1, also Annett 3; und folglich Cornelia 1. Damit sind die Noten eindeutig ermittelt.

Aufgabe 270722:
Angela, Bodo, Constanze und Dietmar sprechen über den Ausgang zweier Fußballspiele der Klasse 7a gegen die Klasse 7b. Zu beiden Spielen machen sie dieselben Aussagen, nämlich:

Angela: Das Spiel endete unentschieden.
Bodo: Die Klasse 7a gewann.
Constanze: Bodos Aussage ist falsch.
Dietmar: Angelas Aussage ist wahr.

(a) Petra, die das erste Spiel gesehen hat, stellt wahrheitsgemäß fest, dass für das erste Spiel genau eine der vier Aussagen falsch ist.
(b) Rolf, der das zweite Spiel gesehen hat, stellt wahrheitsgemäß fest, dass für das zweite Spiel genau eine der vier Aussagen wahr ist.
Untersuche, ob sich (a) aus Petras Feststellung, (b) aus Rolfs Feststellung der Ausgang des betreffenden Spiels (Sieg der 7a, Sieg der 7b oder Unentschieden) eindeutig ermitteln lässt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(a) Wäre Dietmars Aussage falsch, dann wäre auch Angelas Aussage falsch. Da nach Petras Feststellung aber nur genau eine Aussage falsch ist, folgt eindeutig, dass Dietmars und damit auch Angelas Aussage wahr ist.
Daraus folgt eindeutig: Das erste Spiel endete unentschieden.

(b) Wenn Klasse 7a das zweite Spiel gewann, so ist Bodos Aussage wahr und folglich Constanzes Aussage falsch; ferner ist dann Angelas und daher auch Dietmars Aussage falsch.
Wenn Klasse 7b das zweite Spiel gewann, ist Bodos Aussage falsch und folglich Constanzes Aussage wahr; ferner ist dann Angelas und daher auch Dietmars Aussage falsch.
Da es somit zwei verschiedene Ausgänge des zweiten Spiels gibt, bei denen Rolfs Feststellung zutrifft, lässt sich aus dieser Feststellung der Ausgang des zweiten Spiels nicht eindeutig ermitteln.

Aufgabe 270723:
Die Maßzahlen zweier Seitenlängen eines Dreiecks seien $a = 12$ und $b = 8$.
Ermittle alle diejenigen Zahlen, die als Maßzahl c der dritten Dreiecksseite so vorkommen können, dass die Maßzahl des Umfangs eine Primzahl ist. Alle drei Seitenlängen sollen dabei in derselben Maßeinheit, etwa in Zentimetern, gemessen sein.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Eine Zahl ist genau dann als Maßzahl c der dritten Dreiecksseite möglich, wenn sie $c < a + b$ und $c > a - b$, d. h. $4 < c < 20$ erfüllt.
Für den Umfang $u = a + b + c = 20 + c$ (1) ist dies gleichbedeutend mit $24 < u < 40$.
Das ist genau dann eine Primzahl, wenn u eine der Zahlen 29, 31, 37 ist, und dies wegen (1) genau dann, wenn c eine der Zahlen $9, 11, 17$ ist.

Aufgabe 300721:
Über die Schüler einer Schulklasse werden folgende Aussagen gemacht:

(1) Genau 10 Schüler gehören einer Arbeitsgemeinschaft an.
(2) Genau 8 Schüler gehören einer Sportgemeinschaft an.
(3) Genau 5 Schüler gehören weder einer Arbeitsgemeinschaft noch einer Sportgemeinschaft an.
Gib eine
a) möglichst kleine,
b) möglichst große
Schülerzahl der Schulklasse an, bei der die drei Aussagen wahr sein können! Begründe deine Angaben!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Um eine möglichst kleine Anzahl zu erhalten, wählt man die Möglichkeit, dass auf möglichst viele Schüler zwei der drei Aussagen zutreffen.
Das bedeutet: Genau 8 Schüler gehören sowohl einer Arbeitsgemeinschaft als auch einer Sportgemeinschaft an.

Dann folgt: Genau 2 Schüler gehören einer Arbeitsgemeinschaft, aber nicht einer Sportgemeinschaft an. Zusammen mit den in (3) genannten 5 Schülern ergibt das $8 + 2 + 5 = 15$ Schüler.

b) Um eine möglichst große Anzahl zu erhalten, wählt man die Möglichkeit, dass auf (möglichst wenige, also) keinen der Schüler zwei der drei Aussagen zutreffen. Das ergibt mit den in (1), (2) und (3) genannten Schülern insgesamt $10 + 8 + 5 = 23$ Schüler.

Aufgabe 310721:
Matthias, Thomas, Frank und Sven haben im Hof bei den Wohnhäusern Fußball gespielt. Eine Fensterscheibe ging zu Bruch; genau einer der vier Jungen hat sie mit seinem missglückten Torschuss zerschlagen. Sie machen nun folgende Aussagen:

Matthias: Es war Thomas oder Frank, der die Scheibe zerschlug.
Thomas: Ich war es nicht.
Frank: Ich auch nicht.
Sven: Frank hat es getan.

Rolf, der alles beobachtet hat, stellt fest, dass mindestens drei dieser vier Aussagen wahr sind.
Untersuche, ob durch Rolfs Feststellung, wenn sie wahr ist, eindeutig bestimmt ist, wer die Scheibe zerschlug! Wenn das der Fall ist, ermittle diesen Täter!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
In der folgenden Tabelle wird für jede der vier Möglichkeiten des Täters angegeben, welche der vier Aussagen wahr (w) und welche falsch (f) sind:

Täter	Matthias	Thomas	Frank	Sven
Matthias	f	w	w	f
Thomas	w	f	w	f
Frank	w	w	f	w
Sven	f	w	w	f

Nur dann, wenn Frank der Täter war, sind mindestens drei der Aussagen wahr. Also ist durch diese Voraussetzung eindeutig bestimmt, dass nur Frank die Scheibe zerschlagen haben kann.

Aufgabe 330721:
An einer Schule gibt es für die Fächer Biologie, Mathematik, Geographie, Geschichte, Deutsch und Englisch drei Lehrer. Ihre Familiennamen sind Schröter, Berger und Müller. Jeder dieser drei Lehrer unterrichtet genau zwei der genannten Fächer, jedes dieser Fächer wird von genau einem Lehrer unterrichtet. Ferner wird über diese Lehrer erzählt:

(1) Zwei der Lehrer, nämlich Herr Berger und der Geschichtslehrer, sind miteinander verwandt.
(2) Drei der Lehrer, nämlich Herr Schröter, der Deutschlehrer und der Englischlehrer, treffen sich oft auf ihrem Weg zur Schule.
(3) Herr Schröter hat neulich den erkrankten Geschichtslehrer vertreten.
(4) Herr Schröter und der Mathematiklehrer sind Gartennachbarn voneinander.
(5) Herr Berger ist älter als der Deutschlehrer.

Untersuche, ob es eine Verteilung der Fächer auf die Lehrer gibt, bei der alle diese Aussagen zutreffen können, und ob die Verteilung der Fächer durch die Aussagen eindeutig bestimmt ist! Wenn das der Fall ist, gib diese Verteilung an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn die Aussagen zutreffen, so folgt:
Nach (2) ist Herr Schröter weder der Deutsch- noch der Englischlehrer, nach (3) auch nicht der Geschichtslehrer und nach (4) auch nicht der Mathematiklehrer. Da er zwei der sechs Fächer unterrichtet, verbleibt nur:

Herr Schröter unterrichtet Biologie und Geographie. (6)

Nach (1) ist Herr Berger nicht der Geschichtslehrer, nach (5) nicht der Deutschlehrer und nach (6) weder der Biologie- noch der Geographielehrer. Somit gilt:
Herr Berger unterrichtet Mathematik und Englisch. (7)
Schließlich verbleibt nach (6) und (7) nur: Herr Müller unterrichtet Deutsch und Geschichte. (8)

II. Bei der in (6), (7), (8) angegebenen Verteilung können die Aussagen (1) bis (5) zutreffen; denn bei dieser Verteilung ist Herr Berger weder der Geschichts- noch der Deutschlehrer (daher sind (1) und (5) möglich); und Herr Schröter ist keiner der Lehrer für Deutsch, Englisch, Geschichte oder Mathematik, außerdem sind der Deutsch- und der Englischlehrer voneinander verschieden (daher sind (2), (3) und (4) möglich).

Mit II. ist gezeigt, dass es eine Verteilung gibt, bei der die Aussagen (1) bis (5) zutreffen können, nach I. ist sie durch diese Aussagen eindeutig bestimmt. Sie lautet wie in (6), (7), (8) angegeben.

III. Runde 3

Aufgabe 040733:
Hans, Jürgen, Paul und Wolfgang haben bei einem 100-Meterlauf die ersten vier Plätze belegt. Auf die Frage, wer den ersten, zweiten, dritten bzw. vierten Platz belegte, erhalten wir folgende Antworten:
1. Paul erster, Jürgen zweiter;
2. Paul zweiter, Wolfgang dritter;
3. Hans zweiter, Wolfgang vierter.
In den drei Antworten war jeweils eine Angabe wahr und eine Angabe falsch.
Wer belegte den ersten, zweiten, dritten und vierten Platz?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Man betrachte zunächst die Aussagen 1 und 2. Es gibt nun 3 Möglichkeiten. Entweder ist Paul erster oder Paul ist zweiter oder Paul ist weder zweiter noch erster.

Möglichkeit 1: Paul ist weder erster noch zweiter.
Dann würde folgen, dass Jürgen zweiter und Wolfgang dritter ist. Jetzt kann aber keine der Aussagen bei 3. wahr sein, weil Hans nicht zweiter sein kann, weil das schon Jürgen ist und Wolfgang nicht vierter sein kann, weil er schon dritter ist, d. h. nicht möglich.

Möglichkeit 2: Paul ist zweiter.
Wäre Paul zweiter, so wäre die Aussage „Paul ist erster“ falsch, dann müsste aber die Aussage „Jürgen ist zweiter“ gelten. Das geht aber nicht, weil Paul schon zweiter, d. h. nicht möglich.

Möglichkeit 3: Paul ist erster.
Also ist die Aussage „Paul ist zweiter“ falsch. Daraus folgt, dass Wolfgang dritter ist. (Aussage 2) Also ist die Aussage
glqqWolfgang ist vierter“ falsch, also ist Hans zweiter. (Aussage 3) Jürgen bleibt übrig und ist demnach vierter.

Paul belegte den ersten Platz, Hans den zweiten, Wolfgang den dritten und Jürgen den vierten. Aufgrund des aufgezeigten Lösungsweges kann es auch keine andere Lösung geben.

Aufgabe 080734:
Ein Kultursaal wird bei der Erneuerung mit 21 Wandleuchten ausgestattet, deren jede für 4 Glühlampen vorgesehen ist. Die zunächst vorhandenen Glühlampen werden wahllos eingeschraubt. Danach stellt man fest, dass einige Wandleuchten mit allen 4 Glühlampen versehen sind, während doppelt so viele nur eine einzige enthalten. Ein Teil der Wandleuchten hat genau 3 Glühlampen, während bei halb so vielen noch sämtliche Glühlampen fehlen. In den restlichen Leuchten befinden sich genau 2 Glühlampen.
Es ist die genaue Anzahl der fehlenden Glühlampen zu ermitteln.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Man denke sich aus den Wandleuchten mit je 4 Glühlampen je 2 herausgeschraubt. Das ergibt genau so viel Glühlampen, wie es Leuchten mit je 1 Glühlampe gibt. Man könnte daher in jede dieser Leuchten je eine Glühlampe einschrauben.

Ebenso denke man sich aus den Leuchten mit 3 Glühlampen je 1 Glühlampe herausgeschraubt. Das sind genau doppelt so viele Glühlampen, wie es Leuchten ohne Glühlampen gibt. Man könnte daher in jede dieser Leuchten je 2 Glühlampen einschrauben. Dann hätte man insgesamt genau 21 Leuchten mit genau je 2 Glühlampen.
Man benötigt also noch genau 42 Glühlampen, um alle Leuchten voll auszustatten.

Aufgabe 100731:
Während der Friedensfahrt fuhr an 6 Thälmannpionieren eine Spitzengruppe von Radrennfahrern so vorbei, dass man eine Reihenfolge eindeutig feststellen konnte. Um diese Reihenfolge zu ermitteln, gab jeder der 6 Pioniere seine Beobachtungen wieder, wobei sämtliche Aussagen wahr sind:

(1) In der Spitzengruppe waren genau 8 Fahrer, darunter genau ein Belgier und genau zwei Polen.
(2) Von den Fahrern, die vor dem Belgier fuhren, waren mindestens zwei DDR-Fahrer.
(3) Von den Fahrern, die vor den beiden Polen fuhren, war mindestens einer ein sowjetischer Fahrer.
(4) Von den Fahrern, die hinter dem Belgier fuhren, war mindestens einer ein sowjetischer Fahrer.
(5) Zwei sowjetische Fahrer fuhren unmittelbar hintereinander.
(6) Am Anfang und am Schluss der Spitzengruppe fuhr jeweils ein DDR-Fahrer.

Ermittle die genaue Reihenfolge der Fahrer der Spitzengruppe!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die belgischen Fahrer, DDR-Fahrer, polnischen und sowjetischen Fahrer seien der Reihe nach mit B, D_1, D_2, ..., P_1, P_2, ..., S_1, S_2, ... bezeichnet.
Nach (5) waren mindestens zwei sowjetische Fahrer in der Spitzengruppe. Nach (2) fuhr mindestens ein DDR-Fahrer weder am Anfang noch am Ende, wegen (6) waren also mindestens drei DDR-Fahrer in der Spitzengruppe. Wegen (1) müssen diese Mindestzahlen, 2 sowjetische, 3 DDR-Fahrer, auch bereits die genauen Anzahlen der sowjetischen bzw. DDR-Fahrer sein.

Sind X, Y Bezeichnungen von Fahrern, so bedeute $X < Y$, dass X vor Y fuhr. Dann gilt (2) $D_1 < D_2 < B$, (3) $S_1 < P_1 < P_2$, (4) $B < S_2$.
Da genau ein Belgier in der Spitzengruppe fuhr, folgt aus (2) und (4)
(7) $D_1 < D_2 < B < S_2$.
Da genau zwei sowjetische Fahrer in der Spitzengruppe und nach (5) unmittelbar hintereinander fuhren, folgt daraus sowie aus (3) und (7)
(8) $D_1 < D_2 < B < S_1 < S_2 < P_1 < P_2$.
Aus (6) und (8) folgt
(9) $D_1 < D_2 < B < S_1 < S_2 < P_1 < P_2 < D_3$.
Damit sind bereits 8 Fahrer erfasst, also ist (9) die einzige Möglichkeit für die gesuchte Reihenfolge.

Aufgabe 110732:
In einer Klasse mit 28 Schülern beteiligen sich alle Schüler am außerunterrichtlichen Sport, und zwar jeder an mindestens einer der folgenden vier Sportarten: Fußball, Leichtathletik, Schwimmen und Turnen, in jeder dieser Sportarten mindestens 1 Schüler. Kein Schüler beteiligt sich an einer Sportart, die hier nicht aufgezählt ist.
Bekannt ist von den Schülern dieser Klasse:

(1) Jeder Schüler betreibt höchstens zwei Sportarten.
(2) Genau 18 Schüler beteiligen sich an genau einer Sportart.
(3) Von den Schülern, die Leichtathletik betreiben, nimmt genau die Hälfte auch noch am Turnen teil.
(4) Jeder Schwimmer betreibt zwei Sportarten, wobei alle anderen Sportarten in gleicher Anzahl vertreten sind.
(5) Die Anzahl der Schüler, die nur Turnen, ist gleich der Anzahl der Schüler, die nur Fußball spielen.
(6) Die Menge der Schüler, die sowohl turnen als auch Fußball spielen, ist leer.
(7) Die Anzahl der Schüler, die sowohl Turnen als auch Leichtathletik betreiben, ist gleich der Anzahl derjenigen unter den restlichen Schülern, die sich ebenfalls an zwei Sportarten beteiligen.

Ermittle die Anzahlen aller Schüler dieser Klasse, die sich an

a) Fußball b) Leichtathletik c) Schwimmen d) Turnen beteiligen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Zur Abkürzung bezeichnen wir die Schüler, die sich nur an einer Sportart beteiligen, mit F, L, S, T, und die Schüler, die sich an zwei Sportarten beteiligen, mit FL, FS, FT, LS, LT, ST, jeweils nach den Anfangsbuchstaben der Sportarten. Dann gilt:

(8) Wegen (2) betreiben genau 18 Schüler je genau eine Sportart.
(9) Wegen (1) und (8) und weil die Klasse 28 Schüler hat, betreiben genau 10 Schüler je genau zwei Sportarten.
(10) Wegen (9) und (7) gibt es genau 5 LT.
(11) Wegen (9), (10), (4) und da es laut Aufgabenstellung mindestens 1 Schwimmer gibt, gibt es genau 1 FS, 1 LS, 1 ST. Gäbe es nämlich je 2 davon, wäre wegen $5 + 6 = 11 > 10$ die mögliche Anzahl bereits überschritten.
(12) Wegen (9), (10), (11) und (6) gibt es genau 2 FL.
(13) Wegen (10) und (3) gibt es genau 10 Leichtathleten, also wegen (10), (11) und (12) genau 2 L.
(14) Wegen (8), (13), (4) und (5) gibt es genau 8 P und 8 T. Folglich gibt es in dieser Klasse genau 11 Fußballer (nämlich 8 F, 2 FL, 1 FS), 10 Leichtathleten (nämlich 2 L, 2 FL, 1 LS, 5 LT), 3 Schwimmer (nämlich 1 FS, 1 LS, 1 ST), 14 Turner (nämlich 8 T, 5 LT, 1 ST).

Aufgabe 120732:
Beweise, dass es unter 51 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, deren kleinste nicht kleiner als 1 und deren größte nicht größer als 100 ist, stets mindestens zwei Zahlen gibt, von denen die eine gleich dem Doppelten der anderen ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die kleinste der 51 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen sei j. Dann gilt $1 \leq j$, und die aufeinanderfolgenden Zahlen lauten (1) $j, j + 1, j + 2, ..., j + 49, j + 50$.
Nun gilt laut Aufgabe $j + 50 \leq 100$, also $1 \leq j \leq 50$. Folglich gehört $j + j = 2j$ auch zu den in (1) aufgezählten 51 aufeinanderfolgenden Zahlen.

Aufgabe 140731:
Fritz, Hans, Ulrich und Werner sind Schüler verschiedener Klassenstufen, und zwar der Klassen 5, 6, 7, 8. Sie gingen Pilze sammeln. Folgendes ist bekannt:

(1) Der Schüler der Klasse 5 und außer ihm noch Ulrich fanden je 8 Steinpilze; der Schüler der Klasse 7 fand keinen einzigen Steinpilz.
(2) Fritz, Hans und außer ihnen der Schüler der 6. Klasse fanden viele Rotkappen.
(3) Drei Schüler, nämlich der Schüler der Klasse 8, der Schüler der Klasse 7 und Hans, lachten über den vierten Schüler, nämlich Werner, der einen Fliegenpilz mitgebracht hatte.

Wer von den vier Schülern ist Schüler der Klasse 5, wer der 6, wer der 7 und wer der 8?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wegen (1) ist Ulrich nicht Schüler der Klasse 7, wegen (3) sind Hans und Werner nicht Schüler der Klasse 7. Also ist Fritz der Schüler der Klasse 7.
Von den restlichen Schülern gehören wegen (3) Hans und Werner nicht der Klasse 8 an. Also ist Ulrich Schüler der Klasse 8.
Von den nun noch verbleibenden zwei Schülern ist Hans wegen (2) nicht Schüler der Klasse 6. Also gehört Werner der Klasse 6 an, und folglich ist Hans der Schüler der Klasse 5.

Aufgabe 150731:
Die Fußballmannschaften der Klassen 7a, 7b, 8a und 8b belegten beim Schulsportfest die ersten vier Plätze. Auf die Frage, welchen Platz jede der vier Mannschaften belegte, gaben die Pioniere Antje, Benno und Chris jeder zwei Antworten, von denen jeweils eine wahr und eine falsch ist.

Antje: (1) Die Mannschaft der Klasse 8a belegte den zweiten Platz.
(2) Die Mannschaft der Klasse 8b belegte den dritten Platz.

Benno: (1) Die Mannschaft der Klasse 8a belegte den ersten Platz.

(2) Die Mannschaft der Klasse 7b belegte den zweiten Platz.

Chris: (1) Die Mannschaft der Klasse 7a belegte den zweiten Platz.
(2) Die Mannschaft der Klasse 8b belegte den vierten Platz.

Untersuche, welche Verteilungen der vier Mannschaften 7a, 7b, 8a und 8b auf die vier Plätze den wahren Antworten der Pioniere entsprechen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, (1) wäre wahr. Dann hätte die Mannschaft der Klasse 8a den zweiten Platz belegt, also wäre (3) falsch und somit (4) wahr. Das steht im Widerspruch zur Annahme. Deshalb ist (1) falsch und somit (2) wahr, d. h., die Mannschaft der Klasse 8b belegte den dritten Platz.

Daraus folgt, dass (6) falsch und somit (5) wahr ist. Den zweiten Platz belegte mithin die Mannschaft der Klasse 7a.

Daraus folgt, dass die Aussage (4) falsch und somit (3) wahr ist, d. h., den ersten Platz belegte die Mannschaft der Klasse 8a.
Für den vierten Platz verbleibt dann nur noch die Mannschaft der Klasse 7b. Daher kann nur die folgende Verteilung den Bedingungen der Aufgabe entsprechen:

Den ersten Platz belegte die Mannschaft der Klasse 8a, den zweiten die Mannschaft der Klasse 7a, den dritten die Mannschaft der Klasse 8b und den vierten die Mannschaft der Klasse 7b. Diese Verteilung entspricht in der Tat den Bedingungen; denn bei ihr sind die Aussagen (2), (3), (5) wahr und (1), (4), (6) falsch.

Aufgabe 170732:
Uli hat vier verschiedene, mit A, B, C und D bezeichnete Sorten Stahlkugeln. Dabei haben Kugeln gleicher Sorte auch stets gleiches Gewicht. Mit Hilfe einer Balkenwaage stellte er fest, dass zwei Kugeln der Sorte B genau so schwer sind wie eine Kugel der Sorte A. Weiter fand er, dass drei Kugeln der Sorte C ebenso viel wiegen wie eine Kugel der Sorte B und dass fünf Kugeln der Sorte D das gleiche Gewicht haben wie eine Kugel der Sorte C.

a) Wie viel Kugeln der Sorte D muss Uli in die (leere) eine Waagschale legen, wenn sie einer Kugel der Sorte A in der anderen Waagschale das Gleichgewicht halten sollen?
b) In der einen Waagschale liegen 20 Kugeln der Sorte D und 5 Kugeln der Sorte C. Wie viel Kugeln der Sorte B muss Uli in die andere (leere) Waagschale legen, um Gleichgewicht zu erhalten?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Das Gewicht einer Kugel der Sorte A ist gleich dem doppelten Gewicht einer Kugel der Sorte B. Eine Kugel der Sorte B hat das dreifache Gewicht einer Kugel der Sorte C, folglich hat eine Kugel der Sorte A das gleiche Gewicht wie 6 Kugeln der Sorte C.
Eine Kugel der Sorte C hat das fünffache Gewicht einer Kugel der Sorte D; das Gewicht von 6 Kugeln der Sorte C ist daher gleich dem Gewicht von 30 Kugeln der Sorte D. Daraus ergibt sich, dass Uli 30 Kugeln der Sorte D in die eine Waagschale legen muss, wenn Gleichgewicht erreicht werden soll.

b) Das Gewicht von 5 Kugeln der Sorte D ist gleich dem Gewicht einer Kugel der Sorte C, daher haben 20 Kugeln der Sorte D das gleiche Gewicht wie 4 Kugeln der Sorte C. Das Gewicht von 20 Kugeln der Sorte D und 5 Kugeln der Sorte C ist mithin gleich dem Gewicht von 9 Kugeln der Sorte C.
Da drei Kugeln der Sorte C soviel wiegen wie eine Kugel der Sorte B, wiegen folglich 9 Kugeln der Sorte C soviel wie 3 Kugeln der Sorte B. Uli muss also 3 Kugeln der Sorte B in die andere Waagschale legen, wenn sie 20 Kugeln der Sorte D und 5 Kugeln der Sorte C das Gleichgewicht halten sollen.

Aufgabe 180731:
In einem Spezialistenlager für Junge Mathematiker führt Dirk eine Knobelaufgabe vor. Er stellt auf einen Tisch in eine Reihe - für die Zuschauer von links nach rechts - fünf Gefäße auf: eine Flasche, einen Krug, eine Tasse, einen Becher und eine Kanne. Sie sind, nicht notwendig in dieser Reihenfolge, mit je einem der Getränke Tee, Kaffee, Milch, Limonade und Most gefüllt. Den Zuschauern ist nicht bekannt, welches Gefäß welche Flüssigkeit enthält.

Dirk sagt:

> „Stelle ich die Kanne - wobei ich die anderen Gefäße unverändert stehen lasse - so zwischen zwei der anderen Gefäße, dass unmittelbar links neben ihr das Gefäß mit Tee und unmittelbar rechts neben ihr das Gefäß mit Milch steht, so stehen Milchgefäß und Limonadengefäß unmittelbar nebeneinander, und außerdem steht dann das Gefäß mit Kaffee als mittleres in der Reihe der fünf Gefäße.
>
> Findet nun heraus, womit die einzelnen Gefäße gefüllt sind!“

Untersuche, ob allein aus diesen Angaben ermittelt werden kann, welche Getränke sich in jedem der fünf Gefäße befinden.
Gib alle mit Dirks Angaben übereinstimmenden Möglichkeiten einer Verteilung der Getränke auf die Gefäße an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, es gibt eine Dirks Angaben entsprechende Verteilung der Getränke auf die Gefäße. Dann gibt es - da die Kanne nach dem Umstellen zwischen zwei anderen Gefäßen steht, wobei das Teegefäß jeweils unmittelbar links, das Milchgefäß unmittelbar rechts neben der Kanne steht, - genau die nachfolgend angegebenen drei Möglichkeiten für die Reihenfolge der Gefäße:

(1)	Flasche	Tee	Kanne	Krug	Milch	Tasse	Becher
(2)	Flasche	Krug	Tee	Kanne	Tasse	Milch	Becher
(3)	Flasche	Krug	Tasse	Tee	Kanne	Becher	Milch

Die Möglichkeiten (1) und (3) scheiden aus, da sie der Angabe widersprechen, dass sich in dem in der Mitte stehenden Gefäß Kaffee befindet.
Somit verbleibt nur die Möglichkeit (2), und dabei ist nach der eben genannten Angabe die Kanne mit Kaffee gefüllt. Hiernach und da außerdem das Limonadengefäß unmittelbar neben dem Milchgefäß steht, verbleibt als einzig mögliche mit Dirks Angaben übereinstimmende Verteilung die folgende:

Die Flasche enthält Most, der Krug Tee, die Kanne Kaffee, die Tasse Milch und der Becher Limonade. Für diese Verteilung treffen alle von Dirk gemachten Angaben zu. Sie ist daher die einzige Verteilung der gesuchten Art.

Aufgabe 250735:
In einer Arbeitsgemeinschaft stellt Rainer seinen Klassenkameraden folgendermaßen eine Aufgabe:
Er nimmt drei Karten, auf denen zweiziffrige Zahlen stehen, so in die Hand, dass niemand anders als er die Zahlen sehen kann und dass sich die dreimal zwei Ziffern nebeneinander gehalten als eine sechsstellige Zahl lesen lassen.
Dies macht er (mit denselben Karten) mehrere Male, bis er jede mögliche Reihenfolge der drei Karten genau einmal berücksichtigt hat. Die abgelesene sechsstellige Zahl notiert er jedesmal (ebenfalls so, dass nur er seine Notizen sehen kann). Anschließend bildet er die Summe aller notierten Zahlen. Nun teilt er den Klassenkameraden mit:

„Auf einer Karte steht die Zahl 15, auf einer die Zahl 23. Auf der dritten Karte steht eine zweistellige Zahl, die ich nicht verrate. Die Summe aller notierten Zahlen beträgt 1373736.“

Untersuche, ob es genau eine zweistellige Zahl gibt, die unter den genannten Bedingungen nach Rainers Aussagen auf der dritten Karte stehen kann! Wenn das der Fall ist, so ermittle diese zweistellige Zahl!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Bezeichnet man die gesuchte zweistellige Zahl zunächst mit einem Kästchen □, so gibt es genau die folgenden Möglichkeiten für die Reihenfolge der drei Karten:

15	23	□
15	□	23
23	15	□
23	□	15
□	15	23
□	23	15

Ohne Berücksichtigung aller Ziffern, die in den Kästchen stehen, ergibt sich durch Addition

76 76 76

Nach Rainers Angabe ergibt sich mit Berücksichtigung der Ziffern in den Kästchen als Summe die Zahl

137 37 76

Daher sind Rainers Aussagen genau dann erfüllt, wenn eine Addition der folgenden Art

$$\begin{array}{cccc} & \square & \square & \square \\ + & \square & \square & \square \end{array}$$

auf ein Ergebnis führt, das seinerseits zu 767676 addiert die Summe 1373736 ergibt. Wegen $1373736 - 767676 = 606060$ gilt dies genau dann, wenn die Addition das Ergebnis 606060 hat. Das trifft zu, wenn die Addition $\square + \square$ auf die Summe 60 führt, also genau dann, wenn auf der dritten Karte die Zahl 30 steht.

2. Lösungsweg:
Sind a und b (in dieser Reihenfolge) die gesuchten zwei Ziffern, so addiert Rainer die Zahlen

$$\begin{array}{rcl} 152300 + 10a + b & ; & 150023 + 100 \cdot (10a + b) \\ 231500 + 10a + b & ; & 230015 + 100 \cdot (10a + b) \\ 1523 + 10000 \cdot (10a + b) & ; & 2315 + 10000 \cdot (10a + b) \end{array}$$

Ihre Summe ist $767676 + 20202 \cdot (10a + b)$. Daher sind Rainers Aussagen genau dann erfüllt, wenn $767676 + 20202 \cdot (10a + b) = 1373736$ gilt. Dies ist der Reihe nach äquivalent mit $20202 \cdot (10a + b) = 606060$, $(10a + b) = 30$. Also treffen Rainers Aussagen genau dann zu, wenn auf der dritten Karte die Zahl 30 steht.

Aufgabe 270731:
Vier Mannschaften, A, B, C und D, trugen ein Fußballturnier aus. Jede Mannschaft spielte genau einmal gegen jede andere Mannschaft. Jedes gewonnene Spiel wurde mit 2 Punkten für die Siegermannschaft und mit 0 Punkten für die Verlierermannschaft gewertet, jedes unentschiedene Spiel für beide Mannschaften mit je 1 Punkt. Weiterhin ist folgendes bekannt:

(1) Keine Mannschaft blieb ohne Punkte.
(2) Mannschaft A konnte ihren Turniersieg aus dem vorigen Jahr nicht wiederholen, erreichte aber eine höhere Gesamtpunktzahl als Mannschaft B.
(3) Mannschaft C gewann kein Spiel, erreichte jedoch eine geradzahlige Gesamtpunktzahl.
(4) Mannschaft D spielte in keinem ihrer Spiele unentschieden und gewann gegen B sowie gegen den Turniersieger des vorigen Jahres.

Untersuche, ob aus diesen Angaben eindeutig folgt, welche Punktzahlen jedes Spiel des Turniers den einzelnen Mannschaften erbrachte und welche Gesamtpunktzahlen sie erreichten! Ist das der Fall, so trage die Punktzahlen in die folgende Tabelle ein!

Mannschaft	Erreichte Punktzahl gegen A	B	C	D	Gesamtpunktzahl
A					
B					
C					
D					

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Aus den Angaben folgt:

Nach (4) gewann D gegen B und gegen den Vorjahressieger, d. h. nach (2) gegen A. Da ferner C nach (3) nicht gegen D gewann und nach (4) auch nicht gegen D unentschieden spielte, folgt:
(5) D gewann alle Spiele.
Da C hiernach aus dem Spiel gegen D keinen Punkt erhielt, folgt aus (3), dass die Summe der Punktzahlen, die C aus seinen Spielen gegen A und B erreichte, gerade ist. Ferner sind diese beiden Punktzahlen nach (3) kleiner als 2. Da C aber nach (1) nicht ohne Punkte blieb, verbleibt als einzige Möglichkeit:
(6) C spielte gegen A und B unentschieden.
Nach (5) und (6) erreichte A in den Spielen gegen C und D ebenso viele Punkte wie B gegen C und D. Also kann die nach (2) höhere Gesamtpunktzahl für A als für B nur dadurch entstanden sein, dass gilt:
(7) A gewann gegen B.
Damit ist bewiesen, dass aus den Angaben eindeutig die nachstehenden Punktzahlen folgen:

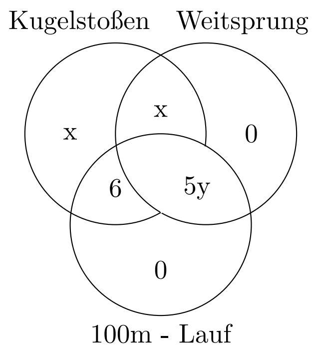
Mannschaft	Erreichte Punktzahl gegen				Gesamtpunktzahl
	A	B	C	D	
A	–	2	1	0	3
B	0	–	1	0	1
C	1	1	–	0	2
D	2	2	2	–	0

Aufgabe 290731:
28 Schüler einer Klasse beteiligen sich an einem Sportfest; dabei nahm jeder dieser Schüler an mindestens einer der Disziplinen Kugelstoßen, Weitsprung und 100 m-Lauf teil. Außerdem ist über die Schüler dieser Klasse bekannt:

(1) Die Anzahl derjenigen, die sowohl am Kugelstoßen als auch am Weitsprung, aber nicht am 100 m-Lauf teilnahmen, ist größer als 1, und sie ist gleich der Anzahl derer, die sich nur am Kugelstoßen beteiligten.
(2) Mindestens einer der Schüler nahm an allen drei Disziplinen teil; fünfmal so groß wie die Anzahl dieser Schüler ist insgesamt die Anzahl derjenigen, die sowohl beim Weitsprung als auch beim 100 m-Lauf starteten.
(3) Genau 6 der Schüler starteten in den Disziplinen Kugelstoßen und 100 m-Lauf und nahmen nicht am Weitsprung teil.
(4) Kein Teilnehmer trat nur im Weitsprung oder nur im 100 m-Lauf an.

Untersuche, ob aus diesen Angaben für jede der drei Disziplinen die Anzahl derjenigen in diese Klasse gehenden Schüler eindeutig ermittelt werden kann, die an der betreffenden Disziplin teilnahmen! Ist das der Fall, dann gib diese drei Anzahlen an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

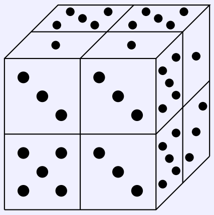


Die Anzahl der Schüler, die nur am Kugelstoßen beteiligt waren, sei x; nach (1) gilt $x \geq 2$. (5)
Die Anzahl der Schüler, die an allen drei Disziplinen teilnahmen, sei y, nach (2) gilt $y \geq 1$. (6)
Nach (1) ist x auch die Anzahl der Schüler, die sowohl am Kugelstoßen als auch am Weitsprung, aber nicht am 100 m-Lauf teilnahmen. Nach (2) ist $5y$ die Anzahl der Schüler, die sowohl beim Weitsprung als auch beim 100 m-Lauf starteten.
Hiernach und nach (3), (4) ist $2x + 5y + 6$ die Anzahl aller aus der Klasse am Sportfest teilnehmenden Schüler (siehe auch das Mengendiagramm); d. h., es gilt

$$2x + 5y + 6 = 28 \tag{7}$$

Aus (5) und (7) folgt $5y \leq 28 - 4 - 6$, d. h. $y \leq 3$. (8)
Nach (7) ist y eine gerade Zahl; hieraus und aus (6), (8) folgt $y = 2$. Damit ergibt sich aus (7) $x = 6$, und es ist gezeigt, dass aus den Angaben eindeutig die nachstehenden Anzahlen ermittelt werden können:
Am Kugelstoßen beteiligten sich genau $2x+y+6 = 20$ Schüler, am Weitsprung beteiligten sich genau $x+0+5y = 16$ Schüler, am 100 m-Lauf beteiligten sich genau $6 + 5y + 0 = 16$ Schüler.

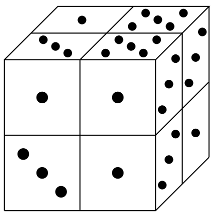
Aufgabe 290736:



Ein Würfel wurde aus acht gleichgroßen Spielwürfeln zusammengesetzt.
Jeder Spielwürfel hat auf seinen sechs Seitenflächen die Augenzahlen 1 bis 6, jede genau auf einer Seitenfläche; dabei haben die drei Seitenflächen mit den geraden Augenzahlen 2, 4, 6 eine Ecke gemeinsam, und dasselbe gilt für die drei Seitenflächen mit den ungeraden Seitenzahlen 1, 3, 5.
Von dem zusammengesetzten Würfel sind drei Seitenflächen sichtbar, wie die Abbildung zeigt. Alle sichtbaren Augenzahlen sind ungerade, ihre Summe beträgt 40.

(a) Zeichne von einem Würfel, der ebenso aus acht Spielwürfeln zusammengesetzt ist, bei dem aber andere sichtbare Augenzahlen vorkommen, ein Schrägbild (Kantenlänge eines Spielwürfels 2 cm, $\alpha = 45°$, $q = 0{,}5$)! Trage sichtbare Augenzahlen so ein, dass alle sichtbaren Augenzahlen ungerade sind und ihre Summe 30 beträgt!
(b) Beweise, dass in jeder Eintragung, die die in a) gestellten Forderungen erfüllt, mindestens vier der sichtbaren Augenzahlen 1 lauten müssen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



a) Schrägbild und ein Beispiel für eine Eintragung der geforderten Art: siehe Abbildung.

b) Wenn in einer Eintragung alle zwölf sichtbaren Augenzahlen ungerade sind, dann sind auf demjenigen Spielwürfel, von dem drei Augenzahlen sichtbar sind, dies die Augenzahlen 1, 3 und 5.
Haben ferner von den übrigen sichtbaren Augenzahlen höchstens zwei den Wert 1, so haben mindestens sieben von ihnen einen Wert größer oder gleich 3; also beträgt die Summe der sichtbaren Augenzahlen dann mindestens $1+3+5+2\cdot 1+7\cdot 3 = 32$.

Wenn in einer Eintragung alle sichtbaren Augenzahlen ungerade sind und die Summe 30 haben, so müssen folglich außer der 1 auf dem Spielwürfel mit drei sichtbaren Augenzahlen noch mindestens drei weitere sichtbare Augenzahlen 1 lauten.

Aufgabe 300732:
200 Schüler seien in Form eines Rechtecks, nämlich in Längsreihen zu je 20 und in Querreihen zu je 10 Schülern, aufgestellt.
Nun werde aus jeder Querreihe ein möglichst kleiner Schüler herausgerufen. Unter den so ermittelten 20 Schülern werde ein möglichst großer mit A bezeichnet. Die 20 Schüler stellen sich dann wieder auf ihre ursprünglichen Plätze.
Sodann werde aus jeder Längsreihe ein möglichst großer Schüler herausgerufen und unter den so ermittelten 10 Schülern ein möglichst kleiner mit B bezeichnet. Dabei stelle sich heraus, dass B eine andere Größe als A hat.
Untersuche, welcher von den beiden Schülern A und B unter diesen Voraussetzungen der größere sein muss!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es gibt genau die folgenden drei Möglichkeiten:

(1) A und B stehen in derselben Längsreihe.
In diesem Fall ist B größer als A, da B in der genannten Längsreihe möglichst groß und von anderer Größe als A ist.

(2) A und B stehen in derselben Querreihe.

Auch in diesem Fall ist B größer als A, da A in der genannten Querreihe möglichst klein und von anderer Größe als B ist.

(3) A und B stehen weder in derselben Längsreihe noch in derselben Querreihe.
Es sei dann C derjenige Schüler, der in derselben Querreihe wie A und in derselben Längsreihe wie B steht. Für diesen Schüler gilt: B ist größer als C oder ebenso groß wie C, und C ist größer als A oder ebenso groß wie A.
Da B nicht ebenso groß wie A ist, folgt wieder: B ist größer als A.
Somit ergibt sich in jedem Fall: Der größere von den beiden Schülern A und B muss B sein.

Aufgabe 330735:
Die Klassen 7a, 7b, 7c trugen ein Fußballturnier aus. Jede Klasse spielte genau einmal gegen jede andere Klasse. Am Ende ergab sich folgender Tabellenstand:

Klasse	Torverhältnis	Punktverhältnis
7b	3:2	3:1
7a	3:1	2:2
7c	2:5	1:3

Untersuche, ob durch diese Angaben eindeutig für jedes Spiel bestimmt ist, wie viele Tore jede Mannschaft in dem betreffenden Spiel erzielt hat!
Wenn das der Fall ist, so gib alle diese Ergebnisse an!

Hinweis: Wie üblich bedeutet das Torverhältnis $a : b$ für eine Mannschaft, dass sie in allen Spielen zusammen a Tore erzielt hat und b Tore hinnehmen musste.
Ferner erhält die Mannschaft für jedes gewonnene Spiel 2 Pluspunkte, für jedes verlorene Spiel 2 Minuspunkte und für jedes unentschiedene Spiel 1 Plus- und 1 Minuspunkt. Diese Punkte werden addiert, und dann bedeutet das Punktverhältnis $c : d$, dass die Mannschaft die Summe c der Pluspunkte und die Summe d der Minuspunkte erhalten hat.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Klasse 7a hat wegen des Punktverhältnisses 2 : 2 entweder beide oder keines ihrer zwei Spiele unentschieden gespielt. Da ihr Torverhältnis 3 : 1 aber zwei unterschiedliche Zahlen aufweist, kann sie nicht beide Spiele unentschieden gespielt haben. Daher folgt:
Klasse 7a hat kein Spiel unentschieden gespielt. (1)

Da die Klassen 7b und 7c in ihren Punktverhältnissen ungerade Zahlen haben, aber gegen 7a nach (1) nicht unentschieden gespielt haben, folgt:
Das Spiel 7b gegen 7c ging unentschieden aus. (2)
Hätte dieses Spiel 0:0 oder 1:1 geendet, so müsste die Klasse 7b ihr Torverhältnis 3:2 so erreicht haben, dass ihr Spiel gegen 7a das Ergebnis 3:2 bzw. 2:1 gehabt hätte. Das ist aber nicht möglich, denn die Klasse 7a hat, wie aus ihrem Torverhältnis 3:1 ersichtlich ist, insgesamt nur ein Gegentor hinnehmen müssen.

Daher und weil Klasse 7c wegen des Torverhältnisses 2:5 insgesamt nur 2 Tore erzielt hat, verbleibt für (2) nur die Möglichkeit:
Das Spiel 7b gegen 7c endete 2:2. (3)
Damit folgt aus den Torverhältnissen von 7b und 7c weiter:
Das Spiel 7b gegen 7a endete 1:0, (4)
Das Spiel 7a gegen 7c endete 3:0. (5)
Durch die Angaben sind also für jedes Spiel die Anzahlen der erreichten Tore eindeutig bestimmt; sie lauten wie in (3), (4), (5).

III.III. Abzählaufgaben

I. Runde 1

Aufgabe 050713:
Der Fahrer eines in der DDR zugelassenen Pkw beging nach einem Verkehrsunfall Fahrerflucht. Nach der Befragung einiger Zeugen erfuhr man über das polizeiliche Kennzeichen des Pkw folgendes:
a) Die beiden Buchstaben des Kennzeichens lauteten AB oder AD.
b) Die beiden vorderen Ziffern waren gleich und außerdem anders als die beiden letzten Ziffern.
c) Die aus den beiden letzten Ziffern gebildete Zahl war 69 oder 96.
Welches ist die größtmögliche Anzahl von Pkw, die diesen Bedingungen genügen können?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Für die beiden vorderen Ziffern gibt es unter den Bedingungen der Aufgabe 8 Möglichkeiten (alle außer 6 und 9). Jedes dieser 8 Ziffernpaare kann mit einer der 4 Kombinationen AB 69, AB 96, AD 69, AD 96 gekoppelt sein. Daher ist die größtmögliche Anzahl der den Bedingungen der Aufgabe genügenden PKW $4 \cdot 8 = 32$.

Aufgabe 050714:
Rolf stellt seinem Freund folgende Aufgabe:
Auf einem Schachturnier spielte jeder genau einmal gegen jeden. Insgesamt wurden 28 Partien gespielt.
Wie viel Teilnehmer gab es bei diesem Turnier?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Weil jeder genau einmal gegen jeden spielt, gilt, wenn n die Anzahl der Teilnehmer ist: n(n - 1) 2 = 28, also n(n - 1) = 56. Diese Gleichung wird von der natürlichen Zahl 8 erfüllt. Da für beliebige natürliche Zahlen n zu größeren Werten n stets größere Werte von n(n - 1) gehören, gibt es außer 8 keine natürliche Zahl, die diese Gleichung befriedigt. Also nahmen 8 Personen am Schachturnier teil.

Aufgabe 150714:
In der Ebene ε seien 50 verschiedene Punkte so gelegen, dass keine Gerade existiert, die drei dieser 50 Punkte enthält. Jeder dieser 50 Punkte soll nun mit jedem anderen durch eine Strecke verbunden werden.
a) Ermittle die Anzahl der Verbindungsstrecken!
b) Angenommen, die 50 Punkte seien die Eckpunkte eines konvexen 50-Ecks. Ermittle die Anzahl der Diagonalen des 50-Ecks!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Zur Wahl eines ersten Endpunktes einer der Verbindungsstrecken hat man genau 50 Möglichkeiten. In jeder von dieser, hat man dann genau 49 Möglichkeiten, einen der übrigen Endpunkte als zweiten Endpunkt einer der Verbindungsstrecken zu wählen. Durch diese insgesamt $50 \cdot 49 = 2450$ Wahlmöglichkeiten erhält man alle gesuchten Verbindungsstrecken, und zwar (da nach Voraussetzung keine dieser Strecken außer den Endpunkten einen anderen gegebenen Punkt enthält) jede Strecke genau doppelt (da jeder der Endpunkte einmal als erster und einmal als zweiter Endpunkt auftritt).
Daher ist $2450 : 2 = 1225$ die Anzahl aller gesuchten Verbindungsstrecken.

b) Von diesen 1225 Verbindungsstrecken bilden genau 50 die Seiten des konvexen 50-Ecks, die übrigen sind die gesuchten Diagonalen. Ihre Anzahl ist also $1225 - 50 = 1175$.

Aufgabe 200711:
Anlässlich der Siegerehrung eines Mathematikwettbewerbs beglückwünschte jeder Preisträger jeden anderen mit einem Händedruck. Insgesamt wurden dabei 91 Händedrücke ausgeführt, und zwar bei jedem der Glückwünsche genau einer.
Ermittle aus dieser Angabe die Anzahl der Preisträger des Wettbewerbs!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es sei n die Anzahl der Preisträger. Zählt man für jeden Preisträger die Händedrücke, die er mit den anderen Preisträgern ausführte, und addiert die erhaltenen Zahlen, so ergibt sich die Summe von n Summanden $n - 1$, also die Zahl $n \cdot (n - 1)$.

In dieser Zahl ist jeder der insgesamt auftretenden Händedrücke genau zweimal erfasst (nämlich in den Abzählungen für jeden der beiden Partner des betreffenden Händedrucks). Folglich ist die Anzahl aller Händedrücke gleich $\frac{1}{2}n(n-1)$.
Daher gilt $\frac{1}{2}n(n-1) = 91$, also $(n-1)n = 182$.

Erste Fortsetzungsmöglichkeit: Wegen der Primzerlegung $182 = 2 \cdot 7 \cdot 13$ hat 182 in natürlichen Zahlen bis auf die Reihenfolge nur die Faktorzerlegungen $182 = 1 \cdot 182 = 2 \cdot 91 = 7 \cdot 26 = 13 \cdot 14$. Davon ist nur $13 \cdot 14$ eine Zerlegung in zwei Faktoren der Form $n-1$ und n. Also ist die gesuchte Anzahl $n = 14$.

Zweite Fortsetzungsmöglichkeit: Wäre $n < 14$, so wäre $(n-1)n < 13 \cdot 14 = 182$; wäre $n > 14$, so wäre $(n-1)n > 13 \cdot 14 = 182$. Also verbleibt nur die Möglichkeit $n = 14$.

Aufgabe 240713:
In einem Ferienlager wird ein Tischtennisturnier geplant, das folgendermaßen ablaufen soll:

Die 36 Teilnehmer tragen zunächst Vorrundenspiele in sechs Gruppen zu je sechs Spielern aus, und zwar spielt von solchen sechs Spielern jeder gegen jeden genau einmal. Die jeweils beiden Erstplazierten einer jeden Gruppe gelangen in die Zwischenrunde. Diese 12 Teilnehmer der Zwischenrunde werden neu in zwei Gruppen zu ja sechs Spielern eingeteilt, und dann spielt in der Zwischenrunde wieder von solchen sechs Spielern jeder gegen jeden.

Die jeweils beiden Erstplazierten jeder dieser zwei Gruppen gelangen in die Endrunde. Diese vier Teilnehmer der Endrunde ermitteln durch Spiele jeder gegen jeden die Medaillengewinner.

Das Turnier soll um 8.30 Uhr beginnen. Zwischen Vor- und Zwischenrunde soll ein Pause von einer Stunde eingeplant werden; nach Abschluss der Zwischenrunde wird nochmals eine Pause von 15 Minuten eingeplant, und zwischen dem Abschluss der Endrunde und der Siegerehrung ist wiederum eine Pause von 15 Minuten vorgesehen.

Wann kann man unter diesen Bedingungen die Siegerehrung frühestens ansetzen, wenn für jedes Spiel (einschließlich der notwendigen Spielerwechsel) 15 Minuten geplant werden und wenn genau sechs Tischtennisplatten zur Verfügung stehen?
Zeige durch eine Aufstellung der Spiele, die jeweils gleichzeitig stattfinden sollen, dass der von dir angegebene Zeitpunkt der Siegerehrung eingehalten werden kann.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Vorrunde:
In jeder der sechs Gruppen sind $6 \cdot \frac{5}{2}$ Spiele, d.s. 15 Spiele, auszutragen. Da sechs Platten vorhanden sind, steht für jede Gruppe stets eine Platte zur Verfügung, an der sie ihre 15 Spiele austragen kann (und da hierbei auch alle sechs Platten ständig belegt sind, ist eine weitere Verkürzung der Spielzeit durch gleichzeitiges Austragen von noch mehr Spielen nicht möglich). Also braucht man für die Vorrunde 15 Viertelstunden, an die sich eine Pause von 4 Viertelstunden anschließt.

Zwischenrunde:
Wieder sind in jeder der beiden Gruppen 15 Spiele auszutragen. Da man jeder Gruppe drei Platten zur Verfügung stellen kann, sind wegen $15 : 3 = 5$ mindestens 5 Viertelstunden hierfür erforderlich.
Sie sind auch ausreichend; denn man kann es so einrichten, dass stets drei der 15 Spiele gleichzeitig ausgetragen werden, z. B. für sechs Spieler A, B, C, D, E, F durch folgende Verteilung:

erste Viertelstunde: (A,B), (C,D), (E,F), zweite Viertelstunde: (A,C), (B,E), (D,F),
dritte Viertelstunde: (A,D), (B,F), $(C.E)$, vierte Viertelstunde: (A,E), (B,D), (C,F),
fünfte Viertelstunde: (A,F), (B,C), (D,E).

(Wieder ist eine weitere Verkürzung nicht möglich, da alle Platten ständig belegt sind.)
Nach der somit ermittelten Spielzeit von 5 Viertelstunden schließt sich eine Pause von 1 Viertelstunde an.

Endrunde:

Diesmal sind $4 \cdot \frac{3}{2}$ Spiele, d.s. sechs Spiele, auszutragen. Es können gleichzeitig stets nur zwei Spiele ausgetragen werden, da insgesamt nur vier Spieler in der Endrunde sind. Also sind wegen $6 : 2 = 3$ mindestens 3 Viertelstunden erforderlich.
Sie sind auch ausreichend; denn man kann es so einrichten, dass stets zwei Spiele gleichzeitig stattfinden, z. B. für vier Spieler A, B, C, D durch folgende Verteilung:

erste Viertelstunde: (A,B), (C,D), zweite Viertelstunde: (A,C), (B,D),
dritte Viertelstunde: (A,D), (B,C).

Zu den so ermittelten 3 Viertelstunden Spielzeit kommt noch eine Viertelstunde Pause hinzu. Damit sind insgesamt $15 + 4 + 5 + 1 + 3 + 1 = 29$ Viertelstunden bis zur Siegerehrung vorzusehen; diese ist hiernach um 15.45 Uhr anzusetzen.

Aufgabe 260712:
In der Materialausgabe eines Betriebes sind durch ein Missgeschick die Schlüssel von zwölf Vorhängeschlössern durcheinandergekommen.
Da zu jedem Vorhängeschloss von den insgesamt zwölf Schlüsseln nur einer passt und zu jedem Schlüssel nur eines der Vorhängeschlösser, die sich äußerlich nicht voneinander unterscheiden, muss herausgefunden worden, welcher Schlüssel zu welchem Schloss gehört.

Lehrling Bernd, der mit dieser Aufgabe betreut wurde, dachte: „Jetzt muss ich zwölf Schlüssel an zwölf Schlössern ausprobieren, muss also, wenn ich Pech habe, $12 \cdot 12 = 144$ Proben ausführen.“
Sein Freund Uwe meinte jedoch, dass man mit viel weniger Proben auskommt.

Ermittle die kleinste Anzahl von Proben, mit der man mit Sicherheit (d. h. auch noch im ungünstigsten Fall) zu jedem Vorhängeschloss den passenden Schlüssel findet!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Von den insgesamt zwölf Vorhängeschlössern passt zu jedem Schlüssel genau eines. Nehmen wir einen der zwölf Schlüssel und probieren, zu welchem von den zwölf Vorhängeschlössern er passt, so kann es im ungünstigsten Fall vorkommen, dass bei elfmaligen Probieren noch nicht das Schloss probiert wurde, zu dem der Schlüssel passt.

Da der Schlüssel aber zu einem der Schlösser gehört, muss er zu den Schloss passen, das beim Probieren noch nicht berücksichtigt wurde, und er kann ohne eine weitere Probe zu diesem Schloss gelegt werden. Bei zwölf Vorhängeschlössern finden wir also mit Sicherheit nach höchstens elfmaligem Probieren den Schlüssel, der zu einem der Schlösser passt.

Ein weniger als elfmaliges Probieren dieses Schlüssels kann aber in ungünstigen Fällen die Frage nach dem passenden Schloss noch offen lassen. Für die noch verbleibenden elf Vorhängeschlösser und ihre Schlüssel gelten die entsprechenden Überlegungen, so dass wir nach höchstens zehnmaligem weiteren Probieren mit Sicherheit den Schlüssel zu einem dieser elf Vorhängeschlösser angeben können, während weniger als zehn Proben in ungünstigen Fällen nicht ausreichen.

Setzt man diese Überlegungen analog fort, dann folgt, dass nach höchstens $10+9+8+7+6+5+4+3+2+1 = 66$. Versuchen zu jedem der zwölf Vorhängeschlösser der passende Schlüssel gefunden werden kann und dass dies auch die gesuchte kleinste Anzahl von Proben ist.

Aufgabe 270712:
In einer Kiste befinden sich genau 100 Kugeln, und zwar 30 rote, 30 blaue, 30 grüne sowie 10 Kugeln, von denen nur bekannt ist, dass sie schwarz oder weiß sind und dass mindestens eine schwarze Kugel dabei ist.
Durch das Tastgefühl lassen sich verschiedenfarbige Kugeln nicht voneinander unterscheiden.
Untersuche, ob es trotzdem möglich ist, mit geschlossenen Augen eine jeweils geeignete Anzahl von Kugeln, aber nicht alle, so herauszugreifen, dass man mit Sicherheit vorhersagen kann:

a) Unter den herausgegriffenen Kugeln befinden sich mindestens 12 Kugeln von gleicher Farbe.
b) Unter den herausgegriffenen Kugeln befindet sich mindestens eine schwarze Kugel.
c) Unter den herausgegriffenen Kugeln befinden sich mindestens 5 weiße Kugeln.

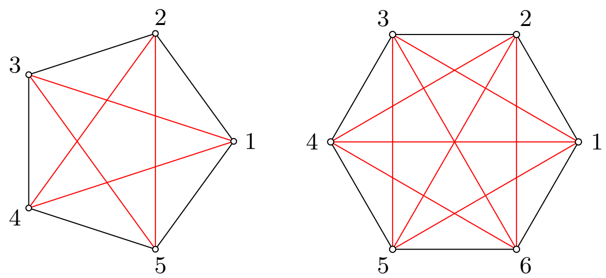
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Ein solches Herausgreifen ist möglich.
Die größtmögliche Anzahl herausgegriffener Kugeln, unter denen sich keine 12 von gleicher Farbe befinden, ergibt sich nämlich, indem man 11 rote, 11 blaue, 11 grüne und alle 10 schwarzen oder weißen Kugeln herausgreift, das sind 43 Kugeln. Greift man also (mindestens) 44 Kugeln heraus, so kann man folglich mit Sicherheit vorhersagen, dass sich darunter mindestens 12 von gleicher Farbe befinden müssen.

b) Ein solches Herausgreifen ist nicht möglich.
Denn greift man, wie verlangt, nicht alle Kugeln heraus, so ist (unter den angegebenen Voraussetzungen) auch der Fall möglich, dass sich von Anfang an überhaupt nur eine schwarze Kugel in der Kiste befand und dass (mindestens) gerade diese Kugel nicht mit herausgegriffen wird.

c) Auch ein solches Herausgreifen ist nicht möglich.
Denn es ist (unter den angegebenen Voraussetzungen) auch der Fall möglich, dass sich von Anfang an weniger als 5 weiße Kugeln in der Kiste befanden und folglich bei keinem Herausgreifen 5 weiße genommen werden.

Aufgabe 270714:
Bekanntlich hat jedes Viereck genau zwei Diagonalen.
a) Ermittle die Anzahl der Diagonalen eines Fünfecks und eines Sechsecks!
b) Finde eine Formel für die Anzahl der Diagonalen eines Vielecks in Abhängigkeit von der Eckenzahl n des Vielecks! Die Formel soll für alle natürlichen Zahlen $n \geq 4$ gelten. Begründe diese Formel!
c) Welchen Wert gibt diese Formel, wenn man sie für $n = 3$ anwendet? Lässt sich auch dieser Wert in eine geometrisch anschauliche Aussage fassen?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



a) Das Fünfeck hat genau fünf und das Sechseck genau neun Diagonalen, wie man z. B. der Abbildung entnehmen kann.

b) Um in einem n-Eck alle Diagonalen zu erfassen, kann man für jeden der n Eckpunkte die Verbindungsstrecke zu jedem anderen Eckpunkt außer den beiden benachbarten Eckpunkten betrachten. Damit hat man insgesamt $n \cdot (n-3)$mal eine Strecke betrachtet, und zwar jede Diagonale des n-Ecks genau 2mal.
Bezeichnet man die Anzahl der Diagonalen mit x, so gilt demzufolge $x = \frac{1}{2} n \cdot (n-3)$.

c) Für $n = 3$ gibt diese Formel den Wert $x = 0$. Er lässt sich in die Aussage fassen, dass bei jedem Dreieck die Anzahl der Diagonalen gleich Null ist.

Aufgabe 280712:
Aus den Ziffern 1, 3, 4, 5, 7 und 9 sollen sechsstellige natürliche Zahlen gebildet werden, in denen jede dieser Ziffern genau einmal vorkommt.
a) Ermittle die Anzahl aller verschiedenen Zahlen, die auf diese Weise gebildet werden können.
b) Untersuche, welche von den auf diese Weise gebildeten Zahlen durch 18 teilbar sind!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Mit zwei Ziffern kann man genau zwei verschiedene zweistellige Zahlen bilden (z. B. 13 und 31). (1)

Nimmt man eine dritte Ziffer hinzu, so kann diese vor, zwischen oder hinter die beiden Ziffern der zweistelligen Zahl gesetzt werden; das sind somit drei Möglichkeiten. Aus (1) folgt demnach wegen $2 \cdot 3 = 6$, dass aus drei verschiedenen Ziffern genau sechs verschiedene dreistellige Zahlen gebildet werden können. (2)
Bildet man nun unter Hinzunahme einer vierten Ziffer vierstellige Zahlen, kann diese vierte Ziffer an erster, zweiter, dritter oder vierter Stelle stehen (vier Möglichkeiten), und aus (2) folgt wegen $6 \cdot 4 = 24$, dass auf diese Weise 24 vierstellige Zahlen gebildet werden können. (3)
Durch analoge Überlegungen erkennt man, dass es hinsichtlich der Stellung einer fünften Ziffer in einer vierstelligen Zahl genau fünf Möglichkeiten gibt und somit wegen (3) und $5 \cdot 24 = 120$ insgesamt 120 fünfstellige Zahlen gebildet werden können. (4)
Die Anzahl der sechsstelligen Zahlen ergibt sich analog aus (4) und wegen $6 \cdot 120 = 720$. Somit können aus den genannten Ziffern genau 720 verschiedene sechsstellige Zahlen gebildet werden.

b) Eine natürliche Zahl ist nur dann durch 18 teilbar, wenn sie durch 9 teilbar ist. Dies ist nur dann der Fall, wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist.
Alle 720 auf die geforderte Weise gebildeten Zahlen haben jedoch die Quersumme $1 + 3 + 4 + 5 + 7 + 9 = 29$, folglich ist keine dieser Zahlen durch 18 teilbar.

II. Runde 2

Aufgabe 030723:
Ein Holzwürfel mit einer Kantenlänge von 30 cm soll in Würfel von 10 cm Kantenlänge zersägt werden.
a) Wie viel Schnitte muss man dabei ausführen? (Das Sägen im Paket soll nicht gestattet sein.)
b) Wie viel Würfel erhält man?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Man braucht 26 Schnitte $(2 + 6 + 18)$.
b) Man erhält 27 Würfel $(3 \cdot 3 \cdot 3)$.

Aufgabe 030725:
In einem Kasten befinden sich 70 Kugeln, nämlich 20 rote, 20 grüne, 20 gelbe, und der Rest ist schwarz oder weiß. Brigitte soll im Dunkeln aus diesem Kasten so viele Kugeln herausnehmen, dass unter ihnen mit Sicherheit mindestens 10 Kugeln die gleiche Farbe haben.
Wie viel Kugeln muss sie mindestens herausnehmen? Begründe deine Antwort!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Sie muss 38 Kugeln nehmen.
Im ungünstigsten Falle kann Brigitte zunächst die 10 schwarzen bzw. weißen Kugeln und von jeder Farbe 9 Kugeln, insgesamt also 37 Kugeln, herausnehmen. Nimmt sie jetzt noch eine weitere Kugel heraus, dann hat sie stets mindestens 10 Kugeln gleicher Farbe unter diesen 38 Kugeln.

Aufgabe 060723:
Jemand schreibt alle natürlichen Zahlen von 1 bis 5555 auf, jede genau einmal. Berechne die Anzahl aller dabei geschriebenen Ziffern 9!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Anzahl der Ziffern 9 beträgt an der Tausenderstelle 0, an der Hunderterstelle (von 1 bis 999, von 1000 bis 1999, von 2000 bis 2999, von 3000 bis 3999, von 4000 bis 4999 je 100mal die Ziffer 9)

$$5 \cdot 100 = 500$$

an der Zehnerstelle (in jedem Hunderterbereich 10mal, in 55 Hunderterbereichen also)

$$10 \cdot 55 = 550$$

an der Einerstelle (in jedem Zehnerbereich eine Ziffer 9, in 555 Zehnerbereichen also)

$$1 \cdot 555 = 555$$

Insgesamt wird die Ziffer 9 dabei 1605 mal aufgeschrieben.

Aufgabe 230723:
Blaue, gelbe und rote Würfel sollen in eine Reihe gelegt werden. Der erste Würfel der Reihe soll blau, der zweite soll gelb sein. In der Reihe sollen niemals zwei gleichfarbige Würfel nebeneinander liegen, und es soll sich auch die Farbfolge von zwei nebeneinanderliegenden Würfeln niemals wiederholen.
Ermittle die größtmögliche Anzahl der Würfel in einer Reihe, die alle diese Bedingungen erfüllt!
Gib mindestens ein Beispiel für eine solche Reihe mit der größtmöglichen Anzahl von Würfeln an und weise nach, dass es keine solche Reihe mit mehr Würfeln geben kann!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I) Bezeichnet man mit b, g bzw. r einen blauen, gelben bzw. roten Würfel, dann zeigen folgende Beispiele, dass es Reihen mit 7 Würfeln gibt, die alle gestellten Bedingungen erfüllen:

$$b,g,b,r,g,r,b; \qquad b,g,r,b,r,g,b; \qquad b,g,r,g,b,r,b;$$

II) Ist w_1, w_2, w_3, ..., w_8, ... eine Reihe von 8 oder mehr Würfeln, so kommen darin die 7 Farbfolgen (w_1,w_2), (w_2,w_3), ..., (w_7,w_8) vor.
Zu den drei verschiedenen Farben b,g,r gibt es aber nur die folgenden 6 verschiedenen Farbfolgen (b,g), (b,r), (g,b), (g,r), (r,b), (r,g). Daraus folgt, dass bei einer Reihe von 8 oder mehr Würfeln (ohne benachbarte gleichfarbige Würfel) mindestens eine Farbfolge doppelt auftreten müsste, was der gestellten Bedingung widerspricht.
Aus I) und II) folgt, dass 7 die größtmögliche Anzahl der Würfel in einer Reihe der verlangten Art ist.

Aufgabe 290722:
An einem Fußballturnier nehmen genau 14 Mannschaften teil. Jede Mannschaft trägt gegen jede andere genau ein Spiel aus. Gewinnt eine Mannschaft, so erhält sie 2 Gewinnpunkte und ihre Gegnermannschaft 2 Verlustpunkte. Geht ein Spiel unentschieden aus, so erhält jede der beiden Mannschaften je einen Gewinnpunkt und einen Verlustpunkt.

a) Nach Abschluss aller Spiele kann man für jede Mannschaft die Summe aller derjenigen Punkte bilden, die sie erhalten hat, gleichgültig, ob es Gewinn- oder Verlustpunkte waren.
Weise nach, dass dabei jede der 14 Mannschaften dieselbe Summe erhält, und gib diese Summe an!

b) Nach Abschluss aller Spiele kann man auch die Summe aller Gewinnpunkte bilden, gleichgültig, welche Mannschaften sie erhalten haben.
Weise nach, dass bei jeder Möglichkeit für die Ergebnisse der einzelnen Spiele des Turniers dieselbe Summe aller Gewinnpunkte entsteht, und gib diese Summe an!

c) An einem anderen Turnier mit denselben Regeln der Punktvergabe nahm eine andere Anzahl von Mannschaften teil. Wieder trug jede Mannschaft gegen jede andere genau ein Spiel aus.
Kann als Summe aller Gewinnpunkte, wie in b) gebildet, dabei 432 entstehen? Begründe deine Antwort?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Jede Mannschaft erhält in jedem Spiel 2 Punkte. Sie spielt im Turnier insgesamt 13 Spiele. Die Summe aller Punkte, die sie im Turnier erhält, beträgt daher $2 \cdot 13 = 26$.

b) Da nach a) jede der 14 Mannschaften 26 Punkte erhält, werden im Turnier insgesamt $14 \cdot 26$ Punkte vergeben. Von diesen sind genau die Hälfte Gewinnpunkte, da dies für jedes einzelne Spiel zutrifft, gleichgültig welches Ergebnis es hatte. Bei jeder Möglichkeit für die Ergebnisse beträgt die Summe aller Gewinnpunkte daher $\frac{14 \cdot 26}{2} = 14 \cdot 13 = 182$.

c) War x die Anzahl der Mannschaften, so erhält analog zu a) jede Mannschaft $2 \cdot (x-1)$ Punkte. Die Summe aller Gewinnpunkte beträgt analog zu b) daher $\frac{x \cdot 2 \cdot (x-1)}{2} = x \cdot (x-1)$. Sie kann also nur dann 432 betragen, wenn es eine natürliche Zahl x gibt, für die $x \cdot (x-1) = 432$ gilt.

Alle Zerlegungen von 432 in zwei Faktoren, die natürliche Zahlen sind, lauten

$$432 = 1 \cdot 432 = 2 \cdot 216 = 3 \cdot 144 = 4 \cdot 108 = 6 \cdot 72 = 8 \cdot 54 = 9 \cdot 48 = 12 \cdot 36 = 16 \cdot 27 = 18 \cdot 24$$

In keiner dieser Zerlegungen haben die Faktoren die Differenz 1. Als Summe aller Gewinnpunkte kann 432 nicht auftreten.

Aufgabe 300723:
a) Ein an der gesamten Oberfläche gefärbter Holzwürfel soll in gleich große Teilwürfel zersägt werden. Dabei wird gefordert, dass mindestens 40 dieser Teilwürfel völlig ungefärbt sind.
Ermittle die kleinstmögliche Anzahl der Teilwürfel, in die der gesamte Holzwürfel zu zerlegen ist, damit diese Forderung erfüllt wird!

b) Aus 40 so erhaltenen ungefärbten Teilwürfeln soll ein Quader (ohne freibleibende Hohlräume im Innern) zusammengesetzt werden; dabei soll jeder dieser 40 Teilwürfel verwendet werden.
Ermittle das Volumen dieses Quaders, wenn bekannt ist, dass der ursprüngliche Holzwürfel ein Volumen von 27 dm^3 hatte!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Einen Würfel kann man in gleichgroße Teilwürfel zerlegen, indem man eine natürliche Zahl $n > 1$ wählt, drei von einer Ecke ausgehende Kanten in je n gleiche Teile teilt und durch die Teilpunkte Ebenen legt, die zu den Begrenzungsflächen des Würfels parallel verlaufen.

Der Würfel wird dadurch in n Schichten zerlegt, jede Schicht in $n \cdot n$ Teilwürfel. Die Anzahl A der entstehenden Teilwürfel beträgt also $A = n^3$.

Die völlig ungefärbten Teilwürfel bilden einen im Innern des gesamten Holzwürfels enthaltenen kleineren Würfel. Damit die Anzahl seiner Teilwürfel $A = 40$ ist, muss für ihn $n \geq 4$ sein. Für den gesamten Holzwürfel ist dieses n durch $n + 2$ zu ersetzen.
Die kleinstmögliche Anzahl von Teilwürfeln, mit der die gestellte Forderung erfüllt wird, ist also die zu $n = 6$ gehörende Anzahl $A = 216$.

b) Wegen $3^3 = 27$ beträgt die Kantenlänge des ursprünglichen Holzwürfels 3 dm. Aus a) folgt nun, dass die Kantenlänge eines der 216 Teilwürfel 3 dm : 6 = 0,5 dm beträgt. Der Quader besteht aus 40 Würfeln dieser Kantenlänge.

Sein Volumen beträgt (unabhängig davon, wie dieser Quader aus den Würfeln zusammengesetzt wurde) daher $40 \cdot (0{,}5dm)^3 = 5dm^3$.

III. Runde 3

Aufgabe 030734:
Zeichne ein beliebiges konvexes Fünfeck und seine sämtlichen Diagonalen!
Wie viel konvexe Vierecke sind in der Figur enthalten? Gib genau an, wie du diese Anzahl ermittelt hast!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es gibt
- 5 Vierecke, die aus je 3 Fünfeckseiten und einer Diagonalen,
- 5 Vierecke, die aus je 2 Fünfeckseiten und 2 Diagonalen und
- 5 Vierecke, die aus je einer Fünfeckseite und 3 Diagonalen

gebildet werden, insgesamt also 15 Vierecke.

Aufgabe 050734:
Berechne die Anzahl aller (untereinander verschiedener) vierstelligen Zahlen, die sich unter alleiniger Verwendung der Ziffern 1, 3 und 8 schreiben lassen! Dabei braucht nicht jede der Zahlen sämtliche der drei zugelassenen Ziffern zu enthalten.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die erwähnten Zahlen können entweder

(1) 4 gleiche Ziffern oder
(2) genau 3 gleiche Ziffern oder

(3) 2 untereinander verschiedene Paare von gleichen Ziffern oder
(4) genau 2 gleiche Ziffern enthalten.

Da nur 3 verschiedene Ziffern zugelassen sind, erhält man im Falle (1) 3 verschiedene derartige Zahlen. Im Falle (2) gibt es für jeweils 3 gleiche Ziffern 4 verschiedene Möglichkeiten der Anordnung, wobei die 4. Ziffer jeweils eine der beiden anderen vorgegebenen Ziffern ist. Da 3 Ziffern vorgegeben wurden, beträgt im Falle (2) die Anzahl der derartigen vierstelligen Zahlen $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$.

Im Falle (3) lassen sich die Ziffern der beiden Paare jeweils auf 6 verschiedene Weisen anordnen (nämlich aabb, bbaa, abba, baab, abab, baba). Da es 3 verschiedene Möglichkeiten der Zusammenstellung solcher Paare gibt, beträgt im Falle (3) die Anzahl der erwähnten vierstelligen Zahlen $6 \cdot 3 = 18$.

Im Falle (4) lassen sich die beiden gleichen Ziffern, wenn man die Reihenfolge der beiden übrigen, von ihnen verschiedenen Ziffern beibehält, auf 6 verschiedene Weisen anordnen (nämlich aabc, bcaa, abca, baac, abac, baca). Für die Reihenfolge der beiden übrigen Ziffern gibt es genau 2 Möglichkeiten (nämlich bc und cb). Da 3 verschiedene Paare gleicher Ziffern möglich sind, beträgt im Falle (4) die Anzahl der gesuchten vierstelligen Zahlen $6 \cdot 2 \cdot 3 = 36$.

Die Anzahl aller derartigen Zahlen beträgt mithin $3 + 24 + 18 + 36 = 81$.

Aufgabe 080732:
Gegeben sei eine positive ganze Zahl n. Man denke sich alle Darstellungen von n als Summe von genau zwei voneinander verschiedenen positiven ganzzahligen Summanden gebildet. Dabei sollen Darstellungen, die sich nur durch die Reihenfolge der Summanden unterscheiden, wie z. B. $9 = 4 + 5$ und $9 = 5 + 4$, als nicht verschieden angesehen werden. Ermittle

a) für $n = 7$,
b) für $n = 10$,
c) für beliebiges (positives ganzzahliges) n
die Anzahl aller dieser Darstellungen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

a) Die sämtlichen genannten Darstellungen sind:

$$7 = 1 + 6, \quad 7 = 2 + 5, \quad 7 = 3 + 4, \quad 10 = 1 + 9, \quad 10 = 2 + 8, \quad 10 = 3 + 7, \quad 10 = 4 + 6$$

ihre Anzahl beträgt 3 bzw. 4.

b) Ist n ungerade, so treten in den sämtlichen genannten Darstellungen genau die Zahlen $1, ..., n - 1$ als Summanden auf, und zwar jede genau einmal. Da hierbei in jeder Darstellung genau zwei dieser Summanden vorkommen, ist die Anzahl der Darstellungen folglich $\frac{n-1}{2}$.
Ist n gerade, so treten dagegen nur die Zahlen $1, ..., n - 1$ mit Ausnahme der Zahl $\frac{n}{2}$ auf. Diese Ausnahme rührt daher, dass in einer Darstellung von n mit einem Summanden $\frac{n}{2}$ der zweite Summand ebenfalls $\frac{n}{2}$ lauten müsste, also nicht von dem ersten verschieden wäre. Daher beträgt nun die gesuchte Anzahl $\frac{n-2}{2} = \frac{n}{2} - 1$.

Aufgabe 090731:
Man denke sich alle natürlichen Zahlen von 1 bis 2555, jede genau einmal, aufgeschrieben.
Ermittle die Anzahl der Ziffer 9, die dabei insgesamt geschrieben werden müssten!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. In der Tausenderstelle der aufgeschriebenen Zahlen kommt die Ziffer 9 nicht vor.

II. Die Anzahl der Ziffern 9, die in der Hunderterstelle der aufgeschriebenen Zahlen vorkommen, beträgt für die Zahlen von 1 bis 1000 ; für die Zahlen von 1001 bis 2000 (2 Gruppen) je genau 100 (da bei der ersten Gruppe die 9 in der Hunderterstelle genau der Zahlen 900, ..., 999 vorkommt und bei der zweiten Gruppe genau der Zahlen

1900, ..., 1999). Bei den Zahlen von 2001 bis 2555 kommt in der Hunderterstelle die Ziffer 9 nicht vor.

III. Die Anzahl der Ziffern 9, die in der Zehnerstelle der aufgeschriebenen Zahlen vorkommen, beträgt für die Zahlen von 1 bis 100 ; für die Zahlen von 101 bis 200 ; usw. ; für die Zahlen von 2401 bis 2500 (25 Gruppen) je genau 10 (bei der ersten Gruppe genau in 90, ..., 99, bei der zweiten Gruppe genau in 190, ..., 199 usw.). Bei den Zahlen von 2500 bis 2555 kommt in der Zehnerstelle die 9 nicht vor.

IV. Die Anzahl der Ziffern 9 in der Einerstelle der Zahlen beträgt für die Zahlen von 1 bis 10 ; für die Zahlen von 11 bis 20 ; usw. ; für die Zahlen von 2541 bis 2550 (255 Gruppen)je genau 1. Bei den Zahlen von 2551 bis 2555 kommt in der Einersteile die 9 nicht vor.

Daher beträgt die gesuchte Zahl $2 \cdot 100 + 25 \cdot 10 + 255 = 705$.

Aufgabe 170731:
Es sei A die Menge aller derjenigen natürlichen Zahlen a, für die $1500 \leq a \leq 2650$ gilt.
Untersuche, ob es in der Menge A fünfundsechzig verschiedene Zahlen gibt, die gerade und durch 9 teilbar sind!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Alle Zahlen, die durch 2 und durch 9 teilbar sind, sind auch durch $2 \cdot 9 = 18$ teilbar, da 2 und 9 teilerfremd sind. Die kleinste durch 18 teilbare Zahl in der Menge A ist 1512, die nächstgrößere erhält man durch Addition von 18, da es unter 18 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen nur eine durch 18 teilbare gibt.

Dieses Verfahren lässt sich fortsetzen. Die vierundsechzigste dabei erhaltene Zahl (einschließlich der Zahl 1512 also insgesamt die fünfundsechzigste gewonnene Zahl) lautet $1512 + 64 \cdot 18 = 1512 + 1152 = 2664$. Da sie größer als 2650 ist, gibt es folglich in der Menge A nicht fünfundsechzig verschiedene durch 9 teilbare gerade Zahlen.

Aufgabe 200732:
Gegeben seien sieben Strecken mit den Längen 1 cm, 3 cm, 5 cm, 7 cm, 9 cm, 11 cm und 15 cm.

a) Gib die Anzahl aller verschiedenen Möglichkeiten an, drei von diesen sieben Strecken auszuwählen! Dabei sollen solche Möglichkeiten, die sich nur in der Reihenfolge der ausgewählten Strecken unterscheiden, nicht als verschieden gewertet werden.
b) Gib unter den in a) gefundenen Möglichkeiten alle diejenigen an, bei denen aus den Längen der drei ausgewählten Strecken als Seitenlänge ein Dreieck konstruiert werden kann!
c) Berechne, wie viel Prozent der in a) gefundenen Möglichkeiten die in b) gefundenen Möglichkeiten sind! (Der Prozentsatz ist auf eine Dezimale nach dem Komma gerundet anzugeben.)

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Maßzahlen der in cm gemessenen Längen der drei ausgewählten Strecken seien jedesmal a, b, c genannt. Wegen der Unabhängigkeit von ihrer Reihenfolge kann dabei $a < b < c$ angenommen werden. Mit diesen Bezeichnungen gibt es genau die in der folgenden Tabelle in den Spalten a, b, c angegebenen Auswahlmöglichkeiten. Aus den Längen der drei ausgewählten Strecken als Seitenlängen kann genau dann ein Dreieck konstruiert werden, wenn die drei Dreiecksungleichungen

$$a + b > c \quad (1) \qquad b + c > a \quad (2) \qquad c + a > b \quad (3)$$

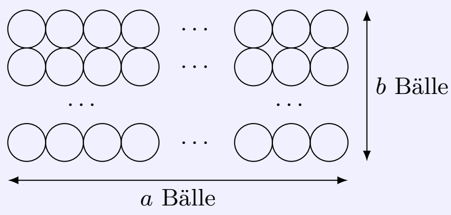
gelten. Wegen $a < b < c$ sind (2) und (3) stets erfüllt. In der letzten Spalte der folgenden Tabelle ist jeweils angegeben, ob auch (1) erfüllt ist.

a	b	c	Gilt $a + b > c$?	a	b	c	Gilt $a + b > c$?	a	b	c	Gilt $a + b > c$?
1	3	5	Nein	1	3	7	Nein	1	3	9	Nein
1	3	11	Nein	1	3	15	Nein	1	5	7	Nein
1	5	9	Nein	1	5	11	Nein	1	5	15	Nein
1	7	9	Nein	1	7	11	Nein	1	7	15	Nein
1	9	11	Nein	1	9	15	Nein	1	11	15	Nein
3	5	7	Ja	3	5	9	Nein	3	5	11	Nein

a	b	c	Gilt $a+b>c$?	a	b	c	Gilt $a+b>c$?	a	b	c	Gilt $a+b>c$?
3	5	15	Nein	3	7	9	Ja	3	7	11	Nein
3	7	15	Nein	3	9	11	Ja	3	9	15	Nein
3	11	15	Nein	5	7	9	Ja	5	7	11	Ja
5	7	15	Nein	5	9	11	Ja	5	9	15	Nein
5	11	15	Ja	7	9	11	Ja	7	9	15	Ja
7	11	15	Ja	9	11	15	Ja				

Daraus folgt:
Die in a) gesuchte Anzahl beträgt 35, die in b) gesuchte Anzahl beträgt 11, der in c) gesuchte Prozentsatz beträgt $11 \cdot 10035\% \approx 31{,}4\%$.

Aufgabe 220734:
Im Schaufenster eines Sportgeschäftes befindet sich ein Stapel aus 550 gleichgroßen Bällen. Der Stapel besteht aus waagerechten Schichten. Jede Schicht enthält Bälle in einer rechteckigen Anordnung, wie sie die Abbildung zeigt.



Die Anzahlen a und b sind in jeder Schicht genau um 1 kleiner als die entsprechenden Anzahlen in der darunterliegenden Schicht.
In der untersten Schicht ist 10 die kleinere der beiden Anzahlen a, b. In der obersten Schicht ist 1 die kleinere der beiden Anzahlen a, b.

Ermittle aus diesen Angaben die Anzahl der Bälle in der untersten Schicht!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
O. B. d. A. sei in der untersten Schicht $b = 10$ die kleinere der beiden Anzahlen a, b und $a = x$ die größere.
Dann ist in den folgenden Schichten jeweils $b = 9$, $b = 8$, $\dots$, $b = 1$ die kleinere und $a = x-1$, $a = x-2$, $\dots$, $a = x-9$ die größere der beiden Anzahlen a, b. Daraus folgt

$$550 = 10x + 9(x-1) + 8(x-2) + 7(x-3) + 6(x-4) + 5(x-5) + 4(x-6) + 3(x-7) + 2(x-8) + (x-9)$$

$$= 10x + 9x + 8x + 7x + 6x + 5x + 4x + 3x + 2x + x - 9 - 16 - 21 - 24 - 25 - 24 - 21 - 16 - 9$$

$$= 55x - 165 = 13$$

In der untersten Schicht liegen folglich $10 \cdot 13 = 130$ Bälle.

Aufgabe 300734:
Jemand möchte nach folgenden Regeln möglichst viele verschiedene der natürlichen Zahlen von 1 bis 1000 auswählen:

Als erste Zahl ist eine zufällig gewählte der Zahlen 1 bis 6 zu nehmen, indem gewürfelt und die von dem Würfel gezeigte Zahl gewählt wird. Die weiteren Zahlen sollen so gewählt werden, dass folgendes gilt:
Wenn die Auswahl von Zahlen beendet ist, so haben je zwei der insgesamt ausgewählten Zahlen stets eine durch 3 teilbare Summe.
Ermittle (in Abhängigkeit von allen Möglichkeiten der ersten Zahl) die größtmögliche Anzahl von Zahlen, die man nach diesen Regeln auswählen kann!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
1. War die erste Zahl eine 3 oder eine 6, so gilt:
Als weitere Zahlen kann man genau solche auswählen, die ebenfalls durch 3 teilbar sind; denn genau dann haben auch je zwei der insgesamt ausgewählten Zahlen eine durch 3 teilbare Summe. Da unter den Zahlen von 1 bis 1000 genau die Zahlen $1 \cdot 3 = 3$, $2 \cdot 3 = 6$, ..., $333 \cdot 3 = 999$ durch 3 teilbar sind, beträgt im Fall der Anfangszahlen 3, 6 die gesuchte größtmögliche Anzahl auszuwählender Zahlen 333.

2. War die erste Zahl eine der Zahlen 1, 4; 2, 5, so gilt:
Diese Zahlen lassen bei Division durch 3 den Rest 1 oder 2; d. h., sie sind mit einer natürlichen Zahl n von der Form $3n+1$ bzw. $3n+2$. Für die zweite Zahl gibt es dann jeweils genau die Möglichkeit, eine Zahl der Form

$3m+2$ bzw. $3m+1$ zu wählen, da genau hierbei die Summe $3(m+n)+3$ durch 3 teilbar wird.
Jede weitere Zahl würde diese Regel aber verletzen; sie wäre nämlich von einer der Formen $3k$, $3k+1$, $3k+2$, und dann wäre mit $h=n$ oder mit $h=m$ die betreffende der Summen

$$3h+1+3k=3(h+k)+1, \qquad 3h+1+3k+1=3(h+k)+2, \qquad 3h+2+3k+2=3(h+k+1)+1$$

nicht durch 3 teilbar.
Also beträgt im Fall der Anfangszahlen 1, 4; 2, 5 die gesuchte größtmögliche Anzahl auszuwählender Zahlen 2.

Aufgabe 320731:
a) Vier rote Kugeln, zwei gelbe Kugeln und eine blaue Kugel sollen so auf zwei Kästen A und B verteilt werden, dass sich in A drei und in B vier Kugeln befinden.
Wie viele derartige Verteilungen gibt es insgesamt?

b) Jetzt werden gleichfarbige Kugeln durch eine zusätzliche Nummerierung voneinander unterschieden. Die Verteilungen unterscheiden sich dann nicht nur darin, wie viele Kugeln der einzelnen Farben in den Kästen A und B sind, sondern auch, welche Nummern sie tragen.
Wie viele solcher Verteilungen gibt es insgesamt?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Jede mögliche Verteilung ist bereits durch die Anzahlen der in A befindlichen Kugeln eindeutig festgelegt.
a) Für diese Anzahlen gibt es genau die Möglichkeiten der folgenden Tabelle

Verteilung Nr.	1	2	3	4	5	6
rot	0	1	1	2	2	3
gelb	2	1	2	0	1	0
blau	1	1	0	1	0	0

Das sind insgesamt 6 Verteilungen.

b) Jede nun zu ermittelnde Verteilung kann erhalten werden, indem man jeweils bei einer Verteilung aus a) feststellt, welche Nummern die Kugeln tragen können:
Verteilung Nr.1 führt so zu genau 1 Verteilung, da in A bereits die einzige blaue Kugel und alle gelben Kugeln liegen müssen.
Bei Verteilung Nr.2 kann jede der vier roten und jede der zwei gelben Kugeln in A liegen. Das führt zu genau $4\cdot 2=8$ Verteilungen.
Bei Verteilung Nr.3 müssen in A alle gelben Kugeln sein, jede der vier roten Kugeln kann in A liegen, das ergibt genau 4 Verteilungen.
Bei Verteilung Nr.4 liegt in A die einzige blaue Kugel, für die Nummern der roten Kugeln gibt es genau die Möglichkeiten (1; 2), (1; 3), (1; 4), (2; 3), (2; 4), (3; 4) 6 Verteilungen.
Verteilung Nr.5: In A kann jede dieser sechs Zusammenstellungen roter Kugeln und jede der zwei gelben Kugeln liegen, das führt auf genau $6\cdot 2=12$ Verteilungen.
Verteilung Nr.6: Für die Kugeln in A ist genau eine der vier roten Kugeln wegzulassen, somit gibt es hierfür genau 4 Verteilungen.
Das sind insgesamt $1+8+4+6+12+4=35$ Verteilungen.

Aufgabe 320734:
Ermittle die Anzahl aller derjenigen sechsstelligen natürlichen Zahlen, die durch 5 teilbar sind und deren Quersumme durch 9 teilbar ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Eine natürliche Zahl n hat genau dann eine durch 9 teilbare Quersumme, wenn n selbst durch 9 teilbar ist.
Ferner ist n wegen der Teilerfremdheit von 5 und 9 genau dann durch 5 und 9 teilbar, wenn n durch 45 teilbar, d. h. mit einer natürlichen Zahl k von der Form $n=45\cdot k$ ist.
Wegen $45\cdot 2222=99990, 45\cdot 2223=100035$ sowie $45\cdot 22222=999990$, $45\cdot 22223=1000035$ sind die Zahlen $45\cdot k$ mit natürlichen k genau für $k=2223,...,22222$ sechsstellig.
Da dies $22222-2222=20000$ Werte k sind, ist damit die gesuchte Anzahl 20000 ermittelt.

Aufgabe 340734:
Ein Viereck heißt genau dann konvex, wenn alle seine Diagonalen ganz der Fläche des Vielecks angehören.
Wie viele Diagonalen hat ein konvexes 1995-Eck insgesamt? Begründe die von dir angegebene Anzahl!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Man kann für jeden der 1995 Eckpunkte des 1995-Ecks die Verbindungsstrecke zu jedem der 1994 anderen Eckpunkte betrachten. Damit hat man jede der insgesamt vorhandenen Verbindungsstrecken zwischen je zwei Eckpunkten genau zweimal betrachtet.
Also gibt es genau $1995 \cdot 1994 : 2 = 1995 \cdot 997$ solche Verbindungsstrecken. Von ihnen sind genau 1995 keine Diagonalen, sondern Seiten des 1995-Ecks.
Die Anzahl der Diagonalen beträgt folglich $1995 \cdot 997 - 1995 = 1995 \cdot 996 = 1987020$.

III.IV. Altersaufgaben

I. Runde 1

Aufgabe 180713:
Wie alt ist Margit jetzt, wenn ihre Mutter jetzt 30 Jahre, ihre Großmutter jetzt 62 Jahre alt ist und nach einigen Jahren die Mutter viermal sowie gleichzeitig die Großmutter achtmal so alt wie Margit sein werden?
(Es werden jeweils nur volle Lebensjahre berücksichtigt.)

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn nach einigen Jahren die Mutter viermal so alt wie Margit sein wird, wird die Großmutter doppelt so alt wie die Mutter sein.
Der Altersunterschied von 32 Jahren zwischen der Großmutter und der Mutter ändert sich nicht. Er wird also auch zu dem in der Aufgabe genannten späteren Zeitpunkt 32 betragen. Dann ist er aber, da laut Aufgabe die Großmutter das doppelte Alter der Mutter haben wird, gleich dem Alter der Mutter zu diesem Zeitpunkt. Sie wird demnach dann 32 Jahre alt sein, was in zwei Jahren eintreten wird. Wegen $32 : 4 = 8$ ist Margit zu diesem Zeitpunkt 8 Jahre alt; folglich ist sie jetzt 6 Jahre alt.

Aufgabe 290713:
Rolf sagt an seinem Geburtstag, dem 1. September 1989:
„Die Quersumme der Jahreszahl meines Geburtsjahres ist zugleich auch das in Jahren gerechnete Alter, das ich heute erreiche.“
Untersuche, ob es genau ein Jahr als Rolfs Geburtsjahr gibt, für das seine Aussage zutrifft! Ist das der Fall, so gib dieses Geburtsjahr an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn Rolfs Aussage zutrifft, dann folgt:
Wäre Rolf vor dem Jahr 1900 geboren, dann müsste die Quersumme seines Geburtsjahres, da sie gleich seinem Alter ist, größer als 89 sein, was für keine Jahreszahl vor 1900 zutrifft. Also wurde Rolf in einem Jahr mit einer Zifferndarstellung $19xy$ geboren. Die Quersumme $1 + 9 + x + y$ ist zugleich Rolfs Alter im Jahr 1989; d. h., es gilt

$$1 + 9 + x + y = 1989 - (1900 + 10x + y) \quad \Rightarrow \quad x = \frac{79 - 2y}{11}$$

Da x eine natürliche Zahl ist, muss $79 - 2y$ durch 11 teilbar sein. Wie z. B. ein Durchprobieren aller natürlichen Zahlen y mit $0 \leq y \leq 9$ zeigt, ist das nur für $y = 1$ der Fall. Damit ergibt sich $x = 7$.
Also kann Rolfs Aussage nur dann zutreffen, wenn er im Jahr 1971 geboren wurde.

II. Bei diesem Geburtsjahr trifft die Aussage in der Tat zu; denn im Jahr 1989 ist Rolf dann 18 Jahre alt, und $1 + 9 + 7 + 1 = 18$ ist auch die Quersumme der Jahreszahl 1971. Mit I. und II. ist bewiesen: Es gibt genau ein Jahr als Rolfs Geburtsjahr, für das seine Aussage zutrifft, nämlich das Jahr 1971.

II. Runde 2

Aufgabe V10723:
Zum Gruppenrat der Klasse 7 gehören Karl, Herbert und Richard, Ilse und Lore. Richard ist jünger als Herbert, aber Lore älter als Karl. Ilse ist jünger als Richard, während Herbert etwas eher geboren wurde als Lore. Karl ist jünger als Richard, ebenso ist Ilse wesentlich jünger als Herbert. Lore lebt schon einige Monate länger als Richard. Karl ist älter als Ilse, die jünger als Lore ist. Herbert ist älter als Karl.
Stelle die richtige Altersreihenfolge unserer Freunde fest!

Lösung von Steffen Polster:
Es gilt, mit den ersten Buchstaben als Abkürzung und $<$ für „jünger als“:

1. R $<$ H, K $<$ L, also derjenige muss der Älteste sein, der auf der linken Seite nicht auftritt: H
2. I $<$ R, L $<$ H, also ist Zweitältester derjenige, der links nur erscheint mit H als rechter Seite: L
3. K $<$ R, I $<$ H, der Nachfolgende ist der, der links auftritt mit H und L als rechter Seite: R
4. R $<$ L, I $<$ K, der Nächste kann nur der sein, der links auftritt und jeweils H, L und R auf der rechten Seite hat: K
5. I $<$ L, K $<$ H, der Jüngste muss dann der sein, der links erscheint mit H, L, R und K auf der rechten Seite: I

So ergibt sich die Reihenfolge (der Älteste zuerst): Herbert, Lore, Richard, Karl, Ilse.

Aufgabe 020723:
Emil erzählt: „Mein Bruder Heinz ist nur halb so alt wie ich. Wenn man die Anzahl seiner Lebensjahre mit sich selbst multipliziert, erhält man das Alter meines Vaters. Meine Mutter ist 5 Jahre jünger als mein Vater. Alle zusammen sind wir 85 Jahre alt.“
Wie alt ist Emil? Beschreibe, wie du die Lösung gefunden hast!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Man bezeichne Emils Alter in Jahren mit a. Dann ist sein Bruder Heinz $\frac{a}{2}$, sein Vater $\frac{a^2}{4}$ und seine Mutter $\frac{a^2}{4} - 5$ Jahre alt. Zusammen sind sie

$$a + \frac{a}{2} + \frac{a^2}{4} + \frac{a^4}{4} - 5 = 85$$

Die Gleichung kann man umformen zu $a^2 + 3a = 180$. Mit der Lösungsformel für quadratische Gleichungen oder durch systematisches Probieren (a muss ein Teiler von 180 sein) kommt man auf $a = 12$, Emil ist also 12 Jahre alt.

Aufgabe 120723:
Über das Alter von vier Tennisspielern Arnold, Bruno, Christoph und Detlef ist folgendes bekannt:

(1) Alle vier Spieler sind zusammen 100 Jahre alt.
(2) Arnold und Bruno sind zusammen genau so alt wie Christoph und Detlef zusammen.
(3) Christoph ist älter als Detlef.
(4) Bildet man alle möglichen „Doppel“ (Gruppen aus zwei Spielern), die sich aus den vier Spielern bilden lassen, dann besteht genau eines dieser „Doppel“ aus zwei gleichaltrigen Spielern.
(5) Der älteste der vier Spieler ist vier Jahre älter als der jüngste.

Wie alt ist jeder der vier Spieler? (Sämtliche Angaben in vollen Lebensjahren)

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Das in Jahren angegebene Alter der vier Spieler sei der Reihe nach mit a, b, c, d bezeichnet. Nun gilt laut Aufgabe:

$$(1) \quad a + b + c + d = 100 \qquad , \qquad (2) \quad a + b = c + d \qquad , \qquad (3) \quad c > d$$

Aus (1) und (2) folgt (6) $a + b = c + d = 50$.
Wäre nun $a = c$ oder $a = d$ oder $b = c$ oder $b = d$, so folgte daraus wegen (2) $b = d$ bzw. $b = c$ bzw. $a = d$ bzw. $a = c$ im Widerspruch zu (4). Hiernach und wegen (3) folgt aus (4) und (6), dass $a = b = 25$ sein muss.

Wegen (6) und (3) gilt ferner $c > 50 - c$, also $c > 25$, und daher $d = 50 - c < 25$.

Somit ist Christoph der älteste und Detlef der jüngste der vier Spieler. Wegen (5) gilt daher $c - d = 4$, woraus zusammen mit (6) dann $c = 27$ und $d = 23$ folgt.
Also ist Christoph 27 Jahre alt, Arnold und Bruno sind je 25 Jahre alt, und Detlef ist 23 Jahre alt.

Aufgabe 150722:
Das Ehepaar Winkler hat genau drei Kinder.
Am 1. Januar 1975 war das älteste Kind doppelt so alt wie das zweite und dieses wiederum doppelt so alt wie das jüngste Kind. Die Mutter war doppelt so alt wie ihre drei Kinder zusammen. Der Vater war so alt wie die Mutter und das jüngste Kind zusammen. Alle fünf Familienmitglieder waren zusammen so alt wie der eine Großvater, und dieser war 64 Jahre alt, als das älteste Kind geboren wurde.
Wie alt war jede der genannten Personen am 1. Januar 1975?
Anmerkung: Alle Altersangaben sind in vollen Lebensjahren zu verstehen.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Ist am 1. Januar 1975 das jüngste Kind x Jahre alt, so ist das zweite $2x$ Jahre, das älteste $4x$ Jahre, die Mutter $14x$ Jahre, der Vater $15x$ Jahre und der Großvater $(64 + 4x)$ Jahre alt. Es gilt nun laut Aufgabe

$$x + 2x + 4x + 14x + 15x = 4x + 64$$

daraus folgt $32x = 64$, also $x = 2$.
Das jüngste Kind war am 1. Januar 1975 somit 2 Jahre alt, das zweite 4 Jahre, das älteste 8 Jahre, die Mutter 28 Jahre, der Vater 30 Jahre und der Großvater 72 Jahre alt.

Aufgabe 260722:
Klaus lernte im Mathematik-Spezialistenlager Dorit kennen und fragte sie nach ihrem Alter. Sie antwortete:

„Ich wurde im Mai desjenigen Jahres 10 Jahre alt, dessen Jahreszahl die kleinste durch 7 teilbare Zahl ist, die bei Division durch 2, 3, 5 und 11 jeweils den Rest 1 lässt.“

Untersuche, ob Klaus aus dieser Antwort Dorits Alter eindeutig ermitteln konnte. Ist dies der Fall, dann gib an, wie alt (in vollen Lebensjahren gerechnet) Dorit im Juni 1986 ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Dorit sei im Jahre x zehn Jahre alt geworden. Dann ist $x - 1$ eine natürliche Zahl, die durch 2, 3, 5 und 11 teilbar ist. Diese vier Teilbarkeitsaussagen gelten genau dann, wenn $x - 1$ ein Vielfaches des kgV dieser vier Zahlen ist. Das ist gleichbedeutend damit, dass mit einer natürlichen Zahl n

$$x - 1 = 330 \cdot n \qquad \text{d. h.} \qquad x = 330 \cdot n + 1$$

gilt. Da 330 bei Division durch 7 den Rest 1, also $330 \cdot 2$ den Rest 2, $330 \cdot 3$ den Rest 3 usw. lässt, führt $n = 6$ auf die kleinste Zahl x, die (außer den genannten Teilbarkeitsaussagen für $x - 1$) auch die Bedingung erfüllt, durch 7 teilbar zu sein.
Daraus folgt $x = 330 \cdot 6 + 1 = 1981$; d. h., aus Dorits Antwort lässt sich eindeutig ermitteln:
Dorit wurde im Mai des Jahres 1981 zehn Jahre alt; im Juni 1986 ist sie mithin 15 Jahre alt.

III. Runde 3

Aufgabe 130731:
Über die Altersangaben (in vollen Lebensjahren) einer Familie (Vater, Mutter und zwei Kinder) ist folgendes bekannt:

(1) Die Summe aller vier Lebensalter beträgt 124.
(2) Vater und Mutter sind zusammen dreimal so alt wie ihre beiden Kinder zusammen.
(3) Die Mutter ist mehr als doppelt so alt wie das älteste der beiden Kinder.
(4) Die Differenz, die sich ergibt, wenn man das Lebensalter der Mutter von dem des Vaters subtrahiert, ist neunmal so groß wie die Differenz, die sich ergibt, wenn man das Lebensalter des jüngeren Kindes von dem des älteren Kindes subtrahiert.

Wie alt ist jedes der vier Familienmitglieder?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wegen (1) und (2) ist die vierfache Alterssumme beider Kinder gleich 124; die Kinder sind deshalb zusammen 31 Jahre, die Eltern zusammen 93 Jahre alt.
Da die Lebensalter der vier Personen in ganzen Jahren angegeben werden und da 31 eine ungerade Zahl ist, so ist von den Altersangaben der Kinder die eine gerade, die andere ungerade. Daher ist die Differenz der Lebensalter der beiden Kinder eine ungerade Zahl.
Betrüge sie 3 oder mehr Jahre, so wäre sie bei den Eltern 27 oder mehr Jahre. Dann wäre das eine Kind 17 Jahre oder älter, das andere Kind 14 Jahre oder jünger, die Mutter 33 Jahre oder jünger und der Vater 60 Jahre oder älter.
Wegen $2 \cdot 17 > 33$ und (3) entfällt diese Möglichkeit. Somit beträgt die Differenz bei den Kindern 1 Jahr, bei den Eltern also 9 Jahre. Daraus folgt:

Der Vater ist 51 Jahre, die Mutter 42 Jahre, das älteste Kind 16 und das andere 15 Jahre alt.

Aufgabe 160731:
Von 12 Mädchen einer Klasse ist bekannt, dass alle im selben Jahr, aber keine zwei im gleichen Monat geboren sind. Multipliziert man jeweils die Zahl, die den Tag des Geburtsdatums angibt, mit der Zahl, die den Monat des Geburtsdatums angibt, so erhält man für die zwölf Mädchen die folgenden Produkte:
Astrid 49, Beate 3, Christina 52, Doris 130, Evelyn 187, Friederike 300, Gudrun 14, Heike 42, Ines 81, Kerstin 135, Liane 128 und Martina 153.
Ermittle aus diesen Angaben den Geburtstag von jeder der zwölf Schülerinnen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Lösung lässt sich z. B. mit Hilfe folgender Tabelle ermitteln, wobei für jedes der Mädchen der Anfangsbuchstabe seines Vornamens gesetzt wurde:

Name	Produkt	Primfaktorzerlegung	mögliche Geburtsdaten	tatsächliches Datum
A	49	$7 \cdot 7$	7.7.	7.7.
B	3	3	3.1. oder 1.3.	3.1.
C	52	$2 \cdot 2 \cdot 13$	26.2. oder 13.4.	13.4.
D	130	$2 \cdot 5 \cdot 13$	26.5. oder 13.10.	13.10.
E	187	$11 \cdot 17$	17.11.	17.11.
F	300	$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$	30.10. oder 25.12.	25.12.
G	14	$2 \cdot 7$	14.1. oder 7.2. oder 2.7.	7.2.
H	42	$2 \cdot 3 \cdot 7$	21.2. oder 14.3. oder 7.6. oder 6.7.	7.6.
I	81	$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$	27.3. oder 9.9.	27.3.
K	135	$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$	27.5. oder 15.9.	27.5.
L	128	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$	16.8.	16.8.
M	153	$3 \cdot 3 \cdot 17$	17.9.	17.9.

Die tatsächlichen Daten ermittelt man folgendermaßen:

1) Gibt es jeweils nur eine Möglichkeit für das Geburtsdatum, so ist für dieses Mädchen das Geburtsdatum dann festgelegt (gilt für A, E, L, M).

2) Nun streicht man bei den verbleibenden Mädchen die Daten, deren Monatsnummer bereits bei den unter 1) genannten Daten auftritt, da laut Aufgabe in jedem Monat genau eines der gesuchten Geburtsdaten liegt (gilt für G, H, I, K). Bleibt dabei bei einem Mädchen nur ein Datum übrig, ist damit sein Geburtsdatum ermittelt (I, K).

3) Indem man analog fortfährt, werden die restlichen Daten ermittelt.
Reihenfolge: Streichung bei B, D, H; Ermittlung des endgültigen Datums bei B, D; Streichung und damit endgültige Datenermittlung bei F, G und dann bei C, H.

Aufgabe 230731:
Fünf Mädchen, die alle älter als 10 Jahre sind und am gleichen Tag Geburtstag haben, von denen aber keine zwei gleichaltrig sind, werden an ihrem Geburtstag nach ihrem Alter gefragt. Jedes Mädchen antwortet wahrheitsgemäß:

(1) Anja: „Ich bin 5 Jahre jünger als Elke.“
(2) Birgit: „Ich bin jünger als Carmen, aber älter als Dorit.“
(3) Carmen: „Ich bin 14 Jahre alt.“
(4) Dorit: „Ich bin weder das jüngste noch das älteste von uns fünf Mädchen.“
(5) Elke: „Birgit und Carmen sind beide jünger als ich.”

Untersuche, ob aus diesen Angaben eindeutig ermittelt werden kann, wie alt jedes dieser Mädchen ist! Ist dies der Fall, dann gib für jedes der Mädchen das Alter an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Bezeichnet man das Lebensalter jedes Mädchens entsprechend dem Anfangsbuchstaben ihres Vornamens mit A, B, C, D und E, so folgt aus (2) $D < B < C$ und weiter aus (5) $D < B < C < E$.
Also ist D die kleinste der vier Zahlen B, C, D, E. Da aber D nach (4) nicht die kleinste der fünf Zahlen A, B, C, D, E sein kann, folgt $A < D < B < C < E$.
Nach (3) ist $C = 14$. Somit sind A, D und B drei natürliche Zahlen, für die $10 < A < D < B < 14$ gilt. Das ist nur möglich mit $A = 11$, $D = 12$, $B = 13$. Nach (1) gilt daher $E = 16$.

Somit lässt sich aus den Angaben der Aufgabenstellung eindeutig ermitteln, wie alt jedes der fünf Mädchen ist, und zwar gilt: Anja ist 11, Birgit 13, Carmen 14, Dorit 12 und Elke 16 Jahre alt.

Aufgabe 310732:
Ein Mensch antwortet auf die Frage nach seinem Geburtstag:

„Im Jahre 1989 wurde ich a Jahre alt. Geboren wurde ich am t-ten Tag des m-ten Monats des Jahres $(1900+j)$.
Die Zahlen a, j, m, t sind natürliche Zahlen; für sie gilt $a \cdot j \cdot m \cdot t = 105792$.“
Stelle fest, ob die Zahlen a, j, m, t durch diese Angaben eindeutig bestimmt sind! Ist das der Fall, so gib diese Zahlen an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Aus der Bedeutung der Zahlen folgt $0 < m \leq 12$, $0 < t \leq 31$; (1) auch die Zahlen a und j, für die $a \cdot j \cdot m \cdot t = 105792$ (2) gilt, sind folglich beide größer als Null.
Sie erfüllen ferner $a + j = 89$ (3) und sind daher beide kleiner als 89.
Wegen der Primfaktorzerlegung $105792 = 26 \cdot 3 \cdot 19 \cdot 29$ hat 105792 unter den natürlichen Zahlen kleiner als 89 genau die folgenden Teiler: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 19, 24, 29, 32, 38, 48, 57, 58, 64, 76, 87.

Die einzigen Möglichkeiten, hieraus zwei Zahlen a, j mit (3) auszuwählen, sind

$$(a; j) = (2; 87), (87; 2), (32; 57), (57, 32). (4)$$

Von ihnen scheiden (2;87) und (87,2) aus; denn wegen (1) wäre für sie $a \cdot j \cdot m \cdot t \leq 2 \cdot 87 \cdot 12 \cdot 31 < 105792$, was (2) widerspricht.
Daher folgt nun aus (2), dass m und t die Bedingung

$$m \cdot t = \frac{105792}{32 \cdot 57} = 2 \cdot 29$$

erfüllen. Da 2 und 29 Primzahlen sind, ist das wegen (1) nur mit $m = 2$, $t = 29$ (5) möglich; d. h., der Geburtstag kann nur ein 29. Februar gewesen sein. Diese Datumsangabe ist mit $j = 57$, d. h. für das Jahr 1957, nicht möglich, da es kein Schaltjahr war.
Also verbleibt von (4) nur die Möglichkeit $a = 57$, $j = 32$. (6)
Damit ist gezeigt: Die Zahlen a, j, m, t sind durch die Angaben eindeutig bestimmt; sie lauten wie in (5), (6) angegeben.

IV. Klasse 8

IV.I. Kryptogramme, Zahlen in Figuren

I. Runde 1

Aufgabe V00802:
Auf das Heft von Fritz ist Wasser gespritzt. Viele Ziffern sind nicht mehr leserlich. Wie muss die wiederhergestellte Aufgabe lauten?
(Jeder Punkt in der Waagerechten bedeutet eine Ziffer.)

$$
\begin{array}{cccccccccccccc}
1 & 5 & 4 & . & . & . & : & . & . & 7 & = & . & . & . \\
. & . & . & 4 & & & & & & & & & & \\
\cline{1-4}
 & 2 & 6 & 7 & . & & & & & & & & & \\
 & . & . & . & . & & & & & & & & & \\
\cline{2-5}
 & & . & . & . & . & & & & & & & & \\
 & & . & . & . & . & & & & & & & & \\
\cline{3-6}
 & & & & & - & & & & & & & &
\end{array}
$$

Lösung von Steffen Polster:
Die unbekannten Ziffern seien mit Variablen a bis r belegt, die alle im Bereich von 0 bis 9 liegen müssen:

$$
\begin{array}{cccccccccccccc}
1 & 5 & 4 & a & b & c & : & d & e & 7 & = & f & g & h \\
i & j & k & 4 & & & & & & & & & & \\
\cline{1-4}
 & 2 & 6 & 7 & b & & & & & & & & & \\
 & l & m & n & o & & & & & & & & & \\
\cline{2-5}
 & & p & q & r & c & & & & & & & & \\
 & & p & q & r & c & & & & & & & & \\
\cline{3-6}
 & & & & & 0 & & & & & & & &
\end{array}
$$

Dann folgt aus $7 \cdot fgh = ijk4$, dass $f = 2$ gilt. Aus der Subtraktion $154a - ijk4 = 267$ ergeben sich dann von hinten nach vorn $a = 1$, $k = 7$, $j = 2$ und $i = 1$:

$$
\begin{array}{cccccccccccccc}
1 & 5 & 4 & 1 & b & c & : & d & e & 7 & = & 2 & g & h \\
1 & 2 & 7 & 4 & & & & & & & & & & \\
\cline{1-4}
 & 2 & 6 & 7 & b & & & & & & & & & \\
 & l & m & n & o & & & & & & & & & \\
\cline{2-5}
 & & p & q & r & c & & & & & & & & \\
 & & p & q & r & c & & & & & & & & \\
\cline{3-6}
 & & & & & 0 & & & & & & & &
\end{array}
$$

Aus $1274 = de7 \cdot 2$ ergeben sich $d = 6, e = 3$. Ein Vielfaches von 637, dass unmittelbar kleiner oder gleich $267b$ ist, kann nur das Vierfache sein, womit $g = 4$ wird und $lmno = 2548$ ist. p wird somit, da größer als Null, gleich 1. q kann dann nur 2 oder 3 sein, wobei 3 entfällt, da das Vielfache (das Doppelte, $h = 2$) von 637 gleich 1274 ist. Rückrechnen ergibt dann noch die fehlenden Stellen $b = 5$ und $c = 4$.

$$
\begin{array}{cccccccccccccc}
1 & 5 & 4 & 1 & 5 & 4 & : & 6 & 3 & 7 & = & 2 & 4 & 2 \\
1 & 2 & 7 & 4 & & & & & & & & & & \\
\cline{1-4}
 & 2 & 6 & 7 & 5 & & & & & & & & & \\
 & 2 & 5 & 4 & 8 & & & & & & & & & \\
\cline{2-5}
 & & 1 & 2 & 7 & 4 & & & & & & & & \\
 & & 1 & 2 & 7 & 4 & & & & & & & & \\
\cline{3-6}
 & & & & & 0 & & & & & & & &
\end{array}
$$

Aufgabe 010814:
Setze in ein „magisches Quadrat“ mit 9 Feldern die Zahlen von 3 bis 11 so ein, dass die Summe jeder Reihe, jeder Spalte und jeder Diagonalen 21 beträgt! Beginne mit dem Mittelfeld!

Begründe deine Anordnung der Zahlen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Abbildung zeigt eine mögliche Lösung:

6	11	4
5	7	9
10	3	8

Es ist günstig die mittlere Zahl der Zahlen 3 bis 11, d. h. also die 7, in das Mittelfeld zu setzen. Dadurch ist gewährleistet, dass vier Paare gebildet werden können, deren Summe die noch notwendige 14 ergeben.

Die Zahlen 11 und 3 können nicht in den Eckfeldern stehen, da es nur zwei Möglichkeiten gibt, bei denen sie in Kombination mit einer anderen Zahl 21 in der Summe ergeben: $10 + 8 + 3 = 11 + 7 + 3 = 11 + 6 + 4 = 21$.

Aufgabe 020814:
Bei der folgenden Divisionsaufgabe sind die fehlenden Ziffern zu ergänzen! Wie wurden die Ziffern ermittelt? (Begründung!)

$$\begin{array}{ccccccccc l}
* & * & * & * & * & * & * & * & * & : ? = * * * * 8 * * \\
* & * & * & & & & & & & \\ \cline{1-3}
 & & * & * & * & & & & & \\
 & & * & * & * & & & & & \\ \cline{3-5}
 & & & * & * & * & & & & \\
 & & & * & * & * & & & & \\ \cline{4-6}
 & & & & & * & * & & & \\
 & & & & & * & * & & & \\ \cline{6-7}
 & & & & & & * & * & * & \\
 & & & & & & * & * & * & \\ \cline{7-9}
 & & & & & & & & 0 &
\end{array}$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die einzige Ziffer, über die wir am Anfang verfügen, ist die 8. Man sieht, dass ihr Produkt mit dem Divisor zweistellig ist, also kann der Divisor nicht größer als 12 sein.

Da der Quotient aber zwei Stellen weniger hat als der Dividend, muss der Divisor wenigstens 11 sein. Da aber das Produkt der Einerstelle des Quotienten mit dem Divisor dreistellig ist, bleibt nur die 12 übrig – gleichzeitig muss die Einerstelle selbst 9 und die Zehnerstelle 0 sein. Das ist in der ersten Abbildung zu sehen.

$$\begin{array}{ccccccccc l}
* & * & * & * & * & * & * & 0 & 8 & : 12 = * * * * 8 0 9 \\
* & * & * & & & & & & & \\ \cline{1-3}
 & & * & * & * & & & & & \\
 & & * & * & * & & & & & \\ \cline{3-5}
 & & & * & * & * & & & & \\
 & & & * & * & * & & & & \\ \cline{4-6}
 & & & & & * & * & & & \\
 & & & & & 9 & 6 & & & \\ \cline{6-7}
 & & & & & & 1 & 0 & 8 & \\
 & & & & & & 1 & 0 & 8 & \\ \cline{7-9}
 & & & & & & & & 0 &
\end{array}$$

Dann addiert man nach oben, bekommt eine 97 in der fünften Zeile von unten, die 7 überträgt man in die Hunderterstelle des Dividenden. Die nächsthöhere Zeile ist wieder dreistellig, also 108. Also wieder nach oben addieren, die nächste Zeile ist wieder 108, usw.

Die Aufgabe lautet also $109197708 : 12 = 9099809$.

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccc}
* & * & * & * & * & 7 & 7 & 0 & 8 & : 12 = & * & * & * & 9 & 8 & 0 & 9 \\
* & * & * & & & & & & & & & & & & & & \\
\cline{1-3}
 & & * & * & * & & & & & & & & & & & & \\
 & & 1 & 0 & 8 & & & & & & & & & & & & \\
\cline{3-5}
 & & & 1 & 1 & 7 & & & & & & & & & & & \\
 & & & 1 & 0 & 8 & & & & & & & & & & & \\
\cline{4-6}
 & & & & & 9 & 7 & & & & & & & & & & \\
 & & & & & 9 & 6 & & & & & & & & & & \\
\cline{6-7}
 & & & & & & 1 & 0 & 8 & & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & 0 & 8 & & & & & & & & \\
\cline{7-9}
 & & & & & & & & 0 & & & & & & & &
\end{array}
$$

Aufgabe 130812:
In $\square\square \cdot\ 9\ \square = \square\square\square$ ist jedes Kästchen $\square$ so durch eine der Ziffern 0 bis 9 zu ersetzen, dass eine richtige Gleichung entsteht.

Ermittle sämtliche Lösungen dieser Aufgabe!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, es gibt eine Lösung der Aufgabe. Dann muss das erste Kästchen durch 1 ersetzt werden; denn anderenfalls entstünde als Produkt eine vierstellige Zahl.
Ferner ist das zweite Kästchen durch 0 oder durch 1 zu ersetzen; denn sonst entstünde ebenfalls (da bereits $12 \cdot 90 = 1080$ vierstellig ist) eine vierstellige Zahl.

Wird für das zweite Kästnchen 0 eingesetzt, dann kann für das dritte Kästchen jede der Ziffern 0 bis 9 eingesetzt werden. Wird dagegen für das zweite Kästchen 1 eingesetzt, so muss das dritte Sternchen durch 0 ersetzt werden; denn sonst entstünde ein Produkt, das mindestens gleich $11 \cdot 91 = 1001$, also vierstellig, wäre.

Die somit verbliebenen Möglichkeiten für die ersten drei Kästchen führen in der Tat zu je genau einer Lösung, nämlich zu

$$
\begin{array}{llll}
10 \cdot 90 = 900, & 10 \cdot 91 = 910, & 10 \cdot 92 = 920, & 10 \cdot 93 = 930, \\
10 \cdot 94 = 940, & 10 \cdot 95 = 950, & 10 \cdot 96 = 960, & 10 \cdot 97 = 970, \\
10 \cdot 98 = 980, & 10 \cdot 99 = 990, & 11 \cdot 90 = 990. &
\end{array}
$$

Aufgabe 140811:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
A & B & C & - & D & E & = & A & F & G \\
 & : & & & & - & & & - & \\
 & & H & \cdot & H & A & = & & C & H \\
\hline
 & B & J & + & A & J & = & A & A & C
\end{array}
$$

Ermittle sämtliche Lösungen des Kryptogramms, d. h. sämtliche Möglichkeiten, die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzen, dass alle waagerecht und senkrecht stehenden Gleichungen erfüllt sind! Dabei sollen gleiche Buchstaben gleiche und verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern bedeuten.
Hinweis: Die Aufgabe ist nicht nur durch Raten zu lösen, wie häufig in Rätselzeitschriften; sondern es sind Überlegungen zur Vollständigkeit und Richtigkeit der Lösung anzugeben.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(I) Angenommen, bei einer Angabe von Ziffern für die Buchstaben $A, ..., J$ seien die Bedingungen der Aufgabe erfüllt. Dann folgt:
Da AJ und BJ je zweistellig, also kleiner als 100 sind, ist ihre Summe kleiner als 200. Da sie dreistellig ist, hat sie die erste Ziffer $A = 1$. (1)
Da somit $AJ < 20$ und $AAC \geq 110$ ist, folgt $BJ > 90$, also $B = 9$. (2)
Wegen $A = 1$ ist $ABC < 200$; wegen $ABC : H = BJ$ gilt daher $H < 200 : 90 < 3$. Da andererseits H Anfangsziffer ist, also $H \neq 0$ gilt, und da $H \neq A = 1$ ist, folgt $H = 2$. (3)

Damit ergibt sich $CH = H \cdot HA = 2 \cdot 21 = 42$, also $C = 4$. (4)
Weiter folgt $BJ = ABC : H = 194 : 2 = 97$, also $J = 7$. (5)
Sodann erhält man $DE = HA + AJ = 21 + 17 = 38$, also $D = 3$ (6) und $E = 9$. (7)
Schließlich ergibt sich $AFG = ABC - DE = 194 - 38 = 156$, also $F = 5$ (8) und $G = 6$ (9). Daher kann nur (10):

$$\begin{array}{cccccccccc}
1 & 9 & 4 & - & 3 & 8 & = & 1 & 5 & 6 \\
 & : & & & & - & & & - & \\
 & & 2 & \cdot & 2 & 1 & = & & 4 & 2 \\
\hline
 & 9 & 7 & + & 1 & 7 & = & 1 & 1 & 4
\end{array}$$

Lösung des Kryptogramms sein.

(II) Da die Angaben (1) bis (9) den verschiedenen Buchstaben A, ..., J verschiedene Ziffern zuordnen, die, wie aus (10) ersichtlich ist, alle waagerecht und senkrecht stehenden Aufgaben des Kryptogramms richtig lösen, hat dieses somit genau die angegebene Lösung.

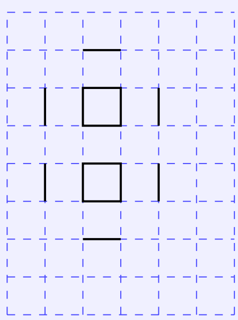
Aufgabe 200811:
Im Bild sind die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzen, dass alle waagerecht und senkrecht zu lesenden Aufgaben richtig gerechnet sind. Dabei sind gleiche Buchstaben durch gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern zu ersetzen. Eine Begründung wird nicht verlangt.

$$\begin{array}{cccccccccc}
a & a & c & - & d & e & = & f & f & e \\
 & : & & & & + & & & - & \\
 & g & b & * & g & f & = & d & b & a \\
\hline
 & h & e & + & i & g & = & k & g & f
\end{array}$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

$$\begin{array}{cccccccccc}
8 & 4 & 0 & - & 6 & 5 & = & 7 & 7 & 5 \\
 & : & & & & + & & & - & \\
 & 2 & 4 & * & 2 & 5 & = & 6 & 4 & 8 \\
\hline
 & 3 & 5 & + & 9 & 2 & = & 1 & 2 & 7
\end{array}$$

Aufgabe 200812:



Ulrike fertigt gern Stickarbeiten an.
In der Mitte eines kleinen Deckchens möchte sie ein Muster erhalten, das im Bild zur größeren Deutlichkeit auf quadratisch angeordneten Gitterlinien gezeichnet wurde.

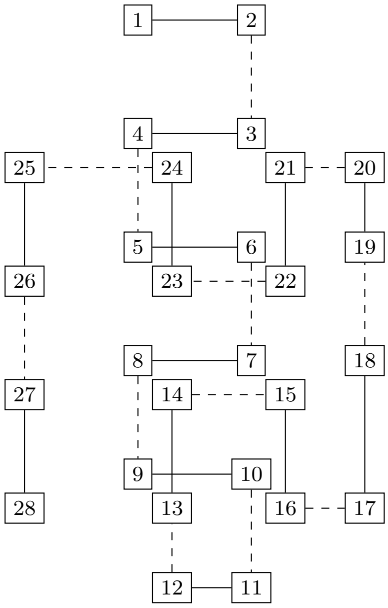
Ulrike will bei der Herstellung dieses Musters den Stoff bei jedem Nadelstich genau in einem Kreuzungspunkt von Gitterlinien durchstechen und dann den Faden so weiterführen, dass der Stoff beim nächsten Mal in einem Kreuzungspunkt durchstochen wird, der von dem vorangehenden mindestens den im Bild angegebenen Abstand a hat. Auf diese Weise soll das Muster mit einem einzigen Faden hergestellt werden, und dieser soll so kurz wie möglich sein.

Zeichne eine Möglichkeit für die zu durchstechenden Kreuzungspunkte und ihre Reihenfolge sowie für den Verlauf des Fadens auf Vorder- und Rückseite des Deckchens! Begründe, dass eine kürzere Fadenführung nicht möglich ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

Eine Möglichkeit für die Wahl der Reihenfolge der Kreuzungspunkte und den Fadenverlauf auf der Vorder- und Rückseite ist in der Abbildung angegeben. (gestrichelte Linie ... Faden auf der Rückseite, durchgezogene Linie ... Faden auf der Vorderseite)

Dabei beträgt die Fadenlänge $27a$. Da das verlangte Muster aus 14 Strecken der Länge a besteht, muss der Fadenverlauf auf der Rückseite mindestens 13 Strecken aufweisen. Jede dieser Strecken soll mindestens die Länge a haben.
Also kann es keine kürzere Fadenlänge als $27a$ geben, wenn die Bedingungen der Aufgabe erfüllt werden sollen.



Aufgabe 210811:

In nebenstehender Figur soll jedes Zeichen X durch eine der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 so ersetzt werden, dass in der zweiten bis neunten Zeile jede Zahl gleich dem absoluten Betrag der Differenz der beiden darüberstehenden Zahlen ist!

Gib eine derartige Ersetzung an!

X X X X X X X X X
X X X X X X X X
X X X X X X X
X X X X X X
X X X X X
X X X X
X X X
X X
X

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Beispiele:

3 9 8 1 9 8 1 7 6
6 1 7 8 1 7 6 1
5 6 1 7 6 1 5
1 5 6 1 5 4
4 1 5 4 1
3 4 1 3
1 3 2
2 1
1

6 1 9 8 1 9 8 1 7
5 8 1 7 8 1 7 6
3 7 6 1 7 6 1
4 1 5 6 1 5
3 4 1 5 4
1 3 4 1
2 1 3
1 2
1

Aufgabe 250812:
In einer Arbeitsgemeinschaft Mathematik stellen sich die Schüler gegenseitig Aufgaben. Rainer stellt folgendes Kryptogramm zur Diskussion:

$$
\begin{array}{cccccccc}
* & * & * & 2 & 7 & \cdot & * & * \\
\hline
 & & * & * & * & * & * & 5 \\
 & & * & * & * & * & * & \\
\hline
 & & * & * & * & * & 9 & 5 \\
\hline
\end{array}
$$

Für jedes Zeichen * soll eine Ziffer so eingesetzt werden, dass eine richtig gerechnete Aufgabe entsteht. Die eingesetzten Ziffern dürfen einander gleich oder voneinander verschieden sein. Günter ist der Meinung, dass es zu dieser Aufgabe keine Lösung gibt.

Hat er damit recht? Begründe deine Antwort!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, es gäbe eine Lösung der Aufgabe.
Dann folgte: Da das erste Teilprodukt (2. Zeile) auf 5 endet, könnte die letzte Ziffer des zweistelligen Faktors nur 5 sein, da (unter allen Produkten von 7 mit einer einstelligen Zahl) nur das Produkt $7 \cdot 5 = 35$ auf die Ziffer 5 endet.
Die vorletzte Ziffer des ersten Teilproduktes kann wegen $5 \cdot 2 + 3 = 13$ nur 3 sein. Also müsste das Addieren von 3 zur letzten Ziffer des zweiten Teilproduktes (3. Zeile) auf 9 führen; daher müsste das zweite Teilprodukt auf die Ziffer 6 enden.

Demzufolge ist die Zehnerziffer des zweistelligen Faktors gleich 8, da (unter allen Produkten von 7 mit einer einstelligen Zahl) nur das Produkt $7 \cdot 8 = 56$ auf die Ziffer 6 endet.
Damit wäre das Achtfache des fünfstelligen Faktors fünfstellig und das Fünffache (2. Zeile) der gleichen Zahl sechsstellig.

Das ist ein Widerspruch, also hat Günter recht.

Aufgabe 260811:
In das nachstehende Kryptogramm sind für die Buchstaben die Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 so einzutragen, dass für gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und für verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern stehen und dass alle angegebenen Rechenaufgaben richtig gelöst sind.

$$\begin{array}{cccccccccc}
A & B & C & - & D & B & = & E & C & C \\
 & : & & & & - & & & - & \\
 & F & G & \cdot & C & H & = & D & I & H \\
\hline
 & K & C & + & C & K & = & & D & D
\end{array}$$

a) Gib eine Eintragung an und zeige, dass sie den oben angegebenen Bedingungen genügt!

b) Untersuche, ob es außer der von dir gefundenen Eintragung weitere Möglichkeiten gibt. ist dies der Fall, dann ermittle alle Eintragungen, die den Bedingungen genügen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Um eine in (a) geforderte Eintragung (siehe unten) zu finden, kann man mit Überlegungen zu Aufgabe b) beginnen, indem man folgende Schlüsse zieht: Wenn eine Eintragung allen Bedingungen der Aufgabenstellung genügt, so folgt: Nach der Gleichung in der 1. Zeile hat die Summe aus der Einerziffer C der rechten Seite und der Einerziffer B wieder die Einerziffer C. Daher muss $B = 0$ sein.
Danach folgt durch Betrachtung der Zehnerziffern weiter $C + D = 10$.

Aus der 2. Spalte folgt $K + H = 10$ und dann weiter $2C + 1 = D$. Setzt man dies in $C + D = 10$ ein, so ergibt sich $3C + 1 = 10$, also $C = 3$ und damit $D = 7$.

Hiernach ergibt sich aus der 3. Zeile	K	=	4
und damit (wegen $K + H = 10$)	H	=	6.
Aus der 3. Spalte folgt nun	I	=	5, $E = 8$
und damit aus der 1. Zeile	A	=	9
und aus der 1. Spalte	F	=	2, $G = 1$.

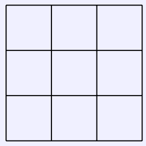
Als Eintragung, die zu a) anzugeben ist, wurde so

$$\begin{array}{cccccccccc}
9 & 0 & 3 & - & 7 & 0 & = & 8 & 3 & 3 \\
 & : & & & & - & & & - & \\
 & 2 & 1 & \cdot & 3 & 6 & = & 7 & 5 & 6 \\
\hline
 & 4 & 3 & + & 3 & 4 & = & & 7 & 7
\end{array}$$

gefunden, und als Antwort zu b) hat sich ergeben, dass es keine anderen Möglichkeiten geben kann, die Bedingungen zu erfüllen. Zur vollständigen Bearbeitung der Aufgabe a) ist dann noch festzustellen, dass die gefundene Eintragung für gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und für verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern verwendet und dass bei dieser Eintragung alle angegebenen Rechenaufgaben richtig gelöst sind. Daher erfüllt genau die angegebene Eintragung alle geforderten Bedingungen.

Aufgabe 320811:
In die Felder eines 3×3-Quadrates (siehe Abbildung) sollen die Zahlen

-0,5; 1; -2; 2,5; -3,5;
4; -5; 5,5; -6,5



so eingetragen werden, dass in jedes Feld genau eine dieser Zahlen kommt und dabei in allen drei Zeilen, in allen drei Spalten und in allen beiden Diagonalen die gleiche Summe entsteht.

a) Gib eine Eintragung an, die alle diese Forderungen erfüllt!

b) Untersuche, ob es noch andere solche Eintragungen gibt, die sich nicht nur durch Drehung oder Spiegelung von einer gefundenen unterscheiden!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

-2	5,5	-5
-3,5	-0,5	2,5
4	-6,5	1

a) Die Abbildung zeigt eine Eintragung der geforderten Art.

b) Ein Beweis, dass es bis auf Drehung oder Spiegelung keine weitere gibt (zugleich ein Weg zum Auffinden einer derartigen Eintragung) ist etwa der folgende:
Die Summe aller neun einzutragenden Zahlen beträgt -4,5 . Also muss in jeder der drei Zeilen die Summe -1,5 kommen.

Dies ist dann auch die Summe für jede Spalte und jede Diagonale.
Alle Möglichkeiten, aus den vorgegebenen Zahlen dreigliedrige Summen mit dem Wert -1,5 zusammenzustellen, sind (bis auf die Reihenfolge der Summanden):

-0,5 +1 -2 ; -0,5 +2,5 -3,5 ; -0,5 +4 -5 ; -0,5 +5,5 -6,5 ;
1 +2,5 -5 ; 1 +4 -6,5 ; -2 -3,5 +4 ; -2 -5 +5,5 .

Der einzige Summand, der in vier dieser Summen vorkommt, ist -0,5. Also muss diese Zahl in das Mittelfeld kommen; denn es ist Bestandteil von vier Reihen (eine Zeile, eine Spalte, zwei Diagonalen), in denen der vorgeschriebene Summenwert erreicht werden soll.
Außer -0,5 sind 1 ; -2 ; 4 ; -5 die einzigen Summanden, die jeweils in drei der Summen vorkommen. Diese Zahlen gehören folglich in die Eckfelder; auf eine Diagonale 1 und -2 , auf die andere 4 und -5 . Die Verteilung der übrigen Zahlen folgt dann eindeutig aus der Forderung an die Zeilen- und Spaltensummen.

Aufgabe 330812:

Ermittle alle Möglichkeiten, die leeren Felder im folgenden Rechenschema so durch Ziffern zu ersetzen, dass eine richtig gerechnete Multiplikationsaufgabe entsteht!

$$\begin{array}{cccccccc}
\square & 8 & \square & \cdot & 4 & \square & 2 \\
\hline
 & & & & 7 & \square & \square \\
 & & & 3 & \square & \square & \\
 & \square & \square & \square & \square & & \\
\hline
 & \square & \square & \square & \square & \square & 0
\end{array}$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Da die Einerziffer des Produktes 0 ist und die Einerziffer des zweiten Faktors 2 ist, kann die Einerziffer des ersten Faktors nur entweder 0 oder 5 sein.

In beiden Fällen gilt für das erste Teilprodukt:
Seine Einerziffer ist 0, beim Berechnen der Zehnerziffer ist als Übertrag aus der Einerstelle nur 0 oder 1 möglich. Diese Berechnung führt also auf $2 \cdot 8 + 0 = 16$ oder auf $2 \cdot 8 + 1 = 17$, in beiden Fällen mit dem

Übertrag 1 in die Hunderterstelle.

Also hat sich, als die Hunderterziffer h des ersten Faktors mit 2 multipliziert und dann dieser Übertrag 1 addiert wurde, die angegebene Hunderterziffer 7 des ersten Teilprodukts ergeben. Aus diesem Sachverhalt $2 \cdot h + 1 = 7$ folgt $h = 3$. Damit ist insgesamt gezeigt: Der erste Faktor lautet entweder 380 oder 385.

Das zweite Teilprodukt kann somit nur dann die angegebene Hunderterziffer 3 haben, wenn die Zehnerziffer des zweiten Faktors 1, dieser also insgesamt 412 lautet. Daher können nur die Eintragungen

$$\begin{array}{ccccccc} 3 & 8 & 0 & \cdot & 4 & 2 & 2 \\ \hline & & & & 7 & 6 & 0 \\ & & & 3 & 8 & 0 & \\ & 1 & 5 & 2 & 0 & & \\ \hline & 1 & 5 & 6 & 5 & 6 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccc} 3 & 8 & 5 & \cdot & 4 & 1 & 2 \\ \hline & & & & 7 & 7 & 0 \\ & & & 3 & 8 & 5 & \\ & 1 & 5 & 4 & 0 & & \\ \hline & 1 & 5 & 8 & 6 & 2 & 0 \end{array}$$

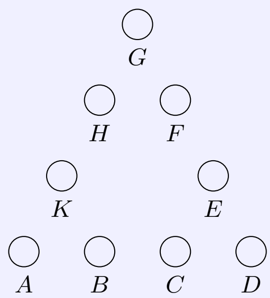
den Forderungen der Aufgabe entsprechen. Beide führen in der Tat zu richtig gerechneten Multiplikationsaufgaben.

II. Runde 2

Aufgabe 100821:
In die neun Felder A, B, C, D, E, F, G, H, K der nebenstehenden Figur sind die natürlichen Zahlen von 1 bis 9, jede genau in eines der Felder, so einzutragen, dass die Summen s_1, s_2 und s_3 der in den Feldern A, B, C, D bzw. D, E, F, G bzw. G, H, K, A stehenden Zahlen einander gleich sind.

a) Welches ist der kleinste und welches ist der größte Wert, den diese (einander gleichen) Summen unter den genannten Bedingungen annehmen können?

b) Gib je eine Möglichkeit an, wie dieser kleinste bzw. dieser größte Wert erreicht werden kann!



Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die in die Felder $A, B, C, D, E, F, G, H, K$ eingetragenen Zahlen seien $a, b, c, d, e, f, g, h, k$ genannt. Dann gilt für

$$s_1 = a + b + c + d, \quad s_2 = d + e + f + g, \quad s_3 = g + h + k + a \tag{1}$$

laut Aufgabenstellung $s_1 = s_2 = s_3$ (2) und

$$a + b + c + d + e + f + g + h + k = 45 \tag{3}$$

Aus (1), (2) und (3) folgt $3s_1 = s_1 + s_2 + s_3 = 45 + a + d + g$.

Daher ist $3s_1$ und folglich s_1 dann am kleinsten (bzw. am größten); wenn jeweils dasselbe für die Summe $a+d+g$ gilt. Die kleinste (bzw. größte) Summe, die aus drei verschiedenen der natürlichen Zahlen $1, ..., 9$ gebildet werden kann, ist $1 + 2 + 3 = 6$ (bzw. $7 + 8 + 9 = 24$).
Daher kann der kleinste Wert von s_1 nicht kleiner als $(45 + 6) : 3 = 17$ sein (bzw. der größte nicht größer als $(45 + 24) : 3 = 23$).
Wenn man nun noch je eine der in der Aufgabenstellung beschriebenen Eintragungen finden kann, bei denen $s_1 = 17$ (bzw. $s_1 = 23$) wird, so ist einerseits gezeigt, dass diese beiden Werte schon selbst der kleinste bzw. größte Wert von s_1 sind, und andererseits sind damit auch zwei Möglichkeiten derart gefunden, wie es in b) verlangt war.
Zwei solche Eintragungen sind z. B.:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & \underset{G}{1} & & & \\
 & & \underset{H}{6} & & \underset{F}{4} & & \\
 & \underset{K}{8} & & & & \underset{E}{9} & \\
\underset{A}{2} & & \underset{B}{5} & & \underset{C}{7} & & \underset{D}{8}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccc}
 & & & \underset{G}{7} & & & \\
 & & \underset{H}{2} & & \underset{F}{3} & & \\
 & \underset{K}{6} & & & & \underset{E}{4} & \\
\underset{A}{8} & & \underset{B}{1} & & \underset{C}{5} & & \underset{D}{9}
\end{array}$$

Aufgabe 130821:
In der folgenden Aufgabe sind die Buchstaben a, b, c und das Zeichen $*$ durch jeweils eine der Ziffern 0 bis 9 so zu ersetzen, dass eine richtig gelöste und in üblicher Weise geschriebene Multiplikationsaufgabe entsteht.

$$\begin{array}{ccccccc}
a & b & c & \cdot & b & a & c \\ \hline
 & * & * & * & b & & \\
 & & & * & * & a & \\
 & & & * & * & * & * \\ \hline
 & * & * & * & * & * & *
\end{array}$$

Dabei bedeuten gleiche Buchstaben gleiche, verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern. An die Ziffern, die für die Zeichen $*$ zu setzen sind, werden keine Gleichheits- oder Verschiedenheitsforderungen gestellt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, es liege eine Eintragung der verlangten Art vor. Dann folgt:
Das Produkt aus abc und a ist dreistellig, das aus abc und b vierstellig. Also gilt $a < b$. Wäre nun $a \geq 3$, so wäre daher $b \geq 4$ und somit das Produkt aus abc und a vierstellig, im Widerspruch zur Aufgabe.
Das Produkt aus abc und a endet auf a. Wäre $a = 1$, so folgte, dass dieses Produkt auf c enden würde, im Widerspruch zu $a \neq c$. Daher und weil a als Anfangsziffer von abc nicht 0 ist, gilt $a = 2$.

Da somit das Doppelte der Zahl abc auf 2 endet, muss auch das Doppelte von c auf 2 enden. Das gilt nur für $c = 1$ oder $c = 6$. Da das Produkt aus abc und c vierstellig ist, ist $c \neq 1$. Also gilt $c = 6$.

Da $246 \cdot 4 = 984$ dreistellig ist, das Produkt aus abc und b aber vierstellig sein soll, gilt $b \neq 4$. Unter den hiernach für b verbleibenden Möglichkeiten $1, 3, 5, 7, 8, 9$ erfüllt nur die Zahl 8 die Bedingung, dass das Produkt der auf 6 endenden Zahl mit b auf b endet. Daher gilt $b = 8$.

Somit kann nur die Eintragung

$$\begin{array}{ccccccc}
2 & 8 & 6 & \cdot & 2 & 8 & 6 \\ \hline
 & 2 & 2 & 8 & 8 & & \\
 & & & 5 & 7 & 2 & \\
 & & & 1 & 7 & 1 & 6 \\ \hline
 & 2 & 3 & 6 & 2 & 3 & 6
\end{array}$$

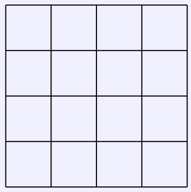
den Anforderungen genügen. Da sie eine, richtig gelöste Multiplikationsaufgabe darstellt und da $a = 2$, $b = 8$, $c = 6$ paarweise verschieden sind, erfüllt sie die Bedingungen der Aufgabe.

Aufgabe 290824:
Das 4×4-Felder-Quadrat im Bild soll so in vier Teile zerlegt werden, dass folgende Forderungen erfüllt sind:

(1) Jedes Teil besteht aus genau vier Feldern.

(2) Jedes Teil ist derart zusammenhängend, dass sich je zwei Mittelpunkte seiner Felder durch einen Weg miteinander verbinden lassen, der ganz in dem Teil verläuft und nur aus Strecken besteht, von denen jede zu einer Seitenkante des Quadrates parallel ist.

(3) Jedes Teil enthält alle vier Zahlen 1, 2, 3, 4.

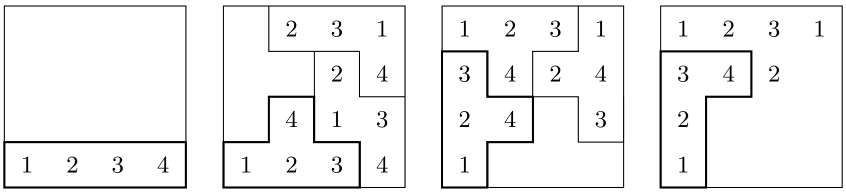


Gib alle Zerlegungen an, die diese Forderungen erfüllen! Weise nach, dass es keine weiteren derartigen Zerlegungen gibt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

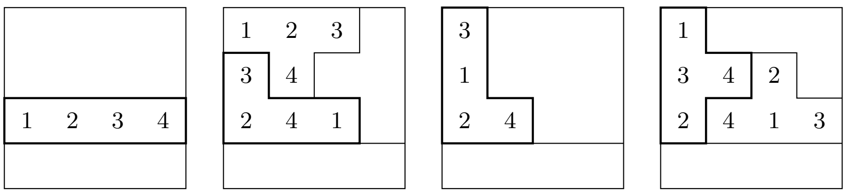
a4	b4	c4	d4
a3	b3	c3	d3
a2	b2	c2	d2
a1	b1	c1	d1

Die Felder seien wie in der Abbildung bezeichnet. Bei jeder Zerlegung der geforderten Art gilt:
Ein Teil muss das Feld a1 enthalten. In diesem Teil muss sich an a1 entweder b1 oder a2 anschließen, da in diesen beiden Feldern dieselbe Zahl 2 steht.
Die einzige Möglichkeit für ein Feld mit 3 ist dann c1 bzw. a3, und für ein Feld mit 4 gibt es nur die Möglichkeiten A, B, C, D in den entsprechenden, nachfolgenden Abbildungen A, B, C, D. Von ihnen scheidet D aus, da hierbei ein Teil die Felder a4, b4, c4 mit den Zahlen 1, 2, 3 enthalten müsste und sich daran kein Feld mit 4 anschließen könnte.



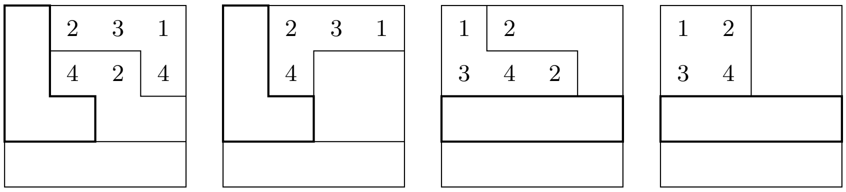
A *B* *C* *D*

Im Fall C folgt, dass zwei weitere Teile a4, b4, c4, b3 und d4, d3, da, c3 lauten müssen, wonach als viertes Teil b1, c1, d1, c2 verbleibt.
Im Fall B folgt, dass zwei weitere Teile d1, d2, c2, c3 und d3, d4, c4, b4 lauten müssen, wonach als viertes Teil a2, a3, a4, b3 verbleibt.



AA *AB* *AC* *AD*

Im Fall A gilt: Ein Teil muss das Feld a2 enthalten. Die einzigen Möglichkeiten für ein Feld mit 1 in diesem Teil sind c2 und a4.
Gehört c2 dazu, so auch b2 mit 4, und für ein Feld mit 3 gibt es nur die Möglichkeiten AA, AB. Gehört aber a4 dazu, so auch a3 mit 3, und für ein Feld mit 4 gibt es nur die Möglichkeiten AC, AD.
Im Fall AD folgt, dass ein Teil b2, c2, d2, c3 lauten muss, wonach b4, c4, d4, d3 verbleibt.
Im Fall AB folgt, dass ein Teil a4, b4, c4, b3 lauten muss, wonach d2, d3, d4, c3 verbleibt.



ACA *ACB* *AAA* *AAB*

Im Fall AC muss ein Teil das Feld b3 enthalten, und daran muss sich entweder c3 oder b4 anschließen, da in beiden 2 steht. Schließt sich c3 an, so muss das vierte Teil b4, c4, d4, d3 lauten: ACA.
Schließt sich dagegen b4 an, so muss dieses Teil b3, b4, c4, d4 lauten: ACB.
Im Fall AA gehören a4 und b4 entweder zu verschiedenen Teilen oder nicht. Gehören sie zu verschiedenen Teilen, so muss ein Teil a4, a3, b3, c3 lauten: AAA.
Gehören sie zum gleichen Teil; so muss als Feld mit 4 darin b3 auftreten, es lautet also a4, b4, b3, a3: AAB.

Damit (und nach Oberprüfen der Forderungen auch zu den jeweils übriggebliebenen Teilen) ist bewiesen, dass die Forderungen genau von den acht Zerlegungen B, C, AB, AD, AAA, AAB, ACA, ACB erfüllt werden.

III. Runde 3

Aufgabe 030834:
In der folgenden Aufgabe sind die Buchstaben durch jeweils eine der Ziffern 0 bis 9 zu ersetzen. Gleiche Buchstaben bedeuten gleiche, verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern.

$$\begin{array}{cccccc} & \mathrm{f} & \mathrm{o} & \mathrm{r} & \mathrm{t} & \mathrm{y} \\ + & & & \mathrm{t} & \mathrm{e} & \mathrm{n} \\ + & & & \mathrm{t} & \mathrm{e} & \mathrm{n} \\ \hline & \mathrm{s} & \mathrm{i} & \mathrm{x} & \mathrm{t} & \mathrm{y} \end{array}$$

Lösung von Korinna Grabski:
Die Lösung lautet:

$$\begin{array}{cccccc} & 2 & 9 & 7 & 8 & 6 \\ + & & & 8 & 5 & 0 \\ + & & & 8 & 5 & 0 \\ \hline & 3 & 1 & 4 & 8 & 6 \end{array}$$

Zuerst erkennt man, dass n=0 ist, da die letzte Spalte addiert y ohne Übertrag ergibt. Dann ist klar, dass e=5 ist, da die vorletzte Spalte addiert t ergibt. In diesem Falle ergibt sich aber ein Übertrag von 1.

In der zweiten Spalte muss es einen Übertrag geben, damit sich die erste Spalte ändert. Die Addition in der zweite Spalte erfolgt nur mit dem Übertrag aus der dritten Spalte, der 1 oder 2 sein kann. Da 0 bereits vergeben ist, muss i damit 1 sein. Somit ist o dann 9, und es gab einen Übertrag von 2.

Jetzt müssen noch die Gleichungen $f + 1 = s$ (aus der 1. Spalte) und $r + 2 \cdot t + 1 = 20 + x$ (aus der 3. Spalte + Überträge) erfüllt werden. Gleicht man alle möglichen Zahlenkombinationen ab, bleibt nur eine mögliche übrig: f=2, s=3, r=7, t=8 und x=4.

Für y bleibt nur noch die 6 übrig.

Aufgabe 210831:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
A & B & B & C & - & D & C & E & = & F & B & E & G \\
 & & & : & & & & + & & & & & - \\
 & & C & D & \cdot & & H & E & = & J & D & A & F \\
\hline
 & J & F & K & + & D & D & A & = & J & J & F & C
\end{array}
$$

sollen die Buchstaben so durch Ziffern (0, 1, 2, ... , 9) ersetzt werden, dass alle waagerechten und senkrechten Aufgaben richtig gerechnet sind. Insbesondere soll die Ziffer 0 nicht als Anfangsziffer einer mehrstelligen Zahl auftreten. Gleiche Buchstaben sollen durch gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern ersetzt werden.

Ermittle alle Ersetzungen, die diese Forderungen erfüllen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn eine Ersetzung die gestellten Forderungen erfüllt, so folgt:
Da die Summe zweier dreistelliger Zahlen stets kleiner als 2000 ist, folgt aus der dritten Zeile

$$J = 1 \tag{1}$$

Ferner folgt: Wäre $D \leq 8$, so wäre $JFK + DDA < 200 + 900$ im Widerspruch zu $JFC \geq 1000$. Also ist

$$D = 9 \tag{2}$$

Demnach ist $B < 9$; folglich muss in der dritten Spalte die Anfangsziffer F des Minuenden sowohl um die Anfangsziffer $J = 1$ des Subtrahenden als auch um einen Übertrag 1 vermindert werden, um die Anfangsziffer $J = 1$ der Differenz zu erhalten. Daraus folgt

$$F = 3 \tag{3}$$

Aus Zeile 1 folgt, dass die Anfangsziffer A des vierstelligen Minuenden nur deshalb von der Anfangsziffer $F = 3$ der vierstelligen Differenz verschieden sein kann, weil sie um den Übertrag 1 vermindert wurde; denn der Subtrahend in dieser Zeile ist nur dreistellig. Also ist

$$A = 4 \tag{4}$$

Aus der zweiten Zeile und der Primfaktorzerlegung $1943 = 29 \cdot 67$ folgt unter Berücksichtigung von (2)

$$C = 2, \quad H = 6, \quad E = 7 \tag{5}$$

Damit ergibt die dritte Zeile

$$K = 8 \tag{6}$$

und die dritte Spalte

$$B = 0, \quad G = 5 \tag{7}$$

Folglich kann nur die in (1) bis (7) genannte Ersetzung die Forderungen der Aufgabe erfüllen.

II. Sie erfüllt diese Forderungen; denn die Buchstaben werden dabei so durch Ziffern ersetzt, dass gleiche Buchstaben durch gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern ersetzt sind und dass alle waagerechten und senkrechten Aufgaben des Schemas

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
4 & 0 & 0 & 2 & - & 9 & 2 & 7 & = & 3 & 0 & 7 & 5 \\
 & & & : & & & & + & & & & & - \\
 & & 2 & 9 & \cdot & & 6 & 7 & = & 1 & 9 & 4 & 3 \\
\hline
 & 1 & 3 & 8 & + & 9 & 9 & 4 & = & 1 & 1 & 3 & 2
\end{array}
$$

richtig gerechnet sind, insbesondere 0 nicht als Anfangsziffer einer mehrstelligen Zahl auftritt.

Also erfüllt genau die Ersetzung (1) bis (7) alle Forderungen der Aufgabe.

IV.II. Logik, Rätsel, Mengenlehre

I. Runde 1

Aufgabe V00805:
Peter ist ein eifriger Lottospieler. Die Gesamtsumme seiner fünf Lottozahlen beträgt 167. Die erste Zahl ergibt mit sich selbst multipliziert die vierte Zahl.
Das Doppelte der ersten Zahl ergibt die zweite Zahl, die verstellt (Einer gegen Zehner vertauscht) gleich der dritten ist. Multipliziert man die zweite mit der dritten Zahl und die zweite mit der vierten Zahl, so ergibt die halbe Differenz beider Produkte die fünfte Zahl.
Wie lauten Peters Lottozahlen?
Hinweis: Beim damals üblichen Lotto wurden 5 Zahlen aus 90 möglichen getippt.

Lösung von Steffen Polster:
Die Lottozahlen seien a, b, c, d und e. Die zweite Zahl habe die Form $b = 10x + y$ mit $1 \leq x,y \leq 9$. Nach der Aufgabenstellung ergeben sich die Gleichungen

$$a + b + c + d + e = 167 \tag{1}$$
$$a^2 = d \tag{2}$$
$$2a = b = 10x + y \tag{3}$$
$$10y + x = c \tag{4}$$
$$|b \cdot c - b \cdot d| = 2e \tag{5}$$

Da d nach (2) Quadratzahl von a ist und 90 Zahlen zur Verfügung stehen, gilt für a: $1 \leq a \leq 9$. Nach (3) muss das Doppelte von a größergleich 10 sein und da nicht nur b sondern auch c echt zweistellig sein soll, sogar $a > 10$.

Damit verbleiben die Möglichkeiten der nachfolgenden Tabelle:

a	b	c	d	e	Summe
6	12	21	36	90	173
7	14	41	49	56	167
8	16	61	64	24	173
9	18	81	81	-	

$a = 9$ entfällt, da dann $c = d$ gelten würde. Von den drei verbleibenden Fällen ergibt nur $a = 7$ als Summe der Zahlen 167. Peters Lottozahlen sind 7, 14, 41, 49 und 56.

Aufgabe V10814:
Denkaufgabe:
Fritz sagt: „Ich habe mich in meinem Leben erst dreimal geirrt."
Franz erwidert:„Dann hast du dich jetzt zum vierten Mal geirrt."
Weise nach, dass Franz mit dieser Behauptung unter allen Umständen unrecht hat!

Lösung von Steffen Polster:
1. Fall:

Fritz hat sich wirklich erst dreimal geirrt. Dann hat er sich jetzt nicht geirrt, weil er ja die Wahrheit gesprochen hat. Franz hat also in diesem Falle unrecht.

2. Fall:

Fritz hat sich bisher nicht dreimal, sondern mehr (oder weniger) als dreimal geirrt. Dann hat er sich eben zwar geirrt, aber bestimmt nicht zum vierten Mal. Infolgedessen hat Franz auch in diesem Fall (und damit in jedem Fall) unrecht.

Aufgabe 030814:
Rolf war doppelt so alt wie Inge, als er so alt war, wie sie jetzt ist. Jetzt sind beide zusammen 45 Jahre alt.
Wie alt ist jeder?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Inge sei früher x Jahre alt gewesen, dann war Rolf damals $2x$ Jahre. Heute ist Inge also $2x$ Jahre und Rolf somit $3x$ Jahre. Beide zusammen sind heute $5x$ Jahre. Daraus erhält man $x = 9$.

Folglich ist Rolf 27 Jahre und Inge 18 Jahre alt.

Aufgabe 070811:
Drei Schüler einer Klasse, Thomas (T), Rainer (R) und Bernd (B), hatten sich bei einem Sportfest für den Endkampf im Hochsprung qualifiziert und eroberten dort die ersten drei Plätze. Klaus, der in einer anderen Disziplin starten musste, erkundigte sich später bei Elke nach dem Ausgang beim Hochsprung. Diese konnte sich nicht mehr genau entsinnen und sagte:

> „Thomas wurde nicht Erster, Rainer nicht Zweiter, aber Bernd wurde Zweiter.“

Später stellte sich heraus, dass Elke einmal etwas Richtiges gesagt, sich aber in den beiden anderen Fällen geirrt hatte. Außerdem ist bekannt, dass alle drei Schüler unterschiedliche Höhen übersprangen.

Welcher Schüler wurde Erster, Zweiter, Dritter?

Lösung von Manuela Kugel:
Die drei Aussagen kann man mit der Schreibweise Thomas (T), Rainer (R) und Bernd (B) wie folgt darstellen:

$$T \neq 1 \quad (1) \qquad ; \qquad R \neq 2 \quad (2) \qquad ; \qquad B = 2 \quad (3)$$

Wenn Elke genau eine Aussage korrekt und genau zwei falsch gemacht hat, dann müssen folgende drei Fälle unterschieden werden:

1.Fall: (1) ist richtig und (2), (3) sind falsch: $T \neq 1 \quad (1*) \quad ; \quad R = 2 \quad (2*) \quad ; \quad B \neq 2 \quad (3*)$
Aus (1*) und (2*) folgt (4*) $T = 3$. Daraus folgt (5*) $B = 1$. Alle drei Aussagen (1*), (2*), (3*) sind erfüllt.

2.Fall: (2) ist richtig und (1), (3) sind falsch: $T = 1 \quad (1*) \quad ; \quad R \neq 2 \quad (2*) \quad ; \quad B \neq 2 \quad (3*)$
Aus (1*), (2*) und (3*) folgt, dass niemand Zweiter sein kann. Dies ist ein Widerspruch, daher ist der Fall nicht erfüllbar.

3.Fall: (3) ist richtig und (1), (2) sind falsch: $T = 1 \quad (1*) \quad ; \quad R = 2 \quad (2*) \quad ; \quad B = 2 \quad (3*)$
Aus (2*) und (3*) folgt, dass es zwei Zweite gibt. Dies ist ein Widerspruch, daher ist der Fall nicht erfüllbar.
Demzufolge gibt es exakt eine Lösung: Bernd war Erster, Rainer Zweiter und Thomas Dritter.

Aufgabe 130813:
Beim mathematischen Wettbewerb der Schülerzeitschrift „alpha“ erhielten drei Schüler einer Schule Preise. Auf die Frage nach ihren Vornamen wurden folgende sieben Antworten gegeben:

(1) Christian, Uwe, Iris	(2) Eva, Elke, Uwe	(3) Roland, Marion, Bernd
(4) Iris, Heike, Uwe	(5) Roland, Heike, Bernd	(6) Eva, Marion, Christian
(7) Christian, Eva, Elke.		

Es stellte sich heraus, dass in genau einer der Antworten alle drei Vornamen richtig, in genau zwei Antworten genau zwei Vornamen falsch und in genau drei Antworten alle drei Vornamen falsch angegeben wurden.

Ermittle die Vornamen der drei Schüler, die einen Preis erhielten!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Zunächst folgt aus der Aufgabe, dass in der restlichen Antwort genau zwei Namen richtig angegeben waren. Daher sind in einer Antwort genau dann alle drei Vornamen richtig angegeben, wenn in genau zwei weiteren Antworten genau einer dieser Vornamen und in genau einer weiteren Antwort genau zwei dieser Vornamen vorkommen.

Das trifft nicht für
(1) zu; denn in den drei Antworten (2), (6), (7) tritt je genau einer der Namen aus (1) auf,

(2) zu; denn in den drei Antworten (1), (4), (6) tritt je genau einer der Namen aus (2) auf,

(6) zu; denn in den drei Antworten (1), (2), (3) tritt je genau einer der Namen aus (6) auf,

(3) zu; denn nur in der Antwort (6) tritt genau einer der Namen aus (3) auf,

(5) zu; denn nur in der Antwort (4) tritt genau einer der Namen aus (5) auf,

(7) zu; denn nur in der Antwort (1) tritt genau einer der Namen aus (7) auf.

Daher kann nur die Antwort (4) richtig sein; die Vornamen der Preisträger lauten mithin Iris, Heike und Uwe.

Aufgabe 160812:
In einem VEB macht es sich erforderlich, für jeden der Arbeiter Arnold, Bauer, Donath, Funke, Große, Hansen, Krause und Lehmann langfristige Qualifizierungsmaßnahmen zu planen. Innerhalb von vier Wochen, und zwar in der Zeit vom 1.11.1976 (Montag) bis 27.11.1976 (Sonnabend) kann jeweils für drei Tage (entweder von Montag bis Mittwoch oder von Donnerstag bis Sonnabend) je ein Arbeiter zu einem dreitägigen Lehrgang delegiert werden.

Da die laufende Produktion nicht gefährdet werden darf, kann eine Freistellung von der Arbeit nur zu bestimmten Zeiten erfolgen:

(1) Arnold kann nicht in der dritten Woche teilnehmen.
(2) Bauer ist in der ersten Hälfte jeder Woche im Betrieb nicht entbehrlich, aber auch nicht vom 11. bis 13.11. und nicht in der zweiten Hälfte der vierten Woche.
(3) Donath kann nur in der gleichen Woche wie Lehmann gehen.
(4) Funke kann nur in der ersten oder zweiten Woche freigestellt werden.
(5) Große kann nur vom 4. bis 6.11. oder vom 18. bis 20.11.76 oder in der zweiten oder vierten Woche jeweils in der zweiten Hälfte berücksichtigt werden.
(6) Hansen kann nur in der zweiten oder dritten Woche jeweils in der zweiten Hälfte eingesetzt werden, jedoch nicht in der Woche, in der Funke zum Lehrgang geht.
(7) Krause kann nur in der ersten Woche oder vom 22. bis 24.11.76 zum Lehrgang geschickt werden.
(8) Lehmann kann nur in der ersten Hälfte jeder Woche teilnehmen.

Ermittle sämtliche Möglichkeiten, unter diesen Bedingungen die vorgesehenen Qualifizierungsmaßnahmen durchzuführen!
Gib dabei für jeden der Arbeiter die Zeit an, in der er zum Lehrgang delegiert wird!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wir fertigen eine Tabelle an, in der alle Zeiten, in denen eine Teilnahme am Lehrgang nicht erfolgen kann, durch ein x gekennzeichnet werden. Die Kenn-Nr. bezeichnet an erster Stelle die Woche, an zweiter Stelle die Wochenhälfte. Die Namen der Arbeiter werden nur mit dem Anfangsbuchstaben angegeben.

Kenn-Nr.	Zeit vom	A	B	D	F	G	H	K	L	Teilnehmer
1.1.	1.bis 3.11.		x	x	(e)	x	x			Funke
1.2.	4.bis 6.11.		(d)				x		x	Bauer
2.1.	8.bis 10.11.	(h)	x	x		x	x	x		Arnold
2.2.	11.bis 13.11.		x				(c)	x	x	Hansen
3.1.	15.bis 17.11.	x	x	x	x	x	x	x	(a)	Lehmann
3.2.	18.bis 20.11.	x		(b)	x			x	x	Donath
4.1.	22.bis 24.11.		x	x	x	x	x	(f)		Krause
4.2.	25.bis 27.11.		x		x	(g)	x	x	x	Große

Die Spalte D ergibt sich aus (8). Da L nur in der ersten Hälfte jeder Woche teilnehmen kann, kann D zu diesem Zeitpunkt nicht eingesetzt werden.

(a) Aus Zeile 3.1. ergibt sich, dass L nur vom 15. bis 17.11. eingesetzt werden kann. In Spalte L sind somit alle leeren Felder zu streichen.
(b) Damit wird nach (3) D vom 18. bis 20.11. abgeordnet. In Zeile 3.2. und Spalte D werden nun alle leeren Felder gestrichen.

Unter Fortsetzung dieses Verfahrens: Aufsuchen der einzigen Leerstelle in der jeweiligen Spalte bzw. Zeile und anschließendes Streichen der Leerstellen in der dazugehörigen Zeile bzw. Spalte ergibt sich:

(c) H nimmt vom 11. bis 13.11. teil, und für F entfällt nach (6) der 8. bis 10.11.
(d) Bauer nimmt vom 4. bis 6.11.,
(e) Funke vom 1. bis 3.11.,
(f) Krause vom 22. bis 24.11.,
(g) Große vom 25. bis 27.11.,
(h) Arnold nimmt vom 8. bis 10.11.1976 teil.

Es ist also möglich, und zwar genau auf eine Weise, in der vorgegebenen Zeit jeweils einen Arbeiter zu qualifizieren. Die Reihenfolge der Belegung ergibt sich aus der Tabelle.

Aufgabe 170813:
Der Name eines bedeutenden Mathematikers wird mit fünf Buchstaben geschrieben. Den Buchstaben A, B, C, ..., Y, Z des Alphabets seien in dieser Reihenfolge die Zahlen 1, 2, 3, ..., 25, 26 zugeordnet. Setzt man für die Buchstaben des erwähnten Namens die ihnen zugeordneten Zahlen ein, so beträgt die Summe der

(1) dem ersten und zweiten Buchstaben zugeordneten Zahlen 26,

(2) dem ersten und dritten Buchstaben zugeordneten Zahlen 17,

(3) dem ersten und vierten Buchstaben zugeordneten Zahlen 10,

(4) dem ersten und fünften Buchstaben zugeordneten Zahlen 23,

(5) allen fünf Buchstaben zugeordneten Zahlen 61.

Ermittle den Namen dieses Mathematikers!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die dem ersten Buchstaben des gesuchten Namens zugeordnete Zahl sei x. Dann lautet wegen

(1) die dem zweiten Buchstaben zugeordnete Zahl $(26 - x)$,
(2) die dem dritten Buchstaben zugeordnete Zahl $(17 - x)$,
(3) die dem vierten Buchstaben zugeordnete Zahl $(10 - x)$,
(4) die dem fünften Buchstaben zugeordnete Zahl $(23 - x)$.

Wegen (5) erhält man mithin

$$x + (26 - x) + (17 - x) + (10 - x) + (23 - x) = 61$$

woraus sich $x = 5$ ergibt.
Die den fünf Buchstaben des gesuchten Namens zugeordneten Zahlen lauten daher der Reihe nach 5, 21, 12, 5, 18. Ihre Ersetzung durch die ihnen zugeordneten Buchstaben des Alphabets ergibt:
E, U, L, E, R. Der gesuchte Name des Mathematikers ist Euler.

Aufgabe 180811:
Die FDJler Arnim, Bertram, Christian, Dieter, Ernst und Fritz waren Teilnehmer an einem 400-m-Lauf. Keine zwei von ihnen liefen zur gleichen Zeit durchs Ziel.

Vorher waren folgende drei Voraussagen über das Ergebnis des Wettkampfes gemacht worden (jeder Teilnehmer wird mit dem Anfangsbuchstaben seines Vornamens bezeichnet):

Platz	1.	2.	3.	4.	5.	6.
1. Voraussage	A	B	C	D	E	F
2. Voraussage	A	C	B	F	E	D
3. Voraussage	C	E	F	A	D	B

Nach Abschluss des Laufes zeigte sich, dass in der ersten Voraussage für genau drei Läufer die von ihnen erreichten Plätze richtig angegeben waren. Keine zwei dieser drei Plätze waren zueinander benachbart. Bei der 2. Voraussage war für keinen Läufer der erreichte Platz richtig angegeben. Bei der dritten Voraussage war für einen Platz derjenige Läufer richtig angegeben, der diesen Platz erreichte.

Gib alle Möglichkeiten für die von den Läufern unter diesen Bedingungen erreichten Platzreihenfolgen an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn eine Platzreihenfolge den Bedingungen entspricht, dann folgt für sie: A belegte nicht den 1. und E nicht den 5. Platz, da in der 2. Voraussage für keinen Läufer der erreichte Platz richtig angegeben war.

Ferner folgt: Da in der 1. Voraussage für genau drei Läufer die Plätze richtig angegeben und keine zwei dieser Plätze zueinander benachbart waren, belegte B den 2. Platz, D den 4. Platz und F den 6. Platz.
E und A belegten daher weder den 2. noch den 4. noch den 6.Platz. Damit sind für alle in der 3. Voraussage angegebenen Plätze mit Ausnahme des ersten die Läufer falsch angegeben.
Mithin belegte C den 1. Platz, da genau eine Platzangabe der 3. Voraussage richtig war. Da E infolgedessen nicht den 1. Platz belegte, verbleibt für E nur noch der 3. Platz und danach für A der 5. Platz. Daher kann nur die Reihenfolge C, B, E, D, A (*) sämtlichen Bedingungen der Aufgabe entsprechen.

II. Sie entspricht in der Tat diesen Bedingungen; denn in der 1. Voraussage sind genau für B, D, F die erreichten Plätze richtig angegeben; dies sind der 2., 4. und 6. Platz, keine zwei von ihnen sind also zueinander benachbart.
In der 2. Voraussage ist für keinen Läufer der erreichte Platz richtig angegeben; in der 3. Voraussage ist für einen Platz, nämlich den 1., derjenige Läufer (in diesem Falle C) richtig angegeben, der diesen Platz erreichte.

Also entspricht genau die Platzreihenfolge (*) allen Bedingungen der Aufgabe.

Aufgabe 220811:
Vier Männer heißen Bäcker, Fischer, Förster und Müller. Sie üben die Berufe Bäcker, Fischer, Förster und Müller aus, jeder genau einen dieser Berufe. Einer der vier Männer ist Bruder eines fünften Mannes, der Herr X genannt sei. (Er hat natürlich denselben Namen wie sein Bruder.) Über diese fünf Männer werden folgende Angaben gemacht:

(1) Auch Herr X übt genau einen Beruf aus, denselben wie Herr Bäcker.
(2) Herr X übt einen anderen Beruf aus als sein Bruder.
(3) Bei jedem der fünf Männer lautet der Anfangsbuchstabe seines Namens anders als der Anfangsbuchstabe seines Berufes.

a)Beweise, dass Herr X nach diesen Angaben nicht Bäcker heißen kann!
b) Beweise, dass sich aus den Angaben eindeutig ermitteln lässt, wie Herr X heißt und welche zwei Berufe Herr X und sein Bruder haben!
c) Beweise, dass sich aus den Angaben nicht eindeutig ermitteln lässt, welchen Beruf Herr X hat und wie derjenige der vier anderen Männer heißt, der von Beruf Bäcker ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Aus (1) und (2) folgt, dass Herr Bäcker nicht dieselbe Person sein kann wie der Bruder von Herrn X. Also kann Herr X nicht Bäcker heißen.

b) Nach (3) sind die vier Berufe so auf die vier Männer außer Herrn X verteilt, dass die beiden Berufe mit dem Anfangsbuchstaben F von Herrn Bäcker und Herrn Müller ausgeübt werden.
Nach (1) hat daher auch der Beruf von Herrn X den Anfangsbuchstaben F. Also heißt Herr X nach (3) weder Fischer noch Förster. Hieraus und aus a) folgt eindeutig: Herr X heißt Müller.

Ferner ist eindeutig ermittelt:
Herr X und sein Bruder, der somit ebenfalls Müller heißt, haben die zwei Berufe mit dem Anfangsbuchstaben F, also Fischer und Förster.
Wie die folgende Tabelle zeigt, gibt es mehr als eine Möglichkeit, alle Angaben aus der Aufgabenstellung zu erfüllen:
Es gibt noch weitere Möglichkeiten; dies wird hier nicht benötigt. In diesen beiden genannten Verteilungen kommen für Herrn X zwei verschiedene Berufe vor. Ferner ist in den beiden Verteilungen der Beruf Bäcker bei zwei Männern verschiedenen Namens angegeben.

Name	Beruf, 1. Möglichkeit	Beruf, 2. Möglichkeit
Bäcker	Fischer	Förster
Fischer	Müller	Bäcker
Förster	Bäcker	Müller
Müller	Förster	Fischer
Herr X	Fischer	Förster

Daher lässt sich weder der Beruf von Herrn X noch der Name des Bäckers eindeutig aus den Angaben ermitteln.

Aufgabe 280811:
In einem Kasten befinden sich 500 Kugellagerkugeln, die sich äußerlich nicht voneinander unterscheiden; 499 Kugeln haben untereinander die gleiche Größe und das gleiche Gewicht, eine einzige Kugel hat zwar die gleiche Größe wie jede der anderen Kugeln, ist aber leichter als sie.

Es soll nun - mit Hilfe einer Balkenwaage, nur durch wiederholte Feststellung, ob Gleichgewicht zwischen zwei gleich großen Anzahlen dieser Kugeln besteht oder nicht - die leichtere Kugel ermittelt werden.

Zeige, dass sechs Wägungen hierfür in jedem Fall ausreichen, d. h.: Wie auch die Ergebnisse einer 1., 2., ..., 5. Wägung ausfallen mögen, stets soll man die nächste Wägung so durchführen können, dass nach der 6. Wägung die leichtere Kugel eindeutig ermittelt ist.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es gilt $500 = 167 + 167 + 166$.
Legt man in einer 1. Wägung in jede Waagschale 167 Kugeln und ergibt sich Gleichgewicht, so muss die leichtere Kugel unter den restlichen 166 Kugeln sein; anderenfalls muss sie unter den 167 Kugeln auf der leichteren Waagschale sein.

Entsprechend kann man fortsetzen: Wenn man von einer Menge der Kugeln schon weiß, dass die leichtere Kugel in dieser Menge ist, so kann man diese Menge in drei Teilmengen zerlegen, von denen zwei gleich groß sind und die dritte sich von ihnen um höchstens eine Kugel unterscheidet.
Damit hat man für die nächsten Wägungen die durch Unterstreichen gekennzeichneten Möglichkeiten:

2. Wägung: $166 = 55 + 55 + 56$ oder $167 = 56 + 56 + 55$,
3. Wägung: $55 = 18 + 18 + 19$ oder $56 = 19 + 19 + 18$,
4. Wägung: $18 = 6 + 6 + 6$ oder $19 = +6 + 7$,
5. Wägung: $6 = 2 + 2 + 2$ oder $7 = 2 + 2 + 3$,
6. Wägung: $2 = 1 + 1 + 0$ oder $3 = 1 + 1 + 1$

Die 6. Wägung bei diesem Verfahren bringt somit stets das Ergebnis; dass die leichtere Kugel eindeutig feststeht. Damit ist der verlangte Nachweis geführt.

Aufgabe 300811:
Axel lässt Jörg mit einem roten, einem blauen und einem gelben Würfel würfeln. Ohne dass er die geworfenen Augenzahlen sieht, sagt er dann:

„Verdopple die Augenzahl des roten Würfels, addiere dazu die Zahl 8 und multipliziere die Summe mit 50! Merke dir das Resultat! Addiere nun zur Augenzahl des blauen Würfels die Zahl 10 und multipliziere die Summe mit 10! Bilde dann zum Schluss die Summe aus dem gerade erhaltenen Produkt, dem vorher gemerkten Resultat und der Augenzahl des gelben Würfels. Wenn Du mir diese Summe nennst, kann ich Dir von jedem der drei Würfel die geworfene Augenzahl nennen.“

a) Wähle drei mögliche Augenzahlen und führe die angegebenen Berechnungen aus!

b) Beschreibe, wie man von der am Ende der Berechnungen genannten Summe zu den Augenzahlen kommen kann! Erkläre, warum man nach deiner Beschreibung stets die richtigen Augenzahlen findet!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Werden als Augenzahlen des roten, blauen bzw. gelben Würfels etwa 4, 1 bzw. 6 gewählt, so führt die Berechnung auf $(2 - 4 + 8) \cdot 50 = 800$, $(1 + 10) \cdot 10 = 110$ und damit auf die Summe $800 + 110 + 6 = 916$.

b) Die gewählten Augenzahlen des roten, blauen bzw. gelben Wüfels sind:
Die um 5 verkleinerte Hunderterziffer, die Zehnerziffer, die Einerziffer.

Dies erklärt sich folgendermaßen: Sind r, b, g die Augenzahlen, so führt die Berechnung auf $(2 \cdot r + 8) \cdot 50 = 100r + 400$, $(b + 10) \cdot 10 = 10b + 100$ und damit auf die summe

$$100r + 400 + 10b + 100 + g = 100r + 10b + g + 500$$

Verkleinert man in dieser Summe die Hunderterziffer um 5, d. h. subtrahiert man 500, so entsteht die Zahl $100r + 10b + g$, also die Zahl mit den Ziffern r, b, g.

Aufgabe 310811:
Auf einem Tisch liegen drei Schachteln. In einer liegen zwei schwarze Kugeln, in der anderen eine schwarze und eine weiße Kugel, in der dritten zwei weiße Kugeln. Die Schachteln tragen die Aufschriften „Zwei schwarze“, „Schwarz und weiß“, „Zwei weiße“; jedoch trifft keine dieser drei Aufschriften zu.

Untersuche, ob sich bei diesen Voraussetzungen durch Herausnehmen einer einzigen Kugel, ohne dass die anderen Kugeln gesehen werden, eindeutig die Verteilung der Kugeln ermitteln lässt! Ist das der Fall, dann gib an, wie dies geschehen kann!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Da keine der Aufschriften zutrifft, gibt es nur zwei Möglichkeiten der Verteilung (man findet sie z. B., indem man mit dem Aufstellen der einzigen Möglichkeiten beginnt, die Schachtel mit der Aufschrift „Zwei schwarze“ anders als mit zwei schwarzen Kugeln zu füllen):

Aufschrift	Verteilung 1	Verteilung 2
„Zwei schwarze“	s,w	w,w
„Schwarz und weiß“	w,w	s,s
„Zwei weiße“	s,s	s,w

Nimmt man nun eine Kugel aus der Schachtel mit der Aufschrift „Schwarz und weiß“, so lässt sich aus der Farbe dieser Kugel eindeutig ermitteln:
Ist die herausgenommene Kugel schwarz, so liegt die Verteilung 2 vor, ist sie weiß, so die Verteilung 1.

II. Runde 2

Aufgabe 010823:
In der Messe eines Schiffes unserer Fischereiflotte sitzen die Mitglieder der Besatzung und sprechen über ihr Alter.

Der Steuermann sagt: „Ich bin doppelt so alt wie der jüngste Matrose und 6 Jahre älter als der Maschinist.“

Der 1. Matrose sagt: „Ich bin 4 Jahre älter als der 2. Matrose und ebenso viele Jahre älter als der jüngste Matrose, wie ich jünger bin als der Maschinist.“

Der 2. Matrose sagt: „Gestern habe ich meinen 20. Geburtstag gefeiert.“

Die Besatzung besteht aus 6 Mitgliedern, das Durchschnittsalter beträgt genau 28 Jahre.

Wie alt ist der Kapitän?

Lösung von Carsten Balleier:
Es empfiehlt sich, Bezeichnungen für das Alter der Beteiligten einzuführen:
k, s, m, m_1, m_2 und m_j seien das Alter des Kapitäns, des Steuermanns, des Maschinisten sowie des 1., 2. und des jüngsten Matrosen. Die Aussagen ergeben nun folgendes Gleichungssystem:

Steuermann:	$s = 2m_j = m + 6,$	(1)
1. Matrose:	$m_1 = m_2 + 4,$	(2)
1. Matrose:	$m_1 - m_j = m - m_1,$	(3)
2. Matrose:	$m_2 = 20,$	(4)
Durchschnitt:	$k + s + m + m_1 + m_2 + m_j = 6 \cdot 28 = 168.$	(5)

Aus (4) und (2) folgt $m_1 = 24$, daraus und aus (3) folgt $m_j = 2m_1 - m = 48 - m$, letzteres in (1) eingesetzt ergibt $m = 30$ und $s = 36$. Diese Ergebnisse schließlich in (5) eingesetzt, führt auf

$$k + 36 + 30 + 24 + 20 + 18 = 168 \qquad \Longrightarrow \qquad k = 40.$$

Der Kapitän ist somit 40 Jahre alt.

Aufgabe 050824:
Die Fischer Adam, Bauer, Christiansen und Dahse (abgekürzt A, B, C, D) wägen nach dem Fischen ihre Ausbeute und stellen fest:

(1) D fing mehr als C.

(2) A und B fingen zusammen genau so viel wie C und D zusammen.

(3) A und D fingen zusammen weniger als B und C zusammen.

Ordne die Fangergebnisse a, b, c, d der Fischer A, B, C, D der Größe nach! (Beginne mit dem größten Ergebnis!)

Lösung von Manuela Kugel:
Die Aussagen (1), (2) und (3) lassen sich folgendermaßen schreiben:

(1) $d > c$,

(2) $a + b = c + d$,

(3) $a + d < b + c$.

Aus (2) und (3) folgt (4) $b > d$,

aus (2) und (4) folgt (5) $c > a$ und

aus (4), (1) und (5) folgt schließlich $b > d > c > a$.

Aufgabe 120821:
Axel, Bernd, Conrad, Dieter, Erwin, Frank und Gerd sind im Turnunterricht hintereinander der Größe nach angetreten, wobei der Größte von ihnen vorn steht. Es ist außerdem bekannt:

(1) Dieter steht an vierter Stelle.

(2) Gerd steht unmittelbar vor Bernd und unmittelbar hinter Erwin.

(3) Axel steht unmittelbar hinter Frank.

(4) Gerd und Axel sind Zwillinge, während der Zweitgrößte der sieben Jungen keine Geschwister hat.

Schreibe die Namen der sieben in der Reihenfolge auf, in der sie angetreten sind!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Erwin kann nicht an erster Stelle stehen, weil sonst im Widerspruch zu (4) wegen (2) Gerd Zweitgrößter sein müsste.
Wegen (1) und (2) kann Erwin aber auch nicht an zweiter, dritter oder vierter Stelle stehen. Da er wegen (2) auch nicht an sechster oder siebenter Stelle stehen kann, steht er an fünfter Stelle, und wegen (2) ist dann Gerd Sechster und Bernd Siebenter.
Die Plätze 1 bis 3 können somit nur Axel, Frank und Conrad eingenommen haben, und zwar wegen (3) Frank nur an erster oder zweiter Stelle. Würde Frank an erster Stelle stehen, so müsste Axel im

Widerspruch zu (4) Zweitgrößter sein. Also steht Frank an zweiter, Axel an dritter und daher Conrad an erster Stelle.
Die Reihenfolge der sieben Jungen lautet mithin: Conrad, Frank, Axel, Dieter, Erwin, Gerd, Bernd.

Aufgabe 160821:
Für Schülerexperimente wurden genau 29 Einzelteile (Versuchsmaterialien) für genau 29 M eingekauft. Das waren Teile zu 10 M, 3 M oder 0,50 M; von jeder Sorte mindestens ein Teil. Andere Sorten kamen unter den eingekauften Teilen nicht vor.

Wie viel Teile von jeder der drei Sorten waren es insgesamt?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Da 3 oder mehr Teile zu 10 M mehr als 29 M kosten, waren es höchstens 2 Teile zu 10 M.
Angenommen, es wären genau 2 Teile zu 10 M gewesen. Dann wären genau 9 M für die beiden übrigen Sorten verblieben. Von diesen hätten 1 oder 2 Teile zu 3 M gekauft werden können, wonach 6 bzw. 3 M für die Teile zu 0,50 M geblieben wären. Das wären 12 bzw. 6 Teile zu 0,50 M und damit insgesamt 15 oder 10 Einzelteile gewesen, also zu wenig.
Folglich wurde genau 1 Teil zu 10 M gekauft, und es blieben genau 19 M für die 3-Mark-Teile und 0,50-Mark-Teile.

Angenommen, es wäre nur 1 Teil zu 3 M gekauft worden, dann wären noch 16 M geblieben, wofür 32 Teile zu 0,50 M zu kaufen waren, insgesamt also 34 Teile, im Widerspruch zur Aufgabe.
Erhöht man nun die Anzahl der Teile zu 3 M immer um 1, so verringert sich, wenn der Gesamtpreis gleich bleiben soll, die Anzahl der Teile zu 0,50 M dabei jeweils um 6, wobei die Gesamtzahl der Teile um genau 5 abnimmt. Die einzige Möglichkeit, auf diese Weise 29 Teile zu erreichen, besteht folglich darin, dass man die Anzahl der Teile zu 3 M um genau 1 erhöht und damit die Anzahl der Teile zu 0,50 M um genau 6 verringert. Also wurden insgesamt genau 1 Teil zu 10 M, genau 2 Teile zu 3 M und genau 26 Teile zu 0,50 M gekauft.

Aufgabe 170821:
Vier Schüler, Anja, Birgit, Christoph und Dirk, spielten folgendes Spiel, dessen Regeln ihnen allen bekannt sind:

Einer von ihnen, z. B. Dirk, verlässt das Zimmer. Nun nimmt eine der Personen Anja, Birgit oder Christoph einen vereinbarten Gegenstand, etwa einen Fingerhut, an sich, und Dirk wird wieder hereingerufen. Er erhält dann von den Mitspielern Aussagen mitgeteilt, wobei genau derjenige eine falsche Aussage macht, der den Fingerhut bei sich hat.

Bei einer Durchführung dieses Spiels lauteten die Aussagen:

Anja:	Ich habe den Fingerhut nicht, und Christoph hat den Fingerhut.
Birgit:	Anja hat den Fingerhut, und ich habe den Fingerhut nicht.
Christoph:	Ich habe den Fingerhut nicht.

Untersuche, ob mit Hilfe dieser Aussagen eindeutig feststeht, welcher Spieler den Fingerhut genommen hatte! Ist dies der Fall, so ermittle diesen Spieler!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(1) Angenommen, Christoph hätte den Fingerhut, dann wäre Birgits Aussage falsch, im Widerspruch zu den Spielregeln. Deshalb hat Christoph den Fingerhut nicht.

(2) Angenommen, Birgit hätte den Fingerhut, dann wäre Anjas Aussage falsch, im Widerspruch zu den Spielregeln. Deshalb hat Birgit den Fingerhut auch nicht.

(3) Folglich kann höchstens Anja den Fingerhut haben. Tatsächlich ist dann Anjas Aussage falsch, und die Aussagen vor. Birgit und Christoph sind wahr.

Also steht eindeutig fest, dass Anja den Fingerhut an sich genommen hatte.

Aufgabe 180821:
Über vier Schüler mit den Vornamen Alfred, Benno, Detlev, Egon und den Nachnamen Ampler, Baumbach, Dürer, Erbe werden folgende Angaben gemacht:

(1) Egon ist jünger als Benno, aber älter als Alfred.

(2) Detlev ist älter als Alfred, aber jünger als Benno.

(3) Der Schüler Dürer ist älter als der Schüler Erbe, aber jünger als der Schüler Ampler.

(4) Der Schüler Baumbach ist älter als der Schüler Dürer, aber jünger als Benno.

(5) Genau einer dieser vier Schüler hat einen Vornamen, der mit dem gleichen Buchstaben beginnt wie sein Familienname.

Untersuche, ob sich aus diesen Angaben eindeutige Antworten auf die folgenden Fragen (a), (b) beweisen lassen! Wenn dies der Fall ist, ermittle die Antworten!

(a) Wie heißen die vier Schüler mit Vor- und Familiennamen?

(b) Wie lautet die Reihenfolge der Schüler nach ihrem Alter, beginnend mit dem jüngsten Schüler?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Das Alter der vier Schüler Alfred, Benno, Detlev und Egon sei in dieser Reihenfolge mit a, b, d, e bezeichnet; das Alter der Schüler Ampler, Baumbach, Dürer, Erbe sei in dieser Reihenfolge mit A, B, D, E bezeichnet.

Wenn die Angaben (1) bis (5) zutreffen, so folgt:

aus (1): $a < e < b$, aus (2): $a < d < b$ aus (3): $E < D < A$, aus (4): $D < B < b$

Aus (1) und (2) folgt, dass Alfred der jüngste, Benno der älteste Schüler ist. Aus (3) und (4) folgt, dass Erbe der jüngste, Dürer der zweitjüngste Schüler ist.

Der jüngste Schüler heißt folglich Alfred Erbe. Da ferner Benno der älteste Schüler ist und er nicht Erbe oder Dürer und wegen (4) nicht Baumbach heißen kann, muss er Ampler heißen.
Aus (5) folgt nunmehr: Ein Schüler heißt Detlev Dürer. Somit heißt der vierte Schüler Egon Baumbach. Daher können nur die Namen Alfred Erbe, Detlev Dürer, Egon Baumbach und Benno Ampler, in dieser Reihenfolge aufgezählt, die Fragen (a), (b) in Übereinstimmung mit den Angaben (1) bis (5) beantworten.

Umgekehrt zeigt sich: Wenn diese Aufzählung die Namen und die Reihenfolge der Schüler nach ihrem Alter angibt, so treffen die Angaben (1) bis (5) zu. Also sind mit dieser Aufzählung die eindeutigen Antworten auf die Fragen (a), (b) ermittelt.

Aufgabe 220821:
Vor zwei Jahren unterhielten sich Anke, Birgit und Christine über ihre Reiseziele in den Sommerferien 1981 und 1982. In jedem Jahr wollte eine von ihnen an die Ostsee fahren, die andere in die Sächsische Schweiz und die dritte in den Thüringer Wald. Für beide Jahre wurden folgende Aussagen gemacht

(1) Anke fährt an die Ostsee.

(2) Christine fährt in den Thüringer Wald oder Anke fährt in die Sächsische Schweiz.

Später stellte sich heraus: Für das Jahr 1981 ist Aussage (1) wahr und Aussage (2) falsch; für das Jahr 1982 ist Aussage (1) falsch und Aussage (2) wahr.
Untersuche

a) für das Jahr 1981 b) für das Jahr 1982,

für welche der drei Schülerinnen sich damit das Reiseziel eindeutig ermitteln lässt und für welche nicht! Nenne alle dabei eindeutig zu ermittelnden Reiseziele!

Hinweis: Eine Aussage der Form „A oder B“ ist genau dann falsch, wenn sowohl A als auch B falsche Aussagen sind.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Für das Jahr 1981 gilt: Da (1) wahr ist, folgt: Anke fährt an die Ostsee. (3)
Da (2) falsch ist, folgt: Christine fährt nicht in den Thüringer Wald. Daraus und aus (3) ergibt sich: Christine fährt in die Sächsische Schweiz. (4)
Nach (3) und (4) verbleibt nur noch: Birgit fährt in den Thüringer Wald. (5)
Damit ist bewiesen, dass sich für 1981 die Reiseziele aller drei Schülerinnen eindeutig ermitteln lassen. Sie lauten wie in (3), (4),(5) angegeben.

b) Für das Jahr 1982 gilt:
Da (1) falsch ist, fährt Anke nicht an die Ostsee. Würde sie in den Thüringer Wald fahren, so könnte Christine nicht dorthin und Anke nicht in die Sächsische Schweiz fahren, also wäre (2) dann falsch.
Damit ist gezeigt: Anke fährt in die Sächsische Schweiz. (6)

Bereits mit (6) ist erreicht, dass (1) falsch und (2) wahr ist. Dies gilt daher bei jeder der beiden nach (6) noch möglichen Verteilungen der Reiseziele (Birgit an die Ostsee, Christine in den Thüringer Wald oder umgekehrt). Damit ist für 1982 bewiesen:
Die Reiseziele von Birgit und Christine lassen sich nicht eindeutig ermitteln; das Reiseziel von Anke lässt sich dagegen eindeutig ermitteln, es lautet, wie in (6) angegeben.

Aufgabe 220822:
In einer Umfrage beantworteten 50 Pioniere einer Schule die folgenden Fragen auf einer Fragenliste:

		Ja	Nein
(A)	Hast du in diesem Sommer an einem Betriebsferienlager teilgenommen?	o	o
(B)	Hast du in diesem Sommer an der Feriengestaltung der Schule teilgenommen?	o	o
(C)	Warst du in diesem Sommer mit deinen Eltern verreist?	o	o

Anschließend wurden die Antworten mehrfach ausgezählt. In einer ersten Zählung wurde bei allen Fragenlisten nur auf die Frage (A) geachtet. Diese hatten genau 20 Pioniere mit Ja beantwortet. Dann wurde in einer zweiten Zählung bei allen 50 Listen nur auf Frage (B) geachtet, usw., wie in der folgenden Tabelle angegeben:

Zählung Nr.	Gezählte Antworten	Erhaltene Anzahl
1	(A) Ja	20
2	(B) Ja	25
3	(C) Ja	30
4	(A) Ja und (B) Ja	8
5	(B) Ja und (C) Ja	12
6	(A) Ja und (C) Ja	10
7	(a) Ja und (B) Ja und (C) Ja	3

Aus diesen Zählungsergebnissen soll die Anzahl derjenigen Pioniere ermittelt werden, die

a) an keiner der drei Arten der Feriengestaltung teilnahmen,

b) an genau einer dieser Arten teilnahmen,

c) an einem Betriebsferienlager, aber nicht an der Feriengestaltung der Schule teilnahmen,

d) mindestens eine der Möglichkeiten nutzten, an einem Betriebsferienlager teilzunehmen oder mit den Eltern zu verreisen.

Trage die gesuchten Antworten in folgende Tabelle ein! Nenne die Rechnungen oder Überlegungen, mit denen du deine Antworten begründest!

Aufgabe	Gesuchte Antworten	Erhaltene Anzahl
a)	Keinmal Ja	
b)	Genau einmal Ja	
c)	(A) Ja und (B) Nein	
d)	(A) Ja oder (C) Ja oder beides	

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die gesuchten Eintragungen können durch folgende Rechenschritte gefunden werden:

Angabe Nr.	Gesuchte Antworten	Folgerung aus Angaben Nr.	Berechnung der Anzahl
8	(A)Ja, (B)Ja, (C)Nein	4,7	8-3 = 5
9	(A)Ja, (B)Nein, (C)Ja	6,7	10-3 = 7
10	(A)Nein, (B)Ja, (C)Ja	5,7	12-3 = 9
11	(A)Ja, (B)Nein, (C)Nein	1,7,8,9	20-3-5-7 = 5
12	(A)Nein, (B)Ja, (C)Nein	2,7,8,10	25-3-5-9 = 8
13	(A)Nein, (B)Nein, (C)Ja	3,7,9,10	30-3-7-9 = 11
Aufgabe			
a)	Keinmal Ja	7,...,13	50-3-5-7-9-5-8-11=2
b)	Genau einmal Ja	11,12,13	5+8+11 = 24
c)	(A)Ja und (B)Nein	9,11	7+5 = 12
d)	(A)Ja oder (C)Ja oder beides	7,...,11,13	3+5+7+9+5+11 = 40

Aufgabe 260821:
In der Kleinstadt A hat der Fleischer jeden Montag geschlossen, das Haushaltswarengeschäft jeden Dienstag und der Schuhmacher jeden Donnerstag. Der Optiker hat nur montags, mittwochs und freitags geöffnet. Am Sonntag sind alle Geschäfte geschlossen.

Eines Tages gingen die Freundinnen Anja, Ilka, Katrin und Susann, jede in ein anderes dieser vier Geschäfte. Als sie sich unterwegs trafen, sagten sie:

(1) Anja: „Susann und ich wollten eigentlich schon eher in dieser Woche einkaufen gehen, aber da gab es keinen Tag, an dem wir beide hätten unsere Besorgungen machen können.“

(2) Ilka: „Ich wollte heute eigentlich nicht einkaufen, aber morgen hat das Geschäft geschlossen, in dem ich einkaufen will.“

(3) Katrin: „Ich hätte auch schon gestern oder vorgestern alles besorgen können.“

(4) Susann: „Ich hätte ebenso gestern oder auch morgen meinen Einkauf erledigen können.“

Untersuche, ob diese Angaben miteinander vereinbar sind und ob dann aus ihnen eindeutig folgt,

(a) wer von den genannten Mädchen in welchem der angegebenen Geschäfte war.

(b) an welchem Wochentag das Gespräch stattgefunden hat!

Ist dies der Fall, dann gib die entsprechenden Antworten auf die Fragen (a) und (b)!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wie der nachfolgende Öffnungsplan zeigt, muss das Gespräch der Freundinnen entweder am Mittwoch oder am Freitag stattgefunden haben, da nur an diesen beiden Tagen die vier genannten Geschäfte gleichzeitig geöffnet hatten (x bedeutet geschlossen):

	Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa	So
Fleischer	x						x
Haushaltwaren		x					x
Schuhmacher				x			x
Optiker		x		x		x	x

Wegen (1) kann das Gespräch nicht an einem Freitag stattgefunden haben, denn alle Besorgungen, die Anja und Susann am Freitag hätten machen können, wären auch am Mittwoch zu erledigen gewesen. Also fand das Gespräch an einem Mittwoch statt, und es folgt weiter:
Wegen (4) muss Susann zum Fleischer gegangen sein, wegen (3) Katrin zum Schuhmacher. Hiernach und wegen (2) war Ilka beim Optiker und folglich Anja im Haushaltwarengeschäft, und bei dieser Verteilung ist auch (1) erfüllt.

Daher sind die Angaben miteinander vereinbar, und aus ihnen folgt eindeutig:
(a) Anja war im Haushaltwarengeschäft, Ilka beim Optiker, Katrin beim Schuhmacher, Susann beim Fleischer.
(b) Das Gespräch fand am Mittwoch statt.

Aufgabe 290821:
Über die Anzahl x der Schüler einer 8. Klasse ist folgendes bekannt:

(1) Die Zahl x ist eine Primzahl.

(2) Genau 9 Schüler dieser Klasse können Schlittschuh laufen.

(3) Genau 12 Schüler dieser Klasse können Ski laufen.

(4) Genau 4 Schüler dieser Klasse können weder Schlittschuh laufen noch Ski laufen.

Untersuche, ob sich aus diesen Angaben die Schülerzahl x eindeutig ermitteln lässt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Aus diesen Angaben lässt sich die Schülerzahl x nicht eindeutig ermitteln. Es gibt beispielsweise die folgenden beiden Möglichkeiten:

1. Möglichkeit:
- nur Schlittschuhlaufen kann genau 1 Schüler,
- nur Skilaufen können genau 4 Schüler,
- beide Sportarten beherrschen genau 8 Schüler,
- keine der beiden Sportarten beherrschen genau 4 Schüler.

In der Tat erfüllt diese Möglichkeit wegen $1+4+8+4 = 17$ die Aussage (1), wegen $1+8 = 9$ die Aussage (2), wegen $4+8 = 12$ die Aussage (3) sowie wegen der vierten Angabe auch (4).

2. Möglichkeit:
- nur Schlittschuhlaufen können genau 3 Schüler,

- nur Skilaufen können genau 6 Schüler,
- beide Sportarten beherrschen genau 6 Schüler,
- keine der beiden Sportarten beherrschen genau 4 Schüler.

In der Tat erfüllt auch diese Möglichkeit die Bedingungen (1) bis (4).

Aufgabe 340822:
Aus den Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 sollen zwei Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ so gebildet werden, dass jede Ziffer in den Zifferndarstellungen der vier natürlichen Zahlen a, b, c, d insgesamt genau einmal verwendet wird. Für die so gebildeten Brüche soll $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = 1$ gelten. In dem ersten der beiden Brüche soll $a = 13$ und $b = 26$ gewählt werden.

Beweise, dass es genau eine Möglichkeit gibt, den Zähler c und den Nenner d des zweiten Bruches so zu wählen, dass alle genannten Bedingungen erfüllt sind! Gib diesen zweiten Bruch an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn die Bedingungen der Aufgabe von zwei natürlichen Zahlen c und d erfüllt werden, so folgt:
Wegen $a = 13$ und $b = 26$ folgt aus $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = 1$, dass $\frac{c}{d} = \frac{1}{2}$, also $2 - c = d$ (1) gilt.

Ferner folgt, dass in den Zifferndarstellungen von c und d nur die Ziffern 0, 4, 5, 7, 8, 9 vorkommen, jede insgesamt genau einmal.
Wäre c höchstens zweistellig, also d mindestens vierstellig, so wäre $c \leq 99$, $d \geq 1000$; wäre c mindestens vierstellig, d höchstens zweistellig, so wäre $c \geq 1000$, $d \leq 99$; beides im Widerspruch zu (1).
Also sind c und d beide dreistellig.

Die Hunderterziffer von c ist 4, da sonst d wegen (1) vierstellig wäre. Die Einerziffer von d ist wegen (1) gerade, also entweder 0 oder 8. Wäre sie 8, so müsste c wegen (1) (und da die 4 schon als Hunderterziffer von c vergeben ist) die Einerziffer 9 haben. Damit aber wäre die Hunderterziffer von d weder 8 noch 9, was wegen der Hunderterziffer 4 von c im Widerspruch zu (1) steht.

Daher hat d die Einerziffer 0 und folglich c die Einerziffer 5. Die Zehnerziffer von c ist weder 7 noch 9; denn wegen (1), also $2 \cdot 475 = 950$ bzw. $2 \cdot 495 = 980$, käme die Ziffer 5 bzw. 9 zweimal vor.
Hiernach und wegen (1) verbleibt nur die Möglichkeit $c = 485$, $d = 970$. (2)

II. Diese beiden Zahlen haben die geforderten Ziffern, und sie erfüllen auch (1), also $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = 1$.
Mit I. und II. ist gezeigt, dass genau der mit den Zahlen (2) gebildete Bruch $\frac{485}{970}$ die Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

III. Runden 3 & 4

Aufgabe V10833:
In einem Eisenbahnabteil sitzen vier Schüler, die von einem Ferienaufenthalt zurückkehren. Ein Schüler wohnt in Berlin, einer in Dresden, einer in Leipzig und einer in Jena. Ihre Vornamen sind Anton, Bruno, Conrad und Dietrich. (Die Reihenfolge der Namen entspricht nicht der Reihenfolge der Wohnorte.)
Aus Gesprächsfetzen entnehmen wir folgendes:
a) Zwei Schüler, und zwar Anton und der Berliner, sind begeisterte Fußballspieler.
b) Zwei Schüler, und zwar Conrad und der Dresdner, spielen nicht Fußball.
c) Dietrich ist älter als der Berliner.
d) Conrad ist jünger als der Jenaer.
Wo wohnen Anton, Bruno, Conrad und Dietrich?
Wer von ihnen sind die Fußballspieler?
Wie hast du die Lösung gefunden?

Lösung von Steffen Polster:
Nach a) und b) sind Anton oder Conrad kein Berliner oder Dresdner.

	Berlin	Dresden	Leipzig	Jena
Anton	-	-		
Bruno				
Conrad	-	-		
Dietrich				

Nach c) ist Dietrich kein Berliner, so dass Bruno Berliner sein muss sowie Dietrich aus Dresden kommt.

	Berlin	Dresden	Leipzig	Jena
Anton	-	-		
Bruno	$\oplus$	-	-	-
Conrad	-	-		
Dietrich	-	$\oplus$	-	-

Nach d) ist Conrad als der Jenenser, muss also aus Leipzig kommen. Anton ist dann aus Jena.

	Berlin	Dresden	Leipzig	Jena
Anton	-	-	-	$\oplus$
Bruno	$\oplus$	-	-	-
Conrad	-	-	$\oplus$	-
Dietrich	-	$\oplus$	-	-

Anton wohnt in Jena, Bruno in Berlin, Conrad in Leipzig und Dietrich in Dresden. Anton und Bruno sind die Fußballspieler.

Aufgabe 010834:
Wer hat den Ring?

Ruth, Fritz, Ewald, Brigitte und Erika spielen ein Pfänderspiel. Ruth verlässt das Zimmer; inzwischen versteckt eines der anderen Kinder einen Ring bei sich. Ruth kehrt zurück und soll feststellen, wer den Ring hat. Nun macht jedes Kind drei Aussagen. Von diesen Aussagen sind zwei richtig und eine falsch. Ruth soll auf Grund dieser Aussagen, ohne zu raten, finden, wer den Ring hat.

Ewald:	1.	Ich habe den Ring nicht.
	2.	Fritz hat den Ring.
	3.	Ich habe dieses Spiel schon oft gespielt.
Fritz:	1.	Ich habe den Ring nicht.
	2.	Ewald irrt sich, wenn er meint, dass ich den Ring habe.
	3.	Erika hat den Ring.

Jetzt unterbricht Ruth und sagt: „Ich muss nachdenken, vielleicht finde ich jetzt schon, wer den Ring hat.“ Und nach wenigen Minuten sagt Ruth, wer den Ring hat. Wie konnte sie das feststellen?

Lösung von Carsten Balleier:
Die Idee ist herauszufinden, welche Aussagen von Ewald und Fritz sich widersprechen, da dann eine davon falsch sein muss.

Da Fritz’ Aussagen 1 und 2 gleichbedeutend sind, können sie nur gleichzeitig wahr oder falsch sein. Letzteres ist ausgeschlossen, da Fritz nur eine falsche Aussage macht. Also ist seine 3. Aussage falsch; weder er noch Erika haben den Ring.
Ewalds 2. Aussage widerspricht Fritz’ erster (die wahr ist), also ist sie falsch.

Also muss Ewalds 1. Aussage stimmen, es bleibt nur noch Brigitte übrig. Folglich hat sie den Ring.

Aufgabe 040833:
Von den 31 Schülern einer 4. Klasse können 21 schwimmen, 24 Rad fahren und 19 Schlittschuh laufen. Für einen Wettkampf werden Schüler gebraucht, die

a) schwimmen und Rad fahren,

b) schwimmen und Schlittschuh laufen,

c) Rad fahren und Schlittschuh laufen,

d) schwimmen und Rad fahren und Schlittschuh laufen können.

Wie viel Schüler der Klasse stehen jeweils bei a), b), c) und d) mindestens, wie viel höchstens zur Verfügung?

Lösung von Manuela Kugel:
Maximal stehen zur Verfügung

a) 21, da es nur 21 Schwimmer gibt, b) 19, da es nur 19 Schlittschuhläufer gibt, c) 19, da es nur 19 Schlittschuhläufer gibt, d) 19, da es nur 19 Schlittschuhläufer gibt.

Minimal stehen zur Verfügung
a) 14 wegen 24+21-31=14, b) 9 wegen 21+19-31=9,
c) 12 wegen 24+19-31=12, d) 2 wegen 24+21+19-31-31=2.

Aufgabe 080832:
Von fünf äußerlich gleichen Kugeln haben genau drei gleiches Gewicht; die beiden übrigen, die untereinander gleich schwer sind, haben jeweils ein anderes Gewicht als jede der erstgenannten.

Beweise, dass in jedem Fall (d. h. bei jedem möglichen Resultat der durchgeführten Wägungen) drei Wägungen ausreichen, um die beiden letztgenannten Kugeln herauszufinden, wenn als Hilfsmittel nur eine zweischalige Waage ohne Wägestücke zur Verfügung steht!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Zum Beweis wird ein Verfahren angegeben, das nach drei Wägungen sicher zum Ziel führt:
Wir bezeichnen die Kugeln mit $K_1 ... K_5$.
Bei der ersten Wägung lege man je eine Kugel, etwa K_1 und K_2, auf eine Waagschale, bei der 2. Wägung nehme man zwei weitere, bisher nicht gewogene Kugeln, etwa K_3 und K_4. Dann können die ersten beiden Wägungen folgende Resultate haben (in der Übersicht ist Gleichgewicht mit Gl. und nicht Gleichgewicht mit n. Gl. symbolisiert):

	1. Wägung	2. Wägung
a)	Gl.	Gl.
b)	Gl.	n. Gl.
c)	n. Gl.	Gl.
d)	n. Gl.	n. Gl.

Im Fall a) vergleiche man in der 3. Wägung eine Kugel der 1. Wägung, etwa K_1 mit der 5. Kugel. Herrscht Gleichgewicht, so sind K_3 und K_4 die gesuchten Kugeln, andernfalls sind es K_1 und K_2.

Die Fälle b) und c) lassen sich durch Umnummerierung aufeinander zurückführen. Es genügt also, einen dieser Fälle zu betrachten, es sei der Fall b).
Man vergleiche in der dritten Wägung eine der beiden Kugeln K_1 oder K_2 mit einer der Kugeln K_3 oder K_4.
Es werde z. B. K_1 mit K_3 verglichen. Herrscht Gleichgewicht, so sind K_4 und K_5 die gesuchten Kugeln, herrscht kein Gleichgewicht, so sind es K_3 und K_5.

Im Fall d) vergleiche man schließlich eine der gewogenen Kugeln, etwa K_1, mit der 5. Kugel. Es sei o. B. d. A. die Kugel K_1 leichter als K_2. Ebenso sei o. B. d. A. K_3 leichter als K_4.
Herrscht nun beim Vergleich mit K_5 Gleichgewicht, so sind K_2 und K_4 die gesuchten Kugeln; herrscht kein Gleichgewicht, so sind es K_1 und K_3. In jedem Falle (und andere Fälle gibt es nicht) hat man die beiden gesuchten Kugeln mit drei Wägungen ermittelt.

Aufgabe 100835:
Fritz behauptet seinen Mitschülern gegenüber:
(1) In unserem Haus wohnen mehr Erwachsene als Kinder.
(2) Es gibt in unserem Haus mehr Jungen als Mädchen.
(3) Jeder der Jungen hat wenigstens eine Schwester.
(4) Kinderlose Ehepaare wohnen nicht in unserem Haus.
(5) Alle in unserem Haus wohnenden Ehepaare haben ausschließlich schulpflichtige Kinder.
(6) Außer den Ehepaaren mit ihren schulpflichtigen Kindern wohnt niemand in unserem Haus.
Brigitte entgegnet darauf: „Diese Aussagen können aber nicht sämtlich wahr sein.“

Untersuche, ob Brigitte mit diesem Einwand recht hat!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, die Aussagen (1), (2), (3), (4), (5), (6) wären sämtlich wahr. Dann hätte wegen (3) und (4) jedes Ehepaar wenigstens 1 Mädchen.
Wegen (1), (4), (5) und (6) müsste folglich die Anzahl der Jungen kleiner sein als die Anzahl der Ehepaare und damit erst recht kleiner als die Anzahl der Mädchen, im Widerspruch zu (2).
Brigitte hat also mit ihrem Einwand recht.

Aufgabe 120831:
Die FDJ-Gruppe der Klasse 8*a* einer Oberschule führte einen Sportwettkampf durch. Vor Beginn des Wettkampfes sollte jeder Teilnehmer einen Tipp darüber abgeben, welche drei Teilnehmer in welcher Reihenfolge das beste Gesamtergebnis erzielen würden.

Als man die Tippscheine auswerte, stellte sich heraus, dass ausschließlich Annekatrin, Bernd und Claudia auf den ersten drei Plätzen erwartet wurden. Dabei wurde die Reihenfolge Bernd - Annekatrin - Claudia genau fünfmal getippt. Außerdem wurden noch die Reihenfolge Bernd - Claudia - Annekatrin und Claudia - Annekatrin - Bernd erwartet, und zwar einer dieser beiden Tipps genau vier- und der andere genau dreimal. Eine andere Reihenfolge wurde nicht getippt.

Für die Voraussagen wurden Punkte vergeben, und zwar für jeden richtig vorausgesagten Platz ein Punkt. Maximal waren also drei Punkte mit einem Tippschein erreichbar. Die Summe aller so vergebenen Punkte betrug 17. Bernd gewann, entgegen den meisten Voraussagen, nicht den Wettkampf, aber die ersten drei Plätze wurden tatsächlich von Annekatrin, Bernd und Claudia belegt.

Wer gewann den Wettbewerb? Wer belegte den zweiten und wer den dritten Platz? Wie oft wurde der Tipp Bernd - Claudia - Annekatrin insgesamt abgegeben?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Im folgenden seien die Namen der auf den Tippzetteln vermerkten drei Wettkampfteilnehmer mit A, B, C abgekürzt und die Platzverteilung durch die Reihenfolge dieser drei Buchstaben angegeben.
Da A, B und C die ersten drei Plätze belegten und B nicht Erster wurde, kommen nur die folgenden Platzverteilungen in Frage: (1) ABC, (2) ACB, (3) CAB, (4) CBA.

Nun lässt sich in einer Tabelle angeben, wie viele Punkte in den Fällen (1) bis (4) bei jeder der laut Aufgabenstellung möglichen Tippverteilungen hätten vergeben werden können:

1. Möglichkeit der Tippverteilung

Platzverteilung	ABC	ACB	CAB	CBA
Tipp BAC 5mal	0+0+5	0+0+0	0+5+0	0+0+0
Tipp BCA 4mal	0+0+0	0+4+0	0+0+0	0+0+4
Tipp CAB 3mal	0+0+0	0+0+3	3+3+3	3+0+0
Summe	5	7	14	7

2. Möglichkeit der Tippverteilung

Platzverteilung	ABC	ACB	CAB	CBA
Tipp BAC 5mal	0+0+5	0+0+0	0+5+0	0+0+0
Tipp BCA 3mal	0+0+0	0+3+0	0+0+0	0+0+3
Tipp CAB 4mal	0+0+0	0+0+4	4+4+4	4+0+0
Summe	5	7	17	7

Wie die Tabelle zeigt, wird die Gesamtpunktzahl 17 genau dann erreicht, wenn Claudia den Wettbewerb gewann, Annekatrin den zweiten und Bernd den dritten Platz erreichte sowie der Tip BCA genau 3mal abgegeben wurde.

Aufgabe 130831:
Anja, Brigitte, Cathrin, Daja und Eva trugen mehrere Spiele für vier Personen unter sich aus. In jedem Spiel gab es einen Gewinner und drei Verlierer. Jedes der Mädchen spielte gleich viele Male. Nach Abschluss aller Spiele stellte man fest:

(1) Cathrin gewann genau die Hälfte, Daja genau ein Drittel und Eva genau ein Viertel der Spiele, an denen sie beteiligt waren.

(2) Die Anzahl der Siege des Mädchens, das das drittbeste Ergebnis erzielte, war eine Primzahl.

(3) Keines der Mädchen verlor alle Spiele.

Ermittle die genaue Anzahl aller Spiele, die ausgetragen wurden, und gib an, wie viele Spiele jedes Mädchen insgesamt gewann!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Sei z die Gesamtzahl aller Spiele. Da jedes Mädchen von jeweils 5 Spielen genau 4 mitspielte, spielte jedes Mädchen in $\frac{4}{5}z$ aller Spiele mit. Diese Anzahl ist nach (1) durch 3 und 4, also durch 12 teilbar. Daher gibt es eine natürliche Zahl n mit $\frac{4}{5}z = 12n$; hieraus folgt $z = 15n$.
Von den $15n$ Spielen gewann nach (1) Cathrin genau $6n$, Daja genau $4n$, Eva genau $3n$ Spiele.

Somit gewannen Anja und Brigitte zusammen genau $2n$ aller Spiele. Daraus folgt, dass Eva wegen $6n > 4n > 3n > 2n$ das drittbeste Ergebnis erzielte. Da die Anzahl $3n$ von Evas Siegen nach (2) eine Primzahl war, gilt $n = 1$.

Es wurden mithin genau 15 Spiele ausgetragen; Cathrin gewann genau 6, Daja genau 4, Eva genau 3 dieser Spiele, und Anja und Brigitte gewannen nach (3) jeweils genau 1 Spiel.

Aufgabe 140831:
Um Peters Fähigkeiten im Knobeln zu erproben, werden ihm an einem Zirkelnachmittag über fünf Schüler sieben Aussagen mitgeteilt, unter denen, wie ihm ebenfalls gesagt wird, genau eine falsch ist. Er soll diese falsche Aussage herausfinden und außerdem die Namen der Schüler dem Alter nach ordnen.
Die Aussagen lauten:

(1) Anton ist älter als Elvira.

(2) Berta ist jünger als Christine.
(3) Dieter ist jünger als Anton.
(4) Elvira ist älter als Christine.
(5) Anton ist jünger als Christine.
(6) Elvira ist älter als Dieter.
(7) Christine ist jünger als Dieter.

Ermittle die falsche Aussage, und ordne die Namen der Schüler dem Alter nach (beginnend mit dem Jüngsten)!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Das Alter eines jeden Schülers sei mit dem Anfangsbuchstaben seines Vornamens bezeichnet. Angenommen, (5) wäre wahr. Dann folgte erstens, dass (1) und (4) nicht beide wahr sein könnten; zweitens folgte auch, dass (7) und (3) nicht beide wahr sein könnten.

Es gäbe also unter den Aussagen (1) bis (7) mehr als eine falsche. Damit ist die Annahme, (5) wäre wahr, widerlegt; d. h., (5) ist die falsche Aussage, und (1), (2), (3), (4), (6) und (7) sind wahr.
Aus (2) folgt $B < C$, aus (7) folgt $C < D$, aus (6) folgt $D < E$, aus (1) folgt $E < A$.
Die verlangte Reihenfolge der Schüler lautet mithin: Berta, Christine, Dieter, Elvira, Anton.

Aufgabe 140834:
Achim, Bernd, Christian und Detlef waren die vier Teilnehmer der Endrunde eines Schachturniers. Es hatte jeder gegen jeden genau zweimal zu spielen. Für jede gewonnene Partie wurden ein Punkt, für jede unentschiedene ein halber Punkt, für jede verlorene 0 Punkte vergeben.

Ein Wandzeitungsartikel über dieses Turnier enthält folgende Angaben:

- Bernd und Christian erzielten zusammen genau einen Punkt mehr als Achim und Detlef zusammen.
- Christian und Detlef erzielten zusammen genau 7 Punkte.
- Achim und Christian konnten zusammen genau 5 Punkte weniger erreichen als Bernd und Detlef zusammen.

Es wird gefragt, wie viele Punkte jeder der vier Teilnehmer erhielt. Ermittle auf diese Fragen alle Antworten, die den genannten Angaben entsprechen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es wurden genau je 2 Spiele der folgenden Zusammenstellung gespielt: AB, AC, AD, BC, BD, CD. Daher wurden insgesamt 12 Partien gespielt und mithin 12 Punkte vergeben.

Wenn nun bei einer Punktverteilung, die den Angaben entspricht, Achim, Bernd, Christian und Detlef in dieser Reihenfolge a, b, c, d Punkte erzielten, so gilt:

$$a + d + 1 = b + c \tag{1}$$
$$c + d = 7 \tag{2}$$
$$b + d = a + c + 5 \tag{3}$$

Weil 12 Punkte insgesamt vergeben wurden, d. h. $a+b+c+d = 12$ gilt, kann man aus dem entstandenen Gleichungssystem von 4 Gleichungen der Reihe nach die Unbekannten zu eliminieren und dann der Reihe ermitteln.

Es ergibt sich $a = 1$, $d = 4{,}5$, $b = 4$ und $c = 2{,}5$. Daher kann nur die Antwort, Achim erhielt 1 Punkt, Bernd 4 Punkte, Christian 2,5 Punkte und Detlef 4,5 Punkte, den Angaben entsprechen.

In der Tat erfüllt diese Antwort alle Bedingungen der Aufgabe. Denn wie die folgende Tabelle zeigt, gibt es Beispiele für eine Verteilung der Partieausgänge, bei der die in der Antwort genannte Punktverteilung entsteht.

	A	B	C	D	
A	-	1	0	0	1
B	1	-	2	1	4
C	2	0	-	0,5	2,5
D	2	1	1,5	-	4,5

Ferner erhielten bei ihr Bernd und Christian zusammen 6,5 Punkte, also genau einen Punkt mehr als die 5,5 Punkte von Achim und Detlef. Weiterhin erhielten Christian und Detlef zusammen genau 7 Punkte. Schließlich erreichten Achim und Christian zusammen 3,5 Punkte, also genau 5 Punkte weniger als die 8,5 Punkte von Bernd und Detlef.

In jedem Fall steht die Anzahl der Punkte, die der in der jeweiligen Zeile stehende Spieler beim Spiel gegen den in der entsprechenden Spalte stehenden Spieler erzielte.

Aufgabe 150831:
Vor vielen Jahren war ein Wanderer auf dem Wege von Altdorf nach Neudorf. Als er unterwegs nach dem Weg fragte, erklärte ihm ein Ortskundiger:

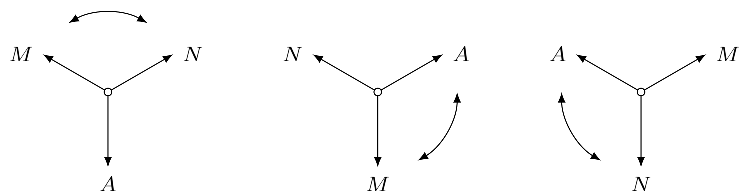
> „Ihr seid auf dem richtigen Weg und werdet bald an einer Weggabelung einen Wegweiser mit drei Richtungsschildern sehen. Diese weisen auf die Wege nach Altdorf, Neudorf und Mittendorf. Ich mache Euch aber darauf aufmerksam, dass genau zwei dieser Richtungsschilder falsch beschriftet worden sind.“

Der Wanderer bedankte sich, gelangte zum Wegweiser und las ihn.

Untersuche, ob der Wanderer mit den erhaltenen Informationen den Weg nach Neudorf mit Sicherheit ermitteln konnte!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Nach den Erklärungen des Ortskundigen würden alle drei Richtungsschilder auf den richtigen Weg weisen, wenn die beiden falschen Schilder miteinander ausgetauscht würden, da genau zwei der drei Schilder falsch und folglich genau eines richtig beschriftet waren. Weil der Wanderer aus Altdorf kam, konnte er leicht feststellen, ob das Richtungsschild, das nach Altdorf wies, richtig oder falsch beschriftet war.

Wenn es richtig beschriftet war (a), mussten die beiden anderen falsch sein, und er ging den Weg, auf welchen das Schild „Mittendorf“ wies.



(a) (b) (a)

Wenn es aber falsch beschriftet war (b), (c), konnte er sich dieses Schild mit dem Richtungsschild „Altdorf“ vertauscht denken, und dann wiesen alle drei Schilder - auch das nach Neudorf - in die richtige Richtung.

Aufgabe 160831:
Uwe hatte zum Einkauf genau 41 Mark bei sich, ausnahmslos in gültigen Münzen der DDR. Darunter befand sich keine Münze mit einem geringeren Wert als 1 Mark. Bei seinem Einkauf hatte Uwe nun genau 31 Mark zu bezahlen. Dabei stellte er fest, dass er diese Summe nicht „passend“ hatte, also nicht ohne zu wechseln bezahlen konnte.

Ermittle alle Möglichkeiten dafür, welche Anzahlen der Münzen einer jeden Sorte (zu 1 M, 2 M, 5 M, 10 M, 20 M) Uwe hiernach bei sich haben konnte!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn eine Möglichkeit für derartige Anzahlen von Münzen vorliegt, so gilt:

1) Wäre unter den Münzen, die Uwe bei sich hatte, eine 10-Mark-Münze gewesen, so folgte der Widerspruch, dass die übrigen Münzen zusammen genau 31 M ergeben hätten.

2) Wäre keine 10-Mark-Münze, aber eine 5-Mark-Münze dabei gewesen, so ließen sich die restlichen 36 M nicht nur aus 20-Mark-Münzen zusammenstellen; mindestens 16 M müssten in 5-M-, 2-M- und 1-M-Münzen vorliegen.

a) Wäre unter diesen eine weitere 5-M-Münze, so ergäbe sie zusammen mit der zuvor genannten 5-M-Münze 10 M, und es folgte wie in 1) ein Widerspruch.

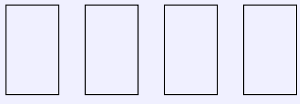
b) Wären es aber nur 2-M- und 1-M-Münzen, so wären es entweder mindestens fünf 2-M-Münzen, womit wieder 10 M zusammenkämen, oder es wären höchstens vier 2-M-Münzen, also mindestens acht 1-M-Münzen. Aus fünf von ihnen und der 5-M-Münze erhielte man ebenfalls 10 M, so dass wiederum ein Widerspruch vorliegt.

3) Wäre unter den Münzen, die Uwe bei sich hatte, keine 10-M- und keine 5-M-Münze, aber eine 2-M-Münze oder zwei 1-M-Münzen gewesen, so ließen sich die restlichen 39 M nicht nur aus 20-M-Münzen zusammenstellen; mindestens 19 M müssten in 2-M- und 1-M-Münzen vorliegen.
Darunter wären entweder mindestens fünf 2-M-Münzen oder aber höchstens vier 2-M-Münzen und dann folglich mindestens elf 1-M-Münzen, womit in jedem Falle wiederum 10 M zusammengestellt werden könnten.

4) Also hatte Uwe höchstens eine 1-M-Münze und sonst nur 20-M-Münzen bei sich. Unter diesen Bedingungen lassen sich aber 41 M nur so zusammensetzen, dass genau eine 1-M-Münze und genau zwei 20-M-Münzen vorliegen.

Diese Zusammensetzungsmöglichkeit erfüllt die Bedingungen der Aufgabe, da sich aus diesen Münzen nur die Beträge 1 M, 20 M, 21 M, 40 M und 41 M zusammenstellen lassen, also nicht 31 M.

Aufgabe 200834:
Auf einem Tisch liegen vier Spielkarten mit der Bildseite nach unten. Sie sind von links nach rechts in einer Reihe angeordnet, mit gleichgroßen Abständen jeweils zwischen unmittelbar benachbarten Karten (siehe Abbildung).



Den Mitspielern werden folgende Angaben mitgeteilt: Die vier Karten sind ein Bube, eine Dame, ein König und ein As, jede Karte in einer der vier Farben Kreuz, Pik, Herz, Karo, wobei jede dieser Farben genau einmal vertreten ist. Ferner gilt:

(1) Die Dame ist weiter vom As entfernt als das As vom König.

(2) Der Bube liegt näher am As als der König.

(3) Von der Herzkarte bis zur Karokarte ist der Abstand geringer als von der Kreuzkarte bis zur Herzkarte.

(4) Die Karokarte liegt weiter entfernt von der Herzkarte als von der Pikkarte.

(5) Die Pikkarte liegt unmittelbar benachbart links neben der Dame.

Beweise, dass aus diesen Angaben eindeutig hervorgeht, um welche Karten es sich handelt und in welcher Reihenfolge von links nach rechts sie auf dem Tisch liegen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Bube, Dame, König, As seien mit B, D, K bzw. A bezeichnet, die Kreuz-, Pik-, Herz-, Karokarte mit Kr, Pk, Hz bzw. Ka.
Wenn eine Reihenfolge von Karten den Angaben entspricht, so folgt: Zwischen K und A liegt wegen (2) mindestens eine Karte; denn sonst könnte der Abstand zwischen B und A nicht kleiner sein als der zwischen A und K. Aus (1) folgt daher:
Zwischen D und A liegen (mindestens zwei, also genau) die beiden anderen Karten, d. h., die Reihenfolge ist eine der vier in (6), (7) genannten:

$$DBKA, \quad DKBA, \quad (6) \qquad ; \qquad ABKD, \quad AKBD \quad (7)$$

Die in (6) genannten weisen links von D keine Karte auf, widersprechen also (5) und scheiden daher aus. Von den in (7) genannten Reihenfolgen entspricht nur

$$ABKD \qquad (8)$$

der Bedingung (2).
Weiter folgt: Zwischen Ka und Hz liegt wegen (4) mindestens eine Karte, zwischen Kr und Hz wegen (3) daher die beiden anderen Karten, d. h., die Reihenfolge ist eine der vier in (9), (10) genannten:

$$KrPkKaHz, HzPkKaKr, \quad (9) \qquad ; \qquad KrKaPkHz, HzKaPkKr \quad (10)$$

Davon entsprechen nur die in (10) genannten Reihenfolgen der auf (8) angewandten Bedingung (5). Von den Reihenfolgen (10) entspricht nur

$$KrKaPkHz$$

der Bedingung (4). Damit ist bewiesen, dass aus den Angaben eindeutig hervorgeht: Auf dem Tisch liegen die Karten Kreuz-As, Karo-Bube, Pik-König, Herz-Dame von links nach rechts in dieser Reihenfolge.

Aufgabe 270832:
Bei einem Schachturnier spielte jeder der acht Teilnehmer gegen jeden anderen genau eine Partie; die von den einzelnen Spielern erreichten Punktzahlen waren sämtlich voneinander verschieden. Bernd, der den zweiten Platz belegte, gewann so viele Punkte, wie die vier Letztplatzierten zusammen. Gerd wurde Dritter und Uwe belegte den siebenten Platz.

Untersuche, ob aus diesen Voraussetzungen eindeutig folgt, mit welchem Ergebnis die Partie zwischen Gerd und Uwe endete! Ist dies der Fall, dann gib das Ergebnis an!

Hinweis: Im Schachsport erhält der Spieler für einen Sieg 1 Punkt, spielt er unentschieden, bekommt er $\frac{1}{2}$ Punkt. Für eine Niederlage gibt es 0 Punkte.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Aus den Voraussetzungen folgt, dass Bernd höchstens 6 Punkte erreicht hat; denn entweder hat der Sieger des Turniers alle seine sieben Partien gewonnen, also auch die gegen den Zweitplazierten Bernd, oder der Sieger hat höchstens 6 Punkte erreicht und Bernd aus diesem Grunde (als Zweitplazierter mit davon verschiedener Punktzahl) höchstens 6 Punkte.

Daher haben nach Voraussetzung die vier Letztplazierten zusammen ebenfalls höchstens 6 Punkte erreicht. Sie haben aber unter sich bereits 6 Partien gespielt und müssen daher bereits in diesen Partien zusammen 6 Punkte erhalten haben.
Also haben sie alle ihre Spiele gegen die ersten vier verloren. Insbesondere hat der Siebente gegen den Dritten verloren; d. h., es folgt eindeutig; dass Gerd seine Partei gegen Uwe gewann.

Aufgabe 270835:
Eine quadratförmige schachbrettartige Tabelle bestehe aus 15 mal 15 Feldern. Eine der beiden Diagonalen des Quadrates sei d genannt. In jedes der 225 Felder der Tabelle kann eine der Zahlen 1 bis 15 so eingetragen werden, dass die folgenden Forderungen (1) und (2) erfüllt sind:

(1) Jede (waagerechte) Zeile enthält jede der 15 Zahlen genau einmal.

(2) Für je zwei Felder, die symmetrisch zu d liegen, gilt: Die Zahlen in diesen Feldern sind einander gleich.

Für jede Eintragung kann man die Summe aus denjenigen Zahlen bilden, die in den 15 von der Diagonale d durchquerten Feldern stehen.

Beweise, dass diese Summe durch die Voraussetzungen (1) und (2) eindeutig bestimmt ist, und ermittle diese Summe!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Für jede Eintragung, die die Voraussetzungen (1), (2.) erfüllt, gilt:

Wegen (1) kommt jede der Zahlen 1, 2, ..., 15 in der Eintragung genau 15 mal vor.
Wegen (2) kommt jede der Zahlen 1, 2, ..., 15 außerhalb der von d durchquerten Felder in einer geraden Anzahl vor, da diese Felder stets mit der Symmetrie bezüglich d - zu zweien gekoppelt auftreten.

Also kommt jede der Zahlen 1, 2, ..., 15 in den von d durchquerten Feldern in einer ungeraden Anzahl und somit mindestens einmal vor. Da für diese 15 Zahlen aber nur 15 von d durchquerte Felder zur Verfügung stehen, kann jede dieser Zahlen auch nicht mehr als einmal vorkommen.

Damit ist bewiesen: In den von d durchquerten Feldern kommt jede der Zahlen 1, 2, ..., 15 genau einmal vor; ihre Summe ist somit eindeutig bestimmt, sie beträgt $1 + 2 + ... + 15 = 120$.

Aufgabe 310832:
Sechs Spieler trugen ein Schachturnier aus, in dem jeder Spieler gegen jeden anderen genau eine Partie spielte. Wie üblich gab es bei einem unentschiedenen Spiel für jeden der beiden Spieler einen halben Punkt und sonst für den Gewinner 1 Punkt, für den Verlierer 0 Punkte. Nach dem Abschluss des Turniers machte ein Beobachter die Feststellung, dass keine zwei der sechs Spieler die gleiche Punktzahl erreicht hatten.

Gesucht ist die größtmögliche Punktzahl, die in einem solchen Turnier für den Letztplatzierten (d. h. für den Spieler mit der niedrigsten Punktzahl) erreichbar ist.

a) Nenne diese Zahl und beweise, dass für den Letztplatzierten keine größere Punktzahl möglich ist, wenn nur vorausgesetzt wird, dass die Feststellung des Beobachters zutrifft!

b) Zeige ferner - z. B. mit einer möglichen Ergebnistabelle der einzelnen Spiele -, dass es Ergebnisse geben kann, bei denen (die Feststellung des Beobachters zutrifft und) der Letztplatzierte die von dir genannte Punktzahl wirklich erreicht!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die größtmögliche für den Letztplazierten erreichbare Punktzahl beträgt 1.

Beweis:
a) Hätte der Letztplazierte 1,5 Punkte oder mehr erreichen können, so wären nach der Feststellung des Beobachters für die anderen Spieler der Reihe nach mindestens 2; 2,5; 3; 3,5; 4 Punkte erreichbar.
Damit müssten in dem Turnier insgesamt mindestens $1{,}5+2+2{,}5+3+3{,}5+4 = 16{,}5$ Punkte zu vergeben sein. Da aber jeder der 6 Spieler gegen 5 andere spielte und da in dem Produkt $6 \cdot 5 = 30$ jede Partie zweimal erfasst ist, waren insgesamt nur $30 : 2 = 15$ Partien zu spielen und folglich auch nur 15 Punkte zu vergeben.
Dieser Widerspruch beweist, dass eine größere Punktzahl als 1 für den Letztplazierten nicht möglich ist.

b) Ein Beispiel für Ergebnisse der einzelnen Spiele mit der Punktzahl 1 für den Letztplazierten zeigt die Tabelle

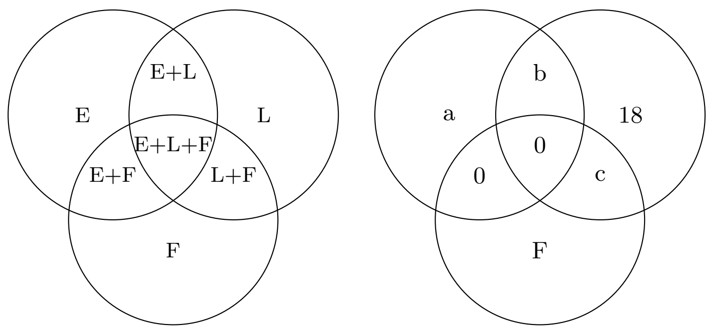
	A	B	C	D	E	F	Punktzahl
A	-	1	1	1	1	1	5
B	0	-	1	1	1	0	3
C	0	0	-	1	0,5	1	2,5
D	0	0	0	-	1	1	2
E	0	0	0,5	0	-	1	1,5
F	0	1	0	0	0	-	1

Aufgabe 330831:
In der Sprachfix-Schule zu Lernhausen sind 120 Schüler. Jeder von ihnen lernt mindestens eine der Sprachen Englisch, Latein, Französisch. Der Reporter Schreibklug erfährt folgende Tatsachen:

(1) Für genau 102 der 120 Schüler gilt: Jeder von diesen 102 Schülern lernt mindestens eine der Sprachen Englisch, Latein.
(2) Für genau 75 der 120 Schüler gilt: Jeder von diesen 75 Schülern lernt mindestens eine der Sprachen Latein, Französisch.
(3) Genau 18 der 120 Schüler lernen nur Latein.
(4) Die Zahl der Schüler, die genau die beiden Sprachen Englisch und Latein lernen, ist um 9 größer als die Zahl der Schüler, die genau die beiden Sprachen Französisch und Latein lernen.
(5) Keiner der 120 Schüler lernt sowohl Englisch als auch Französisch.

Schreibklug möchte berichten, wie viele der Schüler je genau eine der drei Sprachen und wie viele der Schüler je genau zwei der drei Sprachen lernen. Sind diese beiden Zahlenangaben durch die Auskünfte (1) bis (5) eindeutig bestimmt? Wenn das der Fall ist, so ermittle diese beiden Zahlenangaben!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



In der linken Abbildung sind die Schüler, die Englisch, Latein bzw. Französisch lernen, durch je einen Kreis zusammengefasst. Außerdem sind dort die möglichen Sprachenzusammenstellungen ersichtlich. Die Angaben in der rechten Abbildung bezeichnen die Schülerzahlen hierzu. Aus (3) und (5) folgen insbesondere die Eintragungen 18 und 0. Berücksichtigt man sie, so folgt weiter:

Wegen der Gesamtzahl 120 gilt $a + b + c + d + 18 = 120$ (6), wegen (1) gilt $a + b + d + 18 = 102$ (7), wegen (2) gilt $c + b + d + 18 = 75$ (8), wegen (4) gilt $b = 9 + d$ (9).
Aus (6) und (7) folgt $c = 18$ (10), aus (6) und (8) folgt $a = 45$ (11).

Damit erhält man aus (7) oder (8) $b + d = 39$.

Die gewünschten Zahlenangaben sind also eindeutig bestimmt; sie lauten:

Genau eine der drei Sprachen lernen insgesamt $a + c + 18 = 81$ Schüler,
genau zwei der drei Sprachen lernen insgesamt $b + d = 39$ Schüler.

Aufgabe 340831:
Auf 10 Kärtchen sind die Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 geschrieben, jede Ziffer auf genau einem Kärtchen. Anna wählt drei dieser Kärtchen und legt sie zweimal hintereinander auf den Tisch, das erste Mal als Zifferndarstellung der größten, das zweite Mal als Zifferndarstellung der zweitgrößten mit diesen drei Kärtchen erreichbaren Zahl.

Anna berichtet: Die Summe der beiden Zahlen, deren Zifferndarstellungen sie gelegt hat, beträgt 1233. Ermittle alle Möglichkeiten dafür, welche zwei Zahlen Anna hiernach gelegt haben kann!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Ziffern auf den von Anna gewählten Kärtchen seien so mit a, b, c bezeichnet, dass $a > b > c$ gilt. Dann hat Anna die Zahlen $100a + 10b + c$ und $100a + 10c + b$ gelegt. Daher gilt Annas Aussage genau dann, wenn diese Ziffern die Gleichung

$$200a + 11 \cdot (b + c) = 1233 \qquad (1)$$

erfüllen.
I. Wenn (1) erfüllt wird, so folgt: Wegen $0 \leq< b \leq 8$ ist $1 \leq b + c \leq 15$, also

$$11 \leq 11 \cdot (b + c) \leq 165 \qquad ; \qquad 1233 - 165 \leq 1233 - 11 \cdot (b + c) \leq 1233 - 11$$

Aus (1) folgt daher $1068 \leq 200a \leq 1222$, wegen $1068 : 200 > 5$ und $1222 : 200 < 7$ also $a = 6$. (2)

Aus (1) und (2) folgt $11 \cdot (b + c) = 1233 - 1200$, also $b + c = 3$.
Dies kann von den Ziffern b, c mit $b > c$ nur dadurch erfüllt werden, dass entweder $b = 3$, $c = 0$ oder $b = 2$, $c = 1$ (3) gilt.

II. Bei beiden in (2), (3) genannten Möglichkeiten für a, b, c wird (1) erfüllt.
Mit I. und II. ist gezeigt: Es gibt genau die beiden Möglichkeiten, dass Anna entweder die beiden Zahlen 630, 603 oder die beiden Zahlen 621, 612 gelegt hat.

Aufgabe 340832:
Lehrer Lehmann befragt die 26 Schüler seiner Klasse, in welchen der drei Arbeitsgemeinschaften, die in dieser Klasse besucht werden, sie sind. Wahrheitsgemäß ergibt sich:

- Auf die Frage, wer in der Arbeitsgemeinschaft Fotografie sei, melden sich genau 10 Schüler.
- Auf die Frage, wer in der Arbeitsgemeinschaft Technik sei, melden sich genau 8 Schüler.
- Auf die Frage, wer in der Arbeitsgemeinschaft Informatik sei, melden sich genau 7 Schüler.
- Genau 6 Schüler melden sich bei keiner dieser drei Fragen.

Auf dem Heimweg meint Uwe: „Genau 3 Schüler sind in allen drei Arbeitsgemeinschaften.“

Michael meint: „Genau 2 Schüler sind in genau je zwei der Arbeitsgemeinschaften.“

Jörg meint: „Genau 14 Schüler sind in genau je einer Arbeitsgemeinschaft.“

Zeige, dass alle drei Meinungen falsch sind!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Sind genau x Schüler in allen drei Arbeitsgemeinschaften, genau y Schüler in genau je zwei der Arbeitsgemeinschaften und genau z Schüler in genau je einer Arbeitsgemeinschaft, so gilt:
Die Anzahl aller Meldungen auf die Fragen des Lehrers ist $3x + 2y + z$; daher gilt

$$3x + 2y + z = 10 + 8 + 7 = 25 \qquad (1)$$

Die Anzahl aller Schüler der Klasse ist $x + y + z + 6$; daher gilt

$$x + y + z = 26 - 6 = 20 \qquad (2)$$

Subtrahiert man (2) von (1), so folgt $2x + y = 5$. Diese Gleichung hat in natürlichen Zahlen x, y nur die im folgenden angegebenen Lösungen, zu denen nach (2) nur die dazu

x	0	1	2
y	5	3	1
z	15	16	17

In keiner dieser Lösungen ist $x = 3$, also kann Uwes Meinung nicht zutreffen;
In keiner dieser Lösungen ist $y = 2$, also kann Michaels Meinung nicht zutreffen;
In keiner dieser Lösungen ist $z = 14$, also kann Jörgs Meinung nicht zutreffen.

Aufgabe 340834:
Ein Schachturnier wurde in „Runden“ ausgetragen. Diese Runden - anders als weithin üblich - so eingerichtet, dass in jeder Runde jeder Teilnehmer des Turniers genau eine Partie zu spielen hatte (es nahm also eine gerade Zahl von Spielern teil) und dass im gesamten Turnier für jeden Teilnehmer gegen jeden anderen genau eine Partie angesetzt wurde.

Michael und Robert nahmen 5 Runden lang an diesem Turnier teil, danach mussten sie leider ausscheiden. Um den übrigen Turnierablauf nicht weiter zu ändern, ließ man die Partien, die sie nach dem Turnierplan dann eigentlich noch zu spielen gehabt hätten, einfach ausfallen.

Michael erzählte seinen Freunden Herbert und Gerd, dass daher in dem gesamten Turnier (in dem sonst keine weiteren Ausfälle gab) insgesamt 38 Partien gespielt worden seien. Herbert meinte: „Diese Anzahl ist nicht möglich.“ Gerd entgegnet: „Doch, und wenn sie die richtige ist, so ist durch Michaels Angaben sogar eindeutig bestimmt, ob Michael und Robert in dem Turnier gegeneinander gespielt haben.“

Untersuche, ob Herberts oder Gerds Meinung zutrifft! Wenn Gerds Meinung zutrifft, haben dann Michael und Robert in dem Turnier gegeneinander gespielt?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Haben an dem Turnier außer Michael und Robert noch genau $2x$ Spieler teilgenommen, so hat von diesen jeder gegen jeden anderen genau eine Partie gespielt; das waren insgesamt

$$\frac{1}{2} \cdot 2x(2x - 1) = x \cdot (2x - 1)$$

Partien.
Wenn Michael und Robert in dem Turnier nicht gegeneinander gespielt haben, so haben sie in jeder der ersten 5 Runden zwei Partien gespielt. Dass zusammen mit diesen 10 Partien insgesamt

$$x \cdot (2x - 1) + 10 = 38$$

Partien gespielt wurden, ist möglich; denn diese Gleichung hat (wie die Probe zeigt) die Lösung $x = 4$. Also trifft Herberts Meinung nicht zu.

Ferner gilt: Hätten Michael und Robert in dem Turnier gegeneinander gespielt, so hätten sie nur in 4 Runden je zwei Partien gespielt, in einer Runde dagegen nur die eine Partie gegeneinander. Dann wären, wenn die Gesamtzahl 38 der Partien die richtige ist, zusammen mit diesen 9 Partien insgesamt

$$x \cdot (2x - 1) + 9 = 38$$

Partien gespielt worden. Diese Gleichung hat aber keine natürliche Zahl x als Lösung, wie z. B. daraus folgt, dass für alle natürlichen Zahlen $x \leq 4$ sich $x(2x - 1) + 9 \leq 4 \cdot 7 + 9 = 37$ ergibt, für alle $x > 5$ dagegen $x \cdot (2x - 1) + 9 \geq 5 \cdot 9 + 9 = 54$.

Also scheidet die Möglichkeit aus, dass Michael und Robert in dem Turnier gegeneinander gespielt haben könnten; d. h., aus den Angaben geht eindeutig hervor: Sie haben nicht gegeneinander gespielt; Gerts Meinung trifft zu.

Aufgabe 340841:
Die Bewohner des Planeten Quadron unterscheiden sich nach ihrem Geschlecht, und zwar gibt es, anders als auf der Erde, genau vier verschiedene Geschlechter. Politisch ist die Bevölkerung eingeteilt in genau vier Völkerstämme. Wenn der planetare Rat zusammentritt, entsendet jeder Völkerstamm genau vier Abgeordnete, von jedem Geschlecht einen.

Es ist dann eine Sitzordnung vorgeschrieben, bei der 16 Sitze in quadratförmiger Formierung zu vier Zeilen und vier Spalten angeordnet sind. In jeder Zeile und in jeder Spalte müssen alle vier Völkerstämme und alle vier Geschlechter vertreten sein.

Gib eine mögliche Sitzordnung an und bestätige, dass bei dieser Sitzordnung alle genannten Bedingungen erfüllt sind!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wir bezeichnen die Völkerstämme mit a, b, c und d, sowie die Geschlechter mit 1, 2, 3 bzw. 4, sodass also a1 den Abgeordneten von Völkerstamm a mit Geschlecht 1 bezeichne.
Dann gibt folgende Tabelle eine zulässige Sitzordnung an, wobei man sich leicht davon überzeugt, dass in jeder Zeile und jeder Spalte jeder Völkerstamm a bis d sowie jedes Geschlecht 1 bis 4 genau einmal vertreten ist und kein Abgeordneter mindestens zwei oder gar keinen Sitzplatz erhält:

$$\begin{array}{cccc} a1 & b2 & c3 & d4 \\ b3 & a4 & d1 & c2 \\ c4 & d3 & a2 & b1 \\ d2 & c1 & b4 & a3 \end{array}$$

IV.III. Anzahlen berechnen

I. Runde 1

Aufgabe 080813:
Gerd und Bernd haben sich ein Kartenspiel ausgedacht. Sie schneiden 6 Pappkarten aus und nummerieren sie nacheinander mit den Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Sie vereinbaren folgende Spielregeln: Jeder bekommt nach dem Mischen drei dieser Karten. Dann spielt jeder nacheinander jeweils eine Karte aus. Wer die Karte mit einer größeren Zahl ausspielt, bekommt den „Stich“ und darf nun ausspielen. Nach drei in dieser Weise zustandegekommenen „Stichen“ ist die Runde beendet. Wer in einer Runde mindestens zwei „Stiche“ gewinnt, ist in dieser Runde Sieger. Um häufiger als Bernd Sieger zu werden, erklärt sich Gerd bereit, in jeder Runde als erster auszuspielen. Er nimmt an, dadurch mehr Möglichkeiten zum Gewinn zu haben.

Überprüfe anhand der möglichen Kartenverteilungen und der jeweils möglichen Spielverläufe, ob Gerds Annahme richtig war! Dabei wollen wir voraussetzen, dass jeder der Spieler stets für sich möglichst günstig spielt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wir bezeichnen im folgenden die Karten durch die auf ihnen stehenden Zahlen. Es gibt insgesamt 20 Möglichkeiten, aus 6 Karten 3 verschiedene auszuwählen, nämlich:

$$\begin{array}{cccc}
1,2,3 & 1,2,4 & 1,2,5 & 1,2,6 \\
 & 1,3,4 & 1,3,5 & 1,3,6 \\
 & & 1,4,5 & 1,4,6 \\
 & & & 1,5,6 \\
 & 2,3,4 & 2,3,5 & 2,3,6 \\
 & & 2,4,5 & 2,4,6 \\
 & & & 2,5,6 \\
 & & 3,4,5 & 3,4,6 \\
 & & & 3,5,6 \\
 & & & 4,5,6
\end{array}$$

Besitzt ein Spieler die Karten 5 und 6, dann erhält er stets (mindestens) 2 Stiche. Das gilt auch, wenn er die Karten 3, 4, 5 besitzt.
Ferner gewinnt er stets, wenn er die Karten 4 und 6, aber nicht 5 hat; denn hierzu braucht er z. B. nur zuerst die dritte Karte, die er außer 4 und 6 noch hat, aufzulegen. Auf diese Weise kann er stets erzwingen, dass entweder diese Karte oder seine 4 einen Stich gewinnt; ein weiterer Stich ist ihm durch die 6 sicher.
Schließlich gewinnen auch stets die Karten 2, 3, 6, da die 1 des Gegenspielers stete gestochen werden kann. Es muss nur so gespielt werden, dass das nicht mit der 6 geschieht, d. h., der Besitzer der 6 darf diese, wenn er auszuspielen beginnt, nicht als erste Karte ausspielen.

Verlieren muss auf jeden Fall daher der Spieler, der eine der folgenden Kartenzusammenstellungen besitzt:

$$1,2,3 \qquad 1,2,4 \qquad 1,2,5 \qquad 1,2,6 \qquad 1,3,4 \qquad 1,3,5 \qquad 1,4,5 \qquad 2,3,4 \qquad 2,3,5$$

Besitzt ein Spieler aber die Karten 1, 3, 6 bzw. 2, 4, 5, dann verliert er, wenn er zuerst ausspielen muss. Im 1. Fall sticht der Gegenspieler stets die 1, und zwar (wenn sie als erste Karte eines „Stiches“ ausgespielt wird) mit der 2, während er mit einer der Karten 4 und 5 die 3 stechen kann. Im 2. Fall darf der Gegenspieler nur (mit der 3) stechen, falls der Anspielende die 2 anspielt; andernfalls gibt er den ersten Stich durch Zugeben der 1 ab und kann dann bei dem erneuten Anspiel stets mit der Karte stechen, die die ausgespielte Karte gerade noch sticht. Dadurch erhält er aber auch noch den letzten Stich.
Der zuerst Anspielende hat also nur genau 9 (von 20) Möglichkeiten, eine für ihn günstige Kartenzusammenstellung zu erhalten.
Daher ist es nicht günstig für Gerd, wenn er stets zuerst ausspielt.

Aufgabe 090811:
Untersuche, ob es Vielecke mit einer der folgenden Eigenschaften gibt:

a) Die Anzahl der Diagonalen ist dreimal so groß wie die Anzahl der Eckpunkte.

b) Die Anzahl der Eckpunkte ist dreimal so groß wie die Anzahl der Diagonalen.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Formel für die Anzahl z der Diagonalen in einem konvexen n-Eck lautet: $z = \frac{n(n-3)}{2}$.

Begründung: Von jedem Eckpunkt geht je eine Diagonale zu denjenigen Eckpunkten, die von dem genannten Eckpunkt verschieden und auch nicht zu ihm benachbart sind. Daher gehen von jedem Eckpunkt genau $(n-3)$ Diagonalen aus.

Addiert man diese für alle n Eckpunkte gebildeten Anzahlen, so hat man jede Diagonale des n-Ecks genau 2 mal gezählt. Daher gilt $2z = n(n-3)$, woraus die behauptete Formel folgt.

a) Angenommen, es gibt ein n-Eck der genannten Art. Dann gilt: $z = 3n \to 3n = \frac{n(n-3)}{2} \to 9n = n^2$
Daraus folgt wegen $n \neq 0$: $n = 9$.
Umgekehrt: Für $n = 9$ ergibt sich $z = 27 = 3n$. Also haben alle 9ecke und nur diese die Eigenschaft a).

b) Angenommen, es gibt ein n-Eck der genannten Art. Dann gilt:

$$z = \frac{n}{3} \to \frac{n}{3} = \frac{n(n-3)}{2} \to 11n = 3n^2$$

Es gibt also kein n-Eck mit der Eigenschaft b), weil die letzte Bedingung für keine positive ganze Zahl n erfüllbar ist.

Aufgabe 100811:
Ermittle die Anzahl aller sechsstelligen natürlichen Zahlen, in denen die Ziffernfolge 1970 (d. h. die Grundziffern 1, 9, 7, 0 in dieser Reihenfolge und ohne dazwischen stehende andere Ziffern) auftritt!

Wie lautet die kleinste und wie die größte dieser sechsstelligen Zahlen?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Bezeichnet man die beiden fehlenden Ziffern der gesuchten Zahl mit x und y, so können sechsstellige Zahlen der angegebenen Art nur die folgenden Formen haben:

a) $\overline{xy1970}$ mit $1 \leq x \leq 9$ und $0 \leq y \leq 9$,
b) $\overline{x1970y}$ mit $1 \leq x \leq 9$ und $0 \leq y \leq 9$,
c) $\overline{1970xy}$ mit $0 \leq x \leq 9$ und $0 \leq y \leq 9$.

Alle diese Zahlen sind voneinander verschieden; denn gehören zwei von ihnen zu derselben mit a), b) oder c) bezeichneten Gruppe, so ist diejenige von ihnen die kleinere, in der auch die aus $\overline{x}$ und $\overline{y}$ gebildete zweistellige Zahl $\overline{xy}$ die kleinere ist; gehören sie dagegen zu verschiedenen Gruppen, so unterscheiden sie sich (z. B.) in ihrer dritten Ziffer.

In Gruppe a) und b) gibt es nun jeweils genau so viele Zahlen der geforderten Art, wie es Zahlen $\overline{xy}$ mit $10 \leq \overline{xy} \leq 99$ gibt, das sind je genau 90 Zahlen, in Gruppe c) so viele, wie es Zahlen $\overline{xy}$ mit $0 \leq \overline{xy} \leq 99$ gibt, das sind genau 100 Zahlen.
Somit beträgt die gesuchte Anzahl $2 \cdot 90 + 100 = 280$.

Nach dem Vorherigen ist ferner jeweils die kleinste bzw. die größte Zahl
in Gruppe a) 101 970 bzw. 991 970,
in Gruppe b) 119 700 bzw. 919 709,
in Gruppe c) 197 000 bzw. 197 099.

Folglich ist die insgesamt kleinste der beschriebenen Zahlen 101970 und die insgesamt größte 991970.

Aufgabe 180812:
Über das Ergebnis einer Klassenarbeit ist folgendes bekannt:

- Es nahmen daran mehr als 20 und weniger als 40 Schüler teil.
- Das arithmetische Mittel aller Zensuren, die die Schüler in dieser Klassenarbeit erreichten, betrug 2,3125.

- Kein Schüler erhielt bei dieser Arbeit die Note „5“.
- Die Anzahl der „Zweien“ war eine ungerade Zahl und größer als 12.
- Die Anzahl der „Dreien“ war genau so groß wie die der„Zweien“.

a) Ermittle die Anzahl der Schüler, die an dieser Klassenarbeit teilnahmen!
b) Wie viele von ihnen erhielten hierbei die Note „1“?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Wegen $2{,}3125 = \frac{23125}{10000} = \frac{37}{16}$ und da 37 zu 16 teilerfremd ist, muss die Anzahl der Teilnehmer durch 16 teilbar sein. Die einzige (natürliche) Zahl, die (ganzzahliges) Vielfaches von 16 ist und zwischen 20 und 40 liegt, ist 32. Es waren also 32 Schüler an dieser Klassenarbeit beteiligt.

b) Die Summe der Zensuren ergibt 74, da $\frac{37}{16} \cdot 32 = 74$ ist.
Die Anzahl der „Zweien“ ist nicht größer als die Hälfte der Anzahl aller Schüler, sie kann also laut Aufgabe nur 13 oder 15 betragen haben. Falls 15 „Zweien“ und damit laut Aufgabe auch 15 „Dreien“ geschrieben worden wären, erhielte man als Summe dieser Zensuren 75, im Widerspruch zur oben ermittelten Summe 74.

Es wurden mithin 13 „Zweien“ und 13 „Dreien“ geschrieben. Folglich erhielten die restlichen 6 Schüler entweder eine „1“ oder eine „4“.
Da das arithmetische Mittel aller Zensuren weniger als 2,5 betrug, muss die Anzahl der „Einsen“ größer gewesen sein als die der „Vieren“. Damit verbleiben genau die folgenden Möglichkeiten:

1	2	3	4
6	13	13	0
5	13	13	1
4	13	13	2

Von ihnen ergibt nur der zweite Fall das angegebene arithmetische Mittel. Also erhielten 5 Schüler bei dieser Arbeit die Note „1“.

Aufgabe 210812:
Bei einem GST-Wettkampf im Luftgewehrschießen gaben Falk und Heiko je 5 Schuss ab. Auf den Scheiben wurden folgende Treffer ermittelt: Je genau einmal die 3, zweimal die 5, zweimal die 6, zweimal die 7, einmal die 8, einmal die 9, einmal die 10. Weiterhin ist bekannt:

(1) Falk erzielte mit seinen letzten vier Schüssen neunmal so viele Ringe wie mit seinem ersten Schuss.

(2) Falk schoss die 9.

Lassen sich nach diesen Angaben die folgenden beiden Fragen eindeutig beantworten?

a) Welcher der beiden Jungen erzielte das bessere Ergebnis?

b) Welcher der beiden Jungen schoss die 10?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Da die Treffer 3, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 8, 9, 10 erzielt wurden, konnte die Summe der Ringe bei vier Schüssen höchstens $7 + 8 + 9 + 10 = 34$ (*) betragen haben.
Hätte Falk mit seinem ersten Schuss eine 5 (oder eine höhere Ringzahl erzielt, dann hätte die Summe der vier anderen Ringzahlen wegen (1) gleich (oder größer als) 45 sein müssen, was im Widerspruch zu (*) steht.
Falk muss also mit seinem ersten Schuss die Ringzahl 3 erzielt haben, er erreichte somit 30 Ringe. Heiko war wegen $3 + 5 + 5 + 6 + 6 + 7 + 7 + 8 + 9 + 10 = 66$ und $66 - 30 = 36$ mit seiner Ringzahl von 36 der bessere Schütze von beiden.

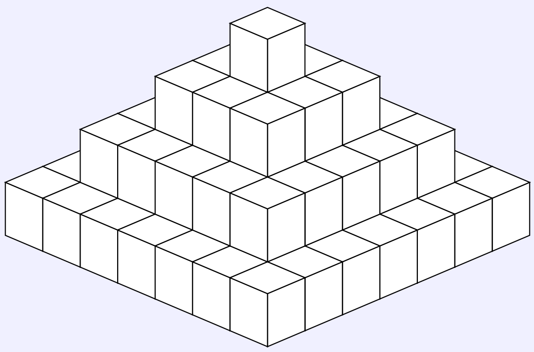
b) Falk schoss nach a) die 3 und wegen (2) die 9. Hätte er auch die 10 geschossen, müssten sich die restlichen $30 - 3 - 9 - 10 = 8$ Ringe als Summe zweier Treffer aus Ringzahlen $5, 5, 6, 6, 7, 7, 8$ darstellen lassen.
Dies ist jedoch nicht möglich (die beiden kleinsten ergeben bereits 10). Folglich schoss Heiko die 10.

Aufgabe 320812:
Ein Holzwürfel wurde mit den drei Farben Rot, Gelb und Blau angestrichen, jedes der sechs Quadrate seiner Oberfläche mit einer dieser Farben. Dabei wurde jede der drei Farben mindestens einmal verwendet. Anschließend wurde der Würfel in 27 kleine Würfel zersägt. Auf keinem dieser 27 Würfel waren nun die beiden Farben Blau und Gelb vorhanden.

Ist durch diese Angaben die Verteilung der Farben auf die Oberfläche des ursprünglichen Würfels eindeutig bestimmt? Wenn das der Fall ist, beschreibe diese Verteilung!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Aus den Angaben geht folgendermaßen eine eindeutig bestimmte Verteilung hervor:
Auf der Oberfläche des ursprünglichen Würfels war (mindestens) eines der sechs Quadrate blau angestrichen. Keines der vier benachbarten Quadrate war gelb angestrichen; denn sonst wäre beim Zersägen ein kleiner Würfel entstanden, auf dem Blau und Gelb vorhanden wären.
Da aber (mindestens) ein gelbes Quadrat vorkam, war es dasjenige, das dem genannten blauen Quadrat gegenüberlag. Für die vier anderen Quadrate, die ja nicht nur dem blauen, sondern auch dem gelben Quadrat benachbart waren, ist folglich auch die Farbe Blau auszuschließen.
Für diese Quadrate bleibt also nur die Farbe Rot übrig. Damit ist die Verteilung der Farben vollständig beschrieben.

Aufgabe 330814:
Ria baut aus Würfeln der Kantenlänge 2 cm einen pyramidenartigen Körper. Er besteht aus Schichten, die jeweils eine Quadratfläche vollständig bedecken. Die Abbildung zeigt das Prinzip seines Aufbaues. Die Gesamthöhe dieses Körpers beträgt 10 cm.



Als „Sichtfläche" eines aus Würfeln zusammengesetzten Körpers sei die Gesamtheit aller von oben oder von den Seiten sichtbaren Teilflächen des Körpers verstanden. Zu dieser „Sichtfläche" gehören also keine Flächen, die - wie die Grundfläche des von Ria gebauten Körpern - nur von unten zugänglich sind.

a) Aus wie vielen Würfeln besteht dieser Körper?

b) Ria streicht die „Sichtfläche" dieses Körpers farbig an. In wie vielen der Würfel sind dann sechs, fünf, vier, drei bzw. zwei Flächen, eine bzw. keine Fläche farbig angestrichen?

c) Beate entfernt eine Anzahl derjenigen Teilwürfel, die mindestens eine farbig angestrichene Fläche haben. Sie wählt diese Teilwürfel so, dass der übrigbleibende Körper eine ebenso große „Sichtfläche" hat wie der ursprüngliche Körper. Unter Einhaltung dieser Bedingung wählt Beate die Anzahl der zu entfernenden Teilwürfel aber möglichst groß. Wie groß ist diese Anzahl?

d) An dem von Beate übriggelassenen Körper streicht Ria von neuem dessen „Sichtfläche“ farbig an. Danach entfernt wiederum Beate nach denselben Bedingungen wie in c) eine möglichst große Anzahl von Teilwürfeln mit je mindestens einer farbigen Fläche. Wie groß ist diese Anzahl?

Hinweis: Zu b), c), d) werden nur Beschreibungen (gegebenenfalls auch Skizzen), aber keine Begründungen verlangt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Wegen der Gesamthöhe 10 cm und der Kantenlänge 2 cm der Würfel besteht der Körper aus fünf Schichten. Die Seiten der Quadratflächen, die von den Schichten bedeckt werden, werden der Reihe nach durch 1, 3, 5, 7, 9 Würfel gebildet.
Also besteht der Körper aus $1 + 9 + 25 + 49 + 81 = 165$ Würfeln.

b) In keinem Würfel beträgt die Anzahl der farbigen Flächen 6, 4 oder 1.
In genau 1 Würfel, nämlich im obersten, beträgt sie 5.
In den $4 \cdot 4 = 16$ Eckwürfeln der vier anderen Schichten beträgt sie 3.
In den übrigen $4 \cdot (1 + 3 + 5 + 7) = 64$ Kantenwürfeln dieser Schichten beträgt sie 2.
Die restlichen 84 Würfel haben keine farbige Fläche.

c) In den vier oberen Schichten sind von den Ecken- und Kantenwürfeln genau diejenigen stehenzulassen, die sich in den Kantenmitten befinden. Zu entfernen sind aus diesen Schichten die übrigen Ecken- und Kantenwürfel. Das sind, aufgezählt nach den Schichten in der Reihenfolge von oben nach unten, $4 \cdot (0 + 1 + 3 + 5) = 36$ Würfel.

d) In der zweiten bis vierten Schicht, von oben an gezählt, befinden sich nun außer den in c) als „stehenzulassen“ bezeichneten Würfeln solche Teilschichten, die wieder je eine Quadratfläche bedecken.
Von diesen sind wieder die Ecken- und Kantenwürfel mit Ausnahme der Würfel an den Kantenmitten zu entfernen, das sind $4 \cdot (0 + 1 + 3) = 16$ Würfel.

Aufgabe 340812:
Eine dreistellige natürliche Zahl werde genau dann „symmetrisch“ genannt, wenn ihre Hunderterziffer gleich ihrer Einerziffer ist.

a) Bilde alle diejenigen dreistelligen symmetrischen Zahlen, in denen nur Ziffern 0, 1, 2 vorkommen (jede eventuell auch mehrfach oder gar nicht)! Eine Begründung wird nicht verlangt.

b) Bilde alle diejenigen dreistelligen symmetrischen Zahlen, die durch 6 teilbar sind und in denen nur die Ziffern 2, 5, 8 vorkommen! Beweise, dass genau die von Dir angegebenen Zahlen die geforderten sind!

c) Ermittle die Anzahl aller dreistelligen symmetrischen Zahlen!

d) Ermittle die Summe aller dreistelligen symmetrischen Zahlen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) 101, 111, 121, 202, 212, 222.

b) I. Wenn eine Zahl die genannten Forderungen erfüllt, so folgt:
Da die Zahl durch 6, also auch durch 2 teilbar ist, ist ihre Einerziffer gerade, also entweder 2 oder 8. Daher können höchstens die Zahlen $222, 252, 282, 828, 858, 888$ (1) die Forderungen erfüllen.

II. Sie erfüllen die Forderungen; denn sie sind gerade, ihre Quersumme beträgt 6, 9, 12, 18, 21, 24, ist also durch 3 teilbar; also sind diese Zahlen durch 3 und damit auch durch 6 teilbar. Nach I. und II. erfüllen genau die Zahlen (1) die Forderungen.

c) Die Hunderter- und Einerziffer einer dreistelligen symmetrischen Zahl ist eine der neun Ziffern 1, 2, ..., 9, die Zehnerziffer ist eine der zehn Ziffern 0, 1, 2, ..., 9. Daher beträgt die Anzahl aller dieser Zahlen $9 \cdot 10 = 90$.

d) Jede der Hunderter- und Einerziffern 1, 2, ..., 9 kommt in den soeben aufgezählten Zahlen genau 10 mal vor, jede der Zehnerziffern 0, 1, 2, ..., 9 kommt genau 9 mal vor.
Zur insgesamt gesuchten Summe liefert daher die Summe der Einerziffern den Beitrag

$$10 \cdot (1 + 2 + \cdots + 9) = 450$$

die Summe der mit 10 multiplizierten Zehnerziffern liefert den Beitrag

$$9 \cdot 10(0 + 1 + 2 + \cdots + 9) = 4050$$

die Summe der mit 100 multiplizierten Hunderterziffern liefert den Beitrag

$$10 \cdot 100(1 + 2 + \cdots + 9) = 45000$$

Also ist die insgesamt gesuchte Summe $450 + 4050 + 45000 = 49500$.

II. Runde 2

Aufgabe 030823:
In einer Aula stehen 300 Stühle in mehreren gleichlangen Reihen hintereinander. Nimmt man für den Mittelgang aus jeder Querreihe 3 Stühle heraus und bildet aus diesen Stühlen 5 neue Querreihen (mit Mittelgang), so bleibt die Anzahl der Sitzplätze gleich.

Wie viel Stühle standen ursprünglich in jeder Querreihe? Begründe deine Behauptung!

Lösung von Steffen Polster:
r sei die Anzahl der Reihen und x die Anzahl der Stühle je Reihe. Dann ist zu Beginn $300 = r \cdot x$, d. h. $r = \frac{300}{x}$

Nach dem Umstellen der Stühle stehen $x-3$ Stühle in jeder, der nun $r+5$ Reihen, d. h. $300 = (r+5)\cdot(x-3)$.

Setzt man die erste Gleichung in die zweite ein, wird

$$300 = \left(\frac{300}{x} + 5\right) \cdot (x - 3)$$

Umstellen ergibt die quadratische Gleichung $x^2 - 3x - 180 = 0$ und mit der Lösungsformel

$$x_{1;2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 180} = \frac{3}{2} \pm \frac{27}{2}$$

Nur $x_1 = 15$ ist positiv und somit die Lösung. Folglich ist $r = \frac{300}{x} = \frac{300}{15} = 20$.
Am Anfang gab es 20 Reihen mit jeweils 15 Stühlen. Nach den Umstellen sind es 25 Reihen mit je 12 Stühlen.

Aufgabe 060821:
Klaus hat 7 Kugeln: 4 rote, 2 weiße und eine schwarze. Er soll sie in zwei Kästen A und B legen; in A drei, in B vier.

Gib sämtliche möglichen voneinander verschiedenen Verteilungen der Kugeln auf die zwei Kästen an! Die Reihenfolge, in der die Kugeln in den Kästen liegen, soll dabei nicht berücksichtigt werden.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es genügt, alle möglichen voneinander verschiedenen Verteilungen der Kugeln auf einen der Kästen (z. B. A) zu betrachten, da dadurch die Verteilung der restlichen Kugeln auf den Kasten B eindeutig bestimmt ist. Der Kasten A kann höchstens 1 schwarze, höchstens 2 weiße und höchstens 3 rote Kugeln enthalten.

Alle möglichen voneinander verschiedenen Verteilungen gibt daher das folgende Schema an:

	A	B	
1.	r r r	r s w w	Dabei bedeuten:
2.	r r s	r r w w	r - rote Kugel
3.	r r w	r r s w	s - schwarze Kugel
4.	r s w	r r r w	w - weiße Kugel
5.	r w w	r r r s	
6.	s w w	r r r r	

Aufgabe 070823:
Jemand würfelte mit n Würfeln bei einem einzigen Wurf zusammen die Augenzahl $3n+4$, und zwar zeigte dabei jeder Würfel die gleiche Augenzahl.

Man ermittle sämtliche Werte von n, für die das möglich ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Augenzahl $3n+4$ muss durch n teilbar sein.
$\frac{3n+4}{n} = 3 + \frac{4}{n}$ liefert nur für n als Teiler von 4, also nur für $n = 1$, $n = 2$, $n = 4$ ganzzahlige Ergebnisse.

$n = 1$ scheidet aus, da keine 7 gewürfelt werden kann.
Für $n = 2$ erhält man 10 Augen, d. h., es wurde zweimal eine 5 gewürfelt.
Für $n = 4$ ergeben sich 16 Augen, d. h., es wurde viermal eine 4 gewürfelt.
Es wurde also entweder mit 2 oder mit 4 Würfeln gewürfelt.

Aufgabe 090821:
Klaus und Horst spielen mit Würfeln. Sie benutzen bei jedem Wurf genau zwei verschieden große Würfel und addieren jedesmal die beiden Augenzahlen.

Klaus meint, dass unter allen möglichen verschiedenen Würfen solche mit der Summe 7 am häufigsten auftreten. Zwei Würfe heißen dabei genau dann gleich, wenn die Augenzahlen gleich großer Würfel jeweils übereinstimmen.

Begründe die Richtigkeit dieser Meinung!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Ordnet man z. B. die möglichen Würfe und die zugehörigen Summen der jeweiligen beiden Augenzahlen in Form nachstehender Tabelle an, so erkennt man, dass in der Tat die Summe 7 am häufigsten auftritt. (waagerecht ... großer Würfel, senkrecht ... kleiner Würfel):

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	**7**
2	3	4	5	6	**7**	8
3	4	5	6	**7**	8	9
4	5	6	**7**	8	9	10
5	6	**7**	8	9	10	11
6	**7**	8	9	10	11	12

Aufgabe 190821:
Eine Gruppe von 39 Schülern unterhält sich über ihre Zensuren in den Fächern Mathematik, Russisch und Deutsch. Dabei wird festgestellt:

(1) Genau 11 Schüler haben in Mathematik die Zensur „2“.
(2) Genau 19 Schüler haben in Russisch die Zensur „2“.
(3) Genau 23 Schüler haben in Deutsch die Zensur „2“.
(4) Genau ein Schüler hat in allen drei Fächern die Zensur „2“.
(5) Genau 4 Schüler haben in Mathematik und Deutsch, aber nicht in Russisch eine „2“.
(6) Genau 7 Schüler haben in Russisch und Deutsch, aber nicht in Mathematik eine „2“.
(7) Genau 2 Schüler haben in Mathematik und Russisch, aber nicht in Deutsch eine „2“.

Ermittle aus diesen Angaben, wie viel Schüler dieser Gruppe in genau einem und wie viel in keinem der angegebenen Fächer die Zensur „2“ haben!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Aus (1), (4), (5) und (7) folgt wegen $11 - 1 - 4 - 2 = 4$, dass genau 4 Schüler genau in Mathematik die Zensur „2“ haben.
Aus (2), (4), (6) und (7) folgt wegen $19-1-7-2 = 9$, dass genau 9 Schüler genau in Russisch die Zensur „2“ haben.
Aus (3), (4), (5) und (6) folgt, dass wegen $23 - 1 - 4 - 7 = 11$ genau 11 Schüler genau in Deutsch eine „2“ haben.
Wegen $4+9+11 = 24$ haben somit genau 24 Schüler dieser Gruppe in genau einem der genannten Fächer die Zensur „2“.
Da wegen (5), (6), (7) genau 13 Schüler in genau zwei der Fächer eine „2“ haben und wegen (4) noch ein weiterer Schüler hinzukommt, haben wegen $24 + 13 + 1 = 38$ mithin genau 38 Schüler in wenigstens einem der Fächer die Zensur „2“. Folglich hat genau ein Schüler dieser Gruppe in keinem der genannten Fächer die Zensur „2“.

Aufgabe 240821:
Klaus berichtet über alle Tage seines Aufenthaltes im Ferienlager:

(1) An jedem Vormittag war das Wetter entweder durchgehend sonnig oder durchgehend regnerisch.
(2) An jedem Nachmittag war das Wetter entweder durchgehend sonnig oder durchgehend regnerisch.
(3) An genau sieben Tagen kam regnerisches Wetter vor.
(4) Wenn es nachmittags regnete, war es vormittags sonnig.
(5) An genau fünf Nachmittagen war es sonnig.
(6) An genau sechs Vormittagen war es sonnig.

Stelle fest, ob sich aus diesen Angaben die Anzahl der Tage, die Klaus im Ferienlager war, eindeutig ermitteln lässt! Ist dies der Fall, so gibt diese Anzahl an! Gib ferner eine (nach den Angaben) mögliche Verteilung sonniger und regnerischer Vor- und Nachmittage an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es sei x die Anzahl der Tage, an denen es vormittags und nachmittags sonnig war,
y die Anzahl der Tage, an denen es vormittags sonnig und nachmittags regnerisch war,
z die Anzahl der Tage, an denen es vormittags regnerisch und nachmittags sonnig war.

Da es nach (4) keinen Tag gab, an dem es vormittags und nachmittags regnerisch war, folgt aus (1) und (2), dass jeder Tag genau eine der drei bei x, y und z genannten Wetterverteilungen aufwies. Die gesuchte Anzahl der Tage, die Klaus im Ferienlager war, ist somit $x + y + z$. Aus (3), (5) bzw. (6) folgt

$$y + z = 7, \qquad x + z = 5, \qquad x + y = 6$$

Addiert man diese drei Gleichungen, so ergibt sich $2 \cdot (x + y + z) = 18$, also $x + y + z = 9$. Die gesuchte Anzahl lässt sich also eindeutig ermitteln; sie beträgt 9.

Weiter folgt $x = 9 - 7 = 2$, $y = 9 - 5 = 4$, $z = 9 - 6 = 3$ und damit für die Wetterverteilung:
An genau 2 Tagen war es vormittags und nachmittags sonnig,
an genau 4 Tagen war es vormittags sonnig und nachmittags regnerisch,
an genau 3 Tagen war es vormittags regnerisch und nachmittags sonnig.

Wie eine Oberprüfung der Angaben (1) bis (6) zeigt, gelangt man mit diesen Anzahlen zu einer (nach den Angaben) möglichen Wetterverteilung, z. B. in der folgenden Tabelle:

Tag	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Vormittag	s	s	s	s	s	s	r	r	r
Nachmittag	s	s	r	r	r	r	s	s	s

Aufgabe 250823:
Ein Sicherheitsschloss besitze vier Rädchen, die jeweils mit den Ziffern 1 bis 9 versehen sind. Nur durch Einstellen genau einer Zahlenkombination (an jedem Rädchen eine bestimmte Ziffer) lässt sich das Schloss öffnen. Der Besitzer eines solchen Schlosses hat sich beim Kauf die genaue Zahlenkombination nicht gemerkt. Er weiß nur noch, dass in der Zahlenkombination jede der Ziffern 1, 4 und 6 genau einmal vorkommt. Die Reihenfolge der einzelnen Ziffern ist ihm ebenfalls entfallen.

a) Wie viele verschiedene Einstellungen sind im ungünstigsten Falle für das Öffnen des Schlosses auszuführen?

b) Wie viele verschiedene Einstellungen wären höchstens nötig, wenn der Besitzer noch weiß, mit welchem Rädchen er die Ziffer 4 einstellen muss?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Man beginne mit denjenigen Zahlenkombinationen, bei denen die Ziffern 1, 4, 6 in dieser Reihenfolge auftreten. Außer ihnen tritt noch jeweils eine nicht bekannte Ziffer x auf. Da x nicht mit den Ziffern 1, 4, 6 identisch ist, gibt es für x insgesamt sechs Möglichkeiten.
Weil x sowohl an der 1., 2., 3. bzw. 4. Stelle der Einstellungsfolge stehen kann, gibt es für die Reihenfolge 1, 4, 6 somit insgesamt $4 \cdot 6 = 24$ Möglichkeiten.

Analog verfährt man bei den weiteren fünf möglichen Reihenfolgen 1, 6, 4; 4, 1, 6; 4, 6, 1; 6, 1, 4; 6, 4, 1. Im ungünstigsten Falle sind also $6 \cdot 24 = 144$ Einstellungen auszuführen.

b) Man beginne mit denjenigen Zahlenkombinationen, bei denen die Ziffern 1, 6 in dieser Reihenfolge auftreten. Außer ihnen und der Ziffer 4 tritt noch jeweils eine nicht bekannte Ziffer x auf.
Wieder gibt es für x insgesamt sechs Möglichkeiten. Weil für x genau diejenigen drei Plätze in der Einstellungsfolge frei sind, an denen die Ziffer 4 nicht steht, gibt es für die Reihenfolge 1, 6 somit insgesamt $3 \cdot 6 = 18$ Möglichkeiten.

Analog verfährt man bei der anderen Reihenfolge 6, 1. Somit wären unter den Bedingungen der Aufgabe b) höchstens $2 \cdot 18 = 36$ Einstellungen nötig.

Aufgabe 270823:
Über ein Turnier in einer AG „Schach“ wird berichtet: Das Turnier wurde in mehreren Runden ausgetragen. In jeder Runde spielte jedes AG-Mitglied gegen jedes andere genau eine Partie. Auf diese Weise wurden in dem Turnier insgesamt 112 Partien gespielt. Es nahmen mehr als zwei Mitglieder teil.

Untersuche, ob ein Turnier möglich ist, bei dem diese Angaben zutreffen, und ob die Anzahl der Runden sowie die Anzahl der Teilnehmer eindeutig aus den Angaben folgen! Wenn dies der Fall ist, so ermittle diese Anzahlen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn ein solches Turnier möglich ist, müssen in jeder Runde gleich viele Partien gespielt werden; daher muss die Anzahl der Partien einer Runde ein Teiler von 112 sein, d. h. eine der Zahlen

$$1, 2, 4, 7, 8, 14, 16, 28, 56, 112$$

Die folgende Tabelle zeigt eine Ermittlung von Werten für die Anzahl der Partien einer Runde. Jeweils zu einer Teilnehmerzahl wird diese Partienzahl folgendermaßen gefunden:

Sind es drei Teilnehmer A, B, C, so ergeben sich drei Partien AB, AC, BC. Bei jeder Vergrößerung der Teilnehmerzahl um eins kommen so viele Partien hinzu, wie die vorhergehende Teilnehmerzahl angibt (da der neue Teilnehmer gegen alle vorigen zu spielen hat).

Teilnehmer	Partien	Teilnehmer	Partien
3	3	10	36+9=45
4	3+3=6	11	45+10=55
5	64+=10	12	55+11=66
6	10+5=15	13	66+12=78
7	15+6=21	14	78+13=91
8	21+7=28	15	91+14=105
9	28+8=36	16	105+15=120

Bei weiterer Fortsetzung der Tabelle ergeben sich nur noch größere Partienzahlen.
Als einzige Partienzahl, die ein Teiler von 112 ist, verbleibt daher 28. Damit und wegen $112 : 28 = 4$ ist bewiesen:

Ein Turnier der genannten Art ist möglich; aus den Angaben folgt eindeutig: Es wurden genau vier Runden gespielt; es nahmen genau acht AG-Mitglieder teil.

Aufgabe 300823:
Jemand möchte in einer Ebene eine Anzahl n von Punkten zeichnen. Sie sollen so gewählt werden, dass keine drei dieser Punkte auf einer gemeinsamen Geraden liegen. Anschließend will er Dreiecke suchen, deren sämtliche drei Ecken zu den gezeichneten n Punkten gehören.

Ermittle die kleinste Anzahl n solcher Punkte, für die es möglich ist, 120 verschiedene derartige Dreiecke zu finden!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Hat man n Punkte wie angegeben gezeichnet, so kann man zu jedem dieser n Punkte einen der übrigen $n - 1$ Punkte aufsuchen und damit genau $n \cdot (n - 1)$ geordnete Paare von Punkten erhalten.
Ebenso kann man zu jedem dieser Paare einen der darin nicht vorkommenden $n - 2$ Punkte aufsuchen und damit genau $n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2)$ geordnete Zusammenstellungen (Tripel) von je drei der n Punkte erhalten.

Mit diesen Zusammenstellungen wird die Eckenmenge jedes aufzufindenden Dreiecks erfasst, und zwar je 6 mal.
Sind nämlich A, B, C die Ecken eines solchen Dreiecks, so werden sie genau mit den 6 geordneten Zusammenstellungen ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA erfasst. Daher lassen sich insgesamt $\frac{1}{6} \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n - 2)$ Dreiecke finden, deren sämtliche Ecken zu den n Punkten gehören.

Für $n = 10$ ist diese Anzahl 120, für $n < 10$ ist sie kleiner als 120. Die kleinste Anzahl n, für die es möglich ist, 120 derartige Dreiecke zu finden, beträgt daher $n = 10$.

III. Runden 3 & 4

Aufgabe 020833:
Rainer, der zur Fußballmannschaft der Schule gehört, schafft Ordnung in dem Schrank für Fußballschuhe. Er weiß, dass einige Schuhe zum Schuhmacher gebracht worden sind.
Er stellt fest, dass die Schuhe verschiedene Größen aufweisen, nämlich 37, 38, 39 und 40.

Sechs Paare sind ordnungsgemäß zusammengebunden, das sind Schuhe jeder Größe. Die meisten dieser Paare sind von der Größe 38.
Von den außerdem vorhandenen fünf rechten Schuhen ist keiner von der Größe 38, die meisten sind von der Größe 39.

Die außerdem noch vorhandenen acht linken Schuhe gehören zu jeder Größe, am meisten ist die Größe 40, am wenigsten die Größe 37 vertreten.

a) Wie viel Fußballschuhe sind beim Schuhmacher?

b) Was für Fußballschuhe sind das?

Begründe deine Antwort!

Lösung von Carsten Balleier:
Von jeder Größe gibt es mindestens einen; und von der 38 mehr als von jeder anderen.

Gäbe es 2 von der 38, müsste es von einer anderen Größe auch 2 geben. Es dürfte eine andere Größe gar nicht vorhanden sein. Also muss die 38 dreimal, die anderen je einmal unter den Paaren vertreten sein.

Bei den rechten Schuhen geht man analog vor: es gibt nur drei Größen, insgesamt aber einen Schuh weniger als bei den Paaren. Rainer hat also 3 rechte 39-er und je einen 37-er und 40-er vor sich.

Bei den linken weiß man, dass es wenigstens einen Schuh der 37 gibt und dass die anderen häufiger (d. h. mind. 2-mal) vorkommen. Da es nur 8 linke gibt, ist die 40 dreimal, die 39 und 38 je zweimal und die 37 einmal vertreten.

Wenn man schaut, welche linken und rechten noch zu Paaren gebunden werden können, stellt man fest, dass 2 rechte 38-er, ein linker 39-er und 2 rechte 40-er beim Schuhmacher sein müssen.

Aufgabe 050831:
Ermittle die Anzahl aller Zahlen zwischen 10000 und 99999, die wie z. B. 35453 vorwärts gelesen die gleiche Ziffernfolge wie rückwärts gelesen ergeben.

Lösung von Eckart Keller:
Die gesuchte Anzahl ist gleich der Anzahl aller dreistelligen Zahlen, da sich aus jeder dreistelligen Zahl genau eine derartige Zahl ergibt, wenn man die ersten beiden Ziffern der Zahl in umgekehrter Reihenfolge hinter die Zahl schreibt und man umgekehrt jede derartige fünfstellige Zahl aus einer dreistelligen erhält.

Da es 900 dreistellige Zahlen gibt, beträgt die gesuchte Anzahl 900.

Aufgabe 060834:
Von 10 Koffern und 10 Schlüsseln sei bekannt, dass jeder Schlüssel zu genau einem Koffer passt und zu jedem Koffer genau ein Schlüssel. Man weiß aber nicht, welcher Schlüssel zu welchem Koffer gehört.

Jemand ermittelt dies durch probieren, wobei jede Probe darin besteht, dass er für genau einen Koffer und genau einen Schlüssel feststellt, ob sie zusammenpassen oder nicht. Die Reihenfolge der Proben wird so gewählt, dass für jeden Koffer, sobald einmal an ihm eine Probe durchgeführt wurde, dann genau so viele Proben vorgenommen werden, bis der passende Schlüssel ermittelt ist.

Welches ist
a) die kleinste
b) die größte
Zahl von Proben, bei der es vorkommen kann, dass genau nach dieser Probenzahl zu jedem Koffer der richtige Schlüssel feststellbar ist?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Nach Aufgabenstellung müssen an dem Koffer, an dem die erste Probe durchgeführt wurde, genau so viel Proben vorgenommen werden, bis zu ihm der passende Schlüssel ermittelt ist. Das ist frühestens nach einer Probe, spätestens nach 9 Proben der Fall.

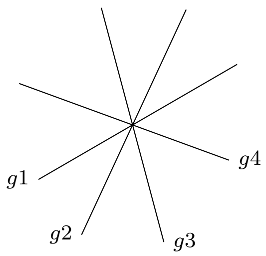
Sodann ist eine entsprechende Überlegung für die restlichen 9 Koffer und Schlüssel durchzuführen usw. bis zu 2 Koffern und Schlüsseln. Für diese sind mit genau einer Probe alle Zusammengehörigkeiten ermittelt. Also ist die kleinste Probenzahl der gesuchten Art $1+1+1+1+1+1+1+1+1 = 9$, die größte Probenzahl der gesuchten Art $9+8+7+6+5+4+3+2+1 = 45$.

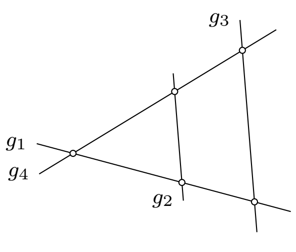
Aufgabe 110832:
Von sieben Schülern soll jeder auf sein Zeichenblatt vier voneinander verschiedene Geraden zeichnen. Dabei soll der erste Schüler die Geraden so zeichnen, dass kein Schnittpunkt, der zweite so, dass genau ein Schnittpunkt auftritt, der dritte so, dass genau 2 Schnittpunkte, der vierte so, dass genau 3 Schnittpunkte, der fünfte so, dass genau 4 Schnittpunkte, der sechste so, dass genau 5 Schnittpunkte, der siebente so, dass genau 6 Schnittpunkte auftreten. Schnittpunkte, die außerhalb des Zeichenblattes liegen werden hierbei mitgezählt.

Nach einer gewissen Zeit behaupten der zweite, der dritte und der sechste Schüler, dass ihre Aufgabe nicht lösbar sei.

Stelle fest, wer von den drei Schülern recht und wer nicht recht hat, und beweise deine Feststellung!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Der zweite und der sechste Schüler haben nicht recht: denn es gibt z. B. folgende Lösungen:





Der dritte Schüler hat recht.

Beweis: Angenommen, es gäbe 4 Geraden so, dass genau 2 Schnittpunkte auftreten. Da Schnittpunkte existieren, können die vier Geraden nicht sämtlich parallel zueinander sein.
O. B. d. A. mögen sich die Geraden g und g_2 im Punkt A schneiden. Von den beiden anderen Geraden muss mindestens eine nicht durch A gehen, da sonst nur A als Schnittpunkt aufträte.
Dies sei etwa die Gerade g_3. Sie hat also mit einer der beiden Geraden, etwa mit g_1, einen von A verschiedenen Schnittpunkt B.

Dann gilt $g_3 \parallel g_2$, weil sonst entgegen der Aufgabe g_3 mit g_2 einen weiteren von A und B verschiedenen Schnittpunkt hätte. Die vierte Gerade kann nun nicht ebenfalls zu g_2 und g_1 parallel sein, da sie dann g_1 in einem von A und B verschiedenen Punkt schneiden würde. Also hat sie einen Schnittpunkt A' mit g_2 und einen Schnittpunkt B' mit g_3.

Da sie von g_1 verschieden ist, kann nicht gleichzeitig $A = A'$ und $B = B'$ sein. Somit tritt außer A und B noch mindestens ein weiterer Schnittpunkt auf.

Dieser Widerspruch beweist, dass die Annahme, es gäbe 4 Geraden, für die genau 2 Schnittpunkte auftreten, falsch war.

Aufgabe 250832:
Brigade Schulz spielt im „Tele-Lotto (5 aus 35)" nach einem sogenannten „vollmathematischen System mit n Zahlen". Darunter versteht man, wenn n eine natürliche Zahl mit $5 < n \leq 35$ ist, folgendes System:

Es werden von der Brigade genau n Zahlen 1, 2,..., 35 ausgewählt, und dann werden in der Menge dieser n Zahlen alle verschiedenen Teilmengen aus je fünf Elementen ermittelt. Jede dieser Teilmengen wird als Tipp abgegeben.

a) Die Brigade spielt nach einem „vollmathematischen System mit 6 Zahlen". Bei der nachfolgenden Ziehung im Tele-Lotto stellt sich heraus, das genau vier der fünf Gewinnzahlen unter den sechs von der Brigade in ihrem System verwendeten Zahlen vorkommen.

Ferner werden nach dieser Ziehung folgende Gewinnquoten bekanntgegeben: Für jeden Tip mit genau drei richtig getippten Zahlen gibt es 20 M, für jeden Tipp mit genau vier richtig getippten Zahlen gibt es 400 M, für jeden Tipp mit fünf richtig getippten Zahlen 3000M.

Ermittle den hiermit zustandekommenden Gewinn der Brigade!

b) Die Brigade spielt nach einem „vollmathematischen System mit 7 Zahlen". Bei einer Ziehung wird festgestellt: Genau vier der fünf Gewinnzahlen kommen unter den sieben von der Brigade verwendeten Zahlen vor. Die Gewinnquoten sind dieselben wie in a).

Ermittle ebenfalls den Gewinn der Brigade!

Hinweis: Die Kosten, d. h. der Spieleinsatz, sollen in beiden Aufgaben nicht berücksichtigt werden.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) In der Menge der sechs von der Brigade verwendeten Zahlen gibt es genau sechs verschiedene Teilmengen aus je fünf Elementen; diese Teilmengen entstehen nämlich, indem man jeweils eine der sechs Zahlen weglässt.

Genau zwei der sechs Zahlen sind nicht Gewinnzahlen. Daher gibt es unter den von der Brigade abgegebenen Tipps genau die beiden folgenden Sorten (1), (2):

(1) Tipps mit genau einer Zahl, die nicht Gewinnzahl ist,
(2) Tipps mit den beiden Zahlen, die nicht Gewinnzahl sind.

Von der Sorte (1) gibt es genau zwei Tipps, nämlich genau diejenigen, in denen die vier Gewinnzahlen und eine der beiden anderen Zahlen stehen.
Von der Sorte (2) sind folglich genau die vier anderen Tipps des Systems. Somit ergibt sich der Gewinn $2 \cdot 400M + 4 \cdot 20M = 880M$.

b) In der Menge der sieben von der Brigade verwendeten Zahlen gibt es genau 21 verschiedene Teilmengen aus je fünf Elementen.
Diese entstehen nämlich, indem man jeweils genau zwei der sieben Zahlen weglässt, und das kann

- entweder die erste der sieben Zahlen und eine der sechs übrigen sein (sechs Möglichkeiten)
- oder die zweite und eine der fünf von der ersten und zweiten verschiedenen Zahlen (fünf Möglichkeiten)
- oder die dritte und eine der vier von der ersten bis dritten verschiedenen Zahlen (vier Möglichkeiten)
- oder die vierte und eine der drei von der ersten bis vierten verschiedenen Zahlen (drei Möglichkeiten)
- oder die fünfte und eine der zwei von der ersten bis fünften verschiedenen Zahlen (zwei Möglichkeiten)
- oder die sechste und die siebente Zahl (eine Möglichkeit);

die Anzahl dieser Teilmengen ist somit $6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21$.

Genau drei der sieben Zahlen sind nicht Gewinnzahlen. Daher gibt es unter den von der Brigade abgegebenen Tipps genau die drei folgenden Sorten (1), (2), (3):

(1) Tipps mit genau einer Zahl, die nicht Gewinnzahl ist,
(2) Tipps mit genau zwei Zahlen, die nicht Gewinnzahl sind,
(3) Tipps mit den drei Zahlen, die nicht Gewinnzahl sind.

Von der Sorte (1) gibt es genau drei Tipps, nämlich genau diejenigen, in denen die vier Gewinnzahlen und eine der drei anderen Zahlen stehen. Von der Sorte (3) gibt es genau sechs Tipps, nämlich genau diejenigen, in denen außer den drei Zahlen, die nicht Gewinnzahl sind, noch zwei der vier Gewinnzahlen stehen, und das sind entweder die erste und eine der drei anderen Gewinnzahlen (drei Möglichkeiten) oder die zweite und eine der beiden von der ersten und zweiten verschiedenen Gewinnzahlen (zwei Möglichkeiten) oder die dritte und vierte Gewinnzahl (eine Möglichkeit).

Von der Sorte (2) sind folglich genau die $21 - 3 - 6 = 12$ anderen Tipps des Systems.
Somit ergibt sich der Gewinn $3 \cdot 400M + 12 \cdot 20M = 1440M$.

Aufgabe 260834:
In einer Ebene seien 100 verschiedene Punkte so gelegen, dass folgende Voraussetzungen erfüllt sind:

(1) Es gibt genau eine Gerade, auf der mehr als zwei der 100 Punkte liegen.

(2) Auf dieser Geraden liegen genau drei der 100 Punkte.

Ermittle unter diesen Voraussetzungen die Anzahl derjenigen Geraden, die durch mehr als einen der 100 Punkte gehen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die drei in (2) genannten Punkte, die auf der in (1) genannten Geraden liegen, seien P_{98}, P_{99}, P_{100}, die übrigen der 100 Punkte seien P_1, P_2, ... , P_{97} genannt.

Eine Gerade geht genau dann durch mehr als einen der 100 Punkte, wenn sie

(a) entweder ein Paar verschiedener Punkte P_1, P_2, ... , P_{97} miteinander verbindet

(b) oder einen der Punkte P_1, P_2, ... ,P_{97} mit einem der Punkte P_{98}, P_{99}, P_{100} verbindet

(c) oder die Gerade durch P_{98}, P_{99}, P_{100} ist.

Jede in (a) genannte Gerade ist von jeder in (b) genannten Geraden verschieden. Ferner gilt: Jede in (a) genannte Gerade und jede in (b) genannte Gerade ist von der in (c) genannten Geraden verschieden.

Die Anzahl der in (a) genannten Geraden lässt sich folgendermaßen ermitteln:
Man kann jeden der 97 Punkte P_1, P_2, ... , P_{97} mit jedem der 96 anderen unter diesen Punkten durch eine Gerade verbinden. Dabei hat man jede in (a) genannte Gerade genau zweimal erfasst. Also beträgt deren Anzahl

$$\frac{97 \cdot 96}{2} = 97 \cdot 48$$

Die Anzahl der in (b) genannten Geraden beträgt $97 \cdot 3$. Also ist die gesuchte Anzahl $97 \cdot 48 + 97 \cdot 3 + 1 = 4948$.

Hinweis: Man kann auch eine schrittweise Überlegung durchführen:
Für 3 Punkte, die (1) und (2) (mit der Anzahl 3 statt 100) erfüllen, gibt es genau eine gesuchte Gerade. Jeder Punkt, der dann noch so hinzugefügt wird, dass (1) und (2) (mit der jeweils neuen Anzahl n der Punkte) erfüllt bleiben, erbringt genau $n-1$ neue Geraden hinzu. So kommt man auf die gesuchte Anzahl $1 + 3 + 4 + ... + 98 + 99 = 1 + (3 + 99) + (4 + 98) + ... + (50 + 52) + 51 = 1 + 48 \cdot 102 + 51 = 4948$.

Aufgabe 280834:
Für ein Schulsportfest möchte die Klasse $8c$ aus den sieben im 100-m-Lauf besten Schülern eine aus vier Schülern bestehende Mannschaft zum 4×100-m-Staffellauf auswählen.

a) Wie viel verschiedene Mannschaften könnten aus den sieben Schülern ausgewählt werden?
b) Wie viel verschiedene Mannschaften könnten aus den Schülern ausgewählt werden, wenn auf jeden Fall zwei bestimmte der sieben Schüler dabei sein sollen?
c) Wie viel verschiedene Mannschaften könnten aus den Schülern ausgewählt werden, wenn auf jeden Fall drei bestimmte der sieben Schüler dabei sein sollen?
d) In wie viel verschiedenen Reihenfolgen ihrer Starts lassen sich stets die vier Schüler einer Mannschaft zum Staffellauf aufstellen?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Um zunächst einen der sieben Schüler auszuwählen, hat man genau 7 Möglichkeiten.
Um dann einen zweiten Schüler auszuwählen, hat man zu jeder der 7 genannten Möglichkeiten genau 6 Fortsetzungsmöglichkeiten. Von den so gefundenen $7 \cdot 6$ Möglichkeiten führen aber je genau 2 zur gleichen Auswahl von zwei Schülern.
Also gibt es genau $\frac{7 \cdot 6}{2} = 21$ Möglichkeiten der Auswahl von zwei der sieben Schüler.

So kann man fortfahren. Um einen dritten Schüler auszuwählen, hat man zu jeder der 21 Möglichkeiten genau 5 Fortsetzungsmöglichkeiten. Von den so gefundenen $21 \cdot 5$ Möglichkeiten führen aber je genau 3 zur gleichen Auswahl; also gibt es genau 35 Möglichkeiten der Auswahl von drei der sieben Schüler.

Entsprechend findet man: Es gibt 35 Möglichkeiten der Auswahl von vier der sieben Schüler.

b) Sollen auf jeden Fall zwei bestimmte der sieben Schüler dabei sein, so hat man nur noch eine Auswahl von zwei der restlichen fünf Schüler zu treffen. Wie in a) gibt es hierfür genau 10 Möglichkeiten der Auswahl.

c) Sollen auf jeden Fall drei bestimmte der sieben Schüler dabei sein, so hat man nur noch einen der restlichen vier Schüler auszuwählen. Für diese Auswahl gibt es genau 4 Möglichkeiten.

d) Um zunächst den als Ersten startenden unter den vier Schülern auszuwählen, hat man genau 4 Möglichkeiten. In jeder dieser Möglichkeiten hat man für die Auswahl des als Zweiten startenden Schülers genau 3 Möglichkeiten. In jeder der entstandenen 12 Möglichkeiten hat man für den Dritten genau 2 Möglichkeiten; der Vierte steht dann jeweils fest. Also gibt es genau 24 Möglichkeiten der Startreihenfolge einer Mannschaft.

Aufgabe 300831:
Ermittle die Anzahl derjenigen natürlichen Zahlen, die jede der Ziffern 1, 2, 3, ... , 9 genau einmal enthalten und durch 45 teilbar sind!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Jede natürliche Zahl, die jede der Ziffern 1 bis 9 genau einmal enthält, hat wegen $1+2+3+4+5+6+7+8+9 = 45$ die Quersumme 45 und ist damit durch 9 teilbar.

Von diesen Zahlen sind folglich diejenigen, deren Anzahl gesucht ist, wegen $45 = 9 \cdot 5$ (sowie wegen der Teilerfremdheit von 9 und 5) genau die durch 5 teilbaren. Das sind genau diejenigen, deren letzte Ziffer 5 lautet, da die Ziffer 0 nach Aufgabenstellung nicht vorkommt.

Um die gesuchte Anzahl zu ermitteln, muss man somit untersuchen, wie viele verschiedene Anordnungen sich aus den restlichen acht Ziffern bilden lassen:

Unter Verwendung zweier Ziffern lassen sich genau zwei Anordnungen bilden (z. B. 12, 21).
Bei Hinzunahme einer dritten Ziffer kann diese an erster, zweiter oder dritter Stelle stehen. Folglich ergeben sich aus jeder der zwei Anordnungen (z. B. 12, 21) genau drei neue, insgesamt also $2 \cdot 3 = 6$ Anordnungen.
Nimmt man nun eine vierte Ziffer hinzu, kann diese wiederum an erster, zweiter, dritter oder vierter Stelle in jeder der schon ermittelten sechs Anordnungen aus drei Ziffern auftreten. Folglich sind bei vier Ziffern genau $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ Anordnungen möglich.

Setzt man diese Überlegung fort, kommt man zu dem Schluss, dass sich unter Verwendung von acht Ziffern genau $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 40320$ Anordnungen bilden lassen.
Die gesuchte Anzahl beträgt somit 40320.

Aufgabe 300836:
Im Raum seien zwölf Punkte derart gelegen, dass keine vier dieser Punkte in einer gemeinsamen Ebene liegen.

Ermittle die Anzahl aller derjenigen verschiedenen Tetraeder, deren vier Eckpunkte zu den zwölf gegebenen Punkten gehören!

Hinweis: Jedes Tetraeder ist durch die Menge seiner vier Eckpunkte (die nicht in einer gemeinsamen Ebene liegen) eindeutig bestimmt; irgendwelche Anforderungen an die Reihenfolge oder die gegenseitigen Abstände der Eckpunkte gibt es nicht.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Zu jedem der zwölf Punkte kann man einen der übrigen elf Punkte zusammenstellen und damit genau $12 \cdot 11$ geordnete Paare erhalten. Ebenso kann man genau $12 \cdot 11 \cdot 10$ bzw. $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9$ geordnete Zusammenstellungen von je 3 bzw. von je vier der zwölf Punkte erhalten.

Mit diesen Zusammenstellungen von je vier Punkten wird die Eckenmenge jedes der zu berücksichtigenden Tetraeders erfasst, und zwar je 24 mal. Sind nämlich A,B,C,D die Ecken eines der Tetraeder, so werden sie mit allen geordneten Zusammenstellungen dieser Punkte erfasst. Deren Anzahl kann man folgendermaßen ermitteln:

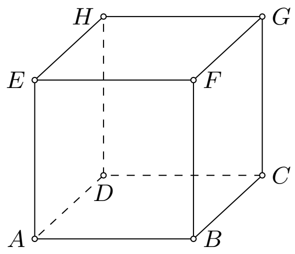
An den ersten Platz einer Zusammenstellung kann jeder der vier Punkte A,B,C,D gesetzt werden, bei jeder dieser Möglichkeiten bleibt für den zweiten Platz die Wahl unter drei der Punkte, und bei jeder der so entstandenen $4 \cdot 3$ Möglichkeiten bleibt für den dritten Platz die Wahl zwischen zwei Möglichkeiten, wonach in jeder der $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ erhaltenen Möglichkeiten auch der vierte Platz feststeht.
Die gesuchte Anzahl der Tetraeder beträgt somit

$$\frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{24} = 11 \cdot 5 \cdot 9 = 495$$

Aufgabe 330843:
Auf einer Ecke eines Würfels der Kantenlänge 1 cm sitzt eine Ameise. Längs jeder Kante des Würfels ist 1 g Honig verteilt. Die Ameise soll zum Endpunkt derjenigen Körperdiagonale gelangen, an deren Anfangspunkt sie sich befindet. Sie soll hierzu einen Weg von genau 7 cm Länge zurücklegen und dabei genau 7 Gramm Honig naschen.

Ermittle die Anzahl aller Wege, die unter diesen Bedingungen möglich sind!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



I. Die Ecken des Würfels seien wie in der Abbildung mit A,B,C,D,E,F,G,H bezeichnet.
Der Anfangspunkt der abzuzählenden Wege sei A, der Endpunkt folglich G.
Von A aus kann eine erste Kante nur entweder nach B oder D oder E gegangen werden. Es genügt, eine dieser Möglichkeiten, etwa die nach B, zu betrachten und die Anzahl der hiermit beginnenden Wege mit 3 zu multiplizieren.

II. Von B aus kann eine zweite Kante nur entweder nach C oder F folgen. Es genügt, etwa die für die Fortsetzung nach C gefundene Anzahl mit 2 zu multiplizieren. Von C aus gibt es wieder genau zwei Fortsetzungsmöglichkeiten:

III. Setzt man von C aus nach G fort, so ist man bereits nach einem Weg von 3 cm Länge im Zielpunkt. Also hat man noch einen Weg der Länge 4 cm von G nach G anzuschließen. Das ist nur durch Umlaufen einer Seitenfläche möglich. Die einzige G enthaltende Seitenfläche, bei der dies ohne Wiederholung einer schon durchlaufenen Kante möglich ist, ist $GHEF$.
Daher kommt man (nach dem Beginn über C, G) genau zu den 2 Wegen $ABCGHEFG$ und $ABCGFEHG$.

IV. Von C aus nach D gibt es genau die beiden Fortsetzungen:

a) Anfangsweg $ABCDH$.
Von H aus dann sofort nach G zu gehen, wäre nicht möglich, da man danach auf einem Weg von 2 cm wieder nach G kommen müsste, was ohne Kantenwiederholung nicht möglich ist. Also verbleibt nur der Weg $ABCDHEFG$.

b) Anfangsweg $ABCDA$.
Von A aus geht es eindeutig nach E. Von dort aus ist auf einem Weg von 2 cm nach G zu gelangen. Hierzu gibt es genau zwei Möglichkeiten; so erhält man die beiden Wege $ABCDAEFG$ und $ABCDAEHG$.

Die Anzahl der in III. und IV. gefundenen fünf Wege ist nach I. und II. mit 3 und 2 zu multiplizieren.
So ergibt sich: Die Anzahl der Wege, die unter den Bedingungen der Aufgabe möglich sind, beträgt $5 \cdot 3 \cdot 2 = 30$.

Aufgabe 330844:
Für ein Dreieck seien folgende Bedingungen gefordert:

(1) Alle drei Seitenlängen des Dreiecks haben, in Zentimetern gemessen, ganzzahlige Maßzahlen.
(2) Der Umfang des Dreiecks beträgt 50 cm.

Ermittle die größtmögliche Anzahl von Dreiecken, die diese Forderungen erfüllen und unter denen sich keine zwei zueinander kongruenten Dreiecke befinden!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Sind a, b, c mit $a \geq b \geq c$ die ganzzahligen Maßzahlen dreier Streckenlängen, so sind diese Längen genau dann die Seitenlängen eines Dreiecks, wenn $a < b + c$ gilt.
Zusammen mit der Bedingung (2) besagt diese Ungleichung $2a < a + b + c = 50$, $a < 25$. Aus $a \geq b \geq c$ folgt andererseits $3a \geq a + b + c > 48$, $a > 16$. Daher kann a nur eine der Zahlen 17, 18, ..., 24 sein.

In der folgenden Tabelle werden zu jeder dieser Zahlen a alle diejenigen Paare (b,c) aufgesucht, mit denen die Gleichung $b + c = 50 - a$ und die Ungleichungen $a \geq b \geq c$gelten:

Man beginnt mit $b = a$ (und folglich $c = 50 - 2a$), dann stellt man fest, ob durch Verkleinern von b um 1 und gleichzeitiges Vergrößern von c um 1 ein weiteres derartiges Paar (b,c) entsteht; dies ist so lange der Fall, bis die Bedingung $b \geq c$ nicht mehr erfüllt wird.
Anschließend wird in der Tabelle die Anzahl der gefundenen Paare vermerkt.

a	$b + c = 50 - a$	Paare (b,c)	Anzahl
17	$b + c = 33$	(17,16)	1
18	$b + c = 32$	(18,14), (17,15), (16,16)	3
19	$b + c = 31$	(19,12), (18,13), (17,14), (16,15)	4
20	$b + c = 30$	(20,10), (19,11), ..., 16,14), (15,15)	6
21	$b + c = 29$	(21,8), (20,9), ..., (16,13), (15,14)	7
22	$b + c = 28$	(22,6), (21,7), ..., (15,13), (14)14)	9
23	$b + c = 27$	(23,4), (22,5), ..., (15,12), (14,13)	10
24	$b + c = 26$	(24,2), (23,3), ..., (14,12), (13,13)	12

Damit enthält die Tabelle für jedes Dreieck der geforderten Art die Maßzahlen seiner Seitenlängen a,b,c. Wie ersichtlich ist, gibt es unter diesen Angaben auch keine zwei, die (wegen Übereinstimmung in allen drei Zahlen a,b,c) zu kongruenten Dreiecken führen würden.

Die gesuchte Anzahl beträgt somit $1 + 3 + 4 + 6 + 7 + 9 + 10 + 12 = 52$.

Aufgabe 340844:
Axel führt einen Kartentrick vor. Er benutzt dazu ein Skatspiel, bestehend aus jeweils 4 Karten der folgenden Arten, denen er folgende Augenwerte zuteilt:

Art der Karte	7	8	9	10	Bube	Dame	König	As
Augenwert	7	8	9	10	2	3	4	11

Seine Freunde sollen, während er nicht im Zimmer ist, nach folgender Vorschrift Kartenstapel bilden:

Für jeden Stapel wird zunächst eine Karte offen hingelegt, und der damit beginnende Stapel erhält so viele Punkte, wie der Augenwert dieser Karte angibt. Dann werden weitere Karten verdeckt auf den Stapel gelegt; für jede dieser Karten wird die Punktzahl des Stapels um 1 erhöht. Dies wird aber nur so lange durchgeführt, bis die Punktzahl 11 erreicht ist; der Stapel ist damit abgeschlossen. Er wird dann umgedreht, so dass die bisher unterste Karte nun verdeckt oben liegt.

1. Beispiel: 7 offen hinlegen vier Karten verdeckt darauf legen, Stapel umdrehen.
2. Beispiel: As offen hinlegen, umdrehen.

Solche Stapel werden einige Male gebildet und nebeneinander auf den Tisch gelegt. Falls am Ende Karten übrig bleiben, werden diese „Restkarten“ einzeln abzählbar und verdeckt neben den Stapel gelegt.

Dann wird Axel herein gerufen. Er behauptet, er könne aus der Anzahl der fertigen Stapel und der Anzahl der Restkarten die Summe der Augenwerte der nunmehr obersten Karten der Stapel finden. Wie ist das möglich?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Bevor der erste Stapel gebildet wurde, war die Anzahl der Restkarten 32. Es sei a_1 der Wert der für den ersten Stapel zu Beginn offen hingelegten Karte. Dann verringert sich die Anzahl der Restkarten um $1 + (11 - a_1) = 12 - a_i$, denn neben der einen aufgedeckten Karte mit Wert a_1 werden noch $11 - a_1$ weitere Karten auf diesen Stapel gelegt.
Analog reduziert jeder weiterer Stapel mit zuerst offen liegendem Kartenwert $a - i$ die Anzahl der nun noch vorhandenen Restkarten um den Wert $12 - a_i$.
Sieht also Axel n Stapel und r Restkarten, so weiß er

$$r = 32 - (12 - a_1) - \cdots - (12 - a_n) = 32 - n \cdot 12 + (a_1 + \cdots + a_n)$$

bzw. $a_1 + \cdots + a_n = n \cdot 12 + r - 32$,
kennt also die Summe der Kartenwerte der zuerst für jeden Stapel ofen ausgelegten Karten, die nach dem Umdrehen nun die obersten Karten eines jeden Stapels sind.

Aufgabe 340846:
Wie viele Paare (x, y) ganzer Zahlen x, y, die die Ungleichung

$$|x - 30| + |y - 10| < 100$$

erfüllen, gibt es insgesamt?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wir betrachten zuerst die Ungleichung (*) $a + b < 100$ und bestimmen die Anzahl der Lösungen von dieser Ungleichung mit nicht-negativen ganzen Zahlen a und b. Dabei unterscheiden wir, ob diese gleich 0 werden, oder verschieden davon sind:

Es gibt genau eine Lösung mit $a = b = 0$.
Für $a = 0$, $b \neq 0$ gibt es genau die 99 Lösungen $b = 1$ bis $b = 99$. Analog gibt es für $a \neq 0$, $b = 0$ genau 99 Lösungen.

Sei nun $a > 0$ und $b > 0$. Für festes a gibt es für b genau die Lösungen $1,2,\dots,99 - a$, also $99 - a$ verschiedene. Insgesamt gibt es also

$$\sum_{a=1}^{99}(99 - a) = 99 \cdot 99 - \sum_{a=1}^{99} a = 99 \cdot 99 - \frac{99 \cdot 100}{2} = 99 \cdot (99 - 50) = 99 \cdot 49$$

Lösungen in diesem Fall.
Nun zurück zur Ungleichung aus der Aufgabenstellung:
Für jede Lösung (a,b) der Ungleichung (*) mit $a,b \neq 0$ erhält man vier Lösungen der Ungleichung der Aufgabenstellung, da man $x - 30 = \pm a$ und unabhängig davon $y - 10 = \pm b$ wählen kann. Ist einer oder sind beide Werte a, b aber gleich Null, so kann man hierbei nur ein Vorzeichen wählen und erhält $x - 30 = 0$ bzw. $y - 10 = 0$.

Zusammen ergeben sich also für die Ausgangsgleichung folgende Anzahlen von Lösungen:
Ist $a = b = 0$, so erhält man genau $1 \cdot 1 = 1$ Lösung für die Ausgangsgleichung.
Ist $a = 0$ und $b \neq 0$, oder umgekehrt, dann erhält man jeweils genau $99 \cdot 2$, in beiden Fällen zusammen also $99 \cdot 4$, Lösungen der Ausgangsgleichung.
Und sind sowohl a als auch b von 0 verschieden, erhält man daraus $(99 \cdot 49) \cdot 4 = 99 \cdot 196$ Lösungen der Ausgangsgleichung.

Insgesamt erhalten wir damit, dass die Ungleichung aus der Aufgabenstellung genau $99 \cdot 196 + 99 \cdot 4 + 1 = 19801$ ganzzahlige Lösungen besitzt.

V. Klasse 9

V.I. Kryptogramme; Zahlen in Figuren eintragen

I. Runde 1

Aufgabe 010914:
Jeder Buchstabe entspricht einer der Ziffern von 0 bis 9, gleiche Buchstaben bedeuten gleiche, verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern.

$$\begin{array}{rrrrr} \texttt{OTTO} & \texttt{MAIS} & \texttt{OTTO} & \texttt{MAIS} & \texttt{OTTO} \\ \underline{\texttt{-ROSE}} & \underline{\texttt{-SALZ}} & \underline{\texttt{-SALZ}} & \underline{\texttt{-ROSE}} & \underline{\texttt{-MAIS}} \\ 4709 & 2963 & 3497 & 4175 & 534 \end{array}$$

Lösung von Christiane Czech:
In der letzten Gleichung muss es beim Übergang von der 2. zur 1. Stelle einen Übertrag geben, da $M \neq 0$. Also ist $M + 1 = O$. Da die Subtraktion in der letzten Stelle der ersten Gleichung eine 9 ergibt, gilt $O + 1 = E$. Die Betrachtung der nachfolgenden Stelle ergibt $S + 1 = T$. Wegen $L \neq T$ gibt es in der 3. Gleichung beim Übergang von der 4. zur 3. Stelle keinen Übertrag, also gilt $T + 1 = L$ und $7 + Z \leq 9$. Also ist $Z \in \{0, 1, 2\}$. Wäre $Z = 2$, so ist $O = 7 + Z = 9$ und $E = O + 1 = 10$, was nicht möglich ist.
Wäre $Z = 1$, so wäre $O = 7 + Z = 8$, wegen der 2. Gleichung $S = 4$ und mit obigen Betrachtungen $T = 5$ und $L = 6$. Die 3. Gleichung hätte dann die Form

$$8558 - 4A61 = 3497$$

Dann gäbe es keine Möglichkeit für A. Damit bleibt für den Wert von Z nur 0 übrig. Dies führt zunächst zu $O = 7$, $S = 3$, $M = 6$, $E = 8$, $T = 4$ und $L = 5$ und die Gleichungen erhalten die Form

$$\begin{array}{rrrrr} 7447 & 6913 & 7447 & 6913 & 7447 \\ \underline{-2738} & \underline{-3950} & \underline{-3950} & \underline{-2738} & \underline{-6913} \\ 4709 & 2963 & 3497 & 4175 & 534 \end{array}$$

Also gilt weiterhin $R = 2$, $I = 1$ und $A = 9$.

Aufgabe 020916:
Bei der folgenden Divisionsaufgabe sind die fehlenden Ziffern zu ergänzen! Wie wurden die Ziffern ermittelt? (Begründung!)

$$\begin{array}{cccccccccccccccccc} \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & : & \ast & \ast & \ast & = & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast \\ & \ast & \ast & \ast \\ \cline{1-4} & & & \ast & \ast & \ast & \ast \\ & & & & \ast & \ast & \ast \\ \cline{4-7} & & & & \ast & \ast & \ast & \ast \\ & & & & 8 & \ast & \ast & \ast \\ \cline{5-8} & & & & & & & 0 \end{array}$$

Lösung von André Lanka:

$$\begin{array}{cccccccccccccccccc} \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & : & \ast & \ast & \ast & = & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast \\ & \ast & \ast & \ast \\ \cline{1-4} \rightarrow & & & \ast & \ast & \ast & \ast \\ & & & & \ast & \ast & \ast \\ \cline{4-7} & & & & \ast & \ast & \ast & \ast \\ & & & & 8 & \ast & \ast & \ast \\ \cline{5-8} & & & & & & & 0 \end{array}$$

Aus der markierten Zeile und den beiden nächsten können wir schlussfolgern:

$$\begin{array}{cccccccccccccccccc}
\ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & : & \ast & \ast & \ast & = & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast \\
 & \ast & \ast & \ast & & & & & & & & & & & & & & \\ \cline{1-4}
 & & & 1 & \ast & \ast & \ast & & & & & & & & & & & \\
 & & & & \ast & \ast & \ast & & & & & & & & & & & \\ \cline{4-7}
 & & & & \ast & \ast & \ast & \ast & & & & & & & & & & \\
 & & & & 8 & \ast & \ast & \ast & & & & & & & & & & \\ \cline{5-8}
 & & & & & & & 0 & & & & & & & & & &
\end{array}$$

Und daraus wiederum:

$$\begin{array}{cccccccccccccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & \ast & \ast & \ast & \ast & : & \ast & \ast & \ast & = & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast \\
 & 9 & 9 & 9 & & & & & & & & & & & & & & \\ \cline{1-4}
 & & & 1 & \ast & \ast & \ast & & & & & & & & & & & \\
 & & & & \ast & \ast & \ast & & & & & & & & & & & \\ \cline{4-7}
 & & & & \ast & \ast & \ast & \ast & & & & & & & & & & \\
 & & & & 8 & \ast & \ast & \ast & & & & & & & & & & \\ \cline{5-8}
 & & & & & & & 0 & & & & & & & & & &
\end{array}$$

Für den Teiler kommen sind nur noch 333, 666 und 999 möglich. Wegen der eingetragenen 8 fallen die ersten beiden Möglichkeiten heraus.

$$\begin{array}{cccccccccccccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & \ast & \ast & \ast & \ast & : & 9 & 9 & 9 & = & 1 & 0 & 0 & \ast & 9 \\
 & 9 & 9 & 9 & & & & & & & & & & & & & & \\ \cline{1-4}
 & & & 1 & \ast & \ast & \ast & & & & & & & & & & & \\
 & & & & 9 & 9 & 9 & & & & & & & & & & & \\ \cline{4-7}
 & & & & \ast & \ast & \ast & \ast & & & & & & & & & & \\
 & & & & 8 & 9 & 9 & 1 & & & & & & & & & & \\ \cline{5-8}
 & & & & & & & 0 & & & & & & & & & &
\end{array}$$

Und schließlich:

$$\begin{array}{cccccccccccccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 8 & 9 & 8 & 1 & : & 9 & 9 & 9 & = & 1 & 0 & 0 & 1 & 9 \\
 & 9 & 9 & 9 & & & & & & & & & & & & & & \\ \cline{1-4}
 & & & 1 & 8 & 9 & 8 & & & & & & & & & & & \\
 & & & & 9 & 9 & 9 & & & & & & & & & & & \\ \cline{4-7}
 & & & & 8 & 9 & 9 & 1 & & & & & & & & & & \\
 & & & & 8 & 9 & 9 & 1 & & & & & & & & & & \\ \cline{5-8}
 & & & & & & & 0 & & & & & & & & & &
\end{array}$$

Aufgabe 080914:
In

$$\begin{array}{cccccc}
1 & \ast & \ast & . & \ast & \ast \\ \hline
 & \ast & \ast & \ast & 1 & \\
 & & \ast & \ast & \ast & 1 \\ \hline
 & \ast & \ast & \ast & 1 & \ast
\end{array}$$

sind die Sternchen durch (nicht notwendig einander gleiche) Ziffern so zu ersetzen, dass eine richtig gelöste Multiplikationsaufgabe entsteht.

Geben Sie alle Möglichkeiten hierfür an!

Lösung von Manuela Kugel:
Ansatz:

$$\begin{array}{cccccc}
1 & a & b & \cdot & c & d \\ \hline
 & e & f & g & 1 & \\
 & & h & i & j & 1 \\ \hline
 & k & \ell & m & 1 & n
\end{array}$$

Dabei sind $a, \dots, n$ jeweils Ziffern 0 bis 9, wobei unterschiedliche Variablen denselben Wert haben dürfen. Offensichtlich muss dann $n = 1$ und $g = 0$ gelten, d. h., eine Teilaufgabe lautet $1ab \cdot d = ef01$. Welche Zahlen erfüllen diese Bedingungen?

Die Ziffern b und d müssen jeweils ungerade sein, weil nur das Produkt zweier ungerader Zahlen wieder ungerade ist. Das Produkt zweier natürlicher Zahlen ≤ 9 endet auf 1 in genau den Fällen: $1 \cdot 1 = 1$, $3 \cdot 7 = 21$, $7 \cdot 3 = 21$, $9 \cdot 9 = 81$.

Nun werden die obigen Fälle diskutiert:

1. $b = 1$, $d = 1$
   $1a1 \cdot 1 = ef01 \Rightarrow e = 0, a = 0, f = 1 \Rightarrow 101 \cdot 1 = 0101$
   $101 \cdot c = hij1 \Rightarrow c = 1, h = 0, i = 1, j = 0 \Rightarrow 101 \cdot 1 = 0101$
2. $b = 3$, $d = 7$
   $1a3 \cdot 7 = ef01 \Rightarrow a = 4, e = 1, f = 0 \Rightarrow 141 \cdot 7 = 1001$
   $143 \cdot c = hij1 \Rightarrow c = 7, h = 1, i = 0, j = 0 \Rightarrow 141 \cdot 7 = 1001$
3. $b = 7$, $d = 3$
   $1a7 \cdot 3 = ef01 \Rightarrow a = 6, e = 0, f = 5 \Rightarrow 167 \cdot 3 = 0501$
   $167 \cdot c = hij1 \Rightarrow c = 3, h = 0, i = 5, j = 0 \Rightarrow 167 \cdot 3 = 0501$
4. $b = 9$, $d = 9$
   $1a9 \cdot 9 = ef01 \Rightarrow a = 8, e = 1, f = 7 \Rightarrow 189 \cdot 9 = 1701$
   $189 \cdot c = hij1 \Rightarrow c = 9, h = 1, i = 7, j = 0 \Rightarrow 189 \cdot 9 = 1701$

Damit lauten die 4 Lösungen wie folgt:

1	0	1	·	1	1
	0	1	0	1	
		0	1	0	1
	0	1	1	1	1

1	4	3	·	7	7
	1	0	0	1	
		1	0	0	1
	1	8	7	1	1

sowie

1	8	9	·	9	9
	1	7	0	1	
		1	7	0	1
	1	8	7	1	1

1	6	7	·	3	3
	0	5	0	1	
		0	5	0	1
	0	5	5	1	1

Aufgabe 130913:
In das nebenstehende Quadrat sollen die Zahlen 1, 2, 3 und 4 so eingetragen werden, dass in jeder Zeile, in jeder Spalte und in jeder der beiden Diagonalen jede der vier Zahlen genau einmal vorkommt. An drei Stellen sind bereits Zahlen eingetragen und sollen unverändert stehenbleiben.

Man untersuche, ob eine solche Eintragung möglich ist und ob nur eine einzige Eintragungsmöglichkeit existiert. Ist dies der Fall, so führe man die Eintragung durch.

Hinweis: Zur Beschreibung des Lösungsweges sind die am Rand des Quadrates eingetragenen Buchstaben zu benutzen.

Beispiel: Im Feld bC ist bereits die Zahl 2 eingetragen.

a	1			
b			2	
c				3
d				
	A	B	C	D

Lösung von Manuela Kugel:

Für die Zahl 2 kommt in Reihe a nur das Feld Ba in Frage, da Ca wegen Spalte und Da wegen Diagonale nicht 2 sein kann. Dann muss die Zahl 3 in das Kästchen Ca, weil sie nicht in $Ba = 2$ und Da (Spalte) stehen kann. Die 4 kommt dann in Da. Das sieht so aus:

a	1	2	3	4
b	0	0	2	0
c	0	0	0	3
d	0	0	0	0
	A	B	C	D

Es folgt (eindeutig) $Dd = 2$ (Dd kann nicht 1 wegen Diagonale und 3 bzw. 4 wegen Spalte sein). Db wird 1 (Spalte). Außerdem folgt $Ad = 3$ ($Ad \neq 1$ wegen Spalte, $Ad \neq 2$ wegen Zeile, $Ad \neq 4$ wegen Diagonale) und $Bc = 1$ (Diagonale). Das sieht dann so aus:

a	1	2	3	4
b	0	0	2	1
c	0	1	0	3
d	3	0	0	2
	A	B	C	D

Weiterhin muss $Ab = 4$ ($Ab \neq 1$, $Ab \neq 3$ wegen Spalte; $Ab \neq 2$ wegen Zeile) und $Ac = 2$ (Spalte) gelten. Entsprechend folgt $Bb = 3$ (Zeile) und $Bd = 4$ (Spalte). Dann gilt aber auch $Cc = 4$ (Zeile) und $Cd = 1$ (Spalte). Die vollständige und eindeutige Lösung sieht dann so aus:

a	1	2	3	4
b	4	3	2	1
c	2	1	4	3
d	3	4	1	2
	A	B	C	D

Es existieren übrigens ganze 48 Möglichkeiten, ein 4×4 Quadrat mit den genannten Eigenschaften (ohne die Vorbelegung) zu konstruieren.

Aufgabe 150912:

In

$$\begin{array}{ccccc} & H & A & U & S \\ & H & A & U & S \\ \hline S & T & A & D & T \end{array}$$

sollen die Buchstaben so durch Ziffern ersetzt werden, dass eine richtig gelöste Additionsaufgabe entsteht. Dabei sollen für gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und für verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern eingesetzt werden.

Geben Sie alle Lösungen dafür an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

I. Angenommen, bei einer Ersetzung entstehe eine Lösung.
Dann gilt für diese Ersetzung $S = 1$; denn die fünfstellige natürliche Zahl „STADT“ kann nicht mit 0 beginnen, und die Summe zweier vierstelliger Zahlen ist kleiner als 20000.
Ferner gilt $S + S = T$, also $T = 2$. Somit muss $H + H = 12$ gelten; denn würde dazu noch ein Übertrag von der Hunderterspalte treten, denn könnte dieser nur 1 sein, was stets auf eine ungerade, also von 12 verschiedene Summe $H + H + 1$ führen würde.

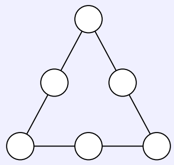
Also gilt $H = 6$. Damit gilt $A \leq 4$, da sonst ein Übertrag in die Tausenderspalte auftreten würde.
Wäre nun mit Übertrag aus der Zehnerspalte $A + A + 1 = A$, so würde $A = -1$ folgen. Also kann kein solcher Übertrag auftreten, und man erhält $A + A = A$, also $A = 0$ sowie $U \leq 4$.
Da verschiedene Buchstaben verschiedenen Ziffern entsprechen und von den Zahlen 0, 1, 2. 3, 4 bereits 0, 1, 2 vergeben sind, kann nur $U = 3$ oder $U = 4$ sein. Für $U = 3$ erhielte man $D = 6$, was wegen $H = 6$ den Regeln der Aufgabe widerspricht. Also gilt $U = 4$ und $D = 8$.
Somit kann nur die Ersetzung $A = 0$, $D = 8$, $H = 6$, $S = 1$, $T = 2$, $U = 4$ zu einer Lösung führen.

II. In der Tut sind bei dieser Ersetzung verschiedene Buchstaben stets durch verschiedene Ziffern ersetzt, und da ferner die entstehende Additionsaufgabe

$$\begin{array}{ccccc} & 6 & 0 & 4 & 1 \\ & 6 & 0 & 4 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 0 & 8 & 2 \end{array}$$

richtig gelöst ist, erfüllt diese Ersetzung alle gestellten Forderungen.

Aufgabe 270911:



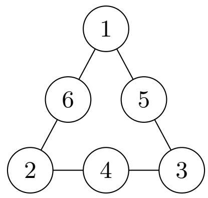
In die Kreisfelder der Figur sollen die Zahlen 1 bis 6 so eingetragen werden, dass jede Zahl genau einmal vorkommt, und dass die Zahlen auf jeder Dreiecksseite die gleiche Summe ergeben.

Geben Sie eine solche Eintragung an! Überprüfen Sie, ob die von Ihnen angegebene Eintragung alle geforderten Bedingungen erfüllt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Abbildung zeigt z. B. eine solche Lösung, da jede Zahl genau einmal vorkommt und für die Summen gilt:

$$1 + 6 + 2 = 1 + 5 + 3 = 2 + 3 + 4$$

Es gibt weitere Lösungen.



Aufgabe 280911:
In ein Quadrat mit 4×4 Feldern sollen die Zahlen von 1 bis 16 so eingetragen werden, dass jede der Zahlen genau einmal auftritt und dass sich bei der Addition der Zahlen in jeder der vier Zeilen, der vier Spalten und der beiden Diagonalen jeweils dieselbe Summe ergibt!

Versuchen Sie, eine solche Eintragung zu finden!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Eine Lösung zeigt die Abbildung.

Bemerkung: Solche Quadrate nennt man magische Quadrate. Sie sind schon lange bekannt. Im Hintergrund des 1514 geschaffenen Kupferstichs „Die Melancholie“ hat Albrecht Dürer z. B. dieses magische Quadrat eingetragen.

Schon im 17. Jahrhundert wusste man, dass es 880 verschiedene derartige Quadrate gibt.

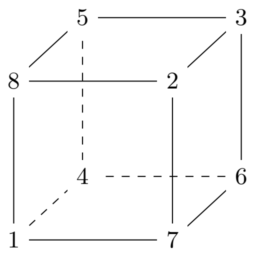
Aufgabe 310911:
Denkt man sich an jede Ecke eines räumlichen Körpers eine Zahl geschrieben, so bezeichnen wir für jede Seitenfläche dieses Körpers als „Flächensumme“ dieser Seitenfläche die Summe aus den Zahlen, die an die Ecken dieser Seitenflächen geschrieben wurden.

a) Stellen Sie fest, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist:

Wenn man an die Ecken eines Tetraeders $ABCD$ in irgendeiner Reihenfolge die Zahlen 1, 2, 3, 4 schreibt, so sind alle vier Flächensummen des Tetraeders einander gleich.

b) Untersuchen Sie, ob es möglich ist, an die Ecken eines Würfels die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 in einer solchen Reihenfolge zu schreiben, dass alle sechs Flächensummen des Würfels einander gleich sind!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Die genannte Aussage ist falsch; denn eine Seitenfläche des Tetraeders muss die Flächensumme $1+2+3=6$ haben, eine anderen Seitenfläche z. B. die Flächensumme $1+2+4=7$.



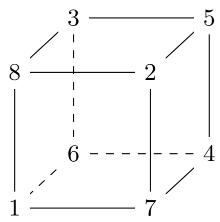
b) Es ist möglich, die Zahlen in der genannten Weise an die Ecken eines Würfels zu schreiben; eine solche Möglichkeit zeigt die Abbildung; denn bei ihr entstehen die Flächensummen

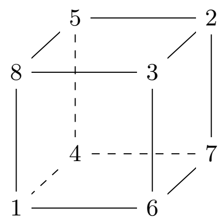
$$\begin{array}{lcl} 1+7+6+4=18 & ; & 1+7+2+8=18 \\ 7+6+3+2=18 & ; & 6+4+5+3=18 \\ 4+1+8+5=18 & ; & 8+2+3+5=18 \end{array}$$

Bemerkung:

Um eine solche Reihenfolge zu finden, kann man zunächst berücksichtigen, dass das Sechsfache der einheitlichen Flächensumme s gleich dem Dreifachen von $1+2+3+4+5+6+7+8=36$ sein muss, da beim Addieren der sechs einander gleichen Flächensummen jede Ecke genau dreimal erfasst wird. Also muss $s=18$ sein.

Dann kann man alle Zerlegungen von 18 in eine Summe aus vier verschiedenen unter den Zahlen 1, 2, ..., 8 bilden und eine Verteilung suchen, bei der sechs solche Zerlegungen als Flächensummen auftreten. Man kann zeigen, dass es bis Spiegelung und Drehung genau die drei Verteilungen (obere Abbildung und folgende zwei Abbildungen) gibt.





Aufgabe 310912:
Werner beschäftigt sich mit dem Herstellen von Kryptogrammen in Gestalt einer Additionsaufgabe. Bei einem solchen Kryptogramm sollen - unter Verwendung des dekadischen Zahlensystems - gleiche Buchstaben durch gleiche Ziffern und ungleiche Buchstaben durch ungleiche Ziffern ersetzt werden, so dass dann eine richtig gerechnete Addition vorliegt.

Werner betrachtet die folgenden drei Kryptogramme:

$$\begin{array}{cccccc} & J & A & C & K & E \\ + & & H & O & S & E \\ \hline = & A & N & Z & U & G \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} & M & A & N & N \\ + & F & R & A & U \\ \hline = & P & A & A & R \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} & & M & I & R \\ + & E & M & I & R \\ \hline = & R & E & I & M \end{array}$$

Stellen Sie für jedes dieser drei Kryptogramme fest, ob es eine Lösung hat, und ermitteln Sie, wenn das der Fall ist, alle Lösungen des betreffenden Kryptogramms!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

a) Dieses Kryptogramm hat keine Lösung, da es mehr als 10 ungleiche Buchstaben enthält.

b) Angenommen, eine Ersetzung der Buchstaben durch Ziffern sei eine Lösung des Kryptogramms. Dann folgt für sie:

Es ist $N \neq 0$, da sich in der Einerstelle aus $N = 0$ der Widerspruch $U = R$ ergäbe.

Also kann die in der Zehnerstelle auszuführende Addition von N, A und einem eventuellen Übertrag nur dann zu einer Zahl mit der letzten Ziffer A führen, wenn ein solcher Übertrag aus der Einerstelle vorliegt und $N = 9$ ist.

Das führt aber zu einem Übertrag aus der Zehnerstelle in die Hunderterstelle, und die dort auszuführende Addition kann nur dann zu einer Zahl mir der letzten Ziffer A führen, wenn auch $R = 9$ ist. Damit hat die Annahme einer Ersetzung, die Lösung ist, zu einem Widerspruch geführt; folglich hat das Kryptogramm keine Lösung.

c) I) Angenommen, eine Ersetzung sei eine Lösung des Kryptogramms. Dann folgt für sie:

An der Tausenderstelle liegt wegen $E \neq R$ ein Übertrag aus der Hunderterstelle vor; es gilt $M + M \geq 9 \quad (1)$ sowie $E + 1 = R \quad (2)$.

Aus (1) folgt $M > 4$; ferner ist an der Einerstelle ersichtlich, dass M gerade ist, also $M = 6$ oder $M = 8$ sein muss. Führt man für diese Werte die Addition an der Hunderterstelle durch (und zwar entweder ohne oder mit Übertrag aus der Zehnerstelle) und wendet dann noch (2) an, so erhält man: Es gibt höchstens die folgenden Möglichkeiten:

M	E	R
6	2	3
6	3	4
8	6	7
8	7	8

Von ihnen widersprechen aber die zweite, dritte und vierte den Angaben an der Einerstellen. Die vierte enthält auch den Widerspruch $M = R$. Also kann nur die erste Möglichkeit vorliegen. Bei ihr entsteht kein Übertrag aus der Einerstelle in die Zehnerstelle; somit hat die Zahl $I + I$ die letzte Ziffer I, was nur für $I = 0$ zutrifft.

Also kann nur die Ersetzung $M = 6$, $E = 2$, $R = 3$, $I = 0$ das Kryptogramm lösen.

II) Sie erfüllt die Gleichheits- und Ungleichheitsforderungen, und die Addition

$$\begin{array}{ccccc} & & 6 & 0 & 3 \\ + & 2 & 6 & 0 & 3 \\ \hline = & 3 & 2 & 0 & 6 \end{array}$$

ist richtig gerechnet.

Damit ist gezeigt, dass das Kryptogramm genau diese Lösung hat.

II. Runde 2

Aufgabe 150922:

	A	B	C	D	E
a	1	2	3		
b					
c				5	
d					4
e					

In das abgebildete Quadrat sollen die Ziffern 1, 2, 3, 4 und 5 so eingetragen werden, dass in jeder Zeile und Spalte und in den beiden Diagonalen jede der Ziffern von 1 bis 5 genau einmal vertreten ist. Die bereits eingetragenen Ziffern sollen dabei nicht verändert werden.
a) Geben Sie eine den Bedingungen entsprechende Eintragung an!
b) Untersuchen Sie, ob voneinander verschiedene den Bedingungen entsprechende Eintragungen möglich sind, und ermitteln Sie, wenn dies zutrifft, alle derartigen Eintragungen!
Die Buchstaben an den Rändern des Quadrates sollen die Beschreibungen des Lösungsweges erleichtern. So steht z. B. im Feld cD bereits die Ziffer 5, Kurzschreibweise cD:5.

Lösung von cyrix:
aD:4 (Zeile a, Spalten ABC besetzt; dE:4)
aE:5 (Zeile a, Spalten ABCD besetzt)
bB:5 (Hauptdiagonale: aA:1, cC:$\neq$ 5 wegen cD:5, dd:$\neq$ 5 wegen cD:5, eE:$\neq$ 5 wegen aE:5)
eC:5 (Zeile e, eA:$\neq$ 5 wegen aE:5, eB:$\neq$ 5 wegen bB:5, eD:$\neq$ 5 wegen cD:5, eE:$\neq$ 5 wegen aE:5)
dA:5 (Zeile d; in allen Spalten BCDE gibt es schon Fünfen).
cC:4 (Hauptdiagonale: aA, bB besetzt, dD:$\neq$ 4 wegen aD:4, eE:$\neq$ 4 wegen dE:4)
eB:4 (Spalte B, Zeielen ab besetzt, cB:$\neq$ 4 wegen cC:4, cd:$\neq$ 4 wegen dE:4)
bA:4 (Spalte A, in allen anderen Zeilen schon Vieren vorhanden)

Skizze:

	A	B	C	D	E
a	1	2	3	4	5
b	4	5			
c			4	5	
d	5				4
e		4	5		

Wäre bD:1, dann eA:$\neq$ 1 (Hauptdiagonale) und eD:$\neq$ 1, also eE:1 (da eB und eC schon besetzt). Dies ist aber ein Widerspruch zu aA:1 auf der Hauptdiagonalen. Also ist bD:$\neq$ 1.

eD:1 (Spalte D, bD:$\neq$ 1, aD, cD besetzt, dD:$\neq$ 1 wegen aA:1)
dB:1 (Nebendiagonale, aE, cc besetzt, bD:$\neq$ 1 wegen eD:1, eA:$\neq$ 1 wegen aA:1)
cE:1 (Zeile c, Spalten CD besetzt, Spalten AB verboten, da dort schon Einsen)
bC:1 (Zeile b, in allen anderen Spalten schon Einsen)

Skizze:

	A	B	C	D	E
a	1	2	3	4	5
b	4	5	1		
c			4	5	1
d	5	1			4
e		4	5	1	

dC:2 (Spalte C, Zeilen abce besetzt) ; dD:3 (Zeile d, Spalten ABCE besetzt)
bD:2 (Spalte D, Zeilen acde besetzt) ; bE:3 (Zeile b, Spalten ABCD besetzt)
eE:2 (Spalte E, Zeilen abcd besetzt) ; eA:3 (Zeile e, Spalten BCDE besetzt)
cA:2 (Spalte A, Zeilen abde besetzt) ; cB:3 (Zeile c, Spalten ACDE besetzt)

Damit ergibt sich notwendigerweise folgende Tabelle:

	A	B	C	D	E
a	1	2	3	4	5
b	4	5	1	2	3
c	2	3	4	5	1
d	5	1	2	3	4
e	3	4	5	1	2

Dass diese auch alle Bedingungen der Aufgabenstellung genügt, zeigt die Probe. Es existiert also nur genau diese eine Variante, die Tabelle gemäß den Vorgaben auszufüllen.

Aufgabe 160924:
In der folgenden Anordnung von Zeichen

ab	X	ab	=	cad
Y		Y		Z
ae	X	ae	=	ffe
ff	Y	ff	=	gg

sollen die einzelnen Symbole so durch Elemente des jeweiligen Grundbereichs ersetzt werden, dass jeweils wahre Aussagen entstehen.
Dabei ist der Grundbereich für die Kleinbuchstaben b, d, e die Menge der Ziffern von 0 bis 9, für a, c, f, g die Menge der Ziffern von 1 bis 9, und der Grundbereich für die Großbuchstaben X, Y, Z ist die Menge der Operationszeichen „+“, „–“, „·“ und „:“. Gleiche Symbole bedeuten dabei gleiche, verschiedene Symbole verschiedene Elemente des jeweiligen Grundbereichs.
Untersuchen Sie, ob eine solche Ersetzung möglich ist, und ermitteln Sie, wenn dies zutrifft, alle Ersetzungen mit den geforderten Eigenschaften!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
1) Angenommen, eine Ersetzung habe die geforderten Eigenschaften. Dann kann X nicht für das Pluszeichen stehen; denn wenn die Summe zweier zweistellige Zahlen eine dreistellige Zahl ist, dann muss deren erste Ziffer eine 1 sein; die Ergebnisse von

$$\text{abXab} = \text{cad} \quad \text{und} \quad \text{aeXae} = \text{ffe}$$

beginnen jedoch mit verschiedenen Ziffern.
Da ferner weder die Differenz noch der Quotient zweier zweistelliger Zahlen eine dreistellige Zahl ergeben kann, muss X für das Zeichen $\cdot$ stehen.
Aus ffYff = gg folgt wegen $ff - ff = 0$ und $ff : ff = 1$, dass Y weder das Zeichen $-$ noch das Zeichen : bedeuten kann. Y steht für das Zeichen $+$.
Aus cadZffe=gg folgt, dass Z nicht für das Zeichen : stehen kann, da der Quotient zweier dreistelliger Zahlen nicht eine zweistellige Zahl sein kann. Z steht für das Zeichen $-$. Damit ergibt sich bisher

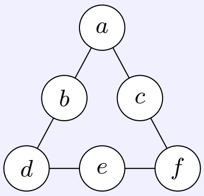
ab	·	ab	=	cad
+		+		-
ae	·	ae	=	ffe
ff	+	ff	=	gg

Wegen $32^2 > 1000$ ergibt sich aus ae · ae = ffe, dass die durch ae dargestellte Zahl höchstens 31 betragen kann. Da die Endziffern der drei Zahlen übereinstimmen, kann e nur eine der Zahlen 0, 1, 5 oder 6 darstellen.
Aus ab+ae=ff folgt, dass e nicht 0 sein kann, weil sonst b und f die gleichen Zahlen darstellen müssten.
Von den somit für ae in Frage kommenden Zahlen 15, 16, 21, 25, 26 und 31 erfüllen nur die Zahlen 15 und 21 die Bedingungen, dass an der Hunderterstelle und an der Zehnerstelle ihres Quadrates die gleiche Ziffer steht.
Wäre nun $a = 1$ und $e = 5$, dass müsste wegen ab+ae=ff mithin $f = 3$ und $b = 8$ sein. Wegen $18^2 = 324$ folgt dann aud ab · ab=cad der Widerspruch $a = 2$.
Für $a = 2$ und $e = 1$ folgt $f = 4$ und $b = 3$, Also kann nur die Ersetzung

23	·	23	=	529
+		+		-
21	·	21	=	441
44	+	44	=	88

allen Bedingungen der Aufgabenstellung genügen.

Aufgabe 270921:



In die Felder auf den Ecken und Seitenmittelpunkten eines gleichseitigen Dreiecks (siehe Abbildung) sollen für a, b, c, d, e, f die Zahlen von 1 bis 6 so eingetragen werden, dass jede Zahl genau einmal vorkommt und dass auf jeder Dreiecksseite die gleiche Summe entsteht.
Ermitteln Sie alle voneinander verschiedenen Eintragungen, die diese Bedingungen erfüllen!

Dabei heißen zwei Eintragungen genau dann voneinander verschieden, wenn sie weder durch Drehung noch durch Spiegelung ineinander überführt werden können.

Lösung von cyrix:
Wenn eine Eintragung die Bedingungen der Aufgabe erfüllt, dann gilt, wenn man die genannte Summe mit s bezeichnet

$$a+b+d=s \quad (1); \qquad a+c+f=s \quad (2); \qquad d+e+f=s \quad (3)$$

$$\text{sowie} \qquad a+b+c+d+e+f=1+2+3+4+5+6=21$$

Hiernach folgt durch Addition von (1), (2), (3)

$$21+a+d+f=3s \qquad ; \qquad 7+\frac{a+d+f}{3}=s \quad (4)$$

Da s (nach (1)) ganzzahlig ist, muss $a+d+f$ durch 3 teilbar sein. Das ist unter den Bedingungen der Aufgabe nur möglich, wenn für a, d, f eine der in der folgenden Tabelle genannten Angaben vorliegt. Dabei genügt es, nur die dort genannte Reihenfolge zu nehmen, da jede Umordnung der Eckfelder durch Drehung oder Spiegelung erreicht werden kann.

Anschließend enthält die Tabelle jeweils den Wert $a+d+f$, den Wert s aus (4), die Werte

$$b=s-a-d \quad (5); \qquad c=s-a-f \quad (6); \qquad e=s-d-f \quad (7)$$

sowie die Angabe, ob die Bedingung über das Vorkommen der Zahlen von 1 bis 6 erfüllt ist.

a	d	f	$a+d+f$	s	b	c	e	kommen 1 bis 6 vor ?
1	2	3	6	9	6	5	4	ja
1	2	6	9	10	7	3	2	nein
1	3	5	9	10	6	4	2	ja
1	5	6	12	11	5	4	0	nein
2	3	4	9	10	5	4	3	nein
2	4	6	12	11	5	3	1	ja
3	4	5	12	11	4	3	2	nein
4	5	6	15	12	3	2	1	ja

Da (5), (6), (7) zu (1), (2), (3) äquivalent sind, ist damit gezeigt, dass die vier mit „ja“ gekennzeichneten Eintragungen alle Bedingungen der Aufgabe erfüllen.
Da sie sich in den überhaupt als a, d, f auftretenden Zahlen voneinander unterscheiden, sind sie auch sämtlich im Sinne der Aufgabenstellung voneinander verschieden. Somit sind genau diese vier (oder vier von ihnen nicht verschiedene) Eintragungen die gesuchten.

Aufgabe 230923:

$$\begin{array}{cccccc} & & \square & \square & \square & \square \\ + & & \square & \square & \square & \square \\ \hline & \square & \square & \square & \square & \square \end{array}$$

In das Schema einer Additionsaufgabe soll in jedes Kästchen eine Ziffer so eingetragen werden, dass jede der zehn Ziffern (des dekadischen Zahlensystems) genau einmal auftritt und in den vorderen Kästchen keine 0 steht. Außerdem soll genau dreimal ein Übertrag auftreten.
Ermitteln Sie alle diejenigen vierstelligen Zahlen, die unter diesen Bedingungen als dritte Zeile (Summe) dieser Aufgabe möglich sind!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn eine Eintragung die geforderten Eigenschaften hat, so folgt:
(1) Die vorderste Ziffer der gesuchten Summe kann, da die 0 dafür nicht zugelassen ist, nur die 1 sein; denn die Summe zweier dreistelliger Zahlen ist kleine als 2000.
Die 9 kann in der Summe nicht auftreten, weil die Summe zweier einstelliger Zahlen unter den gegebenen Bedingungen nicht 19 werden kann, während andererseits sowohl bei der Addition in der Einer- als auch bei der in der Zehner- und der in der Hunderterstelle ein Übertrag, also ein Additionsergebnis ≥ 10 gefordert ist.
Die 9 kann in den Summanden nicht als Zehner oder Hunderter auftreten, weil dann unter Berücksichtigung des Übertrags (der nur 1 sein kann) die Zehner bzw. Hunderterziffer des anderen Summanden wieder in der Summe auftreten würde.

(2) Daraus folgt, dass die 9 in einem der Summanden als Einer stehen muss, o. B. d. A. stehe sie also im ersten Summanden.

(3) Die 0 darf in keinem Summanden vorkommen, da sonst kein Übertrag auftreten würde. Als Zwischenergebnis halten wir fest: Im zweiten Summanden kann als Einer nicht stehen:
0 wegen (3), 1 wegen (1), 9 wegen (2), 2, denn sonst erhält man in der Summe eine 1.
Wegen (2) und (3) kann die Summe nicht auf 0 enden.

(4) Damit im Zehner oder Hunderter der Summe ein 0 auftritt, müssen zwei Ziffern (bei der Addition der Zehner- oder der Hunderterspalten) als Summe 9 ergeben. Damit verbleiben höchstens die folgenden Möglichkeiten:
Die in der letzten Spalte angegebenen Zahlen ergeben sich jeweils aus den einzigen Möglichkeiten, die drei verbleibenden Ziffern so zu kombinieren, dass die Summe von zweien um 9 größer ist als die dritte. (In den Fällen * und ** gibt es keine solchen Möglichkeiten.)

Einer des zweiten Summanden	Einer in der Summe	restliche Ziffern	mögliche Summe 9 aus zwei Summanden	möglich dritte Zeile des Schemas
3	2	0,4,5,6,7,8	4+5	1062 oder 1602
4	3	0,2,5,6,7,8	2+7	1053 oder 1503
5	4	0,2,3,6,7,8	2+7 oder 3+6	*
6	5	0,2,3,4,7,8	2+7	1035 oder 1305
7	6	0,2,3,4,5,8	4+5	1026 oder 1206
8	7	0,2,3,4,5,6	4+5 oder 3+6	**

Damit ist gezeigt, dass nur die acht in der letzten Spalte der Tabelle angegebenen Zahlen als dritte Zeile (Summe) auftreten können.

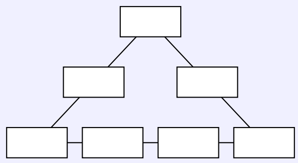
II. Sie können (unter Einhaltung aller Bedingungen der Aufgabenstellung) auftreten, wie z. B. die folgenden Eintragungen zeigen:

$$\begin{array}{ccccc} & & 7 & 4 & 9 \\ + & & 8 & 5 & 3 \\ \hline & 1 & 6 & 0 & 2 \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} & & 4 & 7 & 9 \\ + & & 5 & 8 & 3 \\ \hline & 1 & 0 & 6 & 2 \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} & & 8 & 2 & 9 \\ + & & 6 & 7 & 4 \\ \hline & 1 & 5 & 0 & 3 \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} & & 2 & 9 & 9 \\ + & & 7 & 6 & 4 \\ \hline & 1 & 0 & 5 & 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} & & 4 & 2 & 9 \\ + & & 8 & 7 & 6 \\ \hline & 1 & 3 & 0 & 5 \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} & & 2 & 4 & 9 \\ + & & 7 & 8 & 6 \\ \hline & 1 & 0 & 3 & 5 \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} & & 3 & 4 & 9 \\ + & & 8 & 5 & 7 \\ \hline & 1 & 2 & 0 & 6 \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} & & 4 & 3 & 9 \\ + & & 5 & 8 & 7 \\ \hline & 1 & 0 & 2 & 6 \end{array}$$

Somit gibt es genau die acht in der letzten Spalte angegebenen Ergebnisse.

Aufgabe 310924:



In die Felder der Abbildung sollen die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 so eingetragen werden, dass jede Zahl genau einmal vorkommt und dass die Zahlen auf jeder Dreiecksseite die gleiche Summe ergeben. Ermitteln Sie alle derartigen Eintragungen, die nicht durch Spiegelung ineinander überführt werden können!

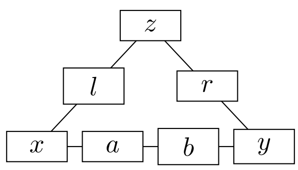
Lösung von cyrix:
Zuerst bemerken wir, dass die beiden mittleren Felder der Basis immer vertauscht werden können, ohne, dass die Figur durch Spiegelung in sich selbst überführt wird. Wir wollen deshalb im Folgenden auch o. B. d. A. voraussetzen, dass die Zahl im zweiten Feld der Basis kleiner ist als im dritten und die im ersten kleiner als die im vierten.

Sei x die Zahl, die im ersten Feld der Basis, y diejenige im vierten Feld der Basis und z diejenige in der Spitze des Dreiecks steht sowie s die Summe der Zahlen an einer Seite dieses Dreiecks. Dann ist $3s = 1+2+3+4+5+6+7+x+y+z = 28+x+y+z$, da genau die Eckfelder an zwei Seiten beteiligt sind und alle anderen Zahlen an genau einer. Wegen $6 = 1+2+3 \leq x+y+z \leq 5+6+7 = 18$ ist $34 \leq 3s \leq 46$, also, da s eine ganze Zahl ist, $12 \leq s \leq 15$.

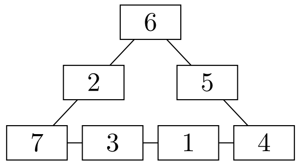
In der folgenden Tabelle geben wir für jeden möglichen Wert für s den Wert, den die Summe der Eckfelder $x+y+z$ dann annehmen muss, sowie dessen Zerlegungen in drei paarweise verschiedene Summanden zwischen 1 und 7 an:

s	x+y+z
12	8=1+2+5=1+3+4
13	11=1+3+7=1+4+6=2+3+6=2+4+5
14	14=1+6+7=2+5+7=3+4+7=3+5+6
15	17=4+6+7

Seien weiterhin mit l die Zahl im Mittelfeld des linken, r die Zahl im Mittelfeld des rechten Schenkels und mit a sowie b die Zahlen im zweiten und dritten Feld der Basis bezeichnet:



Fall 1: $s = 15$. Dann ist $x+y+z = 4+6+7$ in irgendeiner Reihenfolge. Es können aber wegen $s-6-7 = 2 < 1+2$ nicht 6 und 7 beide in der Basis stehen, sodass $y = 4$ folgt. Weiterhin kann dann wegen $s-7-4 = 4$ nicht $z = 7$ gelten, sodass $x = 7$ und $z = 6$ folgt. Dann muss $l = s-x-z = 2$ und $r = s-y-z = 5$ gelten. Es verbleiben für a und b die Zahlen 3 und 1. Tatsächlich ist dann $x+a+b+y = 15 = s$, sodass dies eine Lösung ist (bzw. durch Vertauschung von 1 und 3 dann zwei Lösungen).

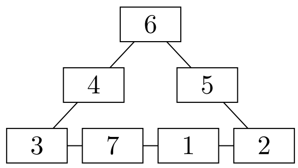


Fall 2: $s = 14$.
Dann ist $x + y + z = 14 = s$ und es müsste $l = s - x - z = y$ haben, was zu einer Doppelbelegung mit der Zahl y führen würde. Also gibt es in diesem Fall keine Lösung.

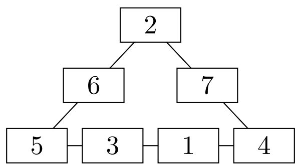
Fall 3: $s = 13$.
Fall 3.1: Es ist in irgendeiner Reihenfolge $x + y + z = 1 + 3 + 7$. Dann sind insbesondere $x + z$ und $y + z$ gerade, aber s ungerade, sodass sowohl l als auch r beide ungerade sein müssten. Es ist aber nur noch die einzige noch nicht verwendete ungerade Zahl 5, sodass in diesem Fall keine Lösung existiert.

Fall 3.2: Es ist in irgendeiner Reihenfolge $x + y + z = 1 + 4 + 6$. Dann können nicht 4 und 6 an der Basis stehen, da $s - 4 - 6 = 3 < 2 + 3$, da die 1 ja schon für ein Eckfeld vergeben wurde. Also muss $y = 1$ gelten. Es kann nicht $z = 6$ gelten, denn sonst wäre $r = s - y - z = 13 - 1 - 6 = 6 = z$. Es kann aber auch nicht $z = 4$ gelten, denn sonst wäre $r = s - y - z = 13 - 1 - 4 = 8 > 7$. Also gibt es in diesem Fall keine Lösung.

Fall 3.3: Es ist in irgendeiner Reihenfolge $x + y + z = 2 + 3 + 6$. Dann können nicht 3 und 6 in der Basis stehen, da $s - 6 - 3 = 4 < 1 + 4$, da 1 und 4 die kleinsten noch nicht vergebenen Zahlen sind. Also muss 2 in der Basis stehen und damit $y = 2$ gelten. Dann kann nicht $z = 3$ sein, da sonst $r = s - y - z = 13 - 2 - 3 = 8 > 7$ wäre. Also muss $z = 6$, $r = 5$ und $x = 3$ gelten, woraus wegen $l = s - x - z = 13 - 3 - 6 = 4$ folgt. Es verbleiben für a und b die Ziffern 7 und 1, und tatsächlich gilt auch $x + 7 + 1 + y = 3 + 7 + 1 + 2 = 13 = s$, sodass auch hier eine Lösung (bzw. nach Vertauschen von 7 und 1 eine zweite) entsteht.

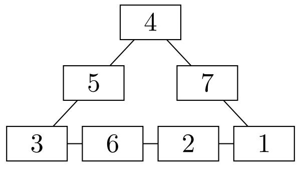


Fall 3.4: Es ist in irgendeiner Reihenfolge $x + y + z = 2 + 4 + 5$.
Dann können weder 4 noch 5 in der Spitze z stehen, da sonst $y = 2$ und $l = s - x - z = 13 - 4 - 5 = 4$ folgen würde. Also muss $z = 2$, $x = 5$ und $y = 4$ sein, woraus sofort $l = 6$ und $r = 7$ folgt, sodass für a und b noch die Ziffern 3 und 1 verbleiben. Auch hier gilt wieder $x + a + b + y = 5 + 3 + 1 + 4 = 13 = s$, sodass auch dies eine (bzw. nach Vertauschen von 3 und 1 eine zweite) Lösung ist.



Fall 4: $s = 12$.
Fall 4.1: Es ist in irgendeiner Reihenfolge $x + y + z = 1 + 2 + 5$.
Dann kann nicht die 5 in der Spitze z stehen, weil sonst $x = 2$ und $l = s - x - z = 12 - 2 - 5 = 5 = z$ folgen würde. Also ist $x = 5$. Aus analogem Grund kann dann nicht $z = 2$ sein, sodass $z = 1$ und $y = 2$ folgt, was aber auf den Widerspruch $r = s - y - z = 12 - 2 - 1 = 9 > 7$ führt. Also gibt es in diesem Fall keine Lösung.

Fall 4.2: Es ist in irgendeiner Reihenfolge $x + y + z = 1 + 3 + 4$.
Dann kann nicht 4 in der Basis stehen, da sonst $x = 4$ und $y + z = 1 + 3$, also $r = s - y - z = 12 - 1 - 3 = 8 > 7$ folgen würde. Also muss $z = 4$ und damit $x = 3$ sowie $y = 1$ gelten, woraus $l = s - x - z = 12 - 3 - 4 = 5$ und $r = s - y - z = 12 - 1 - 4 = 7$ folgt. Es verbleiben für a und b noch die Ziffern 6 und 2 und wieder ist $x + a + b + y = 3 + 6 + 2 + 1 = 12 = s$, sodass wir auch hier eine (bzw. nach Vertauschen von 6 und 2 eine zweite) Lösung erhalten:



Damit gibt es, da die Fallunterscheidung vollständig war, bis auf Vertauschung der Felder a und b (sowie Spiegelung an der Mittelsenkrechten der Basis) genau vier verschiedene Lösungen.

Aufgabe 330923:

$$\begin{array}{cccccc} & & M & O & R & D \\ + & & R & A & U & B \\ \hline = & K & R & I & M & I \end{array}$$

Das „Kryptogramm" stellt die Aufgabe, die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzen, dass eine richtig gerechnete Additionsaufgabe entsteht.
Dabei soll auch die Regel beachtet werden, dass als Anfangsziffer (für M, R und K) nicht die Ziffer Null auftreten darf.
Gleiche Buchstaben sind durch gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern zu ersetzen.
a) Geben Sie eine Lösung an!
b) Beweisen Sie, dass es mindestens 15 Lösungen gibt, von denen keine zwei einander gleich sind!

Hinweise:
1. Zwei Lösungen heißen genau dann einander gleich, wenn in der einen dieser Lösungen jeder Buchstabe durch dieselbe Ziffer ersetzt wird wie in der anderen dieser Lösungen.
2. Die Ähnlichkeit des Buchstabens O mit der Ziffer 0 (Null) soll keine Bedeutung haben; d. h., der Buchstabe O darf auch durch eine von Null verschiedene Ziffer ersetzt werden.

Lösung von cyrix:
a)

$$\begin{array}{cccccc} & & 9 & 6 & 3 & 8 \\ + & & 3 & 4 & 5 & 2 \\ \hline = & 1 & 3 & 0 & 9 & 0 \end{array}$$

b) Man kann aus der in a) gefundenen Lösung insgesamt $2^4 = 16$ Lösungen erhalten, indem man unabhängig voneinander folgende Entscheidungen trifft, die aus einer Lösung eine weitere erzeugen:

*) Ziffern von O und A tauschen (oder nicht)
*) Ziffern von D und B tauschen (oder nicht)
*) Ziffern von (O und A) mit denen von (D und B) tauschen (oder nicht)
*) Ziffern von R und U tauschen (oder nicht).

Jede solche Tauschoperation erzeugt aus einer gültigen Lösung des Kryptogramms eine gültige Lösung. Auch sind je zwei dieser so erzeugten 16 Lösungen verschieden, da sie sich in wenigstens einer Ziffernzuweisung unterscheiden.
Es gibt also mindesten 16 und damit auch mindestens 15 verschiedene Lösungen, $\Box$.

Bemerkung: Eine vollständige Fallunterscheidung bei der Konstruktion dieser Lösungen zeigt, dass dies tatsächlich alle Lösungen des Kryptogramms sind.

Aufgabe 340922:
Jonas beschäftigt sich mit der Lösung des Kryptogramms

$$\begin{array}{ccccc} & E & I & N & S \\ + & A & C & H & T \\ \hline = & N & E & U & N \end{array}$$

d. h., er versucht, die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzen, dass eine (im dekadischen Positionssystem) richtig gerechnete Additionsaufgabe entsteht.
Gleiche Buchstaben sind durch gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern zu ersetzen. Ferner ist auch die Regel einzuhalten, dass in jeder Zeile als Anfangsziffer nicht die Ziffer Null auftritt.
Nach einer Stunde behauptet Jonas, er habe immerhin schon 25 verschiedene Lösungen gefunden. Felix bezweifelt, dass es überhaupt so viele verschiedene Lösungen gibt.
Hat Felix mit seinem Zweifel recht?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Felix hat nicht recht. Dies kann z. B. folgendermaßen gezeigt werden: Es gibt die Lösungen

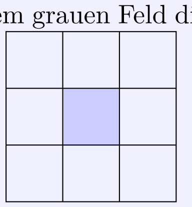
$$\begin{array}{ccccc} & 3 & 4 & 9 & 2 \\ + & 5 & 8 & 1 & 7 \\ \hline = & 9 & 3 & 0 & 9 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} & 8 & 0 & 9 & 4 \\ + & 1 & 7 & 3 & 5 \\ \hline = & 9 & 8 & 2 & 9 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} & 7 & 0 & 9 & 1 \\ + & 2 & 6 & 4 & 8 \\ \hline = & 9 & 7 & 3 & 9 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} & 3 & 0 & 9 & 1 \\ + & 6 & 2 & 5 & 8 \\ \hline = & 9 & 3 & 4 & 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} & 8 & 3 & 9 & 2 \\ + & 1 & 4 & 6 & 7 \\ \hline = & 9 & 8 & 5 & 9 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} & 4 & 0 & 9 & 1 \\ + & 5 & 3 & 7 & 8 \\ \hline = & 9 & 4 & 6 & 9 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} & 4 & 1 & 9 & 3 \\ + & 5 & 2 & 8 & 6 \\ \hline = & 9 & 4 & 7 & 9 \end{array}$$

In jeder dieser Lösungen kann man die Ziffern für S und T miteinander vertauschen, ebenso (unabhängig hiervon) die Ziffern für I und C.
Da sich je zwei der Lösungen in der Ziffer für U voneinander unterscheiden, ergeben sich hiermit bereits $4 \cdot 7 = 28$ verschiedene Lösungen.

III. Runde 3

Aufgabe 110932:
In die Figur sollen neun aufeinanderfolgende natürliche Zahlen so eingetragen werden, dass in jedem Feld genau eine steht und die drei „Zeilensummen“, die drei „Spaltensummen“ und die zwei „Diagonalsummen“ sämtlich einander gleich sind (magisches Quadrat).
Beweisen Sie, dass eine derartige Belegung genau dann möglich ist, wenn in dem grauen Feld die fünfte der der Größe nach geordneten Zahlen steht!



Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die neun aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen seien mit $n, n+1, \ldots, n+8$ bezeichnet. Ihre Summe beträgt dann $9n + 36$.
Da die drei „Zeilensumme“ gleich sein sollen, muss jede von ihnen $3n + 12$ betragen. Lauf Aufgabe gilt das auch für die übrigen fünf Summen.
Unter ausschließlicher Verwendung der gegebenen Zahlen lässt sich diese Summe auf genau 8 verschiedene Weisen aus je 3 verschiedenen Summanden bilden, nämlich auf folgende Weisen:

$$\begin{array}{lll} n + (n+4) + (n+8) & n + (n+5) + (n+7) & (n+1) + (n+3) + (n+8) \\ (n+1) + (n+4) + (n+7) & (n+1) + (n+5) + (n+6) & (n+2) + (n+3) + (n+7) \\ (n+2) + (n+4) + (n+6) & (n+3) + (n+4) + (n+5) & \end{array}$$

In den Summen kommen die Summanden $n, n+2, n+6$ und $n+8$ genau zweimal, die Summanden $n+1, n+3, n+5$ und $n+7$ genau je dreimal und es kommt nur der Summand $n+4$ genau viermal vor.

Bei dem Bilden der Zeilen- Spalten- und Diagonalsummen wird nur das farbige Feld genau viermal belegt. Daher muss im farbigen Feld die Zahl $n+4$, das ist die fünfte der der Größe nach geordneten Zahlen $n,\dots,n+8$, stehen, und wenn sie dort steht, gibt es die angegebenen Möglichkeiten.

Aufgabe 200931:
In dem folgenden Schema sind die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzen, dass eine richtig gerechnete Divisionsaufgabe ohne Rest entsteht. Dabei können verschiedene Buchstaben auch durch gleiche Ziffern ersetzt werden. Wie üblich darf eine mehrstellig geschriebene Zahl nicht die Anfangsziffer 0 haben.
Beweisen Sie, dass es genau eine Ersetzung dieser Art gibt, die den Anforderungen der Aufgabe genügt! Ermitteln Sie diese Ersetzung!

$$\begin{array}{cccccccccccc}
a & b & c & 5 & 5 & : & 5 & d & e & = & f & 5 & g \\
h & i & 5 \\ \cline{1-3}
j & k & m & n \\
p & 5 & q & r \\ \cline{1-4}
 & s & t & u & v \\
 & w & x & y & z
\end{array}$$

Lösung von cyrix:
Wegen $5de \geq 500$ und damit $2 \cdot 5de \geq 1000$, aber $0 < hi5 < 1000$ ist $f=1$ und $hi5 = 5de$, also $h=5$, $d=i$ und $e=5$.

Wegen $500 < 5d5 < 600$ ist $2500 < 5 \cdot 5d5 < 3000$, also $p=2$. Damit ist $5 \cdot 5d5 < 2600$, d. h. $5d5 < 520$, also $d \in \{0{,}1\}$. Außerdem endet $5 \cdot 5d5$ in der Einerziffer 5, sodass auch $r=5$ gilt. Damit ergibt sich insbesondere als Einerziffer der Differenz $u=0$.

Aufgrund des Vorgehens bei der schriftlichen Division muss $v=5$ gelten. Damit kein Rest bleibt, muss $wxyz = stuv$ sein.
Trägt man alle bisher gefundenen Informationen ein, erhält man

$$\begin{array}{cccccccccccc}
a & b & c & 5 & 5 & : & 5 & d & 5 & = & 1 & 5 & g \\
5 & d & 5 \\ \cline{1-3}
j & k & m & 5 \\
2 & 5 & q & 5 \\ \cline{1-4}
 & s & t & 0 & 5 \\
 & s & t & 0 & 5
\end{array}$$

Wäre $d=0$, dann müsste $st05 = g \cdot 505$ gelten. Dies ist aber ein Widerspruch zu $s \neq 0$, da die Zehnerziffer von $g \cdot 505$ nur für die positive Ziffer $g=1$ den Wert 0 hat.

Also muss $d=1$ sein. Dann ist $st05 = g \cdot 515$, was genau für die Ziffer $g=7$ erfüllt ist, denn dann ist $7 \cdot 515 = 3605$. Auch ergibt sich $25q5 = 5 \cdot 515 = 2575$, also $q=7$ und damit $jkm5 = 2575 + 360 = 2935$ sowie abschließend $abc = 515 + 293 = 808$, sodass man die korrekt berechnete und eindeutig bestimmte Divisionsaufgabe

$$\begin{array}{cccccccccccc}
8 & 0 & 8 & 5 & 5 & : & 5 & 1 & 5 & = & 1 & 5 & 7 \\
5 & 1 & 5 \\ \cline{1-3}
2 & 9 & 3 & 5 \\
2 & 5 & 7 & 5 \\ \cline{1-4}
 & 3 & 6 & 0 & 5 \\
 & 3 & 6 & 0 & 5
\end{array}$$

erhält, wie man leicht nachrechnet, $\square$.

Aufgabe 230933:

$$\begin{array}{cccc} & \square & \square & \square \\ + & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \end{array}$$

In dem Schema soll in jedes Kästchen genau eine der zehn Ziffern (des dekadischen Zahlensystems) so eingetragen werden, dass jede der Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 einmal vorkommt und dass eine richtig gerechnete Additionsaufgabe entsteht.
Beweisen Sie, dass es nicht möglich ist, durch eine solche Eintragung auch noch die zusätzliche Forderung zu erfüllen, dass bei der Ausführung der Addition genau zwei Überträge auftreten!

Lösung von cyrix:
Wir nehmen indirekt an, es gäbe eine solche Eintragung mit genau zwei Überträgen.

Die Tausenderstelle der Summe s kann nur durch einen Übertrag entstanden sein. Da nur zwei Summanden s_1 und s_2 addiert werden, kann wegen $9+9+1=19<20$ ein Übertrag nur 1 lauten. Insbesondere ist die Tausenderstelle von s also eine 1.

Wir denken uns nun zur Vereinfachung der Notation die beiden Summanden um eine Tausenderstelle 0 ergänzt, sodass alle drei Zahlen die gleiche Stellenanzahl besitzen.
Es sei q_1 die Quersumme des ersten Summanden, q_2 die des zweiten und q die der Summe. Dann gilt offenbar $q_1+q_2+q=45$, da jede der Ziffern 1 bis 9 insgesamt genau einmal (und die 0 nun genau dreimal) in diesen Zahlen vorkommt.

Weiterhin entsteht eine Ziffer in s durch die Addition der beiden entsprechenden Ziffern in s_1 und s_2, sofern kein Übertrag in dieser oder der vorhergehenden Stelle auftritt. Entstand ein Übertrag in der vorhergehenden Stelle, erhöht sich der Wert der gerade betrachteten Ziffer von s gegenüber der Summe der entsprechenden Ziffern von s_1 und s_2 um den Übertrag von 1. Entsteht (ggf. dadurch) nun in der betrachteten Stelle ein Übertrag, ist die Ziffer in s um genau 10 kleiner als die Summe (und die nächste Ziffer in s erhöht sich um den Übertrag von 1).

Summiert man nun alle diese Summen der entsprechenden Ziffern von s_1 und s_2, erhält man wieder q_1+q_2, da jede Ziffer von s_1 sowie s_2 dabei genau einmal betrachtet wird. Andererseits ergibt dies nach der eben erfolgten Beobachtung $q_3+k\cdot(10-1)$, wobei k die Anzahl der Überträge ist, da dann an genau k Stellen die Ziffer in s durch einen Übertrag um 1 erhöht und auch an genau k Stellen um genau 10 gegenüber dem Wert der Summe der entsprechenden Ziffern (+ ggf. Übertrag aus vorheriger Stelle) verringert wurde.

Laut Aufgabenstellung soll $k=2$ gelten, sodass man $q_1+q_2=q_3+18$ erhält. Setzt man dies in $q_1+q_2+q_3=45$ ein, erhält man $2q_3+18=45$ bzw. den Widerspruch $q_3=\frac{27}{2}\notin\mathbb{Z}$. Also kann es keine solche Eintragung mit genau 2 Überträgen geben, $\square$.

Aufgabe 280932:
In jedes der 16 Felder eines 4×4-Quadrates (siehe Abbildung) soll eine der Zahlen 0 und 1 so eingetragen werden, dass in jeder Zeile, in jeder Spalte und in jeder der beiden Diagonalen zweimal die 0 und zweimal die 1 vorkommt.
Ermitteln Sie alle verschiedenen Eintragungen, die diese Bedingungen erfüllen!
Dabei seien zwei Eintragungen genau dann voneinander verschieden genannt, wenn es keine Spiegelung gibt, die die eine Eintragung in eine andere überführt.

Lösung von cyrix:
Die Felder des Quadrats seien mit a_1 bis d_4 bezeichnet.
Dann kann nicht in drei Eckfelder des Quadrats die gleiche Zahl eingetragen werden. Andernfalls wären o. B. d. A. $a_1 = a_4 = d_4 = 0$. Dann folgt in Zeile a, dass $a_2 = a_3 = 1$ und analog in Spalte 4, dass $b_4 = c_4 = 1$ sein muss. In der Diagonale a_1–d_4 gilt aber auch $b_2 = c_3 = 1$, sodass sich in Zeile b schließlich $b_1 = b_3 = 0$ und in Zeile c $c_1 = c_2 = 0$ ergibt, womit man in Spalte 1 den Widerspruch $a_1 = b_1 = c_1 = 0$ erhält.

Also müssen in je zwei der vier Eckfelder des Quadrats die Zahl 0 und in die zwei anderen die Zahl 1 eingetragen werden. Wir unterscheiden danach, ob sich die beiden Felder mit der 0 gegenüberliegen, oder ob sie benachbart sind:

Fall 1: Die beiden Eckfelder mit Eintrag 0 liegen einander diagonal gegenüber, d. h., nach ggf. erfolgter Spiegelung gilt o. B. d. A. $a_1 = d_4 = 0$ und $a_4 = d_1 = 1$. Es folgt auf den Diagonalen automatisch $b_2 = c_3 = 1$ und $b_3 = c_2 = 0$, man erhält also

0			1
	1	0	
	0	1	
1			0

Fall 1.1: Es ist $a_2 = 0$. Dann ist zwangsweise $a_3 = 1$, $d_2 = 1$ und $d_3 = 0$. Man erhält

0	0	1	1
	1	0	
	0	1	
1	1	0	0

Fall 1.1.1: Es ist $b_1 = 0$. Dann ist zwangsweise $b_4 = 1$, $c_1 = 1$ und $c_4 = 0$, sodass man die folgende (wie man leicht überprüft) Lösung erhält:

0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0

Fall 1.1.2: Es ist $b_1 = 1$. Dann ist zwangsweise $b_4 = 0$, $c_1 = 0$ und $c_4 = 1$, sodass man die folgende Lösung erhält:

0	0	1	1
1	1	0	0
0	0	1	1
1	1	0	0

Fall 1.2: Es ist $a_2 = 1$. Dann ist zwangsweise $a_3 = 0$, $d_2 = 0$ und $d_3 = 1$. Wäre $b_1 = 0$, so könnte man dies durch Spiegelung auf den Fall 1.1.2 zurückführen. Also muss $b_1 = 1$ sein, was auf $b_4 = 0$, $c_1 = 0$ und $c_4 = 1$, sodass man die folgende Lösung erhält:

0	1	0	1
1	1	0	0
0	0	1	1
1	0	1	0

Fall 2: Die beiden Eckfelder mit Eintrag 0 liegen auf einer gemeinsamen Kante, d. h., es gilt nach ggf. erfolgter Spiegelung o. B. d. A. $a_1 = a_4 = 0$ und $d_1 = d_4 = 1$. Es folgt sofort $a_2 = a_3 = 1$ und $d_2 = d_3 = 0$, sodass man folgende Situation erhält:

0	1	1	0
1	0	0	1

Fall 2.1: Es ist $b_2 = 0$. Dann ist zwangsweise $b_3 = 1$ und aufgrund der Diagonalen a_1–d_4 auch $c_3 = 1$, was sofort $b_3 = 0$, also in Zeile b auch $b_1 = b_4 = 1$ sowie in Zeile c analog $c_1 = c_4 = 0$ nach sich zieht, sodass man die folgende Lösung erhält:

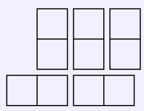
0	1	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1

Fall 2.2: Es ist $b_1 = 1$. Dann ist zwangsweise $b_3 = 0$ und aufgrund der Diagonalen a_1–d_4 auch $c_3 = 0$, was sofort $b_3 = 1$, also in Zeile b auch $b_1 = b_4 = 0$ sowie in Zeile c analog $c_1 = c_4 = 1$ nach sich zieht, sodass man die folgende Lösung erhält:

0	1	1	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	0	1

Die Fallunterscheidung ist vollständig und die fünf erhaltenen Eintragungen (von denen man jeweils schnell überprüft, dass sie alle geforderten Eigenschaften erfüllen) gehen paarweise nicht durch Spiegelung auseinander hervor, bilden also die gesuchte Lösungsmenge.

Aufgabe 290932:



Aus einem Satz von Dominosteinen soll eine Zusammenstellung von möglichst vielen nebeneinanderliegenden Figuren gebildet werden. Jede dieser Figuren soll die in der Abbildung gezeigte Gestalt haben, ferner soll sie die folgende Bedingung erfüllen:
Liest man in jeder Zeile die drei bzw. vier Zeichen als Zifferndarstellung einer Zahl, so gibt die Figur eine richtig gerechnete Additionsaufgabe an (erste Zeile + zweite Zeile = dritte Zeile). Wie üblich ist die Null als Anfangsziffer nicht zugelassen.
Ermitteln Sie die größtmögliche Anzahl von nebeneinanderliegenden Figuren der geforderten Art, die sich aus einem Satz von Dominosteinen bilden lassen!

Hinweis: Jeder Dominostein enthält auf jeder seiner beiden Teilflächen genau eines der Zahlzeichen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Der Satz von Dominosteinen (aus dem die Steine für das Bilden der Figuren auszuwählen sind) enthält jeden Stein $\boxed{\text{x} \mid \text{y}}$ mit $0 \leq x \leq y \leq 6$ genau einmal; beim Bilden der Figuren ist für die Lage der Steine jede Reihenfolge der beiden Zahlen eines verwendeten Steines zugelassen.

Lösung von cyrix:
Da mindestens ein Übertrag notwendig ist, um aus der Summe zweier dreistelliger Zahlen eine vierstellige Zahl zu erhalten, muss pro Figur mindestens einer der Dominosteine 6-6, 6-5, 6-4 oder 5-5 beteiligt sein. Da aber $6 + 4 = 5 + 5 = 10$ ist, können nicht alle vier jeweils einzeln in einer eigenen Figur liegen, da sonst die ersten beiden stellen der Figuren mit diesen beiden Dominosteinen 1-0 lauten würden, dieser Dominostein aber nur einmal verwendet werden darf.
Also können höchstens drei solche Figuren gebildet werden. Dass dies möglich ist, wird durch folgendes Beispiel gezeigt:

$$\begin{array}{cccc} & 6 & 0 & 6 \\ + & 6 & 5 & 4 \\ \hline 1 & 2 & 6 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} & 6 & 0 & 0 \\ + & 5 & 3 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 3 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} & 5 & 2 & 1 \\ + & 5 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 0 & 4 & 4 \end{array}$$

Aufgabe 330934:

$$\begin{array}{ccccc} & \mathrm{Z} & \mathrm{W} & \mathrm{E} & \mathrm{I} \\ + & \mathrm{D} & \mathrm{R} & \mathrm{E} & \mathrm{I} \\ \hline = & \mathrm{F} & \ddot{\mathrm{U}} & \mathrm{N} & \mathrm{F} \end{array}$$

Das obenstehende „Kryptogramm“ stellt die Aufgabe, die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzten, dass eine richtig gerechnete Additionsaufgabe entsteht.
Dabei soll auch die Regel beachtet werden, dass als Anfangsziffer (für Z, D und F) nicht die Ziffer Null auftreten darf. Gleiche Buchstaben sind durch gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern zu ersetzen.
a) Geben Sie eine Lösung an!
b) Untersuchen Sie, ob es mehr als fünf Lösungen gibt, von denen keine zwei einander gleich sind!

Hinweis:
Zwei Lösungen heißen genau dann einander gleich, wenn in der einen dieser Lösungen jeder Buchstabe durch dieselbe Ziffer ersetzt wird wie in der anderen dieser Lösungen.

Lösung von cyrix:
a)

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & 2 & 4 & 3 \\ + & 5 & 7 & 4 & 3 \\ \hline = & 6 & 9 & 8 & 6 \end{array}$$

b) In der Lösung aus a) können Z und D sowie unabhängig davon W und R vertauscht werden, sodass man drei weitere Lösungen erhält.
Schließlich gibt es die davon (wegen $N = 0 \neq 8$) verschiedene Lösung

$$\begin{array}{ccccc} & 2 & 7 & 5 & 3 \\ + & 4 & 1 & 5 & 3 \\ \hline = & 6 & 9 & 0 & 6 \end{array}$$

für welche die gleichen Vertauschungen auch möglich sind, sodass es mindestens 8 verschiedene Lösungen, also insbesondere mehr als 5 verschiedene gibt.

V.II. Mengen; Logik

I. Runde 1

Aufgabe 040912:
Beim Schulsportfest hatten sich Christian (C), Bernd (B), Alfred (A) und Dieter (D) für den Endlauf über 100 m qualifiziert. Auf Grund der Vorlaufzeiten rechnete man mit einem Einlauf ins Ziel in der Reihenfolge $CBAD$. Damit hatte man aber weder den Platz eines Läufers noch ein Paar direkt aufeinanderfolgender Läufer richtig vermutet. Der Sportlehrer erwartete die Reihenfolge $ADBC$. Das war gut geschätzt; denn es kamen zwei Läufer auf den erwarteten Plätzen ein.

In welcher Reihenfolge gingen die Läufer ins Ziel?

Lösung von Manuela Kugel:
Es gibt 6 Fälle zu untersuchen, wenn man die Erwartung des Sportlehrers zugrunde legt, da 2 Plätze stimmen. Die restlichen beiden Plätze entstehen nämlich, indem man die Erwartung des Sportlehrers dieser beiden Plätze vertauscht.

Fallunterscheidung:
1. ADCB - entfällt, da laut allgemeiner Erwartung die Reihenfolge AD nicht vorkommen kann.
2. ACBD - entfällt, da D dann in der 1. Schätzung richtig wäre.
3. ABDC - entfällt, da B dann in der 1. Schätzung richtig wäre.
4. CDBA - entfällt, da C dann in der 1. Schätzung richtig wäre.
5. BDAC - entfällt, da A dann in der 1. Schätzung richtig wäre.
6. DABC - einzige Lösung.

Aufgabe 060914:
Bei einem Schachturnier mit 8 Teilnehmern spielte jeder gegen jeden genau eine Partie. Am Ende des Turniers haben alle Teilnehmer verschiedene Punktzahlen erzielt. Der Spieler auf dem zweiten Platz hat genau so viele Punkte gewonnen wie die letzten vier zusammen. Dabei erhielt man für einen Sieg 1 Punkt, für jedes Unentschieden $\frac{1}{2}$ Punkt und für eine Niederlage keinen Punkt.

Wie endete die Partie zwischen den Spielern, die den 4. bzw. 6. Platz belegten?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Jeder Teilnehmer spielte genau 7 Partien und konnte maximal 7 Punkte erreichen (wenn er alle Partien gewann).

Die vier Schachspieler, die die letzten 4 Plätze belegten, mussten unter sich genau 6 Partien ausspielen. Die dabei zu verteilenden 6 Punkte teilten sie also unter sich auf.

Da der Spieler, der den zweiten Platz belegte, laut Aufgabe genau so viele Punkte gewonnen hat wie die letzten vier zusammen, hat er mindestens 6 Punkte erreicht. Er kann aber auch nicht mehr als 6 Punkte erreicht haben; denn besiegte er außer den anderen Spielern auch den Ersten, würde er Erster, und spielte er gegen diesen (bei Siegen gegen alle übrigen Spieler) unentschieden, so hätten erster und zweiter Spieler entgegen der Voraussetzung gleiche Punktzahl.

Somit müssen die letzten vier Spieler zusammen genau 6 Punkte erzielt haben, d. h. sie haben alle Partien gegen die ersten vier Spieler verloren. Infolgedessen hat auch der vierte Spieler den sechsten Spieler besiegt. Außerdem sind alle Bedingungen der Aufgabe miteinander verträglich, wie z. B. folgendes Schema zeigt:

	1	2	3	4	5	6	7	8
1		1	1	1	1	1	1	1
2	0		1	1	1	1	1	1
3	0	0		1	1	1	1	1
4	0	0	0		1	1	1	1
5	0	0	0	0		1	1	1
6	0	0	0	0	0		1	1
7	0	0	0	0	0	0		1
8	0	0	0	0	0	0	0	

Aufgabe 070914:
Vier Mannschaften A, B, C und D tragen ein Fußballturnier aus. Dabei spielt jede Mannschaft genau einmal gegen jede andere, und es werden den einzelnen Mannschaften für ein gewonnenes, unentschieden ausgegangenes bzw. verlorenes Spiel 2, 1 bzw. 0 „Pluspunkte“ gegeben.
Am Tag nach dem Abschluss des Turniers hört Peter den Schluss einer Radiomeldung: „... Vierter wurde die Mannschaft D. Damit erhielten keine zwei Mannschaften gleiche Punktzahl. Das Spiel A gegen B endete als einziges unentschieden.“

Peter ist enttäuscht, dass seine Lieblingsmannschaft in diesem Teil der Meldung überhaupt nicht erwähnt wurde. Dennoch kann er aus den gehörten Angaben und der Kenntnis des Austragungsmodus nicht nur die Platzierung, sondern auch den Punktstand dieser Mannschaft ermitteln. Wie ist das möglich?

Lösung von Manuela Kugel:
Da A gegen B das einzige unentschieden ausgegangene Spiel ist, haben A und B je eine ungerade, C und D je eine gerade Punktzahl. Die Summe dieser Punktzahlen ist zwölf, da genau sechs Spiele mit je zwei vergebenen Punkten ausgetragen wurden. Die Zahl Eins kann nicht vergeben worden sein, weil sonst D als letzte Mannschaft und, mit gerader Punktzahl versehen, null Punkte erhalten hätte. Also hätte D jedes Spiel verloren und daher jede andere Mannschaft mindestens zwei Punkte gewonnen.

Mithin lautet die Punkteverteilung 0, 3, 4, 5, da keine Mannschaft mehr als sechs Punkte und keine zwei Mannschaften gleiche Punktzahl erhalten haben. Da D die letzte Mannschaft ist, hat D Null Punkte. Folglich errang C, Peters Lieblingsmannschaft (denn sie ist als einzige nicht in dem Bericht erwähnt), vier Punkte und damit den zweiten Platz.

Aufgabe 100914:
In einer alten Aufgabensammlung wird das *Urteil des Paris* folgendermaßen beschrieben:

Die Göttinnen Hera, Aphrodite und Athene fragen den klugen Paris, wer von ihnen die Schönste sei. Sie machen dabei folgende Aussagen:

Aphrodite:	*Ich bin die Schönste.*	(1)
Athene:	*Aphrodite ist nicht die Schönste.*	(2)
Hera:	*Ich bin die Schönste.*	(3)
Aphrodite:	*Hera ist nicht die Schönste.*	(4)
Athene:	*Ich bin die Schönste.*	(5)

Paris, der am Wegrand ausruht, hält es nicht der Mühe wert, das Tuch, das seine Augen vor den Sonnenstrahlen schützt, zu entfernen. Er soll aber genau eine der drei Göttinnen als die Schönste feststellen. Dabei setzt er voraus, dass alle Aussagen dieser Schönsten wahr, alle Aussagen der beiden anderen Göttinnen jedoch falsch sind.

Kann Paris unter dieser Voraussetzung die von ihm geforderte Feststellung erhalten? Wenn ja, wie lautet diese?

Lösung von Manuela Kugel:
Die Aussagen 1., 3. und 5. bringen Paris nicht weiter, denn sie lauten gleich, sind wahr, wenn von der Schönsten ausgesprochen und falsch, wenn von einer anderen Göttin ausgesprochen.
Nun Fallunterscheidung und Prüfung der Aussagen 2. und 4.:

1. Fall: Aphrodite ist die Schönste. Wenn Athene dies leugnet (2.) und Aphrodite Hera wahrheitsgemäß als nicht die Schönste bezeichnet, so ergibt sich kein Widerspruch. ⇒ Aphrodite kann die Schönste sein.

2. Fall: Athene ist die Schönste. Die 4. Aussage müsste dann aber falsch sein, da nicht von der Schönsten ausgesprochen, was bedeutet, dass Hera die Schönste sei und ein Widerspruch zur Voraussetzung ist.

3. Fall: Hera ist die Schönste. Die 2. Aussage müsste dann aber falsch sein, da nicht von der Schönsten ausgesprochen, was bedeutet, dass Aphrodite die Schönste sei und ein Widerspruch zur Voraussetzung ist.

Damit ergibt sich die eindeutige Lösung, dass Aphrodite die Schönste ist, wenn die von Paris getroffenen Voraussetzungen genutzt werden.

Aufgabe 140914:
Bettina und Axel sind beide Briefmarkensammler, nun schlägt Axel Bettina folgendes Spiel um Briefmarken vor:

Jeder schreibt, unabhängig von dem anderen (ohne dem anderen Einsicht zu gewähren) genau eine der drei Zahlen 1, 2 oder 3 auf einen Zettel. Danach werden die Zettel aufgedeckt. Ist nun die von Axel notierte Zahl kleiner oder gleich der von Bettina notierten, so wird die von Axel notierte Zahl von der von Bettina notierten Zahl subtrahiert, in den anderen Fällen werden die Zahlen addiert.

Ist die so entstandene Zahl kleiner als 3, so darf sich Axel so viele Briefmarken von Bettina nehmen, wie diese Zahl angibt; in den anderen Fällen darf sich entsprechend Bettina von Axel Briefmarken nehmen. Nachdem sich Bettina diese komplizierten Regeln genau durchdacht hat, sagt sie zu Axel, dass dieses Spiel keinen Zweck hätte. Es könne nämlich jeder von beiden so spielen, dass er mit Sicherheit nicht verliert. Das würde aber bedeuten, dass keiner vom anderen eine Marke nehmen dürfte.

Ist diese Meinung Bettinas richtig?

Lösung von Manuela Kugel:
Bettina hat recht. Wenn nämlich Axel auf seinen Zettel 1 schreibt, so ist seine Zahl in keinem Fall größer als die Bettinas, es ist also die Differenz zu bilden. Diese ist kleiner als 3, daher darf sich Bettina keine Marke von Axel nehmen. Wenn Bettina ebenfalls 1 notiert, sind folgende 3 Fälle möglich: Axel schreibt 1, 2 oder 3. Im ersten Fall ist die Differenz zu bilden. Sie ist 0, also darf sich Axel keine Marke von Bettina nehmen. Wenn mithin Axel nd Bettina beide 1 schreiben, geht jeder von beiden sicher, keine Marke zu verlieren.

Aufgabe 150914:
Als Herr T. am 30.12.1973 seinen Geburtstag beging, sagte er zu seiner Frau: „Jetzt bin ich genau 8 mal so alt wie unser Sohn, wenn ich als Altersangabe jeweils nur die vollen (vollendeten) Lebensjahre rechne.“

Darauf entgegnete seine Frau: „Im Jahre 1974 wird der Fall eintreten, dass du 5 mal so alt wie unser Sohn bist, wenn auch ich nur die vollen Lebensjahre berücksichtige.“

Untersuchen Sie, ob es genau ein Datum gibt, für das - als Geburtsdatum des Sohnes - alle diese Angaben zutreffen! Ist das der Fall, so geben Sie das genaue Geburtsdatum des Sohnes an (Tag, Monat, Jahr)!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Angenommen, für ein Geburtsdatum des Sohnes seien alle Angaben zutreffend.

Dann gilt:

Ist x das in vollen (vollendeten) Lebensjahren ausgedrückte Alter des Sohnes am 30. 12. 1973, so kann es im Jahre 1974 nur die Werte $x, x+1$, $x+2$ annehmen, und davon den letzten nur dann, wenn der Sohn am 31. 12. Geburtstag hat.

Ferner ist $8x$ das in vollen Lebensjahren ausgedrückte Alter des Vaters am 30. 12. 1973, und dies kann im Jahre 1974 nur die Werte $8x, 8x+1$ annehmen.

Daher gilt für eine der Zahlen $a = 0, 1, 2$ und eine der Zahlen $b = 0, 1$ die Gleichung $5 \cdot (x + a) = 8x + b$, also $5a - b = 3x$.

Nun zeigt die folgende Tabelle der Werte $5a - b$,

b	$a = 0$	1	2
0	0	5	10
1	-1	4	9

dass $5a - b$ nur für $a = 2, b = 1$ durch 3 teilbar ist, was dann auf $x = 3$ führt. Also können die Angaben in der Aufgabe nur dann zutreffen, wenn der Sohn am 31. 12. Geburtstag hat, am 30. 12. 73 noch 3 Jahre alt war, am 31. 12. 1973 also 4 Jahre alt wurde und folglich am 31. 12. 1969 geboren war.

II. Dieses Geburtsdatum des Sohnes, zusammen mit dem daraus folgenden Alter des Vaters von 24 Jahren am 30. 12. 1973, erfüllt in der Tat alle Angaben; denn bei diesen Daten war am 30. 12. 1973 der Vater 8 mal so alt wie sein Sohn; am 31. 12. 1974 aber, als der Sohn 5 Jahre alt wurde, war der Vater 25 Jahre alt, also 5 mal so alt wie sein Sohn.

Daher treffen die Angaben genau für den 31. 12. 1969 als Geburtsdatum des Sohnes zu.

Aufgabe 170914:
Ein Rechenautomat sei in der Lage, nach bestimmten Regeln „Zeichenreihen“ umzuformen. Eine „Zeichenreihe“ sei eine Aneinanderreihung der Zeichen A, B, S, a, b in beliebiger Reihenfolge und mit beliebiger Häufigkeit. Es seien folgende Regeln zur Umformung zugelassen:

(1) S wird ersetzt durch A.
(2) A wird ersetzt durch aAB.
(3) A wird ersetzt durch a.
(4) B wird ersetzt durch b.

Der Automat wendet bei jedem Umformungsschritt genau eine dieser Regeln auf genau ein Zeichen der Zeichenreihe an. Ist es möglich, dass auf eine vorliegende Zeichenreihe mehrere Regeln angewendet werden könnten, so entscheidet der Automat zufällig darüber, welche der Regeln angewendet wird. Ist keine der angegebenen Regeln auf eine Zeichenreihe anwendbar, so bleibt der Automat stehen und gibt die letzte Zeichenreihe aus.

Wir geben dem Automaten das Zeichen S ein.

a) Ist es möglich, dass der Automat 10 Umformungsschritte ausführt, ohne danach stehenzubleiben? Wenn das möglich ist, dann geben Sie für einen solchen Fall an, welche der Regeln bei diesen 10 Umformungsschritten angewendet wurden und wie oft dies für jede dieser Regeln der Fall war!

b) Wie viele Umformungsschritte wurden von dem Automaten insgesamt durchgeführt, falls er eine Zeichenreihe aus genau 5 Zeichen ausgibt?

c) Geben Sie alle Zeichenreihen aus 5 Zeichen an, die vom Automaten ausgegeben werden könnten!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Eine solche Möglichkeit besteht z. B. darin, erst (1) und dann nur noch Schritte der Art (2) ausführen zu lassen. Dies ist nämlich stets fortsetzbar, da im Ergebnis von (2) stets wieder ein Zeichen A auftritt. Hierbei wird also (1) einmal und (2) neunmal angewendet.

Möglichkeiten sind z. B.:

Anzahl der Anwendungen der Regel				Anzahl der Anwendungen der Regel			
(1)	(2)	(3)	(4)	(1)	(2)	(3)	(4)
1	8	0	1	1	8	1	0
1	7	0	2	1	7	1	1
1	6	0	3	1	6	1	2
1	5	0	4	1	5	1	3

b) Bei den Schritten (1), (3), (4) bleibt die Anzahl der Zeichen unverändert, bei (2) vergrößert sie sich um genau 2. Daher kann nur dann die Anzahl 5 entstehen, wen nach dem zwangsläufigen Anfangsschritt (1), der S durch A ersetzt, unter den dann noch möglichen Schritten (2), (3), (4) genau 2 Schritte der Art (2) vorkommen. Die Anzahl der großen Buchstaben wird bei (2) um genau 1 größer, bei (3) und (4) um je genau 1 kleiner.

Da eine Zeichenreihe genau dann vom Automaten ausgegeben wird, wenn sie keinen großen Buchstaben enthält, folgt daraus:

Wenn der Automat eine Zeichenreihe aus genau 5 Zeichen ausgibt, so ist dies nur möglich nach Umformungsserien, in denen die Anzahl der Schritte (3) oder (4) genau 3 und somit die Anzahl der insgesamt ausgeführten Schritte genau 6 beträgt.

c) Die in b) genannten Umformungen sind nur in folgender Weise möglich: Da die Anzahl der Zeichen A bei Schritten der Art (2) und (4) gleich bleibt und sich bei (3) um 1 verringert, tritt der Schritt (3) genau einmal auf, und zwar erst, nachdem beide Schritte der Art (2) ausgeführt sind.

Da ferner die Anzahl der Zeichen B bei Schritten der Art (2) jeweils um 1 zunimmt, bei (3) gleich bleibt und bei (4) um je 1 abnimmt, können zu jedem Zeitpunkt höchstens so viele Schritte (4) ausgeführt werden, wie bereits Schritte (2) vorangegangen waren. Daher verbleiben genau die folgenden Möglichkeiten, die Schritte anzuordnen:

$$\begin{aligned} I: &\quad (1),(2),(2),(3),(4),(4)\\ II: &\quad (1),(2),(2),(4),(3),(4)\\ III: &\quad (1),(2),(2),(4),(4),(3)\\ IV: &\quad (1),(2),(4),(2),(3),(4)\\ V: &\quad (1),(2),(4),(2),(4),(3) \end{aligned}$$

Bei den Möglichkeiten I, II, III entsteht in den ersten drei Schritten die Zeichenreihe $aaABB$, danach wird die Teilreihe ABB durch abb ersetzt.

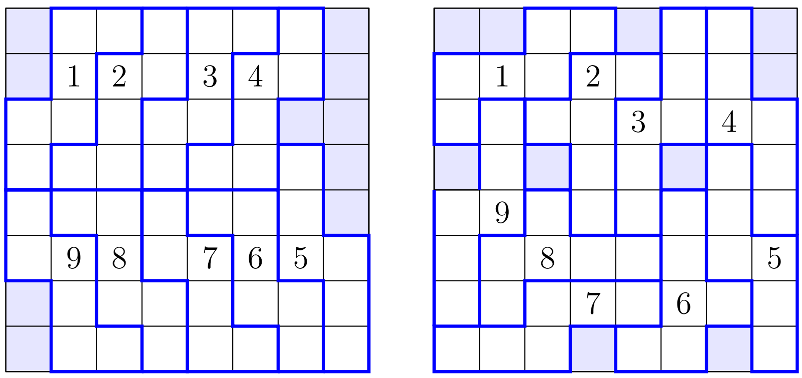
Bei den Möglichkeiten IV und V entsteht in den ersten vier Schritten die Zeichenreihe *aaABb*, danach wir die Teilreihe *AB* durch *ab* ersetzt. Somit gibt es genau eine Zeichenreihe aus 5 Zeichen, die vom Automaten ausgegeben werden kann, nämlich die Reihe *aaabb*.

Aufgabe 180911:
Aus einer quadratischen Papptafel von 8 dm Seitenlänge sollen 9 Würfelnetze, die nicht kongruent zueinander zu sein brauchen, ausgeschnitten werden. Aus jedem dieser Würfelnetze soll ein Würfel von 1 dm^3 Rauminhalt gefaltet werden können.

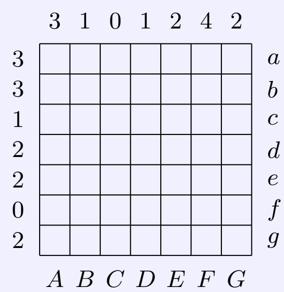
Zeigen Sie an einem Beispiel, dass es möglich ist, 9 derartige Netze auf einer solchen Tafel einzuzeichnen!

Es genügt eine solche Zeichnung; Beschreibung und Begründung werden nicht verlangt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angaben von zwei verschiedenen Möglichkeiten:



Aufgabe 190912:
Von den 49 Feldern in der Abbildung sollen einige angekreuzt werden. Je zwei angekreuzte Felder dürfen dabei höchstens einen Eckpunkt gemeinsam haben. In jeder Zeile und in jeder Spalte der Abbildung sollen genau so viele Felder angekreuzt werden, wie durch die am Rande stehenden Zahlen jeweils angegeben ist.



Ermitteln Sie für die anzukreuzenden Felder alle diejenigen Verteilungen, die diesen Forderungen entsprechen!

(Benutzen Sie zur Beschreibung des Lösungsweges die angegebenen Buchstaben! So erhält z. B. das erste Feld links oben die Bezeichnung aA.)

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Hinweis: In den Abbildungen 1 und 2 sind diejenigen Felder, von denen gesichert ist, dass die frei bleiben mit einem Kreis gekennzeichnet.

	3	1	0	1	2	4	2	
3			○		○	×	○	a
3			○	○		○		b
1	○	○	○	○	○	×	○	c
2			○			○		d
2			○		○	×	○	e
0	○	○	○	○	○	○	○	f
2			○		○	×	○	g
1)	A	B	C	D	E	F	G	

	3	1	0	1	2	4	2	
3			○	×	○	×	○	a
3			○	○	×	○	×	b
1	○	○	○	○	○	×	○	c
2	○	○	○	○	×	○	×	d
2	×	○	○	○	○	×	○	e
0	○	○	○	○	○	○	○	f
2	×	○	○	○	○	×	○	g
2)	A	B	C	D	E	F	G	

(1) Da in Spalte F genau 4 Felder anzukreuzen sind, können das nur folgende Felder sein: aF, cF, eF, gF.

(2) Als Nachbarfelder bleiben somit frei: $aE, aG, cE, cG, eE, eG, gE, gG, bF, dF$ und fF.

(3) Da in Spalte C und in Zeile f keine Felder anzukreuzen sind, bleiben frei:
$aC, bC, cC, dC, eC, fC, gC, fA, fB, fD, fE$ und fG.

(4) Da in Zeile c bereit ein Feld angekreuzt ist, bleiben die übrigen frei, also (siehe Abbildung 1): cA, cB und cD.

(5) In Spalte E sind nur noch zwei Felder frei; demnach sind anzukreuzen: bE und dE.

(6) Als Nachbarfelder dazu bleiben frei: bD und dD.

(7) In Spalte G sind nur noch zwei Felder frei, es sind demnach anzukreuzen: bG und dG.

(8) In Zeile a sind nich zwei Felder anzukreuzen, eines davon muss sein: ad.

(9) In Spalte D ist bereits ein Feld angekreuzt, also bleiben frei: eD und gD.

(10) In Zeile d sind zwei Felder angekreuzt, die restlichen bleiben frei, d. h.: dA und dB.

(11) In Spalte A sind anzukreuzen: gA und eA damit bleiben als Nachbarfelder frei (siehe Abbildung 2): gB und eB.

(12) Für die übriggebliebenen Felder bestehen genau zwei Möglichkeiten:
Es werden angekreuzt aA und bB oder bA und aB. Damit gibt es genau zwei Verteilungen der geforderten Art.

	3	1	0	1	2	4	2	
3	×			×		×		a
3		×			×		×	b
1						×		c
2					×		×	d
2	×					×		e
0								f
2	×					×		g
1)	A	B	C	D	E	F	G	

	3	1	0	1	2	4	2	
3		×		×		×		a
3	×				×		×	b
1						×		c
2					×		×	d
2	×					×		e
0								f
2	×					×		g
2)	A	B	C	D	E	F	G	

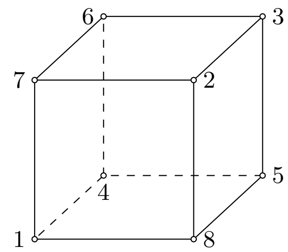
Aufgabe 190913:
Den Ecken eines ebenflächig begrenzten Körpers sollen Zahlen zugeordnet werden. Ist n die Anzahl der Ecken des Körpers, so soll dabei jeder Ecke genau eine der Zahlen $1, ..., n$ zugeordnet werden. Ferner soll erreicht werden: Wenn zu jeder Seitenfläche des Körpers die Summe derjenigen Zahlen gebildet wird, die den Ecken dieser Seitenfläche zugeordnet wurden, so erhält man für jede Seitenfläche des Körpers die gleiche Summe.

Beweisen Sie, dass eine solche Zuordnung möglich ist, wenn der Körper ein Würfel ist, dagegen nicht beim Tetraeder und nicht beim Oktaeder!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Bei Tetraeder gehört jede Ecke genau drei Seitenflächen an, beim Oktaeder genau vier. Wenn es für diese Körper eine Zuordnung der genannten Art gäbe, so müsste folglich beim Tetraeder das Dreifach, beim Oktaeder das Vierfache der Summe aller vorkommenden Zahlen $1, ..., n$ durch die Anzahl der Seitenflächen teilbar sein.

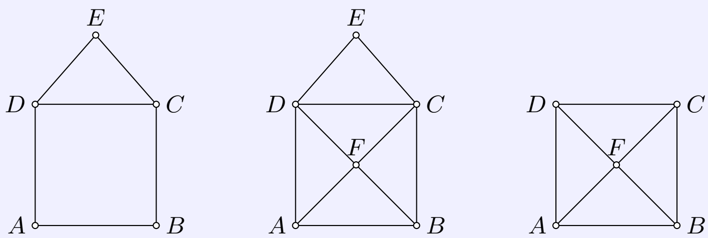
Für das Tetraeder ist diese Bedingung nicht erfüllt; denn die Anzahl der Ecken ist $n = 4$, die Summe der Zahlen von 1 bis 4 ist 10, und das Dreifache dieser Summe ist nicht durch die Anzahl 4 der Seitenflächen teilbar.

Auch für das Oktaeder ist diese Bedingung nicht erfüllt, denn die Anzahl der Ecken ist $n = 6$, die Summe der Zahlen von 1 bis 6 ist 21, und das Vierfache dieser Summe ist nicht durch die Anzahl 8 der Seitenflächen teilbar.



Damit sind die für das Tetraeder und Oktaeder verlangten Beweise geführt. Die Aussage, dass für den Würfel eine Zuordnung der genannten Art möglich ist, kann durch Angabe eines Beispiels bewiesen werden, wie es etwa die Abbildung zeigt.

Aufgabe 200911:
Entscheiden Sie für jede der drei abgebildeten Figuren a, b, c, ob sie in einem Zuge gezeichnet werden kann!



(a) (b) (c)

„In einem Zuge“ soll bedeuten, dass beim Zeichnen jede Strecke genau einmal durchlaufen wird, keine anderen Linien als die in der Figur enthaltenen gezeichnet werden und der Bleistift während des Zeichnens nicht abgesetzt werden muss.

Ist ein solches Zeichnen möglich, so genügt als Lösung die Angabe einer Reihenfolge, in der die mit Buchstaben bezeichneten Punkte nacheinander erreicht werden können, um die gestellte Bedingung zu erfüllen. Anderenfalls ist die Nichtausführbarkeit zu begründen.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Figur in Abbildung (a) kann in einem Zuge gezeichnet werden, z. B. D, A, B, C, D, E, C.

Die Figur in Abbildung (b) kann in einem Zuge gezeichnet werden, z. B. A, F, C, B, F, D, E, C, D, A, B

Die Figur in Abbildung (c) kann nicht in einem Zuge gezeichnet werden.

Begründung: Um die Bedingung zu erfüllen, müsste es für jeden mit einem Buchstaben bezeichneten Punkt zu jeder Strecke, die zu ihm hinführt auch einen solche geben, die von ihm wegführt, damit man diesen Punkt, den man erreicht hat, auch wieder verlassen kann. Ausgenommen davon wäre lediglich Anfangs- und Endpunkt der Zeichnung.

Das heißt mit Ausnahme höchstens zweier Punkte müsste für jeden bezeichneten Punkt gelten, dass die Anzahl der in ihm zusammentreffenden Linien gerade ist. Diese Bedingung ist jedoch nicht erfüllt, da in den Punkten A, B, C und D jeweils 3 Linien zusammentreffen.

Aufgabe 200912:
Zwei Personen, A und B, spielen ein Würfelspiel nach folgenden Regeln:

Zunächst wird eine ganze Zahl Z vereinbart. Dann würfelt jeder mit 4 Würfeln, von denen jeder, wie üblich, die Augenzahlen 1 bis 6 trägt. Gelingt es einem Spieler, unter Benutzung der von ihm mit den vier Würfeln gewürfelten Zahlen (wobei die Zahl auf jedem Würfel genau einmal zu benutzen ist) die vereinbarte Zahl Z zu bilden, so erhält er einen Gewinnpunkt.

Dabei ist gestattet, die vier Zahlen unabhängig von ihrer Reihenfolge durch die Grundrechenarten zu verknüpfen, die Potenzschreibweise zu benutzen, in beliebiger Weise Klammern zu setzen und auch, die auftretenden Zahlen als Ziffern benutzend, aus ihnen mehrstellige Zahlen zu bilden.

Als bei einer Durchführung dieses Spieles die vereinbarte Zahl $Z = 12$ lautete, ergab sich:

Die von A gewürfelten Zahlen waren vier unmittelbar aufeinanderfolgende natürliche Zahlen. Die von B gewürfelten Zahlen waren alle vier gleich ein und derselben natürlichen Zahl.

Zeigen Sie, dass für alle möglichen Würfe, die diesen Bedingungen entsprechen, sowohl der Spieler A als auch der Spieler B einen Gewinnpunkt erreichen konnte!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
A hatte einen der Würfe 1, 2, 3, 4; 2, 3, 4, 5; 3, 4, 5, 6;

B hatte einen der Würfe 1, 1, 1, 1; 2, 2, 2, 2; ...; 6, 6, 6, 6 erhalten. Die Zahl $Z = 12$ kann aus diesen Würfen in der verlangten Weise z. B. folgendermaßen gebildet werden:

$$\begin{array}{l|l|l} 1 \cdot 2^3 + 4 = 12 & 2 \cdot (4 + 5 - 3) = 12 & 6 \cdot (3 + 4 - 5) = 12 \\ 1 \cdot 11 + 1 = 12 & 2 \cdot (2 + 2 + 2) = 12 & 3 + 3 + 3 + 3 = 12 \\ 4 \cdot (4 - 4 : 4) = 12 & (55 + 5) : 5 = 12 & 6 + 6 + 6 - 6 = 12 \end{array}$$

Aufgabe 210911:
Während einer Fußballmeisterschaft spielten im Halbfinale die vier Mannschaften A, B, C und D. Über den Ausgang der Spiele und damit die Ermittlung der beiden Mannschaften für das Endspiel machten Kenner der vier Mannschaften folgende Voraussagen:

(1) Das Endspiel wird lauten: B gegen C.

(2) Das Endspiel wird nicht lauten: A gegen B.

(3) Das Endspiel wird lauten: C gegen D.

(4) Wenn A das Endspiel erreicht, dann erreicht B nicht das Endspiel.

(5) Das Endspiel wird von zwei der Mannschaften B, C, D bestritten.

Nach dem Halbfinale stellte sich heraus, dass genau zwei der Voraussagen (1) bis (5) falsch waren.

Zeigen Sie, dass es aufgrund dieser Angaben möglich ist, die beiden Mannschaften zu ermitteln, die das Endspiel erreichten!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wäre (2) falsch, so hätte das Endspiel A gegen B gelautet, und dann wären auch alle Aussagen (1), (3), (4), (5) falsch, in Widerspruch dazu, dass nur zwei falsche Aussagen auftreten.

Daher ist (2) wahr. Daraus folgt, dass auch (4) wahr ist; denn aus der Voraussetzung, A werde das Endspiel erreichen, ergibt sich wegen der Wahrheit von (2) die Schlussfolgerung, dass B nicht das Endspiel erreichte.

Wäre (5) falsch, so wäre auch (1) und (3) falsch, im Widerspruch dazu, dass genau zwei Aussagen (1) bis (5) falsch sind. Also ist (5) wahr.

Da (2), (4) und (5) wahr sind, sind genau die beiden Aussagen (1) und (3) falsch. Hiernach verbleibt von den Möglichkeiten, (5) zu erfüllen, genau die, dass das Endspiel B gegen D lautete.

Aufgabe 210912:
Herr Schulze trifft nach langer Zeit Herrn Lehmann und lädt ihn zu sich nach Hause ein. Unterwegs erzählt er Herrn Lehmann, dass er Vater von drei Kindern ist. Herr Lehmann möchte wissen, wie alt diese sind; ihm genügen Angaben in vollen Lebensjahren.

Herr Schulze antwortet: „Das Produkt der drei Altersangaben beträgt 72. Die Summe der drei Altersangaben ist meine Hausnummer. Wir sind gerade an unserem Haus angekommen; Sie sehen meine Nummer.“ Darauf erwidert Herr Lehmann: „Aus diesen Angaben kann man aber die drei Altersangaben nicht eindeutig ermitteln.“ „Das stimmt“, meint Herr Schulze, „aber irgendwann zwischen der Geburt des zweiten und des dritten Kindes hat der Bau dieses Hauses stattgefunden. Ein Jahr und einen Tag lang haben wir an dem Haus gebaut.“ „Vielen Dank! Nun kann man die Altersangaben eindeutig ermitteln“, beschließt Herr Lehmann das Gespräch.

Untersuchen Sie, ob es eine Zusammenstellung von drei Altersangaben gibt, für die alle Aussagen dieses Gespräches zutreffen! Untersuchen Sie, ob es nur eine solche Zusammenstellung, gibt! Wenn das der Fall ist, ermitteln Sie diese!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Aussage über das Produkt der drei Altersangaben trifft genau für die folgenden Zusammenstellungen zu:

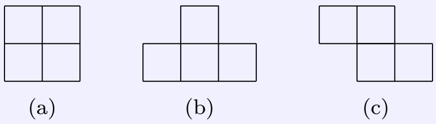
1. Kind	72	36	24	18	12	9	18	12	9	**6**	8	6
2. Kind	1	2	3	4	6	8	2	3	4	**6**	3	4
3. Kind	1	1	1	1	1	1	2	2	2	**2**	3	3

Herrn Lehrmanns Aussage „Aus diesen Angaben kann man aber die drei Altersangaben nicht eindeutig ermitteln“ trifft hiernach genau dann zu, wenn die Hausnummer 14 beträgt. Die nächste Aussage von Herrn Schulte trifft genau dann zu, wenn das 3. Kind um mindestens ein Jahr jünger ist als das 2. Kind.

Daher trifft die abschließende Aussage von Herrn Lehmann genau dann zu, wenn die Altersangaben 6, 6 und 2 lauten.

Daher ist gezeigt: Es gibt eine Zusammenstellung der drei Altersangaben, für die alle Aussagen des Gesprächs zutreffen; es gibt auch nur eine solche Zusammenstellung; sie lautet 6, 6 und 2.

Aufgabe 220912:
Ist n eine natürliche Zahl mit $n \geq 2$, so bezeichne F_n eine quadratische Fläche, die wie ein Schachbrett in n gleich große quadratische Felder unterteilt ist. Ferner sei von Papptäfelchen der abgebildeten Formen (a), (b), (c) jeweils eine beliebige Anzahl vorhanden.



(Jedes dieser Täfelchen besteht aus vier gleich großen quadratischen Feldern, deren jedes den n^2 Feldern von F_n kongruent ist.)

Die Fläche F_n soll mit derartigen Täfelchen lückenlos bedeckt werden, und zwar soll dabei von jeder der Sorten (a), (b), (c) mindestens ein Täfelchen verwendet werden. Außerdem soll kein Feld von F_n mehrfach überdeckt werden und kein Täfelchen über F_n hinausragen.

a) Beweisen Sie, dass diese Bedingungen für alle ungeraden n und für alle $n \leq 4$ nicht erfüllbar sind!

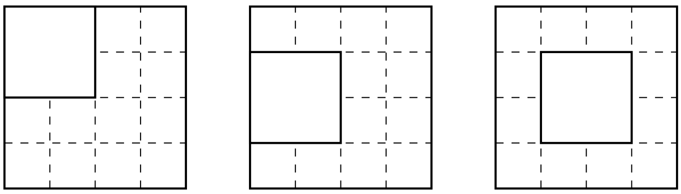
b) Zeigen Sie, dass die Bedingungen für $n = 6$ erfüllbar sind!

c) Untersuchen Sie, für welche geraden Zahlen $n \geq 8$ die Bedingungen erfüllbar sind!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Für ungerades n ist die Anzahl n^2 der Felder von F_n ungerade, während bei beliebiger Zusammenstellung von Täfelchen stets eine durch 4 teilbare, also gerade Anzahl von Feldern entsteht. Daher sind die Bedingungen für ungerades n nicht erfüllbar.

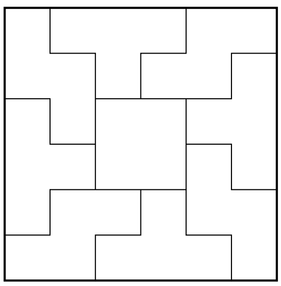
Kommt in einer Fläche F_n von jeder Sorte (a), (b), (c) mindestens ein Täfelchen vor, so muss $n^2 \geq 12$ sein. Also sind die Bedingungen für $n \leq 3$ nicht erfüllbar.

Für $n = 4$ gilt: Wären die Bedingungen erfüllbar, so käme auch ein Täfelchen der Form (a) vor. Hierfür gäbe es o. B. d. A. nur die drei angegebenen Möglichkeiten in der Abbildung:

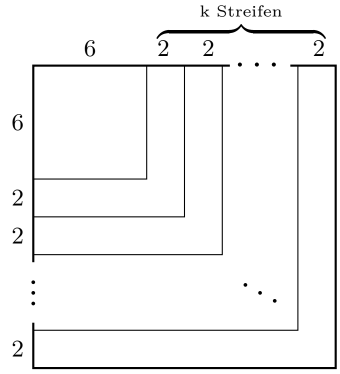


In allen drei Fällen kann die verbleibende Restfläche nicht so in Täfelchen der Formen (a), (b) oder (c) zerlegt werden, dass dabei die Formen (b) und (c) auch vorkommen. Daher sind die Bedingungen für $n = 4$ ebenfalls nicht erfüllbar.

b) Die Abbildung zeigt eine Belegung von F_6 die alle Bedingungen erfüllt.



c) Jede gerade Zahl $n \geq 8$ lässt sich in der Gestalt $n = 6 + 2k$ ($k = 1,2,3,...$) darstellen. Hiernach kann die Fläche F_n in eine 6×6 Feld und k Streifen der Breite 2 aufgeteilt werden. (siehe Abbildung)

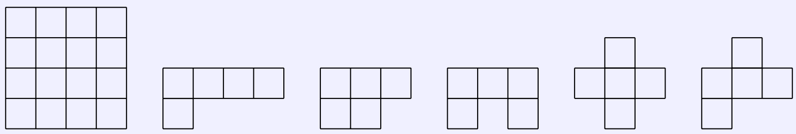


Diese lassen sich durch Täfelchen der Form (a) überdecken. Daher und nach b) kann insgesamt F_n in der geforderten Weise überdeckt werden.

Aufgabe 240911:

a) Ein quadratisches Feld aus 25 Einheitsquadraten (Bild a) soll so zerlegt werden, dass jedes Teilstück zu einer der (aus jeweils fünf Einheitsquadraten bestehenden) Figuren in Bild b bis f kongruent ist und dass dabei auch jede dieser Figuren mindestens einmal vorkommt. Geben Sie eine derartige Zerlegung an!

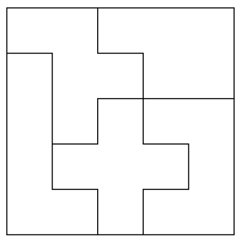
b) Ermitteln Sie alle diejenigen natürlichen Zahlen $n > 0$, für die eine solche Zerlegung eines $n \times n$-Feldes möglich ist!



(a) (b) (c) (d) (e) (f)

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

a) Ein Beispiel einer gesuchten Zerlegung zeigt die Abbildung.



b) (I) Wenn für eine natürliche Zahl $n > 0$ eine solche Zerlegung des quadratischen Feldes möglich ist und wenn dabei k die Anzahl der entstehenden Teilstücke ist, so besteht das Feld aus $5k$ Einheitsquadraten, also gilt $n^2 = 5k$. Daher ist n^2 durch 5 teilbar und folglich, weil 5 Primzahl ist, auch n durch 5 teilbar.

(II) Wenn n durch 5 teilbar ist, so kann man die Seitenlänge des quadratischen Feldes in Teilstrecken zerlegen, deren jede eine Länge von 5 Einheitsstrecken hat; somit kann man dass das quadratische Feld in quadratische Teilfelder einer Seitenlänge von jeweils 5 Einheitsstrecken zerlegen.

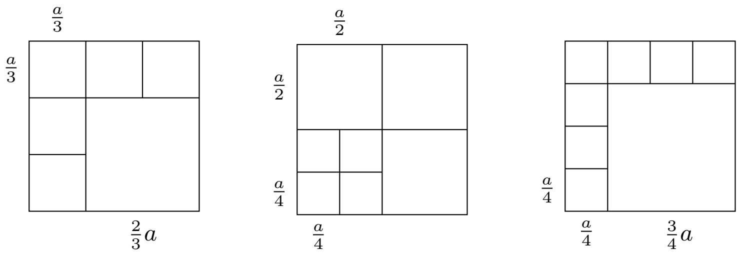
Jedes dieser Teilfelder lässt sich nach (a) auf die geforderte Weise zerlegen; damit existiert auch für das gesamte Feld eine derartige Zerlegung.

Mit (I) und (I) ist bewiesen: Die gesuchten Zahlen $n > 0$ sind genau alle diejenigen, die durch 5 teilbar sind.

Aufgabe 250913:
Man beweise:

Für jede natürliche Zahl n mit $n \geq 6$ ist es möglich, eine Quadratfläche in n (nicht notwendig kongruente) Teilquadratflächen zu zerlegen.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Eine Zerlegung einer Quadratfläche in 6, 7 bzw. 8 Teilquadratflächen ist möglich, wie die Abbildung zeigt.

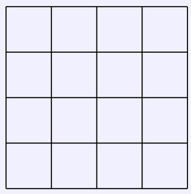


Da man durch Weiterzerlegen einer Teilquadratfläche in 4 kongruente neue Teilquadratflächen die Anzahl der Teilquadratflächen jeweils um 3 erhöhen kann, erhält man so fortlaufend die Zerlegung einer Quadratfläche in n Teilquadratflächen mit

$$n = 6 + 3 = 9, \qquad n = 7 + 3 = 10, \qquad n = 8 + 3 = 11, \qquad n = 9 + 3 = 12, \qquad \text{usw.}$$

Damit ist der verlangte Beweis geführt.

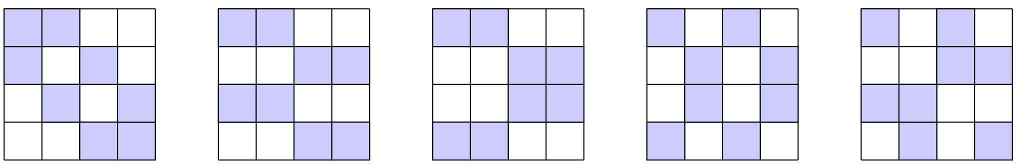
Aufgabe 260911:



In dem abgebildeten Quadrat mit 4×4 Teilquadraten sollen 8 von diesen 16 Teilquadraten so gekennzeichnet werden, dass in jeder Zeile, in jeder Spalte und in den beiden Diagonalen genau zwei Teilquadrate gekennzeichnet sind.

Geben Sie fünf voneinander verschiedene Lösungen der Aufgaben an, d. h. Lösungen, von denen sich keine zwei durch Spiegelung oder Drehung ineinander überführen lassen! Eine Begründung wird nicht verlangt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Abbildung zeigt fünf voneinander verschiedene Lösungen der Aufgabe. (Man kann auch beweisen, dass es keine von diesen verschiedene Lösung gibt)



Aufgabe 280914:
Drei Werkstücke W_1, W_2, W_3 durchlaufen eine Taktstraße mit vier Bearbeitungsmaschinen M_1, M_2, M_3, M_4. Dabei muss jedes Werkstück die Maschinen in der Reihenfolge M_1, M_2, M_3, M_4 durchlaufen, und an jeder Maschine soll die Reihenfolge der drei Werkstücke dieselbe sein.

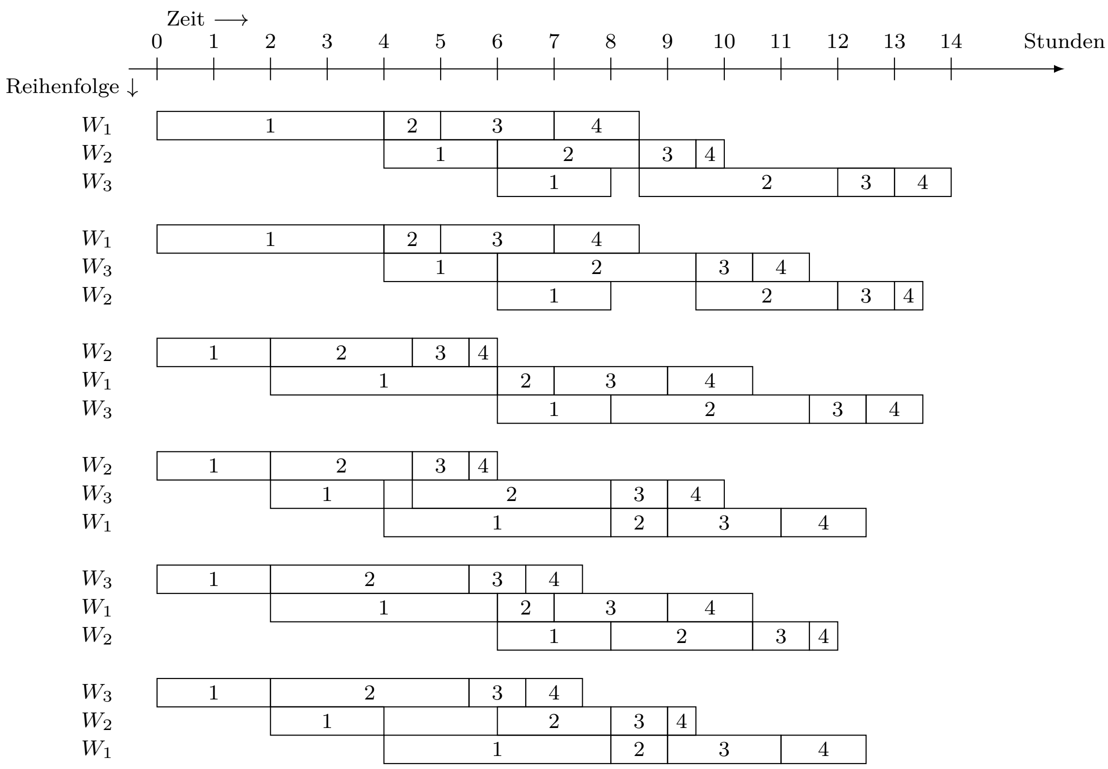
Die Bearbeitungszeiten der Werkstücke auf den einzelnen Maschinen sind (in Stunden) in der folgenden Tabelle angegeben:

	M_1	M_2	M_3	M_4
W_1	4	1	2	1,5
W_2	2	2,5	1	0,5
W_3	2	3,5	1	1

Es können niemals zwei Werkstücke gleichzeitig auf derselben Maschine bearbeitet werden. Die Zeiten zum Wechseln der Werkstücke an den Maschinen seien so klein, dass sie vernachlässigt werden können.

Geben Sie eine Reihenfolge der drei Werkstücke für das Durchlaufen der Taktstraße so an, dass die Gesamtzeit (das ist die Zeit vom Eintritt des zuerst eingegebenen Werkstücks in die Maschine M1 bis zum Austritt des zuletzt bearbeiteten Werkstücks aus der Maschine M4) so klein wie möglich ist! Zeigen Sie, dass die von Ihnen angegebene Reihenfolge mit ihrer Gesamtzeit die jeder anderen Reihenfolge unterbietet!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



(Maschinenbezeichnung kurz 1,2,3,4 statt M_1, M_2, M_3, M_4)

In den Darstellungen des zeitlichen Ablaufs wird für jede der sechs möglichen Reihenfolgen dreier Werkstücke die Gesamtzeit ermittelt, die sich ergibt, wenn man in jede Maschine das jeweils nächste Werkstück (der vorgesehenen Reihenfolge) möglichst bald einführt.

Beim Vergleich dieser Darstellungen ergibt sich:

Die Reihenfolge W_3, W_1, W_2 unterbietet mit ihrer Gesamtzeit die jeder anderen Reihenfolge.

Hinweise:

Möglich ist auch ein sehr argumentierendes Vorgehen. Beispielsweise kann man zuerst feststellen, für welche Reihenfolge sich bei der Berechnung der

- Summe der Zeiten des ersten und des zweiten Werkstücks in M_1 plus Summe der Zeiten des dritten Werkstücks in M_1,M_2,M_3 und M_4 (1)

ein möglichst kleiner Wert ergibt. Statt der Summe (1) kann man einfacher

- die Summe der Zeiten des dritten Werkstücks in M_2, M_3 und M_4 (2)

heranziehen. Nach der Tabelle im Aufgabentext hat diese Summe genau für W_2 als drittes Werkstück den kleinsten Wert (nämlich 4; dagegen für W_1 den Wert 4,5 und für W_3 den Wert 5,5). Dann kann man untersuchen, ob bei einer der Reihenfolgen mit W_2 als drittem Werkstück gilt, dass

- W_2 die Maschinen M_1, M_2, M_3, M_4 ohne Wartezeiten durchlaufen kann. (3)

Ist das der Fall, so folgt: Diese Reihenfolge unterbietet mit ihrer Gesamtzeit die Gesamtzeiten aller Reihenfolgen, die (1) bzw. (2) nicht so klein wie möglich machen.

(Man beachte: Ohne die Aussage (3) wäre ein solcher Schluss nicht gesichert!) Schließlich ist dann noch eine Reihenfolge, die (3) erfüllt, mit der anderen, in der auch W_2 als drittes Werkstück läuft, zu vergleichen. Die Untersuchung auf (3) sowie der eben genannte Vergleich kann z. B. durch die zwei obenstehenden Darstellungen zu W_1,W_3,W_2 und W_3,W_1,W_2 erfolgen. Die Überlegung zu (1), (2) hat also vier solche Darstellungen eingespart.

Aufgabe 290913:
Bei einem Abzählspiel stehen 11 Kinder in einem Kreis. Eines dieser Kinder sagt den Abzählvers auf; dabei wird im Uhrzeigersinn bei jeder Silbe ein Kind weiter gezählt. Auch der Spieler, der den Abzählvers aufsagt, wird in das Abzählen einbezogen. Der Abzählvers hat 15 Silben. Das Kind, auf das die letzte Silbe trifft, verlässt den Kreis; beim nachfolgenden Kind wird das Abzählen wieder mit dem Anfang des Abzählverses fortgesetzt. Dieses Abzählen und Ausscheiden erfolgt so lange, bis nur noch ein Spieler im Kreis ist; dieser Spieler hat gewonnen.
a) Bei welchem Kind muss der abzählende Spieler beginnen, wenn er selbst gewinnen will? (Um die Antwort zu formulieren, nummeriere man die Kinder und gebe etwa dem abzählenden Spieler die Nummer 1.)
b) Falls Sie die Möglichkeit haben, an einem (Klein-)Computer zu arbeiten, sollten Sie ein Programm schreiben, mit dem sich Aufgabe a) für Abzählspiele mit k Kindern und einem Abzählvers aus s Silben lösen lässt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) I. Man kann zunächst zur Vereinfachung die Silbenzahl durch jeweils möglichst kleine positive Werte ersetzen. Wegen $15 = 1 \cdot 11 + 4$ wird nämlich beim Anzählen die Runde der Kinder erst 1 mal ganz durchlaufen, und danach verbleiben nur noch 4 Silben. Auf diese Weise folgt: Wenn im Kreis jeweils nur noch

$$11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2$$

Kinder stehen, so kann wegen

$$15 = 1\cdot 11+4 = 1\cdot 10+5 = 1\cdot 9+6 = 1\cdot 8+7 = 2\cdot 7+1 = 2\cdot 6+3 = 2\cdot 5+5 = 3\cdot 4+3 = 4\cdot 3+3 = 7\cdot 2+1$$

die Silbenzahl ersetzt werden durch

$$4, 5, 6, 7, 1, 3, 5, 3, 3, 1$$

II. Nun kann man (mit der Vereinfachung I. oder ohne sie) das Anzählen mit einem bei Kind 1 beginnenden „Probespiel“ verfolgen:

Abzählvers											
1. Mal:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2. Mal:	1	2	3		5	6	7	8	9	10	11
3. Mal:	1	2	3		5	6	7	8		10	11
4. Mal:	1	2	3			6	7	8		10	11
5. Mal:	1		3			6	7	8		10	11
6. Mal:	1					6	7	8		10	11
7. Mal:	1					6	7			10	11
8. Mal:	1					6				10	11
9. Mal:						6				10	11
10. Mal:						6				10	
										10	

III. Es bleibt also dasjenige Kind übrig, das ausgehend von Kind 1 durch Weiterzählen um 9 (in der ursprünglichen Aufstellung) zu erreichen wäre. Der Spielbeginn, der zum gewünschten Übrigbleiben von Kind 1 führt, wird daher gefunden, indem man in der ursprünglichen Aufstellung von Kind 1 an um 9 zurückzählt. Damit findet man:

Wenn Kind 1 gewinnen soll, so muss das Auszählen bei Kind 3 beginnen.

b) Die Aufgabe wird z. B. durch folgendes BASIC-Programm gelöst:

```
100 INPUT "Kinderzahl"; K
110 INPUT "Silbenzahl"; S
120 DIM M(K)
130 FOR N=K TO 2 STEP -1
140   T = S - N * INT(S/N)
150   IF T = 0 THEN T = N
160   FOR I = 1 TO T
170    GOSUB 300
180   NEXT I
190   M(A) = 1
200 NEXT N
210 GOSUB 300
220 B = 2 - A
230 IF B < 1 THEN B = B+K
240 PRINT "Beginne bei Kind"; B; "!"
250 END
300 REM ABZAEHLEN
310 A = A+1
320 IF A > K THEN A = 1
330 IF M(A)= 1 THEN 310
340 RETURN
```

Bedeutung der Variablen: K Anzahl der Kinder, S Anzahl der Silben, A Nummer des beim Abzählen erreichten Kindes, $M(A)$ Marke 0 oder 1: Kind A ist noch im Spiel oder ausgeschieden, N Anzahl der noch im Spiel befindlichen Kinder, T Ersatzwert für die Silbenzahl, I Zählschritt

Programmteile:

100 bis 120 Eingeben, Speicher reservieren,

300 bis 340 Unterprogramm „Weiterzählen zum nächsten noch im Spiel befindlichen Kind"

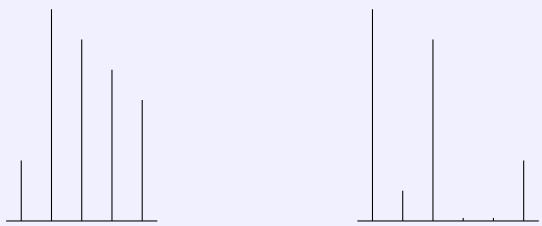
130 bis 210 „Probespiel„:

140 bis 150 Division von S durch N mit Rest T ergibt die vereinfachte Silbenzahl T; nur ist 0 durch N zu ersetzen

160 bis 210 Nach T Zählschritten scheidet das erreichte Kind aus. Am Ende des „Probespieles" noch ein Zählschritt bis zum einzigen noch im Spiel befindlichen Kind.

220 bis 240 Ermittlung und Ausgabe der Antwort: Statt um $A-1$ vorwärts, ebenso viel zurückzählen bis $1-(A-1)=2-A$; dies ggf. um K korrigieren.

Aufgabe 300914:
Ansgar, Bernd und Christoph sehen auf einer Wanderung die Schornsteine eines Kraftwerkes aus genau südlicher Richtung und später aus genau westlicher Richtung. Ansgar fertigte jeweils eine maßstabsgerechte Skizze an. Dabei war in beiden Fällen niemals ein kleinerer Schornstein genau vor einem größeren zu sehen (siehe Abbildungen).
Während der Wanderung stellen die Freunde außerdem fest, dass das Kraftwerk genau sieben Schornsteine hat, von denen keine zwei die gleiche Höhe haben.



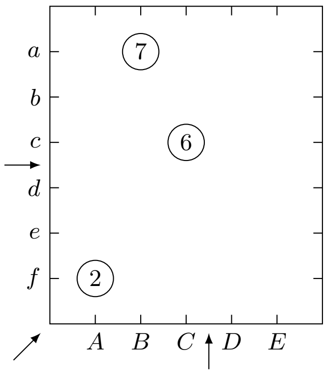
Blick aus südlicher Richtung — Blick aus westlicher Richtung

Bernd meint: „Aus südwestlicher Richtung waren nur vier Schornsteine zu sehen." Christoph korrigierte ihn: „Es waren genau fünf Schornsteine, einer von ihnen stand vor einem größeren."

Schließlich bemerken sie, dass der drittkleinste Schornstein aus keiner der drei Beobachtungsrichtungen (südlich, westlich, südwestlich) zu sehen war, sondern jeweils durch einen größeren verdeckt wurde.

Ermitteln Sie alle Anordnungen von Schornsteinen auf einem Gelände, die nach diesen Beobachtungen möglich sind! Dabei sei angenommen, dass die Korrektur von Bernds Aussage durch Christoph den Tatsachen entspricht.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Bezeichnen wir die Schornsteine - beim kleinsten beginnend - mit 1 bis 7 und die möglichen Standorte nach der Abbildung durch Buchstabenpaare (Aa) bis (Ef), so ergeben sich aus den Abbildungen der Aufgabenstellung sofort die Standorte für 2, 6, 7.



Ferner müssen 5 und 4 aus westlicher Richtung durch 6 oder 7 verdeckt sein; hiernach und wegen der linken Aufgabenabbildung kann 5 nur aus (Da) oder (Dc) und 4 nur auf (Ea) oder (Ec) stehen.

Da 3 aus westlicher Richtung von einem größeren Schornstein verdeckt ist, scheiden nun für 3 die waagerechten Reihen b, d, e, f aus. Da 3 auch aus südwestlicher Richtung verdeckt ist, scheiden (Ca), (Da), (Dc), (Ec) aus, also muss 3 auf (Ea) stehen.

Damit 3 dann auch aus südlicher Richtung verdeckt ist, folgt: 4 steht auf (Ec).

Hiernach sind aus südwestlicher Richtung bereits 7, 6, 2, 4 zu sehen, und für 5 scheidet (Da) aus, also steht 5 auf (Dc).

Nun folgt weiter:

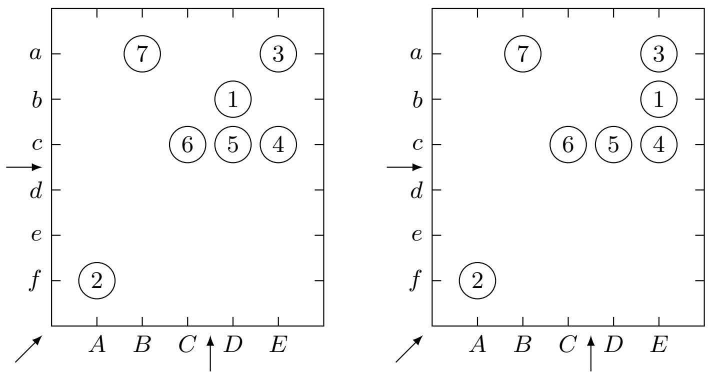
1 muss auf Linie b stehen.

Stünde 1 auf (Ab), so wären aus SW zwei kleinere vor einem größeren Schornstein zu sehen.

Stünde 1 auf (Bb), so wäre aus S ein kleinerer vor einem größeren Schornstein zu sehen.

Stünde 1 auf (Cb), so wären aus SW fünf Schornsteine nebeneinander zu sehen.

Steht 1 auf (Db) oder (Eb), so sind alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt. Also sind genau díe beiden Anordnungen der nachfolgenden Abbildung möglich.



Aufgabe 310913:
Beweisen Sie die folgende Aussage!

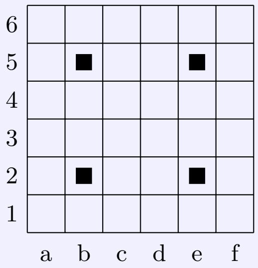
Wenn ein ebenflächig begrenzter Körper eine Oberfläche besitzt, die ausschließlich aus Dreiecksflächen zusammengesetzt ist, so kann deren Anzahl nicht ungerade sein.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Anzahl der Dreiecksflächen, aus denen die Oberfläche eines Körpers zusammengesetzt ist, sei f. Die Anzahl der Kanten, die an der Oberfläche dieses Körpers auftreten, sei k. Zählt man zu jeder der f Flächen ihre drei Kanten auf, so ergibt sich eine Aufzählung von insgesamt $3f$ Kanten. In dieser Aufzählung ist jede Kante genau zweimal erfasst, da an jeder Kante genau zwei der Dreiecksflächen zusammenstoßen. Also gilt:

$$3f = 2k$$

somit ist $f = 2(k - f)$ eine gerade Zahl, w. z. b. w.

Aufgabe 320913:



Auf einem 6×6-Felder-Brett (siehe Abbildung) sind die Felder b2, b5, e2 und e5 besetzt, die anderen Felder sind frei. Ein Springer des Schachspiels soll (in seiner Gangart) so geführt werden, dass er jedes freie Feld genau einmal erreicht.

a) Geben Sie einen solchen Weg an, der auf a1 beginnt und auf f1 endet!
b) Geben Sie einen solchen Weg an, der auf einem Feld endet, von dem aus das Anfangsfeld des Weges mit einem einzigen Springerzug erreichbar ist!

c) Besetzen Sie nun vier andere Felder des Brettes so, dass es für den Springer keinen Weg gibt, der jedes freie Feld genau einmal erreicht! Begründen Sie, dass es (bei Ihrer Wahl besetzter Felder) keinen solchen Weg gibt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

7	2	5
4	■	8
1	6	3

Ein Teilfeld wie in der Abbildung kann auf dem Weg 1 - 2 - ... - 8 oder umgekehrt 8 - 7 - ... - 1 oder auf einem durch Spiegelung oder Drehung entstehenden Weg durch laufen werden.

a) Daher ist z. B. das Durchlaufen der Teilfelder (links unten) - (links oben) - (rechts oben) - (rechts unten) so möglich, dass dabei jeweils in den Teilfeldern (a1 - ... - c2) - (b4 - ... - c6) - (d4 - ... - f5) - (e3 - ... - f1) auftreten.

b) Ebenso ist beispielsweise der Weg (c1 - ... - b3) - (a5 - ... - c4) - (d6 - ... - e4) - (f2 - ... - d3) - c1 möglich.

c) Denkt man sich die Felder wie auf einem Schachbrett abwechselnd schwarz und weiß gefärbt, so besteht jeder Weg eines Springer abwechselnd aus schwarzen und weißen Feldern. Von seinen 32 Feldern müssen also 16 schwarz und 16 weiß sein.

Besetzt man daher vier Felder so, dass nicht je 16 schwarze und weiße Felder frei bleiben, so existiert kein Weg der genannten Art. Beispielsweise wird dies erreicht, wenn a1, a3, c1, c3 als besetzte Felder gewählt werden.

Aufgabe 330911:
Christa und Jürgen spielen ein Spiel nach folgenden Regeln:

Die Spieler legen abwechselnd je einen Dominostein auf ein streifenförmiges Spielbrett aus 9 Feldern (siehe Skizze). Jeder Dominostein soll genau zwei Felder belegen; kein Feld darf mehrfach belegt werden. Das Spiel ist beendet, sobald ein Spieler nicht mehr legen kann; dieser Spieler hat dann verloren.

Das Spiel macht den beiden bald keinen Spaß mehr. Woran kann das liegen?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Der nachziehende Spieler kann stets den Gewinn erzwingen.

Setzt nämlich das anziehende Spieler seinen ersten Stein auf eines der Felderpaare (1,2), (2,3), (3,4), (4,5), so kann der Nachziehende auf (6,7) setzen, und danach hat jeder der beiden Spieler noch genau eine Setzmöglichkeit, was für den Anziehenden den Verlust zur Folge hat. Dasselbe gilt, wenn der Nachziehende eine der Anfangsmöglichkeiten (8,9), (7,8), (6,7), (5,6) mit (3,4) beantwortet.

Aufgabe 340911:
Frank und Felix denken sich das *kleinste Schach der Welt* aus:
- Das Spielfeld hat 2×4 Felder.
- Weiß spielt mit den Figuren König, Dame und zwei Bauern; Schwarz ebenso.
- Zu Anfang werden die Figuren wie in der Abbildung aufgestellt.
- Dann wird nach den Regeln des üblichen Schachspiels verfahren, sofern der Platz für ihre Anwendung ausreicht. (Erkundigen Sie sich nötigenfalls nach den Regeln!)

Frank stellt drei Behauptungen auf: Es sei möglich, so zu spielen, dass
a) das Spiel unentschieden endet,
b) Weiß gewinnt,
c) Schwarz gewinnt.

Beweisen Sie, dass die drei Behauptungen zutreffen.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Zum Beweis genügt es, je ein Beispiel einer Partie anzugeben:

a) **1.** a2:b3, Da4:b3, **2.** Da1:a3+, Db3:a3, **3.** b2:a3+, Kb4:a3 Remis, da nur noch die Könige auf dem Brett sind.

b) **1.** a2:b3, a3:b2, **2.** Da1:a4 matt.

c) **1.** a2:b3, Kb4:a3, **2.** b2:a3, Da4:a3, **3.** Da1-a2+, Da3:a2 matt.

II. Runde 2

Aufgabe V10925:
Wie kann man unter 9 gleichgroßen Kugeln, unter denen sich eine befindet, deren Gewicht mit dem der anderen nicht übereinstimmt, bei nur 3 Wägungen diese Kugel herausfinden und gleichzeitig feststellen, ob sie leichter oder schwerer als die anderen Kugeln ist?

Lösung von J. Lehmann und W. Unze:
1. Wägung: Vergleich (1) (2) (3) mit (4) (5) (6), bei Gleichheit
2. Wägung: Vergleich (7) und (8),
- bei Ungleichheit ist (7) leichter (schwerer) als (8) und mit 3. Wägung Vergleich (7) und (1) ist bei Gleichheit (8) schwerer (leichter) als alle anderen Kugeln. Bei Ungleichheit ist (7) leichter (schwerer) als alle anderen Kugeln.
- bei Gleichheit der 2. Wägung folgt 3. Wägung: (9) und (1). Hiermit ergibt sich, ob (9) leichter oder schwerer als (1) und damit aller anderen Kugeln ist.

1. Wägung: Vergleich (1) (2) (3) mit (4) (5) (6) und Ungleichheit, d. h. (1) (2) (3) leichter (schwerer) als (4) (5) (6)
2. Wägung: (1) (2) (3) und (7) (8) (9)
bei Gleichheit 3. Wägung (4) und (5), bei Gleichheit ist (6) schwerer (leichter) als die anderen Kugeln.
Bei Ungleichheit von (1) (2) (3) und (7) (8) (9) folgt 3. Wägung (1) und (2).
Bei Gleichheit ist (3) leichter (schwerer) als die anderen, bei Ungleichheit, d. h. (1) leichter oder schwerer als (2) ergibt sich, welche dieser beiden leichter oder schwerer als die anderen ist.

Aufgabe 010935:
In einem Abteil des Pannonia-Express sitzen sechs Fahrgäste, die in Berlin, Rostock, Schwerin, Erfurt, Cottbus und Suhl ihren Wohnsitz haben. Die Anfangsbuchstaben ihrer Namen sind A, B, C, D, E, und F (die Reihenfolge der Namen entspricht nicht der Reihenfolge der Wohnsitze). Aus Gesprächsfetzen entnehmen wir folgende Tatsachen:

(a) Zwei Fahrgäste, und zwar A und der Berliner, sind Ingenieure.
(b) Zwei Fahrgäste, und zwar E und der Rostocker, sind Dreher.
(c) Zwei Fahrgäste, und zwar C und der Schweriner, sind Kranführer.
(d) B und F sind aktive Sportler, der Schweriner treibt nicht Sport.
(e) Der Fahrgast aus Cottbus ist älter als A, der Fahrgast aus Suhl ist jünger als C.
(f) Zwei Fahrgäste, und zwar B und der Berliner, wollen in Prag aussteigen. Zwei Fahrgäste, und zwar C und der Cottbusser, wollen bis Budapest fahren.

Welches sind die Namen, Berufe und Wohnsitze der einzelnen Fahrgäste?

Lösung von Christiane Behns:

	A	B	C	D	E	F
Berlin	□		□		□	
Rostock	□		□		□	
Schwerin	□		□		□	
Cottbus						
Suhl						
Erfurt						

a-c)

	A	B	C	D	E	F
Berlin	□	□	□		□	
Rostock	□		□		□	
Schwerin	□	□	□		□	□
Cottbus	□		□			
Suhl			□			
Erfurt						

a-f)

	A	B	C	D	E	F
Berlin	□	□	□	□	□	☒
Rostock	□	□	☒	□	□	□
Schwerin	□	□	□	☒	□	□
Cottbus	□	□	□	□	☒	□
Suhl	☒	□	□	□	□	□
Erfurt	□	□	☒	□	□	□

Wegen d) und f) kommt B weder aus Schwerin noch aus Berlin. Da er aber einen der drei Berufe aus a)–c) haben muss, kommt er aus Rostock.
Wegen b) und c) kommt C weder aus Rostock, noch aus Berlin oder Schwerin, wegen e) nicht aus Suhl und wegen f) nicht aus Cottbus. Also muss er aus Erfurt kommen.
A kommt wegen a)–c) weder aus Berlin noch aus Rostock oder Schwerin. Wegen e) kommt er nicht aus Cottbus und aus Erfurt kommt bereits C. Also kommt A aus Suhl.
Da E wegen a)–c) weder aus Berlin noch aus Schwerin kommt und alle übrigen Städte bereits zugeordnet sind, kommt er aus Cottbus.
Da alle 6 Personen in verschiedenen Städten wohnen, ergibt sich nun leicht die folgende Aufstellung: A ist Ingenieur aus Suhl, B ist Dreher aus Rostock, C ist Kranführer aus Erfurt, D ist Kranführer aus Schwerin, E ist Dreher aus Cottbus und F ist Ingenieur aus Berlin.

Aufgabe 030925:
a) Wie müssen 1023 Kugeln auf 10 Säckchen verteilt werden, damit man jede Anzahl von 1 bis 1023 Kugeln zusammenstellen kann, ohne ein Säckchen zu öffnen.
b) Wie viel Säckchen werden mindestens benötigt, damit man jede Anzahl von 1 bis 3 000 Kugeln zusammenstellen kann?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Bei der Verteilung der Kugeln auf die Säckchen kann man sich am Binärsystem orientieren, da man für jeden Sack nur 2 Möglichkeiten bei der Zusammenstellung einer Anzahl hat, man nimmt ihn, oder man nimmt ihn nicht.
Die Säckchen müssen damit den Zweierpotenzen entsprechen.
Das ergibt folgende Kugelverteilung:

$$1 - 2 - 4 - 8 - 16 - 32 - 64 - 128 - 256 - 512$$

b) Um nach demselben Verfahren Anzahlen bis 3000 darstellen zu können, müssen 2 weitere Säckchen hinzugenommen werden, gefüllt mit 1024 und 2048 Kugeln.

Aufgabe 040924:
Jutta, Günter und Klaus nehmen an der zweiten Stufe der Mathematikolympiade teil.

(1) Sie arbeiten (nicht notwendig in dieser Reihenfolge) in den Räumen 48, 49, 50.

(2) Jutta und Günter sind gleichaltrig, Klaus ist ein Jahr älter als Jutta.

(3) Ihre drei Mathematiklehrer, Herr Adler, Herr Bär und Herr Drossel, führen in diesen drei Räumen während der Arbeit Aufsicht, keiner jedoch in dem Raum, in dem sein Schüler arbeitet.

(4) Herr Bär hat den gleichen Vornamen wie sein Schüler.

(5) Die Nummer des Raumes, in dem Herr Drossel Aufsicht führt, entspricht dem Eineinhalbfachen seines Alters.

(6) Günters Raum hat eine höhere Nummer als der von Klaus.

(7) Die drei Schüler sind zusammen gerade so alt, wie die Nummer des Raumes angibt, in dem Jutta arbeitet.

(8) Jutta kennt Herrn Drossel nicht.

Welchen Vornamen hat Herr Bär? In welchem Raum führt er Aufsicht? (Bei der Altersangabe sind nur die vollen Jahre berücksichtigt worden.)

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Aus den Angaben (1) bis (8) folgt:

(9) Herr Drossel führt Aufsicht in Raum 48. (wegen (1) und (5))

(10) Jutta arbeitet in Raum 49. (wegen (1), (2) und (7))

(11) Günter arbeitet in Raum 50, Klaus in 48. (wegen (1), (10) und (6))

(12) Günter ist Schüler von Herrn Drossel. (wegen (8), (9) und (11))

(13) Klaus ist Schüler von Herrn Bär. (wegen (12) und (4))

(14) Jutta ist Schülerin von Herrn Adler. (wegen (12) und (13))

(15) Herr Adler führt Aufsicht in Raum 50. (wegen (3), (9), (10), (14))

(16) Herr Bär heißt Klaus und führt Aufsicht in Raum 49. (wegen (4), (13) und (9) und (15)).

Aufgabe 060924:
Die Schülerinnen Brigitte, Christina, Dorothea, Eva, Inge und Monika und die Schüler Anton, Fred, Günter, Helmut, Jürgen und Kurt einer Laienspielgruppe wollen einen Tanz aufführen. Dabei wird zu Paaren getanzt.

1) In keinem Paar soll der männliche Partner kleiner als der weibliche sein.

Außerdem haben einige Teilnehmer noch verschiedene Wünsche:

2) Christina möchte nicht mit Anton tanzen, der kleiner als Brigitte ist.

3) Jürgen möchte nur mit Dorothea oder Monika tanzen.

4) Fred, der größer als Helmut, aber kleiner als Anton ist, möchte nur mit Eva oder Monika tanzen.

5) Kurt, der weiß, dass Eva größer als Anton ist, versucht, eine Einteilung zu finden, die allen Wünschen gerecht wird.

Geben Sie alle Möglichkeiten der Zusammenstellung dieser Schüler zu Tanzpaaren an, die die genannten Wünsche und Bedingung (1) erfüllen!

Die Aufgabe ist dahingehend zu verstehen, dass sämtliche Zusammenstellungen zu Tanzpaaren angegeben werden sollen, die auf Grund der Angaben nicht als unverträglich mit einer oder mehreren der gestellten Bedingungen (1) bis (5) ausgeschlossen werden müssen.

Lösung von MontyPythagoras:
Da Fred < Anton, und Anton < Eva, ist Fred < Eva. Daraus folgt das Paar Fred mit Monika. und Jürgen mit Dorothea. Aus Anton < Brigitte und Anton < Eva folgt, dass Christina mit Anton kein Paar bildet, d. h. Anton mit Inge.

Da Helmut < Anton < Eva und Helmut < Anton < Brigitte bildet Helmut mit Christina ein Paar.
Es verbleiben genau zwei Möglichkeiten für Günter, Kurt und Brigitte, Eva, und zwar die folgenden:

1. Fred und Monika, Jürgen und Dorothea, Anton und Inge, Helmut und Christina, Günter und Brigitte, Kurt und Eva.

2. Fred und Monika, Jürgen und Dorothea, Anton und Inge, Helmut und Christina, Günter und Eva, Kurt und Brigitte.

Aufgabe 080924:
Vier Personen A, B, C und D machen je drei Angaben über eine gleiche Zahl x. Nach Vereinbarung soll bei jedem mindestens eine Angabe wahr und mindestens eine Angabe falsch sein.

A sagt:
(1) Das Reziproke von x ist nicht kleiner als 1.
(2) x enthält in der dekadischen Darstellung keine 6.
(3) Die 3. Potenz von x ist kleiner als 221.
B sagt:
(1) x ist eine gerade Zahl.
(2) x ist eine Primzahl.
(3) x ist ein ganzzahliges Vielfaches von 5.
C sagt:
(1) x ist irrational.
(2) x ist kleiner als 6.
(3) x ist Quadrat einer natürlichen Zahl.
D sagt:
(1) x ist größer als 20.
(2) x ist eine positive ganze Zahl, deren dekadische Darstellung mindestens 3 Stellen enthält.
(3) x ist nicht kleiner als 10.
Ermitteln Sie x.

Lösung von Nuramon:
Da eine der Aussagen von B wahr ist, muss x eine ganze Zahl sein.
Wäre Aussage D2 wahr, so wären es auch D1 und D3. Also ist D2 falsch, d. h. es muss $x < 100$ sein.
Da D1 die Aussage D3 impliziert und mindestens eine der Aussagen D1 bzw. D3 wahr sein muss, ist D3 wahr. Also ist x eine ganze Zahl mit $x \geq 10$.
C1 ist falsch, da x ganz ist. C2 ist falsch, da $x \geq 10$ ist.
Also muss C3 wahr sein, d. h. x ist eine Quadratzahl.
Aussage A1 ist falsch, denn $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{10} < 1$. Aussage A3 ist falsch, denn $x^3 \geq 10^3 > 221$.
Also ist A2 wahr. Damit bleiben nur noch die Möglichkeiten 25,49 oder 81 für x übrig. Da x Quadratzahl ist, ist B2 falsch. Also muss x gerade oder durch 5 teilbar sein. Somit bleibt als einzige Option $x = 25$ übrig. Tatsächlich erfüllt $x = 25$ die Anforderungen der Aufgabe: A1, B1, C1, D2 sind falsch und A2, B3, C3, D1 sind wahr.

Aufgabe 090921:
Bei einem Klassenfest stellen die Schüler ihrem Mathematiklehrer die folgende Aufgabe:
Die Schüler teilen ihrem Lehrer mit, dass sie sich insgeheim so in drei Gruppen aufgeteilt haben, dass jeder Schüler der Klasse genau einer Gruppe angehört. Die Schüler der ersten Gruppe nennen sich die „Wahren", weil sie jede Frage wahrheitsgemäß beantworten.
Die Schüler der zweiten Gruppe nennen sich die „Unwahren", weil sie jede Frage falsch beantworten.
Die Schüler der dritten Gruppe schließlich nennen sich die „Unbeständigen", weil jeder von ihnen Serien aufeinanderfolgender Fragen alternierend (abwechselnd) wahr und falsch beantwortet; dabei ist aber ungewiss, ob er jeweils die erste Frage einer Serie wahr oder falsch beantwortet.

Jeder Schüler antwortet auf eine gestellte Frage nur mit ja oder nur mit nein; Fragen, die andere Antworten erfordern, werden nicht zugelassen. Der Lehrer soll nun von einem beliebigen Schüler der Klasse durch Fragen, die er an diesen Schüler richtet und die sich nur auf die Zugehörigkeit zu einer der genannten Gruppe beziehen, feststellen, ob der Schüler ein „Wahrer", ein „Unwahrer" oder ein „Unbeständiger" ist.

a) Welches ist die kleinste Anzahl von Fragen, die dazu ausreicht?
b) Geben Sie eine Möglichkeit an, die Zugehörigkeit eines Schülers mit dieser kleinsten Anzahl von Fragen zu ermitteln!

Lösung von cyrix:
a) Eine Frage genügt nicht, da damit nur zwei Fälle („ja"– vs. „nein"-Antwort) unterschieden werden können, es aber drei Gruppen gibt. Dass es mit zwei Fragen geht, zeigt Teil b).

b) Man stelle zwei mal die gleiche Frage „Bist du ein ‚Unbeständiger'?".
Ein „Wahrer" wird darauf zwei mal mit „nein" antworten, ein „Unwahrer" zwei mal mit „ja" und ein „Unbeständige" einmal mit „ja" und einmal mit „nein" (in irgendeiner Reihenfolge).

Aufgabe 100921:
Vier Freunde A, B, C und D verstecken einen Brief. Einer von ihnen nimmt ihn an sich. Anschließend macht jeder von ihnen die folgenden genannten drei Aussagen, von denen wenigstens je zwei wahr sind.

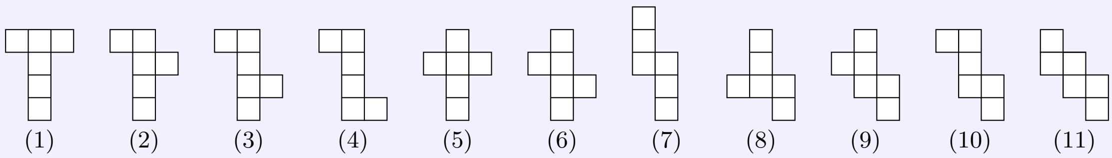
A	(1)	„Wenn ich den Brief nicht habe, dann hat ihn C."
	(2)	„Ich habe den Brief nicht."
	(3)	„Mein Freund hat den Brief."
B	(1)	„Entweder A oder C hat den Brief."
	(2)	„Alle Aussagen von A sind wahr."
	(3)	„D hat den Brief nicht."
C	(1)	„Wenn ich den Brief nicht habe, dann hat ihn B."
	(2)	„Ich habe den Brief."
	(3)	„B macht keine falschen Aussagen."
D	(1)	„Ich habe den Brief nicht."
	(2)	„Entweder hat A den Brief, oder er hat ihn nicht."
	(3)	„B hat das Spiel ausgedacht."

Wer hat den Brief?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, C hätte den Brief nicht. Dann wäre C (2) falsch. Also folgt, da laut Aufgabe von den drei Aussagen, die C gemacht hat, wenigstens zwei wahr sind, dass C (3) wahr sein müsste.
Daher wären alle Aussagen, von B und wegen B (2) auch alle Aussagen von A wahr. Wegen B (1) und A (2) müsste mithin doch C den Brief haben. Dieser Widerspruch beweist, dass die Annahme, C hätte den Brief nicht, falsch war.
Also verbleibt als einzige Möglichkeit nur die Annahme: C hat den Brief.

Alternativ-Lösung von cyrix:
A kann den Brief nicht haben, da sonst seine Aussagen A (2) und A (3) falsch wären. (Er wird sich nicht als sein eigener Freund bezeichnen.) Auch B kann den Brief nicht haben, da sonst die Aussage A (1) und damit neben B (1) auch B (2) falsch wären. Gleiches gilt, wenn D den Brief hätte.
Es verbleibt die Frage, ob C den Brief haben kann. In dem Fall sind die Aussagen A (1) bis A (3) richtig, da C ein Freund von A ist. Damit sind auch alle Aussagen B (1) bis B (3) von B wahr sowie alle drei Aussagen von C. (Man beachte dazu bei C (1), dass die Voraussetzung der Implikation, dass C den Brief nicht selbst hätte, in diesem Fall nicht erfüllt ist, die Implikation also wahr ist.) Schließlich sind die Aussagen D (1) und D (2) (letzteres, da es eine Tautologie ist) wahr; über D (3) können wir keine Aussage treffen. Also trifft jeder der vier Freunde in diesem Fall mindestens zwei korrekte Aussagen, sodass tatsächlich C den Brief haben muss.

Aufgabe 170924:
Die folgende Abbildung zeigt 11 Würfelnetze
a) Ermitteln Sie davon diejenigen, die sich in einem Zuge zeichnen lassen, d. h. als ein zusammenhängender Streckenzug, bei dem jede im Netz auftretende Strecke genau einmal durchlaufen wird!
b) Geben Sie für diese Netze je einen Anfangs- und Endpunkt eines solchen Streckenzuges an!



Lösung von cyrix:
Ein solcher Streckenzug lässt sich genau dann zeichnen, wenn es entweder genau null oder genau zwei Punkte in dem Netz gibt, an dem eine ungerade Anzahl von Strecken zusammenstoßen.
(An einem solchen Punkt kann man nur starten oder enden, da man an jedem zwischen Knoten für jede Strecke, auf den man ihn erreicht, auch wieder eine benötigt, auf dem man ihn wieder verlässt. Die Anzahl der Strecken, die sich in einem Punkt, der weder Start- noch Endpunkt des Streckenzugs ist, treffen, muss also gerade sein. Andererseits kann eine zusammenhängende Struktur, wo sich – bis auf ggf. an genau zwei Stellen – in allen Punkten jeweils eine gerade Anzahl an Strecken treffen, auch immer als durchgehender Streckenzug gezeichnet werden.)

In Netz (1) gibt es 6 Punkte, in denen sich je 3 Strecken treffen, in Netz (2) sind es 4, in Netz (3) auch, in Netz (4) sind es 6, in Netz (5) und 6 jeweils genau 2, in Netz (7) sind es 6, in Netz (8) sind es 4, in Netz (9) genau 2, in Netz (10) sind es 4 und in Netz (11) wieder genau 2. Damit lassen sich genau die Netze (5), (6), (9) und (11) in einem Streckenzug zeichnen.
Dabei sind jeweils die beiden Punkte, an denen sich in diesen Netzen je drei Strecken treffen, Anfangs- bzw. Endpunkt des entsprechenden Streckenzugs.

Bemerkung: Im Kontext der Graphentheorie fasst man die Strecken als Kanten und deren Endpunkte als Knoten auf. Die Fragestellung, ob sich alle Kanten in einem Weg zusammenfügen lassen, der jede Kante genau einmal enthält, wird auch als Frage bezeichnet, ob der Graph einen Euler-Weg enthält. (Vgl. Königsberger-Brücken-Problem.)

Aufgabe 190921:
An einer Kreuzung standen in einer Reihe hintereinander genau 7 Fahrzeuge. Jedes dieser Fahrzeuge war entweder ein Personenkraftwagen oder ein Lastkraftwagen. Über ihre Reihenfolge sei bekannt:
(1) Kein LKW stand direkt vor oder hinter einem anderen LKW.
(2) Genau ein PKW befand sich unmittelbar zwischen zwei LKW.
(3) Genau ein LKW befand sich unmittelbar zwischen zwei PKW.
(4) Genau drei PKW standen unmittelbar hintereinander.
Ermitteln Sie alle Möglichkeiten, in welcher Reihenfolge diese 7 Fahrzeuge gestanden haben können!

Lösung von cyrix:
Wir kürzen LKW mit „L“ und PKW mit „P“ ab, sodass z. B. „PPLP“ einer Reihenfolge von zwei PKW, einem LKW und einem PKW entspricht.
Nach (2) muss LPL Teil der Fahrzeugkolonne sein. Wäre der vordere L nicht das erste Fahrzeug, so müsste nach (1) ein P vor ihm gestanden haben, analog hinter dem zweiten L, falls dieser nicht das letzte Fahrzeug ist. Dann erhielte man den die Wagenfolge PLPLP, welche (3) widerspricht. Also muss der erste L der erste Wagen oder der zweite L der letzte Wagen sein, wobei nicht beides zugleich geht.

1. Fall: Sei der erste L das erste Fahrzeug, sodass die Fahrzeugkolonne mit LPLP beginnt. Da nach (4) die Wagenfolge PPP vorkommen muss, kann diese nur noch an den Positionen 4-6 oder 5-7 liegen. Letzteres ist aber unmöglich, da sonst 4 P an den Positionen 4-7 hintereinander stünden, was (4) widerspricht. Also lautet die Wagenfolge LPLPPPL; wobei aus analogem Grund auf Position 7 kein P stehen kann.

2. Fall: Sei der zweite L das letzte Fahrzeug. Dann folgt auf analoge Weise zum 1. Fall (diesmal von hinten nach vorn argumentiert), dass die Wagenfolge LPPPLPL lauten muss.
Beide Reihenfolgen erfüllen offenbar alle Kriterien, sind also genau die gesuchten Lösungen.

Aufgabe 210921:
In der Divisionsaufgabe $a : b = c$ sind a, b, c, so durch natürliche Zahlen zu ersetzen, dass eine richtig gerechnete Divisionsaufgabe entsteht, wobei nur die Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, und zwar jede genau einmal, verwendet werden sollen.
Ermitteln Sie alle Tripel $(a; b; c)$ natürlicher Zahlen, die diesen Anforderungen genügen!

Lösung von cyrix:
Da für drei Zahlen 5 Ziffern zur Verfügung stehen, muss mindestens eine einstellig sein. Da der Dividend a bei einer Divisionsaufgabe (im Bereich der natürlichen Zahlen) der größte Wert ist, muss a mindestens zweistellig sein. Wären b und c einstellig, so würde ihr Produkt a höchstens $5 \cdot 4 = 20$ betragen, sodass nicht alle fünf Ziffern verwendet werden würden. Also muss a zweistellig und noch genau einer der beiden Werte b bzw. c zweistellig sein, während der andere einstellig ist.

Da die Ziffer 5 nur genau einmal verwendet werden darf, kann sie nicht als Einerziffer verwendet werden, da dann auch die entsprechende Zahl durch 5 teilbar wäre, was die Teilbarkeit durch 5 mindestens einer weiteren der drei Zahlen nach sich ziehen würde. Dies ist aber aufgrund der nicht weiter zur Verfügung stehenden Endziffern 0 bzw. einer weiteren 5 nicht möglich.
Also muss die Ziffer 5 als Zehnerziffer verwendet werden. Dies kann aber nicht die Zehnerziffer des Quotienten oder Divisors sein, weil sonst dieser Wert mindesten 51 wäre, während für den notwendigerweise größeren Dividenden nur noch maximal die Zahl 43 möglich wäre. Also muss die 5 der Zehner von a sein.

Es kann weder b noch c gleich 1 sein, da sonst der andere Wert gleich a sein müsste, was eine doppelte Nutzung von Ziffern nach sich ziehen würde.

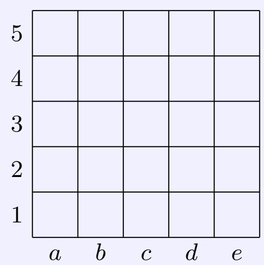
Da 53 eine Primzahl ist und $51 = 3 \cdot 17$ als einzige nicht-triviale Zerlegung die nicht vorhandene Ziffer 7 verwendet, scheiden diese beiden Möglichkeiten für a aus. Es verbleiben zwei Fälle:

1. Fall: $a = 52$. Dann gibt es wegen $52 = 2 \cdot 26 = 4 \cdot 13$ genau die beiden Möglichkeiten $b = 4$ und $c = 13$ bzw. umgekehrt $b = 13$ und $c = 4$. Andere Zerlegungen gibt es in diesem Fall nicht.

2. Fall: $a = 54$. Dann gibt es wegen $54 = 2 \cdot 27 = 3 \cdot 18 = 6 \cdot 9$ als einzig möglichen, nicht-trivialen Zerlegungen keine den Anforderungen der Aufgabenstellung genügenden Divisionsaufgaben.

Es gibt also genau zwei solche Tripel, nämlich $(a,b,c) \in \{(52,4,13), (52,13,4)\}$.

Aufgabe 220924:



Die Abbildung zeigt ein Quadrat, das in 25 zueinander kongruente quadratische Felder $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5$, zerlegt ist.
Von diesen Feldern sollen genau fünf so durch Schwarzfärbung markiert werden, dass in jeder Zeile, in jeder Spalte und in jeder der beiden Diagonalen genau ein markiertes Feld auftritt.
Ermitteln Sie alle voneinander verschiedenen Markierungen, die diese Bedingungen erfüllen!
Dabei gelten zwei Markierungen genau dann als nicht verschieden, wenn sie auseinander durch eine Drehung, eine Spiegelung oder mehrere solcher Abbildungen hervorgehen.

Lösung von cyrix:
Wir konstruieren alle zulässigen Färbungen schrittweise durch eine Fallunterscheidung.

Fall 1: Mindestens eines der vier Eckfelder a_1, e_1, e_5 oder a_5 ist markiert.
Dann können wir ggf. durch Drehung um den Mittelpunkt des Quadrats erzwingen, dass das Feld a_1 markiert ist. Nun können die Felder b_1 und b_2 sowie a_2 jeweils nicht markiert sein, da sonst in Zeile 1, der Diagonalen durch a_1 bzw. der Spalte b zwei Felder markiert wären.
Durch ggf. erfolgende Spiegelung an der Diagonalen durch a_1 kann man erzwingen, dass die Zeilennummer des in Spalte b markierten Feldes höchstens so groß ist wie die „Spaltennummer“ des in Zeile 2 markierten Feldes. Dabei sei unter der „Spaltennummer“ die Zahl gemeint, die bei der Übersetzung $b = 2$, $c = 3$, $d = 4$, $e = 5$ aus der Spalte entsteht. Es ergeben sich nun für das in Spalte b markierte Feld folgende Unterfälle:

Fall 1.1: In Spalte b ist das Feld b_3 markiert.
Dann können folgende Felder alle nicht markiert sein: a_5 und e_1 wegen gleicher Spalte/ Zeile mit a_1 sowie b_4 und c_3 wegen gleicher Spalte/ Zeile mit b_3. Dann sind von der Diagonalen durch a_5 aber vier Felder schon unmarkiert, sodass das fünfte Feld d_2 markiert werden muss. In der 5. Zeile dürfen aber die Felder a_5 und e_5 wegen gleicher Spalte/ Diagonale mit a_1 sowie b_5 und d_5 wegen gleicher Spalte mit b_3 bzw. d_2 nicht markiert werden, sodass nur c_5 verbleibt und damit abschließend aufgrund des einzig freien Feldes in Zeile 4 auch das Feld e_4 markiert werden muss. Wir erhalten die Lösung

$$(a_1, b_3, c_5, d_2, e_4)$$

Fall 1.2: In Spalte b ist das Feld b_4 markiert.
Da die Spaltennummer des in Zeile 2 markierten Felds nun mindestens 4 beträgt, muss es in Spalte d oder e liegen. Das Feld d_2 liegt aber wie b_4 in der Diagonalen durch a_5, sodass es unmarkiert bleiben muss. Es folgt, dass e_2 markiert ist. In Zeile 3 sind folgende Felder sicher unmarkiert: a_3 und c_3 wegen gleicher Spalte/ Diagonale wie a_1 sowie b_3 und e_3 wegen gleicher Spalte mit b_4 bzw. e_2. Also muss d_3 markiert sein und damit auch c_5 als letztes freies Feld der Zeile 5. Wir erhalten die Lösung

$$(a_1, b_4, c_5, d_3, e_2)$$

Fall 1.3: In Spalte b ist das Feld b_5 markiert.
Dann muss aufgrund der Bedingung an die Spaltennummer des in Zele 2 markierten Felds dieses e_2 sein. Dies führt aber zum Widerspruch, da dann alle Felder der Diagonale durch a_5 unmarkiert sein müssen: a_5, e_1 und c_3 wegen gleicher Spalte/ Zeile/ Diagonale mit a_1 sowie b_4 wegen gleicher Spalte mit b_5 und d_2 wegen gleicher Zeile mit e_2. In diesem Unterfall gibt es also keine Lösung.

Fall 2: Alle Eckfelder sind unmarkiert.
Es kann nicht sowohl in Spalte a als auch in Spalte e die dritte Zeile markiert sein. Also kann man durch ggf. erfolgende Spiegelung an Spalte e erzwingen, dass das Feld a_3 unmarkiert ist. Da auch a_1 und a_5 (sowie e_1 und e_5) unmarkiert sind, verbleiben in Spalte a nur die beiden Felder a_2 und a_4, die markiert sein können.
Durch ggf. erfolgende Spiegelung an Zeile 3 kann man erzwingen, dass dies a_2 sein muss. Damit müssen die Felder b_2 und d_2 unmarkiert sein, sodass auf den beiden Diagonalen nur noch die Felder c_3 und d_4 für die eine bzw. b_4 und c_3 für die andere markiert werden können.

Wäre also c_3 unmarkiert, müssten sowohl d_4 als auch b_4 markiert werden, die beide in der gleichen Zeile liegen, was zu einem Widerspruch führt. Also muss c_3 markiert sein. Damit dürfen aber nun weder b_4 noch b_4 markiert sein, da sie beide auf den Diagonalen durch c_3 liegen. Weiterhin ist auch a_4 sowie c_4 ausgeschlossen, da sie in den gleichen Spalten wie a_2 und c_3 liegen, sodass e_4 in Zeile 4 das markierte Feld sein muss.

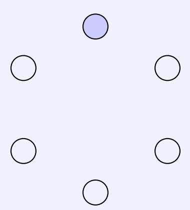
Es verbleiben in Zeilen 1 und 5 noch die freien Felder in den Spalten b und c, sodass sich zwei durch Rotation um den Mittelpunkt des Quadrats um 180° ineinander überführbare Lösungen

$$(a_2, b_1, c_3, d_5, e_4) \quad \text{und} \quad (a_2, b_5, c_3, d_1, e_4)$$

ergeben.

Tatsächlich sind diese drei Lösungen (wenn man in Fall 2 nur eine der beiden betrachtet) auch jeweils nicht durch Drehungen, Spiegelungen und Kombinationen daraus ineinander überführbar: In der Lösung von Fall 2 ist kein Eckfeld markiert, in denen aus Fall 1 aber schon, sodass die Lösung aus Fall 2 nicht in eine aus Fall 1 überführt werden kann. Da bei diesen das markierte Eckfeld gleich ist, muss dieses Fixpunkt einer potentiell überführenden Abbildung sein.
Bei Drehungen kann dies aber nur der Mittelpunkt sein. Also müsste es eine Spiegelung durch dieses Eckfeld a_1 geben, die die Lösung aus Fall 1.1 in die von Fall 1.2 überführt, was nur die Spiegelung entlang der Diagonalen durch a_1 sein kann. Man sieht aber schnell, dass diese Spiegelung bei Anwendung auf die Lösung aus Fall 1.1 eine andere Lösung als die aus Fall 1.2 erzeugt, da das in der ersten Lösung markierte Feld b_3 auf das in der zweiten Lösung unmarkierte Feld c_2 abgebildet würde.

Aufgabe 290922:
Auf die Felder der Abbildung sollen drei weiße und drei schwarze Steine verteilt werden, auf jedes Feld ein Stein. Ferner wird eine natürliche Zahl $a \geq 1$ fest vorgegeben.
Nun soll, beginnend mit dem farbigen Feld, im Uhrzeigersinn umlaufend, Stein für Stein weitergezählt werden, von 1 bis a.
Der Stein, der dabei die Nummer a erhält, wird weggenommen.



Anschließend beginnt das Abzählen wieder mit 1 bei dem im Uhrzeigersinn folgenden Stein, und wieder wird der Stein, der die Nummer a erhält, weggenommen.
Dann schließt sich noch eine dritte Durchführung dieses Abzählens und Wegnehmens an. Bei diesen Fortsetzungen ist zu beachten, dass leere Felder nicht mitgezählt, sondern übersprungen werden.
a) Es sei $a = 4$. Wie sind zu Beginn die Steine zu verteilen, damit am Ende die drei weißen Steine übrigbleiben?
b) Jemand vermutet: „Wenn man a durch $a + 6$ ersetzt, so führt die gleiche Anfangsverteilung der Steine ebenfalls zum Übrigbleiben der drei weißen Steine.“
Widerlegen Sie die Vermutung, indem Sie sie für $a = 4$ nachprüfen!
c) Beweisen Sie, dass es eine Zahl z gibt, mit der für jedes $a \geq 1$ die folgende Aussage wahr ist:
„Wenn man a durch $a + z$ ersetzt, so führt die gleiche Anfangsverteilung der Steine - auch bei Abzählbeginn im farbigen Feld - ebenfalls zum Übrigbleiben der drei weißen Steine.“

Lösung von cyrix:
a) Weggenommen werden die Steine auf den Feldern, die bei der ursprünglichen Nummerierung vor der ersten Wegnahme die Nummern 4, 2 und 1 hatten. Dabei wurde allein im dritten Durchgang das schon leere Feld mit ursprünglicher Nummerierung 4 übersprungen. Also sind auf jenen die schwarzen und auf die anderen die weißen Steine zu legen, damit am Ende die weißen übrig bleiben.

b) Für $a = 10$ wird zuerst auch der Stein auf dem Feld mit ursprünglicher Nummer $10 - 6 = 4$ entfernt, im zweiten Durchlauf aber der Stein auf dem Feld mit ursprünglicher Nummer 3, da nun der zweite Umlauf durch die noch übrigen 5 Felder nach 10 Schritten mit dem letzten besetzten Feld vor Beginn dieses zweiten Durchlaufs (also dem mit ursprünglicher Nummer 3) abgeschlossen wird. Da für $a = 4$ aber nicht der Stein auf dem Feld mit ursprünglicher Nummer 3 entfernt wurde, unterscheiden sich also diese beiden Ergebnisse.

c) Die Aufgabenstellung schließt $z = 0$ nicht aus, was eine Triviallösung wäre. Wir zeigen aber auch, dass es unendlich viele weitere positive natürliche Zahlen z gibt, die die Aussage der Aufgabenstellung erfüllen.
Damit die ersten Züge für a und $a+z$ den gleichen Stein entfernen, müssen a und $a+z$ den gleichen Rest bei der Teilung durch 6 lassen, also z durch 6 teilbar sein, da dann zwar ggf. verschieden viele Umläufe um die anfänglich 6 belegten Felder durchgeführt werden, aber an der gleichen Stelle die Zählung stoppt, sodass der gleiche erste Stein entfernt wird.

Damit darauf aufbauend die zweiten Züge für a und $a + z$ den gleichen zweiten Stein entfernen, müssen a und $a + z$ auch den gleichen Rest bei der Teilung durch 5 lassen, also z auch durch 5 teilbar sein, da dann analog wieder ggf. unterschiedlich viele Umläufe durch die 5 noch verbliebenen besetzten Felder durchgeführt werden, aber wieder an der gleichen Stelle gestoppt und damit auch der gleiche zweite Stein entfernt wird. Für den dritten Zug folgt analog, dass z durch 4 teilbar sein muss.
Tatsächlich erfüllen alle z, die durch $60 = 6 \cdot 10 = 5 \cdot 12 = 4 \cdot 15$ teilbar sind, die Aussage der Aufgabenstellung, dass für a und $a+z$ die gleichen Steine (sogar in der gleichen Reihenfolge) entfernt werden.

Aufgabe 300924:
Für jede natürliche Zahl $m \geq 2$ sei folgendes Vorhaben betrachtet:
Jemand möchte m verschiedene von einem Punkt P ausgehende Strahlen zeichnen.
Dann möchte er alle diejenigen Winkelgrößen zwischen 0° und 360° feststellen, die bei Messung eines Winkels jeweils von einem dieser Strahlen in mathematisch positivem Drehsinn zu einem anderen dieser Strahlen auftreten können. Er möchte die m Strahlen so zeichnen, dass sich dabei
a) möglichst wenige,
b) möglichst viele
verschiedene Winkelgrößen feststellen lassen.
Ermitteln Sie in Abhängigkeit von m die kleinst- bzw. größtmögliche Anzahl verschiedener Winkelgrößen, die so erreichbar sind!

Lösung von cyrix:
Auf jedem Strahl liege ein von P verschiedener Punkt P_i, $i = 0, \dots, m-1$, sodass diese in mathematisch positivem Drehsinn den Punkt P durchlaufen.

a) Nach Konstruktion sind die Winkel $\angle P_0PP_i$ für alle $i = 1, \dots, m-1$ paarweise verschieden. Also gibt es wenigstens $m-1$ verschiedene Winkel. Ordnet man die Strahlen so an, dass $\angle P_0PP_i = \frac{i}{m} \cdot 360°$ gilt, so werden nur Winkel von dieser Form angenommen, da für $i < j$ dann $\angle P_iPP_j = \angle P_0PP_j - \angle P_0PP_i = \frac{j-i}{n} \cdot 360°$ bzw. $\angle P_jPP_i = 360° - \angle P_iPP_j = \frac{m-(j-i)}{m} \cdot 360°$ gelten. Also sind minimal $m-1$ verschiedene Winkelgrößen möglich.

b) Die maximal mögliche Anzahl verschiedener Winkelgrößen erhielte man, wenn für je zwei verschiedene Indizes $i \neq j$ mit $0 \leq i,j \leq m-1$ die Winkel $\angle P_iPP_j$ alle paarweise verschieden wären. Dann erhielte man $m \cdot (m-1)$ verschiedene Winkelgrößen.
Um zu zeigen, dass dies möglich ist, ordne man die Strahlen so an, dass $\angle P_0PP_i = \frac{3^i}{3^m} \cdot 360°$ für alle $i = 1, \dots, m-1$ gilt. Dann ist offenbar $\angle P_iPP_j < 180°$, wenn $i < j$ und $\angle P_iPP_j > 180°$, wenn $j > i$. Es können also zwei solche Winkel $\angle P_iPP_j$ und $\angle P_kPP_\ell$ nur dann gleich sein, wenn $i < j$ und $k < \ell$, oder $i > j$ und $k > \ell$ gilt.
Im zweiten Fall sind dann aber auch die entsprechenden Winkel in der jeweils anderen Orientierung gleich, sodass wir o. B. d. A. $i < j$ und $k < \ell$ voraussetzen können. Aus $\angle P_iPP_j = \angle P_kPP_\ell$ folgt dann $3^j - 3^i = 3^\ell - 3^k$.
Die linke Seite der Gleichung ist eine durch 3^i, aber keine größere Dreierpotenz teilbare natürliche Zahl, die rechte Seite analog eine durch 3^k, aber keine größere Dreierpotenz teilbare natürliche Zahl.
Aufgrund der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung gilt damit $i = k$, woraus sofort auch $j = \ell$ folgt, sodass es sich nicht um Winkel zwischen verschiedenen Strahl-Paaren gehandelt haben kann, also tatsächlich alle Winkel zwischen je zwei verschiedenen Strahlen verschiedene Größen haben. Damit kann man also maximal $m \cdot (m-1)$ verschiedene Winkelgrößen erhalten.

Aufgabe 340921:
Die Bewohner des Planeten Trion unterscheiden sich nach ihrem Geschlecht, und zwar gibt es, anders als auf der Erde, genau drei verschiedene Geschlechter. Politisch ist die Bevölkerung eingeteilt in genau drei Völkerstämme.
Wenn der planetare Rat zusammentritt, entsendet jeder Völkerstamm genau drei Abgeordnete, von jedem Geschlecht einen.
Es ist dann eine Sitzordnung vorgeschrieben, bei der 9 Sitze in quadratförmiger Formierung zu drei Zeilen und drei Spalten angeordnet sind. In jeder Zeile und jeder Spalte müssen alle drei Völkerstämme und alle drei Geschlechter vertreten sein.
Geben Sie eine mögliche Sitzordnung an und bestätigen Sie, dass bei dieser Sitzordnung alle genanten Bedingungen erfüllt sind!

Lösung von cyrix:
Wir bezeichnen die Völkerstämme mit a, b und c, sowie die Geschlechter mit 1, 2 bzw. 3, sodass also a1 den Abgeordneten von Völkerstamm a mit Geschlecht 1 bezeichne.
Dann gibt folgende Tabelle eine zulässige Sitzordnung an, wobei man sich leicht davon überzeugt, dass in jeder Zeile und jeder Spalte jeder Völkerstamm a bis c sowie jedes Geschlecht 1 bis 3 genau einmal vertreten ist und kein Abgeordneter mindestens zwei oder gar keinen Sitzplatz erhält:

$$\begin{array}{ccc} a1 & b2 & c3 \\ b3 & c1 & a2 \\ c2 & a3 & b1 \end{array}$$

III. Runden 3 & 4

Aufgabe 030936:
Bei einem Spiel verstecken drei Schülerinnen Anna, Brigitte und Claudia in ihren Handtaschen je einen Gegenstand, und zwar einen Ball, einen Bleistift und eine Schere. Dieter soll feststellen, wer den Ball, wer den Bleistift und wer die Schere hat.
Auf seine Fragen erhält er folgende Antworten, von denen verabredungsgemäß nur eine wahr, die beiden anderen aber falsch sind:

(1) Anna hat den Ball.
(2) Brigitte hat den Ball nicht.
(3) Claudia hat die Schere nicht.

Wer hat den Ball, wer den Bleistift und wer die Schere?

Lösung von Manuela Kugel:

1. Fall: Die 1. Aussage ist richtig, dann hat Anna den Ball. Brigitte kann also den Ball nicht haben, womit die 2. Aussage ebenfalls wahr ist. Dies steht jedoch im Widerspruch zur Verabredung.

   Somit ist die Annahme, dass die 1. Aussage wahr ist, falsch.

2. Fall: Die 2. Aussage ist richtig, dann hat Brigitte den Ball nicht. Laut Verabredung sind die anderen beiden Aussagen falsch, also gilt deren Umkehrung: Anna hat den Ball nicht, sowie: Claudia hat die Schere.

   Wenn nun Anna und Brigitte den Ball nicht haben, muss ihn Claudia haben, was allerdings im Widerspruch zur Aussage, dass Claudia die Schere hat, steht. Damit ist auch die 2. Annahme falsch.

3. Fall: Die 3. Aussage ist richtig, dann hat Claudia die Schere nicht. Nun müssen die 1. und 2. Aussage umgekehrt werden, damit sie richtig sind: Anna hat den Ball nicht. Brigitte hat den Ball.

   Dies bedeutet, dass Anna die Schere und Claudia den Bleistift hat. Hierin steckt kein Widerspruch, weshalb dieser Fall die Lösung ist.

Aufgabe 040935:
Bei einem Rätselnachmittag wird dem besten Jungen Mathematiker der Klasse die Aufgabe gestellt, eine bestimmte reelle Zahl zu erraten. Dazu werden von seinen Mitschülern nacheinander Eigenschaften dieser Zahl genannt:

Klaus: „Die Zahl ist durch 4 ohne Rest teilbar.“
Inge: „Die Zahl ist der Radius eines Kreises, dessen Umfang die Länge 2 hat.“
Günter: „Die Zahl ist kleiner als 3.“
Monika: „Die Zahl ist die Länge der Diagonalen eines Quadrates, dessen Seite die Länge 2 hat.“
Bärbel: „Die Zahl ist irrational.“
Peter: „Die Zahl ist der Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks, dessen Seite die Länge 2 hat.“
Ferner erfährt er, dass von den Schülern Klaus und Inge, Günter und Monika sowie Bärbel und Peter jeweils genau einer die Wahrheit gesagt hat.
Wie heißt die Zahl?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn Peter die Wahrheit gesagt hätte, müsste Bärbels Feststellung falsch sein, da von beiden genau einer die Wahrheit gesagt haben soll.
Diese Annahme führt zum Widerspruch, da auch Peter die Zahl als irrational charakterisiert hat. Also hat Bärbel die Wahrheit gesagt.
Demnach ist die Aussage von Klaus falsch und Inges Angabe stimmt. Aus ihr folgt: $x = \frac{1}{\pi}$

Die Aussagen von Günter und Monika sind überflüssig.

Aufgabe 150933:
Über eine Zahl x werden die folgenden vier Paare (A_1,A_2), (B_1,B_2), (C_1,C_2), (D_1,D_2) von Aussagen gemacht, von denen genau eine wahr und genau eine falsch ist.
Untersuchen Sie, ob es eine Zahl x gibt, die dieser Forderung genügt! Ermitteln Sie, wenn das der Fall ist, jede solche Zahl x!
A_1) Es gibt außer x keine Zahl, die der Forderung dieser Aufgabe genügt.
A_2) x ist eine natürliche Zahl, in deren (dekadischer) Darstellung eine Ziffer zweimal auftritt.
B_1) $x-5$ ist eine ganze, durch 6 teilbare Zahl.
B_2) $x+1$ ist eine ganze, durch 12 teilbare Zahl.
C_1) x ist eine natürliche Zahl, deren (dekadische) Darstellung mit der Ziffer 3 beginnt.
C_2) x ist die Zahl 389.
D_1) x ist eine dreistellige Primzahl mit $300 < x < 399$, also eine der Zahlen $307, 311, 313, 317, 331, 337, 347, 349, 353, 359, 367, 373, 379, 383, 389, 397$.
D_2) x ist eine natürliche Zahl, die aus drei gleichen Ziffern besteht.

Lösung von cyrix:
Da aus C_2 direkt C_1 folgt, aber nicht beide Aussagen wahr sein dürfen, muss C_2 falsch und C_1 wahr sein. Es ist also x, sofern es existiert, eine natürliche Zahl, die mit der Ziffer 3 beginnt, nicht aber die 389.

Wäre die Aussage D_2 nun wahr, müsste es sich um die Zahl 333 handeln. Dies widerspricht aber beiden Aussagen B_1 und B_2, da weder 328 durch 6 noch 334 durch 12 teilbar sind. Also muss D_2 falsch und D_1 wahr sein, sodass x eine der von 389 verschiedenen Primzahlen in der angegebenen Liste sein muss.

Wäre die Aussage B_2 wahr, dann wäre $x+1$ insbesondere auch durch 6 teilbar, also auch $x+1-6 = x-5$, sodass die Aussage B_1 auch erfüllt wäre. Demnach muss also $x-5$ durch 6 teilbar sein, während $x+1=(x-5)+6$ nicht durch 12 teilbar sein darf. Das geht aber nur, wenn schon $x-5$ durch 12 teilbar war. In der Liste erfüllen das nur 317 und 353, sodass x eine dieser beiden Zahlen sein muss.

Wäre A_2 wahr, dann wäre es eindeutig als 353 identifiziert, da nur in dieser noch möglichen Zahl zwei gleiche Ziffern vorkommen. Dann wäre aber auch aufgrund der nun gezeigten Eindeutigkeit auch die Aussage A_1 wahr, was ein Widerspruch zur Bedingung der Aufgabenstellung darstellt.
Ist dagegen A_2 falsch, dann darf in der Darstellung von x keine Ziffer zwei mal auftreten. Dies schließt die 353 aus, sodass 317 die eindeutige Lösung ist, sodass Aussage A_1 wahr ist.
Damit erfüllt $x = 317$ genau die jeweils ersten Aussagen, während die jeweils zweiten falsch sind; und es ist auch die einzige Zahl, die der Aufgabenstellung genügt.

Aufgabe 190933:
Von n Kartons (n eine beliebige natürliche Zahl größer als 0) werde vorausgesetzt, dass ihre Abmessungen folgende Eigenschaften haben:
Der erste Karton kann in den zweiten gelegt werden (falls $n \geq 2$ ist); die ersten beiden Kartons können nebeneinander in den dritten gelegt werden (falls $n \geq 3$ ist); die ersten drei Kartons können nebeneinander in den vierten gelegt werden (falls $n \geq 4$ ist); ...; die ersten $n-1$ Kartons können nebeneinander in den n-ten gelegt werden.
Beweisen Sie, dass es möglich ist, derartige n Kartons so ineinanderzulegen, dass folgende Forderungen erfüllt sind: (1) Jeder Karton enthält in seinem Innern eine gerade Anzahl anderer Karton (wobei auch 0 als gerade Zahl zugelassen ist).
(2) Es gibt höchstens zwei Kartons, die in keinem anderen Karton enthalten sind.
(3) Betrachtet man für jeden Karton die Menge aller in seinem Inneren enthaltenen Kartons, so gibt es auch in dieser Menge höchstens zwei Kartons, die in keinem anderen Karton dieser Menge enthalten sind.

Lösung von cyrix:
Für $n = 1$ und $n = 2$ sind die Forderungen leicht erfüllbar: Man stelle den einen bzw. die zwei Kartons leer nebeneinander. Sei ab nun $n > 2$ und es existiere eine Anordnung der ersten $n - 2$ Kartons, die den Anforderungen genügt. Wir unterscheiden, ob in dieser Anordnung ein oder zwei äußere Kartons, die in keinem anderen enthalten sind, existieren.

1. Fall: Die ersten $n - 2$ Kartons sind so verpackt, dass nur ein äußerer Karton existiert. Dann packe man den $n - 2$-ten und den $n - 1$-ten Karton nebeneinander in den n-ten. Im $n - 1$-ten sind dann 0 und im $n - 2$-ten eine gerade Anzahl an Kartons, also auch im n-ten. Die Forderungen (2) und (3) sind offensichtlich erfüllt.

2. Fall: Die ersten $n - 2$ Kartons sind so verpackt, dass zwei äußere Kartons existieren. Dann packe man diese beiden in den $n-1$-ten Karton und lege daneben den leeren n-ten Karton. Im $n-1$-ten Karton sind dann die gerade Anzahl an Kartons in den beiden äußeren Kartons der Anordnung der ersten $n-2$ sowie diese beiden äußeren Kartons, also auch eine gerade Zahl; im n-ten Karton ist keiner. Die Bedingungen (2) und (3) sin nach Konstruktion offensichtlich auch erfüllt.

Damit gibt es in jedem Fall auch mit n Kartons eine Anordnung, die der Aufgabenstellung genügt, $\Box$.

Aufgabe 190936:
Für geeignete natürliche Zahlen n gibt es ebenflächig begrenzte Körper mit n Ecken und weniger als n Flächen. Zum Beispiel ist für $n = 8$ ein Quader ein solcher Körper, da er genau 8 Ecken hat und von genau 6 ebenen Flächen (Rechtecken) begrenzt wird.
Untersuchen Sie, ob eine natürliche Zahl N die Eigenschaft hat, dass es für jede natürliche Zahl $n \geq N$ einen ebenflächig begrenzten Körper mit n Ecken gibt, der von weniger als n ebenen Flächen begrenzt wird!
Wenn dies der Fall ist, ermitteln Sie die kleinste natürliche Zahl N mit dieser Eigenschaft!

Lösung von cyrix:
Sei $m \geq 3$ eine natürliche Zahl. Dann hat das gerade Prisma, dessen Grund- und Deckfläche ein regelmäßiges m-Eck ist, genau $n = 2m$ Eckpunkte und besitzt $m + 2 < m + m = n$ Seitenflächen. Für gerade Zahlen $n \geq 6$ gibt es also solche Körper.

Setzt man auf eine der rechteckigen Seitenflächen eines solchen Prismas eine vierseitige Pyramide mit entsprechender Grundfläche auf, so erhöht sich die Eckenanzahl des nun neuen Körpers auf $2m + 1$ (die Spitze der Pyramide ist hinzugekommen) und die Anzahl der Seitenflächenanzahl auf $(m+2)-1+4 = m+5$ (die eine Seitenfläche liegt als Grundfläche der Pyramide nun im Inneren des neuen Körpers, verschwindet also, während durch die Pyramide 4 neue Seitenflächen hinzukommen), was für $m \geq 5$ noch immer kleiner ist als die Eckpunktanzahl $n = 2n+1$. Damit gibt es also auch für ungerade $n \geq 11$ jeweils solche Körper.

Für $n = 9$ betrachte man einen geraden dreiseitigen Pyramidenstumpf. Dieser besitzt sowohl in Grund- als auch Deckfläche je 3 Punkte, insgesamt also 6, und neben Grund- und Deckfläche noch 3 weitere Seitenflächen, insgesamt also 5. Verklebt man nun zwei kongruente solche Pyramidenstümpfe an ihren Grundflächen, erhöht sich die Eckpunktanzahl des neuen Körpers auf 6+3=9 und die Anzahl der Seitenflächen auf 5-1+3+1=8. Also existiert auch für $n = 9$ ein solcher Körper.

Für $n = 7$ betrachte man ein regelmäßiges Fünfeck $ABCDE$ sowie die durch Verschiebung der Höhe von A auf die gegenüberliegende Seite CD senkrecht zur Ebene des Fünfecks entstehenden Strecke PQ. Verbindet man die Punkte C und D mit Q sowie A, B und E mit P, entsteht ein ebenflächig begrenzter Körper mit den 7 Eckpunkten A, B, C, D, E, P und Q sowie den Flächen $ABCDE$, CDQ, $BCQP$, $EDQP$, ABP und AEP; also mit 6 Seitenflächen. Damit existiert auch für $n = 7$ ein solcher Körper.

Also kann $N = 6$ gewählt werden, da für jedes $n \geq 6$ ein entsprechender Körper mit n Eckpunkten und weniger Seitenflächen existiert.

Man kann aber nicht $N < 6$ wählen, da kein solcher Körper mit $e := n = 5$ Eckpunkten existiert:
Da von jedem dieser Eckpunkte mindestens 3 Kanten ausgehen, muss die Summe dieser Anzahlen also mindestens 15 betragen. Da dabei jede Kante doppelt gezählt wird (sie verbindet ja genau zwei Eckpunkte), muss es also mindestens $k \geq \frac{15}{2}$, und damit auch $k \geq 8$, Kanten in dem Körper geben.
Sei f die Anzahl von dessen Flächen. Dann gilt nach dem Eulerschen Polyedersatz $e - k + f = 2$. Mit $e = 5$ und $k \geq 8$ folgt somit $f = 2 - e + f \geq 2 - 5 + 8 = 5$, sodass es keinen solchen Körper mit 5 Eckpunkten aber weniger als 5 Flächen geben kann.
Also ist tatsächlich $N = 6$ der kleinste solche Wert.

Aufgabe 210931:
Über eine natürliche Zahl x werden vier Paare von Aussagen gemacht:

Paar A:	(1) x ist eine zweistellige Zahl.
	(2) x ist kleiner als 1000.
Paar B:	(1) Die zweite Ziffer der Zahl x ist eine 0.
	(2) Die Quersumme der Zahl x ist 11.
Paar C:	(1) x wird mit genau drei Ziffern geschrieben, und zwar mit drei gleichen Ziffern.
	(2) x ist durch 37 teilbar.
Paar D:	(1) Die Quersumme der Zahl x ist 27.
	(2) Das Produkt der Zahlen, die durch die einzelnen Ziffern von x dargestellt werden, beträgt 0.

Untersuchen Sie, ob es natürliche Zahlen x mit $x \neq 0$ gibt, für die in jedem der vier Paare A, B, C, D eine Aussage wahr und eine Aussage falsch ist!
Gibt es solche Zahlen x, so ermitteln Sie alle diese Zahlen!

Lösung von cyrix:
Da jede zweistellige Zahl auch kleiner ist als 1000, kann nicht A(1) wahr sein, da sonst auch A(2) wahr wäre. Demzufolge ist x nicht zweistellig, aber kleiner als 1000, also ein- oder dreistellig.
Sie kann aber nicht einstellig sein, da sonst sowohl C(1) (x wird mit drei gleichen Ziffern geschrieben) als auch C(2) (x ist durch 37 teilbar) wegen $x > 0$ falsch wären. Also ist x eine dreistellige natürliche Zahl.

Wäre C(1) war, so gäbe es eine Ziffer n mit $x = n \cdot 111 = n \cdot 3 \cdot 37$, sodass auch C(2) wahr wäre, was ein Widerspruch zur Aufgabenstellung ist. Also ist x durch 37, nicht aber durch 3 teilbar. Damit ist auch die Quersumme von x nicht durch 3 teilbar, also nicht 27, sodass D(1) falsch ist und D(2) wahr sein muss. Demzufolge ist eine der Ziffern von x gleich Null. Dies kann nicht die führende Ziffer sein, da sonst die Zahl nicht dreistellig wäre.

Wir unterscheiden nun zwei Fälle, welche Ziffer von x gleich Null ist.

1. Fall: Die zweite Ziffer (Zehnerziffer) von x ist Null. Dann ist B(1) wahr und B(2) muss falsch sein, sodass x eine dreistellige, durch 37 aber nicht 3 teilbare Zahl mit 0 an zweiter Stelle und Quersumme verschieden von 11 ist. Die dreistelligen Vielfachen von 37 lauten

$$111, 148, 185, 222, 259, 296, 333, 370, 407, 444, 481, 518, 555, 592, 629, 666, 703, 740, 777, 814,$$

$$851, 888, 925, 962 \text{ und } 999$$

Von diesen haben genau die Zahlen 407 und 703 die Zehnerziffer 0, aber 407 die Quersumme 11, sodass nur $x = 703$ eine Lösung für diesen Fall ist.

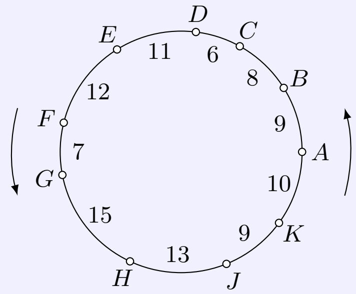
2. Fall: Die zweite Ziffer von x ist verschieden von Null. Dann muss die Einerziffer von x Null sein und, da B(1) falsch ist, muss B(2) wahr sein und die Zahl eine Quersumme von 11 besitzen. Da die Einerziffer von x gleich 0 ist, ist x also nicht nur durch 37, sondern auch durch 10, also wegen ggT(37,10) = 1 auch durch 370, teilbar.

Damit gibt es nur die beiden Möglichkeiten 370 oder 740 für x im zu betrachtenden Intervall, wobei die erste Möglichkeit wegen ihrer Quersumme 10 ausgeschlossen ist. Es verbleibt die einzige Lösung $x = 740$ für diesen Fall.

Man bestätigt leicht durch die Probe, dass tatsächlich beide Werte 703 und 740 jeweils genau eine der Aussagen eines jeden Paares A, B, C und D erfüllen.

Aufgabe 220933:

Auf einer kreisförmig verlaufenden Straße vom 1000 km Länge (Rundkurs) stehen 10 Autos $A, B, C, D, E, F, G, H, J$ und K. Sie haben Kraftstoffvorräte von 8; 10; 6; 13; 5; 13; 9; 16; 6 bzw. 14 Litern bei sich.
Diese 100 Liter würden gerade dafür ausreichen, dass ein beliebiges der zehn Autos die 1000 km einmal zurücklegen kann. Die Anordnung der Autos, die Fahrtrichtung und die Weglängen zwischen den Autos sind aus dem Bild ersichtlich.



Untersuchen Sie, ob es mindestens ein Auto gibt, das bei dieser Ausgangsstellung der Autos die 1000 km dadurch zurücklegen kann, dass es unterwegs den Kraftstoff der übrigen Autos, die an ihren Stellen stehenbleiben, übernimmt! (Verluste beim Übernehmen seien unberücksichtigt.)
Ist das der Fall, so ermitteln Sie alle diejenigen Autos, für die eine solche Fahrt möglich ist!

Lösung von cyrix:
Äquivalent zur Aufgabenstellung können wir annehmen, dass jedes Auto mit einem Kraftstoffvorrat von 0 startet, dafür aber an jeder Station ein Kanister mit der angegebenen Menge an Litern Kraftstoff zur Verfügung steht. (Dies hebt die Asymmetrie der Startstation im Vergleich zu allen anderen Stationen auf.)
Ein Auto kann also genau dann den Rundkurs schaffen, wenn das Volumen seines aktuell zur Verfügung stehenden Kraftstoffs nie negativ wird, also an jeder Station (nach Auffüllen) mindestens so groß ist, wie bis zur nächsten Station benötigt wird.

Erreicht man eine der Stationen B, C, D, F, H oder K, so kann man immer mindestens eine Station weiterfahren, da man dort mindestens so viel Kraftstoff erhält, wie man bis zur nächsten Station benötigt. An den Stationen A, E, G und J ist dies nicht der Fall, sodass die vier dort startenden Autos nicht einmal bis zur nächsten Station kommen können.

Hat man also Station B erreicht, so kann man bis E durchfahren und hat auf dieser Teilstrecke in B, C und D insgesamt 29 Liter Kraftstoff auftanken können, während man von B bis E nur 25 Liter verbraucht hat, sodass man nun 4 Liter mehr zur Verfügung hat als zum Zeitpunkt, indem man in B war.
(Startete man in B, C oder D, sind es nun also höchstens 4 Liter, weil man nicht notwendigerweise den Überschuss an noch nicht besuchten Stationen, da sie „vor“ dem eigenen Start lagen, erhalten hat.)
Da aber an Station E nur 5 zusätzliche Liter zu erhalten sind, aber 12 benötigt werden, erreichen die in B, C oder D gestarteten Autos die Station F nicht, während „vor“ B gestartete dies nur tun, wenn sie in B noch mindestens einen Kraftstoffvorrat von 3 Litern hatten.

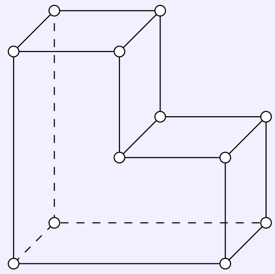
Dazu musste man in A noch mindestens $3 + 9 - 8 = 4$ Liter (vor Nachtanken) und in K mindestens $4 + 10 - 14 = 0$ Liter (vor Nachtanken) an Kraftstoffvorrat haben. Dies bedeutet, dass jedes Auto, dass bis K kommt, dann bis Station F durchfahren kann, und danach (vor Nachtanken) genauso viel Kraftstoff noch besitzt, wie vor dem Nachtanken in K. (Da nur noch die Autos F, H und K den Rundkurs ggf. absolvieren können, starten auch alle spätestens bei H und sind frühestens bei F am Ziel.)

Wer F erreicht hat (und noch nicht am Ziel ist), erhält man zusätzliche 13 Liter, benötigt aber bis G nur 7, sodass man auf jeden Fall noch mindestens 6 Liter Kraftstoffvorrat hat. Mit den zusätzlichen 9 Litern bei G kann man also in jedem Fall die Strecke bis H absolvieren und hat danach (vor Nachtanken) einen so hohen Kraftstoffvorrat wie in F (vor Nachtanken).

Analog gilt auch, dass für jedes der drei verbleibenden Autos, dass aus dem Erreichen von H (sofern dies noch nicht das Ziel war) das Erreichen von K folgt, da man in H zusätzliche 16 Liter erhält, bis J aber nur 13 benötigt, also in J noch mindestens 3 Liter übrig hat, die mit den dort erhaltenen 6 gerade für die benötigten 9 nach K ausreichen.

Damit gilt, dass genau die drei Autos an den Stationen F, H und K den Rundkurs absolvieren können, wobei ihnen an diesen drei Stationen auch immer gerade der Sprit ausgeht und sie sich mit dem letzten Tropfen in dieses (Zwischen-)Ziel schleppen.

Aufgabe 230932:
In der Abbildung ist ein Körper K skizziert. Er besteht aus drei Würfeln der Kantenlänge 1 cm, die in der angegebenen Anordnung fest zusammengefügt sind.
Aus genügend vielen Körpern dieser Gestalt K soll ein (vollständig ausgefüllter) Würfel W (Kantenlänge n Zentimeter) zusammengesetzt werden.
Ermitteln Sie alle diejenigen natürlichen Zahlen $n > 0$, für die das möglich ist!



Lösung von cyrix:
Da das Volumen von K 3 ist, folgt direkt, dass nur für $n = 3k$ ein Würfel der Kantenlänge n gefüllt werden kann. Ein Würfel der Kantenlänge $3k$ zerfällt in k^3 Würfel der Kantenlänge 3. Daher reicht es für $n = 3$ eine Lösung anzugeben. Eine Möglichkeit ist

1	1	3	5	6	3	5	5	7
1	2	3	6	6	7	8	9	7
2	2	4	8	4	4	8	9	9

wobei hier die drei Ebenen angegeben sind und eine Ziffer einen K-Block beschreibt.

Aufgabe 250931:
a) Beweisen Sie, dass es eine natürliche Zahl N gibt, für die folgende Aussage (1) gilt!
(1) Für jede natürliche Zahl n für die $n \geq N$ ist, kann eine Quadratfläche F in genau n Teilquadrate $T_1, ..., T_n$ zerlegt werden.
(Dabei sollen die Flächen $T_1, ..., T_n$ die Fläche F vollständig ausfüllen; sie brauchen nicht untereinander kongruent sein.)

b) Ermitteln Sie die kleinste natürliche Zahl N, für die die Aussage (1) gilt!

Lösung von cyrix:
Es sei die Kantenlänge der Quadratfläche F gleich a.

a) Wir geben zuerst Lösungen für $n = 6$, $n = 7$ und $n = 8$ an:
Für $n = 6$ zerlege man das Quadrat F in 3×3 Quadrate der Kantenlänge $\frac{1}{3} \cdot a$ und fasse davon 2×2 Teilquadrate wieder zu einem der Kantenlänge $\frac{2}{3}$ zusammen. Dieses sei mit T_1 bezeichnet, die übrigen $9 - 4 = 5$ Teilquadrate mit T_2 bis T_6.

Für $n = 7$ zerlege man das Quadrat F in 2×2 Quadrate der Kantenlänge $\frac{1}{2} \cdot a$ und bezeichne drei davon mit T_1 bis T_3. Das vierte Teilquadrat zerlege man in 2×2 Quadrate der Kantenlänge $\frac{1}{4} \cdot a$ und bezeichne diese mit T_4 bis T_7.

Für $n = 8$ zerlege man das Quadrat F in 4×4 Quadrate der Kantenlänge $\frac{1}{4} \cdot a$ und fasse davon 3×3 wieder zu einem Quadrat der Kantenlänge $\frac{3}{4} \cdot a$ zusammen, welches mit T_1 bezeichnet sei. Die übrigen $16 - 9 = 7$ Teilquadrate seien mit T_2 bis T_8 bezeichnet.

Aus einer Zerlegung von F in n Teilquadrate $T_1, \ldots, T_n$ erhält man leicht eine in $n + 3$ Teilquadrate, indem man das Teilquadrat T_n weiter unterteilt in 2×2 Teilquadrate halber Kantenlänge. Dadurch erhöht sich die Anzahl der Teilquadrate um $4 - 1 = 3$.
Also lässt sich für jedes $n \geq 6 =: N$ die Quadratfläche F in genau n Teilquadrate zerlegen, $\square$.

b) Es bleibt noch zu zeigen, dass keine Unterteilung in genau 5 Teilquadrate möglich ist, damit $N = 6$ der kleinste Wert ist, der die Aussage (1) der Aufgabenstellung erfüllt.

Nehmen wir also indirekt an, dass es eine Unterteilung von F in genau 5 Teilquadrate gäbe. Dann können keine zwei Eckpunkte von F im gleichen Teilquadrat liegen, da dieses sonst allein ganz F überdecken (oder darüber hinausragen) würde. Tatsächlich müssen alle Kanten von Teilquadraten senkrecht bzw. parallel zu Kanten von F verlaufen, da sich an allen Eckpunkten, also insbesondere denen von F, die Innenwinkel der dort zusammentreffenden Quadrate nur auf Vielfache von $90°$ addieren können.
Es seien T_1 bis T_4 die Teilquadrate, die je einen der vier Eckpunkte von F enthalten. Deren Kantenlängen seien mit a_1 bis a_4 gekennzeichnet. Dann kann nur höchstens eines dieser Teilquadrate eine größere Kantenlänge als $\frac{1}{2} \cdot a$ besitzen, da sich sonst die beiden entsprechenden Teilquadrate mit größerer Kantenlänge überschneiden würden.

Gilt, dass an drei Kanten von F die entsprechenden Teilquadrate aus T_1 bis T_4 direkt benachbart sind, also z. B. $a_1 + a_2 = a_2 + a_3 = a_3 + a_4 = a$, so auch $a_4 + a_1 = (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) - (a_2 + a_3) = 1$, d. h., auch an der vierten Kante von F sind die beiden zugehörigen Teilquadrate aus T_1 bis T_4 direkt benachbart. Dann folgt jedoch $a_1 = a_3$ und $a_2 = a_4$, sodass für alle vier Kantenlängen gilt, dass sie kleiner oder gleich $\frac{1}{2} \cdot a$ sein müssen, da sonst wenigstens zwei größer als dieser Wert wären, was gerade ausgeschlossen wurde. Wäre aber auch nur eine dieser Kantenlängen echt kleiner als $\frac{1}{2} \cdot a$, würden dann die Gleichungen nicht mehr gelten, sodass $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = \frac{1}{2} \cdot a$ folgt. Dies steht aber im Widerspruch dazu, dass genau 5 Teilquadrate existieren, denn nun decken T_1 bis T_4 die Fläche F schon vollständig ab.

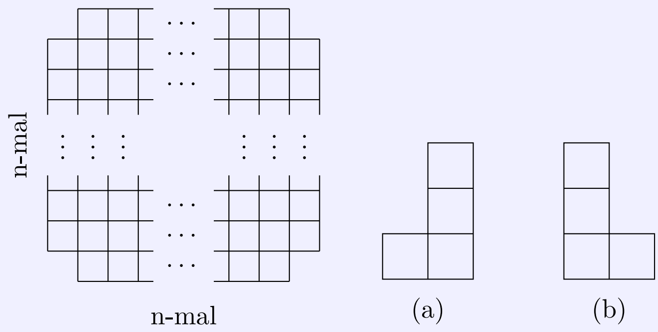
Also gibt es mindestens zwei Kanten von F, an denen die entsprechenden Teilquadrate aus T_1 bis T_4 nicht direkt benachbart sind, sodass zwischen ihnen bisher nicht abgedeckte Bereiche der Quadratfläche F existieren. Diese müsste aber T_5 gemeinsam überdecken, sodass T_5 Punkte von zwei verschiedenen Kanten von F beinhalten müsste. Liegen diese Kanten einander in F gegenüber, ergibt sich sofort ein Widerspruch, da T_5 die Kantenlänge a haben müsste, und so allein F überdecken würde. Aber auch wenn die beiden Kanten von F, auf denen Punkte liegen, die T_5 beinhalten soll, nicht parallel sind, sondern sich in einem Eckpunkt von F schneiden, folgt schnell der Widerspruch, da dann auch T_5 diesen Eckpunkt enthalten müsste, sich damit aber mit dem Teilquadrat aus T_1 bis T_4 überschneiden würde, was diesen Eckpunkt von F bereits enthält.
Demnach führt jeder Fall zum Widerspruch und es gibt keine Zerlegung von F in genau 5 Teilquadrate, sodass $N = 6$ der minimal mögliche Wert ist, der die Aussage (1) erfüllt.

Aufgabe 270934:
Jens zeichnet auf ein Blatt Papier einige Punkte, von denen keine drei auf einer gemeinsamen Geraden liegen. Er verbindet einige Male irgend zwei dieser Punkte durch eine Strecke.
Dabei kommt es auch vor, dass Punkte jeweils mit mehr als einem anderen Punkt verbunden sind.
Dirk zählt nun die von jedem Punkt ausgehenden Strecken und ermittelt dann die Anzahl A aller derjenigen Punkte, von denen jeweils eine ungerade Anzahl von Strecken ausgeht.
Christa behauptet dann, ohne zu wissen, wie viele Punkte Jens gezeichnet hat und welche Punkte er mit welchen anderen verbunden hat, die Anzahl A müsse in jedem Fall eine gerade Zahl sein.
Trifft das zu?

Lösung von cyrix:
Ja, dies trifft zu: Zählt man die von jedem Punkt ausgehenden Strecken, so muss dies die doppelte Anzahl aller Strecken sein, da jede Strecke an ihren beiden Endpunkten jeweils einen Summanden von 1 beiträgt.

Insbesondere ist diese Anzahl also gerade. Damit ist die Summe, die entsteht, wenn man für alle Punkte P die Anzahl der von P ausgehenden Strecken addiert, gerade, muss also geradzahlig viele (ggf. auch null) ungerade Summanden besitzen.
Dabei ist A genau diese Anzahl ungerader Summanden, also selbst gerade, $\Box$.

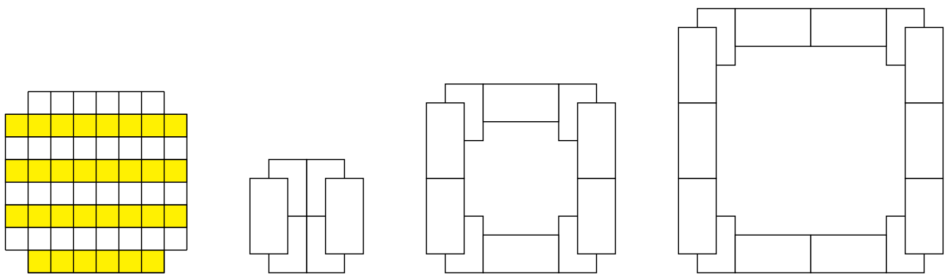
Aufgabe 280936:
Ermitteln Sie alle diejenigen Zahlen $n \geq 3$, für die es möglich ist, ein $n \times n$-Brett ohne die vier Eckfelder (siehe Abbildung) vollständig so in Teile zu zerlegen, dass jedes Teil aus einer der Flächen (a), (b) durch Verschiebung und Drehung zu erhalten ist!
Hinweis: Es ist auch zugelassen, dass in einer Zerlegung sowohl Teile (a) als auch Teile (b) vorkommen.



Lösung von Nuramon:
Da (a) und (b) beide Fläche 4 haben, muss damit so eine Lösung existiert notwendigerweise $n^2 - 4$ durch 4 teilbar sein, d. h. es muss n gerade sein. Für gerades n können wir die Zeilen des Brettes abwechselnd mit weiß und grün einfärben (siehe Skizze unten). Diese Färbung hat die Eigenschaft, dass egal wie man die Teile (a) bzw. (b) auf dem Brett positioniert, genau 1 Feld des Teils grün und die anderen 3 weiß (Typ A) bzw. genau 1 Feld weiß und die anderen 3 grün (Typ B) sind.

Da die Anzahl der weißen Felder gleich der Anzahl der grünen Felder ist, folgt, dass in einer zulässigen Zerlegung die Anzahl der Teile vom Typ A gleich der Anzahl der Teile vom Typ B sein muss. Also muss $n^2 - 4$ sogar durch 8 teilbar sein, also muss n von der Form $n = 4k + 2$ mit $k \in \mathbb{N}$ sein.

Diese Bedingung ist auch hinreichend: Für $n = 2$ ist eine Zerlegung offensichtlich möglich (von einem 2×2-Brett wurden alle vier Felder entfernt.).
Außerdem ist klar, dass man 2×4-Rechtecke in genau zwei Teile zerlegen kann.
Hat man eine Zerlegung eines Brettes der Größe $n = 4k + 2$ gefunden, dann kann man diese zu einer Zerlegung eines Brettes der Größe $4k+6$ erweitern, indem man wie in der Skizze vier Teile in den Ecken des bereits zerlegten Brettes positioniert und die beiden horizontalen Seiten dann noch mit k 2×4-Rechtecken auffüllt und die beiden vertikalen Seiten mit $k + 1$ 2×4-Rechtecken ergänzt:



Aufgabe 300931:
Zwei Spieler A und B spielen das folgende Spiel:
Auf dem Tisch liegen aufgedeckt 50 Spielkarten. Jede ist mit genau einer der Zahlen von 1 bis 50 beschriftet, jede dieser Zahlen steht auf genau einer der Karten. Weitere unbeschriftete Karten stehen zur Verfügung.
Die Spieler sind, beginnend mit A, abwechselnd am Zug.
Wer am Zug ist, wählt zwei beliebige der beschrifteten Karten und nimmt sie aus dem Spiel. Dann beschriftet er eine der unbeschrifteten Karten mit dem Absolutbetrag der Differenz der Zahlen auf

den weggenommenen Karten, legt die so neu beschriftete Karte auf den Tisch und bringt sie damit ins Spiel.
Das Spiel endet, wenn nur noch eine Karte im Spiel ist. Steht auf dieser eine gerade Zahl, so hat A gewonnen, andernfalls B.
Kann einer der Spieler das Spiel so gestalten, dass er mit Sicherheit gewinnt?

Lösung von cyrix:
Egal, wie gespielt wird, B gewinnt immer. (Damit kann sich A eine beliebige Strategie festlegen, das Spiel so gestalten, und gewinnt mit Sicherheit.)

Beweis: Seien a und b mit o. B. d. A. $a \geq b$ die Zahlen, die in einem Zug von einem Spieler auf aus dem Spiel genommenen Karten stehen. Dann verringert sich die Gesamtsumme aller Zahlen auf im Spiel befindlichen Karten um $a + b$, erhöht sich aber durch die neu ins Spiel gebrachte Karte um $a - b$.
Insgesamt verringert sich also die Gesamtsumme um $a + b - (a - b) = 2b$, also eine gerade Zahl, sodass sich die Parität der Gesamtsumme aller im Spiel befindlichen Zahlen nie ändert. Da das Spiel endlich ist (mit jedem Zug sinkt die Anzahl der im Spiel befindlichen Karten um 1), ist irgendwann nur noch eine Karte im Spiel, d. h., die darauf befindliche Zahl ist dann gleichzeitig der Gesamtsumme aller im Spiel befindlichen Zahlen.
Diese ist demnach genau dann gerade, wenn es auch die Summe aller Zahlen zu Spielbeginn war, welche $1 + 2 + \cdots + 50 = \frac{50 \cdot 51}{2} = 25 \cdot 51$, also ungerade ist. Damit bleibt in jedem Fall am Ende eine Karte mit einer ungeraden Zahl übrig, sodass B sicher gewinnt, $\square$.

Aufgabe 300933:
Man beweise, dass es 40 im Innern oder auf dem Rand eines Würfels der Kantenlänge 10 cm liegende Punkte gibt, von denen keine zwei einen Abstand kleiner als 4 cm voneinander haben.

Lösung von cyrix:
Wir beginnen mit einem Quadrat der Kantenlänge 10 cm und positionieren darauf Punkte, von denen keine zwei einen Abstand von 4 cm oder weniger haben. Dazu beginnen wir auf einer Kante des Vierecks und positionieren je einen Eckpunkt in deren Endpunkte und einen auf ihren Mittelpunkt.
Dies wollen wir eine „Dreier-Strecke“ nennen. Die Parallele zu dieser Kante im Abstand von $\frac{1}{3} \cdot 10$ cm vierteln wir und positionieren auf den beiden äußeren Teilungspunkten je einen Punkt. Dies wollen wir eine „Zweier-Strecke“ nennen.
Wieder auf der Parallelen zur Grundkante im Abstand $\frac{2}{3} \cdot 10cm$ positionieren wir analog der Grundkante eine „Dreierstrecke“ und abschließend auf der gegenüberliegenden Kante im Abstand $\frac{3}{3} \cdot 10$ cm wieder eine „Zweier-Strecke“.

Auf jeder Strecke haben je zwei ausgewählte Punkte den Abstand von mindestens 5 cm. Je zwei benachbarte der ausgewählten Punkte auf einer solchen Strecke spannen mit einem ausgewählten Punkt „zwischen ihnen“ auf einer benachbarten Strecke ein gleichseitiges Dreieck mit Basislänge 5 cm und Länge der Höhe auf die Basis von $\frac{1}{3} \cdot 10$ cm auf.
Damit haben die beiden Schenkel nach dem Satz von Pythagoras die Länge

$$\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{10}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{100}{9}} > \sqrt{\frac{24}{4} + \frac{90}{9}} = \sqrt{6 + 10} = \sqrt{16} = 4cm$$

sodass auch keine zwei ausgewählte Punkte auf verschiedenen Strecken einen Abstand von 4 cm oder geringer haben.

Auf dem Quadrat haben wir so $3 + 2 + 3 + 2 = 10$ Punkte ausgewählt, von denen keine zwei einen Abstand von 4 cm oder weniger haben. Ein solches Quadrat nennen wir „gut gefüllt“ und „mit Dreier-Strecke beginnend“.
Spiegeln wir es, indem wir Grundkante und deren gegenüberliegende Kante aufeinander abbilden, so entsteht wieder ein „gut gefülltes“ Quadrat, nun aber in der Reihenfolge „Zweier-Strecke“, „Dreier-Strecke“,

„Zweier-Strecke“, „Dreier-Strecke“. Dieses wollen wir als „mit Zweier-Strecke beginnendes, gut gefülltes Quadrat“ bezeichnen.

Starten wir nun mit der Grundfläche des Würfels und legen in diese ein „mit Dreier-Strecke beginnendes, gut gefülltes„ Quadrat.
In das Quadrat, welches als Schnitt der zur Grundfläche parallelen Ebene im Abstand $\frac{1}{3} \cdot 10$ cm mit dem Würfel entsteht, legen wir – bezüglich der gleichen Orientierung – ein „mit Zweier-Strecke beginnendes, gut gefülltes Quadrat„. In das Quadrat, welches als Schnitt der zur Grundfläche parallelen Ebene im Abstand $\frac{2}{3} \cdot 10$ cm mit dem Würfel entsteht, legen wir wieder ein „mit Dreier-Strecke beginnendes, gut gefülltes Quadrat“ und schließlich in die Deckfläche, welche zur Grundfläche parallel im Abstand $\frac{3}{3} \cdot 10$ cm liegt, wieder ein „mit Zweier-Strecke beginnendes, gut gefülltes Quadrat“.
Auf diese Weise sind in alle drei Richtungen die ausgewählten Punkte jeweils „versetzt“ angeordnet.

Zwei Punkte innerhalb eines solchen „gut gefüllten Quadrats“ haben, wie oben schon gesehen, niemals einen Abstand von 4 cm oder weniger. Da wir vier „gut gefüllte Quadrate“ in oder auf den Würfel gelegt haben, die sich paarweise nicht überschneiden (da sie in verschiedenen, zueinander parallelen Ebenen liegen), beträgt die Gesamtanzahl der so markierten Punkte also $4 \cdot 10 = 40$.
Jedoch bilden auch die so markierten Punkte auf den Schnitten, die durch Ebenen parallel zu den anderen Seitenflächen des Würfels im Abstand $\frac{i}{3} \cdot 10$ cm zu diesen für jedes $i = 0{,}1{,}2{,}3$ „gut gefüllte Quadrate“, sodass auch hier keine zwei Punkte einen Abstand von 4 cm oder weniger besitzen.
Also haben zumindest all diejenigen Paare verschiedener markierter Punkte, die in einer gemeinsamen zu einer Seitenfläche des Würfels parallelen Ebene liegen, jeweils einen Abstand von mehr als 4 cm zueinander. Zwei Punkte, die aber in keiner gemeinsamen solchen Ebene liegen, haben in jeder Richtung einen Abstand von mindestens $\frac{1}{3} \cdot 10$ cm, also nach dem Satz von Pythagoras einen Abstand von mindestens

$$\sqrt{\left(\frac{10}{3}\right)^2 + \left(\frac{10}{3}\right)^2 + \left(\frac{10}{3}\right)^2} = \sqrt{3 \cdot \frac{100}{9}} > \sqrt{\frac{300}{10}} = \sqrt{30} > \sqrt{16} = 4cm$$

also mehr als 4 cm. Damit haben je zwei verschiedene der angegebenen markierten Punkte einen Abstand von mehr als 4 cm, $\square$.

Aufgabe 310931:
Denkt man sich an jede Ecke eines räumlichen Körpers eine Zahl geschrieben, so bezeichnen wir für jede Seitenfläche dieses Körpers als „Flächensumme“ dieser Seitenfläche die Summe aus den Zahlen, die an die Ecken dieser Seitenfläche geschrieben werden.
Untersuchen Sie, ob es möglich ist, an die Ecken eines Oktaeders die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 in einer solchen Reihenfolge zu schreiben, dass alle acht Flächensummen des Oktaeders einander gleich sind!

Lösung von cyrix:
Nein dies ist nicht möglich:
Gäbe es eine solche Verteilung, dann müsste die Summe aller acht Flächensummen einerseits das Vierfache der Summe der sechs Zahlen, also $4 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 4 \cdot 21 = 84$, betragen, da jede jeder Eckpunkt an genau vier Flächen beteiligt ist, aber andererseits natürlich durch acht teilbar sein, da die acht Flächensummen alle gleich groß sein sollen.
Es ist aber 84 nicht durch 8 teilbar, sodass es eine solche Verteilung der Zahlen an die Eckpunkte, die die Bedingung der Aufgabenstellung erfüllt, nicht möglich ist, $\square$.

Aufgabe 320931:
In einem Land gibt es nur zwei Sorten von Menschen: Edelmänner und Schurken.
Jeder Edelmann macht nur wahre Aussagen, jeder Schurke nur falsche Aussagen. Ein nicht aus diesem Land stammender Reporter berichtet, er habe folgendes Gespräch dreier Einwohner A, B und C dieses Landes gehört:
A sagt zu B: „Wenn C ein Edelmann ist, dann bist du ein Schurke.“
C sagt zu A: „Du bist von anderer Sorte als ich.“

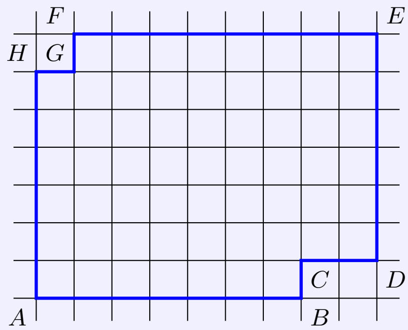
Kann ein solches Gespräch stattgefunden haben?
Wenn das der Fall ist, geht dann aus dem Gespräch für jeden der drei A, B, C eindeutig hervor, ob er Edelmann oder Schurke ist, und zu welchen Sorten gehören dann A, B und C?

Lösung von cyrix:
Wir betrachten zuerst C und seine Aussage. Wäre er ein Schurke, so also auch A, der mit seiner Aussage also eine falsche Aussage getroffen hätte. Nun ist aber die Voraussetzung „Wenn C ein Edelmann ist“ seiner Aussage nicht erfüllt, diese also automatisch immer wahr, was ein Widerspruch ist.

Also kann in einem solchen Gespräch C kein Schurke, muss also ein Edelmann sein. Dann jedoch ist seine Aussage wahr und A ein Schurke. Dessen Aussage ist damit falsch, sodass (aufgrund der diesmal erfüllten Voraussetzung der Aussage von A) auch B ein Edelmann sein muss.

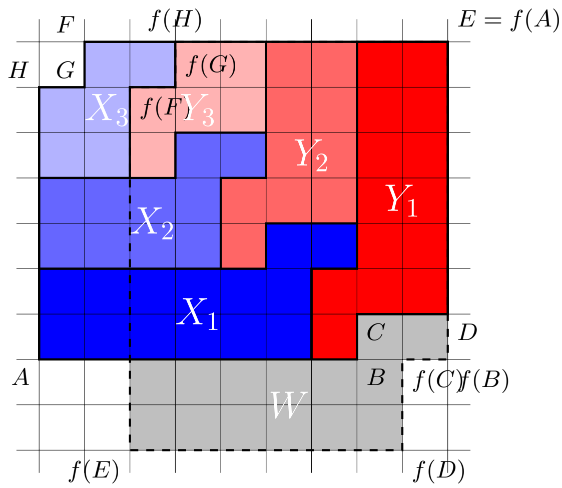
In dieser Konstellation kann das Gespräch stattgefunden haben und es ist eindeutig bestimmt, welcher Sorte jeweils A, B und C angehören, nämlich B und C den Edelmännern und A den Schurken.

Aufgabe 320935:
Auf kariertem Papier (eingeteilt in quadratische Karos) ist ein Achteck $ABCDEFGH$ wie in der Abbildung gezeichnet.
Jemand will es in zwei kongruente Teilflächen zerschneiden, und zwar sollen sich diese Teilflächen so miteinander zur Deckung bringen lassen, dass dabei A mit E zur Deckung kommt.
Die Schnittkurve soll ein zusammenhängender Streckenzug sein, der sich selbst nicht überkreuzt und der nur aus Teilstrecken zusammengesetzt ist, die auf dem karierten Papier vorgegeben sind.



Beweisen Sie, dass es genau einen Streckenzug gibt, mit dem das Achteck wie gewünscht zerschnitten werden kann!

Lösung von Nuramon:



Angenommen das Achteck $Z := ABCDEFGH$ ist in zwei Flächen X,Y mit den geforderten Eigenschaften zerlegt, wobei $A \in X$ und $E \in Y$. Es sei f diejenige (affin lineare) Abbildung, durch die X mit Y zur Deckung kommt und die $f(A) = E$ erfüllt.

f muss das Kästchen links unten in Z (das mit der Ecke A) auf das Kästchen rechts oben in Z (das mit Ecke E) abbilden, wobei $f(A) = E$. Es gibt nur zwei Abbildungen mit dieser Eigenschaft, die in Frage kommen:
- eine ist die Drehung um 180° um den Mittelpunkt der Strecke AE,
- die andere erhält man, indem man Z zuerst parallel verschiebt, so dass der Punkt A auf E zu liegen kommt und anschließend an derjenigen Gerade spiegelt, die Z nur im Punkt E schneidet und mit EF einen Winkel von 45° einschließt.

f kann nicht die Drehung sein, denn dann wäre $f \circ f = \text{id}$ und somit hätte $Z = X \cup Y = X \cup f(X) = f \circ f(X) \cup f(X) = f(f(X) \cup X) = f(Z)$ eine Punktsymmetrie.
Also muss f die andere genannte Abbildung sein. Da die Abbildung f bijektiv ist und X auf Y abbildet, muss gelten: (1): Für alle Punkte $p \in Z$ gilt $f(p) \in Y$ genau dann, wenn $p \in X$ gilt.

Es sei $f(Z)$ das Achteck $f(A)f(B)f(C)f(D)f(E)f(F)f(G)f(H)$, dass man erhält, wenn man f auf das Achteck $Z = ABCDEFGH$ anwendet.

Es sei $W := f(Z) \setminus Z$. Für jeden Punkt $p \in Z = X \cup Y$ mit $f(p) \in W$ gilt dann insbesondere $f(p) \notin Y$ und nach (1) gilt somit $p \in Y$.
Daher ist die Menge $Y_1 := \{p \in Z \mid f(p) \in W\}$ eine Teilmenge von Y.
Wiederum nach (1) muss dann die Menge $X_1 := \{p \in Z \mid f(p) \in Y_1\}$ eine Teilmenge von X sein.

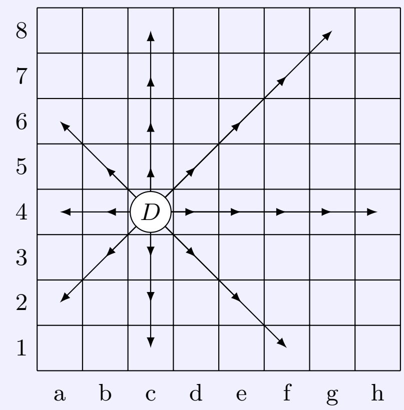
Als nächstes betrachten wir $Y_2 := \{p \in Z \mid f(p) \in X_1\}$. Wieder folgt aus (1), dass Y_2 eine Teilmenge von Y ist.
Somit ist auch $X_2 := \{p \in Z \mid f(p) \in Y_2\}$ eine Teilmenge von X.

Schließlich sei $Y_3 := \{p \in Z \mid f(p) \in X_2\} \subset Y$ und $X_3 := \{p \in Z \mid f(p) \in Y_3\} \subset X$.
Wir stellen fest, dass $X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup Y_1 \cup Y_2 \cup Y_3$ bis auf einige Gitterlinien schon ganz Z ist.
Also muss X der Abschluss von $X_1 \cup X_2 \cup X_3$ sein und Y der Abschluss von $Y_1 \cup Y_2 \cup Y_3$ sein.

Tatsächlich erfüllen die so konstruierten Flächen alle gewünschten Eigenschaften. Damit ist sowohl die Eindeutigkeit als auch die Existenz von X,Y bewiesen.

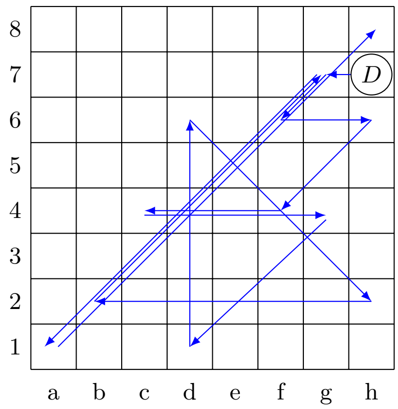
Aufgabe 330941:

Auf einem Schachbrett wird eine Figur „Dame“ betrachtet, die wie im Schachspiel ziehen kann, also in den acht Richtungen parallel zum Brettrand oder diagonal, jeweils beliebig viele Felder. (siehe z. B. in der Abbildung alle von c4 aus möglichen Züge.)
Als Länge eines Zuges werde stets die Streckenlänge vom Mittelpunkt des Anfangsfeldes zum Mittelpunkt des Zielfeldes bezeichnet. Dabei werde die Seitenlänge jedes der 64 quadratischen Felder als Längeneinheit genommen. Gesucht wird eine Zugfolge, die den folgenden Bedingungen genügt:



(1) Bei jedem Zug der Zugfolge - mit Ausnahme des letzten - soll der Zug, der sich anschließt (d. h. als Startfeld das eben erreichte Zielfeld hat), eine größere Länge haben als der Zug, an den er sich anschließt.
(2) Das Zielfeld des letzten Zuges soll dem Startfeld des ersten Zuges benachbart sein (und zwar eine Seite mit ihm gemeinsam haben, nicht nur eine Ecke).
(3) Die Zugfolge soll in der Summe der Längen ihrer Züge von keiner Zugfolge, die den Bedingungen (1) und (2) genügt, übertroffen werden.
Geben Sie eine Zugfolge an und beweisen Sie, dass sie die Bedingungen (1), (2) und (3) erfüllt!

Lösung von cyrix:



Es ist $1 < \sqrt{2} < 2 < 2\sqrt{2} < 3 < 4 < 3\sqrt{2} < 5 < 4\sqrt{2} < 6 < 7 < 5\sqrt{2} < 6\sqrt{2} < 7\sqrt{2}$.

Wenn es einen Weg gibt, der alle diese Streckenlängen erfüllt, dann muss er in einem Eckfeld enden, o. B. d. A. h8. Der Zug davor muss dann in a1 starten, der davor in g7 und der davor in b2. Dann jedoch wäre zuvor kein Zug der Länge 7 möglich gewesen, da man dazu am Rand des Schachbretts stehen und auch ankommen muss. Also kann nicht jede der Längen ≥ 7 in der Zugfolge vorkommen.

Streichen wir den Zug der Länge 7, so machen wir hierbei die Summe um den kleinstmöglichen Wert kleiner, bleiben also maximal (unter der Voraussetzung, dass alle kürzeren Züge nun möglich sind). Wir benötigen also einen Zug der Länge 6, der in b2 endet. Dies kann sowohl b8 als auch h2 sein. Da beide symmetrisch zur Hauptdiagonalen liegen (auf der sich auch das Zielfeld h8 des letzten Zug befindet), können wir o. B. d. A. h2 als dessen Ausgangsfeld wählen.
Dort muss nun ein Zug der Länge $4\sqrt{2}$ ankommen, der also nur in d6 gestartet sein kann. Der davor erfolgende Zug der Länge 5 muss dann von Feld d1 ausgegangen sein. Dort muss ein Zug der Länge $3\sqrt{2}$ sein Ziel gefunden haben, der damit von a4 oder g4 gestartet sein muss.

Wir geben im folgenden einen Weg an, der in h7 startet, aufsteigend alle Längen von 1 bis $7\sqrt{2}$, mit Ausnahme der Länge 7, durchläuft und im Nachbarfeld h8 von h7 endet:

h7 – g7 – f6 – h6 – f4 – c4 – g4 – d1 – d6 – h2 – b2 – g7 – a1 – h8

Diese Zugfolge hat maximale Länge unter Einhaltung der Bedingungen (1) und (2), ist also eine gesuchte.

Aufgabe 340934:
Ein Quadrat $ABCD$ sei in 25 kongruente Teilquadrate aufgeteilt.
Ist n eine positive ganze Zahl mit $n \leq 25$, so seien n verschiedene Farben gewählt, und von jeder dieser Farben seien 25 Blättchen von der Größe der Teilquadrate zur Verfügung gestellt.
Von diesen $n \cdot 25$ Blättchen sollen dann 25 ausgewählt und so auf das Quadrat $ABCD$ gelegt werden, dass jedes Teilquadrat von genau einem der ausgewählten Blättchen bedeckt wird.
Eine Zahl n werde genau dann eine „freundliche“ Zahl genannt, wenn für sie folgendes gilt:
Bei jeder Auswahl von 25 der $n \cdot 25$ Blättchen, bei der jede der n Farben mit mindestens einem Blättchen vertreten ist, kann man die Verteilung auf die Teilquadrate so vornehmen, dass das bedeckte Quadrat $ABCD$ als farbiges Muster symmetrisch bezüglich der Geraden durch A und C ist.
Ermitteln Sie unter den positiven ganzen Zahlen $n \leq 25$ alle „freundlichen“ Zahlen!

Lösung von cyrix:
Für jede symmetrische Belegung gilt, dass die 10 Teilquadrate oberhalb der Diagonalen AC jeweils die gleiche Farbe wie die 10 Teilquadrate unterhalb dieser Diagonalen haben müssen, während die Farben der 5 Diagonalfelder beliebig sind. Dies ist auch hinreichend. Aus einer Auswahl von 25 Blättchen lässt sich also genau dann keine zu AC symmetrische Belegung erzeugen, wenn sie keine 10 paarweise disjunkte

Paare von gleichfarbigen Blättchen besitzt.

Seien $a_1, a_2, \ldots, a_n$ die Anzahl der Blättchen der Farbe $1, 2, \ldots, n$ unter den 25 ausgewählten, dann lassen sich aus diesen maximal

$$P := \left[\frac{a_1}{2}\right] + \left[\frac{a_2}{2}\right] + \cdots + \left[\frac{a_n}{2}\right]$$

solcher Paare bilden. Wegen $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 25$ ist $P = \frac{25-u}{2}$, wobei u die Anzahl der ungeraden Zahlen unter $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ist. (Dann ist, da 25 ungerade ist, auch u ungerade und somit P eine ganze Zahl.) Aus diesen Blättchen lässt sich also genau dann keine bezüglich AC symmetrische Belegung bilden, wenn es mehr als 5, also mindestens 7 ungerade Blättchenanzahlen unter $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gibt.

Dafür muss aber $n \geq 7$ sein. Dies bedeutet, dass alle $n \leq 6$ „freundlich“ sind. Ist jedoch $n = 7$, so kann man $a_1 = a_2 = \cdots = a_6 = 1$ und $a_7 = 19$, bzw. für $n > 7$ schließlich $a_1 = a_2 = \cdots = a_7 = 1$ (und Rest beliebig ≥ 1) auswählen, sodass bei dieser Wahl jeweils keine bezüglich AC symmetrischen Belegungen möglich sind. Also sind alle $7 \leq n \leq 25$ „unfreundlich“.

Aufgabe 340941:
Die Bewohner des Planeten Quadron unterscheiden sich nach ihrem Geschlecht, und zwar gibt es, anders als auf der Erde, genau vier verschiedene Geschlechter. Politisch ist die Bevölkerung eingeteilt in genau vier Völkerstämme.
Wenn der planetare Rat zusammentritt, entsendet jeder Völkerstamm genau vier Abgeordnete, von jedem Geschlecht einen.
Es ist dann eine Sitzordnung vorgeschrieben, bei der 16 Sitze in quadratförmiger Formierung zu vier Zeilen und vier Spalten angeordnet sind. In jeder Zeile und in jeder Spalte müssen alle vier Völkerstämme und alle vier Geschlechter vertreten sein.
Gib eine mögliche Sitzordnung an und bestätige, dass bei dieser Sitzordnung alle genannten Bedingungen erfüllt sind!

Lösung von cyrix:
Wir bezeichnen die Völkerstämme mit a, b, c und d, sowie die Geschlechter mit 1, 2, 3 bzw. 4, sodass also a1 den Abgeordneten von Völkerstamm a mit Geschlecht 1 bezeichne.
Dann gibt folgende Tabelle eine zulässige Sitzordnung an, wobei man sich leicht davon überzeugt, dass in jeder Zeile und jeder Spalte jeder Völkerstamm a bis d sowie jedes Geschlecht 1 bis 4 genau einmal vertreten ist und kein Abgeordneter mindestens zwei oder gar keinen Sitzplatz erhält:

$$\begin{array}{cccc} a1 & b2 & c3 & d4 \\ b3 & a4 & d1 & c2 \\ c4 & d3 & a2 & b1 \\ d2 & c1 & b4 & a3 \end{array}$$

Aufgabe 340944:
Axel führt einen Kartentrick vor. Er benutzt dazu ein Skatspiel, bestehend aus jeweils 4 Karten der folgenden Arten, denen er folgende Augenwerte zuteilt:

Art der Karte		7	8	9	10	Bube	Dame	König	As
Augenwert		7	8	9	10	2	3	4	11

Seine Freunde sollen, während er nicht im Zimmer ist, nach folgender Vorschrift Kartenstapel bilden: Für jeden Stapel wird zunächst eine Karte offen hingelegt, und der damit beginnende Stapel erhält so viele Punkte, wie der Augenwert dieser Karte angibt.
Dann werden weitere Karten verdeckt auf den Stapel gelegt; für jede dieser Karten wird die Punktzahl des Stapels um 1 erhöht. Dies wird aber nur so lange durchgeführt, bis die Punktzahl 11 erreicht ist; der Stapel ist damit abgeschlossen.
Er wird dann umgedreht, so dass die bisher unterste Karte nun verdeckt oben liegt.
1. Beispiel: 7 offen hinlegen vier Karten verdeckt darauf legen, Stapel umdrehen.

2. Beispiel: As offen hinlegen, umdrehen.
Solche Stapel werden einige Male gebildet und nebeneinander auf den Tisch gelegt. Falls am Ende Karten übrig bleiben, werden diese „Restkarten“ einzeln abzählbar und verdeckt neben den Stapel gelegt.
Dann wird Axel herein gerufen. Er behauptet, er könne aus der Anzahl der fertigen Stapel und der Anzahl der Restkarten die Summe der Augenwerte der nunmehr obersten Karten der Stapel finden.
Wie ist das möglich?

Lösung von cyrix:
Bevor der erste Stapel gebildet wurde, war die Anzahl der Restkarten 32. Es sei a_1 der Wert der für den ersten Stapel zu Beginn offen hingelegten Karte. Dann verringert sich die Anzahl der Restkarten um $1 + (11 - a_1) = 12 - a_i$, denn neben der einen aufgedeckten Karte mit Wert a_1 werden noch $11 - a_1$ weitere Karten auf diesen Stapel gelegt.
Analog reduziert jeder weiterer Stapel mit zuerst offen liegendem Kartenwert $a - i$ die Anzahl der nun noch vorhandenen Restkarten um den Wert $12 - a_i$.
Sieht also Axel n Stapel und r Restkarten, so weiß er

$$r = 32 - (12 - a_1) - \cdots - (12 - a_n) = 32 - n \cdot 12 + (a_1 + \cdots + a_n)$$

bzw. $a_1 + \cdots + a_n = n \cdot 12 + r - 32$,
kennt also die Summe der Kartenwerte der zuerst für jeden Stapel ofen ausgelegten Karten, die nach dem Umdrehen nun die obersten Karten eines jeden Stapels sind.

V.III. Berechnen von Anzahlen, Wahrscheinlichkeiten

I. Runde 1

Aufgabe V00909:
Wie viel verschiedene Würfe lassen sich mit
a) zwei Würfeln,
b) drei Würfeln
machen, wenn zwei Würfe als verschieden gelten, sofern wenigstens einer der zwei bzw. drei Würfel bei einem Wurf andere Augenzahl zeigt, als beim anderen Wurf?
Wie wurde die Lösung gefunden?

Lösung von Steffen Polster:
Zeigt der 1. Würfel eine „1“, so kann der zweite 6 Werte anzeigen, zeigt der 1. Würfel eine „2“ verbleiben für den zweiten noch 5 Werte, usw. Damit gibt es bei 2 Würfeln genau 21 verschieden Würfe.
Bei drei Würfeln ergeben sich analog 56 verschiedene Würfe.

Aufgabe V10912:
Wie viel zueinander verschiedene Stellungen können ein weißer und ein schwarzer Stein auf einem Schachbrett (64 Felder) einnehmen?

Lösung von Steffen Polster:
Zu jeder Stellung des schwarzen Steines gibt es 63 Möglichkeiten für die Stellung des weißen Steines. Der schwarze Stein kann 64 verschiedene Felder besetzen. Mithin gibt es $63 \cdot 64 = 4032$ zueinander verschiedene Stellungen.

Aufgabe 050912:
Es ist zu beweisen, dass 77 Telefone nicht so miteinander verbunden werden können, dass jedes mit genau 15 anderen verbunden ist.

Lösung von Manuela Kugel:
Angenommen, diese Verbindung wäre realisierbar. Wir stellen uns vor, dass jede Verbindung durch eine gesonderte Leitung erfolgt. Dann müssten auf jedem Telefon genau 15 Anschlüsse vorhanden sein, insgesamt also $77 \cdot 15$.

Da die Verbindung von Telefon A zu Telefon B stets gleichzeitig Verbindung von Telefon B zu Telefon A ist, müsste die Gesamtzahl der Anschlüsse durch 2 teilbar sein.
Das ist jedoch unmöglich, da $77 \cdot 15$ eine ungerade Zahl ergibt.

Aufgabe 110911:
Jörg schreibt die folgende Gleichung auf:

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{c+d} = \frac{1}{(a+b)(c+d)} \tag{1}$$

Michael meint, dass sie „falsch“ sei. Jörg, der sich nicht so leicht „überzeugen“ lässt, wählt für die Variablen a, b, c und d Zahlen, setzt sie in die Gleichung (1) ein und erhält zu Michaels Überraschung eine wahre Aussage.

Ermitteln Sie alle Möglichkeiten, nur aus den Zahlen –1, 0, 1 für a, b, c und d je eine so auszuwählen, dass die Gleichung (1) erfüllt wird!

Lösung von Manuela Kugel:
Addiert man die Quotienten auf der linken Seite der Gleichung, so folgt, dass die Gleichung gleichbedeutend ist mit

$$\frac{c+d+a+b}{(a+b)(c+d)} = \frac{1}{(a+b)(c+d)}.$$

Diese Gleichung ist genau dann eine wahre Aussage, wenn $a+b+c+d=1$ und $a \neq -b$ sowie $c \neq -d$ gelten. Wählt man für a eine der Zahlen -1, 0 oder 1, so verbleiben für b wegen $a \neq -b$ je genau zwei Zahlen , nämlich die in der untenstehenden Tabelle genannten.

Von den erhaltenen Zahlen sind die mit $a+b=-2$ und die mit $a+b=1$ auszuschließen, da sich aus $a+b+c+d=1$ für sie $c+d=3$ bzw. $c+d=0$ ergibt, was durch Wahl von c und d aus den Zahlen -1, 0, 1 nicht zu erreichen ist bzw. im Widerspruch zu $c \neq -d$ steht.

In jeder der nun verbliebenen Möglichkeiten ergibt sich genau eine Zahl für $c+d$, die durch Wahl von c und d aus den Zahlen -1, 0, 1 durch genau die folgenden Zahlen erreicht werden kann:

a	-1	-1	0	0	1	1	1
b	-1	0	-1	1	0	1	1
a+b	-2	-1	-1	1	1	2	1
c+d	3	2	2	0	0	-1	-1
c	-	1	1	-	-	-1	0
d	-	1	1	-	-	0	-1

Die 2., 3., 6. und 7. Spalte genügen als einzige allen Bedingungen der Aufgabe, wie man durch Einsetzen erkennt.

Aufgabe 250911:
Aus den Ziffern 1, 9, 8, 5 seien alle möglichen vierstelligen Zahlen gebildet, wobei jede der Ziffern in jeder dieser Zahlen genau einmal vorkommen soll.

Ermitteln Sie die Anzahl aller derartigen Zahlen, die
a) durch 2,
b) durch 3,
c) durch 4,
d) durch 5,
e) durch 6
teilbar sind, und geben Sie diese Zahlen jeweils an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Durch 2 sind von den genannten vierstelligen Zahlen genau diejenigen teilbar, die auf eine geradzahlige Ziffer, also auf 8 enden. Mit den restlichen 3 Ziffern kann man 6 verschiedene Zahlen bilden, also gibt es genau 6 derartige durch 2 teilbare Zahlen, nämlich 1598, 1958, 5198, 5918, 9158 und 9518.

b, e) Da die Quersumme von 1985 nicht durch 3 teilbar ist, und das auch für alle durch Umordnung zu bildenden Zahlen gilt, ist keine der Zahlen durch 3 und damit auch keine durch 7 teilbar.

c) Eine Zahl ist genau dann durch 4 teilbar, wenn die von den letzten beiden Ziffern gebildete Zahl durch 4 teilbar ist. Aus den Ziffern 1, 5, 8 und 9 kann aber keine solche zweistellige Zahl gebildet werden; denn sie müsste gerade sein, also auf 8 enden, und die Zahlen 18, 58 und 98 sind nicht durch 4 teilbar. Folglich gibt es keine derartigen durch 4 teilbaren Zahlen.

d) Durch 5 sind von diesen Zahlen genau diejenigen teilbar, die auf 5 enden. Mit den restlichen 3 Ziffern kann man 6 verschiedene Zahlen bilden. Also sind genau 6 derartige Zahlen durch 5 teilbar, nämlich 1895, 1985, 8195, 8915, 9185 und 9815.

Aufgabe 250912:
Ermitteln Sie die Anzahl aller derjenigen Paare (a, b) einstelliger natürlicher Zahlen a und b, für die

$$a < \overline{a,b} < b \quad \text{gilt!}$$

Dabei gilt die 0 als einstellige Zahl, und mit $\overline{a,b}$ sei diejenige Dezimalzahl bezeichnet, die die Ziffer a vor dem Komma und die Ziffer b nach dem Komma hat.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

I Wenn ein Paar (a,b) einstelliger natürlicher Zahlen die verlangte Eigenschaft hat, so folgt: Es gilt

$$a < b \tag{1}$$

II Wenn ein Paar (a,b) einstelliger natürlicher Zahlen die Ungleichung (1) erfüllt, so folgt wegen der Ganzzahligkeit von a und b, dass

$$a + 1 \leq b \tag{2}$$

gilt. ferner ist $a \geq 0$, nach (2) also $b \geq 1$; daher gilt für die einstellige Zahlen b

$$1 \leq b \leq 9 \qquad \text{also} \qquad a + \frac{1}{10} \leq a + \frac{b}{10} \leq a + \frac{9}{10}$$

und somit erst recht

$$a < a + \frac{b}{10} < a + 1 \tag{3}$$

Da $a + \frac{b}{10}$ die mit $\overline{a,b}$ bezeichnete Zahl ist, folgt aus (3) und (2) die geforderte Eigenschaft $a < \overline{a,b} < b$.

III Mit I. und II. ist bewiesen, dass genau diejenigen Paare (a,b) einstelliger natürlicher Zahlen die verlangte Eigenschaft haben, die (1) erfüllen.

Ist $a = 0$, so wird (1) genau für die neun Zahlen $b = 1, \ldots, 9$ erfüllt;

Ist $a = 1$, so wird (1) genau für die acht Zahlen $b = 2, \ldots, 9$ erfüllt;

...

Ist $a = 8$, so wird (1) genau für die eine Zahl $b = 9$ erfüllt;

Ist $a = 9$, so wird (1) genau für keine einstellige natürliche Zahl b erfüllt.

Folglich haben genau $9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 45$ Paare die geforderte Eigenschaft.

Alternativ-Lösung von cyrix:
Offenbar gilt $a \leq \overline{a,b} < a + 1$, wobei Gleichheit nur genau für $b = 0$ erfüllt ist. Also muss, um die in der Aufgabenstellung geforderte Ungleichung zu erfüllen, $a < b$ gelten; und wann immer dies gilt, ist auch die geforderte Ungleichung erfüllt.
Damit ist die Anzahl aller Paare (a,b) mit $a < b$ und $a,b \in \{0; 1; \ldots; 9\}$ zu bestimmen. Für jede der $\binom{10}{2} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45$ Möglichkeiten aus dieser Menge eine zwei-elementige Teilmenge $\{a; b\}$ auszuwählen, gibt es genau eine, in der $a < b$ gilt. Also gibt es genau 45 solche Paare, die die Bedingung der Aufgabenstellung erfüllen.

Aufgabe 260913:
Ermitteln Sie die Anzahl aller verschiedenen Tripel ganzer Zahlen (x, y, z), für die

(1) $x \leq y \leq z$ und

(2) $xyz = 1986$ gilt!

Hinweis: Zwei Tripel (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2) heißen genau denn voneinander verschieden, wenn mindestens eine der Ungleichungen $x_1 \neq x_2$; $y_1 \neq y_2$; $z_1 \neq z_2$ gilt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wegen der Primfaktorzerlegung $1986 = 2 \cdot 3 \cdot 331$ gibt es genau die folgenden fünf verschiedenen Tripel natürlicher Zahlen, die (1) und (2) erfüllen:

$$(1,1,1986), \quad (1,2,993), \quad (1,3,662), \quad (1,6,331), \quad (2,3,331)$$

Alle weiteren Tripel ganze Zahlen, die (1) und (2) erfüllen, erhält man, indem man in jeweils einem der genannten Tripel jeweils genau zwei Zahlen durch ihre entgegengesetzten Zahlen ersetzt und die Reihenfolge der entstandenen Zahlen gemäß (1) wählt.

Ausgehend von (1,1,1986) führt dies auf genau zwei weitere Tripel

$$(-1986, -1,1), \qquad (-1, -1,1986)$$

Ausgehend von jeweils einem Tripel (x,y,z) mit $0 < x < y < z$ führt dies dagegen, unter Beachtung von $-z < -y < -x < x < y < z$, genau auf die drei weiteren Tripel

$$(-z, -y,x), \quad (-z, -x,y), \quad (-y, -x,z)$$

Daher ergibt sich als gesuchte Anzahl $5 + 2 + 4 \cdot 3 = 19$.

Aufgabe 270912:
Bei einem Dominospiel mit den Zahlen 0, 1, ..., 6 ist jeder Spielstein in zwei Hälften eingeteilt, jede Hälfte trägt eine der Zahlen. In einem Dominospiel kommen alle Kombinationen von je zwei der Zahlen 0, 1, ..., 6 je genau einmal vor (und zwar auch diejenigen, bei denen auf den beiden Hälften eines Steines dieselbe Zahl steht).

Eine „Kette“ entsteht, wenn man mehrere Steine in einer Folge so nebeneinanderlegt, dass benachbarte Hälften nebeneinanderliegender Steine stets einander gleiche Zahlen tragen (Domino-Spielregel).

Eine Kette heißt „geschlossen“, wenn auch die beiden Steinhälften an den beiden freien Enden der Kette einander gleiche Zahlen tragen (so dass man die Kette, wenn sie aus genügend vielen Steinen besteht, an ihren Anfang zurückführen und dort schließen kann).

a) Ermitteln Sie die Anzahl aller zu einen Dominospiel gehörenden Steine!

b) Ermitteln Sie die größte Zahl solcher Steine eines Dominospiels, aus denen sich eine geschlossene Kette bilden lässt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Es gibt genau 7 Steine, bei denen auf den beiden Hälften des Steins dieselbe Zahl steht.

Um die anderen Steine zu beschreiben, kann man für ihr erstes Feld eine der 7 Zahlen wählen und für das zweite Feld jeweils eine der 6 anderen Zahlen. Dabei hat man jeden Stein der genannten Art genau 2 mal erfasst. Die Anzahl der Steine beträgt folglich $\frac{7 \cdot 6}{2} = 21$.
Die Anzahl aller zu einem Dominospiel gehörenden Steine beträgt somit $7 + 21 = 28$.

b) Man kann aus alle Steinen eines Dominospieles eine geschlossene Kette bilden, z. B.

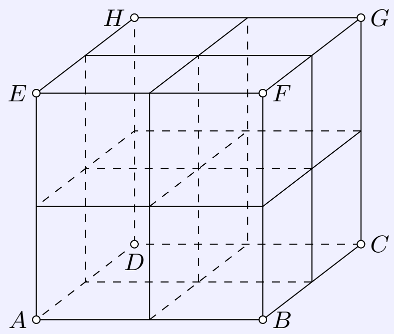
00 / 01 / 11 / 12 / 22 / 23 / 33 / 34 / 44 / 45 / 55 / 56 / 66 / 61 / 13 / 35 / 51 / 14 / 46 / 62 / 24 / 40 / 02 / 25 / 50 / 03 / 36 / 60

Die gesuchte größte Zahl für eine geschlossene Kette beträgt folglich 28.

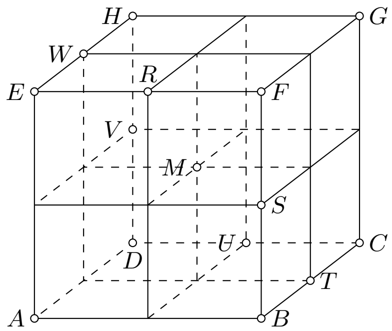
Aufgabe 340912:
Die Abbildung zeigt ein aus Strecken zusammengesetztes Gitter. Diese Strecken sind - nach Zerlegung eines Würfels $ABCDEFGH$ in acht einander gleichgroße Teilwürfel - die Kanten dieser Teilwürfel.
Eine Ameise, die sich nur auf diesen Strecken bewegen kann, soll auf einem möglichst kurzen Weg von A nach G gelangen. Wie viele verschieden Wege gibt es hierfür insgesamt,

a) wenn alle Strecken des Gitters zugelassen sind.

b) wenn nur solche Strecken des Gitters zugelassen sind, die der Oberfläche des Würfels $ABCDEFGH$ angehören?



Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



a) Zur eindeutigen Kennzeichnung eines möglichst kurzen Weges von A nach G ist insgesamt 6 mal die Richtung der nächsten Strecke anzugeben, je 2 mal nach rechts, nach hinten und nach oben. Daher gibt es ebenso viele verschiedene Wege, wie es verschiedene Reihenfolgen der Buchstaben **r, r, h, h, o, o** gibt.
Die Anzahl dieser Reihenfolgen ist bekanntlich

$$\frac{6!}{2!\cdot 2!\cdot 2!} = \frac{720}{2\cdot 2\cdot 2} = 90$$

b) Ein Weg bleibt genau dann nicht nur auf der Oberfläche des Würfels $ABCDEFGH$, wenn er über den Punkt M führt (siehe Abbildung). Von A nach M gibt es genau $3! = 6$ Wege (Reihenfolgen von **r, h, o**), ebenso von M nach G. Also beträgt die Anzahl der auszuschließenden Wege $6\cdot 6 = 36$. Die Anzahl der Wege nur auf der Oberfläche ist somit 54.

Aufgabe 340913:
Karin und Rolf sammeln Straßenbahnfahrscheine. Jeder Fahrschein hat eine Nummer aus 6 Ziffern. Ist darin die Summe der ersten drei Ziffern gleich der Summe der letzten drei Ziffern, so heißt der Schein ein *Glücksschein.*

Um die Chance hierfür abzuschätzen, wollen Karin und Rolf wissen, wieviel Prozent aller Fahrscheine *Glücksscheine* sind. Dabei wird vorausgesetzt, dass jede Nummer von 000000 bis 999999 gleich oft vorkommt.

Karin schreibt ein einfaches Computerprogramm, mit dem die gesuchte Prozentzahl dadurch ermittelt wird, dass eine Anweisungsfolge 1000000 mal abläuft. Da das lange dauert, schreibt Rolf ein Programm, in dem eine (andere) Anweisungsfolge nur 1000 mal ablaufen muss (und sonst nur wenige weitere Anweisungen zu durchlaufen sind).

Schreiben Sie je ein solches Programm und erläutern Sie, warum damit die gesuchte Prozentzahl gefunden wird! (Die Wahl der Programmiersprache ist natürlich freigestellt.)

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Zwei Beispiele für Programme der genannten Art sind:

1. Programm:
```
1 z = 0
2 for a = 0 to 9
3   for b = 0 to 9
4     for c = 0 to 9
5       for d = 0 to 9
6         for e = 0 to 9
7           for f = 0 to 9
8             if a+b+c = d+e+f then z = z+1
9           next
10        next
11      next
12    next
13  next
14 next
15 print z/10000
```

2. Programm:
```
1 dim n(27)
2 for s = 0 to 27
3   n(s) = 0
4 next
5 for a = 0 to 9
6   for b = 0 to 9
7     for c = 0 to 9
8       s = a+b+c
9     next
10  next
12 next
13 z = 0
14 for s = 0 to 27
15   z = z + n(s)*n(s)
16 next
17 print z/10000
```

Im 1. Programm läuft die Anweisung 8, wenn die Schleifen 2 - 7, 9 - 14 verfolgt werden, 1000000 mal ab; es wird einfach jede der Nummern von 000000 bis 999999 auf die Eigenschaft $a+b+c = d+e+f$

untersucht. Liegt sie vor, so wird die (zu Beginn in 1 auf 0 gesetzte) Zählvariable z um 1 erhöht. Sie gibt am Ende also die Anzahl aller „Glücksschein"-Nummern an, so dass in 15 das Hundertfache von $z/1000000$ als die gesuchte Prozentzahl ausgegeben wird.

Das 2. Programm beruht auf folgender Überlegung: Für jede Nummer von 000000 bis 999999 ist die Summe $s = a+b+c$ der ersten drei Ziffern a, b, c eine der Zahlen von 0 bis 27. Kommt ein solcher Wert s unter allen 1000 Dreiergruppen der ersten drei Ziffern genau $n(s)$ mal als Summe vor, so kommt er unter allen Dreiergruppen der letzten drei Ziffern d, e, f ebenfalls genau $n(s)$ mal als Summe vor.

Für genau $(n(s) \cdot n(s))$ Nummern liegt daher die Eigenschaft $a + b + c = d + e + f$ speziell so vor, dass gerade für diesen Wert s die beiden Gleichungen $a + b + c = s$ und $d + e + f = s$ gelten. Damit ist bewiesen:

Die Anzahl z aller „Glücksschein"-Nummern ist die Summe aller für $s = 0, \ldots, 27$ gebildeten Produkte $(n(s) \cdot n(s))$.

Eben diese Summe rechnet das 2. Programm aus: Die Ermittlung der Häufigkeiten $n(s)$ geschieht beim Durchlaufen 5 - 7, 10 - 12 der Anweisungsfolge 8, 9, in der für jede der 1000 Dreiergruppen abc von 000 bis 999 jeweils die Anzahl $n(s)$ der betreffenden Summe $s = a+b+c$ um 1 erhöht wird. (Zur Vorbereitung hierfür wurden zu Beginn in l - 4 alle $n(s)$ auf 0 gesetzt.) In 13 - 16 wird aus den so erhaltenen Werten $n(s)$ die Summe der Produkte $(n(s) \cdot n(s))$ gebildet.

Der errechnete Prozentwert lautet 5,5252 %.

II. Runde 2

Aufgabe 030922:
Bei einem Preisschießen hat ein Schütze mit 5 Schuss auf einer Zehner-Ringscheibe 40 Ringe erzielt. Bei jedem Schuss hat er mindestens 7 Ringe getroffen.
Wie viele Möglichkeiten gibt es für die bei den einzelnen Schüssen erzielten Ringe?

Anmerkung: Die Reihenfolge ist zu berücksichtigen. So gelten z. B. 7, 7, 7, 9, 10 und 7, 7, 7, 10, 9 als verschiedene Möglichkeiten.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Ohne Berücksichtigung der Reihenfolge gibt es folgende Möglichkeiten:

1. $7, 7, 7, 9, 10$; 2. $7, 7, 8, 8, 10$; 3. $7, 7, 8, 9, 9$; 4. $7, 8, 8, 8, 9$
5. $8, 8, 8, 8, 8$

und nur diese.
Die Beobachtung der Reihenfolge führt zur Berechnung der Anzahl von sogenannten Anordnungen (Permutationen) mit Wiederholung.

1. Wären alle 5 Zahlen verschieden, so gäbe es $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ verschiedene Möglichkeiten der Anordnung. Da jedoch die 7 dreimal auftritt, fallen $3 \cdot 2 \cdot 1$ Möglichkeiten in eine einzige zusammen, so dass $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$ Möglichkeiten übrig bleiben.
2. und 3. analoge Überlegungen führen zu $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 30$ Möglichkeiten.
4. wie 1.
5. 1 Möglichkeit.
Insgesamt gibt es $20 + 30 + 30 + 20 + 1 = 101$ Möglichkeiten.

Aufgabe 070921:
Man ermittle die Anzahl aller Paare zweistelliger natürlicher Zahlen (m, n), für die $m+n = 111$ gilt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die gesuchten Paare lassen sich in 2 Gruppen aufteilen:

1. Gruppe: Die Summe der Einer der beiden zweistelligen Zahlen beträgt 1, die Summe ihrer Zehner beträgt 11.
Bezeichnet man die Ziffern der Zahlen eines Paares, das dieser Bedingung entspricht, der Reihe nach mit $(a; b)$, $(c; d)$, dann erfüllen auch die Paare $(a; d)$, $(c; b)$; $(e; b)$, $(a; d)$ und $(c; d)$, $(a; b)$ die gleiche Bedingung.
Wegen $0 + 1 = 1$ und $9 + 2 = 11$; $8 + 3 = 11$; $7 + 4 = 11$; $6 + 5 = 11$ gibt es genau 6 derartige Paare.

2. Gruppe: Die Summe der Einer beträgt 11, die der Zehner 10.
Das ergibt wegen $9 + 1 = 10$; $8 + 2 = 10$; $7 + 3 = 10$; $6 + 4 = 10$ und $5 + 5 = 10$ aus dem oben genannten Grunde genau 72 derartige Paare.
Insgesamt erhält man mithin genau 88 Zahlenpaare, die den Bedingungen der Aufgabe entsprechen.

Aufgabe 120923:
Zu Dekorationszwecken sollen gleich große Konservenbüchsen verschiedener Sorten so in mehreren Reihen übereinander aufgebaut werden, dass folgende Bedingungen erfüllt sind:
(1) Jede Reihe soll genau eine Büchse mehr enthalten als die Reihe unmittelbar über ihr.
(2) Die oberste Reihe enthält genau eine Büchse.
(3) Es werden genau drei verschiedene Sorten Büchsen verwendet.
(4) Von jeder der drei Sorten findet genau dieselbe Anzahl von Büchsen Verwendung.
(5) Jede Reihe besteht aus Büchsen von genau einer Sorte.
(6) Keine zwei unmittelbar übereinanderstehenden Reihen enthalten Büchsen derselben Sorte.
Ermitteln Sie die kleinste Anzahl von Büchsen, für die es möglich ist, die Bedingungen (1) bis (6) gleichzeitig zu erfüllen!

Lösung von StrgAltEntf:
Die kleinste Anzahl von Büchsen ist 36. Je 12 Büchsen der Sorten A, B und C können wie folgt zu einer Pyramide gestapelt werden:

A
B B
A A A
B B B B
C C C C C
B B B B B B
C C C C C C C
A A A A A A A A

Begründung, warum es mit weniger als 36 Büchsen nicht funktioniert:
Die Anzahl k der Büchsen muss eine Dreieckszahl, also von der Form $k = 1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$ sein. k muss den Teiler 3 enthalten.

Also kommen für $k < 36$ höchstens die Zahlen $3 = 1 + 2$, $6 = 1 + 2 + 3$, $15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$ und $21 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$ infrage.
Die Summanden 1,2,...,n müssen dann auf drei Teilsummen aufgeteilt werden, die jeweils $\frac{k}{3}$ ergeben.
Bei $k = 3 = 1 + 2$ oder $k = 6 = 1 + 2 + 3$ ist solch eine Aufteilung nicht möglich, da der größte Summand (2 bzw. 3) bereits größer als $\frac{k}{3}$ ist, also in keine Teilsumme passt.

Bei $k = 15 = 1+2+3+4+5$ können die Summanden nur auf eine Weise aufgeteilt werden, sodass sich jeweils die Teilsumme $\frac{k}{3} = 5$ ergibt: $1+4 = 2+3 = 5$. Diese Aufteilung widerspricht aber der Bedingung (6), da dann die zweite und die dritte Reihe dieselben Büchsensorten enthalten würden.

Bei $k = 21 = 1+2+3+4+5+6$ können die Summanden ebenfalls nur auf eine Weise aufgeteilt werden, sodass sich jeweils die Teilsumme $\frac{k}{3} = 7$ ergibt: $1+6 = 2+5 = 3+4$. Und auch hier erhalten wir zwei benachbarte Zahlen in einer der Teilsummen, nämlich 3 und 4.

Mit $k = 36 = 1+2+3+4+5+6+7+8$ schließlich funktioniert es:
$\frac{k}{3} = 12 = 1+3+8 = 2+4+6 = 5+7$.

Aufgabe 130921:
Eine Turmuhr zeigt genau 13 Uhr an. Stellen Sie fest, wie oft insgesamt bei gleichförmiger Zeigerbewegung der Minutenzeiger und der Sekundenzeiger innerhalb der nächsten 12 Stunden einen rechten Winkel miteinander bilden!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
In 12 Stunden macht der Minutenzeiger genau 12 Umdrehungen, der Stundenzeiger genau eine Umdrehung. Der Stundenzeiger wird während dieser einen Umdrehung vom Minutenzeiger genau 11 mal überrundet.
Zwischen je zwei Überrundungen bilden die Zeiger genau zweimal einen rechten Winkel. In 12 aufeinanderfolgenden Stunden bilden daher die Zeiger 22 mal einen rechten Winkel miteinander.

Aufgabe 140921:
An einer Fußballmeisterschaft der DDR beteiligen sich 14 Mannschaften der Oberliga. In der ersten Halbserie spielen je zwei dieser Mannschaften genau einmal gegeneinander.
Es ist zu beweisen, dass es in der Zeit dieser Halbserie nach jedem Spieltag zwei Mannschaften der Oberliga gibt, die die gleiche Anzahl von Spielen ausgetragen haben.

Lösung von StrgAltEntf:
Es seien $a_1,a_2,...,a_{14}$ die Anzahlen der Spiele, die die 14 Mannschaften zu einem bestimmten Zeitpunkt absolviert haben. Für die Gesamtzahl K der Spiele aller 14 Mannschaften gilt dann $K = \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + ... + a_{14})$. (Der Faktor $\frac{1}{2}$ ergibt sich daraus, dass bei der Summe jedes Spiel doppelt gezählt wird.)
Wir nehmen nun an, dass keine zwei Mannschaften dieselbe Anzahl von Spielen ausgetragen haben, dass also alle Werte a_i verschieden sind. Da alle Werte a_i der Menge $\{0,1,2,...,13\}$ angehören und diese Menge 14 Elemente hat, muss jeder Wert aus $\{0,1,2,...,13\}$ von genau einem der Werte a_i angenommen werden.
Folglich ist

$$K = \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + ... + a_{14}) = \frac{1}{2}(0+1+2+...13) = \frac{13 \cdot 14}{4} = \frac{91}{2}$$

Hier erhalten wir einen Widerspruch, da $\frac{91}{2}$ keine ganze Zahl ist. Somit war unsere obige Annahme falsch, und es gibt zwei Mannschaften, die exakt gleich viele Spiele ausgetragen haben.

Alternativ-Lösung von cyrix:
Da zu jedem Zeitpunkt der betrachteten Halbserie jede Mannschaft gegen jede andere höchstens einmal gespielt hat, ist die Anzahl der Partien, an der eine Mannschaft beteiligt war, immer durch $14 - 1 = 13$ nach oben beschränkt. Damit gibt es aber nur 14 verschiedene mögliche Anzahlen an Spielen, die eine Mannschaft gespielt haben kann.

Hätten zu einem Zeitpunkt keine zwei Mannschaften dieselbe Anzahl an Spielen, ginge das also nur, wenn jede der 14 möglichen Anzahlen auch vorkommt. Dann müsste es aber sowohl eine Mannschaft geben, die gegen keine andere gespielt hat, wie auch eine, die gegen alle 13 anderen gespielt hat. Beides zugleich kann aber nicht eintreten, was den gewünschten Widerspruch erzeugt und die Behauptung beweist.

Bemerkung: Dieser Ansatz nutzt nicht die konkrete Anzahl beteiligter Mannschaften und lässt sich auf beliebige Anzahlen > 1 verallgemeinern.

Aufgabe 200924:
a) Ermitteln Sie alle diejenigen natürlichen Zahlen $n \geq 3$, für die die folgende Aussage gilt!
„Jedes Prisma, das ein konvexes n-Eck als Grundfläche hat, hat genau $20n$ Diagonalen.“
b) Ermitteln Sie für jedes Prisma, für das die in a) genannte Aussage gilt, die Anzahl der Flächendiagonalen und die der Raumdiagonalen!
Hinweis: Ein n-Eck heißt genau dann konvex, wenn jeder seiner Innenwinkel kleiner als 180° ist.

Lösung von cyrix:
Als „Diagonalen“ eines Prismas werden alle Strecken zwischen je zwei seiner Eckpunkte bezeichnet, die keine Kante des Prismas sind.

a) Für jeden der $2n$ Eckpunkte eines Prismas mit konvexem n-Eck als Grundfläche gilt, dass von ihm Kanten zu genau drei anderen Eckpunkten des Prismas ausgehen. Es ist also Endpunkt von genau $2n - 3 - 1 = 2n - 4$ Diagonalen. (Von diesem Eckpunkt geht nur keine Diagonale zu den drei Eckpunkten, durch die es mit einer Kante verbunden ist, sowie zu sich selbst, aus.)
Da jede Diagonale genau zwei Eckpunkte miteinander verbindet, gibt es also in einem solchen Prisma mit einem konvexen n-Eck als Prisma genau $\frac{1}{2} \cdot 2n \cdot (2n - 4) = n \cdot (2n - 4)$ Diagonalen. Damit dies genau $20n$ sind, muss also $2n - 4 = 20$, d. h. $n = 12$ gelten.
Da keine Voraussetzungen über die Form des Prismas gemacht wurde, erfüllen genau alle Prismen, deren Grundfläche ein konvexes 12-Eck ist, die Aussage.

b) Raumdiagonalen seien unter den Diagonalen genau jene, die nicht in einer Seitenfläche des Prismas verlaufen. Das bedeutet, dass diese durch je einen Eckpunkt der Grund- und Deckfläche begrenzt sind, welche aber nicht gemeinsam in einer Seitenfläche des Prismas liegen.

Für jeden der n Eckpunkte der Grundfläche gilt, dass er mit genau einem der Eckpunkte der Deckfläche durch eine Kante verbunden ist und mit genau zwei weiteren jeweils in einer gemeinsamen Seitenfläche liegt. Also gibt es von diesem Eckpunkt der Grundfläche genau $n-3$ ausgehende Raumdiagonalen, sodass es insgesamt $n \cdot (n - 3)$ Raumdiagonalen gibt, was im konkreten Fall mit $n = 12$ auf genau $12 \cdot 9 = 108$ Raumdiagonalen bedeutet.
Die übrigen der $20n = 240$, also 132 (bzw. allgemein $n \cdot (2n - 4) - n \cdot (n - 3) = n \cdot (n - 1)$), sind dann die Flächendiagonalen.

Aufgabe 240921:
Eine Schule hat 510 Schüler. Beim Anfertigen einer Schülerliste stellt jemand die Frage, ob auf derartigen Listen von 510 Personen mehrmals das gleiche Datum (Tag- und Monatsangabe, ohne Berücksichtigung der Jahresangabe) als Geburtstag auftreten wird.
Anke behauptet: „Auf jeder Liste, die sich durch Zusammenstellung von 510 Personen bilden lässt, befinden sich zwei Personen, die das gleiche Datum als Geburtstag haben.“
Bertold behauptet: „Auf jeder Liste, die sich durch Zusammenstellung von 510 Personen bilden lässt, befinden sich drei Personen, die das gleiche Datum als Geburtstag haben.“
Untersuchen Sie sowohl für Ankes als auch für Bertolds Behauptung, ob sie wahr oder falsch ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Ankes Behauptung ist wahr. Dies kann folgendermaßen bewiesen werden:

Gäbe es eine Liste, in der 510 Personen stehen, von denen keine zwei das gleiche Datum als Geburtstag haben, so gäbe es mindestens 510 verschiedene Daten, d. h. mindestens 510 verschiedene Tage im Jahr. Da das nicht zutrifft, gibt es keine solche Liste, w. z. b. w.

Bertolds Behauptung ist falsch.
Beispielsweise kann man eine Liste von 510 Personen so zusammenstellen, dass jeder der ersten 255 Tage des Jahres das Geburtsdatum von genau 2 dieser Personen ist. Auf einer solchen Liste befinden sich dann keine drei Personen mit gleichem Geburtstag, w. z. b. w.

Aufgabe 270922:
Bei einem „ungarischen Dominospiel“ mit den Zahlen 0, 1, ..., 9 ist (abgesehen von dieser größeren Zahl in der vom „gewöhnlichen Dominospiel“ bekannten Weise) jeder Spielstein in zwei Hälften eingeteilt, jede Hälfte trägt eine der Zahlen.
In einem Spiel kommen alle Kombinationen von je zwei der Zahlen 0, 1, ..., 9 je genau einmal vor (und zwar auch diejenigen, bei denen auf den beiden Hälften eines Steines dieselbe Zahl steht).
Eine „Kette“ entsteht, wenn man mehrere Steine so nebeneinanderlegt, dass benachbarte Hälften nebeneinanderliegender Steine stets einander gleiche Zahlen tragen (Domino-Spielregel).
Eine Kette heißt „geschlossen“, wenn auch die beiden Steinhälften an den beiden freien Enden der Kette einander gleiche Zahlen tragen (so dass man die Kette, wenn sie aus genügend vielen Steinen besteht, an ihren Anfang zurückführen und dort schließen kann).
a) Ermitteln Sie die Anzahl aller zu einem „ungarischen Dominospie“ gehörenden Steine!
b) Ermitteln Sie die größte Anzahl solcher Steine eines Spiels, aus denen sich eine geschlossene Kette bilden lässt!

Lösung von cyrix:
a) Wir fordern o. B. d. A., dass die erste Ziffer auf einem Dominostein größer oder gleich der zweiten Ziffer ist. Dann gibt es genau einen Dominostein mit erster Ziffer 0 (nämlich 0-0, genau zwei mit erster Ziffer 1 (nämlich 1-0 und 1-1), ... , genau zehn Dominosteine mit erster Ziffer 9 (nämlich 9-0, 9-1, ..., 9-9). Insgesamt gibt es also $1 + 2 + \cdots + 10 = 55$ verschiedene Dominosteine.

b) Jede Ziffer kommt auf diesen 55 Dominosteinen insgesamt elfmal vor, nämlich neunmal mit je einer anderen Ziffer und zweimal auf dem Dominostein, der auf beiden Seiten die betreffende Ziffer enthält. Jedoch ist jede Ziffer in einer geschlossenen Kette geradzahlig oft enthalten, nämlich jeweils paarweise auf aneinanderstoßenden Hälften zweier benachbarter Dominosteine. Damit kann also in einer geschlossenen Kette jede Ziffer nur maximal zehnmal vorkommen, sodass in der geschlossenen Kette maximal 50 Steine Verwendung finden können.

Eine Kette lässt sich auch wie folgt erhalten:
0-0, 0-1, 1-1, 1-2, 2-2, 2-3, 3-3, 3-4, 4-4, 4-5, 5-5, 5-6, 6-6, 6-7, 7-7, 7-8, 8-8, 8-9, 9-9, 9-0, 0-2, 2-4, 4-6, 6-8, 8-1, 1-3, 3-5, 5-9, 9-7, 7-0, 0-3, 3-6, 6-9, 9-2, 2-5, 5-1, 1-7, 7-4, 4-8, 8-0, 0-4, 4-1, 1-9, 9-3, 3-7, 7-5, 5-8, 8-2, 2-6, 6-0

Dabei wurden die Dominosteine 0-5, 1-6, 2-7, 3-8 und 4-9 nicht und alle anderen genau einmal verwendet.

Aufgabe 290921:
Kann man in einer Ebene eine Figur bilden, die aus genau 1989 Geraden besteht und dadurch mehr als 2 Millionen Schnittpunkte enthält?

Lösung von cyrix:
Nein, kann man nicht:
Je zwei Geraden haben höchstens einen Schnittpunkt, sodass für jede der $\frac{1989 \cdot 1988}{2} < 1000 \cdot 1989 < 2 \cdot 10^6$ Möglichkeiten, aus den 1989 Geraden zwei auszuwählen, höchstens ein Schnittpunkt in der Figur enthalten ist. Es gibt also in jedem Fall weniger als 2 Millionen Schnittpunkte.

Aufgabe 300923:
a) Wie viele dreistellige natürliche Zahlen, bei denen (wie z. B. 921) die Zehnerziffer größer als die Einerziffer, aber kleiner als die Hunderterziffer ist, gibt es insgesamt?
b) Wie viele sechsstellige Zahlen insgesamt lassen sich dadurch herstellen, dass man zwei verschiedene der unter a) beschriebenen Zahlen auswählt und die größere dieser beiden Zahlen hinter die kleinere schreibt?
c) Die kleinste unter allen denjenigen in b) beschriebenen sechsstelligen Zahlen, bei denen die zweite der genannten dreistelligen Zahlen genau um 1 größer ist als die erste, ist die Telefonnummer des Senders Potsdam. Wie lautet sie?

Lösung von cyrix:
a) Jede Auswahl von 3 verschiedenen Ziffern ohne Beachtung der Reihenfolge führt auf genau eine solche dreistellige Zahl. Also gibt es $\binom{10}{3} = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2\cdot 1} = 120$ solcher dreistelligen Zahlen.

b) Jede Auswahl von 2 verschiedenen solchen dreistelligen Zahlen ohne Beachtung der Reihenfolge liefert genau eine solche sechsstellige Zahl. Also gibt es genau $\binom{120}{2} = \frac{120\cdot 119}{2\cdot 1} = 60 \cdot 119 = 7140$ solcher sechsstelligen Zahlen.

c) Damit die Zahl möglichst klein ist, sollten die ersten Ziffern möglichst klein sein. Minimal möglich ist für eine dreistellige Zahl aus a) der Wert 210. Dann ist aber die um 1 größere Zahl nicht von der in a) beschriebenen Form.
Dafür muss die um 1 erhöhte Einerziffer immer noch kleiner als die Zehnerziffer sein, sodass diese mindestens 2 und damit die Hunderterziffer mindestens 3 betragen muss. Tatsächlich ist die minimale Möglichkeit dafür 320321, sodass dies die gesuchte Telefonnummer ist.

Aufgabe 320922:
In der Ebene seine vier paarweise verschiedene Geraden gegeben.
a) Welches ist die größtmögliche Anzahl derjenigen Punkte, die Schnittpunkt von (jeweils mindestens) zwei der gegebenen Geraden sind?
b) Stellen Sie fest, welche der Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 als Anzahl solcher Schnittpunkte möglich ist und welche nicht!

Lösung von cyrix:
Es seien a,b,c,d die vier Geraden.
a) Wenn keine zwei der Geraden parallel sind und sich keine drei in einem gemeinsamen Punkt schneiden, dann besitzen a und b, a und c, a und d, b und c, b und$d$ sowie c und d jeweils einen Schnittpunkt, der von den übrigen verschieden ist. Da zwei verschiedene Geraden nur höchstens einen Punkt gemein haben können, ist dies also die Maximalzahl möglicher verschiedener Schnittpunkte.

b) Wir haben gerade gesehen, dass sich genau 6 Schnittpunkte erzeugen lassen, indem keine zwei der Geraden parallel sind und sich keine drei in einem Punkt schneiden.

Sind a und b parallel, aber c und d weder zueinander noch zu a (und b) parallel, haben c und d mit a und b je zwei Schnittpunkte. Ist der Schnittpunkt von c und d keiner dieser vier, so gibt es insgesamt 5.
Sind in der Konstruktion von eben nun c und d doch parallel, so gibt es nur die vier Schnittpunkte mit den Parallelen a und b.
Sind a, b und c paarweise parallel zueinander, d aber nicht, so schneiden sich a, b und c paarweise nicht, während jede von diesen mit d genau einen Schnittpunkt besitzt, wobei keine zwei dieser Schnittpunkte zusammenfallen, es also insgesamt genau 3 gibt.
Sind alle vier Geraden paarweise parallel zueinander, so gibt es gar keinen, also 0, Schnittpunkte.

Verlaufen alle vier Geraden durch einen gemeinsamen Punkt P, gibt es genau einen Schnittpunkt, nämlich P. Weitere kann es nicht geben, da zwei verschiedene Geraden sich in höchstens einem Punkt schneiden.

Bleibt noch zu zeigen, dass genau zwei Schnittpunkte nicht möglich sind:
Angenommen, es gäbe eine solche Konstellation. Dann können die drei Geraden a, b und c nicht paarweise parallel zueinander sein, da es sonst (s.o.) mit d genau 0 oder genau 3 Schnittpunkte gäbe.
Auch können sie sich nicht in einem gemeinsamen Punkt P schneiden, da es sonst (wenn d durch P verläuft) genau 1 oder (wenn d nicht durch P verläuft) genau $1 + 3 = 4$ Schnittpunkte geben würde.
Auch können die drei Geraden nicht paarweise nicht parallel sein, da aus dem Zusammenfallen von zwei ihrer drei Schnittpunkte sofort folgen würde, dass der dritte mit diesem auch identisch ist, man sich also im vorherigen Fall befindet.
Also sind von den drei Geraden a, b und c genau zwei parallel und die dritte dazu nicht parallel. O. B. d. A. sei $a \parallel b$ und $b \nparallel c$. Analog kann man nun die drei Geraden b, c und d betrachten, von denen wieder zwei parallel und die dritte nicht dazu parallel sein muss. Im Fall $b \parallel d$ erhalten wir den Widerspruch $a \parallel b \parallel d$ analog oben mit genau 3 Schnittpunkten und im verbleibenden Fall $c \parallel d$ erhält man genau 4 Schnittpunkte (s.o.), also auch nicht genau 2.
Es lässt sich also jede Schnittpunktanzahl von 0 bis 6 mit Ausnahme der 2 realisieren.

III. Runden 3 & 4

Aufgabe 020936:
In einem Schaufenster sind bunte, gleichgroße Bälle zu einer dreiseitigen regelmäßigen Pyramide aufgeschichtet. Die Bälle der untersten Schicht werden durch 3 verbundene Latten am Wegrollen gehindert.
Die Bälle der anderen Schichten liegen jeweils in den Vertiefungen der darunter liegenden Schicht. In der untersten Schicht zählt man an jeder Seite 8 Bälle.
Wie viele Bälle liegen in den einzelnen Schichten und wie viel in der ganzen Pyramide?

Lösung von André Lanka:

1. Schicht: $8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 36$
2. Schicht: $7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 28$
3. Schicht: $6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21$
4. Schicht: $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$
6. Schicht: $4 + 3 + 2 + 1 = 10$
7. Schicht: $3 + 2 + 1 = 6$
8. Schicht: $2 + 1 = 3$
9. Schicht: $1 = 1$

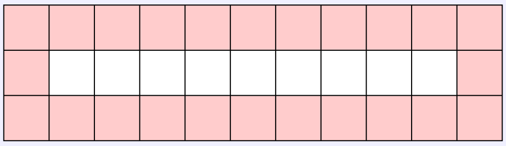
Insgesamt liegen in der Pyramide 120 Bälle.

Aufgabe 100931:
Günter verbrachte in seinen Ferien eine Anzahl von Tagen mit seiner FDJ-Gruppe in einem Lager. An jedem Tage wurden aus seiner Gruppe genau zwei Schüler vormittags und genau zwei Schüler nachmittags zum Tischdienst eingeteilt. Im Laufe der Tage wurden alle Schüler seiner Gruppe gleich oft zu diesem Tischdienst eingesetzt.
Ferner ist folgendes bekannt:

(1) Günter war an genau 6 Tagen zum Tischdienst eingeteilt.
(2) Wenn er nachmittags Tischdienst hatte, hatte er vormittags keinen.
(3) Er hatte an diesen Tagen genau 13 mal nachmittags keinen Tischdienst.
(4) Er hatte an diesen Tagen genau 11 mal vormittags keinen Tischdienst.
Aus wie viel Schülern bestand Günters Gruppe?

Lösung von cyrix:
Nach (3) und (4) hatte er genau zwei mal öfter vormittags als nachmittags Tischdienst, und da er nach (2) niemals sowohl vormittags als auch nachmittags Tischdienst hatte, war er mit (1) an genau vier Tagen vormittags, an zweien nachmittags und an 13-4=11-2=9 gar nicht beschäftigt.
Das Lager dauerte damit 9+4+2=15 Tage, sodass $15 \cdot 4 = 60$ Schüler-Tischdienst-Einsätze notwendig waren. Günther war zu 6 davon eingeteilt, sodass also insgesamt seine Gruppe aus $\frac{60}{6} = 10$ Schülern bestand.

Aufgabe 120932:



Karlheinz will aus gleich großen roten und weißen Quadratflächen lückenlos eine Rechteckfläche derartig zusammensetzen, dass sämtliche an den Rand dieses Rechtecks grenzenden Quadratflächen rot sind (in der Abbildung gestrichelt gezeichnet), während alle übrigen (im Innern gelegenen) Quadratflächen weiß sein sollen. Dabei soll die Anzahl der roten Quadratflächen gleich der der weißen sein.

Geben Sie (durch Angabe der Anzahl der in je einer Zeile und in je einer Spalte angeordneten Quadratflächen) alle Rechteckflächen an, die Karlheinz unter diesen Bedingungen bilden könnte!

Lösung von cyrix:
Sei $m > 0$ die Anzahl der Quadratflächen, die in einer Zeile liegen und $n > 0$ die, derer sich in einer Spalte befindlichen. O. B. d. A. können wir $m \geq n$ annehmen.
Weiterhin sei r die Anzahl der roten und w die Anzahl der weißen Quadratflächen. Wäre $n \leq 2$, bestände das Rechteck nur aus Randquadraten, sodass $r > 0 = w$ folgen und damit die Bedingung der Aufgabenstellung nicht erfüllen würde. Sei also ab jetzt $m \geq n \geq 3$.
Es folgt $r = 2(m+n)-4$ und $w = (m-1)(n-1)$, zusammen mit $r = w$ also $2m+2n-4 = mn-m-n+1$ bzw. $-5 = mn-3m-3n = (m-3)(n-3)-9$, also $(m-3)(n-3) = 4$. Da beide Faktoren nicht negativ sind und $m \geq n$ gilt, kann nur einer der beiden folgenden Fälle auftreten:

1. Fall: $m-3 = 4$ und $n-3 = 1$, also $m = 7$ und $n = 4$, oder
2. Fall: $m-3 = n-3 = 2$, also $m = n = 5$. In beiden Fällen bestätigt die Probe, dass dies wirklich Lösungen sind.

Karlheinz kann also ein 5×5-Quadrat, ein 7×4-Rechteck oder ein 4×7-Rechteck legen, was den Bedingungen der Aufgabenstellung genügt.

Aufgabe 170931:
Ermitteln Sie die Anzahl der natürlichen Zahlen von 1 bis 1000 (einschließlich dieser Grenzen), die weder durch 2 noch durch 3 noch durch 5 teilbar sind!

Lösung von cyrix:
Es ist $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$, sodass sich alle 30 Zahlen das Schema, welche Reste sie bei der Teilung durch 2, 3 bzw. 5 lassen, wiederholt. Von je 30 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen sind genau 15 ungerade. Von diesen 15 aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen sind genau fünf durch 3, genau drei durch 5 und genau eine durch 15 teilbar, sodass genau $15-5-3+1 = 8$ Zahlen eines solchen 30er-Blocks weder durch 2, 3 noch 5 teilbar sind.
Also finden sich in den 33 30er-Blöcken von 1 bis $33 \cdot 30 = 990$ genau $33 \cdot 8 = 264$ weder durch 2, 3 noch 5 teilbare Zahlen. Hinzukommen noch die 991 und 997, da die übrigen ungeraden Zahlen von 991 bis 1000 durch 3 teilbar (993, 999) oder durch 5 teilbar (995) sind.
Es gibt also insgesamt 266 solche Zahlen im zu betrachtenden Intervall.

Aufgabe 250934:
Die acht Zahlen 1, 2, ..., 8 sollen so auf die Eckpunkte eines Würfels verteilt werden, dass dabei folgende Bedingungen erfüllt sind:

(1) Jedem Eckpunkt des Würfels wird genau eine der acht Zahlen zugeteilt, jede dieser Zahlen soll in der Verteilung vorkommen.
(2) Addiert man auf jeder Seitenfläche des Würfels die vier Zahlen an den Eckpunkten dieser Seitenfläche, so ergibt sich auf allen sechs Seitenflächen dieselbe Summe.

Es sollen möglichst viele Verteilungen der acht Zahlen auf die Eckpunkte so zusammengestellt werden, dass jede dieser Verteilungen die Bedingungen (1), (2) erfüllt und dass keine zwei dieser Verteilungen zueinander kongruent sind, d. h. durch Drehung oder Spieglung ineinander übergeführt werden können.
Ermitteln Sie die Anzahl der Verteilungen, die in einer solchen Zusammenstellung auftreten!

Lösung von cyrix:
Die Eckpunkte des Würfels seien mit A bis H bezeichnet, wobei A, B, C und D in dieser Reihenfolge die Eckpunkte einer Fläche und E, F, G, H die Eckpunkte der dazu parallelen Seitenfläche seien, wobei A mit E, B mit F, C mit G und D mit H durch eine Kante verbunden seien. Weiterhin identifizieren wir einen Eckpunkt mit der Zahl, die an diesem Eckpunkt steht, schreiben also z. B. $A = 1$, wenn an Eckpunkt A die Zahl 1 steht. (Dies können wir, da nach Bedingung (1) jede der acht Zahlen an genau einem der Eckpunkte steht.)

Summiert man für alle sechs Seitenflächen jeweils deren Eckpunkt-Zahlen und bildet die Summe dieser sechs Summen, so erhält man eine Summe, die jede Eckpunktzahl genau dreimal enthält, nämlich je einmal pro Seitenfläche. Ist S die nach Bedingung (2) für alle Seitenfläche gleiche Summe ihrer Eckpunktzahlen, so gilt also $6 \cdot s = 3 \cdot (A + B + \cdots + H) = 3 \cdot (1 + 2 + \cdots + 8) = 3 \cdot \frac{8\cdot 9}{2} = 3 \cdot 36 = 108$, also $S = \frac{108}{6} = 18$.

O. B. d. A. können wir durch ggf. erfolgende Drehung $A = 1$ annehmen.
Dann kann B nicht 2 sein, denn sonst müssten sowohl $C + D$ als auch $E + F$ den Wert $18 - 2 - 1 = 15$ haben. Diese Summe kann aber mit den Zahlen 1 bis 8 nur auf die eindeutige Weise $7+8$ erhalten werden, sodass – im Widerspruch zu (1) – $\{C,D\} = \{E,F\}$ folgen würde. Analog schließt man auch $D = 2$ sowie $E = 2$ aus: 1 und 2 können nicht benachbart sein.

Fall 1: Die 2 in einer Seitenfläche mit 1. Dies geht nur, wenn sie in dieser Seitenfläche der 1 diagonal gegenüberliegt. Also können wir hier durch ggf. erfolgende Drehung o. B. d. A. $C = 2$ annehmen. Es muss dann $B + D = 18 - 2 - 1 = 15 = 8 + 7$, also durch ggf. erfolgende Spiegelung o. B. d. A. $B = 8$ und $D = 7$ gelten. Damit $A + B + E + F = 18$ gilt, muss $E + F = 9$ und analog $G + H = 9$ gelten, was sich jeweils nur durch $4 + 5 = 9$ bzw. $3 + 6 = 9$ mit noch nicht verwendeten Zahlen realisieren lässt. Weiterhin ist auch $B + C + F + G = 18$, also $F + G = 18 - 8 - 2 = 8$, was sich nur als $3 + 5$ noch realisieren lässt.

Fall 1.1: Es ist $F = 3$. Dann folgt $G = 5$, $E = 6$ und $H = 4$. Man überprüft schnell, dass diese Verteilung beide Bedingungen erfüllt. (Hier hat die 1 die Nachbarn 6, 7 und 8.)

Fall 1.2: Es ist $F = 5$. Dann folgt $G = 3$, $E = 4$ und $H = 6$. Auch hier überprüft man schnell, dass es sich um eine Lösung handelt. (Hier hat die 1 die Nachbarn 4, 7 und 8.)

Fall 2: Die 2 liegt nicht in einer gemeinsamen Seitenfläche mit 1. Dann verbleibt aber nur noch als einziger Eckpunkt G, der damit gleich 2 sein muss. Damit folgt, dass 1 und 3 in einer gemeinsamen Seitenfläche liegen müssen, o. B. d. A. nach ggf. erfolgender Drehung um die Raumdiagonale AG also $3 \in \{B,C,D\}$.

Fall 2.1: Es ist $B = 3$ oder $D = 3$. Nach ggf. erfolgender Spiegelung an der Ebene, die durch A, C, E und G verläuft, können wir dann sogar o. B. d. A. $B = 3$ fordern. Es folgt aber wie oben, dass $C+D = E+F = 14$ gelten muss, was sich aber mit verschiedenen Summanden aus $\{1, \ldots ,8\}$ nur mit $14 = 8 + 6$ realisieren lässt, sodass wieder im Widerspruch zu (1) $\{E,F\} = \{C,D\}$ folgen würde. Also gibt es in diesem Fall keine gültige Verteilung.

Fall 2.2: Es ist $C = 3$. Dann muss analog zum Fall 1 $B + D = 14$, also nach ggf. erfolgender Spiegelung $B = 8$ und $D = 6$ gelten. Wegen $A + B + E + F = 18$ folgt $E + F = 11$, was sich mit noch nicht verwendeten Zahlen nur als $11 = 4 + 7$ realisieren lässt, woraus $F \in \{4{,}7\}$ folgt. Andererseits ist auch $B + C + F + G = 18$, also $F = 18 - 8 - 3 - 2 = 5$, was ein Widerspruch ist, sodass es auch in diesem Fall keine gültige Lösung gibt.

Insgesamt gibt es also genau zwei verschiedene Anordnungen. Da in diesen die 1 verschiedene Nachbarn besitzt, können sie auch nicht durch Drehung oder Spiegelung ineinander überführt werden.

Aufgabe 310936:
Für die Reihenfolge, in der sich die neun Buchstaben $A, B, C, D, E, F, G, H, J$ von links nach rechts anordnen lassen, seien die folgenden sieben Bedingungen gefordert:
Es soll A links von B, A links von C, A links von D, E links von F, E links von G, E links von H, E links von J stehen.
Wieviele verschiedene Reihenfolgen, bei denen diese sieben Bedingungen erfüllt sind, gibt es insgesamt?
Hinweise:
In jeder der genannten Reihenfolgen soll jeder der neun Buchstaben genau einmal vorkommen.
Die Formulierung „X links von Y“ schließt nicht aus, dass zwischen X und Y noch andere der Buchstaben stehen.

Lösung von cyrix:
Wir unterteilen die neun Buchstaben in zwei Gruppen. Gruppe 1 enthält A, B, C und D, Gruppe 2 die übrigen fünf Buchstaben. Die Bedingungen vergleichen nur die Positionen von Buchstaben einer Gruppe miteinander, sodass jede beliebige Verteilung der neun Positionen auf die zwei Gruppen eine korrekte Anordnung aller neun Buchstaben liefert, wenn innerhalb beider Gruppen die Bedingungen alle erfüllt sind.

Es gibt in Gruppe 1 insgesamt 6 mögliche Anordnungen, die die drei ihr zugehörigen Bedingungen erfüllt: A muss ganz links (unter diesen vier Elementen) stehen, während die Reihenfolge der drei übrigen Buchstaben dieser Gruppe beliebig ist, also dafür alle $3! = 6$ Varianten möglich sind. Analog erhält man für Gruppe 2 nun $4! = 24$ mögliche Anordnungen (da dort E unter diesen ganz links stehen muss, während sich die restlichen vier Buchstaben von Gruppe 2 beliebig anordnen lassen).

Die neun Positionen lassen sich auf $\binom{9}{4} = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 126$ Arten auf die beiden Gruppen (ohne Beachtung der Reihenfolge der Verteilung der Positionen) verteilen. Für jede solche gibt es nun jeweils 6 mögliche Anordnungen der Elemente von Gruppe 1 untereinander auf den Positionen dieser Gruppe und jeweils 24 mögliche Anordnungen der Elemente von Gruppe 2 auf ihren Positionen untereinander, insgesamt also

$$126 \cdot 6 \cdot 24 = 126 \cdot 144 = 18144$$

mögliche Anordnungen.

Aufgabe 320932:
Wieviele Paare (x, y) natürlicher Zahlen für die $10x + y < 1993$ gilt, gibt es insgesamt?

Lösung von cyrix:
Für diese Aufgabe wird vorausgesetzt, dass 0 eine natürliche Zahl ist.
Dann gibt es für jedes natürliche $x \leq 199$ genau $1993 - 10x$ verschiedene Möglichkeiten y zu wählen (nämlich 0 bis $1993 - 10x - 1$), sodass die Ungleichung erfüllt ist. Summieren wir dies über alle x, so erhalten wir also insgesamt

$$\sum_{x=0}^{199}(1993 - 10x) = 200 \cdot 1993 - 10 \cdot \sum_{x=0}^{199} x = 200 \cdot 1993 - 10 \cdot \frac{199 \cdot 200}{2} = 200 \cdot 1993 - 1990 \cdot 100 = 199600$$

Paare natürlicher Zahlen, die die Ungleichung aus der Aufgabenstellung erfüllen.

Aufgabe 340946:
Wie viele Paare (x, y) ganzer Zahlen x, y, die die Ungleichung $|x - 30| + |y - 10| < 100$ erfüllen, gibt es insgesamt?

Lösung von cyrix:
Wir betrachten zuerst die Ungleichung (*) $a + b < 100$ und bestimmen die Anzahl der Lösungen von dieser Ungleichung mit nicht-negativen ganzen Zahlen a und b. Dabei unterscheiden wir, ob diese gleich 0 werden, oder verschieden davon sind:

Es gibt genau eine Lösung mit $a = b = 0$.
Für $a = 0$, $b \neq 0$ gibt es genau die 99 Lösungen $b = 1$ bis $b = 99$. Analog gibt es für $a \neq 0$, $b = 0$ genau 99 Lösungen.

Sei nun $a > 0$ und $b > 0$. Für festes a gibt es für b genau die Lösungen $1,2,\dots,99 - a$, also $99 - a$ verschiedene. Insgesamt gibt es also

$$\sum_{a=1}^{99}(99 - a) = 99 \cdot 99 - \sum_{a=1}^{99} a = 99 \cdot 99 - \frac{99 \cdot 100}{2} = 99 \cdot (99 - 50) = 99 \cdot 49$$

Lösungen in diesem Fall.
Nun zurück zur Ungleichung aus der Aufgabenstellung:
Für jede Lösung (a,b) der Ungleichung (*) mit $a,b \neq 0$ erhält man vier Lösungen der Ungleichung der Aufgabenstellung, da man $x - 30 = \pm a$ und unabhängig davon $y - 10 = \pm b$ wählen kann. Ist einer oder sind beide Werte a, b aber gleich Null, so kann man hierbei nur ein Vorzeichen wählen und erhält $x - 30 = 0$ bzw. $y - 10 = 0$.

Zusammen ergeben sich also für die Ausgangsgleichung folgende Anzahlen von Lösungen:
Ist $a = b = 0$, so erhält man genau $1 \cdot 1 = 1$ Lösung für die Ausgangsgleichung.
Ist $a = 0$ und $b \neq 0$, oder umgekehrt, dann erhält man jeweils genau $99 \cdot 2$, in beiden Fällen zusammen also $99 \cdot 4$, Lösungen der Ausgangsgleichung.
Und sind sowohl a als auch b von 0 verschieden, erhält man daraus $(99 \cdot 49) \cdot 4 = 99 \cdot 196$ Lösungen der Ausgangsgleichung.

Insgesamt erhalten wir damit, dass die Ungleichung aus der Aufgabenstellung genau $99 \cdot 196 + 99 \cdot 4 + 1 = 19801$ ganzzahlige Lösungen besitzt.

VI. Klasse 10

VI.I. Mengen; Logik

I. Runde 1

Aufgabe 041012:
In der Aufgabe

$$\begin{array}{cccccc} & & V & A & T & E & R \\ + & M & U & T & T & E & R \\ \hline & E & L & T & E & R & N \end{array}$$

sind für die Buchstaben Ziffern einzusetzen. Gleiche Buchstaben sind durch gleiche, verschiedene Buchstaben sind durch verschiedene Ziffern zu ersetzen.
Geben Sie sämtliche Lösungen an, und weisen Sie nach, dass es keine weiteren geben kann!

Lösung von Manuela Kugel:
Es gelten folgende Gleichungen (Klammerausdrücke sind optional):

$$R + R = N(+10) \tag{1}$$
$$E + E(+1) = R(+10) \tag{2}$$
$$T + T(+1) = E(+10) \tag{3}$$
$$A + T(+1) = T(+10) \tag{4}$$
$$V + U(+1) = L + 10 \tag{5}$$
$$M + 1 = E \tag{6}$$

Aus (1) und (2) folgt unmittelbar:
Wenn $R \leq 4$ dann kein Übertrag in (1), d. h. R gerade, und mit $R \neq 0$ (dies gilt, weil sonst in (1) $N = R$ wäre):

$$R = \{2, 4\} \Rightarrow E = \frac{R(+10)}{2} = \{1, 2, 6, 7\} \tag{7a}$$

Wenn $R \geq 5$, dann mit Übertrag in (1), d. h. R ungerade:

$$R = \{5, 7, 9\} \Rightarrow E = \frac{R - 1(+10)}{2} = \{2, 3, 4, 7, 8, 9\}$$

wobei $E = 9$ entfällt, da dies nur erreicht wird bei $R = 9$ $\quad (7b)$. Also

$$R \in \{2, 4, 5, 7, 9\} \qquad \text{und} \qquad E \in \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8\} \tag{7c}$$

Betrachtet man zu den Werten aus (7a) und (7b) nun noch Gleichung (3), so ergibt sich analog:
Wenn $E \leq 4$ dann kein Übertrag in (2), d. h. E gerade mit $E(+10) = 2T$, und mit $E \neq 0$ (siehe (7c)):

$$E = \{2, 4\} \Rightarrow T = \frac{E(+10)}{2} = \{1, 2, 6, 7\} \tag{8a}$$

Wenn $E > 5$ ($E \neq 5, E \neq 9$ siehe (7c)), dann mit Übertrag in (2), d. h. E ungerade:

$$E = 7 \Rightarrow T = \frac{E - 1(+10)}{2} = \{3, 8\} \qquad \text{also} \tag{8b}$$

$$E \in \{2, 4, 7\} \qquad \text{und} \qquad T \in \{1, 2, 3, 6, 7, 8\} \tag{8c}$$

Ich betrachte (7c) und (8c): Da R nur 2 werden kann bei $E = 1$ oder $E = 6$ folgt $R \neq 2$. Analog gilt $R \neq 7$, da hierfür $E = 3$ oder $E = 8$ gegeben sein muss, d. h. $R \in \{4, 5, 9\}$ (9).
A ergibt sich mit (3), (4) und (8c) wie folgt: wenn $T < 4$ dann $A = 0$ und wenn $T > 5$ dann $A = 9$ (10).
Weiterhin gilt mit (6): $M \in \{1, 3, 6\}$ (11).
Es gilt also zusammenfassend:

$$R = 4 \Rightarrow N = 8 \Rightarrow E = \{2, 7\} \Rightarrow M = \{1, 6\} \Rightarrow T = \{\{6\}\{3, 8\}\} \Rightarrow A = \{\{9\}\{0, 9\}\}$$
$$R = 5 \Rightarrow N = 0 \Rightarrow E = \{2, 7\} \Rightarrow M = \{1, 6\} \Rightarrow T = \{\{6\}\{3, 8\}\} \Rightarrow A = \{\{9\}\{0, 9\}\}$$
$$R = 9 \Rightarrow N = 8 \Rightarrow E = \{4\} \Rightarrow M = \{3\} \Rightarrow T = \{2, 7\} \Rightarrow A = \{0, 9\}$$

Probiert man diese Fälle systematisch mit den verbleibenden freien Größen V,U,L durch, so kommt man auf folgende 8 Lösungen: $VATER + MUTTER = ELTERN$

$20374 + 693374 = 713748$; $59624 + 176624 = 236248$; $79624 + 156624 = 236248$

$90374 + 623374 = 713748$; $49625 + 186625 = 236250$; $89625 + 146625 = 236250$

$50249 + 362249 = 412498$; $60249 + 352246 = 412498$

Aufgabe 071014:
Herr X stellt am 30.05.1967 fest, dass er jede Ziffer von 0 bis 9 genau einmal benutzt, wenn er sein Geburtsdatum in der soeben verwendeten Schreibweise für Terminangaben notiert und sein Alter in Jahren dazu setzt. Außerdem bemerkt er, dass die Anzahl seiner Lebensjahre eine Primzahl ist.

Wann ist Herr X geboren, und wie alt ist er?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es bezeichne $ab.cd.efgh$ das Geburtsdatum und ik das Alter von Herrn X. Es seien also a und b die Ziffern für den Tag, c und d die Ziffern für den Monat, e, f, g und h die Ziffern für das Jahr und i und k die Ziffern für das Alter.

Dann muss gelten:

$e = 1$, und f kann nur 9 oder 8 sein, da die Anzahl der Lebensjahre von Herrn X zweistellig sein muss und er demnach nach 1799 geboren wurde.
$c = 0$, da es nur 12 Monate gibt und die 1 bereits vergeben ist.
$a = 2$, da ein Monat höchstens 31 Tage haben kann, die 0 und die 1 vergeben sind, und somit 30 und 31 auch nicht in Frage kommen.

Fall 1: Sei $f = 9$
Dann muss gelten

A) $10g + h + 10i + k = 66$, falls Herr X nach dem 30.5. Geburtstag hat,

B) $10g + h + 10i + k = 67$ andernfalls.

Aus A) folgt, dass entweder

a) $g + i = 6$ und $h + k = 6$ oder

b) $g + i = 5$ und $h + k = 16$ gilt.

Aus B) folgt, dass entweder

c) $g + i = 6$ und $h + k = 7$ oder

d) $g + i = 5$ und $h + k = 17$ gilt.

Aus den noch verbliebenen Ziffern ist keins der vier Gleichungspaare realisierbar. Die Annahme $f = 9$ ist falsch.

Fall 2: Sei $f = 8$.

Dann gilt, ähnlich wie oben,

C) $10g + h + 10i + k = 166$ oder

D) $10g + h + 10i + k = 167$.

Aus C) folgt, dass entweder

e) $g + i = 16$ und $h + k = 6$ oder

f) $g + i = 15$ und $h + k = 16$ gilt.

Aus D) folgt, dass entweder

g) $g + i = 16$ und $h + k = 7$ oder

h) $g + i = 15$ und $h + k = 17$ gilt.

Mit den noch vorhandenen Ziffern ist nur g) realisierbar.Folgende vier Verteilungen sind möglich: $g = 9$ und $i = 7$, $h = 4$ und $k = 3$, $g = 7$ und $i = 9$ und $h = 3$ und $k = 4$.

Das Alter von Herrn X kann damit 73, 74, 93 oder 94 Jahre sein. Von diesen Zahlen ist nur 73 Primzahl. Es ergibt sich damit folgende Verteilung:

$$f = 8, \quad i = 7, \quad k = 3, \quad g = 9 \quad \text{und} \quad h = 4.$$

Für b und d stehen nur noch die Ziffern 5 und 6 zur Verfügung. Aus g) folgt, weil es aus D) hervorgegangen ist, dass Herr X vor dem 30.5. Geburtstag hatte. Damit ist $d = 5$ und $b = 6$.

Herr X wurde am 26.05.1894 geboren und ist 73 Jahre alt.

Aufgabe 081014:
In

$$\begin{array}{cccccc}
1 & * & * & \cdot & * & * \\
\hline
 & * & * & * & 1 & \\
 & & * & * & * & 1 \\
\hline
 & * & * & * & 1 & *
\end{array}$$

sind die Sternchen durch (nicht notwendig einander gleiche) Ziffern so zu ersetzen, dass eine richtig gelöste Multiplikationsaufgabe entsteht.

Geben Sie alle Möglichkeiten hierfür an!

Lösung von Manuela Kugel:
Ansatz:

$$\begin{array}{cccccc}
1 & a & b & \cdot & c & d \\
\hline
 & e & f & g & 1 & \\
 & & h & i & j & 1 \\
\hline
 & k & \ell & m & 1 & n
\end{array}$$

Dabei sind $a, \ldots, n$ jeweils Ziffern 0 bis 9, wobei unterschiedliche Variablen denselben Wert haben dürfen. Offensichtlich muss dann $n = 1$ und $g = 0$ gelten, d. h., eine Teilaufgabe lautet $1ab \cdot d = ef01$. Welche Zahlen erfüllen diese Bedingungen?

Die Ziffern b und d müssen jeweils ungerade sein, weil nur das Produkt zweier ungerader Zahlen wieder ungerade ist. Das Produkt zweier natürlicher Zahlen ≤ 9 endet auf 1 in genau den Fällen: $1 \cdot 1 = 1$, $3 \cdot 7 = 21$, $7 \cdot 3 = 21$, $9 \cdot 9 = 81$.

Nun werden die obigen Fälle diskutiert:

1. $b = 1$, $d = 1$
   $1a1 \cdot 1 = ef01 \Rightarrow e = 0, a = 0, f = 1 \Rightarrow 101 \cdot 1 = 0101$
   $101 \cdot c = hij1 \Rightarrow c = 1, h = 0, i = 1, j = 0 \Rightarrow 101 \cdot 1 = 0101$
2. $b = 3$, $d = 7$
   $1a3 \cdot 7 = ef01 \Rightarrow a = 4, e = 1, f = 0 \Rightarrow 141 \cdot 7 = 1001$
   $143 \cdot c = hij1 \Rightarrow c = 7, h = 1, i = 0, j = 0 \Rightarrow 141 \cdot 7 = 1001$
3. $b = 7$, $d = 3$
   $1a7 \cdot 3 = ef01 \Rightarrow a = 6, e = 0, f = 5 \Rightarrow 167 \cdot 3 = 0501$
   $167 \cdot c = hij1 \Rightarrow c = 3, h = 0, i = 5, j = 0 \Rightarrow 167 \cdot 3 = 0501$
4. $b = 9$, $d = 9$
   $1a9 \cdot 9 = ef01 \Rightarrow a = 8, e = 1, f = 7 \Rightarrow 189 \cdot 9 = 1701$
   $189 \cdot c = hij1 \Rightarrow c = 9, h = 1, i = 7, j = 0 \Rightarrow 189 \cdot 9 = 1701$

Damit lauten die 4 Lösungen wie folgt:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 1 & \cdot & 1 & 1 \\ \hline & 0 & 1 & 0 & 1 & \\ & & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{cccccc} 1 & 4 & 3 & \cdot & 7 & 7 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 1 & \\ & & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline & 1 & 8 & 7 & 1 & 1 \end{array}$$

sowie

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 8 & 9 & \cdot & 9 & 9 \\ \hline & 1 & 7 & 0 & 1 & \\ & & 1 & 7 & 0 & 1 \\ \hline & 1 & 8 & 7 & 1 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{cccccc} 1 & 6 & 7 & \cdot & 3 & 3 \\ \hline & 0 & 5 & 0 & 1 & \\ & & 0 & 5 & 0 & 1 \\ \hline & 0 & 5 & 5 & 1 & 1 \end{array}$$

Aufgabe 091011:
Bei einem international besetzten Radrennen ergab sich folgende Rennsituation.

Das Feld der Teilnehmer war in genau drei Gruppen (Spitzengruppe, Hauptfeld, letzte Gruppe) aufgesplittert. Jeder Fahrer fuhr in einer dieser Gruppen. Genau 14 Fahrer waren in der letzten Gruppe, darunter kein DDR-Fahrer. Genau 90 Prozent der übrigen Fahrer bildeten das Hauptfeld. Darin fuhren einige, jedoch nicht alle DDR-Fahrer. Die Spitzengruppe umfasste genau ein Zwölftel des gesamten Teilnehmerfeldes. Von den dort vertretenen Mannschaften waren genau die polnischen am schwächsten und genau die sowjetischen am stärksten vertreten.
a) Wieviel Fahrer nahmen insgesamt teil?
b) Wieviel DDR-Fahrer waren in der Spitzengruppe?
c) Wieviel Mannschaften waren in der Spitzengruppe vertreten?

Lösung von Manuela Kugel:
Bezeichnungen:
x ist die Anzahl aller Fahrer, s die Anzahl der Fahrer in der Spitzengruppe, h die Anzahl der Fahrer des Hauptfeldes und l die Anzahl der Fahrer der letzten Gruppe.
Die Indizes stehen für die entsprechenden Länder: s (sowjetisch), d (deutsch), p (polnisch).

Dann gelten folgende Beziehungen:

$$x = s + m + l \quad (1) \qquad l = 14 \quad (2)$$
$$l_d = 0 \quad (3) \qquad h = 0{,}9 \cdot (x - l) \quad (4)$$
$$h_d \neq 0 \quad (5) \qquad s_d \neq 0 \quad (6)$$
$$s = \frac{1}{12}x \quad (7) \qquad s_s > s_d > s_p \quad (8)$$

Aus (1), (2), (4) und (7) folgt dann: $x = \frac{1}{12}x + 0{,}9 \cdot (x - 14) + 14 \Rightarrow \frac{11}{12}x = 0{,}9x + 1{,}4 \Rightarrow x = 84$. Womit sich direkt $s = 7$ ergibt.

Aus (8) folgt, dass $s_s \geq 3$ und $s_p \geq 1$ (da $s_d \geq 2$). Nun gilt aber schon $s = 7 \geq s_s + s_d + s_p \geq 3+2+1 = 6$. Gäbe es eine vierte Mannschaft im Spitzenfeld, so wäre sie also maximal mit einem Fahrer vertreten, was dem widerspricht, dass die polnische Mannschaft die wenigsten Fahrer (mindestens einen) hat. Also besteht das Spitzenfeld aus Fahrern von genau 3 Ländern. Die Zahl 7 so in 3 Summanden aufzuteilen, dass der kleinste und größte Summand ungleich dem mittleren sind, geht einzig durch die Variante: $7 = 1 + 2 + 4$. Folglich gilt $s_d = 2$, also waren in der Spitzengruppe 2 deutsche Fahrer vertreten.
a) Es nahmen 84 Fahrer am Radrennen teil.
b) Davon waren 2 Fahrer in der Spitzengruppe.
c) In der Spitzengruppe fuhren Fahrer aus drei Mannschaften.

Aufgabe 101011:
Zwei Schüler A und B spielen miteinander folgendes Spiel.

Von einem Haufen mit genau 150 Streichhölzern müssen beide jeweils nacheinander Streichhölzer entnehmen, und zwar jeweils mindestens 1 Streichholz, aber höchstens 10 Streichhölzer, wobei A beginnt. Sieger ist derjenige, der das letzte Streichholz fortnehmen kann.

Entscheiden Sie, wer von beiden seinen Sieg erzwingen kann, und geben Sie an, auf welche Weise er mit Sicherheit zum Ziel gelangt!

Lösung von Kornkreis:
Für eine einfache Vorstellung betrachtet man das umgekehrte Problem, bei dem man mit 0 Streichhölzern anfängt und welche hinzufügt.

Wenn A 139 Streichhölzer vorsetzt, muss B spielen und A hat dann eine Anzahl von 140 bis 149 vor sich, von der er gewinnen kann. Wie kann A sicher 139 vorsetzen?

Indem A vorher 128 vorsetzt; rückwärts also 117, 106, 95, 84, 73, 62, 51, 40, 29, 18, 7; d. h., A spielt also im ersten Zug 7, im zweiten ergänzt er so viel, dass es 18 sind usw.

Aufgabe 111014:
In dem Schema sollen die Buchstaben so durch Ziffern ersetzt werden, dass eine richtig gelöste Additionsaufgabe entsteht. Dabei sollen für die gleichen Buchstaben gleiche Ziffern und für verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern eingesetzt werden.

$$\begin{array}{ccccc} & \mathrm{D} & \mathrm{R} & \mathrm{E} & \mathrm{I} \\ + & \mathrm{D} & \mathrm{R} & \mathrm{E} & \mathrm{I} \\ + & \mathrm{D} & \mathrm{R} & \mathrm{E} & \mathrm{I} \\ \hline & \mathrm{N} & \mathrm{E} & \mathrm{U} & \mathrm{N} \end{array}$$

Geben Sie alle Lösungen dafür an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es seien die Überträge aus der Einerspalte mit e, aus der Zehnerspalte mit z und aus der Hunderterspalte mit h bezeichnet. Dann gilt $e,z,h \in \{0,1,2\}$, da die Summe dreier einstelliger Zahlen nicht größer als 27 sein kann und auch mit einem eventuellen Übertrag aus der nächstniederen Stelle 29 nicht überschreitet. Angenommen, es gäbe eine Lösung, dann müsste

$$3I = 10e + N \qquad \text{und} \qquad 3D + h = N$$

gelten. Durch Substitution von N erhält man $3I = 10e + h + 3D$, also $3(I - D) = 10e + h$. Daraus folgt wegen $10e + h \geq 0$ zunächst $I \geq D$, wegen $I \neq D$ also

$$I > 0 \qquad \text{und daher} \qquad 1e + h > 0 \tag{1}$$

Ferner folgt $I - D = \frac{10e+h}{3}$ (2).

Unter Berücksichtigung der für e und h geltenden Einschränkungen kommen nur folgende beiden Möglichkeiten in Frage:

$$e = 1 \quad , \quad h = 2 \quad , \quad I - D = 4 \quad (3a) \qquad ; \qquad e = 2 \quad , \quad h = 1 \quad , \quad I - D = 7 \quad (3b)$$

Aus $3D = N - h$, $N < 10$ und $h \in \{1{,}2\}$ folgt $3d < 9$, wegen $D > 0$, also $D \in \{1{,}2\}$ (4) und damit wegen (3) $I \in \{5{,}6{,}8{,}9\}$.

Aus $3I = 10e + N$ und $I \neq N$ folgt $I \neq 5$ und daher $I \in \{6{,}8{,}9\}$ (6), $N \in \{8, 4, 7\}$ (7). Ferner ist $3E + e = U + 10z$ und $3R + z = 10h + E$, d. h. $E = 3R + z - 10h$. Durch Substitution von E erhält man $9R + 37 - 20h + e = U + 10z$, also

$$R = \frac{30h + 7z - e + U}{9} \tag{8}$$

Nach (6) kommen für I höchstens drei Zahlen in Frage. Diese drei Möglichkeiten müssen der Reihe nach untersucht werden.

Fall 1: Es sei $I = 6$. Dann ist $N = 8, e = 1$ und daher wegen (3a) $h = 2$, $D = 2$. In diesem Fall erhält man aus (8)

$$R = \frac{59 + 7z + U}{9}$$

Wegen der für die Variablen geltenden Einschränkungen wird diese Gleichung höchstens von folgenden Zahlen erfüllt:
$z = 0$, dann $U = 4, R = 7, E = 1$;
$z = 1$, dann $U = 6, R = 8 = N$, was im Widerspruch zu $N \neq R$ steht;
$z = 2$, dann $U = 8 = N$, was im Widerspruch zu $N \neq U$ steht.

Das führt auf folgende Lösung:
$$\begin{array}{ccccc} & 2 & 7 & 1 & 6 \\ + & 2 & 7 & 1 & 6 \\ + & 2 & 7 & 1 & 6 \\ \hline & 8 & 1 & 4 & 8 \end{array}$$

Fall 2: Es sei $I = 8$. Dann ist $N = 4, e = 2$ und daher wegen (3b) $h = 1$, $D = 1$. In diesem Fall erhält man aus (8)

$$R = \frac{28 + 7z + U}{9}$$

Wegen der für die Variablen geltenden Einschränkungen wird diese Gleichung höchstens von folgenden Zahlen erfüllt:
$z = 0$, dann $U = 8 = I$, was im Widerspruch zu $I \neq U$ steht;
$z = 1$, dann $U = 1, R = 4 = N$, was im Widerspruch zu $N \neq R$ steht;
$z = 2$, dann $U = 3$ und $R = 5$.

Das führt auf folgende Lösung:
$$\begin{array}{ccccc} & 1 & 5 & 7 & 8 \\ + & 1 & 5 & 7 & 8 \\ + & 1 & 5 & 7 & 8 \\ \hline & 4 & 7 & 3 & 4 \end{array}$$

Fall 3: Es sei $I = 9$. Dann ist $N = 7, e = 2$ und daher wegen (3b) $h = 1$, $D = 2$. In diesem Fall erhält man aus (8)

$$R = \frac{28 + 7z + U}{9}$$

Wegen der für die Variablen geltenden Einschränkungen wird diese Gleichung höchstens von folgenden Zahlen erfüllt:
$z = 0$, dann $U = 8$, $R = 4$ und $E = 2 = D$, was im Widerspruch zu $D \neq E$ steht;
$z = 1$, dann $U = 1, R = 4$ und $E = 3$;

$z = 2$, dann $U = 3$ $R = 5$ und $E = 7 = N$, was im Widerspruch zu $N \neq E$ steht.

Das führt auf folgende Lösung:
$$\begin{array}{rrrrr} & 2 & 4 & 3 & 9 \\ + & 2 & 4 & 3 & 9 \\ + & 2 & 4 & 3 & 9 \\ \hline & 7 & 3 & 1 & 7 \end{array}$$
Da andere Fälle nicht existieren, hat die Aufgabe genau die angegebenen drei Lösungen.

Aufgabe 131014:
Jens und Dirk spielen das folgende Spiel

Sie wählen abwechselnd für je einen Koeffizienten einer durch $f(x) = ax^2 + bx + c$ zu definierenden Funktion f reelle Zahlen a ($\neq 0$), b, c in dieser Reihenfolge. Jens beginnt. Liegen nach erfolgter Wahl von a, b, c die Schnittpunkte des Graphen der Funktion f mit der x-Achse symmetrisch zum Koordinatenursprung, so hat Dirk gewonnen, liegen sie unsymmetrisch, Jens. Das Spiel endet genau dann unentschieden, wenn f keine Nullstellen hat.

Es ist zu untersuchen, ob es sich bei diesem Spiel um ein „ungerechtes Spiel“ handelt. Als ein ungerechtes Spiel wird ein Spiel bezeichnet, bei dem einer der Spieler bei allen Spielmöglichkeiten des anderen den Gewinn erzwingen kann.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Nullstellen der quadratischen Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ sind nach der Lösungsformel bekanntlich:
$$x_{1,2} = -\frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
Sollen sie symmetrisch zum Koordinatenursprung liegen, so muss gelten: $x_1 = -x_2$. Setzt man dies in die Lösungsformel ein, ergibt sich:
$$-\frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
Dies führt zu $-b = b$, was genau dann erfüllt ist, wenn $b = 0$. Das heißt, dass, falls Nullstellen existieren, diese immer symmetrisch zum Ursprung liegen, wenn b von Dirk mit dem Wert $b = 0$ gewählt wird.

Dirk kann dennoch nicht den Sieg erzwingen, da Jens mit der Wahl von c für beliebige Werte von a und b erzwingen kann, dass es keine Nullstellen gibt. Das ist genau dann der Fall, wenn der Ausdruck unter der Wurzel kleiner als Null ist: $b^2 - 4ac < 0$. Damit handelt es sich um kein ungerechnetes Spiel.

Aufgabe 151014:
In
$$\begin{array}{ccccc} & H & A & U & S \\ + & H & A & U & S \\ + & H & A & U & S \\ \hline S & T & A & D & T \end{array}$$
sollen die Buchstaben so durch Ziffern ersetzt werden, dass eine richtig gelöste Additionsaufgabe entsteht. Dabei sollen für gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und für verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern eingesetzt werden.

Geben Sie alle Lösungen an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Spalten seien, von der Einerstelle beginnend, mit 1 bis 5 bezeichnet.

I. Angenommen, bei einer Ersetzung entstehe eine Lösung. Dann kann für diese Ersetzung S nur eine der Ziffern 1 oder 2 sein, da die Summe dreier vierstelliger Zahlen kleiner als 30000 ist und die fünfstellige natürliche Zahl „STADT“ nicht mit 0 beginnen kann.

Fall 1: Es sei $S = 1$.

Aus Spalte 1 folgt dann unmittelbar $T = 3$.

Da die Summe mit den Ziffern 1 und 3 beginnt, und unter den Zahlen, die gleich 13 oder um 1 oder 2 kleiner als 13 sind, nur $12 = 3 \cdot 4$ durch 3 teilbar ist, kommt nur $H = 4$ in Frage, und aus Spalte 3 muss der Übertrag 1 entstehen.

Also muss A eine der Ziffern bezeichnen, für die das Dreifache oder das um 1 oder 2 vermehrte Dreifache eine der Zahlen $10, \dots ,19$ ist. Von allen derartigen Ziffern 3, 4, 5 oder 6, scheiden 3 und 4 aus, da sie bereits vergeben sind. Da aus Spalte 2 ein Übertrag von höchstens 2 entstehen kann und $3 \cdot 6 = 18$ ist, woraus durch Addition von 0, 1 oder 2 keine Zahl mit der Endziffer 6 entstehen kann, entfällt $A = 6$.

A kann demnach nur 5 sein, und damit nur Berechnung der Summe in Spalte 3 die Endziffer 5 entsteht, darf Spalte 2 keinen Übertrag liefern, also kann U nur eine der Ziffern 0, 1, 2 oder 3 darstellen. Davon sind 1 und 3 bereits vergeben.

Für $U = 0$ entstünde $D = 0$ und damit ein Widerspruch. Also kann U nur 2 sein, woraus weiter $D = 6$ folgt.

Fall 2: Es sei $S = 2$.

Aus Spalte 1 folgt dann unmittelbar $T = 6$.

Da die Summe mit den Ziffern 2 und 6 beginnt und unter den Zahlen, die gleich 26 oder um 1 oder 2 kleiner als 26 sind, nur $24 = 3 \cdot 8$ durch 3 teilbar ist, kommt nur $H = 8$ in Frage, und aus Spalte 3 muss der Übertrag 2 entstehen. Also muss A eine der Ziffern bezeichnen, für die des Dreifache oder das um 1 oder 2 vermehrte Dreifache eine der Zahlen $20, \dots ,29$ ist.

Von allen derartigen Ziffern, 6, 7, 8 oder 9, scheiden 6 und 8 aus, da 1 sie bereits vergeben sind. Weil aus Spalte 2 ein Übertrag von höchstens 2 entstehen kann und $3 \cdot 7 = 21$ ist, woraus durch Addition von 0, 1 oder 2 keine Zahl mit der Endziffer entstehen kann, entfällt $A = 7$.

A kann demnach nur 2 sein, und damit zur Berechnung der Summe in Spalte 3 die Endziffer 9 entsteht, muss aus Spalte 2 ein Übertrag von 2 zur Verfügung stehen.

Demnach kann nur U eine der Ziffern 7, 8 oder 9 sein. Davon ist 7 die einzige noch nicht vergebene Ziffer, woraus weiter $D = 1$ folgt.

Somit können nur die Einsetzungen $A = 5$, $D = 6$, $H = 4$, $S = 1$, $T = 3$, $U = 2$, und $A = 9$, $D = 1$, $H = 8$, $S = 2$, $T = 6$, $U = 7$ zu Lösungen führen.

II. In der Tat sind bei diesen Einsetzungen verschiedene Buchstaben stets durch verschiedene Ziffern ersetzt, und da ferner die entstehenden Additionsaufgaben

$$\begin{array}{ccccc} & 4 & 5 & 2 & 1 \\ + & 4 & 5 & 2 & 1 \\ + & 4 & 5 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 3 & 5 & 6 & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} & 8 & 9 & 7 & 2 \\ + & 8 & 9 & 7 & 2 \\ + & 8 & 9 & 7 & 2 \\ \hline 2 & 6 & 9 & 1 & 6 \end{array}$$

richtig gelöst sind, erfüllen diese Einsetzungen alle gestellten Forderungen.

Aufgabe 161011:
In das Kryptogramm sind anstelle der Buchstaben Ziffern (0, 1,..., 9) so einzusetzen, dass eine Additionsaufgabe mit richtiger Lösung entsteht. Dabei sollen gleiche Buchstaben gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern darstellen.

$$\begin{array}{cccccc} & \mathrm{K} & \mathrm{A} & \mathrm{T} & \mathrm{E} & \mathrm{R} \\ + & \mathrm{K} & \mathrm{A} & \mathrm{T} & \mathrm{Z} & \mathrm{E} \\ \hline & \mathrm{T} & \mathrm{I} & \mathrm{E} & \mathrm{R} & \mathrm{E} \end{array}$$

Geben Sie sämtliche Lösungen dieser Aufgabe an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Man stelle sich die Spalten der Aufgabe von links nach rechts fortlaufend nummeriert vor. Dann gilt:

(1) Aus $r + E = E$ folgt $R = 0$ (Spalte 5).
(2) Wegen $R \neq 0$ und daher $E \neq 0$ folgt $E + z = 10$ (Spalte 4).
(3) Wegen $E \neq z$ und (2) folgt $E \neq 5$, $Z \neq 5$.
(4) Wegen (2) gilt $2T + 1 = E$ oder $2T + 1 = 10 + E$ (Spalte 3).
(5) Wegen (3) und (4) gilt $T \neq 2$ und $T \neq 7$.
(6) Wegen (1) gilt $K > 0$ und damit $T \neq 7$ (Spalte 1).
(7) Wegen (4) und $T \neq E$ folgt $T \neq 9$.

Somit kann T nur eine der Zahlen 3, 4, 5, 6 oder 8 sein.

(I) Es sei $T = 3$. Dann wäre $E = 7$ und $Z = 3$, was wegen $Z \neq T$ ein Widerspruch wäre. Also gilt $T \neq 3$.

(II) Es sei $T = 4$. Dann ist $E = 9$ und $Z = 1$. Da T gerade ist, kann aus der Spalte 2 kein Übertrag in Spalte 1 erfolgt sein. Also ist $K = 2$ und $A < 5$, was unter Berücksichtigung der bereits verwendeten Zahlen nach den Bedingungen der Aufgabe aus $A = 3$ und $I = 6$ führt. Damit erhält man die folgende Lösung:

$$\begin{array}{cccccc} & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 \\ + & 2 & 3 & 4 & 1 & 9 \\ \hline & 4 & 6 & 9 & 0 & 9 \end{array}$$

(III) Es sei $T = 5$. Dann erhält man $E = 1, Z = 9$ und $K = 2$, da bei ungeradem T ein Übertrag aus Spalte 2 in Spalte 1 erfolgen muss. Wegen $T = 5$ ist $2A + 1 = 10 + I$, also unter Berücksichtigung der bereits verwendeten Zahl $I = 7$ und damit $A = 8$. Damit erhält man als weitere Lösung:

$$\begin{array}{cccccc} & 2 & 8 & 5 & 1 & 0 \\ + & 2 & 8 & 5 & 9 & 1 \\ \hline & 5 & 7 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

(IV) Es sei $T = 6$. Dann wäre $E = K = 3$, was wegen $E \neq K$ ein Widerspruch wäre. Also gilt $T \neq 6$.

(V) Es sei $T = 8$. Dann erhält man $E = 7$, $Z = 3$ und $K = 4$, da in diesem Falle kein Übertrag aus Spalte 2 in Spalte 1 erfolgt sein kann. Aus $I = 2A + 1$ und unter Berücksichtigung der bereits verwendeten Zahlen folgt $I = 5$ und $A = 2$. Damit erhält man als dritte Lösung der Aufgabe:

$$\begin{array}{rccccc} & 4 & 2 & 8 & 7 & 0 \\ + & 4 & 2 & 8 & 3 & 7 \\ \hline & 8 & 5 & 7 & 0 & 7 \end{array}$$

Die angegebenen Lösungen sind auch alle möglichen Lösungen.

Aufgabe 161013:
Man untersuche, ob es eine Möglichkeit gibt, alle Kanten eines Würfels so zu durchlaufen, dass nacheinander ohne Unterbrechung jede Kante genau einmal durchlaufen wird!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Diese Möglichkeit besteht nicht. Von jedem der 8 Eckpunkte eines jeden Würfels gehen genau 3 Kanten, also eine ungerade Anzahl von Kanten, aus.

Gäbe es einen in der Aufgabe geforderten (räumlichen) Streckenzug; dann müssten mit Ausnahme des Anfangs- und des Endpunktes die Anzahlen der zu einander übrigen 6 Punkte führenden Kanten gleich der von diesem Punkte fortführenden Kanten sein, d. h. in jedem dieser 6 Punkte müsste eine gerade Anzahl von Kanten enden, was nicht der Fall ist. Folglich gibt es keinen derartigen Streckenzug.

Aufgabe 171013:
Sind a_0, a_1, ..., a_{n-1}, a_n natürliche Zahlen mit $0 \leq a_i \leq 7$ $(i = 0, 1, ...n)$ und gilt

$$z = a_n \cdot 8^n + a_{n-1} \cdot 8^{n-1} + ... + a_1 \cdot 8 + a_0,$$

so sagt man, z sei im Oktalsystem durch die Ziffern a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0 dargestellt, und schreibt kurz

$$z = [a_n a_{n-1} ... a_1 a_0]_8.$$

Die natürliche Zahl, die im dekadischen System die Darstellung 135 hat, lautet z. B. im Oktalsystem $[207]_8$; denn es gilt $135 = 2 \cdot 8^2 + 0 \cdot 8 + 7$ sowie $0 \leq 2; 0; 7 \leq 7$ und $2 > 0$.

a) Stellen Sie die natürliche Zahl, deren Darstellung im dekadischen System 214 lautet, im Oktalsystem dar!

b) Im Kryptogramm

$$\begin{array}{rccccl} [& E & I & N & S &]_8 \\ +[& E & I & N & S &]_8 \\ \hline [& Z & W & E & I &]_8 \end{array}$$

wird gefordert, für gleiche Buchstaben gleiche Ziffern, für verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern so einzusetzen, dass im Oktalsystem dargestellte natürliche Zahlen entstehen, für die die angegebene Additionsaussage wahr ist.

Geben Sie mindestens eine Lösung dieses Kryptogramms an, und zeigen Sie, dass die angegebene Lösung alle verlangten Eigenschaften hat!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Die höchste Potenz von 8, die nicht größer als 214 ist, ist $8^22 = 64$. Das größte Vielfache von 64, das nicht größer als 214 ist, ist $3 \cdot 64 = 192$. Ferner gilt $214 = 192 + 22$ sowie $22 = 2 \cdot 8 + 6$. Damit erhält man $214 = 3 \cdot 8^2 + 2 \cdot 8 + 6$ und somit, weil $0 \leq 3; 2; 6 \leq 7$ und $3 > 0$ ist, $2140[326]_8$.

b) Eine Lösung ist z. B.

$$\begin{array}{rccccl} [& 3 & 0 & 5 & 4 &]_8 \\ +[& 3 & 0 & 5 & 4 &]_8 \\ \hline [& 6 & 1 & 3 & 0 &]_8 \end{array}$$

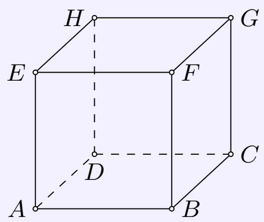
Diese Lösung hat die verlangten Eigenschaften: Für die verschiedenen Buchstaben E, I, N, S, Z, W sind die verschiedenen Ziffern 3, 0, 5, 4, 6, 1 eingesetzt, für gleiche Buchstaben immer gleiche Ziffern.
Sie erfüllen die Bedingungen $0 \leq a_i \leq 7$ und die als Anfangsziffern stehenden Ziffern 3, 6 sind nicht 0.
Die dargestellten Zahlen sind

$$[3054]_8 = 3 \cdot 8^3 + 0 \cdot 8^2 + 5 \cdot 8 + 4 = 1580$$

$$[6130]_8 = 6 \cdot 8^3 + 1 \cdot 8^2 + 3 \cdot 8 + 0 = 3160$$

und für sie ist 1580 + 1580 = 3150 eine wahre Aussage.

Aufgabe 171014:



Es sei M die Menge aller 12 Kanten und aller 12 Flächendiagonalen eines Würfels mit den Eckpunkten A, B, C, D, E, F, G, H. Gibt es einen Streckenzug, bei dem jede in M enthaltene Strecke genau einmal durchlaufen wird?

Wenn ja, geben Sie ein Beispiel dafür (durch Angabe der Folge der Eckpunkte des Streckenzuges), und zeigen Sie, dass der so angegebene Streckenzug die verlangte Eigenschaft hat!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Ecken des Würfels seien wie in der Abbildung bezeichnet. Dann ist

$$M = \{AB, AC, AD, AE, AF, AH, BC, BD, BE, BF, BG, CD, CF, CG, CG, DE, DG, ...$$

$$...DH, EF, EG, EH, FG, FH, GH\}$$

Die Folge $(A, B, C, A, D, B, E, A, F, B, G, C, D, E, F, C, H, D, G, E, H, F, D, H, A)$ gibt einen Streckenzug an.
Unterstreicht man etwa in der Aufzählung der Elemente von M eine Strecke genau dann, wenn sie in dem angegebenen Streckenzug auftritt, so erhält jedes Element von M genau eine Unterstreichung. Ferner tritt keine Strecke auf, die nicht in M enthalten ist. Daher erfüllt der angegebene Streckenzug die Bedingungen der Aufgabe.

Aufgabe 181013:
Klaus erfindet für Schüler der ersten Klasse folgendes Spiel:

Auf 30 Kärtchen sind die Zahlen von 1 bis 10 so aufgeschrieben, dass auf jedem Kärtchen genau eine Zahl steht und dass jede der Zahlen 1 bis 10 dabei genau dreimal vorkommt. Eine ausreichende Anzahl unbeschriebener Kärtchen wird in Reserve gehalten.

Die 30 beschriebenen Kärtchen werden gemischt und verdeckt auf den Tisch gelegt. Der erste Spieler zieht zwei davon. Tragen beide die gleiche Zahl, so hat er ein „Paar“ und darf es aus dem Spiel herausnehmen und behalten. Sind die beiden Zahlen voneinander verschieden, so werden diese beiden Karten ebenfalls aus dem Spiel herausgenommen; dafür wird auf eine der Reservekarten die (positive) Differenz der beiden Karten geschrieben und diese Reservekarte unter die übrigen noch im Spiel befindlichen gemischt.

Dann verfährt der zweite und anschließend jeder weitere Spieler ebenso, solange sich noch mindestens 2 Kärtchen im Spiel befinden. Ist jedoch (nach dem Herausnehmen eines „Paares“ oder nach dem Hinzufügen einer Reservekarte) die Anzahl der im Spiel befindlichen Kärtchen kleiner als 2, so ist das Spiel beendet. (Der Spieler, der dann die meisten „Paare“ besitzt, hat gewonnen.)

Beweisen Sie, dass das Spiel stets damit enden muss, dass sich noch genau eine Karte im Spiel befindet!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Beim Ziehen zweier Karten sind genau die folgenden Fälle möglich:

A: Es werden zwei gerade Zahlen gezogen. Dann scheiden Sie entweder als „Paar“ aus dem Spiel aus oder an ihre Stelle tritt eine neue Karte. Auf ihr steht eine gerade Zahl, da die Differenz zweier gerader Zahlen eine gerade Zahl ist:

Die Anzahl der Karten mit ungeradzahliger Beschriftung bleibt unverändert.

B: Es werden zwei ungerade Zahlen gezogen. Dann scheiden sie entweder als „Paar“ aus dem Spiel aus, oder an ihre Stelle tritt eine neue Karte. Auf ihr steht eine gerade Zahl, da die Differenz zweier ungerader Zahlen eine gerade Zahl ist.

Die Anzahl der Karten mit ungeradzahliger Beschriftung vermindert sich um genau 2.

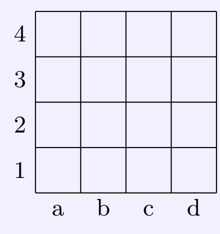
C: Es wird eine gerade und eine ungerade Zahl gezogen. Dann scheiden sie aus dem Spiel aus und an ihre Stelle tritt eine neue Karte. Sie trägt eine ungerade Zahl, da die Differenz einer geraden und einer ungeraden Zahl eine ungerade Zahl ist.

Die Anzahl der Karten mit ungeradzahliger Beschriftung verändert sich nicht.

Nun gilt einerseits:
Bei jedem Ziehen (mit evtl. anschließendem Hinzufügen einer Reservekarte) wird die Gesamtzahl der im Spiel befindlichen Karten kleiner. Also muss das Spiel stets damit enden, dass sich keine oder genau eine Karte im Spiel befindet.

Andererseits waren anfangs im Spiel genau 15 ungeradzahlig beschriftete Karten, und deren Anzahl hat sich nach den Feststellungen in A, B, C stets um eine gerade Zahl (0 oder 2) geändert. Somit ist auch am Spielende eine ungerade Anzahl von Karten mit ungeradzahliger Beschriftung im Spiel. Daher ist der Fall, dass am Spielende überhaupt keine Karte mehr im Spiel ist, nicht möglich, und es verbleibt als einzige Möglichkeit das Spielende mit genau einer im Spiel befindlichen Karte, w. z. b. w.

Aufgabe 211012:



Die Abbildung zeigt ein Quadrat, das in 16 untereinander kongruente quadratische Felder $a1$, $a2$, $a3$, $a4$, ... , $d1$, $d2$, $d3$, $d4$ zerlegt ist. Von diesen Feldern sollen genau vier so markiert werden, dass in jeder Zeile, in jeder Spalte und in jeder der beiden Diagonalen genau ein markiertes Feld auftritt.

Ermitteln Sie alle voneinander verschiedenen Markierungen, die diese Bedingungen erfüllen! Dabei gelten zwei Markierungen genau dann als nicht verschieden, wenn sie aus einander durch eine Drehung, eine Spiegelung oder mehrere solcher Abbildungen hervorgehen.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Angenommen, eine Markierung erfüllt die Bedingungen der Aufgabe. Dann folgt:

Falls von den Feldern a1, a4, d1, d4 keines markiert wäre, so wäre eines der Felder b3, c2 und eines der Felder b2, c3 markiert, da jede Diagonale ein markiertes Feld enthalten müsste. Dann lägen jedoch diese beiden markierten Felder in derselben Zeile oder in derselben Spalte, was beides den Bedingungen der Aufgabe widerspricht.

Also ist von den Feldern a1, a4, d1, d4 eines markiert. Durch eine Drehung kann etwa erreicht werden, dass a4 markiert ist.

Auf der Diagonalen a1 - d4 muss nun genau eines der Felder b2, c3 markiert sein. Man kann erreichen, dass c3 markiert ist, indem man, wenn dies nicht zutrifft, die Spiegelung an der Diagonalen a4 - d1 durchführt. (Bei dieser Spiegelung bleibt das markierte Feld a4 an seinem Platz.)

In der b-Spalte kann nun nur noch das Feld b1 markiert sein; als viertes markiertes Feld kommt schließlich nur noch d2 in Frage.

Also kann eine Markierung nur dann die Bedingungen der Aufgabe erfüllen, wenn sie durch Drehung, Spiegelung oder mehrere solcher Abbildungen aus der Markierung a4, b1, c3, d2 hervorgeht.

II. Umgekehrt ist ersichtlich, dass bei dieser Markierung in jeder Zeile, in jeder Spalte und in jeder Diagonalen genau ein markiertes Feld auftritt.

Mit I. und II. ist geneigt: Es gibt bis auf Drehungen und Spiegelungen genau eine Markierung mit den verlangten Eigenschaften, nämlich die Markierung a4, b1, c3, d2 (oder eine im Sinne der Aufgabenstellung nicht davon verschiedene).

Aufgabe 221013:

Zehn kleine Zifferlein

Wilhelm Busch gab ein Exempel
durch den braven Lehrer Lämpel.
Welcherart man soll sich plagen,
ließ er einstmals so ihn sagen:
„Nicht allein im Schreiben, Lesen
übt sich ein vernünftig Wesen,
sondern auch in Rechnungssachen
soll der Mensch sich Mühe machen.“
Liest man dieses umgekehrt,
ist es sicher auch viel wert:
„Nicht allein in Rechnungssachen
soll der Mensch sich Mühe machen,
sondern ein vernünftig Wesen
soll auch manchmal etwas lesen.“
Darum zögert bitte nicht,
lest zuerst mal dies Gedicht!

Erstens sei sogleich gesagt,
dass nach Zahlen wird gefragt.
Unter diesen sei'n vorhanden
zwei dreistellige Summanden.
Der Summe wir nun unterstellen
(da 's möglich ist in vielen Fällen),
sie habe eine Stelle mehr.
Jetzt ist es sicher nicht sehr schwer
zu zählen, dass zehn Ziffern man
in dieser Rechnung einmal an,
und zwar genau (wie man so sagt)!
Damit auch später keiner fragt:
Die 0 würd' vorne sehr schlecht passen,
drum ist sie dort nicht zugelassen.
Genau ein Übertrag auch sei,
nicht etwa zweie oder drei!
(Ein Übertrag - das sei erklärt,
damit es jedermann erfährt -,
das ist ein Fall, der dann passiert,
wenn jemand Zahlen hat addiert
und ihre Summe, wie sich zeigt
die 9 an Größe übersteigt.)

Nun, liebe Tochter, lieber Sohn,
was kann bei dieser Addition
man für Ergebnisse erwarten?

Jetzt dürft ihr mit dem Lösen starten.
Als Lösung seien angegeben
- zumindest soll man danach streben -
alle möglichen E n d beträge!
Dabei beweise man recht rege,
dass es, hält man die Regeln ein,
nur diese Summen können sein.
(Der Summanden vielfache Möglichkeiten
sollen uns keine Sorgen bereiten,
nach ihnen ist hier n i c h t gefragt.)

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Lösung:

In dem Ergebnis mit vier Stellen
wird jedem Löser gleich erhellen,
dass vorn stets nur die 1 kann sein:
Sie kommt vom Übertrag herein,
den man erhält in Spalte „Hundert“
(Wenn’s anders wär’, wär’ man verwundert.)
Die 0, die kann in den Summanden
auf keinen Fall hier sein vorhanden,
da eine andre Ziffer man
ja niemals zweimal nehmen kann;
denn, wie soeben wurd’ verraten,
der Übertrag ist schon „verbraten“.
Auch bei den Einern und bei Zehn
darf im Ergebnis 0 nicht stehn,
sonst gäb’s den zweiten Übertrag,
den, wie wir wissen, keiner man.
Nun ist die Lösung halb gewonnen,
es wird mit 1 und 0 begonnen.

		-	-	-
+		-	-	-
=	1	0	-	-

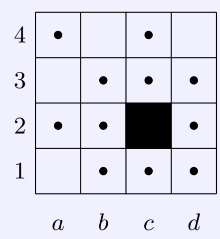
Jetzt denkt man nach bei den Summanden,
was ist an Hunderten vorhanden?
Zunächst hat man vielleicht gedacht
so an die Ziffern 2 und 8
jedoch es geh’n auch 3 und 7;
und 4 und 6 sind noch geblieben.
Darum mach man sich „auf die Schnelle“
aus diesen eine Art Tabelle:

Verbrauchte Ziffern	Restliche Ziffern	Einzig brauchbare Summenbildungen	
0,1,2,8	3,4,5,6,7,9	-	
0,1,3,7	2,4,5,6,8,9	$2+6=8$	$4+5=9$
0,1,4,6	2,3,5,7,8,9	$2+7=9$	$3+5=8$

Nun muss man schließlich noch probieren,
so den Rest zu kombinieren,
dass kein Übertrag entsteht,
wenn man ans Addieren geht.
Überlegt man eine Weile,
sieht man bei der ersten Zeile,
dass es hier nicht funktioniert,
wie und was man auch probiert.
Zeile zwei und drei sodann
bieten je ’ne Lösung an:
Erstens 1, 0, 9 und 8.
Und, falls man es anders macht,
kann man zweitens sich erfreu’n
auch an 1, 0, 8 und 9.
Diese beiden Summen sind
einzig möglich. Jedes Kind
sieht, dass es nur so kann sein,
wenn man hält die Regeln ein.

Aufgabe 231013:
Auf einem Schachbrett kann eine Dame so ziehen, dass sie von ihrem Platz aus alle Felder in der waagerechten und senkrechten Reihe und die Felder in Richtung der beiden Diagonalen erreichen kann.

In der Abbildung ist die Dame durch ein schwarzes Feld gekennzeichnet, und die von ihr erreichbaren Felder sind mit Punkten markiert. Die Buchstaben und Zahlen am Rand dienen zur eindeutigen Benennung der Felder. So steht z. B. die Dame in der Abbildung auf c2.



Auf einem Quadrat aus 4 mal 4 Feldern sollen nun vier Damen so aufgestellt werden, dass keine Dame auf einem Feld steht, das von einer anderen erreicht werden kann.

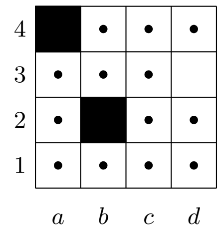
Stellen Sie fest, ob dies möglich ist, und ermitteln Sie gegebenenfalls alle Aufstellungen, die sich nicht durch Drehung oder Spiegelung ineinander überführen lassen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn es eine Lösung der Aufgabe gibt, dann muss in jeder Reihe und in jeder Spalte genau eine Dame stehen. Durch eventuelle Spiegelung kann erreicht werden, dass in der Zeile 4 die Dame auf a4 oder auf b4 steht.

Fall 1: Die erste Dame stehe auf a4.

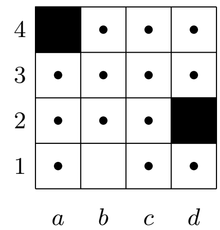
Dann kann in der Zeile 2 die zweite Dame entweder auf b2 oder d2 gestellt werden.

Fall 1a: Die Dame stehe auf b2.



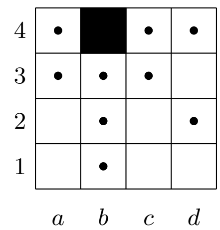
Dann kann in Zeile 1 keine Dame mehr aufgestellt werden. Es gibt in diesem Falle mithin keine Lösung.

Fall 1b: Die Dame stehe auf d2.

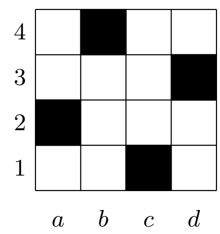


Dann kann in Zeile 3 keine Dame mehr aufgestellt werden. Folglich gibt es in diesem Falle ebenfalls keine Lösung.

Fall 2: Die erste Dame stehe auf b4.



Dann folgt zwangsläufig für die Standorte der restlichen drei Damen Zeile 3 : d3, Zeile 2 : a2, Zeile 1 : c1. Also kann es (bis auf Drehung und Spiegelung) nur die Aufstellung der Abbildung als Lösung geben.



II. In der Tat erfüllt diese Aufstellung die Bedingungen der Aufgabe. Daher erfüllt (bis auf Drehung und Spiegelung) genau diese Aufstellung die Bedingungen.

Aufgabe 261014:
Jürgen behauptet, dass es ein Positionssystem mit der Basis m gibt, in dem die folgende Rechnung richtig ist:

$$\begin{array}{cccccccc} & 7 & 0 & 1 & \cdot & 3 & 4 \\ \hline 2 & 5 & 0 & 3 & & & \\ & 3 & 4 & 0 & 4 & & \\ \hline 3 & 0 & 4 & 3 & 4 & & \end{array}$$

Ermitteln Sie alle natürlichen Zahlen m, für die das zutrifft!

Hinweis : In einen Positionssystem mit der Basis m gibt es genau die Ziffern 0, 1, ..., $m-2$, $m-1$. Jede natürliche Zahl wird als Summe von Produkten aus jeweils einer Potenz von m mit einer der Ziffern dargestellt; dabei werden die Potenzen noch fallenden Exponenten geordnet. Geschrieben wird dann die Folge der Ziffern, so wie es für $m = 10$ bei der dekadischen Schreibweise natürlicher Zahlen bekannt ist.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Da in der Rechnung als größte verwendete Ziffer die 7 auftritt, kann eine natürliche Zahl m nur dann die Basis eines Positionssystems sein, in dem die Rechnung richtig ist, wenn $m \geq 8$ gilt. Da in der Teilrechnung

$$\begin{array}{ccccc} 2 & 5 & 0 & 3 & \\ & 3 & 4 & 0 & 4 \\ \hline 3 & 0 & 4 & 3 & 4 \end{array}$$

ein Übertrag auftritt, der die Bedeutung $5 + 3 = 0 + 1 \cdot m$ hat, folgt $m = 8$. Also kann die Rechnung nur im Oktalsystem richtig sein.

II. In der Tat ergibt sich bei Übertragung der Faktoren und des in der Rechnung enthaltenen Produktes aus den Oktalsystem ins Dezimalsystem

$$[701]_8 = 7 \cdot 8^2 + 0 \cdot 8^1 + 1 \cdot 8^0 = 449$$
$$[34]_8 = 3 \cdot 8^1 + 4 \cdot 8^0 = 28$$
$$[30434]_8 = 3 \cdot 8^4 + 0 \cdot 8^3 + 4 \cdot 8^2 + 3 \cdot 8^1 + 4 \cdot 8^0 = 12572$$

und es gilt $449 \cdot 28 = 12572$.

Aue I. und II. folgt: Die angegebene Rechnung ist genau im Positionssystem mit der Basis $m = 8$ richtig.

Aufgabe 271013:

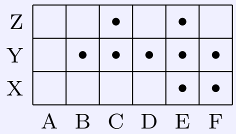


Abbildung a)

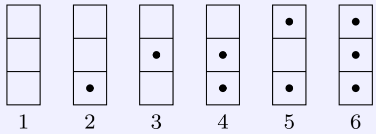


Abbildung b)

Das Rechteck in der Abbildung a) kann (mit Berücksichtigung des eingezeichneten Punktmusters) aus den sechs Teilen in Abbildung b) zusammengesetzt werden.

Geben Sie eine Möglichkeit für eine solche Zusammensetzung an und untersuchen Sie, ob die von Ihnen angegebene Möglichkeit die einzige ist!

Hinweis: Zur Bezeichnung der Teilquadrate sollen die in der Abbildung a angegebenen Buchstaben benutzt werden. So wird z. B. das rechte obere Feld mit FZ bezeichnet.

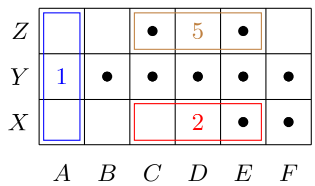
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Durch systematisches Erfassen aller möglichen Stellungen einzelner Teile erkennt man, dass es für Teil 5 nur eine Lagemöglichkeit gibt, für Teil 2 dagegen zwei Möglichkeiten, für Teil 1 drei und für alle anderen Teile sogar vier Lagemöglichkeiten.
Folglich ist es günstig, die Einpassungsmöglichkeiten der sechs Teile in der angegebenen Reihenfolge zu untersuchen.

Teil 5 kann nur eine Lage einnehmen, nämlich CZ, DZ, EZ.

Teil 2 kann nur zwei Lagen einnehmen. Die Lage AZ, BZ, CZ entfällt, weil das Feld CZ bereits von Teil 5 belegt ist. Also muss Teil 2 die Lage CX, DX, EX einnehmen.

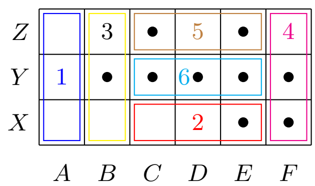
Teil 1 kann nur drei Legen einnehmen. Die Lagen AX, BX, CX und BX, CX, DX entfallen, weil das Feld CX bereits von Teil 2 belegt ist. Also muss Teil 1 die Lage AX, AY, AZ einnehmen.

Die auf diese Weise erhaltene Teilung ist in der Abbildung festgehalten. Danach folgt unmittelbar weiter:



Für Teil 3 ist nur noch BX, BY, BZ möglich, für Teil 4 nur noch FX, FY, FZ und für Teil 6 nur noch CY, DY, EY.

Damit ist als eine Möglichkeit des Zusammensetzens die in der nachfolgenden Abbildung gezeigte gefunden, und zugleich ist bewiesen, dass sie die einzige ist.



Aufgabe 321014:

		1	1	1
2		2	1	
	2			
2		2		
			1	

Wir betrachten ein Quadrat, das sich aus 25 kongruenten Teilquadraten zusammensetzt. Mit 5 verschiedenen Farben werden je 5 Teilquadrate gefärbt; dadurch entstehen 5 einfarbige Muster. Für jedes solche Muster kann man feststellen, ob es eine Symmetrieachse hat, die zugleich Symmetrieachse für das ganze Quadrat (ohne Berücksichtigung der Farben) ist. Eine solche Symmetrieachse eines Musters werde *zulässig* genannt.

In der Abbildung beispielsweise hat das Muster der Farbe 1 keine *zulässige* Symmetrieachse; dagegen hat das Munter der Farbe 2 die angedeutete *zulässige* Symmetrieachse. (Seine drei anderen Symmetrieachsen sind nicht *zulässig*.)

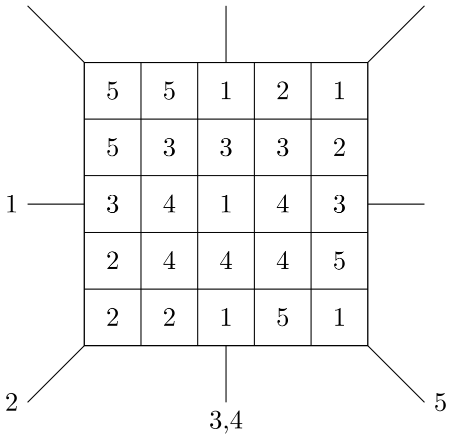
Ermitteln Sie, ob es möglich ist, eine Färbung anzugeben, bei der jedes der 5 Muster genau eine *zulässige* Symmetrieachse hat, und zwar so, dass

a) nur eine der Symmetrieachsen des ganzen Quadrates,
b) jede der vier Symmetrieachsen des ganzen Quadrates

unter den Symmetrieachsen der Muster vorkommt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wie in den zwei Abbildungen ersichtlich, sind Färbungen der beiden genannten Arten möglich.

1	1	5	1	1
2	2	1	2	2
3	3	2	3	3
4	4	3	4	4
5	5	4	5	5



5	5	1	2	1
5	3	3	3	2
3	4	1	4	3
2	4	4	4	5
2	2	1	5	1

Aufgabe 331011:
Christa und Jürgen spielen ein Spiel nach folgenden Regeln:

Die Spieler legen abwechselnd je einen Dominostein auf ein streifenförmiges Spielbrett aus 9 Feldern (siehe Skizze). Jeder Dominostein soll genau zwei Felder belegen; kein Feld darf mehrfach belegt werden. Das Spiel ist beendet, sobald ein Spieler nicht mehr legen kann; dieser Spieler hat dann verloren.

Das Spiel macht den beiden bald keinen Spaß mehr. Woran kann das liegen?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Der nachziehende Spieler kann stets den Gewinn erzwingen.

Setzt nämlich das anziehende Spieler seinen ersten Stein auf eines der Felderpaare (1,2), (2,3), (3,4), (4,5), so kann der Nachziehende auf (6,7) setzen, und danach hat jeder der beiden Spieler noch genau eine Setzmöglichkeit, was für den Anziehenden den Verlust zur Folge hat. Dasselbe gilt, wenn der Nachziehende eine der Anfangsmöglichkeiten (8,9), (7,8), (6,7), (5,6) mit (3,4) beantwortet.

Aufgabe 341011:
Frank und Felix denken sich das *kleinste Schach der Welt* aus:
- Das Spielfeld hat 2×4 Felder.
- Weiß spielt mit den Figuren König, Dame und zwei Bauern; Schwarz ebenso.
- Zu Anfang werden die Figuren wie in der Abbildung aufgestellt.
- Dann wird nach den Regeln des üblichen Schachspiels verfahren, sofern der Platz für ihre Anwendung ausreicht. (Erkundigen Sie sich nötigenfalls nach den Regeln!)

Frank stellt drei Behauptungen auf: Es sei möglich, so zu spielen, dass
a) das Spiel unentschieden endet,
b) Weiß gewinnt,
c) Schwarz gewinnt.

Beweisen Sie, dass die drei Behauptungen zutreffen.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Zum Beweis genügt es, je ein Beispiel einer Partie anzugeben:

a) **1.** a2:b3, Da4:b3, **2.** Da1:a3+, Db3:a3, **3.** b2:a3+, Kb4:a3 Remis, da nur noch die Könige auf dem Brett sind.

b) **1.** a2:b3, a3:b2, **2.** Da1:a4 matt.

c) **1.** a2:b3, Kb4:a3, **2.** b2:a3, Da4:a3, **3.** Da1-a2+, Da3:a2 matt.

II. Runde 2

Aufgabe 041021:
Vier Personen haben die Vornamen Arnold, Bernhard, Conrad und Dietrich. Auch die Familiennamen dieser Personen lauten Arnold, Bernhard, Conrad und Dietrich.
Ferner wissen wir folgendes:

a) Keine der vier Personen hat den gleichen Vor- und Zunamen.

b) Conrad hat nicht den Familiennamen Arnold.

c) Der Zuname von Bernhard stimmt mit dem Vornamen der Person überein, deren Familienname mit dem Vornamen der Person übereinstimmt, die den Zunamen Dietrich hat.

Welchen Vor- und Zunamen hat jede der vier Personen?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die vier Personen werden mit den Anfangsbuchstaben ihrer Vor- und Zunamen bezeichnet. Für unbekannte Namen sei X, Y und Z gesetzt.
Dann gibt es wegen c) folgende Personen: BX, XY,YD, DZ.

Wegen a) gilt X $\neq$ B, Y $\neq$ D. Da jeder Name genau je einmal als Vor- bzw. Zuname auftritt und mithin Y $\neq$ B, X $\neq$ D gilt, ist wegen b) nur X = A, Y = C, Z = B möglich.
Die vier Personen heißen: Arnold Conrad, Bernhard Arnold, Conrad Dietrich und Dietrich Bernhard.

Aufgabe 071021:
In

$$\begin{array}{cccccc} & \mathrm{F} & \mathrm{U} & \mathrm{E} & \mathrm{N} & \mathrm{F} \\ + & & \mathrm{Z} & \mathrm{W} & \mathrm{E} & \mathrm{I} \\ \hline \mathrm{S} & \mathrm{I} & \mathrm{E} & \mathrm{B} & \mathrm{E} & \mathrm{N} \end{array}$$

sollen die Buchstaben so durch Ziffern ersetzt werden, dass die Addition zu einem richtigen Ergebnis führt. Dabei sollen gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern bedeuten.
Untersuchen Sie, wie viele Lösungen die Aufgabe hat!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, die Bedingungen der Aufgabe sind erfüllbar, dann sind F, U, E, N, Z, W, I, S, B sämtlich kleiner oder gleich 9, und es gilt:

(1) $S \neq 0$ und $S = 1$, da $U + Z < 20$ ist und $F + 1 \leq 10$ sein muss.
(2) $F = 9$, da $F + 1 \geq 10$ sein muss.
Daraus folgt (3) $F + 1 = 10$ und daraus wiederum (4) $I = 0$.
Aus der letzten Spalte der Aufgabe folgt, dass $F + I = N$, also wegen (4) $F = N$ ist.

Da nach Voraussetzung $F \neq N$ sein muss, sind die Bedingungen der Aufgabe nicht sämtlich gleichzeitig erfüllbar, d. h. die Aufgabe hat keine Lösung.

Aufgabe 101022:
Vier Personen A, B, C und D machen in einem Spiel je drei Aussagen über denselben Gegenstand, einen einfarbigen Ball. Die Aussagen lauten:

A (1) Der Ball ist weder rot noch gelb.
(2) Der Ball ist entweder rot oder grün.
(3) Der Ball ist schwarz.
B (1) Wenn der Ball nicht gelb ist, ist er weiß.
(2) A macht eine falsche Aussage, wenn er sagt, der Ball ist schwarz.
(3) Der Ball ist grün.
C (1) Der Ball ist entweder schwarz oder grün.
(2) Der Ball ist rot.
(3) Der Ball ist entweder grün oder schwarz oder gelb.
D (1) Der Ball hat die gleiche Farbe wie mein Pullover.
(2) Wenn der Ball gelb ist, ist er nicht schwarz.
(3) Der Ball ist schwarz und grün.

Ermitteln Sie die Farbe des Balles für die folgenden beiden Fälle und untersuchen Sie, ob allein mit den vorliegenden Angaben die Farbe des Pullovers von D ermittelt werden kann!
Wenn ja, geben Sie diese Farbe an!
Fall a) Von den drei Aussagen jeder der vier Personen sind genau zwei wahr.
Fall b) Von den drei Aussagen jeder der vier Personen sind genau zwei falsch.

Lösung von cyrix:
a) Die Aussage D (2) ist offenbar wahr und D (3) offensichtlich falsch, da es um einen einfarbigen Ball geht. Also muss auch D (1) wahr sein und Ds Pullover hat die gleiche Farbe wie der Ball.

Wäre C (3) falsch, so wäre der Ball insbesondere weder grün noch schwarz, sodass auch Aussage C (1) falsch sein müsste. Dann hätte C aber nur höchstens eine wahre Aussage getroffen, was im Widerspruch zur Annahme dieses Aufgabenteils a) steht. Also muss C (3) richtig sein; die Farbe des Balls ist damit grün, schwarz oder gelb. Und damit nicht rot, sodass C (2) falsch ist und damit auch C (1) wahr sein muss, was die Farbe des Balls auf schwarz oder grün einschränkt.

Damit ist die Aussage B (1) falsch, denn der Ball ist weder gelb noch weiß. Demnach müssen B (2) und B (3) wahr sein, sodass der Ball (und damit auch der Pullover) grün sein muss. Tatsächlich sind dann auch die Aussagen A (1) und A (2) wahr, während A (3) falsch ist. Es handelt sich damit tatsächlich um eine Lösung.

b) Wieder sehen wir direkt ein, dass D (2) wahr und D (3) falsch ist. Nun folgt aber, dass dann auch D (1) falsch sein muss, sodass wir nur wissen, dass Ball und Pullover verschiedene Farben haben.
Da D(1) die einzige Aussage ist, die die Farbe des Pullovers thematisiert, können wir keine weiteren Schlüsse zu dieser ziehen und damit dessen Farbe auch nicht angeben.

Zur weiteren Bestimmung der Farbe des Balls betrachten wir nun die Aussage C (1): Ist der Ball entweder schwarz oder grün, so natürlich erst recht auch entweder grün oder schwarz oder gelb.
Aus der Gültigkeit von C (1) würde direkt auch die von C (3) folgen, sodass C nur höchstens eine falsche Aussage getroffen hätte, was der Annahme für diesen Aufgabenteil b) widerspricht. Also muss C (1) falsch sein, sodass der Ball weder schwarz noch grün ist. Von den beiden übrigen Aussagen von C muss genau eine wahr sein, sodass der Ball entweder rot oder gelb ist.
Damit ist aber die Aussage B (1) falsch, denn wenn der Ball nicht gelb ist, muss er ja rot sein.[1] Da der Ball weder schwarz noch grün ist, ist B (2) wahr und B (3) falsch, sodass auch B genau zwei falsche Aussagen getroffen hat.

Schließlich sind die Aussagen A (3) und A (1) falsch, sodass A (2) wahr sein muss, was, da der Ball nicht grün ist, nur geht, wenn der Ball rot ist. Damit ist der Ball also rot und das einzige, was wir über den Pullover aussagen können, ist, dass er nicht rot ist.

Aufgabe 111021:
Fünf Schüler A, B, C, D, E spielen folgendes Spiel, dessen Regeln ihnen allen bekannt sind:
Einer von ihnen, z. B. der Schüler A, verlässt den Raum. Nun werden auf ein Blatt Papier genau 10 Vierecke gezeichnet. Die Zeichnung wird versteckt, und A wird hereingerufen. Jeder der Schüler B, C, D und E macht über die gezeichneten Vierecke genau eine Aussage. Von diesen Aussagen ist genau eine falsch. Sie lauten:
(1) Auf der Zeichnung ist nicht nur ein Quadrat.
(2) Es sind genau doppelt so viele Rechtecke wie Quadrate auf der Zeichnung.
(3) Man sieht unter den Vierecken auf der Zeichnung genau ein Parallelogramm.
(4) Auf der Zeichnung gibt es genau doppelt so viele Trapeze wie Rechtecke.
A soll nun feststellen, welche Aussage falsch ist. Außerdem soll er die genaue Anzahl der Quadrate, Rechtecke und Trapeze angeben.
Wie kann das geschehen?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es gilt: Jedes Quadrat ist gleichzeitig ein Rechteck, ein Parallelogramm und ein Trapez. Jedes Rechteck ist zugleich ein Parallelogramm und ein Trapez.
A kann daher z. B. folgendermaßen schließen:

[1] Es stellt sich jedoch die Frage, wie B zu dieser Schlussfolgerung gelangt.

Angenommen, die Aussage (1) wäre falsch, d. h., es gäbe auf der Zeichnung entweder keine Quadrat oder genau 1 Quadrat.
Nach den Spielregeln wären dann die Aussagen (2) bis (4) wahr. Gäbe es genau 1 Quadrat, so gäbe es nach (2) noch ein weiteres Rechteck, also mindestens 2 Parallelogramm, im Widerspruch zu (3). Gäbe es kein Quadrat auf der Zeichnung, so nach (2) und (4) auch kein Rechteck und kein Trapez, im Widerspruch zu (3).
Also ist (1) wahr. Daher gibt es mindestens 2 Quadrate auf der Zeichnung.
Also ist (3) falsch, und (2), (4) sind wahr.
Gäbe es 3 oder mehr Quadrate auf der Zeichnung, so müsste wegen (2) und (4) die Anzahl der Trapeze mindestens 12 betragen, was nicht möglich ist. Daher gilt:
Es gibt auf der Zeichnung genau 2 Quadrate, genau 4 Rechtecke und genau 8 Trapeze.

Aufgabe 151021:
Vor dem Beginn eines Pferderennens fachsimpeln Zuschauer über den möglichen Einlauf der drei Favoriten A, B und C.
Zuschauer (1): „A oder C gewinnt.“
Zuschauer (2): „Wenn A Zweiter wird, gewinnt B.“
Zuschauer (3): „Wenn A Dritter wird, dann gewinnt C nicht.“
Zuschauer (4): „A oder B wird Zweiter.“
Nach dem Einlauf stellte sich heraus, dass die drei Favoriten A, B, C tatsächlich die ersten drei Plätze belegten und dass alle vier Aussagen wahr waren.
Wie lautete der Einlauf?

Lösung von Steffen Polster:
Aus der Aussage (1) folgt, dass entweder A oder oder C gewinnt; auf keinen Fall aber B. Damit ergibt sich aus (2), dass A nicht Zweiter wird, da sonst im Widerspruch zu (1) B gewinnen müsste.
Da (3) gilt, wird aus A Dritter, dass C nicht gewinnt und somit B Sieger wäre, im Widerspruch zu (1). Damit kann A nur noch Platz 1 belegen.
Nach der Aussage (4) ist dann B Zweiter und folglich C Dritter. Der Einlauf lautet damit A-B-C.

Aufgabe 161023:
In der Aufgabe

$$\begin{array}{ccccc} L & O & T & T & O \\ + & T & O & T & O \\ \hline S & P & I & E & L \end{array}$$

sollen gleiche Buchstaben durch gleiche Ziffern und ungleiche Buchstaben durch ungleiche Ziffern ersetzt werden, so dass eine im dekadischen Zahlensystem richtig gerechnete Additionsaufgabe entsteht.
Ermitteln Sie alle Möglichkeiten für eine solche Ersetzung!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, eine Ersetzung habe die verlangten Eigenschaften. Die Spalten seien von rechts nach links mit 1 bis 5 nummeriert. Wegen $L \neq S$ folgt aus Spalte (5)

$$L + 1 = S \qquad (1)$$

und damit aus Spalte 4 zunächst

$$Q + T \geq 9 \qquad (2)$$

Wäre nun $T \geq 5$, so ergäbe sich aus Spalte 2 ein Zehnerübertrag, also wegen (2) auch aus Spalte 3, und aus den Spalten 3 und 4 folgte $I = P$. Also ist

$$T \leq 4 \qquad (3)$$

in Spalte 2 entsteht kein Zehnerübertrag; wegen $I \neq P$ muss folglich in Spalte 3 ein Übertrag entstehen, d. h., es gilt sogar

$$Q + T \geq 10 \quad (2a) \qquad \text{wegen (3) also} \qquad Q \geq 6 \quad (4)$$

Daher verbleiben nur folgende Möglichkeiten:

a) Es ist $Q = 9$; dann folgt (aus Spalte 1) $L = 8$ und wegen (1) $S = 9$. Wegen $Q \neq S$ ist dies ein Widerspruch.

b) Es ist $Q = 8$; dann folgt (aus Spalte 1) $L = 6$ und wegen (1) $S = 7$. Wegen (2a) und (3) gibt es nur die Möglichkeiten $T = 2$ oder $T = 3$ oder $T = 4$. Ist $T = 2$, dann folgt $E = 5, I = 0, P = 1$. Ist $T = 3$, dann folgt $E = 7$ im Widerspruch zu $S = 7$.

c) Es ist $Q = 7$; dann folgt (aus Spalte 1) $L = 4$ und wegen (1) $S = 5$. Wegen (2a) und (3) gibt es nur die Möglichkeiten $T = 3$ oder $T = 4$. Davon scheidet $T = 4$ wegen $L = 4$ aus, und ist $T = 3$, dann folgt $E = 7$ mit Widerspruch zu $Q = 7$.

d) Es ist $Q = 6$; dann folgt $L = 2$ und $S = 3$. Es kann nur $T = 4$ gelten, dann folgt $E = 9, I = 0, P = 1$.

Daher können nur die Ersetzungen

$$\begin{array}{ccccc} 6 & 8 & 2 & 2 & 8 \\ + & 2 & 8 & 2 & 8 \\ \hline 7 & 1 & 0 & 5 & 6 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} 6 & 8 & 4 & 4 & 8 \\ + & 4 & 8 & 4 & 8 \\ \hline 7 & 3 & 2 & 9 & 6 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} 2 & 6 & 4 & 4 & 6 \\ + & 4 & 6 & 4 & 6 \\ \hline 3 & 1 & 0 & 9 & 2 \end{array}$$

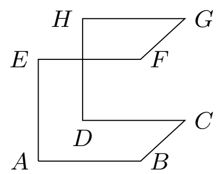
die geforderten Eigenschaften haben. Sie haben diese Eigenschaften; denn in jeder von ihnen wurden für L, Q, T, S, P, I, E verschiedene Ziffern eingesetzt und es ist jeweils eine im dekadischen Zahlensystem richtig gerechnete Additionsaufgabe entstanden.

Aufgabe 161024:
Gegeben sei ein Würfel $ABCDEFGH$.
Man ermittle alle verschiedenen Streckenzüge, die lediglich aus Würfelkanten zusammengesetzt sind und folgende Eigenschaften haben!
(1) Der Streckenzug beginnt und endet im Punkt A.
(2) Bei einmaligem Durchlaufen des Streckenzuges wird jeder Eckpunkt eines Würfels genau einmal erreicht.
Dabei gelten zwei Streckenzüge genau dann als verschieden, wenn es eine Würfelkante gibt, die in einem der beiden Streckenzüge vorkommt, in dem anderen aber nicht. Insbesondere gelten Streckenzüge, die sich nur in der Durchlaufrichtung unterscheiden, nicht als verschieden.

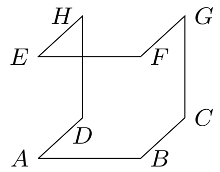
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Jeder der gesuchten Streckenzüge muss genau zwei von A ausgehende Würfelkanten enthalten, also genau zwei der drei kanten AB, AD, AE. Der Durchlauf kann so gewählt werden, dass er entweder mit AB oder mit AD beginnt.

1. Beginnt er mit AB, so kann er nur mit einer der übrigen beiden von B ausgehenden Würfelkanten fortgesetzt werden, also entweder als ABC oder als ABF.

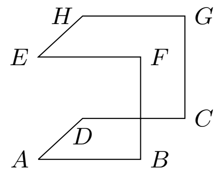
1.1 Nach der Fortsetzung ABC verbleiben ebenso nur die Möglichkeiten $ABCD$ und $ABCG$.
1.1.1 Bei der Wahl von $ABCD$ gibt es sowohl von A als auch von D aus nur noch je eine Möglichkeit der Weiterführung, nämlich zu E bzw. H hin. Dann sind alle Punkte erfasst und der Streckenzug kann nur noch durch die Strecke FG geschlossen werden.
Also gibt es im Fall 1.1.1 nur die Möglichkeit $ABCDHGFEA$:



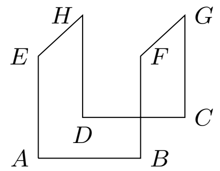
1.1.2 Angenommen, bei der Wahl von $ABCG$ könnte auf G nun H folgen. Dann gäbe es, um über einen noch nicht erfassten Punkt zu F zu gelangen, nur die Fortsetzung $ABCGHEF$, und der nun noch verbleibende Punkt D ließe sich nur auf Wege über einen bereit erfassten Punkt erreichen, da F und D nicht Eckpunkte einer gemeinsamen Würfelkante sind.
Wegen dieses Widerspruchs kann auf $ABCG$ nur F folgen, und als einzige Möglichkeit der Fortsetzung schließt sich an: $ABCGFEHDA$:



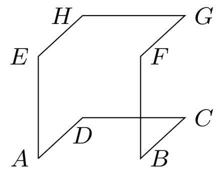
1.2 Nach der Fortsetzung ABF verbleiben nur die Möglichkeiten $ABFE$, $ABFG$.
1.2.1 Zu $ABFE$ existiert wie in 1.1.1 nur die Fortsetzung $ABFEHGCDA$



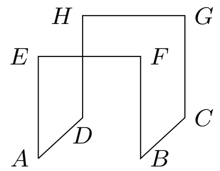
1.2.2 Zu $ABFG$ existiert mit analoger Begründung wie im Fall 1.1.2 nur die Fortsetzung $ABFGCDHEA$



2. Beginnt der Streckenzug mit AD, so kann er nur als ADC oder ADH fortgesetzt werden.
2.1 Nach ADC gibt es nur die Fortsetzungen $ADCB$ und $ADCG$. Zu jeder von ihnen existiert wie in 1.1.1 bzw. 1.1.2 nur eine Weiterführung. Da ein mit $ADCG$ beginnender Streckenzug bereits in 1.2.1 vorkommt, verbleibt außer ihm nur die Weiterführung von $ADCB$, d. h.: $ADCBFGHEA$



2.2 Nach ADH gibt es nur $ADHE$ und $ADHG$ und dazu wieder nur je eine Weiterführung. Davon kommt $ADHE$ bereits in 1.1.2 vor, und es verbleibt nur $ADHGCBFEA$



Damit ist gezeigt, dass nur die sechs aufgezählten Streckenzüge den Forderungen der Aufgabe genügen können. Sie erfüllen in der Tat diese Forderungen; denn jeder enthält jede der Würfelkanten genau einmal, beginnt und endet mit A und verläuft nur längs der Würfelkanten.
Ferner sind die Streckenzüge sämtlich verschieden voneinander, wir folgende Tabelle ausweist. Darin ist zu je zwei der genannten Streckenzüge eine Würfelkante angegeben, die in dem einen Streckenzug vorkommt, in dem anderen aber nicht.

	1.1.2	1.2.1	1.2.2	2.1	2.2
1.1.1	CD	BC	BC	AB	AB
1.1.2		BC	BC	AB	AB
1.2.1			FE	AB	AB
1.2.2				AB	AB
2.1					DC

Aufgabe 211022:
Über das Ergebnis eines 100 m-Laufs mit sechs Teilnehmern, von denen keine zwei die gleiche Zeit erreichten, wurden folgende vier Aussagen gemacht:
(1) A wurde nicht Zweiter, oder B wurde Erster.
(2) A wurde Zweiter, und C wurde Vierter.
(3) A wurde Zweiter, und B wurde Dritter.
(4) C wurde Vierter, oder B wurde Fünfter.
Entscheiden Sie, ob es möglich ist, dass
a) alle vier Aussagen (1) bis (4),
b) genau drei dieser Aussagen,
c) genau zwei dieser Aussagen,
d) genau eine dieser Aussagen,
e) keine dieser Aussagen
gleichzeitig wahr sind!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Wenn die Aussagen (2) und (3) wahr sind, so wurde A Zweiter und B Dritter, also ist dann Aussage (l) falsch. Daher ist es nicht möglich, dass alle vier Aussagen (1) bis (4) gleichzeitig wahr sind.

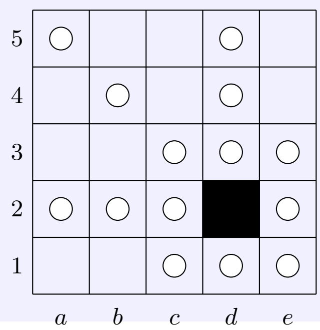
b) bis e) Wie die folgenden Beispiele zeigen, ist es jeweils möglich, dass die genannte Zahl von Aussagen wahr ist. Dabei bedeute das Zeichen x irgendwelche von A, B, C verschiedene Teilnehmer.

Zu b) $BAxCxx$ (genau (1), (2) und (4) sind wahr),
zu c) $xAxCBx$ (genau (2) und (4) sind wahr),
zu d) $BACxxx$ (genau (1) ist wahr)
zu e) $CAxBxx$ (alle Aussagen sind falsch).

Aufgabe 221022:
Es seien 64 paarweise verschiedene Zahlen beliebig gewählt und dann so auf die Felder eines Schachbretts verteilt, dass in jedem Feld genau eine dieser Zahlen steht. Für jede derartige Zahlenverteilung werden nun folgende Definitionen gegeben:
1. Man suche zunächst in jeder (waagerechten) Zeile des Schachbretts die größte Zahl auf. Unter den so aufgesuchten acht Zahlen werde die kleinste mit a bezeichnet.
2. Man suche zunächst in jeder (senkrechten) Spalte des Schachbretts die kleinste Zahl auf. Unter den so aufgesuchten acht Zahlen werde die größte mit b bezeichnet.
Axel behauptet über die so definierten Zahlen a und b:
„Wenn $a \neq b$ ist, dann muss sogar stets $a > b$ gelten."
Untersuchen Sie, ob dies zutrifft oder nicht!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Diejenige Zahl, die in derselben Zeile wie a und in derselben Spalte wie b steht, sei c genannt.
Für sie gilt $a \geq c$, da a in der genannten Zeile die größte Zahl ist, und $c \geq b$, da b in der genannten Spalte die kleinste Zahl ist. Daher gilt $a \geq b$, für $a \neq b$ also sogar $a > b$. Axels Behauptung trifft mithin zu.

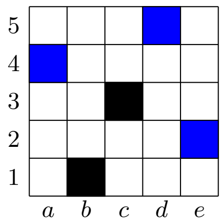
Aufgabe 231021:
Auf einem Schachbrett kann eine Dame so ziehen, dass sie von ihrem Platz aus alle Felder in der waagerechten und in der senkrechten Reihe und die Felder der beiden sich in ihrem Standpunkt schneidenden Diagonalen erreichen kann.
In der Abbildung ist die Stellung der Dame durch ein schwarzes Feld gekennzeichnet, die erreichbaren Felder sind mit Punkten markiert. Buchstaben und Zahlen am Rande sollen helfen, die Felder zu benennen (hier steht z. B. die Dame auf d2).



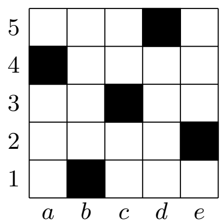
Auf einem Quadrat aus 5×5 Feldern sollen nun 5 Damen so aufgestellt werden, dass keine Dame auf einem Feld steht, das von einer anderen erreicht werden kann.
Stellen Sie fest, ob dies möglich ist, und ermitteln Sie gegebenenfalls alle Aufstellungen der geforderten Art, die sich nicht durch Drehung oder Spiegelung ineinander überführen lassen!

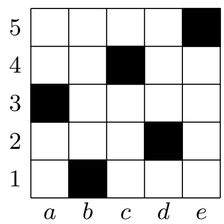
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn eine Aufstellung von 5 Damen die Forderung erfüllt, dass keine Dame auf einem Feld steht, das von einer anderen erreicht werden kann, so folgt zunächst, dass in jeder Zeile und in jeder Spalte genau eine Dame stehen muss.
Ferner kann bei der Aufstellung nur eine der beiden Möglichkeiten (1), (2) zutreffen:

(1) Auf dem Feld c3 steht eine Dame.
In Zeile 1 muss dann eine Dame entweder auf b1 oder auf d1 stehen. Durch eventuelle Spiegelung kann erreicht werden, dass auf b1 eine Dame steht. Aus dem Bild ist ersichtlich, dass drei weitere Damen nur noch auf a4, d5 und e2 stehen können.



(2) Auf den Feld c3 steht keine Dame.
Stünde dann in keinem der Felder b1, d1, a2, a4, b5, d5, e2, e4 $(*)$ eine Dame, so müsste von den beiden Zeile 1 und 5 die eine in einem Eckfeld (Spalte a oder e), die andere in ihrem Mittelfeld (Spalte c) besetzt sein. Das Entsprechende würde für die beiden Spalten a und e gelten.
Dies ergäbe einen Widerspruch, da die Dame auf dem Mittelfeld der Zeile 1 oder 5 die Dame auf dem Mittelfeld der Spalte a oder e erreichen könnte.
Also steht eine Dame auf einem der Felder(*).
Durch eventuelle Drehung oder Spiegelung kann erreicht werden, dass auf b1 eine Dame steht. Auf e3 kann dann keine Dame stehen, da von den Damen auf b1, e3 alle Felder der Zeile 2 erreicht würden.
Also muss in Zeile 3 eine Dame auf a3 stehen. Aus dem Bild ist dann ersichtlich:
Auf d4 kann keine Dame stehen (keine Möglichkeit für Zeile 5), also steht auf c4 eine, und dann können zwei weitere Damen nur noch auf d2 und e5 stehen.
Damit ist bewiesen:
Es gibt bis auf Spiegelung und Drehung höchstens die beiden Aufstellungen der Bilder.





II. Diese beiden Aufstellungen erfüllen auch die Bedingung, dass keine Dame auf einem Feld steht, das von einer anderen erreicht werden kann.
Sie lassen sich nicht durch Drehung oder Spiegelung ineinander überführen, da bei jeder Drehung oder Spiegelung des Quadrates das Feld c3 in sich übergeht, das im linken Bild besetzt ist, im rechten Bild aber nicht.
Somit gibt es bis auf Drehung und Spiegelung genau die beiden Aufstellungen der geforderten Art, die in den letzten beiden Bildern angegeben sind.

Aufgabe 271021:

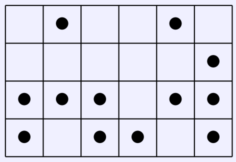


Abbildung a)

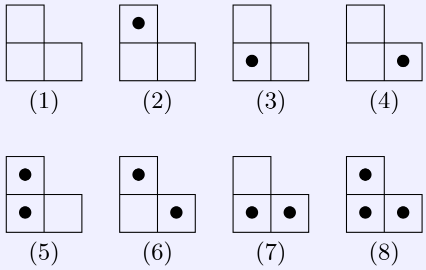
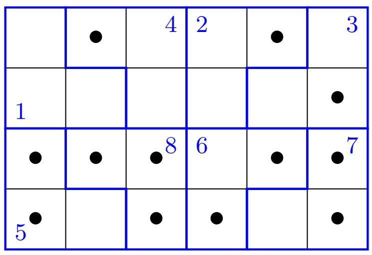


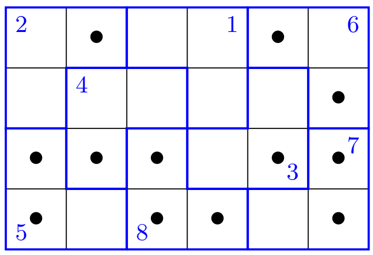
Abbildung b)

Das Rechteck in der Abbildung a) soll aus den Teilen der Abbildung b) zusammengesetzt werden. Jedes Teil soll genau einmal verwendet werden; die Teile sind ohne Anwendung von Spiegelungen, nur durch Verschiebungen und Drehungen in die gewünschte Lage zu bringen.

Zeichnen Sie zwei verschiedene Zusammensetzungen des Rechteckes, die auf diese Weise entstehen können!
Überprüfen Sie darin die Erfüllung der geforderten Bedingungen, indem Sie die (jeweils in die gewünschte Lage gebrachten) Teile durch ihre Nummern kennzeichnen!

Lösung von Steffen Polster:
Es gibt sogar genau die beiden nachfolgenden Lösungen:





Aufgabe 301021:

$$\begin{array}{cccccc} & & m & o & r & d \\ + & & r & a & u & b \\ \hline = & k & r & i & m & i \end{array}$$

In dem Kryptogramm sind die Buchstaben so durch Ziffern 0, 1, 2, ..., 9 zu ersetzen, dass gleiche Buchstaben durch gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern ersetzt werden und dass eine richtig gerechnete Additionsaufgabe entsteht. Der Buchstabe o braucht nicht durch die Ziffer 0 (Null) ersetzt zu werden.
a) Beweisen Sie, dass sogar in keiner Lösung des Kryptogramms der Buchstabe o durch 0 ersetzt wird!
b) Geben Sie vier Ersetzungen an, unter denen sich keine zwei mit gleichem Wert für a befinden! Bestätigen Sie, dass die von Ihnen angegebenen Ersetzungen vier Lösungen des Kryptogramms sind!

Lösung von cyrix:
a) Um führende Nullen zu vermeiden muss $k = 1$ gelten, da die Summe von zwei vierstelligen Zahlen kleiner ist als 20.000, also als fünfstellige Zahl nur die erste Ziffer Eins haben kann. Also muss bei der Addition in der Tausenderstelle ein Übertrag entstehen.

Dann gilt entweder $m+r = 10+r$, was auf den Widerspruch $m = 10$ führt, oder aber $m+r+1 = 10+r$, was $m = 9$ bedeutet, und, dass auch in der Hunderterstelle ein Übertrag entstanden ist.

Wegen $a \neq m = 9$ ist $a \leq 8$. Außerdem gilt entweder $o + a = 10 + i \geq 10$ oder $o + a + 1 = 10 + i \geq 10$, also in jedem Fall $o + a \geq 9$ und damit $o \geq 9 - a \geq 1$, sodass in jedem Fall $o \neq 0$ gilt, $\square$.

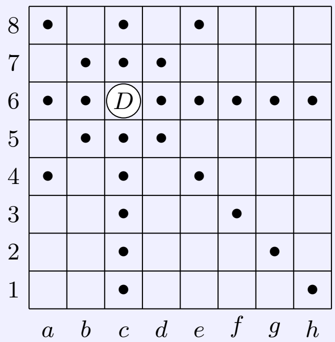
b) Wir geben im Folgenden vier dieser Lösungen mit paarweise verschiedenen Werten von a an:

$$\begin{array}{cccccc} & & 9 & 6 & 3 & 8 \\ + & & 3 & 4 & 5 & 2 \\ = & 1 & 3 & 0 & 9 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{cccccc} & & 9 & 4 & 3 & 8 \\ + & & 3 & 6 & 5 & 2 \\ = & 1 & 3 & 0 & 9 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} & & 9 & 8 & 3 & 6 \\ + & & 3 & 2 & 5 & 4 \\ = & 1 & 3 & 0 & 9 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{cccccc} & & 9 & 2 & 3 & 6 \\ + & & 3 & 8 & 5 & 4 \\ = & 1 & 3 & 0 & 9 & 0 \end{array}$$

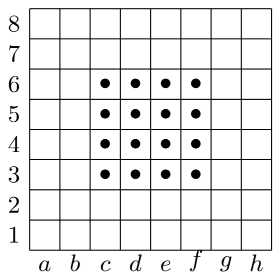
Die zweite geht aus der ersten sowie die vierte aus der dritten jeweils durch Vertauschung von a und o hervor, während man die dritte aus der ersten (sowie die vierte aus der zweiten) durch Vertauschen der Paare (a,o) und (b,d) erhält. Man rechnet leicht nach, dass dies alles Lösungen des Kryptogramms sind.

Aufgabe 311021:

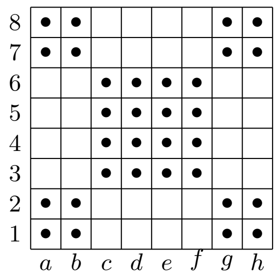


Beim Schachspiel darf die Dame auf dem Schachbrett waagerecht, senkrecht und diagonal um eine beliebige Anzahl Felder gezogen werden. Man sagt auch, diese Felder werden von der Dame bedroht. So sind in der Abbildung von der Dame auf c6 genau die markierten Felder bedroht.
Leonhard Euler (1707 - 1783) behandelte die Aufgabe, auf einem Schachbrett 8 Damen so aufzustellen, dass keine dieser Damen eine andere bedroht.
Wir wollen die Aufgabe hier durch die Zusatzforderung vereinfachen, dass keine der 8 Damen auf eines der 16 Felder gestellt werden darf, die sowohl den Zeilen 3, 4, 5, 6 als auch den Spalten c, d, e, f angehören. Man ermittle alle Aufstellungen, die diese Forderungen erfüllen.
Hinweis: Die verbotenen Felder wirken nicht etwa als Sperre der Bedrohung; z. B. bedroht eine Dame auf b3 auch die Felder g3, h3, f7 und g8.

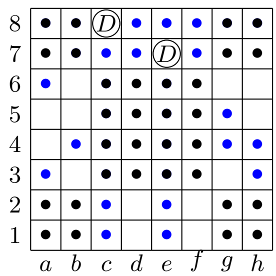
Lösung von Steffen Polster:
In der nachfolgenden Darstellung sind die gesperrten Felder mit einem Kreis markiert.



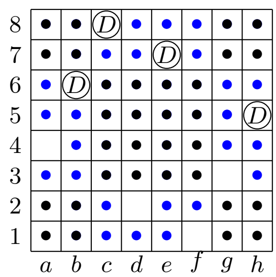
Da in der Spalte c, d, e oder f eine Dame stehen muss, ist dies nur in der 1., 2., 7. oder 8. Zeile möglich. Analog schlussfolgert man, dass Damen in der 3. bis 6. Zeile nur in der Spalte a, b, g oder h platziert werden können. Damit sind in der Spielfeld jeweils 4 Felder „damenfrei“.



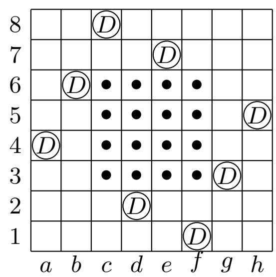
Zu Beginn sei die Dame in c8.
In der 7. Zeile kann dann die Dame nur in der Spalte e stehen, andernfalls müssten in der 1. und 2. Zeile die zwei Damen in benachbarten Spalten stehen und sich gegenseitig bedrohen.
In der Abbildung sind alle von den Damen bedrohten Felder blau markiert.



In der 6. Zeile kann nur auf b6 eine Dame platziert werden. Würde sie auf den einem der anderen noch freien Felder g6 oder h6 stehen, könnte in die 8. Spalte keine Dame untergebracht werden. Daraus folgt sofort auch h5 als Feld mit Dame.



Für die restlichen Damen sind nur noch 4 frei.



Damit ist eine mögliche Aufstellung gefunden.
Es existieren drei weitere Aufstellungen, die sich durch Drehungen um den Mittelpunkt des Spielfeldes mit $90°, 180°$ und $270°$ ergeben.

Aufgabe 321023:
Gegeben seien n zueinander parallele Geraden sowie weitere n zu ihnen senkrechte, also untereinander ebenfalls parallele Geraden.
Damit entstehen n^2 Schnittpunkte (Gitterpunkte).

Klaus versucht, einen geschlossenen (d. h. zum Anfangspunkt zurückkehrenden) Streckenzug zu zeichnen.
Jede Strecke dieses Streckenzuges soll auf einer der gegebenen Geraden liegen, und jeder Gitterpunkt soll genau einmal von dem Streckenzug erreicht werden.
a) Beweisen Sie, dass für $n = 4$ und für $n = 6$ der Versuch erfolgreich realisiert werden kann!
b) Beweisen Sie, dass der Versuch für $n = 9$ nicht erfolgreich realisiert werden kann!

Lösung von cyrix:
Die Geraden einer jeden Richtung seien von 1 bis n durchnummeriert, sodass sich die Schnittpunkte als Paare (x,y) angeben lassen, wobei diese Bezeichnung für den Schnittpunkt der Gerade x der einen mit Gerade y der anderen Richtung stehe.

a) Ein Weg, der für gerade $n = 2k$ (also insbesondere für $n = 4$ und $n = 6$) die Bedingung der Aufgabenstellung erfüllt, ist wie folgt gegeben:

$$(1,1) \to (1,n) \to (2,n) \to (2,2) \to (3,2) \to (3,n) \to (4,n) \to (4,2) \to \dots$$

$$\to (2i,2) \to (2i+1,2) \to (2i+1,n) \to (2i+2,n) \to \dots \to (n,2) \to (n,1) \to (1,1)$$

Dabei stehe $P \to Q$ für die geradlinige Verbindung von P und Q. Insbesondere müssen P und Q genau eine Koordinate gemeinsam haben, damit diese Strecke auf einer der Geraden liegt.

b) Wir zeigen allgemein, dass für ungerade n (also insbesondere für $n = 9$) kein solcher Weg möglich ist:

Wir färben die Gitterpunkte schachbrettartig im Wechsel schwarz und weiß ein. Gäbe es einen geschlossenen Weg, der o. B. d. A. bei einem schwarzen Punkt beginnt, entlang der Gitterlinien jeden der geradzahlig vielen $n^2 - 1$ weiteren Gitterpunkte genau einmal besucht und dann direkt zum Ausgangspunkt zurückkehrt, dann würde auf diesem Weg aufgrund der ungeradzahlig vielen n^2 überwundenen Teilstrecken zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Gitterpunkten auf diesem Weg insgesamt ungeradzahlig oft die Farbe wechseln, d. h., der Ziel-Gitterpunkt müsste die Farbe weiß haben.
Dies ist aber der Ausgangsgitterpunkt, der schwarz ist, was ein Widerspruch darstellt, sodass es einen solchen Hamilton-Kreis nicht geben kann, $\square$.

Aufgabe 321024:
Untersuchen Sie, ob es möglich ist, einem Quadrat mit einer Seitenlänge von 8 cm mehr als 64 Kreise mit einem Durchmesser von je 1 cm so einzubeschreiben, dass sich je zwei Kreise nicht überschneiden und dass kein Punkt eines Kreises außerhalb des Quadrates liegt!

Lösung von cyrix:
Ja, dies ist möglich. Wir geben im Folgenden eine Konstellation mit 68 solchen Kreisen an:

Dazu legen wir derart ein Koordinatensystem in die Ebene des Quadrats, dass eine seiner Ecken im Koordinatenursprung liegt, die von dieser Ecke ausgehenden Kanten auf den positiven Koordinatenachsen liegen und es die Kantenlänge 16 besitzt. (Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht als 5 mm.) Weiterhin sei $h := \frac{7}{4}$.

Wir wählen nun zwei Arten von Punkten aus:

$$M_1 := \{(1 + 2i; 1 + 2j \cdot h) | 0 \leq i \leq 7 \wedge 0 \leq j \leq 4\} \qquad \text{und}$$

$$M_2 := \{(2 + 2i; 1 + (2j + 1) \cdot h) | 0 \leq i \leq 6 \wedge 0 \leq j \leq 3\}$$

Dabei soll $M = M_1 \cup M_2$ die Menge der Mittelpunkte der ausgewählten Kreise sein. Zuerst stellen wir $|M_1| = 8 \cdot 5 = 40$ und $|M_2| = 7 \cdot 4 = 28$, also $|M| = 68$ fest, da die Punkte in M_1 ungerade und die in M_2

gerade x-Koordinaten haben, die beiden Mengen also disjunkt sind.

Weiterhin sind die x-Koordinaten aller Punkte in M mindestens 1 und höchstens $1 + 14 = 15$, gleiches gilt wegen $1 + 8 \cdot h = 1 + 14 = 15$ auch für die y-Koordinaten, sodass kein Kreis mit Radius 1 um einen beliebigen dieser Mittelpunkte Punkte außerhalb des Quadrats enthält.

Diese Mittelpunkte kann man sich hierbei in einzelnen Zeilen gleicher y-Koordinate aufgereiht vorstellen: Zuunterst eine Reihe von acht Mittelpunkten auf der Linie $y = 1$, dann eine zweite Reihe von sieben Mittelpunkten, die „mittig versetzt“ gegenüber der ersten Reihe auf der Linie $y = 1 + h$ liegen, usw., immer entsprechend im Wechsel.

Zwei Mittelpunkte auf der gleichen Zeile haben offenbar den Abstand von mindestens 2, sodass sich die Kreise mit Radius 1 um sie nicht überschneiden.

Zwei benachbarte Mittelpunkte einer Zeile bilden mit dem„zwischen ihnen“ liegenden Mittelpunkt einer benachbarten Zeile ein gleichschenkliges Dreieck mit Grundseite der Länge 2 und Höhe auf diese der Länge h. Damit haben die beiden Schenkel nach dem Satz von Pythagoras die Länge $\sqrt{1+h^2} = \sqrt{1+\frac{49}{16}} = \sqrt{\frac{65}{16}} > \sqrt{\frac{64}{16}} = \sqrt{4} = 2$, sodass sich auch hier keine zwei Kreise mit Radius 1 um diese Mittelpunkte überschneiden. Gleiches gilt erst recht für weiter entfernt liegende Mittelpunkte.

Damit überschneiden sich keine zwei Kreise mit Radius 1 um die in M angegebenen Mittelpunkte und auch besitzt keiner dieser 68 Kreise Punkte außerhalb des Quadrats, sodass diese Anordnung der mehr als 64 Kreise die Aussage der Aufgabenstellung erfüllt, $\Box$.

Aufgabe 331024:
Untersuchen Sie, ob es möglich ist, in einem würfelförmigen Kasten, der jeweils 4 cm als Innenmaß für Länge, Breite und Höhe hat, mehr als 64 Metallkugeln von 1 cm Durchmesser so unterzubringen, dass keine über den Rand hinausragt!

Lösung von cyrix:
Dies ist möglich. Wir geben im Folgenden eine Verteilung mit 66 Kugeln an. Dazu seien im Folgenden alle Längen in der Einheit cm gemessen, sodass wir nur die Maßzahlen angeben.

Entlang einer Kante der Grundfläche können vier Kugeln nebeneinander gelegt werden, sodass sich zwei benachbarte berühren und die beiden äußeren den jeweiligen Rand des Kastens. Von diesen Reihen können vier hintereinander auf die Grundfläche gelegt werden, sodass sich ein quadratisches Raster von 4×4 Kugeln ergibt. Deren Mittelpunkte liegen alle in einer Ebene, die parallel zur Grundfläche im Abstand $\frac{1}{2}$ zu ihr liegt.

Auf diese Schicht von 16 Kugeln kann nun eine zweite derart gelegt werden, dass jede Kugel der zweiten Schicht in die „Lücke“ der von vier ein „2×2-Quadrat“ bildenden Kugeln der ersten Schicht rollt und eine damit möglichst nah an der Grundfläche liegende Position (gemeint ist der Abstand des Mittelpunkts der Kugel von der Grundfläche) einnimmt.
Da sich aus dem 4×4-Raster der Kugeln der ersten Schicht genau $3 \cdot 3$ solche Lücken ergeben, können in die zweite Schicht insgesamt 9 Kugeln gelegt werden.

Die Mittelpunkte von vier Kugeln eines solchen „2×2-Quadrats“ der ersten Schicht sowie der Mittelpunkt der in der zugehörigen Lücke liegenden Kugel der zweiten Schicht bilden eine quadratische Pyramide, deren Kanten allesamt die Länge 1 besitzen. Aus Symmetriegründen liegt der Fußpunkt des Lots der Spitze dieser Pyramide auf seine Grundfläche im Mittelpunkt des Quadrats, sodass sich ein rechtwinkliges

Dreieck zwischen Eckpunkt des Quadrats, dessen Mittelpunkt und der Spitze der Pyramide ergibt und sich deshalb die Länge der Höhe h dieser Pyramide nach dem Satz des Pythagoras zu

$$h = \sqrt{1^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ergibt.

Auf gleiche Weise kann nun auf die zweite Schicht aus Symmetriegründen eine dritte Schicht, die identisch mit der ersten aufgebaut ist, gelegt werden, auf diese eine vierte Schicht, die identisch aufgebaut ist wie die zweite, und darauf eine fünfte Schicht, die wiederum identisch ist mit der ersten.

Nach Konstruktion sind auf diese Weise $16 + 9 + 16 + 9 + 16 = 66$ Kugeln in den Kasten gelegt worden, wobei keine von diesen über die Grund- oder eine der vier Seitenflächen des Kastens hinausragt. Es bleibt noch zu zeigen, dass auch die Kugeln der fünften Schicht nicht über die Deckfläche des Kastens hinausragen.

Dazu stellen wir fest, dass nach Konstruktion die Mittelpunkt der Kugeln einer Schicht immer in einer Ebene liegen, die parallel ist zur Ebene der Kugeln der darunterliegenden Schicht, und diese beiden Ebenen einen Abstand von h besitzen.

Damit liegen die Mittelpunkte der Kugeln der fünften Schicht also in einer Ebene, die parallel zur Grundfläche des Kastens liegt, und zu dieser einen Abstand von $\frac{1}{2} + 4 \cdot h = \frac{1}{2} + 2\sqrt{2} = \frac{1}{2} + \sqrt{8} < \frac{1}{2} + 3 = 4 - \frac{1}{2}$ besitzt, also zur Deckfläche einen Abstand von mehr als $\frac{1}{2}$, sodass keine Kugel der fünften Schicht (und damit auch keine der darunterliegenden) über die Deckfläche hinausragt.

Damit ist es möglich, mehr als 64 Kugeln gemäß der Aufgabenstellung in dem Kasten unterzubringen, $\square$.

III. Runde 3

Aufgabe 041034:
Von sechs Schülern einer Schule, die an der zweiten Stufe der Mathematikolympiade teilnahmen, erreichten zwei die volle Punktzahl. Die Schüler seien zur Abkürzung mit A, B, C, D, E und F bezeichnet.
Auf die Frage, welche beiden Schüler die volle Punktzahl erreicht haben, wurden die folgenden fünf verschiedenen Antworten gegeben:

(1) A und C, (2) B und F, (3) F und A, (4) B und E, (5) D und A.

Nun wissen wir, dass in genau einer Antwort beide Angaben falsch sind, während in den übrigen vier Antworten jeweils genau eine Angabe zutrifft.
Welche beiden Schüler erreichten die volle Punktzahl?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Ein Anfang wäre es wohl Kandidat A zu betrachten, da dieser in 3 Aussagen vorkommt. Wenn A nun nicht volle Punktzahl hat, da muss von diesen 3 Aussagen eine mit beiden falschen Aussagen dabei sein. Wenn nun A und C beide falsch sind, dann müssten also F und D volle Punktzahl erhalten haben. Dann wären aber B und E beide leer ausgegangen, und somit hätten wir bei Aussage (4) wieder 2 verkehrte. Das funktioniert also nicht.
Die gleiche Argumentation klappt auch für den Fall, dass A und F beide falsch sind und dass A und D beide falsch sind. A muss also volle Punktzahl erhalten haben und C, F und D nicht.
Es fehlt dann also noch die Aussage, in der beide Angaben nicht stimmen.

Nach Aussage (2) haben B und F volle Punktzahl erhalten und nach Aussage (4) B und E. B kann somit nicht volle Punktzahl erreicht haben, da in diesem Fall in beiden Aussagen eine Angabe richtig wäre. Somit hat B nicht volle Punktzahl erreicht. Dann hat E volle Punktzahl erreicht.
Somit haben A und E volle Punktzahl erreicht.

Aufgabe 101035:
Während eines Schachturniers, bei dem jeder gegen jeden genau einmal spielte, wurden genau 15 Partien gespielt. Genau 5 Spiele endeten unentschieden (remis). Wie üblich gab es für jeden Sieg einen, für jedes Remis einen halben Punkt, für jede Niederlage 0 Punkte.
Nach Abschluss des Turniers hatten keine zwei Spieler die gleiche Gesamtpunktzahl erzielt. Der zweitbeste Spieler erreichte genau zwei Punkte mehr als der letzte.
Über einige Teilnehmer A, B, C, ... ist ferner folgendes bekannt: A, der sich besser als D platzierte, erreichte wie dieser kein Remis. C, der Dritter wurde, schlug den Vierten.
Zeigen Sie, dass diese Angaben hinreichend sind, um den Ausgang des Spieles B gegen C zu ermitteln!

Lösung von cyrix:
Da bei einem Turnier, in dem jeder von n Spielern gegen jeden anderen genau einmal antritt, genau $\frac{n\cdot(n-1)}{2}$ Partien ausgetragen werden, und in diesem Turnier genau 15 Partien gespielt wurden, nahmen an diesem also $n=6$ Spieler teil. Diese seien mit A,B,C,D,E und F bezeichnet.

Sei darüber hinaus die Punktzahl des Siegers mit x_1, die des Zweitplatzierten mit x_2 usw., die des Letzten mit x_6 bezeichnet. Dann gilt $x_1 > x_2 > \cdots > x_6$, also, da nur Vielfache von $\frac{1}{2}$ als Punktzahlen möglich sind, $x_1 \geq x_2 + \frac{1}{2}$, $x_2 \geq x_3 + \frac{1}{2}$, $\ldots$, $x_5 \geq x_6 + \frac{1}{2}$ und damit insbesondere auch $x_4 \geq x_6 + 1$, $x_3 \geq x_6 + \frac{3}{2}$ sowie $x_2 \geq x_6 + 2$. Da aber nach Aufgabenstellung $x_2 = x_6 + 2$ gilt, folgt auch Gleichheit in den vorherigen Ungleichungen, d. h. $x_5 = x_6 + \frac{1}{2}$, $x_4 = x_6 + 1$ und $x_3 = x_6 + \frac{3}{2}$.

Da in jeder Partie insgesamt in Summe ein Punkt an beide Spieler vergeben wird, wurden im gesamten Turnier also 15 Punkte vergeben, sodass sich $x_1 + x_2 + \cdots + x_6 = 15$ ergibt. Setzt man die zuvor erhaltenen Werte für x_2 bis x_5 in Abhängigkeit von x_6 ein, wird dies zu $x_1 + 5\cdot x_6 + 5 = 15$. Setzt man nun zusätzlich noch $x_1 \geq x_2 + \frac{1}{2} = x_6 + \frac{5}{2}$ ein, erhält man $6x_6 + \frac{15}{2} \leq 15$ bzw. $x_6 \leq \frac{15}{12} = \frac{5}{4} < \frac{3}{2}$. Da auch für x_6 nur Vielfache von halben Punkten zulässig sind, folgt $x_6 \leq 1$.

Umgekehrt erhält man mit $x_1 \leq 5$ (da auch der Sieger nicht mehr als einen Punkt pro Gegner erhalten kann) die Beziehung $5 \geq x_1 = 10 - 5x_6$ bzw. $x_6 \geq 1$, zusammen mit der vorherigen Abschätzung also $x_6 = 1$ und damit auch $x_5 = \frac{3}{2}$, $x_4 = 2$, $x_3 = \frac{5}{2}$, $x_2 = 3$ und $x_1 = 5$.

Es gibt insgesamt 9 Partien, an denen mindestens einer der beiden Spieler A oder D beteiligt war (je 4 gegen die übrigen Turnierteilnehmer und eine gegeneinander). Unter diesen war kein Remis, sodass die genau 5 Remis des Turniers alle unter den 6 Partien der Spieler B, C, E und F zu finden sind.

Damit gibt es genau zwei dieser vier Spieler, nennen wir sie X und Y, die untereinander kein Remis erzielten. Für die anderen beiden Spieler gilt, dass sie sowohl untereinander als auch gegen X und Y remis spielten. Damit haben diese beiden keine ganzzahlige Punktzahlen und müssen Dritt- und Fünftplatzierter sein.
Demnach hat C als dritter sowohl gegen E, F als auch insbesondere B remisiert.

Bemerkung: Die Aussage, dass C gegen den Vierten gewonnen hat, wurde in dieser Lösung nicht verwendet.

Aufgabe 101036:
Im Innern eines Würfels mit der Kantenlänge 1 seien 28 verschiedene Punkte beliebig angeordnet.
Es ist zu beweisen, dass es dann wenigstens ein aus zwei verschiedenen dieser 28 Punkte bestehendes Punktepaar gibt, so dass der Abstand dieser zwei Punkte voneinander nicht größer als $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ ist.

Lösung von cyrix:
Wir zerlegen den Würfel durch parallele Schnitte in 27 mit je $\frac{1}{3}$ als Kantenlänge. Dann müssen in mindestens einem Teilwürfel 2 dieser 28 Punkte liegen. Der maximale Abstand, den zwei Punkte in einem Würfel haben können, entsteht, wenn sie die Endpunkte einer seiner Raumdiagonalen bilden.

Diese hat die $\sqrt{3}$-fache Länge der Kantenlänge des Würfels, woraus sich sofort die Behauptung ergibt, $\square$.

Aufgabe 141031:
In dem Schema sollen die Buchstaben so durch Ziffern ersetzt werden, dass eine richtig gelöste Additionsaufgabe entsteht. Dabei sollen für die gleichen Buchstaben gleiche Ziffern und für verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern eingesetzt werden.
Geben Sie alle Lösungen dafür an! (A und Ä gelten als verschiedene Buchstaben.)

$$\begin{array}{ccccc} & \text{A} & \text{R} & \text{Z} & \text{T} \\ & \text{A} & \text{R} & \text{Z} & \text{T} \\ \hline \text{Ä} & \text{R} & \text{Z} & \text{T} & \text{E} \end{array}$$

Lösung von weird:
Indem wir nachfolgend die oben auftretenden Buchstaben gleich als Variablennamen mit den ihnen entsprechenden Zahlenwerten verwenden, können wir, da offenbar $\ddot{A} = 1$ gelten muss, sofort die Gleichung

$$2(1000A + 100R + 10Z + T) = 10000 + 1000R + 100Z + 10T + E$$

aufstellen, aus welcher sich nach einer einfachen Umformung

$$100R + 10Z + T = 250(A - 5) - \frac{E}{8}$$

ergibt. Aus dieser kann man zunächst unmittelbar folgern, dass E durch 8 teilbar sein muss, und da $E = 0$ sofort auf den Widerspruch $T = E$ führen würde, bleibt als nur mehr die Möglichkeit $E = 8$.
Da $100R+10Z+T$ jedenfalls positiv ist, bleiben dann für A nur mehr eine der Möglichkeiten $A \in \{6,7,8,9\}$, wobei auch die Fälle $A = 7$ und $A = 9$ sofort ausscheiden, da sie auf den Widerspruch $Z = T = 9$ führen würden und auch $A = E = 8$ natürlich nicht geht. Es bleibt also nur mehr der Fall

$$A = 6,\ 100R + 10Z + T = 249$$

übrig, welcher dann auch tatsächlich eine Lösung der Aufgabe ist:

$$\begin{array}{ccccc} & 6 & 2 & 4 & 9 \\ & 6 & 2 & 4 & 9 \\ \hline 1 & 2 & 4 & 9 & 8 \end{array}$$

Aufgabe 161033:
Bei dem folgenden Kryptogramm sollen die Buchstaben so durch Ziffern ersetzt werden, dass eine richtig gelöste Additionsaufgabe entsteht. Dabei sollen gleiche Buchstaben durch gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern ersetzt werden.

$$\begin{array}{ccccc} & \text{I} & \text{N} & \text{E} & \text{S} \\ + & \text{J} & \text{E} & \text{N} & \text{S} \\ + & \text{A} & \text{M} & \text{E} & \text{S} \\ \hline \text{N} & \text{A} & \text{M} & \text{E} & \text{N} \end{array}$$

a) Zeigen Sie, dass es im dekadischen Zahlensystem keine Lösung der Aufgabe gibt!
b) Zeigen Sie, dass die Aufgabe im System mit der Basis 8 eine Lösung hat, und geben Sie alle Lösungen in diesem System an!
Hinweis: Sind $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ ganze Zahlen mit $0 \le a_i \le 7$ $(i = 0, \dots, n)$ und $a_n > 0$, so bezeichnet man durch Hintereinanderschreiben $a_n \dots a_2 a_1 a_0$ im System mit der Basis 8 die Zahl

$$z = a_n 8^n + a_{n-1} 8^{n-1} + \dots + a_2 8^2 + a_1 8^1 + a_0 8^0$$

Zur Unterscheidung von der Zahl mit denselben Ziffern im dekadischen Zahlensystem kann man die Zahl z auch mit $z = [a_n ... a_2 a_1 a_0]_8$ bezeichnen.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Angenommen, es gäbe eine Lösung. Wir betrachten die einzelnen Spalten der Aufgabe.
Es werden jeweils drei einstellige Zahlen (und gegebenenfalls ein Übertrag) addiert. Wegen $3 \cdot 9 = 27$ kann dabei aus der letzten Spalte höchstens ein Übertrag von 2 in die nächstfolgende Spalte erfolgen. Wegen $3 \cdot 9 + 2 = 29$ gilt dies auch für die übrigen Spalten.
Daher kommt wegen $I + J + A(+\ddot{U}) = A + 10N$ und $I + J + \ddot{U} = 8 + 9 + 2$ für N nur der Wert 1 in Frage. Daraus folgt $S = 7$. Nun müsste in der zweitletzten Spalte $SE + 1 + 2 = E + k \cdot 10$ (k ganzzahlig) sein, woraus $E = 7$ folgen würde im Widerspruch zu $E \neq S$. Daher gibt es im dekadischen System keine Lösung der Aufgabe.

b) Angenommen, die Aufgabe hat im System mit der Basis 8 eine Lösung.
Dann gilt wegen $3 \cdot 7 = [25]_8$, $3 \cdot 7 + 2 = [27]_8$ dass ein möglicher Übertrag in jeder Spalte höchstens 2 betrage kann. Analog wie bei a) folgt daraus $N = 1$. Wegen

$$3 \cdot 0 = 0 \qquad 3 \cdot 1 = 3 \qquad 3 \cdot 2 = 6 \qquad 3 \cdot 3 = [11]_8 \qquad 3 \cdot 4 = [14]_8$$
$$3 \cdot 5 = [17]_8 \qquad 3 \cdot 6 = [22]_8 \qquad 3 \cdot 7 = [25]_8$$

folgt hieraus $S = 3$. Nun gilt in der vorletzten Spalte $2E + 1 + 1 = E + k \cdot [10]_8$ (k ganzzahlig), woraus man $E = 6$ und $k = 1$ erhält.
In der zweiten Spalte entsteht dabei bei Addition von $1 + N + E + M = 1 + 1 + 6 + M$ ein Übertrag von 1. Die erste Spalte liefert somit $I + J + A + 1 = A + N \cdot [10]_8$, also $I + J + 1 = [10]_8$ bzw. $I + J = 7$. Mit den von N, S, E verschiedenen Ziffern $0, 2, 4, 5, 7$ ist dies wegen $I \neq 0$, $J \neq 0$ nur dadurch möglich, dass entweder $I = 2$ und $J = 5$ oder $J = 2$ und $I = 5$ gilt.

Damit verbleiben für A ($\neq 0$) nur die Ziffern 4 und 7 und für M nur die von A verschiedenen unter den Ziffern 0, 4 und 7. Die Aufgabe kann also höchstens durch die folgenden Ersetzungen im System mit der Basis 8 gelöst werden:

$$\begin{array}{ccccc} & 2 & 1 & 6 & 3 \\ + & 5 & 6 & 1 & 3 \\ + & 4 & 0 & 6 & 3 \\ \hline 1 & 4 & 0 & 6 & 1_8 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} & 2 & 1 & 6 & 3 \\ + & 5 & 6 & 1 & 3 \\ + & 4 & 7 & 6 & 3 \\ \hline 1 & 4 & 7 & 6 & 1_8 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} & 2 & 1 & 6 & 3 \\ + & 5 & 6 & 1 & 3 \\ + & 7 & 0 & 6 & 3 \\ \hline 1 & 7 & 0 & 6 & 1_8 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} & 2 & 1 & 6 & 3 \\ + & 5 & 6 & 1 & 3 \\ + & 7 & 4 & 6 & 3 \\ \hline 1 & 7 & 4 & 6 & 1_8 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} & 5 & 1 & 6 & 3 \\ + & 2 & 6 & 1 & 3 \\ + & 4 & 0 & 6 & 3 \\ \hline 1 & 4 & 0 & 6 & 1_8 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} & 5 & 1 & 6 & 3 \\ + & 2 & 6 & 1 & 3 \\ + & 4 & 7 & 6 & 3 \\ \hline 1 & 4 & 7 & 6 & 1_8 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} & 5 & 1 & 6 & 3 \\ + & 2 & 6 & 1 & 3 \\ + & 7 & 0 & 6 & 3 \\ \hline 1 & 7 & 0 & 6 & 1_8 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} & 5 & 1 & 6 & 3 \\ + & 2 & 6 & 1 & 3 \\ + & 7 & 4 & 6 & 3 \\ \hline 1 & 7 & 4 & 6 & 1_8 \end{array}$$

Da diese Ersetzungen alle Bedingungen der Aufgabe erfüllen, sind sie die gesuchten Lösungen.

Aufgabe 171035:
Aus den natürlichen Zahlen von 1 bis 200 werden 101 verschiedene Zahlen beliebig ausgewählt.
Es ist zu zeigen, dass bei jeder solchen Auswahl unter den ausgewählten Zahlen mindestens zwei existieren, so dass die eine ein ganzzahliges Vielfaches der anderen ist.

Lösung von Kornkreis:
Die Anzahl der geraden unter den 101 ausgewählten Zahlen sei m. Dann ist $(101 - m)$ die Anzahl der ungeraden unter den ausgewählten Zahlen.
Dividiert man jede der m geraden Zahlen jeweils durch die höchste in ihr enthaltene Zweierpotenz, so erhält man als Quotienten m ungerade Zahlenangaben. Zusammen mit den zuvor genannten $101 - m$ ungeraden Zahlen hat man somit eine Angabe von 101 ungeraden Zahlen. Da sich unter den natürlichen Zahlen von 1 bis 200 nur 100 ungerade befinden, müssen mindestens zwei der angegebenen 101 ungeraden Zahlen einander gleich sein.
Die ausgewählten Zahlen, aus denen diese beiden übereinstimmenden ungeraden Zahlenangaben gewonnen wurden, unterscheiden sich daher in ihrer Primzerlegung nur um eine Potenz von 2. Die größere von beiden Zahlen ist mithin ein ganzzahliges Vielfaches der kleineren, was zu zeigen war.

Alternativ-Lösung von Kornkreis:
Sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl (in der Aufgabe geht es speziell um $n = 100$).
Nehmen wir nun an, wir könnten eine Auswahl von $n + 1$ verschiedenen Zahlen aus $\{1, \ldots ,2n\}$ treffen, sodass keine Zahl dieser Auswahl ganzzahliges Vielfaches einer anderen Zahl dieser Auswahl ist. Wir betrachten nun so eine Auswahl. Diese besteht aus $a \geq 0$ Zahlen aus $A := \{1, \ldots ,n\}$ und $b \geq 0$ Zahlen aus $B := \{n + 1, \ldots ,2n\}$. Nach Voraussetzung gilt $a + b = n + 1$.

Jedes natürliche $m \in A$ kann durch Multiplikation mit einer Zweierpotenz auf eine Zahl in B abgebildet werden: Ansonsten gäbe es nämlich ein natürliches $r \geq 0$ mit $m \cdot 2^r < n + 1$ und $m \cdot 2^{r+1} > 2n$, woraus dann $2n < m \cdot 2^{r+1} < 2n + 2$ folgen würde, Widerspruch.

Weiterhin sind für beliebige $m_1, m_2 \in A$ (aus der Auswahl der a Zahlen aus A) die Zahlen $m_1 \cdot 2^{r_1} \in B$ und $m_2 \cdot 2^{r_2} \in B$ verschieden, da sonst aus $m_1 \cdot 2^{r_1} = m_2 \cdot 2^{r_2}$ (nach Division durch die kleinste der beiden Zweierpotenzen) $m_1|m_2$ oder $m_2|m_1$ folgen würde, Widerspruch zur speziellen Auswahl der $n+1$ Zahlen. Ebenso stimmt auch keine der b Zahlen aus B mit einem $m \cdot 2^r \in B$ überein, wobei m eine der a Zahlen aus A sei.

Daraus folgt nun $a+b \leq n$, da B genau n Elemente besitzt. Dies steht aber im Widerspruch zu $a+b = n+1$. Daher kann es keine solche spezielle Auswahl geben, was die Behauptung der Aufgabenstellung beweist.

Aufgabe 181034:
Achim, Bernd und Dirk nehmen jeder genau einen der folgenden Gegenstände an sich: einen Ball, einen Ring, einen Würfel. Danach machen Sie folgende Aussagen:
(1) Achim hat nicht den Ball oder Bernd hat den Ring.
(2) Bernd hat den Ring nicht oder Dirk hat den Würfel.
(3) Dirk hat den Würfel und Achim hat den Ball.
(4) Achim hat den Ball und Bernd hat den Ring nicht.
Ist es möglich, dass a) alle vier Aussagen b) genau drei Aussagen, c) genau zwei Aussagen, d) genau eine der Aussagen, e) keine der Aussagen gleichzeitig wahr sind?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es gibt genau 6 Möglichkeiten, die drei Gegenstände b (Ball), r (Ring), w (Würfel) auf die drei Schüler A (Achim), B (Bernd), D (Dirk) zu verteilen. Aus der Definition der Alternative bzw. Konjunktion ergibt sich:

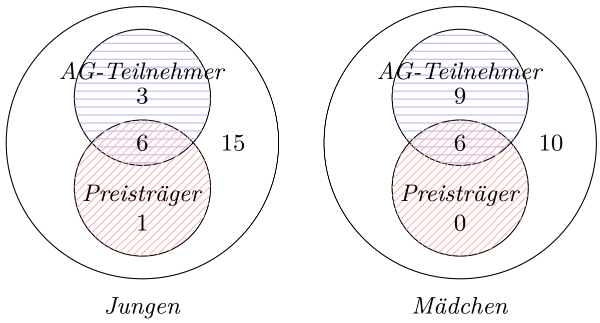
A B D	wahre Aussagen	falsche Aussagen
b r w	(1),(2), (3)	(4)
b w r	(2),(4)	(l), (3)
r b w	(l), (2)	(3),(4)
r w b	(l), (2)	(3),(4)
w b r	(1),(2)	(3),(4)
w r b	(l)	(2),(3),(4)

Aus der Tabelle ist ersichtlich, dass a) und e) nicht möglich sind, aber b), c) und d).

Aufgabe 201031:
In einem Stadtbezirk Berlins nahmen in der Olympiadeklasse 10 insgesamt 50 Schüler an der 2. Stufe der OJM teil. Die folgenden Angaben beziehen sich auf diesen Teilnehmerkreis:
(1) Es nahmen ebensoviel Jungen wie Mädchen teil.
(2) Genau 24 der Teilnehmer, darunter genau 15 Jungen, waren Mitglieder einer AG Mathematik.
(3) Genau 13 der Teilnehmer erhielten Preise oder Anerkennungsurkunden. (Diese 13 Teilnehmer werden im folgenden „Preisträger“ genannt.)
(4) Genau 12 der Preisträger waren Mitglieder einer AG Mathematik.

(5) Genau 6 der Preisträger waren Mädchen.
(6) Es waren nur solche Mädchen Preisträger, die einer AG Mathematik angehörten.
Ermitteln Sie die Anzahl derjenigen teilnehmenden Jungen, die weder Preisträger waren noch einer AG Mathematik angehörten!

Lösung von Steffen Polster:



Aus dem Aufgabentext ergibt sich sofort für die Anzahl Mädchen M und die Anzahl Jungen J: $M = J = 25$. Für die Preisträger gilt, dass jeweils 6 Mädchen und 6 Jungen Preise errangen, die gleichzeitig AG-Mitglied sind. Da kein weibliches AG-Mitglied ohne Preis blieb, muss ein Junge aus einer AG keinen Preis errungen haben.
Eintragen der Daten in zwei Diagramme ergibt dann: 15 Jungen sind kein Preisträger und in keiner AG.

Aufgabe 221034:
Beweisen Sie folgende Aussage:
In einem Quadrat mit der Seitenlänge a gibt es zehn Punkte, die so im Innern oder auf dem Rande des Quadrates gelegen sind, dass je zwei dieser zehn Punkte einen Abstand größer als $\frac{2}{5}a$ zueinander haben.

Lösung von cyrix:
Wir starten auf einer der Kanten des Quadrates und wählen deren Endpunkte und den Mittelpunkt aus. Je zwei benachbarte dieser ausgewählten Punkte haben einen Abstand von $\frac{1}{2}a > \frac{2}{5}a$.

Auf der Parallele zu dieser Grundseite im Abstand $\frac{1}{3}a$ wählen wir zwei Punkte aus, jeweils im Abstand $\frac{1}{4}a$ zum jeweiligen Seitenrand des Quadrats. Dann haben diese beiden Punkte untereinander den Abstand $\frac{1}{2}a > \frac{2}{5}a$. Jeder der beiden Punkten bildet mit den zwei „benachbarten“ Punkten der Grundlinie ein gleichschenkliges Dreieck mit Basislänge $\frac{1}{2}a$ und Höhe $\frac{1}{3}a$ auf dieser.
Damit haben die beiden Schenkel eine Länge von $\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} \cdot a = \sqrt{\frac{9+16}{4^2 \cdot 3^2}} \cdot a = \frac{5}{12}a > \frac{2}{5}a$, sodass auch hier keine zwei Punkte einen zu kleinen Abstand zueinander besitzen.

Auf der Parallele zu Grundseite im Abstand von $\frac{2}{3}a$ wählen wir die Punkte wieder aus wie auf der Grundseite selbst, sodass diese an der Parallelen im Abstand $\frac{1}{3}a$ zur Grundseite gespiegelt wurde. Es ergeben sich dadurch die gleichen Abstände wie in der eben durchgeführten Überlegung.

Schließlich wählen wir die letzten zwei noch fehlenden Punkte auf der Parallelen zur Grundseite im Abstand von $\frac{3}{3}a$, also der gegenüberliegenden Quadratseite, wieder genauso aus wie auf der Parallelen im Abstand von $\frac{1}{3}a$ zur Grundseite, sodass sich das Muster entsprechend fortsetzt.

Damit haben wir 10 Punkte in bzw. auf dem Rand des Quadrats angegeben, sodass keine zwei verschiedene einen Abstand von $\frac{2}{5}a$ oder weniger zueinander haben, $\square$.

Aufgabe 231033:
Beweisen Sie die folgende Aussage!
Wenn man die Menge aller natürlichen Zahlen so in zwei Mengen A und B einteilt, dass jede natürliche Zahl in genau einer dieser beiden Mengen enthalten ist, dann gibt es eine natürliche Zahl d so, dass in einer der beiden Mengen A, B drei Zahlen der Form a, $a+d$, $a+2d$ enthalten sind (man könnte auch sagen, dass (mindestens) eine der beiden Mengen A, B eine arithmetische Folge der Länge 3 enthält).

Lösung von Nuramon:
Angenommen es gäbe solche Mengen A,B. Wir nehmen o. B. d. A. an, dass $0 \in A$. Um langatmige Formulierungen zu vermeiden, benutzen wir im Folgenden Matrizen wie beispielsweise $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ A & X & Y & Z \end{pmatrix}$, um auszudrücken, dass $0 \in A, 1 \in X, 2 \in Y, 3 \in Z$.

Wir unterscheiden nach allen möglichen Verteilungen von 0,1,2,3 auf A und B und zeigen jeweils, dass 8 sowohl in A als auch in B liegen müsste, was einen Widerspruch darstellt.

Fall 1: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ A & A & B & A \end{pmatrix}$
Die arithmetischen Folgen (0,3,6) und (1,3,5) zeigen, dass dann $5{,}6 \in B$. Die Folgen (4,5,6) und (5,6,7) zeigen, dass $4{,}7 \in A$. Also $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ A & A & B & A & A & B & B & A \end{pmatrix}$
Wegen (0,4,8) müsste $8 \in B$ sein. Wegen (2,5,8) müsste andererseits aber $8 \in A$ gelten. Widerspruch!

Fall 2: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ A & A & B & B \end{pmatrix}$
Wegen (2,3,4) folgt $4 \in A$. (1,4,7) zeigt dann $7 \in B$. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ A & A & B & B & A & & & B \end{pmatrix}$
(3,5,7) zeigt jetzt $5 \in A$. (4,5,6) zeigt dann $6 \in B$. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ A & A & B & B & A & A & B & B \end{pmatrix}$
Wegen (6,7,8) folgt $8 \in A$, was im Konflikt mit der Folge (0,4,8) steht.

Fall 3: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ A & B & A & A \end{pmatrix}$.
Mit (2,3,4) folgt direkt $4 \in B$. (0,3,6) zeigt $6 \in B$. Mit (4,5,6) folgt dann $5 \in A$. (1,4,7) zeigt $7 \in A$.
$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ A & B & A & A & B & A & B & A \end{pmatrix}$
Nun stehen aber (2,5,8) und (4,6,8) im Konflikt zueinander.

Fall 4: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ A & B & A & B \end{pmatrix}$
(0,2,4) zeigt $4 \in B$. (1,3,5) zeigt $5 \in A$. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ A & B & A & B & B & A \end{pmatrix}$
(1,4,7) zeigt $7 \in A$, woraus mit (5,6,7) dann $6 \in B$ folgt: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ A & B & A & B & B & A & B & A \end{pmatrix}$
Der Widerspruch folgt jetzt aus (4,6,8) und (2,5,8).

Fall 5: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \\ A & B & B & A & \end{pmatrix}$
(0,3,6) zeigt $6 \in B$. Mit (2,4,6) folgt dann $4 \in A$. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ A & B & B & A & A & & B \end{pmatrix}$
(3,4,5) zeigt $5 \in B$. Mit (5,6,7) ist dann $7 \in A$: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ A & B & B & A & A & B & B & A \end{pmatrix}$
Der Widerspruch folgt aus (0,4,8) und (2,5,8).

In allen anderen Fällen gäbe es schon unter den Zahlen 0,1,2,3 eine arithmetische Folge der Länge 3, die ganz in A oder ganz in B liegt.

Aufgabe 271036:

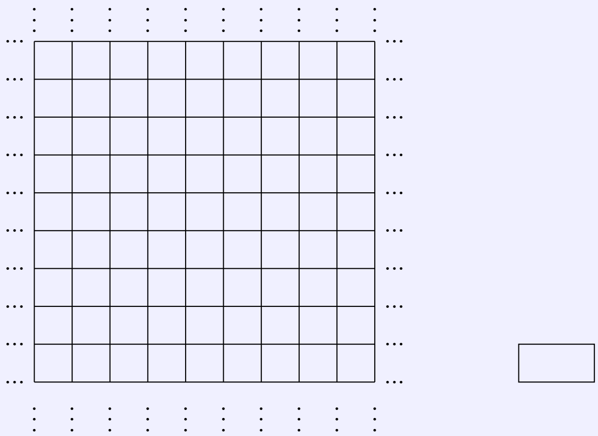


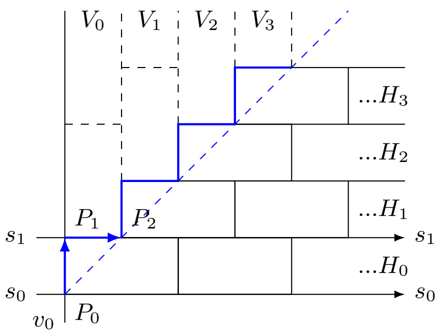
Abbildung a) Abbildung b)

Eine Ebene E sei durch vertikale und horizontale Geraden in Quadrate der Seitenlänge 1 cm zerlegt (Abbildung a).
Diese Ebene soll mit Rechtecken der Seitenlängen 1 cm, 2 cm (Abbildung b) so ausgefüllt werden, dass folgende Bedingungen erfüllt sind:
Kein Punkt der Ebenen soll frei bleiben, aber die Rechtecke dürfen sich auch nicht gegenseitig überlappen.
Jede der obengenannten vertikalen und horizontalen, beliebig herausgegriffenen Geraden zerlegt nur endlich viele der Rechtecke in kleinere Flächenstücke.
Man untersuche, ob es möglich ist, diese Bedingungen zu erfüllen.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Ein derartiges Ausfüllen der Ebene E ist möglich, wie sich z. B. folgendermaßen nachweisen lässt:

Auf einer der horizontalen Geraden g_0 betrachte man ihren Schnittpunkt P_0 mit einer vertikalen Geraden v_0 und einen Strahl s_0, der auf g_0 von P_0 ausgeht. (siehe Abbildung)

Eine zu g_0 benachbarte horizontale Gerade g_1 schneide v_0 in P_1; der von P_1 ausgehende zu g_0 gleichsinnig parallele Strahl sei s_1. Die Strahlen s_0, s_1 und die Strecke P_0P_1 begrenzen einen Halbstreifen H_0, der mit Rechtecken der genannten Art ausgefüllt werde.



Er werde ferner längs des Verschiebungspfeils $\overrightarrow{P_0P_1}$ und dann längs eines Verschiebungspfeils $\overrightarrow{P_1P_2}$, der um 1 cm in Richtung s_1 verläuft, verschoben; dabei entsteht ein ebenfalls ausgefüllter Halbstreifen H_1. Aus H_1 bilde man entsprechend H_2, aus H_2 ebenso H_3 ... u. s. w.

Es entsteht eine treppenförmige Lagerung L von Rechtecken.
Verschiebt man sie längs $\overrightarrow{P_1P_2}$ und spiegelt dann an der Geraden durch P_0, P_2, so erhält man eine Lagerung, die sich aus ausgefüllten vertikalen Halbstreifen $V_0, V_1, V_2, \ldots$ zusammensetzt und zusammen mit der Lagerung L einen Quadranten der Ebene E ausfüllt.

Durch Spiegelung an g_0 und v_0 erhält man schließlich eine Ausfüllung der gesamten Ebene E. Für sie gilt:

1. Jede der gegebenen horizontalen Geraden hat mit jedem Halbstreifen H_i der Lagerung L höchstens Randpunkte gemeinsam, zerlegt also keines der Rechtecke, die H_i ausfüllen, in kleinere Flächenstücke.
2. Jede der gegebenen vertikalen Geraden hat wegen des treppenförmigen Aufbaus der Lagerung L höchstens mit endlich vielen der Halbstreifen H_i gemeinsame Punkte und kann daher auch höchstens endlich viele der Rechtecke, die L ausfüllen, in kleinere Flächenstücke zerlegen.

Entsprechende Aussagen gelten für die durch Verschiebung und Spiegelung aus L entstehenden Lagerungen; dabei ist für diejenigen Lagerungen, die aus vertikalen Halbstreifen bestehen, überall „horizontal“ und „vertikal“ zu vertauschen.

Daraus folgt insgesamt, wie gefordert, dass jede der gegebenen vertikalen und horizontalen Geraden nur endlich viele der zur Ausfüllung von E verwendeten Rechtecke in kleinere Flächenstücke zerlegt.

Aufgabe 291032:
In einem Lande gebe es eine Anzahl $n \geq 3$ von Städten $S_1, S_2, ..., S_n$.
Für je zwei Städte S_i, S_j mit $i < j$ gebe es genau eine von S_i nach S_j führende Einbahnstraße und genau eine von S_j nach S_i führende Einbahnstraße; dies seien alle Straßen des Landes.
Auf einer Landkarte seien diese Straßen unter Verwendung von genau $n-1$ Farben so gefärbt, dass für jede Stadt gilt:
Die $n-1$ von dieser Stadt ausgehenden Straßen sind mit den $n-1$ Farben gefärbt, jede mit genau einer Farbe.
Untersuchen Sie für jedes $n \geq 3$, ob man eine Färbung der Straßen unter Einhaltung dieser Bedingungen so wählen kann, dass für eine einheitlich gewählte Reihenfolge $F_1, F_2, ..., F_{n-1}$ der Farben die folgende Aussage (*) zutrifft!
(*) Für jede Stadt S_i $(i = 1, 2, ..., n)$ gilt:
Startet man in S_i und fährt der Reihe nach auf den Straßen der Farben $F_1, F_2, ..., F_{n-1}$, jeweils auf einer dieser Straßen bis zur nächsten Stadt, so endet diese Fahrt stets in der Stadt S_1.

Lösung von Nuramon:
Es gibt für jedes $n \geq 3$ so eine Färbung der Straßen.

Notation: Wenn die Straße von S_i nach S_j mit der Farbe f gefärbt ist, dann schreiben wir $S_i \xrightarrow{f} S_j$.

Im Folgenden geben wir für jede Stadt an, wie man die von ihr ausgehenden Straßen mit den Farben 1,2, $\ldots, n-1$ färben kann:

- Für S_1 färben wir $S_1 \xrightarrow{1} S_2$ und $S_1 \xrightarrow{2} S_3$. Mit jeder der Farben 3,4, $\ldots, n-1$ färben wir in beliebiger Weise je eine der restlichen von S_1 ausgehenden Straßen.

- Für S_2: Falls $n = 3$, dann färben wir $S_2 \xrightarrow{1} S_3$ und $S_2 \xrightarrow{2} S_1$.

Falls $n > 3$, dann färben wir $S_2 \xrightarrow{2} S_3$ und $S_2 \xrightarrow{1} S_n$. Die restlichen Farben verteilen wir wieder beliebig auf die übrigen Straßen, die von S_2 ausgehen.

- Für S_k mit $2 < k < n-1$ färben wir $S_k \xrightarrow{1} S_2$ und $S_k \xrightarrow{k} S_{k+1}$. Mit den von 1 und k verschiedenen Farben färben wir in beliebiger Weise je eine der restlichen von S_k ausgehenden Straßen.

- Für S_{n-1} färben wir $S_{n-1} \xrightarrow{1} S_2$ und $S_{n-1} \xrightarrow{n-1} S_1$. Die restlichen Straßen seien wieder beliebig, aber in gültiger Weise, gefärbt.

- Für S_n: Falls $n = 3$, dann färben wir $S_n \xrightarrow{1} S_2$ und $S_n \xrightarrow{2} S_1$.
Falls $n > 3$, dann färben wir $S_n \xrightarrow{1} S_2$ und $S_n \xrightarrow{2} S_3$. Die restlichen Straßen seien wieder beliebig, aber in gültiger Weise, gefärbt.
Wir wählen jetzt die Reihenfolge $F_1 = 1, F_2 = 2, \ldots, F_{n-1} = n-1$. Diese erfüllt die Bedingung (*), denn:

- Falls wir bei S_1 starten, dann erhalten wir die Fahrt:

$$S_1 \xrightarrow{1} S_2 \xrightarrow{2} S_3 \xrightarrow{3} S_4 \xrightarrow{4} \ldots \xrightarrow{n-2} S_{n-1} \xrightarrow{n-1} S_1$$

- Falls wir bei S_k mit $k \neq 2$ starten, so beginnt die Fahrt mit $S_k \xrightarrow{1} S_2$ und verläuft anschließend auf der gleichen Route wie die obige Fahrt.
- Falls wir bei S_2 starten: Für $n = 3$ erhalten wir die Fahrt $S_2 \xrightarrow{1} S_3 \xrightarrow{2} S_1$. Für $n > 3$ startet die Fahrt mit $S_2 \xrightarrow{1} S_n \xrightarrow{2} S_3$ und verläuft anschließend wieder auf der gleichen Route, wie die Fahrt, die bei S_1 startet.
In jedem Fall endet die Fahrt bei S_1 und somit ist (*) erfüllt.

Aufgabe 331034:

	E	I	N	S
+	E	I	N	S
+	E	I	N	S
+	E	I	N	S
+	E	I	N	S
=	F	Ü	N	F

Das nebenstehende Kryptogramm stellt die Aufgabe, die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzten, dass eine richtig gerechnete Additionsaufgabe entsteht.
Dabei soll auch die Regel beachtet werden, dass als Anfangsziffer (für E und F) nicht die Ziffer Null auftreten darf.
Gleiche Buchstaben sind durch gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern zu ersetzen.
Untersuchen Sie, ob eine Lösung existiert! Wenn das der Fall ist, untersuchen Sie, ob verschiedene Lösungen existieren und geben Sie jede Lösung an!
Hinweis: Zwei Lösungen heißen genau dann voneinander verschieden, wenn nicht jeder Buchstabe in der einen dieser Lösungen durch dieselbe Ziffer ersetzt wird wie in der anderen dieser Lösungen.

Lösung von cyrix:
Da die fünf Summanden untereinander gleich sind, ist die Summe ein Vielfaches von 5, endet also auf die Ziffer 0 oder 5. Da F auch die führende Ziffer der Summe ist, folgt $F = 5$ und damit auch, dass S ungerade ist.

Da in der Tausenderstelle bei der Addition kein Übertrag entsteht, muss $5 \cdot E < 10$ gelten, woraus wegen $E \neq 0$ sofort $E = 1$ folgt. Da $5 \cdot E = F$ gilt, darf auch in der Hunderterstelle kein Übertrag entstehen.

Also muss auch $5 \cdot I < 10$ und wegen $I \neq E = 1$ also $I = 0$ gelten. Also ist $\ddot{U} \geq 2$ der Übertrag, der aus der Zehnerstelle erhalten wird.

Ist u der Übertrag, der bei der Addition der Einerstellen entsteht, so it wegen $S \neq 1$ direkt $S \geq 3$, also $u \geq 1$. Andererseits ist $S \leq 9$, also $u \leq 4$.
An der Zehnerstelle gilt also $5 \cdot N + 4 \geq 5 \cdot N + u = N + 10 \cdot \ddot{U} \geq 20 + N$ bzw. $4 \cdot N \geq 16$, also $N \geq 4$.

Fall 1: $N = 4$. Dann ist $5 \cdot N = 20$, sodass $u = 4$ (daraus $S = 9$) und $\ddot{U} = 2$ folgt. Wir erhalten die Lösung

$$\begin{array}{cccccc} & 1 & 0 & 4 & 9 \\ + & 1 & 0 & 4 & 9 \\ + & 1 & 0 & 4 & 9 \\ + & 1 & 0 & 4 & 9 \\ + & 1 & 0 & 4 & 9 \\ \hline = & 5 & 2 & 4 & 5 \end{array}$$

Fall 2: $N = 6$ oder $N = 8$. Dann endet $5 \cdot N + u$ auf die Ziffer $u \leq 4 < N$, sodass sich hier keine Lösung ergibt.
Fall 3: $N = 5$. Dann wäre $N = F$, sodass hier keine Lösung existiert.
Fall 4: $N = 7$. Dann ist $5 \cdot N = 35$, also $u = 2$, woraus $S = 5 = F$ folgt, sodass es auch hier keine Lösung gibt.
Fall 5: $N = 9$. Dann ist $5 \cdot N = 45$, also $u = 4$, woraus der Widerspruch $S = 9 = N$ folgt.

Damit gibt es für das Kryptogramm nur die genau eine, bereits angegebene, Lösung.

Aufgabe 341034:
Ein Quadrat $ABCD$ sei in 25 kongruente Teilquadrate aufgeteilt.
Ist n eine positive ganze Zahl mit $n \leq 25$, so seien n verschiedene Farben gewählt, und von jeder dieser Farben seien 25 Blättchen von der Größe der Teilquadrate zur Verfügung gestellt.
Von diesen $n \cdot 25$ Blättchen sollen dann 25 ausgewählt und so auf das Quadrat $ABCD$ gelegt werden, dass jedes Teilquadrat von genau einem der ausgewählten Blättchen bedeckt wird.
Eine Zahl n werde genau dann eine „freundliche“ Zahl genannt, wenn für sie folgendes gilt:
Bei jeder Auswahl von 25 der $n \cdot 25$ Blättchen, bei der jede der n Farben mit mindestens einem Blättchen vertreten ist, kann man die Verteilung auf die Teilquadrate so vornehmen, dass das bedeckte Quadrat $ABCD$ als farbiges Muster symmetrisch bezüglich der Geraden durch A und C ist.
Ermitteln Sie unter den positiven ganzen Zahlen $n \leq 25$ alle „freundlichen“ Zahlen!

Lösung von cyrix:
Für jede symmetrische Belegung gilt, dass die 10 Teilquadrate oberhalb der Diagonalen AC jeweils die gleiche Farbe wie die 10 Teilquadrate unterhalb dieser Diagonalen haben müssen, während die Farben der 5 Diagonalfelder beliebig sind. Dies ist auch hinreichend. Aus einer Auswahl von 25 Blättchen lässt sich also genau dann keine zu AC symmetrische Belegung erzeugen, wenn sie keine 10 paarweise disjunkte Paare von gleichfarbigen Blättchen besitzt.

Seien $a_1, a_2, \ldots, a_n$ die Anzahl der Blättchen der Farbe $1, 2, \ldots, n$ unter den 25 ausgewählten, dann lassen sich aus diesen maximal

$$P := \left[\frac{a_1}{2}\right] + \left[\frac{a_2}{2}\right] + \cdots + \left[\frac{a_n}{2}\right]$$

solcher Paare bilden. Wegen $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 25$ ist $P = \frac{25-u}{2}$, wobei u die Anzahl der ungeraden Zahlen unter $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ist. (Dann ist, da 25 ungerade ist, auch u ungerade und somit P eine ganze Zahl.) Aus diesen Blättchen lässt sich also genau dann keine bezüglich AC symmetrische Belegung bilden, wenn es mehr als 5, also mindestens 7 ungerade Blättchenanzahlen unter $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gibt.

Dafür muss aber $n \geq 7$ sein. Dies bedeutet, dass alle $n \leq 6$ „freundlich“ sind. Ist jedoch $n = 7$, so kann man $a_1 = a_2 = \cdots = a_6 = 1$ und $a_7 = 19$, bzw. für $n > 7$ schließlich $a_1 = a_2 = \cdots = a_7 = 1$ (und Rest beliebig ≥ 1) auswählen, sodass bei dieser Wahl jeweils keine bezüglich AC symmetrischen Belegungen möglich sind. Also sind alle $7 \leq n \leq 25$ „unfreundlich“.

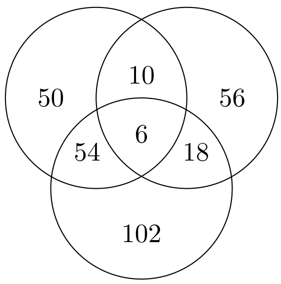
IV. Runde 4

Aufgabe 041046:
In den Klassen 5 bis 8 einer Schule gibt es 300 Schüler. Von ihnen lesen regelmäßig

- 120 Schüler die Zeitschrift „Technikus“
- 90 Schüler die Zeitschrift „Fröhlichsein und Singen“
- 180 Schüler die Zeitschrift „Die Trommel“
- 60 Schüler die Zeitschriften „Die Trommel“ und „Technikus“
- 16 Schüler die Zeitschriften „Technikus“ und „Fröhlichsein und Singen“
- 24 Schüler die Zeitschriften „Die Trommel“ und „Fröhlichsein und Singen“
- 6 Schüler alle drei genannten Zeitschriften.

I. a) Wieviel Schüler lesen genau eine dieser Zeitschriften regelmäßig?
b) Wieviel Schüler lesen keine dieser Zeitschriften regelmäßig? II. Lösen Sie die Aufgabe allgemein, indem Sie die Schülerzahl mit s bezeichnen und die übrigen angegebenen Zahlen der Reihe nach durch die Variablen a bis g ersetzen!

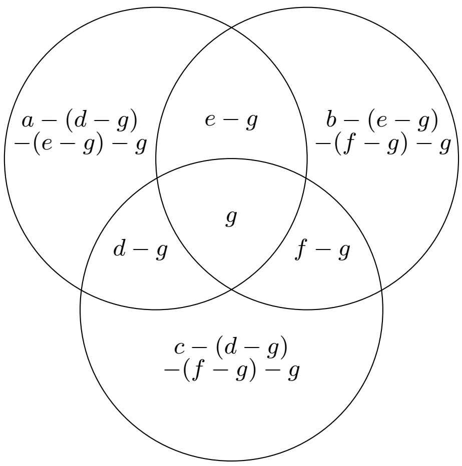
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



1)

Die Lösungen zu I) ergeben sich aus der Abbildung 1:

a) 208 Schüler lesen genau eine dieser Zeitschriften.
b) 296 Schüler lesen mindestens eine der Zeitschriften, 4 also keine.



2)

Die Lösungen zu II ergeben sich aus Abbildung 2:

x: Zahl der Schüler, die genau eine der Zeitschriften regelmäßig lesen.
y: Zahl der Schüler, die mindestens eine der Zeitschriften regelmäßig lesen.
z: Zahl der Schüler, die keine der Zeitschriften regelmäßig lesen.

$$x = a + b + c - 2(d + e + f) + 3g$$
$$y = a + b + c - (d + e + f) + g$$
$$z = a + d + e + f - (a + b + c + g)$$

Aufgabe 081044:
Im Innern eines Quadrates $ABCD$ mit der Seitenlänge a seien 288 Punkte gelegen. Es soll eine Anzahl von Parallelen zu AB derart gezogen werden, dass auf ihnen durch die Strecken AD und BC jeweils (zu AB parallele) Strecken abgeschnitten werden. Ferner soll von jedem der 288 Punkte auf genau eine der Parallelen das Lot gefällt werden.
Man beweise: Bei jeder Verteilung der 288 Punkte im Innern des Quadrates ist es möglich, die Parallelen und die Lote so zu wählen, dass die Summe L der Längen aller dieser Parallelstrecken und aller dieser Lote kleiner als $24a$ wird.

Lösung von cyrix:
Zeichnen wir die zwölf Parallelstrecken im Abstand $\frac{1}{24}a$, $\frac{3}{24}a$, $\frac{5}{24}a$, ..., $\frac{23}{24}$ zu AB in das Quadrat ein, so liegt jeder Punkt im Inneren (oder auf dem Rand) des Quadrats in einer Entfernung von höchstens $\frac{1}{24}a$ zur nächsten dieser Parallellinie, sodass das Lot des Punktes auf diese Parallellinie höchstens diese Länge besitzt.
Also ist die Summe der Länge aller dieser Lote höchstens $288 \cdot \frac{1}{24}a = 12a$. Hinzu kommen die Streckenlängen der Parallelstrecken, welche jeweils a lang sind, sodass für diese Verteilung $L \leq 24a$ folgt.

Liegt mindestens einer der 288 Punkte nicht auf einer Parallelen zu AB im Abstand von $\frac{2k}{24}$ mit einer natürlichen Zahl $1 \leq k \leq 11$, so ist sein Lot zu seiner nächstgelegenen eingezeichneten Parallelstrecke echt kleiner als $\frac{1}{24}a$, sodass für diese Verteilung sogar $L < 24a$ folgt. (Der Punkt darf ja laut Aufgabenstellung nicht auf dem Rand liegen, sodass die Fälle $k = 0$ und $k = 12$ auch nicht möglich sind.)

Andernfalls liegen alle 288 Punkte auf einer der elf Parallelen zu AB im Abstand von $\frac{2k}{24}$ mit $1 \leq k \leq 11$, sodass man anstatt der oben genannten nun diese 11 Parallelstrecken einzeichnen kann. Die Lote der Punkte auf die Strecke, auf der sie liegen, sind jeweils 0 lang, sodass in diesem Fall L nur aus den Längen der Parallelstrecken besteht, also man in diesem Fall sogar $L = 11a < 24a$ erreichen kann.

Aufgabe 101041:
Bilden Sie alle Mengen von fünf ein- oder zweistelligen Primzahlen derart, dass in jeder dieser Mengen jede der Ziffern 1 bis 9 genau einmal auftritt!

Lösung von cyrix:
Sei M eine solche Menge. Wir geben für einige Ziffern alle ein- und zweistelligen Primzahlen an, in denen sie als Ziffer enthalten sind:

$$2:\quad 2,\, 23,\, 29 \;\big|\; 4:\quad 41,\, 43,\, 47 \;\big|\; 5:\quad 5,\, 53,\, 59 \;\big|\; 6:\quad 61,\, 67 \;\big|\; 8:\quad 83,\, 89$$

Da die fünf Primzahlen insgesamt 9 Ziffern besitzen sollen, ist unter ihnen genau eine einstellige und sind die übrigen vier zweistellig.

Fall 1: Es ist $2 \in M$. Dann muss die 5 in einer zweistelligen Primzahl vorkommen.

Fall 1.1: $53 \in M$. Dann muss auch $89 \in M$ sein, da sonst die Ziffer 8 nicht mehr vorkommen kann.
Fall 1.1.1: $61 \in M$. Dann muss auch, um die Ziffer 4 abzudecken, $47 \in M$ sein. Wir erhalten $M_1 = \{2, 53, 89, 61, 47\}$.
Fall 1.1.2: $67 \in M$. Dann muss zur Abdeckung der Ziffer 4 auch $41 \in M$ sein, sodass wir $M_2 = \{2, 53, 89, 67, 41\}$ erhalten.

Fall 1.2: $59 \in M$. Dann folgt zur Abdeckung der 8, dass $83 \in M$.
Fall 1.2.1: $61 \in M$. Zur Abdeckung der 4 muss dann auch $47 \in M$ gelten.
Wir erhalten $M_3 = \{2, 59, 83, 61, 47\}$.
Fall 1.2.2.: $67 \in M$. Für die Ziffer 4 muss dann auch $41 \in M$ sein, sodass $M_4 = \{2, 59, 83, 67, 41\}$ folgt.

Fall 2: Es ist $23 \in M$. Dann folgt zur Abdeckung der Ziffer 8 auch $89 \in M$. Es folgt, dass die 5 nur allein stehen kann, also $5 \in M$. Zur Abdeckung der Ziffern 4 und 6 gibt es nun wieder zwei Möglichkeiten, sodass wir die beiden Mengen $M_5 = \{23, 89, 5, 61, 47\}$ und $M_6 = \{23, 89, 5, 67, 41\}$ erhalten.

Fall 3: Es ist $29 \in M$. Dann folgt analog dem zweiten Fall, dass $83 \in M$ und $5 \in M$. Wieder ergeben sich die gleichen zwei Möglichkeiten zur Abdeckung der Ziffern 4 und 6, sodass wir abschließend die beiden Mengen $M_7 = \{29, 83, 5, 61, 47\}$ und $M_8 = \{29, 83, 5, 67, 41\}$ erhalten.

Die Fallunterscheidung ist vollständig, sodass es genau diese acht Mengen gibt, die der Aufgabenstellung genügen.

Aufgabe 121043B:
Dirk und Jens spielen ein Spiel mit folgenden Regeln:
Es werden genau 7 Hölzchen hingelegt. Abwechselnd machen die Spieler jeweils einen „Zug“. Ein „Zug“ besteht aus dem Wegnehmen von einem, zwei oder drei Hölzchen.
Dabei darf keiner der Spieler den gleichen „Zug“ zweimal hintereinander ausführen. Wer das letzte Hölzchen wegnimmt, hat gewonnen.
Das Spiel endet unentschieden, wenn zwar noch Hölzchen vorhanden sind, der am „Zug“ befindliche Spieler aber keinen „Zug“ nach den Spielregeln ausführen kann.
Kann bei diesem Spiel einer der beiden Spieler, bei jeder Spielmöglichkeit des anderen, den Gewinn erzwingen?

Lösung von cyrix:
Nein, kein Spieler kann den Sieg erzwingen. Dies wird im Folgenden bewiesen:
Sei o. B. d. A. Dirk der anziehende Spieler.

a) Dirk kann erzwingen, dass er nicht verliert:
Indem Dirk in seinem ersten Zug drei Hölzchen nimmt, verbleiben Jens noch vier, sodass er nicht direkt gewinnen kann.

Wählt Jens nun zwei oder drei Hölzchen, verbleiben für Dirks zweiten Zug noch höchstens zwei, sodass er durch deren Wegnahme gewinnen würde. Also hat Jens nur die Möglichkeit, Dirks Sieg zu verhindern, indem er in seinem ersten Zug genau ein Hölzchen zieht. Dann hat Dirk für seinen zweiten Zug genau drei Hölzchen vor sich liegen, die er aber nicht alle gleichzeitig nehmen kann, da er im vorherigen Zug drei Hölzchen genommen hatte.

Würde Dirk nun ein Hölzchen ziehen, verblieben für Jens zwei, die dieser auch nehmen und damit gewinnen kann. Also muss Dirk zwei der letzten drei Hölzchen wegnehmen, sodass Jens sich nur noch einem einzigen Hölzchen gegenüber sieht, was er aber nicht nehmen kann, da er im letzten Zug auch nur ein einzelnes gezogen hatte.

Dirk kann also durch die Wahl dieses Startzugs (und der weiteren Züge wie hier angegeben) verhindern, dass er verliert und zumindest ein Unentschieden erzwingen.

b) Jens kann erzwingen, dass er nicht verliert:
Wenn Dirk im ersten Zug drei Hölzchen wegnimmt, kann Jens – wie eben gesehen – auch verhindern, dass er verliert, und mindestens ein Unentschieden erzwingen. Nimmt Dirk dagegen im ersten Zug zwei Hölzchen, so verbleiben für Jens' ersten Zug noch fünf. Indem er nun ein Hölzchen zieht, kann er auch in diesem Fall erzwingen, dass er nicht verliert:
Für Dirks zweiten Zug liegen noch vier Hölzchen da. Nimmt dieser nur ein Hölzchen, kann Dirk im zweiten die verbleibenden drei wegnehmen und gewinnen. Also muss Dirk in seinem zweiten Zug drei Hölzchen (zwei ist aufgrund seines ersten Zugs verboten) wegnehmen, sodass Jens nur eines verbleibt, was er aber nicht nehmen kann. Das Spiel endet hier also unentschieden.

Abschließend ist noch zu betrachten, wie Jens agieren sollte, wenn Dirk in seinem ersten Zug nur ein Hölzchen genommen hat. Dann kann Jens in seinem ersten Zug auch ein Hölzchen ziehen, sodass für Dirks zweiten Zug noch genau fünf Hölzchen daliegen. Dirk muss nun zwei oder drei Hölzchen ziehen (da eines aufgrund seines ersten Zugs verboten ist), sodass drei oder zwei verbleiben, die aber Jens in jedem Fall dann in seinem zweiten Zug nehmen und damit gewinnen kann.

Also kann in jedem Fall, egal wie Dirk zieht, Jens durch seine Spielweise erreichen, dass er nicht verliert. Da beide Spieler erreichen können, dass sie nicht verlieren, kann keiner den Sieg erzwingen.

Aufgabe 121046:
Zwei Karawanen brachen gleichzeitig von einer Oase A auf und marschierten auf demselben Wege über B und C nach D.
Die erste Karawane marschierte jeweils drei Tage hintereinander und legte dann einen Ruhetag ein, die zweite Karawane dagegen marschierte jeweils zwei Tage hintereinander und legte dann zwei Ruhetage ein.
Beide Karawanen brachen an Marschtagen zur gleichen Zeit auf und waren jeweils die gleiche Anzahl von Stunden unterwegs. Sie erreichten die Ziele B, C, D jeweils am Ende dieser Stunden eines Marschtages. Während ihrer Marschtage behielt jede der Karawanen stets dieselbe Geschwindigkeit bei.
Die erste Karawane brauchte für den Weg von A nach C einschließlich der Ruhetage doppelt soviel und für den Weg von A nach D dreimal soviel Tage wie für den Weg von A nach B einschließlich der Ruhetage.
Beide Karawanen trafen am Ende eines Marschtages gleichzeitig in B ein.
Ermitteln Sie, ob die Karawanen auch gleichzeitig in D eintrafen! Wenn nicht, dann stellen Sie fest, welche der beiden Karawanen zuerst in D anlangte!

Lösung von cyrix:
Es sei $n = 4q + r$ mit $n,q,r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ und $0 \leq r < 4$ die Anzahl der Tage, die beide Karawanen von A nach B unterwegs sind. Da die erste Karawane in C nicht nach einer durch 4 teilbaren Tagesanzahl ankommt (das wäre ja einer ihrer Ruhetage), kann n nicht gerade sein (da sie nach $2n$ Tagen C erreicht). Also ist r entweder 1 oder 3.
Letzteres kann aber nicht sein, da die zweite Karawane an allen solch darstellbaren Tagen einen Ruhetag einlegt, also dann nicht gleichzeitig mit der ersten Karawane in B hätte eintreffen können. Es gibt also eine nicht-negative ganze Zahl q, sodass beide Karawanen nach genau $4q + 1$ Tagen den Ort B erreichen.

Die erste Karawane ist also nach $12q + 3$ Tagen am Ziel angekommen und ist in dieser Zeit an $9q + 3$ Tagen marschiert; davon an $3q + 1$ Tagen von A nach B, sodass die Gesamtstrecke von A nach D genau drei mal solang ist wie die Teilstrecke von A nach B.
Dieses Teilstück hat die zweite Karawane mit $2q + 1$ Marschtagen bewältigt, sodass sie für die Gesamtstrecke von A nach D insgesamt $6q + 3$ Marschtage benötigt. Dabei ist der $6q + 3$-te Marschtag genau der

$2 \cdot (6q + 2) + 1 = 12q + 5$-te Tag nach Abreise in A, sodass diese zweite Karawane genau zwei Tage nach der ersten in D eintrifft.

Aufgabe 141043B:
Sechs Schüler eines Mathematikzirkels machen mit dem folgenden Ratespiel ein kleines Logiktraining. Peter, Klaus, Monika, Ilona und Uwe verstecken fünf Gegenstände:
Zirkel, Radiergummi, Lineal, Bleistift und Füller so bei sich, dass jeder genau einen dieser Gegenstände hat. Dann bekommt Dirk fünf Aussagen mitgeteilt, unter denen, wie ihm ebenfalls gesagt wird, genau zwei falsch sind. Die Aussagen lauten:

Uwe: „Wenn Peter den Zirkel nicht hat, dann hat Klaus das Lineal nicht.“
Monika: „Uwe hat soeben eine wahre Aussage gemacht.“
Peter: „Ich habe den Zirkel, oder Klaus hat das Lineal nicht.“
Klaus: „Ich habe das Lineal nicht, oder Uwe hat den Bleistift.“
Ilona: „Ich habe den Füller, oder ich habe den Bleistift.“

Man untersuche, ob sich nach diesen Regeln alle Verstecke der Gegenstände eindeutig ermitteln lassen! Wie lauten, falls dies möglich ist, die Verstecke?

Lösung von Nuramon:
Die Aussage von Uwe ist genau dann wahr, wenn die Aussage von Monika wahr ist. Ebenso sind die Aussagen von Uwe und Peter logisch äquivalent.
Da genau zwei der fünf Aussagen falsch sind, müssen also Uwe, Monika und Peter jeweils die Wahrheit gesagt haben und es müssen Klaus und Ilona gelogen haben.

Da Klaus lügt, muss Klaus das Lineal haben.
Nach Peters Aussage muss somit Peter den Zirkel haben.

Schüler	Uwe	Monika	Peter	Klaus	Ilona
hat	?	?	Zirkel	Lineal	?

Uwe bzw. Ilona können den Bleistift nicht haben, denn sonst hätten Klaus bzw. Ilona die Wahrheit gesagt. Also muss Monika den Bleistift haben.

Schüler	Uwe	Monika	Peter	Klaus	Ilona
hat	?	Bleistift	Zirkel	Lineal	?

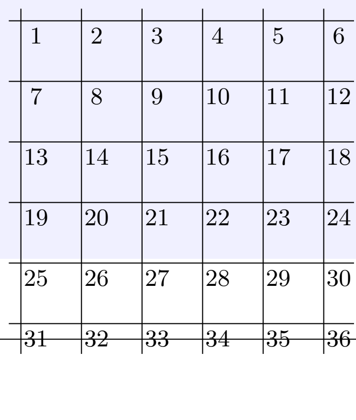
Da Ilona lügt, kann sie nicht den Füller haben. Also muss Uwe den Füller haben.

Schüler	Uwe	Monika	Peter	Klaus	Ilona
hat	Füller	Bleistift	Zirkel	Lineal	?

Somit kann nur Ilona den Radiergummi haben.
Also lassen sich alle Verstecke ermitteln. Sie lauten

Schüler	Uwe	Monika	Peter	Klaus	Ilona
hat	Füller	Bleistift	Zirkel	Lineal	Radiergummi

Aufgabe 151042:
In einem vorgegebenen quadratischen Gitternetz sollen die in der Abbildung dargestellten 36 Schnittpunkte der Gitterlinien durch einen geschlossenen Streckenzug derart verbunden werden, dass
(1) jede Teilstrecke des Streckenzuges entweder waagerecht oder senkrecht verläuft,
(2) beim Durchlaufen des Streckenzuges jeder der 36 Punkte genau einmal erreicht wird und
(3) die entstehende Figur mindestens zwei Symmetrieachsen besitzt, die gleichzeitig auch Symmetrieachsen des Quadrates mit den Eckpunkten 1, 6, 36, 31 sind.
Zeichnen Sie möglichst viele derartige Streckenzüge, die untereinander nicht kongruent sind, und beweisen Sie, dass es keine weiteren mit den geforderten Bedingungen gibt!



Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Ein Quadrat besitzt genau vier Symmetrieachsen. Zwei enthalten Diagonalen und zwei gehen durch die Mittelpunkte gegenüberliegender Seiten.
Im vorliegenden Fall liegen auf den Symmetrieachsen die die Diagonalen enthalten, jeweils 6 Gitterpunkte.
Hätte ein Streckenzug s mit den Eigenschaften (1), (2), (3) eine die Diagonale d enthaltende Symmetrieachse, so gäbe es in s eine Teil-Streckenzug t von einem der sechs Punkte auf d zu einem anderen, wobei t außer seinen Endpunkten keinen weiteren Punkt auf d enthielte.
Dann käme in s auch der durch Spiegelung an d aus t entstehende Streckenzug t' vor. Dieser würde aber mit t zusammen bereits einen geschlossenen Streckenzug bilde, ohne dass alle gegebenen Punkte auf ihm liegen.
Deshalb scheiden die die Diagonalen enthaltenden Geraden als Symmetrieachsen aus.

Die restlichen zwei Achsen teilen nun das Quadrat in vier Teilquadrate.
Angenommen, ein Streckenzug s mit den Eigenschaften (1), (2), (3) könnte, nachdem er einmal (aus einem anderen Teilquadrat kommend) in das linke obere Teilquadrat q (Abbildung 1) eingetreten ist und dort einen Teil-Streckenzug t durchlaufen hat, q wieder verlassen, ohne alle 9 Punkte von q durchlaufen zu haben.

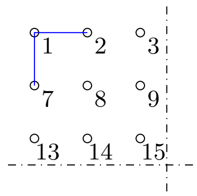


Abbildung 1

Dann enthielte s auch den durch Spiegelung an der einen Symmetrieachse aus t entstehenden Streckenzug T' sowie die durch Spiegelung an der anderen Symmetrieachse aus t, T' entstehenden Streckenzüge t'', t'''.
Die Streckenzüge t, t', t'', t''' würden bereits einen geschlossenen Streckenzug bilden, der nicht alle gegebenen Punkte enthielte. Daher genügt es, diejenigen Teil-Streckenzüge zu untersuchen, die alle 9 Punkte von q durchlaufen. Der gesamte Streckenzug s liegt aus Symmetriegründen dann fest und hat die geforderten Eigenschaften.
Der Streckenzug von 2 nach 1 und von da nach 7 kann bereit eingezeichnet werden, da der Punkt 1 nicht anders erreichbar ist.

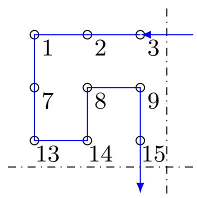


Abbildung 2

Fall 1:
Der Streckenzug komme vom rechten Quadrat und erreiche den Punkt 3, verlaufe zu 2, 1, 7 und von dort weiter zum Punkt 13.
Dann liegt der restliche Verlauf des Streckenzuges eindeutig fest, da vom letzten der neun Punkte das linke untere Quadrat erreicht werden muss (Abbildung 2).

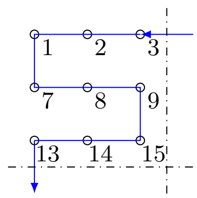


Abbildung 3

Fall 2:
Der Streckenzug verlaufe wie im Fall 1 bis zum Punkt 7 und weiter zum Punkt 8. Von dort an liegt der restliche Streckenzug eindeutig fest (Abbildung 3)

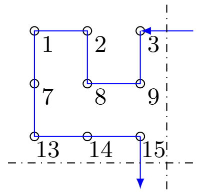


Abbildung 4

Fall 3:
Der Streckenzug verlaufe vom Punkt 3 zum Punkt 9. Eine Verlängerung zum Punkt 15 würde den in Abbildung 3 gezeichneten, an einer Diagonalen gespiegelten Streckenzug ergeben. Bei einer Weiterführung von Punkt 9 zum Punkt 8 ist der übrige Verlauf eindeutig festgelegt. (Abbildung 4)

Damit sind alle Möglichkeiten, mit dem Punkt 3 zu beginnen, ausgeschöpft. Der Streckenzug beginne im Punkt 9.
Bei der Weiterführung über die Punkte 8 oder 15 wäre der Punkt 3 nicht erreichbar, wenn der Streckenzug zum linken unteren Quadrat weitergeführt werden soll.

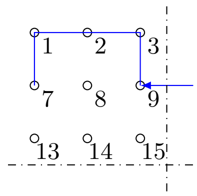


Abbildung 5

Fall 4:
Verlaufe der Streckenzug also über die Punkte 9, 3, 2, 1 und 7 (Abbildung 5). Bei der Weiterführung nach 13 könnte 8 nicht mehr einbezogen werden. Bei der Weiterführung nach 8 würde 13 oder 15 unerreichbar sein,
Es gibt in diesem Falle also keinen derartigen Streckenzug.

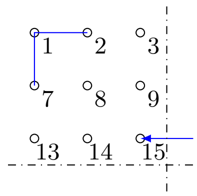
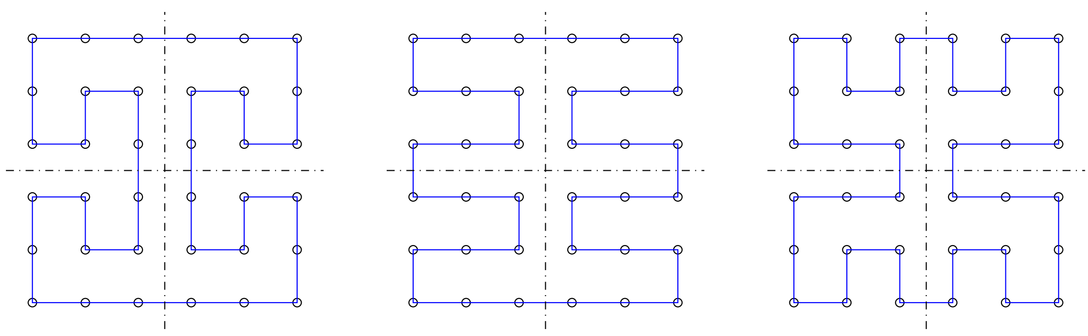


Abbildung 6

Fall 5:
Der Streckenzug beginne im Punkt 15. Bei der Weiterführung nach 9 ergibt sich die gespiegelte Abbildung 4. Bei der Weiterführung nach 14 ergibt sich gespiegelte Abbildung 1. Andere Möglichkeiten, den Streckenzug von Punkt 15 aus weiterzuführen, gibt es nicht.

Damit ist gezeigt, dass es drei und nicht mehr als drei Streckenzüge der geforderten Art gibt. Die geschlossenen Streckenzüge haben folgende Form:



Aufgabe 161043A:
Bei einem sportlichen Dreikampf ergab sich in jeder der drei Sportarten eindeutig eine Reihenfolge der Sportler (gekennzeichnet durch Platzziffern 1, 2, 3, ...).
In jeder der drei Sportarten wurden für die ersten fünf Plätze Punkte so vergeben, dass die Punktzahl (natürliche Zahl > 0) mit wachsender Platzziffer immer kleiner wurde und vom 2. Platz an mit wachsender Platzziffer die Punktdifferenz zwischen benachbarten Plätzen stets konstant war.
Diese Punktbewertung war für jede der drei Sportarten die gleiche.
Nach zwei Wettkämpfen ergab sich, dass die ersten drei Plätze in jeder dieser beiden Sportarten stets von den Sportlern A, B, C errungen wurden (nicht notwendig in dieser Reihenfolge).
Jeder der Sportler A und B hatte nach zwei Wettkämpfen 17 Punkte, und der Sportler C hatte nach zwei Wettkämpfen 16 Punkte erreicht.
In der Gesamtwertung des Dreikampfes (Summe der drei erreichten Punktzahlen) siegte der Sportler D. Zweiter wurde der Sportler C.
Man ermittle in den einzelnen drei Sportarten für die Sportler C und D diejenigen Platzziffern, die diese Bedingungen erfüllen!

Lösung von OlgaBarati:
Nach 2 Wettkämpfen haben die Sportler A,B,C mit den jeweils errungenen Plätzen von 1 bis 3 insgesamt 50 Punkte (17/17/16) erreicht.
Unter den Voraussetzungen kann die Aufteilung der Platzierungen nur folgendermaßen aussehen: A und B die Plätze 1./3. und 3./1. und für C zwei mal der 2. Platz. Sei $x \in \mathbb{N}$ die Punktzahl für Platz 1 und mit C=16: $(x - k) = 8$.

$$2x + 2(x-k) + 2(x-(k+l)) = 50 \qquad ; \qquad 2x + 16 + 16 - 2l = 50$$

$$\Longrightarrow x - l = 9 \qquad \Longrightarrow l = k - 1 \quad (1)$$

Die Summe P bildet die Gesamtpunkte der drei Wettkämpfe bestehend aus den 75 Punkten für die ersten drei Plätze plus der Punkte für die Plätze vier und fünf:

$$P = 75 + 3(x-(k+2l)) + 3(x-(k+3l) \qquad \Longrightarrow P = 123 - 15l \quad (2)$$

Die Punkte pro Wettkampf: $P/3 = 41 - 5l$ bzw. für die Plätze vier und fünf $P_{4;5}/3 = 41 - 25 - 5l = 16 - 5l$
Nun lässt sich leicht abschätzen das $l < 3$ sein muss und nur die Werte 1 oder 2 annehmen kann.
Sportler D muss für den Sieg mehr als 18 Punkte erreichen damit C mit mindestens 18 Punkten Platz 2 erreicht.
Die Punkte für D: $D_p = 2(x-(k+2l)) + x \geq 19$ Mit $x = 9 + l$ und $k = l + 1$

$$D_p = 2(9 + l - (l + 1 + 2l)) + 9 + l = 25 - 3l$$

Für $l = 1$ ergibt sich für C: $\{2; 2; 5\}$ und für D: $\{4; 4; 1\}$
Für $l = 2$ ergibt sich ebenfalls für C: $\{2; 2; 5\}$ und für D: $\{4; 4; 1\}$
Punkteverteilung $l = 1$: 10,8,7,6,5 und $l = 2$: 11,8,6,4,2

Aufgabe 211044:
Mehrere Personen spielen ein Spiel mit drei Würfeln, auf deren Seitenflächen anstelle der üblichen Zahlen Buchstaben stehen. Auf jedem Feld steht genau ein Buchstabe; jeder Buchstabe kommt nur einmal vor.
Nach jedem Wurf muss der Spieler versuchen, aus den drei Buchstaben, die oben liegen, ein Wort zu bilden.
Untersuchen Sie, ob eine Verteilung von Buchstaben auf die Würfel derart möglich ist, dass mit den so beschrifteten Würfeln im Laufe des Spiels auf diese Weise die Wörter

$$AUF, BEI, BEN, CUP, GER, ICH, IDA, IST, MAN, NOT, TOR, ZUG$$

gebildet werden können!
Wenn dies der Fall ist, so untersuchen Sie, ob die Verteilung der Buchstaben auf die Würfel aus den

genannten Angaben eindeutig hervorgeht, d. h., ob für jeden der drei Würfel (bis auf die Reihenfolge) eindeutig folgt, welche Buchstaben auf ihm stehen! Ist auch dies der Fall, so ermitteln Sie diese Verteilung!

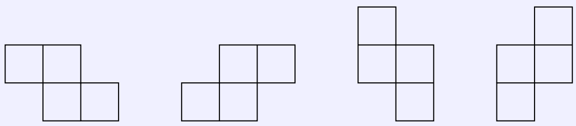
Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:
Da die Wörter BEI,BEN gebildet wurden, liegen I,N auf demselben Würfel, ebenso R wegen der Wörter TOR,NOT. Die Buchstaben A,B,C,D,E,G,H,M,O,S,T treten in Wörtern mit I,N,R auf. Daher bleiben für den ersten Würfel nur die Buchstaben F,P,U,Z.

Wegen der Wörter ZUG,CUP liegt U nicht auf diesem und wir haben die Belegung **I**,**N**,**R**,**F**,**P**,**Z**. Damit bleiben die folgenden Kombinationen für die anderen beiden Würfel übrig:

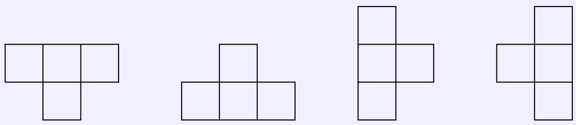
$$AU, BE, CU, GE, CH, DA, ST, MA, OT, UG.$$

Aus den Wörtern mit U folgt, dass A,C,G auf demselben Würfel liegen. Weitere Vergleiche ergeben, dass U,E,H,D,M auf dem zweiten und A,C,G,B auf dem dritte Würfel liegen.
Aus den beiden Wörtern ST,OT folgt dann, dass diese eindeutig zu **U**,**E**,**H**,**D**,**M**,**T** und **A**,**C**,**G**,**B**,**S**,**O** ergänzt werden.

Aufgabe 241046:
a) Es ist zu entscheiden, ob es möglich ist, die Felder des 8×8 Schachbrettes derart mit den Zahlen $1, 2, \ldots, 64$ zu nummerieren, dass für jede Teilfigur des Schachbrettes, die von der folgenden Form ist,



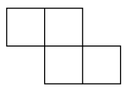
die Summe der vier Zahlen in den Teilfiguren durch vier teilbar ist.
b) Dieselbe Aufgabe ist für



zu lösen.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) es genügt, die Aufgabe für die Reste modulo 4 der Zahlen $1, 2, \ldots, 64$ zu lösen, von denen es 16 in jeder Klasse gibt. Indem wir die Reste gemäß der Tabelle

1	0	3	2	1	0	3	2
2	3	0	1	2	3	0	1
3	2	1	0	3	2	1	0
0	1	2	3	0	1	2	3
1	0	3	2	1	0	3	2
2	3	0	1	2	3	0	1
3	2	1	0	3	2	1	0
0	1	2	3	0	1	2	3

verteilen, sehen wir, dass die Bedingung erfüllt ist. Für die Teilfigur  können die beiden oberen Felder mit (3,0), (0,1), (1,2), (2,3), (3,2), (2,1), (1,0) bzw. (0,3) belegt sein. Dann sind die beiden unteren mit (1,0), (0,3), (3,2), (2,1), (1,2), (2,3), (3,0) bzw. (0,1) belegt und 4 teilt die Summe.

Analog diskutiert man die anderen Teile oder führt entsprechende Symmetriebetrachtungen an.

x	y	z
a	g	b
c	u	d
e	f	h

b) Angenommen die verlangte Nummerierung existiert.
Da das Schachbrett nur 28 Randfelder hat und auf jeweils 32 Feldern gerade bzw. ungerade Zahlen eingetragen sind, muss es zwei benachbarte Felder geben, von denen keines auf dem Rand liegt und eines eine gerade Zahl g, das andere Feld eine ungerade Zahl u enthält.
Wir betrachten die Teilfiguren:
Damit lassen sich folgende Aussagen treffen:

(1): Wegen
$$\begin{array}{ccc} a & g & b \\ & u & \end{array}$$
gilt $a \not\equiv b \pmod 2$.

(2): Wegen
$$\begin{array}{cc} & y \\ a & g \\ & u \end{array}$$
gilt $a \not\equiv y \pmod 2$.

(3): Wegen
$$\begin{array}{cc} y & \\ g & b \\ u & \end{array}$$
gilt $b \not\equiv y \pmod 2$.

Die Beziehungen (1), (2), (3) liefern einen Widerspruch. Folglich existiert die verlangte Nummerierung nicht.

Aufgabe 261043B:
a) Beweisen Sie, dass fünf paarweise verschiedene reelle Zahlen existieren, mit denen die folgende Aussage gilt!
Für jede Auswahl von drei der fünf Zahlen existiert ein Dreieck, dessen Seitenlängen die drei ausgewählten Zahlen als Maßzahlen haben (wobei zum Messen aller drei Seitenlängen dieselbe Maßeinheit benutzt wird).
b) Ermitteln Sie, wenn fünf derartige Zahlen vorliegen, wie viele paarweise nicht kongruente Dreiecke insgesamt sich aus diesen fünf Zahlen auf die in a) genannte Art gewinnen lassen!
c) Beweisen Sie, dass stets dann, wenn fünf derartige Zahlen vorliegen, mindestens eines der genannten Dreiecke spitzwinklig ist!

Lösung von cyrix:
a) Notwendig und hinreichend für die Konstruierbarkeit eines Dreiecks aus drei Seitenlängen ist, dass diese drei positiv sind und die Dreiecksungleichung erfüllen, also die Summe von je zwei dieser drei Längen größer ist als die dritte. Ist dabei die Summe der beiden kleineren Längen größer als die größte, dann folgen die anderen beiden Ungleichungen automatisch.

Seien nun $s_1 < s_2 < s_3 < s_4 < s_5$ die fünf paarweise verschiedenen reellen Zahlen. Dann lässt sich aus je drei von diesen fünf genau dann ein Dreieck konstruieren, wenn $0 < s_1$ und $s_1 + s_2 > s_5$ gilt. Alle anderen Ungleichungen folgen dann direkt.
Offensichtlich gibt es solche reellen Zahlen, z. B. $s_i := 3 + i$ für $1 \leq i \leq 5$.

b) Da sich zwei Auswahlen von je drei dieser Streckenlängen immer in mindestens einer Streckenlänge unterscheiden, lassen sich genau so viele paarweise inkongruente Dreiecke aus diesen Streckenlängen konstruieren, wie es Auswahlen von drei verschiedenen Elementen aus einer fünf elementigen Menge ohne Beachtung der Reihenfolge gibt, also $\binom{5}{3} = \binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$ Stück.

c) Ein Dreieck ist genau dann spitzwinklig, wenn sein größter Innenwinkel kleiner als 90°, dessen Kosinus also positiv ist. Nach dem Kosinussatz ist dies genau dann der Fall, wenn das Quadrat der größten

Seitenlänge kleiner ist als die Summe der Quadrate der beiden anderen Seitenlängen.

Wir nehmen indirekt an, es gäbe reelle Zahlen $0 < s_1 < s_2 < s_3 < s_4 < s_5$ mit $s_1 + s_2 > s_5$ (sodass die Bedingung aus Aufgabenteil a) erfüllt ist), aus denen sich kein spitzwinkliges Dreieck bilden ließe.
Dann sind insbesondere die Dreiecke mit den Seitenlängen s_1,s_2,s_3, s_2,s_3,s_4 sowie s_3,s_4,s_5 nicht spitzwinklig, sodass

$$s_1^2 + s_2^2 \leq s_3^2 \quad , \quad s_2^2 + s_3^2 \leq s_4^2 \quad \text{und} \quad s_3^2 + s_4^2 \leq s_5^2$$

gilt. Einsetzen liefert

$$s_5^2 \geq s_4^2 + s_3^2 \geq (s_3^2 + s_2^2) + s_3^2 = 2s_3^2 + s_2^2 \geq 2(s_2^2 + s_1^2) + s_2^2 = 2s_1^2 + 3s_2^2$$

Mit $s_1 + s_2 > s_5$ folgt also

$$s_1^2 + 2s_1s_2 + s_2^2 = (s_1 + s_2)^2 > s_5^2 \geq 2s_1^2 + 3s_2^2$$

bzw. $0 > s_1^2 - 2s_1s_2 + 2s_2^2 = (s_2 - s_1)^2 + s_2^2$, was offensichtlich ein Widerspruch ist. Damit war die Annahme, es gäbe kein spitzwinkliges Dreieck falsch und somit ist die Existenz eines solchen bewiesen, $\square$.

Aufgabe 281043B:
Über 13 sonst beliebige Punkte in einer Ebene werde vorausgesetzt, dass sich unter je drei dieser 13 Punkte stets zwei befinden, deren Abstand voneinander kleiner als 1 cm ist.
a) Man beweise, dass aus dieser Voraussetzung stets folgt:
Es gibt einen Kreis vom Radius 1 cm, dessen Inneres sieben der 13 Punkte enthält. b) Man untersuche, ob aus dieser Voraussetzung stets folgt:
Es gibt einen Kreis vom Radius 1 cm, dessen Inneres acht der 13 Punkte enthält.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wir lösen folgende Verallgemeinerung der Aufgabenstellung:
Es sei n, $n \geq 1$, eine gegebene natürliche Zahl. Über $2n + 1$ sonst beliebige Punkte in der Ebene werde vorausgesetzt, dass sich unter je drei dieser $2n+1$ Punkte stets zwei befinden, deren Abstand voneinander kleiner als 1 cm ist.

a) Man beweise, dass aus dieser Voraussetzung folgt:
Es gibt einen Kreis vom Radius 1 cm, dessen Inneres $n + 1$ der $2n + 1$ Punkte enthält.
b) Man untersuche, ob aus dieser Voraussetzung stets folgt:
Es gibt einen Kreis vom Radius 1 cm, dessen Inneres $n + 2$ der $2n + 1$ Punkte enthält.

Lösung dieser Verallgemeinerung:
a) Es sei k der Kreis um einen (beliebig gewählten) der $2n + 1$ Punkte mit dem Radius 1 cm. Für die Lage der anderen $2n$ Punkte gibt es nun folgende Möglichkeiten:

1. Fall: Der Kreis k enthält in seinem Inneren noch n weitere der $2n + 1$ Punkte. Dann ist ein ein Kreis der behaupteten Art.
2. Fall: Der Kreis k enthält in seinem Inneren höchstens $n - 1$ weitere der $2n + 1$ Punkte. Dann gibt es auf dem Rand oder außerhalb von k noch $n + 1$ der $2n + 1$ Punkte. Einer von ihnen sei P. Für P und jeder der n anderen dieser $n + 1$ Punkte gilt:
Sie haben beide vom Mittelpunkt des Kreises k Abstände nicht kleiner als 1 cm; nach Voraussetzung haben sie also voneinander einen Abstand kleiner als 1 cm. Folglich enthält das Innere des Kreises c um P mit dem Radius 1 cm auch jeden dieser n anderen Punkte, d. h., c ist ein Kreis der behaupteten Art.

b) Aus der Voraussetzung folgt nicht stets die Existenz eines Kreises der in b) genannten Art. Um dies zu beweisen, genügt es, ein Beispiel für $2n + 1$ Punkte in einer Ebene so anzugeben, dass sie zwar die

Voraussetzungen erfüllen, dass aber kein Kreis vom Radius 1 cm existiert, dessen Inneres $n+2$ der $2n+1$ Punkte enthält. Ein solches Beispiel kann man folgendermaßen bilden:

Man wähle zwei Kreise k_1 und k_2 mit dem Radius $\frac{1}{2}$ cm, deren Mittelpunkte M_1, M_2 voneinander den Abstand l, $l > 3$ cm, haben.
Im Inneren von k_1 wähle man $n+1$ Punkte, im Inneren von k_2 n Punkte. Unter je drei dieser $2n+1$ Punkte befinden sich dann stets zwei, die im Inneren desselben der beiden Kreise k_1, k_2 liegen und daher einen Abstand kleiner als 1 cm voneinander haben.
Jeder Kreis c aber, dessen Inneres $n+2$ der $2n+1$ Punkte enthält, muss unter diesen $n+2$ Punkte sowohl einen inneren Punkt P_1 von $k:1$ als auch einen inneren Punkt P_2 von k_2 enthalten. Nach der Dreiecksungleichung folgt, dass

$$lcm = M_1M_2 \leq M_1P_1 + P_1P_2 + P_2M_2 < \frac{1}{2} + P_1P_2 + \frac{1}{2}cm$$

also $P_1P_2 > l - 1cm > 2$ cm gelten muss und daher c einen Durchmesser größer als 2 cm haben muss.
Somit kann es keinen Kreis mit dem Radius 1 cm geben, dessen Inneres $n+2$ der $2n+1$ Punkte enthält.
Für $n = 6$ erhält man aus dieser Verallgemeinerung die Lösung der Aufgabe.

Aufgabe 291044:

In jedes leere Kästchen des Bildes soll eine natürliche Zahl so eingetragen werden, dass in jeder Zeile und in jeder Spalte eine (fünfgliedrige) arithmetische Folge steht.
Ermitteln Sie alle Eintragungen, die diese Forderungen erfüllen!

				65
	41			
		81		
1				

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

X		Y		65
Z	41	W		
		81		
1				

I. Wenn eine Eintragung die Forderung erfüllt, so folgt für die im nachfolgenden Bild mit x, y, z, w bezeichneten Zahlen: Da in der 1. Spalte und 2. Zeile sowie in der 1. und 3. Spalte je eine arithmetische Folge steht, gilt

$$y - x = 65 - y \qquad (1)$$
$$41 - z = w - 41 \qquad (2)$$
$$3 \cdot (z - x) = 1 - z \qquad (3)$$
$$w - y = 81 - w \qquad (4)$$

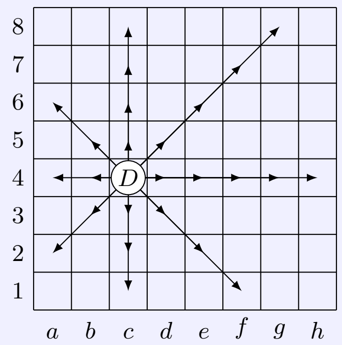
Aus (1) und (2) folgt $x = 2y - 65$ (5) bzw. $z = 82 - w$ (6). Setzt man dies in (3), d. h. $4z - 3x = 1$ ein, so folgt

$$327 - 4w - 6y + 195 = 1 \qquad ; \qquad 2w = 261 - 3y$$

Hieraus und aus (4), d. h. $2w = 81 + y$ (7) erhält man $261.3y = 81 + y$, also $y = 45$ (8).
Damit ergibt sich aus (7), (6), (5): $w = 63$, $z = 19$, $x = 25$ (9).
Aus diesen in (8), (9) genannten Werten ergeben sich durch Vervollständigung der arithmetischen Folgen die im zweiten Bild genannten Zahlen, z. B. erst die in der 1. und 2. Zeile und dann die in den Spalten fehlenden Werte.

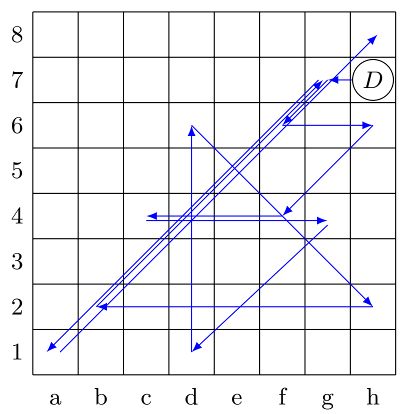
25	35	45	55	65
19	41	63	85	107
13	47	81	115	149
7	53	99	145	191
1	59	117	175	233

Aufgabe 331041:



Auf einem Schachbrett wird eine Figur Dame betrachtet, die wie im Schachspiel ziehen kann, also in den acht Richtungen parallel zum Brettrand oder diagonal, jeweils beliebig viele Felder. (siehe z. B. in der Abbildung alle von c4 aus möglichen Züge.)
Als Länge eines Zuges werde stets die Streckenlänge vom Mittelpunkt des Anfangsfeldes zum Mittelpunkt des Zielfeldes bezeichnet. Dabei werde die Seitenlänge jedes der 64 quadratischen Felder als Längeneinheit genommen.
Gesucht wird eine Zugfolge, die den folgenden Bedingungen genügt:
(1) Bei jedem Zug der Zugfolge - mit Ausnahme des letzten - soll der Zug, der sich anschließt (d. h. als Startfeld das eben erreichte Zielfeld hat), eine größere Länge haben als der Zug, an den er sich anschließt.
(2) Das Zielfeld des letzten Zuges soll dem Startfeld des ersten Zuges benachbart sein (und zwar eine Seite mit ihm gemeinsam haben, nicht nur eine Ecke).
(3) Die Zugfolge soll in der Summe der Längen ihrer Züge von keiner Zugfolge, die den Bedingungen (1) und (2) genügt, übertroffen werden.
Geben Sie eine Zugfolge an und beweisen Sie, dass sie die Bedingungen (1), (2) und (3) erfüllt!

Lösung von cyrix:



Es ist $1 < \sqrt{2} < 2 < 2\sqrt{2} < 3 < 4 < 3\sqrt{2} < 5 < 4\sqrt{2} < 6 < 7 < 5\sqrt{2} < 6\sqrt{2} < 7\sqrt{2}$.

Wenn es einen Weg gibt, der alle diese Streckenlängen erfüllt, dann muss er in einem Eckfeld enden, o. B. d. A. h8. Der Zug davor muss dann in a1 starten, der davor in g7 und der davor in b2. Dann jedoch wäre zuvor kein Zug der Länge 7 möglich gewesen, da man dazu am Rand des Schachbretts stehen und auch ankommen muss. Also kann nicht jede der Längen ≥ 7 in der Zugfolge vorkommen.

Streichen wir den Zug der Länge 7, so machen wir hierbei die Summe um den kleinstmöglichen Wert kleiner, bleiben also maximal (unter der Voraussetzung, dass alle kürzeren Züge nun möglich sind). Wir benötigen also einen Zug der Länge 6, der in b2 endet. Dies kann sowohl b8 als auch h2 sein. Da beide symmetrisch zur Hauptdiagonalen liegen (auf der sich auch das Zielfeld h8 des letzten Zug befindet), können wir o. B. d. A. h2 als dessen Ausgangsfeld wählen.

Dort muss nun ein Zug der Länge $4\sqrt{2}$ ankommen, der also nur in d6 gestartet sein kann. Der davor erfolgende Zug der Länge 5 muss dann von Feld d1 ausgegangen sein. Dort muss ein Zug der Länge $3\sqrt{2}$ sein Ziel gefunden haben, der damit von a4 oder g4 gestartet sein muss.

Wir geben im folgenden einen Weg an, der in h7 startet, aufsteigend alle Längen von 1 bis $7\sqrt{2}$, mit Ausnahme der Länge 7, durchläuft und im Nachbarfeld h8 von h7 endet:

h7 – g7 – f6 – h6 – f4 – c4 – g4 – d1 – d6 – h2 – b2 – g7 – a1 – h8

Diese Zugfolge hat maximale Länge unter Einhaltung der Bedingungen (1) und (2), ist also eine gesuchte.

VI.II. Berechnen von Anzahlen, Wahrscheinlichkeiten

I. Runde 1

Aufgabe V01013:
Wieviel Diagonalen besitzt ein 4775-Eck?

Lösung von StrgAltEntf:
Für die Anzahl d der Diagonalen eines n-Ecks gilt:

$$d(n) = \frac{n}{2} \cdot (n-3)$$

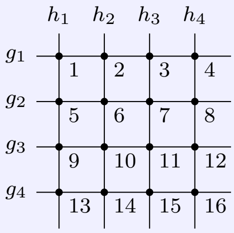
Begründung: Von jeder der n Ecken lässt sich zu $n-3$ anderen Ecken eine Diagonale zeichnen. Bei $n \cdot (n-3)$ wird aber jede Diagonale doppelt gezählt. Folglich gibt es $\frac{1}{2}n \cdot (n-3)$ Diagonalen.

Setzt man $n = 4775$ ein, so ergeben sich für das 4775-Eck genau 11393150 Diagonalen.

Aufgabe 031016:
Beim Fußball-Toto ist auf dem Tippschein mit 12 Spielen anzukreuzen, für welche Mannschaft mit einem Sieg gerechnet oder ob das Spiel unentschieden beendet wird. Bei einem Spiel gibt es drei Möglichkeiten:
Sieg der Mannschaft A, Sieg der Mannschaft B oder unentschieden.
Wieviel Tippscheine müsste jemand ausfüllen, der auf jeden Fall einen Schein mit 12 richtigen Voraussagen haben möchte? Der Lösungsweg ist zu begründen.

Lösung von Carsten Balleier:
Bei nur einem Spiel bräuchte man drei Tippscheine, einen für jede der Möglichkeiten. Bei zwei Spielen müsste man einen Tippschein für jede denkbare Kombination ausfüllen, also $3 \cdot 3 = 3^2$ Möglichkeiten.
Mit jedem weiteren Spiel muss die Zahl mit drei multipliziert werden, bei 12 Spielen führt das auf $3^{12} = 531441$ Tippscheine.

Aufgabe 181011:



Die Abbildung zeigt vier zueinander parallele Geraden g_1, g_2, g_3, g_4, bei denen eine einheitliche Länge a für jedes $i = 1, 2, 3, 4$ als Abstand zwischen g_i und g_{i+1} auftritt, und weitere vier zu den g_i senkrechte Geraden h_1, h_2, h_3, h_4, bei denen a für jedes $i = 1, 2, 3, 4$ auch der Abstand zwischen h_i und h_{i+1} ist.

Ferner zeigt die Abbildung eine Nummerierung der entstehenden Schnittpunkte.

a) Man ermittle die Anzahl aller derjenigen Quadrate, die nur nummerierte Punkte als Ecken und nur auf Geraden g_i oder h_i liegende Strecken als Seiten besitzen.

b) Man untersuche, ob es möglich ist, alle 16 nummerierten Punkte so unter Verwendung der Farben Rot, Blau, Grün, Gelb zu färben (jeden nummerierten Punkt mit genau einer dieser Farben), dass für die Ecken jedes in a) genannten Quadrates alle vier Farben auftreten!

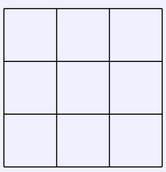
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Die genannten Quadrate sind genau die folgenden:
9 Quadrate der Seitenlänge a,
4 Quadrate der Seitenlänge 2a,
1 Quadrat der Seitenlänge 3a
zusammen also genau 14 Quadrate.

b) Angenommen, es gäbe eine solche Färbung. Bezeichnet darin
A die Farbe des Punktes 1,
B die Farbe des Punktes 3,
C die Farbe des Punktes 11,
D die Farbe des Punktes 9,
so sind A,B,C,D in geeigneter Reihenfolge alle vier Farben Rot, Blau, Grün, Gelb. Ferner folgt:

Der Punkt 6 kann nicht die Farbe A haben, da diese sonst für zwei Ecken des Quadrates 1/2/6/5 aufträte, so dass eine der anderen Farben bei seinen Ecken fehlen müsste.

Ebenso ergibt sich durch Betrachtung der Quadrate 2/3/7/6, 6/7/11/10, 5/6/10/9, dass der Punkt 6 auch nicht die Farben B,C,D haben kann.
Dieser Widerspruch beweist, dass es keine Färbung der in (b) genannten Art gibt.

Aufgabe 191014:



In die neun quadratischen Felder der Abbildung sollen die Zahlen von 1 bis 9 so eingetragen werden, dass jede dieser Zahlen genau einmal vorkommt und dass in jeder Spalte und jeder Zeile und in jeder der beiden Diagonalen die gleiche Summe auftritt.

Ermitteln Sie die größtmögliche Zahl von nicht zueinander kongruenten Eintragungen dieser Art! Dabei werden zwei Eintragungen genau dann als kongruent bezeichnet, wenn sie durch eine Drehung oder Spiegelung ineinander überführt werden können.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn eine Eintragung der genannten Art vorliegt, so gilt:
Da die Summe aller eingetragenen Zahlen $1 + ... + 9 = 45$ beträgt, ergibt sich in jeder der drei Spalten (und folglich auch in jeder Zeile und in jeder Diagonale) die Summe 15. Nun gibt es genau 8 Darstellungen der Zahl 15 als Summe von drei zueinander verschiedenen der Zahlen $1, ..., 9$ nämlich

$$1+5+9, \quad 2+4+9, \quad 3+4+8, \quad 4+5+6, \quad 1+6+8, \quad 2+5+8, \quad 3+5+7, \quad 2+6+7 \qquad (1)$$

In diesen 8 Darstellungen tritt nur die Zahl 5 viermal als Summand auf. Bei jeder Eintragung der genannten Art muss folglich die Zahl 5 im mittleren Feld stehen, da dieses viermal bei der Summenbildung in Zeilen, Spalten oder Diagonalen herangezogen wird.

Ferner treten in den Darstellungen (1) (außer der Zahl 5) nur die Zahlen 2, 4, 6, 8 je dreimal als Summand auf. Bei jeder Eintragung der genannten Art müssen folglich diese Zahlen in den Eckfeldern stehen, da jedes dieser Felder dreimal bei der Summenbildung in Zeilen, Spalten oder Diagonalen herangezogen wird.
Liegt eine derartige Eintragung vor, so kann daher durch eine Drehung erreicht werden, dass die Zahl 2 im linken oberen Eckfeld steht. Im rechten unteren Eckfeld muss dann 8 stehen.
Also stehen 4 bzw. 6 im rechten oberen bzw. linken unteren Feld oder umgekehrt. Falls 4 nicht im rechten oberen Eckfeld steht, kann dies folglich durch eine Spiegelung erreicht werden, die die Felder der Zahlen 2, 5, 8 unverändert lässt.
Daher ist jede Eintragung der genannten Art kongruent zu einer Eintragung, bei der die in der nachfolgenden Abbildung angegebenen Besetzungen von Feldern vorliegen:

2		4
	5	
6		8

Es gibt aber genau eine solche Eintragung, nämlich:

2	9	4
7	5	3
6	1	8

Die gesuchte größtmögliche Zahl von nicht zueinander kongruenten Eintragungen der genannten Art ist daher 1.

Aufgabe 201014:

Ein Würfelkörper ganz aus Glas
(10 Zentimeter Kantenmaß),
drin viele Punkte eingeschlossen.
Der Franz probiert schon unverdrossen,
sie allesamt genau zu zählen.
Der Peter sagt: „Musst dich nicht quälen!
’s sind 26 mehr als 100,
und wenn es dich vielleicht auch wundert,
ich sag’ dir, dass es nicht gelingt,
dass man sie so drin unterbringt,
dass nicht ein Pärchen existier’
des Abstand kleiner ist als vier“
(Er meint natürlich Zentimeter.)
„Und dies beweis mir mal!“ sagt Peter:
„Und ich verlange dann auch nicht
die Lösung dafür als Gedicht.“

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

Zehn Zentimeter ist das Kantenmaß
des Würfelkörpers ganz aus purem Glas.
Das heißt, es gibt dann immer 5^3
der Würfel von der Kantenlänge 2,
in die der Würfel sei zerlegt gedacht,
was in Gedanken keine Mühe macht.
Da 126 dargestellt
als $5^3 + 1$, weiß alle Welt,
dass zwei der Punkte letztlich man zum Schluss
im gleichen kleinen Würfel finden muss.

Nun fragt man nach dem Abstand maximal
in einem kleinen Würfel dieser Wahl.
Das muss die Raumdiagonale sein,
die nach Pythagoras man findet fein
als $2 \cdot \sqrt{3}$; und jetzt ist klar,
dass der Beweis schon fast vollendet war.
Denn $2 \cdot \sqrt{3}$ liegt unter 4,
und dies zu zeigen, überlass ich dir.

Aufgabe 291013:
Zwei Spieler haben sich folgendes Spiel ausgedacht: Auf einem Spielbrett sind 14 Spielfelder im Kreis angeordnet, eines dieser Felder gilt als Anfangsfeld A. Jeder Spieler hat einen Spielstein und setzt ihn auf das Feld A.

Dann führt jeder Spieler mit einem Würfel einen Wurf aus. Werfen beide Spieler unterschiedliche Augenzahlen, so setzt der Spieler mit der höheren Augenzahl seinen Stein um 4 Schritte im Uhrzeigersinn vorwärts, der andere um 2 Schritte. Werfen sie aber die gleiche Augenzahl, so setzt jeder seinen Stein um 3 Schritte vorwärts.

Dieses Würfeln und Voransetzen beider Steine gilt als ein *Zug*. Infolge der kreisförmigen Anordnung der Spielfelder kann es vorkommen, dass ein Stein beim Voransetzen das Feld A erreicht oder überschreitet (und damit einen neuen Umlauf beginnt).

Das Spiel ist beendet, sobald nach Durchführung eines *Zuges* der Stein mindestens eines Spielers genau auf dem Feld A steht. Dieser Spieler hat gewonnen, falls der Stein des anderen Spielers dabei nicht auf A steht. Falls jedoch beide Steine auf A stehen, endet das Spiel unentschieden.

Welches ist die kleinstmögliche Anzahl von *Zügen*, aus denen ein unentschiedenes Spiel bestehen kann? Begründen Sie Ihre Antwort!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn ein Spiel nach n „Zügen“ unentschieden endet, so beträgt die Summe s der Anzahlen aller von beiden Steinen insgesamt zurückgelegten Schritten $6n$. Ferner hat der Stein des einen Spielers eine Anzahl a vollständiger Umläufe zurückgelegt und der des anderen Spielers eine Anzahl b vollständiger Umläufe, also gilt

$$s = 14a + 14b = 14(a + b)$$

Folglich ist s ein gemeinsames Vielfaches von 6 und 14 und somit ein Vielfaches des kleinsten gemeinsamen Vielfachen 42 der Zahlen 6 und 14; d. h., es gilt $s = 42g$ mit einer ganzen Zahl g.

Daher ist $6n = 42g$, $n = 7g$, d. h. n durch 7 teilbar. In weniger als 7 „Zügen“ kann daher kein unentschiedenes Spiel entstehen.

II. In 7 „Zügen“ kann ein unentschiedenes Spiel entstehen, z. B., indem der eine Spieler in diesen 7 „Zügen“ stets 2 Schritte setzen muss und der andere Spieler stets 4 Schritte (da er stets die größere Zahl gewürfelt hat).

Mit I. und II. ist bewiesen: Die gesuchte kleinstmögliche Anzahl von „Zügen“, aus denen ein unentschiedenes Spiel bestehen kann, beträgt 7.

Aufgabe 311011:
Ermitteln Sie die Anzahl aller derjenigen Paare $(x; y)$ positiver natürlicher Zahlen x und y, für die folgende Ungleichung (1) gilt:

$$x + y < 1991. \tag{VI.1}$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Zu $x = 1$ wird (1) genau für $y = 1, 2, \ldots, 1988, 1989$ erfüllt; daher gibt es insgesamt

1989 Paare mit $x = 1$, für die (1) gilt.

Analog erhält man insgesamt

1988 Paare mit $x = 2$, für die (1) gilt,

1987 Paare mit $x = 3$, für die (1) gilt, ...

1 Paar mit $x = 1989$, für das (1) gilt, nämlich das Paar $(1989, 1)$

Die Anzahl aller Paare mit (1) ist folglich gleich der Summe $1 + \cdots + 1998 + 1989$; diese beträgt nach einer bekannten Formel

$$\frac{1989 \cdot 1990}{2} = 1979055$$

Aufgabe 321013:
In einer Urne liegen 10 Kugeln, auf denen die Zahlen von 1 bis 10 stehen, jede dieser Zahlen auf genau einer Kugel.

Zwei Spieler A und B ziehen abwechselnd je eine Kugel (ohne dabei die Zahl auf ihr zu kennen). Nachdem so jeder Spieler fünf der Kugeln erhalten hat, werden folgendermaßen Punkte vergeben: A bekommt genau dann einen Punkt, wenn die Summe der Zahlen auf seinen Kugeln durch 2 teilbar ist; B bekommt genau dann einen Punkt, wenn die Summe der Zahlen auf seinen Kugeln durch 3 teilbar ist.

a) Zeigen Sie, dass die folgenden vier Ergebnisse eines Spiels möglich sind:

Beide Spieler bekommen einen Punkt;
keiner bekommt einen Punkt;
nur A bekommt einen Punkt;
nur B bekommt einen Punkt.

b) Es werde eine große Zahl solcher Spiele gespielt (damit dies möglich ist, werden nach jedem Spiel die Kugeln wieder in die Urne gelegt).
Gefragt wird, wie oft dabei A und wie oft B einen Punktgewinn erwarten kann.

Geben Sie ein Computerprogramm an, das die Beantwortung dieser Frage unterstützt! Schätzen Sie ein, ob Ihr Programm Vermutungen oder genauer gesicherte Aussagen (über die Punktzahlen im Verhältnis zur Zahl der Spiele) ermöglicht!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Der geforderte Nachweis kann durch Angabe von Beispielen erbracht werden. Solche Beispiele sind:

Hat A die Kugeln 1,2,3,4,6, also B die Kugeln 5,7,8,9,10, so ergeben sich für A bzw. B die Summen 16 bzw. 39, also bekommen beide Spieler einen Punkt.
Hat A die Kugeln 1,2,3,4,5, so sind die Summen 15 bzw. 40, also bekommt keiner einen Punkt.
Hat A die Kugeln 1,2,3,4,8, so sind die Summen 18 bzw. 37, also bekommt nur A einen Punkt.

Hat A die Kugeln 1,2,3,4,9, so sind die Summen 19 bzw. 36, also bekommt nur B einen Punkt.

b) Erste Möglichkeit: Ein BASIC-Programm, das große Zahlen zufällig durchgeführter Spiele simuliert, ist z. B. das folgende:

```
100 RANDOMIZE: S=24000: PA=0: PB=0: DIM Z(10)
110 PRINT " SPIELE","PUNKTE A","PUNKTE B"," REL.A"," REL.B"
120 FOR X=1 TO S
130   SA=0: SB=0: FOR J=1 TO 10: Z(J)=J: NEXT J
140   FOR U=10 TO 1 STEP -1
150     N=INT(RND(I)*U)+I: K=Z(N)
160     IF U/2=INT(U/Z) THEN SA=SA+K ELSE SB=SB+K
170     IF N=U THEN 190
180     FOR J=N+1 TO U: N(J-1)=N(J): NEXT J
190   NEXT U
200   IF SA/2=INT(SA/2) THEN PA=PA+1
210   IF SB/3=INT(SB/3) THEN PB=PB+1
220   IF X/1200=INT(X/1200) THEN PRINT X,PA,PB,PA/X,PB/X
239 NEXT X  Kommentar:
```

100: Vorbereitung zur Zufallszahlenerzeugung für S Spiele. In den Variablen PA, PB werden die von A bzw. B in diesen Spielen erreichten Punkte gezählt. Das Feld Z gibt die Zahlen auf den Kugeln an: Die J-te Kugel trägt die Zahl Z(J).

110: Ausgabe einer Kopfzeile für die Ergebnis-Tabelle. Diese soll auflisten: Die Anzahl der bisher gespielten Spiele, die darin für A und B erreichten Punkte sowie deren relative Häufigkeiten (Punktzahlen dividiert durch Anzahl der Spiele).

120-230: In dieser Schleife wird je ein Spiel simuliert und ausgewertet. Die Variable X zählt die Spiele.

130: In den Variablen SA, SB werden die Zahlen auf den von A bzw. von B gezogenen Kugeln aufsummiert.

140-190: In dieser Schleife wird das Ziehen der Kugeln simuliert. Die Variable U gibt an, wieviele Kugeln jeweils vor dem Ziehen in der Urne sind.

150: Die N-te Kugel wird gezogen (N eine Zufallszahl mit $1 \leq N \leq U$), diese Kugel trägt die Zahl K.

160: Je nachdem, ob vor dem Ziehen eine gerade oder ungerade Zahl U von Kugeln in der Urne war, hat A bzw. B gezogen; dementsprechend wird K zu SA oder zu SB addiert.

170-180: Entscheidung, ob nach dem Ziehen die Kugeln, die nun jeweils als J-te (J = 1,...,U-1) gezählt werden, neu anzugebende Zahlen tragen: War die U-te Kugel gezogen worden (170), so ändert sich nichts an den Zahlen auf den verbleibenden U-1 Kugeln. Andernfalls aber (180) gilt für die Kugeln von der (N+1)-ten an: Jeweils die Beschriftung der früher als J-te gezählten Kugel tritt nun als Beschriftung der (J-l)-ten auf.

200-210: Die Punktzahlen für A bzw. B werden erhöht, falls das Spiel für A bzw. B eine durch 2 bzw. 3 teilbare Summe ergab.

220: Jeweils nach einer durch 1200 teilbaren Anzahl von Spielen werden die erreichten Punkte und relativen Häufigkeiten ausgegeben.

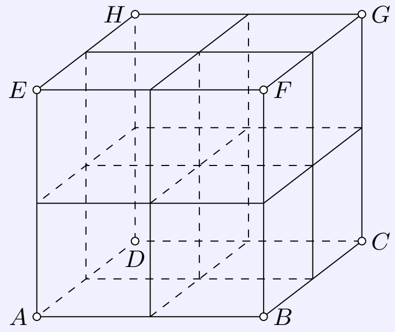
Anfangs- und Endzeilen im Beispiel einer Ergebnistabelle:

SPIELE	PUNKTE A	PUNKTE B	REL.A	REL.B
1200	596	420	.4966667	.35
2400	1195	806	.4979167	.3358334
3600	1803	1195	.5008334	.3319444
...				
22800	11440	7676	.5017544	.3366667
24000	12049	8060	.5020417	.3358334

Aus solchen Beispielen kann als Vermutung entnommen werden:

A kann einen Punktgewinn in einer Anzahl erwarten, deren Größenordnung die Hälfte aller Spiele ist; für B ist die entsprechend zu erwartende Größenordnung ein Drittel aller Spiele.

Aufgabe 341012:

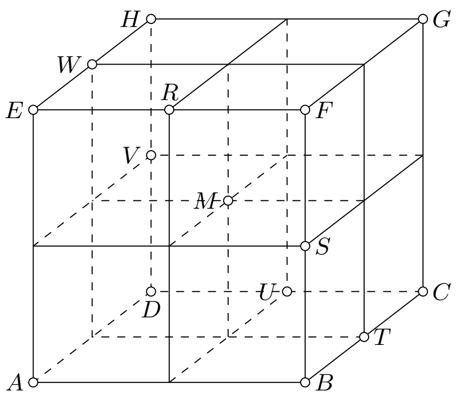


Die Abbildung zeigt ein aus Strecken zusammengesetztes Gitter. Diese Strecken sind - nach Zerlegung eines Würfels $ABCDEFGH$ in acht einander gleichgroße Teilwürfel - die Kanten dieser Teilwürfel.
Eine Ameise, die sich nur auf diesen Strecken bewegen kann, soll auf einem möglichst kurzen Weg von A nach G gelangen.
Wie viele verschieden Wege gibt es hierfür insgesamt,

a) wenn alle Strecken des Gitters zugelassen sind.

b) wenn nur solche Strecken des Gitters zugelassen sind, die der Oberfläche des Würfels $ABCDEFGH$ angehören?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



a) Zur eindeutigen Kennzeichnung eines möglichst kurzen Weges von A nach G ist insgesamt 6 mal die Richtung der nächsten Strecke anzugeben, je 2 mal nach rechts, nach hinten und nach oben. Daher gibt es ebenso viele verschiedene Wege, wie es verschiedene Reihenfolgen der Buchstaben **r, r, h, h, o, o** gibt. Die Anzahl dieser Reihenfolgen ist bekanntlich

$$\frac{6!}{2!\cdot 2!\cdot 2!} = \frac{720}{2\cdot 2\cdot 2} = 90$$

b) Ein Weg bleibt genau dann nicht nur auf der Oberfläche des Würfels $ABCDEFGH$, wenn er über den Punkt M führt (siehe Abbildung). Von A nach M gibt es genau $3! = 6$ Wege (Reihenfolgen von **r, h, o**), ebenso von M nach G. Also beträgt die Anzahl der auszuschließenden Wege $6\cdot 6 = 36$. Die Anzahl der Wege nur auf der Oberfläche ist somit 54.

Aufgabe 341013:
Karin und Rolf sammeln Straßenbahnfahrscheine. Jeder Fahrschein hat eine Nummer aus 6 Ziffern. Ist darin die Summe der ersten drei Ziffern gleich der Summe der letzten drei Ziffern, so heißt der Schein ein *Glücksschein.*

Um die Chance hierfür abzuschätzen, wollen Karin und Rolf wissen, wieviel Prozent aller Fahrscheine *Glücksscheine* sind. Dabei wird vorausgesetzt, dass jede Nummer von 000000 bis 999999 gleich oft vorkommt.

Karin schreibt ein einfaches Computerprogramm, mit dem die gesuchte Prozentzahl dadurch ermittelt wird, dass eine Anweisungsfolge 1000000 mal abläuft. Da das lange dauert, schreibt Rolf ein Programm, in dem eine (andere) Anweisungsfolge nur 1000 mal ablaufen muss (und sonst nur wenige weitere Anweisungen zu durchlaufen sind).

Schreiben Sie je ein solches Programm und erläutern Sie, warum damit die gesuchte Prozentzahl gefunden wird! (Die Wahl der Programmiersprache ist natürlich freigestellt.)

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Zwei Beispiele für Programme der genannten Art sind:

1. Programm: 1 z = 0

```
2 for a = 0 to 9
3   for b = 0 to 9
4     for c = 0 to 9
5       for d = 0 to 9
6         for e = 0 to 9
7           for f = 0 to 9
8             if a+b+c = d+e+f then z = z+1
9           next
10          next
11        next
12      next
13    next
14 next
15 print z/10000
```

2. Programm: 1 dim n(27) 2 for s = 0 to 27 3 n(s) = 0 4 next 5 for a = 0 to 9 6 for b = 0 to 9 7 for c = 0 to 9 8 s = a+b+c 9 next 10 next 12 next 13 z = 0 14 for s = 0 to 27 15 z = z + n(s)*n(s) 16 next 17 print z/10000 Im 1. Programm läuft die Anweisung 8, wenn die Schleifen 2 – 7, 9 – 14 verfolgt werden, 1000000 mal ab; es wird einfach jede der Nummern von 000000 bis 999999 auf die Eigenschaft $a+b+c=d+e+f$ untersucht. Liegt sie vor, so wird die (zu Beginn in 1 auf 0 gesetzte) Zählvariable z um 1 erhöht. Sie gibt am Ende also die Anzahl aller „Glücksschein“ - Nummern an, so dass in 15 das Hundertfache von $z/1000000$ als die gesuchte Prozentzahl ausgegeben wird.

Das 2. Programm beruht auf folgender Überlegung: Für jede Nummer von 000000 bis 999999 ist die Summe $s=a+b+c$ der ersten drei Ziffern a,b,c eine der Zahlen von 0 bis 27. Kommt ein solcher Wert s unter allen 1000 Dreiergruppen der ersten drei Ziffern genau $n(s)$ mal als Summe vor, so kommt er unter allen Dreiergruppen der letzten drei Ziffern d,e,f ebenfalls genau $n(s)$ mal als Summe vor.

Für genau $(n(s)\cdot n(s))$ Nummern liegt daher die Eigenschaft $a+b+c=d+e+f$ speziell so vor, dass gerade für diesen Wert s die beiden Gleichungen $a+b+c=s$ und $d+e+f=s$ gelten. Damit ist bewiesen:

Die Anzahl z aller „Glücksschein“-Nummern ist die Summe aller für $s=0,\dots,27$ gebildeten Produkte $(n(s)\cdot n(s))$.

Eben diese Summe rechnet das 2. Programm aus: Die Ermittlung der Häufigkeiten $n(s)$ geschieht beim Durchlaufen 5 - 7, 10 - 12 der Anweisungsfolge 8, 9, in der für jede der 1000 Dreiergruppen abc von 000 bis 999 jeweils die Anzahl $n(s)$ der betreffenden Summe $s = a+b+c$ um 1 erhöht wird. (Zur Vorbereitung hierfür wurden zu Beginn in l - 4 alle $n(s)$ auf 0 gesetzt.) In 13 - 16 wird aus den so erhaltenen Werten $n(s)$ die Summe der Produkte $(n(s) \cdot n(s))$ gebildet.

Der errechnete Prozentwert lautet 5,5252 %.

II. Runde 2

Aufgabe 131022:
Bei den XX. Olympischen Sommerspielen schnitten die Sportler unserer Republik hervorragend ab.
In der inoffiziellen Länderwertung, bei der für den 1. bis 6. Platz 7, 5, 4, 3, 2 bzw. 1 Punkte vergeben wurden, belegten sie mit 480 Punkten hinter der UdSSR und den USA den dritten Platz.
Dabei errangen sie 22 vierte, 22 fünfte und 23 sechste Plätze. Für den 1., den 2. und den 3. Platz wurden wie üblich Gold-, Silber-, bzw. Bronzemedaillen vergeben.
Die größte Differenz der Anzahlen der von den DDR-Sportlern errungenen Gold-, Silber-, bzw. Bronzemedaillen betrug dabei 3.
Zeigen Sie, dass diese Angaben hinreichend sind, die genaue Anzahl der von den DDR-Sportlern errungenen Gold-, Silber- und Bronzemedaillen zu ermitteln!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Für die 22 vierten, die 22 fünften und die 23 sechsten Plätze erhielt die DDR-Mannschaft laut Aufgabe $22 \cdot 3 + 22 \cdot 2 + 23 = 133$ Punkte. Da sie insgesamt 480 Punkte erzielte, bekam sie damit zusammen 347 Punkte für die ersten, zweiten und dritte Plätze.
Es sei g die Anzahl der errungenen Gold-, s die der Silber- und b die der Bronzemedaillen. Dann gilt

$$7g + 5s + 4b = 347 \tag{1}$$

Ist k die kleinste der Zahlen g, s, b, so ist mit ganzzahligen x, y, z

$$g = k + x, \quad s = k + y, \quad b = k + z \tag{2}$$

wobei (3) mindestens einer der Zahlen x, y, z gleich 0 und (4) mindestens einer der Zahlen x, y, z gleich 3 ist und (5) $0 = x{,}y{,}z = 3$ gilt.
Aus (1), (2) folgt

$$16k + 7x + 5y + 4z = 347 \tag{6}$$

Wegen (3), (4), (5) gilt $7 \cdot 3 + 5 \cdot 3 \geq 7 + 5y + 4z \geq 4 \cdot 3$, hieraus und aus (6) folgt

$$16k + 36 \geq 347 \geq 16k + 12 \tag{7}$$

Aus der linken Ungleichung in (7) folgt $16k \geq 311 > 304$, also (8) $k > 19$. Aus der rechten Ungleichung in (6) folgt $16k \leq 335 < 336$, also (9) $k < 21$.
Wegen (8), (9) gilt (10) $k = 20$.
Hieraus und aus (6) folgt $7x + 5y + 4z = 27$. Wäre $z = 0$, so müsste $7x = 27 - 5y$ durch 7 teilbar sein, was für alle $y = 0, 1, 2, 3$ nicht zutrifft. Wäre $y = 0$, so müsste $7x = 27 - 4z$ durch 7 teilbar sein, was für alle $z = 0, 1, 2, 3$ nicht zutrifft.
Also ist (11) $x = 0$, und $5y = 27 - 4z$ muss durch 5 teilbar sei, was unter den Möglichkeiten $z = 0, 1, 2, 4$ nur für (12) $z = 3$ zutrifft und auf (13) $y = 3$ führt.
Aus (2), (10), (11), (12), (13), folgt die zu beweisende Behauptung, dass s, g, b durch die Bedingung der Aufgabe eindeutig bestimmt sind, nämlich $g = 20$, $s = b = 23$.

Aufgabe 291022:
Zwei Spieler haben sich folgendes Spiel ausgedacht:
Auf einem Spielbrett sind 8 Spielfelder im Kreis angeordnet, eines dieser Felder gilt als Anfangsfeld A. Jeder Spieler hat einen Spielstein und setzt ihn auf das Feld A.
Dann führt jeder Spieler mit einem Würfel einen Wurf aus.
Werfen beide Spieler unterschiedliche Augenzahlen, so setzt der Spieler mit der höheren Augenzahl seinen Stein um zwei Schritte im Uhrzeigersinn vorwärts, der andere um einen Schritt.
Dieses Voransetzen beider Steine gilt dann als ein Zug.
Werfen beide Spieler die gleiche Augenzahl, so wird kein Zug ausgeführt, sondern nochmals gewürfelt.
Infolge der kreisförmigen Anordnung der Spielfelder kann es vorkommen, dass ein Stein beim Voransetzen das Feld A erreicht oder überschreitet (und damit einen neuen Umlauf beginnt).
Das Spiel ist beendet, sobald nach Durchführung eines Zuges der Stein mindestens eines Spielers genau auf dem Feld A steht.
Dieser Spieler hat gewonnen, falls der Stein des anderen Spielers dabei nicht auf A steht.
Falls jedoch beide Steine auf A stehen, endet das Spiel unentschieden.
Welches ist die kleinstmögliche Anzahl von Zügen, aus denen ein unentschiedenes Spiel bestehen kann?
Begründen Sie ihre Antwort!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn ein Spiel nach n „Zügen" unentschieden endet, so beträgt die Summe der Anzahlen aller von beiden Steinen insgesamt zurückgelegten Schritte $3n$. Ferner hat dann der Stein des einen Spielers eine Anzahl a vollständiger Umläufe zurückgelegt und der Stein des anderen Spielers eine Anzahl b vollständiger Umläufe, also gilt

$$s = 8a + 8b = 8(a + b)$$

Folglich ist a ein ganzzahliges Vielfaches des kleinsten gemeinsamen Vielfachen 24 der Zahlen 3 und 8; d. h., es gilt $s = 24g$ mit einer ganzen Zahl g. Daher ist $3n = 24g, = 8g$.
Wäre hierbei $g = 1, n = 8$, so folgte $8(a + b) = s = 24$, $a + b = 3$, was mit positiven ganzen Zahlen a,b auf $a = 1, b = 2$ oder $a = 2, b = 1$ führen würde; d. h., der Stein eines Spielers hätte genau einen vollen Umlauf zurückgelegt, woraus wegen $n = 8$ folgte, dass er in jedem dieser 8 „Züge" nur einen Schritt zu gehen hätte, der des anderen Spielers also stets zwei Schritte.
Das führt auf den Widerspruch, dass dessen Stein beim vierten Zug auf das Feld A gekommen wäre.

Also muss $g \geq 2$ sein, d. h.: In weniger als 16 „Zügen" kann kein unentschiedenes Spiel entstehen.

II. In 16 „Zügen" kann ein unentschiedenes Spiel entstehen, z. B. folgendermaßen (die Felder nach A seien mit $1, \ldots, 7$ nummeriert):

Zug	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Spieler 1 Schrittzahl	1	2	2	2	2	2	1	1	2	2	1	1	1	1	1	2
erreichtes Feld	1	3	5	7	1	3	4	5	7	1	2	3	4	5	6	A
Spieler 2 Schrittzahl	2	1	1	1	1	1	2	2	1	1	2	2	2	2	2	1
erreichtes Feld	2	3	4	5	6	7	1	3	4	5	7	1	3	5	7	A

Mit I. und II. ist bewiesen: Die gesuchte kleinstmögliche Anzahl von „Zügen", aus denen ein unentschiedenes Spiel bestehen kann, beträgt 16.

Aufgabe 311023:
Man beweise, dass sich in einer Ebene 100 verschiedene Geraden so legen lassen, dass die Anzahl aller derjenigen Punkte, die Schnittpunkt von je mindestens zwei der 100 Geraden sind, genau 1991 beträgt.

Lösung von ochen:
Seien P_1,P_2,P_3,P_4,P_5 beliebige Punkte in einer Ebene.

Wir legen 3 Geraden durch P_1, 3 Geraden durch P_2, 3 Geraden durch P_3, 15 Geraden durch P_4 und 76 Geraden durch P_5.

Weiter fordern wir, dass
-jede Gerade sich mit jeder anderen schneidet.
-keine der Geraden durch zwei der Punkte P_1,P_2,P_3,P_4,P_5 verläuft.
-in allen Punkte mit Ausnahme von P_1,P_2,P_3,P_4,P_5 sich höchstens zwei Geraden schneiden.

Um dies zu gewährleisten, fügen wir die Geraden nacheinander in den Punkten P_i hinzu und achten darauf, dass die hinzugefügte Gerade nicht parallel zu einer der vorherigen ist und dass sie durch keinen der Schnittpunkte der vorigen Geraden (bis auf P_1,P_2,P_3,P_4,P_5) geht.

Wir zählen nun die Geraden und die Anzahl der Schnittpunkte.
Es sind insgesamt $3+3+3+15+76=100$ Geraden. Wir zählen nun die Punkte, in denen sich genau zwei Geraden schneiden. Das sind

$$\frac{1}{2}((3+3+3+15+76)^2-(3^2+3^2+3^2+15^2+76^2))=1986.$$

Zusätzlich schneiden sich noch Geraden in den Punkten P_1,P_2,P_3,P_4,P_5. Die Anzahl aller Punkte, in denen sich mindestens zwei Geraden schneiden, beträgt also 1991.
Wir nutzen hier, dass

$$\sum_{1\le i<j\le n} a_ia_j=\frac{1}{2}\left(\left(\sum_{1\le i\le n} a_i\right)^2-\sum_{1\le i\le n} a_i^2\right)$$

Aufgabe 321022:
An einem Kraftsportwettbewerb nehmen Robert, Stefan und Tilo teil. Robert schafft 20 Klimmzüge. Stefan nimmt sich vor, mindestens 80% der Leistungen von Robert und Tilo zusammen zu erreichen; Tilo will mindestens 60% der Leistungen von Robert und Stefan zusammen schaffen.
Gibt es eine kleinstmögliche Anzahl von Klimmzügen für Stefan und Tilo, so dass beide Vorhaben erfüllt werden?
Wenn das der Fall ist, ermitteln Sie diese Anzahl!

Lösung von cyrix:
Es seien s und t die Anzahlen der Klimmzüge von Stefan und Tilo. Dann soll also $s\ge \frac{4}{5}\cdot(20+t)=16+\frac{4}{5}t$ und $t\ge\frac{3}{5}\cdot(20+s)=12+\frac{3}{5}s$ gelten.

Da keiner eine negative Anzahl an Klimmzügen durchführt, ist damit $s\ge 16$. Setzt man dies ein, erhält man $t\ge 12+\frac{3}{5}\cdot 16=12+\frac{48}{5}$, also, da t eine ganze Zahl ist, $t\ge 22$.

Einsetzen in die erste Ungleichung liefert $s\ge 16+\frac{4}{5}\cdot 22=16+\frac{88}{5}$, also $s\ge 34$. Einsetzen dieses Wertes in die zweite Ungleichung liefert $s\ge 12+\frac{3}{5}\cdot 34$, also $s\ge 33$.
Einsetzen dieser besseren Abschätzung in die erste Ungleichung liefert $s\ge 16+\frac{4}{5}\cdot 33$, also $s\ge 43$, einsetzen dieses Wertes in die zweite Ungleichung $t\ge 12+\frac{3}{5}\cdot 43$, also $t\ge 38$.
Einsetzen in die erste Ungleichung liefert $s\ge 16+\frac{4}{5}\cdot 38$, also $s\ge 47$, einsetzen in die zweite $t\ge 12+\frac{3}{5}\cdot 47$, alo $t\ge 41$.
Einsetzen in die erste Ungleichung liefert $s\ge 16+\frac{4}{5}\cdot 41$, also $s\ge 49$. Einsetzen in die zweite Ungleichung liefert $t\ge 12+\frac{3}{5}\cdot 49$, also $t\ge 42$.
Einsetzen in die erste Ungleichung liefert $s\ge 16+\frac{4}{5}\cdot 42$, also $s\ge 50$. Einsetzen in die zweite Ungleichung liefert $t\ge 12+\frac{3}{5}\cdot 50=42$.

Damit erfüllen $s=50$ und $t=42$ als kleinste Werte beide Ungleichungen, sodass es auch einen kleinsten Wert $s+t=92$ gibt, was (wegen $s\ge 50$ und $t\ge 42$) der kleinste solche Wert ist.

Aufgabe 341021:
a) Wie viele verschiedene Verteilungen der Zahlen 1, 2, ..., 6 auf die sechs Seitenflächen eines Würfels gibt es insgesamt?
b) Wie viele verschiedene unter diesen Verteilungen gibt es insgesamt, bei denen die zusätzliche Bedingung erfüllt ist, dass für jedes Paar einander gegenüberliegender Seitenflächen die Zahlen auf diesen beiden Flächen die Summe 7 haben?
Hinweis: In a) und b) gelten zwei Verteilungen genau dann als voneinander verschieden, wenn sie durch keine Drehung des Würfels ineinander überführt werden können.

Lösung von ochen:
a) Wir nehmen einen Würfel und beschriften seine Seitenflächen so, dass jede der Zahlen von 1 bis 6 genau einmal vorkommt.

Wir legen den Würfel so hin, dass 1 auf der oberen Seitenfläche liegt, so gibt es 5 Möglichkeiten welche der Zahlen auf der unteren Seitenfläche steht. Anschließend drehen wir den Würfel so um die vertikale Achse, dass die kleinste nach vorn zeigt. Es gibt damit noch $3! = 6$ Möglichkeiten wie die anderen 3 Seitenflächen beschriftet wurden. Weiter kann jeder Würfel auf eindeutige Art so hingelegt werden, dass die 1 oben liegt und die kleinste Zahl der vier benachbarten Seitenflächen nach vorn zeigt. Es gibt also insgesamt $5 \cdot 3! = 30$ paarweise verschiedene Verteilungen.

b) Wir nehmen einen Würfel und beschriften seine Seitenflächen so, dass jede der Zahlen von 1 bis 6 genau einmal vorkommt und Zahlen gegenüberliegender Seitenflächen die Summe 7 haben.
Wir legen den Würfel so hin, dass 1 auf der oberen Seitenfläche liegt. Da 6 (und nicht 2) auf der gegenüberliegenden Seite steht, können ihn so um die vertikale Achse drehen, dass die Seite mit der 2 nach vorn zeigt. Somit liegt 5 auf der hinteren Seite. Nun kann 3 auf der linken oder auf der rechten Seitenfläche stehen. Es gibt also insgesamt 2 Möglichkeiten.

III. Runde 3

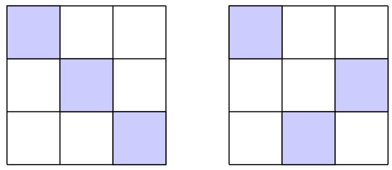
Aufgabe 211035:
In der 1. Stufe der Mathematikolympiade gab es im Jahre 1976 in der Olympiadeklasse 9 folgende Aufgabe:
„Jemand behauptet, dass es möglich sei, aus 7 Papierstücken auf folgende Weise genau 1976 Stücke herzustellen: Man teile einige der 7 Papierstücke jeweils in genau 7 Teile, dann wieder einige der nunmehr vorhandenen Papierstücke in jeweils genau 7 Teile u. s. w.
Ist es möglich, dass man auf diese Weise, indem man also das beschriebene Verfahren genügend lange fortsetzt, genau 1976 Papierstücke erhält?„ Als Lösung musste bewiesen werden, dass es nicht möglich ist, genau 1976 Papierstücke zu erhalten.
Wir wollen jetzt für irgendeine Zahl $n \geq 1$ von n Papierstücken ausgehen und diese in der beschriebenen Weise jeweils in genau n Teile teilen.
Ermitteln Sie alle diejenigen natürlichen Zahlen n mit $1 \leq n < 1976$, für die es auf diese Weise gelingen kann, genau 1976 Papierstücke zu erhalten!

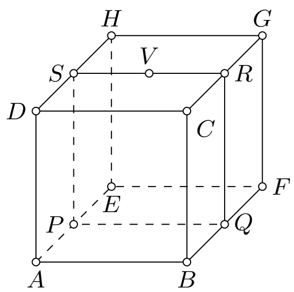
Lösung von Nuramon:
Mit jeder Teilung erhöht sich die Anzahl der Papierstücke um $n-1$. Nach t Teilungen sind es also $n + t(n-1)$ Papierstücke.
Gesucht sind also alle n mit $1 \leq n < 1976$, für die ein $t \in \mathbb{N}$ existiert mit $n + t(n-1) = 1976$.
Wegen $1976 = n + t(n-1) = (n-1)(t+1) + 1$, ist dies genau dann der Fall, wenn $n-1 < 1975$ ein Teiler von $1977 = 3 \cdot 659$ ist (659 ist prim), also genau dann, wenn $n-1 \in \{1, 3, 659\}$.
Also ist so eine Zerlegung möglich, genau dann, wenn $n \in \{2,4,660\}$.

Aufgabe 251033:
Aus 27 Würfeln mit der Kantenlänge a wird ein Würfel mit der Kantenlänge $3a$ zusammengesetzt. Jeder der 27 kleinen Würfel ist entweder völlig weiß oder völlig schwarz angestrichen.
Beim Zusammensetzen soll auf jeder der sechs quadratischen Seitenflächen des großen Würfels ein Muster entstehen, das in jeder Zeile und in jeder Spalte genau ein schwarzes und genau zwei weiße Quadrate enthält.

Ermitteln Sie
a) die kleinste, b) die größte Anzahl schwarzer Würfel, mit der diese Forderungen erfüllbar sind!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Für die auf den Seitenflächen der großen Würfels geforderten Muster gibt es als zueinander nicht kongruente Möglichkeiten, genau diejenigen beiden, die in der nachfolgenden Abbildung dargestellt sind:





Weiterhin gilt:
(1) Mit weniger als acht schwarzen Würfeln ist keine Zusammensetzung der geforderten Art möglich.

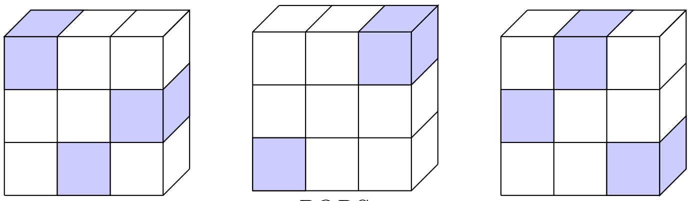
Beweis: Angenommen, es gäbe eine solche Zusammensetzung mit sieben oder weniger schwarzen Würfeln. In der „vorderen“ (d. h. das Quadrat ABC ausfüllenden) Schicht wären dann genau drei schwarze Würfel, ebenso in der „hinteren“ (das Quadrat $EFGH$ ausfüllenden) Schicht.
Für die „mittlere“ (das Quadrat $PQRS$ ausfüllenden) Schicht verbliebe somit höchstens ein schwarzer Würfel. Wäre er, falls vorhanden, einer der drei nach Voraussetzung in der Zeile PQ auftretenden schwarzen Würfel, so enthielte die Zeile RS keinen schwarzen Würfel. Da dies den Voraussetzungen widerspricht, ist die Aussage (1) bewiesen.

(2) Mit mehr als elf schwarzen Würfeln ist keine Zusammensetzung der geforderten Art möglich.

Beweis: Angenommen, es gäbe ein solche Zusammensetzung miz zwölf oder mehr schwarzen Würfeln. In der vorderen und der hinteren Schicht wären je genau drei schwarze Würfel, außerdem wäre möglicherweise der den Mittelpunkt des großen Würfels enthaltende kleine Würfel schwarz.

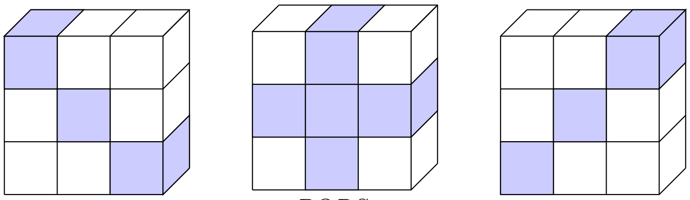
Unter den acht Würfeln, die die Randlinie der Quadrates $PQRS$ ausfüllen befänden sich daher mindestens 5 schwarze Würfel. Unter ihnen könnte es nur vier geben, die keinen der Punkte P, Q, R, S enthalten. Also müsste mindestens einer dieser Punkte, o. B. d. A. der Punkt P, in einem schwarzen Würfel enthalten sein. Es verbleiben noch mindestens 4 schwarze Würfel; von ihnen dürtfe nach Voraussetzung keiner mehr der Streckenzug SPQ erreichen.
Das führt aus den Widerspruch, dass für diese mindestens 4 schwarzen Würfel nur noch die drei Plätze bei U, R und V frei wären; somit ist auch Aussage (2) bewiesen.

(3) Mit acht Würfeln ist eine Zusammensetzung der geforderten Art möglich, wie die nachfolgende Abbildung zeigt.



ABCD *PQRS* *EFGH*

(4) Mit elf Würfeln ist eine Zusammensetzung der geforderten Art möglich, wie die nachfolgende Abbildung zeigt.



ABCD *PQRS* *EFGH*

Aus (1) und (3) folgt: Die in a) gesuchte kleinste Anzahl ist 8. Aus (2) und (4) folgt: Die in b) gesuchte größte Anzahl ist 11.

Aufgabe 261032:
Bei einem Dominospiel mit den Zahlen 0, 1, ..., 6 ist jeder Spielstein in zwei Hälften eingeteilt, jede Hälfte trägt eine der Zahlen.
In einem Dominospiel kommen alle Kombinationen von je zwei der Zahlen $0, 1, ..., 6$ je genau einmal vor (und zwar auch diejenigen, bei denen auf den beiden Hälften eines Steins dieselbe Zahl steht).
Insgesamt besteht hiernach ein Dominospiel aus genau 28 Steinen.
Eine Kette entsteht, wenn man mehrere Steine in einer Folge so nebeneinanderlegt, dass benachbarte Hälften nebeneinanderliegender Steine stets einander gleiche Zahlen tragen (Domino-Spielregel).
Eine Kette heißt geschlossen, wenn auch die beiden Seitenhälften an den beiden freien Enden der Kette einander gleiche Zahlen tragen.
a) Ermitteln Sie die kleinste Anzahl $k > 1$ von verschiedenen Steinen eines Dominospiels, die eine geschlossene Kette bilden können!
b) Aus einem Dominospiel sollen geschlossene Ketten aus je k verschiedenen Steinen gebildet werden (k sei die in a) genannte Zahl). Dabei soll jeder Stein des Dominospiels in höchstens einer dieser Ketten verwendet werden.
Ermitteln Sie die größte Anzahl g von Ketten, die so zustande kommen können!
c) Ermitteln Sie die Anzahl aller verschiedenen geschlossenen Ketten aus je k verschiedenen Steinen, die sich überhaupt bilden lassen! (Es darf also jeder Stein des Dominospiels in beliebig vielen dieser Ketten auftreten.)
Dabei gelten zwei geschlossene Ketten genau dann als gleich, wenn sie bei geeigneter Wahl eines Anfangssteins und einer Durchlaufrichtung gleichlautende Zahlenfolgen zeigen.
Beispielsweise gelten die beiden Ketten (2, 4), (4, 5), (5, 5), (5, 1), (1, 2) und (5, 4), (4, 2), (2, 1), (1, 5), (5, 5) als einander gleich.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(a) Aus zwei verschiedenen Steine eines Dominospiels kann man keine geschlossene Kette bilden, denn in jeder geschlossenen Kette $(a,b),(b.a)$ aus zwei Steinen sind diese einander gleich.
Aus drei Steinen eines Dominospiels kann man eine geschlossene Kette bilden, z. B. (0,1),(1,2),(2,0). Also ist die in (a) gesuchte kleinste Anzahl $k = 3$.

(b) In jeder geschlossenen Kette $(a,b),(b,c),(c,a)$ aus 3 verschiedenen Steinen eines Dominospiels sind a, b und c drei paarweise verschiedene Zahlen; denn wäre $a = b$, so wären (b,c) und (c,a) zwei gleiche Steine; entsprechend widerlegt man $a = c$ und $b = c$.

Die Anzahl aller derjenigen Steine eines Dominospiels, die ein Paar verschiedener Zahlen tragen, ist $28 - 7 = 21$. Wegen $21 : 3 = 7$ lassen sich daher höchstens 7 Ketten in der geforderten Art bilden.

Dass sich 7 Ketten in dieser Art bilden lassen, zeigt das Beispiel

$$(0{,}1),(1{,}2),(2{,}0); \quad (0{,}3),(3{,}4),(4{,}0); \quad (0{,}5),(5{,}6),(6{,}0);$$
$$(1{,}3),(3{,}5),(5{,}1); \quad (1{,}4),(4{,}6),(5{,}2); \quad (2{,}3),(3{,}6),(6{,}2); \quad (2{,}4),(4{,}5),(5{,}2)$$

Also ist die in (b) gesuchte Anzahl $g = 7$.

(c) Wie in (b) gezeigt wurde, enthält jede geschlossene Kette aus drei verschiedenen Steinen eines Dominospiels drei paarweise verschiedene Zahlen. Umgekehrt gibt es zu je drei paarweise verschiedener Zahlen a, b, c genau drei Steine mit je einem Paar verschiedener dieser Zahlen, und es gibt (nach der Erklärung, welche geschlossenen Ketten als gleich zu gelten haben) genau eine geschlossene Kette aus diesen drei Steinen, nämlich die Kette $(a{,}b),(b{,}c),(c{,}a)$.
Also gibt es genau so viele geschlossene Ketten aus je drei verschiedenen Steinen, wie es Mengen aus je drei paarweise verschiedenen der Zahlen 0, ..., 6 gibt.

Drei Elemente aus einer Menge mit sechs verschiedenen Zahlen auszuwählen, ohne Bedeutung der Reihenfolge der Wahl und ohne wiederholte Wahl eines Elements, entspricht einer Kombination von n Elementen zur k-ten Klasse mit $n = 6$ und $k = 3$, d. h.

$$\binom{6}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35.$$

Die gesuchte Anzahl von Ketten ist 35.

Aufgabe 301035:
Man untersuche, ob es eine Menge M von 1991 verschiedenen positiven natürlichen Zahlen mit folgenden Eigenschaften gibt:
(1) Keine Zahl aus M enthält einen Primfaktor größer als 31.
(2) Kein Produkt von zwei verschiedenen Zahlen aus M ist eine Quadratzahl.

Lösung von cyrix:
Wir geben im Folgenden eine Menge M mit $2^{11} = 2048 > 1991$ verschiedenen positiven natürlichen Zahlen an, die die Bedingungen (1) und (2) erfüllt. Dann ist jede 1991-elementige Teilmenge von M eine, die die Bedingungen der Aufgabenstellung genügt.

Es sei P die Menge der elf Primzahlen 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 und 31, die sämtlich nicht größer als 31 sind. Für jede der 2^{11} Teilmengen von P bilden wir das Produkt der in ihr enthaltenen Primzahlen und nennen die Menge dieser Produkte M. Dann hat M genau $2^{11} = 2048$ Elemente. Diese sind offensichtlich alles positive ganze Zahlen.

Für jedes Element von M gilt, dass in seiner Primfaktorzerlegung nur die Primzahlen als P enthalten sind, also kein Primfaktor, der größer als 31 ist. Damit ist (1) erfüllt. Weiterhin ist jede Primzahl in der Primfaktorzerlegung eines jeden Elements höchstens mit dem Exponenten 1 enthalten.

Betrachten wir nun zwei verschiedene Zahlen a und b aus M bzw. ihre zugehörigen Teilmengen A und B aus P. Da diese verschieden sind (aufgrund der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung), gibt es mindestens ein Element $p \in P$, welches in der einen (o. B. d. A.) Teilmenge A enthalten ist, der anderen B aber nicht. Also ist dann a durch p teilbar, b aber nicht.
Damit ist ihr Produkt ab durch p teilbar. Da jedoch keine der Zahlen aus M, insbesondere also auch nicht a, durch p^2 teilbar ist, kann auch ab damit nicht durch p^2 teilbar nicht sein, sodass in der Primfaktorzerlegung von ab die Primzahl p mit ungeradem Exponenten 1 enthalten ist, also ab keine Quadratzahl sein

kann. (Bei Quadratzahlen ist in der Primfaktorzerlegung der Exponent jeder Primzahl gerade.) Also ist auch (2) erfüllt, □.

Aufgabe 321031:
Ermitteln Sie die Anzahl aller derjenigen Paare $(x; y)$ ganzer Zahlen x, y, für die gilt:

$$19 < x^2 + y^2 < 93$$

Lösung von cyrix:
Wegen $93 > x^2 + y^2 \geq x^2$ ist $9 \geq x^2$. Wir geben nun für jedes $0 \leq x \leq 9$ die Werte für y an, die diese Ungleichungskette erfüllen:

- $x = 0$, also $19 < y^2 < 93$, d. h. $5 \leq |y| \leq 9$ ($2 \cdot 5 = 10$ Lösungen)
- $x = 1$, also $18 < y^2 < 92$, d. h. $5 \leq |y| \leq 9$ (10 Lösungen)
- $x = 2$, also $15 < y^2 < 89$, d. h. $4 \leq |y| \leq 9$ (12 Lösungen)
- $x = 3$, also $10 < y^2 < 84$, d. h. $4 \leq |y| \leq 9$ (12 Lösungen)
- $x = 4$, also $3 < y^2 < 77$, d. h. $3 \leq |y| \leq 8$ (12 Lösungen)
- $x = 5$, also $y^2 < 68$, d. h. $|y| \leq 8$ (17 Lösungen)
- $x = 6$, also $y^2 < 57$, d. h. $|y| \leq 7$ (15 Lösungen)
- $x = 7$, also $y^2 < 44$, d. h. $|y| \leq 6$ (13 Lösungen)
- $x = 8$, also $y^2 < 29$, d. h. $|y| \leq 5$ (11 Lösungen) und
- $x = 9$, also $y^2 < 12$, d. h. $|y| \leq 3$ (7 Lösungen).

Damit gibt es insgesamt $10+10+12+12+12+17+15+13+11+7 = 119$ verschiedene Lösungspaare, die diese Ungleichungskette erfüllen.

Aufgabe 341033:
Antje und Beate beschließen, nachdem ihnen das Spielen mit gewöhnlichen Spielwürfeln zu langweilig wurde, diese durch reguläre Oktaeder zu ersetzen mit den Augenzahlen 1 bis 8.
Bevor sie an die Herstellung dieser Spieloktaeder gehen, vereinbaren sie noch, dass (in Analogie zum Spielwürfel) die Summe der Augenzahlen je zweier einander gegenüberliegender Flächen 9 betragen soll.
Als sie am nächsten Tag ihre selbstgebastelten Oktaeder vergleichen, stellen sie fest:
Ihre Oktaeder sind - auch bei Einhaltung der Vereinbarung - voneinander verschieden in dem Sinne, dass durch keine Drehung die Anordnung der Augenzahlen zur Übereinstimmung gebracht werden kann.
a) Ermitteln Sie, wie viel in dem genannten Sinne verschiedene Anordnungen der Augenzahlen es unter Einhaltung der Vereinbarung über gegenüberliegende Flächen insgesamt gibt!
b) Ermitteln Sie, wie viel in dem genannten Sinne verschiedene Anordnungen es insgesamt gibt, wenn die Vereinbarung über gegenüberliegende Flächen nicht eingehalten werden muss!

Lösung von cyrix:
a) Wir legen das Oktaeder so auf den Tisch, dass die Fläche mit der 1 nach unten zeigt. Dann liegt die Fläche mit der 8 oben. Nun drehen wir das Oktaeder so lang um seine senkrechte Symmetrieachse, bis die Fläche mit der 2 nach vorn zeigt.
Dann liegt ihr gegenüber die Fläche mit der 7. Darüber hinaus, ist die Lage des Oktaeders nun eindeutig bestimmt, während die verbleibenden vier Flächen noch mit den Zahlen von 3 bis 6 beschriftet werden

müssen:

Suchen wir zuerst den Platz für die 3, so haben wir dafür vier verschiedene Möglichkeiten, während die entsprechend gegenüberliegende Fläche mit der 6 beschriftet wird. Für die verbleibenden zwei Flächen gibt es nun noch zwei Möglichkeiten, welche von ihnen mit der 4, und die andere dann mit der 5 beschriftet wird. Insgesamt gibt es also genau $4 \cdot 2 = 8$ verschiedene Oktaederbeschriftungen, bei denen die Summe gegenüberliegender Flächen 9 ergibt, die sich nicht durch Drehung ineinander überführen lassen.

b) Wieder legen wir das Oktaeder mit der Fläche mit der 1 nach unten auf den Tisch. Dann gibt es 7 Möglichkeiten, welche Zahl die nach oben zeigende Fläche zeigt. Nun drehen wir das Oktaeder so, dass von den verbleibenden sechs Flächen diejenige mit der kleinsten Zahl nach vorn zeigt.
Damit ist die Lage des Oktaeders eindeutig bestimmt und die verbleibenden fünf Zahlen können in beliebiger Reihenfolge auf den noch verbleibenden fünf Flächen des Oktaeders verteilt werden. Dafür gibt es $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ Möglichkeiten, sodass es insgesamt $7 \cdot 120 = 840$ verschiedene Oktaederbeschriftungen gibt, die nicht durch Drehung ineinander überführt werden können.

IV. Runde 4

Aufgabe 041041:
Die 30 Preisträger eines Schülerwettbewerbs sollen mit neu herausgegebenen Fachbüchern prämiert werden.
Es stehen drei verschiedene Sorten von Büchern im Wert von 30 M, 24 M bzw. 18 M zur Verfügung.
Von jeder Sorte soll mindestens ein Buch gekauft werden.
Welche Möglichkeiten der Zusammenstellung gibt es, wenn für die Prämierung insgesamt 600 M zur Verfügung stehen, die ausgegeben werden sollen?

Lösung von Kitaktus:
Wir nehmen zunächst je ein Buch für 30 M, 24 M und 18 M heraus. Es bleiben noch 27 Bücher für insgesamt $600M - 30M - 24M - 18M = 528M$.
27 Bücher für je 18 M kosten zusammen 486 M, es bleiben also noch $528M - 486M = 42M$ übrig, die dazu verwendet werden können, um statt der 18 M-Bücher teurere Bücher zu kaufen.
Wir unterscheiden nun danach, wie viele Bücher zu 30 M gekauft werden:

a) 4 oder mehr sind nicht möglich, da dies Mehrkosten von mindestens 48 Mark verursacht
b) 3 Bücher kosten 36 Mark zusätzlich, es bleiben noch 6 Mark, mit denen genau ein 18 M Buch durch ein 24 M-Buch ersetzt werden kann.
c) 2 Bücher zu 30 M und drei Bücher zu 24 M
d) 1 Buch zu 30 M und fünf Bücher zu 24 M
e) kein Buch zu 30 M und sieben Bücher zu 24 M

Insgesamt ergeben sich vier Möglichkeiten

30 M	24 M	18 M
4	2	24
3	4	23
2	6	22
1	8	21

Eine Probe bestätigt, dass in allen vier Fällen die Bedingungen der Aufgabe erfüllt sind.

Aufgabe 061046:
Geben Sie die Gesamtanzahl aller verschiedenen ganzzahligen Lösungspaare (x, y) der Ungleichung

$$|x| + |y| \leq 100$$

an! Dabei gelten zwei Lösungspaare (x_1,y_1), (x_2,y_2) genau dann als gleich, wenn $x_1 = x_2$ und $y_1 = y_2$ ist.

Lösung von Matthias Lösche:
Sei $x = 0$ dann sind für y möglich: $-100...100 \Rightarrow$ Anzahl: 201
Sei $x = -1$ oder 1 dann sind für y möglich: $-99...99 \Rightarrow$ Anzahl: $2 \cdot 199$
Sei $x = -2$ oder 2 dann sind für y möglich: $-98...98 \Rightarrow$ Anzahl $2 \cdot 197$
usw. bis
Sei $x = -99$ oder 99 dann sind für y möglich $-1...1 \Rightarrow$ Anzahl: $2 \cdot 3$
Sei $x = -100$ oder 100 dann sind für y möglich: $0 \Rightarrow$ Anzahl : $2 \cdot 1$

$$2\sum_{i=1}^{100}(2i-1) + 201 = 2 \cdot 100^2 + 201 = 20201$$

Aufgabe 261045:
Bei einem Dominospiel mit den Zahlen 0, 1, 2, ..., 6 ist jeder Spielstein in zwei Hälften eingeteilt, jede Hälfte trägt eine der Zahlen.
In einem Dominospiel kommen alle Kombinationen von je zwei der Zahlen 0, 1, 2, ..., 6 je genau einmal vor.
Eine Kette entsteht, wenn man mehrere Steine in einer Folge so nebeneinanderlegt, dass benachbarte Hälften nebeneinanderliegender Steine stets einander gleiche Zahlen tragen.
Eine Kette heißt geschlossen, wenn auch die beiden Steinhälften an den beiden freien Enden der Kette einander gleiche Zahlen tragen.
Eine geschlossene Kette aus drei verschiedenen Steinen werde kurz Dreierkette genannt. Zwei Dreierketten gelten genau dann als gleich, wenn sie aus den selben Steinen bestehen.
Ermitteln Sie die Anzahl aller derjenigen aus je genau 7 verschiedenen Dreierketten $K_1, \ldots, K_7$ bestehenden Mengen $\{K_1, \ldots, K_7\}$, bei denen jeder Stein des Dominospiels in höchstens einer der Ketten $K_1, \ldots, K_7$ vorkommt!
(Wie üblich heißen zwei Mengen M= $\{K_1, \ldots, K_7\}$ und $M' = \{K'_1, \ldots, K'_7\}$ genau dann einander gleich, wenn jede in der Menge M enthaltene Kette K_i auch in M' enthalten ist und umgekehrt auch jede in M' enthaltene Kette in M.)

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
In jeder Dreierkette $(a,b),(b,c),(c,a)$ sind a,b,c drei paarweise verschiedene Zahlen; denn wäre $a = b$, so wären (b,c) und (c,a) zwei gleiche Steine; entsprechend widerlegt man $a = c$ und $b = c$.
Umgekehrt gibt es zu je drei paarweise verschiedenen Zahlen a,b,c genau eine Dreierkette, die diese Zahlen enthält. Ferner gilt:

I. Wenn $M = \{K_1, \ldots, K_7\}$ eine Menge mit den in der Aufgabe beschriebenen Eigenschaften ist, so folgt: Da in den Dreierketten $K_1, \ldots, K_7$ kein Stein mehrmals auftritt, enthalten sie 21 Steine. Da das Dominospiel aber nur 21 Steine (a,b) mit $a \neq b$ enthält, kommt jeder dieser Steine in genau einer der Ketten $K_1, \ldots, K_7$ vor.
Also enthält einer dieser Ketten, o. B. d. A. die Kette K_1, den Stein (0,1). Man kann daher eine eventuelle Umbenennung der Zahlen 2,3,4,5,6 so vornehmen, dass diejenige dieser fünf Zahlen die neue Benennung 2 (1) erhält, mit der

$$K_1 = (0,1),(1,2),(2,0) \tag{2}$$

ist. Weiter enthält nun eine der Ketten $K_2, \ldots, K_7$, o. B. d. A. die Kette K_2 den Stein (0,3). Da K_2 außerdem keinen der in (2) genannten Steine enthält, folgt somit: In K_2 kommt außer 0 und 3 als dritte

Zahl weder 1 noch 2 vor. Man kann daher eine Umbenennung der Zahlen 4,5,6 so vornehmen, dass diejenige dieser drei Zahlen die neue Benennung 4 (3) erhält, mit der

$$K_2 = (0,3)(3,4),(4,0) \tag{4}$$

ist. Danach folgt:
O. B. d. A. enthält K_3 den Stein (0,5) und außerdem keinen der Steine in (2), (4), also außer 0, 5 keine der Zahlen 1,2,3,4. Somit ist

$$K_3 = (0,5)(5,6),(6,0) \tag{5}$$

O. B. d. A. enthält K_4 den Stein (1,3) und außerdem keinen der Steine in (2), (4). Als kann man eine Umbenennung der Zahlen 5,6 so vornehmen, dass diejenige Zahle dieser zwei Zahlen die neue Bezeichnung 5 (6) erhält mit der

$$K_4 = (1,3)(3,5),(5,1) \tag{7}$$

O. B. d. A. enthält K_5 den Stein (1,4) und außerdem keinen der Steine in (2), (4),(7). Somit ist

$$K_5 = (1,4)(4,6),(6,1) \tag{8}$$

O. B. d. A. enthält K_6 den Stein (2,3) und außerdem keinen der Steine in (4),(7). Somit ist

$$K_6 = (2,3)(3,6),(6,2) \tag{9}$$

Für K_7 verbleibt nur

$$K_7 = (2,4)(4,5),(5,2) \tag{10}$$

Also können nur solche Mengen $M = \{K_1,...,K_7\}$ die in der Aufgabe genannten Eigenschaften haben, die nach Ausführung von Umbenennungen gemäß (1), (3), (6) die in (2), (4), (5), (7), (8), (9), (10) genannten Ketten enthalten.

II. Jede solche Menge hat diese Eigenschaften, da eine Umbenennung gemäß (3) die Kette (2) nicht ändert und ebenso eine Umbenennung gemäß (6) keine der Ketten (2), (4), (5) ändert, so dass die an M gestellten Forderungen der Aufgabe sich - nach diesen Umbenennungen - aus den Angaben (2), (4), (5), (7), (8), (9), (10) bestätigen lassen.

III. Mit I. und II. ist bewiesen, dass genau alle diejenigen Mengen $M = \{K_1, \dots, K_7\}$, die gemäß (1) - (10) zu erhalten sind, die in der Aufgabe geforderten Eigenschaften haben.
Ferner folgt: Je zwei solche Mengen M, M', bei deren Gewinnung zwei unterschiedliche Wahlen in (1) getroffen wurden, sind voneinander verschieden, da diejenige Kette, die nach der zu M führenden Wahl (1) die in (2) genannte Kette K_1 ist, nicht in M' vorkommt.

Ebenso folgt: Je zwei Mengen M, M', bei deren Gewinnung zwar dieselbe Wahl in (1), aber unterschiedliche Wahlen in (3) getroffen wurden, sind voneinander verschieden, da die in M gemäß (4) enthaltene Kette K_2 nicht in M' vorkommt. Entsprechend sind auch je zwei Mengen voneinander verschieden, bei deren Gewinnung in (1) sowie in (3) jeweils gleichlautende Wahlen, aber in (6) unterschiedliche Wahlen getroffen wurden.

Somit ergibt sich insgesamt: Man erhält bei allen nur den $5 \cdot 3 \cdot 2$ Möglichkeiten, die Wahlen in (1), (3), (6) zu treffen, Mengen mit den in der Aufgabe geforderten Eigenschaften, jede dieser Mengen genau einmal. Also beträgt die gesuchte Anzahl dieser Mengen $5 \cdot 3 \cdot 2 = 30$.

Aufgabe 271045:
Worte aus den Buchstaben E, R und S sollen nach folgenden Regeln aus einem zu Anfang vorgegebenen Wort gebildet werden:
(1) Endet das Wort auf S, so kann ein R angefügt werden.
(2) An ein Wort darf dasjenige Wort angefügt werden, welches aus den gleichen Buchstaben, aber in

umgekehrter Reihenfolge besteht.
(3) Treten in einem Wort drei gleiche Buchstaben unmittelbar hintereinander auf, dann dürfen sie durch ein R ersetzt werden.
(4) Zwei aufeinanderfolgende R oder E dürfen weggelassen werden.
Eine beliebige Wahl der Reihenfolge und beliebig häufige Wiederholung der Regelanwendung sind zugelassen.
Ist es möglich, durch genügend häufige Anwendung dieser Regeln aus dem Wort ES das Wort ER zu erhalten?

Lösung von OlgaBarati:
Es gibt hier zwei Start-Szenarien, einmal mit Regel (1) ESR und einmal mit Regel (2) ESSE welche sich mit den Regeln (2),(3),(4) beliebig fortsetzen lassen.
z. B. ES ESSE ESSEESSE ESSSSE ERRRSE ERSE.
z. B. ESR ESRRSE ESSE

Entscheidend ist jedoch, jedes nachfolgende Wort beginnt stets mit E und endet mit E.
Die zwischen E....E liegenden Buchstaben S sind mit den gegebenen Regeln nicht vollständig zu eliminieren, da bedingt durch die Regeln (2) und (4) S stets aus 2er-Potenzen besteht und daher mit Regel (3) nicht vollständig zu eliminieren ist.

Sei 2^n der Anzahl der Buchstaben S die durch Anwendung der Regeln (2),(4) gebildet wird und $2^m \cdot 3$ die Anzahl der Buchstaben S die durch Regel (3) eliminiert werden.

$$n,m \in \mathbb{N}_0 \qquad ; \qquad 2^n - 2^m * 3 \neq 0$$

$$2^n \neq 2^m \cdot 3 \qquad ; \qquad 2^{n-m} \neq 3$$

Man gelangt also nicht zu E, EE bzw. EEEE woraus über ERRR dann ER werden könnte. Es ist nicht möglich mit den gegebenen Regeln aus dem Wort ES das Wort ER zu erhalten.

Aufgabe 301045:
Ein Mathematiklehrer, der demnächst den Flächeninhalt von Kreisen behandeln wollte, stellte folgende vorbereitende Hausaufgabe:
Auf kariertem Papier (quadratische Kästchen) der Seitenlänge 5 mm) sollten die Schüler um einen Eckpunkt eines Kästchens Kreise mit den Radien 1 cm, 2 cm, 3 cm, 4 cm und 5 cm zeichnen.
Zu jedem dieser Kreise sollten sie unter allen Kästchen, die gemeinsame Punkte mit der Kreisfläche haben, diejenigen zählen,
a) die vollständig in der Kreisfläche enthalten sind,
b) deren Vereinigungsmenge die Kreisfläche vollständig überdeckt.
Offenbar ergibt das Produkt des Flächeninhaltes eines Kästchens mit der in (a) gefundenen Anzahl einen zu kleinen Näherungswert für den Flächeninhalt des Kreises, mit der in (b) gefundenen Anzahl dagegen einen zu großen Näherungswert.
Anschließend sollte noch das arithmetische Mittel dieser beiden Näherungswerte (als ein dritter Näherungswert) berechnet werden.
Die Schüler, die sehr sorgfältig gearbeitet hatten, erhielten folgende Ergebnisse:

Radius r in cm	Anzahl der bei a)	Kästchen bei b)	Näherungswert des Flächeninhalts in cm^2
1	4	16	$(1 + 4) : 2 = 2{,}5$
2	32	60	$(8 + 15) : 2 = 11{,}5$
3	88	132	$(22 + 33) : 2 = 27{,}5$
4	164	224	$(41 + 56) : 2 = 48{,}5$
5	276	344	$(69 + 86) : 2 = 77{,}5$

Nun wurde bemerkt, dass jeweils die Maßzahlen des dritten Näherungswertes sämtlich nach dem Komma die Ziffer 5 haben.

Trifft das auch bei der Wahl aller Radien r zu, deren Maßzahlen in cm die natürlichen Zahlen größer als 5 sind?

Lösung von cyrix:
Wir legen ein Koordinatensystem so in die Ebene des karierten Papiers, dass dessen Koordinatenursprung im Mittelpunkt des zu zeichnenden Kreises liegt, dessen Koordinatenachsen mit den durch diesen Eckpunkt eines Kästchens verlaufenden Gitterlinien zusammenfallen und die Kästchenlänge 1 betrage. (Damit sind also geradzahlige Radien $r > 10$ zu betrachten.)

Wir bemerken, dass bei einer Drehung um den Koordinatenursprung um den Winkel 90° der Kreis wieder auf sich selbst und Kästchen wieder auf Kästchen, jedoch keines auf sich selbst, abgebildet werden. Also genügt es, die jeweiligen Kästchen im ersten Quadranten zu zählen und deren Anzahl dann mit vier zu multiplizieren, da es aufgrund der Drehung in den anderen Quadranten immer genauso viele Kästchen der entsprechenden Sorte wie im ersten Quadranten gibt.

Es sei A die Anzahl der Kästchen im ersten Quadranten, die vollständig innerhalb des Kreises liegen. Identifizieren wir ein Kästchen mit den Koordinaten (x,y) seiner rechten oberen Ecke, wobei also x und y dann beides positive ganze Zahlen sind, so liegt das Kästchen genau dann vollständig in der Kreisfläche, wenn $x^2 + y^2 \leq r^2$ gilt.

Analog sei B die Anzahl der Kästchen im ersten Quadranten, die gemeinsame Punkte mit dem Kreis besitzen. Bezeichne hier (u,v) die Koordinaten der linken unteren Ecke des Kästchens, wobei dann u und v nicht-negative ganze Zahlen sind. Dann besitzt das Kästchen genau dann mindestens einen gemeinsamen Punkt mit dem Kreis, wenn die linke untere Ecke des Kästchens noch im oder auf dem Kreis liegt, also $u^2 + v^2 \leq r^2$ gilt.

Offenbar führt jede Lösung von $x^2+y^2 \leq r^2$ mit $x,y \in \mathbb{Z}_{>0}$ via $u := x$, $v := y$ auch zu einer von $u^2+v^2 \leq r^2$, sodass $B \geq A$ gilt. Tatsächlich erhält man so natürlich alle Lösungen der zweiten Ungleichung, für die weder u noch v Null sind. Es fehlen also genau diese, wo mindestens eine der beiden Variablen verschwindet.

Ist $u = 0$, so kann v alle Werte von 0 bis r annehmen, analog anders herum. Da die Lösung (0,0) hier in beiden Fällen mitgezählt wurde, hat die Ungleichung $u^2 + v^2 \leq r^2$ also (für nicht-negativ ganzzahliges r) genau $2r - 1$ Lösungen, bei denen mindestens eine der beiden Variablen u bzw. v Null ist.
Also gilt $B = A + (2r - 1)$ bzw. $\frac{A+B}{2} = A + r - \frac{1}{2}$.

Da die tatsächliche Kästchenanzahl in allen vier Quadranten insgesamt das Vierfache der hier gezählten Kästchen im ersten Quadranten ist, gilt für das arithmetische Mittel der insgesamt gezählten Kästchenanzahlen, dass dieses ein Vielfaches von 4 ist, von dem 2 subtrahiert werden. Da der Flächeninhalt eines Kästchens $\frac{1}{4}\text{cm}^2$ beträgt, ist also für jedes ganzzahlige r (d. h., der gezeichnete Kreis hat einen Radius, der ein natürliches Vielfaches der Kästchenlänge von 5mm ist) das arithmetische Mittel der errechneten Flächeninhalte eine ganze Zahl von cm^2 minus $\frac{1}{2} = 0{,}5$, sodass die Maßzahl des dritten Näherungswerts immer auf $\ldots{,}5$ endet.

Aufgabe 321042:
Für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ denke man sich in

$$p_n(x) = (x^2 + x + 1)^n$$

auf der rechten Seite durch genügend häufiges Ausmultiplizieren alle Klammern beseitigt und den entstehenden Ausdruck nach Potenzen von x geordnet, so dass in dem (so geschriebenen) Polynom

jede Potenz von x genau einen Koeffizienten erhält (eine Zahl, die als Faktor bei dieser Potenz steht).
a) Beweisen Sie, dass für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ gilt:
Bei dieser Darstellung von $p_n(x)$ sind mindestens drei Koeffizienten ungerade.
b) Beweisen Sie, dass es unendlich viele natürliche Zahlen n gibt, für die gilt:
Bei dieser Darstellung von $p_n(x)$ sind genau drei Koeffizienten ungerade.

Lösung von ochen:
a) Die Koeffizienten von x^0 und x^{2n} in dieser Darstellung sind 1, da wir das Monom x^0 nur bekommen, wenn wir n mal x^0 miteinander multiplizieren und wir das Monom x^{2n} nur bekommen, wenn wir n mal x^2 miteinander multiplizieren.
Weiter ist die Summe aller Koeffizienten $p_n(1) = 3^n$ und somit ungerade. Wären die Koeffizienten von x^0 und x^{2n} die einzigen ungeraden, wäre aber die Summe aller Koeffizienten gerade. Somit muss es einen dritten ungeraden Koeffizienten geben.

b) Wir zeigen erst folgendes Lemma.

Sei $m \in \mathbb{N}$ beliebig und $n = 2^m$. Weiter seien $0 < k < n$ beliebig, so ist $\binom{n}{k}$ gerade.

Beweis: Sei s die größte natürliche Zahl, sodass k durch 2^s teilbar ist. Insbesondere ist $s < m$, also folgt

$$2^{-s} \cdot k\binom{n}{k} = 2^{-s} \cdot n\binom{n-1}{k-1} = 2^{m-s} \cdot \binom{n-1}{k-1}.$$

Da die rechte Seite gerade ist und $2^{-s}k$ ungerade ist, muss $\binom{n}{k}$ gerade sein. □

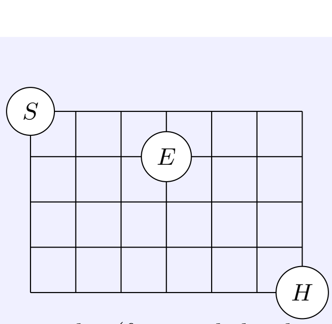
Sei m eine beliebige natürliche Zahl und $n = 2^m$. Dann betrachten wir das Polynom p_n mit $n = 2^m$.
Wir wenden nun den binomischen Lehrsatz an

$$(1+x+x^2)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k x^{2(n-k)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}x^l x^{2(n-k)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{k}\binom{n}{k}\binom{k}{l}x^l x^{2(n-k)} = \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{k}\binom{n}{k}\binom{k}{l}x^{2(n-k)+l}$$

Nach obigem Lemma ist $\binom{n}{k}\binom{k}{l}$ gerade, falls $k,l \notin \{0,n\}$ ist. Falls $k,l \in \{0,n\}$ ist, handelt es sich bei $x^{2(n-k)+l}$ um eines der Monome x^0,x^n,x^{2n}.
Andernfalls werden nur Monome mit geradzahligen Koeffizienten summiert. Somit sind x^0,x^n,x^{2n} die einzigen Monome mit ungeraden Koeffizienten, falls n eine Zweierpotenz ist. Da es unendlich viele Zweierpotenzen gibt, ist die Aussage gezeigt.

Aufgabe 321045:
In der Abbildung wird ein Stadtteil skizziert; die Linien stellen die Straßen dar.
Robert wählt für seinen Weg von der Schule S nach Hause H an jedem Schultag einen der möglichst kurzen Wege.
Kommt er an die Ecke E, so kauft er sich ein Eis.



Auf die Bitte, dies möge nicht zu oft vorkommen, vereinbart er, an jeder (für möglichst kurze Wege) möglichen Abzweigung durch Zufall zu entscheiden, welche der zwei zu wählenden Richtungen er einschlägt, das heißt so, dass jede dieser zwei Richtungen, unabhängig von der vorher getroffenen

Entscheidung, im Durchschnitt gleich oft vorkommt.

Nach so langer Zeit, dass derartige Zufallsaussagen sinnvoll sind, stellt sich heraus:
Robert hat im Durchschnitt an einem Drittel aller Schultage ein Eis gekauft.
a) Er erklärt dazu: „Mehr als ein Drittel aller möglichst kurzen Wege von S nach H führen über die Ecke E."
Trifft das zu?
b) Seine Mutter meint: „Dennoch müsste - bei Zufallsentscheidungen im vereinbarten Sinn - durchschnittlich an weniger als einem Drittel aller Schultage der Weg über E führen."
Trifft das zu?

Lösung von cyrix:
a) Um auf einem möglichst kurzen Weg nach Hause zu kommen, muss er – in beliebiger Reihenfolge – 6 Wegstücke nach rechts und 4 nach unten zurücklegen. Dafür gibt es $\binom{6+4}{4} = \binom{10}{4} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 10 \cdot 3 \cdot 7 = 210$ Möglichkeiten, sodass Robert genau so viele Wege prinzipiell zur Verfügung hat.

Bei E kommt er nur genau dann vorbei, wenn unter den ersten vier Wegstücken genau eines nach unten dabei war. Dafür gibt es $\binom{4}{1} = 4$ mögliche Wege von S nach E. Um nach dem Eiskauf noch nach Hause zu kommen, müssen weitere 3 Wegstücke nach rechts und 3 nach unten zurückgelegt werden, wofür es $\binom{3+3}{3} = \binom{6}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$ Möglichkeiten gibt, sodass genau $4 \cdot 20 = 80 > 70 = \frac{1}{3} \cdot 210$ möglichst kurze Wege von S nach H über E führen. Robert hat also mit seiner Aussage recht.

b) Um die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, dass Robert durch Zufallsentscheidungen von S nach E gelangt, genügt es, die Wahrscheinlichkeit für jeden dieser Wege von S nach E zu bestimmen und diese zu addieren.

Jeder dieser Wege besitzt eine Länge von 4 und tatsächlich ist sowohl zu Beginn als auch an jedem Zwischenpunkt eine Entscheidung zu treffen, da an jeder dieser Stelle zwei mögliche Fortsetzungen für kürzeste Wege nach H existieren. Also hat jeder dieser Wege eine Wahrscheinlichkeit von $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$, sodass Robert nur mit einer Wahrscheinlichkeit von $4 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{4} < \frac{1}{3}$ in E vorbeikommen dürfte. Roberts Mutter hat also mit ihrer Aussage auch recht.

VII. Oberstufe

VII.I. Mengen; Logik; Optimierung; Graphentheorie

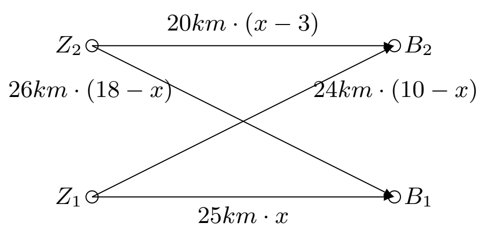
I. Runde 1

Aufgabe 011212:
Bei der Planung unserer Volkswirtschaft werden in zunehmendem Maße mathematische Methoden angewandt. Das gilt ganz besonders für das Transportwesen, bei dem es darauf ankommt, mit möglichst geringen Kosten eine optimale Leistung zu erreichen. Man nennt die angewandte Methode, die erstmalig 1939 von Prof. L. W. Kantorowitsch in Leningrad vorgeschlagen wurde, die Methode der linearen Programmierung.
Das folgende Beispiel, das sehr stark vereinfacht wurde, da in Wirklichkeit die Verhältnisse viel komplizierter sind, zeigt das Prinzip der Methode:
Zwei Ziegeleien produzieren 10 Millionen bzw. 15 Millionen Ziegel. Sie sollen zwei Baustellen versorgen, die einen Bedarf von 18 Millionen bzw. 7 Millionen Ziegel haben. Die Entfernungen betragen:

- 1. Ziegelei zur 1. Baustelle 25 km,
- 1. Ziegelei zur 2. Baustelle 24 km,
- 2. Ziegelei zur 1. Baustelle 26 km,
- 2. Ziegelei zur 2. Baustelle 20 km.

Zu welchen Baustellen müssen die von der 1. bzw. 2. Ziegelei produzierten Ziegel transportiert werden, damit die Gesamttransportkosten möglichst gering sind?
Dabei wird angenommen, dass die Transportkosten der Entfernung proportional sind.

Lösung von Eckard Specht:



Die von der i. Ziegelei Z_i zur j. Baustelle B_j $(i,j=1,2)$ zu transportierenden Mengen an Ziegeln seien z_{ij}, insbesondere sei $z_{11}=x$ (alle Mengenangaben in Millionen Stück).
Dann gilt gemäß Aufgabenstellung:

$$z_{12} = 10 - x; \qquad z_{21} = 18 - x; \qquad z_{22} = x - 3$$

Dabei müssen alle $z_{ij} \geq 0$ sein; diese Bedingungen führen auf die Ungleichungen

$$3 \leq x \leq 10 \tag{1}$$

Nun stellen wir die Kostenfunktion auf, die die Summe aller Produkte aus Anzahl zu transportierender Ziegel mal jeweilige Entfernung (alles in km) ist:

$$f(x) = 25 \cdot x + 24 \cdot (10-x) + 26 \cdot (18-x) + 20 \cdot (x-3) = -5 \cdot x + 648 \rightarrow \text{ Minimum}$$

Dies ist eine lineare Funktion mit negativem Anstieg, die ihren Minimalwert wegen (1) folglich an der rechten Intervallgrenze $x = 10$ annimmt.
Daraus ergibt sich: $z_{11} = 10, z_{12} = 0, z_{21} = 8$ und $z_{22} = 7$.

Aufgabe 041215:
In einer IL 18 der Interflug, die nach Berlin fliegt, sitzen fünf Fluggäste in einer Reihe nebeneinander. Ihre Berufe sind: Journalist, Feinmechaniker, Lehrer, Kapitän und Ingenieur. Sie gehören den folgenden Nationen an: Polen, DDR, Ungarn, Zypern und UdSSR. Sie sind verschieden alt (21, 24, 32, 40 und 52 Jahre). Die Fluggäste treiben verschiedene Sportarten (Handball, Schwimmen, Volleyball, Leichtathletik und Fußball). Ihre Reiseziele sind: Berlin, Leipzig, Dresden, Karl-Marx-Stadt und Rostock.

Aus Gesprächen entnehmen wir folgende Angaben:

(1) Der Ingenieur sitzt ganz links.

(2) Der Volleyballspieler hat den mittleren Platz.

(3) Der Pole ist Journalist.

(4) Der Feinmechaniker ist 21 Jahre alt.

(5) Der Lehrer treibt Schwimmsport.

(6) Der Kapitän reist nach Rostock.

(7) Der Handballspieler stammt aus der DDR.

(8) Der Reisende aus der Sowjetunion fliegt nach Leipzig.

(9) Der nach Berlin fliegende Reisende ist 32 Jahre alt.

(10) Der Leichtathlet hat das Reiseziel Karl-Marx-Stadt.

(11) Der Fluggast aus der DDR sitzt neben dem Fluggast aus Ungarn.

(12) Der 52jährige sitzt neben dem Reisenden, der nach Dresden fliegt.

(13) Der 24jährige sitzt neben dem Reisenden, der nach Leipzig fliegt.

(14) Der Ingenieur sitzt neben dem Zyprioten.

a) Wie alt ist der Kapitän?

b) Welche Staatsangehörigkeit besitzt der Fußballspieler?

Weisen Sie nach, dass die Angaben ausreichen, um beide Fragen eindeutig zu beantworten!

Lösung von W. Engel und U. Pirl:
Die Sitzplätze werden, von links beginnend, der Reihe nach mit 1, 2, 3, 4 und 5 nummeriert.

Behauptung:

(1) Auf Platz 1 sitzt der Ingenieur.

(15) Auf Platz 2 sitzt der Zypriot wegen (1) und (14).

(16) Auf Platz 1 sitzt der Reisende aus der UdSSR, er ist Ingenieur, fliegt nach Leipzig und ist Fußballspieler.

Beweis: Auf Platz 1 sitzt nicht der Reisende aus Polen wegen (1) und (3), nicht der Reisende aus der DDR und der aus Ungarn wegen (11) und (15) und nicht der Reisende aus Zypern wegen (15). Wegen (8) fliegt er nach Leipzig und ist wegen (10) nicht Leichtathlet, wegen (1) und (5) nicht Schwimmer, wegen (7) nicht Handballspieler und wegen (2) nicht Volleyballspieler. Damit ergibt sich die Antwort auf a): Der Fußballspieler ist Bürger der UdSSR.

Behauptung:

(17) Der Zypriot ist 24 Jahre alt wegen (13), (16) und (14).

(18) Der Kapitän spielt Volleyball oder Handball.

Beweis: Der Kapitän spielt nicht Fußball wegen (16). Er ist nicht Leichtathlet wegen (6) und (10) und nicht Schwimmer wegen (5).

Behauptung:

(19) Der Kapitän ist Ungar oder Deutscher.

Beweis: Der Kapitän ist nicht aus der UdSSR wegen (16), nicht aus Polen wegen (3) und nicht aus Zypern wegen (18), (2) und (15) bzw. (18) und (7).

Behauptung:

(20) Der Kapitän sitzt auf Platz 3, 4 oder 5 wegen (1), (15) und (19).

(21) Der Kapitän ist 40 oder 52 Jahre alt.

Beweis: Er ist nicht 21 Jahre wegen (4), nicht 24 Jahre wegen (17) und (19) und nicht 32 Jahre wegen (6) und (9).

Behauptung:

(22) Der Zypriot auf Platz 2 reist nach Dresden.

Beweis: Er reist nicht nach Berlin wegen (9) und (17), nicht nach Rostock wegen (19) und (6), nicht nach Leipzig wegen (16) und nicht nach Karl-Marx-Stadt, denn dann wäre er wegen (10) Leichtathlet, daher wegen (18) nicht Kapitän, wegen (5) nicht Lehrer, wegen (16) nicht Ingenieur und wegen (3) nicht Journalist, also Feinmechaniker. Dann wäre er 21 Jahre alt wegen (4) im Widerspruch zu (17).

Behauptung:

(23) Der Kapitän ist 40 Jahre alt.

Beweis: Angenommen, das wäre nicht der Fall, dann wäre er wegen (21) 52 Jahre alt und säße wegen (12), (22) und (16) auf Platz 3. Er wäre also wegen (2) Volleyballspieler und wegen (7) und (19) Ungar. Dann säße wegen (11) und (15) der Deutsche auf Platz 4, wäre nicht Ingenieur wegen (16), nicht Lehrer wegen (7) und (5), nicht Journalist wegen (3), sondern Feinmechaniker und daher 21 Jahre wegen (4). Daher hätte der Reisende aus der DDR nicht das Reiseziel Berlin wegen (9) und nicht die Reiseziele Leipzig wegen (16), Dresden wegen (22), Rostock wegen (6) und Karl-Marx-Stadt wegen (7) und (10) im Widerspruch zur Voraussetzung, dass eine der fünf Städte sein Reiseziel ist. Damit ergibt sich die Antwort b): Der Kapitän ist 40 Jahre alt.

Aufgabe 061212:
In einer Ebene sind fünf Punkte gegeben, von denen keine drei auf einer Geraden liegen. Je zwei dieser Punkte sind entweder durch eine rote oder eine blaue Strecke so verbunden, dass keine drei von diesen Strecken ein Dreieck derselben Farbe bilden.

a) Beweisen Sie:

(1.) Von jedem der fünf gegebenen Punkte gehen genau zwei rote und genau zwei blaue Strecken aus.

(2.) Die roten Strecken bilden einen geschlossenen Streckenzug, der alle fünf gegebenen Punkte enthält. Dasselbe gilt für die blauen Strecken.

b) Ermitteln Sie die Anzahl aller (voneinander verschiedenen) Möglichkeiten, die gegebenen fünf Punkte unter den Bedingungen der Aufgabe durch rote und blaue Strecken zu verbinden!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Da man in der Aufgabenstellung die Worte „rot“ und „blau“ miteinander vertauschen kann, ohne die Aufgabe zu ändern, genügt es, alle Behauptungen für die roten Strecken zu beweisen.

a) 1. Die gegebenen Punkte seien A, B, C, D, E. Nimmt man an, dass von Punkt A drei rote Strecken, z. B. B, AC, AD ausgehen, so müssten die Strecken BC, DB, CD blau sein, da sonst ein „rotes“ Dreieck entstehen würde (Bild 1).

Dann entstünde aber ein „blaues“ Dreieck, was den Bedingungen der Aufgabe widerspricht. Also können von jedem Punkt höchstens zwei rote und daher auch höchstens zwei blaue Strecken ausgehen. Da von jedem Punkt genau vier Strecken ausgehen müssen, gehen von jedem Punkt genau zwei rote und genau zwei blaue Strecken aus, falls die Bedingungen überhaupt realisierbar sind.

2. Es seien z. B. die Strecken AB und AC rot, die Strecken AD und AE blau. Dann ist BC blau und DE rot (Bild 2).

Da vom Punkt D zwei rote Strecken ausgehen, ist DC entweder rot oder blau. Ist DC rot, dann ist CE blau, BE rot, BD blau. In diesem Falle ergeben sich die geschlossenen gleichfarbigen Streckenzüge $ACDEBA$ (rot) und $AECBDA$ (blau), vgl. Bild 2. Ist CD jedoch blau, so erhält man die folgenden gleichfarbigen Streckenzüge $ACEDBA$ (rot) und $ADCBEA$ (blau), vgl. Bild 3.

b) Betrachten wir nun o. B. d. A. die vier von A ausgehenden Strecken! Es gibt für sie genau $\binom{4}{2} = 6$ verschiedene Möglichkeiten, genau zwei von ihnen rot zu färben. Für jede dieser Möglichkeiten gibt es auf Grund der Überlegungen unter a) 2. genau zwei paarweise voneinander verschiedene Verbindungsschemata. Daher gibt es genau 12 verschiedene Realisierungen der Aufgabe.

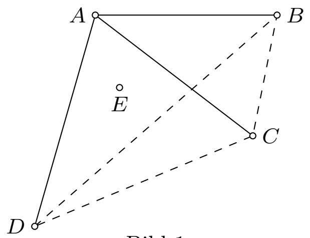


Bild 1

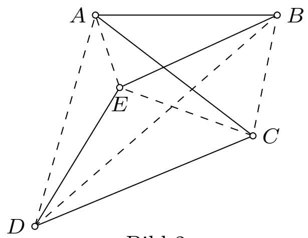


Bild 2

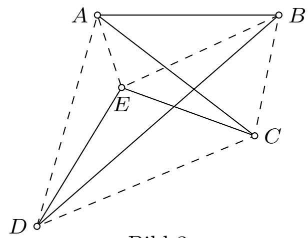


Bild 3

Aufgabe 071211:
Vier Personen A, B, C, D legten gemeinsam eine positive ganze Zahl fest. Jeder der vier gibt über diese Zahl die folgenden drei Auskünfte, von denen jeweils mindestens eine wahr und mindestens eine falsch ist:

A: 1. Die Zahl ist durch 4 teilbar;
2. sie ist durch 9 teilbar;
3. das 11-fache der Zahl ist kleiner als 1000.

B: 1. Die Zahl ist durch 10 teilbar;
2. sie ist größer als 100;
3. das 12-fache der Zahl ist größer als 1000.

C: 1. Die Zahl ist eine Primzahl;
2. sie ist durch 7 teilbar;
3. sie ist kleiner als 20.

D: 1. Die Zahl ist nicht durch 7 teilbar;
2. sie ist kleiner als 12;
3. das 5-fache der Zahl ist kleiner als 70.

Wie lautet die Zahl?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Zur Abkürzung bezeichnen wir die gegebenen Auskünfte mit A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3 usw. Wir untersuchen zunächst die Auskünfte C_1, C_2, C_3. Von ihnen ist mindestens eine wahr und mindestens eine falsch. Es ergeben sich also die in der folgenden Tafel aufgeführten sechs Fälle, wobei jeweils zur Abkürzung eine wahre Aussage mit W und eine falsche mit F bezeichnet wird:

	1	2	3	4	5	6
C_1	W	W	W	F	F	F
C_2	W	F	F	W	W	F
C_3	F	W	F	W	F	W

1. Sind C_1 und C_2 wahr, so ist die gedachte Zahl z eine durch 7 teilbare Primzahl, also $z = 7$. Dann ist auch C_3 wahr, was der Voraussetzung widerspricht. Dieser Fall kann also nicht eintreten.

2. Sind C_1 und C_3 wahr und ist C_2 falsch, so ist z eine nicht durch 7 teilbare Primzahl und $z > 20$. Dann sind die Auskünfte B_1, B_2 und B_3 sämtlich falsch, was der Voraussetzung widerspricht, so dass auch dieser Fall nicht eintreten kann.

3. Ist C_1 wahr und sind C_2 und C_3 falsch, so ist z Primzahl und $z \geq 20$. Dann sind A_1 und A_2 falsch, also A_3 wahr, d. h. $11z < 1000$, $z \leq 90$. Daher sind ferner B_1 und B_2 falsch, also B_3 wahr, d. h. $12z > 1000$, $z \geq 84$.

   Nun ist unter den Zahlen 84, 85, ..., 90 nur die Zahl 89 eine Primzahl, es ist also $z = 89$. Man überzeugt sich zum Abschluss davon, dass dann D_1 wahr und D_2 und D_3 falsch sind, dass also alle Bedingungen erfüllt sind.

4. Sind C_2 und C_3 wahr und ist C_1 falsch, so ist $z = 14$. Dann sind D_1, D_2 und D_3 falsch, so dass dieser Fall nicht eintreten kann.

5. Ist C_2 wahr und sind C_1 und C_3 falsch, so ist $z \geq 20$ und z durch 7 teilbar. Dann sind aber D_1, D_2, D_3 falsch, so dass auch dieser Fall nicht eintreten kann.

6. Sind C_1 und C_2 falsch und ist C_3 wahr, so ist $z < 20$, z nicht Primzahl und nicht durch 7 teilbar. Dann sind B_2, B_3 falsch und B_1 wahr, also $z = 10$.

   Dann sind D_1, D_2, D_3 wahr, so dass auch dieser Fall nicht eintreten kann.

Daher entspricht nur der 3. Fall allen gestellten Bedingungen. Die zu ermittelnde Zahl ist 89.

Aufgabe 081211:
Bei den Europameisterschaften der Ruderinnen im August 1966 erhielten in der Länderwertung die DDR als erfolgreichstes Land, 37 Punkte und die UdSSR 36,5 Punkte. Beide Länder erhielten in jeder der 5 Disziplinen Einer, Doppelzweier, „Vierer mit“, Doppelvierer und Achter genau je eine der drei pro Disziplin vergebenen Medaillen.

Wieviel Goldmedaillen, wie viel Silbermedaillen und wieviel Bronzemedaillen erhielt jedes der beiden Länder?

Die Punktbewertung ergibt sich aus der folgenden Tabelle.

	Goldmedaille	Silbermedaille	Bronzemedaille
Einer bzw. Doppelzweier	6	5	4
„Vierer mit“ bzw. Doppelvierer	9	7,5	6
Achter	12	10	8

Es ist ferner bekannt, dass die DDR beim Doppelzweier besser als beim Einer und beim Doppelvierer besser als beim „Vierer mit“ abschloss. Die UdSSR schnitt beim Einer besser als beim Doppelzweier ab.

Lösung von Annika Heckel:
Die UdSSR hat 36,5 Punkte; sie muss also bei mindestens einer Disziplin eine Medaille erhalten haben, deren Punktzahl nicht ganzzahlig ist. Dies ist nur der Fall bei den Silbermedaillen im „Vierer mit“ und im „Doppelvierer“.

Da es nur zwei solcher Medaillen gibt, kann die DDR nun nur noch maximal eine davon erhalten haben. Das würde jedoch zu einer nicht-ganzzahligen Gesamtpunktzahl führen, die DDR hat aber 36 Punkte. In den Disziplinen „Vierer mit“ und „Doppelvierer“ ist für sie nur noch möglich, eine Gold- oder eine Bronzemedaille zu erhalten. Da bekannt ist, dass die DDR beim „Doppelvierer“ besser als beim „Vierer mit“ abschnitt, erhielt sie folglich beim ”Vierer mit” die Bronze- und beim Doppelvierer die Goldmedaille.

Hier erhielt die DDR also $9 + 6 = 15$ Punkte. Sie erhielt also in den restlichen drei Disziplinen insgesamt $37 - 15 = 22$ Punkte. Die maximale mögliche Punktzahl liegt hier mit drei Goldmedaillen bei $12 + 6 + 6 = 24$. Da die DDR im „Doppelzweier“ besser war als beim „Einer“, kann sie im „Einer“ keine Goldmedaille, sondern maximal eine Silbermedaille erhalten haben, als Maximalpunktzahl ergibt sich folglich: $12 + 6 + 5 = 23$.

Da die DDR in den drei Disziplinen jedoch nur 22 Punkte hat, muss sie in (mindestens) einer Disziplin schlechter abgeschnitten haben als „Achter“ Gold, „Doppelzweier“ Gold, „Einer“ Bronze. Bei „Achter“ sind die Punktabstufungen zwei Punkte, hier kann also nicht genau ein Punkt verloren werden. Es muss also „Doppelzweier“ oder „Einer“ genau eine Medaille schlechter sein. Wenn im „Doppelzweier“ eine Silbermedaille erzielt würde, so wäre die DDR hier genauso gut gewesen wie im „Einer“, da dies nicht der Fall ist, muss im „Einer“ eine Bronzemedaille erzielt worden sein.

Es ergibt sich also für die DDR:
Einer: Bronze 4
Doppelzweier: Gold 6
Vierer mit: Bronze 6
Doppelvierer: Gold 9
Achter: Gold 12
Insgesamt: 3 Goldmedaillen, 2 Bronzemedaillen, 37 Punkte

Für die UdSSR sind nun noch, wenn man die Unmöglichkeit einer Goldmedaille in den Disziplinen, in denen die DDR diese bereits hat, berücksichtigt, maximal $6 + 5 + 9 + 7{,}5 + 10 = 37{,}5$ Punkte möglich.

Da sie nur 36,5 Punkte hat und nur in den Disziplinen „Einer“ und „Doppelzweier“ die Punktabstufung 1 vorhanden ist, muss sie entweder im „Einer“ oder im „Doppelzweier“ genau eine Medaille schlechter gewesen sein.
Hätte sie im „Einer“ nur die Silbermedaille, so wäre sie hier genauso gut wie im „Doppelzweier“, das ist aber nicht der Fall. Folglich hat die UdSSR im „Doppelzweier“ die Bronzemedaille erhalten.

Es ergibt sich also für die UdSSR:
Einer: Gold 6
Doppelzweier: Bronze 4
Vierer mit: Gold 9
Doppelvierer: Silber 7,5
Achter: Silber 10
Insgesamt: 2 Goldmedaillen, 2 Silbermedaillen, 1 Bronzemedaille, 36,5 Punkte

Aufgabe 101211:
In einer Klassenelternversammlung waren genau 18 Väter und genau 24 Mütter anwesend, von jedem Schüler und jeder Schülerin dieser Klasse wenigstens ein Elternteil.

Von genau 10 Jungen und genau 8 Mädchen waren jeweils beide Eltern da, von genau 4 Jungen und genau 3 Mädchen jeweils nur die Mutter, während von genau einem Jungen und genau einem Mädchen jeweils nur der Vater anwesend war.

Man ermittle die Anzahl aller derjenigen Kinder in dieser Klasse, die in derselben Klasse Geschwister haben! (Es gibt in dieser Klasse keine Kinder, die Stiefeltern oder Stiefgeschwister haben.)

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Nach 3. folgt, dass 1 oder 2 Einzelväter anwesend waren, also sind 16 oder 17 Väter (von den anwesenden 18) mit der Mutter da (4).
Nach 2. folgt, dass höchstens 7 Mütter alleine da waren, von den insgesamt 24 Müttern sind also mindestens 17 Mütter mit dem Vater da (5).
Nach diesen beiden Aussagen (4) und (5) folgt, dass genau 17 Elternpaare da sind, somit also noch ein Einzelvater und 7 Einzelmütter (6).
Nach 1. sind von 18 Schülern beide Eltern da, d.h 17 Elternpaare (6) gehören zu 18 Kindern, also befindet sich darunter ein Geschwisterpaar (7). Jetzt bleibt noch ein Einzelvater für 2 Kinder nach 3. und (4), also sind die Kinder auch Geschwister. Also gibt es in der Klasse 2 Geschwisterpaare, also 4 Kinder, die Geschwister in der Klasse haben.

Aufgabe 111211:
Fünf Soldaten A, B, C, D, E aus fünf sozialistischen Staaten treffen sich auf einem Meeting bei einem gemeinsamen Manöver der befreundeten Armeen. An dem Manöver nehmen nur Angehörige der bulgarischen, polnischen, ungarischen, sowjetischen Streitkräfte und der Nationalen Volksarmee der DDR teil. Ferner ist folgendes bekannt:

(1) Jeder der Soldaten A, B, C und D beherrscht außer der Sprache seines Staates als „Zweitsprache“ noch genau eine der folgenden Sprachen: Bulgarisch, Polnisch, Ungarisch, Russisch, Deutsch.

(1a) Diese vier Zweitsprachen sind paarweise voneinander verschieden.

(2) E beherrscht keine Fremdsprache.

(3) A beherrscht eine Sprache, die außer ihm auch der Sowjetsoldat beherrscht.

(4) B beherrscht keine slawische Sprache, also weder Bulgarisch noch Polnisch noch Russisch.

(5) Der NVA-Angehörige kann sich genau dann mit E verständigen, wenn einer der drei anderen Soldaten, nämlich C, als Übersetzer fungiert.

(6) Der Bulgare kann sich mit dem Ungarn nur über zwei der anderen Soldaten, und zwar D und B, verständigen.

Es ist für jeden dieser Soldaten festzustellen, welchem Staat er angehört und welche Zweitsprache er - wenn überhaupt - beherrscht.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Ausgangssituation:
Zweitsprache: B=Bulgarisch, P=Polnisch, U=Ungarisch, R=Russisch, D=Deutsch
Nationalität: b=Bulgare, p=Pole, u=Ungar, r=Russe, d=Deutscher)
A: B P U R D b p u r d
B: B P U R D b p u r d
C: B P U R D b p u r d
D: B P U R D b p u r d
E: b p u r d

B spricht keine slawischen Sprachen, also kein B, P und R und ist auch kein b, p, r. ⇒ B: U D u d

Mit (6) ist klar, daß D und B weder der Bulgare noch der Ungar sind. Wenn B nicht der Ungar ist, dann ist er der Deutsche (d) und spricht als Zweitsprache ungarisch (U). ⇒ B: U d ⇒ D: B P U R D p r d

D und B sprechen beide eine Sprache, also D entweder Deutsch als Zweitsprache, da er der Deutsche nicht mehr sein kann oder Ungarisch als Zweitsprache, da er auch der Ungar nicht ist. ⇒ D: U D p r

Nach (5) muss C der Ungar sein, da er neben Ungarisch auch die Sprache von E spricht und nicht der Deutsche ist.
Somit spricht D als Fremdsprache Deutsch. A, C und E sprechen also kein Deutsch. A, D und E sprechen als Zweitsprache kein Ungarisch (nach (1a)).
⇒ A: B P R b p r ; ⇒ C: B P R u ; ⇒ D: D p r ; ⇒ E: b p r

Der Ungar, also C, spricht nach (6) kein Bulgarisch. ⇒ C: P R u

Die Fremdsprache von C ist nach (5) die Muttersprache von E, also ist E nicht der Bulgare. Damit steht A als Bulgare fest. ⇒ A: P R b ; ⇒ E: p r

Nach (6) ist die Fremdsprache des Bulgaren somit die Muttersprache von D und damit Polnisch oder Russisch. Mit (3) und (1a) muss A damit auch Russisch sprechen. Russisch als Zweitsprache ist somit für C ausgeschlossen. ⇒ A: R b ; ⇒ C: P u

Da C als Fremdsprache Polnisch spricht und sich nach (5) mit E verständigen kann, steht E als Pole fest. Die Muttersprache für D ist damit Russisch.

Lösung:
A ist Bulgare und spricht Russisch. B ist Deutscher und spricht Ungarisch. C ist Ungar und spricht Polnisch. D ist Russe und spricht Deutsch. E ist Pole.

Aufgabe 121211:
Eine „utopische Aufgabe„:

Als im dritten Jahrtausend u. Z. innerhalb von zwei Tagen nacheinander vier Kosmonauten von Planeten anderer Sonnensysteme auf einem Kosmodrom der Erde landeten, war die Verständigung der Erdbewohner mit ihnen, aber auch die der Kosmonauten untereinander zunächst schwierig. Zwar waren diese durch die Farben Rot, Gelb, Schwarz und Blau ihrer Raumanzüge leicht zu unterscheiden, über ihre Herkunft aber war nichts bekannt. Erst nach einiger Zeit konnte festgestellt werden, dass sie von vier verschiedenen Planeten A, B, C und D zur Erde kamen.

Folgende Informationen konnte man erhalten:

Der rote und der schwarze Kosmonaut waren schon einmal auf einer kosmischen Reise zusammengetroffen und kannten sich daher. Der von A kommende Kosmonaut war dagegen nicht mit dem von B und der von C stammende Kosmonaut nicht mit dem von D bekannt. Der rote und der schwarze Kosmonaut konnten sich gut verständigen, und bald konnten das auch der gelbe und der blaue Kosmonaut, während sich die Kosmonauten von A und D nach wie vor nur schlecht verständigen konnten.

Nach langwierigen Berechnungen konnte festgestellt werden, dass der gelbe Kosmonaut älter war als der blaue. Ferner war der von D kommende Kosmonaut älter als der von B kommende und der von A stammende älter als der von C stammende.

Beim Versuch festzustellen, welcher Kosmonaut von welchem Planeten kam, zeigte sich, dass die obigen Angaben dazu noch nicht ausreichen. Immerhin konnte man ermitteln, dass für eine der vier Anzugfarben nur noch der Kosmonaut von A oder der von D in Frage kam.

Auf Grund weiterer Informationen ergab sich, dass der von D stammende Kosmonaut diese Farbe trug. Damit war zwar auch die Anzugfarbe des von B kommenden Kosmonauten ermittelt, aber bei den beiden übrigen noch keine Klarheit darüber vorhanden, welche Anzugfarbe zu welchem Planeten gehörte. Erst durch die zusätzliche Information, dass der Anfangsbuchstabe der (in deutscher Sprache bezeichneten) Farbe des Raumanzugs des von A kommenden Kosmonauten im Alphabet hinter dem Anfangsbuchstaben der Farbe des Raumanzugs des von C kommenden Kosmonauten steht, konnte die Herkunft der Kosmonauten schließlich geklärt werden.

Von welchem Planeten stammte der rote, von welchem der gelbe, von welchem der schwarze und von welchem der blaue Kosmonaut?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Bezeichnet man die Kosmonauten nach der Farbe ihrer Raumanzüge - rot, gelb, schwarz und blau - in dieser Reihenfolge mit I, II, III und IV, so sind am Anfang, wenn nur die Information vorliegt, dass sie von vier verschiedenen Planeten A, B, C und D gekommen sind, folgende $4^3 = 24$ Möglichkeiten ihrer Herkunft vorhanden:

	I	II	III	IV		I	II	III	IV		I	II	III	IV
1.	A	B	C	D	9.	B	C	A	D	17.	C	D	A	B
2.	A	B	D	C	10.	B	C	D	A	18.	C	D	B	A
3.	A	C	B	D	11.	B	D	A	C	19.	D	A	B	C
4.	A	C	D	B	12.	B	D	C	A	20.	D	A	C	B
5.	A	D	B	C	13.	C	A	B	D	21.	D	B	A	C
6.	A	D	C	B	14.	C	A	D	B	22.	D	B	C	A
7.	B	A	C	D	15.	C	B	A	D	23.	D	C	A	B
8.	B	A	D	C	16.	C	B	D	A	24.	D	C	B	A

Nach der ersten Angabe sind I und III miteinander bekannt, aber sowohl die Bewohner von A und B als auch die von $CundD$ kannten sich nicht. Dies bedeutet, dass keines der nicht geordneten Paare (A, B) und (C, D) mit dem nicht geordneten Paar (I, III) übereinstimmt. Somit ist diese Information gleichwertig damit, dass genau die Fälle 3, 5, 9, 11 sowie die Fälle 14, 16, 20 und 22 ausscheiden.

Nach der zweiten Information konnten sich die nicht geordneten Paare (I, III) und (II, IV) gut verständigen, während dies für das nicht geordnete Paar (A, D) nicht zutraf.

Hiernach kann das Paar (A, D) mit keinem der Paare (I,III), (II, IV) übereinstimmen. Deshalb ist diese Information gleichwertig damit, dass genau die Fälle 2, 4, 21 und 23 sowie die Fälle 7, 12, 13 und 18 ausscheiden.

Die dritte Bedingung besagt, dass keines der beiden geordneten Paare (B, D) und (C, A) mit dem Paar (II, IV) übereinstimmen kann. Gleichbedeutend hiermit ist das Ausscheiden der Fälle 1, 15, 10, 24.

Die Berücksichtigung aller drei Angaben ist somit gleichwertig mit der Möglichkeit genau der nachstehenden Fälle:

	I II	III	IV	
6.	A	D	C	B
8.	B	A	D	C
17.	C	D	A	B
19.	D	A	B	C

Diese Zusammenstellung zeigt, dass der Kosmonaut II derjenige ist, der nur noch vom Planeten A oder vom Planeten D stammen kann.

Indem dann festgestellt wird, dass er von D gekommen ist, sind genau die Fälle 8 und 19 zu streichen. Aus den verbleibenden Fällen 6 und 17 geht hervor, dass IV vom Planeten B gekommen ist. Die beiden Kosmonauten von A und C haben demnach die Raumanzugfarben rot und schwarz. Die Aussage über die Anfangsbuchstaben der Farbe ist somit äquivalent damit, dass genau der Fall 17 zutrifft, d. h., man erhält folgendes Ergebnis:

Farbe	rot	gelb	schwarz	blau
Planet	C	D	A	B

Aufgabe 151211:
An einer Schule wird häufig Tischtennis gespielt. Man zeige, dass es stets unter sechs beliebigen Schülern dieser Schule entweder drei gibt, die bereits jeder gegen jeden gespielt haben, oder drei gibt, zwischen denen noch kein Spiel ausgetragen worden ist.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Sei S einer von sechs beliebig herausgegriffenen Schülern S, A, B, C, D, E der genannten Schule. Wir nehmen zunächst an, dass S bereits gegen wenigstens drei der restlichen fünf Schüler, etwa gegen A, B, C, spielte.

Entweder gibt es nun unter den drei Schülern A, B, C, gegen die S bereits spielte, zwei, die ebenfalls bereits gegeneinander antraten (etwa A, B), oder zwischen diesen drei Schülern wurde noch kein Spiel ausgetragen.

Im ersten Fall sind dann S, A, B drei Schüler, von denen bereits jeder gegen jeden gespielt hat, im zweiten Fall hat zwischen den drei Schülern A, B, C noch kein Spiel stattgefunden. In jedem dieser Fälle ist damit die behauptete Aussage bewiesen. Hat andererseits S gegen keine drei, der Schüler A, B, C, D, E gespielt, dann gibt es unter ihnen drei, etwa A, B, C, gegen die er noch nicht antrat.

Analog gibt es nun unter den drei Schülern A, B, C, gegen die S nicht antrat, entweder zwei, die ebenfalls noch nicht gegeneinander antraten (etwa A, B), oder von diesen drei Schülern spielte bereits jeder gegen jeden. In ersten Fall sind dann S, A, B drei Schüler, zwischen denen noch kein Spiel ausgetragen wurde, im zweiten Fall hat von den drei Schülern A, B, C bereits jeder gegen jeden gespielt. Da keine weiteren Fälle möglich sind, ist die behauptete Aussage damit in jedem Falle bewiesen.

Aufgabe 191212:
Für zwei Länder, *Normalland* und *Spiegelland*, und ihre Netze von Eisenbahnlinien sei folgendes vorausgesetzt:

(1) Jede Stadt X in Normalland hat genau eine Partnerstadt X' in Spiegelland. Dabei gilt: Zu jeder Stadt Y' in Spiegelland gibt es genau eine Stadt in Normalland, deren Partnerstadt Y' ist.

(2) Jede Eisenbahnlinie in Normalland stellt eine unmittelbare Verbindung zwischen zwei Städten her und berührt sonst keine andere Stadt. Dieselbe Aussage trifft für Spiegelland zu.

(3) Für je zwei Städte A, B in Normalland und ihre Partnerstädte A', B' in Spiegelland gilt: Entweder gibt es eine unmittelbare Eisenbahnverbindung zwischen A und B, aber keine zwischen A' und B', oder es gibt eine unmittelbare Eisenbahnverbindung zwischen A' und B', aber keine zwischen A und B.

(4) In Normalland gibt es zwei Städte P, Q, die so am Eisenbahnnetz gelegen sind, dass man wenigstens zweimal umsteigen muss, um von P nach Q zu gelangen.

Beweisen Sie, dass aus diesen Voraussetzungen (1) bis (4) folgt: In Spiegelland kann man von jeder Stadt zu jeder anderen gelangen, ohne mehr als zweimal umsteigen zu müssen.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es seien U' und V' zwei beliebige Städte in Spiegelland, nach (1) also Partnerstädte von Städten U bzw. V in Normalland. Nach Voraussetzung ist U mit mindestens einer der Städte P, Q weder identisch noch (direkt) verbunden.

Beweis:
Wegen $P = Q$, was aus (4) folgt, ist U nicht mit beiden Städten P, Q identisch. Mit einer von ihnen identisch und mit der anderen verbunden kann U nicht sein; denn dann wären P und Q unmittelbar miteinander verbunden, im Widerspruch zu (4). Mit beiden Städten P, Q verbunden, kann U auch nicht sein; denn dann wäre Q von P aus durch einmaliges Umsteigen in U zu erreichen, ebenfalls im Widerspruch zu (4).

O. B. d. A. sei U mit P weder identisch noch verbunden; dann existiert nach (3) eine unmittelbare Verbindung zwischen U' und der Partnerstadt P' von P.

Ferner existiert nach (3) eine unmittelbare Verbindung zwischen P' und der Partnerstadt Q' von Q, da P und Q nach (4) miteinander weder identisch noch verbunden sind.

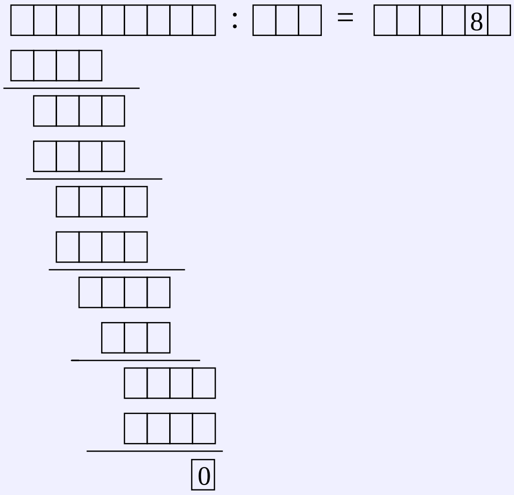
Schließlich ist auch V mit mindestens einer der Städte P, Q weder identisch noch (direkt) verbunden (Beweis wie oben). Trifft dies für P zu, so kommt man (da wie oben V' und P' verbunden sind) von U' über P' nach V'. Trifft es aber für Q zu, so kommt man (da nun, V' und Q' verbunden sind) von U' über P' und Q' nach V'.

Damit ist die behauptete Möglichkeit, ohne mehr als zweimaliges Umsteigen von U' nach V' zu gelangen, in jedem Fall nachgewiesen.

Aufgabe 201211:

In dem folgenden Schema ist in jedes leere Feld jeweils eine Ziffer so einzutragen, dass eine richtig gerechnete Divisionsaufgabe entsteht. Insbesondere darf keine der mehrstelligen Zahlen des ausgefüllten Schemas die erste Ziffer 0 erhalten.

Beweisen Sie, dass es genau eine Eintragung von Ziffern in die leeren Felder gibt, die diesen Anforderungen genügt! Ermitteln Sie diese Eintragung!



Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn eine Eintragung von Ziffern den Anforderungen genügt, so folgt:
Die fünfte Ziffer des Quotienten lautet 0, da in der 9. Zeile des Schemas gleich zwei neue Ziffern des Dividenden auftreten.

Ist x der Divisor, so steht in der 8. Zeile die Zahl $8x$, da sie dreistellig ist, während die Zahlen in der 2., 4., 6. und 10. Zeile vierstellig, also größer als $8x$ sind, lauten sie $9x$; d,h., die erste, zweite, dritte und sechste Ziffer des Quotienten lautet 9; dieser beträgt somit 999809.

Da $8x$ dreistellig ist, gilt $8x < 1000$, als $x < 125$ (1)

In der 9. und 10. Zeile steht (wegen der Differenz 0 in der 11. Zeile) die Zahl $9x$. Wegen (1) gilt für sie demnach $9x < 1125$.
Führt man die im Schema vorgesehene Subtraktion der Zahl in der 8. von der Zahl in der 7. Zeile durch, so erhält man ein zweistelliges Ergebnis. gebildet aus den ersten beiden Ziffern der 9. Zeile. Dieses ist folglich kleiner als 12. Somit ist die Summe aus 12 und der Zahl in der 8. Zeile größer als die Zahl in der 7. Zeile und daher (da diese vierstellig ist) größer als 999; d. h., es gilt

$$12 + 8x > 999 \quad \Rightarrow \quad x > \frac{987}{8} \quad (= 123\frac{3}{8})$$

Aus (1), (2) und der Ganzzahligkeit von x folgt $x = 124$. Somit beträgt der Dividend $999809 \cdot 124 = 123976316$, und es kann sich nur um die Eintragung

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
1 & 2 & 3 & 9 & 7 & 6 & 3 & 1 & 6 & : & 1 & 2 & 4 & = & 9 & 9 & 9 & 8 & 0 & 9 \\
\hline
1 & 1 & 1 & 6 \\
\hline
 & 1 & 2 & 3 & 7 \\
 & 1 & 1 & 1 & 6 \\
\hline
 & & 1 & 2 & 1 & 6 \\
 & & 1 & 1 & 1 & 6 \\
\hline
 & & & 1 & 0 & 0 & 3 \\
 & & & & 9 & 9 & 2 \\
\hline
 & & & & & 1 & 1 & 1 & 6 \\
 & & & & & 1 & 1 & 1 & 6 \\
\hline
 & & & & & & & & 0
\end{array}$$

handeln. Diese stellt in der Tat eine richtig gerechnete Divisionsaufgabe dar; insbesondere ist keine ihrer mehrstelligen Zahlen mit einer ersten Ziffer 0 geschrieben.
Damit ist bewiesen, dass genau diese Eintragung den gestellten Anforderungen genügt.

Aufgabe 201212:
Vier Personen A, B, C, D machen je zwei Aussagen über eine im dekadischen Positionssystem geschriebene nichtnegative ganze Zahl x. Es ist bekannt, dass

(1) von A, B, C genau einer zwei falsche Aussagen macht, während bei jedem der beiden anderen genau eine Aussage falsch ist,

(2) D zwei wahre Aussagen macht.

Die von A, B, C, D gemachten Aussagen lauten:

(A1) Die letzte Ziffer der dekadischen Darstellung von x ist gerade.

(A2) x ist Quadratzahl.

(B1) Die Ziffer 9 ist in der dekadischen Darstellung von x mindestens einmal vorhanden.

(B2) x ist vierstellig.

(C1) x ist durch 10 teilbar.

(C2) x lässt bei Division durch 3 den Rest 1 .

(D1) In der dekadischen Darstellung von x ist, falls x aus mehr als einer Ziffer besteht, von links beginnend, jede Ziffer um 1 kleiner als die jeweils rechts nachfolgende Ziffer.

(D2) Die Anzahl der geraden Ziffern in der dekadischen Darstellung von x ist nicht größer als 2.

Man ermittle alle Zahlen x, die dieses System von Bedingungen erfüllen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn für eine Zahl x die Aussagen (D1) und (D2) wahr sind, so folgt; dass die Ziffern von x abwechselnd gerade und ungerade sind.

Weiter folgt, dass höchstens zwei gerade Ziffern und - abwechselnd mit ihnen - höchstens drei ungerade Ziffern vorkommen. Somit ist die Zahl x höchstens fünfstellig, und wenn sie fünfstellig ist, beginnt sie mit einer ungeraden Ziffer. Hiernach können (D1) und (D2) nur für die Zahlen x in der folgenden Tabelle wahr sein.

Umgekehrt bestätigt man (D1) und (D2) für alle diese Zahlen. Sie sind also genau diejenigen Zahlen, die die Bedingung (2) erfüllen- Für jede von ihnen ist in der Tabelle angegeben, ob die Aussagen (A1) bis (c2) wahr oder falsch sind. So erhält man die anschließend genannten Anzahlen der falschen Aussagen von A, B und C.

x	(A1)	(A2)	(B1)	(B2)	(C1)	(C2)	falsche A	Aussagen B	von C
0	W	W	F	F	W	F	0	2	1
1	F	W	F	F	F	W	**1**	**2**	**1**
2	W	F	F	F	F	F	1	2	2
3	F	F	F	F	F	F	2	2	2
4	W	W	F	F	F	W	0	2	1
5	F	F	F	F	F	F	2	2	2
6	W	F	F	F	F	F	1	2	2
7	F	F	F	F	F	W	2	2	1
8	W	F	F	F	F	F	1	2	2
9	F	W	W	F	F	F	**1**	**1**	**2**
12	W	F	F	F	F	F	1	2	2
23	F	F	F	F	F	F	2	2	2
34	W	F	F	F	F	W	**1**	**2**	**1**
45	F	F	F	F	F	F	2	2	2
56	W	F	F	F	F	F	1	2	2
67	F	F	F	F	F	W	2	2	1
78	W	F	F	F	F	F	1	2	2
89	F	F	W	F	F	F	2	2	2
123	F	F	F	F	F	F	2	2	2
234	W	F	F	F	F	F	1	2	2
345	F	F	F	F	F	F	2	2	2
456	W	F	F	F	F	F	1	2	2
567	F	F	F	F	F	F	2	2	2
678	W	F	F	F	F	F	1	2	2
789	F	F	w	F	F	F	2	1	2

x	(A1)	(A2)	(B1)	(B2)	(C1)	(C2)	falsche A	Aussagen B	von C
1234	W	F	F	W	F	W	1	1	1
2345	F	F	F	W	F	F	2	1	2
3456	W	F	F	W	F	F	**1**	**1**	**2**
4567	F	F	F	W	F	W	**2**	**1**	**1**
5678	W	F	F	W	F	F	**1**	**1**	**2**
6789	F	F	W	W	F	F	2	0	2
12345	F	F	F	F	F	F	2	2	2
34567	F	F	F	F	F	W	2	2	1
56789	F	F	W	F	F	F	2	1	2

Daraus ist ersichtlich, dass unter allen Zahlen, die (2) erfüllen, genau die Zahlen 1, 9, 34, 3456, 4567, 5678 auch die Bedingung (1) erfüllen. Somit sind genau diese Zahlen die gesuchten.

Aufgabe 221214:
Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen x, die die Eigenschaft haben, dass von den folgenden Aussagen (A), bis (F) vier wahr und zwei falsch sind!

(A) x ist eine positive rationale Zahl.

(B) x ist eine natürliche Zahl, oder x ist mit einer ganzen Zahl $g \neq 0$ in der Form $x = \frac{1}{g}$ darstellbar.

(C) x^2 ist eine ganze Zahl, x ist aber selbst nicht ganzzahlig.

(D) Es gilt $7 < x^2 < 9$.

(E) x ist eine positive reelle Zahl, aber keine natürliche Zahl.

(F) Wenn x rational ist, so ist x ganzzahlig.

Hinweis: Eine Aussage der Form „Wenn p, so q“ ist genau dann wahr, wenn die Aussage „(nicht p) oder q“ wahr ist. Eine Aussage der Form „u oder v“ ist genau dann wahr, wenn von den beiden Teilaussagen u und v mindestens eine wahr ist.

Lösung von ochen:
Wir starten mit (C) und (D).

Es können nicht beide falsch sein, da sonst alle anderen wahr sein müssten. Dies geht nicht, da aus (A) und (F) folgt, dass x eine natürliche Zahl ist, was (E) widerspricht.

Wenn beide wahr sind, ist $x = 2\sqrt{2}$ oder $x = -2\sqrt{2}$. Für $x = 2\sqrt{2}$ sind (A) und (B) falsch, (E) und (F) sind wahr. Für $x = -2\sqrt{2}$ sind (A), (B) und (E) falsch. Es genügt also $x = 2\sqrt{2}$ unseren Bedingungen.

Wenn (C) wahr ist, aber (D) nicht, so sind (A), (B) und (D) falsch.

Wenn (C) falsch und (D) wahr ist, kann x keine natürliche Zahl sein. Also ist eine der beiden Aussagen (A) oder (F) falsch. Da genau 2 Aussagen falsch sein sollen, müssen (B) und (E) wahr sein.
Wenn (A) wahr ist und (F) falsch ist, so folgt mit (B), dass x eine positive rationale Zahl der Form $1/g$ mit $g \in \mathbb{Z}$ ist, also insbesondere betragsmäßig kleiner/gleich Eins ist. Das ist aber mit (D) nicht möglich.

Es sind (B),(D),(E),(F) wahr und (A),(C) falsch, oder es muss $x = 2\sqrt{2}$ gelten.

Aus (B) folgt, dass x rational ist und mit (F) folgt, dass x natürlich ist. Das widerspricht (D).
Es ist also $x = 2\sqrt{2}$ die einzige Lösung.

Alternativ-Lösung von Kitaktus:
Angenommen es gibt eine solche Zahl x.

Fall 1: Ist x eine ganze Zahl, so sind die Aussagen C, D und E falsch. Im Widerspruch dazu, dass nur zwei Aussagen falsch sind.

Fall 2: Ist x nicht ganzzahlig, aber rational, so sind C und F falsch. B und D müssten also wahr sein. Wegen B müsste x das Reziprok einer ganzen Zahl, betragsmäßig also kleiner als 1 sein. Wegen D müsste aber x betragsmäßig größer als 2 sein. Widerspruch.

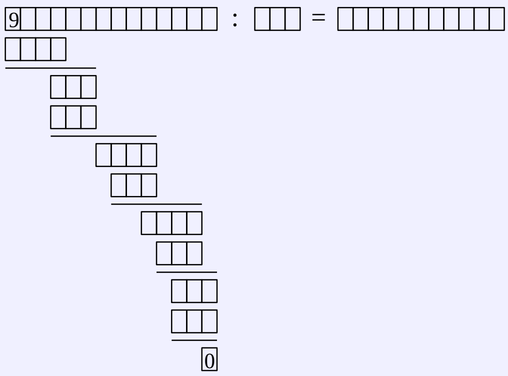
Fall 3: Ist x irrational. A und B sind dann falsch und alle anderen Aussagen daher wahr. Wegen D und C folgt $x^2 = 8$. Wegen E ist x positiv, es kommt also nur $x = \sqrt{8}$ in Frage.

Andere Fälle sind nicht möglich. Die einzige mögliche Lösung ist also $x = \sqrt{8}$.

Dies ist tatsächlich eine Lösung, denn $x = \sqrt{8}$ ist positiv, aber nicht rational und es gilt $x^2 = 8$. Daher sind A und B falsch, während C, D, E und F richtig sind.
$x = \sqrt{8}$ ist also die einzige Lösung.

Aufgabe 231211:

In dem folgenden Schema (siehe Abbildung) ist in jedes leere Feld jeweils eine Ziffer so einzutragen, dass eine richtig gerechnete Divisionsaufgabe entsteht. Insbesondere darf keine der mehrstelligen Zahlen des ausgefüllten Schemas an erster Stelle die Ziffer 0 erhalten.



Beweisen Sie, dass es genau eine Eintragung von Ziffern in die leeren Felder gibt, die diesen Anforderungen genügt! Ermitteln Sie diese Eintragung!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn eine Eintragung von Ziffern den Anforderungen genügt, und wenn man den Dividenden mit x, den Divisor mit y und den Quotienten mit z bezeichnet, so gilt:

$$x : y = z, \tag{1}$$
$$100 \leq y \leq 999 \tag{2}$$

Bezeichnet man ferner die aus den ersten vier Ziffern des Dividenden gebildete Zahl mit t, so gilt: $9000 \leq t \leq 9999$.

Bezeichnet man die in der zweiten Zeile des Schemas stehende Zahl, die ein Vielfaches von y ist, mit ny, wobei $1 \leq n \leq 9$ ist, so gilt:

$$t - ny \leq 9 \qquad , \qquad n \geq t - 9 \geq 9000 - 9 = 8991 \qquad \text{also} \tag{3}$$

$$y \geq \frac{8991}{n} \geq \frac{8991}{9} = 999 \tag{4}$$

Aus (2) und (4) folgt daher $y = 999$. Aus (3) folgt weiter

$$n \geq \frac{8991}{y} = \frac{8991}{999} = 9$$

also $n = 9$. Daher steht in der zweiten Zeile des Schemas die Zahl $9y = 8991$, während in der 4., 6., 8. und 10. Zeile des Schemas die Zahl $y = 999$ steht, weil das einzige von Null verschiedene ganzzahlige dreistellige Vielfache von 999 die Zahl 999 selbst ist. Daraus folgt

$$z = 90100010011$$

und es kann sich nur um die Eintragung

$$\begin{array}{cccccccccccccccccc}
9 & 0 & 0 & 0 & 9 & 9 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 8 & 9 & : & 999 & = & 90100010011 \\
8 & 9 & 9 & 1 & & & & & & & & & & & & & & \\
\cline{1-6}
 & & & 9 & 9 & 9 & & & & & & & & & & & & \\
 & & & 9 & 9 & 9 & & & & & & & & & & & & \\
\cline{4-10}
 & & & & & & 1 & 0 & 0 & 0 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & 9 & 9 & 9 & & & & & & & & \\
\cline{8-13}
 & & & & & & & & & 1 & 0 & 9 & 8 & & & & & \\
 & & & & & & & & & & 9 & 9 & 9 & & & & & \\
\cline{11-14}
 & & & & & & & & & & & 9 & 9 & 9 & & & & \\
 & & & & & & & & & & & 9 & 9 & 9 & & & & \\
\cline{12-14}
 & & & & & & & & & & & & & 0 & & & &
\end{array}$$

handeln.
Diese stellt in der Tat eine richtig gelöste Divisionsaufgabe dar. Damit ist bewiesen, dass genau diese Eintragung den gestellten Anforderungen genügt.

Aufgabe 261213:
An einer internationalen Tagung nahmen jeweils genau zwei Vertreter der Ungarischen Volksrepublik, der ČSSR, der VR Polen und der DDR teil. Über diese acht Teilnehmer ist bekannt:

(1) Jeder dieser Teilnehmer spricht neben seiner Muttersprache wenigstens eine Sprache aus den anderen drei genannten Teilnehmerländern. (Die Sprachen aus den vier Ländern waren ungarisch, tschechisch, polnisch, deutsch; andere Sprechen aus diesen Ländern wie etwa slowakisch oder sorbisch kamen nicht vor.)

(2) Jede der vier Sprachen wird von Teilnehmern aus genau drei der genannten Länder gesprochen.

(3) Jeder der Teilnehmer, der polnisch spricht, spricht auch ungarisch, jedoch nicht deutsch.

(4) Die Sprachkenntnisse der beiden polnischen Teilnehmer unterscheiden sich in bezug auf die vier genannten Sprachen voneinander.

a) Man ermittle, wie viele der genannten Teilnehmer insgesamt deutsch sprechen und aus welchen Ländern diese Teilnehmer kamen.

b) Man ermittle, welche Sprachen die beiden Teilnehmer aus der UVR sprachen.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Länder seien durch die Anfangsbuchstaben ihrer Namen mit U, T, P, D bezeichnet, die Sprachen entsprechend mit u, t, p, d.
In der folgenden Tabelle wird die Tatsache, dass ein Teilnehmer eine bestimmte Sprache beherrscht, durch „+“ gekennzeichnet, Nichtbeherrschung wird durch „-“ markiert. Aus (1), (3) und (4) folgt bei geeigneter Wahl der Reihenfolge der beiden polnischen Teilnehmer

	U		T		P		D	
	1.	2.	1.	2.	1.	2.	1.	2.
u	+	+			+	+		
t			+	+	+	-		
p					+	+		
d					-	-	+	+

Aus (3) erhält man weiter, dass die Teilnehmer, welche deutsch sprechen, nicht polnisch sprechen, insbesondere beherrschen die Vertreter der DDR nicht polnisch. Weil polnisch nach (2) von Vertretern dreier Länder gesprochen wird, muss jeweils mindestens ein Teilnehmer aus der Ungarischen VR und der ČSSR polnisch sprechen, dies sei ohne Einschränkung der Allgemeinheit der erste Vertreter dieser Länder.

Wegen (3) sprechen diese nicht deutsch, aber ungarisch. Dasselbe Argument zeigt für die deutsche Sprache, dass die zweiten Vertreter Ungarns und der ČSSR deutsch sprechen, woraus nach (3) folgt, dass diese nicht polnisch sprechen.

Das bisherige Ergebnis wird durch die nachstehende Tabelle veranschaulicht:

	U		T		P		D	
	1.	2.	1.	2.	1.	2.	1.	2.
u	+	+	+		+	+		
t			+	+	+	-		
p	+	-	+	-	+	+	-	-
d	-	+	-	+	-	-	+	+

Damit folgt als Ergebnis zu a): Genau vier der Teilnehmer sprechen deutsch: zwei Vertreter der DDR und jeweils einer aus der Ungarischen VR und der ČSSR.

Weiter folgt zu b): Wegen (2) wird ungarisch von Vertretern aus genau drei Ländern gesprochen, also beherrschen die Teilnehmer der DDR kein Ungarisch. Aus (1) folgt, dass sie tschechisch sprechen (denn sie sprechen auch nicht polnisch). Wegen (2) ist es deshalb unmöglich, dass ein Teilnehmer aus Ungarn tschechisch spricht. Der erste Teilnehmer aus der Ungarischen VR spricht deshalb genau ungarisch und polnisch, der zweite genau ungarisch und deutsch.

Aufgabe 281211:
Ein Arbeitskollektiv will sich gemeinsam am Tele-Lotto *5 aus 35* beteiligen. Die Kollegen A, B, C werden mit der Auswahl der Zahlen auf den abzugebenden Tipscheinen beauftragt. Bei ihrer Beratung, welche Tips sie zusammenstellen wollen, stellt jeder der drei Kollegen bestimmte Forderungen.

So verlangt A, dass jeder Tip drei Primzahlen enthält, deren Summe 42 ist. B fordert, dass jeder Tip drei Zahlen enthält, deren Produkt das 33fache ihrer Summe ist. C erwartet, dass jeder Tip zwei Zahlen enthält, die keine Primzahlen sind.

Man ermittle alle diejenigen Tips, die die Forderungen aller drei Kollegen erfüllen.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn ein Tip die Forderungen aller drei Kollegen erfüllt, so folgt:

a) Nach den Forderungen von A und C enthält der Tip genau drei Primzahlen und genau zwei Zahlen, die keine Primzahlen sind. Weil außer 2 alle Primzahlen ungerade sind, folgt aus der Forderung von A, dass der Tip die Zahl 2 enthält.

b) Von den Primzahlen 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31 ergeben nur die Paare (17, 23) und (11, 29) die Summe 40. Damit enthält der Tip eines der Zahlentripel $(2; 17; 23)$ (1) oder $(2; 11; 29)$ (2).

c) Bezeichnet man die Zahlen der Forderung von B mit x,y und z, so gilt $33(x + y + z) = xyz$.

Folglich ist einer dieser Zahlen durch 11 teilbar. O. B. d. A. sei dies x. Wegen $1 \leq x \leq 35$ kann x nur einen der Werte 11, 22, 33 annehmen.

1. Fall: Es sei $x = 11$.

Dann gilt $3(11 + y + z) = yz$, also $(y - 3)(z - 3 = 42$. Wegen $1 \leq y \leq 35$ und $1 \leq z \leq 35$, also $-2 \leq y - 3 \leq 32$ und $-2 \leq z - 3 \leq 32$ verbleiben hierfür bis auf die Reihenfolge nur die Möglichkeiten

$$(y - 3; z - 3) = (2; 21), (3; 14), (6; 7)$$

also nur

$$(x; y; z) = (11; 5; 24) \quad (3), \qquad (11; 6; 17) \quad (4), \qquad (11; 9; 10) \qquad (5)$$

Nun muss sich unter den fünf Zahlen des Tips eines der Tripel (1), (2) und zugleich eines der Tripel (3), (4), (5) befinden. Das ist nur möglich mit den Zusammenstellungen

$$\begin{aligned} &(1) \text{ mit } (4) \qquad (2; 17; 23; 11; 6) && (6)\\ &(2) \text{ mit } (3) \qquad (2; 11; 29; 5; 24) && (7)\\ &(2) \text{ mit } (4) \qquad (2; 11; 29; 6; 17) && (8)\\ &(2) \text{ mit } (5) \qquad (2; 11; 29; 9; 10) && (9) \end{aligned}$$

Davon scheiden (6), (7), (8) aus, da sie die Forderung von C nicht erfüllen.

2. Fall: Es sei $x = 22$.

Dann gilt $3(22 + z + y) = 2yz$, also $(2y - 3)(2z - 3) = 141$. Wegen $1 \leq y \leq 35$ und $1 \leq z \leq 35$, also $-1 \leq 2y - 3 \leq 67$ und $-1 \leq 2z - 3 \leq 67$ verbleibt hierfür bis auf die Reihenfolge nur die Möglichkeit $(2y - 3; 2z - 3) = (3; 47)$, also nur $(x; y; z) = (22; 3; 25)$.

Diese lässt sich aber weder mit (1) noch mit (2) zu fünf Zahlen eines geforderten Tips zusammenstellen; daher scheidet der 2. Fall aus.

3. Fall: Es sei $x = 33$.

Dann gilt $33 + z + y = yz$, also $(y-1)(z-1) = 34$. Wegen $0 \leq y - 1 \leq 34$ und $0 \leq z - 1 \leq 34$ verbleiben hierfür bis auf die Reihenfolge nur die Möglichkeiten $(y-1; z-1) = (1; 34), (2; 17)$, also nur $(x; y; z) = (33; 2; 35) \quad (10), (33; 3; 18) \quad (11)$.

Diese lässt sich mit (1) oder (2) nur (10) zusammenstellen:

$$\text{(1) mit (10)} \qquad (2; 17; 23; 33; 35) \tag{12}$$
$$\text{(2) mit (10)} \qquad (2; 11; 29; 33; 35) \tag{13}$$

d) Somit können nur (in anderer Reihenfolge) die Tips

$$(2; 9; 10; 11; 29), (2; 11; 29; 33; 35), (2; 17; 23; 33; 35) \tag{14}$$

den Forderungen aller drei Kollegen genügen.

II. Diese Tips erfüllen die Forderungen von A und C, denn sie enthalten die Primzahlen 2, 11, 29 bzw, 2, 17, 23 mit der Summe 42 und die Nichtprimzahlen 9, 10 bzw. 33, 35.

Mit I. und II. ist gezeigt, dass genau die in (14) angegebenen Tips die Forderungen aller drei Kollegen erfüllen.

Aufgabe 281214:
Im Überseehafen Rostock wird eine Stückgutsendung erwartet. Über sie ist nur bekannt, dass die beiden folgenden Bedingungen (1), (2) eingehalten sind:

(1) Die Gesamtmasse aller Stücke der Sendung beträgt 10 t.

(2) Die Masse jedes einzelnen Stücks ist nicht größer als 1 t.

Zum Transport stehen Lastkraftwagen (LKW) mit einer Tragfähigkeit von je 3 t zur Verfügung.
Man untersuche, ob für jede Stückgutsendung, die die Bedingungen (1), (2) einhält, eine einmalige Fahrt von

a) 5 LKW, b) 4 LKW, c) 3 LKW

zum Abtransport der Sendung ausreicht. Dabei sei angenommen, dass sich Stückgüter von insgesamt 3 t jeweils auch auf einem LKW unterbringen lassen.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Fünf LKW reichen für jede solche Sendung aus; wegen $5 \cdot 2 = 10$ z. B., indem jeder LKW mit so vielen Stücken beladen wird, bis seine Ladung erstmals 2 t erreicht oder überschreitet (sofern noch Stückgut vorhanden ist, das nicht schon von den zuvor beladenen LKW abtransportiert wurde).

Ein derartiges Beladen ist möglich; denn solange die Ladung noch nicht 2 t erreicht oder überschritten hat, kann ein weiteres Stück hinzugefügt werden, da dieses nicht mehr als 1 t Masse hat. mit ihm also die Ladefähigkeit von 3 t nicht überschritten wird.

b) Vier LKW genügen dagegen nicht für jede Sendung, z. B. nicht für eine Sendung; die genau 13 Stücke mit einer Masse von je genau $\frac{10}{13}$ t enthält. Von einer solchen Sendung könnten nämlich auf jedem LKW wegen $4 \cdot \frac{10}{13} > 3$ höchstens 3 Stücke, auf alle vier LKW also höchstens 12 Stücke geladen werden.

c) Drei LKW reichen nicht für jede solche Sendung aus (sie reichen sogar für keine solche Sendung aus), weil mit ihnen höchstens 9 t auf einmal transportiert werden können.

Aufgabe 331211:
Man ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen n, für die folgende Bedingungen erfüllt sind:

Die Zahl n ist zehnstellig. Für die Ziffern ihrer Dezimaldarstellung, von links nach rechts mit a_0, a_1, ..., a_9 bezeichnet, gilt: a_0 stimmt mit der Anzahl der Nullen, a_1 mit der Anzahl der Einsen, ..., a_9 mit der Anzahl der Neunen in der Dezimaldarstellung von n überein.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn für eine natürliche Zahl n mit Ziffern $a_0, ..., a_9$ die Bedingungen erfüllt sind, so folgt:

Addiert man die einzelnen Anzahlen $a_0, ..., a_9$, so ergibt sich die Anzahl 10 aller Ziffern von n; d. h., es gilt

$$a_0 + ... + a_9 = 10 \qquad (1)$$

Da n zehnstellig ist, ist die Anfangsziffer, die auch mit k bezeichnet sei, nicht 0:

$$a_0 = k \geq 1 \qquad (2)$$

Die k Ziffern, die 0 lauten, befinden sich also unter den Ziffern $a_1, ..., a_9$; im einzelnen gilt:
Genau k der Ziffern $a_1, ..., a_9$ sind gleich 0,
genau $9 - k$ der Ziffern $a_1, ..., a_9$ sind positiv. (3)

Aus (1) und (2) folgt: Die Summe der Ziffern $a_1, ..., a_9$ ist $10 - k$ (4)

Wenn, wie hier in (3),(4) gefunden, die Summe positiver ganzer Zahlen genau um 1 größer ist als ihre Anzahl, so folgt für sie:
Genau $8 - k$ der Ziffern $a_1, ..., a_9$ lauten 1,
genau eine der Ziffern $a_1, ..., a_9$ lautet 2. (5)

Wäre $a_0 = 1$ oder $a_0 = 2$, so gäbe es hiernach unter allen a_ν entweder eine Null, $9 - k = 8$ Einsen und eine Zwei oder zwei Nullen, $8 - k = 6$ Einsen und zwei Zweien. (6)

In beiden Fällen wären mehr als die drei Ziffern a_0, a_1, a_2 Einsen, also auch eine weitere Ziffer a_p mit $p \geq 3$. Das aber würde besagen: Es käme auch die Ziffer p mit der Anzahl 1 vor. Da jedoch nach (6) alle 10 Ziffern von n bereits Null, Eins oder Zwei lauten, ist das ein Widerspruch.

Daher und wegen (2) muss $a_0 \geq 3$ sein, und die in (5) genannten Anzahlen $8 - k$ bzw. 1 von Ziffern 1 bzw. 2 unter den $a_1, ..., a_9$ sind bereits diese Anzahlen unter allen a_ν. Zusammen mit der Anzahl k der Ziffern 0 ergibt das die Anzahl 9 für Ziffern 0, 1 und 2. Also kommt noch genau eine Ziffer größer als 2 unter den a_ν vor; das muss folglich eben die Ziffer $a_0 = k$ sein. Diese Angabe wiederum besagt: Es gilt $a_k = 1$.

Da, wie eben zu (5) bemerkt, genau eine der Ziffern 2 lautet, also $a_2 = 1$ gilt, ist die Anzahl a_1 der Einsen positiv. Damit sind bereits vier positive a_ν nachgewiesen; ihre Summe ist $a_0 + a_1 + a_2 + ak = k + (8 - k) + 1 + 1 = 10$.

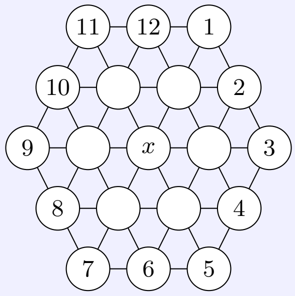
Wegen (1) müssen die übrigen sechs $a_\nu = 0$ sein; damit ist als Anzahl der Nullen $a_0 = 6$ ermittelt, und insgesamt hat sich ergeben: n muss die Zahl 6210001000 sein.

In der Tat hat die Dezimaldarstellung dieser Zahl jeweils genau 6 Nullen, 2 Einsen, eine Zwei, eine Sechs und keine der Ziffern Drei, Vier, Fünf, Sieben, Acht, Neun. Also erfüllt genau diese Zahl die Bedingungen der Aufgabe.

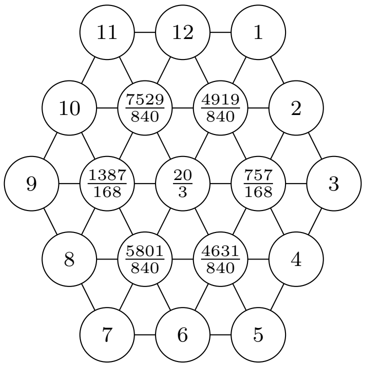
Aufgabe 341213:

In die Kreise der Abbildung lassen sich reelle Zahlen so eintragen, dass an die Randkreise die angegebenen Zahlen kommen und dass in jedem der sieben inneren Kreise jeweils das arithmetische Mittel der sechs benachbarten Kreise steht.

Man untersuche, welche Zahl x dabei im mittleren Kreis steht.



Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Für x und die benachbarten Zahlen a, b, c, d, e, f (bezeichnet in gleichem Umlaufssinn wie die Zahlen 1, 2, ..., 12 , beginnend mit der Zahl zwischen x und 1) folgt:

$$\frac{1}{6}(15 + b + f + x) = a \tag{1}$$
$$\frac{1}{6}(9 + c + a + x) = b \tag{2}$$
$$\frac{1}{6}(15 + d + b + x) = c \tag{3}$$
$$\frac{1}{6}(21 + e + c + x) = d \tag{4}$$
$$\frac{1}{6}(27 + f + d + x) = e \tag{5}$$
$$\frac{1}{6}(33 + a + e + x) = f \tag{6}$$
$$\frac{1}{6}(a + b + c + d + e + f) = x \tag{7}$$

Addition von (1) bis (6) ergibt

$$20 + \frac{1}{3}(a + b + c + d + e + f) + x = a + b + c + d + e + f$$

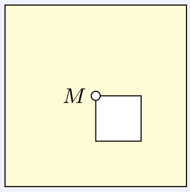
Hieraus und aus (7) folgt

$$20 + 2x + x = 6x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{20}{3}$$

2. Eine Probe ist zu einer vollständigen Lösung der Aufgabe nicht erforderlich, da die Existenz einer Belegung der beschriebenen Art aus dem Aufgabentext hervorgeht.

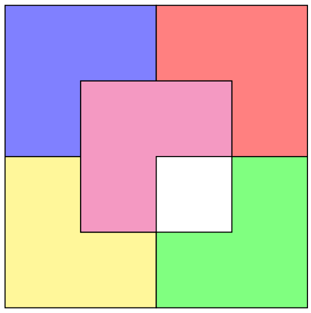
II. Runde 2

Aufgabe V01222:



Teilen Sie das Stanzteil (vgl. Abbildung) in fünf Teile ein!
Jeder dieser Teile soll dem anderen in Form und Gestalt gleichen ($M =$ ist der Mittelpunkt des Stanzteiles).

Lösung von ochen:



Aufgabe V11125:

$$\frac{169}{30} \quad ? \quad \frac{13}{15} = \frac{13}{2}$$

a) Welche der Rechenzeichen $(+, -, \cdot, :)$ können anstelle des Fragezeichens stehen?
b) Geben Sie ein allgemeines Verfahren an, gleichartige Aufgaben zu bilden!
Es sollen die gleichen Rechenzeichen anstelle des Fragezeichens eingesetzt werden wie bei der Lösung a.
c) Bilden Sie nach diesem Verfahren zwei Aufgaben!
d) Können die Glieder der Aufgabe auch sämtlich positive ganze Zahlen sein? Begründen Sie Ihre Antwort!

Lösung von StrgAltEntf:
a) Das Additions- und das Divisionszeichen.

b) Gesucht sind (rationale) Zahlen a,b,c mit $b \neq 0$ und (1) $a + b = c$ (2) $a : b = c$
Gleichsetzen von (1) und (2) liefert $a + b = a : b$ und daraus

$$a = \frac{b^2}{1-b}$$

Dies in (1) eingesetzt ergibt $\frac{b^2}{1-b} + b = c$ und daraus

$$c = \frac{b}{1-b}$$

Für jedes $b \neq 0,1$ ergibt sich damit eine Aufgabe

$$\frac{b^2}{1-b} + b = \frac{b}{1-b}$$

Wählt man $0 < b < 1$, so sind alle Werte a,b,c zudem positiv.

c) Mit $b = \frac{1}{3}$ ergibt sich $a = \frac{1}{6}$ und $c = \frac{1}{2}$ und damit die Aufgabe

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

Mit $b = \frac{3}{5}$ ergibt sich $a = \frac{9}{10}$ und $c = \frac{3}{2}$ und damit die Aufgabe

$$\frac{9}{10} + \frac{3}{5} = \frac{3}{2}$$

d) a,b,c können nicht alle positive ganze Zahlen sein, da für eine ganze Zahl $b > 1$ die Zahl $c = \frac{b}{1-b}$ negativ ist. (Zudem ist $1 - b$ kein Teiler von b; c ist also noch nicht einmal ganz.)

Aufgabe 011123:
Meier, Krause, Schulze und Franke und ihre Frauen kaufen Geflügel ein. Jede der 8 Personen kauft so viel Tiere, wie sie DM für jedes Tier bezahlen. Jeder Mann gibt 96,- DM mehr aus als seine Frau. Meier kauft so viele Tiere wie seine Schwäger zusammen. Krause kauft so viel wie seine Schwägerin. Schulzes kaufen zusammen doppelt so viel wie Krauses. Frau Schulze ist eine geborene Lehmann. Welches sind die Mädchennamen der anderen drei Frauen?
Anmerkung: Unter einem Schwager (Schwägerin) versteht man hier nur die Ehepartner der Geschwister bzw. die Geschwister des Ehepartners.

Lösung von Eckard Specht:
Bezeichnen wir die Anzahl der gekauften Tiere mit a_1, a_2, a_3, a_4 (für Herrn Meier, Krause, Schulze und Franke) bzw. mit b_1, b_2, b_3, b_4 (für die Frauen in dieser Reihenfolge), wobei $a_i, b_i \in \mathbb{N}$ ist.
Dann gibt jeder der Männer a_i^2 und jede der Frauen b_i^2 DM aus und es gilt:

$$a_i^2 - b_i^2 = (a_i + b_i)(a_i - b_i) = 96 = 2^5 \cdot 3 = \{48 \cdot 2, 32 \cdot 3, 24 \cdot 4, 16 \cdot 6, 12 \cdot 8\}$$

Damit kommen folgende Paare (a_i, b_i) in Betracht: $(25, 23)$, $(14, 10)$, $(11, 5)$, $(10, 2)$.
Die Aussage „Meier kauft so viele Tiere wie seine Schwäger zusammen" kann also nur bedeuten, dass die Meiers das Paar $(25, 23)$ sind und die Männer der Paare $(14, 10)$ und $(11, 5)$ seine Schwäger.
Die Zahl 10 taucht zweimal auf, also ist das Paar $(10, 2)$ den Krauses zuzuordnen und die Frau des Paars $(14, 10)$ ist seine Schwägerin.
Aus „Schulzes kaufen zusammen doppelt so viel wie Krauses" folgt, dass das Paar $(14, 10)$ die Schulzes sind, und schließlich $(11, 5)$ die Frankes.
Herr Meier ist also sowohl mit Herrn Schulze als auch mit Herrn Franke verschwägert.
Das bedeutet im ersten Fall, dass entweder Frau Meier eine geborene Schulze oder Frau Schulze eine geborene Meier ist. Letzteres ist aber ausgeschlossen, da Frau Schulze eine geborene Lehmann ist, daher: Frau Meier ist eine geborene Schulze.
Frau Franke ist eine geborene Meier. Frau Krause ist eine geborene Schulze.

Aufgabe 011223:
Fünf Gefäße enthalten je 100 Kugeln. Dabei enthalten einige Gefäße nur Kugeln von 10 g Masse, während die anderen Gefäße nur Kugeln von 11 g Masse enthalten.
Wie kann man durch eine einzige Wägung mit Waagschalen und geeigneten Wägestücken feststellen, welche Gefäße Kugeln von 10 g und welche Gefäße Kugeln von 11 g enthalten? (Dabei dürfen aus den Gefäßen Kugeln herausgenommen werden.)

Lösung von Eckard Specht:
Man entnimmt aus dem

1. Gefäß 20 = 1 Kugel,
2. Gefäß 21 = 2 Kugeln,
3. Gefäß 22 = 4 Kugeln,
4. Gefäß 23 = 8 Kugeln sowie 5. Gefäß 24 = 16 Kugeln.

Nun ermittelt man mit einer einzigen Wägung die Gesamtmasse dieser $2^5 - 1 = 31$ Kugeln. Subtrahiert man davon $31 \cdot 10g = 310g$, so erhält man die (Maß-)Zahl a. Aus der Gleichung

$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 16x_5 = a \qquad (1)$$

kann man eindeutig auf die Unbekannten $x_i \in \{0, 1\}$ schließen, die angeben, ob im i-ten Gefäß Kugeln von 10 g ($x_i = 0$) oder 11 g ($x_i = 1$) liegen.

Beweis: (1) ist nichts anderes als die Binärdarstellung $x_5x_4x_3x_2x_1$ der Dezimalzahl a, wobei die Umrechnung von einem Zahlensystem in das andere eineindeutig ist.

Beispiel: Es sei $a = 22$. Man erhält: $0 + 2 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 8 \cdot 0 + 16 \cdot 1 = 22$. Also liegen in dem 1. und 4. Gefäß Kugeln von 10 g, während im 2., 3. und 5. Gefäß Kugeln von 11 g liegen.

Aufgabe 021221:
Der Begründer des Verfahrens der Linearoptimierung, Prof. Dr. L.W. Kantorowitsch führt folgendes Beispiel an:
In einem Betrieb stehen für Fräsarbeiten zur Verfügung:
a) 3 Fräsmaschinen,
b) 3 Fräsmaschinen mit Revolverkopf-Spannvorrichtung,
c) 1 Automat.
Es sollen in gleicher Anzahl zwei Sorten Werkstücke angefertigt werden. Die Produktion je Arbeitstag beträgt für die oben angegebenen Maschinen je Maschine:
a) 10 Stück Sorte 1 oder 20 Stück Sorte 2,
b) 20 Stück Sorte 1 oder 30 Stück Sorte 2,
c) 30 Stück Sorte 1 oder 80 Stück Sorte 2.
Wieviel Werkstücke können mit diesen Maschinen unter den aufgeführten Bedingungen maximal gefertigt werden?

Lösung von W. Engel und U. Pirl:
Bezeichne a die Anzahl der Fräsmaschinen zur Produktion von Stücken der Sorte 1, b die Anzahl der Fräsmaschinen mit Revolverkopf-Spannvorrichtung zur Produktion von Stücken der Sorte 1 und c die Anzahl der Automaten zur Produktion von Stücken der Sorte 1.
Dann werden pro Tag $u = 10a + 20b + 30c$ Werkstücke der Sorte 1 und
$v = 20(3 - a) + 30(3 - b) + 80(1 - c)$ Werkstücke der Sorte 2 gefertigt.
Offensichtlich ist $u \leq 120$, wobei $v = 0$ für $u = 120$ folgt.
Für $u = 110$, wäre $(a, b, c) = (2, 3, 1)$, d. h. $v = 20$.
Für $u = 100$, wäre $(a, b, c) \in \{(1, 3, 1), (3, 2, 1)\}$, d. h. $v \in \{40, 30\}$.
Für $u = 90$, wäre $(a, b, c) \in \{(0, 3, 1), (2, 2, 1), (3, 3, 0)\}$, d. h. $v \in \{60, 50, 80\}$.
Also werden maximal 80 Paare von Werkstücken der beiden Sorten gefertigt.

Aufgabe 031125:
Bei der Aufgabe

$$\begin{array}{ccccccccc}
A & T & O & M & \cdot & A & T & O & M \\
\hline
 & * & * & * & * & * & & & \\
 & & * & * & * & * & * & & \\
 & & & * & * & * & * & * & \\
 & & & & * & * & * & * & * \\
\hline
 & * & * & * & * & A & T & O & M
\end{array}$$

bedeutet jeder Buchstabe und jedes Zeichen $*$ eine der Ziffern von 0 bis 9 ($A \neq= O$). Verschiedene Buchstaben entsprechen verschiedenen Ziffern.
Wie lautet die Aufgabe?

Lösung von Henning Thielemann:
Die Aufgabe lässt sich formulieren als die Suche nach zwei natürlichen Zahlen n und k mit $n{\cdot}n = 10000k+n$ oder auch $n{\cdot}(n-1) = 10000k$. Das wiederum entspricht der Suche nach einem ganzen n mit $10000|n(n-1)$.
Es gilt $10000 = 10^4 = 2^4 \cdot 5^4 = 16 \cdot 6254$.
Von den zwei aufeinanderfolgenden Zahlen $n-1$ und n kann nur eine durch 2 teilbar sein, folglich muss entweder $2^4|(n-1)$ oder $2^4|n$ gelten. Analog kann von $n-1$ und n nur eine Zahl durch 5 teilbar sein, mithin entweder $5^4|(n-1)$ oder $5^4|n$.

Fallunterscheidung:
1. $625|n$ und $16|n$
das bedeutet $10000|n$ und $n \geq 10000$, damit ist n aber nicht mehr vierstellig
2. $625|(n-1)$ und $16|(n-1)$
das bedeutet $10000|(n-1)$, daraus folgt $n = 1$ oder $n \geq 10001$ und n ist wiederum nicht vierstellig
3. $625|n$ und $16|(n-1)$
Die durch 625 teilbaren Zahlen lassen sich als $625m$ mit $m \in \mathbb{N}$ darstellen.

$$\begin{aligned} n-1 &\equiv 625m - 1 \mod 16 \\ &\equiv m-1 \mod 16 \end{aligned}$$

Mit anderen Worten: Falls n durch 625 teilbar ist, ist $n-1$ genau dann durch 16 teilbar, falls m beim Teilen durch 16 den Rest 1 lässt, also $m \in \{1, 17, 33, \dots\}$. Für $m = 1$ ist $n = 625$ zu klein ($A = 0$) und für $m \geq 17$ ist $n \geq 17 \cdot 625 = 16 \cdot 625 + 625 = 10625$ zu groß.
4. $625|(n-1)$ und $16|n$ Setze $n = 625m + 1$

$$\begin{aligned} n &\equiv 625m + 1 \mod 16 \\ &\equiv m+1 \mod 16 \\ &\equiv m-15 \mod 16 \end{aligned}$$

Daraus folgt $m \in \{15, 31, \dots\}$, wobei sich für $m = 15$ ergibt, dass $n = 15 \cdot 625 + 1 = 16 \cdot 625 - 625 + 1 = 10000 - 624 = 9376$ und für $m \geq 31$, dass $n \geq 19376$, was nicht vierstellig ist.
Lösung: ATOM = 9376

Aufgabe 071222:
Beweisen Sie den folgenden Satz!
Gegeben seien gewisse Gegenstände, von denen jeder eine bestimmte Farbe und eine bestimmte Form hat.
Wenn es unter diesen Gegenständen zwei von verschiedener Farbe und zwei von verschiedener Form gibt, dann befinden sich unter den Gegenständen mindestens zwei solche, die sich sowohl in der Farbe als auch in der Form unterscheiden.

Lösung von Kornkreis:
Anmerkung: In dieser Lösung wird angenommen, dass die Menge der Gegenstände endlich sei, was in der Olympiade Punktabzug bringen könnte. In der zweiten Lösung wurde so eine Annahme nicht getroffen.

Seien die verschiedenen Formen beliebig als Form 1, Form 2, ... und die verschiedenen Farben beliebig mit Farbe 1, Farbe 2, .. bezeichnet. Aussage bezeichne im Folgenden die zu zeigende Aussage der Aufgabenstellung.
Angenommen, es gäbe alle Formen in allen Farben. Dann zeigen Form 1 mit Farbe 1 und Form 2 mit Farbe 2 (beide existieren nach Voraussetzung) die zu zeigende Aussage. Angenommen, es gäbe die Form

i in allen Farben und Form j nicht in Farbe k (welche zur Menge der vorkommenden Farben gehöre). Dann zeigen Form i in Farbe k und Form j in einer anderen Farbe die Aussage.
Analog wäre die Aussage gezeigt, wenn es eine Farbe gibt, sodass alle Formen diese Farbe haben.

Nun nehmen wir an, dass es keine Form gibt, die in jeder Farbe vorkommt, und keine Farbe, welche alle Formen haben.
Betrachte eine Form i, welche eine minimale Anzahl von Farben (größer gleich 1) aufweist, eine dieser Farben sei Farbe k. Betrachte die Form j, welche nicht in Farbe k vorkommt. Wegen der Minimalität (bezüglich der Anzahl der Farben) von Form i muss Form j nun in einer Farbe l vorkommen, in welcher Form i nicht vorkommt. Form i mit Farbe k und Form j in Farbe l zeigen die Aussage.

Alternativ-Lösung von StrgAltEntf:
Es bezeichne $f(x)$ die Farbe und $g(x)$ die Form eines Gegenstands x. Nach Voraussetzung gibt es a und b mit $f(a) \neq f(b)$. Ist $g(a) \neq g(b)$, so haben wir die gesuchten Gegenstände gefunden, und wir sind fertig. Anderenfalls gilt $g(a) = g(b)$, und wir betrachten zwei Gegenstände c und d mit $g(c) \neq g(d)$. Ist $f(c) \neq f(d)$, sind wir wieder fertig, da zwei Gegenstände mit den gesuchten Eigenschaften gefunden sind, nämlich c und d. Andernfalls gilt $f(c) = f(d)$. Da $f(a) \neq f(b)$, kann nicht gleichzeitig $f(c) = f(d) = f(a)$ und $f(c) = f(d) = f(b)$ gelten.

Sei also etwa $f(c) = f(d) \neq f(a)$. Ebenso kann nicht gleichzeitig $g(a) = g(c)$ und $g(a) = g(d)$ gelten. Sei also etwa $g(a) \neq g(c)$. Dann ist also $f(a) \neq f(c)$ und $g(a) \neq g(c)$, und die beiden Gegenstände sind gefunden.

Aufgabe 141222:
Gegeben sei eine rechteckige Tabelle mit drei Zeilen und vier Spalten, also mit 12 Feldern. In einem dieser Felder stehe die Zahl 0.
Man untersuche, ob es eine Möglichkeit gibt, alle übrigen Felder mit Hilfe der natürlichen Zahlen von 0 bis 9 derart auszufüllen, dass
(1) jede in der Tabelle vorkommende Zahl dort höchstens zweimal auftritt,
(2) die Summen der Zahlen in jeder der drei Zeilen gleich groß sind,
(3) die Summen der Zahlen in jeder der vier Spalten gleich groß sind, wobei diese (somit viermal auftretende) Summe größer als 15 ist.

Lösung von weird:
Sei s_1 die nach (2) jeweils gleiche Zeilensumme und $s_2 > 15$ die nach (3) jeweils gleiche Spaltensumme. Für die Summe s sämtlicher Tabellenelemente gilt demnach

$$s = 3s_1 = 4s_2 \Rightarrow s > 60 \;\wedge\; 12 \mid s$$

Das kleinste s, welches daher in Frage kommt, ist somit $s = 72$. Des weiteren gilt für s, da auch die 0 in der Tabelle vorkommen muss und jeder Eintrag höchstens zweimal vorkommen darf, die Abschätzung nach oben

$$s \leq 0 + 4 + 5 + 5 + 6 + 6 + 7 + 7 + 8 + 8 + 9 + 9 = 74$$

Daraus folgen unmittelbar die Werte

$$s = 72,\; s_1 = \frac{72}{3} = 24,\;\; s_2 = \frac{72}{4} = 18$$

Dieser Wert $s_2 = 18$ ist aber für die Spalte, in der 0 vorkommt, nur erreichbar, wenn die beiden anderen Elemente der Spalte jeweils 9 sind. Damit ist Zeilensumme $s_1 = 24$ für die Zeile, in der 0 vorkommt nicht mehr erreichbar, da die 9 nun nicht mehr verwendet werden darf und auch die 8 höchstens zweimal vorkommen darf, aber $8 + 8 + 7 + 0 < 24$ ist. Es gibt somit unter den angegebenen Bedingungen keine Lösung der Aufgabe.

Aufgabe 161223:
In einem Quadrat der Seitenlänge 1 mögen sich 51 Punkte befinden.
Man beweise, dass es zu jeder Anordnung solcher 51 Punkte einen Kreis mit dem Radius $\frac{1}{7}$ gibt, der wenigstens drei dieser Punkte in seinem Innern enthält.

Lösung von OlgaBarati:
Sei der Kreis mit $r = \frac{1}{7}$ der Umkreis eines Quadrates, so ist die Diagonale von diesem Quadrat $d = 2r = \frac{2}{7}$ und dessen Seitenlänge

$$s = \sqrt{\frac{d^2}{2}} = \sqrt{\frac{(\frac{2}{7})^2}{2}} = \sqrt{\frac{4}{98}} > \sqrt{\frac{4}{100}} = \frac{2}{10} = 0{,}20$$

Die Gesamtfläche von dem Quadrat mit der Seitenlänge 1 kann nun mit der Anzahl 25 der Quadrate der Seitenlänge $s = 0{,}20$ vollständig ausgefüllt werden. Mit der Anordnung von jeweils 2 Punkten in jedem der 25 Quadrate befinden sich 50 Punkte im Quadrat mit der Seitenlänge 1. Fügen wir nun Punkt Nr. 51 hinzu so erhalten wir bei beliebiger Anordnung aller 51 Punkte stets ein Quadrat bzw. einen Kreis mit $r = \frac{1}{7}$ in dem sich mindestens 3 Punkte befinden. □

Aufgabe 171222:
Über eine natürliche Zahl x werden von vier Schülern A, B, C, D je drei Aussagen gemacht. Dabei macht der Schüler A genau zwei wahre Aussagen, während die Schüler B, C, D mindestens eine und höchstens zwei wahre Aussagen treffen.
Man ermittle alle natürlichen Zahlen x, die diesen Bedingungen genügen:

(A1) x ist dreistellig.
(A2) Es gilt: $500 < x < 600$.
(A3) Jede der Ziffern 1, 3, 5, 7, 9 tritt genau einmal entweder in der dekadischen Darstellung von x oder in der dekadischen Darstellung der Quersumme von x auf; andere Ziffern kommen in beiden Darstellungen nicht vor.
(B1) In der dekadischen Darstellung von x ist die Anzahl der Zehner das arithmetische Mittel aus der Anzahl der Hunderter und der der Einer.
(B2) x ist das Produkt dreier voneinander verschiedener Primzahlen.
(B3) x ist durch 5 teilbar.
(C1) x ist eine Quadratzahl.
(C2) Streicht man in der dekadischen Darstellung von x die Hunderterziffer und fügt sie als (neue) Endziffer wieder an, so erhält man die dekadische Darstellung einer Primzahl.
(C3) Die dekadische Darstellung von x enthält mindestens drei gleiche Ziffern.
(D1) x ist das Produkt zweier zweistelliger Zahlen.
(D2) x ist Primzahl.
(D3) x ist ungerade.

Lösung von Kitaktus:
Angenommen, eine Zahl erfüllt die Bedingungen der Aufgabe. Es gilt also
(1) A macht genau zwei wahre Aussagen.
(2) B, C und D machen jeweils genau eine oder genau zwei wahre Aussagen.

Wäre A1 falsch, dann wäre auch A2 falsch, im Widerspruch zu (1). Also ist A1 richtig. (3)
Im folgenden sei h die Hunderterziffer der Zahl, z die Zehnerziffer und e die Einerziffer.

Fall 1)

Angenommen A3 wäre richtig, dann ist die Zahl dreistellig und ihre Quersumme müsste zweistellig sein.

Da die Quersumme eine dreistelligen Zahl höchstens 27 ist, muss wegen A3 die erste Ziffer der Quersumme gleich 1 sein.
Sei r die Einerziffer der Quersumme, so gilt wegen A3:

$$h + z + e = 10 + r \Leftrightarrow h + z + e + r = 10 + 2r$$

h, z, e und r sind dabei gerade die vier Ziffern 3, 5, 7, 9. Es gilt also $10 + 2r = h + z + e + r = 24$. Daraus folgt $r = 7$. h, z und e sind also 3, 5 und 9.
Da A2 wegen (1) nicht erfüllt ist, kommen die vier Kombinationen 359, 395, 935 und 953 in Frage.

Für keine der Zahlen 359, 395, 935 und 953 ist B1 erfüllt. Für 359 und 953 (beides sind Primzahlen) ist weder B2 noch B3 erfüllt. Das steht im Widerspruch zu (2).
Die Primfaktorzerlegungen der beiden übrigen Zahlen lauten: $395 = 5 \cdot 79$ und $935 = 5 \cdot 11 \cdot 174$. B2 ist also nur für 935 erfüllt und B3 für 395 und 935.

C1 und C3 gelten weder für 395 noch für 935. Wegen (2) muss also C2 gelten.
Führt man die in C2 beschriebene Prozedur durch, so erhält man die Zahlen 953 und 359. Beides sind (wie oben bereits erwähnt) Primzahlen C2 ist also erfüllt.
Sowohl für 395 als auch für 935 ist D3 wahr und D2 falsch. Unabhängig von D1 ist also die Bedingung aus (2) erfüllt.
Im Fall 1) kommen also nur die Zahlen 395 und 935 in Frage.

Fall 2)

Angenommen A3 wäre falsch, dann liegt die Zahl wegen (1) und A2 zwischen 500 und 600.
C2 ist dann nicht erfüllt, weil die neu gebildete Zahl am Ende eine 5 hätte und damit durch 5 teilbar wäre. Es muss wegen (2) also entweder C1 oder C3 gelten.
C1 gilt wegen $22^2 = 484 < 500 < 600 < 625 = 25^2$ nur für $23^2 = 529$ und $24^2 = 576$. C3 gilt nur für 555.

Für die drei Zahlen 529, 576 und 555 gilt nun:
B1 ist nur für 555 erfüllt.
B2 ist nur für 555 erfüllt – $529 = 23 \cdot 23$, $576 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$, $555 = 3 \cdot 5 \cdot 37$.
B3 ist nur für 555 erfüllt.
Alle drei Zahlen widersprechen also der Bedingung (2).

Fazit: Es kommen insgesamt nur die Zahlen 395 und 935 in Frage.
Für beide Zahlen sind (1) und (2) erfüllt. Die wahren Aussagen sind:
395: A1, A3, B3, C2, D3
935: A1, A3, B3, C2, D1, D3

Aufgabe 181224:
Thomas stellt Jürgen folgende Aufgabe:
(1) In meiner Klasse betätigen sich genau 15 Schüler im außerschulischen Sport, und zwar kommen nur die Sportarten Fußball, Schwimmen, Turnen bzw. Leichtathletik vor.
(2) Jede der genannten Sportarten wird von mindestens einem Schüler betrieben.
(3) Kein Schüler betreibt mehr als zwei dieser Sportarten.
(4) Jeder Schüler, der Schwimmen oder Leichtathletik betreibt, betätigt sich auch in einer zweiten Sportart.
(5) Genau 3 Schüler betreiben sowohl Fußball als auch Schwimmen, genau 2 Schüler sowohl Schwimmen als auch Leichtathletik; kein Schüler betreibt sowohl Fußball als auch Turnen.
(6) Die Anzahl der Fußballer ist größer als die Anzahl der Schwimmer, diese wiederum ist größer als die Anzahl der Turner und diese größer als die Anzahl der Leichtathleten.
(7) Die Anzahl der Fußballer ist gleich der Summe der Anzahl der Turner und der Leichtathleten.

In (6) und (7) bezeichnet Fußballer, Schwimmer u. s. w. jeweils einen Schüler, der die betreffende Sportart (allein oder neben einer zweiten Sportart) betreibt.
Gib die Anzahl der Fußballer, der Schwimmer, der Turner und der Leichtathleten in meiner Klasse an!
Nach einiger Überlegung sagt Jürgen, dass diese Aufgabe nicht eindeutig lösbar sei. Man ermittle alle Lösungen dieser Aufgabe.

Lösung von weird:
Für eine einfachere Sprechweise verwenden wir im Folgenden die Kurzbezeichnungen F,S,T,L für die 4 Sportarten Fußball, Schwimmen, Turnen und Leichtathletik und auch für ev. Kombinationen derselben. Ferner seien f,s,t,l die Anzahlen der Schüler, welche eine der Sportarten F,S,T,L (ev. in Kombination mit einer anderen) gewählt haben.

Wir denken uns dann der Einfachheit halber die 15 Schüler so durchnummeriert, dass die Schüler mit den Nummern $1-5$ alle S in der Kombination SF bzw. SL gewählt haben, womit diese Kombinationsmöglichkeiten von S lt. Angabe dann „ausgeschöpft“ sind und für die restlichen 10 Schüler dann nur mehr die 5 Möglichkeiten F,T,FL,ST,TL zur Auswahl stehen.
Insbesondere muss als dann von diesen 10 Schülern entweder F oder T (aber nicht beide!) auf jeden Fall gewählt werden, was als dann schon mal auf die wichtige Beziehung

$$(f-3)+t=10$$

zwischen f und t hier führt. Eingesetzt in $t+l=f$, was ja laut (7) gelten soll, ergibt sich daraus weiter die Gleichung

$$2t+l=13 \quad (*)$$

welche gewissermaßen den „Dreh- und Angelpunkt“ für diese Aufgabe hier darstellt. Da nämlich nach jedenfalls (5) $l \geq 2$ gilt, $l \geq 5$ sofort auf den Widerspruch $t \leq 4 < l$ zu (6) führen würde und l außerdem nach (*) ungerade sein muss, bleibt als dann nur mehr als einzige Möglichkeit

$$l=3,\ t=5,\ f=t+l=8 \quad (**)$$

Von den restlichen 10 Schülern muss also genau einmal L (jeweils in Kombination mit F oder T) gewählt werden, und ein- oder zweimal S (jeweils in Kombination mit T), was unter Berücksichtigung von (**) dann alle Bedingungen der Aufgabe hier erfüllt. Insgesamt gilt somit

$$f=8,\ s\in\{6{,}7\},\ t=5,\ l=3$$

mit der einzigen Mehrdeutigkeit, was s betrifft.

Aufgabe 191223:
100 Touristen sind in 100 verschiedenen Städten beheimatet, in jeder dieser Städte genau einer der Touristen.
Keine zwei von ihnen sind miteinander bekannt. Sie unternehmen durch genau diese Städte Rundreisen, und zwar
a) als Touristengruppe (alle 100 Touristen machen gemeinsam ein und dieselben Reisen),
b) als Einzelreisende (jeder legt die Reihenfolge und die jeweilige Aufenthaltsdauer für die einzelnen Städte selbst fest, die Reisen erfolgen unabhängig voneinander).

Ferner treffen sie die folgende sonderbare Vereinbarung:
Je zwei dieser Touristen machen sich genau dann miteinander bekannt, wenn sie sich zum ersten Mal gemeinsam in einer Stadt befinden, in der keiner dieser beiden Touristen beheimatet ist.
Ermitteln Sie im Fall a) und im Fall b) jeweils die kleinste natürliche Zahl $n>0$, für die die folgende Aussage (*) wahr ist!
(*) Die Reisewege und -termine lassen sich so festlegen, dass jeder Tourist spätestens dann mit jedem anderen bekannt geworden ist, wenn er in n Städten gewesen ist.

Lösung von Kitaktus:
Die Städte seien mit 1 bis 100 durchnummeriert. Die gleiche Nummer trägt der Tourist aus der betreffenden Stadt.

Im Fall a) ist n=3.

Dies ist so möglich: Am ersten Tag besuchen alle Touristen Stadt 1, am zweiten Tag Stadt 2 und am dritten Tag Stadt 3.
Seien i und j beliebige Touristen, so ist mindestens eine der drei Zahlen 1, 2 und 3 von i und j verschieden. Diese Zahl sei $x \leq 3$.
Spätestens in der x-ten Stadt machen sich i und j miteinander bekannt, da sie sich zusammen in einer Stadt aufhalten, die von i und j verschieden ist. Mit weniger als 3 besuchten Städten ist das nicht möglich, da die beiden Bewohner der ersten beiden von der Gruppe besuchten Städte sich in beiden Städten nicht miteinander bekannt machen.

Im Fall b) ist n=2.

Die Touristen 2 bis 100 starten in Stadt 1, Tourist 1 startet in Stadt 3.
Als erstes wechselt Tourist 2 die Stadt und fährt nach 3. (a)
Dann fahren die Touristen 3 bis 99 nach Stadt 2. (b)
Anschließend wechselt Tourist 1 nach Stadt 2. (c)
Zu diesem Zeitpunkt hat jeder Tourist genau 2 Städte besucht.

Tourist 1 hat Tourist 2 in Stadt 3 kennengelernt (zwischen (a) und (c)).
Tourist 1 hat die Touristen 3 bis 99 in Stadt 2 kennengelernt (nach (c)).
Die Touristen 2 bis 99 haben sich paarweise in Stadt 1 kennengelernt (vor (a)).
Mit n=1 sind die Bedingungen nicht erfüllbar. Dazu müssten sich alle Touristen in der selben Stadt kennenlernen, weil sie die Stadt nicht wechseln, bevor sich alle kennen. Der Tourist, der aber aus genau dieser Stadt kommt, hat noch keinen kennengelernt.

Aufgabe 261223:
In einer Stadt soll ein Wasserballturnier stattfinden, an dem zehn Mannschaften beteiligt sind. Jede Mannschaft spielt in einer Hin- und einer Rückrunde jeweils genau einmal gegen alle anderen.
Zur Verfügung stehen zwei Schwimmhallen, die so weit voneinander entfernt sind, dass im Laufe eines Spieltages kein Übergang einer Mannschaft von einer Halle zur anderen erfolgen kann. Außerdem haben sich folgende Bedingungen als notwendig herausgestellt:
(1) An jedem Spieltag kann jede Mannschaft höchstens zwei Spiele bestreiten.
(2) In jeder Halle sind an jedem Spieltag höchstens fünf Mannschaften anwesend.
(3) Jede Mannschaft kann die Rückrunde erst beginnen, wenn sie alle Spiele der Hinrunde abgeschlossen hat.
Bei der Planung des Turniers wurde zunächst ein Spielplan aufgestellt, nach dem das Turnier in 10 Tagen durchgeführt werden kann.
Man untersuche, ob es unter den genannten Bedingungen auch möglich ist, das Turnier in 9 Tagen durchzuführen.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Jede Mannschaft hat gegen genau neun andere Mannschaften je genau zwei Spiele auszutragen, insgesamt also genau 18 Spiele.
Wenn es möglich wäre, das Turnier in 9 Tagen durchzuführen, folgt aus (1), dass jede Mannschaft an jedem Spieltag genau zwei Spiele zu bestreiten hätte. Hiernach folgte aus (3), dass jede Mannschaft an den ersten vier Tagen acht ihrer Hinspiele, an den letzten vier Tagen acht ihrer Rückspiel und am mittleren, fünften Spieltag genau ein Hinspiel und ein Rückspiel auszutragen hätte.

Da jede Mannschaft an jedem Spieltag zu ihren beiden Spielen anwesend sein müsste, so müssten in jeder der beiden Schwimmhallen wegen (2) stets 5 Mannschaften zu ihren beiden Spielen anwesende sein; nach Voraussetzung bliebe an jedem Tag die Verteilung der Mannschaften auf die beiden Hallen unverändert. Das würde auch für den fünften Spieltag gelten.

Von den fünf Mannschaften in einer Halle hätte an diesem Tag also jede genau ein Hinspiel (und genau ein Rückspiel) auszutragen. Da in jedem Spiel je zwei Mannschaften gegeneinander antreten, hätte man folglich die fünf Mannschaften für die Hinspiele so in Paare aufzuteilen, dass jede Mannschaft in genau einem dieser Paare vorkommt. Das ist wegen der ungeraden Anzahl 5 der Mannschaften nicht möglich.

Die Annahme, dass das Turnier in 9 Tagen durchführbar wäre, führt somit auf einen Widerspruch; das Turnier kann unter Einhaltung der genannten Bedingungen nicht in 9 Tagen durchgeführt werden.

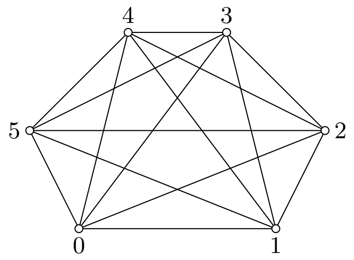
Aufgabe 271224:
a) Über eine Menge M, die aus genau 1987 Personen besteht, wird vorausgesetzt, dass jede Person aus M mit höchstens 5 anderen Personen aus M bekannt ist.
Man beweise, dass aus diesen Voraussetzungen stets folgt:
Es gibt eine aus mindestens 332 Personen bestehende Untermenge U von M mit der Eigenschaft, dass keine Person aus U mit einer anderen Person aus U bekannt ist.
b) Man gebe ein Beispiel für eine Menge M aus genau 1988 Personen, für die folgende Aussagen zutreffen:
Jede Person aus M ist mit genau 5 Personen aus M bekannt; jede Untermenge U von M mit der Eigenschaft, dass keine Person aus U mit einer anderen Person aus U bekannt ist, besteht aus höchstens 333 Personen.
In diesen Aufgaben werde stets angenommen, dass eine Person X genau dann mit einer Person Y bekannt ist, wenn Y mit X bekannt ist.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(a) Nach Voraussetzung lassen sich die Personen aus M folgendermaßen mit $P_0, P_1, ..., P_{1986}$ bezeichnen:

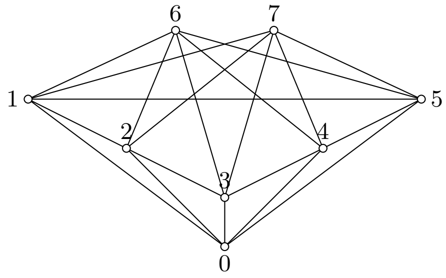
P_0 sei eine beliebige Person aus M. Da sie mit höchstens 5 anderen bekannt ist, kann die Bezeichnung so gewählt werden, dass gilt:
P_0 ist mit keiner der Personen $P_6, P_7, ..., P_{1986}$ bekannt. (0)
P_6 ist mit höchstens 5 anderen Personen aus M bekannt, also erst recht mit höchstens 5 der Personen $P_7, ..., P_{1986}$. Man kann daher deren Bezeichnung, ohne dass (0) beeinträchtigt wird, so wählen, dass zusätzlich gilt:
P_6 ist mit keiner der Personen $P_{12}, P_{13}, ..., P_{1986}$ bekannt. (1) In dieser Weise kann man fortsetzen (und außer für $n = 0$, $n = 1$) für weitere $n = 2,3,...$ erhalten:
P_{6n} ist mit keiner der Personen $P_{6n+6}, P_{6n+7}, ..., P_{1986}$ bekannt. (n)
Als letzte dieser Aussagen erhält man für $n = 330$:
P_{1980} ist nicht mit P_{1986} bekannt. (330)

Die Menge $U = \{P_0, P_6, ..., P_{1980}, P_{1986}\}$, die aus 332 Personen besteht, hat hiernach die besagte Eigenschaft, dass keine Person aus U mit einer anderen Person aus U bekannt ist.

(b) Ein Beispiel der geforderten Art kann folgendermaßen gegeben werden:



P_{6n+i} $(i = 0,...,5)$



P_{1980+i} $(i = 0,...,7)$

Es sei $M = \{P_0, P_1, ..., P_{1987}\}$. Für jedes $n = 0,1,2,...,329$ sei definiert: In der Menge A_n der 6 Personen P_{6n+i} $(i = 0,...,5)$ ist jede mit jeder anderen bekannt. (linke Abbildung)

In der Menge B der 8 Personen P_{1980+i} $(i = 0,...,7)$ seien die Bekanntschaften wie in der rechten Abbildung definiert. Darüber hinaus seien in M keine Bekanntschaften vorhanden.
Nach dieser Definition ist einerseits, wie gefordert, jede Person aus M mit genau 5 anderen Personen aus M bekannt.

Wenn andererseits U irgendeine Untermenge von M ist, die mehr als 333 Personen enthält, so kann folgendermaßen bewiesen werden, dass mindestens einer Person aus U mit einer anderen Person aus U bekannt ist:

Da U mindestens 334 enthält, muss U entweder mit mindestens einer der 330 Mengen $A_0, A_1, ..., A_{329}$ mehr als eine Person gemeinsam haben oder andernfalls mit der Menge B mindestens 4 Personen gemeinsam haben.
Im ersten Fall sind die beiden Personen, die U mindestens mit der betreffenden Menge A_n gemeinsam hat, miteinander bekannt.
Im zweiten Fall gilt: Gehören etwa mindestens die 4 Personen X_0, X_1, X_2, X_3 aus B zu U, so gibt es außer ihnen nur 4 weitere Personen in B, also muss X_0, da mit 5 anderen Personen aus B bekannt, mit einer der Personen X_1, X_2, X_3 bekannt sein.

Aufgabe 291224:
Man löse die folgende Aufgabe
a) für $n = 8$ und $k = 5$,
b) für $n = 9$ und $k = 6$.
Aufgabe:
Untersuchen Sie, ob bei jeder Eintragung der natürlichen Zahlen $1, 2, ..., n^2$ in ein schachbrettartiges $n \times n$-Felder-Quadrat zwei zueinander benachbarte Felder vorkommen müssen, in denen Zahlen stehen, deren Differenz größer oder gleich k ist!
Hinweise:
1. Die genannten Eintragungen sollen die Bedingungen erfüllen, dass jedes Feld genau eine Zahl erhält und dass jede Zahl genau einmal verwendet wird.
2. Zwei Felder sollen genau dann zueinander benachbart heißen, wenn sie eine Seitenstrecke miteinander gemeinsam haben.

Lösung von Nuramon:
Es muss in beiden Fällen zwei solche benachbarte Felder geben.
Angenommen nicht. Dann gäbe es eine Eintragung, bei der je zwei benachbarte Felder Zahlen enthalten, deren Differenz höchstens $k - 1$ ist.
Für je zwei Felder F, F' gibt es eine Folge $F_1, F_2, F_3, \ldots, F_m$ von Feldern, so dass $F_1 = F, F_m = F'$ und aufeinander folgende Folgenglieder benachbart sind und $m \leq 2n - 1$ gilt. Daher gilt, dass die Differenz der Zahlen, die in F bzw. F' stehen nicht größer als $(2n - 2)(k - 1)$ ist.

Im Fall a) erhält man damit durch Betrachtung der Felder, die die Zahlen 1 bzw. 64 enthalten, den Widerspruch $63 \leq (2n-2)(k-1) = (2 \cdot 8 - 2)(5-1) = 56$.

Im Fall b) folgt, wegen $81 - 1 = 80 = (2 \cdot 9 - 2)(6-1)$, dass die Zahlen 1 und 81 in sich diagonal gegenüberliegenden Eckfeldern des Schachbrettes eingetragen sein müssen. Dann ist das Feld, auf dem die Zahl 80 eingetragen ist, aber höchstens $(2 \cdot 9 - 2) - 1 = 15$ Felder weit entfernt von dem Feld mit der Zahl 1. Das führt zum Widerspruch $79 = 80 - 1 \leq 15 \cdot (6-1) = 75$.

Aufgabe 321224:
Eine Schulklasse ist im Sportunterricht in einer Linie angetreten. Auf das Kommando rechts um! drehen sich alle Schüler um 90°, jedoch einige zur falschen Richtung. Jeder Schüler kehrt also jedem seiner Nachbarn entweder das Gesicht oder den Rücken zu.
Von dieser Anfangssituation an drehen sich nur noch zu jeder vollen Sekunde genau diejenigen Schüler, und zwar um 180°, die einem ihrer Nachbarn das Gesicht zuwenden und dabei sein Gesicht sehen.
Man untersuche, ob sich aus jeder (der obigen Beschreibung entsprechenden) Anfangssituation einer Schulklasse heraus einmal ein Zeitpunkt einstellen muss, von dem an sich kein Schüler mehr dreht.

Lösung von Kornkreis:
Angenommen, es gäbe eine Anfangssituation (mit endlich vielen Schülern), für die der beschriebene Umdrehprozess nie endet. Dann muss es insbesondere einen Schüler S_i geben, der sich im Laufe dieses Prozesses unendlich oft dreht.
Dieser Schüler kann nicht am Rand stehen, da er dann nach höchstens einer 180°-Drehung keinen Schüler mehr anschauen und sich folglich nicht mehr drehen würde. Der Schüler S_i hat also einen linken Nachbarn S_{i-1}, dem er unendlich oft ins Gesicht schaut, da sich S_i unendlich oft dreht.
Wenn sich S_i und S_{i-1} ins Gesicht schauen, dreht sich aber auch S_{i-1} um 180° weg. Da sich S_i und S_{i-1} unendlich oft ins Gesicht schauen, muss sich also auch S_{i-1} unendlich oft drehen. Iterativ folgt, dass sich der Schüler, der ganz links am Rand steht, unendlich oft drehen muss. Wie wir bereits festgestellt haben, ist dies aber nicht möglich.

Folglich gibt es für jede (der Aufgabenstellung entsprechende) Konfiguration endlich vieler Schüler einen Zeitpunkt, ab dem sich kein Schüler mehr dreht.

Alternativ-Lösung von cyrix:
Stehen zwei benachbarte Schüler so, dass sie sich gegenseitig anschauen, so können sie auch, anstatt sich beide um 180° zu drehen, aneinander vorbeigehen: Bei beiden Bewegungen ist die entstehende Folge von nach rechts bzw. links schauenden Schülern gleich.

Offensichtlich kann aber jeder Schüler an jedem anderen höchstens einmal vorbeilaufen. Da es nur endlich viele Schüler sind, endet der Prozess also zwangsläufig.

III. Runde 3

Aufgabe V11135:
Unter 13 gleichgroßen Kugeln weicht das Gewicht einer Kugel von dem der anderen ab.
a) Wie kann man mit 3 Wägungen (Balkenwaage) ermitteln, welche Kugel es ist?
b) Wann kann man entscheiden, ob die Kugel leichter oder schwerer als die übrigen ist ?

Lösung von Steffen Polster:
a) 1. Wägung: Es werden für jede Waagschale vier Kugeln ausgewählt. Fünf Kugeln werden nicht gewogen.

1.1. Die Waage zeigt Gleichgewicht. Dann sind die 8 Kugeln neutral. Drei dieser Kugeln wiegt man (rechte Seite) gegen 3 noch nicht verwendete Kugeln (linke Seite).

1.1.1. Ist die linke Seite leichter, so ist eine von den drei Kugeln leichter. Zwei dieser Kugeln werden gewogen. Ist eine von ihnen leichter, so hat man die gesuchte Kugel gefunden. Sind beide gleich schwer, so ist in dieser Wägung nicht verwendete Kugel leichter.

1.1.2. Ist die linke Seite schwerer, so ist eine von den drei Kugeln schwerer. Analog zu 1.1.1. bestimmt man diese.

1.1.3. Keine Seite ist leichter. Dann muss die gesuchte Kugel unter den zwei bisher noch bei keiner Wägung verwendeten Kugeln sein. Eine von beiden Kugeln vergleicht man mit einer neutralen. Bei Gleichgewicht ist die noch nicht verwendete die gesuchte, andernfalls findet man die gesuchte, die entweder zu leicht oder zu schwer ist.

1.2. Die Waage zeigt kein Gleichgewicht. O. B. d. A. sei die linke Seite leichter. Auf die eine Waagschale werden dann drei von der leichten Seite und eine von der schweren Seite gegen eine der leichten Seite und 3 bisher noch nicht verwendete Kugeln gewogen.

1.2.1. Die linke Seite ist leichter. Damit ist eine von drei Kugeln leichter. Nun werden zwei dieser Kugeln gewogen. Ist eine von ihnen leichter, so hat man die gesuchte Kugel gefunden. Sind beide gleich schwer, so ist in dieser Wägung nicht verwendete Kugel leichter.

1.2.2. Beide Seiten sind gleich schwer. Damit muss eine der drei Kugeln der rechten Seite der 1.Wägung (die bei der 2.Wägung nicht benutzt wurden) muss damit schwerer sein. Es werden zwei dieser Kugeln gewogen. Ist eine von ihnen schwerer, so hat man die gesuchte Kugel gefunden. Sind beide gleich schwer, so ist in dieser Wägung nicht verwendete Kugel schwerer.

1.2.3. Die linke Seite ist schwerer. Dann kann die eine Kugel der linken Seite, die von der schweren Seite der 1.Wägung genommen wurde, zu schwer, oder die eine Kugel der rechten Seite, die von der leichten Seite der 1.Wägung genommen wurde, zu leicht. Die vielleicht zu schwere Kugel wird mit einer der neutralen Kugeln verglichen. Entweder ist sie schwerer oder die nicht verwendete Kugel ist zu leicht.

b) In allen Fällen, außer dem Fall 1.1.3. bei dem die allerletzte nicht verwendete Kugel die gesuchte ist, kann man entscheiden, ob die gesuchte Kugel zu leicht oder zu schwer ist. In diesem einen Fall allerdings nicht.

Aufgabe V11235:
Gegeben sind 13 gleich große Kugeln, von denen eine im Gewicht von den übrigen abweicht, also entweder leichter oder schwerer als die übrigen ist. Jemand behauptet, er könne mit drei Wägungen feststellen
a) welche Kugel im Gewicht abweicht,
b) ob sie leichter oder schwerer ist, falls er eine 14. Kugel benutzen darf, von der er weiß, dass ihr Gewicht nicht abweicht.
Anmerkung: Es ist bekannt, dass bei jeder Wägung je 10 Kugeln benutzt werden. Die zu untersuchenden Kugeln sind fortlaufend nummeriert und tragen die Nummern 1 bis 13, während die 14. Vergleichskugel die Nummer 0 erhält.
Bezeichnet man die Ergebnisse der drei Wägungen mit a, b und c und gibt ihnen den Wert + 1, wenn die linke Waagschale überwiegt, - 1, wenn die rechte überwiegt, und 0, wenn Gleichgewicht besteht, dann kann man die Nummer der gesuchten Kugel aus der Gleichung

$$n = (9a + 3b + c) \cdot (-1)^{a+b+c}$$

errechnen, wobei $|n|$ die gesuchte Nummer ist. Ist $n > 1$, so ist die Kugel schwerer, ist $n < 1$, so ist sie leichter als die übrigen Kugeln.
Wie müssen die Kugeln bei den drei Wägungen verteilt werden, damit man stets das richtige Ergebnis erhält?

Lösung von OlgaBarati:
Vor Wägung a ist jede der durchnummerierten Kugeln mit $\{{}^uK_1^\pm, {}^uK_2^\pm, ...{}^uK_{12}^\pm, {}^uK_{13}^\pm\}$ (u)nbestimmt. Nur die Kugel ${}^bK_0^0$ ist als Kugel ohne Gewichtsabweichung ist (b)estimmt.

Wägung a erfolgt mit der Aufteilung links $\{{}^bK_0^0, {}^uK_6^\pm, {}^uK_8^\pm, {}^uK_{10}^\pm, {}^uK_{12}^\pm\}$ und rechts mit $\{{}^uK_5^\pm, {}^uK_7^\pm, {}^uK_9^\pm, {}^uK_{11}^\pm, {}^uK_{13}^\pm\}$. Die Kugeln $\{{}^uK_1^\pm, {}^uK_2^\pm, {}^uK_3^\pm, {}^uK_4^\pm\}$ werden im Durchgang a nicht gewogen.

$$a = (+1):\ \{{}^bK_0^0, {}^uK_6^+, {}^uK_8^+, {}^uK_{10}^+, {}^uK_{12}^+\}, \{{}^uK_5^-, {}^uK_7^-, {}^uK_9^-, {}^uK_{11}^-, {}^uK_{13}^-\}, \{{}^bK_1^0, {}^bK_2^0, {}^bK_3^0, {}^bK_4^0\}$$
$$a = (-1):\ \{{}^bK_0^0, {}^uK_6^-, {}^uK_8^-, {}^uK_{10}^-, {}^uK_{12}^-\}, \{{}^uK_5^+, {}^uK_7^+, {}^uK_9^+, {}^uK_{11}^+, {}^uK_{13}^+\}, \{{}^bK_1^0, {}^bK_2^0, {}^bK_3^0, {}^bK_4^0\}$$
$$a = (\pm 0):\ \{{}^bK_0^0, {}^bK_6^0, {}^bK_8^0, {}^bK_{10}^0, {}^bK_{12}^0\}, \{{}^bK_5^0, {}^bK_7^0, {}^bK_9^0, {}^bK_{11}^0, {}^bK_{13}^0\}, \{{}^uK_1^\pm, {}^uK_2^\pm, {}^uK_3^\pm, {}^uK_4^\pm\}$$

Anmerkung: Bei den nachfolgenden Betrachtungen werden jeweils nur die mit der Wägung zu untersuchenden Kugeln genannt. Die neutralen Kugeln, mit denen die Stückzahl auf zehn aufgefüllt wird, werden nicht einzeln benannt. Es sind für alle Fälle immer ausreichend bestimmte neutrale Kugeln vorhanden.

Für $a = (\pm 0)$ ist für die vier Kugeln, von denen nicht bekannt ist, welche davon im Gewicht abweicht, mit zwei Wägungen zu bestimmen, welche abweicht und ob sie schwerer oder leichter ist.
Wägung b, links $\{{}^uK_2^\pm, {}^uK_4^\pm\}$, rechts ${}^uK_3^\pm$, die Kugel${}^uK_1^\pm$ wird im Durchgang b nicht gewogen.

$b = (+1):\ \{{}^uK_2^+, {}^uK_4^+\}, {}^uK_3^-, {}^bK_1^0$

Wägung c, links ${}^uK_4^+$, rechts ${}^uK_2^+$, nicht gewogen wird ${}^uK_3^-$

$c = (+1):\ {}^bK_4^+, {}^bK_1^0, {}^bK_2^0, {}^bK_3^0$ Formel $(0 \cdot 9 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 1)(-1)^{(0+1+1)} = (+4)$
$c = (-1):\ {}^bK_2^+, {}^bK_1^0, {}^bK_3^0, {}^bK_4^0$
$c = (\pm 0):\ {}^bK_3^-, {}^bK_1^0, {}^bK_2^0, {}^bK_4^0$

$b = (-1):\ \{{}^uK_2^-, {}^uK_4^-\}, {}^uK_3^+, {}^bK_1^0$

Wägung c, links ${}^uK_4^-$, rechts ${}^uK_2^-$, nicht gewogen wird ${}^uK_3^+$

$c = (+1):\ {}^bK_4^0, {}^bK_1^0, {}^bK_2^-, {}^bK_3^0$
$c = (-1):\ {}^bK_2^0, {}^bK_1^0, {}^bK_3^0, {}^bK_4^-$
$c = (\pm 0):\ {}^bK_3^+, {}^bK_1^0, {}^bK_2^0, {}^bK_4^0$

$b = (\pm 0):\ \{{}^bK_2^0, {}^bK_4^0\}, {}^bK_3^0, {}^uK_1^\pm$

Wägung c, links ${}^uK_1^\pm$, rechts ${}^bK_0^0$

$c = (+1):\ {}^bK_1^+, {}^bK_2^0, {}^bK_3^0, {}^bK_4^0$
$c = (-1):\ {}^bK_1^-, {}^bK_2^0, {}^bK_3^0, {}^bK_4^0$
$c = (\pm 0):\ {}^bK_1^0, {}^bK_2^0, {}^bK_3^0, {}^bK_4^0$

Für $a = (1)$ ist für vier Kugeln, von denen eine möglicherweise schwerer ist und für fünf Kugeln von denen möglicherweise eine leichter ist, ist mit zwei Wägungen zu bestimmen, welche abweicht und ob sie schwerer oder leichter ist.

Wägung b, links $\{{}^uK_5^-, {}^uK_{12}^+, {}^uK_7^-\}$, rechts $\{{}^uK_{11}^-, {}^uK_6^+, {}^uK_{13}^-\}$, die Kugeln ${}^uK_8^+$, ${}^uK_9^-$, ${}^uK_{10}^+$ werden im Durchgang b nicht gewogen.

$b = (+1): \ \{{}^uK_{12}^+, {}^uK_{11}^-, {}^uK_{13}^-\}$

Wägung c, links ${}^uK_{13}^-$, rechts ${}^uK_{11}^-$, nicht gewogen wird ${}^uK_{12}^+$

$c = (+1): \ {}^bK_{13}^-$ Formel $(1 \cdot 9 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 1)(-1)^{(1+1+1)} = (-13)$
$c = (-1): \ {}^bK_{11}^-$ Formel $(1 \cdot 9 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot (-1))(-1)^{(1+1-1)} = (-11)$
$c = (\pm 0): \ {}^bK_{12}^+$ Formel $(1 \cdot 9 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 0)(-1)^{(1+1+0)} = (12)$

$b = (-1): \ \{{}^uK_5^-, {}^uK_6^+, {}^uK_7^-\}$
Analog.

$b = (\pm 0): \ \{{}^uK_8^+, {}^uK_{10}^+, {}^uK_9^-\}$
Analog.

Die Behauptung stimmt und berechnet sich für $a = (-1)$ analog.

Die Auswahl der Kugeln für die Wägevorgänge ist damit auch so gewählt, dass mit der Formel

$$n = (9a + 3b + c) \cdot (-1)^{a+b+c}$$

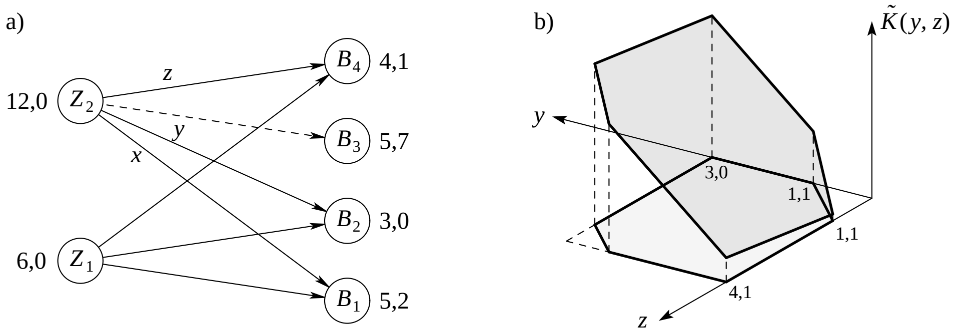
die abweichende Kugel zu bestimmen ist und zwar so, dass das Vorzeichen plus oder minus angibt, ob die Kugel leichter oder schwerer ist. Es sind somit für Wägung a die Werte $|n| \leq 4$ und bei Wägung b die Werte $8 \leq |n| \leq 10$ von der Wägung auszuschließen.

Aufgabe 011231:
Zwei Ziegeleien produzieren 6 Millionen bzw. 12 Millionen Ziegel. Sie sollen vier Baustellen versorgen, die einen Bedarf von 5,2; 3,0; 5,7 bzw. 4,1 Millionen Ziegel haben.
Die Entfernungen (in km) zwischen den zwei Ziegeleien und den vier Baustellen sind aus der folgenden Tabelle ersichtlich:

Baustelle	1	2	3	4
Ziegelei 1	28	30	37	21
Ziegelei 2	26	36	18	20

Wieviel Ziegel müssen von der 1. bzw. 2. Ziegelei zu den einzelnen Baustellen transportiert werden, damit die Gesamttransportkosten möglichst gering sind?
Es wird angenommen, dass die Transportkosten der Entfernung proportional sind. Die Baustelle 3 soll dabei nur von der Ziegelei 2 beliefert werden.

Lösung von Carsten Balleier:



Zur Bestimmung der optimalen Belieferung muss die Kostenfunktion in Abhängigkeit von den beeinflussbaren Parametern ausgedrückt werden. Diese Funktion ist die Summe der Transportkosten zu den einzelnen Baustellen bzw. (aufgrund der Proportionalität) die Entfernung, über die hinweg die Ziegel transportiert werden.

Wenn man die Lieferungen von Ziegelei 2 (Z_2) - in Millionen Ziegeln - an die Baustellen 1, 2 und 4 (B_1 usw.) mit x, y und z bezeichnet (B_3 braucht nicht beachtet zu werden), erhält man

$$K(x,y,z) = 28(5{,}2 - x) + 26x + 30(3{,}0 - y) + 36y + 21(4{,}1 - z) + 20z = 321{,}7 - 2x + 6y - z$$

Als Nebenbedingung gilt dabei $x + y + z = 6{,}3$, d. h. Z_2 liefert 6,3 Millionen Ziegel an B_1, B_2 und B_4; die restlichen 5,7 Millionen gehen an B_3. Die Funktion K soll minimal werden.
Das ist der Fall, wenn x und z möglichst große, y dafür einen kleinen Wert annimmt, wie man an den Vorzeichen sieht.
Die Nebenbedingung fügt man ein, in dem man $\tilde{K}(y,z) = K(6{,}3 - y - z, y, z) = 309{,}1 + 8y + z$ festlegt.

Zu beachten sind weiterhin $0 \leq y \leq 3{,}0$ und $0 \leq z \leq 4{,}1$ (nur dieser Bereich ist für Lieferungen der Z_2 an B_2 bzw. B_4 sinnvoll), sowie $1{,}1 \leq y + z \leq 6{,}3$ (B_1 kann höchstens 5,2 Millionen Ziegel von Z_2 bekommen).

In $\tilde{K}$ haben sowohl y als auch z positive Vorzeichen, beide müssen also so klein wie möglich werden. Den kleinsten Wert für $\tilde{K}(y,z)$ erhält man für $y = 0$ und $z = 1{,}1$, da y den größeren Vorfaktor hat. Es folgt $x = 5{,}2$.
Zusammengefasst: Z_1 liefert je 3 Millionen Ziegel an B_2 und B_4, Z_2 liefert 5,2 Millionen an B_1 und 1,1 Millionen an B_4.

Hinweis: Das aus der Schule bekannte Verfahren, (lokale) Minima mittels Ableitungen zu bestimmen, funktioniert hier nicht. Grund dafür ist, dass die Funktion K (bzw. $\tilde{K}$) in ihren Argumenten linear ist. Extrema treten in diesem Fall nur global auf an den Rändern der durch die Ungleichungen festgelegten Bereiche.

Aufgabe 041231:
In einem mathematischen Zirkel einigen sich sechs Teilnehmer auf eine reelle Zahl a, die der siebente Teilnehmer, der vorher das Zimmer verlassen hatte, bestimmen soll. Nach seiner Rückkehr erhält er die folgenden Auskünfte:

1. a ist eine rationale Zahl.
2. a ist eine ganze Zahl, die durch 14 teilbar ist.
3. a ist eine reelle Zahl, deren Quadrat gleich 13 ist.
4. a ist eine ganze Zahl, die durch 7 teilbar ist.

5. a ist eine reelle Zahl, die folgende Ungleichung erfüllt. $0 < a^3 + a < 8000$.
6. a ist eine gerade Zahl.

Er erfährt, dass von den Auskünften 1 und 2, 3 und 4 sowie 5 und 6 jeweils eine wahr und eine falsch ist.
Wie lautet die Zahl a? Wie hat der siebente Teilnehmer die Zahl ermittelt?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, die Auskunft 2 sei wahr, dann ist auch die Auskunft 1 wahr. Das ist aber nach der obigen Voraussetzung unmöglich. Also ist die Auskunft 1 wahr und die Auskunft 2 falsch.
Da die Auskunft 1 wahr ist, ist die Auskunft 3 falsch und die Auskunft 4 wahr. a ist also eine der Zahlen

$$\ldots, -35, -21, -7, 7, 21, 35, \ldots, 7(2n+1), \ldots$$

(n ganze Zahl). Nun ist die Auskunft 2 falsch, also ist auch die Auskunft 6 falsch und die Auskunft 5 richtig. Die Zahl a ist also positiv.
Nun ist $7^3 + 7 < 8000$, jedoch bereits $21^3 + 21 > 20^3 + 20 > 8000$. Also folgt $a = 7$.

Aufgabe 061235:
Es seien n Schüler mit Nummern versehen und in der Reihenfolge $1, 2, 3, \ldots, n$ nebeneinander aufgestellt.
Ein Umordnungsbefehl besteht darin, dass jeder Schüler entweder einmal seinen Platz mit einem anderen tauscht oder auf seinem Platz bleibt.
Man gebe zwei Befehle an, durch deren Hintereinanderausführung die Anordnung $n, 1, 2, 3, \ldots, n-1$ entsteht.

Lösung von cyrix:
Eine mögliche Variante lautet wie folgt:
1. Umordnungsbefehl:
Jeweils zwei Schüler, deren Nummern sich zu $n+1$ ergänzen, tauschen die Plätze. (Ist $n+1$ gerade, so bleibt der Schüler mit Nr. $\frac{n+1}{2}$ an seinem Platz stehen.)

2. Umordnungsbefehl:
Jeweils zwei Schüler, deren Nummern sich zu n ergänzen, tauschen Plätze. (Der Schüler mit Nr. n und, falls existent, der Schüler mit Nr. $\frac{n}{2}$ bleibt/ bleiben stehen.)

Durch den ersten Umordnungsbefehl befindet sich der Schüler mit Nummer k nach dessen Ausführung auf der Position $n+1-k$, da er mit dem Schüler dieser Nummer getauscht hat. (Ist n+1 gerade, so hätte nur der Schüler mit Nummer $k = \frac{n+1}{2}$ keinen Tauschpartner. Aber er soll ja dann auch stehen bleiben und befindet sich genauso an der entsprechenden Position $n+1-k = \frac{n+1}{2} = k$.)

Tauscht nun im zweiten Umordnungsbefehl der Schüler mit Nummer ℓ den Platz mit dem Schüler mit Nummer $n-\ell$, so befand sich jener zweiter nach dem ersten Umordnungsbefehl an Position $n+1-(n-\ell) = \ell+1$.
Der Schüler mit Nummer ℓ ist also durch beide Umordnungsbefehle nun an die Position $\ell+1$, also einen Platz nach rechts gerutscht. Einzige hierbei noch nicht betrachtete Schüler sind diejenigen, die beim zweiten Umordnungsbefehl stehen bleiben.
Das ist einerseits der Schüler mit Nummer n. Dieser steht nach dem ersten Umordnungsbefehl auf Position $n+1-n = 1$, also ganz vorn, und bleibt da auch – wie gewünscht – stehen. Und zweitens, falls n gerade ist, der Schüler mit Nummer $\frac{n}{2}$.
Dieser befand sich nach dem ersten Umordnungsbefehl an Position $n+1-\frac{n}{2} = \frac{n}{2}+1$, war also gegenüber der Ausgangsanordnung schon um einen Platz nach rechts gerückt. Bleibt er beim zweiten Umordnungsbefehl nun stehen, ist er schon an der gewünschten Position.

Damit ist gezeigt, dass nach Ausführung dieser beiden Umordnungsbefehle aus der Start-Anordnung die gewünschte Zielanordnung erreicht wird.

Aufgabe 071235:
In einer Weberei wird Garn von genau sechs verschiedenen Farben zu Stoffen von je genau zwei verschiedenen Farben verarbeitet. Jede Farbe kommt in mindestens drei verschiedenen Stoffsorten vor. (Dabei gelten zwei Stoffsorten dann und nur dann als gleich, wenn in ihnen dieselben zwei Farben auftreten.)
Beweisen Sie, dass man drei verschiedene Stoffsorten derart finden kann, dass in ihnen alle sechs Farben auftreten!

Lösung von cyrix:
Die Farben seien von 1 bis 6 durchnummeriert.
O. B. d. A. existiere der Stoff mit den Farben 1 und 2, den wir kurz mit 1-2 bezeichnen wollen. Dann gilt für die vier übrigen Farben der Menge $R = \{3{,}4{,}5{,}6\}$, dass sie untereinander noch jeweils mit mindestens einer weiteren Farbe aus R in einem gemeinsamen Stoff vorkommen müssen, denn jede Farbe f von ihnen muss neben den (ggf. existierenden) Stoffen 1-f und 2-f noch in mindestens einem weiteren Stoff vorkommen.
O. B. d. A. existiere der Stoff 3-4. Nun führen wir eine Fallunterscheidung danach durch, in welchen Stoffen die Farben 5 und 6 enthalten sind:

1. Fall: Es gibt den Stoff 5-6. Dann bilden die drei Stoffe 1-2, 3-4 und 5-6 eine gewünschte Auswahl von 3 Stoffen mit allen sechs Farben.
2. Fall: Es gibt den Stoff 5-6 nicht, aber die Farben 5 und 6 sind mit verschiedenen Farben aus $\{3{,}4\}$ in einem Stoff verwoben. O. B. d. A. existieren also die Stoffe 3-5 und 4-6. Dann bilden die Stoffe 1-2, 3-5 und 5-6 eine entsprechende Stoffauswahl.
3. Fall: Die Farben 5 und 6 tauchen nur gemeinsam mit einer der beiden Fabren 3 oder 4 in einem Stoff auf, d. h., es gibt o. B. d. A. die Stoffe 3-5 und 3-6, aber weder 4-5, 4-6 noch 5-6. Damit existiert aber für jede der Farben 4, 5 und 6 jeweils nur eine weitere Farbe aus R, mit der sie gemeinsam in einem Stoff vorkommt. Demnach muss für jede dieser drei Farben f jeweils der Stoff 1-f als auch 2-f tatsächlich existieren, damit f in mindestens drei verschiedenen Stoffen vorkommt. Dann bilden die Stoffe 1-4, 2-5 und 3-6 eine gewünschte Auswahl.

Aufgabe 091232:
Vier Freunde, Axel, Bodo, Christian und Dieter, kauften sich ein Boot. Sie einigten sich, dass jeder von ihnen eine der ersten vier Fahrten mit dem Boot durchführen solle. Bei der Festlegung der Reihenfolge dieser Fahrten äußerten sie folgende Wünsche:

1. Für den Fall, dass Dieter als Erster fahren sollte, wollte Christian als Dritter fahren.
2. Wenn Axel oder Dieter als Zweiter fahren sollte, dann wollte Christian als Erster fahren.
3. Dann und nur dann, wenn Axel als Dritter fahren sollte, wollte Bodo als Zweiter fahren.
4. Falls Dieter als Dritter fahren sollte, so wollte Axel als Zweiter fahren.
5. Wenn Dieter als Letzter fahren sollte, dann wollten Christian als Dritter und Axel als Erster fahren.

Ermitteln Sie alle Möglichkeiten für die Reihenfolge, in der die ersten vier Fahrten durchgeführt werden können, so dass diese Wünsche erfüllt sind!

Lösung von cyrix:
Wir führen eine Fallunterscheidung danach durch, welche der Fahrten von Dieter übernommen wird:

Fall 1: Dieter fährt als Erster. Dann fährt Christian nach 1. als Dritter und nach 3. Bodo nicht als Zweiter, also Vierter, sodass für Axel nur der zweite Platz verbleibt. Es ergibt sich die Reihenfolge Dieter, Axel, Christian, Bodo, welche der Bedingung 2 widerspricht. In diesem Fall gibt es also keine gültige Lösung.

Fall 2: Dieter fährt als Zweiter. Dann fährt nach 2. Christian als Erster und nach 3. Axel nicht als Dritter, also als Vierter, womit für Bodo nur die dritte Position verbleibt. Es ergibt sich die Reihenfolge Christian, Dieter, Bodo, Axel. Die Probe bestätigt diese Lösung.

Fall 3: Dieter fährt als Dritter. Dann fährt nach 4. Axel als Zweiter. Nach 2. fährt Christian als Erster und schließlich Bodo als Vierter. Es ergibt sich die Reihenfolge Christian, Axel, Dieter, Bodo. Die Probe bestätigt diese Lösung.

Fall 4: Dieter fährt als Vierter. Dann fährt nach 5. Christian als Dritter, Axel als Erster und Bodo schließlich als Zweiter. Es ergibt sich die Reihenfolge Axel, Bodo, Christian, Dieter, die aber 2. widerspricht, sodass es in diesem Fall keine Lösung gibt.

Es gibt also genau zwei zulässige Reihenfolgen.

Aufgabe 111233:

21 leere Felder, die in Form eines Rechtecks von 3 Zeilen und 7 Spalten wie in der Abbildung angeordnet sind, sollen so mit den Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 belegt werden, dass jedes Feld mit genau einer der angegebenen Zahlen belegt wird und dabei insgesamt jede dieser Zahlen dreimal vorkommt.
Dabei sollen die drei Zahlen jeder Spalte paarweise voneinander verschieden sein, und von den sechs Zahlen in je zwei Spalten dürfen höchstens zwei übereinstimmen.
Man gebe eine Belegung der geforderten Art an und begründe, wie sich eine derartige Belegung finden lässt.

Lösung von weird:
Ein 3×7-Tableau, welches ganz oder teilweise mit den Ziffern 1,2,3 ausgefüllt ist, heißt im Folgenden zulässig, wenn folgende Bedingungen für die bereits eingetragenen Ziffern erfüllt sind:
• Jede Ziffer kommt in dem Tableau höchstens dreimal vor
• Für jede Spalte sind alle ihre Ziffern verschieden
• Für je zwei verschiedene Spalten gibt es höchstens eine Ziffer, welche in beiden Spalten vorkommt.

Ferner denken wir uns die Kästchen eines Tableaus in dem Sinn geordnet, als ein Kästchen vor einem anderen kommt, wenn seine Spaltennummer kleiner ist, und bei gleicher Spaltennummer, wenn seine Zeilennummer dann kleiner ist. Des weiteren nennen wir im Folgenden ein Kästchen frei, wenn in dieses bis dahin noch keine Ziffer eingetragen wurde.

Folgender Greedy-Algorithmus liefert dann das gewünschte Ergebnis:
Beginnend mit dem noch leeren Tableau, welches offensichtlich zulässig ist, fügt man einfach jede Ziffer der Folge

$$1,1,1,2,2,2,3,3,3,4,4,4,5,5,5,6,6,6,7,7,7$$

in genau dieser Reihenfolgen an der ersten freien Stelle in das Tableau ein, für welches dieses weiterhin zulässig ist. Das Endtableau unten erfüllt dann offensichtlich alle Bedingungen der Aufgabe hier:

1	1	1	2	2	3	3
2	4	6	4	5	4	5
3	5	7	6	7	7	6

Aufgabe 121233:
Drei Schulen, je eine aus Adorf, Bedorf und Cedorf, führten bei einem Kreissportfest einen Leichtathletikwettkampf durch. In jeder Disziplin stellte jede Schule genau einen Teilnehmer. Ein Reporter interviewte nach dem Wettkampf einen Zuschauer:

Reporter: „Wer hat den gesamten Wettkampf gewonnen?“
Zuschauer: „Adorf gewann den Weitsprung, aber den gesamten Wettkampf gewann Bedorf, und zwar mit 22 Punkten. Adorf und Cedorf erreichten je 9 Punkte.“
Reporter: „Wie wurden die Punkte verteilt?“
Zuschauer: „In jeder der Disziplinen erhielt der Erste eine bestimmte Punktzahl, der Zweite eine kleinere, der Dritte eine noch kleinere, aber mindestens einen Punkt. Diese Verteilung war für alle Disziplinen dieselbe. Alle Punktzahlen waren ganzzahlig.“
Reporter: „In wieviel Disziplinen fand der Wettkampf insgesamt statt?“
Zuschauer: „Ich weiß es nicht.“
Reporter: „Wer hat das Kugelstoßen gewonnen?“
Zuschauer: „Ich weiß es nicht, aber Kugelstoßen war dabei.“

Ermitteln Sie, ob die folgenden beiden Fragen auf Grund dieser (sämtlich als wahr vorausgesetzten) Aussagen eindeutig beantwortet werden können, und geben Sie alle Antworten, die mit diesen Aussagen vereinbar sind, an!
a) Welche der drei Schulen gewann das Kugelstoßen?
b) Welche Schule belegte beim Weitsprung den zweiten Platz?
(Es sei bekannt, dass in jeder der Disziplinen eine eindeutige Reihenfolge der Wettkampfteilnehmer ermittelt wurde.)

Lösung von weird:
Es bezeichne im Folgenden k die Anzahl der Wettkämpfe und P die Gesamtzahl der für jeden Wettkampf zu verteilenden Punkte. Da laut Angabe die Gesamtpunktezahl für alle Wettkämpfe zusammengenommen $40(= 9 + 22 + 9)$ beträgt, wissen wir, dass $k \cdot P = 40$ sein muss. Ferner ist $P \geq 6(= 3 + 2 + 1)$, da die Punktezahlen für die einzelnen Platzierungen laut Angabe verschiedene positive ganze Zahlen sind. Dies schränkt dann auch k auf die drei Fälle $k = 2{,}4{,}5$ ein, welche wir nachfolgend untersuchen.

1.Fall: $k = 2$, $P = 20$
Hier müsste dann ADorf allein für seinen Sieg im Weitsprung schon mehr als 10 Punkte bekommen, obwohl seine Geamtpunktzahl nur 9 beträgt, Widerspruch!
2.Fall: $k = 4$, $P = 10$
Für einen einzelnen Sieg in einem Wettkampf müsste es dann mindestens 6 Punkte geben, damit BeDorf auf seine Gesamtzahl von 22 Punkten kommt. Dies ist aber zugleich der Höchstwert für einen solchen Sieg, sonst wäre die Punktestände von jeweils 9 für ADorf und CeDorf nicht möglich. Dies impliziert dann automatisch die Punkteverteilung 6,3,1 für die drei Plätze in jedem Wettkampf, womit aber z. B. BeDorf dann nicht auf seine 22 Punkte kommt.
3. Fall: $k = 5$, $P = 8$
Für einen einzelnen Sieg in einem Wettkampf müsste es diesmal mindestens 5 Punkte geben, damit BeDorf auf seine Gesamtzahl von 22 Punkten kommt. Dies ist aber zugleich der höchste Wert für einen Sieg, für den eine additive Zerlegung von P in 3 verschiedene positve ganze Zahlen möglich ist, nämlich in diesem Fall $P = 8 = 5 + 2 + 1$. Abgesehen von der Reihenfolge der Summanden gibt es aber dann jeweils eine kompatible Zerlegung des Punktestandes für jeden der drei Bewerber, nämlich
ADorf: $5 + 1 + 1 + 1 + 1 = 9$
BeDorf: $2 + 5 + 5 + 5 + 5 = 22$
CeDorf: $1 + 2 + 2 + 2 + 2 = 9$
Insbesondere stehen damit auch die Antworten auf obige Fragen fest:
a) BeDorf gewann im Kugelstoßen, weil es mit Ausnahme von Weitsprung ja alle Wettbewerbe gewonnen hat.

b) Aus dem gleichen Grund wieder BeDorf mit seinem einzigen 2.PLatz, eben dann in Weitsprung.

Aufgabe 161233:
Es sei eine Menge von endlich vielen roten und grünen Punkten gegeben, von denen einige durch Strecken verbunden sind.
Ein Punkt dieser Menge heiße außergewöhnlich, wenn mehr als die Hälfte der von ihm ausgehenden Verbindungsstrecken in Punkten enden, die eine andere Farbe als er haben.
Wenn es in der gegebenen Punktmenge außergewöhnliche Punkte gibt, so wähle man einen beliebigen aus und färbe ihn in die andere Farbe um. Falls in der entstandenen Menge außergewöhnliche Punkte existieren, werde das Verfahren fortgesetzt.
Man beweise:
Für jede Menge der beschriebenen Art und für jede Möglichkeit, jeweils außergewöhnliche Punkte zum Umfärben auszuwählen, entsteht nach endlich vielen solchen Umfärbungen eine Menge, die keinen außergewöhnlichen Punkt enthält.

Lösung von Kornkreis:
Bezeichne eine Strecke als „außergewöhnlich“ , wenn sie einen roten mit einem grünen Punkt verbindet. Unter den Strecken, die von einem außergewöhnlichen Punkt zu anderen Punkten der Menge ausgehen, sind also mehr als die Hälfte außergewöhnlich.
Beim Umfärben eines außergewöhnlichen Punktes reduziert sich somit die Anzahl der außergewöhnlichen Strecken, die von diesem Punkt ausgehen, um mindestens eins. Insbesondere reduziert sich insgesamt die Anzahl der außergewöhnlichen Strecken in der gegebenen Anordnung von Punkten und Verbindungsstrecken um mindestens eins.

Die Anzahl der Verbindungsstrecken zweier verschiedener Punkte der gegebenen Punktmenge ist endlich, nennen wir sie n.
Nach höchstens n-maligem Ausführen des Umfärbeverfahrens hat man also die Situation erreicht, dass keine außergewöhnliche Strecke mehr vorliegt (d. h. nur gleichfarbige Punkte haben Verbindungsstrecken untereinander, sodass es insbesondere keine außergewöhnlichen Punkte gibt), oder dass kein Punkt mehr außergewöhnlich ist und das Umfärbeverfahren folglich nicht mehr durchgeführt werden kann. Dies zeigt die Behauptung.

Aufgabe 211235:
37 Karten, von denen jede auf der einen Seite rot und auf der anderen Seite blau gefärbt ist, seien so auf einen Tisch gelegt, dass genau 9 Karten von ihnen oben ihre blaue Seite zeigen.
Es sollen nun in Arbeitsgängen Karten umgedreht werden, und zwar in jedem einzelnen Arbeitsgang genau 20 beliebige der 37 Karten.
Untersuchen Sie, ob man mit endlich vielen Arbeitsgängen erreichen kann, dass alle 37 Karten
a) oben ihre rote Seite,
b) oben ihre blaue Seite
zeigen. Falls das möglich ist, ermitteln Sie jeweils die kleinste Anzahl der dafür hinreichenden Arbeitsgänge!

Lösung von cyrix:
a) Wir identifizieren eine Karte, deren rote Seite oben liegt, mit 1 und eine Karte, deren blaue Seite oben liegt, mit -1. Dann ist in der Startsituation die Summe aller Karten gleich $s = 9 \cdot (-1) + (37-9) \cdot 1 = 19$. Würden alle Karten ihre rote Seite zeigen, ergäbe sich eine Summe von $r = 37 \cdot 1 = 37$.

Das Umdrehen einer Karte verändert die Summe der Karten um ± 2: Entweder wird aus einer roten Karte (+1) eine blaue (-1), sodass der Wert um 2 sinkt, oder umgekehrt, sodass der Wert um 2 steigt. Das gleichzeitige Umdrehen von zwei Karten ändert also den Wert der Summe der Karten um ± 4 oder 0, jedenfalls um eine durch 4 teilbare Zahl. Also gilt dies auch für das wiederholte Umdrehen einer geraden Anzahl an Karten, etwa für wiederholtes Umdrehen von je 20 Karten.
Da aber $r - s = 37 - 19 = 18$ nicht durch 4 teilbar ist, kann also nie aus der Startsituation erzeugt werden, dass alle Karten ihre rote Seite zeigen.

b) Die Karten mit zu Beginn sichtbarer blauer Seite seien die Karten Nr. 1 bis 9, während die Karten Nr. 10 bis 37 jeweils ihre rote Seite zeigen. Wir geben nun eine Folge von zwei Arbeitsgängen an, sodass am Ende alle Karten ihre blaue Seite zeigen:

1) Drehe alle Karten mit Nr. 4 bis 23. Dann zeigen genau die Karten mit Nr. 4 bis 9 und die mit Nr. 24 bis 37 rot, alle anderen blau.
2) Drehe alle Karten mit Nr. 4 bis 9 und alle Karten mit Nr. 24 bis 37. Dann zeigen alle Karten ihre blaue Seite.

Es gibt also eine Folge von zwei Arbeitsvorgängen, die die Startsituation in die Zielsituation mit ausschließlich sichtbaren blauen Kartenseiten überführt. Es bleibt noch zu zeigen, dass dies nicht auch mit weniger Arbeitsvorgängen erreicht werden kann. Da aber mit einem Arbeitsvorgang nicht alle 28 roten Karten der Startsituation umgedreht werden können, ist dies der Fall.

Aufgabe 251234:
Acht Gegenstände, die mit $A_1, A_2, \ldots, A_8$ bezeichnet seien, sind in zwei Schränke S_1 und S_2 verschlossen worden. Zur Ermittlung der Verteilung der Gegenstände werden folgende Aussagen gemacht.
In dem Schrank S_1 befinden sich
(1) A_1 genau dann, wenn sich A_3 und A_5 beide in S_1 befinden;
(2) A_2 genau dann, wenn sich A_3 und A_6 beide in S_1 befinden;
(3) A_3 genau dann, wenn sich A_4 und A_8 beide in S_2 befinden;
(4) A_4 genau dann, wenn sich A_1 und A_8 beide in S_2 befinden;
(5) A_5 genau dann, wenn sich A_6 in einem anderen Schrank befindet als A_7;
(6) A_6 genau dann, wenn sich A_4 in einem anderen Schrank befindet als A_5;
(7) A_7 genau dann, wenn sich A_1 in demselben Schrank befindet wie A_2;
(8) A_8 genau dann, wenn sich A_5 in demselben Schrank befindet wie A_7;
Ermitteln Sie alle diejenigen für eine Verteilung der acht Gegenstände auf die beiden Schränke bestehenden Möglichkeiten, bei denen alle Aussagen (1) bis (8) wahr sind!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn für eine Verteilung alle Aussagen (1) bis (8) wahr sind, so folgt:
Angenommen, es wäre A_1 in S_1. Dann erhielte man die in der Tabelle dargestellten Schlussfolgerungen

		Folgerung aus (1)	(3)	(8)	(7)	(2)
A_1	S_1					
A_2					S_2	
A_3		S_1				
A_4			S_2			
A_5		S_1				
A_6						S_2
A_7				S_2		
A_8			S_2			

Die dabei erhaltene Aussage „A_6 in S_2“ hätte nach (6) zur Folge, dass A_4 in demselben Schrank wie A_5 wäre, somit ein Widerspruch erreicht ist. Also ist A_1 in S_2 (9).
Angenommen weiter, es wäre A_3 in S_1. Dann erhielt man aus (3), dass entweder A_4 oder A_8 in S_2 wären. Die erhaltene Aussage „A_4 in S_2“ hätte nach (4) zur Folge, dass A_1 und A_8 nicht beide in S_2 wären, womit ein Widerspruch erreicht ist. Also ist A_3 in S_2. (10)
Aus (10) und (2) folgt A_2 in S_2 (11).
Aus (9), (11) und (7) folgt A_7 in S_1. (12).

Angenommen schließlich, es wäre A_8 in S_1. Dann wäre nach (8) A_5 in S_1, nach (6) A_4 in S_1 und nach (5) A_6 in S_2. Die dabei erhaltene Aussage A_4 in S_1 hätte nach (4) zur Folge, dass A_8 in S_2 wäre, womit nochmals ein Widerspruch erreicht ist. Also ist A_8 in S_2. (13)

Aus (9), (13) und (4) folgt A_4 in S_1. (14)
Aus (13), (8) und (12) folgt A_5 in S_2. (15)
Aus (14), (15) und (6) folgt A_6 in S_1. (16)
Also können nur für die in (9) bis (16) angegebene Verteilung alle Aussagen (1) bis (8) wahr sein.

II. Für die Verteilung (9) bis (16) gilt:
A_1 ist nicht in S_1; A_3 und A_5 nicht in S_1; also ist (1) wahr.
A_2 ist nicht in S_1; A_3 nicht in S_1; also ist (2) wahr.
A_3 ist nicht in S_1; A_4 nicht in S_2; also ist (3) wahr.
A_4 ist in S_1; A_1 und A_8 sind beide in S_2; also ist (4) wahr.
A_5 ist nicht in S_1; A_6 ist in demselben Schrank S_1 wie A_7; also ist (5) wahr.
A_6 ist in S_1; A_4 ist nicht in dem Schrank S_2, in dem A_5 ist; also ist (6) wahr.
A_7 ist in S_1; A_1 ist in demselben Schrank S_2 wie A_2; also ist (7) wahr.
A_8 ist nicht in S_1; A_5 ist nicht in dem Schrank S_1, in dem A_7 ist, also ist (8) wahr.

Mit I. und II. ist bewiesen, dass genau bei der in (9) bis (16) angegebenen Verteilung alle Aussagen (1) bis (8) wahr sind.

Aufgabe 271232:
Ein Auto soll einen Rundkurs in einem vorgeschriebenen Umlaufsinn durchfahren. Das zur Verfügung stehende Benzin reicht genau zum einmaligen Durchfahren des Kurses, wurde aber vorher willkürlich in eine Anzahl $n \geq 1$ von Kanistern verteilt, die ebenfalls willkürlich längs des Rundkurses aufgestellt sind.
Der Tank des Autos ist zu Beginn leer und besitzt ausreichendes Fassungsvermögen, um beim Erreichen jedes Kanisters dessen Benzin aufzunehmen.
Man beweise, dass es möglich ist, den Startpunkt des Autos so zu wählen, dass der Kurs genau einmal durchfahren werden kann.
(Eventuelle Verluste beim Umfüllen, Mehrverbrauch bei wiederholten Anfahren usw. sollen nicht berücksichtigt werden.)

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
1. Im Fall $n = 1$ kann der einzige Kanister offenbar als Startpunkt gewählt werden.

2. Als Induktionsannahme weder vorausgesetzt, dass die Behauptung für $n = k$ Kanister zutrifft ($k \geq 1$).
Dann folgt für jede Aufstellung A von $k + 1$ Kanistern:
Unter den Kanistern der Aufstellung A befindet sich wenigstens ein Kanister C, von dem aus der nächste Kanister C' mit dem Inhalt von C erreicht werden kann; denn andernfalls wäre die Summe der Inhalte aller Kanister kleiner als eine für den Rundkurs ausreichende Gesamtmenge.

Wird nun der Inhalt von C' in C umgefüllt und C' weggelassen, so entsteht eine Aufstellung A' von k Kanistern, zu der nach Induktionsannahme ein Standort existiert, von dem aus der Rundkurs durchfahren werden kann.
Dieser Standort kann an keiner Stelle sein, die zwischen C und dem in der Aufstellung A übernächsten Kanister C'' liegt; denn er muss bei einem Kanister C_0 sein (sonst könnte das Auto dort nicht starten), und zwischen C und C'' steht bei der Aufstellung A' kein Kanister.

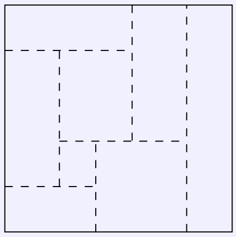
Also enthält für die Aufstellung A' der mit C_0 beginnende Rundkurs auf der Strecke von C_0 nach C (die auch mit $C_0 = C$ entartet sein kann) dieselben Standorte wir für A. Dann folgt die Strecke von C bis zu C'', und danach folgt auf der Strecke von C'' nach C_0 (die auch mit $C_0 = C''$ entartet sein kann) wieder dieselbe Standortverteilung für A' wie für A.

Damit ergibt sich für die Aufstellung A:

Nach einem Start in C_0 kann wie bei A' bis C gefahren werden. Anschließend würde (nach Voraussetzung über A') das im Auto und in C und in C' zusammen vorhandene Benzin reichen; daraus (und weil schon der Inhalt von C bis C' reicht) folgt:
Das im Auto und in C vorhandene Benzin reicht bis C', und von dort kommt man durch Hinzufügen des Benzins aus C' bis C''. Von dort schließlich gelangt man wie bei A' bis C_0.

Also hat sich ergeben, dass bei der Aufstellung A der Rundkurs von C_0 aus durchfahren werden kann; d. h., die Behauptung gilt auch für $n = k + 1$ Kanister.
Mit I. und II. ist die Behauptung für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ bewiesen.

Aufgabe 271236:



Ein quadratisches Feld Q der Seitenlänge 10 km ist von einem Wassergraben u umgeben.
Zur Bewässerung soll Q durch Anlegen weiterer Gräben g vollständig in rechteckige Teilfelder $F_1, F_2, \ldots, F_n$ zerlegt werden.
Die Breite der Gräben werde vernachlässigt; die Abbildung zeigt ein Beispiel für eine solche Zerlegung.
Ferner werde gefordert, dass jeder Punkt der Fläche Q nicht weiter als 100 m von einem Wassergraben (u oder g) entfernt ist.
a) Man beweise: Wenn diese Forderung durch Gräben g einer Gesamtlänge von L Kilometern erfüllt wird, so folgt stets $L \geq 480$.
b) Man beweise, dass es einen kleinsten Wert gibt, den L (bei Erfüllung der genannten Forderung) annehmen kann, und ermittle diesen Wert.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Für jede Zerlegung Z in Felder $F_1, F_2, \ldots, F_n$, die die genannte Forderung erfüllt, seien die Längenmaßzahlen der Seiten von F_i jeweils so mit a_i, b_i bezeichnet, dass $a_i \leq b_i$ gilt.
Aus der Forderung folgt dann $a_i \leq 0{,}2$ ($i = 1{,}2, \ldots, n$). Da der Flächeninhalt des Feldes Q gleich der Summe der Flächeninhalte der F_i ist, folgt hieraus

$$100 = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \sum_{i=1}^{n} 0{,}2 \cdot b_i = 0{,}2 \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i \qquad \text{also} \qquad \sum_{i=1}^{n} b_i \geq 500 \tag{1}$$

Addiert man die Umfänge der Felder F_i, so erhält man die Summe aus der Länge u und der doppelten Länge von g, d. h., es gilt

$$\sum_{i=1}^{n} 2(a_i + b_i) = 40 + 2L$$

Hieraus und aus (1) folgt

$$L = \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} 2(a_i + b_i) - 40 \right) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i - 20 \geq \sum_{i=1}^{n} a_i + 480 \tag{2}$$

a) Da alle $a_i \geq 0$ sind, folgt aus (2), wie behauptet, $L \geq 480$.

b) Eine der beiden Richtungen von Gräben werde „horizontal", die andere „vertikal" genannt. Ein Feld F_i heiße horizontal bzw. vertikal je nachdem, ob b_i die Längenmaßzahl seiner horizontalen oder seiner vertikalen Seiten ist.
Nun tritt stets einer der beiden folgenden Fälle I., II. ein:
I. Wenn es eine horizontale Strecke gibt, die das Feld Q durchquert und dabei nur mit vertikalen Feldern der Zerlegung Z nichtleere Durchschnitte hat, so ist die Summe der Längenmaßzahlen a_i dieser Durchschnitte gleich 10; also gilt erst recht

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \geq 10$$

II. Wenn aber jede horizontale Strecke, die das Feld Q durchquert, mit mindestens einem horizontalen Feld der Zerlegung Z nichtleeren Durchschnitt hat, so folgt, indem man alle diese horizontalen Felder auf eine vertikale Gerade projiziert:
Diese Projektionen überdecken eine gesamte vertikale Strecke der Länge 10 km; d. h., die Summe der Längenmaßzahlen a_i dieser Projektionen ist größer oder gleich 10, also ergibt sich ebenfalls (3).

Somit gilt (3) für jede Zerlegung Z der geforderten Art; hiernach folgt aus (2) für jede solche Zerlegung

$$L \geq 490 \tag{4}$$

Ferner gilt: es gibt eine Zerlegung der geforderten Art mit $L = 490$, z. B. die Zerlegung in 50 vertikale Felder mit $a_i = 0{,}2$ und $b_i = 10$, die genau 49 Gräben g aufweist, deren jeder die Länge 10 km hat.
Damit ist, wie gefordert, die Existenz eines kleinsten Werte für L bewiesen; er beträgt 490.

Aufgabe 281233A:
Man ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen $n \geq 3$, für die es möglich ist, zu jedem $i = 1, 2, ..., n$ eine natürliche Zahl a_i so anzugeben, dass die folgenden Bedingungen erfüllt werden:
(1) Für alle i mit $1 \leq i \leq n$ gilt $0 \leq a_i \leq \frac{1}{2}(n-1) \cdot n$.
(2) Keine zwei unter den Differenzen $a_j - a_i$, die man für alle i, j mit $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$ und $i \neq j$ bilden kann, sind einander gleich.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Für $n = 3$ werden die Bedingungen z. B. durch $a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 3$ mit den Differenzen $\{-1, -3, -1, -2, 3, 2\}$ erfüllt.

II. Für $n = 4$ werden die Bedingungen z. B. durch $a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 4, a_4 = 6$ mit den Differenzen $\{-1, -4, -6, 1, -3, -5, 4, 3, -2, 6, 5, 2\}$ erfüllt.

III. Angenommen nun, für ein $n \geq 5$ seien (1), (2) erfüllt durch natürliche Zahlen $a_1, ..., a_n$. Dann folgt:
(3) Keine zwei der Zahlen $a_1, ..., a_n$ sind einander gleich.
Beweis:
Wäre $a_j = a_k$ $(j \neq k)$, so folgte mit einem von j und k verschiedenen i, dass $a_j - a_i = a_k - a_i$ wäre, was (2) widerspricht.

O. B. d. A. kann daher wegen (1) angenommen werden:
(4) Es gilt $0 \leq a_1 < a_2 < ... < a_{n-1} < a_n \leq \frac{1}{2}(n-1)n$.

Weiter gilt:
(5) Die Differenzen $a_j - a_i$, die für alle i,j mit $1 \leq i < j \leq n$ gebildet werden, sind die Zahlen $1, 2, ..., \frac{1}{2}(n-1)n$ in geeigneter Reihenfolge, jede genau einmal.
Beweis:
Nach (4) gilt $0 < a_j - a_i \leq \frac{1}{2}(n-1)n$ für jede dieser Differenzen. nach (2) sind sie paarweise verschieden, also ist ihre Anzahl gleich der Anzahl der Paare (i,j) mit $1 \leq i < j \leq n$. Diese Anzahl ist aber gleich

$\frac{1}{2}(n-1)n$, daher muss (5) gelten.

Insbesondere gilt:
(6) Die Differenzen $d_i = a_{i+1} - a_i$, die für alle $i = 1,...,n-1$ gebildet werden, sind die Zahlen $1,2,...,n-1$ in geeigneter Reihenfolge, jede genau einmal.
Beweis:
Nach (4) ist die Summe dieser Differenzen

$$d_1 + ... + d_{n-1} = a_n - a_i \leq \frac{1}{2}(n-1)n$$

nach (2) sind sie paarweise verschiedene natürliche Zahlen, nach (4) positiv.
Da aber bereits die Summe der Zahlen $1, 2, ..., n-1$ bekanntlich $\frac{1}{2}(n-1)n$ beträgt, verbleibt nur die Möglichkeit (6).
Nun erhält man: Nach (6) gibt es unter den Indizes $1, ..., n-1$ genau einen Index p mit $d_p = 1$. Ist ein Index r $(1 \leq r \leq n-1)$ oberer oder unterer Nachbar von p, so muss $d_r = n-1$ sein; denn wäre für zwei benachbarte Indizes $i, i+1$ die einer der beiden Zahlen d_i, d_{i+1} gleich 1, die andere kleiner als $n-1$, so folgte

$$a_{i+2} - a_i = d_{i+1} + d_i < n$$

womit wegen (6) ein Widerspruch gegen (2) vorläge.
Also muss p einer der beiden Indizes $1, n-1$ mit nur einem Nachbar sein, und für diesen Nachbarindex r mit $d_r = n-1$ gelten; d. h., es muss einer der beiden folgenden Fälle A, B vorliegen:
A: Es gilt $d_1 = 1, d_2 = n-1$ B: Es gilt $d_{n-1} = 1, d_{n-2} = n-1$.

Ebenso erhält man: Es gibt genau einen Index q mit $d_q = 2$. Ist ein Index s oberer oder unterer Nachbar von q, so muss d_s einer der Zahlen $n-2, n-1$ sein. Wegen $n \geq 5$ sind diese beiden Zahlen von 1 und 2 verschieden.
Also muss, falls q zwei Nachbarn hat, der einen von ihnen der bereits in den Fällen A, B festgelegte Index r sein, und für den anderen Nachbar s muss $d_s = n-2$ gelten.
Hat q aber nur einen Nachbar s (d. h. gilt $q = n-1$ im Fall A bzw. $q = 1$ im Fall B), so ist wegen $n \geq 5$ dieser Nachbar nicht der in den Fällen A, B festgelegte Index r; also kann dann nur $d_s = n-2$ sein.
Das heißt, es liegt jeweils für A bzw. B einer der folgenden Unterfälle A1, A2 bzw. B1, B2 vor:

A1: Es gilt $d_1 = 1, d_2 = n-1, d_3 = 2, d_4 = n-2$
A2: Es gilt $d_1 = 1, d_2 = n-1, d_{n-1} = 2, d_{n-2} = n-2$
B1: Es gilt $d_{n-1} = 1, d_{n-2} = n-1, d_{n-3} = 2, d_{n-4} = n-2$.
B2: Es gilt $d_{n-1} = 1, d_{n-2} = n-1, d_1 = 2, d_2 = n-2$.

Damit finden sich in jedem Fall vier Indizes der Form $u, u+1, v, v+1$ mit $u \neq v$, für die $d_u + d_{u+1} = n, d_v + d_{v+1} = n$ also $a_{u+2} - a_u = a_{v+2} - a_V$ gilt. Das widerspricht (6).
Die Annahme, für ein $n \geq 5$ seien (1), (2) erfüllbar, hat somit in jedem Fall auf einen Widerspruch geführt.
Mit I., II., III. ist bewiesen: Die Bedingungen der Aufgabe werden genau von den beiden Zahlen $n = 3$ und $n = 4$ erfüllt.

Aufgabe 281233B:
Für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ sei die folgende Forderung betrachtet:
Man soll $2n$ Gegenstände so in n (genügend große) Behälter verteilen, dass die nachstehenden Bedingungen erfüllt sind:
(1) Jeder Behälter enthält mindestens einen der Gegenstände.
(2) Jeder Behälter enthält höchstens n der Gegenstände.
(3) Es ist nicht möglich, die n Behälter so in zwei getrennten (genügend großen) Räumen unterzubringen, dass dabei in jeden der beiden Räume n der Gegenstände gelangen.
a) Geben Sie für $n = 3$ eine Verteilung von 6 Gegenständen in 3 Behälter an, und weisen Sie nach,

dass die von Ihnen angegebene Verteilung die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt!
b) Beweisen Sie, dass es genau dann möglich ist, die Forderung zu erfüllen, wenn n eine ungerade Zahl ist!
c) Ermitteln Sie für jedes ungerade $n \geq 3$ alle Verteilungen der geforderten Art!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Angabe einer Verteilung: In jedem der 3 Behälter gebe man genau 2 der Gegenstände.

Nachweis der Bedingungen:
Wegen $2 \geq 1$ und $2 \leq 3$ sind (1) und (2) erfüllt. Ferner ist bei jeder Möglichkeit, die 3 Behälter in den zwei Räumen unterzubringen, in einem der beiden Räume eine größere Anzahl von Behältern als in dem anderen Raum, da die Anzahl 3 aller Behälter eine ungerade Zahl ist.
Somit gilt bei jeder dieser Möglichkeiten auch, dass in einem der beiden Räume eine größere Anzahl von Gegenständen als in dem anderen Raum ist. Damit ist (3) erfüllt.

b) Durch die gleiche Beweisführung, angewandt auf beliebiges ungerades n statt 3, erhält man:
Für jedes ungerade $n \geq 3$ kann die Forderung (mindestens) durch diejenige Verteilung erfüllt werden, bei der in jeden der n Behälter genau 2 Gegenstände gegeben werden.

Nun wird die folgende Hilfsaussage gezeigt:
Wenn die betrachtete Forderung für eine natürliche Zahl $n \geq 2$ dadurch erfüllt ist, dass jeweils für $i = 1,...,n$ in den i-ten Behälter genau a_i Gegenstände gegeben werde, dann folgt, dass alle $a_i = 2$ sein müssen.

Beweis: Die Behälter lassen sich so bezeichnen, dass

$$1 \leq a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n \leq n \tag{4}$$

gilt, wobei die erste und letzte Ungleichung aus (1) und (2) folgt.
Wegen (4) und der Anzahl $2n > n$ der Gegenstände gibt es eine natürliche Zahl $k \geq 2$ mit

$$a_1 + ... + a_{k-1} \leq n \tag{5}$$
$$a_1 + ... + a_{k-1} + a_k > n \tag{6}$$

Würde in (5) das Gleichheitszeichen gelten, so erhielte man im Widerspruch zu (3) die Möglichkeit, in den einen Raum vermittels der Behälter $1,...,k-1$ genau n Gegenstände und folglich in den anderen Raum die übrigen n Gegenstände zu bringen. Also gilt sogar

$$a_1 + ... + a_{k-1} < n \tag{7}$$

wegen $a_i + ... + a_{n-1} = 2n - a_n \geq n$ ist dabei $k < n$ (8). Es werde nun

$$s_1 = a_1 \quad ; \quad s_2 = a_1 + a_2 \quad ; \quad ... \quad ; \quad s_{k-1} = a_1 + a_2 + ... + a_{k-1}$$
$$t_1 = n - a_n \quad ; \quad t_2 = n - a_n - a_{n-1} \quad ; \quad ... \quad ; \quad s_{n-k} = n - a_n - a_{n-1} - ... - a_{k+1}$$

gesetzt. Wegen (1) sind alle s_i paarweise verschieden und alle t_j paarweise verschieden. Es ist aber auch jedes s_i von jedem t_j verschieden; denn aus $s_i = t_j$ würde

$$a_1 + ... + a_i + a_n + ... + a_{n-j+1} = n$$

und damit ein Widerspruch gegen (3) folgen.
Wegen (4), (6), (7) und der Gesamtzahl $2n$ der Gegenstände gilt für alle i bzw. j:

$$1 \leq s_i \leq n-1 \qquad 1 \leq t_j \leq n-1 \tag{9}$$

Aus (9) für die $n-1$ paarweise verschiedenen Zahlen s_i, t_j folgt:

Die Zahlen $s_1, ..., s_{k-1}, t_1, ..., t_{n-k}$ sind die Zahlen $1, ..., n-1$ in geeigneter Reihenfolge (10)

Wäre nun $a_1 = 1$, so könnten wegen $a_1 + ... + a_n = 2n$ nicht alle $a_2, ..., a - n \leq 2$ sein, also müsste wegen (4) mindestens $a_n \geq 3$ sein. Daher wäre $t_1 \leq n-3$ und somit erst recht $t_j \leq n-3$ für alle j. Die beiden Zahlen $n-2$ und $n-1$ müssten wegen (10) also unter den s_i auftreten, was wegen $s_1 < ... < s_{k-1}$ nur mit $s_{k-2} = n-2$ und $s_{k-1} = n-1$ möglich wäre.
Das hätte aber $a_{k-1} = 1$, wegen (4) also $a_1 = ... = a_{k-1} = 1$ zur Folge. Aus $s_{k-1} = n-1$ erhielte man somit $k-1 = n-1$ im Widerspruch zu (8).
Also muss $a_1 = 2$ gelten; nach (4) müssen alle $a_i \geq 2$ sein, und dies ist wegen $a_1 + ... + a_n = 2n$ nur mit $a_1 = ... = a_n = 2$ möglich. Damit ist die Hilfsaussage bewiesen.

Unter Verwendung der Hilfsaussage ergibt sich folgender Beweis dafür, dass die in der Aufgabe betrachtete Forderung für gerades n nicht erfüllt werden kann:
Wäre es doch möglich, (1), (2), (3) zu erfüllen, so müsste nach der Hilfsaussage $a_1 = ... = a_n = 2$ gelten. Dann aber könnte man, da n gerade ist, in jeden der beiden Räume $\frac{n}{2}$ Behälter und damit n Gegenstände bringen, was (3) widerspricht.
c) Aus der Hilfsaussage folgt ferner, dass für jedes ungerade $n \geq 3$ die in b) zu Anfang nachgewiesene Möglichkeit, (1) bis (3) durch $a_1 = ...a_N = 2$ zu erfüllen, die einzige ist.

Aufgabe 281234:
Man untersuche, ob es 21 paarweise verschiedene ganze Zahlen sowie eine Reihenfolge
$a_1, a_2, \ldots, a_{21} \quad (*)$
dieser Zahlen so gibt, dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:
(1) Für je vier in der Reihenfolge (*) unmittelbar aufeinanderfolgende Zahlen ergibt sich eine negative Summe dieser vier Zahlen.
(2) Die Summe aller 21 Zahlen ergibt 1989.

Lösung von weird:
Wir bilden dazu die Folge $a_1,a_2,\ldots,a_{21}$, welche rekursiv folgendermaßen definiert ist durch

$$a_1 = 1994,\ a_2 = -5989,\ a_3 = 1995,\ a_4 = 1996$$

sowie für $k = 5,6,\ldots,21$ durch

$$a_k = \begin{cases} a_{k-4} + 3, & \text{falls } k \not\equiv 2 \pmod 4 \\ a_{k-4} - 9, & \text{falls } k \equiv 2 \pmod 4. \end{cases}$$

Betrachtet man die ganze Folge, nämlich

$$1994, -5989, 1995, 1996, 1997, -5998, 1998, 1999, 2000, -6007, 2001, 2002, 2003, -6016, 2004,$$

$$2005, 2006, -6025, 2007, 2008, 2009$$

und dazu ihre Summe

$$1994 + \underbrace{(-5989) + 1995 + 1996 + 1997}_{=-1} + \underbrace{(-5998) + 1998 + 1999 + 2000}_{=-1} +$$

$$+ \underbrace{(-6007) + 2001 + 2002 + 2003}_{=-1} + \underbrace{(-6016) + 2004 + 2005 + 2006}_{=-1} +$$

$$+ \underbrace{(-6025) + 2007 + 2008 + 2009}_{=-1} = 1994 - 5 = 1989$$

so sollte das einfache Konstruktionsprinzip der Folge damit klar sein:

Indem wir sicherstellen, dass die unterklammerten Teilsummen alle negativ sind, sind dann nach der Bauart der Folge automatisch auch alle anderen Teilsummen aus jeweils 4 aufeinanderfolgenden Gliedern der Folge negativ!
Damit erfüllt diese Folge also dann tatsächlich alle Bedingungen der Aufgabe.

Aufgabe 301233A:
Man ermittle alle diejenigen siebzehnstelligen natürlichen Zahlen n, für deren 17 Ziffern $x_1, x_2, \dots, x_{17}$ die folgenden Bedingungen (1) und (2) erfüllt sind:
(1) Es gilt: $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_{17}$.
(2) Für die Summe $s = x_1 + x_2 + \dots + x_{17}$ und das Produkt $p = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{17}$ gilt: $s = p$.
Hinweis: Die Reihenfolge $x_1, \dots, x_{17}$ entspreche der üblichen Schreibweise; es bezeichne also x_{17} die Einerziffer, x_{16} die Zehnerziffer u. s. w.

Lösung von weird:
Wir versuchen zunächst die gestellten Bedingungen für die Ziffern $x_1,x_2,\dots,x_{17}$ noch etwas enger zu fassen:

1. Wegen $x_1 > 0$ ist auch $s > 0$ und wegen $p = s$ kann daher keine der 17 Ziffern 0 sein. Insbesondere muss daher $x_1 \geq x_2 \geq 2$ gelten, da sonst $s \geq 17$, aber $p \leq 9$ gelten würde, wieder im Widerspruch zu $p = s$.

2. Es können höchstens $x_1,x_2 \in \{6,7,8,9\}$ sein, denn andernfalls wäre $p \geq 6^3 = 216$, aber $s \leq 17 \cdot 9 = 153$, Widerspruch!

3. Wegen 2. gilt schon mal
$$s \leq 2 \cdot 9 + 15 \cdot 1 = 33$$
da für alle 17-Tupel $(x_1,x_2,\dots,x_{17})$, für welche $x_1x_2\dots x_{17}$ einen vorgegeben Wert p (hier $p = 153$) nicht überschreitet immer jenes den größten Summenwert $s = x_1 + x_2 + \dots + x_{17}$ aufweist, für welches die x_i, $i = 1,2,\dots,17$ in dieser Reihenfolge größtmöglich in Hinblick auf $x_1x_2 \dots x_i \leq p$ gewählt sind, was hier eben auf $x_1 = x_2 = 9$, $x_3 = \dots = x_{17} = 1$ und damit zu obiger Abschätzung führt. Damit haben aber dann höchstens die Ziffern $x_1,x_2,\dots,x_5$ einen Wert größer als 1, da sonst
$$p \geq 2^6 = 64 > s$$
gelten würde.

4. Es kann aber auch nicht $x_5 > 1$ sein, denn die einzige nach 3. noch bestehende Möglichkeit $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = (2,2,2,2,2)$ führt nicht auf eine Lösung, da für sie offensichtlich
$$s = x_2 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + 12 = 24 < 32 = x_1x_2x_3x_4x_5 = p$$
gilt. Wir dürfen daher im Folgenden auch $x_5 = 1$ voraussetzen.

Zusammenfassend müssen wir also nur die bereits erheblich einfachere Ausgabe lösen, 4 positive ganze Zahlen x_1,x_2,x_3,x_4 so zu finden, dass für sie die folgenden Bedingungen
$$x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq x_4 > 0 \tag{1}$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = x_1x_2x_3x_4x_5 - 13 \leq 20 \tag{2}$$
erfüllt sind, wobei nach 1. außerdem $x_1 \geq x_2 > 1$ gelten muss.
Wir führen daher die folgende Fallunterscheidung durch:

1.Fall: $x_1 = 9$.
Von den 2 Möglichkeiten
$$(x_1,x_2,x_3,x_4)) \in \{(9,2,1,1),(9,3,1,1)\}$$

welche kompatibel mit obigen Bedingungen sind, führt dann tatsächlich $(x_1,x_2,x_3,x_4) = (9,3,1,1)$ auf eine Lösung mit den weiteren Festlegungen $x_5 = x_6 = \cdots = x_{17} = 1$.

2.Fall: $x_1 = 8$.
Die 4 Möglichkeiten

$$(x_1,x_2) \in \{(8,2,1,1),(8,2,2,1),(8,3,1,1),(8,4,1,1)\}$$

ergeben hier alle durch Einsetzen einen Widerspruch mit (2).

3.Fall: $x_1 = 7$
Auch hier ergeben die 4 Möglichkeiten

$$(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \{(7,2,1,1),(7,2,2,1),(7,3,1,1),(7,4,1,1)\}$$

keine weitere Lösung.

4.Fall: $x_1 = 6$
Hier haben wir die 5 Möglichkeiten

$$(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \{(6,2,1,1),(6,2,2,1),(6,3,1,1),(6,4,1,1),(6,5,1,1)\}$$

von denen dann

$$x_1 = 6,x_2 = 2,x_3 = 2,x_4 = \cdots = x_{17} = 1$$

tatsächlich eine Lösung ist.

5.Fall: $x_1 = 5$
Hier gibt es die 6 Möglichkeiten

$$(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \{(5,2,1,1),(5,2,2,1),(5,3,1,1),(5,3,2,1),(5,4,1,1),(5,5,1,1)\}$$

von denen dann

$$x_1 = x_2 = 5,\ x_3 = \cdots = x_{17} = 1$$

tatsächlich eine Lösung ist.

Da wir nun für ev. weitere Lösungen ausschließen können, dass in ihnen die Ziffern 9,8,7,6,5 vorkommen, lohnt es sich, unsere Schranke für s nachzujustieren. Für sie gilt mittlerweile

$$s \leq 4 + 4 + 2 + 14 \cdot 1 = 24$$

Andererseits gilt auch die triviale untere Schranke $s \geq 17$, welche wir wegen $x_1 \geq x_2 > 1$ auch noch zu $s \geq 19$ verschärfen können. Tatsächlich ist es damit einfacher, sich einfach alle „Kandidaten“ für $s = p \in \{19,20,21,22,23,24\}$, anzusehen, von denen ja nur die mehr in Frage kommen, welche keinen Primfaktor größer als 3 aufweisen. Es bleibt somit nur $s = p = 24$, was auf die beiden Möglichkeiten

$$x_1 = 4,x_2 = 3,x_3 = 2,x_4 = 1 \quad \text{bzw.} \quad x_1 = 3,x_2 = x_3 = x_4 = 2$$

führt, welche aber beide keine weitere Lösung hier liefern, da sie (2) nicht erfüllen.
Zusammenfassend sind also alle Lösungen der Aufgabe gegeben durch die drei 17-stelligen Zahlen

$$93111111111111111, \quad 62211111111111111, \quad 55111111111111111$$

Aufgabe 311233B:
Es sei $n \geq 2$ die Anzahl der Teilnehmer an einer Feier. Für je zwei Teilnehmer A, B seien die folgenden beiden Aussagen wahr:
(1) Ist A mit B bekannt, so gibt es keinen von A und B verschiedenen Teilnehmer, der sowohl mit A als auch mit B bekannt wäre.
(2) Ist A nicht mit B bekannt, so gibt es genau zwei von A und B verschiedene Teilnehmer, die sowohl mit A als auch mit B bekannt sind.
Man beweise, dass unter diesen Voraussetzungen stets gilt:
Alle Teilnehmer haben auf dieser Feier dieselbe Zahl von Bekannten.
Hinweis: Für je zwei Teilnehmer A, B gelte:
Ist A mit B bekannt, so auch B mit A. Kein Teilnehmer gelte als mit sich selbst bekannt.

Lösung von Kitaktus:
Es liegt nahe, die Fragestellung in ein Problem der Graphentheorie zu übertragen. Ich versuche hier die Begriffe der Aufgabenstellung zu verwenden, damit die Lösung auch für diejenigen verständlich bleibt, die nicht mit der Graphentheorie vertraut sind.

(a) Wir betrachten die Anzahl der Bekannten zweier miteinander bekannter Teilnehmer u und v.
Sei U die Menge der von v verschiedenen Teilnehmer, die mit u bekannt sind und V die Menge der von u verschiedenen Teilnehmer, die mit v bekannt sind.
Für miteinander bekannte Teilnehmer u und v gibt es nach (1) keinen Teilnehmer w, der sowohl mit u, als auch mit v bekannt ist. U und V sind also disjunkt. Sei w ein beliebiger Teilnehmer aus U. Da w nicht mit v bekannt ist, gibt es nach (2) genau zwei Teilnehmer, die sowohl mit w als auch mit v bekannt sind. Einer dieser beiden Teilnehmer ist u, da u sowohl mit w als auch mit v bekannt ist.

Der andere Teilnehmer muss in V liegen, da er ein Bekannter von v und von u verschieden ist. Wir bezeichnen diesen Teilnehmer mit f(w).
Umgekehrt kann w auch keinen weiteren Bekannten f'(w) in V haben, weil es dann mehr als zwei Teilnehmer gäbe, die mit w und v bekannt sind, nämlich u, f(w) und f'(w).

Für jeden Teilnehmer w aus U gibt es also genau einen Bekannten f(w) in V. Das Argument gilt symmetrisch auch genau andersherum, für jeden Teilnehmer w aus V gibt es also genau einen Bekannten g(w) in U.
Zwischen U und V besteht also eine Bijektion mittels der Abbildungen f ¡-¿ g. U und V sind daher gleichmächtig, u und v haben also gleichviele Bekannte.

(b) Seien nun u und v beliebige Teilnehmer. Entweder sind sie miteinander bekannt und haben nach (a) gleichviele Bekannte.
Oder sie sind nicht miteinander bekannt, dann gibt es nach (2) einen Teilnehmer w, der mit u und v bekannt ist.
Nach (a) haben u und w gleichviele Bekannte, aber auch v und w und somit auch u und v. Insgesamt haben also beliebige Teilnehmer u und v jeweils gleichviele Bekannte. q. e. d.

Aufgabe 311235:
Man untersuche, ob sich unter den natürlichen Zahlen von 1 bis 100 fünfzig verschiedene so auswählen lassen, dass ihre Summe 2525 beträgt und dass keine zwei von ihnen die Summe 101 haben.

Lösung von cyrix:
Es sei M die Menge der natürlichen Zahlen von einschließlich 14 bis 28, 30, von einschließlich 33 bis 50, von einschließlich 69 bis 70, 72 und von einschließlich 88 bis 100.

Dann hat M genau $15+1+18+2+1+13=50$ verschiedene Elemente, von denen keine zwei sich zu 101 ergänzen, da aus jedem Paar $(n,101-n)$ zweier natürlicher Zahlen zwischen einschließlich 1 und 100 jeweils genau eine Zahl in M enthalten ist. Summiert man alle Elemente von M, dann erhält man als Summe s den Wert

$$s = 15 \cdot \frac{14+28}{2} + 30 + 18 \cdot \frac{33+50}{2} + 69 + 70 + 72 + 13 \cdot \frac{88+100}{2} = 2525$$

sodass es offenbar eine entsprechende Auswahl, die der Aufgabenstellung genügt, getroffen werden kann.

Aufgabe 331235:
Zwei kongruente regelmäßige $2n$-Ecke seien durch Verbinden ihrer Eckpunkte mit dem jeweiligen Mittelpunkt in Dreiecke zerlegt. Jedes dieser Dreiecke sei entweder blau oder rot gefärbt.
Von einem der beiden $2n$-Ecke werde vorausgesetzt, dass es ebenso viele blaue wie rote Dreiecke hat.
Man beweise: Unter diesen Voraussetzungen ist es stets möglich, die beiden $2n$-Ecke so aufeinanderzulegen, dass in mindestens n übereinanderliegenden Dreieckspaaren die beiden Dreiecke dieses Paares einander gleichgefärbt sind.

Lösung von Henning Thielemann:
Das eine $2n$-Eck besitze b blaue und $2n-b$ rote Dreiecke und das andere $2n$-Eck jeweils n blaue und rote Dreiecke.
Bei allen $2n$ Drehungen gibt es zusammengenommen $n \cdot b$ Übereinstimmungen blauer Dreiecke und $n \cdot (2n-b)$ Übereinstimmungen roter Dreiecke. Das sind zusammen $2n^2$ Übereinstimmungen.
Bei $2n$ möglichen Drehungen bedeutet dies nach dem Schubfachprinzip, dass es bei wenigstens einer Drehung mindestens n Übereinstimmungen gibt.

IV. Runde 4

Aufgabe 051242:
An einem Tanzabend hat jeder der anwesenden Herren mit mindestens einer der anwesenden Damen getanzt und jede der anwesenden Damen mit mindestens einem der anwesenden Herren.
Kein Herr hat mit jeder der anwesenden Damen und keine Dame mit jedem der anwesenden Herren getanzt.
Es ist zu beweisen, dass es unter den Anwesenden zwei solche Damen und zwei solche Herren gegeben hat, dass an dem Abend jede der beiden Damen mit genau einem der beiden Herren, und jeder der beiden Herren mit genau einer der beiden Damen getanzt hat.
Es wird vorausgesetzt, dass der Tanzabend nicht ohne Damen und Herren stattgefunden hat, d. h., die Menge, die aus allen anwesenden Damen und Herren besteht, ist nicht leer.

Lösung von Kornkreis:
Anmerkung: Bei allen Lösungen wird davon ausgegangen, dass eine endliche Anzahl von Damen und Herren vorliegt. Für unendliche Mengen gilt die zu zeigende Aussage im Allgemeinen nicht.

Im Folgenden bezeichne „Aussage“ die zu zeigende Aussage der Aufgabenstellung.
Aus den Voraussetzungen folgt, dass mindestens zwei Herren und zwei Damen anwesend waren, da sonst ein Herr mit allen Damen oder eine Dame mit allen Herren getanzt haben müsste.

Wir führen eine vollständige Induktion nach der Anzahl der Herren durch.
Für zwei Herren und beliebig viele (größer gleich 2) Damen ist die Aussage wahr.
Dazu schreiben wir die Tanzkonstellation in Matrixform und bezeichnen mit „+“ und „-“ dass ein Tanz stattgefunden bzw. nicht stattgefunden hat. Jede Spalte entspricht einem bestimmten Herren und jede Zeile einer bestimmten Dame, d. h., wir haben zwei Spalten und beliebig viele Zeilen. Falls die Aussage nicht wahr wäre, müsste die Konstellation die folgende Form haben

$$\begin{array}{cc} + & - \\ + & - \\ \ldots & \\ + & - \end{array}$$

was aber bedeuten würde, dass ein Herr mit allen Damen getanzt hat (in diesem Fall sogar beide Herren).

Sei nun die Anzahl der Herren $n > 2$ und die Aussage bereits für $n-1$ Herren bewiesen. Wir betrachten eine Tanzkonstellation, die den Bedingungen der Aufgabenstellung genügt.
Falls man aus den n Herren $n-1$ Herren auswählen kann, für die die Bedingungen der Aufgabenstellung erfüllt sind (d. h. jeder dieser $n-1$ Herren hat mit mindestens einer Dame getanzt und jede der Damen mit einem dieser Herren, und niemand dieser Herren hat mit allen Damen getanzt und keine der Damen mit allen dieser Herren), so zeigt die Induktionsvoraussetzung die Aussage.

Wir betrachten nun den Fall, dass so eine Auswahl nicht existiert. Dies bedeutet in der Matrixschreibweise, dass man keine $n-1$ Spalten auswählen kann, welche den Bedingungen der Aufgabenstellung genügen, d. h., in der Tanzkonstellation der n Herren gibt es eine Zeile, in der genau ein „+“ oder genau ein „-“ steht, o. B. d. A. sei dies genau ein Plus ganz rechts in der letzten Spalte (d. h. von der Form $--\cdots--+$).

Nun muss aber in einer anderen Zeile ganz rechts ein Minus stehen (sonst hätte der entsprechende Herr mit allen Damen getanzt) und irgendwo anders in derselben Zeile ein Plus (sonst hätte die entsprechende Dame mit keinem Herren getanzt).
D. h. man hat z. B. das Schema

$$\begin{array}{ccc} -\,- & \ldots & -\,-\,+ \\ & \ldots & \\ -\,+ & \ldots & +\,-\,- \end{array}$$

Die Damen, die diesen beiden Zeilen entsprechen und die Herren, die der ganz rechten Spalte und der Spalte mit dem Plus irgendwo anders (von der Zeile mit dem Minus ganz rechts) entsprechen, zeigen nun die Aussage.

Alternativ-Lösung von StrgAltEntf:
Sei d_1 eine Dame mit den meisten Tanzpartnern und h_1 ein Herr, mit dem d_1 nicht getanzt hat. d_2 sei eine Tanzpartnerin von h_1.
Dann gibt es einen Herrn h_2, mit dem d_1 aber nicht d_2 getanzt hat. (Denn sonst hätte d_2 mit allen Tanzpartnern von d_1 und zusätzlich mit h_1 getanzt, was der Maximalität von d_1 widerspricht.) d_1, d_2, h_1 und h_2 bilden ein Quartett, wie es laut Aufgabenstellung behauptet wird.

Zweite Alternativ-Lösung von weird:
Laut Angabe hat jede Dame mindestens einen Tanzpartner(TP) und mindestens einen „Nichttanzpartner“ (NTP). Gleiches gilt umgekehrt auch für die Herren. Bei Erfülltsein dieser beiden Bedingungen wollen wir eine Tanzrunde hier als „zulässig“ bezeichnen. Des weiteren bezeichne ich im Folgenden einen Herrn als „redundant“, wenn bei seiner Entfernung die verbleibende Tanzrunde noch immer zulässig ist.

Wir gehen nun die Herren einzeln durch und entfernen sie nacheinander aus der Tanzrunde, sofern sie redundant sind. Wegen der hier natürlich ebenfalls vorausgesetzten „Endlichkeit“ der Tanzrunde muss man dabei irgendwann auf einen Herrn $H1$ stoßen, der nicht redundant ist, weil es eine Dame $D1$ gibt, welche ihn als einzigen TP oder NTP hat.

Sei nun $H1$ o. B. d. A. ein TP von dieser Dame $D1$. (Andernfalls müsste man im Folgenden einfach einen konsequenten Tausch TP $\leftrightarrow$ NTP vornehmen.) Ist dann $D2$ eine Dame, für welche $H1$ ein NTP ist, aber ein dann anderer Herr $H2$ ein TP, so ist Letzterer dann automatisch ein NTP von $D1$, da diese ja nur $H1$ als einzigen TP hat. Die Teilmenge $D1$,$D2$,$H1$,$H2$ der Tanzrunde ist daher ein Quartett mit den geforderten Eigenschaften.

Aufgabe 091241:
An einem internationalen Zeltlager nimmt eine Gruppe von 30 Freunden teil, von denen ein Teil Deutsch, ein Teil Russisch und ein Teil Französisch beherrschen, und zwar beherrschen einige Freunde nur eine Sprache, einige zwei Sprachen und einige sogar drei Sprachen.
Die Anzahl der Freunde, die genau zwei Sprachen beherrschen, ist mehr als doppelt so groß, jedoch weniger als dreimal so groß wie die Anzahl derjenigen, die nur eine Sprache beherrschen. Die Anzahl der Teilnehmer, die alle drei Sprachen beherrschen, ist ebenso groß wie die Anzahl derjenigen, die nur eine Sprache beherrschen.
Die Anzahl der Freunde, die nur Deutsch beherrschen, ist größer als die Anzahl derjenigen, die nur Russisch beherrschen, aber kleiner als die Anzahl derjenigen, die nur Französisch beherrschen. Die Anzahl derjenigen, die nur Deutsch beherrschen, ist kleiner als das Dreifache der Anzahl derjenigen, die nur Russisch beherrschen.
Geben Sie jeweils die Anzahl aller Teilnehmer dieser Gruppe an, die nur Deutsch, nur Russisch, nur Französisch, alle drei Sprachen beherrschen!

Lösung von StrgAltEntf:
Es seien s_1,s_2,s_3 die Anzahlen der Freunde, die genau eine, zwei bzw. drei Sprachen beherrschen. Laut Aufgabenstellung gilt dann

(1) $s_1 + s_2 + s_3 = 30$
(2) $2s_3 < s_2 < 3s_1$
(3) $s_1 = s_3$
Aus (1) und (3) folgt $2s_1 + s_2 = 30$ und mit (2) dann
(4) $2s_1 < 30 - 2s_1 < 3s_1$
(4) ist äquivalent zu $s_1 < 7{,}5$ und $s_1 > 6$.
Somit ist $s_1 = s_3 = 7$ und $s_2 = 16$.

d,f,r seien die Anzahlen der Freunde, die nur Deutsch, Französisch bzw. Russisch beherrschen. Dann ist folglich $d + r + f = s_1 = 7$.
Weiterhin folgt aus der Aufgabenstellung, dass $r < d < f$ und $d < 3r$.
Eine einfache Fallunterscheidung zeigt nun, dass dies nur erfüllt sein kann, wenn $d = 2$,$r = 1$ und $f = 4$. ($s_3 = 7$, siehe oben.)

Aufgabe 121245:
Jemand schrieb auf die sechs Flächen eines Würfels je eine reelle Zahl, wobei sich unter diesen 6 Zahlen 0 und 1 befanden.
Danach ersetzt er jede dieser 6 Zahlen durch das arithmetische Mittel der vier Zahlen, die zuvor auf den 4 benachbarten Flächen gestanden hatten. (Dabei merkte er sich jede alte, zu ersetzende Zahl auch, nachdem sie ersetzt war, so lange, wie sie noch zur Mittelbildung für die Zahlen ihrer Nachbarflächen herangezogen werden musste.)
Mit den 6 so entstandenen neuen Zahlen wiederholte er diese Operation. Insgesamt führte er sie fünfundzwanzig mal durch. Zum Schluss stellte er fest, dass er auf jeder Fläche wieder die gleiche Zahl wie zu Beginn stehen hatte.
Konnte er dieses Ergebnis bei richtiger Rechnung erhalten?

Lösung von Kornkreis:
Antwort: Nein.
Beweis: Angenommen, die Antwort wäre „ja“.
Nach jeder Operation sind die Zahlen gegenüberliegender Flächen gleich, insbesondere gilt dies nach der 25ten Operation und damit auch am Anfang. Man braucht also nur irgendwelche drei Seitenflächen des Würfels zu betrachten, die eine Ecke gemeinsam haben (das Problem reduziert sich also effektiv auf das eines Dreiecks statt eines Würfels, wobei die Zahlen an den Dreiecksecken stehen).

Bezeichne die Zahlen, die auf drei solchen Flächen nach der i-ten Operation stehen, jeweils als a_i, b_i, c_i ($i \geq 0$), d. h. a_0,b_0,c_0 sind die Zahlen am Anfang.
Man hat

$$a_{i+1} = \frac{b_i + c_i}{2}, \qquad b_{i+1} = \frac{a_i + c_i}{2}, \qquad c_{i+1} = \frac{a_i + b_i}{2}$$

(für alle $i \geq 0$), woraus nach Addieren zum einen folgt, dass $a_i + b_i + c_i$ eine Invariante ist für alle $i \geq 0$ (bezeichne die Summe mit s), und zum anderen findet man $c_{i+1} = a_{i+1} + b_{i+1} - c_i$. Mit $a_{i+1} + b_{i+1} = s - c_{i+1}$ ist dann also $2c_{i+1} = s - c_i$.

Die explizite Lösung dieser Rekursionsgleichung ist $c_i = \frac{c_0}{(-2)^i} + \frac{s}{2} \frac{-1 + 1/(-2)^i}{-3/2}$.
Nach der Aufgabenstellung war eine der Zahlen am Anfang 0, aufgrund der Symmetrie der Gleichungen wählen wir o. B. d. A. $c_0 = 0$. Daraus folgt nun $c_{25} = 0 = \frac{s}{2} \frac{-1+1/(-2)^i}{-3/2}$ und wegen $-1 + 1/(-2)^{25} \neq 0$ folgt $s = 0$.
Sei nun o. B. d. A. $b_0 = 1$ (nach Aufgabenstellung war eine der Zahlen am Anfang 1). Es gilt eine analoge explizite Gleichung für b_i wie für c_i, und mit $s = 0$ folgt $b_{25} = 1 = 1/(-2)^{25}$, Widerspruch.

Aufgabe 181242:
Im Staat Wegedonien gibt es ein Straßennetz. An jeder Kreuzung und an jeder Einmündung von Straßen dieses Netzes steht ein Verkehrsposten.
Die Länge eines jeden Straßenabschnittes zwischen je zwei benachbarten dieser Posten ist kleiner als 100 km. Jeder Verkehrsposten lässt sich von jedem anderen auf einem Gesamtweg innerhalb des Netzes erreichen, der kürzer als 100 km ist.
Ferner gilt für jeden Straßenabschnitt zwischen zwei benachbarten Verkehrsposten:
Wird genau dieser Straßenabschnitt gesperrt, so ist immer noch jeder Verkehrsposten von jedem anderen aus auf einem Gesamtweg erreichbar, der sich nur aus ungesperrten Straßenabschnitten des Netzes zusammensetzt.
Man beweise, dass dies auf einem Weg erfolgen kann, der kürzer als 300 km ist.

Lösung von Zeitschrift „Mathematik in der Schule“:
Die Posten wollen wir mit $A, B, C, Q, R, X, Y, ...$ bezeichnen, eine Buchstabenreihenfolge $BCRX$ bezeichne einen Weg von B über C und R nach X, mit (ARB) bezeichnen wir die minimale Entfernung innerhalb des Straßennetzes N von A nach B über R, und $(ARB)^*$ sei die minimale Weglänge von A nach B über R nach Sperrung eines Verbindungsweges zwischen zwei benachbarten Posten auf ungesperrten Wegen innerhalb des Netzes N.

Entsprechend sind mit (AB) bzw. $(AB)^*$ die minimalen Entfernungen innerhalb des Netzes vor bzw. nach Sperrung von A nach B gemeint.
Weiterhin sei P die Menge aller Posten. Es seien A und B benachbarte, R und Q beliebige Posten, und ein Streckenabschnitt AB werde gesperrt.
Für den Fall, dass ein Weg von A nach B existiert, dessen Länge nicht größer als die Länge des gesperrten Abschnitts ist, ist die Behauptung richtig. Wir nehmen also an, dass $(AB)^* > (AB)$ gilt und definieren für jeden Posten des Netzes N:

$$M_C = \{X | X \in P \wedge (XC)^* = (XC)\}$$

Jeder Posten X der Menge P gehört zu M_A oder M_B; denn sonst hätten wir $(XA)^* > (XA)$ und $(XB)^* > (XB)$, also ist BA Teilweg des Weges von X nach A mit minimaler Länge (XA) und AB Teilweg des Weges von X nach B mit minimaler Länge (XB), d. h.

$$(XA) = (XB) + (BA) \qquad \text{und} \qquad (XB) = (XA) + (AB) \qquad \text{also}$$
$$(XA) = (XA) + (AB) + (BA) \qquad \text{und} \qquad (XB) = (XB) + (BA) + (AB)$$

Das bedeutet aber $(AB) + (BA) = 0$, was nur für $A = B$ möglich ist. Offenbar gehören A zu M_A und B zu M_B.

Für Posten X,Y aus M_A gilt $(XY)^* = (XY)$, denn aus $(XY)^* > (XY)$ ergibt sich zunächst

$$\begin{aligned}
(XY) &= (XBAY) = (XA) + (AB) + (BY) \qquad \text{oder}\\
(XY) &= (XBAY) = (XB) + (BA) + (AY) \qquad \text{und weiter}\\
(XY)^* &\leq (XAY)^* = (XA)^* + (AY)^* = (XA) + (AY)\\
&\leq (XA) + (ABY) = (XA) + (AB) + (BY) = (XY) \qquad \text{oder}\\
(XY)^* &\leq (XAY)^* = (XA)^* + (AY)^* = (XA) + (AY)\\
&\leq (XBA) + (AY) = (XB) + (BA) + (BA) + (AY) = (XY)
\end{aligned}$$

im Widerspruch zu $(XY)^* > (XY)$.
Analog gilt für $X,Y \in M_B$ ebenfalls $(XB)^* = (XY)$. Nach den bisherigen Überlegungen ist o. B. d. A. nur noch der Fall $R \in M_A, Q \in M_A$, $(RQ)^* > (RQ)$ zu diskutieren.

1. Es gibt einen Posten Y mit $Y \in M_A \cap M_B$. Dann gilt wegen $R,Y \in M_A$ und $Y,Q \in M_B$ offenbar:

$$(RY)^* + (YQ)^* = (RY) + (YQ) = (RYQ)^* < 200km < 300km$$

2. Es gilt $M_A \cap M_B = \varnothing$. Nach Voraussetzung und wegen $P = M_A \cup M_B$ muss es nach Sperrung eines Abschnitts von $A \in M_A$ nach $B \in M_B$ minimaler Länge einen Weg von einem Posten$X \in M_A$ zu einem Posten $Y \in M_B$ geben, auf dem keine weiteren Posten zu finden sind, d. h., X und Y sind benachbart. Daraus ergibt sich:

$$(RQ)^* \leq (RX)^* + 100km + (YQ)^* = (RX) + 100km + (YQ) < 100km + 100km + 100km = 300km$$

Alternativ-Lösung von TomTom314:
Seien A,B benachbarte Posten, s.d. deren Verbindung gesperrt ist und P,Q zwei beliebige Posten. Dann gibt es eine Vebindung $w : P \to Q$. Falls jeder Posten auf dem Weg eine Verbindung zu P oder Q, die nicht über $A \to B$ geht und kleiner als 100 km ist, können wir zwei benachbarte Posten X,Y mit Wegen $u : P \to X$ und $v : Y \to Q$ wählen, so dass der Weg $P \xrightarrow{u} X \to Y \xrightarrow{v} Q$ nicht über $A \to B$ geht und insgesamt kleiner als 300 km ist.

Falls es einen Posten auf w gibt, der von P und Q nur über $A \to B$ mit weniger als 100 km erreicht werden kann, unterscheiden wir zwei Fälle:

1) Die Strecke $A \to B$ wird von den Wegen in unterschiedlicher Richtung durchlaufen, d. h. wir haben Wege $P \xrightarrow{p_1} A \to B \xrightarrow{p_2} X$ und $Q \xrightarrow{q_1} B \to A \xrightarrow{q_2} X$ von den wir o. B. d. A. annehmen können, dass p_1,p_2,q_1,q_2 nicht über $A \to B$ führen. Daraus erhalten wir zwei neue Wege $P \xrightarrow{p_1} A \xrightarrow{q_2} X$ und $Q \xrightarrow{q_1} B \xrightarrow{p_2} X$, s.d. deren Summe der Längen kleiner als 200 km ist. Also ist einer der Wege im Widerspruch zur Annahme kürzer als 100 km.

2) Die Strecke $A \to B$ wird von den Wegen in der gleichen Richtung durchlaufen, d. h. wir haben Wege $P \xrightarrow{p_1} A \to B \xrightarrow{p_2} X$ und $Q \xrightarrow{q_1} A \to B \xrightarrow{q_2} X$. Dann ist der Weg $P \xrightarrow{p_1} A \xrightarrow{-q_1} Q$ kürzer als 200 km, der nicht über $A \to B$ läuft.

Aufgabe 211241:
Man untersuche, ob sich aus 1982 Zahlen $a_1, a_2, ..., a_{1982}$, die der Bedingung $|a_k| = 1$ $(k = 1, 2, ..., 1982)$ genügen, aber sonst beliebig vorgegeben sind, stets Zahlen so auswählen lassen, dass folgende Bedingungen erfüllt sind:
(1) Es wird mindestens eine der Zahlen a_k ausgewählt.
(2) Es wird mindestens eine der Zahlen a_k nicht ausgewählt.
(3) Die Summe aller ausgewählten Zahlen ist gleich der Summe aller nicht ausgewählten Zahlen.

Lösung von Kornkreis:
Bezeichne $s := \sum_{i=1}^{1982} a_i$.
Da $a_i \equiv 1 \mod 2$ für alle i gilt, ist $s \equiv 1982 \cdot 1 \mod 2 \equiv 0 \mod 2$. Damit ist $s/2$ eine ganze Zahl.

Wir nehmen zunächst den Fall $s/2 > 0$ an und betrachten die Folge von Partialsummen: $a_1, a_1 + a_2$,..., s. Jedes Folgeglied unterscheidet sich von seinem Vorgänger um $+1$ oder -1. Wegen $s/2 > 0$ (und damit $s > s/2 > 0$) gibt es also eine Partialsumme, die genau $s/2$ beträgt, nicht mit s übereinstimmt und mindestens einen Summanden enthält. Die entsprechenden Summanden dieser Partialsumme erfüllen also alle Kriterien (1)-(3).

Für $s/2 < 0$ gilt eine analoge Argumentation. Es verbleibt $s = s/2 = 0$ zu betrachten. In diesem Fall muss eines der a_i gleich 1 und ein anderes gleich -1 sein. Wähle diese beiden Zahlen, diese erfüllen (1) bis (3).

Aufgabe 231242:
a) Man beweise, dass es eine Menge M mit den folgenden Eigenschaften (1), (2), (3), (4) gibt:
(1) Jedes Element von M ist eine natürliche Zahl.
(2) Das kleinste Element von M ist die Zahl 1.
(3) Das größte Element von M ist die Zahl 100.
(4) Jedes Element von M mit Ausnahme der Zahl 1 ist die Summe von zwei Elementen von M oder das Doppelte eines Elementes von M.
b) Man ermittle eine Menge M, die die Bedingungen (1), (2), (3), (4) erfüllt und dabei möglichst wenig Elemente hat.
Dass die ermittelte Menge M diesen Anforderungen genügt, ist zu beweisen.

Lösung von Kornkreis:
a) Wähle $M = \{1,2,4,8,16,32,64,96,100\}$.
b) Das in a) angegebene M hat bereits die kleinstmögliche Anzahl an Elementen. Beweis: Betrachte eine Menge M, welche den Bedingungen der Aufgabenstellung genügt, und bezeichne ihre Elemente der Größe nach aufsteigend mit a_1, a_2,....

a_6 ist maximal 32, also gilt $a_7 < 100$, folglich muss M mindestens 8 Elemente haben. Ein M mit 9 Elementen haben wir bereits in der a) angegeben, also bleibt zu klären, ob M genau 8 Elemente haben kann. Dafür müsste folgendes gelten:

$$a_7 \geq 50 \geq a_6 \geq 25 \geq a_5 \geq 13 \geq a_4 \geq 7 \geq a_3 \geq 4$$

Daraus und mit $a_1 = 1$ und $a_2 = 2$ folgt $a_3 = 4$, $a_4 = 8$,...,$a_7 = 64$, woraus sich aber die 100 noch nicht erzeugen lässt, also benötigt man noch ein a_8, bevor man $a_9 = 100$ erreichen kann. Die kleinstmögliche Anzahl der Elemente ist also neun.

Aufgabe 231243:
Vier Mathematiker T, D, S, P einigen sich auf ein Ratespiel nach folgenden Regeln:
T denkt sich ein Tripel (x, y, z) ganzer Zahlen mit $1 \leq x \leq y \leq z$ und $x + y + z \leq 10$.
Dann soll er D die Zahl $d = y - x$, S die Zahl $s = x + y + z$ und P die Zahl $p = xyz$ mitteilen, jeweils so, dass die beiden anderen den Wert der mitgeteilten Zahl nicht erfahren. Danach sollen sich D, S und P über ihre Informationen unterhalten.
Untersuchen Sie, ob es ein Tripel (x, y, z) gibt, mit dem bei einer Durchführung dieses Spiels (nach Mitteilung von d, s und p) das folgende Gespräch stattfinden kann:
P: „Ich kann das Tripel (x, y, z) nicht eindeutig ermitteln.“
S: „Das wusste ich schon, bevor Sie es ausgesprochen haben.“

P: „Jetzt kann ich das Tripel ermitteln."
D: „Ich auch."
S: „Ich jetzt auch."
Wenn es ein solches Tripel gibt, stellen Sie fest, ob es durch dieses Gespräch eindeutig bestimmt ist! Ist dies der Fall, so geben Sie dieses Tripel an!

Lösung von OlgaBarati:
Aufgrund der Bedingungen $x + y + z \leq 10$ und $1 \leq x \leq y \leq z$ existiert für $z_{max} = 8$ nur das Tripel ($z = 8 : x = 1, y = 1$). Mit abnehmenden z addieren die in der Tabelle gezeigten Kombinationen hinzu.

Datentabelle

z	y	x	y-x	z+y+x	zyx
8	1	1	0	10	8
7	1	1	0	9	7
7	2	1	1	10	14
6	1	1	0	8	6
6	2	1	1	9	12
6	2	2	0	10	24
6	3	1	2	10	18
5	1	1	0	7	5
5	2	1	1	8	10
5	2	2	0	9	20
5	3	1	2	9	15
5	3	2	1	10	30
5	4	1	3	10	20
4	1	1	0	6	4
4	2	1	1	7	8
4	2	2	0	8	16
4	3	1	2	8	12
4	3	2	1	9	24
4	3	3	0	10	36
4	4	1	3	9	16
4	4	2	2	10	32
3	1	1	0	5	3
3	2	1	1	6	6
3	2	2	0	7	12
3	3	1	2	7	9
3	3	2	1	8	18
3	3	3	0	9	27
2	1	1	0	4	2
2	2	1	1	5	4
2	2	2	0	6	8
1	1	1	0	3	1

Der Mathematiker D kann von Mathematiker T für $d = y - x$ eine der Differenzen {0,1,2,3} genannt bekommen,
Mathematiker S mit $s = x + y + z$ eine der Summen {3,4,5,6,7,8,9,10}
und Mathematiker P mit $p = xyz$ eins der Produkte {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,12,14,15,16,18,20,24,27,30,32,36}.

Wenn P das Tripel nicht eindeutig ermitteln kann, muss der Zahlenwert von $p(xyz)$ mehrfach vorkommen und das gilt für die Produkte {4,6,8,12,18,20,24}. Wenn S das schon vor der 1. Aussage von P weiß, muss S dieses an $s(xyz)$ erkannt haben können. Da $s = 5$ die einzige Zahl ist, die unter denen, die mehrfach vorhandene Produkte $p(xyz)$ haben, nur einmal vorkommt und mit $s = 6$ gemeinsam ein $p = 4$ hat, hat S von T die Zahl $s = 6$ erhalten.

So weiß S bereits vor der 1. Aussage von P, dass P von T ein mehrmals vorhandenes Produkt $p = 4, 6,$ *oder* 8 genannt bekommen hat und damit das Tripel (x, y, z) nicht eindeutig bestimmen kann.

Nach der 1. Aussage von S weiß P mit dem von T erhaltenen $p = 4$ dass S von T $s = 6$ erhalten haben muss da S mit $s = 5$ die Aussage nicht hätte treffen können (für $s = 5$ wäre auch ein für P eindeutiges $p = 3$ möglich gewesen). So ist das Tripel $(x, y, z) = (1, 1, 4)$ damit für P ermittelbar.

Für Mathematiker D ergibt sich daraus, von T ein $d = 0$ erhalten zu haben. Nun weiß D bedingt durch die drei Aussagen von P und S dass die Häufigkeit n der gesuchten Summe $2 \leq n(s) \leq 3$ sein muss, denn unter abweichenden Bedingungen wären die drei Aussagen so nicht richtig gewesen.

Es bleiben damit für D nur die Summen $s = 5$, $s = 6$ und mit $d = 0$ ist $s = 6$ bestimmt. Mit $s = 6$ sind jedoch zwei Tripel $(x, y, z) = (1, 1, 4)$ mit $p = 4$ und $(x, y, z) = (2, 2, 2)$ mit $p = 8$ möglich. Da die Häufigkeit von $p = 8$ größer zwei ist und somit das Tripel für P nicht ermittelbar wäre kann D das ausschließen und das Tripel ermitteln.

Auch Mathematiker S kann von seinen drei Möglichkeiten $p = 4, 6, 8$, das Produkt $p = 8$ mit der gleichen Überlegung ausschließen. Und D muss ein $d = 0$ erhalten haben, denn mit einem $d = 1$ kann D unter Erfüllung der o.g. Bedingungen / Erläuterungen kein Tripel bestimmen. Damit kann nun auch S das Tripel ermitteln.

Aufgabe 251241:
Zu einer Feier erscheinen fünf Gäste. Der Gastgeber stellt fest, dass unter je drei von diesen Gästen stets zwei sind, die sich wechselseitig kennen, und zwei, die sich nicht kennen.
Man beweise, dass der Gastgeber seine fünf Gäste so an einen runden Tisch setzen kann, dass an beiden Seiten jedes Gastes Bekannte dieses Gastes sitzen.

Lösung von cyrix:
Die Gäste seien mit A bis E bezeichnet. Wir zeigen zuerst, dass jeder Gast genau zwei der anderen Gäste wechselseitig kennt:

Wir betrachten o. B. d. A. Gast A. Würde A keinen der weiteren Gäste kennen, so müssten sich alle anderen Gäste paarweise wechselseitig kennen, damit unter den drei Personen A und zwei beliebigen weiteren Gästen ein solches sich kennendes Paar vorkommt. Dann jedoch kennen sich B, C und D wechselseitig, sodass unter diesen dreien keine zwei existieren, die sich nicht gegenseitig kennen, was ein Widerspruch zur Aufgabenstellung darstellt.
Also muss A mindestens einen weiteren Gast, o. B. d. A. B, kennen. Würde A nun keinen weiteren Gast kennen, erhielte man den analogen Widerspruch, dass sich B, C und D jeweils paarweise kennen müssten, es also unter diesen dreien wieder keine zwei gäbe, die sich nicht kennen würden. Also muss A noch mindestens einen weiteren Gast, o. B. d. A. E, kennen.

Mit völlig analogem Vorgehen unter Vertauschung von „kennen“ und „nicht kennen“, zeigt man auch, dass A mindestens zwei der Gäste nicht kennt, was dann C und D sein müssen.
Da A hierbei beliebig gewählt wurde, gilt für jeden Gast, dass er genau zwei der anderen Gäste kennt. Insbesondere gilt dies auch für B und E, die also neben A noch jeweils genau einen weiteren Gast kennen. Würden sie sich gegenseitig kennen, hieße das, dass sie beide sowohl C als auch D nicht kennen, sodass C und D nur maximal einen Gast (nämlich den jeweils anderen) kennen könnten, was ein Widerspruch zur gerade gemachten Aussage, dass jeder Gast genau 2 andere kennt, wäre. Also können sich B und E nicht kennen.

Der zweite B bekannte Gast neben A sei o. B. d. A. C. Damit kennt D weder A noch B, muss also sowohl C als auch E kennen, sodass sich die Anordnung $A - B - C - D - E - A$ ergibt, die der Aufgabenstellung genügt, □.

Aufgabe 271241:
In einer Ebene sei G die Menge aller derjenigen Punkte, deren rechtwinklige kartesische Koordinaten ganze Zahlen sind.
Ferner sei F die Menge von 1988 verschiedenen Farben.
Man beweise: Für jede Verteilung von Farben, bei der jeder Punkt aus G genau eine der Farben aus F enthält, gibt es in G vier gleichfarbige Punkte, die die Ecken eines Rechtecks mit achsenparallelen Seiten sind.

Lösung von Kornkreis:
Betrachte die Punktmenge P_k bestehend aus den Punkten $(k{,}0),(k{,}1),...,(k{,}1988)$, wobei k eine ganze Zahl ist. Für jedes k sind dies 1989 Punkte, sodass es unter diesen immer zwei verschiedene Punkte gibt, die die gleiche Farbe haben (Schubfachprinzip).

Betrachte nun die Punktmengen $P_0, P_1, ..., P_n$ mit $n = 1988 \cdot (1989 \cdot \frac{1988}{2})$. Nach obiger Feststellung gibt es für jedes dieser P_k ($k \in \{0,...,n\}$) eine Farbe, sodass zwei Punkte aus P_k diese Farbe haben. Nach dem Schubfachprinzip gibt es also eine Farbe F, sodass in $1 + (1989 \cdot \frac{1988}{2})$ verschiedenen dieser Mengen P_k jeweils zwei Punkte mit dieser Farbe F vorkommen.

Es gibt aber maximal $1989 \cdot \frac{1988}{2}$ Möglichkeiten dafür, dass sich die y-Koordinaten solcher zwei Punkte mit Farbe F aus einem der P_k von denen aus einem anderen der P_k unterscheiden. Demzufolge gibt es (nach dem Schubfachprinzip) vier Punkte mit der gleichen Farbe F, die die Eckpunkte eines Rechtecks bilden, was die Behauptung zeigt.

Aufgabe 281246B:
Man ermittle die größtmögliche Anzahl von Quadraten der Seitenlänge 1, die sich in ein gegebenes Quadrat der Seitenlänge 1,99 legen lassen, ohne über dessen Rand hinauszuragen und ohne sich gegenseitig zu überlappen.

Lösung von Zeitschrift „alpha“:
Die gesuchte größtmögliche Anzahl ist 1.
Sei $ABCD$ das gegebene Quadrat der Seitenlänge 1,99. Offenbar kann man ein Quadrat der Seitenlänge 1 in $ABCD$ legen. Mit zwei Quadraten ist das jedoch nicht mehr möglich, weil sich zwei beliebige, in $ABCD$ liegende Quadrate der Seitenlänge 1 gegenseitig überlappen.
Um das zu zeigen, wird bewiesen, dass ein beliebiges Quadrat mit der Seitenlänge 1, das in $ABCD$ liegt, den Mittelpunkt M von $ABCD$ in seinem Innern enthält.

Angenommen, für ein solches Quadrat $PQRS$ ist das nicht der Fall.
Wir bezeichnen die Geraden durch P,Q bzw. Q,R bzw. R,S bzw. S,P mit p,q,r bzw. s. Dann liegt M auf dem Rand oder außerhalb von mindestens einem der beiden Streifen zwischen p und r bzw. zwischen q und s. Also hat M von mindestens einer der Geraden p,q,r oder s einen Abstand ≥ 1, o. B. d. A. von p. Also liegt p ganz außerhalb des Inkreises k von $ABCD$, da dieser den Radius $\frac{1}{2} \cdot 1{,}99 < 1$ hat. Andererseits enthält der Durchschnitt von p mit der Quadratfläche $ABCD$ mindestens die Strecke PQ und ist daher selbst eine Strecke XY.
Wir bezeichnen nun mit E,F,G,H die Mittelpunkte von AB, BC, CD, DA sowie mit AEH die Differenz zwischen $\triangle AEH$ und dem in $\triangle AEH$ liegenden, durch E und H bestimmten Segment von k, wobei AEH ohne den Bogen $\overset{\frown}{EH}$, aber mit allen übrigen Randpunkten verstanden sein. Analog seien die Flächenstücke BFE, CGF und DHG definiert.

Da nun $ABCD$ mit dem Außengebiet von k nur die vier paarweise disjunkten Flächenstücke AEH, BFE, CGF und DHG gemeinsam hat, muss die Strecke XY ganz in einem dieser Stücke liegen, o. B. d. A. in AEH. Ihre Endpunkte X, Y sind Randpunkte von $ABCD$, wegen

$$XY \geq PQ = 1 > 0{,}5 \cdot 1{,}99 = AE = AH$$

also o. B. d. A. mit X auf AH und Y auf AE.
Unter allen Geraden, die parallel zu p sind und durch einen Punkt der Strecke XH gehen, muss es genau eine geben, die k berührt, den p selbst liegt außerhalb k, und die Parallele durch H zu p schneidet den Kreis k in zwei Punkten, da sie nicht auf dem Radius MH senkrecht steht. Diese k berührende Gerade u schneidet die Strecke XH also in einem inneren Punkt U und somit die Strecke YE in einem inneren Punkt V, ihr Berührungspunkt mit k sei W. Wegen $AX < AU$ ist nach dem Strahlensatz auch $XY < UV$. Nach Dreiecksungleichungen und dem Satz von der Gleichheit der Tangentenabschnitte folgt schließlich

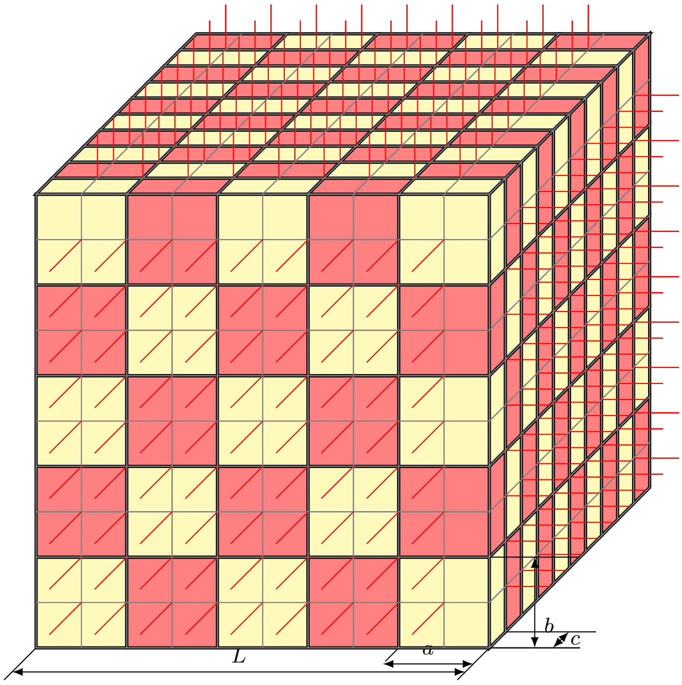
$$1 = PQ \leq XY < UV < \frac{1}{2}(AU + AV + UW + VW) = \frac{1}{2}(AU + AV + UH + VE) = AE = \frac{1}{2} \cdot 1{,}99$$

Dieser Widerspruch zeigt, dass unsere Annahme falsch war und beendet den Beweis.

Aufgabe 301242:
Zu einem würfelförmigen Kasten der Kantenlänge 10 cm seien alle diejenigen Geraden betrachtet und als markiert bezeichnet, die durch das Innere des Würfels gehen, parallel zu einer Würfelkante verlaufen und von den beiden Seitenflächen, die diese Kante enthalten, ganzzahlige (in cm gemessene) Abstände haben.
Man beweise:
Wie man auch den Kasten mit 250 quaderförmigen Bausteinen der Abmessungen 2 cm $\times$ 2 cm $\times$ 1 cm vollständig ausfüllt, stets gibt es wenigstens 100 markierte Geraden, die keinen der Bausteine durchstechen.
Dabei gilt ein Baustein genau dann als durchstochen, wenn die Gerade innere Punkte des Bausteins enthält.

Lösung von Kitaktus:
Wir zerlegen den Würfel in Elementarwürfel der Größe 1 cm x 1 cm x 1 cm. Ist der Kasten lückenlos mit Bausteinen gefüllt, so entspricht jeder Baustein vier im Quadrat liegenden Elementarwürfeln.
Wir stellen fest, dass jeder Baustein nur von einer einzigen markierten Geraden durchstochen wird, nämlich von der, die durch die Mittelpunkte der beiden 2 cm x 2 cm - Seitenflächen verläuft. (1)

Wir betrachten nun eine beliebige markierte g Gerade, die o. B. d. A. senkrecht zur Grundfläche steht.



Wir führen zwei Schritte aus, die jeweils parallel zu den beiden Paaren von Seitenflächen verlaufen und g vollständig enthalten. Dabei zerfällt der Kasten in vier Teile.

Jedes Teil enthält eine gerade Anzahl an Einheitswürfeln, da es eine ganzzahlige Länge und Breite sowie die Höhe 10 cm hat. (2)
Durch die beiden Schnitte werden auch einige Bausteine zerteilt. Die Einheitswürfel, aus denen die Bauteile bestehen bleiben dabei aber stets erhalten.

Ein Baustein, der nicht von g durchstochen wird, liegt entweder komplett in einem der vier Kastenteile, oder er wird durch einen Schnitt halbiert. Ein Baustein hingegen, der von g durchstochen wird (und nur solche), wird durch die Schnitte in seine vier Einheitswürfel zerlegt.

Angenommen, die Gerade g durchstößt genau einen Baustein B. Dann befänden sich in jedem Kastenteil einige ganze Bausteine, einige halbe Bausteine, sowie genau ein Einheitswürfel von B. Das kann aber nicht sein, weil das zusammen eine ungerade Anzahl von Einheitswürfeln ergibt, im Widerspruch zu (2).

Jede markierte Gerade durchstößt also keinen Baustein, oder mindestens zwei. (3) Insgesamt gibt es 3 x 9 x 9 = 243 markierte Geraden – drei Richtungen und jeweils neun ganzzahlige Abstände von den beiden Kanten (1 cm, ..., 9 cm).

Da es nur 250 Bausteine sind und wegen (1) jeder Baustein nur von einer Geraden durchstochen wird, kann es wegen (3) nicht mehr als 125 Geraden geben, die überhaupt einen Baustein durchstechen. Es gibt demnach mindestens $243 - 125 = 118 > 100$ Geraden, die keinen Baustein durchstechen. q. e. d.

Aufgabe 301244:
Eine streng monoton steigende Zahlenfolge $x_1, x_2, ..., x_n$ werde genau dann m-schmal genannt, wenn für alle $a = 2, ..., n$ die Ungleichungen $x_a - x_{a-1} \leq m$ gelten.
Eine Menge A von Zahlen werde genau dann m-dicht genannt, wenn sie für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ eine n-gliedrige streng monoton steigende Zahlenfolge enthält, die m-schmal ist.
Man beweise die folgende (einen berühmten Satz des niederländischen Mathematikers B. L. van der Waerden abschwächende) Aussage:

Zu jeder Zerlegung der Menge N aller natürlichen Zahlen in eine Anzahl $r \geq 2$ paarweise disjunkter nicht leerer Teilmengen $T_1, ..., T_r$ gibt es eine positive Zahl m, so dass (mindestens) eine der Mengen $T_1, ..., T_r$ eine m-dichte Menge ist.

1)Diesen Satz (bei dem arithmetische statt m-schmaler Folgen auftreten) ohne Beweis nur als bekannten Sachverhalt zu zitieren, würde hier für eine Lösung der Aufgabe nicht ausreichen.

Lösung von cyrix:
In der folgenden Lösung sei $\mathbb{N} := \{1,2,3,\dots\}$. Die Aussage stimmt auch für die alternative Definition mit 0 als natürlicher Zahl und lässt sich vollkommen analog formulieren und beweisen.

Wir gehen induktiv vor und betrachten zunächst den Fall $r = 2$. Sei also die Menge der natürlichen Zahlen in die zwei disjunkten Mengen T_1 und T_2 zerlegt. Enthält T_1 für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Teilmenge von n aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, so ist T_1 1-dicht und die Behauptung erfüllt.

Andernfalls existiert eine natürliche Zahl m, sodass unter je m aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen immer mindestens eine nicht in T_1, also dann in T_2, enthalten ist. Zwei aufeinanderfolgende Elemente von T_2 haben damit immer den Abstand von höchstens $2m$, sodass T_2 nun $2m$-dicht ist, die Behauptung also für jede Zerlegung von $\mathbb{N}$ in $r = 2$ Teilmengen erfüllt ist.

Sei nun $r > 2$ und die Aussage schon für $r - 1$ bewiesen. Sei weiterhin $T_1, \dots, T_{r-1}, T_r$ eine Zerlegung der Menge der natürlichen Zahlen in paarweise disjunkte, nichtleere Teilmengen. Dann ist auch $T_1, \dots, T_{r-1} \cup T_r$ eine solche Zerlegung in $r - 1$ Mengen. Also existiert ein m, sodass mindestens eine dieser Mengen m-dicht ist. Ist eine der Mengen T_1 bis T_{r-2} m-dicht, so gilt die Aussage auch für die Zerlegung in die r Teilmengen.

Andernfalls ist $T_{r-1} \cup T_r$ m-dicht. Die Elemente von $T_{r-1} \cup T_r$ seien, der Größe nach geordnet, mit $a_1 < a_2 < \dots$ bezeichnet. (Es müssen unendlich viele sein, da sonst die Menge nicht m-dicht wäre.) Dann gilt für jede natürliche Zahl $i > 0$ die Ungleichung $a_{i+1} - a_i \leq m$. Weiterhin sei A_1 die Menge der natürlichen Zahlen i, für die $a_i \in T_{r-1}$ gilt und analog A_2 die Menge der natürlichen Zahlen i, für die $a_i \in T_r$ gilt. Dann bilden (da T_{r-1} und T_r nichtleer und disjunkt sind) A_1 und A_2 eine Zerlegung der natürlichen Zahlen in zwei nichtleere und disjunkte Teilmengen.

Also gibt es nach dem schon bewiesenen Fall für $r = 2$ eine natürliche Zahl m', sodass mindestens eine der beiden Mengen – o. B. d. A. sei dies A_2 – m'-dicht ist. Dann jedoch ist T_r $m \cdot m'$-dicht, da eine m'-schmale Folge von Zahlen in A_2 sich in eine $m \cdot m'$-schmale Teilfolge von Zahlen in T_r übersetzt, wenn man die entsprechenden Indizes aus der Folge in A_2 wählt.

Also gibt es in jedem Fall für jede Zerlegung der natürlichen Zahlen in $r \geq 2$ paarweise disjunkte Teilmengen eine natürliche Zahl m, sodass mindestens eine dieser Teilmengen m-dicht ist, $\square$.

Aufgabe 301246B:
Für natürliche Zahlen n, k mit $2 \leq k \leq n$ werde eine Menge N von n Personen genau dann als k-familiär bezeichnet, wenn sich in jeder Menge K von k Personen aus N eine Person befindet, die mit allen anderen Personen aus K bekannt ist.
Ermitteln Sie zu jeder natürlichen Zahl $n \geq 2$ alle diejenigen natürlichen Zahlen k mit $2 \leq k \leq n$, für die die Aussage gilt, dass jede k-familiäre Menge von n Personen auch n-familiär sein muss!
Hinweise: Für Personen a, b gelte stets: Wenn a mit b bekannt ist, so ist b mit a bekannt.
Ferner werde vorausgesetzt, dass jede in einer Menge theoretisch widerspruchsfreie Verteilung gegenseitiger Unbekanntheit oder Bekanntheit auch durch eine Menge von Personen realisiert werden kann.

Lösung von Kornkreis:
Zunächst stellen wir fest, dass eine k-familiäre Menge von Personen k-familiär bleibt, wenn weitere Bekanntschaften unter den Personen hinzugefügt werden. Wir nennen nun eine Menge von n Personen „maximal verbunden„, wenn die Menge nicht n-familiär ist (d. h., es gibt keine Person, die alle anderen kennt), aber nach Hinzufügen einer beliebigen (noch nicht vorhandenen) Bekanntschaft stets n-familiär wird.

Wenn für ein $2 \leq k < n$ gilt, dass keine k-familiäre maximal verbundene Menge aus n Personen existiert, so existiert überhaupt keine Menge aus n-Personen, die nicht n-familiär aber k-familiär ist:

Denn so eine beliebige, nicht-n-familiäre Menge ergibt sich durch Entfernen von Bekanntschaften aus einer maximal verbundenen Menge, und wir haben oben schon festgestellt, dass das Hinzufügen von Bekanntschaften eine vorhandene k-Familiarität erhalten muss (umgekehrt muss das Entfernen von Bekanntschaften die Nicht-k-Familiarität erhalten).

Wir betrachten also maximal verbundene Mengen aus n Personen und wollen alle k finden, sodass keine dieser Mengen k-familiär ist. Diese k's sind dann gleichzeitig die Lösung der Aufgabe.

Wir bezeichnen mit der Tupel-Schreibweise $(a_1,a_2,\ldots,a_j)$ für $2 \leq j \leq n$, dass Person a_1 genau die Personen $a_2,\ldots,a_j$ nicht kennt, und Personen $a_2,\ldots,a_j$ jeweils genau Person a_1 nicht kennen.
Die Bekanntschaftsverhältnisse einer maximal verbundenen Menge lassen sich nun immer als Aufzählung solcher Tupel darstellen, wobei jede Person in genau einem Tupel vorkommt und jedes Tupel mindestens zwei Personen enthält.
Beweis:
Jede Person kennt mindestens eine andere Person nicht, da die Menge sonst n-familiär wäre. Wenn eine Person a_1 mehrere Personen $a_2,\ldots,a_j$ mit $j > 2$ nicht kennt, so gilt für die Personen $a_2,\ldots,a_j$, dass sie jeweils genau eine Person (nämlich a_1) nicht kennen.
Würde nämlich eine dieser Personen a_i $(1 < i \leq j)$, noch eine weitere Person außer a_1 nicht kennen, so könnte man die Bekanntschaft zwischen a_i und a_1 hinzufügen, ohne dass die Menge n-familiär werden würde, Widerspruch zur Eigenschaft maximal verbundener Mengen. Man sieht nun leicht, dass daraus die oben erklärte Darstellbarkeit der Bekanntschaften in Tupel-Form folgt.

Sei nun n beliebig und k gerade. Die Anzahl der Tupel mit einer ungeraden Anzahl an Personen (kurz: ungerade Tupel) sei mit $a \geq 0$ bezeichnet. Wähle nun k Personen so aus, dass aus einem ungeraden Tupel die ersten beiden, die ersten vier, … ausgewählt werden, bis nur noch die letzte Person des Tupels übrig bleibt. Verfahre so mit allen ungeraden Tupeln.

Wähle dann aus einem geraden Tupel (also Tupel mit einer geraden Anzahl an Personen) ebenfalls die ersten beiden, die ersten vier, … aus und verfahre so mit allen geraden Tupeln. Man sieht, dass man somit immer k Personen auswählen kann, sodass keine dieser Personen alle anderen $k-1$ Personen kennt, solange $2 \leq k \leq n-a$ gilt. Indem nun immer auch die jeweils letzte Person von zwei ungeraden Tupeln ausgewählt wird, kann man k bis auf n bzw. $n-1$ vergrößern, wenn a gerade bzw. ungerade ist. Folglich gilt für alle n, dass es keine k-familiäre und nicht-n-familiäre Menge gibt, wenn k gerade ist.

Sei nun k ungerade. Für n gerade kann man die Konfiguration der Form (1,2), (3,4), …, (n-1,n) betrachten, für die bei einer Auswahl einer ungeraden Anzahl an Personen immer eine Person existiert, die mit allen anderen bekannt ist (nämlich die Person, die als einzige aus ihrem Tupel gewählt wurde), was k-Familiarität bedeutet.

Ist n ungerade, muss wieder eine ungerade Anzahl a ungerader Tupel vorliegen. Für ungerade k, wähle die ersten drei Elemente eines ungeraden Tupels aus, und danach weitere zwei Elemente dieses Tupels, etc., bis alle Elemente des ungeraden Tupels gewählt wurden.
Falls noch weitere ungerade Tupel vorliegen (es ist $a-1$ eine gerade Anzahl), wähle von einem die ersten beiden Elemente, etc., bis nur noch eines übrig bleibt, und verfahre genau so mit einem anderen ungeraden

Tupel. Wähle dann die letzten beiden Elemente dieser beiden ungeraden Tupel. Verfahre genau so mit weiteren ungeraden Tupeln.
Für vorliegende gerade Tupel, wähle eines aus, und darin die ersten zwei Personen, etc., bis aus alle geraden Tupeln gezogen wurde. Damit haben wir für beliebige Bekannschaftskonfigurationen gezeigt, dass für alle ungeraden k eine Auswahl von k Personen existiert, sodass keine davon alle anderen kennt, d. h., es liegt keine k-Familiarität vor.

Insgesamt haben wir:
Für genau $k \in \{2, 4, \dots, n\}$ für n gerade, und alle $2 \leq k \leq n$ für n ungerade, gibt es keine k-familiäre Menge, die nicht auch n-familiär ist.

Aufgabe 311246B:
In einem utopischen Roman ist von einem unendlich lange lebenden Autor die Rede.
An jedem Tag schreibt er einen Text, mit dem er mindestens ein Blatt Papier füllt und, wenn er an diesem Tag noch weitere Blätter beginnt, auch jedes dieser Blätter am gleichen Tag füllt. Im Lauf jedes Jahres füllt er auf diese Weise eine Anzahl Blätter; für verschiedene Jahre können diese Anzahlen verschieden sein, in keinem Jahr jedoch beträgt diese Anzahl mehr als 730.
Man beweise:
Im Leben dieses Autors gibt es für jede positive ganze Zahl n einen Zeitraum von aufeinanderfolgenden Tagen, in dem der Autor genau n Blätter füllt.
Hinweis: Es wird vorausgesetzt, dass die derzeit gültige Regel unendlich lange gilt, wonach sich stets unter acht aufeinanderfolgenden Jahren mindestens ein Schaltjahr mit 366 Tagen befindet, während jedes Nicht-Schaltjahr aus 365 Tagen besteht.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Für jedes positive ganze Zahl n gilt, wenn k eine ganze Zahl größer als $\frac{n}{2}$ ist:
Der Zeitraum von beliebige gewählten $9k$ aufeinanderfolgenden Jahren besteht aus einer Anzahl A von Tagen, für die

$$A \geq 365 \cdot 8k + k \tag{1}$$

gilt. Wird für i = 1,2,...,A jeweils die Anzahl der Blätter, die der Autor in den ersten i Tagen dieses Zeitraums insgesamt gefüllt hat, mit x_i bezeichnet, so gilt nach Voraussetzung ferner

$$0 < x_1 < x_2 < ... < x_A \leq 730 \cdot 8k \tag{2}$$

Jede der positiven ganzen Zahlen

$$x_1, x_2, ..., x_A, x_1 + n, x_2 + n, ..., x_A + n \tag{3}$$

ist folglich nicht größer als $730 \cdot 8k + n$. Für ihre Anzahl $2A$ gilt wegen (1) und $k > \frac{n}{2}$ aber $2A \geq 730 \cdot 8k + 2k > 730 \cdot 8k + n$.
Also müssen sich nach dem Schubfachschluss unter den Zahlen (3) mindestens zwei einander gleiche befinden. Nach (2) sind jedoch keine zwei der Zahlen $x_1 + n, x_2 + n, ..., x_A + n$.
Daraus folgt die Existenz von i und j mit $1 \leq i{,}j \leq A$ und

$$x_i = x_j + n \tag{4}$$

Wegen $n > 0$ ist hierfür $i > j$, und (4) besagt: In dem Zentrum vom $(j + 1)$-ten Tag bis zum i-ten Tag wurden genau n Blätter gefüllt.

Aufgabe 321241:
Von den Eckpunkten eines regelmäßigen 250-Ecks wurden genau 16 gelb und alle anderen blau gefärbt.
Beweisen Sie, dass es zu jeder solchen Färbung eine Drehung des 250-Ecks um seinen Mittelpunkt gibt, bei der alle gelben Ecken in blaue übergehen!

Lösung von Kornkreis:
Drehungen werden im Folgenden als verschieden bezeichnet, wenn die zugehörigen Drehwinkel sich nicht um ein ganzzahliges Vielfaches von 2π unterscheiden. Für jeden der gelben Punkte gibt es genau 16 verschiedene Drehungen, die den gelben Punkt in einen gelben Punkt überführen.
Eine dieser Drehungen ist dabei immer die Identität.
Folglich gibt es maximal $16 \cdot 16 - 15 = 241$ verschiedene Drehungen, sodass es einen gelben Punkt gibt, der durch eine dieser Drehungen auf einen gelben Punkt abgebildet wird. Da es aber 250 verschiedene Drehungen gibt, die das 250-Eck in sich selbst überführen, müssen neun dieser 250 Drehungen jeden gelben Punkt in einen nicht-gelben, d. h. blauen Punkt überführen. Insbesondere ist die Behauptung gezeigt.

Aufgabe 321243:
Von 1993 Punkten $P_1, ..., P_{1993}$ werde vorausgesetzt, dass keine drei P_i, P_j, P_k von ihnen ($i \neq j$, $i \neq k$, $j \neq k$) einer gemeinsamen Geraden angehören.
Ferner sei für gewisse Paare (i, j) mit $1 \leq i < j \leq 1993$ jeweils die Strecke P_iP_j konstruiert; dabei werde vorausgesetzt, dass jeder der 1993 Punkte P_i mit mindestens 1661 anderen dieser 1993 Punkte durch eine der konstruierten Stecken verbunden ist.
Man beweise, dass aus diesen Voraussetzungen stets folgt:
Unter den P_i gibt es 7 Punkte, von denen jeder mit jedem anderen dieser 7 Punkte durch eine der konstruierten Strecken verbunden ist.

Lösung von Nuramon:
Wir zeigen eine allgemeinere Aussage:
Es seien k,m positive natürliche Zahlen. Gegeben seien $n := km + 1$ Punkte in der Ebene, von denen keine drei auf einer Geraden liegen. Von jedem dieser Punkte seien die Verbindungsstrecken zu mindestens $d := (k - 1)m + 1$ anderen dieser Punkte eingezeichnet. Dann gibt es $k + 1$ Punkte, von denen jeder mit allen anderen der $k + 1$ Punkte verbunden ist.

Beweis durch Induktion nach k:

Induktionsanfang:
Für $k = 1$ ist die Aussage wahr, denn es ist dann $d = (k - 1)m + 1 = 1$, also gibt es mindestens $2 = k + 1$ Punkte, die miteinander verbunden sind.

Induktionsschluss:
Sei nun $k \geq 2$ und sei A irgendeiner der $n = km + 1$ Punkte. Es sei N_A die Menge aller Punkte, mit denen A verbunden ist. Nach Voraussetzung gilt $|N_A| \geq d$. Es gibt daher eine Teilmenge $N \subseteq N_A$ mit genau $d = (k - 1)m + 1$ Elementen.
Es gibt genau $n - d = m$ Punkte, die nicht in N enthalten sind. Daher muss jeder Punkt aus N mit mindestens $d - m = (k - 2)m + 1$ anderen Punkten aus N verbunden sein.
Nach Induktionsannahme gibt es somit k Punkte aus N, die alle paarweise miteinander verbunden sind. Da jeder dieser Punkte auch mit A verbunden ist, folgt die Behauptung.

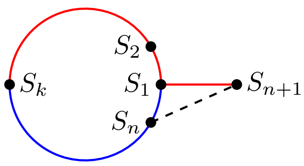
Lösung der Aufgabe:
Wegen $1993 = 6 \cdot 332 + 1$ und $1661 = 5 \cdot 332 + 1$ können wir mit $k = 6$ und $m = 332$ die Behauptung folgern.

Bemerkung:
Wir haben sogar stärker gezeigt, dass es zu jedem der 1993 Punkte sechs andere Punkte gibt, so dass jeder dieser 7 Punkte mit jedem anderen der 7 Punkte verbunden ist.

Aufgabe 321246A:
Eine Bus-Bahn-Rundreise durch n Städte sei eine Reise, die in einer dieser Städte beginnt, jede andere von ihnen genau einmal erreicht, dann zum Ausgangspunkt zurückführt und insgesamt keine anderen Verkehrsmittel als Bus oder Bahn benutzt.
Von n Städten $S_1, ..., S_n$ werde vorausgesetzt, dass zwischen zwei von ihnen genau eine (in beiden Richtungen benutzbare) Verbindung besteht und dass diese jeweils nur entweder eine Bus- oder eine Bahnverbindung ist.
Man beweise für jede natürliche Zahl $n \geq 3$, dass es durch n Städte, die diese Voraussetzungen erfüllen, stets eine Bus-Bahn-Rundreise geben muss, bei der das Verkehrsmittel höchstens einmal gewechselt wird.

Lösung von Nuramon:
Wir beweisen die Aussage per Induktion nach n. Für $n = 3$ ist die Aussage klar.

Betrachten wir also $n + 1$ Städte $S_1, \ldots, S_{n+1}$, so dass zwischen je zwei dieser Städte jeweils entweder eine Bus- oder eine Bahnverbindung besteht.
Per Induktionsannahme gibt es eine Bus-Bahn-Rundreise durch die Städte $S_1, \ldots, S_n$, bei der man höchstens einmal das Verkehrsmittel wechseln muss.
O. B. d. A. sei diese dadurch gegeben, dass man bei S_1 startet und die Städte $S_2, S_3, \ldots, S_k$ in dieser Reihenfolge mit dem Bus (rot) besucht und anschließend von S_k mit der Bahn (blau) über $S_{k+1}, S_{k+2}, \ldots, S_n$ zurück nach S_1 fährt.
Wir nehmen außerdem o. B. d. A. an, dass zwischen S_1 und S_{n+1} eine Busverbindung besteht. (Falls zwischen S_1 und S_{n+1} eine Bahnverbindung besteht, so vertausche man im Beweis die Rollen von S_n und S_2.)



Falls zwischen S_n und S_{n+1} ein Bus fährt, so ist $S_n \to S_{n+1} \to S_1 \to S_2 \to \ldots \to S_k \to \ldots \to S_n$ eine geeignete Bus-Bahn-Rundreise.

Falls zwischen S_n und S_{n+1} die Bahn fährt, so ist $S_{n+1} \to S_1 \to S_2 \to \ldots \to S_k \to \ldots \to S_n \to S_{n+1}$ eine geeignete Bus-Bahn-Rundreise.

Aufgabe 331241:
Man untersuche für jede der beiden unten genannten Aussagen a) und b), ob diese Aussage für jede Menge wahr ist, in der sich genau 32 positive ganze Zahlen befinden, von denen jede kleiner als 112 ist und von denen keine zwei einander gleich sind:
a) Es gibt eine Zahl, die unter den Differenzen von je zwei dieser Zahlen mindestens fünfmal vorkommt.
b) Es gibt eine Zahl, die unter den Differenzen von je zwei dieser Zahlen mindestens sechsmal vorkommt.
Hinweis: In dieser Aufgabe sei als Differenz zweier Zahlen x, y stets die Zahl $|x - y|$ verstanden.
Sind x, y Zahlen einer obengenannten Menge, so werde diese Differenz unter allen zu berücksichtigenden nur einmal gezählt (nicht etwa zweimal, als $|x - y|$ und als $|y - x|$).

Lösung von weird:
Dies ist wieder einfach nur eine Anwendung des Schubfachprinzips in der folgenden verschärften Form: Verteilt man n Objekte auf k Mengen, wobei $n,k > 0$ ist, so gibt es mindestens eine Menge, in der sich zumindest $\lceil \frac{n}{k} \rceil$ Objekte befinden. ($\lceil \frac{n}{k} \rceil$ bezeichnet dabei die kleinste ganze Zahl g mit $g \geq \frac{n}{k}$.)

Konkret ist hier $n = \frac{32*31}{2} = 496$, also die Gesamtanzahl der Differenzen, welche bei 32 positiven ganzen Zahlen gebildet werden können und $k = 110$, also die Gesamtanzahl an möglichen Differenzen, welche zwischen zwei verschiedenen Zahlen in der Menge $\{1,2,,...,111\}$ überhaupt auftreten können. Und tatsächlich ist

$$\left\lceil \frac{496}{110} \right\rceil = 5$$

d. h., die Aussage a) ist richtig. Dagegen ist b) falsch, denn es ist natürlich möglich, dass jede der 110 Differenzen weniger als sechsmal vorkommt, z. B. etwa bei der folgenden - zwar extrem unwahrscheinlichen, aber immerhin möglichen - Aufteilung

$$54 \cdot 4 + 56 \cdot 5 = 496$$

der 496 Differenzen, bei der sich in einer Gruppeneinteilung nach verschiedenen Differenzen, mit dann also jeweils gleicher Differenz innerhalb einer Gruppe, 54 mal Vierergruppen und 56 mal Fünfergruppen gebildet hatten.

Aufgabe 331245:
Im Zwergenland wohnen 12 Zwerge. Jeder von ihnen hat unter den 11 anderen eine ungerade Anzahl von Freunden; alle diese Freundschaften beruhen auf Gegenseitigkeit. In jedem Monat hat einer der 12 Zwerge Geburtstag.
Jeder Zwerg bewohnt ein Haus für sich allein, jedes Haus ist entweder rot oder grün gestrichen.
Jeder Zwerg streicht in jedem Jahr an seinem Geburtstag sein Haus in derjenigen Farbe, die unter den Farben der Häuser seiner Freunde in größerer Anzahl als die andere Farbe vorkommt.
Zeigen Sie, dass unter diesen Voraussetzungen stets ein Zeitpunkt existieren muss, von dem ab die Farbe aller Häuser unverändert bleibt!

Lösung von Kornkreis:
Die Lösung erfolgt wie bei der Aufgabe 161233, wenn man folgende Dinge feststellt:
Eine Freundschaft (die ja immer gegenseitig sein soll) kann durch eine Linie zwischen zwei Punkten symbolisiert werden, wobei jeder Zwerg durch einen Punkt in der gegenwärtigen Farbe seines Hauses dargestellt wird.
Da jeder Zwerg eine ungerade Anzahl an Freundschaften mit anderen Zwergen hat, ist jeder Zwerg, dessen Haus umgestrichen werden kann, „außergewöhnlich“ (im Sinne der Definition in der 161233, dass mehr als die Hälfte der Verbindungen des entsprechenden Punktes von Punkten der anderen Farbe ausgehen), und tatsächlich wird immer das Haus eines außergewöhnlichen Zwerges umgestrichen werden, nämlich dann, wenn der nächste Geburtstag eines der außergewöhnlichen Zwerge ansteht.
In der Lösung der Aufgabe 161233 wurde festgestellt, dass, unabhängig von der Reihenfolge des Umfärbens außergewöhnlicher Punkte, nach einer endlichen Anzahl von Umfärbungen kein außergewöhnlicher Punkt mehr existiert.
Damit kann kein Umfärben mehr stattfinden, was die Behauptung der Aufgabe zeigt.

VII.II. Berechnung von Anzahlen, Wahrscheinlichkeiten, Binomialkoeffizienten

I. Runde 1

Aufgabe V01209:
Wie viel Prozent

a) aller 2stelligen Zahlen	b) aller 3stelligen Zahlen
c) aller 5stelligen Zahlen	d) aller 10stelligen Zahlen
e) aller 20stelligen Zahlen	f) aller 50stelligen Zahlen

enthalten nicht die Null 0 als Ziffer?

Lösung von Steffen Polster:
Für ein $n \geq 2$ existieren genau $9 \cdot 10^{n-1}$ n-stellige Zahlen.
Damit eine n-stellige Zahl keine 0 enthält, muss an jeder Stelle eine Ziffer 1 bis 9 stehen, d. h. es gibt 9^n verschiedene n-stellige Zahlen ohne 0 in der Ziffernfolge. Der prozentuale Anteil ist somit

$$\frac{9^n}{9 \cdot 10^{n-1}} \cdot 100\% = 0{,}9^{n-1} \cdot 100\%$$

Damit ergibt sich: a) 90 %, b) 81 %, c) 65,61 %, d) 38,7 %, e) 13,5 % und f) 0,57 %.

Aufgabe V01210:
Bei einer Silvesterfeier, zu den 300 Personen anwesend sind, gratuliert im Mitternacht jeder jedem mit einem Händedruck.
Wie viel Zeit nimmt dies in Anspruch, wenn alle Personen gleichzeitig mit der Gratulation beginnen und jede 3 Sekunden dauert?
Lösen Sie die Aufgabe allgemein und dann mit den im Text gegebenen Werten.

Lösung von Steffen Polster:
Es seien n Personen anwesend. Da jeder jedem gratuliert, entspricht die Anzahl der Glückwünsche der Anzahl z von Möglichkeiten aus den n Personen genau 2 auszuwählen, d. h., $z = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

Ist n gerade und da die Personen sich gleichzeitig gratulieren, können sich gleichzeitig $\frac{n}{2}$ Paare die Hände schütteln. Damit sind $n-1$ Gratulationsrunden erforderlich, die $3n-3$ Sekunden benötigen.
Ist n ungerade können sich gleichzeitig $\frac{n-1}{2}$ Paare die Hände schütteln, während eine Person immer warten muss. Damit sind nun n Gratulationsrunden erforderlich, die 3 Sekunden benötigen.

„Gratulationsplan“:
Nummeriere die Personen mit $1, \dots, n$.

1. Fall: Angenommen die Anzahl n der Personen ist ungerade.
Dann betrachte folgenden Gratulationsplan:
Für $r = 1{,}2, \dots, n$ soll in Runde r die Person mit Nummer i der eindeutig bestimmten Person mit Nummer j gratulieren, für die $i + j \equiv r \pmod n$ gilt. Falls $i = j$ gilt, so setzt Person i in dieser Runde aus.

Korrektheitsbeweis:
Wegen $i + j = j + i$ ist klar, dass in jeder Runde die Person j, der Person i laut Plan gratulieren soll, ebenfalls der Person i gratulieren soll. Also sind die geplanten Gratulationen immer möglich.
Außerdem gratuliert jede Person jeder anderen genau einmal: Die Personen i,j gratulieren sich in der Runde r für die $r \equiv i + j \pmod n$ gilt.

Beobachtung: Da n ungerade ist, gibt es in jeder Runde r genau eine Person i, die aussetzt, also für die $2i \equiv r \pmod n$ gilt. Außerdem gibt es zu jeder Person genau eine Runde, in der die Person aussetzt.

2. Fall: Angenommen die Anzahl n der Personen ist gerade.
Betrachte die Person n getrennt von den anderen. Der neue Plan ist, den Plan für die Personen $1{,}2, \dots, n-1$ gemäß des 1. Falls auszuführen mit dem Unterschied, dass die Person, die aussetzen sollte der Person n gratuliert.

Formal: Für $r = 1{,}2, \dots, n-1$ soll in Runde r die Person i (mit $1 \leq i < n$) der Person j mit $i + j \equiv r \pmod{n-1}$ (falls $j \neq i$) bzw. der Person n (falls $j = i$) gratulieren.
Die Korrektheit folgt aus Fall 1 und obiger Beobachtung.

Für den konkreten Fall $n = 300$ wird $z = \binom{300}{2} = 44850$. Die 299 Gratulationsrunden erfordern 897 Sekunden, d. h. 14 min 57 s.

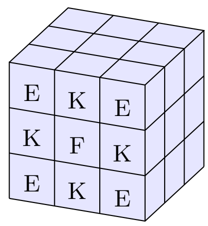
Aufgabe 011115:
Setzt man einen Würfel aus 8 gleichen Würfeln zusammen, wobei in jeder Dimension 2 Würfel nebeneinanderliegen, und streicht ihn mit Farbe an, dann besteht der Würfel aus 8 Würfeln, bei denen je 3 Flächen angestrichen sind.
Nun soll ein Würfel aus gleichen Würfeln so zusammengesetzt werden, dass in jeder Dimension 3 Würfel nebeneinanderliegen. Der zusammengesetzte Würfel werde wieder angestrichen.

a) Wie viel der kleinen Würfel haben keine angestrichene Fläche, wie viel haben eine, wie viel zwei und wie viel drei angestrichene Flächen?

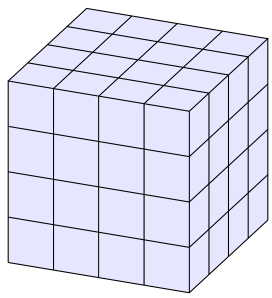
b) Was erhält man, wenn in jeder Dimension 4 Würfel nebeneinanderliegen?

c) Versuchen Sie, eine Formel für n in jeder Dimension nebeneinanderliegender Würfel zu finden, und beweisen Sie diese Formel!

Lösung von Korinna Grabski:
a) (Bild a) Für einen Würfel mit den Abmaßen $3 \times 3 \times 3$ haben
– 8 kleine Eckwürfel (E) drei bemalte Flächen,
– 12 kleine Kantenwürfel (K) zwei bemalte Flächen,
– 6 kleine Flächenwürfel (F) eine bemalte Fläche und
– 1 kleiner Innenwürfel keine bemalte Fläche.



b) (Bild b) Für einen Würfel mit den Abmaßen $4 \times 4 \times 4$ haben
– 8 kleine Eckwürfel drei bemalte Flächen,
– $12(4-2) = 24$ kleine Kantenwürfel zwei bemalte Flächen,
– $6(4-2)^2 = 24$ kleine Flächenwürfel eine bemalte Fläche und – $(4-2)^3 = 8$ kleine Innenwürfel keine bemalte Fläche.



c) Für einen Würfel mit den Abmaßen $n \times n \times n$ haben
– 8 kleine Eckwürfel drei bemalte Flächen,
– $12(n-2)$ kleine Kantenwürfel zwei bemalte Flächen,
– $6(n-2)^2$ kleine Flächenwürfel eine bemalte Fläche und – $(n-2)^3$ kleine Innenwürfel keine bemalte Fläche.

Beweis:
Kleine Würfel mit drei bemalten Flächen liegen genau an den Ecken des großen Würfels. Da ein Würfel immer 8 Ecken hat, gibt es für jede Größe des Würfels immer 8 kleine Würfel mit drei bemalten Flächen.

Kleine Würfel mit zwei bemalten Flächen liegen genau auf den Kanten des großen Würfels, aber nicht auf den Ecken. Eine Kante eines $(n \times n \times n)$-Würfels ist n kleine Würfel lang. Dazu gehören auch die zwei Eckwürfel. Damit erhält man für jede Kante des Würfels $n-2$ kleine Würfel mit 2 bemalten Flächen. Da ein Würfel immer 12 Kanten hat, gibt es für einen $(n \times n \times n)$-Würfel immer $12(n-2)$kleine Würfel mit zwei bemalten Flächen.

Kleine Würfel mit einer bemalten Fläche liegen auf den Seiten des großen Würfels, aber nicht auf den Kanten. Eine Seite eines $(n \times n \times n)$-Würfels ist n^2 kleine Würfel groß. Dazu gehören auch die vier Kanten. In jeder Dimension müssen also 2 Würfel abgezogen werden. Damit erhält man für jede Seite des Würfels $(n-2)^2$ kleine Würfel mit einer bemalten Fläche. Da ein Würfel immer 6 Seiten hat, gibt es für einen $(n \times n \times n)$-Würfel immer $6(n-2)^2$ kleine Würfel mit einer bemalten Fläche.

Kleine Würfel mit keiner bemalten Fläche liegen im Inneren des Würfels. Der $(n \times n \times n)$-Würfel besteht aus n^3 kleinen Würfeln. Dazu gehören auch die sechs Seiten. In jeder Dimension müssen also 2 Würfel abgezogen werden. Damit erhält man für das Innere des Würfels $(n-2)^3$ kleine Würfel. Damit gibt es immer $(n-2)^3$ kleine Würfel mit keiner bemalten Fläche.

Zur Probe werden alle ermittelten Anzahlen addiert: $8 + 12(n-2) + 6(n-2)^2 + (n-2)^3 = n^3$, in Übereinstimmung damit, dass der Würfel mit den Abmaßen $n \times n \times n$ aus genau n^3 kleinen Würfeln besteht.

Aufgabe 011213:
Wie viele verschiedene dreistellige Zahlen lassen sich mit den Ziffern

a) 1 und 2, b) 1, 2 und 3, c) 1, 2, 3 und 4

bilden, wobei die Ziffern auch mehrfach benutzt werden dürfen? Versuchen Sie, eine Gesetzmäßigkeit zu finden!

1) Welche Lösung erhält man für vierstellige Zahlen?

2) Was lässt sich für vierstellige Zahlen vermuten, wenn man n Ziffern zur Verfügung hat? Versuchen Sie, diese Vermutung zu beweisen!

Lösung von Eckard Specht:
Wir haben es hier mit Variationen mit Wiederholung zu tun, denn wir wollen k, nicht notwendig verschiedene Elemente aus der Menge der ersten n natürlichen Zahlen auswählen und in einer Reihe aufschreiben (also mit Beachtung der Reihenfolge). Dabei haben wir für jede der k Stellen in der Reihe n Möglichkeiten, demnach ist die gesuchte Anzahl $V(n,k)$ gegeben durch

$$V(n,k) = \underbrace{n \cdot n \cdot ... \cdot n}_{\text{k-mal}} = n^k$$

Somit lassen sich
a) $V(2,3) = 2^3 3 = 8$
b) $V(3,3) = 3^3 = 27$
c) $V(4,3) = 4^3 = 64$ verschiedene dreistellige Zahlen bilden.
d) Für vierstellige Zahlen finden wir analog $2^4 = 16$, $3^4 = 81$ bzw. $4^4 = 256$ verschiedene Lösungen.
e) Haben wir dagegen n Ziffern zur Verfügung, so lassen sich

- n Zahlen mit vier gleichen Ziffern aaaa angeben,
- $4n(n-1)$ Zahlen mit drei gleichen Ziffern aaab angeben (n Möglichkeiten, die Ziffer a auszuwählen, $n-1$ Möglichkeiten die Ziffer b auszuwählen und 4 Plätze, an denen b stehen kann),
- $3n(n-1)$ Zahlen der Form aabb angeben (n Möglichkeiten, die Ziffer a auszuwählen, $n-1$ Möglichkeiten die Ziffer b auszuwählen und 3 Möglichkeiten für die Platzwahl der beiden Paare aa bzw. bb),
- $6n(n-1)(n-2)$ Zahlen der Form aabc angeben (n Möglichkeiten, die Ziffer a auszuwählen, $n-1$ Möglichkeiten die Ziffer b auszuwählen, $n-2$ Möglichkeiten die Ziffer c auszuwählen und $\binom{4}{2} = 6$ Möglichkeiten für die Platzwahl der Ziffern b und c bzw. der Ziffern a und a),
- schließlich $n(n-1)(n-2)(n-3)$ Zahlen abcd mit vier verschiedenen Ziffern angeben.

Die Gesamtzahl ist also

$$n + 4n(n-1) + 3n(n-1) + 6n(n-1)(n-2) + n(n-1)(n-2)(n-3) = n^4$$

Aufgabe 021212:
Eine Fischereiproduktionsgenossenschaft möchte wissen, wie viel Fische einer bestimmten Sorte sich ungefähr in einem kleinen See befinden. Zu diesem Zwecke werden 30 Fische dieser Sorte gefangen, gekennzeichnet und in den See zurückgegeben. Am nächsten Tage werden 52 Fische derselben Sorte gefangen, unter denen 4 das Kennzeichen haben.

Wieviel Fische der Sorte befanden sich ungefähr in dem See? (Begründung!)

Lösung von Carsten Balleier:
Da wir keine weiteren Angaben haben, müssen wir annehmen, dass die 52 Fische des zweiten Fangs eine repräsentative Stichprobe der Gesamtheit der Fische im See darstellen. Demzufolge sind $\frac{4}{52}$ der Fische (im ganzen See!) markiert, also jeder 13.
Insgesamt befinden sich dann ungefähr $13 \cdot 30 = 390$ Fische in diesem See.

Aufgabe 051214:
Klaus und Dieter vereinbaren das folgende Spiel:

Klaus nimmt 6 Bindfäden gleicher Länge in eine Hand, so dass an jeder Seite der Faust sechs Bindfadenenden herausragen. Dieter wird aufgefordert, die Enden auf jeder Seite paarweise zusammenzuknüpfen. Stellt sich beim Öffnen der Hand heraus, dass die Bindfäden einen einzigen Ring bilden, so hat Dieter gewonnen, anderenfalls gewinnt Klaus.

Wer von beiden hat die größeren Gewinnchancen? Stellen Sie dazu folgende Überlegungen an!

a) Wieviel verschiedene Möglichkeiten m, die Bindfadenenden zu verknüpfen, gibt es überhaupt?

b) In wieviel Fällen r erhält man einen einzigen Ring?

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit w, dass ein einziger Ring entsteht?

Bemerkung: w ist definiert als $\frac{r}{m}$, wobei m und r in a) und b) erklärt sind.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

a) Die Enden seien auf einer Seite gemäß der Aufgabenstellung verbunden, z. B. o. B. d. A. 1 mit 2, 3 mit 4, 5 mit 6. Auf der anderen Seite hat man für das erste Ende 5 Möglichkeiten durch Verbindung. Danach kann eines der vier freien Enden mit irgendeinem der drei anderen Enden verbunden werden. Für die restlichen zwei Enden bleibt nur noch eine Möglichkeit. Die Zahl der möglichen Fälle ist also $n = 5 \cdot 3 \cdot 1 = 15$.

b) Verknüpfung auf der einen Seite wie unter a). Als Resultat kann dann und nur dann ein einziger Ring entstehen, wenn auf der anderen Seite 1 mit 3, 4, 5 oder 6 verknüpft wird.

   Nehmen wir an, dass 1 mit 3 verknüpft ist. In diesem Fall entsteht genau dann ein einziger Ring, wenn 2 mit 5 oder 6 verbunden wird. Entsprechend gibt es in jedem der anderen Fälle, nämlich dass 1 mit 4, 5 oder 6 verbunden ist, genau zwei Möglichkeiten, einen einzigen Ring erzeugen. Die Zahl der günstigen Fälle, in denen ein einziger Ring entsteht, ist danach $r = 4 \cdot 2 = 8$.

c) Die Wahrscheinlichkeit ist

$$w \quad = \quad \frac{r}{n} = \frac{8}{15} = 0{,}533...$$

   Dieter hat also die größeren Gewinnchancen.

Aufgabe 081212:

a) Auf den Seiten AB, BC und CA des Dreiecks $\triangle ABC$ liegen die von den Eckpunkten und paarweise untereinander verschiedenen Punkte A_1, A_2, A_3 bzw. B_1, B_2, B_3, B_4 bzw. C_1, C_2, C_3, C_4, C_5.

Geben Sie die Anzahl aller Dreiecke an, die aus allen diesen Punkten (einschließlich der Eckpunkte A, B, C) gebildet werden können! Zwei Dreiecke gelten genau dann als gleich, wenn jede Ecke des einen Dreiecks auch Ecke des anderen ist.

b) Geben Sie die Anzahl aller verschiedenen Dreiecke an, wenn es sich entsprechend um die Punkte A_1, ..., A_k bzw. B_1, ..., B_m bzw. C_1, ..., C_n handelt (k, m, n gegebene natürliche Zahlen)!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Aus den gegebenen 15 Punkten lassen sich genau $\binom{15}{3}$ voneinander verschiedene Punkttripel bilden. Die Punkte eines jeden solchen Tripels sind genau dann die Ecken eines Dreiecks, wenn sie nicht auf ein und derselben Geraden liegen.

a) Im gegebenen Fall befinden sich jedoch genau 5 der Punkte auf BC, 6 auf CA und 7 auf AB. Aus diesen sind dabei jeweils $\binom{5}{3}$, $\binom{6}{3}$ bzw. $\binom{7}{3}$ der $\binom{15}{3}$ Tripel gebildet. Daher ist die gesuchte Anzahl Z der Dreiecke

$$Z = \binom{15}{3} - \binom{5}{3} - \binom{6}{3} - \binom{7}{3} = 390.$$

b) Auf Grund der gleichen Überlegungen erhält man jetzt

$$Z = \binom{k+m+n+3}{3} - \binom{k+2}{3} - \binom{m+2}{3} - \binom{n+2}{3}$$

Aufgabe 091211:
Bei einer Abendveranstaltung tanzte jeder der anwesenden Herren mit genau drei Damen, und zwar mit jeder genau einmal. Als alle Teilnehmer nach dem Tanz noch in gemütlicher Runde beieinander saßen und den Abend überblickten, wurde festgestellt, dass jede der anwesenden Damen mit genau zwei Herren, und zwar mit jedem genau einmal, getanzt hatte. Ferner bemerkte man, dass je zwei der Herren im Verlaufe des Abends genau eine gemeinsame Tanzpartnerin gehabt hatten.

Es ist die Anzahl aller bei dieser Veranstaltung anwesenden Damen und Herren zu ermitteln.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Bezeichnet man die Anzahl der anwesenden Herren mit h, die der Damen mit d, so beträgt die Anzahl der an diesem Abend ausgeführten Tänze sowohl $3h$ als auch $2d$, so dass zwischen h und d die Beziehung

$$3h = 2d \tag{1}$$

besteht. Eine weitere folgt daraus, dass die Anzahl der Paare von Herren, nämlich $\frac{1}{2}(h-1)h$, mit der Anzahl der Damen übereinstimmt, also auch

$$\frac{1}{2}(h-1)h = d \tag{2}$$

gilt. Aus (1) und (2) folgt $h = 4, d = 6$, so dass nur diese Anzahlen für die Lösung in Frage kommen.

Dass mit diesen Anzahlen tatsächlich eine (und bis auf die willkürliche Nummerierung de Teilnehmer auch genau eine) Lösung existiert, die allen drei gestellten Bedingungen genügt, zeigt nachfolgende Aufstellung der 12 Tanzpaare, in welcher die Herren von 1 bis 4, die Damen von 1' bis 6' nummeriert sind:

$$11', 22', 33', 14', 25', 36', 21', 32', 13', 44', 45', 46'$$

Hierin treten wie gefordert 1, 2, 3 und 4 je genau dreimal und 1', 2', ..., 6' je genau zweimal auf.

Aufgabe 131211:
Es sei M die Menge aller natürlichen Zahlen von 1 bis 10000000000.

Man untersuche, ob die Anzahl derjenigen Zahlen (aus M), bei deren dekadischer Darstellung die Ziffer 5 vorkommt, größer, gleich oder kleiner ist als die Anzahl derjenigen Zahlen aus M, bei deren dekadischer Darstellung keine 5 auftritt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Anzahl aller natürlichen Zahlen von 1 bis 10^{10}, bei deren dekadischer Darstellung keine 5 auftritt, ist gleich der Anzahl aller natürlicher Zahlen von 0 bis $10^{10} - 1$, bei deren dekadischer Darstellung keine 5 auftritt. Die Menge der letztgenannten Zahlen ist die Menge aller Zahlen $a_9 10^9 + ... + a_1 10^1 + a_0$, wobei jedes a_i eine der neun Ziffern $\neq 5$ ist.

Die Anzahl dieser Zahlen ist folglich 9^{10}. Die Anzahl der übrigen natürlichen Zahlen von 1 bis 10^{10} ist somit

$$10^{10} - 9^{10} = (10-9)(10^9 + 10^8 \cdot 9^1 + ... + 10^1 \cdot 9^8 + 9^9) > 9^9 + 9^8 \cdot 9^1 + ...9^1 \cdot 9^8 = 10 \cdot 9^9 > 9^{10}$$

Daher ist die Anzahl derjenigen natürlichen Zahlen von 1 bis 10^{10}, in deren dekadischer Darstellung die Ziffer 5 vorkommt, größer als die Anzahl derjenigen natürlichen Zahlen dieses Bereichs, in deren dekadischer Darstellung keine 5 auftritt.

Aufgabe 141211:
Am Ende einer größeren Abendgesellschaft zeigte es sich, dass keiner der anwesenden Herren mit weniger als 10 und keiner mit mehr als 12 Damen getanzt hatte, während keine der Damen mit weniger als 12 und auch keine mit mehr als 14 Herren zum Tanz gegangen war. Keiner der Herren hatte dieselbe Dame mehr als einmal zum Tanz geführt. Hätte jeder der Herren mit jeder Dame genau einmal getanzt, so hätten 480 Tänze stattfinden müssen. Dabei zählt jeder Tanz, den ein Herr mit einer Dame ausführt, als ein Tanz. (Wenn z. B. genau 15 Paare gleichzeitig tanzen, so soll das als 15 Tänze und nicht als 1 Tanz verstanden werden.)

a) Man ermittle alle mit diesen Bedingungen vereinbaren Möglichkeiten für die Anzahl der Damen und Herren, die insgesamt anwesend waren.

b) Man gebe (am einfachsten in der Form eines Rechteckschemas) eine der bei den gefundenen Anzahlen möglichen Zusammenstellungen zu Tanzpaaren an, die den Bedingungen der Aufgabe genügt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Bezeichnet man die Anzahl der Herren mit h, die der Damen mit d, so ist $h \cdot d = 480 \quad (1)$.

Werden weiter die Anzahlen derjenigen Herren, die mit 10 bzw. 11 bzw. 12 Damen getanzt hatten, in dieser Reihenfolge mit h_1, h_2, h_3 und entsprechend die Anzahlen der Damen, die mit 12, 13 bzw. 14 Herren getanzt hatten, in dieser Reihenfolge mit d_1, d_2, d_3 bezeichnet, so ist

$$h_1 + h_2 + h_3 = h \qquad ; \qquad d_1 + d_2 + d_3 = h$$

während die Anzahl T der am dem Abend ausgeführten Tänze auf zwei Arten angegeben werden kann:

$$T = 10h_1 + 11h_2 + 12h_3 \qquad ; \qquad T = 12d_1 + 13d_2 + 14d_3$$

Aus den Umformungen

$$\begin{aligned} T &= 10(h_1 + h_2 + h_3) + h_2 + 2h_3 \qquad ; \qquad T = 12(d_1 + d_2 + d_3) + d_2 + 2d_3 \\ T &= 12(h_1 + h_2 + h_3) - 2h_1 - h_2 \qquad ; \qquad T = 14(d_1 + d_2 + d_3) - 2d_1 - d_2 \end{aligned}$$

ergibt sich

$$10h < T \qquad , \qquad 12d < T \qquad , \qquad 12h > T \qquad , \qquad 14d > T$$

und daraus $12d < T < 12h$ und $10h < T < 14d$, also $d < h$, $h < \frac{7}{5}d$ zusammengefasst

$$d < h < \frac{7}{5}d \tag{2}$$

Weiter ergibt sich auf Grund der Voraussetzungen $h \geq 12$, $d \geq 10$. Die Faktorzerlegungen von 480, bei denen beide Faktoren diesen Bedingungen genügen, sind

$$10 \cdot 48 \qquad , \qquad 12 \cdot 40 \qquad , \qquad 15 \cdot 32 \qquad , \qquad 16 \cdot 30 \qquad , \qquad 20 \cdot 24$$

Daraus ergibt sich wegen (1), dass $h = 24$, $d = 20$ sein muss, weil nur in diesem Fall auch (2) erfüllt ist.

Damit sind diese Angaben als einzige Möglichkeit für die Anzahlen der Herren und Damen ermittelt.

b) Bei diesen Anzahlen sind in der Tat alle Bedingungen der Aufgabe erfüllbar, wie folgendes Beispiel einer Übersicht der Tanzpaarungen zeigt (siehe Abbildung):

Herr Nr. ⟶

Dame Nr. ↓	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	
1	×													×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	10 Damen mit je 14 Herren
2	×	×													×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	
3	×	×	×													×	×	×	×	×	×	×	×	×	
4	×	×	×	×													×	×	×	×	×	×	×	×	
5	×	×	×	×	×													×	×	×	×	×	×	×	
6	×	×	×	×	×	×													×	×	×	×	×	×	
7	×	×	×	×	×	×	×					×								×	×	×	×	×	4 Damen mit je 13 Herren
8	×	×	×	×	×	×	×	×					×								×	×	×	×	
9	×	×	×	×	×	×	×	×	×					×								×	×	×	
10	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×					×								×	×	
11		×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×										×	6 Damen mit je 12 Herren
12			×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×									
13				×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×								
14					×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×							
15						×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×						
16							×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×					
17								×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×				
18									×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×			
19										×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×		
20											×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	
	11 Herren mit je 10 Damen											2 H mit je 11 D		11 Herren mit je 10 Damen											

Aufgabe 161213:
Einer Schule stehen für ein Zeltlager folgende Zelte zur Verfügung:

2 Zelte für je 3 Personen,
1 Zelt für 8 Personen,
2 Zelte für je 10 Personen und
2 Zelte für je 16 Personen.

Jedes dieser Zelte wird entweder mit Mädchen zu genau 50% seiner Höchstbelegungszahl ausgelastet oder mit Jungen so belegt, dass es zu höchstens 70%, mindestens aber zu 50% ausgelastet ist. Dabei sind insgesamt für das Zeltlager mehr Mädchen als Jungen zu berücksichtigen.

a) Wieviel Personen können maximal unter diesen Bedingungen am Zeltlager teilnehmen?

b) Man gebe für einen derartigen Fall eine entsprechende Belegung der Zelte an.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Zelte für 3 Personen seine mit Z_{31}, Z_{32}, das für 8 Personen mit Z_8, die für 10 Personen mit Z_{101}, Z_{102}, die für 16 Personen mit Z_{161}, Z_{162} bezeichnet.

Zunächst können nach den Angaben über die Auslastung die Zelte Z_{31}, Z_{32} nur mit je 2 Jungen belegt werden. Ferner folgt, dass die Zahl der Personen mindestens 34 $(= 2 \cdot 2 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 8)$ beträgt.

Für die einzelnen Zelte ergeben sich folgende mögliche Belegungen (dabei bezeichne J die Zahl der Jungen und M die der Mädchen).

Zelt	J	M
Z_{31}	2	-
Z_{32}	2	-
Z_8	4 oder 5	4
Z_{101}	5 oder 6 oder 7	5
Z_{102}	5 oder 6 oder 7	5
Z_{161}	8 oder 9 oder 10 oder 11	8
Z_{162}	8 oder 9 oder 10 oder 11	8

Es sei n_i die Belegungszahl für Z_i $(i = 31, 32, 9, 101, 102, 161, 162)$. Wäre $n_{161} \geq 9$ und $n_{162} \geq 9$, so wäre $J \geq 2 + 2 + 9 + 9 = 22$ und wegen $J + M \leq 44$ folglich $M \leq 22$ im Widerspruch zu $M > J$. O. B. d. A. sei darum $n_{162} = 8$.

Fallunterscheidung für n_8:

Es sei $n_8 = 5$ (d. h. dieses Zelt wurde mit 5 Jungen belegt). Wäre außerdem $n_{161} \geq 9$, so wäre $J \geq 2 + 2 + 2 + 5 + 9 = 18$ und damit $M \leq 5 + 5 + 8 = 18$ (Belegung der Zelte Z_{101}, Z_{102} und Z_{162}), im Widerspruch zu $M > J$. Es gilt also $n_{161} = 8$.

Wäre $n_{101} > 5$ und $n_{102} > 5$, so wäre $J \geq 2 + 2 + 5 + 6 + 6 = 21$ und $M \leq 8 + 8 = 16$, im Widerspruch zu $M > J$.

Für $n_{101} = n_{102} = 5$ gilt $J + M = 2 + 2 + 5 + 5 + 5 + 8 + 8 = 35$. Da hierbei nur die ersten beiden Zelte mit über 50 % ausgelastet sind, lässt sich diese Belegung auch unter Beachtung von $M > J$ realisieren.

Ist genau eine der Zahlen n_{101}, n_{102} gleich 5, so gilt

$$J + M \leq 2 + 2 + 5 + 5 + 7 + 8 + 8 = 37 \qquad \text{wobei} \qquad J \geq 2 + 2 + 5 + 6 = 15$$

gilt, also eine Belegung mit $M > J$ möglich ist. Im Falle $n_8 = 5$ können also höchstens 37 Schüler berücksichtigt werden.

Es sei $n_8 = 4$ (d. h. dieses Zelt kann entweder mit Jungen oder Mädchen belegt werden). Wäre mindestens eine der Zahlen n_{101}, n_{102} größer als 5 und zugleich $n_{161} \geq 9$, so wäre $J \geq 2+2+6+9 = 19$ und, im Widerspruch zu $M > J$ da $M \leq 4+5+8 = 17$.

Ist $n_{101} = n_{102} = 5$, so gilt $J + M \leq 2+2+4+5+5+11+8 = 37$. Wegen $J \geq 2+2+11 = 15$ ist eine solche Belegung möglich.

Ist genau eine der Zahlen n_{101}, n_{102} gleich 5 und folglich $n_{161} = 8$, so gilt

$$J + M \leq 2+2+4+5+6+7+8+8 = 36$$

Der nun noch als einziger verbleibende Fall $n_{101} > 5$ und $_{102} > 5$ kann dadurch realisiert werden, dass Z_{31} und Z_{32} mit je 2 Jungen, Z_8 mit 4 Mädchen, Z_{101} und Z_{102} mit je 7 Jungen, Z_{161} und Z_{162} mit je 8 Mädchen belegt werden. Das sind 18 Jungen und 20 Mädchen, also insgesamt 38 Personen. Mithin beträgt die gesuchte maximale Belegungszahl 38.

Aufgabe 211213:
Eine Menge M enthalte genau 55 Elemente. Für jede natürliche Zahl k mit $0 \leq k \leq 55$ bezeichne A_k die Anzahl aller derjenigen Teilmengen von M, die genau k Elemente enthalten.

Ermitteln Sie alle diejenigen natürlichen Zahlen k, für die A_k am größten ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Ist 3 eine natürliche Zahl mit $0 \leq k \leq 55$, so ergibt sich die Anzahl A_k auf folgende Weise:
Man denke sich jede der genannten Teilmengen dadurch gebildet, dass man der Reihe nach ein erstes, ein zweites, ... , ein k-tes Element aus M auswählt. Für das erste Element gibt es dabei genau 55 Möglichkeiten der Auswahl. Nach jeder solchen Auswahl gibt es für das zweite Element genau (55-1) Möglichkeiten usw.

Schließlich gibt es nach jeder Möglichkeit einer vorangehenden Auswahl von $k-1$ Elementen für das k-te Element noch genau $(55-(k-1))$ Möglichkeiten. Somit hat man insgesamt $55 \cdot 54 \cdot ... \cdot (56-k)$ Möglichkeiten, in der beschriebenen Weise der Reihe nach k Elemente auszuwählen.

Von diesen Auswahlmöglichkeiten führen jeweils genau diejenigen auf dieselbe Teilmenge, die sich nur in der Reihenfolge der ausgewählten k Elemente unterscheiden. Für die Wahl einer solchen, Reihenfolge wiederum gibt es genau $k \cdot (k-1) \cdot ... \cdot 1$ Möglichkeiten (da jeweils in einer solchen Reihenfolge an die erste Stelle eines der k Elemente zu setzen ist, an die zweite Stelle jeweils eines von den restlichen $(k-1)$ Elementen usw., ..., bis für die k-te Stelle bei jeder schon festgelegten Reihenfolge der ersten $(k-1)$ Elemente genau 1 Element verbleibt). Daher ist

$$A_k = \frac{55 \cdot 54 \cdot ... \cdot (56-k)}{1 \cdot 2 \cdot ... \cdot k}$$

II. Ist k eine natürliche Zahl mit $0 \leq k \leq 55$, so ist entsprechend

$$A_{k+1} = \frac{55 \cdot 54 \cdot ... \cdot (56-k) \cdot (55-k)}{1 \cdot 2 \cdot ... \cdot k \cdot (k+1)} \qquad \text{also gilt} \qquad A_{k+1} = \frac{55-k}{k+1} \cdot A_k$$

III. Für $k \leq 26$ ist der Bruch $\frac{55-k}{k+1}$ größer als 1, für $k = 27$ gleich 1 und für $28 \leq k \leq 55$ kleiner als 1, aber positiv. Daher gilt

$$A_0 < A_1 < ... < A_{26} < A_{27} = A_{28} \qquad ; \qquad A_{28} > A29 > ... > A_{54} > A_{55}$$

Somit wird A_k genau für $k = 27$ und $k = 28$ am größten.

Aufgabe 291211:
Man ermittle die Anzahl aller natürlichen Zahlen z mit folgenden Eigenschaften:

(1) Die dekadische Zifferndarstellung von z besteht aus fünf paarweise verschiedenen Ziffern.

(2) Die erste und die letzte Ziffer darin sind von 0 verschieden.

(3) Ist z' diejenige Zahl, deren Zifferndarstellung aus der von z durch Umkehrung der Reihenfolge entsteht, so besteht die Zifferndarstellung der Zahl $z + z'$ aus sämtlich einander gleichen Ziffern.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Ziffern von z seien a, b, c, d, e. Zu ermitteln ist die Anzahl der Lösungen einer Aufgabe, die nach Art eines Kryptogramms

$$\begin{array}{rccccc} & \text{a} & \text{b} & \text{c} & \text{d} & \text{e} \\ + & \text{e} & \text{d} & \text{c} & \text{b} & \text{a} \\ \hline & \text{f} & \text{f} & \text{f} & \text{f} & \text{f} \end{array} \; (*) \qquad \text{oder} \qquad \begin{array}{rcccccc} & & \text{a} & \text{b} & \text{c} & \text{d} & \text{e} \\ + & & \text{e} & \text{d} & \text{c} & \text{b} & \text{a} \\ \hline & \text{f} & \text{f} & \text{f} & \text{f} & \text{f} & \text{f} \end{array} \; (**)$$

lautet. Für jede solche Lösung folgt:

Da in der Einerstelle $a + e = f$ oder $a + e = 10 + f$ (4) gefordert wird, kann aus der Tausenderstelle kein Übertrag in die Zehntausenderstelle auftreten, d. h., es gilt $b + d < 10$ (5)

In (**) folgt $f = 1$ und $a + e > 10$, nach (4) also $a + e = 11$. Wegen des somit in der Einerstelle auftretenden Übertrags und $f = 1$ müsste $b + d = 0$ oder $b + d = 10$, wegen (5) also $b + d = 0$ sein. Das hätte den Widerspruch $b = d = 0$ gegen (1) zur Folge. Der Fall (**) scheidet als aus.

In (*) folgt $a + e < 10$ (6) und damit weiter, dass (*) genau dann erfüllt wird, wenn, an allen Stellen ohne Übertrag,

$$0 < f = a + e = b + d = 2c < 10 \tag{7}$$

gilt. Für die Darstellung der geraden Zahlen f zwischen 0 und 10 als Summe zweier voneinander und von 0 verschiedener natürlicher Zahlen a, e gibt es genau die Möglichkeiten der Tabelle

f	Darstellung	c
2	-	
4	1+3	2
6	1+5, 2+4	3
8	1+7, 2+6, 3+5	4

Für die Darstellung als Summe zweier voneinander verschiedener natürlicher Zahlen b, d, unter denen sich auch die 0 befinden kann, kommt jedes Mal noch die Möglichkeit $f = 0 + f$ hinzu. Die jeweils noch zu f gehörende Zahl c ist auch stets von den für a, e und b, d angegebenen Möglichkeiten verschieden.

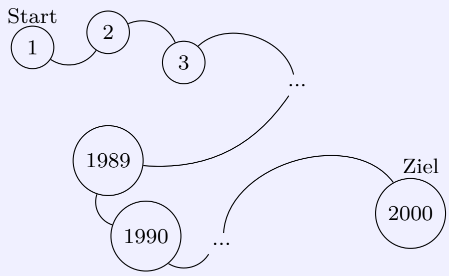
Im Fall $f = 4$ wird somit (*) genau mit den Mengen (ungeordneten Paaren) $\{a,e\} = \{1,3\}$ und $\{b,d\} = \{0,4\}$ erfüllt. In jeder dieser Mengen gibt es genau 2 Möglichkeiten der Reihenfolge; somit hat (*) für $f = 4$ genau 4 Lösungen.

Im Fall $f = 6$ ist für $\{a,e\}$ eine den Mengen $\{1,5\}, \{2,4\}$ (4 Möglichkeiten) und dazu für b, d entweder die andere dieser Mengen oder 0, 6 (4 Möglichkeiten) zu nehmen; somit hat (*) für $f = 6$ genau 16 Lösungen.

Im Fall $f = 8$ folgt ebenso, dass es für $\{a,e\}$ und für $\{b,d\}$ je 6 Möglichkeiten, für (*) also genau 36 Lösungen gibt.

Die gesuchte Anzahl aller Lösungen beträgt folglich 56.

Aufgabe 321214:



Bei einem Würfelspiel „Reise durch Deutschland“ sind 2000 Felder längs der Reiseroute angeordnet (siehe Abbildung). Beim Startfeld 1 beginnend, wird der Spielstein nach jedem Mal Würfeln in Richtung Ziel um die gewürfelte Augenzahl weiterbewegt, Steht der Stein dann genau auf dem Feld 1990, so erhält der Spieler einen Bonus.
Für jedes Feld n mit $1 \leq n \leq 1989$ bezeichne $P(n)$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein auf dem Feld n stehender Stein im weiteren Verlauf des Spieles diesen Bonus einbringt.

Man ermittle diejenige Zahl n ($1 \leq n \leq 1989$), für die $P(n)$ den größten Wert hat.

Hinweis: Informieren Sie sich gegebenenfalls über den Begriff Wahrscheinlichkeit!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Über die Wahrscheinlichkeiten $P(n)$ kann man schrittweise für $n = 1989, 1988, \dots, 2, 1$ folgende Aussagen erhalten: Es gilt

$$\begin{aligned}
P(1989) &= \frac{1}{6}\\
P(1988) &= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot P(1989)\\
P(1987) &= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot P(1988) + \frac{1}{6} \cdot P(1989)\\
&\dots\\
P(1984) &= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot P(1985) + \frac{1}{6} \cdot P(1986) + \frac{1}{6} \cdot P(1987) + \frac{1}{6} \cdot P(1988) + \frac{1}{6} \cdot P(1989)\\
P(1983) &= \frac{1}{6} \cdot P(1984) + \frac{1}{6} \cdot P(1985) + \dots + \frac{1}{6} \cdot P(1989)\\
P(1982) &= \frac{1}{6} \cdot P(1983) + \frac{1}{6} \cdot P(1985) + \dots + \frac{1}{6} \cdot P(1988)\\
&\dots\\
P(1) &= \frac{1}{6} \cdot P(2) + \frac{1}{6} \cdot P(3) + \dots + \frac{1}{6} \cdot P(7)
\end{aligned}$$

Die hier behaupteten Werte für $P(n)$ mit $n = 1990 - k$ ($k = 1, \dots, 6$) kann man folgendermaßen mit Hilfe des Satzes von der totalen Wahrscheinlichkeit) erhalten:

Genau einer der möglichen Würfe (Augenzahl k) führt sofort auf das Feld 1990; jeder der $k - 1$ Würfe mit kleinerer Augenzahl (sofern es diese gibt) führt auf eines der Felder ν zwischen n und 1990, von denen aus das Weiterspielen jeweils mit der Wahrscheinlichkeit $P(\nu)$ den Bonus einbringt; jeder Wurf mit größerer Augenzahl als k führt im weiteren Spielverlauf mit Sicherheit nicht mehr auf den Bonus.

Die Werte für $P(n)$ mit $n \leq 1983$ ergeben sich ebenfalls mit Hilfe des Satzes von der totalen Wahrscheinlichkeit:

Jeder der möglichen Würfe (Augenzahl $k = 1, \dots, 6$) führt auf eines der Felder $\nu = n + k$, von denen aus das Weiterspielen jeweils mit der Wahrscheinlichkeit $P(\nu)$ den Bonus einbringt. Aus den somit erhaltenen Gleichungen folgt der Reihe nach

$$P(1988) = P(1989) + \frac{1}{6} \cdot P(1989) > P(1989) \quad , \quad P(1987) = P(1988) + \frac{1}{6} \cdot P(1988) > P(1988) \quad \dots$$

$$P(1984) = P(1985) + \frac{1}{6} \cdot P(1985) > P(1985) \quad , \quad P(1983) < 6 \cdot \frac{1}{6} \cdot P(1984) = P(1984)$$

$$P(1982) < 6 \cdot \frac{1}{6} \cdot P(1984) = P(1984) \quad \dots \quad P(1) < 6 \cdot \frac{1}{6} \cdot P(1984) = P(1984)$$

Damit ist $n = 1984$ als diejenige Zahl ermittelt, für die $P(n)$ den größten Wert hat.

Aufgabe 331213:
In einem Schönheitswettbewerb für Pudel stellen sich Asta, Benno, Cäsar und Dolly einer Jury aus vier Mitgliedern. Jedes Jurymitglied stimmt für einen der Hunde durch Heben eines Kärtchens mit dem Anfangsbuchstaben des Hundenamens. Als Regel zur Auswertung dieses Abstimmungsergebnisses wurde festgelegt: Kommen eindeutig zwei Hunde mit größerer Stimmenzahl als die beiden anderen Hunde vor, so gelten sie als qualifiziert. Tritt aber der Fall ein, dass in dem Abstimmungsergebnis nicht eindeutig zwei Hunde mit größerer Stimmenzahl als die beiden anderen Hunde vorkommen, so wird eine Zusatzregelung getroffen (z. B. eine erneute Abstimmung angesetzt).

Ermitteln Sie die Anzahl aller derjenigen verschiedenen Abstimmungsergebnisse, die zu diesem letztgenannten Fall führen! Dabei gelten Abstimmungsergebnisse genau dann als einander gleich, wenn sie nicht nur in den Stimmenzahlen der Hunde, sondern auch darin übereinstimmen, welche Jurymitglieder für die betreffenden Hunde gestimmt haben. Beispielsweise gelten die Abstimmungsergebnisse $AABC$ und $CABA$ als voneinander verschieden.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Für jedes Abstimmungsergebnis gilt genau eine der folgenden fünf Aussagen:

(1) Ein Hund erhält alle vier Stimmen.
(2) Ein Hund erhält drei Stimmen, ein zweiter Hund eine Stimme.
(3) Zwei Hunde erhalten je zwei Stimmen.
(4) Ein Hund erhält zwei Stimmen, zwei weitere Hunde erhalten je eine Stimme.
(5) Jeder Hund erhält eine Stimme.

Der Fall, dass nicht eindeutig zwei Hunde mit größerer Stimmenzahl als die beiden anderen Hunde vorkommen, tritt genau dann ein, wenn eine der Aussagen (l), (4), (5) gilt.

Gilt (1), so ist das Abstimmungsergebnis durch Angabe des Hundes, der vier Stimmen erhielt, eindeutig festgelegt. Daher gibt es genau 4 Abstimmungsergebnisse mit (1).

Gilt (4), so ist das Abstimmungsergebnis eindeutig festgelegt durch

(a) Angabe der beiden Hunde mit je genau einer Stimme (hierfür gibt es genau $\binom{4}{2} = 6$ Möglichkeiten),
(b) Angabe der Jurymitglieder, die diese Hunde wählten (je genau $4 \cdot 3 = 12$ Möglichkeiten),
(c) Angabe desjenigen der beiden anderen Hunde, der zwei Stimmen erhielt (je genau 2 Möglichkeiten).

Also gibt es genau $6 \cdot 12 \cdot 2 = 144$ Abstimmungsergebnisse mit (4).

Gilt (5), so ist das Abstimmungsergebnis eindeutig durch Angabe der Zuordnung zwischen den Jurymitgliedern und den von ihnen gewählten Hunden festgelegt (genau $4! = 24$ Möglichkeiten). Der Fall, dass eine Zusatzregelung erforderlich wird, tritt daher bei genau $4 + 144 + 24 = 172$ Abstimmungsergebnissen ein.

Anmerkung: Dieser hohe Prozentsatz (ca. 67,2 % von $4^4 = 256$ möglichen Abstimmungsergebnissen) zeigt, dass die Auswertungsregel wenig effektiv ist.

Anregung: Ermitteln Sie die gesuchte Anzahl auch mit einem Computerprogramm, das alle Abstimmungsergebnisse „durchprobiert“!

Aufgabe 341212:
Man ermittle die Anzahl aller derjenigen natürlichen Zahlen n, welche die folgenden Bedingungen (1), (2), (3) erfüllen:

(1) Die Zahl n ist durch 5 teilbar.

(2) Die Zahl n und ihre Quersumme enthalten beide in ihrer Dezimaldarstellung keine Ziffer Null.

(3) Die Quersumme der Quersumme von n beträgt 2.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

I. Wenn eine natürliche Zahl n die Bedingungen (1), (2) und (3) erfüllt, so folgt:

Nach (2) und (3) beträgt die Quersumme von n entweder 2 oder 11. Nach (1) und (2) hat n die Einerziffer 5. Also verbleibt für die Quersumme von n nur die Möglichkeit 11; die Summe der übrigen Ziffern beträgt folglich 6.

II. Wenn eine natürliche Zahl die Einerziffer 5 hat und die übrigen Ziffern sämtlich von 0 verschieden sind und die Summe 6 haben, so erfüllt die Zahl die Bedingungen (1), (2) und (3).

Daher ist die gesuchte Anzahl gleich der Anzahl aller verschiedenen geordneten Zusammenstellungen von Ziffern, die sämtlich von 0 verschieden sind und die Summe 6 haben.
Dies sind genau die folgenden Zusammenstellungen:

Alle Permutationen von ...	Anzahl	Alle Permutationen von ...	Anzahl
1,1,1,1,1,1	1	1,1,1,2	5
1,1,1,3	4	1,1,2,2	6
1,1,4	3	1,2,3	6
1,5	2	2,2,2	1
2,4	2	3,3	1
6	1		

Als Summe ergibt sich die gesuchte Anzahl 32.

II. Runde 2

Aufgabe 071221:
Es seien x_k und y_k ganze Zahlen, die die Bedingungen $0 \leq x_k \leq 2$ und $0 \leq y_k \leq 2$ erfüllen.
a) Ermitteln Sie die Anzahl aller (nicht entarteten) Dreiecke mit Eckpunkten $P_k(x_k; y_k)$, wobei x_k, y_k die rechtwinkligen kartesischen Koordinaten von P_k bedeuten!
Anmerkung: Dabei gelten zwei Dreiecke $\triangle_1$ und $\triangle_2$ genau dann als gleich, wenn jede Ecke von $\triangle_1$ auch Ecke von $\triangle_2$ ist.
b) Geben Sie die Maßzahlen der Flächeninhalte aller dieser Dreiecke an!

Lösung von StrgAltEntf:
a) Es gibt insgesamt 9 Paare (x,y) ganzer Zahlen mit $0 \leq x \leq 2$ und $0 \leq y \leq 2$, also 9 Punkte $P(x,y)$ mit ganzzahligen Koordinaten $x,y \in \{0,1,2\}$. Es gibt $\binom{9}{3} = 84$ Möglichkeiten, 3 dieser 9 Punkte auszuwählen. Dabei liegen jedoch in 8 Fällen die 3 Punkte auf einer Geraden (entweder parallel zur x- oder y-Achse oder auf einer der Diagonalen $y = x$ oder $y = 3 - x$. Somit bilden in $84 - 8 = 76$ Fällen die drei Punkte ein nicht-entartetes Dreieck.

b) Es gibt 8 Klassen von Dreiecken, wobei die Dreiecke einer Klasse zueinander kongruent sind. Nämlich:

Klasse	Repräsentant	Anzahl	Flächeninhalt
1.	(0,0), (0,1), (1,0)	16	1/2
2.	(0,0), (0,1), (1,2)	16	1/2
3.	(0,0), (0,1), (2,0)	16	1
4.	(0,0), (0,1), (2,2)	8	1
5.	(0,0), (0,2), (1,2)	8	1
6.	(0,0), (0,2), (2,0)	4	2
7.	(0,0), (0,2), (2,1)	4	2
8.	(0,0), (1,2), (2,1)	4	3/2
Summe:		76	

Aufgabe 101222:
Der Binomialkoeffizient $\binom{a}{k}$ wird für jede beliebige reelle Zahl a und jede natürliche Zahl $k > 1$ durch

$$\binom{a}{k} = \frac{a(a-1)(a-2)...[a-(k-2)][a-(k-1)]}{k!}$$

definiert.
a) Untersuchen Sie, ob auch in jedem hier genannten Fall für a und k die für ganzzahlige $a > k$ aus dem Pascalschen Dreieck bekannte Beziehung gilt:

$$\binom{a}{k} + \binom{a}{k+1} = \binom{a+1}{k+1}$$

b) Zeigen Sie, dass für $k > 2$ gilt:

$$\binom{\frac{1}{2}}{k} = \frac{(2k-3)!}{2^{2k-2} \cdot k! \cdot (k-2)!} \cdot (-1)^{k+1}$$

Lösung von cyrix:
a) Es ist

$$\binom{a}{k} + \binom{a}{k+1} = \frac{a(a-1)(a-2)\dots[a-(k-2)][a-(k-1)]}{k!} + \frac{a(a-1)(a-2)\dots[a-(k-1)][a-k]}{(k+1)!} =$$

$$= \frac{(k+1)\cdot a(a-1)(a-2)\dots[a-(k-2)][a-(k-1)]}{(k+1)!} + \frac{a(a-1)(a-2)\dots[a-(k-1)][a-k]}{(k+1)!} =$$

$$= \frac{a(a-1)(a-2)\dots[a-(k-2)][a-(k-1)]}{(k+1)!} \cdot ([k+1]+[a-k]) =$$

$$= \frac{(a+1)a(a-1)(a-2)\dots[a-(k-2)][a-(k-1)]}{(k+1)!} = \binom{a+1}{k+1}$$

b) Es ist

$$\binom{\frac{1}{2}}{k} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdot\ldots\left(\frac{1}{2}-(k-1)\right)}{k!} = \frac{1\cdot(1-2)\cdot\ldots\cdot(1-2(k-1))}{k!\cdot 2^k} =$$

$$= (-1)^{k-1}\cdot\frac{(2-1)\cdot\ldots\cdot(2(k-1)-1)}{k!\cdot 2^k} = (-1)^{k+1}\cdot\frac{(2k-3)!}{k!\cdot 2^k\cdot 2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2k-4)} =$$

$$= (-1)^{k+1}\cdot\frac{(2k-3)!}{k!\cdot 2^{k+(k-2)}\cdot(2k-2)!}$$

Aufgabe 121224:
In einer Stadt soll ein Netz von mindestens zwei Autobuslinien eingerichtet werden. Dieses Liniennetz soll folgenden Bedingungen genügen:
(1) Auf jeder Linie gibt es genau drei Haltestellen.
(2) Jede Linie hat mit jeder anderen Linie genau eine Haltestelle gemeinsam.
(3) Es ist möglich, von jeder Haltestelle aus jede andere Haltestelle mit einer Linie zu erreichen, ohne zwischendurch auf eine andere Linie umsteigen zu müssen.
Man ermittle alle Möglichkeiten für die Anzahl der Autobuslinien eines solchen Netzes.

Lösung von StrgAltEntf:
Im Folgenden wird davon ausgegangen, dass Anfangs- und Endhaltestelle einer Buslinie zu den drei Haltestellen, die es laut (1) gibt, hinzuzählen. Jede Buslinie führt also von Anfangshaltestelle mit genau einem Zwischenstopp zur Endhaltestelle. In den folgenden Überlegungen stehen unterschiedliche Buchstaben für unterschiedliche Haltestellen.

Linie 1 möge die drei Haltestellen A, B und C bedienen. In welcher Reihenfolge ist hier irrelevant. Wir schreiben:
Linie 1: A-B-C

Linie 2, die es nach Voraussetzung gibt, hat laut (2) mit Linie 1 genau eine Haltestelle gemeinsam. Dies sei o. B. d. A. die Haltestelle A. D und E seien die beiden anderen Haltestellen der Linie 2. Also:
Linie 2: A-D-E

Nach (3) muss es Linien 3 und 4 geben, die B und D bzw. B und E verbinden. (Eine Linie mit den Haltestellen B, D und E kann es nicht geben, da diese mit Linie 2 zwei Haltestellen gemeinsam hätte.) F und G seien die jeweils dritten Haltestellen der Linie 3 und 4. (F und G können nicht identisch sein, da sonst die Linien 3 und 4 zwei Haltestellen gemeinsam hätten, nämlich B und F=G.). Somit:
Linie 3: B-D-F
Linie 4: B-E-G

C und D liegen noch auf keiner gemeinsamen Linie. Also muss es eine weitere Linie geben, die C und D anfährt. Außerdem muss diese mit Linie 4 eine gemeinsame Haltestelle besitzen, was nur G sein kann (da sonst B und C oder D und E auf zwei Linien lägen). Also:
Linie 5: C-D-G

Analog muss es eine Linie geben, die C und E bedient, und diese muss wegen Linie 3 die Haltestelle F besitzen. Also:
Linie 6: C-E-F

Jetzt fehlt noch eine Verbindung zwischen A und F. Diese muss mit Linie 5 eine gemeinsame Haltestelle haben, was nur G sein kann. Also:
Linie 7: A-F-G

Die Linien 1 bis 7 erfüllen offenbar die Bedingungen (1), (2) und (3). Eine weitere Linie kann nicht hinzugefügt werden, ohne eine der Bedingungen (1), (2) oder (3) zu verletzen. Die einzige mögliche Anzahl ist also 7.

Aufgabe 131222:
Jeder von 41 Schülern einer Klasse hatte an genau drei Leichtathletik-Wettkämpfen im Laufen teilzunehmen.

Dabei musste jeder dieser Schüler je einmal auf den Bahnen 1, 2 und 3 antreten.
Schüler A meint, dass es in dieser Klasse allein auf Grund dieser Bestimmungen mindestens sieben Schüler geben müsse, bei denen die Reihenfolge der Startbahnen übereinstimmte.
Schüler B meint dagegen nach einigem Nachdenken, dass es sogar acht solcher Schüler geben müsse.
Man überprüfe, ob jede dieser beiden Meinungen richtig ist.

Lösung von weird:
Anwendung des Schubfachprinzips:
Verteilt man n Objekte auf k Mengen, wobei $n,k > 0$ ist, so gibt es mindestens eine Menge, in der sich zumindest $\lceil \frac{n}{k} \rceil$ Objekte befinden. ($\lceil \frac{n}{k} \rceil$ bezeichnet dabei die kleinste ganze Zahl g mit $g \geq \frac{n}{k}$.)

Hier sind die n Objekte nun einfach die 41 Schüler und die k Mengen sind einfach die 6 Mengen, welche der Aufteilung der Schüler gemäß den 3! Permutationen der 3 Startbahnen entsprechen, d. h., es ist $n = 41$ und $k = 6$. Also muss es dann tatsächlich mindestens 7 ($= \lceil \frac{41}{6} \rceil$) Schüler geben, für welche die Reihenfolge der Startbahnen übereinstimmt. Für 8 Schüler kann man dagegen diese Aussage nicht mehr machen, wie die einfache Gleichung

$$7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 6 = 41$$

zeigt, welche eine mögliche „Belegung“ der 6 Permutationen der Startbahnen angibt, bei der es keine 8 Schüler mit der gleichen Reihenfolge der Startbahnen gibt.

Aufgabe 151223:
Die Forschungsabteilungen zweier volkseigener Betriebe sollen zu einer gemeinsamen Beratung genau je sechs Mitarbeiter delegieren.
An der Beratung sollen insgesamt 6 Mathematiker und 6 Ingenieure teilnehmen. In der Forschungsabteilung des einen Betriebes arbeiten 5 Mathematiker und 7 Ingenieure, in der des anderen 7 Mathematiker und 5 Ingenieure.
Man ermittle die Anzahl aller möglichen personellen Zusammensetzungen der Beratung unter den angegebenen Bedingungen.

Lösung von Kitaktus:
Wenn die erste Abteilung m Mathematiker entsendet, dann muss sie $6 - m$ Ingenieure entsenden. Umgedreht muss die zweite Abteilung $6-m$ Mathematiker und m Ingenieure entsenden. Dabei ist m ganzzahlig und mindestens 0, aber höchstens 5, da es in der ersten Abteilung nur 5 Mathematiker gibt.

Es gibt dann $\binom{5}{m} \cdot \binom{7}{6-m} \cdot \binom{7}{6-m} \cdot \binom{5}{m}$ Möglichkeiten die Personen aus ihren entsprechenden Gruppen auszuwählen. Die gesuchte Anzahl ist die Summe aller dieser Produkte über m=0 bis 5:

$$\sum_{m=0}^{5} \binom{5}{m}^2 \cdot \binom{7}{6-m}^2 = \binom{5}{0}^2 \cdot \binom{7}{6}^2 + \binom{5}{1}^2 \cdot \binom{7}{5}^2 + \binom{5}{2}^2 \cdot \binom{7}{4}^2 +$$

$$+\binom{5}{3}^2 \cdot \binom{7}{3}^2 + \binom{5}{4}^2 \cdot \binom{7}{2}^2 + \binom{5}{5}^2 \cdot \binom{7}{1}^2$$

$$= 1^2 \cdot 7^2 + 5^2 \cdot 21^2 + 10^2 \cdot 35^2 + 10^2 \cdot 35^2 + 5^2 \cdot 21^2 + 1^2 \cdot 7^2 = 2 \cdot (7^2 + 105^2 + 350^2) = 2 \cdot (49 + 11025 + 122500) = 267148$$

Es gibt also insgesamt 267148 Möglichkeiten die Teilnehmer auszuwählen.

Aufgabe 201223:
An einem Fußballturnier nahmen n Mannschaften teil. Jede Mannschaft spielte dabei gegen jede andere Mannschaft genau einmal.
Die jeweils siegreiche Mannschaft erhielt 2 Punkte, die unterlegene Mannschaft keinen Punkt, und bei unentschiedenem Ausgang erhielten beide Mannschaften je einen Punkt.
Nach Abschluss des Turniers wurden die Mannschaften auf die Plätze $1, 2, ..., n$ der Abschlusstabelle nach fallender Gesamtpunktzahl gesetzt. (Bei Punktgleichheit wurden dazu weitere Unterscheidungskriterien genutzt.)
Man ermittle die größtmögliche Zahl, die in allen (nach diesen Regeln) möglichen Turnieren als Punktdifferenz zwischen zwei in der Abschlusstabelle unmittelbar benachbarten Mannschaften auftreten kann.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Für jedes mögliche Turnier und je zwei Mannschaften, die in der Abschlusstabelle unmittelbar benachbarte Plätze k und $k+1$ $(1 \leq k \leq n-1)$ einnehmen, gilt:

Die Mannschaften, die auf den Plätzen $1, ..., k$ liegen, haben untereinander $\frac{k(k-1)}{2}$ Spiele ausgetragen und dafür insgesamt $2 \cdot \frac{k(k-1)}{2} = k(k-1)$ Punkte erhalten. Außerdem haben diese Mannschaften gegen die Mannschaften, die auf den Plätzen $k+1, k+2, ..., n$ liegen, insgesamt $k \cdot (n-k)$ Spiele ausgetragen und dabei insgesamt höchstens $2k \cdot (n-k)$ Punkte erhalten.
Die Mannschaften der Plätze 1 bis k haben also insgesamt nicht mehr als

$$k(k-1=+2k(n-k)=k(2n-k-1)$$

Punkte erhalten.
Hieraus folgt, dass die Mannschaft auf Platz k nicht mehr als $2n-k-1$ Punkte erhielt; denn wäre dies doch der Fall, so müsste jede der Mannschaften auf den Plätzen 1,...,k ebenfalls mehr als $2n-k-1$ Punkte erhalten haben, und es ergäben sich für diese Mannschaften insgesamt mehr als $k(2n-k-1)$ Punkte.
Die $n-k$ Mannschaften auf den Plätzen $k+1, ..., n$ haben untereinander insgesamt $\frac{(n-k)(n-k-1)}{2}$ Spiele ausgetragen und dafür insgesamt $(n-k)(n-k-1)$ Punkte erhalten.
Also muss die Mannschaften auf dem Platz $k-1$ mindestens $n-k-1$ Punkte errungen haben; denn wäre es weniger, so erst recht für jede der Mannschaften auf den Plätzen $k+1, ..., n$, wenn nur deren Spiele untereinander berücksichtigt werden, und es ergäben sich für diese Spiele insgesamt weniger als $(n-k)(n-k-1)$ Punkte.

Folglich kann in jedem möglichen Turnier die Punktdifferenz zweier beliebiger Mannschaften, die in der Abschlusstabelle die benachbarten Plätze k und $k+1$ einnehmen, nicht mehr als

$$(2n-k-1)-(n-k-1)=n$$

betragen.
Wenn nun noch ein Beispiel eines Turniers angegeben wird, worin zwei benachbarte Mannschaften mit der Punktdifferenz n auftreten, so ist n als die gesuchte Zahl nachgewiesen.
Ein solches Beispiel erhält man, wenn in einem Turnier die Mannschaft auf Platz 1 gegen alle übrigen Mannschaften gewonnen, dafür also $2n-2$ Punkte erhalten hat, und die übrigen Mannschaften untereinander unentschieden gespielt haben, so dass jede dieser Mannschaften für diese $n-2$ Spiele $n-2$ Punkte und damit insgesamt in der Abschlusstabelle $n-2$ Punkte erhielt.
Die Punktdifferenz zwischen den Mannschaften auf den Plätzen 1 und 2 beträgt dann nämlich $(2n-2)-(n-2)=n$ Punkte.

Aufgabe 221224:
Es sei $n \neq 0$ eine natürliche Zahl. Auf einer Kreislinie seien $2n$ paarweise verschiedene Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_{2n}$ gegeben.

Gesucht wird die Anzahl A_n aller verschiedenen Möglichkeiten, eine Menge von n Sehnen so zu zeichnen, dass folgende Forderungen erfüllt sind:
Jede Sehne verbindet einen der Punkte $P_1, P_2, \dots, P_{2n}$ mit einem anderen dieser Punkte, und keine zwei dieser Sehnen haben im Innern oder auf dem Rand des Kreises einen gemeinsamen Punkt.
Zwei Möglichkeiten gelten genau dann als verschieden, wenn es mindestens ein Punktepaar P_i, P_j gibt, das bei der einen der beiden Möglichkeiten durch eine Sehne verbunden ist, bei der anderen Möglichkeit dagegen nicht.
a) Ermitteln Sie die Anzahl A_3, indem Sie zu sechs Punkten $P_1, P_2, \dots, P_6$ mehrere verschiedene Möglichkeiten für drei Sehnen angeben und nachweisen, dass damit alle verschiedenen Möglichkeiten der geforderten Art erfasst sind!
b) Ermitteln Sie eine Formel, mit der man für beliebiges $n \geq 2$ die Anzahl A_n aus den Anzahlen $A_1, \dots, A_{n-1}$ berechnen kann!
c) Ermitteln Sie die Anzahl A_5!

Lösung von weird:
Im Folgenden gehen wir davon aus, dass die Punkte $P_1,P_2,\dots,P_{2n}$ nacheinander in genau dieser Reihenfolge, sowie in einem einheitlichen Umlaufsinn auf der Kreislinie angeordnet sind, was nur die Sprechweise hier etwas vereinfacht, aber in Hinblick auf die Problemstellung keine Einschränkung der Allgemeinheit bedeutet.
Ferner bezeichnen wir im Folgenden eine Auswahl von n Sehnen als „zulässig“, wenn sie alle gestellten Anforderungen der Aufgabe hier erfüllt. Allgemeiner wollen wir auch eine Auswahl von $k \leq n$ Sehnen als zulässig bezeichnen, wenn sie auf wenigstens eine Weise zu einer zulässigen Sehnenauswahl von n Sehnen vervollständigt werden kann. Hierbei ist im Folgenden vor allem der Sonderfall $k = 1$ sehr wichtig.

a) Wir machen zunächst eine „Grobunterteilung“ nach den Möglichkeiten, von dem festgehaltenen Punkt P_1 eine zulässige Sehne zu ziehen, die also dann nach Obigem auf mindestens eine Weise zu einer zulässigen Sehnenauswahl vervollständigt werden kann.

• Verbindet man P_1 mit einem seiner beiden benachbarten Punkte P_2 oder P_6, so hat man für die restlichen 4 Punkte dann jeweils noch 2 Möglichkeiten der Vervollständigung zu einer zulässigen Sehnenauswahl.

• Verbindet man P_1 mit dem Punkt P_4, so sind die restlichen Sehnen für eine zulässige Auswahl dadurch wie folgt festgelegt: P_2 muss mit P_3 und P_5 mit P_6 verbunden werden, d. h., man hat hier nur genau eine Möglichkeit.

• Verbindet man P_1 mit einem der anderen Punkte P_3 oder P_5, so gibt es dann für P_2 bzw. P_6 keine zulässige „Paarung“ zu einem noch freien Punkt mittels einer Sehne, diese Verbindungen sind also dann Beispiele für nicht zulässige Sehnen.

Die Gesamtzahl A_3 der Möglichkeiten in a) für einen zulässige Sehnenauswahl beträgt somit 5.

b) Für den allgemeinen Fall müssen wir folgende Frage beantworten: Wann genau ist einen Sehne von P_1 zu einem anderen Punkt P_k, $k = 2,3,\dots,2n$ in obigem Sinne zulässig? Wenn wir voraussetzen, was sich auch induktiv als gültig erweist, dass alle $A_k > 0$ sind für $k = 0,1,\dots,n-1$ (wobei wir hier noch aus Gründen der Kompatibilität $A_0 := 1$ setzen), dann ist die Antwort überraschend einfach: Es genügt einfach zu fordern, dass zwischen P_1 und P_k, sowie auch zwischen P_k und P_1 im Sinne unserer zyklischen Orientierung, jeweils eine gerade Anzahl von Punkten liegen, da es dann für diese beiden Teilmengen von Punkten nach Voraussetzung jeweils für sich betrachtet eine zulässige Sehnenauswahl gibt.

Damit ist nun auch klar eine induktive Berechnungsmöglichkeit für A_n für $n > 0$ vorgegeben, nämlich:

$$A_n = \sum_{k=0}^{n-1} A_k A_{n-k-1} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

Beispielsweise erhält man so:

- $A_1 = A_0 A_0 = 1 \cdot 1 = 1$.
- $A_2 = A_0 A_1 + A_1 A_0 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2$.
- $A_3 = A_0 A_2 + A_1 A_1 + A_2 A_1 = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 5$.
- $A_4 = A_0 A_3 + A_1 A_2 + A_2 A_1 + A_3 A_0 = 1 \cdot 5 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 14$

womit sich nun auch der letzte noch ausstehende Punkt c) sehr einfach wie folgt beantworten lässt:

c) $A_5 = A_0 A_4 + A_1 A_3 + A_2 A_2 + A_3 A_1 + A_4 A_0 = 1 \cdot 14 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 2 + 5 \cdot 1 + 14 \cdot 1 = 42$.

Aufgabe 301223:
Man beweise, dass für alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$ die folgende Ungleichung (1) gilt:

$$\frac{(2n)!}{(n!)^2} > \frac{4^n}{n+1} \tag{1}$$

Hinweis: Für jede natürliche Zahl $q \geq 2$ bezeichnet $q!$ wie üblich das Produkt aller derjenigen natürlichen Zahlen i, für die $1 \leq i \leq q$ gilt.

Lösung von weird:
Wir betrachten dazu die zwei Folgen

$$a_n := \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \quad \text{bzw.} \quad b_n := \frac{1}{n+1} \quad (n \in \mathbb{N})$$

wobei die zu beweisende Behauptung äquivalent ist zu

$$\forall n \geq 2: \quad a_n > b_n$$

Nun gilt aber für $n \geq 1$, dass

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{4(n+1)^2} = \frac{2n+1}{2n+2} = 1 - \frac{1}{2n+2} > 1 - \frac{1}{n+2} = \frac{n+1}{n+2} = \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

d. h., es gilt zwar noch $a_0 = b_0 = 1$ und $a_1 = b_1 = \frac{1}{2}$, aber die Folge (a_n) wächst danach durchwegs stärker als die Folge (b_n), was obige Behauptung somit beweist.

III. Runde 3

Aufgabe 021133:
Auf wieviel verschiedene Weisen lässt sich die Zahl 99 als Summe dreier voneinander verschiedener Primzahlen darstellen?
(Zwei Fälle gelten als gleich, wenn die gleichen Summanden lediglich in verschiedener Reihenfolge auftreten.)

Lösung von Steffen Weber:
Folgende geordnete Paare von Primzahlen a, b erfüllen die Gleichung $a + b = 99 - c$ für ein gegebenes $c > b > a$, $c > 33$:

c	$99-c$	(a,b) mit $a+b=99-c$	(a,b) mit $c>b>a$	Anzahl
97	2	$\varnothing$	$\varnothing$	0
89	10	(3,7),(5,5)	(3,7)	1
83	16	(3,13),(5,11)	(3,13),(5,11)	2
79	20	(3,17),(7,13)	(3,17),(7,13)	2
73	26	(3,23),(7,19),(13,13)	(3,23),(7,19)	2
71	28	(5,23),(11,17)	(5,23),(11,17)	2
67	32	(3,29),(13,19)	(3,29),(13,19)	2
61	38	(7,31),(19,19)	(7,31)	1
59	40	(3,37),(11,29),(17,23)	(3,37),(11,29),(17,23)	3
53	46	(3,43),(5,41),(17,29),(23,23)	(3,43),(5,41),(17,29)	3
47	52	(5,47),(11,41),(23,29)	(11,41),(23,29)	2
43	56	(3,53),(13,43),(19,37)	(19,37)	1
41	58	(5,53),(11,47),(17,41),(29,29)	$\varnothing$	0
37	62	(3,59),(19,43)	$\varnothing$	0

Für $c \leq 33$ ist $a+b = 99-c \geq 66$, d. h. $b > 33 \geq c$ wegen $a < b$, also würde dann nicht $c > b$ gelten und eventuelle Tripel (a,b,c) könnten umgeordent werden, so dass $c > b > a$ gilt.
Also lässt sich die 99 auf $1+2+2+2+2+2+1+3+3+2+1 = 21$ verschiedene Weisen als Summe von drei verschiedenen Primzahlen darstellen.

Aufgabe 021136:
In einer Ebene liegen ein Viereck und ein Fünfeck so, dass keiner ihrer Eckpunkte auf irgendeiner Seite der anderen Figur liegt.
Welches ist die größtmögliche Anzahl der Schnittpunkte der Seiten beider Vielecke?
Die Vielecke brauchen nicht konvex zu sein.

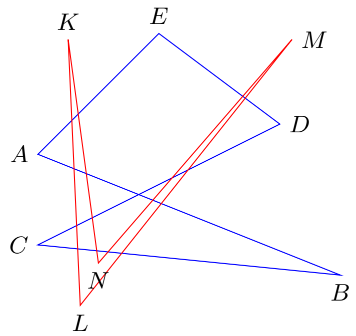
Lösung von Manfred Worel:
Ein ebenes allgemeines Fünfeck ist laut Definition eine geometrische Figur von fünf paarweise voneinander verschiedenen Punkten A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 der gleichen Ebene, von denen keine drei aufeinanderfolgende auf derselben Geraden liegen, die zusammen mit den Strecken A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5, A_5A_1 das Fünfeck bilden.
Zunächst bestimmen wir unter Berücksichtigung der Bedingungen aus der Aufgabenstellung (Fünfeck ist nicht unbedingt konvex, Eckpunkte des Fünfecks liegen nicht auf irgendeiner Seite des Vierecks) die maximale Anzahl der Schnittpunkte einer Geraden g mit den Seiten des Fünfeck.
Die Gerade g teile die Ebene ε in zwei Halbebenen ε_1 und ε_2. O. B. d. A. wird angenommen: $A_1 \in \varepsilon_1, A_1 \notin g$.
Aus der Definition und den Bedingungen der Aufgabenstellung folgt dann:

A_1A_2 hat nur dann einen gemeinsamen Schnittpunkt mit g, wenn gilt: $A_2 \in \varepsilon_2, A_2 \notin g$
A_2A_3 hat nur dann einen gemeinsamen Schnittpunkt mit g, wenn gilt: $A_3 \in \varepsilon_1, A_3 \notin g$
A_3A_4 hat nur dann einen gemeinsamen Schnittpunkt mit g, wenn gilt: $A_4 \in \varepsilon_2, A_4 \notin g$
A_4A_5 hat nur dann einen gemeinsamen Schnittpunkt mit g, wenn gilt: $A_5 \in \varepsilon_1, A_5 \notin g$

Die Strecke A_5A_1 kann mit der Geraden g keinen Schnittpunkt haben, da A_1 und A_5 in der gleichen Halbebene $\varepsilon - 1$ liegen.

Damit ist bewiesen, dass eine Gerade und somit auch eine Seite eines Vierecks maximal vier Schnittpunkte mit den Seiten eines Fünfeckes haben kann. Hieraus folgt nun wiederum, das die größtmögliche Anzahl der Schnittpunkte der Seiten beider Vielecke $4 \cdot 4 = 16$ sein kann.

Es genügt nun an einem Beispiel zu zeigen, dass 16 Schnittpunkte unter den Bedingungen der Aufgabenstellung existieren wie im Bild angegeben.



Es seien $ABCDE$ ein konkaves Fünfeck und $KLMN$ ein konkaves Viereck.
Bemerkung: Die Seiten eines ebenen n-Eck haben mit einer Geraden g maximal $n-1$ gemeinsame Schnittpunkte bei ungeradem n und n gemeinsame Schnittpunkte bei geradem n.

Aufgabe 111236B:
50 weiße und 50 schwarze Kugeln sind so in zwei äußerlich nicht unterscheidbare Urnen zu verteilen, dass keine Urne leer bleibt und alle Kugeln verwendet werden.
Wie ist die Aufteilung der Kugeln auf die beiden Urnen vorzunehmen, wenn die Wahrscheinlichkeit, beim (blindlings erfolgenden) einmaligen Wählen einer der beiden Urnen und Ziehen einer Kugel aus ihr eine weiße Kugel zu ergreifen, so groß wie möglich ausfallen soll?

Hinweise:
1. In der klassischen Wahrscheinlichkeitsrechnung wird die Wahrscheinlichkeit p eines Ereignisses als Quotient aus der Anzahl g der für dieses Ereignis „günstigen“ Fälle und der Gesamtzahl m aller möglichen Fälle definiert, also $p = \frac{g}{m}$ gesetzt.
2. Somit ist die Wahrscheinlichkeit dafür, aus einer Urne, die insgesamt u Kugeln und darunter w weiße enthält, (blindlings) eine weiße Kugel zu ziehen, als $p = \frac{w}{u}$ u anzusetzen.
3. Sind zwei Urnen vorhanden, bei denen die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer weißen Kugel p_1 bzw. p_2 betragen, so ergibt sich die Wahrscheinlichkeit für das zusammengesetzte Ereignis „Auswahl einer der beiden Urnen und Ziehen einer weißen Kugel aus der gewählten Urne“ zu $p = \frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{2}p_2$.

Lösung von StrgAltEntf:
w und s seien die Anzahlen der weißen bzw. schwarzen Kugeln, die in Urne 1 gelegt werden. Nach Voraussetzung ist dann $(w,s) \neq (0,0)$ und $(w,s) \neq (50,50)$. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine aus Urne 1 bzw. Urne 2 gezogene Kugel weiß ist, beträgt $p_1(w,s) = \frac{w}{w+s}$ bzw. $p_2(w,s) = \frac{50-w}{100-w-s}$.

Die Gesamtwahrscheinlichkeit, eine weiße Kugel zu ziehen, ist also $p(w,s) = \frac{1}{2}(p_1(w,s)+p_2(w,s))$. Gesucht sind w und s, sodass $p(w,s)$ maximal wird.
Für $w = s$ gilt $p(w,s) = \frac{1}{2}$. Später werden wir sehen, dass dies nicht der gesuchte Maximalwert ist. Sei nun vorerst $w \neq s$.

Da nicht in beiden Urnen mehr schwarze als weiße Kugeln sein können, wird ohne Einschränkung angenommen, dass in Urne 1 mehr weiße als schwarze Urnen sind, also dass $s < w$ gilt.
Einfache algebraische Umformungen zeigen dann:
Für $0 < s < w \leq 50$ gilt $p_1(w-1,s-1) > p_1(w,s)$ und $p_2(w-1,s-1) > p_2(w,s)$.

Somit kann das Maximum von $p(w,s)$ nicht für $0 < s < w \leq 50$ angenommen werden, da $p(w-1,s-1) > p(w,s)$.
Das Maximum von $p(w,s)$ wird also für $s = 0$ (und $w > 0$) angenommen.

Es gilt $p(w,0) = \frac{1}{2}(1 + \frac{50-w}{100-w}) = 1 - \frac{25}{100-w}$. Dies wird für $w = 1$ maximal, und dann ist $p(1,0) = \frac{74}{99}$.

Wegen $\frac{74}{99} > \frac{1}{2}$ ist also $\frac{74}{99}$ die größtmögliche erreichbare Wahrscheinlichkeit, eine weiße Kugel zu ziehen. Diese Wahrscheinlichkeit wird erreicht, wenn in Urne 1 eine weiße und keine schwarze Kugel (oder 49 weiße und 50 schwarze Kugeln gelegt) werden.

Aufgabe 121236B:
Ist n eine natürliche Zahl, die größer als 1 ist, so seien auf einer Strecke AB Punkte $P_1, P_2, P_3, ..., P_{2n-1}$ in dieser Reihenfolge so gelegen, dass sie die Strecke AB in $2n$ Teile gleicher Länge zerlegen.
a) Man gebe (als Funktion von n) die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass zwei aus den Punkten $P_1, P_2, P_3, ..., P_{2n-1}$ ausgewählte Punkte P_k, P_m mit $0 < k < m < 2n$ die Strecke AB derart zerlegen, dass sich aus den drei Teilstrecken AP_k, P_kP_m, P_mB ein Dreieck konstruieren lässt.
b) Man untersuche, ob diese Wahrscheinlichkeit für $n \to \infty$ gegen einen Grenzwert konvergiert, und ermittle, wenn dies der Fall ist, diesen Grenzwert.

Anmerkung: Die in a) gesuchte Wahrscheinlichkeit ist folgendermaßen definiert: Jede Auswahl zweier Punkte P_k, P_m mit $0 < k < m < 2n$ sei als ein „Fall“ bezeichnet.
Ein „Fall“ heiße ein „günstiger Fall“, wenn P_k und P_m so gewählt sind, dass sich aus den Strecken AP_k, P_kP_m und P_mB ein Dreieck bilden lässt.
Ist z die Anzahl aller möglichen „Fälle“ und z_1 die Anzahl aller „günstigen Fälle“, so wird die genannte Wahrscheinlichkeit als der Quotient $\frac{z_1}{z}$ definiert.

Lösung von cyrix:
a) O. B. d. A. habe die Strecke AB die Länge $2n$, sodass die drei zu betrachtenden Strecken AP_k, P_kP_m und P_mB die Längen k, $m-k$ bzw. $2n-m$ besitzen. Aus diesen Strecken lässt sich genau dann ein Dreieck konstruieren, wenn die drei Dreiecksungleichungen erfüllt sind:

Die erste Dreiecksungleichung $|AP_k| + |P_kP_m| > |P_mB|$ ist also äquivalent zu $k + (m-k) > 2n - m$ bzw. $2m > 2n$, also $m > n$.
Die zweite Dreiecksungleichung $|P_kP_m| + |P_mB| > |AP_k|$ ist äquivalent zu $(m-k) + (2n-m) > k$ bzw. $2n > 2k$, also $n > k$.
Die dritte Dreiecksungleichung $|AP_k| + |P_mB| > |P_kP_m|$ ist äquivalent zu $k + (2n-m) > m - k$ bzw. $2m < 2n + 2k$, also $m < n + k$.

Damit gibt es für jedes $1 \leq k \leq n-1$ also jeweils genau die $k-1$ Möglichkeiten für m mit $n+1 \leq m \leq n+k-1$, sodass sich ein Dreieck aus den drei entstehenden Teilstrecken konstruieren lässt. Es gibt also

$$\sum_{k=1}^{n-1}(k-1) = \sum_{k=0}^{n-2} k = \frac{(n-2)(n-1)}{2}$$

günstige Auswahlen von k und m, dagegen aber $\binom{2n-1}{2} = \frac{(2n-1)(2n-2)}{2}$ gleich mögliche, sodass sich eine Wahrscheinlichkeit von

$$P = \frac{(n-2)(n-1)}{(2n-1)(2n-2)} = \frac{n-2}{2(2n-1)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4n-8}{4n-2} = \frac{1}{4} \cdot \left(1 - \frac{6}{4n-2}\right)$$

ergibt.

b) Offensichtlich geht für $n \to \infty$ der Bruch $\frac{6}{4n-2}$ gegen 0, sodass $\lim_{n\to\infty} P = \frac{1}{4}$ folgt.

Aufgabe 131236B:
M sei die Menge aller Punkte $P(x, y)$ eines ebenen rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystems, wobei x, y ganzrationale Zahlen seien, für die $0 \leq x \leq 4$ und $0 \leq y \leq 4$ gilt.

Man ermittle die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei beliebiger Auswahl zweier verschiedener Punkte aus M der Abstand dieser beiden Punkte eine ganzrationale Maßzahl besitzt (Maßeinheit sei die Einheit des Koordinatensystems).

Hinweis: Wenn n die Anzahl der verschiedenen Auswahlmöglichkeiten zweier Punkte und m die Anzahl derjenigen Auswahlmöglichkeiten ist, bei denen der Abstand eine ganzrationale Maßzahl besitzt, so nennt man den Quotienten $\frac{m}{n}$ die zu ermittelnde Wahrscheinlichkeit. Dabei heißen zwei Auswahlmöglichkeiten genau dann verschieden, wenn die bei ihnen ausgewählten (aus je zwei Punkten bestehenden) Mengen verschieden sind.

Lösung von weird:
Es gibt 25 Punkte und daher insgesamt

$$n = \frac{25 \cdot 24}{2} = 300$$

Auswahlmöglichkeiten für die (ungeordneten) Punktepaare. Klarerweise ist der Abstand für so ein Punktpaar jedenfalls dann ganzrational, wenn für die beiden Punkte eine der beiden Koordinaten übereinstimmt, was dann also in

$$100 \left(= 2 \cdot 5 \cdot \binom{5}{4} \right)$$

Fällen zutrifft. Dazu kommen dann noch alle 8 Punktepaare $\{(x_1,y_1),(x_2,y_2)\}$, für welche gilt

$$\{|x_1 - x2|,|y_1 - y_2|\} = \{3,4\}$$

da für sie der Abstand 5 $= (\sqrt{3^2 + 4^2})$ beträgt, also dann ebenfalls ganzrational ist. Es gilt somit $m = 108$ und

$$\frac{m}{n} = \frac{108}{300} = \frac{9}{25} = 0.36$$

für die gesuchte Wahrscheinlichkeit hier.

Aufgabe 141231:
In die 64 Felder eines Schachbretts sind die Zahlen 1, 2, ..., 64 so eingetragen, dass in der ersten waagerechten Reihe von links nach rechts die Zahlen 1, 2, ..., 8, in der zweiten waagerechten Reihe von links nach rechts die Zahlen 9, 10, ..., 16 usw. in dieser Reihenfolge stehen.
Jemand soll nun acht Türme so auf Felder des Schachbretts stellen, dass keine zwei von ihnen einander schlagen können.
Danach soll er die Summe S der Zahlen bilden, die auf den von den Türmen besetzten Feldern stehen.
Es sind alle dabei möglichen Werte von S anzugeben.
Anmerkung:
Zwei Türme können einander genau dann schlagen, wenn sie auf einer gemeinsamen waagerechten oder senkrechten Felderreihe stehen.

Lösung von weird:
Geht man von der fertigen Turmaufstellung am Ende aus, so muss dann in jeder Reihe genau einer der 8 Türme stehen und gleiches gilt auch für die Spalten. Die Nummern der aufgestellten Türme sind daher aufsteigend geordnet von der Form

$$8(k-1) + s_k,\ k = 1,2,...,8$$

wobei hier die Spaltennummern $s_1,s_2,...,s_8$ die Bedingung

$$\{s_1,s_2,...,s_8\} = \{1,2,...,8\}$$

erfüllen müssen, welche zunächst bei 8 Türmen klarerweise notwendig, aber dann auch hinreichend dafür ist, dass sich keine zwei der Türme gegenseitig schlagen können. Daraus folgt aber wegen der Kommutativität der Addition sofort

$$s_1 + s_2 + ... + s_8 = 1 + 2 + \ldots + 8 = \frac{8 \cdot 9}{2} = 36$$

und somit

$$S=\sum_{k=1}^{8}(8(k-1)+s_k)=9\sum_{k=1}^{8}k-8\cdot 8=9\cdot 36-64=260$$

d. h., S hat unabhängig von der Aufstellung der Türme, sofern diese nur den Bedingungen der Aufgabe hier genügt, stets den gleichen Wert 260.

Aufgabe 141236A:
Ein in einem industriellen Prozess eingebauter Messkomplex M übermittelt an eine Übertragungseinheit A_1 genau eins der beiden Signale S_1 oder S_2, das dann von A_1 zu einer Übertragungseinheit A_2, von A_2 zu einer Übertragungseinheit A_3 und von A_3 zu einem Elektronenrechner R übermittelt wird.
Jede Übertragungseinheit A_i $(i=1,2,3)$ kann genau die Signale S_1 oder S_2 übermitteln. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass A_i statt des jeweils empfangenen Signals gerade das andere weitervermittelt, betrage 0,01.
Es sei nun bekannt, dass am Ende eines solchen Ablaufes durch A_3 in den Rechner R das Signal S_1 übertragen wurde.
Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit dafür, dass M zu Beginn dieses Ablaufes an A_1 ebenfalls S_1 übermittelt hatte?
Hinweis:
Wenn sich unter den Voraussetzungen V in einer großen Anzahl n von Fällen insgesamt g solche befinden, bei denen ein Ereignis E eintritt bzw. eingetreten ist, so heißt die Zahl $p=\frac{g}{n}$ die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten (bzw. Eingetretensein) von E unter den Voraussetzungen V.
Zur Lösung können außerdem folgende Sätze verwendet werden.
a) Additionsgesetz der Wahrscheinlichkeitsrechnung für unabhängige Ereignisse: Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von zwei einander ausschließenden Ereignissen E_1 und E_2 eins von beiden eintritt, ist gleich der Summe p_1+p_2 der Wahrscheinlichkeit p_1 für das Eintreten von E_1 und der Wahrscheinlichkeit p_2 für das Eintreten von E_2.
b) Multiplikationsgesetz der Wahrscheinlichkeitsrechnung: Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Ereignis E und ein Ereignis F eintreten, ist gleich dem Produkt $p\cdot q$ der Wahrscheinlichkeit p für das Eintreten von E und der Wahrscheinlichkeit q dafür, dass unter der Voraussetzung von E das Ereignis F eintritt.

Lösung von cyrix:
Wir gehen davon aus, dass die Ereignisse einer fehlerhaften Weitergabe des empfangenen Signals für die drei Übertragungseinheiten stochastisch unabhängig voneinander sind.

Das Ausgangssignal von M wird genau dann genauso von R empfangen, wenn entweder keine der Übertragungseinheiten eine fehlerhafte Übertragung des jeweils empfangenen Signals vornimmt, oder aber genau zwei.

Der erste Fall tritt mit einer Wahrscheinlichkeit von $(1-0{,}01)^3=0{,}99^3$ auf.
Für den zweiten Fall gibt es genau drei Möglichkeiten, die beiden fehlerhaft sendenden Übertragungseinheiten auszuwählen und für jede dieser Möglichkeiten dann eine entsprechende Übertragungswahrscheinlichkeit von $0{,}99\cdot 0{,}01^2$, sodass sich eine Gesamtwahrscheinlichkeit von

$$P=\frac{99^3+3\cdot 99\cdot 1^2}{100^3}=\frac{99\cdot(99^2+3)}{10^6}=\frac{99\cdot 9804}{10^6}=\frac{970596}{10^6}=0{,}970596=97{,}0596\%.$$

Aufgabe 151236A:
Gegeben seien n Punkte einer Ebene $(n>0)$, von denen keine drei auf derselben Geraden liegen.
Die n Punkte sollen durch Strecken so miteinander verbunden werden, dass es keine drei Punkte gibt,

von denen jeder mit jedem der anderen beiden verbunden ist.
Man zeige, dass sich unter diesen Bedingungen für die Anzahl Z_v der Verbindungsstrecken gilt:

$$Z_v \leq \left[\frac{n^2}{4}\right]$$

Man zeige ferner, dass sich unter Beachtung der Bedingungen $\left[\frac{n^2}{4}\right]$ Verbindungsstrecken finden lassen.
Anmerkung: Mit $[x]$ sei die größte ganze Zahl bezeichnet, die nicht größer als x ist.

Lösung von Kornkreis:
Der Einfachheit wegen zählen wir die Verbindungsstrecken doppelt, indem Verbindungen $P_1 - P_2$ und $P_2 - P_1$ als verschiedene Verbindungen gezählt werden. Die Behauptung der Aufgabenstellung wird damit zu $Z \leq \frac{n^2}{2}$ für gerade n, und $Z \leq \frac{n^2-1}{2}$ für ungerade n; kurz also $Z \leq [\frac{n^2}{2}]$ für alle n.

Wir betrachten eine Konfiguration gemäß der Aufgabenstellung und einen Punkt P_1 mit der höchsten Anzahl a an Punkten, mit denen er verbunden ist, bezeichne diese mit $P_2,...,P_{a+1}$. Zwischen keinem der Punkte, mit denen P_1 verbunden ist, kann es eine Verbindungslinie geben (da sonst ein Dreieck entstünde). Damit ist jeder von $P_2,...,P_{a+1}$ mit maximal $n - a$ Punkten verbunden.

Betrachte nun die übrigen $n-a-1$ Punkte. Jeder von ihnen ist mit maximal a Punkten verbunden (wegen der Maximalität von a). Insgesamt haben wir also höchstens $Z = a + a(n-a) + (n-a-1)a = 2a(n-a)$ Verbindungen, wobei a nur ganzzahlige Werte von 0 bis $n-1$ annehmen kann. Man sieht leicht, dass Z maximal ist, wenn der Betrag der Differenz von a und $n-a$, d. h. $|n-2a|$, kleinstmöglich ist, und dies ist der Fall für $a = [\frac{n}{2}]$. Das liefert $Z \leq 2[\frac{n}{2}](n - [\frac{n}{2}])$.
Für gerade n ist dies $Z \leq \frac{n^2}{2}$ und für ungerade n ist es $Z \leq 2\frac{n-1}{2}(n - \frac{n-1}{2}) = \frac{(n-1)(n+1)}{2} = \frac{n^2-1}{2}$, was die Behauptung zeigt.

Gleichheit wird für folgende Konfiguration angenommen:
Wähle $a = [\frac{n}{2}]$ und verbinde P_1 mit $P_2,...,P_{a+1}$. Verbinde nun jeden von $P_2,...,P_{a+1}$ mit jedem der übrigen Punkten $P_{a+2},...,P_n$. Das ergibt wie oben $2a(n-a)$ Verbindungen, was Gleichheit in der Ungleichung für Z entspricht.
Bei dieser Konfiguration entsteht kein Dreieck, da es sowohl zwischen keinen zwei der Punkte $P_2,...,P_{a+1}$ als auch zwischen keinen zwei der Punkte $P_{a+2},...,P_n$ eine Verbindungslinie gibt, und P_1 nur mit den Punkten $P_2,...,P_{a+1}$ verbunden ist. Damit ist die Aufgabe gelöst.

Aufgabe 181233:
Es ist zu untersuchen, ob es in einer Menge M von 22222 Elementen 50 Teilmengen M_i $(i = 1, 2, ..., 50)$ gibt mit den folgenden Eigenschaften:
(1) Jedes Element m von M ist Element mindestens einer der Mengen M_i.
(2) Jede der Mengen M_i $(i = 1, 2, ..., 50)$ enthält genau 1111 Elemente.
(3) Für je zwei der Mengen M_i, M_j $(i \neq j)$ gilt: Der Durchschnitt von M_i und M_j enthält genau 22 Elemente.

Lösung von weird:
Die Angaben der Aufgabe führen sofort auf den Widerspruch

$$22222 = |M| = |\bigcup_{i=1}^{50} M_i| \geq \sum_{1 \leq i \leq 50} |M_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq 50} |M_i \cap M_j| = 50 \cdot 1111 - \frac{50 \cdot 49}{2} \cdot 22 = 28600$$

was zeigt, dass die Bedingungen (1)-(3) zusammen nicht erfüllbar sind.

Aufgabe 191231:
Es seien n und m natürliche Zahlen mit $n \geq 1$, $m \geq 1$; N sei die Menge der natürlichen Zahlen von 1 bis n und M die Menge der natürlichen Zahlen von 1 bis m.
Man ermittle die Anzahl aller derjenigen Teilmengen von N, die gemeinsame Elemente mit M haben.

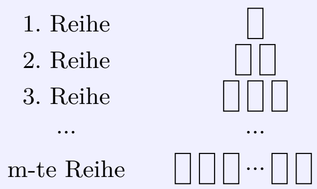
Lösung von weird:
Eine Teilmenge von $N = \{1,2,...,n\}$ hat offensichtlich genau dann keine gemeinsamen Elemente mit $M = \{1,2,...,m\}$, wenn sie auch Teilmenge von $M \setminus N$ ist.
Indem man also deren Anzahl von der Gesamtzahl der Teilmengen von N abzieht, ergibt sich dann also für die fragliche Anzahl $A_{m,n}$ aller derjenigen Teilmengen von N, welche gemeinsame Elemente mit M haben, zu

$$A_{m,n} = \begin{cases} 2^n - 1, & \text{falls } n \leq m \\ 2^{n-m}(2^m - 1), & \text{falls } n > m \end{cases}$$

bzw. zusammengefasst

$$A_{m,n} = 2^n - 2^{\max(n-m,0)}$$

Aufgabe 211236A:



Unter einem Stapel von Gegenständen (wie z. B. Konservenbüchsen) sei eine Anordnung wie in der Abbildung verstanden, bei der jeweils für $k = 1, 2, ..., m$ in der k-ten Reihe genau k Gegenstände stehen.
Dabei ist m eine natürliche Zahl, die als Höhe des Stapels bezeichnet werde. (Die Frage der praktischen Herstellbarkeit von Stapeln mit großer Höhe sei in dieser Aufgabe nicht berücksichtigt.)
Untersuchen Sie, ob eine Zahl z mit $1000 \leq z \leq 10000$ so existiert, dass es einen Stapel aus z Gegenständen gibt, der sich in zwei Stapel von untereinander gleicher Höhe umordnen lässt!

Lösung von cyrix:
Es sei m die Anzahl der Reihen der beiden kleinen Stapel und $n > m$ die des großen. Dann gilt $z = 2 \cdot \frac{m(m+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$ bzw. nach Multiplikation mit 8 und Addition von 2: $2 \cdot (4m^2 + 4m + 1) = 4n^2 + 4n + 1 + 1$ bzw. nach der Substitution $y := 2m + 1$ und $x := 2n + 1$ die Pellsche Gleichung $x^2 - 2y^2 = -1$.

Eine Lösung dieser Gleichung ist $(x_1,y_1) = (1,1)$, sodass mit

$$-1 = x_1^2 - 2y_1^2 = (x_1 + \sqrt{2} \cdot y_1) \cdot (x_1 - \sqrt{2} \cdot y_1)$$

auch für jede ungerade natürliche Zahl n auch

$$-1 = (-1)^n = (x_1 + \sqrt{2} \cdot y_1)^n \cdot (x_1 - \sqrt{2} \cdot y_1)^n := (x_n + \sqrt{2} \cdot y_n) \cdot (x_n - \sqrt{2} \cdot y_n)$$

gilt. Dabei ergibt sich

$$x_{n+2} + \sqrt{2} \cdot y_{n+2} = (x_n + \sqrt{2} \cdot y_n) \cdot (x_1 + \sqrt{2} \cdot y_1)^2 = (x_n + \sqrt{2} \cdot y_n) \cdot (1 + 2\sqrt{2} + 2) = 3x_n + 4y_n + \sqrt{2} \cdot (2x_n + 3y_n)$$

also $x_{n+2} = 3x_n + 4y_n$ und $y_{n+2} = 2x_n + 3y_n$.
Wir erhalten also folgende Lösungen

n	x_n	y_n
1	1	1
3	7	5
5	41	29
7	239	169

Aus der letzten Lösung erhalten wir $m = \frac{y-1}{2} = 84$ und $n = \frac{x-1}{2} = 119$. Tatsächlich ist $2 \cdot \frac{84 \cdot 85}{2} = 7140 = z = \frac{119 \cdot 120}{2}$, sodass es einen Stapel aus $z = 7140$ Gegenständen gibt, der sich in zwei Stapel von untereinander gleicher Höhe umordnen lässt.

Aufgabe 211236B:
Man beweise für jede ganze Zahl n mit $n \geq 3$:
Ist A_n die Anzahl aller verschiedenen Darstellungen von n als Summe dreier positiver ganzzahliger Summanden, so gilt

$$\left| A_n - \frac{n^2}{12} \right| < \frac{1}{2}$$

Dabei werden zwei Darstellungen genau dann als verschieden bezeichnet, wenn sich nicht die eine durch Änderung der Reihenfolge der Summanden aus der anderen erhalten lässt.

Lösung von TomTom314:
A_n ist gleich der Anzahl aller geordneter Tripel (a,b,c) mit $1 \leq a \leq b \leq c$ und $a + b + c = n$. Sei B_n die Anzahl geordneter Tripel $(1,b,c)$ mit $1 + b + c = n$.
Durch Abzählen der Tripel $(1,b,c)$ beginnend bei $(1,1,n-2)$ und sukzessive Veränderung der zweiten und dritten Komponente erhalten wir $B_n = \left[\frac{n-1}{2}\right]$. Für ein beliebiges Tripel (a,b,c) ist entweder die erste Komponente 1 oder wir könne diese durch Inkrementierung aus $(a-1,b-1,c-1)$ erzeugen.
Daraus folgt $A_{n+3} = B_{n+3} + A_n$. Insbesondere gilt für $n < 6$: $A_3 = A_4 = 1$ und $A_5 = 2$.

Die zu zeigende Ungleichung ist äquivalent zu $n^2 - 6 < 12A_n < n^2 + 6$, welche für $n < 6$ erfüllt ist. Für $n \geq 3$ gilt induktiv:

$$12A_{n+3} = 12B_{n+3} + 12A_n < 12\left[\frac{(n+3)-1}{2}\right] + n^2 + 6 < 6(n+2) + n^2 = 3 + (n+3)^2 < (n+3)^2 + 6$$

Also ist die rechte Seite der Ungleichung erfüllt. Statt $n^2 - 6 < 12A_n$ zeigen wir die etwas stärkere Ungleichungen $(2k)^2 - 6 < 12A_{2k}$ und $(2k+1)^2 - 3 < 12A_{2k+1}$. Diese ist für A_3,A_4,A_5 erfüllt.

$$12A_{2k+3} = 12B_{2k+3} + 12A_{2k} > 6(2k+2) + (2k)^2 - 6 = (2k+3)^2 - 3$$

$$12A_{2k+4} = 12B_{2k+4} + 12A_{2k+1} > 6(2k+1) + (2k)^2 - 3 = (2k+3)^2 - 6$$

In den beiden Gleichungen haben wir $\left[\frac{(2k+3)-1}{2}\right] = k+1$ und $\left[\frac{(2k+4)-1}{2}\right] = k+1$ verwendet. q. e. d.

Alternativ-Lösung von Kornkreis:
Man erhält genau die verschiedenen Zerlegungen, indem die drei Summanden $a \leq b \leq c$ der Größe nach geordnet werden. Man sieht daraus, dass $a \leq \lfloor n/3 \rfloor$ gelten muss, und für jedes $a \leq \lfloor n/3 \rfloor$ bekommt man die möglichen b und c, indem man $n - 3a$ in zwei Summanden zerlegt, wovon der erste kleiner gleich dem zweiten sein soll. Dafür gibt es $\lceil \frac{n-3a+1}{2} \rceil$ Möglichkeiten. Daraus folgt

$$A_n = \sum_{j=1}^{\lfloor n/3 \rfloor} \left\lceil \frac{n-3j+1}{2} \right\rceil,$$

woraus sich durch Ausrechnen die Behauptung ergibt.

Rechnung:

Es gilt $\lfloor n/3 \rfloor = \frac{n-k}{3}$ mit einem $k \in \{0,1,2\}$. Des Weiteren alterniert $n - 3j + 1$ mit j zwischen geraden und ungeraden Zahlen, sodass $\left\lceil \frac{n-3j+1}{2} \right\rceil$ zwischen $\frac{n-3j+1}{2}$ und $\frac{n-3j+2}{2}$ alterniert.
Dementsprechend gilt, unter Benutzung der kleinen Gauß'schen Summenformel,

$$A_n = \frac{n-k}{3}\frac{n}{2} - \frac{3}{2}\frac{\frac{n-k}{3}\left(\frac{n-k}{3}+1\right)}{2} + z,$$

wobei $z = 1+\frac{1}{2}+1+...+1$ ($\lfloor n/3 \rfloor$ Summanden) gilt, falls n und $\lfloor n/3 \rfloor$ ungerade sind, $z = \frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}+...+1$, falls n und $\lfloor n/3 \rfloor$ gerade, etc.
D. h., wir haben

$$\frac{\lfloor n/3 \rfloor - 1}{2} \cdot 1 + \frac{\lfloor n/3 \rfloor + 1}{2} \cdot \frac{1}{2} \leq z \leq \frac{\lfloor n/3 \rfloor + 1}{2} \cdot 1 + \frac{\lfloor n/3 \rfloor - 1}{2} \cdot \frac{1}{2} \quad \text{also}$$

$$\frac{3}{4}\frac{n-k}{3} - \frac{1}{4} \leq z \leq \frac{3}{4}\frac{n-k}{3} + \frac{1}{4}$$

Demzufolge haben wir

$$A_n = \frac{n^2}{6} - \frac{nk}{6} - \frac{1}{12}(n^2 - 2nk + k^2) - \frac{3}{4}\frac{n-k}{3} + z = \frac{n^2}{12} - \frac{k^2}{12} - \frac{3}{4}\frac{n-k}{3} + z.$$

Für $k = 0$ oder $k = 1$ folgt mit der obigen Abschätzung für z direkt die Behauptung. Für $k = 2$ stellen wir fest, dass nicht n gerade und $\lfloor n/3 \rfloor$ ungerade sein können, sodass sogar $z \geq \frac{3}{4}\frac{n-k}{3}$ und dann die Behauptung folgt.

Aufgabe 221236:
Eine Tür soll mit einer genügend großen Anzahl von Schlössern versehen werden.
Zu jedem Schloss soll eine Sorte passender Schlüssel in genügend großer Anzahl vorhanden sein, wobei jeder Schlüssel zu genau einem Schloss passen soll.
Elf Personen sollen derartige Schlüssel erhalten, aber nicht jede Person für jedes Schloss.
Ein Vorschlag lautet vielmehr, es solle folgendes erreicht werden:
Immer wenn mindestens sechs der elf Personen anwesend sind, befindet sich unter ihren Schlüsseln für jedes Schloss auch ein passender Schlüssel; immer wenn weniger als sechs Personen anwesend sind, haben sie für mindestens ein Schloss keinen passenden Schlüssel.
Ermitteln Sie die kleinste Anzahl von Schlössern sowie eine Schlüsselverteilung (an die elf Personen), mit der dieser Vorschlag realisierbar wäre!

Lösung von weird:
Ein vertrauenswürdiger Dealer wählt dazu eine „große“ Primzahl p und ein Polynom $f(X) \in (\mathbb{Z}/p)[X]$ vom Grad 5, sowie verschiedene 11 „Stützstellen“ $x_1,x_2,\ldots,x_{11} \in \mathbb{Z}/p$.
Die Primzahl p, sowie auch die Stützstellen, dürfen dabei durchaus allen Teilnehmern bekannt sein. Der geheime Schlüssel ist hier einfach der Vertreter der Restklasse von $f(0)$ in $\{0,1,\ldots,p-1\}$.

Jeder der 11 Personen P_i, i=1,2,...,11, bekommt dabei seinen „Teilschlüssel“ in Form des Paares $(x_i,f(x_i))$.
Wenn mindestens 6 der Teilnehmer ihren Teilschlüssel beisteuern, kann dann $f(X)$ und damit dann auch $f(0)$ mit einer der bekannten Interpolationsformeln eindeutig rekonstruiert werden, bei weniger bekannten Teilschlüsseln ist das aufgrund der Vielzahl von Möglichkeiten bei einem ausreichend großem p aber nicht möglich.

Alternativ-Lösung von TomTom314:
Wir bilden aus den 11 Personen alle 6-elementigen Teilmengen, bringen zu jeder Teilmenge ein Schloss an und geben diesen 6 Personen einen Schlüssel dazu. Dann ist die Tür mit 5 Personen nicht aufschließbar, da es zu den 6 abwesenden Personen ein Schloss gibt und somit die 5 Personen dazu keinen Schlüssel haben. Je zwei 6-elementige Teilmengen haben mindestens ein Element in der Schnittmenge. Daher haben 6 Personen zu allen Schlössern einen Schlüssel. Also haben wir eine Lösung mit $\binom{11}{6} = \binom{11}{5}$ Schlössern.

Falls die Tür weniger als $\binom{11}{5}$ Schlösser mit den geforderten Bedingungen hat, gibt es nach dem Schubfachprinzip mindestens ein Schloss, so dass zwei verschiedene Gruppen aus 5 Personen keinen Schlüssel zu diesem Schloss haben. Also haben mindestens 6 Personen zu diesem Schloss keinen Schlüssel. Also kann diese Gruppe aus 6 Personen die Tür nicht öffnen.

Zweite Alternativ-Lösung von Nuramon:
Minimalitätsbeweis
Sei S die Menge der angebrachten Schlösser. Angenommen Person i hat die Schlüssel zu allen Schlössern in der Teilmenge $S_i \subset S$. Sei $\mathcal{F}$ die Menge aller fünfelementigen Teilmengen von $\{1,\dots,11\}$.
Für jedes $\{a,b,c,d,e\} \in \mathcal{F}$ wählen wir ein Element $f(\{a,b,c,d,e\}) \in S \setminus (S_a \cup S_b \cup S_c \cup S_d \cup S_e)$.
Auf diese Weise erhalten wir eine Abbildung $f : \mathcal{F} \to S$.

Wir behaupten, dass f injektiv ist:
Angenommen $F_1,F_2 \in \mathcal{F}$ mit $F_1 \neq F_2$. Dann gibt es $x \in F_2 \setminus F_1$. Sei $F_1 = \{a,b,c,d,e\}$. Da $S_a \cup S_b \cup S_c \cup S_d \cup S_e \cup S_x = S$ gilt, muss $f(F_1) \in S_f$ gelten. Also kann nicht $f(F_2) = f(F_1)$ sein.
Damit folgt, dass $|S| \geq |\mathcal{F}| = \binom{11}{5} = \binom{11}{6}$.

Aufgabe 251236:
Für eine beliebige natürliche Zahl $n \geq 2$ seien $2n$ Punkte $P_1,...,P_{2n}$ im Raum so gelegen, dass es keine Ebene gibt, auf der vier dieser Punkte liegen.
Mit T sei die Menge aller derjenigen Tetraeder bezeichnet, deren vier Eckpunkte der Menge $M = \{P_1,...,P_{2n}\}$ angehören.
Für jede Ebene ε, die keinen Punkt von M enthält, sei t_ε die Anzahl aller derjenigen Tetraeder aus T, die mit ε ein Viereck als Schnittfläche gemeinsam haben.
Ermitteln Sie zu jeder natürlichen Zahl $n \geq 2$ den größtmöglichen Wert, den t_ε annehmen kann!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Für jeweils $2n$ Punkte in der angegebenen Lage und für jede Ebene ε, die keinen Punkt von M enthält, gilt:
Die Ebene ε zerlegt den Raum in zwei Halbräume, und mit einer natürlichen Zahl $k \leq n$ gilt: In einem dieser beiden Halbräume liegt eine Menge M_1 von k Punkten aus M, in dem anderen liegt die aus den übrigen $2n-k$ Punkten bestehende Menge M_2.
Ferner gilt für jedes Tetraeder aus T: Mit einer natürlichen Zahl $h \leq 2$ liegen in einem dieser Halbräume h Eckpunkte des Tetraeders, in dem anderen $4-h$ Eckpunkte des Tetraeders.
Ist $h = 0$, so schneidet ε das Tetraeder nicht; ist $h = 1$, so schneidet ε das Tetraeder in einem Dreieck; ist $h = 2$, so schneidet ε das Tetraeder in einem Viereck.

Somit erhält man genau dann ein Tetraeder aus T, das von ε in einem Viereck geschnitten wird, wenn man als Eckpunktmenge die Vereinigungsmenge aus einer beliebig gewählten zweielementigen Untermenge Z_1 von $M1$ und einer unabhängig hiervon beliebig gewählten zweielementigen Untermenge Z_2 von M_2 nimmt. Dabei führen zwei Auswahlmöglichkeiten für Z_1 und Z_2 genau dann zu demselben Tetraeder, wenn sie sowohl in Z_1 als auch in Z_2 übereinstimmen.

Die Anzahl aller dieser Auswahlmöglichkeiten ist somit die in der Aufgabe erklärte Zahl t_ε. Sie ergibt sich, indem man die Anzahl aller zweielementigen Untermengen von M_1 mit der Anzahl aller zweielementigen Untermengen von M_2 multipliziert, d. h., es gilt

$$\begin{aligned} t_\varepsilon &= \binom{k}{2} \cdot \binom{2n-k}{2} = \frac{k(k-1)}{2} \cdot \frac{(2n-k)(2n-k-1)}{2} \\ &= \frac{1}{4}(n-(n-k))(n-1-(n-k))(n+(n-k))(n-1+(n-k)) \\ &= \frac{1}{4}(n^2-(n-k)^2)((n-1)^2-(n-k)^2) \qquad (1) \end{aligned}$$

Für alle natürlichen Zahlen $k \leq n$ gilt nun $0 \leq n-k \leq n$, also

$$0 \leq n^2 - (n-k)^2 \leq n^2$$
$$(n-1)^2 - (n-k)^2 \leq (n-1)^2 \quad \text{sowie} \quad (n-1)^2 \geq 0$$

Daraus folgt

$$t_\varepsilon \leq \frac{1}{4} n^2 \cdot (n-1)^2 \tag{2}$$

Für $k = n$ ergibt sich aus (1) in (2) das Gleichheitszeichen. Somit ist $\frac{1}{4}n^2(n-1)^2$ der gesuchte größtmögliche Wert von t_ε.

Aufgabe 301233B:
Es seien $D_1, ..., D_n$ Dosen, für deren Größen (Durchmesser) $d_1, ..., d_n$ in geeigneter Maßeinheit

$$d_1 = 2, \quad d_2 = 3, \quad ..., \quad d_n = n+1$$

gelte. Weiter seien $G_1, ..., G_n$ Gegenstände, für deren Größen $g_1, ..., g_n$

$$g_1 = 1, \quad g_2 = 2, \quad ..., \quad g_n = n$$

gelte. Dabei seien die Größen so abgestimmt, dass jeweils gilt:
Genau dann, wenn $g_i \leq d_j$ ist, passt G_i in D_j.
Ermitteln Sie für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ die Anzahl $A(n)$ aller derjenigen Verteilungen der Gegenstände in die Dosen, bei denen in jeder Dose genau ein Gegenstand liegt.
Hinweis: Zwei Verteilungen heißen genau dann verschieden voneinander, wenn mindestens ein Gegenstand bei einer dieser beiden Verteilungen in einer anderen Dose liegt als bei der anderen Verteilung.

Lösung von cyrix:
Zuerst stellt man fest, dass für $n \geq 2$ der Gegenstand G_n in eine der beiden Dosen D_{n-1} oder D_n gelegt werden müssen. In beiden Fällen passen alle anderen Gegenstände in die noch freie der beiden gerade genannten Dosen.

Man erhält also für $n \geq 2$ jede Verteilung mit den Gegenständen G_1 bis G_n auf die Dosen D_1 bis D_n, indem man eine Verteilung der Gegenstände G_1 bis G_{n-1} auf die Dosen D_1 bis D_{n-1} auf eine der beiden folgenden Varianten abändert:

a) Man füge einfach den Gegenstand G_n in der noch leeren Dose D_n hinzu.
b) Man hole den Gegenstand, der momentan in Dose D_{n-1} enthalten ist, aus dieser heraus, lege ihn in die bisher noch leere Dose D_n und lege in die nun wieder leere Dose D_{n-1} den Gegenstand G_n.

Offensichtlich führen beide Varianten zu verschiedenen Verteilungen und je zwei Ausgangsverteilungen der ersten $n-1$ Gegenstände auf die ersten $n-1$ Dosen auch zu verschiedenen Verteilungen, da jeweils mindestens zwei Dosen anders befüllt werden.

Also gilt für jedes $n \geq 1$ die Rekursion $A(n+1) = 2A(n)$. Zusammen mit $A(1) = 1$ folgt $A(n) = 2^{n-1}$.

Aufgabe 331234:
Man ermittle die Anzahl aller derjenigen Paare (x, y) ganzer Zahlen x, y, für die $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1993$ gilt.

Lösung von MontyPythagoras:
Da $x,y \geq 0$, gilt gleichzeitig auch $x,y \leq 1993^2$. Für x und y kommen jeweils ausschließlich die Quadratzahlen 0,1,4,9,16,...,1993^2 in Frage.

Beweis:
Wenn x keine Quadratzahl ist, ist $\sqrt{x}$ irrational. Dann gilt, wenn man die Gleichung der Aufgabenstellung nach y auflöst:

$$y = (1993 - \sqrt{x})^2$$
$$y = 1993^2 + x - 2 \cdot 1993\sqrt{x}$$

Damit wäre y irrational, soll aber ganzzahlig sein, was einen Widerspruch darstellt. Ist also $x = n^2$ eine Quadratzahl mit $0 \leq n \leq 1993$, dann ist $y = (1993 - n)^2$. Somit gibt es 1994 Zahlenpaare, die die Gleichung der Aufgabenstellung erfüllen.

IV. Runde 4

Aufgabe 061245:
Ermitteln Sie zu jeder natürlichen Zahl n die Anzahl $A(n)$ aller ganzzahligen nichtnegativen Lösungen der Gleichung $5x + 2y + z = 10n$.

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:
Zu lösen ist

$$5x + 2y + z = 10n \quad (\star)$$

Betrachten wir die kleinste natürliche Zahl. Sei also $n = 1$. Dann suchen wir also die nichtnegativen Lösungen für $5x + 2y + z = 10 \iff 2y + z = 10 - 5x$.
Offensichtlich kann x also nur die Werte 0,1,2 annehmen. Für $x = 0$ kann z die Werte 10,8,6,...,0 annehmen. Für $x = 1$ kann z die Werte 5,3,1 annehmen und für $x = 2$ kann z nur den Wert 0 annehmen.
Wir erhalten also insgesamt $6 + 3 + 1 = 10$ Lösungen.

Nun setzen wir in $(\star)$ mal $x \mapsto x - 2$. Wir erhalten:

$$5(x-2) + 2y + z = 10n \iff 5x + 2y + z = 10(n+1) \quad (\square)$$

Sei nun $A(n+1)$ die Anzahl der ganzzahligen nichtnegativen Lösungen von $(\square)$. Dann ist $A(n+1) - A(n)$ gleich die Anzahl der ganzzahligen nichtnegativen Lösungen für $x = 0$ und $x = 1$ in $(\square)$.

1. Fall: Sei $x = 0$; $2y + z = 10n + 10$
Es gilt $0 \leq y \leq 5n + 5$ und somit erhalten wir $5n + 6$ Lösungen.
2. Fall: Sei $x = 1$; $5 + 2y + z = 10n + 10 \iff 2y + z = 10n + 5$
Es gilt $0 \leq y \leq 5n + 2$ und somit erhalten wir $5n + 3$ Lösungen.

Es gilt somit $A(n + 1) - A(n) = 10n + 9$ sowie $A(1) = 10$. Rekursiv können wir also $A(n)$ berechnen.

$$(A(n) = 10 + \sum_{k=1}^{n-1}(10k + 9) = 10 + 9(n-1) + 10\frac{(n-1)n}{2} = 5n^2 + 4n + 1$$

Alternativ-Lösung von cyrix:
Offenbar gibt es für jedes $0 \leq x \leq 2n$ und jedes $0 \leq y \leq \frac{10n-5x}{2}$ genau ein $0 \leq z = 10n - 5x - 2y$.
Es ist also die Summe

$$A(n) = \sum_{x=0}^{2n}\left(1 + \left[\frac{10n - 5x}{2}\right]\right) = 2n + 1 + \sum_{x=0}^{2n}\left[\frac{10n - 5x}{2}\right]$$

zu bestimmen.
Für $x = 2n$ erhalten wir in der zweiten Summe den Wert 0. Alle übrigen Summanden erhält man, indem man für x entweder $2k$ oder $2k+1$ einsetzt, wobei k die natürlichen Zahlen von 0 bis $n-1$ durchläuft. Also ist

$$A(n) = 2n + 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\left[\frac{10n - 5 \cdot 2k}{2} \right] + \left[\frac{10n - 5 \cdot (2k+1)}{2} \right] \right) =$$

$$= 2n + 1 + \sum_{k=0}^{n-1} (5(n-k) + 5(n-k) - 3) = 2n + 1 - 3n + 10 \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) =$$

$$= 1 - n + 10 \sum_{\ell=1}^{n} \ell = 1 - n + 10 \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} = 1 - n + 5n^2 + 5n = 5n^2 + 4n + 1$$

Aufgabe 141246A:
Es sei n eine natürliche Zahl mit $n \geq 2$.
Jemand schreibt n Briefe, von denen jeder für genau einen unter n verschiedenen Adressaten vorgesehen ist, und steckt in jeden von n Umschlägen genau einen dieser Briefe, ohne vorher die Adressen auf die Umschläge zu schreiben.
Da er nun nicht mehr weiß, in welchem Umschlag sich welcher Brief befindet, schreibt er willkürlich die n Adressen auf die n Umschläge (auf jeden Umschlag genau eine Adresse).
Man beweise:
Die Wahrscheinlichkeit q_n dafür, dass bei keinem der Adressaten der an ihn gerichtete Umschlag den für ihn vorgesehenen Brief enthält, hat den Wert

$$q_n = (-1)^2 \cdot \frac{1}{2!} + (-1)^3 \cdot \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \cdot \frac{1}{n!}$$

Hinweis: Man bezeichne jede überhaupt mögliche Verteilung der Briefe an die Adressaten (jeder Brief an genau einen der Adressaten) einen „möglichen Fall“.
Unter diesen bezeichne man jede Verteilung, bei der für keinen Adressaten der an ihn gerichtete Umschlag den für ihn vorgesehenen Brief enthält, ein „günstiger Fall“. Die Anzahl aller „möglichen Fälle“ sei a_n genannt, die Anzahl aller „günstigen Fälle“ g_n.
Dann ist die genannte Wahrscheinlichkeit q_n definiert als $q_n = \frac{g_n}{a_n}$.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Anzahl aller Möglichkeiten, n Briefe an n Adressaten zu verteilen, ist $n!$. Durch vollständige Induktion beweisen wir:
Die Anzahl g_n aller günstigen Fälle ist

$$g_n = (-1)^2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n + (-1)^3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n + \cdots + (-1)^{n-1} \cdot n + (-1)^n \qquad (1)$$

I. Für $n = 2$ ist unter allen Möglichkeiten genau eine günstig, also ist $g_2 = 1 = (-1)^2$.
Für $n = 3$ sind unter allen Möglichkeiten

$$(1 \to 1, 2 \to 2, 3 \to 3), \quad (1 \to 1, 2 \to 3, 3 \to 2), \quad (1 \to 2, 2 \to 1, 3 \to 3)$$

$$(1 \to 2, 2 \to 3, 3 \to 1), \quad (1 \to 3, 2 \to 1, 3 \to 2), \quad (1 \to 3, 2 \to 2, 3 \to 1)$$

genau zwei (die vierte und die fünfte) günstig, also gilt: $g_3 = 2(-1)^2 \cdot 3 + (-1)^3$.

II. Für ein $n \geq 4$ sei die Richtigkeit von (1) für alle ν mit $2 \leq \nu < n$ statt n vorausgesetzt, dann folgt:
Dafür, dass Brief 1 nicht an Adressat 2 gelangt, gibt es genau $n-1$ Möglichkeiten. In jeder von ihnen lässt sich die Nummerierung des Paare aus Adressat und zugehörigem Brief so wählen, dass Brief 1 an Adressat 2 gelangt. Nun gibt es genau folgende Möglichkeiten:

a) Brief 2 gelangt an Adressat 1, und die Briefe $3, 4, \ldots, n$ werden so an die Adressaten 3,4, ..., n verteilt, dass kein Brief an den gleich nummerierten Adressaten gelangt. Hierfür gibt es genau g_{n-2} Möglichkeiten.

b) Brief 2 gelangt an einen der Adressaten 3,4, ..., n, der etwa mit k bezeichnet sei, und die Briefe 3,4, ..., n werden so an die von k verschiedenen unter den Adressaten $1, 3,4, \ldots, n$ verteilt, dass kein Brief an der gleich nummerierten Adressaten gelangt.

Das ist gleichbedeutend mit der Forderung:
Man stelle eine neue Zuordnung zwischen den Briefen 2,3,4, ..., n und den Adressaten 1,3,4, ..., n her, nämlich $2 \leftrightarrow 1$, $3 \leftrightarrow 3$, $4 \leftrightarrow 4$, ..., $n \leftrightarrow n$, und fordere nun eine Zustellung der Briefe 2,3,4, ..., n an je genau einen der Adressaten 1,3,4, ..., n, bei der kein Brief an den ihm gemäß der neuen Zuordnung gehörigen Adressaten gelangt. Hierfür gibt es genau g_{n-1} Möglichkeiten.

Damit ergibt sich $g_n = (n-1)(g_{n-2} + g_{n-1})$, nach Induktionsannahme also

$$g_n = (n-1)[(-1)^2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (n-2) + \cdots + (-1)^{n-3} \cdot (n-2) + (-1)^{n-2} + (-1)^2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (n-2)(n-1) + \ldots$$

$$\cdots + (-1)^{n-3} \cdot (n-2)(n-1) + (-1)^{n-2} \cdot (n-1) + (-1)^{n-1}] =$$

$$= (n-1)[(-1)^2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (n-2)n + \cdots + (-1)^{n-3} \cdot (n-2)n + (-1)^{n-2} \cdot n + (-1)^{n-1}] =$$

$$= (-1)^2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (n-2)(n-1)n + \cdots + (-1)^{n-3}(n-2)(n-1)n + (-1)^{n-2}(n-1)n + (-1)^{n-1}n + (-1)^n$$

und damit die Richtigkeit von (1) für n.
Damit ist (1) durch vollständige Induktion bewiesen, und es ergibt sich

$$q_n = \frac{g_n}{n!} = (-1)^2 \cdot \frac{1}{2!} + (-1)^3 \cdot \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \cdot \frac{1}{n!}$$

w. z. b. w.

Aufgabe 151245:
Bekanntlich gilt:
Für jede natürliche Zahl n gilt: Eine Ebene wird durch n Geraden, von denen keine drei durch ein und denselben Punkt laufen und keine zwei parallel sind, in genau $\frac{1}{2}(n^2 + n + 2)$ Teile zerlegt.
Man ermittle für jede natürliche Zahl n die Anzahl der Teile, in die der Raum durch n Ebenen zerlegt wird, von denen keine vier durch ein und denselben Punkt gehen, keine drei zueinander parallele oder zusammenfallende Schnittgeraden besitzen sind und keine zwei zueinander parallel sind.

Lösung von Zeitschrift „Mathematik in der Schule“:
Man A_n ($n = 0,1,2,...$) sei die Anzahl der Teile bezeichnet, in die der Raum durch die n Ebenen (mit den angegebenen Bedingungen) zerlegt wird. Offensichtlich ist $A_0 = 1 \quad (*)$.
Für $n > 0$ seien $E_1, ..., E_n$ Ebenen, die den Bedingungen der Aufgabenstellung genügen. Dann schneidet die Ebene E_n die Ebenen $E_1, ..., E_{n-1}$ in $n-1$ Geraden, von denen keine drei durch ein und denselben Punkt gehen und keine zwei parallel sind.
Diese Geraden zerlegen nun nach der Vorbemerkung die Ebene E_n in $\frac{1}{2}(n^2 - n + 2)$ Teile. Jeder dieser Ebenenteile zerlegt genau einen unter den bereits vorher vorhandenen A_{n-1} Raumteilen in genau zwei Raumteile; alle übrigen (bereits vorher vorhandenen Raumteile) bleiben unverändert. Demnach gilt:

$$A_n = A_{n-1} + \frac{1}{2}(n^2 - n + 2) \qquad (**)$$

für $n = 1,2,...$. Aus (*) und (**) erhält man durch vollständige Induktion:

$$A_n = 1 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(k^2 - k + 2) = 1 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k^2 - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k + n$$

Bekanntlich gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Also folgt:

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{12 + n(n+1)(2n+1) - 3n(n+1) + 12n}{12} \\ &= \frac{12(n+1) + (n+1)(2n^2 + n - 3n)}{12} = \frac{1}{6}(n^3 + 5n + 6) \end{aligned}$$

w. z. b. w.

Aufgabe 151246B:
In der mathematischen Statistik werden häufig Summen der folgenden Form benötigt:

$$M = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n-1}{2k}; \qquad N = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k}; \qquad m = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k}$$

wobei n eine natürliche Zahl mit $n \geq 1$ ist.
a) Man berechne die Summen M, N und m.
b) Es sei f die für alle reellen x durch

$$f(x) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{n} (k-x)^2 \binom{2n}{2k}$$

definierte Funktion.
Man berechne $f(x)$ und weise nach, dass f einen kleinsten Funktionswert besitzt und diesen genau für $x = m$ annimmt.

Lösung von Zeitschrift „Mathematik in der Schule“:
a) 1. Es gilt:

$$M = \binom{2n-1}{0} + \binom{2n-1}{2} + ... + \binom{2n-1}{2n-2}$$

Es sei:

$$M' = \binom{2n-1}{1} + \binom{2n-1}{3} + ... + \binom{2n-1}{2n-1}$$

Dann gilt:

$$M + M' = \binom{2n-1}{0} + \binom{2n-1}{1} + ... + \binom{2n-1}{2n-1} = (1+1)^{2n-1} = 2^{2n-1} \qquad (1)$$

$$M - M' = (1-1)^{2n+1} = 0$$

Daraus folgt:

$$2M = 2^{n-1}, \qquad \text{also} \qquad M = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{2k} = 2^{2n-2} \qquad (2)$$

$$2M' = 2^{2n-1}, \qquad \text{also} \qquad M' = \sum_{k=1}^{n} \binom{2n-1}{2k-1} = 2^{2n-2} \qquad (3)$$

2. Analog wird N berechnet. Mit $N' = \sum\limits_{k=1}^{n} \binom{2n}{2k-1}$ gilt:

$$N + N' = (1+1)^{2n} = 2^{2n} \qquad ; \qquad N - N' = (1-1)^{2n} = 0$$

Daraus folgt:

$$N = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} = 2^{2n-1} \qquad (4) \qquad N' = \sum_{k=1}^{n} \binom{2n}{2k-1} = 2^{2n-1} \qquad (5)$$

3. Es gilt

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k\binom{2n}{2k} &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} 2k\frac{2n(2n-1)\cdot \ldots \cdot (2n-2k+1)}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot 2k}\\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} 2n\frac{(2n-1)\cdot \ldots \cdot (2n-2k+1)}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (2k-1)} = n\sum_{k=1}^{n}\binom{2n-1}{2k-1}\end{aligned}$$

und damit wegen (3)

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{2n}{2k} = n\cdot 2^{2n-2} \qquad (6)$$

Daraus folgt:

$$m = \frac{1}{N}\cdot \sum_{k=0}^{n} k\binom{2n}{2k} = \frac{n\cdot 2^{2n-2}}{2^{2n-1}} = \frac{n}{2} \qquad (7)$$

b) Man erhält:

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{1}{N}\cdot\sum_{k=0}^{n}(k-x)^2\binom{2n}{2k} = \frac{1}{4N}\sum_{k=0}^{n}(2k-2x)^2\binom{2n}{2k}\\ &= \frac{1}{4N}\sum_{k=0}^{n}(4k^2-8kx+4x^2)\binom{2n}{2k}\\ &= \frac{1}{4N}\sum_{k=0}^{n}[2k(2k-1)+2k(1-4x)+4x^2]\binom{2n}{2k}\\ &= \frac{1}{4N}\left[\sum_{k=0}^{n}2k(2k-1)\binom{2n}{2k} + 2(1-4x)\cdot\sum_{k=0}^{n}k\binom{2n}{2k} + 4x^2\cdot\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}\right] \qquad (8)\end{aligned}$$

Nun gilt:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}2k(2k-1)\binom{2n}{2k} &= \sum_{k=1}^{n}2k(2k-1)\frac{2n(2n-1)\cdot \ldots \cdot (2n-2k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 2k}\\ &= \sum_{k=1}^{n}2n(2n-1)\binom{2n-2}{2k-2} = 2n(2n-1)2^{2n-3} \qquad (9)\end{aligned}$$

Aus (9), (6), (4) und (8) folgt weiter

$$f(x) = \frac{1}{4N}[2n(2n-1)2^{2n-3} + 2(1-4x)n\cdot 2^{n-2} + 4x^2\cdot 2^{2n-1}] \qquad (10)$$

und hieraus wegen $N = 2^{2n-1}$, also $4N = 2^{2n+1}$

$$f(x) = \frac{1}{2^{2n+1}}(n^2\cdot 2^{2n-2} - n\cdot 2^{2n-2} + 2n\cdot 2^{2n-2} - nx\cdot 2^{2n+1} + x^2\cdot 2^{2n+1}) =$$

$$= x^2 - nx + \frac{n}{8} + \frac{n^2}{4} = \left(x-\frac{n}{2}\right)^2 + \frac{n}{8} \geq \frac{n}{8}$$

worin das Gleichheitszeichen für $x = \frac{n}{2} = m$ gilt. Daher besitzt f den kleinsten Funktionswert $\frac{n}{8}$ an der Stelle $x = m$.

Aufgabe 161242:
Gegeben sei eine natürliche Zahl $n \geq 1$.
Man ermittle die Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten $2n$ rote, $2n$ grüne und $2n$ schwarze Kugeln so auf zwei Gefäße Q_1 und Q_2 zu verteilen, dass jedes der Gefäße $3n$ Kugeln enthält.
Hinweis:
Zwei Verteilungsmöglichkeiten gelten genau dann als gleich, wenn für jede der drei Farben die Anzahl der in Q_1 enthaltenen Kugeln dieser Farbe bei beiden Verteilungsmöglichkeiten übereinstimmt (und folglich dasselbe auch für Q_2 zutrifft).

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Ordnet man jeder Verteilungsmöglichkeit das Tripel $(x_1, x2, x3)$ zu, wobei x_1, x_2 und x_3 die Anzahlen der roten, grünen und schwarzen Kugeln in Q_1 bezeichnen, so gilt nach Voraussetzung:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3n \qquad ; \qquad 0 \leq x_1, x_2, x_3 \leq 2n \qquad (1)$$

Die gesuchte Anzahl ist gleich der Anzahl aller Tripel ganze Zahlen, die (1) genügen. Ist $x_1 = k$ ($k = 0,1,...,n$), dann ergibt sich aus (1):

$$x_2 + x_3 = 3n - k \qquad ; \qquad 0 \leq x_2, \quad x_3 \leq 2n$$

Wegen $x_3 \leq 2n$ kann x_2 genau eine der Zahlen $n - k$, $n - k + 1$, ..., $2n$ sein. Im Fall $x_1 = k$ ($k = 0,1,..n$) gibt es also genau $n + k - 1$ Möglichkeiten.
Ist $x_1 = n + k$ ($k = 1,2,...,n$), so ergibt sich aus (1):

$$x_2 \neq x_3 = 2n - k \qquad ; \qquad 0 \leq x_2, x_3 \leq 2n$$

Wegen $x_3 \geq 0$ kann x_2 genau eine der Zahlen $0,1,...,2n - k$ annehmen. Im Fall $x_1 = n + k$ ($k = 1,2,...,n$) gibt es also genau $2n - k + 1$ Möglichkeiten.
Wegen $0 \leq x_1 \leq 2n$ gibt es für x_1 keine weiteren Fälle. Für die Anzahl A aller Möglichkeiten erhält man folglich:

$$\begin{aligned} A &= \sum_{k=0}^{n}(n + k + 1) + \sum_{k=1}^{n}(2n - k + 1) \\ &= \frac{(2n + 1)(2n + 2)}{2} - \frac{n(n + 1)}{2} + \frac{2n(2n + 1)}{2} - \frac{n(n + 1)}{2} \\ &= (2n + 1)(n + 1) - n(n + 1) + n(2n + 1) = 3n^2 + 3n + 1 \end{aligned}$$

Die Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten beträgt $3n^2 + 3n + 1$.

Aufgabe 171246B:
a) Gegeben sei eine natürliche Zahl $n \geq 2$. Es sei u der Umkreis eines regelmäßigen $2n$-Ecks $A_0A_1...A_{2n-1}$.
Eine Menge aus drei Ecken A_i, A_j, A_k dieses $2n$-Ecks heiße einseitig, wenn es auf der Kreislinie u einen Halbkreisbogen h einschließlich seiner beiden Eckpunkte gibt, der A_i, A_j und A_k enthält.
Man ermittle die Wahrscheinlichkeit w dafür, dass eine willkürlich gewählte Menge $M = \{A_i, A_j, A_k\}$ aus drei Ecken einseitig ist.
b) Man ermittle den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} w_n$ falls er existiert.
Hinweis:
Ist m_n die Anzahl aller Mengen, die man aus drei Ecken A_i, A_j, A_k des $2n$-Ecks bilden kann, und ist g_n die Anzahl aller einseitigen unter ihnen, so ist die in a) gesuchte Wahrscheinlichkeit definiert als $w_n = \frac{g_n}{m_n}$.

Lösung von StrgAltEntf:
a) B sei die Menge aller einseitigen Dreiecke. Dann ist B die disjunkte Vereinigung der Mengen

$$B_i = \{\{A_i,A_j,A_k\} \mid i < j < k \leq i + n\} \qquad (i = 0,1,...,2n - 1)$$

wobei wir $A_{2n} = A_0, A_{2n+1} = A_1, ..., A_{2n+n-1} = A_{n-1}$ setzen.
Alle Mengen B_i haben dieselbe Anzahl von Elementen; es gilt $|B_i| = \binom{n}{2}$. Folglich ist

$$g_n = |B| = 2n\binom{n}{2} = n^2(n-1)$$

Aus den Ecken $A_0, A_1, ... A_{2n-1}$ lassen sich $m_n = \binom{2n}{3}$ Dreiecke bilden. Somit ist $w_n = \frac{n^2(n-1)}{\binom{2n}{3}} = \frac{3n}{2(2n-1)}$
b) $\lim_{n\to\infty} w_n = \frac{3}{4}$

Aufgabe 191246B:
In einer Dunkelkammer liegen ungeordnet 20 einzelne Handschuhe von gleicher Größe, und zwar

- 5 weiße Handschuhe für die rechte Hand
- 5 weiße Handschuhe für die linke Hand
- 5 schwarze Handschuhe für die rechte Hand
- 5 schwarze Handschuhe für die linke Hand

Zwei Handschuhe gelten genau dann als ein passendes Paar, wenn sie gleiche Farbe haben und der eine von ihnen für die rechte Hand, der andere für die linke Hand ist.
Unter einem Zug sei die Entnahme eines einzelnen Handschuhs verstanden, ohne dass dabei eine Auswahl nach Farbe und Form möglich ist. Ein Spiel von n Zügen bestehe darin, dass man nacheinander n Züge ausführt, die dabei entnommenen Handschuhe sammelt und erst nach diesen n Zügen feststellt, ob sich unter den n entnommenen Handschuhen (mindestens) ein passendes Paar befindet. Genau dann, wenn dies zutrifft, gelte das Spiel als erfolgreich.

a) Ermitteln Sie die kleinste natürliche Zahl n mit der Eigenschaft, dass ein Spiel von n Zügen mit Sicherheit erfolgreich ist!
b) Ermitteln Sie die kleinste natürliche Zahl k mit der Eigenschaft, dass ein Spiel von k Zügen mit größerer Wahrscheinlichkeit als 0,99 erfolgreich ist!

Lösung von weird:
Gemäß Angabe haben wir hier vier Gruppen von je 5 Handschuhen zu folgenden Typen
• WL (=weiß und für linke Hand)
• WR (=weiß und für rechte Hand)
• SL (=schwarz und für linke Hand)
• SR (=schwarz und für rechte Hand)
Bei einer Ziehung von k Handschuhen, d. h., nach k „Zügen“, kommt es genau dann zu einem Erfolg, wenn wenn zwei Handschuhe der Typen WL und WR oder zwei Handschuhe der Typen SL und SR darunter sind. Diese Paarungen müssen aber spätestens nach 11 $(= 5 + 5 + 1)$ Zügen auf jeden Fall auftreten, was dann schon einmal die Frage in a) beantwortet.

Für b) betrachten wir die Wahrscheinlichkeit eines Misserfolgs nach k Zügen, wobei hier das kleinste k zu berechnen ist, für welches diese < 0.01, also dann relativ klein ist. Wir gehen daher im Folgenden davon aus $k > 5$ sein wird, was dann auch durch die Rechnung nachträglich bestätigt wird.

Damit dann ein Misserfolg nach $k \in \{6,7,8,9,10\}$ Zügen eintritt, dürfen für gezogenen Handschuhe natürlich nur einer der 4 Typenkombinationen WL-SL, WL-SR, WR-SL, WR-SR auftreten. Die Wahrscheinlichkeit P_k für einen Misserfolg nach k Zügen beträgt daher

$$P_k = 4\prod_{j=1}^{k} \frac{11-j}{21-j}$$

und speziell für $k = 6$ und $k = 7$ erhält man so die Werte

$$P_6 \approx 0.02167 \quad \text{bzw.} \quad P_7 \approx 0.00619$$

Die Antwort auf die Frage in b) ist somit $k = 7$.

Aufgabe 201242:
In einem Fischgeschäft stehen für die Aufbewahrung lebender Karpfen drei Wasserbehälter zur Verfügung.
Zum Verkaufsbeginn sind in jedem dieser drei Behälter genau 20 Karpfen. Am Verkaufsende sind noch insgesamt 3 Karpfen vorhanden. Die verkauften Karpfen wurden einzeln nacheinander entnommen.
Ein Tausch eines Karpfens von einem Behälter in einen anderen fand nicht statt; neue Karpfen waren während des Verkaufs nicht hinzugekommen.
Berechnen Sie auf 3 Dezimalen nach dem Komma gerundet die Wahrscheinlichkeit dafür, dass am Verkaufsende in jedem der drei Behälter genau ein Karpfen ist!
Hinweis:
Die zu ermittelnde Wahrscheinlichkeit p ist folgendermaßen definiert: Es sei A die Anzahl aller verschiedenen Möglichkeiten für die Reihenfolge der Entnahme von 57 Karpfen aus den drei Behältern.
Ferner sei G die Anzahl aller derjenigen unter diesen Möglichkeiten, bei denen am Verkaufsende in jedem der drei Behälter genau ein Karpfen ist.
Dabei gelten zwei mögliche Reihenfolgen der Entnahme genau dann als gleich, wenn sie für jedes $i = 1, 2, ..., 57$ in der Angabe übereinstimmen, aus welchem Behälter die i-te Entnahme eines Karpfen erfolgte.
Mit diesen Bezeichnungen ist $p = \frac{G}{A}$.

Lösung von Zeitschrift „Mathematik in der Schule“:
Die verschiedenen Möglichkeiten für die Reihenfolge der Entnahme lassen sich eindeutig kennzeichnen durch die verschiedenen 57gliedrigen Folgen $F = (a_1, a_2, ..., a_{57})$, in denen jeweils a_i die Nummer des Behälters angibt, aus dem die i-te Entnahme erfolgt.
In jeder dieser Folgen kommt jede der drei Behälternummern höchstens 20 mal vor. Daher lassen sich alle zu berücksichtigenden Folgen nach der Anzahl von Folgegliedern aus den drei Behältern so in Klassen einteilen, wie die nachstehende Tabelle angibt (Zahlen sind Anzahl der Vorkommens von Elementen des Behälters in der Folge):

Behälter 1 u	Behälter 2 v	Behälter 3 w
20	20	17
20	19	18
20	18	19
20	17	20
19	20	18
19	19	19
19	18	20
18	20	19
18	19	20
17	20	20

Zu 57 verschiedenen Elementen gibt es genau 57! verschiedene Anordnungen dieser Elemente.
Da es im gegebenen Fall gleich ist, welches Element aus einem gewählten Behälter entnommen wird, sind folglich in jeder der oben angeführten zehn Klassen (u, v, w) von Folgen im Sinne der Aufgabe genau diejenigen gleich, die sich nur durch Permutationen der u herausgegriffenen Karpfen aus dem ersten Behälter oder der v Karpfen, aus dem zweiten Behälter oder der w Karpfen aus dem dritten Behälter unterscheiden.
Da alle diese Permutationen voneinander unabhängig sind, ergibt sich folglich die Anzahl $a(u,v,w)$ der verschiedenen Folgen einer Klasse (u,v,w) mit

$$a(u, v, w) = \frac{57!}{u! \cdot v! \cdot w!}$$

Nach der Tabelle gibt es genau drei Klassen, in denen u, v, w in irgendeiner Reihenfolge 17, 20, 20 sind, ferner genau sechs Klassen in denen u, v, w in irgendeiner Reihenfolge 18, 19, 29 sind und genau eine Klasse mit $u = v = w = 19$. Daher gilt:

$$A = \frac{3 \cdot 57!}{17! \cdot 20! \cdot 20!} + \frac{6 \cdot 57!}{18! \cdot 19! \cdot 20!} + \frac{57!}{19! \cdot 19! \cdot 19!}$$

Genau diejenigen Folgen, die der Klasse mit $u = v = w = 19$ angehören, entsprechen den Möglichkeiten, bei denen am Verkaufsende in jedem Behälter genau ein Karpfen ist. Daher gilt:

$$G = \frac{57!}{19! \cdot 19! \cdot 19!}$$

Hieraus ergibt sich

$$A = \frac{57!}{17! \cdot 19! \cdot 19!} \cdot \left(\frac{3}{20 \cdot 20} + \frac{6}{18 \cdot 20} + \frac{1}{18 \cdot 19} \right) = \frac{57!}{17! \cdot 19! \cdot 19!} \cdot \frac{513 + 1140 + 200}{9 \cdot 19 \cdot 20 \cdot 20}$$

$$G = \frac{57!}{17! \cdot 19! \cdot 19!} \cdot \frac{1}{18 \cdot 19} = \frac{57!}{17! \cdot 19! \cdot 19!} \cdot \frac{200}{9 \cdot 19 \cdot 20 \cdot 20}$$

$$p = \frac{G}{A} = \frac{200}{1853} = 0{,}1079...$$

also auf drei Stellen nach dem Komma gerundet $p = 0{,}108$.

Aufgabe 261241:
500 Bonbons sollen unter Verwendung von Umhüllungen passender Größen so zu einem Scherzpaket zusammengepackt werden, dass die folgenden Bedingungen (1), (2) erfüllt sind.
Dabei soll sich (2) auf jede Möglichkeit beziehen, alle Bonbons auszupacken, indem man nach und nach jeweils eine zugängliche Umhüllung öffnet und entfernt (falls mehrere Umhüllungen zugänglich sind, in beliebiger Reihenfolge):
(1) Es gibt genau eine Umhüllung, die das gesamte Paket enthält.
(2) Beim Öffnen dieser und jeder weiteren Umhüllung zeigt sich, dass deren Inhalt entweder aus mindestens drei sämtlich mit Umhüllung versehenen Teilpaketen oder aus genau einem nicht umhüllten Bonbon besteht.
Ermitteln Sie die größtmögliche Anzahl von Umhüllungen, die ein solches Paket aufweisen kann!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Für jede positive ganze Zahl $n \neq 2$ sei ein Paket, das genau n Bonbons enthält und (1), (2) erfüllt, sei „n-Paket“ genannt.
Zu jedem Bonbon eines n-Pakets gibt es eine Umhüllung, die genau dieses Bonbon enthält (denn andernfalls gäbe es, im Widerspruch zu (2), eine Umhüllung, die dieses nicht nochmals umhüllte Bonbon und daneben weitere Teile enthielte).
Die außer diesen n Umhüllungen der einzelnen n Bonbons sonst noch in dem n-Paket vorkommenden Umhüllungen seien „Zusatzhüllen“ genannt.

Durch vollständige Induktion wird nun bewiesen: Die Maximalzahl von Zusatzhüllen eines n-Pakets ist die größte ganze Zahl, die kleiner als $\frac{n}{2}$ ist.

1. Jedes 1-Paket besteht aus genau einem Bonbon mit seiner Umhüllung, hat also keine Zusatzhüllen. Jedes 3-Paket besteht aus genau drei Bonbons mit ihren Umhüllungen und genau einer Zusatzhülle. Für $n = 1$ und $n = 3$ trifft demnach die Behauptung zu.

2. Es sei $k \geq 4$, und es werde als Induktionsannahme vorausgesetzt, dass für alle positiven ganzen $n < k$ mit $n \neq 2$ jeweils die Maximalzahl von Zusatzhüllen eines n-Pakets die größte ganze Zahl kleiner als $\frac{n}{2}$ sei. Dann folgt:

Es gibt k-Pakete mit maximaler Zahl von Zusatzhüllen (da es überhaupt nur endlich viele Möglichkeiten gibt, ein k-Paket zu bilden).
Für jedes solche Paket gilt: Öffnet man seine nach (1) vorliegende äußere Umhüllung H, so besteht ihr Inhalt nach (2) und wegen $k > 1$ aus mindestens drei sämtlich mit Umhüllung versehenen Teilpaketen. Wären es fünf oder mehr, so könnte man diesen Inhalt ohne Verletzung von (2) dadurch ändern, dass man um genau drei der Teilpakete eine neue Umhüllung hinzufügt.

Das widerspricht der vorausgesetzten Maximalität der Zusatzhüllenzahl des k-Pakets. Also besteht der Inhalt von H entweder aus genau drei oder aus genau vier Teilpaketen. Jedes von ihnen erfüllt nach (2) selbst wieder (1) und (2), ist also ein n_i-Paket ($i = 1{,}2{,}3$ oder $i = 1{,}2{,}3{,}4$); dabei ist nach (2) jedes n_i eine positive ganze Zahl mit $n_i \neq 2$. Ferner gilt

$$n_1 + n_2 + n_3 = k \qquad \text{bzw.} \qquad n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = k \tag{3}$$

Also sind alle $n_i < k$. Jedes dieser n_i-Pakete muss seinerseits eine maximale Zahl z_i von Zusatzhüllen aufweisen (sonst könnte man es durch ein n_i-Paket mit größerer Zusatzhüllenzahl ersetzen, was der Maximalität des k-Pakets widerspricht).
Nach Induktionsannahme ist somit jeweils z_i die größte ganze Zahl kleiner als $\frac{n_i}{2}$.

In jedem der Fälle $k = 2m$, $k = 2m + 1$ gibt es für die n_i hinsichtlich ihrer Darstellbarkeit als $n_i = 2m_i$ oder $n_i = 2m_i + 1$ (m, m_i ganzzahlig) bis auf die Reihenfolge genau die Möglichkeiten der folgenden Tabelle.
Anschließend sind dort die z_i und unter Anwendung von (3) ihre Summe s angegeben.

k	n_1	n_2	n_3	n_4	z_1	z_2	z_3	z_4	s
$2m$	$2m_1$	$2m_2$	$2m_3$		m_1-1	m_2-1	m_3-1		$m-3$
	$2m_1$	$2m_2+1$	$2m_3+1$		m_1-1	m_2	m_3		$m-2$
	$2m_1$	$2m_2$	$2m_3$	$2m_4$	m_1-1	m_2-1	m_3-1	m_4-1	$m-4$
	$2m_1$	$2m_2$	$2m_3+1$	$2m_4+1$	m_1-1	m_2-1	m_3	m_4	$m-3$
	$2m_1+1$	$2m_2+2$	$2m_3+1$	$2m_4+1$	m_1	m_2	m_3	m_4	$m-2$
$2m+1$	$2m_1$	$2m_2$	$2m_3+1$		m_1-1	m_2-1	m_3		$m-2$
	$2m_1+1$	$2m_2+1$	$2m_3+1$		m_1	m_2	m_3		$m-1$
	$2m_1$	$2m_2$	$2m_3$	$2m_4+1$	m_1-1	m_2-1	m_3-1	m_4	$m-3$
	$2m_1$	$2m_2+1$	$2m_3+1$	$2m_4+1$	m_1-1	m_2	m_3	m_4	$m-2$

Die sämtlichen Zusatzhüllen des k-Pakets sind nun: die s Zusatzhüllen der einzelnen n_i-Pakete und dazu noch die Umhüllung H.
Wegen der Maximalität scheiden für s alle Möglichkeiten außer den hervorgehobenen aus, und man erhält: Die Maximalzahl von Zusatzhüllen eines k-Pakets ist im Fall $k = 2m$ die Zahl $m - 1$, im Fall $k = 2m + 1$ die Zahl m.
Das ist die Behauptung für $n = k$.

Mit 1. und 2. ist somit die Behauptung für alle positiven ganzen $n \neq 2$ bewiesen. Sie ergibt für $n = 500$: Die Maximalzahl von Zusatzhüllen ist 249. Die gesuchte größtmögliche Zahl aller Umhüllungen beträgt somit 749.

Aufgabe 261246A:
Im Mathematiklager schlägt ein Zirkelleiter den n Schülern ($n \geq 3$) seiner Gruppe vor, den Schüler, der den Tafeldienst wahrzunehmen hat, nach folgender Methode auszuwählen:
Die Schüler werden mit $P_1, P_2, \dots, P_n$ nummeriert und stellen sich in dieser Reihenfolge im Kreis auf. Dabei folgt (im Umlaufsinn $P_1, P_2, \dots$) auf P_n wieder P_1. Durch Münzwurf wird zunächst entschieden, ob P_1 oder P_2 aus dem Kreis ausscheidet. Liegt Wappen oben, so scheidet P_1 aus, bei Zahl P_2.
Danach wird der Ausscheid mit denjenigen beiden noch nicht ausgeschiedenen Schülern fortgesetzt, die auf den soeben zuletzt ausgeschiedenen Schüler im genannten Umlaufsinn folgen.

Bei Wappen scheidet wieder der in dem Umlaufsinn erste von diesen beiden aus, bei Zahl der zweite. Dies wird solange wiederholt, bis nur noch ein Schüler übrigbleibt, der dann als Diensthabender bestimmt wird.

a) Man berechne im Fall $n = 3$ die Wahrscheinlichkeit W_1, W_2, W_3 dafür, dass P_1, P_2 bzw. P_3 als Diensthabende bestimmt werden.

b) Man beweise für jedes $n \geq 3$, dass die Auswahlmethode ungerecht ist, d. h. dass die Wahrscheinlichkeit, als Diensthabender bestimmt zu werden, nicht für alle Schüler $P_1, P_2, \ldots, P_n$ gleich ist.
Bemerkung:
Tritt irgendein zufälliges Ereignis A als Folge irgendeines von m Ereignissen aus einer Gesamtzahl von N möglichen Ereignissen (die einander ausschließen und gleichwahrscheinlich sind) ein, so bezeichnet man als Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A die Zahl $p = \frac{M}{N}$.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Zur Abkürzung wird W für einen Münzwurf mit dem Ergebnis „Wappen“ und Z für einen Wurf mit dem Ergebnis „Zahl“ geschrieben.

a) da für $n > 3$ der Diensthabende durch zweimaliges Werfen der Münze eindeutig bestimmt ist, entspricht jede mögliche Auswahl genau einer der Folgen (W,W), (W,Z), (Z,W), (Z,T), wobei die Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten der Folgen untereinander gleich sind, d. h., jeweils gleich $\frac{1}{4}$.
Offenbar werden durch die oben angegebenen Folgen als Diensthabende, entsprechend obiger Reihenfolge, P_3, P_2, P_1, P_3 ausgewählt, Folglich ergibt sich für die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten

$$W_1 = \frac{1}{4}; \qquad W_2 = \frac{1}{4}; \qquad W_3 = \frac{1}{2}$$

b) Jeder möglichen Auswahl entspricht genau eine $(n-1)$-elementige Folge aus Würfen W und Z, wobei wiederum das Auftreten sämtlicher derartiger Folgen gleichwahrscheinlich ist. Ihre Gesamtzahl ist gleich der Anzahl der Variationen von 2 Elemente in Gruppen zu $(n-1)$ Elementen und damit gleich 2^{n-1}.

Diese $(n-1)$-elementigen Folgen seien in zwei Klassen A und B eingeteilt. Zu A gehören genau die Folgen, die mit W beginnen, zu B genau die Folgen, die mit Z beginnen. Weiterhin werde mit k_i^A ($i =$,1,2,...,n) die Anzahl derjenigen Folgen aus A bezeichnet, bei denen P_i als Diensthabender ausgewählt wird; analog werde k_i^B definiert.

Ist f eine Folge aus A und bildet man eine Folge $\overline{f}$ dadurch, dass das erste Element von f durch Z ersetzt wird, so ist $\overline{f}$ eine Folge aus B.
Bei f werde P_i als Diensthabender bestimmt.
Da die Ergebnisse der Münzwürfe bei f und $\overline{f}$ ab 2. Wurf übereinstimmen, der 2. Wurf bei f zwischen P_2 und P_3, bei $\overline{f}$ aber zwischen P_3 und P_4 entscheidet, wird folglich bei $\overline{f}$ der Schüler P_{i+1} als Diensthabender bestimmt.

Analog gilt umgekehrt: Ist $\overline{f}$ eine Folge aus B, die P_{i+1} aks Diensthabenden bestimmt, und entsteht f aus $\overline{f}$, indem das erste Element durch W ersetzt wird, so ist f eine Folge aus A und bestimmt P_i als Diensthabenden. Somit gilt

$$k_i^A = k_{i+1}^B \qquad (i = 1,2,\ldots,n; \quad k_{n+1}^B = k_1^B \quad \text{gesetzt}) \tag{1}$$

Angenommen, die Auswahlmethode wäre gerecht, dann müsste wegen der Gleichwahrscheinlichkeit der Auswahl für jede Schüler gelten:

$$k_i^A + k_i^B = \frac{2^{n-1}}{n} = k \qquad (i = 1,2,\ldots,n) \tag{2}$$

Aus (1) und (2) ergäbe sich

$$k_i^A + k_{i-1}^B = k \qquad (i = 2,3,\ldots,n+1; \quad k_{n+1}^B = k_1^B \quad \text{gesetzt}) \tag{3}$$

Offenbar gilt $k_1^A = 0$, weil P_1 sofort ausscheidet, wenn beim ersten Wurf W fällt. Setzt man das in (3) für $i = 2$ ein, so erhält man $k_2^A = k$ und hieraus nach (3) für $i = 3$ weiter $k_3^A = 0$.
Andererseits gehört die Folge (W,W,Z,W,...,W) zur Klasse A und führt zur Bestimmung von P_3 als Diensthabenden; d. h., es gilt $k_3^A \geq 1$. Mit diesem Widerspruch ist die Annahme, die Auswahlmethode wäre gerecht, für alle $n \geq 3$ widerlegt.

Aufgabe 271243:
Wieviel verschiedene Wörter $(a_1a_2a_3...a_{n-1}a_n)$ kann man insgesamt aus den Buchstaben $a_i \in \{1,2,3,4,5\}$, $i = 1,...,n$ derart bilden, dass

$$|a_j - a_{j+1}| = 1$$

für $j = 1,...,n-1$ gilt?

Lösung von Nuramon:
Es sei $A_{i,n}$ die Anzahl der Wörter, aus n Buchstaben, die mit a_i enden. Die gesuchte Anzahl ist dann $A_n := A_{1,n} + A_{2,n} + A_{3,n} + A_{4,n} + A_{5,n}$.
Offenbar gilt die Rekursion

$$A_{i,n+1} = \begin{cases} A_{2,n} & \text{falls } i = 1 \\ A_{i-1,n} + A_{i+1,n} & \text{falls } 2 \leq i \leq 4 \\ A_{4,n} & \text{falls } i = 5 \end{cases}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= (A_{2,n}) + (A_{1,n} + A_{3,n}) + (A_{2,n} + A_{4,n}) + (A_{3,n} + A_{5,n}) + (A_{4,n}) \\ &= A_n + A_{2,n} + A_{3,n} + A_{4,n}. \end{aligned}$$

Weiter ist

$$\begin{aligned} A_{n+2} &= A_{n+1} + A_{2,n+1} + A_{3,n+1} + A_{4,n+1} \\ &= (A_n + A_{2,n} + A_{3,n} + A_{4,n}) + (A_{1,n} + A_{3,n}) + (A_{2,n} + A_{4,n}) + (A_{3,n} + A_{5,n}) \\ &= 3A_n - A_{1,n} + A_{3,n} - A_{5,n} \end{aligned}$$

Schließlich ist dann

$$\begin{aligned} A_{n+3} &= 3A_{n+1} - A_{1,n+1} + A_{3,n+1} - A_{5,n+1} \\ &= 3A_{n+1} - A_{2,n} + (A_{2,n} + A_{4,n}) - A_{4,n} \\ &= 3A_{n+1} \end{aligned}$$

Durch explizites Nachrechnen finden wir außerdem, dass $A_1 = 5, A_2 = 8, A_3 = 14$. Insgesamt folgt dann

$$A_n = \begin{cases} 5 & \text{falls } n = 1 \\ 8 \cdot 3^{m-1} & \text{falls } n = 2m \\ 14 \cdot 3^{m-1} & \text{falls } n = 2m+1, n \neq 1 \end{cases}$$

Aufgabe 271246A:
Alfred und Bernd teilen sich n Äpfel, indem der Reihe nach für jeden einzelnen Apfel durch eine Zufallsentscheidung (z. B. Werfen einer Münze festgelegt wird, wer diesen Apfel erhält.
Ein solcher Verteilungsvorgang heiße für Alfred günstig genau dann, wenn Alfred nicht nur am Ende sondern während des gesamten Vorganges niemals weniger Äpfel in seinem Besitz hat als Bernd.
Als Wahrscheinlichkeit $w(n)$ dafür dass ein Verteilungsvorgang für Alfred günstig ist, bezeichnet man den Quotienten, der sich ergibt, wenn die Anzahl aller für Alfred günstigen Verteilungsvorgänge durch die Anzahl aller überhaupt möglichen Verteilungsvorgänge dividiert wird.
(a) Man ermittle $w(4)$.
(b) Man ermittle $w(n)$ für beliebiges natürliches $n \geq 2$.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Jeder Verteilungsvorgang ist durch eine n-gliedrige Folge darstellbar, in der jedes Glied A oder B lautet. Ein solche Folge sei „j-Folge“ genannt, wenn sie genau j Glieder A enthält. Eine Folge heiße genau dann „günstig“, wenn sie einen für Alfred günstigen Verteilungsvorgang darstellt.

Für die größte ganze Zahl $m \leq \frac{n}{2} \quad (*)$ gelten nun folgende Aussagen:
(1) Jede j-Folge mit $j < m$ ist ungünstig.
(2) Die einzige n-Folge $(AA \dots A)$ ist günstig.
(3) Für jedes j mit $m \leq j < n$ ist die Anzahl aller ungünstigen j-Folgen gleich der Anzahl aller $(j+1)$-Folgen.

Dies kann wie folgt bewiesen werden:
Zu jeder ungünstigen j-Folge F gibt es eine kleinste Zahl $k \geq 1$ derart, dass das k-te Glied B lautet, während sich unter den vorangehenden $k-1$ Glieder ebenso viele Glieder A wir B befinden.
Man ordne die Folge F diejenige Folge F' zu, de aus F dadurch entsteht, dass in den ersten k Gliedern überall A durch B und B durch A ersetzt wird. Für diese Zuordnung gilt:

I. Die Folge F' ist jeweils eine $(j+1)$-Folge.
II. Sind zwei ungünstige j-Folgen F_1, F_2 voneinander verschieden, so auch ihre zugeordneten Folgen F_1', F_2'.
III. Jede $(j+1)$-Folge G ist die zugeordnete Folge $G = F'$ einer ungünstigen j-Folge F.
Wegen $j \geq m$, also $j+1 \geq \frac{n}{2}$, enthält G nämlich mehr Glieder A als B; also gibt es eine kleinste Zahl $k \geq 1$ derart, dass das k-te Glied A lautet, während sich unter den vorangehenden $k-1$ Gliedern ebenso viele Glieder B wie A befinden.
Daher hat diejenige Folge die verlangten Eigenschaften (ungünstige j-Folge mit $F' = G$ zu sein), die aus G dadurch entsteht, dass in den ersten k Gliedern überall B durch A und A durch B ersetzt wird.
Mit I., II., III. ist die behauptete Anzahlgleichheit bewiesen.

Bezeichnet man die Anzahl aller j-Folgen mit a_j und die Anzahl aller günstigen j-Folgen mit g_j, so ergibt sich nach (1), (2), (3): Die Anzahl aller günstigen Folgen ist

$$g_0 + \dots + g_n = g_m + \dots + g_{n-1} + g_n = (a_m - a_{m+1}) + \dots + (a_{n-1} - a_n) + a_n = a_m \qquad (**)$$

Die Anzahl a_m aller m-Folgen ist bekanntlich $a_m = \binom{n}{m}$, die Anzahl aller zu berücksichtigen n-gliedrigen Folgen überhaupt ist 2^n. Damit ergibt sich

$$\text{a)} \quad w(4) = \binom{4}{2} : 2^4 = 6 : 16 = \frac{3}{8} \qquad \text{b)} \quad w(n) = \binom{n}{m} : 2^n \qquad \text{mit m aus (*)}$$

Aufgabe 281244:
Um einen Tresor zu öffnen, ist eine unbekannte dreistellige Zahlenkombination (a_1, a_2, a_3) einzustellen, wobei die drei Zahlen unabhängig voneinander eingestellt werden können und für die jede der drei Zahlen genau 8 Werte möglich sind.
Infolge eines Defektes öffnet sich aber der Tresor bereits immer genau dann, wenn eine eingestellte Kombination (k_1, k_2, k_3) mindestens zwei der drei Bedingungen $k_i = a_i$ $(i = 1, 2, 3)$ erfüllt.
Man ermittle die kleinste Zahl N, für die es N Kombinationen gibt, bei deren Durchprobieren der Tresor in jedem Fall (d. h. für jede unbekannte Kombination (a_1, a_2, a_3)) sich öffnen muss.

Lösung von Zeitschrift „alpha“:
Für eine Kombination $k = (k_1, k_2, k_3)$ werde genau dann gesagt, sie „überdecke“ (a_1, a_2, a_3), wenn sie mindestens zwei der drei Bedingungen $k_i = a_i$ erfüllt. Die acht möglichen Werte der a_i seien o. B. d. A. die Zahlen 0, 1, …,7.

I. Es seien S,T,U die Mengen

$$S = \{(0,0,1),(0,1,0),(1,0,0),(1,1,1)\}$$
$$T = \{(0,0,2),(0,2,0),(2,0,0),(2,2,2)\}$$
$$U = \{(0,0,0),(4,4,4)\}$$

Die 32 Kombinationen $k = s + t + u$ $(s \in S, t \in T, u \in U)$ bilden ein Beispiel für Kombinationen, mit denen alle 8^3 Kombinationen (a_1,a_2,a_3) überdeckt werden. Um dies zu beweise, sei eine beliebige dieser Kombinationen (a_1,a_2,a_3) betrachtet. Man setze zunächst

$$u = \begin{cases} (0,0,0) & \text{falls mindestens zwei } a_m, a_n \leq 3 \text{ sind } (m \neq n) \quad (1) \\ (4,4,4) & \text{sonst} \end{cases}$$

Hiernach gibt es stets zwei Indizes $m < n$ so, dass für $i = m$ und für $i = n$ gilt: Die Zahl $b_i = a_i - u_i$ (2) erfüllt $0 \leq b_i \leq 3$; also existieren

$$s_i \in \{0;1\}, \quad t_i \in \{0;2\} \qquad (3)$$

mit $b_i = s_i + t_i$ (4).

Für jede Möglichkeit des Indexpaares $(m;n) = (1;2),(1;3),(2;3)$ und für jede gemäß (3) bestehende Möglichkeit der s_i,t_i findet man nach Definition vn S und T ein $s = (s_1,s_2,s_3) \in S$ und ein $t = (t_1,t_2,t_3) \in T$, in denen s_m,s_n bzw. $_m,t_n$ gerade die Zahlen aus (3) und (4) sind. Die hiermit sowie mit u aus (1) gebildete Kombination $k = (k_1,k_2,k_3) = s+t+u$ erfüllt nach (4) und (2) die beiden Bedingungen

$$k_i = s_i + t_i + u_i = b_i + u_i = a_i \qquad (i = ,m,n)$$

w. z. b. w.

II. Angenommen, es existiere eine Menge K von höchstens 31 Kombinationen, mit denen alle 8^3 Kombinationen (a_1,a_2,a_3) überdeckt werden. Aus dieser Annahme lässt sich z. B. folgendermaßen ein Widerspruch herleiten:

Zunächst folgt, dass für mindestens einen der acht Werte $p = 0,1,\dots,7$ die Menge P aller (p,y,z) $(y,z \in \{0,1,\dots,7\})$ höchstens drei Kombinationen aus K enthält. Daher gibt es erst recht drei paarweise verschiedene Zahlen c,d,e so, dass aus $(k_1,k_2,k_3) \in K$ und $k_1 = p$ stets $k_2 \in \{c,d,e\}$ folgt, und es gibt (nicht notwendig verschiedene) Zahlen f,g,h so, dass aus $(k_1,k_2,k_3) \in K$ und $k_1 = p$ stets $k_3 \in \{f,g,h\}$ folgt.

Es sei $Y = \{0,\dots,7\} \setminus \{c,d,e\}$ und $Z = \{0,\dots,7\} \setminus \{f,g,h\}$.

Die Menge aller (p,y,z) $(y \in Y, z \in Z)$ (5) enthält mindestens $(8-3)\cdot(8-3) = 25$ Kombinationen. Jede von ihnen wird nach Annahme durch ein $(k_1,k_2,k_3) \in K$ überdeckt.

Nach Wahl der $c,\dots,f$ ist das nur mit $k_1 \neq p$ und folglich nur mit $k_2 \in Y$ und $k_3 \in Z$ möglich; somit müssen zu je zwei voneinander verschiedenen Kombinationen (5) auch zwei voneinander verschiedene überdeckende Kombinationen aus K gehören. Damit ist gezeigt, dass es mindestens 25 Kombinationen $(k_1,k_2,k_3) \in K$ mit $k_2 \notin \{c,d,e\}$ geben muss und folglich höchstens $31 - 25 = 6$ mit $k_2 \in \{c,d,e\}$ geben kann.

Wegen der paarweisen Verschiedenheit der c,d,e folgt nun, dass für mindestens einen der drei Werte $a = c,d,e$ die Menge Q aller (x,q,z) $(x,z \in \{0,\dots,7\})$ höchstens zwei Kombinationen aus K enthält. Analog wie bei P ergibt sich hieraus $(8-2)\cdot(8-2) = 36$ Kombinationen in K und damit ein Widerspruch. Mit I. und II. ist als gesuchte kleinste Zahl $N032$ nachgewiesen.

Aufgabe 311243:

Man beweise:

Ist p eine Primzahl und werden zwei ganze Zahlen n,k mit $0 \leq k \leq n$ im Ziffernsystem mit der Basis p geschrieben als

$$n = a_t \cdot p^t + a_{t-1} \cdot p^{t-1} + \dots + a_1 p + a_0$$
$$k = b_t \cdot p^t + b_{t-1} \cdot p^{t-1} + \dots + b_1 p + b_0$$

(a_j, b_j ganze Zahlen mit $0 \leq a_j < p$, $0 \leq b_j < p$ für $j = 0, 1, ..., t$), so lässt die Zahl $\binom{n}{k}$ bei Division durch p denselben Rest wie

$$\binom{a_t}{b_t} \cdot \binom{a_{t-1}}{b_{t-1}} \cdot ... \cdot \binom{a_1}{b_1} \cdot \binom{a_0}{b_0}$$

Hinweis: Für ganze Zahlen $n \geq 0$ und $k \geq 1$ wird

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot ... \cdot k}$$

definiert, für ganze Zahlen $n \geq 0$ ferner $\binom{n}{0} = 1$.

Lösung von Nuramon:
Wir arbeiten im Polynomring $\mathbb{F}_p[X]$.
Nach dem kleinen Satz von Fermat gilt für alle $f,g \in \mathbb{F}_p[X]$ die Gleichung $(f+g)^p = f^p + g^p$.
Daher gilt für das Polynom $(X+1)^n \in \mathbb{F}_p[X]$:

$$(X+1)^n = \left(X^{p^t} + 1\right)^{a_t} \left(X^{p^{t-1}} + 1\right)^{a_{t-1}} \cdot \ldots \cdot \left(X^{p^1} + 1\right)^{a_1} (X+1)^{a_0} .$$

Mit dem binomischem Lehrsatz folgt

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} X^i = \prod_{i=0}^{t} \left(\sum_{j=0}^{a_i} \binom{a_i}{j} X^{jp^i} \right) .$$

Wegen der Eindeutigkeit der Darstellung natürlicher Zahlen im Ziffernsystem zur Basis p folgt die Behauptung durch Vergleich der Koeffizienten von X^k auf beiden Seiten.

Aufgabe 321245:
Man ermittle die größtmögliche Anzahl von Dreiecken mit ganzzahligen Seitenlängen und mit dem Umfang 1993, unter denen sich keine zwei untereinander kongruenten Dreiecke befinden.

Lösung von MontyPythagoras:
Die drei Seitenlängen seien a, b und c mit $0 < a \leq b \leq c$. Die längste Seite sei c. Aufgrund der Dreiecksungleichung $a + b > c$ gilt $c_{max} = \left\lfloor \frac{1993}{2} \right\rfloor = 996$. Aufgrund der Sortierung nach der Größe gilt aber auch $c_{min} = \left\lceil \frac{1993}{3} \right\rceil = 665$, denn dann ist $a = b = 664$. Daher gilt:

$$665 \leq c \leq 996$$

Es gilt weiter:

$$a + b = 1993 - c$$

Um die Anzahl der Dreiecke für ein gegebenes c zu bestimmen, müssen wir jeweils das minimale und maximale a herausfinden. a ist minimal, wenn b maximal ist, und das maximale b ist gleich c. Daher ist

$$a_{min} = 1993 - 2c$$

a ist maximal, wenn es gleich b ist, oder um 1 kleiner als b, wenn $a + b$ ungerade ist. Also gilt:

$$a_{max} = \left\lfloor \frac{1993 - c}{2} \right\rfloor$$

Wir unterscheiden daher die 2 Fälle, ob c gerade oder ungerade ist. Die Anzahl der jeweiligen Dreiecke sei A_c.
1. $c = 2m$ mit $m = 333...498$. Dann ist

$$a_{min} = 1993 - 4m$$

$$a_{max} = 996 - m$$
$$A_{2m} = 996 - m - (1993 - 4m) + 1 = 3m - 996$$

2. $c = 2m + 1$ mit $m = 332...497$. Dann ist

$$a_{min} = 1991 - 4m$$
$$a_{max} = 996 - m$$
$$A_{2m+1} = 996 - m - (1991 - 4m) + 1 = 3m - 994$$

Die Gesamtanzahl an nicht kongruenten Dreiecken ist dann

$$A = \sum_{m=333}^{498} (3m - 996) + \sum_{m=332}^{497} (3m - 994)$$
$$A = \sum_{m=1}^{166} (3m) + \sum_{m=1}^{166} (3m - 1)$$
$$A = 2 \cdot 3 \sum_{m=1}^{166} m - 166$$
$$A = 3 \cdot 166 \cdot 167 - 166 = 166 \cdot (3 \cdot 167 - 1) = 166 \cdot 500$$
$$A = 83000$$

Es gibt daher exakt 83000 nicht kongruente Dreiecke.

Aufgabe 341243:
Man beweise, dass für alle ganzen Zahlen k und n mit $1 \leq k \leq 2n$ die Ungleichung

$$\binom{2n+1}{k-1} + \binom{2n+1}{k+1} \geq 2 \cdot \frac{n+1}{n+2} \cdot \binom{2n+1}{k}$$

gilt.
Hinweis: Für ganze Zahlen n und k mit $0 \leq k \leq n$ definiert man $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$, wobei für ganze Zahlen m mit $m \geq 0$ definiert wird: $m! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot m$ [ausführlicher: $0! = 1$ sowie $m! = (m-1)! \cdot m$ $(m = 1, 2, 3, ...)$].

Lösung von weird:
Beweis: Indem man

$$\frac{\binom{2n+1}{k-1} + \binom{2n+1}{k+1}}{\binom{2n+1}{k}} = \left(\frac{(2n+1)!}{(k-1)!(2n-k+2)!} + \frac{(2n+1)!}{(k+1)!(2n-k+1)!} \right) \frac{k!(2n-k+1)!}{(2n+1)!}$$

durch Kürzen noch vereinfacht, erhält man schließlich

$$\frac{\binom{2n+1}{k-1} + \binom{2n+1}{k+1}}{\binom{2n+1}{k}} = \frac{k}{2n-k+2} + \frac{2n-k+1}{k+1} = \frac{2\left((k-n)(k-(n+1)) + (n+1)^2\right)}{(k+1)(2n-k+2)}$$

Wir somit somit nur noch die Frage klären, für welche $k \in \{1,2,...,2n\}$ der rechtsstehende Bruch den kleinsten Wert annimmt. Was seinen Zähler betrifft, ist dies klarerweise für $k = n$ und $k = n+1$ der Fall, für welche Werte er sein Minimum $2(n+1)^2$ annimmt. Für diese beiden Werte von k nimmt aber auch gleichzeitig sein Nenner, den wir auch in der Form

$$(k+1)(2n-k+2) = \frac{1}{4}\left((2n+3)^2 - (2n-2k+1)^2\right)$$

schreiben können, sein Maximum, nämlich $(n+1)(n+2)$ an. Insgesamt wird dieser Bruch also für $k = n$ bzw. $k = n+1$ kleinstmöglich und hat dann den Wert

$$\frac{2(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = 2\,\frac{n+1}{n+2}$$

für alle anderen Werte von $k \in \{1,2,...,2n\}$ ist er dagegen größer, was dann die Behauptung hier beweist.

VII.III. Spielstrategien

I. Runde 1

Aufgabe 231214:
Bernd und Jürgen führen mit genau fünf roten, genau vier blauen Spielsteinen und einem Vorratsbehälter, der eine ausreichende Anzahl gelber Spielsteine enthält, ein Spiel nach folgenden Regeln durch:

Zu Beginn werden die fünf roten, die vier blauen und genau drei gelbe Steine auf den Tisch gelegt. Danach sind die Spieler abwechselnd am Zug. Wer am Zug ist, nimmt drei beliebige Steine vom Tisch, wobei es nur verboten ist, drei rote Steine zu nehmen; danach verfährt er nach folgenden Vorschriften:

(1) Jeder genommene rote Stein wird wieder auf den Tisch gelegt.

(2) Für jeden genommenen blauen Stein wird ein gelber Stein aus dem Vorratsbehälter auf den Tisch gelegt; der blaue Stein kommt in den Vorratsbehälter.

(3) Jeder genommene gelbe Stein kommt in den Vorratsbehälter.

Sind diese Vorschriften befolgt, so hat der betreffende Spieler seinen Zug beendet. Hat ein Spieler mit seinem Zug erreicht, dass nur noch rote Steine auf dem Tisch liegen (so dass der Gegenspieler keinen Zug mehr anschließen kann), so hat er gewonnen. Jürgen macht den ersten Zug.

Geben Sie eine Strategie an, mit der Jürgen den Sieg erzwingen kann!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Züge seien kurz durch Symbole beschrieben; z. B. bedeutet $r,g,g \to 5{,}2{,}0$, dass der Spieler einen roten Stein und zwei gelbe Steine nimmt und dass nach diesem Zug 5 rote, 2 blaue Steine und kein gelber Stein auf dem Tisch liegen.

Die folgende Tabelle gibt jeweils für Jürgen (J) eine Möglichkeit und für Bernd (B) alle danach jeweils vorhandenen Möglichkeiten eines Zuges an. Verfährt Jürgen nach dieser Strategie, so erreicht er, wie aus der Tabelle ersichtlich ist, stets die Stellung 5,0,0, also den Sieg.

J	$g,g,g \to 5{,}4{,}0$					
B	$r,r,b \to 5{,}3{,}1$			$r,b,b \to 5{,}2{,}2$		$b,b,b \to 5{,}1{,}3$
J	$b,b,b \to 5{,}0{,}4$			$r,g,g \to 5{,}2{,}0$		$g,g,g \to 5{,}1{,}0$
B	$r,r,g \to 5{,}0{,}3$	$r,g,g \to 5{,}0{,}2$	$g,g,g \to 5{,}0{,}1$	$r,r,b \to 5{,}1{,}1$	$r,b,b \to 5{,}0{,}2$	$r,r,b \to 5{,}0{,}1$
J	$g,g,g \to 5{,}0{,}0$	$r,g,g \to 5{,}0{,}0$	$r,r,g \to 5{,}0{,}0$	$r,r,g \to 5{,}1{,}0$	$r,g,g \to 5{,}0{,}0$	$r,r,g \to 5{,}0{,}0$
B				$r,r,b \to 5{,}0{,}1$		
J				$r,r,g \to 5{,}0{,}0$		

Aufgabe 241214:
Zwei Personen A und B spielen das folgende Spiel:

Jeder der beiden Spieler erhält neun Karten, auf denen die Zahlen 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 verzeichnet sind, jede dieser Zahlen auf genau einer Karte (des betreffenden Spielers).

A beginnt und legt eine seiner Karten auf den Tisch; dann legt B eine seiner Karten auf den Tisch, dann wieder A und dann B usw. Es wird jeweils die Summe der auf dem Tisch liegenden Zahlen festgestellt. Das Spiel ist beendet, wenn eine Summe erreicht wird, die größer als 99 ist. Verloren hat derjenige Spieler, durch dessen Karte diese Summe erreicht wurde; der andere Spieler hat gewonnen.

Man untersuche, ob es eine Strategie gibt, durch die bei jeder möglichen Reihenfolge der von A gespielten Karten der Spieler B den Gewinn erzwingen kann. Falls das zutrifft, gebe man eine solche Strategie an.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es gibt eine Strategie der gesuchten Art, z. B. die folgende:
B wählt als die ersten acht von ihm gespielten Karten alle diejenigen, auf denen nicht die Zahl 8 steht. (Die Reihenfolge dieser Karten wählt er beliebig.)

Ein Beweis, dass er durch diese Strategie den Gewinn erzwingt, ergibt sich folgendermaßen: Die Summe aller Zahlen im Spiel beträgt $2 \cdot (2+3+4+5+6+7+8+9+10) = 108$. Beim Ausspielen der vorletzten Karte von B wird somit die Summe $108 - 8 - n = 100 - n$ erreicht, wobei n die Zahl auf der noch nicht ausgespielten Karte von A ist.

Wegen $n \geq 2$ ist diese Summe $100 - n \leq 98$. Daraus folgt einerseits, dass überhaupt das Spiel bis dahin noch nicht beendet ist; andererseits folgt, dass A als letzte Karte die mit der Zahl n ausspielen, die Summe 100 erreichen und damit verlieren muss. w.z.b.w

Aufgabe 251214:
Zwei Personen A und B spielen das folgende Spiel:

Zu Beginn geben sie sich (z. B. durch ein Zufallsverfahren) eine natürliche Zahl K ($K \geq 17$) vor. Sodann wählt A aus der Menge $M = \{2, 4, 8, 16\}$ eine Zahl aus; sie sei mit a_1 bezeichnet. Darauf multipliziert B die Zahl a_1 mit einer Zahl der Menge M und erhält die Zahl b_1. Danach multipliziert A die Zahl b_1 erneut mit einer Zahl der Menge M und erhält die Zahl a_2. Anschließend setzen B und A diesen Prozess abwechselnd fort, bis einer der Spieler ein Produkt erreicht hat, das größer als die vorher festgelegte Zahl K ist. Gewonnen hat derjenige Spieler, der als erster ein Produkt erreicht, das größer als K ist.

a) Wie muss Spieler A spielen, um mit Sicherheit zu gewinnen, wenn $K = 100$ vorgegeben ist?

b) Welcher der beiden Spieler kann den Gewinn stets erzwingen, und welche Gewinnstrategie muss er anwenden, wenn $K = 1000000$ vorgegeben ist?

c) Wie kann man bei beliebig vorgegebenem K entscheiden, welcher der beiden Spieler den Gewinn erzwingen kann, und wie muss dieser Spieler vorgehen?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

a) Es fällt auf, dass alle Elemente von M Potenzen der Zahl 2 sind:

$$M = \{2^1; 2^2; 2^3; 2^4\}$$

Also haben laut Spielregel sowohl die von A genannten Zahlen a_i als auch die von B genannten Zahlen b_i stets die Form 2^k.

Wir überlegen nun, welche Zahlen der Form 2^k man dem Gegner nicht nennen darf, weil dieser dann gewinnen könnte. Wegen $2^6 < 100 < 2^7$ sind dies die „Verlustzahlen“ $2^6, 2^5, 2^4$ und 2^3, weil in diesen Fällen der Gegner durch Multiplikation mit $2^1, 2^2, 2^3$ bzw. 2^4 die Zahl 100 überschreiten könnte.

Folglich ist 2^2 eine „Gewinnzahl„, weil von ihr ausgehend der Gegner laut Spielregel nur eine der „Verlustzahlen“ nennen kann.

Wählt daher der Spieler A aus der Menge M die Zahl 2^2 aus, dann kann er auf die angegebene Weise mit Sicherheit gewinnen.

b) Wegen $2^{19} < 1000000 < 2^{20}$ erhält man analog.

„Verlustzahlen“	19,18,17,16		14,13,12,11		9,8,7,6		4,3,2,1
„Gewinnzahlen„		15		10		5	

A muss verlieren, weil B als Nachziehender stets die „Gewinnzahlen„ $2^5, 2^{10}, 2^{15}$ erreichen kann.

c) Zu jedem $K \in N$ gibt es genau ein $k \in N$, so dass $2^{k-1} \leq K < 2^k$ gilt. Zu jedem k gibt es genau ein $i \in N$ und ein $r \in \{0{,}1{,}2{,}3{,}4\}$, so dass $k = 5i + r$ gilt (d. h., k lässt bei Division durch 5 den Rest r).

Ist $r \neq 0$, dann kann Spieler A gewinnen, indem er mit der „Gewinnzahl„ $2^r \in M$ beginnt und dann der Reihe nach die Zahlen

$$2^{r+5}, 2^{r+2\cdot 5}, \ldots, 2^{r+5i}$$

nennt, was laut Spielregel stets möglich ist. Wegen $2^{r+5i} = 2^k > K$ hat er dann gewonnen.

Gilt dagegen $r = 0$, dann kann B gewinnen, indem er analog vorgeht.

II. Runde 2

Aufgabe 091224:
Gegeben seien natürliche Zahlen k und n mit $0 < k < n$. In einer Schachtel liegen (offen sichtbar, so dass ihre Anzahl festgestellt werden kann) genau n Kugeln. Zwei Spieler spielen ein Spiel nach der folgenden Regel:
Die Spieler nehmen abwechselnd Kugeln aus der Schachtel heraus, und zwar sind jeweils mindestens eine und höchstens k Kugeln zu entnehmen. Wer die letzte Kugel aus der Schachtel entnehmen muss, hat verloren.
Welche Beziehung zwischen k und n muss erfüllt sein, damit
a) der anziehende Spieler,
b) der nachziehende Spieler
den Gewinn erzwingen kann?

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:
Es gelten folgende Feststellungen:

I. Verbleibt nach einem Zug eines Spielers genau eine Kugel in der Schachtel, so hat dieser Spieler gewonnen.

II. Es sei z eine Zahl mit der Eigenschaft, dass ein Spieler den Gewinn erzwingen kann, wenn der Gegner am Zug ist und genau z Kugeln in der Schachtel liegen. Dann ist auch $k + 1 + z$ eine Zahl mit dieser Eigenschaft; denn befinden sich genau $k + 1 + z$ Kugeln n der Schachtel und ist der Gegner am Zug, so muss dieser eine Anzahl a Kugeln mit $1 \leq a \leq k \quad (1)$ entnehmen, und entnimmt der erstgenannte Spieler hierauf genau $k + 1 - a$ Kugeln (was zulässig ist, da wegen (1) auch $1 \leq k + 1 - a \leq k$ gilt), so verbleiben nach diesem Zug genau z Kugeln in der Schachtel.

III. Aus I. und II. folgt: Jede Zahl z der Form

$$m(k + 1) + 1, m = 0, 1, 2, ..., \quad (2)$$

hat die genannte Eigenschaft. Insbesondere folgt hiermit als eine Lösung zu b): Ist n eine Zahl der Form (2), d. h., lässt n bei Division durch $k + 1$ den Rest 1, so kann der nachziehende Spieler den Gewinn erzwingen.

IV. Ferner folgt als eine Lösung zu a) : Ist n von der Form $m(k+1)+r$, $m=0,1,2,...$, $1<r\leq k+1$, d. h., lässt n bei Division durch $k+1$ einen von 1 verschiedenen Rest, so kann der anziehende Spieler den Gewinn erzwingen.
Er kann nämlich im ersten Zug $r-1$ Kugeln entnehmen (was wegen $0<r-1\leq k$ zulässig ist), und hiernach ist die Anzahl z der verbliebenen Kugeln von der Form (2).

V. Da die unter III. und IV. angegebenen Lösungen der Aufgaben a) und b) alle überhaupt vorhandenen Möglichkeiten erschöpfen, sind sie auch jeweils die einzigen Lösungen der betreffenden Aufgabe.

III. Runde 3

Aufgabe 231233B:
Zwei Personen A und B spielen das folgende Spiel:
20 Karten, von denen jede mit genau einer der Zahlen 1, 2, 3, . . . , 20 beschriftet ist (wobei jede dieser Zahlen vorkommt), liegen aufgedeckt, so dass die Zahlen zu sehen sind, auf dem Tisch. Von diesen Karten hat A in Gedanken zwei ausgewählt, ohne dass B weiß, um welche Karten es sich handelt.
B versucht nun, diese beiden Karten wie folgt zu ermitteln: Als ersten Zug nimmt B zwei beliebig von ihm ausgewählte Karten, und A sagt ihm, wie viele von diesen beiden Karten richtig sind (0, 1 oder 2 Karten).
Dann legt B diese Karten wieder aufgedeckt zurück.
Waren es noch nicht die beiden richtigen Karten, so nimmt B beim zweiten Zug wieder zwei beliebig von ihm gewählte Karten, und A sagt ihm, wieviele davon richtig sind; B legt dann diese Karten wieder zurück.
Dieses Verfahren wird so lange mit dem 3., 4., . . . Zug fortgesetzt, bis B in einem dieser Züge die beiden richtigen Karten genommen hat. B hat gewonnen, wenn er spätestens mit dem 12. Zug die beiden richtigen Karten nimmt.
Bei einer Durchführung dieses Spieles beginnt B das Spiel mit der folgenden Strategie:
Er nimmt im 1. Zug die Karten 1, 2 und, falls dies noch nicht die beiden richtigen Karten sind,
im 2. Zug die Karten 3, 4 sowie, in entsprechender Weise fortgesetzt, falls in keinem der bisherigen Züge die beiden richtigen Karten (gleichzeitig in ein und demselben Zug) vorkamen, im 9. Zug die Karten (17, 18).

a) Man gebe zu dieser von B begonnenen Strategie eine Fortsetzungsstrategie für die weiteren Züge an, mit deren Hilfe B den Gewinn erzwingen kann.
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass B bei der angegebenen Strategie sogar spätestens mit dem 11. Zug die beiden richtigen Karten nimmt?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Es sind genau die beiden folgenden Fälle möglich:

1. Fall: Unter den Paaren $(1{,}2),(3{,}4),\ldots,(19{,}20)$ befindet sich das richtige Paar.
In diesem Fall hat B entweder nach höchstens 9 Zügen das Paar mit den richtigen Karten genommen, oder er kann aus den Antworten „Null“ auf die ersten 9 Züge erkennen, dass (19,20) das richtige Paar ist. Er nimmt es mit dem 10. Zug und hat damit den Gewinn erzielt.

2. Fall: Unter den Paaren $(1{,}2),(3{,}4),\ldots,(19{,}20)$ befinden sich genau zwei Paare, in denen jeweils eine Karten richtig ist.
In diesem Fall weiß B spätestens nach dem 9. Zug, welche Paare dies sind.
Es seien die Paare $(a_1{,}a_2)$ und $(a_3{,}a_4)$ (etwa mit $a_1<a_2<a_3<a_4$). Dabei sind genau die in der folgenden Tabelle angegebenen vier Fälle möglich (die Angabe W unter a_i bedeutet, dass a_i eine der richtigen Karten ist; die Angabe F, dass a_i keine der richtigen Karten ist):

Fall	a_1	a_2	a_3	a_4
2.1.	W	F	W	F
2.2.	W	F	F	W
2.3.	F	W	W	F
2.4.	F	W	F	W

Jetzt nimmt B im 10. Zug die Karten (a_1, a_3).
Im Fall 2.1. hat er damit die richtigen Karten genommen und das Spiel gewonnen.
Im Fall 2.4. erfährt er mit der Antwort „Null“ auf den 10. Zug, dass (a_2, a_4) das richtige Paar ist. Er nimmt es mit dem 11. Zug und gewinnt damit.
In den Fällen 2.2. und 2.3., die durch die Antwort „Eins“ auf den 10. zug charakterisiert ist, nimmt B im 11. Zug die Karten (a_1, a_4). Lag der Fall 2.2. vor, so hat B damit gewonnen. Lag aber der Fall 2.3. vor, so erfährt B dies in der Antwort „Null“ auf den 11. Zug. Er nimmt im 12. Zug (a_2, a_3) und gewinnt damit.
Durch die angegebene Strategie erzwingt B also den Gewinn.

b) Für jedes Paar (z_1, z_2) aus zwei verschiedenen der Zahlen $1, \ldots, 20$ gilt:
Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Zahl z_1 eine der beiden richtigen Zahlen ist, beträgt $P_1 = \frac{2}{20}$; die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dann z_2 die andere richtige Zahl ist, beträgt $P_2 = \frac{1}{19}$.
Also beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass (z_1, z_2) das richtige Paar ist, $P_1 \cdot P_2 = \frac{1}{190}$.
Daher beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich unter den Paaren (1,2), ..., (19,20) das richtige befindet (1. Fall): $10 \cdot \frac{1}{190} = \frac{1}{19}$.

Also beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Fall 2 eintritt $1 - \frac{1}{19} = \frac{18}{19}$. Die vier Fälle 2.1. bis 2.4. haben einander gleiche Wahrscheinlichkeit. B hat genau dann nach 11 Zügen den Gewinn noch nicht erreicht, wenn der Fall 2.3. vorliegt. Die Wahrscheinlichkeit hierfür beträgt folglich $\frac{1}{4} \cdot \frac{18}{19} = \frac{9}{38}$.
Also beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass B den Gewinn spätestens nach 11 Zügen erreicht hat $1 - \frac{9}{38} = \frac{29}{38} \approx 0.763$.

Aufgabe 261235:
Zwei Personen, A und B, spielen mit n in einer Geraden angebrachten Lampen ($n > 3$) das folgende Spiel:
Zum Spielbeginn sind alle Lampen ausgeschaltet. Eine ganze Zahl k mit $1 < k < n-1$ wird vereinbart.
Dann verläuft das Spiel so, dads die Spieler, mit A beginnend, abwechselnd am Zuge sind:
Jeder Spieler schaltet, wenn er am Zug ist, nach eigener Wahl eine Anzahl nebeneinanderliegender Lampen ein, mindestens eine und höchstens k. Gewonnen hat derjenige Spieler, der die letzte der n Lampen einschaltet.
Man beweise, dass Spieler A für jedes $n > 3$ und jedes k mit $1 < k < n - 1$ durch eine geeignete Vorgehensweise (Strategie) den Gewinn erzwingen kann.

Lösung von Kornkreis:
Wir bezeichnen die Lampen der Reihe nach mit $1, \ldots, n$ und eine Konfiguration von Ein-/Auszuständen der Lampen als symmetrisch, wenn die beiden Lampen in jedem der Lampenpaare $(1,n)$; $(2, n-1)$; ...; $\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil\right)$ jeweils denselben Ein-/Auszustand haben (wenn n ungerade ist, ist im letzten Lampenpaar nur eine Lampe, sodass für dieses die Gleichheit der Zustände trivialerweise vorliegt).

Lemma: Spieler A hat eine Strategie, sodass er mit jedem seiner Züge immer eine symmetrische Konfiguration erzielt und Spieler B mit jedem seiner Züge zwangsläufig eine nicht-symmetrische Konfiguration hervorruft.
Beweis: Im ersten Zug schalte Spieler A die Lampe(n) der Nummer $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil$ an, was eine symmetrische Konfiguration ergibt. Das geht für jedes $1 < k < n - 1$ und jedes $n > 3$.
Sei nun irgendwann im Spielverlauf eine symmetrische Konfiguration gegeben, die nach einem Spielzug von A entstand, und es seien noch ausgeschaltete Lampen vorhanden.

Da nur nebeneinanderliegende ausgeschaltete Lampen angeschaltet werden können, kann Spieler B nun entweder Lampen mit kleinerer Nummer als $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ oder mit größerer Nummer als $\lceil \frac{n+1}{2} \rceil$ anschalten. Dies seien die Lampen $i, \dots, j$. Aufgrund der Symmetrie vor B's Zug sind die Lampen $n-i+1, \dots, n-j+1$ sowohl vor als auch nach B's Zug ausgeschaltet. Demnach ist die Konfiguration nach B's Zug nicht mehr symmetrisch. Spieler A hingegen kann nach B's Zug durch Anschalten der Lampen $n-i+1, \dots, n-j+1$ wieder eine symmetrische Konfiguration erreichen. Damit ist das Lemma bewiesen.

Da die Anzahl der ausgeschalteten Lampen durch die Spielzüge von A und B streng monoton abnimmt, und eine endliche Anzahl von Lampen am Anfang vorlag, muss das Spiel irgendwann enden. Wenn A nach obiger Strategie spielt, macht also zwangsläufig A den letzten Zug, weil die Konfiguration, bei der alle Lampen angeschaltet sind, symmetrisch ist, was B nicht erreichen kann. Damit ist die Behauptung der Aufgabe bewiesen.

IV. Runde 4

Aufgabe 101244:
Zwei Personen A und B spielen folgendes Spiel:
In dem Gleichungssystem

$$x + a_1 y = b_1 \qquad (1) \qquad ; \qquad a_2 y + b_2 z = a_3 \qquad (2) \qquad ; \qquad b_3 x + a_4 z = b_4 \qquad (3)$$

wählt zunächst A für den Koeffizienten a_1, dann B für den Koeffizienten b_1, dann wieder A für $a2$, dann B für $b2$ usw., zum Schluss B für b_4 je eine beliebige ganze Zahl.
A hat genau dann gewonnen, wenn das System (1), (2), (3) genau eine ganzzahlige Lösung (x, y, z) hat.
a) Kann A so spielen, d. h., kann er die Koeffizienten $a_1, ..., a_4$ jeweils nach der Wahl von $b_1, ..., b_3$ durch B so auswählen, dass er gewinnt?
b) Kann A von vornherein für die Koeffizienten $a_1, ..., a_4$ solche Werte angeben, dass er unabhängig von der Wahl der Koeffizienten durch B (in jedem Falle) gewinnt?

Lösung von StrgAltEntf:
Die Antwort zu b (und damit auch zu a) lautet ja.

A wählt $a_1 = a_3 = 0$ und $a_2 = a_4 = 1$. Das Gleichungssystem lautet dann

(1) $x = b_1$
(2) $y + b_2 z = 0$
(3) $b_3 x + z = b_4$

Dieses Gleichungssystem besitzt die eindeutige und ganzzahlige Lösung

$$x = b_1 \qquad , \quad y = b_1 b_2 b_3 - b_2 b_4 \qquad , \qquad z = b_4 - b_1 b_3$$

Aufgabe 211242:
Zwei Personen A und B spielen das folgende Spiel:
In dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 z &= 1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z &= 1 \qquad (1) \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z &= 1 \end{aligned}$$

belegt zunächst A einen der Koeffizienten a_i, b_i, c_i $(i = 1, 2, 3)$ mit einer von ihm gewählten natürlichen Zahl.
Dann belegt B einen der verbleibenden Koeffizienten mit einer von ihm gewählten natürlichen Zahl, dann wieder A, dann B usw., bis endlich A den letzten (neunten) Koeffizienten mit einer natürlichen Zahl belegt.
A hat gewonnen, wenn nach diesen Belegungen das Gleichungssystem (1) genau eine reelle Lösung (x, y, z) besitzt.
B hat gewonnen, wenn nach den Belegungen das Gleichungssystem (1) keine oder unendlich viele reelle Lösungen (x, y, z) besitzt.
Man untersuche, ob B durch geeignete Belegungen in jedem Falle den Gewinn erzwingen kann.

Lösung von Zeitschrift „Mathematik in der Schule“:
Es sei (x,y,z) eine Lösung des Gleichungssystems (1). Dann gilt

$$(a_2c_1 - a_1c_2)x + (b_2c_1 - b_1c_2)y = c_1 - c_2$$
$$(a_3c_2 - a_2c_3)x + (b_3c_2 - b_2c_3)y = c_2 - c_3$$
$$(a_1c_3 - a_3c_1)x + (b_1c_3 - b_3c_1)y = c_3 - c_1$$

Hieraus erhält man durch Multiplikation mit b_3, b_2 bzw. $B - 1$ und Addition

$$D \cdot x = (c_1 - c_2)b_3 = (c_2 - c_3)b_1 + (c_3 - c_1)b_2 \qquad (2)$$

wobei

$$D = a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 \qquad (3)$$

ist. Ferner erhält man

$$D \cdot y = (a_1 - a_2)c_3 + (a_2 - a_3)c_1 + (a_3 - a_1)c_2 \quad \text{und} \qquad (4)$$

$$D \cdot z = (b_1 - b_2)a_3 + (b_2 - b_3)a_1 + (b_3 - b_1)a_2 \qquad (5)$$

Das Gleichungssystem (1) hat daher wegen (2), (4) und 85) im Falle $D \neq 0$ genau eine reelle Lösung, so dass A gewinnt; im Falle $D = 0$ keine oder unendlich viele reelle Lösungen, so dass B gewinnt.
Daher kann B mit der folgenden Strategie den Gewinn erzwingen, d. h. erreiche, dass $D = 0$ wird:

1. O. B. d. A. sei angenommen, dass A zuerst den Koeffizienten a_1 belegt hat (auf diese Möglichkeit lassen sich alle anderen durch Vertauschen von Gleichungen oder Vertauschen von Unbekannten zurückführen). Dann belegt B den Koeffizienten c_2 mit 0 und erreicht damit

   $$D = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1$$

   worin nun der Koeffizient a_1 bereits festgelegt ist.

2. Belegt nun A den Koeffizienten c_3, so belegt B den Koeffizienten b_2 mit 0 und erreicht

   $$D = a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3$$

   Belegt dagegen A einen anderen Koeffizienten, so belegt B den Koeffizienten c_3 mit 0 und erreicht

   $$D = a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1$$

   In beiden Fällen ist in der erhaltenen Darstellung von D höchstens ein Koeffizient festgelegt (im ersten Fall ist dies genau der Koeffizient c_3).

3. Belegt jetzt A einen weiteren Koeffizienten, so kommen höchstens in einem der beiden Produkte (aus der erreichten Darstellung von D) zwei bereits festgelegte Koeffizienten vor. B kann dann in einem Produkt mit maximaler Anzahl festgelegte Koeffizienten einen weiteren Koeffizienten mit 0 belegen und damit

   $$D = a_2b_3c_1 \qquad \text{oder} \qquad D = -a_3b_2c_1$$

   erreichen, worin jeweils höchstens ein Koeffizient festgelegt ist.

4. Gleichgültig welchen Koeffizienten A nun belegt, erreicht B durch Belegung des noch freien Koeffizienten mit 0, dass $D = 0$ wird.

   Unabhängig davon, welche weitere Belegungen bis zum Ende des Spiels noch vorgenommen werden, hat damit B den Gewinn erzwungen, da im Falle $D = 0$ das Gleichungssystem (1) keine oder unendlich viele Lösungen besitzt.

Aufgabe 291246A:
In zwei Urnen A und B befinden sich insgesamt genau m rote und genau n blaue Kugeln.
Die Gesamtzahl der Kugeln ist größer als 2; mindestens eine der Kugeln ist rot.
Zu Beginn enthält A alle roten und B alle blauen Kugeln.
Indem nacheinander abwechselnd aus A und B jeweils eine zufällig ausgewählte Kugel herausgenommen und in die andere Urne hineingelegt wird, sollen die Kugeln vermischt werden.
Begonnen wird mit der Entnahme aus Urne A.
Man ermittle alle diejenigen Paare $(m; n)$ von Anzahlen m und n, bei deren Vorgabe die vierte umgelegte Kugel mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ 2 rot ist.
Hinweis:
Enthält eine Urne genau Z Kugeln, so wird hier unter zufälliger Auswahl einer Kugel verstanden, dass für alle Z Kugeln die Wahrscheinlichkeit ihrer Auswahl gleich $\frac{1}{Z}$ ist.
Werden allgemeiner von M möglichen Ereignissen G als günstig und $M - G$ als ungünstig angesehen und sind alle M Ereignisse gleichwahrscheinlich, so ist die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines günstigen Ereignisses gleich $\frac{G}{M}$.

Lösung von Monika Noack:
1. Für jeden Zug, bei dem eine Kugel aus Urne A in Urne B gelegt wird, gibt es genau m gleichwahrscheinliche Möglichkeiten; bei einem Zug, wo eine Kugel von B nach A gelegt wird, sind es genau $n + 1$ gleichwahrscheinliche Möglichkeiten.
Insgesamt gibt es daher für die Folge der ersten vier Züge genau $m^2(n + 1)^2$ verschiedene gleichwahrscheinliche Möglichkeiten.

2. Wir bestimmen nun die Anzahl der Möglichkeiten im ersten bis vierten Zug, eine rote bzw. eine blaue Kugel herauszugreifen:
Für den Fall, dass im 1. Zug eine rote Kugel gegriffen wird, gibt es genau m Möglichkeiten (dass eine blau gegriffen wird, 0 Möglichkeiten).
Im 2. Zug gibt es für jeden der m (durch den 1. Zug möglichen) Fälle genau n Möglichkeiten, eine blaue Kugel und genau eine Möglichkeit, eine rote Kugel zu greifen.
Im 3. Zug gibt es für jeden der $n \cdot m$ Fälle (wo im 2. Zug eine blaue Kugel gegriffen wurde) $(m - 1)$ Möglichkeiten, eine rote und 1 Möglichkeit, eine blaue Kugel herauszugreifen. Für jeden der $1 \cdot m$ Fälle (wo im 2. Zug eine rote Kugel gegriffen wurde) gibt es m Möglichkeiten, eine rote und 0 Möglichkeiten, eine blaue Kugel herauszugreifen.
Schließlich gibt es beim 4. Zug für jeden der $(m-1) \cdot n \cdot m$ Fälle (2. Zug blau, 3. Zug rot) 2 Möglichkeiten, eine rote (und $n - 1$ Möglichkeiten, eine blaue) Kugel zu greifen; für jede der $1 \cdot n \cdot m$ Fälle (2. und 3. Zug blau) genau 1 Möglichkeit, eine (und n Möglichkeiten, eine blaue) Kugel zu greifen; für jeden der $m \cdot 1 \cdot m$ (2. und 3. Zug rot) genau 1 Möglichkeit, eine rote (und n Möglichkeiten, eine blaue) Kugel herauszugreifen.

So ergibt sich als Anzahl S der günstigen Fälle (d. h. im 4. Zug wird eine rote Kugel gegriffen):

$$S = 2 \cdot (m - 1) \cdot n \cdot m + 1 \cdot 1 \cdot n \cdot m + 1 \cdot m \cdot 1 \cdot m$$

Also ist die Menge aller ganzzahligen Paare $(m; n)$ zu finden, für die

$$\frac{m \cdot n + 2(m - 1)n \cdot m + m^2}{m^2(n + 1)^2} = \frac{1}{2}$$

ist. Wegen $m \neq 0$ gilt diese Gleichung genau dann, wenn

$$m - 2n + 2mn - mn^2 = 0 \qquad (*)$$

ist, woraus folgt, dass einerseits m ein teiler von $2n$ ist, andererseits aber m von n geteilt wird. Somit gilt $m = t \cdot n$ mit $t = 1$ oder $t = 2$. Für $t = 1$ wird (*) zu

$$-n + 2n^2 - n^3 = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad n \cdot (n-1)^2 = 0$$

Diese Gleichung hat wegen $n = m$ und $n + m > 2$ keine Lösung. Der Fall $t = 2$ hingegen führt zu $4n^2 - 2n^3 = 0$, woraus unmittelbar $n = 2$, $m = 4$ folgt.
Diese Zahlen erfüllen in der Tat die Ausgangsgleichung. Also hat genau die Vorgabe von 4 roten und 2 blauen Kugeln die in der Aufgabe verlangte Eigenschaft.

Aufgabe 341246B:
Zwei Personen P und Q spielen das folgende Spiel:
In der Gleichung $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ belegt zunächst P, danach Q und schließlich wieder P je einen noch nicht belegten der drei Koeffizienten a, b, c mit einer reellen Zahl.
Das Spiel ist genau dann für P gewonnen, wenn die so entstandene Gleichung drei paarweise verschiedene reelle Lösungen hat.
Man untersuche, ob P bei jeder Spielweise von Q den Gewinn erzwingen kann.

Lösung von MontyPythagoras:
Wenn die Funktion

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

drei reelle Lösungen haben soll, dann hat die Ableitung zwei reelle Nullstellen, also:

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

Die Lösungen für $f'(x) = 0$ lauten:

$$x_{1,2} = -\frac{1}{3}a \pm \sqrt{\frac{1}{9}a^2 - \frac{1}{3}b}$$

Sollte P als erstes den Koeffizienten a vorgeben, gewinnt Q auf jeden Fall, wenn er $b > \frac{1}{3}a^2$ wählt, da dann der Term unter der Wurzel negativ wird, die Funktion damit keine Extremata aufweist und folglich auch keine drei reellen Nullstellen. P's Strategie muss somit zunächst sein, entweder sicherzustellen, dass es auf jeden Fall zwei Extremata gibt, indem er ein $b < 0$ vorgibt, oder er beginnt mit der Vorgabe von c. Dann kann Q im nächsten Schritt zumindest nicht die Negativität des Wurzelterms erzwingen, da P als letzten Zug $a^2 > 3b$ wählen könnte.
Wir kürzen wie folgt ab:

$$w = \sqrt{\frac{1}{9}a^2 - \frac{1}{3}b}$$

Setzt man die Nullstellen ein, so liegen die Extremata bei

$$y_{1,2} = \left(-\frac{1}{3}a \pm w\right)^3 + a\left(-\frac{1}{3}a \pm w\right)^2 + b\left(-\frac{1}{3}a \pm w\right) + c$$

$$y_{1,2} = -\frac{1}{27}a^3 \pm \frac{1}{3}a^2 w - aw^2 \pm w^3 + \frac{1}{9}a^3 \mp \frac{2}{3}a^2 w + aw^2 - \frac{1}{3}ab \pm bw + c$$

$$y_{1,2} = \frac{2}{27}a^3 \mp \frac{1}{3}a^2 w \pm w^3 - \frac{1}{3}ab \pm bw + c$$

$$y_{1,2} = \frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c \pm w\left(-\frac{1}{3}a^2 + w^2 + b\right)$$

$$y_{1,2} = \frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c \pm w\left(w^2 - 3w^2\right)$$

$$y_{1,2} = \frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c \mp 2w^3$$

Wenn es drei Lösungen geben soll, dann müssen die beiden Funktionswerte $y_{1,2}$ unterschiedliche Vorzeichen haben, was genau dann der Fall ist, wenn

$$\left|\frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c\right| < 2w^3$$

Angenommen, P gibt wie oben gesagt ein $b < 0$ vor, wodurch natürlich auch $w > 0$ gilt, dann kann er im letzten Zug auf jeden Fall den Sieg erzwingen:

1. Wenn Q ein a wählt, kann P einfach $c = \frac{1}{3}ab - \frac{2}{27}a^3$ wählen. Dadurch ist die linke Seite der Ungleichung gleich null, sie ist damit erfüllt und P gewinnt.

2. Wenn Q ein c vorgibt, so kann P ein passendes a wählen, so dass die linke Seite der Ungleichung ebenso null wird, da die Funktion $g(x) = \frac{2}{27}x^3 - \frac{1}{3}bx + c$ auf jeden Fall eine reelle Nullstelle hat.

Zusammenfassend kann man also sagen, dass P auf jeden Fall gewinnt, wenn sein erster Zug in der Vorgabe eines $b < 0$ besteht und er in seinem zweiten Schritt bei der Festlegung des dritten Koeffizienten dafür sorgt, dass $\frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c = 0$ ist.