Thema: Zahlentheorie
Aufgaben und Lösungen der I. bis IV. Runde der Klassenstufen 5 bis 12 der Mathematik-Olympiaden von 1960 bis 1994

Zentrales Komitee für die Olympiaden Junger Mathematiker

unter Nutzung von Manuela Kugels
https://www.olympiade-mathematik.de/

zusammengestellt von Steffen Polster
https://mathematikalpha.de
Chemnitz, 2019/22

bearbeitet von Christian Hercher
Flensburg, 2022

I Klasse 5

I.I Primzahlen, Teilbarkeit

Runde 1

Aufgabe 340512:
Xaver und Yvette berichten: Jeder von uns hat sich eine natürliche Zahl gedacht. Wir haben diese Zahlen uns gegenseitig mitgeteilt.

Xaver sagt: Der Nachfolger meiner Zahl ist durch den Nachfolger von Yvettes Zahl teilbar.
Yvette sagt: Die Summe aus dem Nachfolger meiner Zahl und dem Nachfolger von Xavers Zahl ist eine ungerade Zahl.
Anette lässt sich das Produkt von Xavers Zahl und Yvettes Zahl sagen: Es beträgt 36.
Nenne zwei Zahlen, für die diese Aussagen zutreffen! Zeige, dass es keine weiteren derartigen Zahlen gibt!

Hinweis: Der Nachfolger einer natürlichen Zahl ist die um 1 größere Zahl. Beispielsweise hat 115 den Nachfolger 116.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Alle Möglichkeiten, 36 als Produkt zweier natürlicher Zahlen zu schreiben, sind

$$36 = 1 \cdot 36, \quad 36 = 2 \cdot 18, \quad 36 = 3 \cdot 12, \quad 36 = 4 \cdot 9, \quad 36 = 6 \cdot 6$$

Die Summe aus den Nachfolgern zweier Zahlen ist genau dann ungerade, wenn eine dieser Zahlen gerade, die andere ungerade ist. Hiernach verbleiben genau die Möglichkeiten

$$36 = 1 \cdot 36, \quad 36 = 3 \cdot 12, \quad 36 = 4 \cdot 9$$

Die hier genannten Zahlen haben die Nachfolger 2, 37 bzw. 4, 13 bzw. 5, 10. Genau im letzten Fall ist einer dieser beiden Nachfolger durch den anderen teilbar.
Also treffen die Aussagen genau dann zu, wenn Xavers Zahl 4 und Yvettes Zahl 9 lautet.

Runde 2

Aufgabe 010523:
Jemand behauptet, er könne 30 Äpfel so unter 3 Kinder (ungleichmäßig) verteilen, dass jedes Kind eine ungerade Anzahl Äpfel erhält.
Ist das möglich? Begründe deine Antwort!

Lösung von Steffen Polster:
Eine ungerade Zahl kann geschrieben werden als $2 \cdot n + 1$, wobei n eine beliebige natürliche Zahl ist. Bei dieser Aufgabenstellung soll die 30 sich als Summe von drei ungeraden Zahlen ergeben, d. h.

$$30 = (2 \cdot n_1 + 1) + (2 \cdot n_2 + 1) + (2 \cdot n_3 + 1) \qquad \Rightarrow \qquad 27 = 2 \cdot (n_1 + n_2 + n_3)$$

Da 27 eine ungerade Zahl ist und auf der rechten Seite der Gleichung auf Grund des Faktors 2 immer eine gerade Zahl entsteht, gibt es keine natürliche Zahlen n_1, n_2 und n_3 als Lösungen.
Es ist nicht möglich, wie gefordert die Äpfel unter den Kindern zu verteilen.

Aufgabe 030523:
Heidi, Fritz und Dieter sammeln Briefmarken. Auf die Frage, wie viel Briefmarken sie alle zusammen besitzen, antwortet Fritz:
„Jeder von uns hat eine ungerade Zahl von Briefmarken, zusammen sind es genau 500 Stück.“
Was meinst du zu dieser Behauptung?

Lösung von Steffen Polster:
Die Behauptung ist falsch.
Eine ungerade Zahl kann immer in der Form $2n+1$, wobei n eine natürliche Zahl ist, geschrieben werden.
Angenommen die Behauptung wäre richtig, so hätte Heidi $2a+1$, Fritz $2b+1$ und Dieter $2c+1$ Briefmarken.
Als Summe ergibt sich:

$$(2a+1)+(2b+1)+(2c+1)=2(a+b+c)+2+1=2(a+b+c+1)+1$$

Da $a+b+c+1$ eine natürliche Zahl ist, ist die Summe selbst ungerade. 500 ist aber eine gerade Zahl, so dass die Annahme, d. h. die Behauptung, nicht stimmen kann.

Aufgabe 050521:
Aus 36 gleich großen Quadraten soll durch Aneinanderlegen ein Rechteck gebildet werden.

a) Wie viel Lösungsmöglichkeiten gibt es? (Bei jeder Lösung sollen sämtliche Quadrate verwendet werden.)
b) Welches der möglichen Rechtecke hat den kleinsten Umfang?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Der Flächeninhalt des Rechtecks beträgt 36 Flächeneinheiten. Die Länge jeder Rechteckseite muss infolge der Konstruktion ein ganzzahliges Vielfaches der Länge einer Quadratseite sein. Daher gibt es die folgenden 5 Möglichkeiten:

l. Rechteck: Länge 1, Breite 36, Umfang 74 Einheiten,
2. Rechteck: Länge 2, Breite 18, Umfang 40 Einheiten,
3. Rechteck: Länge 5, Breite 12, Umfang 30 Einheiten,
4. Rechteck: Länge 4, Breite 9, Umfang 26 Einheiten,
5. Rechteck: Länge 6, Breite 6, Umfang 24 Einheiten.

b) Unter diesen Rechtecken hat das 5. Rechteck (Quadrat) den kleinsten Umfang.

Aufgabe 080524:
Ermittle zwei natürliche Zahlen a und b, die gleichzeitig folgenden beiden Bedingungen genügen:

(1) Die Differenz $a-b$ der beiden natürlichen Zahlen beträgt 3.
(2) Das Produkt dieser beiden natürlichen Zahlen beträgt 180.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Zahl 180 lässt sich nur auf die folgenden Weisen in zwei Faktoren a und b (mit natürlichen Zahlen a, b) zerlegen:

$$180=180\cdot 1=90\cdot 2=60\cdot 3=45\cdot 4=36\cdot 5=30\cdot 6=20\cdot 9=18\cdot 10=15\cdot 12$$

Dabei ist wegen 15 - 12 = 3 nur für $a=15$ und $b=12$ auch die Bedingung (1) erfüllt.

Aufgabe 090524:
Ermittle alle natürlichen Zahlen z, für die die nachfolgenden Bedingungen gleichzeitig gelten:

(a) z ist ungerade;
(b) z ist durch 3, 5 und 7 teilbar;
(c) $500 < z < 1000$.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Zahlen 3, 5 und 7 sind paarweise teilerfremd. Daher ist wegen $3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$ eine Zahl genau dann sowohl durch 3 als auch durch 5 als auch durch 7 teilbar, wenn sie ein ganzzahliges Vielfaches von 105 ist.
Nun gilt

$$4 \cdot 105 = 420 \quad , \quad 5 \cdot 105 = 525 \quad , \quad 6 \cdot 105 = 530 \quad , \quad 7 \cdot 105 = 735$$

$$8 \cdot 105 = 840 \quad , \quad 9 \cdot 105 = 945 \quad , \quad 10 \cdot 105 = 1050$$

Die Bedingungen (b) und (c) werden daher von den Zahlen 525; 630; 735; 840; 945 und nur von diesen erfüllt; denn jedes Vielfache von 105 mit einer kleineren ganzen Zahl als 5 ist kleiner als 500 und jedes Vielfache von 105 mit einer größeren ganzen Zahl als 9 ist größer als 1000.

Von diesen Zahlen erfüllen 525, 735 und 945 und nur diese auch die Bedingung (3). Die gesuchten Zahlen sind daher 525. 735 und 945 und nur diese.

Aufgabe 150522:
Bei den folgenden fünf Gleichungen sind für die Buchstaben x, y, z, u, v natürliche Zahlen so einzusetzen, dass wahre Aussagen entstehen. Dabei bedeuten gleiche Buchstaben gleiche Zahlen.

(1) $x = y : 40$,
(2) $z = 4 \cdot u$,
(3) $u = 280 : 7$,
(4) $160 = v + 40$,
(5) $y = z + v$.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Aus Gleichung (3) entsteht wegen $280 : 7 = 40$ genau dann eine wahre Aussage, wenn man $u = 40$ einsetzt.
Hiernach entsteht wegen $4 \cdot 40 = 160$ genau dann aus (2) eine wahre Aussage, wenn man $z = 160$ einsetzt.
Gleichung (4) wird genau dann wahr, wenn man $v = 120$ einsetzt; denn es gilt $160 = 120 + 40$, während die Summe aus 40 und je einer anderen Zahl als 120 eine andere Zahl als 160 ergibt.
Wegen $160 + 120 = 280$ wird (5) genau für $y = 280$ wahr, und wegen $280 : 40 = 7$ wird (1) genau für $x = 7$ wahr.

Aufgabe 240524:
Peter berichtet: „Ich habe eine natürliche Zahl aufgeschrieben. Eine zweite natürliche Zahl habe ich aus der ersten durch Anhängen einer Ziffer 0 gebildet. Die Summe der beiden Zahlen beträgt 3058.“

Beweise, dass man aus diesen Angaben eindeutig ermitteln kann, welche Zahl Peter als erste Zahl aufgeschrieben hat!
Gib diese Zahl an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn die gesuchte Zahl x lautet, so ist $10 \cdot x$ die durch Anhängen der Ziffer 0 gebildete Zahl. Die Summe beträgt folglich $11 \cdot x$; nach Peters Angabe gilt also $11 \cdot x = 3058$.

Wegen $3058 : 11 = 278$ folgt hieraus $x = 278$.
Damit ist bewiesen, dass man aus Peters Angaben die von ihm als erste aufgeschriebene Zahl eindeutig ermitteln kann. Sie lautet 278.

I.II (Dezimal-)Zahldarstellung, Reste

Runde 1

Aufgabe 030513:
Klaus hat sich für die „Knobelecke“ eine interessante Aufgabe ausgedacht:
Es sollen bei der Multiplikationsaufgabe

$$13 * \cdot \quad 7* = 1 * * * *$$

alle * so durch Ziffern ersetzt werden, dass alle drei Zahlen auf die gleiche Ziffer enden und dass beim Ergebnis an der Zehnerstelle die gleiche Ziffer steht wie an der Hunderterstelle.
Was hast du bei der Lösung dieser Aufgabe überlegt?

Lösung von Steffen Polster:
Da die letzten Stellen der zwei Faktoren und des Produkts die gleiche Ziffer x, mit $0 \leq x \leq 9$, haben, muss auch das Produkt aus x mit sich selbst wieder auf x enden.
Dies gilt nur für die Ziffern $x = 0$, $x = 1$, $x = 5$ und $x = 6$. Die zwei Faktoren sind also 130, 70 oder 131, 71 oder 135, 75 oder 136, 76. Die Multiplikation ergibt:

$130 \cdot 70 = 9100$ ist vierstellig und damit keine Lösung;
$131 \cdot 71 = 9301$ ist vierstellig und ebenfalls keine Lösung;
$135 \cdot 75 = 10125$ ist zwar fünfstellig, jedoch sind Zehner- und Hunderterstelle nicht gleich;
$136 \cdot 76 = 10336$ erfüllt alle Forderungen und ist somit einzige Lösung der Aufgabe.

Aufgabe 040512:
Nach der Eichordnung sind im Bereich von 1 g bis 1 kg nur Wägestücke in den Größen von:

1 g, 2 g, 5 g, 10 g, 20 g, 50 g, 100 g, 200 g, 500 g, 1 kg.

zugelassen. Mit einer Waage soll man alle Massebeträge zwischen 1 g und 2 kg in Abstufungen von 1 g ermitteln können. Dabei sollen die Wägestücke nur auf einer Seite aufgestellt werden.

Wie viel Wägestücke der oben angegebenen Sorten werden dann benötigt, wenn ihre Gesamtzahl möglichst gering sein soll?

Lösung von Steffen Polster:
Mit den Stücken 1 g, 2 g, 2 g, 5 g kann man alle Werte von 1 g bis 9 g erreichen, mit 10 g, 20 g, 20 g, 50 g alle möglichen Zehner von 10 g bis 90 g und mit 100 g, 200 g, 200 g, 500 g alle Hunderter von 100 g bis 900 g. Mit dem 1 kg Wägestücke sind alle Werte von 1 kg bis 2 kg bestimmbar, d. h. man benötigt die folgenden Wägestücke:
1 g, 2 g, 2 g, 5 g, 10 g, 20 g, 20 g, 50 g, 100 g, 200 g, 200 g, 500 g und 1 kg.

Aufgabe 040516:
Die Summe zweier natürlicher Zahlen beträgt 968. Ein Summand endet mit einer Null. Streicht man diese Null, so erhält man die andere Zahl.
Bestimme diese beiden Zahlen!

Lösung von Steffen Polster:
Die letzte Ziffer der kleineren Zahl muss 8 sein. Dann ist 8 aber auch die mittlere Ziffer der größeren Zahl.
Aus der angegebenen Summe erkennt man leicht, dass die beiden Summanden 88 und 880 lauten müssen.
Als Formel:

$$a + b = 968 \qquad ; \qquad a = 10 \cdot b$$

Einsetzen ergibt $10 \cdot b + b = 968$ mit $b = 88$ und folglich $a = 880$.

Aufgabe 060514:
Gesucht ist eine natürliche Zahl mit folgenden Eigenschaften:
Dividiert man 100 durch diese Zahl, so bleibt der Rest 4, dividiert man 90 durch diese Zahl, so bleibt der Rest 18.
Wie lautet die gesuchte Zahl?

Lösung von Steffen Polster:
a sei die gesuchte Zahl. Wenn 100 bei Division mit a den Rest lässt, ist 100 - 4 = 96 ein Vielfaches von a. Ebenso muss dann 90 - 18 = 72 ein Vielfaches von a sein. a ist aber auch größer als 18, da sonst kein Rest 18 entstehen würde.

72 und 96 haben nur einen gemeinsamen Teiler, der größer als 18 ist. Dieser Teiler ist 24, d. h. das gesuchte a ist 24.

Aufgabe 070513:
Gesucht ist die größte fünfstellige Zahl, für die folgendes gilt:
a) Die Zehnerziffer stellt eine halb so große Zahl dar wie die Tausenderziffer.
b) Die Einer- und die Hunderterziffer kann man vertauschen, ohne dass sich die fünfstellige Zahl ändert.

Lösung von Steffen Polster:
Eine fünfstellige natürliche Zahl mit den Ziffern [abcde] kann

$$z = 10000 \cdot a + 1000 \cdot b + 100 \cdot c + 10 \cdot d + e,$$

geschrieben werden. Dabei kann a jede Ziffer von 0 bis 9, b, c, d, e jedoch nur von 1 bis 9 annehmen. Mit der Aussage a) kann d durch b ersetzt werden: $\frac{b}{2} = d$. b kann nun aber nicht mehr 9 werden. Die Aussage b) führt zu $e = c$. Damit wird:

$$z = 10000a + 1000b + 100c + 5b + c = 10000a + 1005b + 101c$$

Eine Summe wird dann am größten, wenn jeder Summand möglichst groß ist. Mit den Einschränkungen sind a und c maximal 9 und b maximal 8. Die gesuchte Zahl ist somit

$$z = 10101 \cdot 9 + 1005 \cdot 8 = 90909 + 8040 = 98949$$

Aufgabe 090512:
In einer Mathematikarbeitsgemeinschaft wurde die folgende Aufgabe aus einem sowjetischen Lehrbuch gestellt:

Wassja kaufte zwei Alben für Briefmarken. Kolja fragte ihn, wie viel er dafür bezahlt habe.
„Ich verwendete zur Bezahlung nur Geldstücke einer Sorte“, antwortete Wassja, „und zwar für das eine Album genau 7, für das andere genau 5. Für beide Alben bezahlte ich insgesamt 60 Kopeken.“

(In der Sowjetunion gibt es 1-, 2-, 3-, 5-, 10-, 15-, 20- und 50-Kopekenstücke und keine anderen Sorten von Kopekenstücken.)
Wie viel Kopeken kostete das eine und wie viel das andere Album?

Lösung von Steffen Polster:
a sei die Sorte, mit der das erste Album bezahlt wurde, b entsprechend die Sorte für das zweite Album. a und b können einen Wert von 1, 2, 3, 5, 10, 15, 20, 50 annehmen.
Da einmal 7 und einmal 5 Münzen verwendet wurden, gilt $7a + 5b = 60$ Kopeken.

Da a und b natürliche Zahlen größer Null sind, muss $5b = 60 - 7a$ eine natürliche Zahl sein, d. h. $60 - 7a$ ist eine durch 5 teilbare Zahl.
Für die möglichen Werte von $a = 1$, 2, 3, 5 (ab 10 wird $60 - 7a < 0$) ergibt sich $60 - 7a = 53, 46, 39, 25$.
Nur ein Ergebnis, die 25, ist durch 5 teilbar und $b = 5$. a ist dann ebenfalls 5.

Damit kostete erste Album 35 Kopeken und das 2. Album 25 Kopeken. Das erste Album wurde mit 7× 5-Kopekenstücken bezahlt, das zweite Album mit 5× 5 Kopekenstücken.

Aufgabe 110514:
Es soll das Produkt $21 \cdot 12 \cdot 25$ berechnet werden.
Manfred will diese Aufgabe schriftlich lösen.
Annerose sagt: „Mit Hilfe eines Rechenvorteils kann ich die Aufgabe auch im Kopfe rechnen.“
Gib an, welchen Rechenvorteil Annerose benutzt haben könnte!

Lösung von Steffen Polster:
Annerose nutzt zum Beispiel, dass $4 \cdot 25 = 100$ ist. Da 12 durch 4 teilbar ist (Ergebnis 3), kann sie rechnen: $21 \cdot 3 = 63$.
Die noch fehlende Multiplikation mit 100 wird durch Anhängen von 2 Nullen erreicht. Das Ergebnis ist damit 6300.

Aufgabe 170513:
Fritz möchte eine Subtraktionsaufgabe aufschreiben, bei der die Differenz zweier natürlicher Zahlen zu bilden ist.
Als Ergebnis soll eine dreistellige Zahl entstehen, deren drei Ziffern alle einander gleich sind. Der Minuend soll eine Zahl sein, die auf Null endet. Streicht man diese Null, so soll sich der Subtrahend ergeben.
Gib alle Subtraktionsaufgaben an, für die das zutrifft!

Lösung von Steffen Polster:
m sei der auf Null endende Minuend sein, s der Subtrahend s. Streicht man bei m die Null, so ergibt sich s, d. h. der Minuend ist das Zehnfache des Subtrahenden: $m = 10s$. Die Differenz $m - s$ ist damit $10s - s = 9s$.

Die Differenz ist eine dreistellige Zahl, bei der alle Ziffern gleich sind. n sei diese Ziffer ($n = 1, 2, ..., 9$), d. h.

$$9s = 100n + 10n + n = 111n \qquad \Rightarrow \qquad 3s = 37n$$

Da 37 nicht durch teilbar ist, muss 3 durch teilbar sein. Probiert man die möglichen $n = 3, 6, 9$, ergibt sich
$n = 3 \Rightarrow s = 37, m = 370 \Rightarrow 370 - 37 = 333$
$n = 6 \Rightarrow s = 74, m = 740 \Rightarrow 740 - 74 = 666$
$n = 9 \Rightarrow s = 111, m = 1110 \Rightarrow 1110 - 111 = 999$.
Damit gibt es drei mögliche Subtraktionsaufgaben.

Aufgabe 240512:
Roland löste eine Divisionsaufgabe. Er erhielt als Ergebnis den Quotienten 36.
Roland machte die Probe, indem er den Divisor mit diesem Quotienten multiplizierte. Dabei las er versehentlich im Divisor statt einer Ziffer 7 eine 1 und erhielt als Ergebnis dieser Multiplikation nicht den gegebenen Dividenden, sondern die Zahl 756.
Wie hieß die Divisionsaufgabe, die Roland lösen sollte?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Bei der Probe multiplizierte Roland die falsche Zahl mit 36 und erhielt 756. Wegen $756 : 36 = 21$ war diese falsche Zahl 21. Der Fehler war entstanden, indem er statt einer 7 eine 1 gelesen hatte. Die richtige Zahl hätte also 27 lauten müssen.
Mit dieser hätte Roland bei seiner Probe $27 \cdot 36 = 972$ erhalten. Dies war somit der gegebene Dividend.
Die Divisionsaufgabe, die Roland lösen sollte, hieß folglich $972 : 27$.

Aufgabe 290512:
Wenn man zwei zweistellige Zahlen hintereinanderschreibt, entsteht eine vierstellige Zahl.
Gib zwei zweistellige Zahlen so an, dass die Summe aus diesen beiden Zahlen und der daraus gebildeten vierstelligen Zahl genau 1478 beträgt!
(Ein Nachweis, dass es nur eine einzige Möglichkeit für zwei solche Zahlen gibt, wird nicht verlangt. Du kannst aber versuchen, einen solchen Nachweis zu finden.)

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Zwei solche Zahlen sind 14 und 32; denn es gilt 14 + 32 + 1432 = 1478.

Aufgabe 320512:
Gesucht ist die größte sechsstellige Zahl, für die folgendes gilt:

a) Die Zahl ist gerade.
b) Die Zehnerziffer stellt eine dreimal so große Zahl dar wie die Zehntausenderziffer.
c) Die Einer- und die Tausenderziffer kann man vertauschen, ohne dass sich die sechsstellige Zahl ändert.
d) Die Hunderterziffer stellt eine halb so große Zahl dar wie die Hunderttausenderziffer.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Nach d) muss die Hunderttausenderziffer gerade sein; damit sie so groß wie möglich wird, versucht man zunächst für die Acht und somit für die Hunderterstelle Vier eine Lösung zu finden.
Nach b) kann die Zehntausenderziffer nicht größer als Drei sein, also versucht man, mit der Zehntausenderziffer Drei und somit mit der Zehnerziffer Neun eine Lösung zu finden.
Da nach a) und c) an der Einer- und an der Tausenderstelle dieselbe gerade Ziffer steht, versucht man - um die größte Zahl zu erhalten - jeweils eine Acht einzusetzen.

Die jetzt erhaltene Zahl 838498 erfüllt die Bedingungen a), b), c) und d) und ist nach Konstruktion die größtmögliche.

Aufgabe 330511:
Bernd fragt seinen Großvater: „Wie viele Jahre mag dieses Foto alt sein?“
Er bekommt zur Antwort: „Addiere die größte einstellige Zahl und die größte zweistellige Zahl und die größte dreistellige Zahl! Dann subtrahiere die kleinste vierstellige Zahl, und du erhältst die Altersangabe.“

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die größte einstellige Zahl ist 9, die größte zweistellige Zahl ist 99, die größte dreistellige Zahl ist 999. Durch Addieren dieser drei Zahlen ergibt sich 1107. Die kleinste vierstellige Zahl ist 1000. Subtrahiert man sie von der vorigen Zahl, so ergibt sich 107.
Das Foto ist also 107 Jahre alt.

Aufgabe 330514:
Die Zahlen 100 und 90 sollen beide durch eine gesuchte Zahl geteilt werden. Im ersten Fall soll der Rest 4 und im zweiten Fall der Rest 18 bleiben.
Zeige, dass es hierfür genau eine gesuchte Zahl gibt; finde sie und bestätige, dass sie das Verlangte leistet!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Würde man nicht 100, sondern $100 - 4 = 96$ durch die gesuchte Zahl teilen, so würde die Division ohne Rest aufgehen. Ebenso würde kein Rest bleiben, wenn man nicht 90, sondern $90 - 18 = 72$ durch die gesuchte Zahl teilen würde. Ferner muss die gesuchte Zahl größer als 18 sein, da der Rest stets kleiner ist als die Zahl, durch die man teilt.

Die einzigen Zahlen, durch die sich 72 ohne Rest teilen lässt und die größer als 18 sind, sind die Zahlen 24 und 36. Durch 36 ist aber 96 nicht ohne Rest teilbar.
Damit ist gezeigt, dass es nur eine Zahl geben kann, die als die gesuchte Zahl in Frage kommt, nämlich 24.
Bestätigung: $100 : 24 = 4$, Rest 4 $90 : 24 = 3$, Rest 18

Runde 2

Aufgabe 040523:
a) Wie viel zweistellige natürliche Zahlen gibt es, bei denen die Differenz der beiden Ziffern gleich 5 ist?

b) Bei wie vielen dieser Zahlen ist die Zahl selbst achtmal so groß wie ihre Quersumme, d. h. wie die Summe ihrer beiden Ziffern?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Es gibt neun dieser Zahlen, nämlich 16, 27, 38, 49, 50, 61, 72, 83, 94.
b) Der zusätzlichen Bedingung genügt nur die Zahl 72.

Aufgabe 060522:
Gesucht ist eine zweistellige natürliche Zahl mit folgenden Eigenschaften:
Die Summe ihrer Ziffern beträgt 10. Vertauscht man ihre Ziffern und addiert zu dieser dadurch entstandenen Zahl die Zahl 2, so erhält man das Dreifache der ursprünglichen Zahl.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die durch Vertauschung der Ziffern entstehende Zahl muss größer sein als die ursprüngliche Zahl, da sie gleich dem um 2 verminderten Dreifachen dieser Zahl sein soll.
Bei der ursprünglichen Zahl ist also die Anzahl der Zehner kleiner als die der Einer. Man braucht daher unter Berücksichtigung der Bedingung, dass die Summe der beiden Anzahlen 10 beträgt, nur die Zahlen 19, 28, 37 und 46 in Betracht zu ziehen.
Von ihnen erfüllt 28 und nur 28 die Bedingungen der Aufgabe.

Aufgabe 070522:
Von einer zweistelligen Zahl z ist bekannt, dass die Einerziffer eine dreimal so große Zahl darstellt wie die Zehnerziffer. Vertauscht man die Ziffern, so entsteht eine Zahl, die um 36 größer als die ursprüngliche ist.
Wie lautet z im Dezimalsystem?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es gibt genau drei zweistellige Zahlen, bei denen die Anzahl der Einer dreimal so groß ist wie die der Zehner, nämlich 15, 26, 59.
Von ihnen erfüllt nur 26 die Bedingungen der Aufgabe; denn

$$31 - 13 = 18, \qquad 62 - 26 = 36, \qquad 93 - 39 = 549$$

Daher ist $z = 26$.

Aufgabe 110524:
Ermittle alle diejenigen zweistelligen natürlichen Zahlen z, von denen jede alle folgenden Bedingungen gleichzeitig erfüllt:
(a) Die Zahl z ist nicht durch 10 teilbar.
(b) Subtrahiert man die Einerziffer der Zahl von ihrer Zehnerziffer, so erhält man 4.
(c) Vertauscht man die Ziffern von z miteinander, dann erhält man eine neue zweistellige Zahl z_1, deren Dreifaches kleiner ist als z.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Bedingung (1) ist genau dann erfüllt, wenn die Einerziffer der gesuchten Zahlen nicht 0 ist. Daher werden die Bedingungen (1) und (2) genau von den Zahlen 51; 62; 73; 84; 95 erfüllt.
Vertauscht man jeweils ihre Ziffern, dann erhält man der Reihe nach die Zahlen 15; 26; 37; 48; 59.

Das Dreifache dieser Zahlen beträgt der Reihe nach 45; 78; 111; 144; 177. Wegen $45 < 51$ und $78 > 62$; $111 > 73$; $144 > 84$; $177 > 95$ erfüllt somit genau die Zahl 51 alle Bedingungen der Aufgabe.

Aufgabe 180522:
Marie-Luise möchte eine zweistellige natürliche Zahl z angeben, die die folgenden Bedingungen (1), (2), (3) gleichzeitig erfüllt:

(1) Die Zahl z ist nicht durch 10 teilbar.
(2) Vergrößert man die Einerziffer der Zahl z um 4, so erhält man die Zehnerziffer von z.
(3) Vertauscht man die Ziffern von z miteinander, dann erhält man eine Zahl, deren Dreifaches kleiner als 100 ist.

Ermittle alle Zahlen z, die die genannten Bedingungen erfüllen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn eine Zahl z die genannten Bedingungen erfüllt, so gilt:

Die Einerziffer ist nach (1) nicht 0 und nach (2) so beschaffen, dass aus ihr nach Vergrößerung um 4 ein Ergebnis kleiner oder gleich 9 entsteht.
Daher ist die Einerziffer eine der Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, und für z verbleiben höchstens die Möglichkeiten 51, 62, 73, 84, 95.

Durch Vertauschen der Ziffern entsteht jeweils 15, 26, 37, 48, 59, und das Dreifache dieser Zahlen ist jeweils 45, 78, 111, 144, 177.

Daher können wegen (3) nur die Zahlen 51 und 62 alle Bedingungen erfüllen. Die für diese Zahlen bereits durchgeführten Rechnungen zeigen, dass diese Zahlen die Bedingungen (1), (2) und (3) auch tatsächlich erfüllen.

I.III Diophantische Gleichungen

Runde 1

Aufgabe 190511:
(Eine historische Aufgabe, 2000 Jahre v.u.Z.)
In einem Käfig sind Kaninchen und Fasane eingesperrt. Diese Tiere haben zusammen 40 Köpfe und 104 Füße.
Nenne die Anzahl aller Kaninchen und die Anzahl aller Fasane, die in dem Käfig sind!

Lösung von Steffen Polster:
Die Anzahl der Kaninchen sei k, der Fasanen f.
Dann gilt $k + f = 40$ und $4 \cdot k + 2 \cdot f = 104$ denn sie haben jeweils 4 bzw. 2 Beine.
Subtrahiert man die erste Gleichung zweimal von der zweiten wird $2k = 24$, also $k = 12$ und damit $f = 28$.

Aufgabe 200512:
Zum Transport einer bestimmten Menge Schotter hätte ein LKW mit 5 t Ladefähigkeit genau 105 vollbeladene Fuhren durchführen müssen. Nach 35 dieser Fuhren wurde er durch einen anderen LKW mit 7 t Ladefähigkeit abgelöst.
Stelle fest, wie viel vollbeladene Fuhren dieser zweite LKW noch durchzuführen hat, um die restliche Schottermenge abzutransportieren!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wegen $105 \cdot 5 = 525$ waren insgesamt 525 t Schotter zu transportieren.
Wegen $35 \cdot 5 = 175$ hatte der erste LKW davon bis zu seiner Ablösung genau 175 t Schotter transportiert.
Mithin waren wegen $525 - 175 = 350$ noch genau 350 t Schotter zu transportieren. Wegen $350 : 7 = 50$ konnte diese Menge von dem zweiten LKW mit genau 50 vollbeladenen Fuhren abtransportiert werden.

Aufgabe 260513:
Jörg bewundert Holgers Kaninchen und Tauben. Er möchte gern wissen, wie viel Kaninchen und Tauben Holger besitzt, und fragt ihn deshalb danach.

Dieser antwortet: „Ich habe insgesamt 24 Tiere, die zusammen 62 Beine haben. Andere Tiere als Kaninchen und Tauben habe ich nicht.“

Wie viel Kaninchen und wie viel Tauben besitzt Holger? Begründe deine Antworten!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Hätte jedes von Holgers Tieren nur zwei Beine, so wären es wegen $24 \cdot 2 = 48$ zusammen genau 48 Beine. Nach Holgers Angaben und wegen $62 - 48 = 14$ sind es aber 14 Beine mehr als 48.
Da Tauben nur zwei Beine besitzen, können diese 14 Beine nur zu den Kaninchen gehören. Zwei Beine eines jeden Kaninchen wurden schon bei den 48 Beinen mitgezählt. Die zwei restlichen Beine eines jeden Kaninchens müssen zusammengezählt 14 Beine ergeben.
Also können Holgers Angaben nur dann zutreffen, wenn er 7 Kaninchen und 17 Tauben besitzt, da $14 : 2 = 7$ und $24 - 7 = 17$ ist.

Runde 2

Aufgabe 170523:
Eine Fläche von 1710 m^2 ist in 9 Parzellen eingeteilt. Jede der Parzellen hat entweder die Größe 150 m^2 oder die Größe 210 m^2.
Wie viel Parzellen jeder dieser Größe gibt es insgesamt auf der genannten Fläche?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Anzahl der Parzellen der Größe 150 m^2 ist eine der Zahlen von 0 bis 9. Für jede dieser Zahlen erhält man folgende Werte:

Parzellen 150 m^2		Parzellen 210 m^2		Flächeninhalt
Anzahl	Flächeninhalt	Anzahl	Flächeninhalt	aller Parzellen
0	0 m^2	9	1890 m^2	1890 m^2
1	150 m^2	8	1680 m^2	1830 m^2
2	300 m^2	7	1470 m^2	1770 m^2
3	450 m^2	6	1260 m^2	1710 m^2
4	600 m^2	5	1050 m^2	1650 m^2
5	750 m^2	4	840 m^2	1590 m^2
6	900 m^2	3	630 m^2	1530 m^2
7	1050 m^2	2	420 m^2	1470 m^2
8	1200 m^2	1	210 m^2	1410 m^2
9	1350 m^2	0	0 m^2	1350 m^2

Da der Flächeninhalt aller Parzellen 170 m^2 beträgt, gibt es folglich 3 Parzellen der Größe 150 m^2 und 6 Parzellen der Größe 210 m^2.

Aufgabe 200522:
Bei einem Einkauf wurde der Preis von 170 Mark mit genau 12 Geldscheinen bezahlt. Jeder dieser Geldscheine war ein 10-Mark Schein oder ein 20-Mark-Schein.
Ermittle die Anzahl der 10-Mark-Scheine und die der 20-Mark-Scheine, die zum Bezahlen der angegebenen Summe verwendet wurden!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die folgende Tabelle enthält alle Zusammenstellungen von 2 Geldscheinen, von denen jeder ein 10-Mark-Schein oder ein 20-Mark-Schein ist. Anschließend wird für jede dieser Zusammenstellungen der Gesamtwert ermittelt:

Anzahl der Scheine zu je		Wert der Scheine zu		
10 M	20 M	10 M	20 M	Gesamtwert
0	12	0 M	240 M	240 M
1	11	10 M	220 M	230 M
2	10	20 M	200 M	220 M
3	9	30 M	180 M	210 M
4	8	40 M	160 M	200 M
5	7	50 M	140 M	190 M
6	6	60 M	120 M	180 M
7	5	70 M	100 M	170 M
8	4	80 M	80 M	160 M
9	3	90 M	60 M	150 M
10	2	100 M	40 M	140 M
11	1	110 M	20 M	130 M
12	0	120 M	0 M	120 M

Daraus ist ersichtlich, dass genau für die Anzahlen 7 und 5 der 10-Mark-Scheine bzw. 20-Mark-Scheine der Gesamtwert 170 Mark entsteht.

II Klasse 6

II.I Primzahlen, Teilbarkeit

I Runde 1

Aufgabe V00604:
Ist das kleinste gemeinsame Vielfache zweier beliebiger Zahlen stets durch ihre größten gemeinsamen Teiler teilbar? Begründe deine Antwort!

Lösung von Steffen Polster:
Ja, denn die kleinste Primzahlpotenz eines Teilers der ggT ist immer in der größten Primzahlpotenz eines Teilers des kgV enthalten.

Aufgabe 010614:
Kann eine Summe von vier beliebigen, aber aufeinanderfolgenden natürlichen (positiven ganzen) Zahlen (z. B. 11, 12, 13, 14 oder 27, 28, 29, 30) eine Primzahl sein? Begründe die Antwort!

Lösung von Steffen Polster:
Bei vier aufeinanderfolgenden Zahlen sind immer zwei gerade und zwei ungerade. Die Summe zweier ungerader Zahlen ist gerade, so dass die Summe der vier Zahlen immer gerade ist.
Diese Summe ist folglich stets durch 2 teilbar. Da die einzige gerade Primzahl, die 2, nicht Summe von vier aufeinanderfolgenden natürlichen ist, kann die Summe keine Primzahl sein.

Aufgabe 030613:
Gegeben seien drei beliebige, aber aufeinanderfolgende zweistellige natürliche Zahlen.

a) Zeige, dass unabhängig von der Wahl dieser Zahlen niemals alle drei Zahlen zugleich Primzahlen sein können!
b) Nenne alle Primfaktoren, die unabhängig von der Wahl dieser Zahlen in mindestens einer von ihnen enthalten sein müssen!

Lösung von Steffen Polster:
a) Da jede zweite natürliche Zahl gerade ist, muss unter den den drei Zahlen mindestens eine durch 2 teilbar sein, d. h., die zweistellige Zahl ist keine Primzahl.

b) Da jede dritte natürliche Zahl durch 3 teilbar ist, muss eine der drei Zahlen ein Vielfaches von 3 sein.
Für eine Primzahl größer als 3, also mindestens 5, gilt eine analoge Aussage nicht.
Die gesuchten Primfaktoren sind 2 und 3.

Aufgabe 080613:
In einem Ferienlager „Junger Mathematiker“ kauft Rainer während einer Pause in der Lagerkantine für seine Freunde folgende Waren ein:
13 Flaschen Limonade zu je 0,21 M, sechs Bockwürste und neun Lachsbrötchen.

Rainer soll insgesamt 10,43 M bezahlen. „Das kann nicht stimmen“, sagt er. Dabei wusste er noch gar nicht, wie viel jedes Lachsbrötchen kostet.
Weshalb konnte er seiner Behauptung trotzdem sicher sein?

Lösung von Steffen Polster:
Die Limonade kostet insgesamt $13 \cdot 0{,}21\text{M} = 2{,}73\text{M}$. Für die sechs Bockwürste und neun Lachsbrötchen würde Rainer damit $10{,}43\text{M} - 2{,}73\text{M} = 7{,}70\text{M}$ bezahlen.

Sowohl die Anzahl 6 der Bockwürste und die Anzahl 9 der Lachsbrötchen ist durch 3 teilbar. Dann muss auch der Preis 7,70 M ihrer Summe durch 3 teilbar sein.
Das ist nicht der Fall, so dass die Behauptung nicht richtig sein kann.

Aufgabe 160613:
Luise sucht eine natürliche Zahl x, die sie vom Zähler des Bruches 17 19 subtrahieren und gleichzeitig zum Nenner dieses Bruches addieren möchte, wobei der so entstehende Bruch den Wert 7 11 erhalten soll.
Stelle fest, ob es eine solche Zahl x gibt, ob sie die einzige ist, die die Bedingungen der Aufgabe erfüllt, und wie sie lautet!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I) Wenn x eine solche Zahl ist, dann gilt für sie

$$\frac{17-x}{19+x} = \frac{7}{11}$$

Da der Bruch $\frac{7}{11}$ durch keine natürliche Zahl gekürzt werden kann, muss der Bruch $\frac{17-x}{19+x}$ durch Erweitern aus dem Bruch $\frac{7}{11}$ hervorgehen. Also muss die Zahl $19 + x$ ein Vielfaches der Zahl 11 sein.

Das kleinste Vielfache von 11, das größer als 19 (oder gleich 19) ist, ist 22. Also muss x mindestens 3 betragen. Wäre $x > 3$, so wäre in dem Bruch $\frac{17-x}{19+x}$ der Zähler kleiner als 14, und der Nenner größer als 22, der Bruch folglich kleiner als $\frac{14}{22} = \frac{7}{11}$.
Somit kann nur die Zahl $x = 3$ die verlangte Eigenschaft haben.

II) Sie hat diese Eigenschaft; denn subtrahiert man sie vom Zähler 17 und addiert sie zum Nenner 19, so entsteht der Bruch

$$\frac{17-x}{19+x} = \frac{14}{22} = \frac{7}{11}$$

Also erfüllt genau die Zahl $x = 3$ die Bedingungen der Aufgabe.

Aufgabe 160614:
Eine Gruppe von mehr als 10, aber weniger als 50 Thälmann-Pionieren wollte eine Wanderfahrt durchführen. Sie brauchte dazu genau 91 Mark.
Jeder Pionier der Gruppe zahlte eine einheitlich festgesetzte Anzahl von 1-Mark-Stücken (und keine weiteren Geldbeträge) in die Reisekasse. Ein dann noch fehlender Restbetrag von genau 26 Mark wurde aus der Pionierkasse bestritten.
Ermittle die Anzahl der Pioniere dieser Gruppe und den Betrag, den jeder von ihnen zur Bezahlung dieser Fahrt in die Reisekasse zahlte!

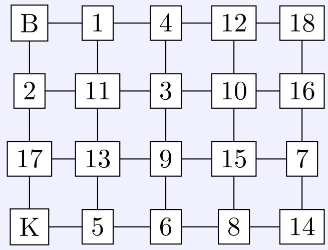
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wegen $91-26 = 65$ zahlten die Pioniere dieser Gruppe insgesamt genau 65 Markstücke in die Reisekasse. Also ist 65 ein Vielfaches der Anzahl der Pioniere der Gruppe. Alle natürlichen Zahlen, die 65 als Vielfaches haben, kommen in den Zerlegungen $65 = 1 \cdot 65 = 5 \cdot 13$ vor. Von diesen Zahlen ist nur 13 zugleich

größer als 10 und kleiner als 50.

Entsprechend der Aufgabe müssen daher 13 Pioniere an der Fahrt teilgenommen haben, und jeder von ihnen hat genau 5 M in die Reisekasse gezahlt.

Aufgabe 280611:

Bello (B) kann nur dann zum Knochen (K) gelangen, wenn er einen Weg wählt, bei dem das Produkt der dabei überquerten Zahlen 2431 beträgt.
Welchen Weg muss er wählen?



Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Zahl 2431 hat folgende Eigenschaften:
Sie ist weder durch 2 noch durch 4 teilbar; denn sie ist ungerade. Sie ist nicht durch 3 und auch nicht durch 9 teilbar; denn ihre Quersumme $2 + 3 + 4 + 1 = 10$ ist weder durch 3 noch durch 9 teilbar. Sie ist nicht durch 5 teilbar; denn sie hat als letzte Ziffer weder die 0 noch die 5.

Daher kommt auf dem Bild nur ein Weg in Frage, der die Zahlen 2, 3, 4, 9 und 5 vermeidet. Es gibt genau einen solchen Weg, nämlich über 1, 11, 13, 17. Wegen $1 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 = 2431$ liefert er das geforderte Produkt.
Also muss Bello genau diesen Weg wählen.

Aufgabe 310611:
Uwe und Jan zeichnen jeder ein Rechteck, das sich in genau 60 Quadrate von je 1 cm Seitenlänge zerlegen lässt. Jans Rechteck hat einen doppelt so großen Umfang wie Uwes Rechteck.
Ermittle die Seitenlängen der Rechtecke von Uwe und Jan!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Durch Aufzählen aller Darstellungen von 60 als Produkt zweier natürlicher Zahlen erhält man:
Es gibt genau die folgenden Möglichkeiten für ein Rechteck, das sich in genau 60 Quadrate von je 1 cm Seitenlänge zerlegen lässt:

Seitenlängen in cm	Umfang in cm
1, 60	122
2, 30	64
3, 20	46
4, 14	38
5, 12	34
6, 10	32

Von diesen Umfängen ist genau einer doppelt so groß wie einer der anderen, nämlich 64 cm doppelt so groß wie 32 cm. Also hat Jans Rechteck die Seitenlängen 2 cm, 30 cm und Uwes Rechteck die Seitenlängen 6 cm, 10 cm.

II Runden 2 & 3

Aufgabe 050623:
Gesucht ist eine natürliche Zahl b, die folgenden Bedingungen genügt:
(1) $40 < b < 600$,
(2) b ist sowohl durch 4 als auch durch 9 teilbar,
(3) b ist nicht durch 8 und nicht durch 27 teilbar,
(4) b lässt bei der Division durch 11 den Rest 6.
Wie viel solche Zahlen gibt es?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wegen (2) ist b auch durch 36 teilbar. Man muss daher 36 mit einer natürlichen Zahl multiplizieren, um b zu erhalten.
Dieser Faktor kann wegen (1) nicht 0 bzw. 1 und wegen (3) nicht durch 2 bzw. 3 teilbar sein. Wegen (4) scheidet ferner 11 als Faktor aus.
Es kommen daher wegen $600 = 36 \cdot 16 + 24$ und auf Grund der obigen Überlegungen nur die Zahlen 5, 7 und 15 als Faktoren in Frage. Zu untersuchen sind also nur noch die Zahlen 180, 252 und 468, die sämtlich (l), (2) und (3) erfüllen.
Von ihnen erfüllt nur 468 auch (4). Daher ist $b = 468$ die einzige Lösung.

Aufgabe 060622:
Gesucht ist die Menge aller natürlichen Zahlen a, die folgenden Bedingungen genügen:

(1) $100 < a < 1201$,
(2) a ist sowohl durch 3 als auch durch 4 als auch durch 5 teilbar,
(3) a ist nicht durch 8, nicht durch 9 und nicht durch 25 teilbar,
(4) a lässt bei der Division durch 11 einen Rest, der durch 2 teilbar ist.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wegen (2) ist a durch 60 teilbar. Es gilt daher $a = 60 \cdot b$, b ganz, und wegen (1) folgt $100 < 60b < 1201$. Somit muss b der Bedingung $1 < b < 21$ genügen.

Wegen (3) kann b nicht durch 2, nicht durch 3 und nicht durch 5 und wegen (4) auch nicht durch 11 teilbar sein.
Auf Grund der obigen Überlegungen können für den Faktor b nur die Zahlen 7; 13; 17 und 19 in Frage.
Es sind also noch die Zahlen 420; 780; 1020 und 1140 zu betrachten, die sämtlich (1), (2) und (3) erfüllen.
Von ihnen genügen nur 420; 780 und 1020 der Bedingung (4).

420; 780 und 1020 sind die gesuchten Zahlen. Es gibt keine weiteren natürlichen Zahlen, die (1) bis (4) gleichzeitig erfüllen.

Aufgabe 070622:
Jedes der beiden Vorderräder eines Wagens hat einen Umfang von 210 cm, jedes der beiden Hinterräder einen Umfang von 330 cm.
Ermittle die kürzeste Strecke (in m), die der Wagen auf einer ebenen geraden Straße durchfahren haben muss, damit jedes seiner Räder genau eine ganze Anzahl von Umdrehungen durchgeführt hat!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Um die Bedingungen der Aufgabe zu erfüllen, muss der Wagen eine Strecke zurücklegen, deren Länge ein gemeinsames Vielfaches, und zwar das kleinste gemeinsame Vielfache, von 210 cm und 330 cm ist. Daher ermitteln wir das kgV von 210 und 330:

$$210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$
$$330 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$$
$$\text{kgV}(210, 330) = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 2310$$

Die kürzeste Strecke, die vom Wagen zurückgelegt werden muss, bis jedes Rad genau eine ganze Anzahl von Umdrehungen durchgeführt hat, ist daher 2310 cm = 23,10 m lang.

Probe:
2310 : 210 = 11 und 2310 : 330 = 7. Die Vorderräder machen dabei genau 11, die Hinterräder genau 7 Umdrehungen.

Aufgabe 200623:
Ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen z, für die $1000 \leq z \leq 1700$ gilt und die durch 9, 12 und 14 teilbar sind!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Eine Zahl ist genau dann durch 9, 12 und 14 teilbar, wenn sie durch das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) dieser Zahlen teilbar ist. Wegen der Primzahlzerlegungen

$$9 = 3^2, \quad 12 = 2^2 \cdot 3, \quad 14 = 2 \cdot 7$$

ist dieses kgV die Zahl $22 \cdot 32 \cdot 7 = 252$.
Also ist eine natürliche Zahl z genau dann durch 9, 12 und 14 teilbar, wenn es zu ihr eine natürliche Zahl n mit $z = 252 \cdot n$ gibt. Alle gesuchten Zahlen z erhält man daher aus denjenigen n, für die $1000 \leq 252n \leq 1700$ gilt. Nun stellt man fest:

Für $n = 3$ gilt $252n = 252 \cdot 3 = 756 < 1000$;
für $n = 7$ gilt $252n = 252 \cdot 7 = 1764 > 1700$;
für diese n erhält man also keine Zahlen z, die die genannten Bedingungen der Ungleichung erfüllen.

Für $n = 4$ wird $z = 252 \cdot 4 = 1008$;
für $n = 5$ wird $z = 252 \cdot 5 = 1260$;
für $n = 6$ wird $z = 252 \cdot 6 = 1512$;
diese drei Zahlen erfüllen also die Bedingung $1000 \leq z \leq 1700$.
Daher sind genau 1008, 1260 und 1512 die gesuchten Zahlen.

Aufgabe 220624:
An fünf voneinander und von 0 verschiedene natürliche Zahlen a, b, c, d, e werden folgende acht Forderungen gestellt:

(1) a ist ein [ganzzahliges] Vielfaches von e,
(2) b ist ein Teiler von c,
(3) c ist ein [ganzzahliges] Vielfaches von e,
(4) d ist ein Teiler von e,
(5) a ist ein [ganzzahliges] Vielfaches von b,
(6) b ist ein Teiler von d,
(7) c ist ein [ganzzahliges] Vielfaches von a,
(8) a ist ein [ganzzahliges] Vielfaches von d.

Untersuche, ob diese acht Forderungen erfüllbar sind und ob sich aus ihnen die Anordnung der fünf Zahlen ihrer Größe nach ergibt!
Wenn dies der Fall ist, so nenne diese Anordnung; beginne dabei mit der größten der fünf Zahlen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Aus (7) folgt $c > a$,
aus (1) folgt $a > e$,
aus (4) folgt $e > d$,

aus (6) folgt $d > b$.
Daher können nur bei der Anordnung $c > a > e > d > b$ die Forderungen (1) bis (8) erfüllt sein.
Sie sind erfüllbar, z. B. durch $b = 1$, $d = 2$, $e = 4$, $a = 8$, $c = 16$; denn 8 ist ein (ganzzahliges) Vielfaches von 4, 1 ist ein Teiler von 16, 16 ist ein (ganzzahliges) Vielfaches von 4, 2 ist ein Teiler von 4, 8 ist ein (ganzzahliges) Vielfaches von 1, 1 ist ein Teiler von 2, 16 ist ein (ganzzahliges) Vielfaches von 8, 8 ist ein (ganzzahliges) Vielfaches von 2.

Aufgabe 310623:
Wie viele natürliche Zahlen gibt es insgesamt, die
a) Teiler von 256 sind,
b) Teiler von $2 \cdot 256$ sind,
c) Teiler von $256 \cdot 256$ sind?
Erkläre zu jeder deiner drei Antworten, wie du sie gefunden hast!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Man stellt fest: 256 ist durch 2 teilbar; es gilt $256 : 2 = 128$. Weiter gilt $128 : 2 = 64$. Indem man so fortgesetzt die Teilbarkeit durch 2 feststellt, ergibt sich

$$256 = 2 \cdot 128 = 2 \cdot 2 \cdot 64 = \dots = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2.$$

Also ist eine natürliche Zahl genau dann Teiler von 256, wenn sie entweder gleich 1 oder gleich dem Produkt von einer Anzahl Faktoren 2 ist, wobei diese Anzahl höchstens 8 beträgt.
Für diese Anzahl gibt es somit genau 8 Möglichkeiten. Daher gibt es insgesamt 9 natürliche Zahlen, die Teiler von 256 sind.
b) Aus $2 \cdot 256 = 2^9$;
c) aus $256 \cdot 256 = 2^{16}$ folgt: Es gibt insgesamt 10 bzw. 17 natürliche Zahlen, die Teiler von $2 \cdot 256$ bzw. von $256 \cdot 256$ sind.

Aufgabe 330636:
Anja und Bernd spielen ein Spiel nach folgenden Regeln: Verwendet werden 8 Karten, jede mit genau einer der Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, und ein Spielbrett aus 7 Feldern:

Zunächst wird eine natürliche Zahl n vereinbart. Dann legen Anja und Bernd abwechselnd (beginnend mit Anja) auf je ein beliebiges Feld der Figur, das noch frei ist, eine der noch nicht verwendeten Karten.
Am Ende ist eine siebenstellige Zahl entstanden. Ist sie durch n teilbar, so hat Anja gewonnen, anderenfalls Bernd.

a) Finde zwei der Zahlen 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, für die gilt:
Ist diese Zahl als n vereinbart worden, so kann Anja den Gewinn erzwingen, gleichgültig, wie Bernd spielt! Erkläre, wie Anja dies tun kann!
b) Beweise folgende Aussage! Wurde $n = 9$ vereinbart, so gewinnt stets Bernd, gleichgültig, welche Karten beide Spieler legen.
c) Untersuche, ob im Fall, dass $n = 21$ vereinbart wurde, einer der beiden Spieler den Gewinn erzwingen kann, gleichgültig, wie der andere spielt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Ist $n = 2$ vereinbart, so kann Anja den Gewinn erzwingen, indem sie zu Anfang eine der Ziffern 2, 4, 6, 8 auf das Feld ganz rechts (das Feld für die Einerziffer) bringt. Nach der Teilbarkeitsregel für 2 entsteht dann nämlich bei jeder Fortsetzung eine durch 2 teilbare Zahl.
Ebenso kann Anja im Fall $n = 5$ den Gewinn erzwingen, indem sie zu Anfang die Ziffer 5 auf das Feld ganz rechts bringt.

b) Die Summe (1+8) + (2 + 7) + (3 + 6) + (4 + 5) der Zahlen auf allen Karten ist durch 9 teilbar.
Da am Ende genau eine der Zahlen 1,2,3,4,5,6,7,8 übrigbleibt und diese Zahl nicht durch 9 teilbar ist, kann auch die Summe der ausgelegten Karten nicht durch 9 teilbar sein, gleichgültig, von wem und in welcher Reihenfolge sie ausgelegt wurden.
Nach der Teilbarkeitsregel für 9 besagt das aber: Die ausgelegte siebenstellige Zahl ist nicht durch 9 teilbar; Bernd hat gewonnen.

c) Bernd kann den Gewinn erzwingen, indem er dafür sorgt, dass jedenfalls die Zahlen 3 und 6 sich unter den ausgelegten befinden (er hat ja - sogar dreimal - Gelegenheit, von ihm gewünschte Zahlen nötigenfalls selbst auszulegen).
Damit erreicht er, ähnlich wie in b): Da die Summe der Zahlen auf allen Karten durch 3 teilbar ist und eine nicht durch 3 teilbare Zahl übrigbleiben muss, kann die Summe der ausgelegten Karten nicht durch 3 teilbar sein. Also ist die ausgelegte siebenstellige Zahl nicht durch 3 teilbar; folglich kann sie auch nicht durch 21 teilbar sein.

Aufgabe 340636:
Vater, Mutter, Tochter und Sohn in einer Familie stellen fest:
(1) Das Produkt aus Tag- und Monatszahl des Geburtstages beträgt beim Vater 242, bei der Mutter 200 und bei der Tochter 6.
(Beispiel für eine solche Produktbildung: Ein Geburtstag am 30. Juli ergibt $30 \cdot 7 = 210$.)
(2) Die Summe aus Tag- und Monatszahl des Geburtstages ergibt bei jedem der vier Familienmitglieder die - in ganzen Zahlen gerechnete - Altersangabe in Jahren.
(3) Die Summe dieser vier Altersangaben beträgt 80.
(4) Das Produkt dieser vier Altersangaben beträgt 59400.

(a) Wie alt sind die Familienmitglieder? Wann haben Vater, Mutter und Tochter Geburtstag?
Gewinne die Antworten auf diese Fragen ausgehend von den Feststellungen (1), (2), (3), (4)!
Untersuche dabei auch, ob es für einige der erfragten Angaben mehrere Möglichkeiten gibt!
(b) Zeige, dass man die Aufgabe (a) auch noch - mit demselben Ergebnis - lösen kann, wenn man eine der Feststellungen (1), (2), (3), (4) weglässt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(a) I. Aus den Feststellungen (1), (2), (3), (4) kann man folgende Schlüsse ziehen:
Um (1) anzuwenden, ermittelt man alle Zerlegungen von 242, 200 bzw. 6 in je zwei Faktoren, die als Tag- und Monatszahl möglich sind. Man findet, z. B. mithilfe der Zerlegungen $242 = 2 \cdot 11 \cdot 11$, $200 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$ bzw. $6 = 2 \cdot 3$ in Primfaktoren:
Die genannten Zerlegungen sind genau $242 = 22 \cdot 11$, $200 = 25 \cdot 8 = 20 \cdot 10$ bzw. $6 = 6 \cdot 1 = 3 \cdot 2$; daraus folgt nach (1):
Der Geburtstag des Vaters ist der 22.11., (5)
Der Geburtstag der Mutter ist der 25.8. oder der 20.10., (6)
Der Geburtstag der Tochter ist einer der Tage 6.1., 3.2., 2.3., 1.6.. (7)

Aus (2) und (5), (6), (7) ergibt sich:
Der Vater ist 33 Jahre alt, (8)
die Mutter ist entweder 33 oder 30 Jahre alt, (9)
die Tochter ist entweder 7 oder 5 Jahre alt. (10)

Nach (8) und (4) beträgt das Produkt der Altersangaben von Mutter, Tochter und Sohn $59400 : 33 = 1800$. Da diese Zahl weder durch 33 noch durch 7 teilbar ist, sind in (9), (10) und damit in (6), (7) nur möglich:
Die Mutter ist 30 Jahre alt, ihr Geburtstag ist der 20.10., (11)
die Tochter ist 5 Jahre alt, ihr Geburtstag ist entweder der 3.2. oder der 2.3.. (12)
Nochmals nach (4) folgt dann wegen $1\,800 : 30 = 60$ und $60 : 5 = 12$:

Der Sohn ist 12 Jahre alt. (13)
Daher können die Feststellungen (1), (2), (3), (4) nur bei den Angaben in (5), (8), (11), (12), (13) erfüllt sein.

II. Bei diesen Angaben sind die Feststellungen (1), (2), (3), (4) erfüllt. Wegen $33 + 30 + 5 + 12 = 80$ ist insbesondere auch die – in den bisherigen Betrachtungen noch nicht herangezogene – Feststellung (3) erfüllt.

Mit I. und II. ist gezeigt:
Die beiden in (5), (8), (11), (12), (13) angegebenen Möglichkeiten (für das Alter der vier Familienmitglieder und die Geburtstage von Vater, Mutter und Tochter) sind alle diejenigen, bei denen die Feststellungen (1), (2), (3), (4) erfüllt sind.

(b) Da in (a) I. die Feststellung (3) nicht herangezogen wird (und in (a) II. natürlich auf das Bestätigen dieser Feststellung verzichtet werden kann, wenn sie nicht zu den Forderungen der Aufgabe gehört), hat die Aufgabe nach Weglassen von (3) dieselbe Lösung.

II.II (Dezimal-)Zahldarstellung, Reste

I Runde 1

Aufgabe V00602:
Fünf Arbeitsgemeinschaften einer Schule kommen am 1. Juli zusammen, um ihre Ferienpläne zu beraten.
Sie beschließen, dass die Biologen jeden zweiten Tag, die Physiker jeden dritten Tag, die Geographen jeden vierten Tag, die Modellbauer jeden fünften Tag und die Elektrotechniker jeden sechsten Tag zusammenkommen. An dem Tag, an dem alle Gruppen wieder gleichzeitig in der Schule zusammenkommen, wollen sie ihre Arbeit auswerten.
Wann ist dieser Tag, wenn die Gruppen ab 1. Juli regelmäßig (auch an Sonntagen) zusammenkommen?

Lösung von Steffen Polster:
Die Arbeitsgemeinschaften treffen sich wieder, wenn die Zahl der Tage durch 2, 3, 4, 5 und 6 teilbar ist. D. h., die Anzahl der gesuchten Tage ist das kleinste gemeinsame Vielfache von 2, 3, 4, 5 und 6, d. h. 60. Die Schüler treffen sich nach 60 Tagen wieder, d. h. am 30. August.

Aufgabe 040615:
Es ist die kleinste natürliche Zahl zu finden, die beim Dividieren

durch 2 den Rest 1,
durch 3 den Rest 2,
durch 4 den Rest 3,
durch 5 den Rest 4 und
durch 6 den Rest 5 aufweist.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Man untersucht die Folge der natürlichen Zahlen, die bei Division durch 6 den Rest 5 lassen, also 5, 11, 17, ... Dann streicht man von diesen die Zahlen, die bei Division durch 5 nicht den Rest 4 lassen usw.

Man findet dadurch 59 als kleinste natürliche Zahl, die den Forderungen genügt.

Aufgabe 050612:
Eine zweistellige natürliche Zahl soll auf Grund folgender Bedingungen ermittelt werden:
Ihre Quersumme beträgt 10. Vertauscht man ihre Ziffern und addiert zu der dadurch entstehenden Zahl die Zahl 1, so erhält man das Zweifache der ursprünglichen Zahl.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Bezeichnet man die Anzahl der Zehner mit a und die der Einer mit b, dann lautet die erste Zahl $(10a+b)$ und die zweite $(10b+a)$. Nach Aufgabe gilt:

$$a+b=10 \tag{1}$$
$$2(10a+b)=(10b+a)+1 \tag{2}$$

Die linke Zahl in (2) ist gerade. Wäre a gerade, so wäre die rechte Zahl ungerade. Also muss a ungerade und damit (wegen $a+b=10$) auch b ungerade sein.
Die rechte Seite von (2) ist höchstens gleich $10b+10$. Wäre a größer oder gleich b, dann wäre die linke Seite mindestens gleich $2(10b+b)=22b=10b+12b$.

Das ist aber (wegen $b \geq 1$) sicher größer als $10b+10$, daher muss b größer als a sein.
Es kommen als Lösung mithin nur die beiden Zahlenpaare $a=1$; $b=9$ und $a=3$; $b=7$ in Betracht. Durch Probieren findet man sofort, dass $a=3$; $b=7$ das einzige Zahlenpaar ist, das den Bedingungen der Aufgabe genügt. Die gesuchte Zahl lautet also 37.

Aufgabe 070614:
Unter der Fakultät einer natürlichen Zahl $n \geq 2$ (geschrieben $n!$) verstehen wir das Produkt aller natürlichen Zahlen von 1 bis n.
Es gilt zum Beispiel: $3! = 1\cdot 2\cdot 3 = 6$ und $4! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 24$.
Ermittle, auf welche Ziffer die Summe $s = 3!+4!+5!+6!+7!+8!+9!+10!$ endet!

Lösung von Steffen Polster:
Die ersten Fakultäten der Summe enden auf $3! = 6$ und $4! = 24$ auf 4.
5! und alle höheren Fakultäten enden immer auf 0, da in ihnen die Faktoren 2 und 5 vorkommen.
Die Summe s hat somit, da 4 + 6 = 10 ist, die Null als Endziffer.

Aufgabe 110614:
Zwei Orte A und B seien durch eine 999 km lange Straße miteinander verbunden.
Im Abstand von jeweils 1 km seien auf dieser Straße Kilometersteine aufgestellt, die beidseitig derart beschriftet sind, dass auf der einen Seite jedes Steines seine Entfernung von A und auf der anderen Seite seine Entfernung von B in km angegeben ist. Z. B. trägt der Stein am Ortsausgang von A die Beschriftung 0 und 999, der Stein am Ortseingang von B die Beschriftung 999 und 0.

Ermittle von diesen Steinen die Anzahl derjenigen, bei deren Beschriftung höchstens zwei voneinander verschiedene Ziffern verwendet wurden (z B. 722 und 277)!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Da die Straße die Länge 999 km hat, ist die Summe der Kilometerangaben auf jedem der Steine 999. Daraus folgt:

(1) Auf der einen Seite jedes der Kilometersteine steht eine gerade und auf der anderen Seite eine ungerade Zahl. Beide Zahlen sind also voneinander verschieden.
(2) Die Summe der Einerziffern auf jedem Kilometerstein beträgt 9, desgleichen die Summe der beiden Zehnerziffern und ebenso die Summe der beiden Hunderterziffern.

(3) Zu jedem Kilometerstein S der Aufgabe gibt es genau einen anderen S', der die gleiche Bezifferung trägt (S' hat von B dieselbe Entfernung wie S von A).

Die gesuchte Zahl x ist daher gleich der doppelten Anzahl y derjenigen Kilometersteine, bei deren Beschriftung höchstens zwei Ziffern verwendet wurden und die näher an A stehen als an B. Bei jedem solchen Stein S ist die Hunderterziffer der Kilometerangabe von S nach B eine der Ziffern 5, 6, 7, 8 oder 9 (wegen (2)).

Daher lautet die Hunderterziffer der anderen Kilometerangabe auf S jeweils 4, 3, 2, 1 bzw. 0.
In den ersten vier Fällen sind damit die beiden vorkommenden Ziffern bestimmt; aber auch im Fall 5 kann außer 9 (und evtl. 0) keine andere Ziffer z auftreten, da sonst die drei verschiedenen Ziffern 9, z und $(9 - z)$ vorkämen.

Nun kann man mit den Ziffern a und b, $b \neq a$, genau 4 verschiedene dreistellige Zahlen bilden, deren Hunderterziffer a ist, nämlich aaa, aab, aba, abb.
Infolgedessen ist, da hier a die fünf Werte 5, 6, 7, 8, 9 und nur diese annehmen kann: $y = 5 \cdot 4$ und die gesuchte Anzahl $x = 2y = 40$.
Es gibt also genau 40 Kilometersteine, bei deren Beschriftung höchstens zwei voneinander verschiedene Ziffern verwendet wurden.

Aufgabe 140614:
Jemand schreibt 3□6□5 und möchte dann die Kästchen □ so durch Ziffern ersetzen, dass eine fünfstellige durch 75 teilbare Zahl entsteht.
Ermittle alle fünfstelligen, durch 75 teilbaren Zahlen, die unter diesen Bedingungen entstehen können!

Lösung von Steffen Polster:
Eine durch 75 teilbare Zahl endet auf 0, 25, 50 oder 75, d. h. die vorletzte Ziffer ist eine 2 oder 7.
75 ist aber auch durch 3 teilbar, so dass die gesuchte Zahl ebenfalls durch 3 teilbar sein muss. Ihre Quersumme ist $q = 3 + a + 6 + b + 5 = 14 + a + b$ mit $b = 2$ oder $b = 7$.

Ist $b = 2$ ist die Quersumme $q = 16 + a$, d. h., a kann 2, 5 oder 8 sein.
Ist $b = 7$ ist die Quersumme $q = 21 + a$, d. h., a kann 0, 3, 6 oder 9 sein.
Die fünfstellige Zahl kann somit sein

$$32625, \quad 35625, \quad 38625, \quad 30675, \quad 33675, \quad 36675, \quad 39675$$

Aufgabe 180612:
Eine Zahl z soll in der Gestalt $z = \star 3 \star 60$ geschrieben werden, wobei jeder Stern ($\star$) so durch eine der Ziffern 0 bis 9 zu ersetzen ist, dass z die beiden folgenden Eigenschaften hat:

(1) $60000 < z < 100000$,
(2) z ist durch 9 teilbar.

Ermittle alle Zahlen z, die diesen Bedingungen genügen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn z den Bedingungen genügt, so ist die Zehntausenderziffer von z wegen (1) eine der Zahlen 6, 7, 8, 9.

Weiterhin ist z wegen (2) durch 9 teilbar, und daher ist auch die Quersumme von z durch 9 teilbar. Da die Summe der Tausender-, Zehner- und Einerziffer 9 ist, muss die Hunderterziffer die obengenannte Zehntausenderziffer 6, 7, 8 bzw. 9 zu einer durch 9 teilbaren Zahl ergänzen.

Das ist nur bei den Zahlen 63360, 73260, 83160, 93060, 93960 der Fall.
Jede der hiermit angegebenen Zahlen erfüllt (1) und, da sie durch 9 teilbar ist, auch (2). Daher sind die angegebenen Zahlen alle gesuchten.

Aufgabe 200613:
Ermittle aus der Menge aller natürlichen Zahlen von 20 bis 39 alle diejenigen, die durch das Produkt ihrer beiden Ziffern teilbar sind!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wie die folgende Tabelle zeigt, haben genau die Zahlen 24 und 36 die verlangte Eigenschaft.

Zahl	Produkt der Ziffern	teilbar?	Zahl	Produkt der Ziffern	teilbar?
20	0	nein	21	2	nein
22	4	nein	23	6	nein
24	8	ja	25	10	nein
26	12	nein	27	14	nein
28	16	nein	29	18	nein
30	0	nein	31	3	nein
32	6	nein	33	9	nein
34	12	nein	35	15	nein
36	18	ja	37	21	nein
38	24	nein	39	27	nein

Aufgabe 240614:
Rita multipliziert eine Zahl z mit 9 und erhält als Ergebnis 111111111.

(a) Um welche Zahl z handelt es sich?
(b) Ermittle eine Zahl x, die folgende Eigenschaft besitzt!
Wenn man x mit der in (a) ermittelten Zahl z multipliziert, dann erhält man als Produkt eine Zahl, die mit lauter Ziffern 8 (in normaler Schreibweise des Zehnersystems) geschrieben wird.
(c) Gibt es außer der in (b) ermittelten Zahl x noch weitere Zahlen, die ebenfalls diese Eigenschaft besitzen?
Wenn dies der Fall ist, so ermittle eine weitere solche Zahl!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(a) Wegen $111111111 : 9 = 12345679$ ist $z = 12345679$ die Zahl, die mit 9 multipliziert 111111111 ergibt.

(b) Aus $12345679 \cdot 9 = 111111111$ folgt $12345679 \cdot 72 = 888888888$ (1)
Daher hat beispielsweise die Zahl $x = 72$ die verlangte Eigenschaft, dass die Zahl $z \cdot x$ mit lauter Ziffern 8 geschrieben wird.

(c) Aus (1) folgt $12345679 \cdot 72 \cdot 1000000001 = 888888888 \cdot 1000000001$, (2)
d. h. $12345679 \cdot 72000000072 = 888888888888888888$. (3)
Also hat (beispielsweise) auch die Zahl 72 000 000 072 die verlangte Eigenschaft.

Aufgabe 300612:
a) Gib alle diejenigen zweistelligen natürlichen Zahlen an, bei denen eine der beiden Ziffern um 4 kleiner ist als die andere!
b) Ermittle unter diesen Zahlen alle diejenigen, die durch ihre Quersumme teilbar sind!

Hinweis: Die Quersumme einer natürlichen Zahl ist die Summe ihrer Ziffern. So hat z. B. die Zahl 24801 wegen $2 + 4 + 8 + 0 + 1 = 15$ die Quersumme 15.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die folgende Tabelle enthält in der ersten Zeile genau alle in (a) gesuchten Zahlen. In der zweiten Zeile steht zu jeder dieser Zahlen ihre Quersumme. In der dritten Zeile steht jeweils die Antwort auf die Frage, ob die betreffende Zahl durch ihre Quersumme teilbar ist (j für ja, n für nein). Hiernach sind genau die Zahlen 40, 84 und 48 die in (b) gesuchten.

Zahl	40	51	15	62	26	73	37	84	48	95	59
Quersumme	4	6	6	8	8	10	10	12	12	14	14
teilbar?	j	n	n	n	n	n	n	j	j	n	n

Aufgabe 330612:
Zwei Zahlen sollen die Summe 2028 haben. Dividiert man die erste Zahl durch 28, so soll sich dasselbe ergeben wie bei Division der zweiten Zahl durch 128.
Zeige, dass die beiden Zahlen durch diese Forderungen eindeutig bestimmt sind; finde sie und bestätige, dass sie die Forderungen erfüllen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Ist d das Ergebnis der Division der ersten Zahl durch 28, so lautet die erste Zahl $28 \cdot d$. Da d auch das Ergebnis der Division der zweiten Zahl durch 128 ist, lautet die zweite Zahl $128 \cdot d$. Als Summe der beiden Zahlen $28 \cdot d$ und $128 \cdot d$ ergibt sich folglich $156 \cdot d$; somit muss $156 \cdot d = 2028$ sein.

Daraus ergibt sich $d = 2028 : 156 = 13$. Also sind durch die Forderungen eindeutig $28 \cdot 13 = 364$ und $128 \cdot 13 = 1664$ als erste bzw. zweite Zahl bestimmt.
Für sie bestätigt man: $364 : 28$ und $1664 : 128$ haben dasselbe Ergebnis 13, und es gilt $364 + 1664 = 2028$.

Aufgabe 330614:
Ist n eine natürliche Zahl, so bezeichnet man das Produkt aller natürlichen Zahlen von 1 bis n mit dem Zeichen $n!$ (gelesen: „n – Fakultät“). Beispielsweise ist $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.
Wie lauten die letzten drei Ziffern der Zahl, die sich beim Ausrechnen von

$$1! + 2! + 3! + 4! + \cdots + 99! + 100!$$

ergeben würde?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Indem man, beginnend mit $1! = 1$, jeweils das zuletzt erhaltene Ergebnis der Reihe nach mit 2, 3, 4, ... usw. multipliziert und jedes Mal nur die letzten drei Ziffern berücksichtigt, findet man: Es ist

$$1! = 1, \quad 2! = 2, \quad 3! = 6, \quad 4! = 24, \quad 5! = 120, \quad 6! = 720;$$

die letzten drei Ziffern von $7!$ sind ... 040
die letzten drei Ziffern von $8!$ sind ... 320
die letzten drei Ziffern von $9!$ sind ... 880
die letzten drei Ziffern von $10!$ sind ... 800

die letzten drei Ziffern von 11! sind ... 800
die letzten drei Ziffern von 12! sind ... 600
die letzten drei Ziffern von 13! sind ... 800
die letzten drei Ziffern von 14! sind ... 200

Von 15! an lauten die letzten drei Ziffern stets ... 000, bei der verlangten Addition ändern sie also das Ergebnis nicht mehr. Durch Addition der hier verzeichneten Ergebnisse folgt daher bereits:
Die letzten drei Ziffern von $1! + 2! + \cdots + 100!$ lauten ... 313.

II Runde 2

Aufgabe 020623:
Vertauscht man bei einer zweistelligen Zahl den Einer mit dem Zehner, so erhält man eine neue Zahl, die $4\frac{1}{2}$ so groß wie die ursprüngliche Zahl ist.

a) Wie lautet die Zahl?
b) Wie hast du sie gefunden?
Zeige, dass es nur eine solche Zahl gibt!

Lösung von Steffen Polster:
Die gesuchte Zahl sei $10a + b$, wobei a eine Ziffer von 1 bis 9 und b eine Ziffer von 0 bis 9 sind. Es ergibt sich die Gleichung

$$10b + a = 4\frac{1}{2} \cdot (10a + b) = 45a + 4\frac{1}{2}b = 45a + 4{,}5b \quad \to \quad 44a = \frac{11}{2}b$$

und somit $8a = b$.
Da b kleiner 10 ist und a mindestens 1 sein muss, folgt eindeutig $a = 1$ und $b = 8$. Die gesuchte Zahl ist 18.

Aufgabe 100623:
In der fünfstelligen Zahl $52{*}2{*}$ sind an den mit * bezeichneten Stellen zwei (gleiche oder verschiedene) Ziffern so einzusetzen, dass die dadurch entstehende Zahl durch 36 teilbar ist.

Gib alle Möglichkeiten hierfür an!
(Beachte: Eine Zahl ist genau dann durch 36 teilbar, wenn sie durch 4 und durch 9 teilbar ist.)

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(1) Ist nach Ergänzung der beiden fehlenden Ziffern eine durch 36 teilbare Zahl entstanden, so ist diese sowohl durch 4 als auch durch 9 teilbar.

(2) Ist eine mehrstellige Zahl durch 4 teilbar, so stellen ihre letzten beiden Ziffern (in gleicher Reihenfolge) ebenfalls eine durch 4 teilbare Zahl dar. Daher kam als Einerziffer nur 0; 4 oder 8 eingesetzt werden.

(3) Ist eine Zahl durch 9 teilbar, so ist es auch ihre Quersumme. Nun beträgt die Summe der drei gegebenen Ziffern 9. Lautet daher die Einerziffer $\left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 4 \\ 8 \end{array} \right\}$ so kann die Hunderterziffer nur $\left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ oder } 9 \\ 5 \\ 1 \end{array} \right\}$ sein.
Also können nur die Zahlen 52020; 52920; 52524; 52128 die Bedingungen der Aufgabe erfüllen. Die Probe zeigt, dass sie dies auch sämtlich tun.

Aufgabe 130624:
Werner schreibt 50*0*05 an die Tafel und will danach für jedes der Zeichen * eine der Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 so eintragen, dass eine durch 9 teilbare Zahl entsteht.
Gib sämtliche Möglichkeiten einer derartigen Eintragung (also alle so erhältlichen durch 9 teilbaren Zahlen) an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Summe der für die Zeichen * einzutragenden Ziffern ist mindestens 0 und höchstens 18.
Die Quersumme der Zahl ohne diese Ziffern beträgt 10. Die Quersumme der gesuchten Zahl ist daher mindestens 10 und höchstens 28.

Andererseits gilt: Eine Zahl ist genau dann durch 9 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist.
Daher entspricht eine Eintragung genau dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn die Quersumme der entstehenden Zahl entweder 18 oder 27 beträgt, also genau dann, wenn die Summe der beiden einzutragenden Ziffern gleich 8 oder gleich 17 ist.
Folglich gibt es genau die folgenden den Bedingungen der Aufgabe entsprechenden durch 9 teilbaren Zahlen:

$$5000805, 5010705, 5020605, 5030505, 5040405, 5050305,$$

$$5060205, 5070105, 5080005, 5080905, 5090805.$$

Aufgabe 140622:
Klaus behauptet, eine von ihm aufgeschriebene natürliche Zahl z habe folgende Eigenschaften:

(1) Vertauscht man zwei geeignete Ziffern von z miteinander, so ist die auf diese Weise entstehende Zahl z' um 198 größer als z.
(2) Die Summe aus z und z' beträgt 13776.

Stelle fest, ob es genau eine Zahl z mit den von Klaus genannten Eigenschaften gibt! Wenn dies der Fall ist, so ermittle diese Zahl!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn es eine Zahl z der genannten Art gibt, so gilt für sie und die Zahl z':

(1) $z' = 198 + z$ sowie
(2) $z + z' = 13776$.

Aus (1) und (2) folgt: $z + 198 + z = 13776$, woraus man $2z = 13776 - 198 = 13578$, also $z = 6789$ erhält.
Also kann nur diese Zahl die genannten Eigenschaften haben.
In der Tat treffen nun Klaus' Aussagen für diese Zahl und $z' = 6789+198 = 6987$ zu, da z' aus z dadurch gewonnen werden kann, dass in z die Ziffern 7 und 9 miteinander vertauscht werden.
Daher hat genau die Zahl z = 6789 die von Klaus genannten Eigenschaften.

Aufgabe 180622:
Ermittle alle zweistelligen Zahlen z, die die folgenden Bedingungen (1), (2) gleichzeitig erfüllen:

(1) Die Einerziffer von z ist um 1 kleiner als die Zehnerziffer von z.
(2) Vertauscht man die Ziffern von z miteinander, so erhält man eine zweistellige Primzahl.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn z eine Zahl mit den geforderten Eigenschaften ist, so hat z nach (2) nicht 0 als Einerziffer, also ist die Einerziffer eine der Ziffern 1, ..., 9.
Da nach (1) die Zehnerziffer um 1 größer ist, entfällt 9 als Einerziffer und es verbleiben wegen (1) für die zweistelligen Zahlen z nur die Möglichkeiten 21, 32, 43, 54, 65, 76, 87, 98.

Von ihnen entfallen 21, 43, 65 und 87, da aus ihnen bei Ziffernvertauschung je eine gerade zweistellige Zahl, also keine Primzahl, entsteht. Ferner entfällt die Zahl 54, aus der die durch 5 teilbare zweistellige Zahl 45 entsteht.

Daher können nur die Zahlen 32, 76 und 98 alle Bedingungen der Aufgabe erfüllen. Tatsächlich sind sie zweistellig und erfüllen (1), und sie erfüllen auch (2), da 23, 67 und 89 zweistellige Primzahlen sind. Die gesuchten Zahlen lauten folglich 32, 76 und 98.

Aufgabe 210622:
Fritz findet in einem alten Lehrbuch in einer Aufgabe fünfstellige natürliche Zahlen abgedruckt. Bei einer dieser Zahlen sind die an der Einer- und die an der Zehnerstelle stehenden Ziffern nicht mehr lesbar.
Wenn man für diese beiden unlesbaren Ziffern jeweils ein Sternchen (*) setzt, dann hat die Zahl die Form

$$418**$$

Außerdem meint Fritz, aus dem Aufgabentext entnehmen zu können, dass sich die fünfstellige Zahl ohne Rest sowohl durch 6 als auch durch 7 und durch 9 teilen lässt.
Untersuche, ob es eine fünfstellige Zahl gibt, die als die betreffende Zahl in dem Lehrbuch gestanden haben könnte und alle genannten Teilbarkeitseigenschaften hat!
Nenne diese Zahl! Gibt es außer ihr noch andere derartige Zahlen?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, es gibt eine solche Zahl. Dann folgt: Die Zahl ist durch 6 teilbar, also gerade; ihre Einerziffer lautet mithin 0, 2, 4, 6 oder 8.
Die Zahl ist ferner durch 9 teilbar; dasselbe gilt folglich für ihre Quersumme. Diese ist um $4 + 1 + 8$, d. h. um 13 größer als die Summe aus ihrer Zehner- und ihrer Einerziffer.
Setzt man der Reihe nach für die Einerziffer 0, 2, 4, 6, 8, dann ergibt sich für die Zehnerziffer jeweils der in der folgenden Tabelle angegebene Wert:

Einerziffer	Summe aus 13 und der Einerziffer	Zehnerziffer
0	13	5
2	15	3
4	17	1
6	19	8
8	21	6

Also kann die gesuchte Zahl nur eine der Zahlen 41850, 41832, 41814, 41886, 41868 sein. Von diesen ist nur 41832 durch 7 teilbar.
Daher kann nur diese Zahl an der angegebenen Stelle im Lehrbuch gestanden haben; denn sie hat als einzige alle verlangten Teilbarkeitseigenschaften und ist von der Form 418**, wie in der Aufgabe angegeben.

Aufgabe 260621:
Bei der folgenden fünfstelligen Zahl sind zwei Ziffern unleserlich geworden und durch Sternchen ersetzt.

$$27**7$$

Anstelle der Sternchen sind zwei Ziffern so einzufügen, dass die Zahl durch 9 teilbar ist.
Gib alle fünfstelligen Zahlen an, die durch derartiges Einfügen entstehen können! Weise nach, dass alle gesuchten Zahlen von dir angegeben wurden!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Durch Einfügen zweier Ziffern anstelle der Sternchen entsteht genau dann eine durch 9 teilbare Zahl, wenn deren Quersumme durch 9 teilbar ist. Letzteres ist genau dann der Fall, wenn die Summe der zwei eingefügten Ziffern 2 oder 11 beträgt.
Folglich ergibt sich genau dann eine durch 9 teilbare Zahl, wenn die beiden Sternchen in dieser Reihenfolge durch die Ziffern 0,2 bzw. 2,9 bzw. 1,1 bzw. 3,8 bzw. 2,0 bzw. 4,7 bzw. 5,6 bzw. 7,4 bzw. 8,3 bzw. 9,2 ersetzt werden.
Die gesuchten Zahlen lauten mithin
27027, 27117, 27207, 27297, 27387, 27477, 27567, 27657, 27747, 27837 und 27927.

Aufgabe 300623:
Eine Buchdruckerei habe zum Druck der Ziffern 0, 1, ..., 9 Lettern in folgenden Stückzahlen zur Verfügung:

Ziffer	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Stückzahl	350	340	320	340	360	310	300	320	320	340

Unter Verwendung nur dieser Lettern sollen die Seitenzahlen von 1 bis 1020 eines Buches gedruckt werden. Dabei soll keine Letter mehr als einmal benutzt werden.
Reichen die Lettern hierfür aus? Begründe deine Antwort!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Lettern reichen nicht aus.
An der Einerstelle wird die Ziffer 6 jeweils einmal für die Zahlen 1 bis 10, 11 bis 20, ..., 1011 bis 1020 gebraucht, d. h. 102 mal.
An der Zehnerstelle wird die Ziffer 6 jeweils 10 mal für die Zahlen 60 bis 69, 160 bis 169, ..., 960 bis 969 gebraucht, d. h. 100 mal.
An der Hunderterstelle wird die Ziffer 6 für die Zahlen 600, ..., 699 gebraucht, d. h. 100 mal.
Es werden also 302 Lettern mit der Ziffer 6 gebraucht, während nur 300 zur Verfügung stehen.

Aufgabe 320621:
Bei der folgenden sechsstelligen Zahl sind zwei Ziffern unleserlich geworden und durch Sternchen ersetzt:

$$38 \star\star 42$$

Anstelle der Sternchen sind zwei Ziffern so einzufügen, dass die Zahl durch 9 teilbar ist.
Gib alle sechsstelligen Zahlen an, die durch derartiges Einfügen entstehen können!
Weise nach, dass alle gesuchten Zahlen von dir angegeben wurden!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Durch Einfügen zweier Ziffern entsteht genau dann eine durch 9 teilbare Zahl, wenn deren Quersumme durch 9 teilbar ist. Das ist wegen $3 + 8 + 4 + 2 = 17$ genau dann der Fall, wenn die Summe der zwei eingefügten Ziffern sich von 1 nur um ein Vielfaches der Zahl 9 unterscheidet.
Da eine Summe von zwei Ziffern höchstens $9 + 9 = 18$ betragen kann, ist folglich für die Summe der einzutragenden Ziffern nur entweder 1 oder 10 möglich. Alle Möglichkeiten, aus zwei Ziffern eine dieser Summen zu bilden, sind

$$1 = 0 + 1 = 1 + 0$$
$$10 = 1 + 9 = 2 + 8 = 3 + 7 = 4 + 6 = 5 + 5 = 6 + 4 = 7 + 3 = 8 + 2 = 9 + 1$$

Alle gesuchten Zahlen sind daher

$$380142, 381042, 381942, 382842, 383742, 384642, 385542, 386442, 387342, 388242, 389142$$

Aufgabe 330622:
Man denke sich aus den fünf Ziffern 1, 2, 3, 4, 5 alle verschiedenen Zahlen gebildet, die durch die Anordnung dieser Ziffern in jeder möglichen Reihenfolge entstehen können.
Welches ist die Summe aller dieser fünfziffrigen Zahlen?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Für jede Möglichkeit, als Einerziffer eine der Ziffern 1, 2, 3, 4, 5 zu wählen, gibt es so viele Zahlen, wie es Reihenfolge-Möglichkeiten der übrigen vier Ziffern gibt. Die Anzahl dieser Möglichkeiten beträgt 24.
Als Summe der Einerziffern erhält man folglich

$$24 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 24 \cdot 15 = 360$$

Dasselbe gilt für die Summe der Zehner-, Hunderter-, Tausender- und Zehntausenderziffern. Daher ergibt sich dasselbe Ergebnis wie bei der folgenden Rechnung:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 3 & 6 & 0 \\ & & & 3 & 6 & 0 & \\ & & 3 & 6 & 0 & & \\ & 3 & 6 & 0 & & & \\ 3 & 6 & 0 & & & & \\ \hline 3 & 9 & 9 & 9 & 9 & 6 & 0 \end{array}$$

II.III Diophantische Gleichungen

I Runde 1

Aufgabe 240611:
Zum Pioniergeburtstag sollen die tüchtigsten Altstoffsammler ausgezeichnet werden. Hierzu will die Pionierleiterin Bücher zu je 6 M und zu je 4 M kaufen, von jeder Sorte mindestens eins, andere Sorten aber nicht. Insgesamt will sie 30 M für diese Bücher ausgeben.

Gib alle Möglichkeiten an, welche Anzahlen von Büchern der beiden Sorten gewählt werden können, um diesen Bedingungen zu entsprechen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Werden x Bücher zu je 6 M und y Bücher zu je 4 M gekauft, so gilt $6x + 4y = 30$. (1)
Wegen $y \geq 1$ folgt hieraus $6x \leq 26$, also muss $x < 5$ sein. Daher und wegen $x \geq 1$ gibt es für x nur die Möglichkeiten der folgenden Tabelle. Von diesen scheiden diejenigen aus, bei denen die Zahl $30 - 6x$ nicht durch 4 teilbar ist, da aus (1) folgt, dass $4y = 30 - 6x$ gelten muss.
Bei den übrigen Werten von x ergeben sich aus dieser Gleichung die angegebenen Werte für y.

x	$6x$	$30 - 6x = 4y$	y
1	6	24	6
2	12	18	-
3	18	12	3
4	24	6	-

Daher können nur die folgenden Anzahlen den Bedingungen der Aufgabe entsprechen:
Es werden entweder 1 Buch zu 6 M und 6 Bücher zu 4 M oder 3 Bücher zu 6 M und 3 Bücher zu 4 M gekauft.
Beide Anzahlangaben erfüllen die Bedingungen (1) und $x \geq 1$, $y \geq 1$. Daher sind hiermit alle gesuchten Möglichkeiten genannt.

II Runden 2 & 3

Aufgabe 300624:
Ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen n, die sich in der Form $n = 5a + 7b$ darstellen lassen, wobei a und b natürliche Zahlen sind!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die folgende Tabelle zeigt alle Werte n = 5a + 7b mit a = 0, 1, 2, 3, 4, 5 und b = 0, 1, 2, 3, 4

b|a	0	1	2	3	4	5
0	0	5	10	15	20	25
1	7	12	17	22	27	32
2	14	19	24	29	34	39
3	21	26	31	36	41	46
4	28	33	38	43	48	53

Da bei weiterem Vergrößern von a oder b (oder beiden) stets jeweils auch n größer wird, ergibt sich:
(1) Unter allen natürlichen Zahlen $n \leq 24$ lassen sich genau die Zahlen 0, 5, 7, 10, 12, 14, 15, 17, 19, 20, 21, 22, 24 in der genannten Form darstellen. Ferner ist aus der Tabelle ersichtlich:

(2) Die Zahlen 24, 25, 26, 27, 28 lassen sich in der genannten Form darstellen. Indem man nun zu den in (2) genannten Zahlen der Reihe nach $1 \cdot 5$, $2 \cdot 5$, $3 \cdot 5$, ... usw. addiert, erhält man:

(3) Auch die Zahlen 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, lassen sich in der genannten Form darstellen.
Mit (2) und (3) ist gezeigt, dass jede natürliche Zahl $n \geq 24$ sich in dieser Form darstellen lässt. Die insgesamt gesuchten Zahlen sind also genau die in (1) genannten Zahlen und alle natürlichen Zahlen $n > 24$.

Aufgabe 330621:
Von einem „Fest der Tiere“ wird erzählt:

Dort waren ebenso viele Storchenbeine wie Käfer, 90 Käferbeine mehr als Hasen, aber dreimal so viele Hasenbeine wie Störche.

Nenne Anzahlen der Störche, Hasen und Käfer, so dass die Erzählung stimmt!
Überprüfe dies bei deinen Anzahlangaben!
Bemerkung: Die Tiere sollen alle nach dem Biologielehrbuch gebaut sein: Jeder Storch mit 2 Beinen, jeder Hase mit 4 Beinen, jeder Käfer mit 6 Beinen.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Anzahlangabe: Es waren 8 Störche, 6 Hasen und 16 Käfer.

Überprüfen der Erzählung: Die 8 Störche haben 16 Beine, also ebenso viele, wie es Käfer gibt. Die 16 Käfer haben 96 Beine, also 90 mehr, als es Hasen gibt. Die 6 Hasen haben 24 Beine, das sind dreimal so viele, wie es Störche gibt.

Aufgabe 330631:
Finde alle Möglichkeiten, drei natürliche Zahlen a, b, c so zusammenstellen, dass $a + b + c = 12$ und $c - b = 3$ gilt!
Hinweis:
1. Die Null soll auch als natürliche Zahl bezeichnet werden.
2. Es wird auch zugelassen, dass sich unter den Zahlen a, b, c solche befinden, die einander gleich sind.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es muss $b \leq 4$ sein; denn wäre $b \geq 5$, so folgte wegen $c - b = 3$, dass $c \geq 8$ wäre.
Damit wäre bereits $b + c \geq 13$, also erst recht $a + b + c \geq 13$, im Widerspruch zu $a + b + c = 12$.

Für $b = 0$ folgt $c = 3$ und wegen $a + b + c = 12$ dann $a = 9$.
Für $b = 1$ folgt $c = 4$ und wegen $a + b + c = 12$ dann $a = 7$.
Für $b = 2$ folgt $c = 5$ und wegen $a + b + c = 12$ dann $a = 5$.
Für $b = 3$ folgt $c = 6$ und wegen $a + b + c = 12$ dann $a = 3$.
Für $b = 4$ folgt $c = 7$ und wegen $a + b + c = 12$ dann $a = 1$.
Damit sind alle gesuchten Zusammenstellungen gefunden.

III Klasse 7

III.I Primzahlen, Teilbarkeit

I Runde 1

Aufgabe 030715:
Mit wie viel Nullen endet das Produkt aller natürlichen Zahlen von 1 bis 40? (Begründung!)

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Das Produkt enthält die Faktoren 5, 10, 15, 20, 30, 35 und 40, sowie den Faktor 25, in denen insgesamt neunmal der Faktor 5 vorkommt.
In allen übrigen Faktoren tritt der Faktor 5 nicht auf. Da die Anzahl der Endnullen von der Anzahl der Faktoren 2 und 5 abhängt und im vorliegenden Fall der Faktor mindestens neunmal auftritt, hat das Produkt genau 9 Endnullen.

Aufgabe 030716:
a) Es ist die kleinste natürliche Zahl zu finden, die bei der Division durch 2, 3, 4, 5, und 6 jeweils den Rest 1 lässt, aber durch 7 teilbar ist.

b) Nenne zwei weitere Zahlen mit dieser Eigenschaft und gib an, wie man beliebig viele solche Zahlen bekommen kann!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Das kleinste gemeinsame Vielfache von 2, 3, 4, 5, und 6 ist 60. Die Zahlen 1, 61, 121, 181, ... lassen also bei der Division durch 2, 3, 4, 5, und 6 jeweils den Rest 1. Durch Probieren findet man, dass 301 die kleinste dieser Zahlen ist, die sich durch 7 teilen lässt.

b) Weitere Zahlen sind z. B. 721 und 1141. Durch Addition von 420 zu einer derartigen Zahl erhält man stets eine weitere Zahl mit der gewünschten Eigenschaft.

Aufgabe 040714:
Jede natürliche Zahl heißt vollkommene Zahl, wenn sie gleich der Summe ihrer echten Teiler ist. Die Zahl 12 hat zum Beispiel die echten Teiler 1, 2, 3, 4, 6 und ist; wie man sieht; keine vollkommene Zahl.
Welche vollkommenen Zahlen gibt es unter den natürlichen Zahlen von 1 bis 30?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Man schreibt die echten Teiler der natürlichen Zahlen von 2 bis 30 für jede dieser Zahlen auf und bildet jeweils die Summe. Dabei findet man

$$6 = 1 + 2 + 3 \qquad \text{und} \qquad 28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$$

Aufgabe 080711:
Der größte gemeinsame Teiler zweier natürlicher Zahlen ist 6, ihr kleinstes gemeinsames Vielfaches ist 210.
Ermittle alle Zahlenpaare mit den genannten Eigenschaften!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Beide gesuchten Zahlen sind 1. Teiler von 210 und 2. Vielfache von 6. Wegen $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ sind sowohl Teiler von 210 als auch Vielfache von 6 die folgenden Zahlen: 6, 30, 42 und 210 und nur diese. Folgende Zahlenpaare müssen untersucht werden:

(1) 6 und 30
(2) 6 und 42
(3) 6 und 210
(4) 30 und 42
(5) 30 und 210
(6) 42 und 210.

Bei den ersten beiden Paaren ist das kleinste gemeinsame Vielfache 30 bzw. 42, aber nicht 210; die Paare 5 und 6 haben als größten gemeinsamen Teiler 30 bzw. 42, aber nicht 6. Für die Paare 3 und 4 treffen die gestellten Bedingungen zu.
Die Zahlenpaare 6 und 210 sowie 30 und 42 erfüllen als einzige die gestellten Bedingungen.

Aufgabe 100713:
a) Beweise folgenden Satz: Wenn vier natürliche Zahlen eine ungerade Zahl als Summe haben, so haben sie als Produkt eine gerade Zahl.

b) Untersuche, ob für jede gerade Anzahl von natürlichen Zahlen der folgende Satz gilt:
Wenn diese natürlichen Zahlen eine ungerade Zahl als Summe haben, so haben sie als Produkt eine gerade Zahl.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

1. Wenn die Summe s 4 natürlicher Zahlen a, b, c, d ungerade ist, muss mindestens eine der Zahlen gerade sein, denn wenn alle ungerade wären, wäre die Summe gerade:
$$s = a + b + c + d = (2k + 1) + (2i + 1) + (2j + 1) + (2l + 1) = 2(k + i + j + l + 2)$$
Damit wäre s ein Vielfaches von 2 und somit gerade (Widerspruch zur Voraussetzung), also muss mindestens eine der Zahlen a, b, c, d gerade sein. Also gilt mit o. B. d. A. $a = 2k$ für das Produkt p:
$$p = a \cdot b \cdot c \cdot d = 2k \cdot b \cdot c \cdot d$$
und das ist eine gerade Zahl.

2. Wenn die Summe s von einer geraden Anzahl natürlicher Zahlen ungerade ist, muss mindestens eine der Zahlen gerade sein, denn wenn alle $2x$ Zahlen ungerade wären, wäre die Summe gerade:
$$s = (2k + 1) + (2i + 1) + (2j + 1) + (2l + 1) + ... = 2(k + i + j + l + ... + x)$$
wäre ein Vielfaches von 2 und somit gerade, also muss mindestens eine Zahl gerade sein. Also gilt mit o. B. d. A. $a = 2k$ für das Produkt p:
$$p = a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot ... = 2k \cdot b \cdot c \cdot d \cdot ...$$
und das ist wieder eine gerade Zahl.

Aufgabe 130711:
Gib sämtliche Teiler der Zahl 111111 an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wegen $111111 = 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37$ hat 111111 genau die 32 Teiler 1, 3, 7, 11, 13, 37 und

$$\begin{array}{ccc}
3 \cdot 7 = 21 & 3 \cdot 11 = 33 & 3 \cdot 13 = 39 \\
3 \cdot 37 = 111 & 7 \cdot 11 = 77 & 7 \cdot 13 = 91 \\
7 \cdot 37 = 259 & 11 \cdot 13 = 143 & 11 \cdot 37 = 407 \\
13 \cdot 37 = 481 & 3 \cdot 7 \cdot 11 = 231 & 3 \cdot 7 \cdot 13 = 273 \\
3 \cdot 7 \cdot 37 = 777 & 3 \cdot 11 \cdot 13 = 429 & 3 \cdot 11 \cdot 37 = 1221 \\
3 \cdot 13 \cdot 37 = 1443 & 7 \cdot 11 \cdot 13 = 1001 & 7 \cdot 11 \cdot 37 = 2849 \\
7 \cdot 13 \cdot 37 = 3367 & 11 \cdot 13 \cdot 37 = 5291 & 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = 3003 \\
3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 37 = 8547 & 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37 = 10101 & 3 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37 = 15873 \\
7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37 = 37037 & 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37 = 111111 &
\end{array}$$

Aufgabe 180714:
Ermittle die kleinste Primzahl, die bei Division durch 5, 7 und 11 jeweils den Rest 1 lässt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Ist p die gesuchte Primzahl, so ist $p - 1$ durch 5, 7 und 11 teilbar. Außerdem ist, da die einzige gerade Primzahl $p = 2$ die geforderten Eigenschaften nicht aufweist, p ungerade, also $p - 1$ auch durch 2 teilbar. Deshalb, und weil 2, 5, 7 und 11 paarweise teilerfremd sind, kommen für p nur um 1 vermehrte Vielfache von $2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 770$ in Frage.

Die Zahl 771 ist durch 3, die Zahl $2 \cdot 770 + 1 = 1541$ durch 23 teilbar. Die nächste derartige Zahl lautet $3 \cdot 770 + 1 = 2311$. Da sie weder durch 2 noch durch 3, 5, 7, 11, 13, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43 und 47 teilbar ist und da $532 = 2809 > 2311$ ist, ist 2311 eine Primzahl.
2311 lässt bei Division durch 5, 7 und 11 jeweils den Rest 1, daher ist sie die gesuchte Zahl.

Aufgabe 190712:
Ermittle alle diejenigen vierstelligen natürlichen Zahlen, die die Eigenschaft haben, durch jede der Zahlen 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 15 teilbar zu sein!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Eine natürliche Zahl ist genau dann durch die angegebenen Zahlen teilbar, wenn sie durch deren kgV teilbar ist. Wegen der Primfaktorzerlegung

$$\begin{array}{cccc}
2 = 2 & 5 = 5 & 8 = 2^3 & 12 = 2^2 \cdot 3 \\
3 = 3 & 6 = 2 \cdot 3 & 9 = 3^2 & 14 = 2 \cdot 7 \\
4 = 2^2 & 7 = 7 & 10 = 2 \cdot 5 & 15 = 3 \cdot 5
\end{array}$$

ist dieses kgV die Zahl $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 2520$. Alle (von 0 verschiedenen) natürlichen Vielfachen dieser Zahl sind: Die Zahlen $1 \cdot 2520 = 2520$, $2 \cdot 2520 = 5040$, $3 \cdot 2520 = 7560$ sowie alle Zahlen $n \cdot 2520$ mit natürlichem $n \geq 4$.
Für jedes $n \geq 4$ gilt aber: Wegen $n \cdot 2520 \geq 4 \cdot 2520 = 10080$ ist die Zahl $n \cdot 2520$ nicht vierstellig.
Daher erfüllen genau die Zahlen 2520, 5040 und 7560 die Bedingungen der Aufgabe.

Aufgabe 220712:
Die (untereinander nicht verwandten) Ehepaare Meier und Schmidt machen gemeinsam mit ihren Kindern eine kurze Urlaubsfahrt und nehmen dazu einen größeren Vorrat an Papierservietten mit.
Jeder Teilnehmer erhält zu jeder Mahlzeit eine Serviette. Von jedem Teilnehmer wurde dieselbe Anzahl Mahlzeiten eingenommen, und zwar mehr als eine.
Nach Abschluss der Fahrt stellte man fest, dass genau 121 Servietten verbraucht wurden.
Wie viel Kinder dieser Familie nahmen insgesamt an der Reise teil?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Anzahl der verbrauchten Papierservietten ist gleich dem Produkt aus der Anzahl der Teilnehmer und der Anzahl der von jedem Teilnehmer eingenommenen Mahlzeiten.
Nun ist $121 = 11 \cdot 11$ die einzige Faktorzerlegung, die hier in Frage kommt; denn $121 = 1 \cdot 121$ scheidet aus, da sowohl die Anzahl der Teilnehmer als auch die Anzahl der Mahlzeiten jedes Teilnehmers größer als 1 war. Folglich haben insgesamt 11 Familienmitglieder, mithin also genau 7 Kinder an der Urlaubsfahrt teilgenommen.

Aufgabe 260711:
Ermittle für jede der nachfolgenden Teilaufgaben a) bis e) jeweils alle diejenigen natürlichen Zahlen n, die die angegebene Forderung erfüllen!

a) Die Summe $\left(\frac{7}{12} + \frac{n}{12}\right)$ ist ein echter Bruch.
b) Die Summe $\left(\frac{7}{12} + \frac{n}{12}\right)$ ist ein echter Bruch, der sich nicht mehr durch Kürzen vereinfachen lässt.
c) Die Aufgabe, die Differenz $\left(\frac{7}{12} - \frac{n}{12}\right)$ zu berechnen, ist im Bereich der gebrochenen Zahlen nicht lösbar.
d) Die Differenz $\left(\frac{7}{12} - \frac{n}{12}\right)$ ist ein echter Bruch.
e) Die Summe $\left(\frac{7}{12} + \frac{n}{12}\right)$ ist eine natürliche Zahl.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Für jede natürliche Zahl n gilt $\frac{7}{12} + \frac{n}{12} = \frac{7+n}{12}$; diese Summe ist genau dann ein echter Bruch, wenn $7 + n < 12$ gilt. Das trifft genau für $n = 0; 1; 2; 3; 4$ zu.

b) Aus den unter a) ermittelten n erfüllen genau diejenigen auch die Forderung b), die nach Addition von 7 eine zu 12 teilerfremde Zahl ergeben. Dies trifft genau für $n = 0; 4$ zu.

c) Die Aufgabe, die Differenz $\frac{7}{12} - \frac{n}{12}$ zu berechnen, ist genau dann in Bereich der gebrochenen Zahlen lösbar, wenn $n \leq 7$ gilt. Daher wird die Forderung c) genau von allen natürlichen Zahlen $n > 7$ erfüllt.

d) Für alle natürlichen Zahlen $n \leq 7$ gilt $\frac{7}{12} - \frac{n}{12} = \frac{7-n}{12}$. Diese Differenz ist genau dann ein echter Bruch, wenn $7 - n < 12$ gilt. Dies trifft genau für alle natürlichen Zahlen $n \leq 7$ (d. h. $n = 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7$) zu.

e) Die Summe $\frac{7+n}{12}$ ist genau dann eine natürliche Zahl, wenn $(7 + n)$ ein ganzzahliges Vielfaches von 12 ist; d. h. genau dann, wenn n eine der Zahlen $n = 5; 17; 29; ...$ ist. Diese Zahlen lassen sich in der Form $n = 12k + 5$ $(k = 0, 1, 2, ...)$ darstellen.

II Runde 2

Aufgabe 030721:
Durch welche höchste Potenz von 2 ist das Produkt von vier aufeinanderfolgenden geraden natürlichen Zahlen mindestens teilbar?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Von vier aufeinander folgenden natürlichen Zahlen ist stets genau eine mindestens durch 4 und genau eine andere durch 2, aber nicht durch 4 teilbar.
Demnach ist von den vier aufeinander folgenden geraden natürlichen Zahlen stets genau eine mindestens durch 8 und genau eine weitere durch 4, aber nicht durch 8 teilbar.
Die beiden anderen geraden Zahlen sind in jedem Fall durch 2, aber nicht durch 4 teilbar. Damit ist das betrachtete Produkt durch $8 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2 = 2^7$ teilbar.

Da unter den vier aufeinander folgenden geraden Zahlen keine durch 16 teilbar sein muss, ist das Produkt im allgemeinen nicht durch 2^8 teilbar. Die gesuchte höchste Potenz ist demnach 2^7.

Aufgabe 040721:
Beweise, dass die Summe von 7 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, von denen die kleinste durch 3 teilbar ist, durch 21 teilbar ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
$3n$ sei die kleinste der Zahlen, welche durch 3 teilbar ist. Dabei ist n eine natürliche Zahl. Für die Summe gilt dann:

$$3n + 3n + 1 + 3n + 2 + 3n + 3 + 3n + 4 + 3n + 5 + 3n + 6 = 21n + 21 = 21 \cdot (n + 1)$$

Da die Summe als $21 \cdot (n + 1)$ dargestellt werden kann, ist sie folglich durch 21 teilbar.

Aufgabe 070724:
Auf einer Exkursion fuhren mit Autobussen genau 319 Schüler, auf einer anderen Exkursion genau 232. In jedem der Autobusse, die insgesamt dabei fuhren, saß genau die gleiche Anzahl Schüler. Ermittle diese Anzahl! (Wir setzten dabei voraus, dass in jedem Autobus mehr als ein Schüler saß.)

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Anzahl der Schüler pro Autobus muss ein gemeinsamer Teiler > 1 von 319 und 232 sein. Wegen $319 = 11 \cdot 29$ und $232 = 8 \cdot 29$ ist die Primzahl 29 der einzige gemeinsame Teiler > 1 von 319 und 232; denn 11 und 8 sind teilerfremd.
Daher fuhren in jedem Bus genau 29 Schüler.

Aufgabe 110721:
Ermittle alle dreistelligen natürlichen Zahlen, die gleichzeitig durch 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 12 und 14 teilbar sind!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Eine Zahl ist genau dann gleichzeitig durch 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 12 und 14 teilbar, wenn sie das kgV dieser Zahlen ist oder ein Vielfaches davon. Wegen

$$2 = 2 \qquad 3 = 3 \qquad 4 = 2 \cdot 2 \qquad 6 = 2 \cdot 3 \qquad 7 = 7 \qquad 8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$$

$$9 = 3 \cdot 3 \qquad 12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \qquad 14 = 2 \cdot 7$$

ist das kgV gleich $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 504$.
Die einzige dreistellige natürliche Zahl, die durch 504 teilbar ist, ist 504. Daher ist 504 die einzige Zahl, die allen Bedingungen der Aufgabe entspricht.

Aufgabe 130722:
Karl sucht drei von Null verschiedene natürliche Zahlen a, b, c, für die folgendes gilt:

ggT$(a, b) = 4$ (lies: Der ggT der Zahlen a und b ist 4),
ggT$(a, c) = 6$,
ggT$(b, c) = 14$.

Er behauptet nach einigem Probieren, dass es sogar mehr als eine Möglichkeit gibt, drei solche Zahlen anzugeben.
Ist diese Behauptung richtig?
Gibt es eine Möglichkeit der Wahl dreier solcher Zahlen a, b, c, bei der, verglichen mit allen übrigen Möglichkeiten, a am kleinsten und zugleich b am kleinsten und zugleich c am kleinsten ist? Wenn ja, dann gib für diesen Fall die Zahlen a, b, c an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Erfüllen a, b, c die drei genannten Bedingungen über den ggT, so ist a durch 4 und durch 6, also durch das kgV dieser Zahlen, d. h. durch 12, teilbar.
Ferner ist dann b durch 4 und durch 14, also durch das kgV dieser Zahlen, d. h. durch 28, teilbar.
Ebenso ist c durch 6 und 14, also durch 42 teilbar.

Andererseits erfüllt die Wahl von (1) $a = 12$, $b = 28$, $c = 42$ alle drei ggT-Bedingungen. Daher ist die zweite Frage der Aufgabe mit Ja und der Angabe (1) zu beantworten.

Multipliziert man a in (1) mit einer zu b und c teilerfremden Zahl $z > 1$ (z. B. mit $z = 5$), so erhält man eine andere Wahl dreier Zahlen (im Beispiel 60, 28, 42), die ebenfalls alle drei ggT-Bedingungen erfüllt. Daher ist auch die erste Frage der Aufgabe mit Ja zu beantworten.

Aufgabe 170722:
a) Beweise: Die Summe von fünf aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist stets durch 5 teilbar!

b) Untersuche, ob auch die Summe von sechs aufeinanderfolgenden Zahlen immer durch 6 teilbar ist!

c) Ermittle eine weitere natürliche Zahl n ($n > 6$), für die gilt: Die Summe von n aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist stets durch n teilbar!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Es sei a eine beliebige natürliche Zahl. Dann gilt:

$$a + (a + 1) + (a + 2) + (a + 3) + (a + 4) = 5a + 10$$

Es gilt der Satz: Wenn z ein Teiler sowohl von x als auch von y ist, so ist z auch ein Teiler der Summe $x + y$. Nun ist 5 ein Teiler von $5a$, und 5 ist auch ein Teiler von 10. Folglich gilt: $5|5a + 10$.

b) Ein Gegenbeispiel zeigt, dass die Summe von sechs aufeinanderfolgenden Zahlen nicht immer durch 6 teilbar ist:
Es gilt z. B. $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$; $6 \nmid 21$.

c) Für n = 7 z. B. gilt: $a + (a + 1) + (a + 2) + (a + 3) + (a + 4) + (a + 5) + (a + 6) = 7a + 21$
Nun gilt $7|7a$ und $7|21$, daraus folgt: $7|7a + 21$. Eine natürliche Zahl, für die die Aussage wahr ist, ist somit z. B. $n = 7$.

Aufgabe 200723:
Jens sagt: „Ich denke mir zwei natürliche Zahlen. Ihr kleinstes gemeinsames Vielfache (kgV) beträgt 51975, ihr größter gemeinsamer Teiler (ggT) ist 45. Eine der beiden Zahlen lautet 4725.“

Stelle fest, ob es genau eine natürliche Zahl gibt, die nach diesen Angaben die zweite von Jens gedachte Zahl sein kann! Trifft das zu, so ermittle diese zweite Zahl!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Primzerlegungen der genannten Zahlen sind:
kgV: $51975 = 33 \cdot 52 \cdot 7 \cdot 11$,
ggT: $45 = 32 \cdot 5$,
erste Zahl: $4725 = 33 \cdot 52 \cdot 7$.
Wenn eine natürliche Zahl z die zweite gedachte Zahl sein kann, so gilt für sie:
In ihrer Primzerlegung enthält sie höchstens solche Primzahlen, die im kgV vorkommen, also höchstens die Primzahlen 3, 5, 7, 11. Die Primzahl 3 kommt in 4725 in größerer Anzahl vor als im ggT, wo sie in der Anzahl 2 auftritt. Daher muss sie in z in dieser Anzahl 2 als Faktor vorkommen.

Die Primzahl 5 kommt in 4725 in größerer Anzahl vor als im ggT, wo sie in der Anzahl 1 auftritt. Daher muss sie in z in dieser Anzahl 1 als Faktor vorkommen.
Die Primzahl 7 kommt in 4725 vor, aber nicht im ggT. Daher kann sie in z nicht auftreten. Die Primzahl 11 kommt nicht in 4725 vor, aber im kgV, wo sie in der Anzahl 1 auftritt. Daher muss sie in z in dieser Anzahl 1 als Faktor vorkommen.
Also kann höchstens die Zahl $z = 32 \cdot 5 \cdot 11 = 495$ die zweite gedachte Zahl sein. Sie kann dies tatsächlich; denn $4725 = 33 \cdot 52 \cdot 7$ und $z = 32 \cdot 5 \cdot 11$ haben das kgV $33 \cdot 52 \cdot 7 \cdot 11 = 51975$ und den ggT $32 \cdot 5 = 45$.
Es gibt folglich genau eine natürliche Zahl, die die zweite gedachte Zahl sein kann: sie lautet 495.

Aufgabe 210723:
Ermittle alle Paare $(a; b)$ natürlicher Zahlen a und b mit $0 < a < b$, deren größter gemeinsamer Teiler 15 und deren Produkt 7875 ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn ein Paar $(a; b)$ natürlicher Zahlen a und b den Bedingungen der Aufgabe entspricht, so folgt:

(1) Es gibt natürliche Zahlen m, n mit $a = 15m$, $b = 15n$.
(2) Wegen $0 < a < b$ folgt $0 < m < n$,
(3) wegen $ab = 7875$ folgt $15m \cdot 15n = 7875$, also $225mn = 7875$, $mn = 35$. (3)

Da 35 die Primfaktorzerlegung $35 = 5 \cdot 7$ hat, gibt es für (2), (3) nur die Möglichkeiten, dass entweder $m = 1$, $n = 35$ oder $m = 5$, $n = 7$ gilt. Aus (1) folgt daher, dass nur die Paare $(15; 525)$, $(75; 105)$ die Bedingungen der Aufgabe erfüllen können.

II. Sie erfüllen diese Bedingungen; denn es gilt $0 < 15 < 525$, $0 < 75 < 105$; wegen der Primfaktorzerlegungen $15 = 3 \cdot 5$, $525 = 3 \cdot 52 \cdot 7$, $75 = 3 \cdot 52$, $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$ ist $3 \cdot 5 = 15$ der ggT von 15 und 525 sowie auch der ggT von 75 und 105; schließlich gilt $15 \cdot 525 = 7875$ und $75 \cdot 105 = 7875$.
Daher erfüllen genau die Paare $(15; 525)$ und $(75; 105)$ die Bedingungen der Aufgabe.

Aufgabe 280721:
Im Mathematikunterricht einer Klasse wurden über eine natürliche Zahl, die zwischen 100 und 200 liegt, durch Schüler folgende Aussagen getroffen.

(1) André: „Die Zahl ist durch 11 teilbar.“

(2) Birgit: „Die Zahl ist eine Primzahl.“
(3) Christian: „Die Zahl ist eine zusammengesetzte Zahl.“
(4) Doris: „Die Zahl ist eine Quadratzahl.“

Der Mathematiklehrer stellt fest, dass genau eine dieser vier Aussagen falsch ist.
Untersuche, ob die Zahl durch diese Feststellungen eindeutig bestimmt ist! Ist dies der Fall, dann gib die Zahl an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Da eine Primzahl weder zusammengesetzte Zahl noch Quadratzahl sein kann, muss die Aussage (2) falsch sein, denn sonst wären (3) und (4) falsch, was der Feststellung des Mathematiklehrers widersprechen würde.
Nochmals wegen dieser Feststellung ist (2) die einzige falsche der Aussagen (1) bis (4), also sind (1) und (4) wahr.
Die gesuchte Zahl ist somit eine durch 11 teilbare Quadratzahl. Da 11 eine Primzahl ist, muss diese durch 11 teilbare Quadratzahl sogar durch $11^2 = 121$ teilbar sein. Die einzige durch 121 teilbare Zahl zwischen 100 und 200 ist aber die Zahl 121 selbst.
Damit ist gezeigt, dass die gesuchte Zahl eindeutig bestimmt ist; sie lautet 121.

Aufgabe 320721:
In einer Diskussion werden drei verschiedene Aufgabenstellungen betrachtet:

a) Die Zahl 231 soll als Produkt dargestellt werden. Jeder Faktor soll eine Primzahl sein.
b) Die Zahl 231 soll als Produkt aus genau drei Faktoren dargestellt werden. Jeder Faktor soll eine natürliche Zahl sein. Je zwei der Faktoren sollen voneinander verschieden sein.
c) Dieselbe Aufgabe wie b) wird mit 462 statt 231 gestellt.

Gib zu a), b) und c) jeweils alle verschiedenen Darstellungen an! Dabei gelten Darstellungen, die sich nur durch die Reihenfolge der Faktoren unterscheiden, nicht als verschieden. Begründe, dass du alle gesuchten Darstellungen angegeben hast!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Es gilt $231 = 3 \cdot 7 \cdot 11$. (1)
3, 7 und 11 sind Primzahlen. Die Darstellung einer natürlichen Zahl als Produkt von Primzahlen ist bis auf die Reihenfolge der Faktoren eindeutig. Also ist (1) die einzige in a) gesuchte Darstellung.

b) Jeder Faktor soll eine natürliche Zahl $\neq 0$ sein, also entweder die Zahl 1 oder eine Primzahl oder ein Produkt mehrerer Primzahlen. Da je zwei der Faktoren voneinander verschieden sein sollen, darf die Zahl 1 höchstens einmal als Faktor vorkommen.
Also kommen für b) außer der Darstellung (1) mit ihren drei Faktoren noch genau diejenigen Darstellungen hinzu, in denen ein Faktor 1 lautet, ein Faktor eine Primzahl ist und der dritte das Produkt der beiden anderen Primzahlen:

$$231 = 1 \cdot 3 \cdot 77, \qquad 231 = 1 \cdot 7 \cdot 33, \qquad 231 = 1 \cdot 11 \cdot 21$$

c) Wegen der Zerlegung von 462 in die vier Primfaktoren 2, 3, 7 und 11 gibt es genau folgende in c) gesuchte Darstellungen: Wenn kein Faktor 1 lautet, sind zwei Faktoren Primzahlen, der dritte ist das Produkt der beiden anderen Primzahlen:

$$462 = 2 \cdot 3 \cdot 77, \quad 462 = 2 \cdot 7 \cdot 33, \quad 462 = 2 \cdot 11 \cdot 21, \quad 462 = 3 \cdot 7 \cdot 22, \quad 462 = 3 \cdot 11 \cdot 14, \quad 462 = 7 \cdot 11 \cdot 6$$

Wenn ein Faktor 1 lautet, so gilt: Entweder ist ein weiterer Faktor eine Primzahl und der dritte das Produkt der drei anderen Primzahlen; oder jeder der Faktoren außer der 1 ist das Produkt aus zwei Primzahlen:

$$462 = 1 \cdot 2 \cdot 231, \qquad 462 = 1 \cdot 3 \cdot 154, \qquad 462 = 1 \cdot 7 \cdot 66, \qquad 462 = 1 \cdot 11 \cdot 42$$

$$462 = 1 \cdot 6 \cdot 77, \qquad 462 = 1 \cdot 14 \cdot 33, \qquad 462 = 1 \cdot 22 \cdot 21$$

Aufgabe 340724:
a) Für fünf unmittelbar aufeinanderfolgende natürliche Zahlen wird gefordert, dass ihre Summe 230 beträgt.
Zeige, dass es genau eine Möglichkeit gibt, diese Forderung durch fünf unmittelbar aufeinanderfolgende natürliche Zahlen zu erfüllen! Welches ist die erste dieser fünf Zahlen?

b) Jetzt wird gefordert, dass die Summe durch 23 teilbar sein und dabei einen möglichst kleinen Wert haben soll.
Welches ist die erste von fünf unmittelbar aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, mit denen diese Forderungen erfüllt werden?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Fünf Zahlen der Form $n, n+1, ..., n+4$ erfüllen genau dann die Forderung $n+n+1+...+n+4 = 230$, wenn $5n+10 = 230$ gilt. Das trifft genau dann zu, wenn die erste dieser Zahlen $n = 44$ ist.
b) Für jede natürliche Zahl n ist die betrachtete Summe $5n+10$ durch 5 teilbar. Sie ist genau dann auch, wie gefordert, durch 23 teilbar, wenn sie durch $5 \cdot 23 = 115$ teilbar ist; denn 5 und 23 sind zueinander teilerfremd.
Den kleinsten durch 115 teilbaren Wert erreicht $5n+10$, wenn $5n+10 = 115$ gilt. Das trifft genau dann zu, wenn die erste der fünf Zahlen $n = 21$ ist.

III Runde 3

Aufgabe 030732:
a) Nenne alle Primfaktoren der Zahl 111111.
b) Gib noch 10 weitere Teiler dieser Zahl an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Es gilt:

$$111111 : 3 = 37037; \qquad 37037 : 7 = 5291; \qquad 5291 : 11 = 481; \qquad 481 : 13 = 37$$

Die Primfaktoren der Zahl 111111 lauten 3, 7, 11, 13 und 37.
b) Weitere Teiler sind

$$21(3 \cdot 7) \qquad 33(3 \cdot 11) \qquad 39(3 \cdot 13) \qquad 111(3 \cdot 37) \qquad 77(7 \cdot 11)$$

$$91(7 \cdot 13) \qquad 259(7 \cdot 37) \qquad 143(11 \cdot 13) \qquad 407(11 \cdot 37) \qquad 231(13 \cdot 37).$$

Aufgabe 060731:
Es seien a, b, c natürliche Zahlen, wobei a durch b und b durch c teilbar ist.
Ermittle das kleinste gemeinschaftliche Vielfache und den größten gemeinsamen Teiler der Zahlen a, b und c für $a \geq 1, b \geq 1, c \geq 1$!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(1) Sind p, q natürliche Zahlen ≥ 1, wobei p durch q teilbar ist, so ist p das kgV von p, q.

(2) Bei gleichen Voraussetzungen ist q der ggT von p, q.

(3) Das kgV von a, b, c ist das kgV von a und dem kgV von b, c. Also ist es nach (1) das kgV von a und b. Nochmals nach (1) folgt, dass es a ist.

(4) Der ggT von a, b, c ist der ggT von c und dem ggT von a, b. Also ist er nach (2) der ggT von c und b. Nochmals nach (2) folgt, dass er c ist.

Aufgabe 130732:
Zeige, dass für jede Primzahl $p \geq 3$ das Produkt $(p+1)p(p-1)$ durch 24 teilbar ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Von den drei aufeinanderfolgenden Zahlen $p-1, p, p+1$ ist stets eine durch 3 teilbar.
Wegen $p \geq 3$ ist die Primzahl p ungerade. Folglich sind $p-1$ und $p+1$ unmittelbar aufeinanderfolgende gerade Zahlen. Da von zwei unmittelbar aufeinanderfolgenden geraden Zahlen stets eine durch 4 teilbar ist, ist von den Zahlen $p-1$ und $p+1$ eine durch 2 und die andere durch 4 teilbar.
Somit ist $(p-1)p(p+1)$ durch 3 und durch 8, also, da 3 und 8 teilerfremd sind, auch durch 24 teilbar.

Aufgabe 140732:
Beweise: Unter je vier beliebigen natürlichen Zahlen gibt es mindestens zwei, deren Differenz durch 3 teilbar ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Für jede natürliche Zahl gilt:
Bei ihrer Division durch 3 tritt als Rest einer der Werte 0, 1, 2 auf. Unter diesen Werten befinden sich keine vier verschiedenen. Daher gibt es unter je vier beliebigen natürlichen Zahlen zwei, die bei Division durch 3 denselben Rest lassen.
Ist r dieser Rest, so sind diese beiden Zahlen von der Form $3p+r$ und $3q+r$ mit natürlichen Zahlen p, q. Ihre Differenz ist demnach $(3p+r)-(3q+r) = 3(p-q)$ also durch 3 teilbar.

Aufgabe 160733:
Unter „Primzahldrillingen“ wollen wir drei Primzahlen verstehen, die sich in der Form p, $p+2$, $p+4$ darstellen lassen.
Beweise, dass es genau eine Zahl p gibt, für die $p, p+2, p+4$ „Primzahldrillinge“ sind, und ermittle diese!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, für eine Primzahl p seien $p, p+2, p+4$ Primzahldrillinge. Wenn p bei Division durch 3 den Rest 1 ließe, so wäre $p+2$ durch 3 teilbar und gleichzeitig (wegen $p > 1$) größer als 3, also nicht Primzahl.
Wenn p bei Division durch 3 den Rest 2 ließe, so wäre $p+4$ durch 3 teilbar und gleichzeitig größer als 3, also nicht Primzahl.
Also muss p durch 3 teilbar und folglich selbst die Primzahl 3 sein. In der Tat sind für $p = 3$ auch $p+2 = 5$ und $p+4 = 7$ Primzahlen. Somit gibt es, wie behauptet, genau eine Zahl p, für die $p, p+2, p+4$ Primzahldrillinge sind; dies ist die Zahl 3 (bzw. diese Primzahldrillinge sind 3, 5 und 7).

Aufgabe 220732:
Petra schreibt nacheinander sechs natürliche Zahlen auf. Die erste Zahl wählt sie beliebig, jede weitere genau um 7 größer als das Doppelte der jeweils vorangehenden Zahl. Sie stellt fest, dass die Summe der sechs aufgeschriebenen Zahlen durch 21 teilbar ist.

a) Bilde ein Beispiel, und bestätige in diesem Beispiel Petras Feststellung!
b) Beweise, dass bei jeder beliebigen Wahl der ersten Zahl die beschriebene Rechnung zu einer Summe führt, die durch 21 teilbar ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Wählt man als erste Zahl z. B. 0, so ergibt sich
als zweite Zahl $2 \cdot 0 + 7 = 7$,
als dritte Zahl $2 \cdot 7 + 7 = 3 \cdot 7 = 21$,
als vierte Zahl $2 \cdot 21 + 7 = 7 \cdot 7 = 49$,
als fünfte Zahl $2 \cdot 49 + 7 = 15 \cdot 7 = 105$,
als sechste Zahl $2 \cdot 105 + 7 = 31 \cdot 7 = 217$

und damit als Summe $57 \cdot 7 = 399$. Wegen $399 : 21 = 19$ ist diese Summe durch 21 teilbar.

b) Wählt man als erste Zahl n, so ergibt sich
als zweite Zahl $2n + 7$,
als dritte Zahl $2 \cdot (2n + 7) = 4n + 21$,
als vierte Zahl $2 \cdot (4n + 21) = 8n + 49$,
als fünfte Zahl $2 \cdot (8n + 49) = 16n + 105$,
als sechste Zahl $2 \cdot (16n + 105) = 32n + 217$

und damit als Summe $(1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32)n + 399 = 63n + 399$. Wegen $(63n + 399) : 21 = 3n + 19$ ist diese Summe durch 21 teilbar.

Aufgabe 250731:
Ermittle zu jeder natürlichen Zahl $n > 0$ die Anzahl derjenigen natürlichen Zahlen, die Teiler der Zahl 2^n sind!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Für jede natürliche Zahl $n > 0$ gilt:
Eine natürliche Zahl, die größer als 1 ist, ist genau dann Teiler von 2^n, wenn ihre Primfaktorzerlegung keine anderen Primfaktoren als die Primzahl 2 aufweist, und zwar nicht mehr als n solche Faktoren. Das trifft genau auf die n natürlichen Zahlen

$$2^1, 2^2, \dots, 2^{n-1}, 2^n \tag{1}$$

zu. Ferner gilt: $1 = 2^0$ ist Teiler der Zahl 2^n. (2)
Die gesuchte Anzahl der in (1) und (2) aufgezählten sämtlichen natürlichen Zahlen, die Teiler von 2^n sind, ist folglich $n + 1$.

Aufgabe 290735:
Wir betrachten das Produkt aller natürlicher Zahlen von 1 bis einschließlich 1 000.
Ermittle die Anzahl der Nullen, mit denen dieses Produkt endet!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Anzahl der Nullen am Ende einer Zahl gibt an, wie oft in ihr der Faktor $10 = 2 \cdot 5$ enthalten ist. In dem betrachteten Produkt

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot ... \cdot 997 \cdot 998 \cdot 999 \cdot 1000$$

ist der Faktor 2 in einer höheren Potenz enthalten als der Faktor 5. Deshalb endet dieses Produkt auf so viele Nullen wie die Anzahl der in diesem Produkt vorkommenden Faktoren 5.
Unter den Zahlen von 1 bis 1000 gibt es genau $1000 : 5 = 200$ Vielfache von 5. Von diesen sind genau $1000 : 25 = 40$ durch 25 teilbar, enthalten also je zwei Faktoren 5. Ferner enthalten genau $1000 : 125 =$

8 davon je drei Faktoren 5. Und genau eine Zahl (nämlich 625) enthält sogar vier Faktoren 5.

Deshalb enthält das genannte Produkt genau $200 + 40 + 8 + 1 = 249$ Faktoren 5 und endet daher auf genau 249 Nullen.

Aufgabe 310734:
Wenn für ein Paar von Primzahlen gilt, dass eine Primzahl des Paares um zwei größer ist als die andere, so bezeichnet man dieses Paar als ein Paar von Primzahlzwillingen.
Beweise, dass für jedes Paar von Primzahlzwillingen, die größer als 3 sind, die Summe der beiden Primzahlen dieses Paares stets durch 12 teilbar ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Ist (p, q) ein Paar von Primzahlzwillingen mit $q > p > 3$, so folgt:
Da 2 die einzige gerade Primzahl ist, ist p ungerade, also gilt $p = 2n + 1$ mit einer natürlichen Zahl n und daher $q = p + 2 = 2n + 3$. Also ist $p + q = (2n + 1) + (2n + 3) = 4(n + 1)$ durch 4 teilbar.

Da 3 die einzige durch 3 teilbare Primzahl ist, sind p und q nicht durch 3 teilbar. Wenn ferner p bei Division durch 3 den Rest 1 lassen würde, d. h., wenn p $= 3n + 1$ mit einer natürlichen Zahl n wäre, so ergäbe sich der Widerspruch, dass $q = p + 2 = 3n + 3 = 3(n + 1)$ durch 3 teilbar wäre. Also muss p bei Division durch 3 den Rest 2 lassen; d. h., es muss $p = 3n + 2$ mit einer natürlichen Zahl n gelten. Damit folgt $q = p + 2 = 3n + 4$; demnach ist $p + q = (3n + 2) + (3n + 4) = 3 \cdot (2n + 2)$ durch 3 teilbar.

Aus der Teilbarkeit von $p + q$ durch die zueinander teilerfremden Zahlen 4 und 3 folgt: $p + q$ ist durch $4 \cdot 3 = 12$ teilbar.

Aufgabe 340731:
Albrecht soll eine natürliche Zahl zwischen 1 und 1000000 ermitteln. Dirk, Evelyn und Franziska machen dazu jeweils genau eine wahre und eine falsche Aussage (in welcher Reihenfolge, wird nicht dazu gesagt):

Dirk: (1) Die gesuchte Zahl hat weniger als drei Dezimalstellen.
(2) Zerlegt man die gesuchte Zahl in Primfaktoren, so kommen in dieser Zerlegung genau zwei voneinander verschiedene Primzahlen vor, jede (mindestens einmal, aber) möglicherweise auch mehrmals.
Evelyn: (1) Die gesuchte Zahl ist durch 9 teilbar.
(2) Die gesuchte Zahl ist nicht durch 27 teilbar.
Franziska: (1) Die gesuchte Zahl lautet 91809.
(2) Die gesuchte Zahl ist durch 101 teilbar.

Zeige, dass die gesuchte Zahl auf diese Weise eindeutig bestimmt ist, und ermittle diese Zahl!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn die Bedingungen der Aufgabe von einer natürlichen Zahl n erfüllt werden, so folgt:
Wäre Evelyns Aussage (2) falsch, also n durch 27 teilbar, so wäre n auch durch 9 teilbar, d. h. auch Evelyns Aussage (1) falsch. Das widerspricht den Bedingungen der Aufgabe. Also ist Evelyns Aussage (2) wahr und (nochmals nach den Bedingungen der Aufgabe) ihre Aussage (1) falsch.
Das besagt: n ist durch 9, aber nicht durch 27 teilbar.

Wäre Franziskas Aussage (1) wahr, so wäre wegen $91809 : 101 = 909$ auch Franziskas Aussage (2) wahr. Wieder kann dies nach den Bedingungen der Aufgabe nicht sein, sondern es folgt: Aussage (1) ist falsch, Aussage (2) wahr, also lautet n nicht 91809, ist aber durch 101 teilbar.
Damit ist gezeigt: Zerlegt man n in Primfaktoren, so kommt in dieser Zerlegung die Primzahl 3 genau zweimal und die Primzahl 101 mindestens einmal vor. Also ist n mindestens dreistellig und daher Dirks

Aussage (1) falsch. Somit ist Dirks Aussage (2) wahr.

Außer den Primzahlen 3 und 101 kommt bei der Zerlegung von n in Primfaktoren daher keine weitere Primzahl vor. Käme 101 genau zweimal vor, so wäre $n = 3^2 \cdot 1012 = 91809$, was bereits widerlegt ist; käme 101 mehr als zweimal vor, so wäre $n \geq 3^2 \cdot 1013 > 1003$, also läge n nicht zwischen 1 und 1000000.
Also kommt 101 genau einmal vor; es gilt $n = 3^2 \cdot 101 = 909$.
Somit ist die gesuchte Zahl durch die Bedingungen der Aufgabe eindeutig bestimmt, sie lautet 909.

III.II (Dezimal-)Zahldarstellung, Reste

I Runde 1

Aufgabe 060713:
In Rumänien gibt es Geldscheine zu 3 und 5 Lei.
Beweise: Jeder beliebige Geldbetrag in Lei, der größer als 7 Lei ist, kann unter alleiniger Verwendung von 3- und 5-Lei- Scheinen zusammengestellt werden, falls genügend viele dieser Geldscheine vorhanden sind!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wegen $3 + 5 = 8$, $3 + 3 + 3 = 9$ und $5 + 5 = 10$ lassen sich die Geldbeträge 8 Lei, 9 Lei und 10 Lei in der geforderten Weise zusammenstellen.
Die Zahlen 8, 9 und 10 sind drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen, die bei der Division durch 3 der Reihe nach den Rest 2 bzw. 0 bzw. 1 lassen. Jede natürliche Zahl, die bei der Division durch 3 den Rest 2 lässt, kann als Summe aus 2 und einem Vielfachen von 3 dargestellt werden (z. B. $17 = 2 + 5 \cdot 3$). Entsprechendes gilt für diejenigen natürlichen Zahlen, die bei der Division durch 3 den Rest 0 bzw. 1 lassen.
Da bei der Division einer beliebigen natürlichen Zahl durch 3 nur diese drei Reste auftreten können, lassen sich die übrigen in der Aufgabe geforderten Geldbeträge, da sie größer sind als 8 Lei bzw. 9 Lei bzw. 10 Lei, durch Addition einer entsprechenden Anzahl von 3-Lei-Scheinen zu den „Grundbeträgen“ 8 Lei, 9 Lei bzw. 10 Lei zusammenstellen.

Aufgabe 080712:
Gegeben seien drei Gefäße, die genau 3 Liter, 8 Liter bzw. 18 Liter fassen können. Weiterhin ist die Möglichkeit gegeben, die Gefäße hinreichend oft mit Wasser zu füllen, zu leeren und ineinander umzufüllen.
Zeige, dass es möglich ist, alle ganzzahligen Litermengen von 1 bis 18 unter ausschließlicher Verwendung der drei Gefäße abzumessen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Mit dem 3-l-Gefäß kann man durch (z.T. wiederholtes) Einschütten in das 18-l-Gefäß 3 l, 6 l, 9 l, 12 l, 15 l und 18 l, mit dem 8-l-Gefäß 8 l und 16 l abmessen.
Durch das Ausgießen aus einem Gefäß in ein kleineres Gefäß erhält man 5 l und 10 l.
Gießt man das Wasser aus dem 18-l-Gefäß in beide kleineren Gefäße, bleiben 7 l als Rest zurück, und 11 l bekommt man dadurch, dass beide kleineren Gefäße in das große entleert werden. Füllt man die 7 l in das 3-l-Gefäß und in das 8-l-Gefäß, hat man in letzterem 4 l; gießt man diese wiederum in das wieder entleerte 3-l-Gefäß, verbleibt 1 l.
Entleert man das 18-l-Gefäß zweimal in das 8-l-Gefäß, bleiben 2 l zurück, und füllt man aus den beiden anderen Gefäßen 11 l nach, erhält man 13 l.
Wie gezeigt wurde, kann man 1 l im 8-l-Gefäß erhalten. Gießt man nun 1 l in das 18-l-Gefäß und zweimal 8 l dazu, befinden sich 17 l darin. Um 14 l abzumessen, gießt man 3 l und 8 l aus dem 18-l-Gefäß in die kleineren Gefäße, und es verbleiben 7 l, davon gibt man 3 l in das kleinste und 4 l in das mittlere Gefäß. Nun füllt man das größte aufs neue vollständig und füllt das 8-l-Gefäß auf. So verbleiben 14 l.

Aufgabe 100712:
Die Zahl 17 soll als Summe von Quadraten natürlicher, von 0 verschiedener Zahlen dargestellt werden. Gib alle voneinander verschiedenen Möglichkeiten an!
Anmerkung: Zwei Darstellungen dieser Art gelten genau dann als verschieden voneinander, wenn wenigstens ein Summand in der einen Darstellung nicht ebenso oft auftritt wie in der anderen Darstellung.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Unter den Quadraten natürlicher, von 0 verschiedener Zahlen gibt es genau 4, die nicht größer als 17 sind, nämlich 1; 4; 9; 16.
Sämtliche Möglichkeiten, 17 als Summe aus diesen Quadratzahlen darzustellen, sind die folgenden:

$$17 = 1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1$$
$$17 = 4+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1$$
$$17 = 4+4+1+1+1+1+1+1+1+1+1 = 4+4+4+1+1+1+1+1$$
$$17 = 4+4+4+4+1 = 9+1+1+1+1+1+1+1+1$$
$$17 = 9+4+1+1+1+1 = 9+4+4 = 16+1$$

Beweis: Es gibt genau folgende Fälle
1) Der größte auftretende Summand ist 1 (Möglichkeit 1).
2) Der größte auftretende Summand ist 4
2.1. Er tritt genau 1mal auf (Möglichkeit 2).
2.2. Er tritt genau 2mal auf (Möglichkeit 3).
2.3. Er tritt genau 3mal auf (Möglichkeit 4).
2.4. Er tritt genau 4mal auf (Möglichkeit 5).

3) Der größte auftretende Summand ist 9. Dieser kann höchstens 1mal auftreten.
3.1. Unter den übrigen Summanden ist 1 der größte (Möglichkeit 6).
3.2. Unter den übrigen Summanden ist 4 der größte. Er kann höchstens 2mal auftreten.
3.2.1. Er tritt genau 1mal auf (Möglichkeit 7).
3.2.2. Er tritt genau 2mal auf (Möglichkeit 8).

4) Der größte auftretende Summand ist 16. Dieser kann höchstens 1mal auftreten (Möglichkeit 9).

Aufgabe 110711:
Ermittle alle vierstelligen natürlichen Zahlen Z mit folgenden Eigenschaften:

(1) Die Zahl Z ist durch 8 teilbar.
(2) Die Ziffern von Z sind paarweise voneinander verschieden, d. h. in jeder dieser Zahlen darf jede Ziffer höchstens einmal auftreten.
(3) Alle verwendeten Ziffern bezeichnen, einzeln für sich betrachtet, jeweils Primzahlen.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wegen (3) kommen nur die Ziffern 2, 3, 5 und 7 in Frage. Wegen (2) müssen sie bei jeder der gesuchten Zahlen auch sämtlich verwendet werden. Daher und wegen (1) muss die Ziffer 2 die Einerstelle der gesuchten Zahlen besetzen.

Mithin können höchstens die Zahlen 3572; 3752; 5372; 5732; 7352; 7532 den Bedingungen der Aufgabe entsprechen.

Die Zahlen 3752 und 7352 sind durch 8 teilbar, die anderen dagegen nicht. Also erfüllen 3752 und 7352 als einzige alle Bedingungen der Aufgabe.

Aufgabe 120712:
Ermittle alle dreistelligen natürlichen Zahlen z, von denen jede die folgenden Bedingungen gleichzeitig erfüllt:

(1) Die Zahl z ist sowohl durch 9 als auch durch 11 teilbar.
(2) Vertauscht man bei der Zahl z die an der Hunderterstelle stehende Ziffer mit der an der Einerstelle stehenden, so erhält man eine neue dreistellige Zahl z', die $\frac{2}{9}$ der Zahl z beträgt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, eine dreistellige natürliche Zahl z habe die Eigenschaften (1) und (2).
Wegen (1) und weil 9 und 11 teilerfremd sind, ist z ein Vielfaches von 99. Da z dreistellig ist, können höchstens die Zahlen

$$198, 297, 396, 495, 594, 693, 792, 891, 990$$

die Bedingungen (1) und (2) erfüllen.
Von ihnen scheidet die Zahl 990 aus, da aus ihr durch Vertauschen der Einer- mit der Hunderterziffer keine dreistellige Zahl entsteht. Da ferner z' kleiner als z sein soll, scheiden auch die Zahlen 198, 297, 396 und 495 aus. Schließlich muss, da $z' = \frac{2}{9}z$ eine gerade Zahl ist, die Hunderterziffer von z eine gerade Zahl sein, also scheiden auch die Zahlen 594 und 792 aus. Für die restlichen beiden Zahlen erhält man:

z	$\frac{2}{9}z$	z'
693	154	396
891	198	198

Somit kann nur die Zahl $z = 891$ die Bedingungen (1) und (2) erfüllen. Eine Probe zeigt, dass sie die Eigenschaften (1), (2) tatsächlich hat.

Aufgabe 150711:
Zwei Mathematiker unterhalten sich über ihre unterschiedlichen Telefonnummern. Dabei stellte sich folgendes heraus:

(1) Jede der beiden Telefonnummern ist eine dreistellige Primzahl.
(2) Jede einzelne Ziffer in den beiden Telefonnummern stellt, als einstellige Zahl aufgefasst, ebenfalls eine Primzahl dar.
(3) Die Ziffern, die in den beiden Telefonnummern jeweils an der Zehnerstelle stehen, stimmen miteinander überein. Die Ziffer der Hunderterstelle der einen Telefonnummer ist die Ziffer der Einerstelle der anderen und umgekehrt.

Ermittle die Telefonnummern, und begründe das Ergebnis, ohne dabei eine Primzahlentabelle als Beweismittel zu verwenden!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die einstelligen Primzahlen sind 2, 3, 5, 7.

Wegen (1) können die Nummern weder durch 2 noch durch 5 teilbar sein, folglich enden sie wegen (2) auf 3 oder 7. Da die Nummern verschieden sind und wegen (3) und (1), haben die Nummern die Form $3x7$ bzw. $7x3$, wobei x eine einstellige Primzahl, also eine der Zahlen 2, 3, 5, 7 ist.
Es ist $x \neq 2$; denn $3|327$.
Es ist $x \neq 5$; denn $3|357$.
Es ist $x \neq 7$; denn $13|377$.
Für $x = 3$ erhält man die Zahlen 337 bzw. 737. Da die erste weder durch 2 noch durch 3, 5, 7, 11, 13, 17 teilbar ist und $192 = 361 > 337$ ausfällt, ist 337 eine Primzahl. Ebenso ist 733 weder durch 2 noch durch 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 teilbar und wegen $292 = 841 > 733$ mithin Primzahl.
Die beiden Mathematiker haben also die Telefonnummern 337 und 733.

Aufgabe 250712:
Ermittle alle zweistelligen natürlichen Zahlen, die folgenden Bedingungen genügen:

(1) Die Differenz der beiden Ziffern beträgt 5.
(2) Vertauscht man Zehnerziffer und Einerziffer miteinander, so entsteht eine zweistellige Zahl, deren Doppeltes um 4 größer ist als die ursprüngliche Zahl.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Bedingung (1) wird genau von den in der 1. Spalte der folgenden Tabelle genannten zweistelligen Zahlen erfüllt, wobei jedoch die Zahl 50 sogleich weggelassen wurde, da aus ihr durch Vertauschen der Ziffern keine zweistellige Zahl entsteht.
In der 2. Spalte steht jeweils die durch Vertauschen der Ziffern entstehende Zahl, in der 3. Spalte das Doppelte der Zahl in der 2. Spalte. In der 4. Spalte steht die um 4 vergrößerte ursprüngliche (d. h. in der 1. Spalte stehende) Zahl.

16	61	122	20	61	16	32	65
27	72	144	31	72	27	54	76
38	83	166	42	83	38	76	87
49	94	188	53	94	49	98	98

Genau für die Zahl 94 der 1. Spalte ergibt sich Gleichheit in der 3. und 4. Spalte. Daher erfüllt genau die Zahl 94 beide Bedingungen (1), (2).

Anderer Lösungsweg:
Wenn a und b die Zehner- bzw. Einerziffer einer Zahl sind, die den Bedingungen der Aufgabe genügt, so folgt:
Die Zahl lautet $10a + b$, die durch Vertauschen der Ziffern entstehende Zahl lautet $10b + a$, und nach (2) gilt:

$$2 \cdot (10b + a) = 10a + b + 4 \qquad \Rightarrow \qquad 19b = 4 \cdot (2a + 1)$$

Da $19b$ das Produkt aus 4 und der ungeraden Zahl $2a+1$ ist und da 19 und 4 teilerfremd sind, ist folglich b durch 4, aber nicht durch 8 teilbar. Die einzige Zahl mit diesen Eigenschaften ist $b = 4$, und es folgt weiter $2a + 1 = 19$, d. h. $a = 9$.

Daher kann nur die Zahl 94 die Bedingungen der Aufgabe erfüllen. Sie erfüllt diese Bedingungen; denn es gilt $9 - 4 = 5$ und $2 \cdot 49 = 98 = 94 + 4$. Also genügt die Zahl 94 den Bedingungen der Aufgabe.

Aufgabe 310712:
Ermittle alle diejenigen vierstelligen natürlichen Zahlen, die folgende Bedingungen (1) und (2) erfüllen!

(1) Die Zahl enthält keine anderen Ziffern als 0, 1 und 4, aber jede dieser drei Ziffern mindestens einmal.
(2) Die Zahl ist durch 18 teilbar.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn eine vierstellige natürliche Zahl die Bedingungen (1) und (2) erfüllt, so folgt:
Nach (2) ist die Zahl durch 18, also auch durch 9 teilbar; daher ist ihre Quersumme durch 9 teilbar. Unter ihren Ziffern kommen nach (1) die Ziffern 0 und 1 mindestens je einmal vor, die Ziffer 4 also höchstens zweimal. Also ist die Quersumme größer als Null, aber nicht größer als $0 + 1 + 4 + 4 = 9$; somit muss sie gleich 9 sein.
Damit kann die Bedingung (1) nur so erfüllt werden, dass unter den Ziffern genau einmal die 0, einmal die 1 und zweimal die 4 ist.

Ferner ist die Zahl, da sie durch 18 teilbar ist, eine gerade Zahl. Also muss ihre Einerziffer gerade sein, d. h. eine 0 oder 4. Weiterhin muss (wie für jede vierstellige Zahl) die Tausenderziffer von 0 verschieden sein.
Nach den nun noch vorhandenen Möglichkeiten für die Reihenfolge der Ziffern muss die Zahl somit eine der Zahlen $1044, 4014, 1404, 4104, 1440, 4140, 4410$ (3) sein.
In der Tat erfüllen die Zahlen (3) die Bedingung (1), und sie erfüllen auch (2), da sie die Quersumme 9 und eine gerade Einerziffer haben, also durch 9 und durch 2 teilbar sind.

Aufgabe 330712:
Eine sechsstellige natürliche Zahl soll, in der Reihenfolge von links nach rechts gelesen, Ziffern $3, a, 3, b, 2, c$ haben.
Ermittle alle Möglichkeiten, die Ziffern a, b, c so zu wählen, dass die genannte Zahl durch 90 teilbar ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Da 9 und 10 zueinander teilerfremd sind, ist die genannte Zahl genau dann durch 90 teilbar, wenn sie durch 9 und durch 10 teilbar ist. Sie ist genau dann durch 10 teilbar, wenn $c = 0$ (1) ist. Sie ist, wenn (1) gilt, außerdem genau dann durch 9 teilbar, wenn die Quersumme $3 + a + 3 + b + 2 + c = 8 + a + b$ durch 9 teilbar ist, d. h. genau dann, wenn $a + b$ bei Division durch 9 den Rest 1 lässt.

Wegen $0 \leq a \leq 9$ und $0 \leq b \leq 9$ ist das genau für $a + b = 1$ und $a + b = 10$ der Fall. Hierfür gibt es genau die folgenden Möglichkeiten (2):

a	0	1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
b	1	0	9	8	7	6	5	4	3	2	1

In (1) und (2) sind somit alle Möglichkeiten für die genannte Wahl von a, b, c angegeben.

Aufgabe 340713:
Franziska sucht eine vierstellige natürliche Zahl z, für die die folgenden Aussagen (1), (2) und (3) gelten:

(1) Die Einerziffer von z ist um 1 größer als die Zehnerziffer von z.
(2) Die Hunderterziffer von z ist doppelt so groß wie die Zehnerziffer von z.
(3) Die Zahl z ist doppelt so groß wie eine Primzahl.

Weise nach, dass es genau eine solche Zahl gibt; ermittle diese Zahl!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn die Aussagen (1), (2) und (3) für eine natürliche Zahl z gelten, so folgt:
Nach (3) ist z gerade, hat also eine gerade Einerziffer.
Nach (1) ist folglich die Zehnerziffer ungerade. Durch Verdoppeln entsteht aus ihr nach (2) die Hunderterziffer, also eine Zahl kleiner als 10. Daher ist die Zehnerziffer kleiner als 5 und folglich eine der Zahlen 1; 3.
Wegen (1) und (2) folgt damit: Die letzten drei Ziffern von z können nur entweder 212 oder 634 sein.

Wären sie 212, so wäre die mit den letzten zwei Ziffern von z gebildete Zahl durch 4 teilbar; also wäre z durch 4 teilbar und daher (sowie wegen $z > 4$) nicht das Doppelte einer Primzahl. Somit können die letzten drei Ziffern von z nur 634 sein.

Die erste Ziffer von z kann keine der Ziffern 2, 5, 8 sein; denn hierfür hätte z eine durch 3 teilbare Quersumme und wäre folglich durch 3 teilbar, könnte also (wegen $z > 6$) nicht das Doppelte einer Primzahl sein. Wäre die erste Ziffer von z eine der Zahlen 1, 3, 4, 6, 7, so würde ebenfalls die Aussage (3) nicht gelten, wie die folgenden Rechnungen zeigen:

z	Zerlegung von $z : 2$
1634	$817 = 19 \cdot 43$
3634	$1817 = 23 \cdot 79$
4634	$2317 = 7 \cdot 331$
6634	$3317 = 31 \cdot 107$
7634	$3817 = 11 \cdot 347$

Damit verbleibt nur die Möglichkeit $z = 9634$.

II. Für $z = 9634$ sind (1) und (2) erfüllt, ferner gilt auch (3), da $z : 2 = 4817$ eine Primzahl ist, wie man folgendermaßen zeigen kann:
Wegen $4817 < 4900 = 70^2$ müsste die Zahl 4817, wenn sie zerlegbar wäre, einen Primfaktor kleiner als 70 enthalten. Man kann jedoch feststellen, dass 4817 durch keine der Primzahlen 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67 teilbar ist.

Mit I. und II. ist nachgewiesen, dass es genau eine vierstellige natürliche Zahl gibt, für die (1), (2) und (3) gelten, und diese Zahl ist als $z = 9634$ ermittelt.

II Runde 2

Aufgabe 050723:
Vergleiche die Summe aller dreistelligen durch 4 teilbaren natürlichen Zahlen mit der Summe aller dreistelligen nicht durch 4 teilbaren geraden natürlichen Zahlen!
a) Welche der beiden Summen ist größer?
b) Wie groß ist die Differenz der beiden Summen dem Betrage nach?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Man vergleicht die beiden ersten Summanden (100 und 102), die beiden zweiten Summanden (104 und 106) usw. bis zu den beiden letzten Summanden (996 und 998). In jedem dieser Paare ist die erste Zahl um 2 kleiner als die zweite.

a) Die Summe der nicht durch 4 teilbaren dreistelligen geraden Zahlen ist daher größer als die Summe der durch 4 teilbaren dreistelligen Zahlen.
b) Es gibt 225 solcher Paare; die Differenz der betrachteten Summen ist also dem Betrage nach 450.

Aufgabe 070722:
Horst sagt zu Klaus: Nenne mir eine dreistellige natürliche Zahl, von deren Ziffern keine Null ist und keine zwei einander gleich sind! Notiere sie und schreibe darunter sämtliche dreistelligen Zahlen, die durch Umstellen der Ziffern der genannten Zahl entstehen können! Addiere alle diese Zahlen!

Ehe Klaus fertig war, hatte Horst schon längst das Ergebnis im Kopf gefunden. Er rechnete: $2Q \cdot 111$, wobei Q die Quersumme der erstgenannten Zahl bedeutet.
Begründe sein Verfahren allgemein und gib dann ein Zahlenbeispiel!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a, b, c seien natürliche Zahlen, die alle größer Null und kleiner oder gleich 9 sind. Dann heißen die dreistellige Zahl und die sich durch Umstellung Ihrer Ziffern ergebenden Zahlen:

$$\begin{array}{ll} 100a + 10b + c & 100a + 10c + b \\ 100b + 10a + c & 100b + 10c + a \\ 100c + 10a + b & 100c + 10b + a \end{array}$$

Die Summe s ist dann:

$$s = 100(2a+2b+2c)+10(2a+2b+2c)+(2a+2b+2c) = (100+10+1)\cdot(2a+2b+2c) =$$

$$= 111\cdot 2\cdot(a+b+c) = 111\cdot 2Q$$

Beispiel: Die Zahl sei 534. Dann ist $2Q = 24$ und $2Q\cdot 111 = 24\cdot 111 = 2664$ bzw. $534+543+354+345+453+435 = 2664$.

Aufgabe 170724:
Ermittle alle vierstelligen natürlichen Zahlen, die durch 24 teilbar sind und deren Zifferndarstellung die Form $9x7y$ hat!
Hierbei sind x und y durch je eine der zehn Ziffern (0,...,9) zu ersetzen.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn eine vierstellige Zahl die geforderten Eigenschaften hat, so folgt zunächst, dass sie durch 4 teilbar ist, also (nach der Teilbarkeitsregel für 4) auch die zweistellige Zahl mit der Zifferndarstellung $7y$.
Von den Zahlen 70, ..., 79 sind nur 72 und 76 durch 4 teilbar, also verbleiben nur die Möglichkeiten y = 2, y = 6.

Nun folgt weiter: Ist $y = 2$, so kommen für x auf Grund der Teilbarkeitsregel für 3 nur die Ziffern 0, 3, 6, 9 in Frage. Hiervon entfallen auf Grund der Teilbarkeitsregeln für 8 jedoch 3 und 9, da 372 und 972 nicht durch 8 teilbar sind.
Ist $y = 6$, so kommen für x auf Grund der Teilbarkeitsregeln für 3 nur die Ziffern 2, 5 und 8 in Frage. Hiervon entfallen jedoch 2 und 8, da 276 und 876 nicht durch 8 teilbar sind.

Also können nur die Zahlen 9072, 9672 und 9576 die geforderten Eigenschaften haben.
Sie haben diese Eigenschaften; denn ihre Zifferndarstellung ist von der vorgeschriebenen Form, und sie sind durch 24 teilbar.

Aufgabe 190723:
Ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen z, die die folgenden Bedingungen (1) bis (4) erfüllen!

(1) z ist eine dreistellige Zahl.
(2) Die Zehnerziffer (d. h. die an der Zehnerstelle stehende Ziffer) von z ist um 1 größer als die Hunderterziffer von z.
(3) Die Einerziffer von z ist doppelt so groß wie die Hunderterziffer von z.
(4) z ist das Doppelte einer Primzahl.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I) Wenn eine natürliche Zahl z die Bedingungen (1) bis (4) erfüllt und a ihre Hunderterziffer ist, so folgt: Wegen (1) gilt $a \neq 0$, wegen (3) ist $2a < 10$, also $a < 5$. Die folgende Tabelle enthält für die verbleibenden Möglichkeiten $a = 1, 2, 3, 4$ die nach (2) und (3) sich ergebenden Zehner- und Einerziffern und damit z.

Hunderterziffer a	Zehnerziffer	Einerziffer	z
1	2	2	122
2	3	4	234
3	4	6	346
4	5	8	458

Von diesen scheidet die Zahl $z = 234$ aus, da sie das Doppelte von 117 ist und dies wegen $117 = 3\cdot 39$ keine Primzahl ist. Also können nur die Zahlen 122, 346 und 458 die Bedingungen (1) bis (4) erfüllen.

II) Sie sind dreistellig, erfüllen also (1). Ferner zeigt die Tabelle, dass sie (2) und (3) erfüllen. Schließlich erfüllen sie auch (4), da sie jeweils das Doppelte von 61, 173 bzw. 229 sind und diese Zahlen Primzahlen sind.
Somit lauten die gesuchten Zahlen: 122, 346, 458.

Aufgabe 220721:
Ermittle alle geraden natürlichen Zahlen z mit folgenden Eigenschaften:

(1) Die Zahl z ist fünfstellig, keine ihrer fünf Ziffern ist eine 0.
(2) Die aus den ersten drei Ziffern von z in dieser Reihenfolge gebildete dreistellige Zahl ist eine Quadratzahl.
(3) Die aus den letzten drei Ziffern von z in dieser Reihenfolge gebildete dreistellige Zahl ist eine Kubikzahl.

Hinweis: Ist a eine natürliche Zahl, so heißt a^2 ihre Quadratzahl und a^3 ihre Kubikzahl.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn eine Zahl z die geforderten Eigenschaften hat, so folgt:
Die aus den letzten drei Ziffern von z gebildete Zahl ist eine der Zahlen $5^3 = 125$, $6^3 = 216$, $7^3 = 343$, $8^3 = 512$, $9^3 = 729$; denn wegen $4^3 < 100$ und $10^3 > 999$ sind dies die einzigen dreistelligen Kubikzahlen.

Da z und somit die letzte Ziffer von z gerade ist, verbleiben nur die Möglichkeiten 216 und 512 für die letzten drei Ziffern von z. Also endet die aus den ersten drei Ziffern von z gebildete Zahl auf 2 oder 5.

Es gibt aber keine Quadratzahl, die auf 2 endet; denn endet eine natürliche Zahl a auf 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 bzw. 9, so endet ihre Quadratzahl auf 0, 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4 bzw. 1.

Daher verbleibt nur die Möglichkeit 512 für die letzten drei Ziffern von z, und die ersten drei Ziffern bilden eine auf 5 endende Quadratzahl, also eine der Zahlen $5^2, 15^2, 25^2, 35^2$, ...
Von diesen sind wegen $5^2 < 100$ und $35^2 > 999$ nur $15^2 = 225$ und $25^2 = 625$ dreistellig.

Damit ist gezeigt, dass nur 22512 und 62512 die geforderten Eigenschaften haben können.

Aufgabe 250724:
a) Gegeben seien die drei Ziffern 2, 7 und 9. Aus ihnen sollen alle diejenigen dreistelligen Zahlen gebildet werden, die jede dieser drei Ziffern genau einmal enthalten.
Zeige, dass die Summe aus allen diesen dreistelligen Zahlen durch 111 teilbar ist!

b) Gegeben sind drei paarweise verschiedene Ziffern, von denen keine die Ziffer 0 ist.
Beweise, dass die Summe aus allen denjenigen dreistelligen Zahlen, die jede dieser Ziffern genau einmal enthalten, stets durch 111 teilbar ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Aus den Ziffern 2, 7, 9 lassen sich genau die folgenden sechs dreistelligen Zahlen bilden, die jede dieser Ziffern genau einmal enthalten: 279, 297, 729, 792, 927, 972.

Die Summe dieser sechs Zahlen beträgt 3996. Wegen $3996 = 36 \cdot 111$ ist diese Summe durch 111 teilbar.

b) Es seien a, b, c drei paarweise verschiedene Ziffern, unter denen sich nicht die Ziffer 0 befindet. Dann lassen sich genau die folgenden sechs dreistelligen Zahlen bilden, die jede dieser Ziffern genau einmal enthalten:

$$100a + 10b + c, \qquad 100a + 10c + b, \qquad 100b + 10a + c$$

$$100b + 10c + a, \qquad 100c + 10a + b, \qquad 100c + 10b + a$$

Die Summe dieser sechs Zahlen beträgt $222a + 222b + 222c$. (1)
Wegen $222 = 2 \cdot 111$ ist jede der drei Zahlen $222a$, $222b$, $222c$ durch 111 teilbar, mithin auch ihre in (1) genannte Summe.

Aufgabe 280724:
a) Ermittle die Summe der Quersummen aller zweistelligen, durch 5 teilbaren Zahlen!
b) Ermittle die Summe der Quersummen aller natürlichen Zahlen von 0 bis 1000!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Für jede mögliche Zehnerziffer gibt es genau zwei durch 5 teilbare Zahlen, nämlich eine, die auf 0, und eine, die auf 5 endet.
Die Summe der Zehnerziffern aller zweistelligen durch 5 teilbaren Zahlen ist somit $2\cdot(1+2+3+...+9) = 90$, und die Summe ihrer Einerziffern erhält man mit $9 \cdot 5 + 9 \cdot 0 = 45$. Also beträgt die gesuchte Summe der genannten Quersummen $90 + 45 = 135$.

b) Betrachtet man alle natürlichen Zahlen von 0 bis 999, so erkennt man, dass jede der Ziffern von 0 bis 9 in der Hunderterstelle genau 100mal auftritt.
Lassen wir die Hunderterstelle unverändert, so tritt in der Zehnerstelle jede der Ziffern genau zehnmal auf, beim Durchlaufen aller zehn Ziffern der Hunderterstelle insgesamt also $10 \cdot 10 = 100$ mal. Lässt man die Zehnerstelle und die Hunderterstelle unverändert, so tritt in der Einerstelle jede der Ziffern genau einmal auf, insgesamt $1 \cdot 10 \cdot 10 = 100$ mal. Die Zahl 1000 hat die Quersumme 1.

Aus den vorgenannten Feststellungen folgt: Die gesuchte Summe der genannten Quersummen beträgt

$$300 \cdot 1 + 300 \cdot 2 + ... + 300 \cdot 9 + 1 = 300 \cdot 45 + 1 = 13501$$

Aufgabe 290724:
a) Ermittle alle Möglichkeiten, an die Zahl 331 eine vierte Ziffer so anzufügen, dass die entstehende vierstellige Zahl durch 3 teilbar ist!
b) Stelle fest, ob man an die Zahl 331 eine Ziffer 6 oder mehrere Ziffern 6 so anfügen kann, dass die entstehende Zahl durch 3 teilbar ist!
c) Untersuche, ob es mehr als 250 dreistellige Zahlen gibt, aus denen durch Anfügen von vier Ziffern 7 jeweils eine durch 3 teilbare Zahl entsteht!
d) Beweise, dass man aus jeder dreistelligen Zahl durch Anfügen von einer Ziffer 7 oder von mehreren Ziffern 7 jeweils eine durch 3 teilbare Zahl erhalten kann!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Die Quersumme von 331 beträgt $3 + 3 + 1 = 7$. Durch Anfügen einer vierten Ziffer entsteht genau dann eine Zahl, deren Quersumme durch 3 teilbar ist, wenn diese Ziffer 2 beträgt oder sich von 2 um ein Vielfaches von 3 unterscheidet.
Nach der Teilbarkeitsregel, dass eine Zahl genau dann durch 3 teilbar ist, wenn ihre Quersumme durch 3 teilbar ist, ist damit bewiesen: alle gesuchten Möglichkeiten für die anzufügende vierte Ziffer sind 2, 5, 8.

b) Da 6 durch 3 teilbar ist, entsteht aus der Quersumme 7 durch ein- oder mehrmaliges Addieren von 6 stets wieder eine Summe, die ebenso wie 7 nicht durch 3 teilbar ist. Also kann man durch Anfügen von einer Ziffer 6 oder von mehreren Ziffern 6 an die Zahl 331 keine durch 3 teilbare Zahl erhalten.

c) Wegen $7 + 7 + 7 + 7 = 28$ entsteht aus einer Zahl durch Anfügen von vier Ziffern 7 dann eine durch 3 teilbare Zahl, wenn die Quersumme der Zahl, an die die vier Ziffern 7 angefügt wurden, 2 beträgt oder sich von 2 um ein Vielfaches von 3 unterscheidet. Eine solche Zahl ist zum Beispiel 101, also ist 1017777 durch 3 teilbar.

Hat man eine derartige Zahl, wie 101 es war, so kann man eine weitere finden, indem man 3 addiert; denn für die Zahl mit den vier angehängten Ziffern 7 bedeutet das ein Addieren von 30 000, und dabei entsteht aus der bereits durch 3 teilbaren vorigen Zahl wieder eine solche. Addiert man zu 101 (mindestens) 250 mal 3, so erhält man (mindestens) $101 + 3 = 104$, $101 + 2 \cdot 3 = 107$, ..., $101 + 250 \cdot 3 = 851$.
Es gibt folglich mehr als 250 dreistellige Zahlen mit der in c) genannten Eigenschaft.

d) Für jede dreistellige Zahl liegt einer der folgenden Fälle vor:

1. Fall: Die Quersumme der Zahl ist durch 3 teilbar.
In diesen Fall entsteht durch Anfügen von drei Ziffern 7 wieder eine durch 3 teilbare Zahl.

2. Fall: Die Quersumme der Zahl ist von der Form $3n + 1$ mit einer natürlichen Zahl n.
In diesem Fall entsteht durch Anfügen von zwei Ziffern 7 eine Zahl, deren Quersumme $3n + 1 + 7 + 7 = 3n + 15$ durch 3 teilbar ist.

3. Fall: Die Quersumme der Zahl ist von der Form $3n + 2$.
In diesem Fall entsteht durch Anfügen einer Ziffer 7 eine Zahl, deren Quersumme $3n + 2 + 7 = 3n + 9$ durch 3 teilbar ist. Damit ist für jeden möglichen Fall der verlangte Beweis geführt.

Aufgabe 300722:
a) Ermittle unter den natürlichen Zahlen a, die größer als 100 und kleiner als 1000 sind, alle diejenigen, die die folgenden Bedingungen (1), (2), (3) erfüllen!

(1) a hat genau zwei voneinander verschiedene natürliche Zahlen als Teiler.
(2) a lässt sowohl bei Division durch 11 den Rest 2 als auch bei Division durch 13 den Rest 2.
(3) a ist eine ungerade Zahl.

b) Stelle für jede der drei Bedingungen (1), (2), (3) fest, ob sich am Ergebnis der Aufgabe (a) etwas ändert, wenn man diese Bedingung weglässt und nur jeweils die beiden anderen Bedingungen fordert!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Für jede natürliche Zahl a, die die erste Teilaussage in (2) erfüllt, ist $a - 2$ ein Vielfaches von 11, also eine der Zahlen 0, 11, $2 \cdot 11$, $3 \cdot 11$, ...
Erfüllt a auch die zweite Teilaussage in (2), so ist $a - 2$ auch ein Vielfaches von 13, also verbleiben für $a - 2$ nur die Zahlen $0, 13 \cdot 11, 2 \cdot 13 \cdot 11, 3 \cdot 13 \cdot 11$, ...
Erfüllt a auch (3), so ist $a - 2$ eine ungerade Zahl, also verbleiben für $a - 2$ nur die Zahlen 143, $3 \cdot 143 = 429, 5 \cdot 153 = 715, 7 \cdot 143 = 1001$, ...
Von den natürlichen Zahlen a mit $100 < a < 1000$ erfüllen also nur die Zahlen $143+2 = 145$, $429+2 = 431$, $715 + 2 = 717$ die Bedingungen (2) und (3).

Wegen $145 = 5 \cdot 29$ hat 145 mehr als zwei voneinander verschiedene natürliche Zahlen als Teiler, nämlich 1, 5, 29, 145. Entsprechendes gilt wegen $717 = 3 \cdot 239$ auch für 717. Dagegen ist 431 eine Primzahl. Also hat 431 genau die zwei natürlichen Zahlen 1 und 431 als Teiler.
Somit werden unter den natürlichen Zahlen a mit $100 < a < 1000$ die Bedingungen (1), (2), (3) genau von der Zahl $a = 431$ erfüllt.

b) Wie eben gezeigt, werden (2) und (3) außer von 431 beispielsweise auch von 145 erfüllt. Ferner werden (1) und (3) beispielsweise auch von der ungeraden Primzahl 101 erfüllt.

Lässt man also eine der Bedingungen (1) oder (2) weg, so ändert sich das Ergebnis von a).
Dagegen kann man (3) weglassen, ohne am Ergebnis etwas zu ändern; denn jede natürliche Zahl, die (1) erfüllt, ist eine Primzahl, und wenn sie größer als 100 ist, scheidet die einzige gerade Primzahl 2 aus, d. h.: Für Zahlen a, die größer als 100 (und kleiner als 1000) sind, folgt (3) bereits aus (1).

Aufgabe 310722:
Susann will die Summe s aller derjenigen vierstelligen natürlich Zahlen berechnen, die durch 4 teilbar sind.
Tamara ermittelt die Summe t aller derjenigen vierstelligen natürlichen Zahlen, die durch 2, aber nicht durch 4 teilbar sind.
a) Sind s und t einander gleich oder, wenn nicht, welche der beiden Zahlen ist die größere?
b) Welchen Betrag hat die Differenz zwischen s und t? Begründe deine Antworten!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
s ist die Summe der Zahlen 1000, 1004, ..., 9996; t ist die Summe der Zahlen 1002, 1006, ..., 9998.
a) Aus jedem Summanden in s entsteht durch Vergrößerung um 2 ein Summand in t, und dabei entsteht jeder Summand in t genau einmal. Also enthalten beide Summen gleich viele Summanden.
Ferner ist jeder Summand in t größer als der entsprechende Summand in s. Daher ist t größer als s.

b) Der Unterschied zwischen dem ersten und letzten Summanden beträgt in beiden Summen 8996, die Summanden folgen im Abstand 4 aufeinander. Die Anzahl der Summanden beträgt (in jeder der beiden Summen) daher $8996 : 4 + 1 = 2250$.
Hieraus und weil jeder Summand in t um 2 größer als der entsprechende Summand in s ist, folgt:
Die Differenz zwischen s und t hat den Betrag $2250 \cdot 2 = 4500$.

Aufgabe 330722:
Ermittle alle diejenigen vierstelligen natürlichen Zahlen z, die folgende Bedingungen (1) und 2) erfüllen!

(1) Die Zahl z ist durch 24 teilbar.
(2) Die zweite Ziffer der Zahl z ist eine 1, die dritte Ziffer von z ist eine 3.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Bedingung (1) ist genau dann erfüllt, wenn die Zahl z durch 3 und durch 8 teilbar ist; denn 3 und 8 sind zueinander teilerfremd, und es gilt $3 \cdot 8 = 24$.
Die Zahl z ist genau dann durch 8 teilbar, wenn die durch ihre letzten drei Ziffern dargestellte Zahl durch 8 teilbar ist. Zusammen mit Bedingung (2) ist das genau dann der Fall, wenn die vierte Ziffer von z eine 6 ist; denn unter den Zahlen von 130 bis 139 ist genau die Zahl 136 durch 8 teilbar.
Die Zahl z ist genau dann durch 3 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 3 teilbar ist.

Zusammen mit den bereits genannten Bedingungen ist das genau dann der Fall, wenn die erste Ziffer von z eine der drei Ziffern 2, 5, 8 ist; denn die Summe der letzten drei Ziffern 1, 3, 6 beträgt 10, und unter den (durch Addition einer weiteren Ziffer $1, \ldots, 9$ entstehenden) Summen von 11 bis 19 sind genau 12, 15 und 18 durch 3 teilbar.
Somit erfüllen genau die Zahlen 2136, 5136, 8136 die Bedingungen (1) und (2).

III Runde 3

Aufgabe 030733:
Eine Zahl $30 \star 0 \star 03$ soll durch 13 teilbar sein. Dabei sind die $\star$ jeweils durch eine der Ziffern 0 bis 9 zu ersetzen. (Für beide Sterne muss nicht unbedingt die gleiche Ziffer gesetzt werden.)
Gib sämtliche Zahlen an, die die geforderte Eigenschaft haben!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Zahl

$$30 \star 0 \star 03 = 3000003 + 10000 \cdot x + 100 \cdot y$$

ist genau durch 13 teilbar mit den Ziffern x und y, wenn $6 + 3 \cdot x + 9 \cdot y$ durch 13 teilbar ist, denn es gilt

$$3000003 + 10000 \cdot x + 100 \cdot y = 13 \cdot (230769 + 769 \cdot x + 7 \cdot y) + 6 + 3 \cdot x + 9 \cdot y$$

Durch systematisches Testen von $3 \cdot (2 + 3 \cdot y + x)$ auf Teilbarkeit durch 13 findet man für (x, y) schnell die Lösungen (8, 1), (5, 2), (2, 3), (9, 5), (6, 6), (3, 7) und (0, 8).
Somit erfüllen die folgenden Zahlen die geforderten Eigenschaften:

3000803; 3020303; 3030703; 3050203; 3060603; 3080103; 3090503

Aufgabe 050731:
Auf welche Ziffern endet das Produkt?

$$z = 345926476^3 \cdot 125399676^2 \cdot 2100933776^3$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Sämtliche Faktoren von z sind von der Form $100a + 76$. Wegen

$$(100a + 76)(100b + 76) = 10000ab + 100(76a + 76b) + 76^2$$

wobei a und b natürliche Zahlen sind, sind allein die beiden letzten Stellen von 76^2 für die beiden letzten Stellen von z entscheidend. Da $76^2 = 5776$ ist, endet z auf 76.

Aufgabe 060735:
Für jede zweistellige natürliche Zahl gilt der Satz:
Addiert man zu der zweistelligen Zahl die Differenz aus der Anzahl ihrer Zehner und der Anzahl ihrer Einer, so erhält man eine durch 11 teilbare Zahl.
Beweise diesen Satz!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die zweistellige Zahl ist darstellbar als $10a+b$ mit ganzen Zahlen a und b, für die $0 < a \leq 9$ und $0 \leq b \leq 9$ gilt. Die Differenz aus der Anzahl ihrer Zehner und der Anzahl ihrer Einer ist daher $a - b$.
Addiert man sie laut Aufgabe zu der zweistelligen Zahl, so erhält man: $10a+b+a-b = 11a$; die erhaltene Zahl ist also durch 11 teilbar.

Aufgabe 070735:
Gegeben seien zwei natürliche Zahlen n und m, die bei Division durch 5 beide den Rest 3 lassen.
Beweise, dass das Produkt der beiden Zahlen bei Division durch 5 den Rest 4 lässt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Nach Voraussetzung haben die beiden gegebenen Zahlen n, m die Form $n = 5n' + 3$ und $m = 5m' + 3$ (n', m' ganz). Daher gilt:

$$n \cdot m = (5n' + 3) \cdot (5m' + 3) = 25n'm' + 15n' + 15m' + 9 = 5[5n'm' + 3(n' + m') + 1] + 4$$

d. h. $n \cdot m$ lässt bei Division durch 5 den Rest 4.

Aufgabe 080731:
Gesucht sind natürliche Zahlen, die beim Teilen durch 7 den Rest 4, beim Teilen durch 4 den Rest 3 und beim Teilen durch 3 den Rest 1 lassen.
a) Ermittle die kleinste derartige natürliche Zahl!
b) Wie kann man aus der in a) gesuchten Zahl weitere natürliche Zahlen erhalten, die den gleichen Bedingungen genügen?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

a) Die Folge der natürlichen Zahlen, die bei Division durch 7 den Rest 4 lassen, beginnt: 4; 11; 18; 25; 32; 39; 46; 53; 60; 67; 74; 81; 88; 95; ...

   Von diesen Zahlen lassen bei der Division durch 4 den Rest 3 genau die Zahlen: 11; 39; 67; 95; ... (ab 11 jede vierte Zahl der vorigen Folge).

   Die kleinste unter diesen Zahlen, die auch noch bei Division durch 3 den Rest 1 lässt, ist die Zahl 67.

b) Weitere, den Bedingungen entsprechende natürliche Zahlen erhält man, indem man zu 67 gemeinsame Vielfache von 3, 4 und 7 addiert.

   Insbesondere erhält man die nächstgrößeren derartigen Zahlen, wenn man wiederholt das kgV von 3, 4 und 7 (d. i., da 3, 4, 7 paarweise teilerfremd sind, die Zahl $3 \cdot 4 \cdot 7 = 84$) zu 67 addiert. Die nächsten so entstehenden Zahlen sind: 151; 235; 319; ...

Aufgabe 080736:
Der große deutsche Mathematiker Carl Friedrich Gauß wurde am 30. April 1777 in Braunschweig geboren.
Auf welchen Wochentag fiel sein Geburtstag?
(Der 30.04.1967 war ein Sonntag; die Jahre 1800 und 1900 waren keine Schaltjahre).

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Von einem Tag des Jahres 1777 bis zum gleichen Tag des Jahres 1967 sind es 190 Jahre, und zwar 45 Jahre zu 366 Tagen und 145 Jahre zu 365 Tagen.
In den 45 Jahren rückte der Wochentag um 90 Wochentage vor, in den 145 Jahren um 145 Wochentage. Das sind zusammen 235 Wochentage, d. h. 33 mal eine Woche und 4 Wochentage. Daher war der 30.4.1777 ein Mittwoch.

Aufgabe 100735:
Aus den zweistelligen Primzahlen 13, 17, 37, 79 erhält man wieder Primzahlen, wenn man ihre Ziffern jeweils vertauscht, also die Zahlen 31, 71, 73, 97 bildet. Ebenso kann man bei der Primzahl 131 die Ziffern beliebig vertauschen, also die Zahlen 113, 311 bilden, ohne dass dabei die Primzahleigenschaft verloren geht.

Untersuche, ob es dreistellige Primzahlen mit paarweise voneinander verschiedenen Ziffern gibt, bei denen man bei sämtlichen möglichen Ziffernvertauschungen stets wieder dreistellige Primzahlen erhält!
(Ohne Benutzung der Zahlentafel)

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, es gäbe eine derartige dreistellige Primzahl. Dann könnte sie nur aus drei verschiedenen der Ziffern 1, 3, 7, 9 bestehen, da bei den Vertauschungen jede ihrer Ziffern auch einmal an letzter Stelle stünde und daher, wie man mit Hilfe der Teilbarkeitsregeln erkennt, die Ziffern 0, 2, 4, 5, 6, 8 entfielen.

Also müsste die Primzahl entweder aus den Ziffern 1, 3, 7 oder aus den Ziffern 1, 3, 9 oder aus den Ziffern 1, 7, 9 oder aus den Ziffern 3, 7, 9 bestehen.

Nun ist aber z. B. $371 = 7 \cdot 53$, $319 = 11 \cdot 29$, $791 = 7 \cdot 113$, $793 = 13 \cdot 61$, d. h., es gibt in jedem Falle unter den durch Vertauschungen der Ziffern entstehenden Zahlen wenigstens eine, die nicht Primzahl ist. Daher gibt es keine dreistellige Primzahl mit der geforderten Eigenschaft.

Aufgabe 110731:
Ermittle alle Primzahlen p, die gleichzeitig den folgenden Bedingungen genügen:

(1) p< 100.
(2) p lässt sowohl bei Division durch 3 als auch bei Division durch 5 jeweils den Rest 2.
(3) p lässt bei Division durch 4 den Rest 1!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, p sei eine Primzahl, die den Bedingungen (1), (2), (3) genügt.
Wegen (2) ist dann $p-2$ sowohl durch 3 als auch durch 5 teilbar. Da 3 und 5 teilerfremd sind, ist folglich $p-2$ durch $3 \cdot 5 = 15$ teilbar, d. h., p ist von der Form $n \cdot 15 + 2$ (n eine natürliche Zahl). Wegen (3) ist p und damit auch n ungerade.

Also können wegen (1) höchstens die Zahlen 17; 47; 77 den Bedingungen der Aufgabe genügen. Von ihnen ist 77 keine Primzahl, und 47 genügt nicht der Bedingung (3). Also kann nur 17 Lösung der Aufgabe sein.
In der Tat erfüllt 17 die Bedingungen (1), (2), (3) und ist damit die einzige derartige Primzahl.

Aufgabe 130734:
Ermittle alle dreistelligen natürlichen Zahlen a, die gleich der Hälfte der Summe derjenigen beiden Zahlen sind, die durch zyklische Vertauschung der Ziffern von a entstehen!

Hinweis: Wird die Zahl a durch die Ziffernfolge uvw dargestellt, so entstehen durch zyklische Vertauschung die Zahlen vwu und wuv. Dabei sollen auch Möglichkeiten mit $v = 0$ oder $w = 0$ zugelassen werden; die durch zyklische Vertauschung entstehenden Zahlen brauchen also nicht dreistellig zu sein.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, eine Zahl mit der Ziffernfolge xyz entspreche den Bedingungen der Aufgabe. Dann ist $a = 100x+10y+z$ gleich der Hälfte der Summe von $b = 100y+10z+x$ und $c = 100z+10x+y$. Demnach gilt:

$$200x + 20y + 2z = 2a = b + c = 101y + 110z + 11x$$

also $189x = 81y + 108z$ und daher

$$7x = 3y + 4z \tag{1}$$

Folglich ist 7 ein Teiler von $3y + 4z$ und daher auch von $3y + 4z - 7z = 3(y - z)$, also von $y - z$.

Wegen $0 \leq y \leq 9$, $0 \leq z \leq 9$ folgt hieraus, dass entweder $y = z$ und nach (1) dann $y = z = x \geq 1$ gilt oder z um 7 größer ist als y.
Daher verbleiben für y und z nur die in der folgenden Tabelle genannten Möglichkeiten, zu denen jedesmal wegen (1) nur das angegebene x gehört:

x	y	z	x	y	z	x	y	z
1	1	1	2	2	2	...	...	...
9	9	9	8	1	4	7	0	3
0	7	4	1	8	5	2	9	6
9	2	5						

Daher können höchstens die Zahlen 111, 222, 333, 444, 555, 666, 777, 888, 999, 592, 481, 370, 407, 518, 629 Lösungen sein. Für 111, ..., 999 ist dies unmittelbar klar; ferner gilt

$$\frac{1}{2}\cdot(925+259)=1184:2=529 \qquad \frac{1}{2}\cdot(814+148)=962:2=481$$
$$\frac{1}{2}\cdot(703+37)=740:2=370 \qquad \frac{1}{2}\cdot(74+740)=814:2=407$$
$$\frac{1}{2}\cdot(185+851)=1036:2=518 \qquad \frac{1}{2}\cdot(296+962)=1258:2=629$$

Also erfüllt jede dieser 15 Zahlen die Bedingungen der Aufgabe.

Aufgabe 150736:
Ist z eine natürliche Zahl, so sei a die Quersumme von z, b die Quersumme von a und c die Quersumme von b.
Ermittle c für jede 1 000 000 000-stellige durch 9 teilbare Zahl z.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wegen $z > 0$ gilt auch $a > 0, b > 0, c > 0$.
Wenn eine Zahl durch 9 teilbar ist, so ist ihre Quersumme durch 9 teilbar. Daher sind alle Zahlen a, b und c dieser Aufgabe durch 9 teilbar.
Da jede der 1 000 000 000 Ziffern von z höchstens 9 beträgt, ist

$$a \leq 9\cdot 1000000000 = 9000000000$$

also ist a höchstens zehnstellig.
Deshalb ist $b < 9\cdot 10 = 90$, also ist b eine der Zahlen 81, 72, 63, 54, 45, 36, 27, 18, 9. Die Quersumme jeder dieser 9 Zahlen ist 9.
Daher gilt $c = 9$ für alle zu betrachtenden Zahlen z.

Aufgabe 170735:
Ermittle alle zweistelligen Zahlen, für die sowohl die folgende Aussage (1) als auch die folgende Aussage (2) zutrifft:

(1) Setzt man zwischen Einerziffer und Zehnerziffer der zweistelligen Zahl die Ziffer 5, so erhält man eine Zahl, die um genau 230 größer ist als die ursprüngliche Zahl.
(2) Setzt man die Ziffer 5 vor die zweistellige Zahl, so erhält man ein ganzzahliges Vielfaches der ursprünglichen Zahl.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, eine zweistellige Zahl erfüllt die Bedingungen der Aufgabe. Dann ist sie mindestens 10 und höchstens 99: folglich entsteht nach Vergrößerung um 230 eine Zahl, die mindestens 240 und höchstens 329 ist. Von diesen Zahlen haben nur 250, 251, 252, 253, 254, 255, 256, 257, 258 und 259 eine 5 als Zehnerziffer.

Folglich können höchstens die Zahlen 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29 die Bedingung (1) erfüllen. Sie erfüllen diese Bedingung, da durch das in (1) genannte Einfügen der Ziffer 5 die Zehnerziffer 2 durch die Ziffernfolge 25 ersetzt wird, wobei sich die Zahlen jeweils um 230 vergrößern.

Setzt man vor jede von ihnen die Ziffer 5, so erhält man die Zahlen 520, 521, 522, 523, 524, 525, 526, 527, 528 und 529. Diese sind jeweils um 500 größer als die ursprüngliche Zahl. Daher ist eine so gebildete Zahl genau dann ein ganzzahliges Vielfaches der ursprünglichen Zahl, wenn auch 500 ein ganzzahliges Vielfaches von ihr ist. Das trifft unter den Zahlen, die (1) erfüllen, genau für die Zahlen 20 und 25 zu. Daher sind dies alle zweistelligen Zahlen, die beide Bedingungen erfüllen.

Aufgabe 240732:
a) Es sei M die Menge aller derjenigen Zahlen x, die die folgenden Eigenschaften (1), (2), (3) haben:

(1) x ist eine sechsstellige natürliche Zahl.
(2) x hat die Quersumme 29.
(3) x ist durch 11 teilbar.

Ermittle das größte Element der Menge M!

b) Es sei M' die Menge aller derjenigen Zahlen x, die außer den Eigenschaften (1), (2), (3) auch noch die folgende Eigenschaft (4) haben:

(4) Keine zwei Ziffern von x sind einander gleich.

Ermittle das größte Element der Menge M'!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Unter allen Zahlen, die (1) und (2) erfüllen, findet man die größte, indem man mit so vielen Ziffern 9 beginnt, wie dies möglich ist, ohne die Summe 29 zu überschreiten (d.s. genau 3 Ziffern 9), sodann eine möglichst große Ziffer anschließt, ohne 29 zu überschreiten (d.i. die Ziffer 2), wonach nur noch die Möglichkeit verbleibt, zwei Ziffern 0 anzuschließen.
Die größte Zahl x, die (1) und (2) erfüllt, ist also 999200.

Die nächstkleinere Zahl, die (1) und (2) erfüllt, ergibt sich, indem man die Ziffer 2 durch 1 ersetzt, dann wieder eine möglichst große Ziffer anschließt, ohne 29 zu überschreiten (d.i. die Ziffer 1), wonach nur noch eine Ziffer 0 verbleibt. So ergibt sich als zweitgrößte Zahl, die (1) und (2) erfüllt, 999110.

Entsprechend ergibt sich die nächstkleinere Zahl mit (1) und (2), indem man die zweite Ziffer 1 durch 0 ersetzt, wonach 999101 verbleibt. Die nächstkleinere Zahl mit (1) und (2) ist entsprechend 999020.

Die Forderung (3) wird von 999200, 999110 und 999102 nicht erfüllt, wohl aber von 999020.
Damit ist bewiesen: Das größte Element der Menge M ist 999020.

b) Unter allen Zahlen, die (1),(2) und (4) erfüllen, findet man die größte, indem man mit 9 beginnt, die größte von 9 verschiedene Ziffer (d.i. die Ziffer 8) anschließt, sodann die größte von 9 und 8 verschiedene Ziffer (d.i. 7) und dann die größte von 9, 8 und 7 verschiedene Ziffer, ohne 29 zu überschreiten (d.i. die Ziffer 5), wonach 987500 verbleibt. Die nächstkleineren Zahlen mit (1),(2) und (4) ergeben sich, indem man die Ziffer 5 durch 4 ersetzt, wonach (der Größe nach geordnet) 987410 und 987401 verbleiben.
Sodann hat man 4 durch 3 zu ersetzen. Um hiernach für die letzten beiden Ziffern die Summe 2 unter Einhaltung von (4) zu erreichen, verbleiben 987320 und 987302.
Wird weiter 3 durch 2 ersetzt, so verbleiben entsprechend 987230 und 987203; wird 2 durch 1 ersetzt, so ergibt sich als größtmöglich: 987140.

Die Forderung (3) wird von 987500, 987410, 987401, 987320, 987302, 987230 und 987203 nicht erfüllt, wohl aber von 987140.
Damit ist bewiesen: Das größte Element der Menge M' ist 987140.

Aufgabe 240735:
In dem Schema 43_1_5_ ist jede der Leerstellen _ so mit einer Ziffer auszufüllen, dass die entstehende siebenstellige Zahl durch 75 teilbar ist.
Gib an, wie viel siebenstellige Zahlen es insgesamt gibt, die auf diese Weise entstehen können!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die in die Leerstellen einzutragenden Ziffern seien so mit a, b und c bezeichnet, dass die entstehenden Zahlen die Zifferndarstellung $43a1b5c$ haben.

Eine solche Zahl ist genau dann durch 75 teilbar, wenn sie sowohl durch 3 als auch durch 25 teilbar ist, da 3 und 25 teilerfremd sind. Durch 25 ist sie genau dann teilbar, wenn $c = 0$ ist.
Durch 3 ist sie genau dann teilbar, wenn ihre Quersumme $(4+3+a+1+b+5+c=)13+a+b$ durch 3 teilbar ist.

Wegen $0 \leq a \leq 9$ und $0 \leq b \leq 9$ gilt $0 \leq a+b \leq 18$. Für die genannte Quersumme gilt daher $13 \leq 13+a+b \leq 31$. Sie ist folglich genau dann durch 3 teilbar, wenn sie eine der Zahlen 15, 18, 21, 24, 27, 30 ist, d. h. genau dann, wenn die Summe s aus den beiden Ziffern a und b eine der Zahlen 2, 5, 8, 11, 14, 17 ist.
Die folgende Tabelle enthält alle Ziffernpaare $(a; b)$, die eine dieser Summen $s = a + b$ besitzen:

Ziffernsumme s	Alle Ziffernpaare $(a; b)$ mit $a+b=s$	Anzahl der Ziffernpaare
2	(0;2), (1;1), (2;0)	3
5	(0;5), (1;4), (2;3), (3;2), (4;1), (5;0)	6
8	(0;8), (1;7), (2;6), (3;5), (4;4), (5;3), (6;2), (7;1), (8;0)	9
11	(2;9), (3;8), (4;7), (5;6), (6;5), (7;4), (8;3), (9;2)	8
14	(5;9), (6;8), (7;7), (8;6), (9;5)	5
17	(8;9), (9;8)	2

Daher ist mit $3+6+9+8+5=33$ die gesuchte Anzahl gefunden.

Aufgabe 260734:
Ermittle alle diejenigen Paare $(m; n)$ natürlicher Zahlen, die folgende Bedingungen erfüllen!

(1) m und n sind dreistellige Zahlen.
(2) Es gilt $m - n = 889$.
(3) Für die Quersumme $Q(m)$ und $Q(n)$ von m und n gilt $Q(m) - Q(n) = 25$.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn ein Paar $(m; n)$ natürlicher Zahlen die Bedingungen erfüllt, so folgt:
Wegen (1) gilt $1 \leq Q(m) \leq 27$, $1 \leq Q(n) \leq 27$. Daher kann (3) nur so erfüllt werden, dass entweder $Q(m) = 27$, $Q(n) = 2$ oder $Q(m) = 26$, $Q(n) = 1$ gilt.

Die einzige dreistellige Zahl m mit der Quersumme $Q(m) = 27$ ist aber $m = 999$; nach (2) ergibt sich hierfür weiter $n = m - 889 = 110$.
Die einzige dreistellige Zahl n mit der Quersumme $Q(n) = 1$ ist $n = 100$; nach (2) ergibt sich hierfür weiter $m = 889 + n = 989$.
Also können nur die Paare $(999; 110)$ und $(989; 100)$ (4) die Bedingungen der Aufgabe erfüllen.

Aufgabe 280736:
Auf einer Kreislinie seien die natürlichen Zahlen von 1 bis 1000 der Reihe nach angeordnet. Dann wird, beginnend mit der Zahl 1, jede fünfzehnte Zahl mit einer Markierung versehen, d. h., die Zahlen 1, 16, 31, 46, ... usw. werden markiert.
Dieses Weiterzählen und Markieren jeder fünfzehnten Zahl wird umlaufend fortgesetzt, d. h., beim Weiterzählen lässt man auf die Zahl 1000 wieder die Zahl 1 folgen. Auch Zahlen, die bereits markiert sind, werden beim Weiterzählen stets mit berücksichtigt. Erst wenn zum weiteren Markieren nur noch Zahlen erreicht würden, die bereits markiert sind, wird der Vorgang beendet.

Ermittle die Anzahl aller derjenigen Zahlen auf dem Kreis, die dann ohne Markierung geblieben sind!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
In ersten Umlauf werden genau diejenigen der Zahlen markiert, die bei Division durch 15 den Rest 1 lassen. Die letzte dieser Zahlen ist 991.
Der zweite Umlauf erbringt als erste markierte Zahl die Zahl $991 + 15 - 1000 = 6$; anschließend werden folglich im zweiten Umlauf genau diejenigen der Zahlen markiert, die bei Division durch 15 den Rest 6 lassen. Die letzte dieser Zahlen ist 996.
Entsprechend werden im dritten Umlauf markiert: zuerst die Zahl $996+15-1000 = 11$, dann alle Zahlen, die bei Division durch 15 den Rest 11 lassen, und als letzte die Zahl 986.
Eine weitere Fortsetzung würde die Zahl $986+15-1000 = 1$ und daher nur noch bereits markierte Zahlen erreichen, so dass der Vorgang beendet, ist.

Also werden genau diejenigen der Zahlen markiert, die bei Division durch 15 einen der Reste 1, 6, 11 lassen. Das sind genau diejenigen der Zahlen, die bei Division durch 5 den Rest 1 lassen, d. h. genau die Zahlen $1, 1 \cdot 5 + 1 = 6$, $2 \cdot 5 + 1 = 11$, $3 \cdot 5 + 1 = 16$, ..., $199 \cdot 5 + 1 = 996$.

Ihre Anzahl (wie diese Aufzählung zeigt, zu erhalten als die Anzahl der Zahlen 0, 1, 2, 3, ... 199) beträgt 200. Also sind genau $1000 - 200 = 800$ Zahlen ohne Markierung geblieben.

Aufgabe 290734:
Ermittle alle diejenigen Paare $(z_1; z_2)$ aus zweistelligen natürlichen Zahlen z_1 und z_2, die die folgenden Bedingungen (1), (2) und (3) erfüllen!
(1) Es gilt $z_1 > z_2$.
(2) Die Differenz der Zahlen z_1 und z_2 beträgt 59.
(3) Die Differenz, die entsteht, wenn man von der Quersumme der Zahl z_1 die Quersumme der Zahl z_2 subtrahiert, beträgt 14.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn ein Paar $(z_1; z_2)$ zweistelliger natürlicher Zahlen die Bedingungen (1) , (2) und (3) erfüllt, dann folgt:
Sind a, b in dieser Reihenfolge die Ziffern von z_1 und c, d die von z_2, so ist $z_1 = 10a + b$, $z_2 = 10c + d$, $1 \leq a \leq 9$, $1 \leq c \leq 9$, $0 \leq b \leq 9$, $0 \leq d \leq 9$,
und aus (1), (2) und (3) folgt $10a + b - 10c - d = 59$, (4) $a + b - c - d = 14$ (5)
Subtrahiert man (5) von (4), so folgt $a - c = 5$; (6) hieraus und aus (5) folgt $b - d = 9$. (7)
Wegen $b \leq 9$, $d \geq 0$ ist (7) nur mit $b = 9$, $d = 0$ (8) möglich. Wegen $c \geq 1$ und (6) ist $a \geq 6$; hiernach und wegen (6) verbleiben für a und c nur die Möglichkeiten

$$a = 6, c = 1; a = 7, c = 2; a = 8, c = 3; a = 9, c = 4. \tag{9}$$

Mit (8) und (9) ist gezeigt, dass nur die Paare $(z_1; z_2) =$ (69; 10), (79; 20), (89; 30), (99; 40) die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllen können.

II. Sie erfüllen diese Bedingungen, wie aus $69 > 10$, $79 > 20$, $89 > 30$, $99 > 40$, $69 - 10 = 79 - 20 = 89 - 30 = 99 - 40 = 59$, $(6 + 9) - (1 + 0) = (7 + 9) - (2 + 0) = (8 + 9) - (3 + 0) = (9 + 9) - (4 + 0) = 14$ ersichtlich ist.

Aufgabe 330731:
Ermittle alle diejenigen vierstelligen natürlichen Zahlen z, die folgende Bedingungen (1) und (2) erfüllen!

(1) Die Zahl z ist durch 48 teilbar.
(2) Die zweite Ziffer der Zahl z ist eine 3, die dritte Ziffer von z ist eine 4.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn eine vierstellige natürliche Zahl z die Bedingungen (1) und (2) erfüllt, so folgt:
Nach (1) und wegen $48 = 2 \cdot 8 \cdot 3$ ist z auch durch 8 und durch 3 teilbar. Eine Zahl ist nur dann durch 8 teilbar, wenn die durch ihre letzten drei Ziffern dargestellte Zahl durch 8 teilbar ist. Unter den Zahlen von 340 bis 349 ist nur die Zahl 344 durch 8 teilbar. Hiernach und wegen (2) können die letzten drei Ziffern von z nur 3, 4, 4 in dieser Reihenfolge lauten.

Eine Zahl ist nur dann durch 3 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 3 teilbar ist. Da die Summe der letzten drei Ziffern $3 + 4 + 4 = 11$ beträgt, kann hiermit und mit der ersten Ziffer nur dann eine durch 3 teilbare Quersumme entstehen, wenn die erste Ziffer 1 oder 4 oder 7 lautet.
Die Zahl 4344 ist (da die Division 4344 : 48 auf 90, Rest 24 führt) nicht durch 48 teilbar, also scheidet die 4 als erste Ziffer aus.

Somit können unter den vierstelligen natürlichen Zahlen nur die beiden Zahlen 1344 und 7344 die Bedingungen (1) und (2) erfüllen.

II. Diese beiden Zahlen erfüllen offensichtlich (2) und (wegen $1344 : 48 = 28$ sowie $7344 : 48 = 153$) auch (1).
Damit sind alle Zahlen der geforderten Art ermittelt: Es sind genau die beiden Zahlen 1344 und 7344.

III.III Diophantische Gleichungen

I Runde 1

Aufgabe 070713:
Gib sämtliche Geldbeträge bis zu 1 MDN an, die sich unter alleiniger Verwendung von Einpfennig-, Fünfpfennig- und Zehnpfennigstücken (wobei von jeder Sorte stets mindestens ein Stück zu nehmen ist) auszahlen lassen und bei denen der in Pfennig angegebene Geldbetrag genau doppelt so groß ist wie die benötigte Anzahl der Münzen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Bezeichnet man die Anzahl der Pfennigstücke mit x, die der Fünfpfennigstücke mit y und die der Zehnpfennigstücke mit z, dann gilt:

$$x + 5y + 10z = 2(x + y + z)$$

woraus man $8z + 3y = x$ erhält.

z	$x = 3y + 8z$	y	Geldbetrag (in Pfennig)
1	11	1	26
	14	2	34
	17	3	42
	20	4	50
	23	5	58
	26	6	66
	29	7	74
	32	8	82
	35	9	90
	38	10	98
2	19	1	44
	22	2	52
	25	3	60
	28	4	68
	31	5	76
	34	6	84
	37	7	92
	40	8	100

z	$x = 3y + 8z$	y	Geldbetrag (in Pfennig)
3	27	1	62
	30	2	70
	33	3	78
	36	4	86
	39	5	94
4	35	1	80
	38	2	88
	41	3	96
5	43	1	98

Da für alle $z \geq 6$ keine Lösungen unter den Bedingungen der Aufgabe existieren, gibt es also genau 26 derartige Geldbeträge, von denen genau 25 auf eine einzige Art und genau ein Geldbetrag (98 Pf) auf genau zwei Arten gemäß den erwähnten Bedingungen ausgezahlt werden kann.

Aufgabe 140711:
Klaus behauptet, er habe in seiner Geldtasche genau 17 Münzen mit einem Gesamtwert von 34 Pfennig.
Ermittle alle Möglichkeiten dafür, welche Anzahlen der Münzen einer jeden Sorte Klaus hiernach besitzen kann! Es sei dabei vorausgesetzt, dass nur Münzen der zur Zeit gültigen Währung der DDR (also 1; 5; 10 bzw. 20-Pfennig-Münzen) in Betracht kommen.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Der genannte Betrag kann sich höchstens aus 1-Pfennigstücken, 5-Pfennigstücken, 10-Pfennigstücken und 20-Pfennigstücken zusammensetzen, da es in der zur Zeit gültigen Währung der DDR keine anderen Münzen bis zu einem Wert von 34 Pfennig gibt.

Angenommen, Klaus hätte ein 20-Pfennigstück, dann hätten die restlichen 16 Münzen einen Gesamtwert von 14 Pfennig. Das ist nicht möglich. Infolgedessen kann Klaus kein 20-Pfennigstück in seiner Geldtasche haben.

Angenommen, Klaus hätte mehr als ein 10-Pfennigstück, dann hätte er höchstens noch 15 weitere Münzen, deren Gesamtwert höchstens 14 Pfennig betragen könnte; das ist wiederum nicht möglich. Somit kann Klaus in seiner Geldtasche an 10-Pfennigstücken höchstens eines haben.

Angenommen, Klaus hätte kein 10-Pfennigstück. Hätte er dann 5-Pfennigstücke in der Anzahl x, so hätte er 1-Pfennigstücke in der Anzahl $17-x$, und es wäre $5x+17-x = 34$, also $4x = 17$. Das ist nicht möglich, da 17 nicht durch 4 teilbar ist.
Daher verbleibt nur die Möglichkeit, dass Klaus in seiner Geldtasche genau ein 10-Pfennigstück und den Restbetrag in anderen Münzen hat. Hat er nun 5-Pfennigstücke in der Anzahl x, so hat er dann 1-Pfennigstücke in der Anzahl $16 - x$. Daraus folgt $5x + 16 - x = 24$, also $4x = 8$ und somit $x = 2$. Falls die von Klaus gemachte Behauptung richtig ist, muss er in seiner Geldtasche genau ein 10-Pfennigstück, genau zwei 5-Pfennigstücke und genau vierzehn 1-Pfennigstücke haben.

Aufgabe 340711:
Armin hat 100 Stäbchen von je 7 cm Länge und 100 Stäbchen von je 12 cm Länge. Er möchte mit solchen Stäbchen eine Strecke von 1 m Länge auslegen. Die Stäbchen sollen dabei stets lückenlos aneinander anschließen, und keine Teilstrecke darf mehrfach belegt sein.
Finde alle Möglichkeiten dafür, wie viele Stäbchen von 7 cm und wie viele von 12 cm sich zu einer solchen Belegung zusammenstellen lassen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Mit x Stäbchen der Länge 7 cm und y Stäbchen der Länge 12 cm lässt sich genau dann eine Strecke von

1 m Länge auslegen, wenn $7x + 12y = 100$ gilt.

I. Wenn x und y zwei Anzahlen sind, die diese Bedingung erfüllen, so folgt:
Da 12 und 100 durch 4 teilbar sind, aber 7 zu 4 teilerfremd ist, muss x durch 4 teilbar sein. Wäre $x \geq 16$, so wäre $7x + 12y \geq 7 \cdot 16 > 100$. Also kann x nur eine der Zahlen 0, 4, 8, 12 sein.

Wäre $x = 0$, so folgte $12y = 100$; wäre $x = 8$, so folgte $12y = 100 - 7 \cdot 8 = 44$; wäre $x = 12$, so folgte $12y = 100 - 7 \cdot 16$. In allen drei Fällen erhielte man für y keine ganze Zahl.
Also kann nur $x = 4$ und damit $12y = 100 - 7 \cdot 4 = 72$, also $y = 6$ sein.

II. Für $x = 4$ und $y = 6$ wird die Bedingung wegen $7 \cdot 4 + 12 \cdot 6 = 28 + 72 = 100$ erfüllt.
Daher gibt es zum Auslegen der Strecke genau die Möglichkeit, 4 Stäbchen von 7 cm und 6 Stäbchen von 12 cm zusammenzustellen.

II Runde 2

Aufgabe 100723:
Ermittle alle Möglichkeiten, eine natürliche Zahl t und eine Ziffer $\star$ so anzugeben dass die folgende Gleichung gilt: $9(230 + t)^2 = 492 \star 04$.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, die Gleichung hat eine Lösung. Dann müssen beide Seiten durch 9 teilbar sein. Wegen $4 + 9 + 2 + 0 + 4 = 19$ folgt daraus $\star = 8$. Die Zahl auf der rechten Seite der gegebenen Gleichung kann also nur 492804 lauten.

Dann folgt aus der Gleichung weiter $(230 + t)^2 = 492804 : 9 = 54756$, und daher erhält man: $230 + t$ ist eine natürliche Zahl, nicht kleiner als 230 und so beschaffen, dass ihr Quadrat 54756 beträgt.
Daraus folgt, dass für t nur der Wert 4 möglich ist. Weil nämlich 54756 auf 6 endet, kann t nur auf 4 oder 6 enden.
Wäre $t > 4$, so wäre $(230 + t)^2 > 234^2 = 54756$. Also ist nur $t = 4$ möglich.
Wie die Probe zeigt, ist $t = 4; \star = 8$ Lösung der gegebenen Gleichung, und zwar die einzige.

Aufgabe 120721:
Man ermittle die Paare (x, y) natürlicher Zahlen x und y, für die folgendes gilt:

(1) Die Summe der beiden Zahlen x und y beträgt 15390.
(2) Setzt man die einstellige Zahl x vor die Zahl y, so erhält man eine Zahl z, die viermal so groß ist wie die Zahl u, die man erhält, indem man die Zahl x hinter die Zahl y setzt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, zwei Zahlen x und y haben die geforderten Eigenschaften. Dann gilt:

$$(1) \quad x + y = 15390 \qquad , \qquad (2) \quad z = 4u$$

Nach (1) und weil x einstellig ist, hat y als vorletzte Ziffer eine 8 und als letzte Ziffer nicht 0.
Wegen (2) ist z durch 4 teilbar. Nach den Teilbarkeitsregeln für die Zahl 4 stellen daher die letzten beiden Ziffern von z, das sind auch die von y, eine durch 4 teilbare Zahl dar. Somit endet y auf 84 oder 88. Daher kann nur $x = 6$ oder $x = 2$ sein.

Wäre $x = 2$, so wäre $y = 15388$, und man erhielte $z = 215388$ sowie $u = 153882$ im Widerspruch zu $4 \cdot 153882 = 615528 \neq 215388$. Daher können nur $x = 6$ und $y = 15384$ die geforderten Eigenschaften haben.

In der Tat erfüllen diese beiden Zahlen (1), und man erhält mit ihnen ferner $z = 615384$ sowie $u = 153846$, so dass wegen $4 \cdot 153846 = 615384$ auch (2) erfüllt ist. Somit gibt es genau die Möglichkeit $x = 6$, $y = 15384$, die Bedingungen (1) und (2) zu erfüllen.

Aufgabe 220724:
Für drei natürliche Zahlen a, b, c werden die folgenden Eigenschaften (1) und (2) gefordert:

(1) Es gilt $a < b < c$.
(2) Wenn a, b, c die Maßzahlen der in Zentimeter gemessenen Kantenlängen eines Quaders sind, so hat der Quader das Volumen 270 cm^3, und die Summe der Längen aller zwölf Kanten des Quaders beträgt 80 cm.

Untersuche, ob es natürliche Zahlen gibt, die diese Forderungen erfüllen, und ob diese Zahlen durch die Forderungen (1) und (2) eindeutig bestimmt sind! Ist dies der Fall, so nenne diese Zahlen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Natürliche Zahlen a, b, c erfüllen genau dann die Forderung (2), wenn für sie die Gleichungen

(3) $abc = 270$,
(4) $a + b + c = 20$ gelten.

I. Wenn natürliche Zahlen a, b, c die Bedingungen (1),(3),(4) erfüllen, so folgt:

Nach (3) sind a, b, c von 0 verschieden; hiernach und wegen (1), (4) gilt (5) $0 < a < b < c < 20$.

Die einzigen Teiler von 270 zwischen 0 und 20 sind (6) 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15 und 18.

Die einzigen Möglichkeiten, aus diesen Zahlen zwei als a und b mit $a < b$ so auszuwählen, dass die, nach (4) erhaltene, Zahl $c = 20 - a - b$ auch $b < c$ erfüllt, sind in der folgenden Tabelle angegeben.
Für diejenigen a, b, für die auch diese Zahl $c = 20 - a - b$ eine der Zahlen (6) ist, wird dann geprüft, ob auch $abc = 270$ gilt:

a	1	1	1	1	1	2	2	2	3	3	5
b	2	3	5	6	9	3	5	6	5	6	6
c	17	16	14	13	10	15	13	12	12	11	9
c in (6)?	nein	nein	nein	nein	ja	ja	nein	nein	nein	nein	ja
abc					90	90					270

Es ergibt sich, dass nur $a = 5$, $b = 6$, $c = 9$ die Bedingungen (1), (3), (4) erfüllen können.

II. Sie erfüllen diese Bedingungen; denn es gilt $5 < 6 < 9$, $5 \cdot 6 \cdot 9 = 270$, $5 + 6 + 9 = 20$.
Damit ist gezeigt: Es gibt Zahlen, die die Forderungen (1), (2) erfüllen, sie sind durch diese Forderungen eindeutig bestimmt und lauten $a = 5$, $b = 6$, $c = 9$.

III Runde 3

Aufgabe 160735:
Ermittle alle Paare $(x; y)$ natürlicher Zahlen, für die die Gleichung $2x + 3y = 27$ erfüllt ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, $(x;y)$ sei ein Paar natürlicher Zahlen, das die Gleichung $2x+3y=27$ erfüllt. Dann folgt $3y=27-2x$, also ist insbesondere x ein Vielfaches von 3. Weiter folgt

$$y = 9 - \frac{2}{3}x \tag{1}$$

Da y eine natürliche Zahl ist, gilt $\frac{2}{3}x \leq 9$, also $x \leq \frac{27}{2}$; daher kommen nur folgende Werte für x in Frage: $x=0, x=3, x=6, x=9$ und $x=12$.

Nach (1) ergibt eich hierzu jeweils $y=9, y=7, y=5, y=3$ bzw. $y=1$. Also haben höchstens die Zahlenpaare (0;9), (3;7), (6;5), (9;3) und (12;1) die verlangten Eigenschaften.

Sie haben tatsächlich diese Eigenschaften, denn sie bestehen aus natürlichen Zahlen, und es gilt

$$2\cdot 0+3\cdot 9=27 \quad ; \quad 2\cdot 3+3\cdot 7=27 \quad ; \quad 2\cdot 6+3\cdot 5=27$$
$$2\cdot 9+3\cdot 3=27 \quad ; \quad 2\cdot 12+3\cdot 1=27$$

Aufgabe 270734:
Ermittle alle diejenigen geordneten Paare $(x;y)$ natürlicher Zahlen x,y, für die $x^2+xy+y^2=49$ gilt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Man kann zunächst diejenigen Paare ermitteln, die außer der geforderten Gleichung noch $x \leq y$ erfüllen.

I. Wenn ein Paar $(x;y)$ diese Bedingungen erfüllt, so folgt

$$3x^2 \leq x^2+xy+y^2 = 49 < 51 \Rightarrow x^2 < 17$$

x ist eine der Zahlen 0, 1, 2, 3, 4.
Für $x=0$ folgt $y^2=49$, also $y=7$.
Für $x=1$ folgt $y+y^2=48$. Dies wird von keiner natürlichen Zahl y erfüllt; denn wenn $y\leq 6$ ist, so gilt $y+y^2 \leq 6+36 < 48$, und wenn $y \geq 7$ ist, so gilt $y+y^2 \geq 7+49 > 48$.

Für $x=2$ folgt $2y+y^2=45$. Dies wird von keiner natürlichen Zahl y erfüllt; denn wenn $y\leq 5$ ist, so gilt $2y+y^2 \leq 10+25 < 45$, und wenn $y \geq 6$ ist, so gilt $2y+y^2 \geq 12+36 > 45$.

Für $x=3$ folgt $3y+y^2=40$. Dies wird nur von $y=5$ erfüllt; denn wenn $y<5$ ist, so gilt $3y+y^2 < 15+25=40$, und wenn $y>5$ ist, so gilt $3y+y^2>40$.

Für $x=4$ folgt $4y+y^2=33$. Dies wird von keiner natürlichen Zahl y erfüllt; denn wenn $y\leq 4$ ist, so gilt $4y+y^2 \leq 16+16 < 33$, und wenn $y\geq 5$ ist, so gilt $4y+y^2 \geq 20+25 > 33$.

Also können nur die Paare $(x;y)=(0;7)$ und $(x;y)=(3;5)$ (1)
die geforderte Gleichung und die Bedingung $x\leq y$ erfüllen.
Nach Weglassen der Bedingung $x \leq y$ kommen zu (1) noch genau die Paare $(x;y)=(7;0)$ und $(x;y)=(5;3)$ (2) hinzu. Also sind genau die in (1) und (2) genannten Paare alle gesuchten.

Aufgabe 280734:
Ermittle alle diejenigen Paare (p,q) aus zwei Primzahlen, die die folgenden Bedingungen erfüllen!

(1) Es gilt $q > p+1$.
(2) Die Zahl $s=p+q$ ist ebenfalls eine Primzahl.
(3) Die Zahl $p\cdot q\cdot s$ ist durch 10 teilbar.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn ein Paar $(p;q)$ von Primzahlen die Bedingungen erfüllt, so folgt:
Nach (1) und (2) sind q und s Primzahlen größer als 2, also ungerade. Da nach (3) aber $p \cdot q \cdot s$ gerade ist, muss p gerade sein, also $p = 2$ (4) gelten. Aus (3) und (4) folgt:
$q \cdot s$ ist durch 5 teilbar. Da q und s Primzahlen sind, ist das nur möglich, wenn $q = 5$ oder $s = 5$ gilt. Wegen (2) und (4) folgt hieraus $s = 7$ oder $q = 3$.

Da nach (1) und (4) aber $q > 3$ gilt, verbleibt nur die Möglichkeit $s = 7$ und damit $q = 5$. Also kann nur das Paar (2; 5) die Bedingungen der Aufgabe erfüllen.

IV Klasse 8

IV.I Primzahlen, Teilbarkeit

I Runde 1

Aufgabe 010813:
Wenn die Summe von 4 beliebigen natürlichen (positiven ganzen) Zahlen eine ungerade Zahl ist, so ist ihr Produkt eine gerade Zahl.

Probiere es! Beweise die Behauptung!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Beispiel: $2 + 3 + 5 + 7 = 17$ und $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$.

Beweis: Die Summe von vier natürlichen Zahlen ist ungerade, wenn genau ein Summand gerade ist oder wenn genau drei Summanden gerade sind. Ist wenigstens ein Summand gerade, so wird das Produkt gerade.

Aufgabe 020811:
Kann die Summe von drei beliebigen, aber aufeinanderfolgenden natürlichen (positiven ganzen) Zahlen eine Primzahl sein?
Die Antwort ist zu begründen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Summe von drei aufeinander folgenden natürlichen Zahlen ist $n + (n + 1) + (n + 2) = 3n + 3$. Sie ist also durch 3 teilbar, aber verschieden von 3 wegen $n \geq 1$. Damit ist die Summe keine Primzahl.

Aufgabe 030813:
Gegeben sind drei beliebige natürliche Zahlen, die nicht durch 3 teilbar sind.

Beweise, dass entweder die Summe dieser drei Zahlen oder die Summe zweier von ihnen stets durch 3 teilbar ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Beweis: Fall 1:
Alle drei Zahlen lassen den gleichen Rest 1 bzw. 2 bei Division durch 3, dann lässt ihre Summe den Rest 3 bzw. 6, ist also durch 3 teilbar.

Fall 2:
Zwei Zahlen lassen den Rest 1 (bzw. 2) und die dritte den Rest 2 (bzw. 1), dann addiert man eine Zahl, die den Rest 1 lässt, und eine Zahl, die den Rest 2 lässt, und erhält wieder eine durch 3 teilbare Summe.

Da keine weiteren Fälle existieren, folgt somit die Behauptung.

Aufgabe 080814:
Beweise:

> Wenn eine Zahl $100a + b$ (a und b sind natürliche Zahlen) durch 7 teilbar ist, so ist auch die Zahl $a + 4b$ durch 7 teilbar!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Nach der Voraussetzung gilt $100a + b = 7k$ mit ganzem k. Um $4b$ zu erhalten, multipliziert man beide Seiten der Gleichung mit 4 und bekommt $400a + 4b = 4 \cdot 7k$.
Um auf den Term $a + 4b$ zu kommen, formt man folgendermaßen um:

$$\begin{aligned} 399a + a + 4b &= 4 \cdot 7k \\ 7 \cdot 57a + a + 4b &= 4 \cdot 7k \\ a + 4b &= 7(4k - 57a) \end{aligned}$$

Dieser Term $7(4k - 57a)$ ist durch 7 teilbar. Also ist auch $a + 4b$ durch 7 teilbar.

Alternativ-Lösung von cyrix:
Mit $100a + b$ ist auch $100a + b - 7 \cdot (14a - b) = 2a + 8b = 2(a + 4b)$ durch 7 teilbar und damit auch $a + 4b$, da 2 und 7 teilerfremd sind.

Aufgabe 160813:
Beweise den folgenden Satz:

Wenn von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen die kleinste Zahl gerade ist dann ist das Produkt dieser drei Zahlen durch 24 teilbar.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die kleinste der drei Zahlen ist von der Form $2n$ mit natürlichem n. Von den Zahlen $n, n + 1$ ist eine gerade, also ist $n(n + 1)$ gerade; folglich ist das zu untersuchende Produkt

$$p = 2n(2n + 1)(2n + 2) = 2 \cdot 2 \cdot n(n + 1)(2n + 1)$$

durch 8 teilbar. Von den drei (in p als Faktoren auftretenden) aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist eine durch 3 teilbar; dies gilt somit auch für p. Da 3 und 8 teilerfremd sind, ist p folglich auch durch $3 \cdot 8 = 24$ teilbar, w. z. b. w.

Aufgabe 250813:
Beweise folgenden Satz: Die Summe zweier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen, die beide nicht durch 3 teilbar sind, ist stets durch 3 teilbar.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Für jede natürliche Zahl n gilt:
Entweder ist n durch 3 teilbar oder n lässt bei der Division durch 3 den Rest 1 oder 2. Gleichwertig hiermit ist jeweils die Aussage, dass es eine natürliche Zahl k mit $n = 3k$ bzw. $n = 3k+1$ bzw. $n = 3k+2$ gibt.

Es sei nun n die kleinere von zwei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, die beide nicht durch 3 teilbar sind. Dann folgt:
Da n nicht durch 3 teilbar ist, gibt es eine natürliche Zahl k mit $n = 3k+1$ oder $n3k+2$. Wäre $n = 3k+2$, so wäre die auf n folgende Zahl $n + 1 = 3k + 3 = 3 \cdot (k + 1)$ durch 3 teilbar; denn da k eine natürliche Zahl ist, ist auch $k + 1$ eine natürliche Zahl.

Also verbleibt nur die Möglichkeit $n = 3k + 1$. Die Summe der beiden aufeinanderfolgenden Zahlen ist somit

$$n + n + 1 = 3k + 1 + 3k + 2 \cdot 6k + 3 = 3 \cdot (2k + 1)$$

Da k eine natürliche Zahl ist, ist es auch $2k+1$; somit ist der verlangte Beweis geführt, dass die genannte Summe durch 3 teilbar ist.

Aufgabe 280813:
Beweise die folgende Aussage!

Für je fünf unmittelbar aufeinanderfolgende natürliche Zahlen gilt: Unter diesen fünf Zahlen gibt es stets genau eine, die durch 5 teilbar ist.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Für jede natürliche Zahl gilt, dass sie entweder durch 5 teilbar ist oder bei der Division durch 5 einen der Reste 1, 2, 3 oder 4 lässt; d. h., es gilt, dass sie eine der Formen $5n$, $5n + 1$, $5n + 2$, $5n + 3$ oder $5n + 4$ hat, wobei n eine natürliche Zahl ist.

a) Ist nun von fünf unmittelbar aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen die kleinste k von der Form $k = 5n$, so ist sie durch 5 teilbar, und die übrigen vier Zahlen lassen bei der Division durch 5 der Reihe nach die Reste 1, 2, 3 und 4, sind also nicht durch 5 teilbar.

b) Ist die kleinste der fünf Zahlen von der Form $k = 5n + 1$, so ist die größte der Zahlen von der Form $5n + 1 + 4 = 5n + 5 = 5(n + 1)$, also durch 5 teilbar. Die übrigen vier Zahlen lassen bei der Division durch 5 wiederum der Reihe nach die Reste 1, 2, 3 und 4.

c) Ist k von der Form $k = 5n+2$, so ist die vierte der Zahlen von der Form $5n+2+3 = 5n+5 = 5(n+1)$, also durch 5 teilbar, während die vier übrigen Zahlen der Reihe nach bei der Division durch 5 die Reste 2, 3, 4 und 1 lassen.

d) Ist k von der Form $k = 5n+3$, so ist die dritte der Zahlen von der Form $5n+3+2 = 5n+5 = 5(n+1)$, also durch 5 teilbar, während die vier übrigen Zahlen der Reihe nach bei der Division durch 5 die Reste 3, 4, 1 und 2 lassen.

e) Ist k schließlich von der Form $k = 5n + 4$, so ist die zweite der Zahlen von der Form $5n + 4 + 1 = 5n + 5 = 5(n + 1)$, also durch 5 teilbar, während die übrigen vier Zahlen bei Division durch 5 der Reihe nach die Reste 4,1, 2 und 3 lassen.

Damit ist in jedem möglichen Fall der verlangte Beweis geführt.

II Runde 2

Aufgabe 020821:
Zu beweisen ist folgender Satz:

Wenn sich der Bruch $\frac{a-b}{a+b}$ nicht kürzen lässt, dann ist stets auch $\frac{a}{b}$ unkürzbar.

Lösung von Carsten Balleier:
Man kann diesen Satz indirekt beweisen. Das bedeutet, dass man die äquivalente Umkehraussage beweist, also: Wenn $\frac{a}{b}$ kürzbar ist, dann ist auch $\frac{a-b}{a+b}$ kürzbar.

Die Voraussetzung bedeutet, dass a und b einen gemeinsamen Teiler haben, dieser sei m. Damit gilt $a = ma'$ und $b = mb'$, weiterhin

$$\frac{a}{b} = \frac{ma'}{mb'} = \frac{a'}{b'}.$$

Setzt man das in den Term der Behauptung ein, sieht man, dass er tatsächlich kürzbar ist:

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{ma'-mb'}{ma'+mb'} = \frac{m(a'-b')}{m(a'+b')} = \frac{a'-b'}{a'+b'}. \quad \square$$

Aufgabe 030822:
Beweise die folgende Behauptung:

Wenn bei einer sechsstelligen Zahl die ersten drei Ziffern mit den letzten drei Ziffern übereinstimmen (z. B. 781781), so ist die Zahl stets durch 7, 11 und 13 teilbar.

Lösung von Steffen Polster:
Eine sechsstellige Zahl z, mit den ersten drei und letzten drei Ziffern a,b,c, kann man darstellen als:

$$z = 100000 \cdot a + 10000 \cdot b + 1000 \cdot c + 100 \cdot a + 10 \cdot b + c.$$

$$= 100100 \cdot a + 10010 \cdot b + 1001 \cdot c = 1001 \cdot (100a + 10b + a)$$

Da 1001 die Primteiler 7, 11 und 13 besitzt, wird $z = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot (100a + 10b + a)$.
Damit ist z durch 7, 11 und 13 teilbar.

Aufgabe 070824:
Beweise den Satz: Unter n aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ($n \geq 2$) gibt es stets eine, die durch n teilbar ist.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wir bezeichnen die größte der n aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen mit g. Sie lasse bei der Division durch n den Rest r mit $0 \leq r \leq n-1$, es gelte also $g = qn + r$ (q ganzzahlig).
Daher gehört die durch n teilbare Zahl $g - r$ zu den n aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen.

Aufgabe 110821:
Beweise den folgenden Satz:

Wenn p eine Primzahl größer als 3 ist, dann ist genau eine der Zahlen $p-1$, $p+1$ durch 6 teilbar.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Vorüberlegungen:
Definition Primzahl: Eine Primzahl ist eine Zahl, die nur durch 1 und durch sich selbst teilbar ist.

Teilbarkeitssatz: Wenn eine Zahl durch 2 und durch 3 teilbar ist, dann ist sie auch durch 6 teilbar.

Man muss also beweisen, dass entweder $p-1$ oder $p+1$ durch 2 und durch 3 teilbar ist, um zu beweisen, dass entweder $p-1$ oder $p+1$ durch 6 teilbar ist.

Teilbarkeit durch 2:
p ist eine Primzahl und größer als 3, darf demnach nicht durch 2 teilbar sein, da eine Primzahl nur durch 1 und durch sich selbst teilbar ist. Da jedoch jede zweite Zahl durch 2 teilbar ist, müssen die Nachbarzahlen

von p ($p-1$ und $p+1$) beide durch 2 teilbar sein.

Teilbarkeit durch 3:
p kann nach der Definition von Primzahlen (s. oben) nicht durch 3 teilbar sein, da p eine Primzahl ist. Geht man davon aus, dass $p-1$ auch nicht durch 3 teilbar ist, muss $p+1$ aber durch 3 teilbar sein, da jede dritte Zahl durch 3 teilbar ist. Dies gilt auch für $p-1$, wenn $p+1$ nicht durch 3 teilbar ist. Es ist also entweder $p-1$ oder $p+1$ durch 3 teilbar.

$\Rightarrow$ Da $p-1$ und $p+1$ durch 2 und entweder $p-1$ oder $p+1$ durch 3 teilbar sind, ist entweder $p-1$ oder $p+1$ durch 6 teilbar.

Aufgabe 150822:
Ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen $n \geq 1$, für die unter den sechs Zahlen $n+1$, $n+2$, $n+3$, $n+4$, $n+5$, $n+6$ ein Paar gefunden werden kann, in dem die erste Zahl des Paares ein echter Teiler der zweiten Zahl des Paares ist!

Nenne (für jedes solche n) alle derartigen Paare!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn bereits das Doppelte der kleinsten der sechs Zahlen $(n+1)$ die größte $(n+6)$ übertrifft, also $2(n+1) > (n+6)$ und mithin $n > 4$ gilt, kann aus den sechs Zahlen sicher kein geordnetes Paar mit den geforderten Teilbarkeitseigenschaften gefunden werden.

Da aus $n > 4$ stets auch $2(n+1) > (n+6)$ folgt, kann n höchstens gleich $1, 2, 3, 4$ sein. Analog stellt man fest, dass höchstens für $n = 1$ eine der sechs Zahlen das Dreifache einer anderen sein kann und dass das Vierfache wegen $4(n+1) \geq (n+7) > (n+6)$ nicht auftreten kann. Aus analogen Gründen sind höhere Vielfache erst recht nicht möglich.

Es sei $n = 1$.
Unter den Zahlen 2, 3, 4, 5, 6, 7 gilt $2|4$, $2|6$ und $3|6$. Weitere Teilbarkeitsbeziehungen treten nicht auf. Folglich erhalten wir in diesem Fall genau die Zahlenpaare $(2;4), (2;6), (3;6)$.

Es sei $n = 2$.
Unter den Zahlen 3, 4, 5, 6, 7, 8 treten genau die Teilbarkeitsbeziehungen $3|6$ und $4|8$ auf. Man erhält mithin genau die Paare $(3;6), (4;8)$.

Es sei $n = 3$.
Dann erhält man aus den Zahlen 4, 5, 6, 7, 8, 9 genau das Paar $(4;8)$.

Es sei $n = 4$.
Aus den Zahlen 5, 6, 7, 8, 9, 10 erhält man genau das Paar (5;10). Damit sind alle gesuchten Paare ermittelt.

Aufgabe 200822:
Ermittle alle Paare $(a;\ b)$ natürlicher Zahlen mit $a < b$, die folgende Eigenschaften besitzen:

Die Summe der Zahlen a und b beträgt 192.
Der größte gemeinsame Teiler der Zahlen a und b ist 24.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn $(a;b)$ ein Paar natürlicher Zahlen mit den geforderten Eigenschaften ist, so folgt:

24 ist ein Teiler sowohl von a als auch von b, also gibt es natürliche Zahlen p, q mit $a = 24p$, $b = 24q$.
Da 24 sogar der größte gemeinsame Teiler von a und b ist, folgt ferner: p und q sind zueinander teilerfremd. (1)
Aus $a < b$ folgt weiter $24p < 24q$, also $p < q$; (2)
aus $a + b = 192$ folgt $24p + 24q = 192$, also $p + q = 8$. (3)

Nun werden die Forderungen (2) und (3) nur durch folgende natürliche Zahlen p,q erfüllt:

p	q
0	8
1	7
2	6
3	5

Forderung (1) ist hierbei nur für $p = 1, q = 7$ und für $p = 3, q = 5$ erfüllt. Daher können nur die Paare $(24; 168), (72; 120)$ die geforderten Eigenschaften besitzen.

Sie besitzen diese Eigenschaften; denn es gilt:
$24 < 168$, $72 < 120$; $24 + 168 = 192$, $72 + 120 = 192$.
Wegen $168 = 7 \cdot 24$ ist 24 der ggT von 24 und 168, wegen $72 = 3 \cdot 24$ und $120 = 5 \cdot 24$ ist 24 der ggT von 72 und 120, da 3 und 5 teilerfremd sind.

Aufgabe 280822:
Beweise die folgende Aussage! Unter je fünf unmittelbar aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen gibt es mindestens eine, höchstens aber zwei, die durch 3 teilbar sind.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Nach dem Satz, dass es unter drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen genau eine durch 3 teilbare gibt, folgt erstens, dass es erst recht unter je fünf aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen mindestens eine durch 3 teilbare Zahl gibt.

Ferner folgt, dass es unter je sechs, also erst recht unter fünf aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen höchstens zwei durch 3 teilbare Zahlen geben kann. Zu beiden Teilen der Aufgabenstellung ist damit der geforderte Beweis gebracht.

III Runde 3

Aufgabe V10832:
Beweise: Das Produkt zweier ungerader Zahlen ist stets ungerade!

Lösung von Steffen Polster:
Jede ungerade Zahl lässt sich in der Form $2x + 1$, wobei x ein natürliche Zahl ist, darstellen. Es seien $a = 2m + 1, b = 2n + 1$, $m,n \in \mathbb{N}$. Dann wird für ihr Produkt

$$ab = (2m + 1)(2n + 1) = 4mn + 2n + 2m + 1 = 2(2mn + n + m) + 1$$

Da $2mn + m + n$ eine natürliche Zahl ist, ist das Produkt ungerade. w. z. b. w.

Aufgabe 030831:
Welches ist die kleinste achtstellige Zahl, die aus lauter verschiedenen Ziffern besteht und durch 36 teilbar ist? Begründe, dass es die kleinste derartige Zahl ist!

Lösung von Korinna Grabski:
Eine Zahl ist durch 36 teilbar, wenn sie durch 9 und 4 teilbar ist.
Eine Zahl ist durch 9 teilbar, wenn die Quersumme der Zahl durch 9 teilbar ist.
Eine Zahl ist durch 4 teilbar, wenn die Zahl der letzten 2 Ziffern durch 4 teilbar ist.

Die Zahl soll aus 8 verschiedenen Ziffern bestehen, 10 Ziffern (0-9) gibt es. Es müssen also 2 Ziffern weggelassen werden, so dass die Summe der restlichen Ziffern durch 9 teilbar ist. Dafür kommen nur die Zahlenpaare (0;9), (1;8), (2;7), (3;6) und (4;5) in Frage. Damit gibt es folgende minimal mögliche Zahlen:

$$(0;9) - 12345678 \qquad (1;8) - 20345679 \qquad (2;7) - 10345689$$
$$(3;6) - 10245789 \qquad (4;5) - 10236789$$

Das Paar (4;5) ermöglicht die kleinste Zahl, allerdings müssen die Ziffern so angeordnet werden, dass die Zahl durch 4 teilbar ist. Damit die Zahl möglichst klein ist, sollte die größeren Ziffern weiter hinten stehen. Die durch 4 teilbare Zahl aus den größtmöglichen 2 Ziffern ist dann 96. Es müssen also nur noch die letzten 4 Ziffern umsortiert werden.

Dies ergibt dann die Zahl 10237896.

Aufgabe 070834:
Es sei a eine positive ganze Zahl.

Zeige, dass der Bruch $\frac{a^2-a+1}{a^2+a-1}$ weder durch 2 noch durch 3 gekürzt werden kann!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(I) Ist a gerade, so ist a^2 gerade, also auch $a^2 - a$; folglich ist dann $a^2 - a + 1$ ungerade.
Ist a ungerade, so ist a^2 ungerade, also $a^2 - a$ gerade und folglich $a^2 - a + 1$ ungerade.
Daher ist der Zähler stets ungerade, also kann der Bruch nicht durch 2 gekürzt werden. (Entsprechend könnte man den Beweis auch durch alleinige Untersuchung des Nenners führen.)

(II) Ist a durch 3 teilbar, so auch a^2, also auch $a^2 - a$; folglich ist dann $a^2 - a + 1$ nicht durch 3 teilbar. (Ähnlich folgt: auch $a^2 + a - 1$ nicht.)
Lässt a bei Division durch 3 den Rest 1, so auch a^2; folglich ist dann $a^2 - a$ durch 3 teilbar, also $a^2 - a + 1$ nicht. (Ähnlich: auch $a^2 + a - 1$ nicht.)
Lässt a bei Division durch 3 den Rest 2, so lässt a^2 bei Division durch 3 den Rest 1; folglich ist dann $a^2 + a$ durch 3 teilbar, also $a^2 + a - 1$ nicht.

Daher ist von den beiden Zahlen $a^2 - a + 1$, $a^2 + a - 1$ stets (mindestens) eine nicht durch 3 teilbar, somit kann der Bruch nicht durch 3 gekürzt werden.

Aufgabe 090831:
Die Altersangaben (in vollen Lebensjahren ausgedrückt) einer Familie - Vater, Mutter und ihre zwei Kinder - haben folgende Eigenschaften:

Das Produkt aller vier Lebensalter beträgt 44950; der Vater ist 2 Jahre älter als die Mutter.

Wie alt sind die vier Familienmitglieder?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Zerlegung von 44 950 in Primfaktoren lautet $44950 = 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 29 \cdot 31$. Daher gibt es genau die folgenden

Möglichkeiten, 44950 in ein Produkt aus genau 4 natürlichen Zahlen zu zerlegen:

$$\begin{array}{ll}
(1) & (2\cdot 5)\cdot 5\cdot 29\cdot 31 = 10\cdot 5\cdot 29\cdot 31,\\
(2) & (2\cdot 29)\cdot 5\cdot 5\cdot 31 = 58\cdot 5\cdot 5\cdot 31,\\
(3) & (2\cdot 31)\cdot 5\cdot 5\cdot 29 = 62\cdot 5\cdot 5\cdot 29,\\
(4) & (5\cdot 5)\cdot 2\cdot 29\cdot 31 = 25\cdot 2\cdot 29\cdot 31,\\
(5) & (5\cdot 29)\cdot 2\cdot 5\cdot 31 = 145\cdot 2\cdot 5\cdot 31,\\
(6) & (5\cdot 31)\cdot 2\cdot 5\cdot 29 = 155\cdot 2\cdot 5\cdot 29,\\
(7) & (29\cdot 31)\cdot 2\cdot 5\cdot 5 = 899\cdot 2\cdot 5\cdot 5
\end{array}$$

Da die Altersdifferenz der beiden Eltern 2 Jahre beträgt, können höchstens die Fälle (1) und (4) Lösung sein. Von ihnen ist der Fall (4) nicht real; denn nach ihm müsste die 29jährige Mutter ein 25jähriges Kind haben.
Somit verbleibt nur Möglichkeit (1); d. h., die gesuchten Altersangaben können nur 31, 29, 10, 5 sein. Umgekehrt erfüllen diese Angaben auch tatsächlich alle Bedingungen der Aufgabe.

Aufgabe 100834:
Es seien a, b natürliche Zahlen, und es gelte $a > b$.

Gib für a und b Bedingungen an, so dass folgendes gilt: Die Differenz der Quadrate von a und b ist genau dann eine Primzahl, wenn diese Bedingungen sämtlich erfüllt sind!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wegen $a > b$ gilt $a^2 - b^2 > 0$. Wegen $(a - b) \geq (a + b)$ ist $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ genau dann Primzahl, wenn $a - b = 1$ und $a + b$ Primzahl ist.

Aufgabe 120832:
Beweise den folgenden Satz:

Sind a, b, c ($a \geq b \geq c$) drei beliebige natürliche Zahlen, dann ist die Summe dieser Zahlen oder eine der aus zwei dieser Zahlen gebildeten Differenzen durch 3 teilbar.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es sind zwei Fälle zu unterscheiden:

Fall 1: Die bei der Division der Zahlen a, b, c durch 3 auftretenden Reste sind paarweise verschieden. Es lasse o. B. d. A. die Zahl a den Rest 0, die Zahl b den Rest 1 und die Zahl c den Rest 2. Dann lassen sich a, b, c in folgender Form schreiben:

$$a = 3m \qquad ; \qquad b = 3n + 1 \qquad ; \qquad c = 3s + 2$$

mit natürlichen Zahlen m, n, s. Nun gilt:

$$a + b + c = 3m + 3n + 1 + 3s + 2 = 3(m + n + s + 1)$$

d. h. $3|(a + b + c)$.

Fall 2: Es gibt unter den Zahlen a, b, c mindestens zwei Zahlen, die bei Division durch 3 den gleichen Rest r lassen. Das seien o. B. d. A. die Zahlen a und b.
Dann lassen sich diese Zahlen in folgender Form schreiben:

$$a = 3m + r \qquad ; \qquad b = 3n + r$$

mit natürlichen Zahlen m, n, r, wobei $0 \leq r \leq 2$ gilt. Nun gilt:

$$a - b = 3m + r - (3n + r) = 3(m - n) \qquad \text{d. h.} \qquad 3|(a - b)$$

Aufgabe 130832:
Zeige, dass für jede Primzahl $p > 5$ das Produkt $(p - 2)(p - 1)p(p + 1)(p + 2)$ durch 360 teilbar ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Von den fünf aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen $p-2$, $p-1$, p, $p+1$, $p+2$ ist eine durch 5 teilbar. Da p Primzahl ist und $p > 5$ gilt, ist p nicht durch 5 teilbar. Folglich ist eine der Zahlen $p - 2$, $p - 1$, $p + 1$, $p + 2$ durch 5 teilbar.

Da $p \neq 2$ ist, ist p ungerade. Daher ist jede der beiden Zahlen $p-1$ und $p+1$ gerade, und eine von beiden ist wenigstens durch 4 teilbar. Folglich ist ihr Produkt durch 8 teilbar.
Da $p \neq 3$ ist, ist p nicht durch 3 teilbar. Mithin sind entweder die beiden Zahlen $p - 2$ und $p + 1$ oder die beiden Zahlen $p - 1$ und $p + 2$ jeweils durch 3 teilbar. Also ist ihr Produkt durch 9 teilbar.

Aus all dem folgt, dass das Produkt $(p - 2)(p - 1)(p + 1)(p + 2)$ durch 5, 8 und 9 und, da diese Zahlen paarweise teilerfremd sind, auch durch $5 \cdot 8 \cdot 9 = 360$ teilbar ist, w. z. b. w.

Aufgabe 140832:
Von zwei Primzahlen wird folgendes gefordert:

a) Ihre Summe ist eine Primzahl.
b) Multipliziert man diese Summe mit dem Produkt der zuerst genannten beiden Primzahlen, so erhält man eine durch 10 teilbare Zahl.

Man gebe alle Primzahlen an, die diese Forderungen erfüllen.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, zwei Primzahlen P_1, P_2 haben die verlangten Eigenschaften. Eine der Primzahlen P_1 und P_2 muss wegen (a) 2 sein, da die Summe ungerader Primzahlen stets größer als 2 und durch 2 teilbar ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $P_1 = 2$.

Wegen (b) gibt es eine natürliche Zahl n, so dass

$$(2 + P_2) \cdot 2P_2 = 10n \qquad \text{also} \qquad (2 + P_2)P_2 = 5n$$

ist. Wegen der Eindeutigkeit der Zerlegung einer natürlichen Zahl in Primfaktoren gilt entweder $2+P_2 = 5$, d. h. $P_2 = 3$ oder $P_2 = 5$.

Also erfüllen höchstens die Primzahlen $(2; 3)$ und $(2; 5)$ die Bedingungen. In der Tat haben sie die verlangten Eigenschaften; denn ihre Summen $P_1 + P_2$ sind 5 bzw. 7, jeweils also eine Primzahl.
Die Produkte $(P_1 + P_2)P_1P_2$ sind 30 bzw. 70, jeweils also durch 10 teilbar.

Aufgabe 150832:
Beweise, dass sich alle Primzahlen $p > 3$ in der Form $6n + 1$ oder $6n - 1$ schreiben lassen, wobei n eine von Null verschiedene natürliche Zahl ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Jede Primzahl $p > 3$ ist weder durch 2 noch durch 3 teilbar und daher von keiner der Formen

$$6n = 2 \cdot 3n; \qquad 6n + 2 = 2(3n + 1); \qquad 6n + 3 = 3(2n + 1); \qquad 6n + 4 = 2(3n + 2)$$

mit ganzzahligem n. Da sie aber wie jede ganze Zahl von einer der Formen $6n + r$ mit ganzzahligen n, r und $0 \leq r \leq 5$ ist, gilt entweder (1) $p = 6n + 1$ (n ganzzahlig) oder $p = 6m + 5 = 6(m + 1) - 1$ (m ganzzahlig), also mit $n = m + 1$ und (2) $p = 6n - 1$ (n ganzzahlig).

Wäre $n \leq 0$ in (1) oder (2), so ergäbe sich der Widerspruch $p \leq 1$ bzw. $p \leq -1$. Daher ist in beiden Fällen die ganze Zahl $n \geq 1$, w. z. b. w.

Aufgabe 180834:
Beweise folgenden Satz:

Ist p eine Primzahl größer als 3, so ist die Zahl $(p - 1)(p + 1)$ durch 24 teilbar.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die natürlichen Zahlen $p - 1, p, p + 1$ sind drei aufeinanderfolgende Zahlen. Von diesen ist genau eine durch 3 teilbar.
Die Zahl p kann dies als eine Primzahl $p > 3$ nicht sein, also muss es eine der Zahlen $p - 1$, $p + 1$ sein. Folglich ist das Produkt $(p - 1)(p + 1)$ durch 3 teilbar.

Da p eine Primzahl und größer als 3 ist, ist p ungerade; $p-1$ und $p+1$ sind daher zwei aufeinanderfolgende gerade Zahlen. Von diesen Zahlen ist stets genau eine durch 2 und die andere durch 4 teilbar. Folglich ist das Produkt $(p - 1)(p + 1)$ durch 8 teilbar.

Da 3 und 8 teilerfremd sind, ist somit $(p - 1)(p + 1)$ durch $3 \cdot 8 = 24$ teilbar, w. z. b. w.

Aufgabe 220831:
Cathrin fragt an einem Tag des Jahres 1981 ihren Großvater nach seinem Geburtsjahr. Der Großvater, ein Freund von Knobelaufgaben, antwortete:

> „Ich bin älter als 65 Jahre, aber jünger als 100 Jahre. Die Jahreszahl meiner Geburt ist weder durch 2 noch durch 3 noch durch 5 teilbar. Der Rest, der bei der Division dieser Jahreszahl durch 60 entsteht, ist keine Primzahl.“

Untersuche, ob diese Angaben insgesamt für ein Geburtsjahr zutreffen können und ob sie das Geburtsjahr eindeutig festlegen! Wie lautet dann das Geburtsjahr des Großvaters?

Hinweis: Die Jahreszahl soll vollständig angegeben werden, also z. B. nicht 11 sondern 1911.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn die Angaben für ein Geburtsjahr zutreffen, so folgt:
Da der Großvater an einem Tag des Jahres 1981 älter als 65 Jahre und jünger als 100 Jahre war, ist er vor dem entsprechenden Datum des Jahres 1916 und nach dem entsprechenden Datum des Jahres 1881 geboren.
Die Jahreszahl seiner Geburt ist also eine der Zahlen 1881, 1882, ..., 1916.
Von diesen sind nur die folgenden weder durch 2 noch durch 3 noch durch 5 teilbar:

$$1883, 1889, 1891, 1897, 1901, 1903, 1907, 1909, 1913$$

Diese Zahlen lassen bei Division durch 60 folgende Reste: 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 49, 53.
Hiervon ist nur 49 keine Primzahl. Daher können die Angaben nur für das Geburtsjahr 1909 zutreffen.

II. Sie treffen hierfür zu; denn wenn der Großvater 1909 geboren wurde, so war er an einem Tag des Jahres 1981 entweder 7l oder 72 Jahre alt, also älter als 65 und jünger als 100 Jahre; ferner ist 1909 weder durch 2 noch durch 3 noch durch 5 teilbar und lässt bei Division durch 60 den Rest 49, der keine Primzahl ist.

Aus I. und II. folgt: Die Angaben können insgesamt zutreffen, und sie legen das Geburtsjahr eindeutig fest. Es lautet 1909.

Aufgabe 230834:
Ermittle die Anzahl aller derjenigen natürlichen Zahlen von 1 bis 1984, die durch 5, aber nicht durch 7 und nicht durch 11 teilbar sind!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Für jede natürliche Zahl $n > 0$ gilt:
Durchläuft man die natürlichen Zahlen von 1 bis 1984 der Reihe nach, so ist dabei immer wieder genau jede n-te Zahl durch n teilbar. Daraus folgt:
Die Anzahl der durch n teilbaren unter den Zahlen von 1 bis 1984 ergibt sich bei der Division von 1984 durch n mit Rest als dabei auftretender Quotient. Dies wird im folgenden wiederholt angewendet:

Wegen $1984 : 5 = 396{,}8$, gibt es unter den Zahlen von 1 bis 1984 genau 396 Zahlen, die durch 5 teilbar sind.
Unter ihnen sind aber auch solche Zahlen, die außer durch 5 auch durch 7 und mithin (da 5 und 7 teilerfremd sind) durch 35 teilbar sind. Wegen $1984 : 35 = 56, \ldots$, sind das genau 56 Zahlen.
Ferner wurden bei den durch 5 teilbaren Zahlen alle diejenigen mitgezählt, die außer durch 5 auch durch 11 und mithin (da 5 und 11 teilerfremd sind) durch 55 teilbar sind. Wegen $1984 : 55 = 35, \ldots$, sind das genau 36 Zahlen.

Subtrahiert man nun von der Anzahl 396 die anschließend soeben ermittelten Anzahlen 56 und 36, so werden diejenigen Zahlen zweimal erfasst, die sowohl durch 5 als auch durch 7 als auch durch 11 und mithin (wegen der paarweisen Teilerfremdheit von 5, 7 und 11) durch 385 teilbar sind. Wegen $1984 : 385 = 5, \ldots$, sind das genau 5 Zahlen.

Folglich gibt es wegen $396 - 56 - 36 + 5 = 309$ unter den natürlichen Zahlen von 1 bis 1984 genau 309 Zahlen, die durch 5, aber nicht durch 7 und nicht durch 11 teilbar sind.

Alternativ-Lösung von cyrix:
Gesucht ist die Anzahl aller natürlichen Zahlen n der Form $n = 5k$, wobei $1 \leq k \leq 396$ eine natürliche Zahl, die weder durch 7 noch 11 teilbar ist, ist. (Die Größenbeschränkung an k folgt aus $1 \leq n \leq 1984$; die Teilbarkeitsaussagen aus der Teilerfremdheit von 5; 7 und 11.)
Unter den natürlichen Zahlen von 1 bis 396, die k durchlaufen kann, sind genau $\left[\frac{396}{7}\right] = 56$ durch 7, genau $\left[\frac{396}{11}\right] = 36$ durch 11 und genau $\left[\frac{396}{77}\right] = 5$ durch 77 teilbar. Dabei sei $[x]$ der ganzzahlige Anteil von x, also die größte ganze Zahl z, die $z \leq x$ erfüllt.
Insbesondere sind also von den natürlichen Zahlen k zwischen inklusive 1 und 396 genau $56 + 36 - 5 = 87$ durch mindestens eine der beiden Primzahlen 7 bzw. 11 und damit genau $396 - 87 = 309$ durch keine der beiden teilbar.
Damit sind auch genau 309 der natürlichen Zahlen $n = 5k$ zwischen inklusive 1 und 1984 durch 5, aber weder 7 noch 11 teilbar.

Aufgabe 260832:
Ermittle alle diejenigen Paare $(p;\ q)$ von Primzahlen, die die folgenden Bedingungen (1), (2), (3) erfüllen!

(1) Die Differenz $q - p$ ist größer als 0 und kleiner als 10.

(2) Die Summe $p+q$ ist das Quadrat einer natürlichen Zahl n.

(3) Addiert man zu dieser Zahl n die Summe von p und q, so erhält man 42.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

I. Wenn ein Paar $(p;q)$ von Primzahlen zusammen mit einer natürlichen Zahl n die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt, so folgt:

Nach (2) gilt $p+q=n^2$, nach (3) gilt $n+p+q=42$, wegen der vorigen Gleichung also $n+n^2=42$, d. h. $n(n+1)=42$ (4).

Die einzigen Möglichkeiten, 42 als Produkt zweier natürlicher Zahlen darzustellen, sind (bis auf die Reihenfolge der Faktoren) $42=1\cdot 42=2\cdot 21=3\cdot 14=6\cdot 7$.

Von diesen Darstellungen enthält nur $6\cdot 7$ zwei Faktoren der Gestalt n und $n+1$, d. h. aus (4) (für natürliche Zahlen n) folgt $n=6$.

Nach (2) gilt somit $p+q=36$. Also ist p eine der Primzahlen kleiner als 36, d. h. eine der Zahlen 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, und q ist jeweils die entsprechende der Zahlen 34, 33, 31, 29, 25, 23, 19, 17, 13, 7, 5.

Von diesen Möglichkeiten scheiden alle außer $p=17$, $q=19$ aus, da für sie entweder $q-p\geq 10$ oder $q-p<0$ wird, also (1) nicht erfüllt ist (einige auch deswegen, weil bei ihnen q keine Primzahl ist).

Also kann nur das Paar $(p;q)=(17;19)$ alle Bedingungen der Aufgabe erfüllen.

II. Es erfüllt diese Bedingungen; denn 17 und 19 sind Primzahlen, es gilt $0<19-17<10$, $17+19=36=6^2$ und $6+17+19=42$. Also erfüllt genau das Paar $(17;19)$ die Bedingungen der Aufgabe.

Andere Möglichkeiten, von (4) auf $n=6$ zu schließen:

1. Für alle natürlichen Zahlen $n<6$ ist $n(n+1)<6\cdot 7$, für $n>6$ ist $n(n+1)>6\cdot 7$.

   Also kann unter den natürlichen Zahlen n nur $n=6$ die Gleichung $n(n+1)=42$ erfüllen.

2. Bei Kenntnis der Lösungsformel quadratischer Gleichungen (oder nach Herleitung, etwa vermittels $(n+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}=42$) erhält man:

   Von den beiden Lösungen
   $$n_{1;2}=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+42}=\frac{1}{2}(-1\pm 13)$$
   der quadratischen Gleichung $n^2+n-42=0$ ist nur $n_1=6$ eine natürliche Zahl.

Aufgabe 300834:
Man beweise: Für jede natürliche Zahl $n>0$ befindet sich stets unter den natürlichen Zahlen $n-1$, n, $n+1$ und n^2+1 eine Zahl, die durch 5 teilbar ist.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Jede natürliche Zahl n ist mit einer geeigneten natürlichen Zahl k von einer der Formen $5k$, $5k+1$, $5k+2$, $5k+3$, $5k+4$.
Ist $n=5k$, so ist n durch 5 teilbar.
Ist $n=5k+1$, so ist $n-1=5k$ durch 5 teilbar.
Ist $n=5k+2$, so ist $n^2+1=25k^2+20k+5=5(5k^2+4k+1)$ durch 5 teilbar.
Ist $n=5k+3$, so ist $n^2+1=25k^2+30k+10=5(5k^2+6k+2)$ durch 5 teilbar.
Ist $n=5k+4$, so ist $n+1=5(k+1)$ durch 5 teilbar.

Damit ist der verlangte Beweis geführt.

Alternativ-Lösung von cyrix:
Das Produkt dieser fünf natürlichen Zahlen ist $n^5 - n$, welches nach dem kleinen Satz von Fermat durch 5 teilbar ist, sodass es auch mindestens einer der Faktoren ist.

IV.II (Dezimal-)Zahldarstellung, Reste

I Runde 1

Aufgabe 040814:
Die Zahl 62**427 ist durch 99 teilbar.

Bestimme die fehlenden Ziffern, und gib an, wie du sie gefunden hast! Wie viel Lösungen gibt es?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Quersumme der bis jetzt vorhandenen Ziffern der Zahl $62**427$ beträgt 21. Da sie durch 9 teilbar ist, muss ihre Quersumme ebenfalls durch 9 teilbar sein, somit kommen folgende Quersummen in Frage: 27 und 36.

Folgende Zahlen ergeben eine dieser Quersummen:

$$6215427, 6251427, 6224427, 6242427, 6233427, 6269427, 6296427, 6278427, 6287427$$

Nun muss überprüft werden, welche dieser Zahlen zusätzlich durch die Zahl 11 teilbar sind. Somit erhält man genau eine Zahl die durch 99 teilbar ist, und zwar: 6224427.

Aufgabe 120811:
Ermittle alle dreistelligen natürlichen Zahlen z, von denen jede die folgenden Bedingungen erfüllt:

(1) Die Quersumme der Zahl z beträgt 12

(2) Die aus der Zehner- und aus der Einerziffer (in dieser Reihenfolge) der Zahl z gebildete zweistellige Zahl ist das Fünffache der aus der Hunderterziffer von z bestehenden (einstelligen) Zahl.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Hunderterziffer der gesuchten Zahl z kann nur eine der Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 sein.
Ermittelt man nach (2) dazu jeweils die beiden anderen Ziffern, so erhält man genau die Zahlen 105, 210, 315, 420, 525, 630, 735, 840, 945.
Von ihnen haben genau die Zahlen 525 und 840 die Quersumme 12, erfüllen somit auch (1) und sind damit die sämtlichen Lösungen der Aufgabe.

Aufgabe 130811:
Man ermittle alle Möglichkeiten, eine vierstellige ungerade (natürliche) Zahl z so anzugeben, dass sie folgende Eigenschaften hat:

(1) Die Zahl z hat vier verschiedene Ziffern.
(2) Das Produkt aus der zweiten und der dritten Ziffer von z ist 21 mal so groß wie das Produkt aus der ersten und der vierten Ziffer.
(3) Die kleinste der Ziffern von z steht an erster, die größte an zweiter Stelle.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Sind a, b, c, d in dieser Reihenfolge die Ziffern einer Zahl z mit den geforderten Eigenschaften, so gilt wegen (3) $a < d$ sowie $b > c$. Ferner gilt $1 \leq a,b,c,d \leq 9$ und somit wegen (1)

$$b \cdot c \leq 8 \cdot 9 = 72 \qquad \text{und} \qquad a \cdot d \geq 1 \cdot 2 = 2$$

Wäre $a \cdot d \geq 4$, so folgte nach (2) $b \cdot c = 21 \cdot a \cdot d \geq 84$. Also ist $2 \leq a \cdot d \leq 3$.

Da wegen $a < d$ im Falle $a \cdot d = 2$ nur $d = 2$ sein könnte, damit aber a gerade wäre, kann nur $a \cdot d = 3$ sein, was auf $a = 1$ und $d = 3$ führt. Dann gilt $b \cdot c = 63$, wegen $b > c$ also $b = 9$ und $c = 7$.

Daher kann nur die Zahl $z = 1973$ die geforderten Eigenschaften haben. Sie hat sie tatsächlich; denn sie ist ungerade, sie besteht aus vier verschiedenen Ziffern, das Produkt $9 \cdot 7$ ist 21 mal so groß wie das Produkt $1 \cdot 3$, und die kleinste ihrer Ziffern, 1, steht an erster, die größte, 9, an zweiter Stelle.

Aufgabe 190812:
Aus den Ziffern 0, 1, ..., 9 seien genau sieben ausgewählt, von denen keine zwei einander gleich sind.

Ermittle die Anzahl derjenigen (im dekadischen System) siebenstelligen Zahlen, die in ihrer (dekadischen) Zifferndarstellung jede der ausgewählten Ziffern enthalten!
Dabei werde
a) vorausgesetzt, dass die 0 nicht unter den ausgewählten Ziffern vorkommt,
b) vorausgesetzt, dass die 0 unter den ausgewählten Ziffern vorkommt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die genannten siebenstelligen Zahlen müssen in ihrer Zifferndarstellung jede der gegebenen Ziffern genau einmal enthalten.

Im Fall a) hat man für die Besetzung der ersten Stelle genau 7 Möglichkeiten. Bei jeder von ihnen verbleiben für die Besetzung der zweiten Stelle genau 6 Möglichkeiten. Daher gibt es insgesamt für die Besetzung der ersten beiden Stellen $7 \cdot 6$ Möglichkeiten.
So fortfahrend erhält man für die Besetzung aller 7 Stellen insgesamt $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$ Möglichkeiten.

Im Fall b) hat man für die Besetzung der ersten Stelle genau 6 Möglichkeiten: die weiteren Überlegungen verlaufen wie im Fall a). Daher erhält man hier insgesamt $6 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4320$ Möglichkeiten.
Die gesuchten Anzahlen sind also a) 5040; b) 4320.

Aufgabe 190813:
Gegeben seien die vier periodischen Dezimalbrüche

$$p = 0{,}\overline{3456}..., \qquad q = 0{,}3\overline{456}..., \qquad r = 0{,}34\overline{56}..., \qquad s = 0{,}345\overline{6}.$$

a) Ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen n, für die folgende Aussage gilt: In der n-ten Stelle nach dem Komma haben alle vier Dezimalbrüche p, q, r, s dieselbe Ziffer.

b) Ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen m, für die folgende Aussage gilt: In der m-ten Stelle nach dem Komma haben keine zwei der vier Dezimalbrüche p, q, r, s dieselbe Ziffer!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Für $n = 1, 2, 3$ (1) gilt die genannte Aussage. Wenn sie für eine natürliche Zahl

$$n = 4 + k \qquad \text{mit } k \geq 0$$

gilt, so folgt: In der n-ten Stelle nach dem Komma hat s die Ziffer 6. Diese Ziffer kommt aber in p bzw. q nur dann an der $(4+k)$-ten Stelle vor, wenn k durch 4 bzw. 3 teilbar ist. Also ist k durch die Zahlen 4 und 3 und folglich durch deren kgV 12 teilbar. Somit können (außer den Zahlen (1)) nur die Zahlen

$$n = 4 + 12g \qquad (g = 0{,}1{,}2, \dots) \tag{2}$$

die zu betrachtende Eigenschaft haben.
Sie haben diese Eigenschaft; denn da $12g$ durch 4, 3 und 2 teilbar ist, steht an der $(4+12g)$-ten Stelle in p, q und r wie in s die Ziffer 6.
Also erfüllen genau die Zahlen (1), (2) die in Aufgabe a) geforderte Bedingung.

b) Für $m = 1{,}2{,}3$ ist die genannte Aussage falsch. An der vierten Stelle beginnt bei allen Dezimalbrüchen p,q,r,s eine Periode mit der Ziffer 6. Nach dem in a) Gezeigten wiederholt sich dies nach jeweils 12 weiteren Stellen. Daher genügt es, die zwölf Zahlen

$$m = 4, 5, \dots, 15 \tag{3}$$

zu überprüfen. Was dabei für einen der Werte (3) (über die zu untersuchende Eigenschaft) festgestellt wurde, gilt dann auch für alle diejenigen Werte m, die aus dem betreffenden Wert durch Addition beliebiger ganzzahliger Vielfacher von 12 hervorgehen. (In der folgenden Tabelle ist das Vorkommen gleicher Ziffern durch Einrahmen gekennzeichnet. 1.Spalte = m-te Stelle in ...)

m	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
p	6	3	4	5	6	3	4	5	6	3	4	5
q	6	4	5	6	4	5	6	4	5	6	4	5
r	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5
s	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6

Es ergibt sich, dass unter den Zahlen (3) genau $m = 5$ die zu betrachtende Eigenschaft hat. Damit sind genau die Zahlen

$$m = 5 + 12h \qquad (h = 0, 1, 2, \dots)$$

die in Aufgabe b) gesuchten.

Aufgabe 230812:
Ermittle alle dreistelligen natürlichen Zahlen n mit folgenden Eigenschaften:

(1) Die Quersumme von n ist 17.

(2) Multipliziert man die erste Ziffer (d. h. die Hunderterziffer) von n mit 4, so erhält man eine zweistellige Zahl, und zwar gerade die aus den letzten beiden Ziffern von n gebildete Zahl.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Aus (2) folgt:
Für die Hunderterziffer der gesuchten Zahl n kommen nur $3, 4, ..., 9$ in Frage, für n hiernach nur die Zahlen $312; 416; 520; 624; 728; 832; 936$.
Die entsprechenden Quersummen sind: $6; 11; 7; 12; 17; 13; 18$.
Daraus ist ersichtlich, dass genau die Zahl 728 beide Bedingungen (1), (2) erfüllt.

Aufgabe 260812:
Uwe möchte mit einem Taschenrechner feststellen, ob 37 ein Teiler von 45679091 ist. Wenn er dabei den Rechner SR1 verwendet, könnte er folgendermaßen vorgehen: Er dividiert 45679091 durch 37. Der Rechner SR1 zeigt 1234570 an, also ein ganzzahliges Ergebnis. Zur Kontrolle multipliziert Uwe dieses Ergebnis, ohne es neu einzutippen, wieder mit 37. Der Rechner zeigt als Ergebnis wieder 45679091 an. (Du kannst dies mit einem SR1 selbst ausprobieren.)

Kann Uwe nun schließen, dass 37 ein Teiler von 45679091 ist?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Nein, der Schluss ist nicht möglich. Obwohl nämlich der SR1 für $z = 45679091 : 37$ das gerundete Ergebnis 1234570 anzeigte, hatte er dennoch einen genaueren Näherungswert gespeichert. Das kannst du feststellen, indem du nach folgendem Ablaufplan rechnest:

$$\boxed{45679091}\ \boxed{:}\ \boxed{37}\ \boxed{=}\ \text{Anzeige: } 1234570\ \boxed{-}\ \boxed{1234570}\ \boxed{=} \qquad (*)$$

Nun zeigt der Rechner nicht 0, sondern 0.03 als Ergebnis. Er hat also als Divisionsergebnis von $z = 45679091 : 37$ den Wert 1234570,03 gespeichert.

Uwe hatte folgendermaßen gerechnet:

$$\boxed{45679091}\ \boxed{:}\ \boxed{37}\ \boxed{=}\ \text{Anzeige: } 1234570\ \boxed{\cdot}\ \boxed{37}\ \boxed{=} \qquad (**)$$

Das danach angezeigt Ergebnis 45679091 ist somit (näherungsweise) das Produkt aus dem <u>gespeicherten</u> Wert 1234570,03 und 37; es ist nicht - wie Uwe gemeint hat - das Produkt aus dem <u>angezeigten</u> Wert 1234570 und 37. Deshalb ist Uwes Schlussweise falsch.

Weitere Hinweise: Um zu sehen, dass diese falsche Schlussweise hier auch tatsächlich zu einem falschen Ergebnis führt, gibt es mehrere Möglichkeiten:

A. Man kann sofort - ohne nochmalige Rechnerbenutzung - erkennen, dass $45679091 : 37$ nicht genau gleich 1234570 sein kann; denn $1234570 \cdot 37$ ist eine (ganze) Zahl mit der letzten Ziffer 0.

B. Man kann $45679091 : 37$ schriftlich berechnen und daraus entnehmen, dass das Ergebnis keine ganze Zahl ist.

C. Die richtige Antwort auf die Frage, ob 37 ein Teiler von 45679091 ist, kann man erhalten, indem man anstelle der Fortsetzung in (**), die Uwe zur Kontrolle gewählt hat, <u>neu eintippt:</u>

   $$\boxed{1234570}\ \boxed{\cdot}\ \boxed{37}\ \boxed{=}$$

   Danach zeigt der Rechner 45679090 an. (Das ist in der Tat, wie in A bemerkt, eine ganze Zahl mit der letzten Ziffer 0. Da diese Rechnung (***) bei der Rechengenauigkeit des SR1 nicht nur einen Näherungswert, sondern das genaue Produkt liefert, folgt:

   Die Zahl 45679091 ist nicht durch 37 teilbar, sondern lässt bei Division durch 37 den Rest 1.

Aufgabe 270814:
Es soll die Summe der Quadrate zweier beliebiger natürlicher Zahlen gebildet werden. Dann ist eine „Division mit Rest“ durchzuführen, und zwar soll die oben genannte Summe durch 4 dividiert werden. Man will nun untersuchen, welche Zahlen bei einer derartigen Division als Rest auftreten können und welche nicht.

a) Bilde zunächst einige Beispiele, indem du jedesmal selbst zwei natürliche Zahlen wählst, die Summe ihrer Quadrate durch 4 dividierst und den auftretenden Rast notierst! Setze das Bilden solcher Beispiele so oft fort, bis es nur noch eine natürliche Zahl kleiner als 4 gibt, die in deinen Beispielen nicht als Rest auftrat!

b) Nun kann man vermuten, dass diese Zahl niemals als Rest auftritt, wenn die Summe der Quadrate zweier beliebiger natürlicher Zahlen durch 4 dividiert wird.

   Beweise diese Vermutung!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Unter den zu bildenden Beispielen könnten etwa die folgenden auftreten:

$1^2 + 2^2 = 1 + 4 = 5$ lässt bei Division durch 4 den Rest 1
$2^2 + 6^2 = 4 + 36 = 40$ lässt bei Division durch 4 den Rest 0,
$3^2 + 5^2 = 9 + 25 = 34$ lässt bei Division durch 4 den Rest 2.

Unter den natürlichen Zahlen kleiner als 4, d. h. den Zahlen 0,1,2,3 trat in diesen drei Beispielen nur die Zahl 3 nicht als Rest auf.

b) Wenn die Summe der Quadrate zweier beliebiger natürlicher Zahlen a und b durch 4 dividiert wird, so gibt es nur die folgenden drei Möglichkeiten: (vollständige Fallunterscheidung)

1. a und b sind gerade.
   Dann gibt es natürliche Zahlen m, n, mit denen $a = 2m$ und $b = 2n$ gilt, und es folgt:
   $$a^2 + b^2 = (2m)^2 + (2n)^2 = 4m^2 + 4n^2 = 4(m^2 + n^2)$$
   ist durch 4 teilbar, lässt also bei Division durch 4 den Rest 0.
2. a und b sind ungerade.
   Dann gibt es, natürliche Zahlen m, n, mit denen $a = 2m + 1$ und $b = 2n + 1$ gilt, und es folgt:
   $$a^2 + b^2 = (2m + 1)^2 + (2n + 1)^2 = 4m^2 + 4m + 1 + 4n^2 + 4n + 1 = 4(m^2 + n^2 + m + n) + 2$$
   lässt bei Division durch 4 den Rest 2.
3. Von den Zahlen a, b ist eine gerade und eine ungerade.
   Wegen $a^2 + b^2 = b^2 + a^2$ genügt es, den Fall zu betrachten, dass a gerade und b ungerade ist. Mit $a = 2m$ und $b = 2n + 1$ folgt:
   $$a^2 + b^2 = (2m)^2 + (2n + 1)^2 = 4m^2 + 4n^2 + 4n + 1 = 4(m^2 + n^2 + n) + 1$$
   lässt bei Division durch 4 den Rest 1.

Damit ist bewiesen, dass bei der genannten Division niemals der Rest 3 auftritt.

Aufgabe 290814:
Zu jeder sechsstelligen natürlichen Zahl n, deren Einer-Ziffer von Null verschieden ist, kann man diejenige Zahl n' bilden, die man erhält, indem man die Ziffern von n in umgekehrter Reihenfolge schreibt. Anschließend kann man die Zahl $n + n'$ berechnen.

a) Bilde einige Beispiele! Stelle fest, ob es eine Primzahl gibt, durch die in deinen Beispielen die Zahl $n + n'$ teilbar ist! Äußere eine Vermutung!
b) Versuche, deine Vermutung zu beweisen!
c) Jetzt sei k eine beliebige gerade natürliche Zahl größer als Null. Auch zu jeder k-stelligen natürlichen Zahl n, deren Einerziffer von Null verschieden ist, kann man diejenige Zahl bilden, die man erhält, indem man die Ziffern von n in umgekehrter Reihenfolge schreibt.
Gilt für $n + n'$ dann auch eine entsprechende Aussage wie in a), b)?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Aus Beispielen wie etwa

$$110222 + 222071 = 332233 = 11 \cdot 30203$$
$$130333 + 333031 = 463364 = 11 \cdot 42124 = 2^2 \cdot 11 \cdot 10531$$
$$118862 + 268811 = 387673 = 11 \cdot 35243 = 11 \cdot 13 \cdot 2711$$

kann man zu der Vermutung gelangen:
Für jede sechsstellige natürliche Zahl n, deren Einerziffer von Null verschieden ist, ist $n + n'$ durch 11 teilbar.

b) Beweis dieser Vermutung:
Sind a, b, c, d, e, f in dieser Reihenfolge die Ziffern von n, so ist

$$\begin{aligned} n &= 100000a + 10000b + 1000c + 100d + 10e + f \\ n' &= 100000f + 10000e + 1000d + 100c + 10b + a \qquad \text{also} \\ n + n' &= 100001a + 10010b + 1100c + 1100d + 10010e + 100001f \\ &= 11(9091(a + f) + 910(b + e) + 100(c + d)) \end{aligned}$$

durch 11 teilbar.

c) Es sei $k = 2m$ mit einer natürlichen Zahl $m \geq 1$, und es sei n eine beliebige k-stellige natürliche Zahl, deren Einerziffer von Null verschieden ist. Sind $a_0, a_1, ..., a_{2m-1}$ in dieser Reihenfolge die Ziffern von n, so ist

$$\begin{aligned} n &= a_0 \cdot 10^{2m-1} + a_1 \cdot 10^{2m-2} + ... + a_{2m-2} \cdot 10 + a_{2m-1} \\ n' &= a_0 + a_1 \cdot 10 + ... + a_{2m-2} \cdot 10^{2m-2} + a_{2m-1} \cdot 10^{2m-1} \end{aligned}$$

Nach Addition und anschließendem Ausklammern von $a_0, a_1, ..., a_{2m-1}$ steht in $n + n'$

bei a_0 und bei a_{2m-1} der Faktor $10^{2m-1} + 1$,
bei a_1 und bei a_{2m-2} der Faktor $10^{2m-2} + 10 = 10(10^{2m-3} + 1)$, ...
bei a_{m-1} und bei a_m der Faktor $10^m + 10^{m-1} = 10^{m-1}(10 + 1)$.

Nun kann man beweisen, dass die hier auftretenden Zahlen $10 + 1$, $10^3 + 1$, ..., $10^{2m-3} + 1$, $10^{2m-1} + 1$ durch 11 teilbar sind:
Für $10 + 1$ ist das klar die weiteren Zahlen haben 1 als Anfangs- und Endziffer und dazwischen eine gerade Anzahl Ziffern 0. Subtrahiert man 11, so entsteht eine Zahl mit 0 als Endziffer und davor einer geraden Anzahl Ziffern 9.
Jede solche Zahl ist durch 11 teilbar; das ist damit auch für $n + n'$ bewiesen.

Aufgabe 330813:
Sebastian betrachtet eine dreistellige natürliche Zahl und stellt fest:

(1) Setzt man vor diese dreistellige Zahl eine Ziffer 5, so ist die entstandene vierstellige Zahl eine Quadratzahl.

(2) Hängt man aber an die (ursprüngliche dreistellige) Zahl eine Ziffer 1 an, so ist die entstandene vierstellige Zahl ebenfalls eine Quadratzahl.

Weise nach, dass es genau eine dreistellige Zahl gibt, mit der die Bedingungen (1) und (2) erfüllt werden; ermittle diese Zahl!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn die Bedingungen (1),(2) mit einer dreistelligen natürlichen Zahl z erfüllt werden, so folgt:
Da z dreistellig ist, gilt $100 \leq z \leq 999$. Für die nach (1) entstehende Quadratzahl n^2 gilt also $5100 \leq n^2 \leq 5999$.

Daraus sowie aus $71^2 = 5041 < 5100$ und $5999 < 6084 = 78^2$ folgt $71 < n < 78$. Die Quadrate der Zahlen $n = 72, 73, 74, 75, 76, 77$ sind $n^2 = 5184, 5329, 5476, 5625, 5776, 5929$.

Also kann z nur eine der Zahlen $184, 329, 476, 625, 776, 929$ sein; durch Anfügen einer Ziffer 1 entstehen die Zahlen $1841, 3291, 4761, 6251, 7761, 9291$.

Von diesen ist nur 4761 eine Quadratzahl, wie sich z. B. durch

$$\begin{array}{rcl} 42^2 = 1764 < 1841 < 1849 = 43^2 & ; & 57^2 = 3249 < 3291 < 3364 = 58^2 \\ 69^2 = 4761 & ; & 79^2 = 6241 < 6251 < 6400 = 80^2 \\ 88^2 = 7744 < 7761 < 7921 = 89^2 & ; & 96^2 = 9216 < 9291 < 9409 = 97^2 \end{array}$$

bestätigen lässt. Somit kann nur die Zahl $z = 761$ die Bedingungen der Aufgabe erfüllen.

II. Sie erfüllt diese Bedingungen; denn sie ist dreistellig, und 5476 sowie 4761 sind Quadratzahlen. Damit ist der geforderte Nachweis geführt und die gesuchte Zahl ermittelt; sie lautet 476.

II Runde 2

Aufgabe V10823:
In der Zahl $\square 378 \square$ sind an die Stelle der beiden Kästchen Ziffern zu setzen, so dass die entstehende Zahl durch 72 teilbar ist.
Wie hast du die fehlenden Ziffern ermittelt?

Lösung von Steffen Polster:
Wenn eine Zahl durch 72 teilbar sein soll, so muss sie auch durch 8 und durch 9 teilbar sein, denn $8 \cdot 9 = 72$.
Um die fehlenden Ziffern zu ermitteln, wendet man die Teilbarkeitsregeln der 8 und 9 an. Man beginnt mit der Teilbarkeitsregel der 8, dadurch bekommt man die letzte Ziffer der Zahl. $78\square$ muss also durch 8 teilbar sein. $720 : 8 = 90$.
Die Zahl 64 ist die einzige zwischen 60 und 70, die durch 8 teilbar ist. Folglich muss die letzte Ziffer 4 sein.

Um die erste Ziffer zu erhalten, wende ich die Teilbarkeitsregel der 9 an. Die Quersumme der bekannten Ziffern ist $3 + 7 + 8 + 4 = 22$. Die Differenz bis 27, die folgende durch 9 teilbare Zahl, beträgt 5. Dies ist auch die fehlende Ziffer.
Die vollständige Zahl lautet 53784.

Aufgabe 040822:
Bilde aus einer beliebigen dreistelligen Zahl die Zahl mit der umgekehrten Ziffernfolge, und beweise, dass die Differenz beider Zahlen durch 99 teilbar ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Sind die Ziffern der dreistelligen Zahl a_2, a_1, a_0, so gilt:

$$a_0 + 10a_1 + 100a_2 - 100a_0 - 10a_1 - a_2 = 99a_2 - 99a_0 = 99(a_2 - a_0)$$

Da ein Faktor 99 ausgeklammert werden kann, ist die Differenz durch 99 teilbar.

Aufgabe 080822:
Gegeben sei eine dreistellige Zahl, deren Einerziffer nicht 0 ist. Man vertausche ihre 1. Und 3. Ziffer miteinander und denke sich die Differenz zwischen der ursprünglichen und der so entstandenen Zahl gebildet.

Wie kann man, ohne diese Differenz selbst ausrechnen zu müssen, alle diejenigen natürlichen Zahlen finden, die Teiler des Betrages dieser Differenz sind?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Hunderter-, Zehner- bzw. Einerziffer der ursprünglichen Zahl werde mit a, b bzw. c bezeichnet. Dann ist diese Zahl z_1 als $100a+10b+c$ und die zweite Zahl z_2 als $100c+10b+a$ darstellbar. Für die Differenz $d=z_1-z_2$ ergibt sich

$$d = 100a + 10b + c - (100c + 10b + a) = 99(a - c)$$

Genau die folgenden natürlichen Zahlen sind also Teiler von d:
(1) Alle natürlichen Teiler von 99, d.s. 1, 3, 9, 11, 33, 99,
(2) alle natürlichen Teiler von $|a-c|$,
(3) alle Produkte aus je einer unter (1) genannten mit je einer unter (2) genannten Zahl.

Ausführliche Aufzählung:
Für $|a-c|$ kommen (wegen $0 < a \leq 9$; $0 < c \leq 9$; a, c ganzzahlig) nur die Werte $0, ..., 8$ in Frage; man erhält:

$\|a-c\|$	natürliche Teiler von d
0	alle natürlichen Zahlen
1	1,3,9,11,33,99
2	1,2,3,6,9,11,18,22,33,66,99,198
3	1,3,9,11,27,33,99,297
4	1,2,3,4,6,9,11,12,18,22,33,36,44,66,99,132,198,396
5	1,3,5,9,11,15,33,45,55,99,165,495
6	1,2,3,6,9,11,18,22,27,33,54,66,99,198,297,594
7	1,3,7,9,11,21,33,63,77,99,231,693
8	1,2,3,4,6,8,9,11,12,18,22,24,33,36,44,66,72,88,99,132,198,264,396,792

Aufgabe 120823:
Als erste Quersumme einer natürlichen Zahl n sei die in üblicher Weise gebildete Quersumme verstanden. Ist die erste Quersumme von n eine Zahl mit mehr als einer Ziffer, so sei ihre Quersumme als zweite Quersumme von n bezeichnet. Ist die zweite Quersumme von n eine Zahl mit mehr als einer Ziffer, so heiße ihre Quersumme die dritte Quersumme von n.

a) Ermittle den größten Wert, der als dritte Quersumme einer 1972-stelligen Zahl auftreten kann!
b) Gib (durch Beschreibung der Ziffernfolge) die kleinste 1972-stellige natürliche Zahl an, die diese größtmögliche dritte Quersumme hat!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Unter allen 1972stelligen Zahlen hat diejenige die größte erste Quersumme, die aus 1972 Ziffern 9 besteht. Diese größte erste Quersumme beträgt somit $9 \cdot 1972 = 17748$.
Da hiernach die erste Quersumme einer 1972stelligen Zahl nicht größer als 17748 sein kann, erhält man die größte zweite Quersumme als größte aller Quersummen der Zahlen von 10 bis 17748 und folglich als Quersumme der Zahl 9999, d.i. 36.
Da hiernach die zweite Quersumme einer 1972stelligen Zahl nicht größer als 36 sein kann, erhält man die größte dritte Quersumme als größte aller Quersummen der Zahlen von 1 bis 36 und folglich als Quersumme der Zahl 29, d.i. 11.

b) Unter allen Zahlen von 10 bis 36 ist 29 die einzige mit der Quersumme 11. Unter allen Zahlen mit der Quersumme 29 findet man wegen $\frac{29}{9} = 3\frac{2}{9}$ die kleinste, indem man eine Zahl mit den letzten drei Ziffern 9 so bildet, dass die aus den vorangehenden Ziffern bestehende Zahl die kleinste mit der Quersumme 2 ist. Diese Zahl ist offenbar 2999.
Mit entsprechender Begründung findet man wegen $\frac{2999}{9} = 333\frac{2}{9}$ die kleinste 1972stellige Zahl A mit der Quersumme 2999, indem man eine Zahl mit den letzten 333 Ziffern 9 so bildet, dass die aus den vorangehenden $1972 - 333 = 1639$ Ziffern bestehende Zahl die kleinste 1639stellige mit der Quersumme 2 ist. So ergibt sich die Zahl

$$A = 1\underbrace{0...0}_{1637}1\underbrace{9...9}_{1637}$$

die der Reihe nach aus einer Ziffer 1, 1637 Ziffern 0, einer Ziffer 1 und 333 Ziffern 9 besteht.

Ist nun g irgendeine von der kleinsten Zahl 2999 verschiedene, also größere Zahl mit der Quersumme 29 und hat eine 1972stellige Zahl n die Zahl g als Quersumme, so gilt:

Wegen $\frac{g}{9} \geq \frac{3000}{9} = 333\frac{3}{9}$ hat die kleinste 1972stellige Zahl B mit der Quersumme g als ihre letzten 333 Ziffern je eine 9 und unter den davor stehenden 1639 Ziffern mindestens eine Ziffer ≥ 2. Folglich ist $B > A$ und demnach erst recht $n > A$.
Damit ist A als kleinste unter allen 1972stelligen Zahlen nachgewiesen, die irgendeine Zahl mit der Quersumme 29 als Quersumme haben, d. h. aber, die die dritte Quersumme 11 besitzen.

Aufgabe 180823:
Ermittle alle zweistelligen natürlichen Zahlen mit folgender Eigenschaft:

Addiert man 2 zu der gesuchten Zahl, so erhält man das Dreifache derjenigen Zahl, die durch Vertauschen der Ziffern der Ausgangszahl entsteht.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, es gibt eine derartige Zahl. Dann hat sie die Form $10x + y$, wobei x und y natürliche Zahlen mit $x,y \leq 9$ sind. Für diese gilt:

$$10x + y + 2 = 3(10y + x) \qquad \text{somit} \qquad y = \frac{7x + 2}{29}$$

Da y eine natürliche Zahl ist, ist $7x + 2$ ein Vielfaches von 29. Wegen $0 < x \leq 9$ ist $2 < 7x + 2 \leq 65$; deshalb kommen nur die Fälle $7x + 2 = 29$ und $7x + 2 = 58$ in Frage.
$7x + 2 = 29$ ist nicht in natürlichen Zahlen lösbar. Aus $7x + 2 = 58$ folgt $x = 8$; für y erhält man dann 2.

Also kann höchstens die Zahl 82 die Bedingungen der Aufgabe erfüllen. Sie erfüllt sie tatsächlich; denn es gilt $82 + 2 = 84 = 3 \cdot 28$.

Aufgabe 230821:
Ermittle alle diejenigen vierstelligen natürlichen Zahlen z, die folgende Bedingungen erfüllen:

(1) Die aus den ersten beiden Ziffern von z in dieser Reihenfolge gebildete zweistellige Zahl ist eine Quadratzahl.

(2) Die aus der ersten und vierten Ziffer von z in dieser Reihenfolge gebildete Zahl ist ebenfalls eine Quadratzahl.

(3) Die aus der zweiten und dritten Ziffer von z in dieser Reihenfolge gebildete Zahl ist ebenfalls eine Quadratzahl.

Hinweis: Unter der ersten Ziffer verstehen wir diejenige Ziffer von z, die an der Tausenderstelle steht.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Für die ersten beiden Stellen von z kommen wegen (1) nur die Quadratzahlen 16, 25, 36, 49, 64, 81 in Frage. Von diesen entfallen wegen (3) die Zahlen 25 und 49, da es keine zweistelligen Quadratzahlen mit der Anfangsziffer 5 bzw. 9 gibt.
Geht man von den verbliebenen Zahlen 16, 36, 64 bzw. 81 aus, dann können bei z an der dritten Stelle wegen (3) nur die Ziffern 4, 4, 9 bzw. 6 und an der vierten Stelle wegen (2) nur die Ziffern 6, 6, 4 bzw. 1 stehen.
Folglich können nur die vier Zahlen 1646, 3646, 6494 und 8161 alle geforderten Eigenschaften haben.

Sie haben diese Eigenschaften, da (für die ersten beiden Ziffern sowie ebenfalls für die erste und vierte Ziffer) 16, 36, 64, 31 und (für die zweite und dritte Ziffer) 64, 64, 49 und 16 sämtliche Quadratzahlen sind.

Aufgabe 250822:
Beweise folgenden Satz:

Das Produkt zweier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen, die beide nicht durch 3 teilbar sind, lässt bei Division durch 9 stets den Rest 2!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Jede nicht durch 3 teilbare natürliche Zahl ist von einer der Formen $3k+1$, $3k+2$ mit $k \in \mathbb{N}$. Hat eine solche Zahl die Eigenschaft, dass auch ihr Nachfolger nicht durch 3 teilbar ist, so muss sie von der Form $3k+1$ sein, da $3k+2$ die durch 3 teilbare Zahl $3k+3$ als Nachfolger hat. Der Nachfolger einer Zahl $3k+1$ ist $3k+2$, und das Produkt beider Zahlen ist

$$(3k+1)\cdot(3k+2) = 9k^2 + 3k + 6k + 2 = 9(k^2+k) + 2$$

Da k eine natürliche Zahl ist, ist auch k^2+k eine natürliche Zahl und $9\cdot(k^2+k)$ das Neunfache einer natürlichen Zahl, also durch 9 teilbar. $9\cdot(k^2+k)+2$ lässt mithin bei der Division durch 9 den Rest 2, w. z. b. w.

Aufgabe 260824:

a) Ermittle alle diejenigen zweistelligen natürlichen Zahlen z, die folgende Bedingung erfüllen:

Setzt man vor die beiden Ziffern von z eine dritte Ziffer, so entsteht eine dreistellige Zahl, die 29 mal so groß ist wie z.

b) Gib an, wie man weitere natürliche Zahlen z' bilden kann, die folgende Bedingung erfüllen:

Setzt man vor die sämtlichen Ziffern von z' eine weitere Ziffer, so entsteht eine neue Zahl, die 29 mal so groß ist wie z'.

c) Ermittle alle diejenigen natürlichen, nicht durch 10 teilbaren Zahlen z'', die folgende Bedingung erfüllen:

Setzt man vor die sämtlichen Ziffern von z' eine weitere Ziffer oder mehrere weitere Ziffern, so entsteht eine neue Zahl, die 29 mal so groß ist wie z''.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

a) Wenn z zusammen mit einer davorzusetzenden Ziffer a die Bedingungen der Aufgabenstellung erfüllt, so gilt $100a + z = 29z$, also $z = \frac{25a}{7}$ (1),

ferner ist z eine natürliche Zahl, also $25a$ durch 7 teilbar. Da 25 zu 7 teilerfremd ist, muss a durch 7 teilbar sein. Außerdem gilt $a \neq 0$ (denn aus $a = 0$ ergäbe sich $z = 0$ im Widerspruch zur Zweistelligkeit von z). Die einzige von 0 verschiedene durch 7 teilbare Ziffer ist aber $a = 7$.

Damit folgt aus (1), dass nur $z = 25$ den Bedingungen der Aufgabenstellung genügen kann, und zwar zusammen mit der davorzusetzenden Ziffer $a = 7$.

In der Tat werden damit diese Bedingungen erfüllt; denn es gilt $725 = 29 \cdot 25$

b) Man kann Zahlen z' mit der geforderten Eigenschaft z. B. dadurch bilden, dass man an die eben gefundene Zahl 25 eine beliebige Anzahl Nullen anhängt; denn es gilt $72500...0 = 29 \cdot 2500...0$.

c) Wenn z'' zusammen mit einer davorzusetzenden Ziffernfolge, die für sich genommen die natürliche Zahl b darstellt, die Bedingungen der Aufgabenstellung erfüllt und wenn z'' eine n-stellige natürliche Zahl ist, so gilt

$$10^n + b + z'' = 29z'' \qquad \Rightarrow \qquad z'' = \frac{10^n \cdot b}{28} \tag{2}$$

Ferner ist z'' eine natürliche Zahl, also $10^n \cdot b$ durch (28 und folglich durch) 7 teilbar. Da 10^n zu 7 teilerfremd ist, muss b durch 7 teilbar sein. Ferner ist $b \neq 0$; denn aus $b = 0$ ergäbe sich $z'' = 0$ im Widerspruch zu der in der Aufgabenstellung enthaltenen Bedingung, dass z'' nicht durch 10 teilbar sein soll.

Daraus, dass z'' eine n-stellige Zahl ist, folgt $z'' < 10^n$; hieraus und aus (2) ergibt sich $\frac{b}{28} < 1$, also $b < 28$.

Somit muss b eine der Zahlen 7, 14, 21 sein. In diesen drei Fällen ergibt sich

$$z'' = \frac{10^n}{4} = 10^{n-1} \cdot 25 \quad \text{bzw.} \quad z'' = \frac{10^n}{2} = 10^{n-1} \cdot 5 \quad \text{bzw.} z'' = \frac{10^n \cdot 3}{4} = 10^{n-2} \cdot 75$$

Das ist jeweils nur dann eine nicht durch 10 teilbare natürliche Zahl, wenn $n = 2$ bzw. $n = 1$ bzw. $n = 2$ gilt. Dies führt jeweils auf $z'' = 25$ bzw. $z'' = 5$ bzw. $z'' = 75$

Also können nur diese Zahlen den Bedingungen der Aufgabenstellung genügen, und zwar nur zusammen mit der davorzusetzenden Ziffernfolge $b = 7$ bzw. $b = 14$ bzw. $b = 21$.

In der Tat werden damit die Bedingungen erfüllt, denn die genannten Zahlen z'' sind nicht durch 10 teilbar, und es gilt
$725 = 29 \cdot 25$ bzw. $145 = 29 \cdot 5$ bzw. $2175 = 29 \cdot 75$.

Aufgabe 320821:
Herr Schulz, der in diesem Jahrhundert geboren wurde, stellt fest, dass er an seinem Geburtstag im Jahr 1992 ein Lebensalter erreicht, das (in Jahren gerechnet) gleich dem Vierfachen der Quersumme der Jahreszahl seines Geburtsjahres ist.

Untersuche, ob es genau ein Jahr gibt, mit dem als Geburtsjahr die Feststellung von Herrn Schulz zutrifft! Ist das der Fall, so nenne diese Jahreszahl!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Ist a die Einer- und b die Zehnerziffer der Jahreszahl eines Jahres aus diesem Jahrhundert, so sind a und b natürliche Zahlen mit $0 \leq a \leq 9$ und $0 \leq b \leq 9$, die Jahreszahl lautet $1900 + 10b + a$, ihre Quersumme beträgt $1 + 9 + b + a$.

Ist ein solches Jahr das Geburtsjahr von Herrn Schulz, so erreicht er im Jahr 1992 ein Lebensalter von $1992 - (1900 + 10b + a)$ Jahren.
Wenn die Feststellung von Herrn Schulz zutrifft, gilt daher

$$1992 - (1900 + 10b + a) = 4 \cdot (1 + 9 + b + a)$$

Hieraus folgt $92 - 10b - a = 40 + 4b + 4a$ und $52 - 14b = 5a$.

Wäre $b \geq 4$, so folgte $5a \leq 52 - 14 \cdot 4 < 0$ im Widerspruch zu $a \geq 0$. Wäre $b = 0$ oder $b = 1$ oder $b = 2$, so folgte $5a = 52$ bzw. $5a = 38$ bzw. $5a = 24$, was durch natürliche Zahlen a nicht erfüllbar ist.
Also kann nur $b = 3$ sein, wonach $5a = 10$, also $a = 2$ folgt.

Daher kann die Feststellung nur mit 1932 als Geburtsjahr zutreffen.

Sie trifft hiermit in der Tat zu; denn die Quersumme von 1932 ist $1 + 9 + 3 + 2 = 15$, und das im Jahr 1992 erreichte Lebensalter beträgt $1992 - 1932 = 60 = 4 \cdot 15$. Also gibt es genau ein Jahr, mit dem die Feststellung zutrifft; es ist das Jahr 1932.

Aufgabe 340821:
Eine vierstellige natürliche Zahl heiße genau dann „symmetrisch", wenn ihre Tausenderziffer gleich ihrer Einerziffer und ihre Hunderterziffer gleich ihrer Zehnerziffer ist. Tanja behauptet, dass jede vierstellige symmetrische Zahl durch 11 teilbar ist.

a) Überprüfe diese Teilbarkeit an drei selbstgewählten Beispielen!

b) Beweise allgemein Tanjas Behauptung!

c) Wie viele vierstellige symmetrische Zahlen gibt es insgesamt?

d) Wie viele geradzahlige vierstellige symmetrische Zahlen gibt es insgesamt?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(a) Man bestätigt zum Beispiel $3443 : 11 = 313$, $5555 : 11 = 505$, $9009 : 11 = 819$.

(b) Jede vierstellige symmetrische Zahl z ist mit zwei natürlichen Zahlen a, b von der Form

$$1000a + 100b + 10b + a = 11 \cdot (91a + 10b) \tag{1}$$

also, da $91a + 10b$ eine natürliche Zahl ist, durch 11 teilbar.

(c) In (1) gibt es für die Ziffer a die 9 Möglichkeiten 1, 2, ..., 9 und, unabhängig hiervon, für die Ziffer b die 10 Möglichkeiten 0, 1, 2, ..., 9 . Also gibt es insgesamt $9 \cdot 10 = 90$ vierstellige symmetrische Zahlen.

(d) Da z genau dann gerade ist, wenn die Einerziffer a gerade ist, gibt es nun für a die 4 Möglichkeiten 2, 4, 6, 8. Für b hat man dieselben Möglichkeiten wie in (c). Also gibt es insgesamt $4 \cdot 10 = 40$ geradzahlige vierstellige symmetrische Zahlen.

III Runde 3

Aufgabe 010833:
Zu beweisen ist folgender Satz:

Die Summe zweier beliebiger aufeinanderfolgender gerader Zahlen ist nicht durch 4 teilbar!

Welcher Rest bleibt bei Division durch 4 ?

Lösung von Carsten Balleier:
Eine gerade Zahl kann stets als $2n$ (mit $n \in \mathbb{N}$) geschrieben werden, die darauf folgende gerade Zahl ist dann $2n + 2$. Damit ist $2n + (2n + 2) = 4n + 2$, also ist die Summe nicht durch vier teilbar, sondern lässt den Rest 2. □

Aufgabe 040831:
Vertauscht man die Ziffern einer zweistelligen Zahl n, so entsteht eine Zahl, die $\frac{8}{3}$ mal so groß wie n ist. Die Zahl n ist zu bestimmen.

Lösung von Manuela Kugel:
Es gilt

$$\frac{8}{3}(10x+y) = 10y + x \qquad ; \qquad 7x = 2y$$

Da x und y natürliche Zahlen kleiner als 10 sind, folgt $x = 2$ und $y = 7$. Die gesuchte Zahl ist demnach 27.

Aufgabe 050833:
Gib alle Quadrupel (z_1, z_2, z_3, z_4) zweistelliger Zahlen z_1, z_2, z_3, z_4 an, die folgende Eigenschaften haben. Für jedes Quadrupel gilt:

(1) $z_1 \cdot z_2 = z_3 \cdot z_4$,

(2) z_3 erhält man, wenn man z_1 rückwärts liest,

(3) z_4 erhält man, wenn man z_2 rückwärts liest, (Beispiel $24 \cdot 63 = 42 \cdot 36$)

(4) Unter den vier Ziffern von z_1 und z_2 gibt es keine zwei, die gleich sind,

(5) z_1 ist die kleinste der vier Zahlen.

Lösung von Eckart Keller:
Bezeichnet man die Ziffern von z_1 mit a und b, die von z_2 mit c und d (in dieser Reihenfolge), dann gilt laut Aufgabe $(10a+b)(10c+d) = (a+10b)(c+10d)$, also $99ac = 99bd$, woraus sich $ac = bd$ ergibt.

Wegen $1 \leq a, b, e, d \leq 9$ (ganz) und wegen (4) sowie wegen (5) erhält man die folgenden 10 Zahlenquadrupel, für die (1) gilt:

$$\begin{array}{llllllll}
(12, & 63, & 21, & 36) & (14, & 82, & 41, & 28)\\
(12, & 84, & 21, & 48) & (23, & 64, & 32, & 46)\\
(24, & 63, & 42, & 36) & (23, & 96, & 32, & 69)\\
(13, & 62, & 31, & 26) & (34, & 86, & 43, & 68)\\
(26, & 93, & 62, & 39) & (36, & 84, & 63, & 48).
\end{array}$$

Umgekehrt erkennt man, dass jedes dieser Quadrupel den gestellten Bedingungen genügt.

Aufgabe 060836:
Man denke sich das Produkt aller derjenigen ungeraden Zahlen gebildet, die größer als 30 und kleiner als 50 sind. Beantworte, ohne es vollständig zu berechnen, folgende Fragen:

a) Welche Ziffer steht an der Einerstelle des Produkts?

b) Ist das Produkt eine 18stellige Zahl?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

a) Multipliziert man eine Zahl, die auf 5 endet, mit einer beliebigen ungeraden Zahl, so erhält man wieder eine Zahl mit der Einerziffer 5. Das zu untersuchende Produkt enthält den Faktor 45, der auf 5 endet, und sonst nur ungerade Faktoren. Seine Einerziffer ist daher eine 5.

b) Man kann das Produkt in die Teilprodukte $31 \cdot 49$, $33 \cdot 47$, $35 \cdot 45$, $37 \cdot 43$ und $39 \cdot 41$ zerlegt denken. Jedes dieser Teilprodukte ist von der Form $(a-b)(a+b)$ mit $a = 40$ und $1 \leq b \leq 9$ und daher eine positive Zahl, die sicher kleiner als 2000 ist. Das gesamte Produkt ist also kleiner als 2000^5.

Nun ist aber

$$\begin{aligned}2000^5 &= 2000 \cdot 2000 \cdot 2000 \cdot 2000 \cdot 2000\\ &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1000 \cdot 1000 \cdot 1000 \cdot 1000 \cdot 1000\\ &= 32 \cdot 1000000000000000\end{aligned}$$

eine 17stellige Zahl. Daher kann das zu untersuchende Produkt keine 18stellige Zahl sein.

Aufgabe 070832:
Unter einer Quersumme einer natürlichen Zahl versteht man die Summe ihrer Ziffern: z. B. hat 1967 die Quersumme $1 + 9 + 6 + 7 = 23$.

Man ermittle die Summe aller Quersummen der natürlichen Zahlen von 1 bis einschließlich 1000!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wir nehmen 0 (mit der Quersumme 0) unter die zu berücksichtigenden Zahlen auf, schließen 1000 vorläufig aus und fassen jeweils die beiden Zahlen a und $999 - a$ $(0 \leq a \leq 499)$ zu einem Paar zusammen. Es sei

$$a = \alpha \cdot 10^3 + \beta \cdot 10 + \gamma \tag{*}$$

mit ganzen Zahlen α, β, γ, für die $0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq 9$ gilt.
Dann ist die Quersumme von a gleich $\alpha + \beta + \gamma$. Ferner ist

$$999 - a = 9 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10 + 9 - \alpha \cdot 10^2 - \beta \cdot 10 - \gamma = (9 - \alpha) \cdot 10^2 + (9 - \beta) \cdot 10 + (9 - \gamma)$$

und wegen (*) gilt auch $0 \leq 9 - \alpha, 9 - \beta, 9 - \gamma \leq 9$ und $9 - \alpha, 9 - \beta, 9 - \gamma$ sind ganz.
Daher ist die Quersumme dieser Zahl $(9 - \alpha) + (9 - \beta) + (9 - \gamma)$ und die Summe beider Quersummen dann

$$(9 - \alpha) + (9 - \beta) + (9 - \gamma) + \alpha + \beta + \gamma = 27$$

Es gibt genau 500 solcher Paare, also ist die Summe der Quersummen der hiermit erfassten Zahlen $500 \cdot 27 = 13500$. Dazu ist noch die Quersumme 1 von 1000 zu addieren.
Die gesuchte Summe beträgt mithin 13501. **Alternativ-Lösung von cyrix:**
In der Summe aller Quersummen wird jede Ziffer aller zu betrachtenden natürlichen Zahlen von 1 bis 1000 aufsummiert.
Inklusive ggf. führender Nullen taucht jede der Ziffern 0 bis 9 in den natürlichen Zahlen von 1 bis 999 jeweils genau 100 mal an einer Einer-, Zehner- bzw. Hunderter-Stelle auf, insgesamt also 300 mal. Damit ergibt sich eine Summe der Quersummen der nat. Zahlen von 1 bis 999 von $300 \cdot (0 + 1 + \dots + 9) = 300 \cdot 45 = 13500$. Hinzu kommt noch die Quersumme 1 der Zahl 1000, sodass die gesuchte Summe den Wert 13501 besitzt.

Aufgabe 070836:
Gesucht ist eine zweistellige natürliche Zahl mit folgenden Eigenschaften:

1) Die Differenz ihrer Ziffern beträgt drei.

2) Vertauscht man ihre Ziffern, so ist die neue Zahl um neun kleiner als das Doppelte der ursprünglichen Zahl.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(I) Da die Zahl zweistellig sein soll, muss sie größer als 9 sein. Daraus folgt, dass ihr um 9 vermindertes Doppeltes größer sein muss als sie selbst.
Wegen der 2. Bedingung besagt dies, dass bei Umstellung der Ziffern aus der Zahl eine größere Zahl entstehen soll. Daher muss ihre erste Ziffer kleiner sein als ihre zweite.

(II) Ferner soll das um 9 verminderte Doppelte wieder zweistellig, also höchstens 99 sein.
Daraus ergibt sich, dass die Zahl höchstens 54 betragen kann. Wegen der 1. Bedingung verbleiben hiernach noch genau die folgenden Möglichkeiten: 14, 25, 36 und 47.
Von diesen erfüllt nur die Zahl 36 alle Bedingungen der Aufgabe.

Aufgabe 080833:
Es ist zu beweisen: Lässt die Quersumme einer natürlichen Zahl bei der Division durch 9 den Rest r, so lässt auch die Zahl selbst bei der Division durch 9 den Rest r.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Zahlen 1, 10, 100, 1000, ... lassen bei Division durch 9 jeweils den Rest 1, weil der Vorgänger jeder dieser natürlichen Zahlen durch 9 teilbar ist; die Zahlen 2, 20, 200, 2000, ..., die sich als 1 + 1, 10 + 10, 100 + 100, ... schreiben lassen, ergeben jeweils den Rest 2; die Zahlen 3, 30, 300, ... den Rest 3 usw., die Zahlen 8, 80, 800, ... den Rest 8, und 9, 90, 900, ... schließlich den Rest 0.

Nun lässt sich jede natürliche Zahl z in der Form

$$z = a_0 \cdot 10^0 + a_1 \cdot 10^1 + a_2 \cdot 10^2 + \cdots + a_n \cdot 10^n$$

schreiben (mit ganzen Zahlen a_i, für die $0 \leq a_i \leq 9$ gilt). Die Quersumme dieser Zahl lautet dann

$$Q(z) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

Bei Division durch 9 lässt nach dem Obigen $a_0 \cdot 10^0$ den gleichen Rest wie a_0, $a_1 \cdot 10^1$ den gleichen Rest wie a_1, ..., $a_n \cdot 10^n$ den gleichen Rest wir a_n.

Die Summe z der $a_i \cdot 10^i$ lässt daher bei Division durch 9 den gleichen Rest wie die Summe $Q(z)$ der a_i.
Alternativ-Lösung von cyrix:
Mit der Verwendung von Zahlenkongruenzen lässt sich dies kurz notieren:
Sei die natürliche Zahl z von der Form

$$z = a_0 \cdot 10^0 + a_1 \cdot 10^1 + a_2 \cdot 10^2 + \cdots + a_n \cdot 10^n,$$

dann ist ihre Quersumme $Q(z)$ gleich

$$Q(z) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

und es gilt

$$\begin{aligned} z &\equiv a_0 \cdot 1^0 + a_1 \cdot 1^1 + a_2 \cdot 1^2 + \cdots + a_n \cdot 1^n \\ &\equiv a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \\ &\equiv Q(z) \pmod 9, \end{aligned}$$

da $10 \equiv 1 \pmod 9$ ist. Insbesondere lassen also jeweils eine natürliche Zahl z und ihre Quersumme $Q(z)$ den gleichen Rest bei Division durch 9, $\square$.

Aufgabe 080835:
Fritz soll eine dreistellige natürliche Zahl z mit sich selbst multiplizieren. Er schreibt versehentlich als ersten Faktor eine um 5 kleinere Zahl hin. Darauf aufmerksam gemacht, sagt er: „Ich nehme als zweiten Faktor einfach eine um 5 größere Zahl, dann wird das Ergebnis richtig.“

a) Ist diese Behauptung wahr?

b) Gesetzt, sie sei falsch, zwischen welchen Grenzen bewegt sich der absolute Fehler, wenn z alle dreistelligen Zahlen durchläuft?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Fritz sollte rechnen: $z \cdot z = z^2$. Er rechnete: $(z-5)(z+5) = z^2 - 25$. Sein Weg ist also falsch.

b) Der absolute Fehler beträgt in jedem Falle: -25.
Er ist also nicht je nach der Zahl z verschieden, sondern konstant.

Aufgabe 090833:
Beweise die Richtigkeit der folgenden Teilbarkeitsregel:
Eine drei- oder mehrstellige natürliche Zahl ist stets dann durch 8 teilbar, wenn die aus der Hunderterziffer und der Zehnerziffer gebildete Zahl, vermehrt um die Hälfte der Anzahl der Einer, eine durch 4 teilbare ganze Zahl ist.
Beispiel: 37528 ist zu untersuchen. $52 + 4 = 56$ ist durch 4 teilbar, also ist 37528 durch 8 teilbar.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Sind a, b, c die Einer-, Zehner- bzw. Hunderterziffer einer natürlichen Zahl n, so lässt sich diese in der Form

$$n = 1000d + 100c + 10b + a$$

mit einer ganzen Zahl d darstellen. Vermehrt man dann die aus der Hunderterziffer und der Zehnerziffer gebildete Zahl um die Hälfte der Anzahl der Einer, so ergibt sich die Zahl

$$m = 10c + b + \frac{1}{2}a$$

Ist nun voraussetzungsgemäß m durch 4 teilbar, so ist $10c + b + \frac{1}{2}a = 4k$ mit einer ganzen Zahl k. Daraus folgt $20c + 2b + a = 8k$, also ist dann

$$n = 8k + 1000d + 80c + 8b = 8(k + 125d + 10c + b)$$

durch 8 teilbar, w. z. b. w.

Aufgabe 200832:
Ermittle alle dreistelligen natürlichen Zahlen n mit der Eigenschaft, dass das Produkt aus den einzelnen Ziffern von n gleich dem Fünffachen der Quersumme von n ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn eine dreistellige natürliche Zahl n die geforderte Eigenschaft hat, so gilt für ihre drei Ziffern, in irgendeiner Reihenfolge mit a, b, c bezeichnet,

$$abc = 5(a + b + c) \tag{1}$$

Wäre eine der Ziffern a, b, c gleich 0, so folgte $abc = 0$, nach (1) also $a + b + c = 0$, und hieraus wegen $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ weiter $a = b = c = 0$, im Widerspruch dazu, dass n dreistellig ist. Also gilt

$$1 \leq a \leq 9, \qquad 1 \leq b \leq 9, \qquad 1 \leq c \leq 9 \tag{2}$$

Nach (1) ist die Primzahl 5 ein Teiler von abc, also von (mindestens) einer der Ziffern a, b, c. Wegen (2) ist diese Ziffer gleich 5; wegen der beliebigen Wahl der Reihenfolge kann etwa $c = 5$ angenommen werden. Hiernach folgt aus (1)

$$ab = a + b + 5 \tag{3}$$

Aus (3) folgt

$$ab - a - b + 1 = 6 \qquad \Rightarrow \qquad (a-1)(b-1) = 6 \tag{4}$$

Nach (2) sind auch $a - 1$ und $b - 1$ natürliche Zahlen; wegen der beliebigen Wahl der Reihenfolge kann etwa $a \leq b$ angenommen werden, wonach es für (4) nur die beiden Möglichkeiten gibt, dass entweder
$a - 1 = 1$, $b - 1 = 6$, also $a = 2$, $b = 7$ (5) oder
$a - 1 = 2$, $b - 1 = 3$, also $a = 3$, $b = 4$ (6)

gilt. Berücksichtigt man nun noch alle Möglichkeiten der Reihenfolge von a, b, c, so ergibt sich, dass nur die Zahlen

$$257, 275, 527, 572, 725, 752, 345, 354, 435, 453, 534, 543$$

die geforderten Eigenschaften haben können. Sie haben diese, wie die Probe zeigt.

Aufgabe 210836:
Ermittle alle sechsstelligen natürlichen Zahlen z mit folgender Eigenschaft:

Setzt man die erste Ziffer von z an die letzte Stelle, während die Ziffernfolge der übrigen fünf Ziffern unverändert bleibt, so ist die entstehende Zahl z' dreimal so groß wie die ursprüngliche Zahl z.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn eine sechsstellige natürliche Zahl z die geforderte Eigenschaft hat, so folgt: Ist x die erste Ziffer von z, so ist $z = 100000x + y$ mit einer natürlichen Zahl y, für die $y < 100000$ gilt, sowie $z' = 10y + x$, und es gilt

$$(100000x + y) \cdot 3 = 10y + x, \qquad \text{also} \qquad 42857x = y$$

Wäre $x \geq 3$, so wäre $y \geq 42857 \cdot 3$ im Widerspruch zu $y < 100000$.
Daher (und weil x als erste Ziffer einer mehrstelligen Zahl größer als 0 ist) kann nur entweder $x = 1, y = 42857$ oder $x = 2, y = 42857 \cdot 2 = 85714$ sein.

Also können höchstens die Zahlen $z = 142857$ und $z = 285714$ die geforderte Eigenschaft haben.
Sie haben diese Eigenschaft; denn es gilt $3 \cdot 142857 = 428571$ und $3 \cdot 285714 = 857142$.
Daher haben genau diese beiden sechsstelligen natürlichen Zahlen die geforderte Eigenschaft.

Aufgabe 240831:
Ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen, deren sechste Potenz in ihrer dekadischen Zifferndarstellung genau je einmal die Ziffern 2, 4, 5, genau je zweimal die Ziffern 8, 9 und keine weitere Ziffer enthält!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn eine natürliche Zahl a die geforderten Eigenschaften hat, so folgt:
a^6 ist siebenstellig, also gilt $1000000 \leq a^6 \leq 9999999$.
Wegen $15^6 = (225 \cdot 15)^{>}3300^2 > 9999999$ folgt hieraus $10 \leq a \leq 14$.
Da 10^6 auf die Ziffer 0 endet, 11^6 auf die Ziffer 1 sowie 14^2 und daher auch $14^6 = (14^2)^3$ auf die Ziffer 6, kann a nur eine der Zahlen $12, 13$ sein.
Da $13^3 = 169 \cdot 13$ auf die Ziffernfolge ...97 und somit $13^6 = (13^3)^2$ auf die Ziffernfolge ...09 endet, verbleibt nur die Möglichkeit $a = 12$.

II. In der Tat ist $12^6 = 2985984$, woraus ersichtlich ist, dass die Zahl 12 alle geforderten Eigenschaften hat.

Aufgabe 250831:
Beweise folgenden Satz:

Es gibt keine Quadratzahl, die bei der Division durch 3 den Rest 2 lässt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Ist n eine natürliche Zahl, so gilt entweder $n = 3k$ oder $n = 3k+1$ oder $n = 3k+2$, wobei k eine natürliche Zahl ist.

Ist nun $n = 3k$, so ist $n^2 = 9k^2$ durch 3 teilbar.
Ist, jedoch $n = 3k+1$, so lässt $n^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1$ bei Division durch 3 den Rest 1.
Ist schließlich $n = 3k+2$, so lässt $n^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1$ bei Division durch 3 ebenfalls den Rest 1.

In den betrachteten Fällen sind die Quadrate aller natürlichen Zahlen erfasst. Der Rest 2 tritt also bei Division von Quadratzahlen durch 3 nicht auf, w. z. b. w.

Aufgabe 290835:
Aus einer sechsstelligen natürlichen Zahl n soll eine weitere Zahl errechnet werden, indem eine Addition, Subtraktion, Multiplikation oder Division mit einer höchstens dreistelligen natürlichen Zahl durchgeführt wird, wobei nur die Multiplikation mit 0 und die Division durch 0 nicht zugelassen sind. Auf das Ergebnis soll wieder eine der genannten Rechenoperationen angewandt werden, auf das neue Ergebnis ebenfalls usw. Erst wenn ein Ergebnis den Wert 0 hat, soll das Bilden weiterer Zahlen nicht mehr fortgesetzt werden.

a) Gibt es sechsstellige Zahlen n, von denen ausgehend das Ergebnis 0 bereits mit zweimaligem Ausführen derartiger Rechenoperationen erreichbar ist?

b) Beweise, dass von jeder sechsstelligen Zahl n aus, die nicht größer als 999000 ist, das Ergebnis 0 mit höchstens dreimaligem Ausführen derartiger Rechenoperationen erreichbar ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Es gibt solche Zahlen. Um dies zu beweisen, genügt es, für ein Beispiel einer sechsstelligen Zahl n die Erreichbarkeit von 0 mit zwei der Rechenoperationen nachzuweisen.

Ein solches Beispiel ist etwa $n = 100000$ wegen $100000 : 500 = 200$, $200 - 200 = 0$.

b) Nach Voraussetzung sei n eine natürliche Zahl mit $100000 \leq n \leq 999000$. (1)
Für die ganze Zahl g mit $g < \frac{n}{999} \leq g + 1$ gilt

$$999 \cdot g < n \leq 999 \cdot g + 999 \qquad (2)$$

Hieraus und aus (1) folgt $999 \cdot g + 999 \geq n \geq 100000 > 999$ und $999 \cdot g < n \leq 999000$, also $g > 0$ und $g < 1000$, also ist g eine höchstens dreistellige natürliche Zahl.

Aus (2) folgt ferner

$$0 < n - 999 \cdot g \leq 999$$

also ist auch $n - 999 \cdot g$ eine höchstens dreistellige natürliche Zahl. Mit diesen Zahlen führen daher die drei Rechenoperationen

$$n - (n - 999 \cdot g) = 999 \cdot g \quad ; \quad 999 \cdot g : 999 = g \quad ; \quad g - g = 0$$

in der behaupteten Weise zum Ergebnis 0.

Aufgabe 320831:
Sind a, b, c die Hunderter-, Zehner- bzw. Einerziffern einer dreistelligen natürlichen Zahl, so sei diese Zahl kurz durch $\overline{abc}$ bezeichnet. Ebenso sei jeweils eine zweistellige Zahl mit Zehner- bzw. Einerziffer b und c durch $\overline{bc}$ bezeichnet.

Ermittle alle diejenigen a, b, c, für die $\overline{abc}$ eine dreistellige und $\overline{bc}$ eine zweistellige Zahl ist, so dass die Gleichung $\overline{abc} = \left(\overline{bc}\right)^b$ gilt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn a,b,c Ziffern der geforderten Art sind, so folgt:
Es kann nicht $b = 0$ sein, da hierfür $\overline{bc}$ nicht zweistellig wäre. Es kann nicht $b = 1$ sein, da hierfür $\left(\overline{bc}\right)^b = \overline{bc}$ wäre, also nicht gleich der dreistelligen Zahl $\overline{abc}$ sein könnte.

Es kann nicht $b \geq 3$ sein, da hierfür $\left(\overline{bc}\right)^b \geq 30^3$ mindestens fünfstellig wäre, also nicht gleich der dreistelligen Zahl $\overline{abc}$ sein könnte. Also muss $b = 2$ sein und somit $\overline{abc} = \left(\overline{bc}\right)^2$ gelten.

Daher muss c die Einerziffer der Zahl c^2 sein. Wegen $2^2 = 4$, $3^2 = 9$, $4^2 = 16$, $7^2 = 49$, $8^2 = 64$, $9^2 = 81$ kann dies für $c = 2; 3; 4; 7; 8; 9$ nicht zutreffen, trifft also höchstens für $c = 0; 1; 5; 6$ zu.

Weiter ist an den Zehnerziffern von $20^2 = 400, 21^2 = 441, 26^2 = 676$ ersichtlich:
Die Zahl $\left(\overline{bc}\right)^2$ mit $b = 2$ hat für $c = 0; 1; 6$ nicht die durch $\overline{abc} = \left(\overline{bc}\right)^2$ geforderte Zehnerziffer 2; sie kann dies (unter den Möglichkeiten $c = 0; 1; 5; 6$) also nur für $c = 5$ haben.
Hiermit führt schließlich $25^2 = 625$ auf $a = 6$.

II. Von $a = 6$, $b = 2$, $c = 5$ wird wegen $625 = 25^2$ die geforderte Gleichung $\overline{abc} = \left(\overline{bc}\right)^b$ erfüllt.
Mit I. und II. ist gezeigt: Es sind genau $a = 6, b = 2, c = 5$ Ziffern der geforderten Art.

Aufgabe 330835:
Eine sechsstellige natürliche Zahl heiße genau dann eine „Spiegelzahl“, wenn ihre erste Ziffer gleich ihrer sechsten Ziffer, ihre zweite Ziffer gleich ihrer fünften Ziffer und ihre dritte Ziffer gleich ihrer vierten Ziffer ist.

a) Ermittle alle diejenigen „Spiegelzahlen“, die zwei Ziffern 2, zwei Ziffern 5 und zwei Ziffern 7 enthalten! Ermittle die Summe s aller dieser „Spiegelzahlen“! Welches ist der größte echte Teiler von s?

b) Beweise, dass für je drei Ziffern a, b, c von denen keine zwei einander gleich sind, folgende Aussage gilt!

Die Summe aller derjenigen „Spiegelzahlen“, die zwei Ziffern a, zwei Ziffern b und zwei Ziffern c enthalten, ist durch 111111 teilbar.

Hinweis: Als echter Teiler von s bezeichnet man alle diejenigen Teiler von s, die (positiv und) kleiner als s sind.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Für die Anordnung der drei Ziffern 2, 5, 7 gibt es genau sechs Möglichkeiten; dementsprechend sind alle „Spiegelzahlen“ der genannten Art die Zahlen 257752, 275572, 527725, 572275, 725527 und 752257. Als ihre Summe ergibt sich $s = 3111108$.

Die kleinste natürliche Zahl, die größer als 1 und Teiler von s ist, ist 2. Daher ist die Zahl $\frac{s}{2} = 1555554$ Teiler von s, kleiner als s und zugleich die größte Zahl mit diesen beiden Eigenschaften, also der größte echte Teiler von s.

b) Entsprechend gilt für je drei Ziffern a, b, c, von denen keine zwei einander gleich sind:
Um mit dem üblichen Additionsverfahren die Summe der im Aufgabentext genannten „Spiegelzahlen“ zu bilden, hat man beim Addieren an allen sechs Stellen (Einer-, Zehner-, ..., Hunderttausenderstelle) die Zahl $z = 2 \cdot a + 2 \cdot b + 2 \cdot c$ zu bilden. Daher beträgt diese Summe

$$z + 10 \cdot z + 10^2 \cdot z + 10^3 \cdot z + 10^4 \cdot z + 10^5 \cdot z = 111111 \cdot z$$

und ist folglich durch 111111 teilbar.

IV.III Diophantische Gleichung

I Runde 1

Aufgabe 140812:
Ermittle alle geordneten Paare $(x,\, y)$ natürlicher Zahlen $x,\, y$, für die die Gleichung $13x + 5y = 82$ gilt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(I) Angenommen, $(x; y)$ sei eines der gesuchten Paare. Dann gilt

$$y = \frac{82 - 13x}{5} \qquad \text{also} \qquad 2y = \frac{164 - 26x}{5} = 32 - 5x + \frac{4 - x}{5}$$

Da x und y natürliche Zahlen sind, folgt hieraus $5|4 - x$, d. h., es gibt eine ganze Zahl n mit $4 - x = 5n$, also $x = 4 - 5n$. Daraus folgt

$$y = \frac{82 - 13(4 - 5n)}{5} = 6 + 13n$$

Wegen $x \geq 0$ folgt $4 - 5n \geq 0$, also $n \leq \frac{4}{5}$ und, da n ganzzahlig ist, somit $n \leq 0$.
Wegen $y \geq 0$ folgt $6 + 13n > 0$, also $n \geq -\frac{6}{13}$ und, da n ganzzahlig ist, somit $n \geq 0$.
Daher ergibt sich $n = 0$, also $x = 4, y = 6$. Somit kann höchstens das Paar (4;6) die geforderten Eigenschaften haben.

(II) Tatsächlich ist $(4; 6)$ ein Paar natürlicher Zahlen, und es gilt $13 \cdot 4 + 5 \cdot 6 = 52 + 30 = 82$. Das Paar $(4; 6)$ erfüllt daher als einziges die Bedingungen der Aufgabe.

Aufgabe 240813:
Gesucht ist eine Zerlegung der Zahl 500 in vier Summanden, wobei folgende Bedingungen gefordert werden:

(1) Alle vier Summanden sind natürliche Zahlen.

(2) Wenn man zum ersten Summanden 4 addiert, so ergibt sich dasselbe Ergebnis, wie wenn man vom zweiten Summanden 4 subtrahiert. Ebenfalls dasselbe Ergebnis entsteht, wenn man den dritten Summanden mit 4 multipliziert, und auch dann, wenn man den vierten Summanden durch 4 dividiert.

Untersuche, ob es nur eine solche Zerlegung gibt! Ist dies der Fall, so ermittle sie und bestätige, dass sie die Eigenschaften (1), (2) hat!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn eine Zerlegung den Bedingungen (1) und (2) genügt und wenn dabei x das viermal in (2) genannte Ergebnis ist, so sind

$$x - 4, \quad x + 4, \quad \frac{x}{4}, \quad 4x$$

die vier Summanden, also gilt

$$x - 4 + x + 4 + \frac{x}{4} + 4x = 500 \qquad \Rightarrow \qquad x = 80$$

folglich kann nur die Zerlegung in die Summanden 76, 84, 20, 320 die geforderten Eigenschaften haben. Sie hat diese Eigenschaften; denn die Summanden sind natürliche Zahlen und erfüllen die Probe.

II Runde 2

Aufgabe 190824:
Klaus sagt:

> „Ich denke mir drei natürliche Zahlen. Die zweite Zahl ist um 2 größer als die Hälfte der ersten Zahl. Die dritte Zahl ist um 2 größer als die Hälfte der zweiten Zahl. Das Produkt der drei gedachten Zahlen beträgt 1120.
>
> Welche Zahl habe ich mir als erste gedacht, welche als zweite und welche als dritte ?“

Kann diese Frage eindeutig beantwortet werden? Wenn das der Fall ist, so nenne die drei gedachten Zahlen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I) Wenn drei Zahlen die genannten Eigenschaften haben und n die erste Zahl ist, so lautet die zweite $\frac{n}{2}+2=\frac{n+4}{2}$ und die dritte $\frac{n+4}{4}+2=\frac{n}{4}+3$. Da auch dies eine natürliche Zahl ist, ist n durch 4 teilbar.

Wäre n eine (durch 4 teilbare) natürliche Zahl mit $n \leq 12$, so wären $\frac{n}{2}+2$ und $\frac{n}{4}+3$ natürliche Zahlen mit $\frac{n}{2}+2<8$ und $\frac{n}{4}+3<6$, also wäre ihr Produkt

$$n \cdot \left(\frac{n}{2}+2\right) \cdot \left(\frac{n}{4}+3\right) \leq 12 \cdot 8 \cdot 6 = 576$$

und daher kleiner als 1120. Wäre $n \geq 20$, so wäre $\frac{n}{2}+2>12$ und $\frac{n}{4}+3>8$, also das Produkt ≥ 1920, und daher größer als 1120.
Also kommt als erste Zahl nur $n=16$, als zweite nur $\frac{n}{2}+2=10$ und als dritte nur $\frac{n}{4}+3=7$ in Frage.

II) Diese Zahlen haben die geforderten Eigenschaften wie die Probe zeigt.
Also kann die Frage von Klaus eindeutig beantwortet werden. Er hat sich als erste Zahl 16, als zweite 10 und als dritte 7 gedacht.

Aufgabe 310821:
In einer Schulklasse ist jeder Schüler 13 oder 14 Jahre alt; beide Altersangaben kommen in dieser Klasse auch wirklich vor. Addiert man alle diese (ganzzahlig gerechneten) Altersangaben, so ergibt sich die Summe 325.

Untersuche, ob durch diese Feststellungen eindeutig bestimmt ist, wie viele Schüler in dieser Klasse sind! Ist das der Fall, so gib die Schülerzahl an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Ist x bzw. y die Anzahl der 13- bzw. 14-jährigen Schüler, so folgt

$$13x + 14y = 325 = 13 \cdot 25 \tag{1}$$

Somit ist $14y$ durch 13 teilbar, also auch y durch 13 teilbar. Nach den Feststellungen im Aufgabentext ist ferner $y>0$ sowie $x>0$, wegen (1) also $14y<325$ und folglich $14y<14\cdot 26$, $y<26$.

Daher verbleibt nur die Möglichkeit $y=13$ und aus (1), also $13\cdot(x+14)=13\cdot 25$; folgt $x+14=25$, $x=11$.
Also ist die Schülerzahl der Klasse eindeutig durch die Feststellungen bestimmt; sie beträgt $x+y=24$.

III Runden 3 & 4

Aufgabe 070833:
Es seien a und b positive ganze Zahlen.

Gesucht sind alle ganzen Zahlen x, für die $\frac{a+x}{b-x} = \frac{b}{a}$ ist.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(I) Angenommen, x sei eine Zahl mit der genannten Eigenschaft, dann gilt

$$\frac{a+x}{b-x} = \frac{b}{a}$$

hieraus folgt $a^2 + ax = b^2 - bx$, also $(a+b)x = b^2 - a^2$. Da a und b positiv sind, ist $a + b \neq 0$, und es folgt weiter

$$x = \frac{b^2 - a^2}{a+b} = b - a$$

Somit kann höchstens die Zahl $x = b - a$ die genannte Eigenschaft haben.

(II) Durch Umkehrung dieser Schlüsse folgt, dass sie tatsächlich diese Eigenschaft besitzt.
Aus $x = b - a$ folgt $(a+b)x = b^2 - a^2$, hieraus $a(a+x) = b(b-x)$. Da ferner $a \neq 0$ gilt und mithin auch $b - x (= a) \neq 0$ ausfällt, ergibt sich weiter

$$\frac{a+x}{b-x} = \frac{b}{a}$$

Aufgabe 120836:
Untersuche, ob es eine kleinste positive rationale Zahl a gibt, zu der man eine natürliche Zahl x mit der Eigenschaft

$$\frac{25}{2}x - a = \frac{5}{8}x + 142$$

finden kann!

Wenn es ein solches kleinstes a gibt, so ermittle, welchen Wert x hierfür annimmt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, zu einer positiven rationalen Zahl a gebe es eine natürliche Zahl x, für die gilt:

$$\frac{25}{2}x - a = \frac{5}{8}x + 142 \tag{1}$$

Dann gilt auch

$$100x - 8a = 5x + 1136 \qquad \text{bzw.} \qquad 95x = 1136 + 8a, \qquad \text{also} \qquad x = \frac{1136 + 8a}{95} \tag{2}$$

Daher gibt es zu einer positiven rationalen Zahl a nur dann eine natürliche Zahl x mit der Eigenschaft (1), wenn $1136 + 8a$ durch 95 teilbar ist, wobei $8a > 0$ gilt.
Da 1136 bei Division durch 95 den Rest 91 lässt, erhält man die kleinste Zahl a für $8a = 4$, sie lautet also $a = \frac{1}{2}$.

Für sie ergibt sich nach (2) $x = 12$, also eine natürliche Zahl. Umgekehrt erfüllt $x = 12$ zusammen mit $a = \frac{1}{2}$ auch (1), wie man durch Einsetzen bestätigt. Also gibt es ein kleinstes a mit den geforderten Eigenschaften, und x nimmt hierfür den Wert 12 an.

Aufgabe 170835:
Man ermittle alle geordneten Tripel $(P_1; P_2; P_3)$ von Primzahlen P_1, P_2, P_3 mit $P_2 > P_3$, die der Gleichung genügen:

$$P_1(P_2 + P_3) = 165$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, es gibt drei derartige Primzahlen. Dann kann wegen $165 = 3 \cdot 5 \cdot 11$ die Primzahl P_1 nur eine der Zahlen 3, 5, 11 sein.

1. Fall: Es sei $P_1 = 3$, dann ist $P_2 + P_3 = 55$. (2)
Die Summe zweier natürlicher Zahlen ist nur dann ungerade, wenn ein Summand gerade, der andere aber ungerade ist. Deshalb, wegen $P_2 > P_3$ und weil 2 die einzige gerade Primzahl ist, kann höchstens $P_2 = 53$; $P_3 = 2$ die Lösung von (2) sein.
Da diese beiden Zahlen Primzahlen sind, ist das Tripel $(3; 53; 2)$ eine Lösung.

2. Fall: Es sei $P_1 = 5$, dann ist $P_2 + P_3 = 33$. (3)
Analog wie im Fall 1 ist höchstens $P_2 = 31$; $P_3 = 2$ Lösung von (3). Da 31 und 2 Primzahlen sind, ist das Tripel $(5; 31; 2)$ ebenfalls eine Lösung.

3. Fall: Es sei $P_1 = 11$, dann ist $P_2 + P_3 = 15$: (4)
Analog zum Fall 1 ist höchstens $P_2 = 13$; $P_3 = 2$ Lösung von (4). Da 13 und 2 Primzahlen sind, erfüllt auch das Tripel $(11; 13; 2)$ die Gleichung (1).
Somit sind genau die drei Tripel $(3; 53; 2)$, $(5; 31; 2)$, $(11; 13; 2)$ Lösung von (1).

Aufgabe 280833:
Beweise die folgende Aussage!

Stets, wenn irgendwelche sechs unmittelbar aufeinanderfolgende natürliche Zahlen vorliegen, ist es unmöglich, diese sechs Zahlen so in zwei Gruppen einzuteilen, dass das Produkt der Zahlen einer Gruppe gleich dem Produkt der Zahlen der anderen Gruppe ist.

Hinweis: Enthält bei einer Einteilung eine der zwei Gruppen nur eine Zahl, so gilt diese Zahl als das „Produkt“ der Zahlen dieser Gruppe.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Sechs unmittelbar aufeinanderfolgende natürliche Zahlen sind stets mit einer geeigneten natürlichen Zahl n von der Form n, $n+1$, $n+2$, $n+3$, $n+4$, $n+5$.
Für jede Einteilung in zwei Gruppen bezeichne P das Produkt der Zahlen einer Gruppe und Q das Produkt der Zahlen der anderen Gruppe.

Ist $n = 0$, so ist eines der Produkte P, Q gleich 0, das andere nicht, also gilt dann $P \neq Q$.
Ist $n > 0$, so muss eine der vier Zahlen $n+1$, $n+2$, $n+3$, $n+4$ durch eine Primzahl $p > 3$ teilbar sein. Wären nämlich diese vier Zahlen durch keine anderen Primzahlen als 2 und 3 teilbar, so ergäbe sich folgendermaßen ein Widerspruch:

Im Fall eines geraden $n > 0$ müssten $n+1$ und $n+3$ ungerade, also Potenzen von 3, und außerdem größer als 1 sein; im Fall eines ungeraden n müsste dies für $n+2$ und $n+4$ gelten; es gibt aber keine zwei Potenzen von 3, die größer als 1 sind und sich nur um die Differenz 2 unterscheiden.

Wegen $p \geq 5$ folgt nun weiter, dass unter den sechs Zahlen $n, n+1, \ldots, n+5$ keine andere als die genannte (der vier Zahlen $n+1, \ldots, n+4$) durch p teilbar ist. Also ist eines der Produkte P, Q durch p teilbar, das andere nicht; somit ist ebenfalls $P \neq Q$ bewiesen.

Aufgabe 290834:
Ermittle alle diejenigen Tripel $(a,\, b,\, c)$ natürlicher Zahlen a, b und c, die die folgenden Bedingungen (1), (2) und (3) erfüllen!

(1) Es gilt $a + b = c^3$.

(2) Es gilt $a + b + c = 130$.

(3) Die Zahl $a - b$ ist ein ganzzahliges Vielfaches von 19.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn ein Tripel (a,b,c) natürlicher Zahlen die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt, so folgt:
Mit (a,b,c) erfüllt auch (b,a,c) die Bedingungen (1), (2), (3). Daher kann o. B. d. A. vorausgesetzt werden, dass a,b,c außer (1), (2), (3) auch $a \geq b$ (4) erfüllen.

Wegen (1) und (2) gilt $c^3 + c = 130$. (5)
Wäre $c < 5$ oder $c > 5$, so wäre $c^3 + c < 125 + 5 = 130$ bzw. $c^3 + c > 130$, beides im Widerspruch zu (5). Als muss $c = 5$ (6) sein, und aus (2) folgt $a + b = 125$.(7)

Nach (3) gibt es eine ganze Zahl g mit $a - b = 19g$, also $a = 199 + b$ (8); wegen (4) ist dabei $g \geq 0$. (9)
Setzt man (8) in (7) ein, so folgt $19g + 2b = 125$. (10)
Wäre g gerade, so auch $19g + 2b$, im Widerspruch zu (10). Also ist g ungerade. Wäre $g \geq 7$, so folgte wegen $b \geq 0$, dass $199 + 2b \geq 19 \cdot 7 = 133$ wäre, ebenfalls im Widerspruch zu (10). Also ist g einer der Werte $g = 1{,}3,5$. (11)

Aus (10), also $b = \frac{125-19g}{2}$, ergibt sich jeweils hierzu $b = 53, 34, 15$ (12) und damit nach (7) jeweils $a = 72, 91, 110$. (13)

Daher und wegen (6) können (1), (2), (3), (4) nur von den Tripeln $(72, 53, 5)$, $(91, 34, 5)$, $(110, 15.5)$ erfüllt werden; wegen der Eingangsbemerkung über (b,a,c) können (1), (2), (3) zusätzlich nur noch von $(53, 72, 5)$, $(34, 91, 5)$, $(15, 110, 5)$ erfüllt werden.

II. Die (15) genannten Tripel erfüllen (1), (2), (3), wie die Probe zeigt. Damit ist bewiesen, dass (1), (2), (3) genau von den in (14) und (15) genannten Tripeln erfüllt werden.

Aufgabe 300832:
Gegeben seien drei verschiedene Sorten von Kugeln; von jeder Sorte seien 100 Stück vorhanden:

Sorte A: Kugeln mit einer Masse von 0,3 g je Stück,

Sorte B: Kugeln mit einer Masse von 1,5 g je Stück,

Sorte C: Kugeln mit einer Masse von 7,0 g je Stück.

Untersuche, ob es möglich ist, aus diesen Kugeln genau 100 so auszuwählen, dass ihre Gesamtmasse genau 100 g beträgt! Wenn das der Fall ist, so ermittle alle derartigen Möglichkeiten für die drei Anzahlen, die man jeweils aus Kugeln der Sorten A, B und C auszuwählen hat!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Bei jeder Auswahl von Kugeln A und B haben diese zusammen eine Masse m, die gemessen in Zehntelgramm eine durch 3 teilbare Maßzahl hat. Um hierzu eine der in der Aufgabe gesuchten Möglichkeiten zu erhalten, muss man also eine Anzahl z von Kugeln C so wählen, dass die Masse dieser Kugeln C eine

derartige Masse m zu 100 g ergänzt.

Die kleinste Anzahl z, für die das zutrifft, ist $z = 1$, wie aus $100g - 1 \cdot 7g = 93{,}0g$ ersichtlich ist.
Weitere derartige Anzahlen z von Kugeln C ergeben sich erst wieder, wenn man die Anzahl 1 um Vielfache von 3 erhöht. So entstehen die Anzahlen

$$z = 4, 7, 10, ... \tag{1}$$

mit den für Kugeln A und B übrigbleibenden Massen

$$m = 93g, 72g, 51g, 30g, ... \tag{2}$$

Jede Anzahl $z = 13 + n$ mit $n \geq 0$ ergäbe eine Masse m von höchstens $100 - (13 + n) \cdot 7 < 9 - 6{,}9 \cdot n$ Gramm. Selbst wenn man sie nur mit Kugeln A zusammenstellen würde, gäbe dies nicht mehr als $30-23n$ Kugeln A, also insgesamt nicht mehr als

$$(30 - 23n) + 0 + (13 + n) = 43 - 22n$$

Kugeln; bei Mitverwendung von Kugeln B wären es noch weniger.
Da hiermit keine Gesamtzahl 100 erreicht wird, verbleiben nur die jeweils in (1) und (2) genannten vier Anfangswerte.

Hiervon scheiden der 1., 3. und 4. Wert aus; denn um diese Werte durch y Kugeln B und folglich $(100 - z - y)$ Kugeln A zu erreichen, müsste

$$\begin{aligned}
&(99 - y) \cdot 0{,}3 + y \cdot 1{,}5 = 93, \quad y \cdot 1{,}2 = 63{,}3 \qquad \text{bzw.}\\
&(93 - y) \cdot 0{,}3 + y \cdot 1{,}5 = 51, \quad y \cdot 1{,}2 = 23{,}1 \qquad \text{bzw.}\\
&(90 - y) \cdot 0{,}3 + y \cdot 1{,}5 = 30; \quad y \cdot 1{,}2 = 3
\end{aligned}$$

gelten. Da dies nicht mit ganzzahligen y möglich ist, verbleibt in (1) und (2) nur jeweils der 2. Wert.
Für ihn werden die Forderungen der Aufgabe genau dann erfüllt, wenn

$$(96 - y) \cdot 0{,}3 + y \cdot 1{,}5 = 72, \quad y \cdot 1{,}2 = 43{,}2, \quad y = 36, \quad 96 - y = 60$$

gilt. Damit ist bewiesen:
Es ist möglich, die Forderungen der Aufgabe zu erfüllen, und zwar werden sie genau mit 60 Kugeln A, 36 Kugeln 8, 4 Kugeln C erfüllt.

Aufgabe 310831:
Eine Schachtel B ist mit blauen Kugeln gefüllt, eine andere Schachtel R mit roten Kugeln. Die Anzahl der roten Kugeln beträgt $\frac{15}{17}$ der Anzahl der blauen Kugeln.

Aus der Schachtel B kann man $\frac{2}{5}$ ihres Inhalts herausnehmen; danach enthält sie immer noch mehr als 1000 Kugeln. Aus der Schachtel R kann man $\frac{3}{7}$ ihres Inhalts herausnehmen; danach enthält sie weniger als 1000 Kugeln.

Untersuche, ob durch diese Angaben die Anzahlen der Kugeln eindeutig bestimmt sind, die ursprünglich in den Schachteln waren! Wenn das der Fall ist, nenne diese beiden Anzahlen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Für die Anzahlen b bzw. r der blauen bzw. roten Kugeln gilt $r = \frac{15b}{17}$ also ist $15b$ durch 17 teilbar. Da 15 zu 17 teilerfremd ist, ist folglich auch b durch 17 teilbar; d. h., es gilt $b = 17n$ mit einer natürlichen Zahl n. Damit folgt weiter

$$r = \frac{15 \cdot 17n}{17} = 15n$$

Da $\frac{2b}{5}$ als (aus B entnehmbare) Anzahl vorausgesetzt wird, ist $2b$ durch 5 teilbar; wegen $2b = 2 \cdot 17n$ und der Teilerfremdheit von $2 \cdot 17$ zu 5 ist somit n durch 5 teilbar; d. h., mit einer natürlichen Zahl m gilt $n = 5m$, also

$$b = 17 \cdot 5m \qquad ; \qquad r = 15 \cdot 5m$$

Ebenso folgt aus der Voraussetzung von $\frac{3r}{7}$ als Anzahl sowie aus $3r = 3 \cdot 15 \cdot 5m$, dass m durch 7 teilbar ist. Mit einer natürlichen Zahl k gilt somit $m = 7k$,

$$b = 17 \cdot 5 \cdot 7k \qquad ; \qquad r = 15 \cdot 5 \cdot 7k$$

In B bzw. R befinden sich nach dem Herausnehmen von $\frac{2}{5}b$ bzw. von $\frac{3}{7}r$ noch $\frac{3}{5}b = 3 \cdot 17 \cdot 7k = 357k$ Kugeln bzw. noch $\frac{4}{7}r = 4 \cdot 15 \cdot 5k = 300k$ Kugeln. Für diese Anzahlen gilt nach Voraussetzung

$$357k > 1000 \qquad , \qquad 300k < 1000$$
$$k > \frac{1000}{357} > 2 \qquad , \qquad k < \frac{1000}{300} < 4$$

Damit ist eindeutig bestimmt: Es gilt $k = 3$, $b = 17 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 3 = 1785$, $r = 15 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 3 = 1575$.

Aufgabe 330846:
Untersuche, ob es ein Paar natürlicher Zahlen größer als Null gibt, deren Produkt genau zehnmal so groß wie ihre Summe ist! Wenn dies der Fall ist, ermittle alle derartigen Zahlenpaare!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Für natürliche Zahlen $x > 0$, $y > 0$ folgt aus der Bedingung $xy = 10 \cdot (x+y)$ (1), dass $xy = 10 \cdot (x+y) > 10y$, also $x > 10$ gilt; ebenso folgt $y > 10$. Also ist (1) nur erfüllbar, wenn

$$x = 10 + u \qquad , \qquad y = 10 + v \tag{2}$$

mit natürlichen Zahlen $u > 0$, $v > 0$ gilt. Hierfür ist (1) gleichbedeutend mit

$$(10 + u)(10 + v) = 10 \cdot (20 + u + v) \qquad ; \qquad uv = 100$$

Dies gilt genau dann, wenn $(u; v)$ eines der Paare

$$(1; 100), (2; 50), (4; 25), (5; 20), (10; 10), (20; 5), (25; 4), (50; 2), (100; 1)$$

ist; also werden die Bedingungen der Aufgabe genau von den Paaren erfüllt:

$$(11; 110), (12; 60), (14; 35), (15; 30), (20; 20), (30; 15), (35; 14), (60; 12), (110; 11)$$

Aufgabe 340842:
Ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen n, die den folgenden Bedingungen (1) und (2) genügen!

(1) Die Zahl n ist das Produkt von genau drei Primzahlen; je zwei dieser Primzahlen sind voneinander verschieden; jede dieser Primzahlen ist größer als 10.

(2) Die Zahl n kann als Produkt von zwei natürlichen Zahlen dargestellt werden, deren Summe 600 beträgt. Die Zahl n kann aber auch als das Produkt von zwei natürlichen Zahlen dargestellt werden, deren Summe 240 beträgt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn eine natürliche Zahl n den Bedingungen (1) und (2) genügt, so folgt:
Nach (1) gibt es Primzahlen p, q, r mit $p > 10$, $q > 10$, $r > 10$, $p \neq q$, $p \neq r$, $q \neq r$ und $n = p \cdot q \cdot r$. Alle Darstellungen von n als Produkt zweier natürlicher Zahlen sind daher

$$n = 1 \cdot pqr = p \cdot qr = q \cdot pr = r \cdot pq$$

Nach (2) ist folglich eine der Zahlen $1 + pqr$, $p + qr$, $q + pr$, $r + pq$ gleich 600, eine andere gleich 240.

Sowohl 599 als auch 239 sind Primzahlen. Dies folgt wegen $25^2 > 599$ bzw. $16^2 > 239$ daraus, dass 599 durch keine der Primzahlen 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 teilbar ist bzw. 239 durch keine der Primzahlen 2, 3, 5, 7, 11, 13.

Damit scheidet sowohl das Vorliegen von $1 + pqr = 600$ als auch das von $1 + pqr = 240$ aus.

Also kann die Reihenfolge der Bezeichnungen p, q, r so gewählt werden, dass die Gleichungen

$$p + qr = 600 \qquad , \qquad q + pr = 240 \tag{3}$$

gelten.
Daher gilt $pr < 240$, wegen der Voraussetzung $p \geq 11$ also $r < \frac{240}{11} < 22$ und wegen der Voraussetzung $r \geq 11$ ebenso $p < 22$. Folglich kommen für p und r nur die Primzahlen $11, 13, 17, 19$ in Frage.
Somit ist die Zahl $qr = 600 - p$ eine der Zahlen 589, 587, 583, 581. Von ihnen sind aber nur $589 = 19 \cdot 31$ und $583 = 11 \cdot 53$ das Produkt zweier Primzahlen größer als 10, während dies für die Primzahl 587 und für $581 = 7 \cdot 83$ nicht zutrifft.

Damit verbleiben nur die Möglichkeiten, dass
entweder $r = 19$, $q = 31$, $p = 600 - 589 = 11$, $n = 11 \cdot 31 \cdot 19 = 6479$
oder $r = 11$, $q = 53$, $p = 600 - 583 = 17$, $n = 17 \cdot 53 \cdot 11 = 9911$
gilt.

II. Für jede dieser beiden Zahlen n zeigt die angegebene Zerlegung, dass (1) erfüllt ist. Ferner zeigen die Proben, dass auch (2) erfüllt ist.
Mit I. und II. ist gezeigt, dass genau die beiden Zahlen $n = 6479$ und $n = 9911$ den Bedingungen (1) und (2) genügen.

V Klasse 9

V.I Primzahlen, Teilbarkeit

I Runde 1

Aufgabe 030914:
Beweisen Sie, dass die Summe von 1000 beliebigen, aber aufeinanderfolgenden positiven ganzen Zahlen keine Primzahl ist!

Lösung von Burkhard Thiele:
Die erste der 1000 natürlichen Zahlen sei k. Dann erhält man folgende Summe: $k + (k+1) + (k+2) + \cdots + (k+999)$. Sie besteht aus 500 geraden und 500 ungeraden Zahlen, ist also gerade.

Aufgabe 100913:
Man denke sich alle natürlichen Zahlen von 1 bis 1000 fortlaufend auf folgende Weise hintereinandergeschrieben:

$$12345678910111213...9989991000.$$

Es ist zu beweisen, dass die so entstandene Zahl nicht durch 1971 teilbar ist.

Lösung von Manuela Kugel:
Es gilt $9|1971$. Wenn die angegebene Zahl durch 1971 teilbar wäre, dann wäre sie mithin auch durch 9 teilbar. Ihre Quersumme lässt sich folgendermaßen ermitteln: Jede der Zahlen 2 bis 9 tritt in dieser Quersumme genau 300mal als Summand auf, da jede dieser Zahlen in den natürlichen Zahlen von 1 bis 1000 als Ziffer genau 100 mal an der Einerstelle, 100mal an der Zehnerstelle und 100 mal an der Hunderterstelle auftritt.

Die Eins tritt 301mal auf, da sie außerdem noch einmal in der Tausenderstelle vorkommt. Die Nullen bleiben unberücksichtigt, da sie für die Berechnung der Quersumme keine Bedeutung haben. Also erhält man

$$300 \cdot (1+2+3+4+5+6+7+8+9) + 1 \quad = \quad 300 \cdot 45 + 1.)$$

Diese Zahl ist nicht durch 9 teilbar. Daher ist auch die angegebene Zahl nicht durch 9 und damit auch nicht durch 1971 teilbar.

Aufgabe 110913:
Ermitteln Sie alle natürlichen Zahlen a, für die der Term

$$t = \frac{a + 11}{a - 9}$$

eine natürliche Zahl ist!

Lösung von Manuela Kugel:
Für natürliche Zahlen $a < 9$ ist $t < 0$. Für $a = 9$ ist t nicht definiert. Ist $a > 9$ und setzt man $h = a - 9$,

so ist h stets eine natürliche Zahl, ferner $a = h + 9$ und

$$t = \frac{h+20}{h} = 1 + \frac{20}{h}.$$

Somit ist t genau dann eine natürliche Zahl, wenn h Teiler von 20 ist. Mithin ergeben sich die folgenden Möglichkeiten:

h	$a = h + 9$	t
1	10	21
2	11	11
4	13	6
5	14	5
10	19	3
20	29	2

Damit erfüllen genau die Zahlen 10, 11, 13, 14, 19 und 20 alle gestellten Bedingungen.

Aufgabe 120914:
Es ist die größte siebenstellige Zahl zu ermitteln, die mit paarweise verschiedenen Ziffern dargestellt werden kann und durch 72 teilbar ist.

Lösung von Manuela Kugel:
Es gilt:

a) Jede mit 9876 beginnende siebenstellige Zahl ist größer als jede *nicht* mit 9876 beginnende siebenstellige Zahl aus paarweise voneinander verschiedenen Ziffern. Denn eine solche beginnt
entweder nicht mit 9
oder zwar mit 9, aber nicht mit 98 und nicht mit 99,
oder zwar mit 98, aber nicht mit 987, nicht mit 988 und nicht mit 989,
oder zwar mit 987, aber nicht mit 9877, nicht mit 9878 und nicht mit 9879

b) Da 8 und 9 teilerfremd sind, ist eine Zahl genau dann durch 72 teilbar, wenn sie durch 8 und 9 teilbar ist.

c) Eine siebenstellige Zahl aus paarweise verschiedenen Ziffern ist genau dann durch 9 teilbar, wenn von den zehn verschiedenen Ziffern 0, 1, 2, ..., 9, deren Summe 45 beträgt, drei Ziffern weggelassen werden, deren Summe 9 beträgt.

d) Eine siebenstellige Zahl ist genau dann durch 8 teilbar, wenn die aus der Hunderter-, Zehner- und Einerziffer in dieser Reihenfolge gebildete Zahl durch 8 teilbar ist (wobei in diesem Zusammenhang mit dieser Regel auch Anfangsziffern 0 zulässig sind). Daher ist die gesuchte Zahl die größte unter denjenigen mit 9876 beginnenden Zahlen (falls es solche gibt), deren restliche Ziffern drei derart gewählte verschiedene der Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5 sind, dass d) gilt und

e) die weggelassenen Ziffern die Summe 9 haben oder, äquivalent hiermit, die restlichen Ziffern die Summe 6 haben.

Nun wird e) genau von den Tripeln (0,1,5), (0,2,4) und (1,2,3) erfüllt. Sämtliche geraden dreistelligen Zahlen, mit zugelassener Anfangsziffer 0, die sich aus diesen Tripeln bilden lassen, sind, der Größe nach geordnet, 510, 420, 402, 312, 240, 204, 150, 132, 042, 024. Unter ihnen ist 312 die größte durch 8 teilbare Zahl. Daher ist 9876312 die gesuchte Zahl.

Anderer Lösungsweg

Die größte siebenstellige Zahl mit paarweise voneinander verschiedenen Ziffern ist 9876543. Denn jede solche siebenstellige Zahl (usw. wie oben in a)).

Wegen $\frac{9876543}{72} = 137174\frac{15}{72}$ ist die größte durch 72 teilbare Zahl, die höchstens ebenso groß wie 9876543 ist, die Zahl

$$9876543 - 15 \quad = \quad 9876528.$$

Bildet man schrittweise zu jeder erhaltenen Zahl die größte darunter gelegene durch 72 teilbare Zahl, so erhält man der Reihe nach

$$9876528 - 72 \quad = \quad 9876456, \quad 9876456 - 72 = 9876384, \quad 9876384 - 72 = 9876312, ...$$

Von den erhaltenen Zahlen ist 9876312 die größte, die aus paarweise voneinander verschiedenen Ziffern besteht. Daher ist sie die gesuchte Zahl.

Aufgabe 130914:
Unter $n!$ (gelesen n-Fakultät) versteht man das Produkt aller natürlichen Zahlen von 1 bis n; d. h., es gilt

$$n! \quad = \quad 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n-3) \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n.$$

Man ermittle für $n = 1000$ die Anzahl der Nullen, auf die die Zahl $n!$ endigt (Endnullen).

Lösung von Manuela Kugel:
Es sei x die gesuchte Anzahl der Endnullen der Zahl 1000!. Dann gilt $1000! = z \cdot 10^x$, wobei z eine natürliche Zahl ist, die nicht auf 0 endet. Wegen $10^x = 2^x \cdot 5^x$ ist die Anzahl der Endnullen gleich der kleineren unter den Anzahlen der Faktoren 2 bzw. 5, die in der Zahl 1000! enthalten sind. Da jede zweite natürliche Zahl gerade, aber nur jede fünfte natürliche Zahl durch 5 teilbar ist, enthält die Zahl 1000! mehr Faktoren 2 als Faktoren 5. Mithin ist die gesuchte Anzahl der Endnullen gleich der Anzahl der Faktoren 5, die 1000! enthält.

Nun gibt es unter den natürlichen Zahlen von 1 bis 1000 genau eine durch $625 = 5^4$ teilbare Zahl, unter den restlichen 999 Zahlen genau 8-1 durch $125 = 5^3$ teilbare Zahlen, nämlich die Zahlen $n \cdot 125$ mit $1 \leq n \leq 8$ und $n \neq 5$; unter den übrigen 992 Zahlen genau 40 - 8 durch $25 = 5^2$ teilbare Zahlen, nämlich die Zahlen $n \cdot 25$ mit $1 \leq n \leq 40$ mit $n \neq 5, 10, 15, ..., 40$, d. h. $n \neq k \cdot 5 (k = 1,...,8)$; schließlich unter den verbleibenden 960 Zahlen genau $200-40$ durch 5 teilbare Zahlen, nämlich die Zahlen $n \cdot 5$ mit $1 \leq n \leq 200$ und $n \neq k \cdot 5 (k = 1, ..., 40)$. Daher enthält die Zahl 1000! wegen

$$4 + 3(8-1) + 2(40-8) + (200-40) \quad = \quad 200 + 40 + 8 + 1 = 249$$

genau 249 Faktoren 5 und endet somit auf genau 249 Nullen.

Aufgabe 170911:
Beweisen Sie folgende Aussage!

Wenn sich zwei natürliche Zahlen (≥ 1) um 1977 unterscheiden, dann besitzt die (positive) Differenz ihrer Quadrate mindestens acht verschiedene natürliche Zahlen als Teiler.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die beiden Zahlen seien a und b, und es gelte o. B. d. A. $b < a$. Dann gilt für die positive Differenz d ihrer Quadrate

$$d = a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) = (a+b) \cdot 1977 = (a+b) \cdot 3 \cdot 659$$

Daher hat d mindestens die natürlichen Zahlen

$$1; 3; 659; 1977; a+b; (a+b) \cdot 3; (a+b) \cdot 659; d$$

als Teiler. Wegen $a + b > a - b$ (was aus $b > 0$ folgt), d. h. $a + b > 1977$, sind diese acht Teiler sämtlich voneinander verschieden.

Aufgabe 200913:

a) Kann der Bruch $\frac{1711}{3421}$ durch eine (von 1 verschiedene) natürliche Zahl gekürzt werden?

b) Beweisen Sie, dass für jede natürliche Zahl n der Zähler und der Nenner des Bruches $\frac{14n+1}{28n+5}$ zueinander teilerfremd sind!

Hinweis: Um die Rechnung zu erleichtern, kann man einen Satz über Teilbarkeit von Differenzen anwenden.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Wenn der Bruch $\frac{1711}{3421}$ durch eine natürliche Zahl t gekürzt werden kann, dann sind die Zahlen 1711 und 3421 durch t teilbar.

Mithin ist ebenfalls $2 \cdot 1711 = 3422$ durch t teilbar und daher auch die Differenz $3422 - 3421 = 1$. Die einzige natürliche Zahl, durch die 1 teilbar ist, ist aber $t = 1$.

Daher kann der Bruch $\frac{1711}{3421}$ durch keine natürliche Zahl gekürzt werden, die von 1 verschieden ist.

b) Ist eine natürliche Zahl t ein gemeinsamer Teiler von $14n + 3$ und $28n + 5$, so ist t ebenfalls ein Teiler von $2 \cdot (14n + 3) = 28n + 6$ und daher auch ein Teiler der Differenz $(28n + 6) - (28n + 5) = 1$. Also folgt wieder, dass $t = 1$ sein muss

Somit haben der Zähler und der Nenner des Bruches $\frac{14n+3}{28n+5}$ den größten gemeinsamen Teiler 1, d. h. sie sind teilerfremd zueinander, w. z. b. w.

Aufgabe 240912:
Beweisen Sie, dass die Zahl 91 nicht als Produkt von fünf verschiedenen ganzen Zahlen dargestellt werden kann!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wegen der Primfaktorzerlegung $91 = 7 \cdot 13$ ist eine Darstellung der Zahl 91 als Produkt von möglichst vielen ganzzahligen Faktoren nur so zu erhalten, dass man erstens zwei Faktoren der Beträge 7 bzw. 13 (also einen Faktor 7 oder -7 und einen zweiten Faktor 13 oder -13) nimmt und dann noch die beiden einzigen den Betrag einer Zahl nicht ändernden Faktoren 1 und -1 hinzufügt.

Also enthält jede Darstellung von 91 als Produkt aus verschiedenen ganzen Zahlen höchstens vier Faktoren.

Aufgabe 260914:
Untersuchen Sie, ob es natürliche Zahlen n derart gibt, dass die Lösung x der Gleichung $17x + n = 6x + 185$ ebenfalls eine natürliche Zahl ist! Wenn das der Fall ist, so ermitteln Sie die kleinste derartige Zahl n und die zugehörige Lösung x der gegebenen Gleichung!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Für jede natürliche Zahl n gilt:

Die Gleichung $17x+n=6x+185$ lässt sich äquivalent umformen zu $11x=185-n$. Sie hat daher genau die Lösung

$$x=\frac{185-n}{11} \tag{1}$$

Diese ist für genau diejenigen natürlichen Zahlen n selbst eine natürliche Zahl, für die $n \leq 185$ gilt und 11 ein Teiler von $185-n$ ist.

Diese Bedingungen werden, da 185 bei Division durch 11 den Rest 9 lässt, genau von denjenigen natürlichen Zahlen $n=9+11m$ mit ganzzahligem m erfüllt, für die $9+11m \leq 185$ gilt. Solche natürlichen Zahlen n gibt es; die kleinste von ihnen erhält man mit $m=0$.

Die gesuchte kleinste Zahl n mit den genannten Eigenschaften ist also $n=9$; nach (1) ist die zugehörige Lösung der in der Aufgabe gegebenen Gleichung die Zahl $x=16$.

Aufgabe 270913:
Jemand möchte die Frage beantworten, ob 1987 eine Primzahl ist. Er hat unter seinen Rechenhilfsmitteln (Zahlentafel, Taschenrechner) zwar auch eine Primzahltabelle; sie enthält aber nur die Primzahlen unter 100.

Wie kann (ohne weitere Hilfsmittel), die Untersuchung geführt werden; welche Antwort erbringt sie?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn man zeigen kann, dass 1987 durch keine Primzahl p teilbar ist, für die $p \leq \sqrt{1987}$ gilt, dann ist 1987 als Primzahl nachgewiesen.

Wegen $\sqrt{1987} < 44$ genügt es hierzu also zu zeigen, dass 1987 durch keine der Zahlen 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43 teilbar ist. Diese Aussagen lassen sich in der Tat durch Ausrechnen bestätigen (z. B. kann man mit Hilfe eines Taschenrechners feststellen, dass keine der 14 Zahlen 1987 : 2, 1987 : 3, ..., 1987 : 4 eine ganze Zahl ist).

Damit ist die Antwort erbracht, dass 1987 eine Primzahl ist.

Aufgabe 290912:
Gibt es unter allen fünfstelligen Zahlen, die sich unter Verwendung genau der Ziffern 0, 1, 2, 3, 4 schreiben lassen, eine Primzahl?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Antwort: Ja, nämlich zum Beispiel 10243.

Es fehlt noch eine Begründung für diese Antwort. Außerdem seien einige hinführende Bemerkungen gegeben, die nicht notwendig zu einer vollständigen Lösung der Aufgabe gehören:

Wenn eine Primzahl die genannten Eigenschaften hat, so kann jedenfalls keine der Ziffern 0, 2, 4 ihre Einerziffer sein. Der Aufwand beim Überprüfen, ob eine Primzahl vorliegt, ist um so kleiner, je kleiner die zu überprüfende Zahl ist. Daher beginnt man zweckmäßig mit der kleinsten fünfstelligen Zahl, die sich mit den genannten Ziffern schreiben lässt und 1 oder 3 als Einerziffer hat, d. h. mit der Zahl 10243.

Diese Zahl ist als Primzahl nachgewiesen, wenn sie durch keine Primzahl, die kleiner als 10243 ist, teilbar ist. Dabei genügt es wegen $\sqrt{10243} < 102$, nur die Primzahlen ≤ 101 als Teiler zu überprüfen. Denn falls 10243 einen Teiler ≥ 102 hat, so muss er bei der Zerlegung von 10243 zusammen mit einem Faktor auftreten, der kleiner als 102 ist, dessen Primfaktoren also bereits überprüft sind.

Mit einer Primzahltabelle und dem SR 1 (oder anderen Rechenhilfsmitteln) stellt man schnell fest, dass keine der Primzahlen 2, 3, ..., 101 Teiler von 10243 ist. Damit ist die Antwort begründet.

Bemerkung: Sämtliche Primzahlen mit den genannten Eigenschaften sind: 10243, 12043, 20143, 20341, 20431, 23041, 24103, 30241, 32401, 40123, 40213, 40231, 41023, 41203, 42013, 43201.

Aufgabe 320912:
Drei natürliche Zahlen a, b, c mit $0 < a \leq b < c$, für die die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ gilt, nennt man ein pythagoreisches Zahlentripel.

Man beweise: In jedem pythagoreischen Zahlentripel a, b, c muss $a \neq 1$ sein.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
In jedem pythagoreischen Zahlentripel gilt

$$a^2 = c^2 - b^2 = (c - b) \cdot (c + b) \tag{1}$$

Wäre $a = 1$, so wäre (1) für die ganzen Zahl $c - b$ und $c + b$, die wegen $0 < b < c$ positiv sind, nur mir $c - b = 1$ und $c + b = 1$ möglich. Daraus folgte $b = 0$ im Widerspruch zu $0 < b$. Also muss $a \neq 1$ sein.

Aufgabe 330912:
Gibt es eine sechsstellige natürliche Zahl, die genau vierzehn verschiedene natürliche Zahlen als Teiler hat, unter denen sich auch die Zahl 14 befindet?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Eine derartige Zahl gibt es; denn die Zahl $z = 2 \cdot 7^6$ hat die genannten Eigenschaften.

Beweis: Diese Zahl lautet 235298, sie ist also sechsstellig. Ferner sind Teiler von z unter den natürlichen Zahlen genau die Zahlen 1, 7, 7^2, 7^3, 7^4, 7^5, 7^6 sowie das Zweifache dieser sieben Zahlen.

Keine zwei dieser vierzehn Zahlen sind einander gleich, und unter ihnen befindet sich auch die Zahl $2 \cdot 7 = 14$.

II Runde 2

Aufgabe 010923:
Man wähle zwei beliebige, aber verschiedene natürliche Zahlen und bilde ihre Summe, ihre Differenz und ihr Produkt.
Es ist zu beweisen, dass unter diesen drei Zahlen wenigstens eine durch 3 teilbar ist!

Lösung von Christiane Behns:
Ist eine der beiden Zahlen durch 3 teilbar, so auch das Produkt. Lassen die beiden Zahlen bei Division durch 3 denselben Rest, dann ist die Differenz durch 3 teilbar.
Lässt eine Zahl bei Division durch 3 den Rest 1, die andere den Rest 2, dann ist die Summe der beiden Zahlen ein Vielfaches von 3. Andere Möglichkeiten für die Reste gibt es nicht.

Aufgabe 010924:
Das Produkt von vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist gleich 93024.
Wie heißen die Zahlen?

Lösung von Christiane Behns:
Sei n die kleinste der vier Zahlen. Wegen $10^4 = 10000 < 93024$ und $20^4 = 160000 > 93024$ gilt $7 < n < 20$. Da 5 kein Teiler von 93024 ist, darf n bei Division durch 5 nur den Rest 1 lassen. Es kommt also nur $n = \{11, 16\}$ in Frage.
Wegen $93024 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 17 \cdot 19$ müssen 17 und 19 unter den Zahlen $n, n+1, n+2$ und $n+3$ vorkommen. Damit ist $n = 16$.
Probe: $16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 = 93024$.

Aufgabe 060921:
Geben Sie vier verschiedene Paare (a, b) positiver, ganzer Zahlen an, so dass die Differenz der Quadrate der beiden Zahlen jedes Paares 105 beträgt!
(Je zwei Paare (a, b) und (b, a) gelten dabei als nicht verschieden voneinander.)

Lösung von Felix Kaschura:
Durch die Aufgabenstellung ergibt sich folgende Gleichung:

$$105 = a^2 - b^2 = (a+b) \cdot (a-b) \qquad \text{3.Binomische Formel}$$

Nun wird substituiert: $x := a + b$ und $y := a - b$.
Damit gilt: $a = x - b = y + b$. Also ergibt sich:

$$b = \frac{x-y}{2} \tag{V.1}$$

sowie

$$a = \frac{x+y}{2} \tag{V.2}$$

105 hat die Teiler: 1, 3, 5, 7, 15, 21, 35, 105. Damit gibt es die folgenden möglichen Paare (x, y) mit $x \geq y$, da $a + b \geq a - b$, wenn $a, b \in N$: $(105, 1), (35, 3), (21, 5), (15, 7)$.
Nun wird wieder rücksubstituiert unter Verwendung der Gleichungen (1) und (2):

$$\begin{aligned}
\text{Fall 1:} \quad x = 105, y = 1 &\Rightarrow a = 53, b = 52\\
\text{Fall 2:} \quad x = 35, y = 3 &\Rightarrow a = 19, b = 16\\
\text{Fall 3:} \quad x = 21, y = 5 &\Rightarrow a = 13, b = 8\\
\text{Fall 4:} \quad x = 15, y = 7 &\Rightarrow a = 11, b = 4
\end{aligned}$$

Aufgabe 080921:
Gesucht werden fünf aufeinanderfolgende natürliche Zahlen, deren jede größer als 1 ist und von denen die kleinste durch 2 und die nächstfolgenden der Reihe nach durch 3, durch 4, durch 5 und durch 6 teilbar sein sollen.
a) Nennen Sie ein Beispiel für fünf derartige Zahlen!
b) Wie kann man alle Lösungen der Aufgabe erhalten?

Lösung von ZePhoCa:
a) Ein Beispiel ist 2,3,4,5,6.

b) Nennen wir die erste Zahl n. n muss durch 2 teilbar, also gerade sein.
$n + 1$ muss durch 3 teilbar sein, also muss n bei Division durch 3 den Rest 2 lassen. $n + 2$ muss durch 4 teilbar sein. Da n gerade ist, ist $n + 2$ auch gerade und genau dann durch 4 teilbar, wenn n nicht durch 4 teilbar ist.
$n + 3$ muss durch 5 teilbar sein, also muss n bei Division durch 5 den Rest 2 lassen. $n + 4$ muss durch 6 teilbar sein. Durch 2 teilbar ist es auf jeden Fall, da n gerade ist. Da n bei Division durch 3 den Rest 2 lässt ist $n + 4$ auch durch 6 teilbar. Also muss n die folgenden Voraussetzungen erfüllen:

n muss gerade aber nicht durch 4 teilbar sein, bei Division durch 3 den Rest 2 lassen und bei Division durch 5 ebenfalls den Rest 2 lassen.

Aufgabe 090923:
Jemand hat sieben Kärtchen mit jeweils einer der Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6 und 7.
Man zeige, dass sich unter allen denjenigen siebenstelligen Zahlen, die unter Verwendung jeweils genau dieser sieben Kärtchen gelegt werden können (wobei ein z. B. durch Umdrehen bewirktes „Verwandeln“ der 6 in eine 9 verboten ist), keine zwei befinden, deren eine ein ganzzahliges Vielfaches der anderen ist!

Lösung von cyrix:
Wir nehmen indirekt an, es gäbe zwei solche Zahlen $a > b$, die sich so bilden lassen und für die a Vielfaches von b ist. Dann gäbe es eine natürliche Zahl $n > 1$ mit $a = n \cdot b$.

Da a und b aus den gleichen Ziffern gebildet werden, besitzen sie die gleiche Quersumme $1+2+\cdots+7 = 28$, lassen also wegen $28 - 3 \cdot 9 = 1$ jeweils den Rest 1 bei der Division durch 9.
Demnach muss auch n den Rest 1 bei der Teilung durch 9 lassen, damit dies auch für das Produkt $a = b \cdot n$ gilt. Also ist $n \geq 10$, sodass a mindestens eine Stelle mehr besitzen müsste als b, was ein Widerspruch ist.
Kurz: $a \equiv b \equiv 28 \equiv 1 \pmod 9$, also auch $n \equiv b \cdot n = a \equiv 1 \pmod 9$ und damit $n \geq 10$, Widerspruch.

Aufgabe 100922:
Jemand behauptet:
Wenn von zwei natürlichen Zahlen a und b jede die Eigenschaft hat, sich als Summe der Quadrate zweier natürlicher Zahlen darstellen zu lassen, dann hat auch das Produkt von a und b diese Eigenschaft.

a) Geben Sie ein Zahlenbeispiel an!
b) Beweisen Sie diesen Satz!

Lösung von cyrix:
a) $5 \cdot 25 = (1+4)(9+16) = 125 = 25 + 100 = 5^2 + 10^2$.

b) Seien a_1, a_2, b_1, b_2 natürliche Zahlen mit $a = a_1^2 + a_2^2$ und $b = b_1^2 + b_2^2$. Dann ist

$$ab = (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) = a_1^2 b_1^2 + a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 =$$

$$= (a_1 b_1)^2 - 2a_1 b_1 a_2 b_2 + (a_2 b_2)^2 + (a_1 b_2)^2 + 2a_1 b_2 a_2 b_1 + (a_2 b_1)^2 = (a_1 b_1 - a_2 b_2)^2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)^2$$

Bemerkung: Man erhält diese Identität, indem man a, b und ab als Betragsquadrate der komplexen Zahlen $z_1 := a_1 + i \cdot a_2$, $z_2 := b_1 + i \cdot b_2$ bzw. $z_1 \cdot z_2$ interpretiert.

Aufgabe 120921:
Beweisen Sie den folgenden Satz!
Die Summe der Kuben dreier beliebiger aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen ist durch 3 teilbar.

Lösung von Conny42:
Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann erhalten wir
$n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 = n^3 + (n+1) \cdot (n^2 + 2n + 1) + (n+2) \cdot (n^2 + 4n + 4)$
$= n^3 + n^3 + 2n^2 + n + n^2 + 2n + 1 + n^3 + 4n^2 + 4n + 2n^2 + 8n + 8$

$= 3n^3 + 9n^2 + 15n + 9$
$= 3 \cdot (n^3 + 3n^2 + 5n + 3)$.
Somit ist die Summe der Kuben dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen durch 3 teilbar.

Alternativ-Lösung von cyrix:
Es ist

$$(n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 = (n^3 - 3n^2 + 3n - 1) + n^3 + (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) = 3(n^3 + 2n)$$

durch 3 teilbar.

Bemerkung: Wegen

$$n^3 + 2n = (n^3 - 4n) + 6n = n(n^2 - 4) + 6n = (n-2)n(n+2) + 6n$$

folgt sogar, dass die Summe von 3 Kuben immer durch $3^2 = 9$ teilbar sein muss, da einer der drei Faktoren $n-2$, n oder $n+2$ durch 3 teilbar ist und damit auch $n^3 + 2$.

Aufgabe 140923:
Es ist die kleinste positive ganze Zahl zu ermitteln, deren dritte Potenz ein ganzzahliges Vielfaches von 588 ist.

Lösung von Steffen Polster:
Die Primfaktorzerlegung von 588 ist: $588 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7^2$. Ist z^3 die dritte Potenz einer positiven ganzen Zahl z, so muss z^3 jeden Primfaktor von z mindestens dreimal enthalten.
Das kleinste Vielfache mit je drei Primfaktoren der Zerlegung von 588 ist $2^3 \cdot 3^3 \cdot 7^3$. Dessen dritte Wurzel ist $2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$. $z = 42$ ist die gesuchte Zahl.

Aufgabe 190922:
Die Zahlen in einem Zahlentripel (p, q, r) seien genau dann „Primzahldrillinge“ genannt, wenn jede der drei Zahlen p, q, r eine Primzahl ist und wenn p, q, r in dieser Reihenfolge drei unmittelbar aufeinanderfolgende ungerade Zahlen sind.
Beweisen Sie, dass es genau ein Zahlentripel (p, q, r) gibt, das alle diese Bedingungen erfüllt!

Lösung von cyrix:
Es ist von drei aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen immer genau eine durch 3 teilbar. Da es alles Primzahlen sein sollen, muss also eine der drei Zahlen 3 sein. Da $3 - 2 = 1$ keine Primzahl ist, muss der kleinste Wert p gleich 3 sein, sodass sich das Tripel (3,5,7) ergibt, was offenbar alle Voraussetzungen erfüllt, also der einzige „Primzahldrilling“ nach Definition der Aufgabenstellung ist, $\Box$.

Bemerkung: So wenig sinnvoll es wäre, „Primzahlzwilling“ als „direkt aufeinanderfolgende Primzahlen“ zu definieren (weil es dann nur den einen „Primzahlzwilling„ (2,3) gäbe), so ist es auch nicht sinnvoll, den Begrif „Primzahldrilling“ wie in der Aufgabenstellung zu definieren.
Im allgemeinen fordert man, dass $p < q < r$ alles Primzahlen mit $r = p + 6$ sind. Dabei wählt man den Wert 6 analog wie den Wert 2 bei der Definition von Primzahlzwillingen (p,q) mit $q = p + 2$, weil dies der kleinste Wert ist, für den nicht per se aufgrund Teilbarkeit durch kleine Zahlen ausgeschlossen ist, dass es mehr als ein solches Tupel gibt.
Ob es unendlich viele Primzahldrillinge nach dieser geeigneteren Definition gibt, ist bisher genauso unklar wie die Frage, ob es unendlich viele Primzahlzwillinge gibt.

Aufgabe 220921:
Man ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen n, die den folgenden Bedingungen (1) und (2) genügen:
(1) $n-9$ ist eine Primzahl.
(2) n^2-1 ist durch 10 teilbar.

Lösung von cyrix:
Wegen (2) ist n^2-1 gerade, also n^2 ungerade, also n ungerade, also $n-9$ gerade, also wegen (1) $n-9=2$ und damit $n=11$. Tatsächlich ist auch $11^2-1=120$ durch 10 teilbar.

Aufgabe 220922:
Beweisen Sie folgende Aussage!
Wenn x, y und z von 0 verschiedene natürliche Zahlen sind, dann sind

$$a=\frac{(x+y\sqrt{z})^2+(x-y\sqrt{z})^2}{2}$$
$$b=\frac{(x+y\sqrt{z})^2-(x-y\sqrt{z})^2}{2\sqrt{z}}$$
$$c=a^2-(x^2-y^2z)^2$$

natürliche Zahlen, und b ist ein Teiler von c.

Lösung von cyrix:
Es ist

$$a=\frac{1}{2}\cdot(x^2+2xy\sqrt{z}+y^2z+x^2-2xy\sqrt{z}+y^2z)=x^2+y^2z\in\mathbb{N}$$
$$b=\frac{1}{2\sqrt{z}}\cdot(x^2+2xy\sqrt{z}+y^2z-x^2+2xy\sqrt{z}-y^2z)=2xy\in\mathbb{N}\qquad\text{und}$$
$$c=(a-x^2+y^2z)\cdot(a+x^2-y^2z)=2y^2z\cdot 2x^2=4x^2y^2z=b\cdot 2xyz\in\mathbb{N}$$

und es gilt offensichtlich $b|c$, $\Box$.

Aufgabe 230924:
Beweisen Sie:
Ist p eine Primzahl, dann ist $\sqrt{p}$ keine rationale Zahl.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Indirekter Beweis:
Angenommen, $\sqrt{p}$ wäre eine rationale Zahl. Dann gäbe es natürliche Zahlen m und n mit $\sqrt{p}=\frac{m}{n}$.
Dabei könnte erreicht werden, dass m und n teilerfremd sind. Daraus würde $pn^2=m^2$ folgen, die Primzahl p müsste also m teilen, d. h., es würde $m=px$ mit einer natürlichen Zahl x gelten.
Daraus ergäbe sich $pn^2=p^2\cdot x^2$, also $n^2=p\cdot x^2$, und daher müsste p auch n teilen, im Widerspruch zur Teilerfremdheit von n und m.
Also war die Annahme, dass $\sqrt{p}$ rational ist, falsch, d. h., $\sqrt{p}$ ist keine rationale Zahl.

Aufgabe 260921:
Beweisen Sie, dass für jede natürliche Zahl n auch

$$\frac{n^3-2n^2-4n+8}{n+2}\qquad\text{eine natürliche Zahl ist!}$$

Lösung von cyrix:
Es ist

$$\frac{n^3-2n^2-4n+8}{n+2}=\frac{n^3+2n^2-4n^2-8n+4n+8}{n+2}=\frac{(n^2-4n+4)\cdot(n+2)}{n+2}=n^2-4n+4\in\mathbb{N},\ \Box$$

Aufgabe 280921:
Ermitteln Sie die kleinsten vier Zahlen, die das Quadrat einer natürlichen Zahl und zugleich auch die dritte Potenz einer anderen natürlichen Zahl sind!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn eine Zahl des Quadrat einer natürlichen Zahl n und zugleich auch die dritte Potenz einer natürlichen Zahl m ist, so ist sie eine natürliche Zahl, bei deren Primfaktorzerlegung jeder Primfaktor in einer durch 2 und zugleich auch durch 3 teilbaren Anzahl vorkommt.
Daher (und weil 2 und 3 zueinander teilerfremd sind) muss jeder Primfaktor in einer durch 6 teilbaren Anzahl vorkommen, die Zahl muss also die sechste Potenz einer natürlichen Zahl sein. Ist außerdem noch die Bedingung $n \neq m$ zu erfüllen, so scheiden 0 und 1 aus, da diese Zahlen Quadrat und dritte Potenz nur von jeweils derselben Zahl sind.

II. Die Zahlen $2^6, 3^6, 4^6$ und 5^6 erfüllen alle diese Bedingungen, wie aus

$$216=8^2=4^3,\quad 3^6=27^2=9^3,\quad 4^6=64^2=16^3,\quad 5^6=125^2=25^3$$

ersichtlich ist.
Mit I. und II. (und weil alle k^6 mit $k>5$ größer als $2^6,...,5^6$ sind) ist gezeigt: Die vier gesuchten Zahlen sind $2^6=64$, $3^6=729$, $4^6=4096$, $5^6=15625$.

Aufgabe 280924:
a) Ermitteln Sie alle diejenigen Primzahlen, die sich als Summe zweier aufeinanderfolgender von Null verschiedener natürlicher Zahlen darstellen lassen!
b) Beweisen Sie, dass es keine Primzahl gibt, die sich als Summe von drei oder mehr aufeinanderfolgenden von Null verschiedenen natürlichen Zahlen darstellen lässt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Von je zwei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist stets eine ungerade, die andere gerade. Daher ist ihre Summe stets ungerade.
Also können höchstens die ungeraden, d. h. die von 2 verschiedenen Primzahlen eine Darstellung der genannten Art besitzen.
Für jede Primzahl $p\geq 3$ gibt es die Darstellung

$$p=\frac{p-1}{2}+\frac{p+1}{2}$$

und darin gilt: Da p ungerade ist, sind $p-1$ und $p+1$ gerade, also $\frac{p-1}{2}$ und $\frac{p+1}{2}$ ganze Zahlen. Wegen $p\geq 3$ ist $p-1\geq 2$, also $\frac{p-1}{2}\geq 1$ eine von Null verschiedene natürliche Zahl.
Wegen $\frac{p-1}{2}+1=\frac{p+1}{2}$ ist $\frac{p+1}{2}$ die darauffolgende (und damit ebenfalls von Null verschiedene) natürliche Zahl.
Die gesuchten Primzahlen sind also genau alle Primzahlen $p\geq 3$.

b) Angenommen, es gäbe eine Primzahl p und für sie eine Darstellung $p=a_1+...+a_n \quad (1)$ mit $n\geq 3$ aufeinanderfolgenden von Null verschiedenen natürlichen Zahlen $a_1,...,a_n$.
Nach der bekannten Formel für die Summe aufeinanderfolgender Zahlen wären dann

$$p=\frac{1}{2}\cdot n\cdot(a_1+a_n)$$

Daher müsste mindestens eine der Zahlen n, $(a_1 + a_n)$ gerade sein. Ferner wäre $a_1 \geq 1$, $a_n \geq n$, also $a_1 + a_n \geq 1 + n$.
Wäre n gerade, so wäre wegen $n \geq 3$ sogar $n \geq 4$, also p in die ganzzahligen Faktoren $\frac{1}{2}n \geq 2$ und $a_1 + a_n > n \geq 4$ zerlegt.
Wäre $a_1 + a_n$ gerade, so wäre p in die ganzzahligen Faktoren $n \geq 3$ und

$$\frac{1}{2}(a_1 + a_n) \geq \frac{1}{2}(1 + n) \geq \frac{1}{2}(1 + n) \geq \frac{1}{2}(1 + 3) = 2$$

zerlegt. Damit ist die Annahme über (1) widerlegt, d. h. der verlangte Beweis geführt.

Aufgabe 320921:
Ein pythagoreisches Zahlentripel $(a; b; c)$ besteht aus drei von 0 verschiedenen natürlichen Zahlen a, b, c, für die $a^2 + b^2 = c^2$ gilt.
a) Geben Sie drei verschiedene Tripel $(a; b; c)$ mit $a \leq b$ an und bestätigen Sie, dass es pythagoreische Zahlentripel sind!
b) Warum gibt es kein pythagoreisches Zahlentripel mit $a = b$?

Lösung von cyrix:
a) Offensichtlich ist für jedes natürliche $n > 0$ das Tripel $(3n; 4n; 5n)$ wegen

$$(3n)^2 + (4n)^2 = 9n^2 + 16n^2 = 25n^2 = (5n)^2$$

ein pythagoreisches.

b) Wäre $a = b$, so also $c^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$, also $2 = \frac{c^2}{a^2}$ mit $\sqrt{2} = \frac{c}{a} \in \mathbb{Q}$, was ein Widerspruch ist.

III Runden 3 & 4

Aufgabe V10933:
Für alle ungeraden Zahlen n ist die Differenz $n^2 - 1$ durch 8 teilbar.
Beweisen Sie diese Aussage!

Lösung von svrc:
Da n eine ungerade ganze Zahl ist, gibt es eine ganze Zahl k so, dass $n = 2k + 1$ ist. Es gilt

$$n^2 - 1 = (2k + 1)^2 - 1 = 4k^2 + 4k + 1 - 1 = 4k^2 + 4k = 4k\,(k + 1)\,.$$

Da in dem Produkt die zwei aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen k und $k + 1$ auftauchen, ist genau eine davon auch durch 2 teilbar. Somit ist $n^2 - 1$ für alle ungeraden ganzen Zahlen n durch 8 teilbar.

Aufgabe 010933:
Es ist der Bruch zu finden, der gleich 0,4 ist und dessen Zähler und Nenner als Summe eine zweistellige Quadratzahl ergeben!
Wie haben Sie die Lösung gefunden?

Lösung von Christiane Behns:
Jeder Bruch, der gleich 0,4 ist, hat die Form $\frac{2n}{5n}$.
Die Summe $2n + 5n = 7n$ ist nur für $n = 7$ eine zweistellige Quadratzahl. Also ist der gesuchte Zähler gleich 14, der Nenner gleich 35.

Aufgabe 020931:
Vermindert man die siebente Potenz einer positiven ganzen Zahl um diese Zahl, so ist die Differenz stets durch die Summe aus der 1., 2. und 3. Potenz dieser Zahl teilbar.

Lösung von André Lanka:
Sei n eine beliebige ganze, positive Zahl. Dann gilt:

$$\begin{aligned} n^7 - n &= n(n^6 - 1) = n(n^3 + 1)(n^3 - 1) \\ &= n(n^3 + 1)(n - 1)(n^2 + n + 1) = (n^3 + 1)(n - 1)(n^3 + n^2 + n) \end{aligned}$$

Die ersten beiden Faktoren bilden ganze Zahlen. Daher ist $n^7 - n$ ohne Rest durch $n^3 + n^2 + n$ teilbar.

Aufgabe 030934:
Das Produkt von vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist 110355024.
Wie lauten die Zahlen? Der Lösungsweg ist ausführlich zu begründen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die natürlichen Zahlen seien $n, n + 1, n + 2, n + 3$.
Laut Voraussetzung ist $n(n+1)(n+2)(n+3) = 110355024$. Daraus folgt $n^4 < 111000000$, also $n < 104$.
Andererseits gilt $(n + 3)^4 > n(n + 1)(n + 2)(n + 3) > 100000000$, somit $n + 3 > 100$, also $n > 97$. Damit gilt $97 < n < 104$.
110355024 ist nicht durch 5 teilbar, folglich ist auch keine der gesuchten Zahlen durch 5 teilbar.
Dies trifft nur für $n = 101$ zu. Die gesuchten Zahlen lauten also $101, 102, 103, 104$.

Aufgabe 040934:
Ist die folgende Aussage richtig?
Vermehrt man das Produkt von vier beliebigen unmittelbar aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen um 1, so erhält man eine Quadratzahl.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Bezeichnet man die erste Zahl mit n, so erhält man

$$n \cdot (n + 1) \cdot (n + 2) \cdot (n + 3) + 1 = n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n + 1 = (n^2 + 3n + 1)^2$$

D. h., das Produkt vier beliebiger aufeinander folgender Zahlen vermehrt um eins ist ein Produkt, also ist die Aussage wahr.

Aufgabe 060931:
Zwei Primzahlen p_1 und p_2 (mit $p_1 > p_2$) heißen Primzahlzwillinge, wenn $p_1 - p_2 = 2$ gilt. Beweisen Sie, dass für alle Primzahlzwillinge p_1 und p_2, für die $p_2 > 3$ ist, stets die Summe $p_1 + p_2$ durch 12 teilbar ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Laut Aufgabe gilt $p_1 = p_2 + 2$. Also gilt

$$p_1 + p_2 = p_2 + 2 + p_2 = 2p_2 + 2 = 2(p_2 + 1)$$

Da jede Primzahl > 3 eine ungerade Zahl ist, ist $p_2 + 1$ gerade und $p_1 + p_2$ mithin durch 4 teilbar.
Ferner sind p_2, $p_2 + 1$ und $p_2 + 2 (= p_1)$ drei aufeinanderfolgende natürliche Zählen, von denen somit genau eine durch 3 teilbar ist.
Da aber p_1 und p_2 Primzahlen größer als 3 sind, sind diese beiden Zahlen nicht durch 3 teilbar. Also ist $p_2 + 1$ durch 3 teilbar und damit $p_1 + p_2 = 2(p_2 + 1)$ durch 12 teilbar. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Aufgabe 060934:
Zeigen Sie, dass es unter allen Zahlen der Form $2p+1$, wobei p eine Primzahl ist, genau eine Kubikzahl gibt!

Lösung von StrgAltEntf:
Sei $2p+1=a^3$. Dann ist a ungerade und es gilt

$$p=\frac{a^3-1}{2}=\frac{a-1}{2}(a^2+a+1)$$

Da p prim, muss $\frac{a-1}{2}=1$ oder $a^2+a+1=1$ gelten.
Da $a^2+a+1>1$ folgt $a=3$ und somit $p=13$. In der Tat ist 13 prim und es gilt $2\cdot 13+1=3^3$.

Aufgabe 080935:
Es ist zu beweisen, dass für jede ungerade Zahl n die Zahl $n^{12}-n^8-n^4+1$ durch 512 teilbar ist.

Lösung von ZePhoCa:
Sei $m=n^4$. Dann ist die Zahl m^3-m^2-m+1 zu untersuchen.
Es gilt $m^3-m^2-m+1=(m-1)^2(m+1)$.
Da n ungerade ist, gilt $n=2k+1$ und damit

$$m=(2k+1)^4=16k^4+32k^3+24k^2+8k+1$$

Damit ist $m+1$ durch 2 teilbar und es gilt

$$m-1=16k^4+32k^3+24k^2+8k=16(k^4+2k^3+k^2)+8(k^2+k)$$

Da $k^2+k=k(k+1)$ gerade ist, ist also $m-1$ durch 16 teilbar. Also ist m^3-m^2-m+1 durch $16\cdot 16\cdot 2=512$ teilbar.

Aufgabe 090934:
Man beweise:
Wenn zwei ganze Zahlen a und b die Bedingung erfüllen, dass die Zahl $11a+2b$ durch 19 teilbar ist, dann ist auch die Zahl $18a+5b$ durch 19 teilbar.

Lösung von cyrix:
Mit $11a+2b$ ist auch

$$12\cdot(11a+2b)-19\cdot(6a+b)=132a+24b-114a-19b=18a+5b$$

durch 19 teilbar.

Aufgabe 120931:
Man beweise, dass für jede natürliche Zahl n die Zahl n^6-n^2 durch 10 teilbar ist.

Lösung von ZePhoCa:
Es gilt $n^6-n^2=n^2(n^4-1)=n^2(n^2-1)(n^2+1)=n^2(n-1)(n+1)(n^2+1)$. Von den aufeinanderfolgenden Zahlen n und $n+1$ ist eine gerade, also ist n^6-n^2 durch 2 teilbar.

Wenn n bei Division durch 5 den Rest 0,1 oder 4 lässt, dann ist n bzw. $n-1$ bzw. $n+1$ durch 5 teilbar und das Produkt damit auch.
Lasse n nun bei Division durch 5 den Rest 2 oder 3, also $n = 5k+2$ oder $n = 5k+3$. Dann ist $n^2+1 = 25k^2+20k+5$ oder $n^2+1 = 25k^2+30k+10$ durch 5 teilbar. Also ist n^6-n^2 in jedem Fall durch 5 teilbar.
Da 2 und 5 teilerfremd sind ist damit n^6-n^2 auch durch 10 teilbar.

Alternativ-Lösung von cyrix:
Die letzte Ziffer einer Quadratzahl n^2 kann nur 0, 1, 4, 5, 6 oder 9 lauten, wie man leicht durch Nachrechnen überprüft. Für diese Ziffern gilt aber, dass die Kubikzahl einer auf eine solche Ziffer endende Zahl wieder auf diese Ziffer endet, wie man ähnlich leicht nachrechnet. Insbesondere enden also $n^6 = (n^2)^3$ und n^2 auf die gleiche Ziffer, sodass ihre Differenz auf die Ziffer 0 enden und sie somit durch 10 teilbar sein muss.

Aufgabe 130932:
Man gebe alle natürlichen Zahlen n an, für die $(n-1)^3+n^3+(n+1)^3$ durch 10 teilbar ist!

Lösung von cyrix:
Es ist $(n-1)^3+n^3+(n+1)^3 = 3n^3+6n = 3n(n^2+2)$. Weiterhin ist n^2+2 gerade genau dann, wenn auch n gerade ist. Wegen $(5k\pm1)^2+2 = 25k^2\pm10k+1+2 = 5\cdot(5k^2\pm2k)+3$ und $(5k\pm2)^2+1 = 25k^2\pm20k+4+1 = 5\cdot(5k^2\pm4k+1)$ ist n^2+2 genau dann durch 5 teilbar, wenn n den Rest 2 oder 3 bei der Teilung durch 5 lässt.
Damit ist $3n(n^2+2)$ genau dann durch 5 teilbar, wenn n den Rest 0 (dann ist n durch 5 teilbar), 2 oder 3 (dann ist n^2+2 durch 5 teilbar) bei der Teilung durch 5 lässt.
Außerdem ist $3n(n^2+2)$ genau dann durch 2 teilbar, wenn es n auch ist.

Zusammen folgt (wegen ggT(2,5) = 1), dass $(n-1)^3+n^3+(n+1)^3 = 3n(n^2+2)$ genau dann durch 10 teilbar ist, wenn es durch 2 und 5 teilbar ist, also n die Endziffer 0, 2 oder 8 besitzt.

Aufgabe 160934:
Beweisen Sie, dass für keine Primzahl $p \neq 3$ und für keine natürliche Zahl $n \geq 1$ die Zahl $(3n-1)\cdot p^2+1$ Primzahl ist!

Lösung von cyrix:
Da p eine von 3 verschiedene Primzahl ist, ist es nicht durch 3 teilbar und lässt sich schreiben als $3m+1$ oder $3m-1$ mit einer natürlichen Zahl m.
Dann ist
$$\begin{aligned}(3n-1)\cdot p^2+1 = (3n-1)(3m\pm1)^2+1 = (3n-1)(9m^2\pm6m+1)+1 =\\ = 3(9m^2n\pm6mn+n-3m^2\mp2m)-1+1\end{aligned}$$
also durch 3 teilbar, aber sicher größer als 3 (da $3n-1>1$ und $p^2\geq4$), also sicher keine Primzahl, □.

Aufgabe 170935:

Beweisen Sie folgende Aussage!
Vergrößert man das Produkt von vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen um 1, so erhält man das Quadrat einer natürlichen Zahl.

Lösung von cyrix:
Für eine natürliche Zahl n gilt:
$$\begin{aligned}n(n+1)(n+2)(n+3)+1 &= (n+1)(n+2)(n^2+3n)+1\\ &= (n+1)(n+2)[(n+1)(n+2)-2]+1\\ &= [(n+1)(n+2)]^2-2(n+1)(n+2)+1\\ &= [(n+1)(n+2)-1]^2\ .\end{aligned}$$

Aufgabe 230931:
Man ermittle alle Tripel (x, y, z) natürlicher Zahlen mit folgenden Eigenschaften:
(1) x, y und z sind Primzahlen.
(2) Jede Ziffer aus den Zifferndarstellungen von x, y und z (im dekadischen Zahlensystem) stellt eine Primzahl dar.
(3) Es gilt $x < y$.
(4) Es gilt $x + y = z$.

Lösung von cyrix:
Wegen (1) und (4) ist $z \geq 2+2 > 2$, also ungerade. Damit ist genau eine der beiden Summanden x bzw. y gerade, also wegen (1) gleich 2, sodass wegen (3) $x = 2$ gilt, da dies die kleinste Primzahl ist. Damit sind y und z Primzahlzwillinge.
Mehrstellige Primzahlzwillinge besitzen aber die Endziffern (9 und 1), (1 und 3) oder (7 und 9), da die Endziffer 5 zur Teilbarkeit durch 5 und damit (und wegen der Mehrstelligkeit) zum Widerspruch zu (1) führen würde. Also ist $y < z$ einstellig und es ergeben sich die Lösungstripel (2,3,5) und (2,5,7).

Aufgabe 240931:
Beweisen Sie, dass es keine vierstellige Quadratzahl z mit den folgenden Eigenschaften (1) und (2) gibt!
(1) Die erste und die dritte Ziffer von z sind einander gleich.
(2) Die zweite und die vierte Ziffer von z sind einander gleich.

Lösung von cyrix:
Nehmen wir an, es gäbe eine solche Zahl z und bezeichnen ihre erste Ziffer mit a sowie ihre zweite mit b. Dann ist $z = 1000 \cdot a + 100 \cdot b + 10 \cdot a + b = 101 \cdot (10a + b)$.
Da $z > 0$ eine Quadratzahl ist, aber 101 eine Primzahl, die z teilt, muss auch $101^2 > 10000$ die Zahl z teilen, was ein Widerspruch zur Vierstelligkeit von z ist. Demnach gibt es keine vierstellige Quadratzahl z, die die Bedingungen (1) und (2) erfüllt, $\square$.

Aufgabe 270935:
Untersuchen Sie, ob es eine natürliche Zahl $n \geq 1$ gibt, für die $2^{n+2} + 3^{2n+1}$ eine Primzahl ist!

Lösung von cyrix:
Da für $n \geq 1$ die Zahl $z := 2^{n+2} + 3^{2n+1} > 3^2 = 9 > 7$, aber wegen

$$z = 4 \cdot 2^n + 3 \cdot 9^n \equiv 4 \cdot 2^n + 3 \cdot 2^n = 7 \cdot 2^n \equiv 0 \pmod 7$$

durch 7 teilbar und damit keine Primzahl ist, gibt es keine solche Zahl.

Aufgabe 280931:
Man nennt drei von 0 verschiedene natürliche Zahlen a, b, c genau dann ein pythagoreisches Zahlentripel, wenn sie die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ erfüllen.
Beweisen Sie, dass in jedem pythagoreischen Zahlentripel mindestens eine der drei Zahlen durch 5 teilbar ist!

Lösung von cyrix:
Sind a und b nicht durch 5 teilbar, lassen sie aber wegen $(5k \pm 1)^2 = 25k^2 \pm 10k + 1$ und $(5k \pm 2)^2 = 25k^2 \pm 20k + 4$ beide die Reste 1 oder 4 bei der Division durch 5.
Damit lässt $a^2 + b^2$ also einen der Reste $1 + 1 = 2$, $1 + 4 = 4 + 1 = 5$ – also 0 – oder $4 + 4 = 8$ – also 3 – bei der Division durch 5. Da aber auch c^2 als Quadratzahl nur einen der Reste 0, 1 oder 4 bei der Division durch 5 lassen kann, fallen der erste und der letzte Fall für den Rest der Summe $a^2 + b^2$ weg und $a^2 + b^2 = c^2$ muss durch 5 teilbar sein, $\square$.

Aufgabe 330935:
Ermitteln Sie alle positiven ganzen Zahlen n mit der Eigenschaft, dass die drei Zahlen $n+1$, $n+10$ und $n+55$ einen gemeinsamen Teiler größer als 1 haben!

Lösung von cyrix:
Sei g ein gemeinsamer Teiler der drei Zahlen. Dann ist auch g ein Teiler von $(n+10)-(n+1)=9$. Damit die drei Zahlen also einen gemeinsamen Teiler größer 1 haben, müssen sie alle drei durch 3 teilbar sein. Dies ist genau für $n=3m-1$ mit einer beliebigen positiven ganzen Zahl m der Fall, denn dann ist $n+1=3m$, $n+10=3m+9=3(m+3)$ und $n+55=3m+54=3(m+18)$; sonst ist keine der Zahlen durch 3 teilbar, sodass insbesondere $n+10$ und $n+1$, also auch alle drei Zahlen gemeinsamen, teilerfremd sind. Die gesuchten Zahlen sind also die der Form $3m-1$ mit positiven ganzen Zahlen m.

Aufgabe 340932:
Beweisen Sie, dass es keine natürliche Zahl n gibt, für die die Zifferndarstellung der Zahl 9^n+1 auf mehr als eine Null enden würde!

Lösung von cyrix:
Würde 9^n+1 auf mindestens zwei Nullen Enden, so wäre es durch 4 teilbar. Es ist aber $9^n-1=9^n-1^n$ durch $9-1=8$, also insbesondere durch 4 teilbar, sodass $9^n+1=(9^n-1)+2$ nie durch 4 teilbar sein kann, $\square$.

Aufgabe 340935:
Man ermittle alle diejenigen positiven ganzen Zahlen n, für die jede der sechs Zahlen

$$n, \quad n+2, \quad n+6, \quad n+8, \quad n+12, \quad n+14$$

eine Primzahl ist.

Lösung von cyrix:
Es ist genau eine der Zahlen n, $n+6=5+(n+1)$, $n+2$, $n+8=5+(n+3)$ und $n+14=10+(n+4)$ durch 5 teilbar, da auch genau eine der fünf aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen n bis $n+4$ durch 5 teilbar ist.

Die sechs Zahlen können also nur dann allesamt Primzahl sein, wenn die 5 unter ihnen ist. Da $n>0$ gilt, kommt dafür nur n oder $n+2$ in Frage. Wäre aber $n+2=5$, so wäre $n+12=15$ keine Primzahl. Also verbleibt nur $n=5$, was wegen $n+2=7$, $n+6=11$, $n+8=13$, $n+12=17$ und $n+14=19$ tatsächlich eine Lösung ist. Es gibt also nur genau ein solches n, nämlich $n=5$.

Aufgabe 340942:
Zeigen Sie, dass die Zahl $z=7+7^3+7^5+7^7+...+7^{93}+7^{95}$ durch 336 teilbar ist!

Lösung von cyrix:
Es ist $z=7\cdot(1+7^2+7^4+7^6+\cdots+7^{94})$ offensichtlich durch 7 teilbar und

$$\frac{z}{7}=49^0+49^1+49^2+49^3+\cdots+49^{47}\equiv 1^0+1^1+1^2+\cdots+1^{47}=48\equiv 0 \pmod{48}$$

durch 48 teilbar, also z durch $7\cdot 48=336$ teilbar, $\square$.

V.II (Dezimal-)Zahldarstellung, Endziffern, (quadratische) Reste

I Runde 1

Aufgabe V00904:
Für eine Reihe technischer Anwendungen, z. B. für des Rechnen mit elektronischen Rechenmaschinen, ist es erforderlich, die Zahlen im Zweiersystem (Dualsystem), also als Summe von Potenzen der Zahl 2, auszudrücken. Drücken Sie die Zahl 413 im Dualsystem aus!
Verwenden Sie folgende Anleitung!

$$\begin{array}{cccccccccc} 270 = & 1\cdot 2^8 & +0\cdot 2^7 & +0\cdot 2^6 & +0\cdot 2^5 & +0\cdot 2^4 & +1\cdot 2^3 & +1\cdot 2^2 & +1\cdot 2^1 & +0 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ & \mathrm{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{L} & \mathrm{L} & \mathrm{L} & 0 \end{array}$$

Lösung von Steffen Polster:
Lösung: $413 = [110011101]_2$

Aufgabe V00907:
Die Quersumme einer zweistelligen Zahl ist 12. Subtrahiert man von dieser Zahl die Zahl, die dieselben Ziffern in umgekehrter Reihenfolge enthält, so erhält man 54. Wie heißt die Zahl?

Lösung von Steffen Polster:
Die gesuchte Zahl z sei $z = 10a + b$. Dann wird für die Ziffern a und b

$$a + 5 = 12 \qquad \text{(I)}$$
$$(10a + 5) - (10b + a) = 54 \qquad \text{(II)}$$

Das Gleichungssystem hat die Lösung $a = 9$ und $b = 3$. Da $93 - 39 = 54$ die Probe besteht, ist 93 die gesuchte Zahl.

Aufgabe V00908:
Zu entziffern ist:

$$a \cdot c \cdot \overline{ac} = \overline{ccc}$$

Gleiche Buchstaben stellen gleiche Ziffern dar.

Lösung von Steffen Polster:
Die Gleichung wird, da $c > 0$ sein muss, zu

$$(10a + c) \cdot a \cdot c = 100c + 10c + c$$
$$(10a + c) \cdot a = 111 = 3 \cdot 37$$

Da $a < 10$ ist, muss somit $a = 3$ sein. Damit ergibt sich $c = 7$. Es ergibt sich somit $3 \cdot 7 \cdot 37 = 777$.

Aufgabe 020914:
Welche zweistelligen Zahlen xy haben ein Quadrat von der Form zxy (x, y und z sind eine der Ziffern 0 bis 9)?

Es ist zu beweisen, dass die Lösung vollständig ist!

Lösung von André Lanka:
Die Ziffer y muss eine der Ziffern 1, 5 oder 6 sein, denn nur bei diesen Ziffern endet ihr Quadrat auf sich selbst ($1 \cdot 1 = 1$, $5 \cdot 5 = 25$ und $6 \cdot 6 = 36$).

Ferner gilt als Obergrenze $xy \leq 31$, da $32^2 = 1024$ und damit vierstellig statt wie gefordert dreistellig.

Als Lösungen für die Aufgabe kommen daher nur die Zahlen 11,15,16,21,25,26 und 31 in Frage. zxy muss als Quadrat auch durch xy teilbar sein, d. h. $z00$ muss ebenfalls durch xy teilbar sein. Damit entfallen 11, 21, 26 und 31. Durch Ausprobieren der drei verbleibenden Zahlen 15, 16 und 25 erhält man die einige Lösung: 25.

Aufgabe 060912:
Bildet man von einer natürlichen Zahl die Quersumme und von dieser (wenn möglich) wieder die Quersumme usw., so erhält man schließlich eine einstellige Zahl, die wir die „letzte Quersumme“ nennen wollen. Dabei wird die Quersumme einer einstelligen Zahl nach Definition der Zahl gleichgesetzt.

Berechnen Sie, wie viel natürliche Zahlen von 1 bis 1000 die „letzte Quersumme“ 9 haben!

Lösung von Manuela Kugel:
Die erste Quersumme Q_n einer ein-, zwei- oder dreistelligen Zahl n kann maximal 27 sei, nämlich für eine Zahl ausschließlich bestehend aus der größten Ziffer 9 $\Rightarrow Q_{999} = 9 + 9 + 9 = 27$. Dies ist gleichzeitig die einzige Zahl, die diese Quersumme hat und ist eine der gesuchten Zahlen, da $Q_{27} = 9$.

Die nächstkleinere erste Quersumme, deren letzte Quersumme 9 ist, ist 18. Danach folgt nur noch die Quersumme 9, deren letzte Quersumme natürlich auch 9 ist. Wir müssen nun also noch alle Zahlen finden, deren Quersumme 9 oder 18 ist.

Im Bereich der ein- und zweistelligen Zahlen sind $9, 18, 27, \ldots, 81, 90$ die einzigen Zahlen mit Quersumme 9 und 99 die einzige Zahle mit Quersumme 18. Dies sind in Summe 11 Zahlen.
Im Bereich 100 bis 199 kommen wir ebenfalls auf 11 solche Zahlen: $108, 117, 126, \ldots, 171, 180$ mit Quersumme 9 sowie 189 und 198 mit Quersumme 18.

Diese Bildungsvorschrift setzt sich in jedem Hunderterbereich mit 11 Zahlen, deren Quersumme 9 oder 18 ist, fort.
Damit ergeben sich $10 \cdot 11 + 1$ Zahlen, deren Quersumme 9, 18 oder 27 und damit deren letzte Quersumme 9 ist.

Alternativ-Lösung von cyrix:
Da eine natürliche Zahl genau dann durch 9 teilbar ist, wenn es ihre Quersumme auch ist, ist die „letzte Quersumme“ einer positiven ganzen Zahl genau dann 9, wenn sie selbst durch 9 teilbar ist. Dies trifft auf genau $\frac{999}{9} = 111$ Zahlen im vorgegebenen Bereich zu, sodass dies die gesuchte Anzahl ist.

Aufgabe 070912:
Es ist x eine (im Dezimalsystem) sechsstellige Zahl, die mit der Ziffer 5 endet. Setzt man diese Ziffer von der sechsten an die erste Stelle, also vor die unverändert gebliebenen fünf übrigen Ziffern, so erhält man eine sechsstellige Zahl, die viermal so groß ist wie x.

Wie lautet die Zahl im Dezimalsystem?

Lösung von MontyPythagoras:
Sei y ein fünfstellige Zahl (f gesuchte Ziffern). Es ist $x = 10y + 5$ Dann gilt:

$$4 \cdot (10y + 5) = 500000 + y \qquad \to \qquad 39y = 499980 \qquad \to \qquad y = 12820$$

Damit lautet die Zahl im Dezimalsystem 128205.

Aufgabe 090914:
Als erste Quersumme einer natürlichen Zahl z sei die in üblicher Weise gebildete Quersumme verstanden. Ist die erste Quersumme von z eine Zahl mit mehr als einer Ziffer, so sei ihre Quersumme als die zweite Quersumme von z bezeichnet.

Beispiele: Die erste Quersumme von 98 ist $9 + 8 = 17$, die zweite Quersumme von 98 ist $1 + 7 = 8$. Die erste Quersumme von 43 ist $4 + 3 = 7$, eine zweite Quersumme von 43 wird nicht erklärt.

Ist die zweite Quersumme von z eine Zahl mit mehr als einer Ziffer, so heiße deren Quersumme die dritte Quersumme von z. In entsprechender Weise werden gegebenenfalls höhere Quersummen erklärt.

a) Ermitteln Sie die Anzahl der natürlichen Zahlen von 10 bis 1000, für die keine zweite Quersumme erklärt ist!

b) Ermitteln Sie die Anzahl der natürlichen Zahlen von 10 bis 1000, für die die zweite, aber nicht die dritte Quersumme erklärt ist!

c) Ermitteln Sie die kleinste natürliche Zahl, für die eine vierte Quersumme erklärt ist!

Lösung von Julia Erhard:

a) Damit die 2. Quersumme nicht erklärt ist, muss die 1. Quersumme kleiner als 10 sein. Betrachtet man nun alle Zahlen, die aus 3 Ziffern gebildet werden können (jeweils alle Ziffern von 0 bis 9), so sind damit auch alle ein- und zweistelligen Zahlen enthalten. Die folgenden Ziffern führen zu einer Quersumme von 0 bis 9:
$\{0{,}0{,}0\}$, ... $\{0{,}0{,}9\} \Rightarrow 10$ Möglichkeiten $\{0{,}1{,}1\}$, ... $\{0{,}1{,}8\} \Rightarrow 8$ Möglichkeiten
$\{0{,}2{,}2\}$, ... $\{0{,}2{,}7\} \Rightarrow 6$ Möglichkeiten $\{0{,}3{,}3\}$, ... $\{0{,}3{,}6\} \Rightarrow 4$ Möglichkeiten
$\{0{,}4{,}4\}$, ... $\{0{,}4{,}5\} \Rightarrow 2$ Möglichkeiten $\{1{,}1{,}1\}$, ... $\{1{,}1{,}7\} \Rightarrow 7$ Möglichkeiten
$\{1{,}2{,}2\}$, ... $\{1{,}2{,}6\} \Rightarrow 5$ Möglichkeiten $\{1{,}3{,}3\}$, ... $\{1{,}3{,}5\} \Rightarrow 3$ Möglichkeiten
$\{1{,}4{,}4\} \Rightarrow 1$ Möglichkeit $\{2{,}2{,}2\}$, ... $\{2{,}2{,}5\} \Rightarrow 4$ Möglichkeiten
$\{2{,}3{,}3\}$, ... $\{2{,}3{,}4\} \Rightarrow 2$ Möglichkeiten $\{3{,}3{,}3\} \Rightarrow 1$ Möglichkeit
Von diesen 53 Möglichkeiten gibt es 4 Varianten mit 3 gleichen Ziffern, 26 Varianten mit einem gleichen Ziffernpaar und 23 Varianten mit sämtlich unterschiedlichen Ziffern. Die Kombination aus unterschiedlichen Ziffern ergibt jeweils $6 = 3!$, also $23 \cdot 6 = 138$ verschiedene Zahlen; bei einem gleichen Zahlenpaar gibt es je $3 = 3!/2!$, also $26 \cdot 3 = 78$ Zahlen. Insgesamt erhält man somit (da 0 bis 9 nicht, 1000 dafür aber auch noch gezählt wird) die folgende Anzahl gesuchter Zahlen: $4 + 78 + 138 - 10 + 1 = 211$

b) 991 Zahlen werden überhaupt nur betrachtet. 211 bilden nur eine Quersumme. Also gibt es 991 - 211 = 780 Zahlen, die eine zweite Quersumme bilden. Es müssen nur noch die ausgeschlossen werden, die eine dritte Quersumme bilden. Die erste Quersumme kann maximal $27 = 9 + 9 + 9$ sein, d. h. die 2. Quersumme ist maximal 10 (genau dann, wenn die 1. Quersumme 19 ist). Und auch nur genau in diesen Fällen ist die 3. Quersumme erklärt. Wir müssen also alle die Zahlen ausschließen, deren 1. Quersumme 19 ist.

Keine zweistellige Zahl hat als Quersumme 19. Die gesuchten Zahlen sind also sämtlich dreistellig. Die Ziffern der gesuchten Zahlen bestehen aus folgenden Kombinationen und deren Vertauschungen: $\{9{,}9{,}1\}$, $\{9{,}8{,}2\}$, $\{9{,}7{,}3\}$, $\{9{,}6{,}4\}$, $\{9{,}5{,}5\}$, $\{8{,}8{,}3\}$, $\{8{,}7{,}4\}$, $\{8{,}6{,}5\}$, $\{7{,}7{,}5\}$, $\{7{,}6{,}6\}$. Unter diesen 10 Möglichkeiten gibt es je 5 mit verschiedenen Ziffern und mit einem gleichen Ziffernpaar. Damit ergeben sich analog zu a) die daraus zu bildenden Zahlen: $5 \cdot 6 + 5 \cdot 3 = 30 + 15 = 45$ verschiedene Zahlen mit 3. Quersumme.

Die Summe der Zahlen, die eine 2. aber keine 3.Quersumme bilden ist also 780 - 45 = 735

c) Die kleinste natürliche Zahl, für die eine vierte Quersumme erklärt ist, lautet:
19.999.999.999.999.999.999.999

Es gibt keine kleinere, da die Quersumme möglichst gering gehalten werden muss, damit auch die Zahl möglichst klein bleibt. Die kleinste 2.Quersumme kann nur 19 sein, da sie die kleinste 2-stellige Zahl ist, die wieder eine 2-stellige Quersumme hat. Also muss die 1.Quersumme selbst eine Quersumme von 19 haben, wobei wiederum keine kleinere Zahl als 199 dies erfüllen kann. Die 1.Quersumme wird durch Addition aller Ziffern der Zahl gebildet. Die kleinste Zahl, die diese Quersumme bilden kann hat also möglichst wenig Stellen, d. h. von rechts her sind möglichst viele 9er aufzufüllen. Dies führt zu einer Zahl mit 1 beginnend und 22 Neunen.

Aufgabe 100911:
Auf die Frage nach seinem Alter sagte Herr X:

„Die Quersumme der Anzahl meiner Lebensjahre beträgt genau ein Drittel dieser Anzahl. Das Quadrat der Quersumme der Anzahl meiner Lebensjahre ist genau dreimal so groß wie die Anzahl meiner Lebensjahre.“

Können die Angaben von Herrn X zutreffen? Wenn ja, wie alt ist Herr X? (Angaben in vollen Lebensjahren)

Lösung von Manuela Kugel:

a) Wenn die Angaben von Herrn X zutreffen, ist das Quadrat der erwähnten Quersumme genau dreimal so groß wie die Anzahl der Lebensjahre und diese wiederum dreimal so groß wie die erwähnte Quersumme. Daher ist das Quadrat dieser Quersumme genau neunmal so groß wie die Quersumme selbst. Daraus folgt, dass 9 die Quersumme und somit 27 Jahre das Alter von Herrn X ist.

b) Ist 27 Jahre das Alter von Herrn X, so ist 9 die Quersumme der Anzahl seiner Lebensjahre, also ein Drittel dieser Anzahl. Ferner ist dann das Quadrat 81 der Quersumme genau dreimal so groß wie die Anzahl der Lebensjahre des Herrn X. Daher treffen die Angaben von Herrn X zu.

Aus b) folgt, dass die Angaben von Herrn X zutreffen können. Hierzu und aus a) folgt: Herr X ist 27 Jahre alt.

Aufgabe 140913:
An eine im dekadischen System geschriebene natürliche Zahl z werden folgende Forderungen gestellt:

(1) Die Quersumme von z soll 11 betragen.

(2) Die Ziffern von z sollen paarweise verschieden sein.

(3) Die Zahl z soll durch 11 teilbar sein.

Ermitteln Sie alle Zahlen z, die die Forderungen (1) bis (3) erfüllen!

Lösung von Manuela Kugel:
Die Teilbarkeitsregel für die Zahl 11 besagt: eine Zahl ist genau dann durch 11 teilbar, wenn ihre alternierende Quersumme durch 11 teilbar ist. Da die Quersumme der Zahl genau 11 sein muss, folgt daraus, dass die alternierende Quersumme 0 oder 11 ist.

Damit kann die gesuchte Zahl nicht zweistellig sein, denn wäre die alternierende Quersumme Null, so müssten beide Ziffern gleich sein, was (2) widerspricht; und die alternierende Quersumme 11 kann bei einer zweistelligen Zahl nicht erreicht werden.

Die gesuchten Zahlen können aber dreistellig sein: genau dann, wenn die mittlere Ziffer Null ist, erhält man für die alternierende Quersumme den Wert der Quersumme $\Rightarrow$ Regel: die erste und dritte Ziffer müssen zusammen 11 ergeben. Dies gilt für 209, 308, 407, 506, 605, 704, 803, 902. Nach einer anderen Regel kann bei einer dreistelligen Zahl keine alternierende Quersumme von 11 bei einer Quersumme von 11 erreicht werden.

Die alternierende Quersumme Null bei einer dreistelligen Zahl mit der Quersumme 11 kann nicht auftreten, da folgendes gelten muss: $a_1 + a_2 + a_3 = 11 \Rightarrow a_1 + a_3 = 11 - a_2$ bzw. $a_1 + a_3 = a_2$. Dies ergibt zusammengefasst: $11 - a_2 = a_2 \Rightarrow a_2 = 5{,}5$.

Bei einer vier- und mehrstelligen Zahl mit Quersumme 11 kann eine alternierende Quersumme 11 nicht auftreten, da mindestens eine Ziffer ungleich Null mit einem negativen Vorzeichen behaftet wird.

Für eine vierstellige Zahl gilt allgemein für die Quersumme und die alternierende Quersumme Null wieder: $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 11 \Rightarrow a_1 + a_3 = 11 - a_2 - a_4$ bzw. $a_1 + a_3 = a_2 + a_4$. Und zusammengefasst: $11 - a_2 - a_4 = a_2 + a_4 \Rightarrow a_2 + a_4 = 5{,}5$, was nicht auftreten kann.

Für eine fünfstellige Zahl gilt nun für die Quersumme und die alternierende Quersumme Null: $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 11 \Rightarrow a_1 + a_3 + a_5 = 11 - a_2 - a_4$ bzw. $a_1 + a_3 + a_5 = a_2 + a_4$. Und zusammengefasst: $11 - a_2 - a_4 = a_2 + a_4 \Rightarrow a_2 + a_4 = 5{,}5$, was nicht auftreten kann.

Die gesuchte Zahl kann nicht sechs- und mehrstellig sein, da bei 6 verschiedenen Ziffern die minimale Quersumme $0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ den Wert 11 übersteigt.

Damit sind die einzigen Lösungen die der dreistelligen Zahlen wie oben angegeben.

Aufgabe 150911:
Ermitteln Sie alle im dekadischen Zahlensystem geschriebenen vierstelligen natürlichen Zahlen, die gleichzeitig folgende Bedingungen erfüllen!

(1) Die Zahl wird mit vier Ziffern geschrieben, die, einzeln für sich gelesen, vier unmittelbar aufeinanderfolgende Zahlen bezeichnen. An die Reihenfolge dieser Ziffern werden hier keine Anforderungen gestellt.

(2) Die Zahl ist durch 99 teilbar.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn eine Zahl die genannten Bedingungen erfüllt, so gilt:
Wegen (1) wird die Zahl mit den Ziffern 0, 1, 2, 3 oder 1, 2, 3, 4 oder 2, 3, 4, 5 oder 3, 4, 5, 6 oder 4, 5, 6, 7 oder 5, 6, 7, 8, oder 6, 7, 8, 9 (in irgendeiner Reihenfolge geschrieben.

Wegen (2) muss die Zahl durch 9 teilbar sein, nach der Teilbarkeitsregel für die 9 muss also ihre Quersumme durch 9 teilbar sein.

Wegen $0 + 1 + 2 + 3 = 5$; $1 + 2 + 3 + 4 = 10$; $2 + 3 + 4 + 5 = 14$; $3 + 4 + 5 + 6 = 18$; $4 + 5 + 6 + 7 = 22$; $5+6+7+8 = 26$; $6+7+8+9 = 30$ trifft das nur zu, wenn die Zahlen die Ziffern 3, 4, 5, 6 (in irgendeiner Reihenfolge enthält.
Nun gilt es genau 24 solche Zahlen , nämlich:

3456, 3465, 3546, 3564, 3645, 3654, 4356, 4365, 4536, 4563, 4635, 4653, 5346, 5364, 5436, 5463, 5634, 5643, 6345, 6354, 6435, 6453, 6534, 6543.

Von ihnen sind nur die 8 Zahlen

3465, 3564, 4356, 4653, 5346, 5643, 6435, 6534, durch 11 teilbar.

II. Diese 8 Zahlen erfüllen die Bedingung (1).
Sie sind ferner durch 9 und 11 und damit da 9 und 11 teilerfremd sind, durch 99 teilbar, erfüllen also auch die Bedingung (2).

Aufgabe 160912:
Jemand behauptet, dass es möglich sei, aus 7 Papierstücken auf folgende Weise genau 1976 Stücke herzustellen:

Man teilt einige der 7 Papierstücke jeweils in genau 7 Teile, danach wieder einige der nunmehr vorhandenen Papierstücke jeweils in genau 7 Teile usw.

Ist es möglich, dass man auf diese Weise, indem man also das beschriebene Verfahren genügend lange fortsetzt, genau 1976 Papierstücke erhält?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen es wäre möglich, auf diese Weise genau 1976 Papierstücke zu erhalten.

Da bei jeder Teilung 6 Papierstücke hinzukommen würden, müsste sich die Zahl 1976 in der Form

$$1976 = 6k + 7 \qquad \text{mit } k \in \mathbb{N}$$

darstellen lassen, d. h. 1976 müsste bei Division durch 6 den gleichen Rest haben wie 7, nämlich 1.
Das ist nicht der Fall, also ist es nicht möglich, auf diese Weise aus 7 Papierstücken genau 1976 Papierstücke zu erhalten.

Oder: Bei der ersten Teilung kommen zu der ursprünglichen Anzahl von 7 Papierstücken 6 weitere hinzu. Da auch bei jeder weiteren Teilung genau 6 Papierstücke hinzukommen, ergibt sich als Summe aller Papierstücke stets eine ungerade Zahl, also niemals die gerade Zahl 1976. Die Behauptung ist somit falsch.

Aufgabe 170913:
Herr A kaufte in einer Buchhandlung einige gleiche Bücher. Er hätte für jedes dieser Bücher einen ganzzahligen Betrag in Mark zu zahlen gehabt, der genau so groß war wie die Anzahl der von ihm gekauften Bücher. Wegen seines Sammeleinkaufs erhielt er jedoch für jedes Buch eine Mark Preisnachlass.

Als er zahlen wollte, stellte er fest, dass er nur 10-Mark-Scheine bei sich hatte; zwar so viele, dass das zum Bezahlen gereicht hätte, doch betrug der Gesamtpreis kein ganzzahliges Vielfaches von 10 Mark. Der Verkäufer konnte ihm auch nicht herausgeben.

Herr B, ein Bekannter von Herrn A, hielt sich zur gleichen Zeit in der Buchhandlung auf. Auch er hatte einige (andere) gleiche Bücher gekauft, und auch bei ihm betrug der Preis jedes einzelnen Buches genau so viel Mark, wie die Anzahl der von ihm gekauften Bücher ausmachte. Er erhielt keinen Preisnachlass.

Da seine Rechnung zusammen mit der von Herrn A einen Betrag ergab, der ausnahmslos mit 10-Mark-Scheinen beglichen werden konnte, bezahlte Herr A denjenigen Teilbetrag für Herrn B mit, der diesem noch fehlte, nachdem er einen möglichst großen Anteil seiner Rechnung mit 10-Mark-Scheinen beglichen hatte.

Wieviel Mark hatte Herr A für Herrn B damit ausgelegt?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, Herr A habe a Bücher gekauft. Dann betrugt der ursprüngliche Preis eines Buches a Mark, nach dem Preisnachlass $(a-1)$ Mark. Herr A hatte demnach $a(a-1)$ Mark zu zahlen.

Nun enden die Produkte zweier aufeinanderfolgende natürlicher Zahlen stets auf eine der Ziffern 0, 2, oder 6, wie sich aus folgender Tabelle ergibt:

Endziffer $a-1$	Endziffer a	Endziffer $a(a-1)$	Endziffer $a-1$	Endziffer a	Endziffer $a(a-1)$
0	1	0	1	2	2
2	3	6	3	4	2
4	5	0	5	6	0
6	7	2	7	8	6
8	9	2	9	0	0

Da der Betrag mit 10-Mark-Scheinen allein nicht beglichen werden konnte, entstand ein Restbetrag von 2 oder 6 Mark.

Herr B hatte, wenn er b Bücher kaufte, insgesamt b^2 Mark zu zahlen. Da der von ihm zu zahlende Betrag zusammen mit dem von Herrn A ein Vielfaches von 10 M ergab, musste dieser Betrag mit der Ziffer 8 oder 4 enden.

Es gibt jedoch keine Quadratzahl mit der Endziffer 8, dagegen gibt es Quadratzahlen mit der Endziffer 4. Demnach hatte Herr B einen Betrag zu zahlen, dessen letzte Ziffer 4 war. Herr A hatte also 4 Mark für Herrn B ausgelegt.

Aufgabe 220911:
Uwe sagt zu Gert: „Ich habe hier eine zweistellige Zahl z, deren Ziffern beide von 0 verschieden sind. Wenn ich diese Ziffern in umgekehrter Reihenfolge schreibe und dahinter die Quersumme von z setze, dann erhalte ich das Quadrat von z.“

Gert findet ohne Benutzung der Zahlentafel eine Zahl z, die diese Eigenschaften hat.

Zeigen Sie, dass aus Uwes Angaben die Zahl z ohne Benutzung der Zahlentafel eindeutig ermittelt werden kann, und geben Sie z an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Zehner- bzw. Einerziffer einer Zahl z mit den geforderten Eigenschaften seien a bzw. b. Dann hat die Quersumme $a+b$ dieselbe Einerziffer wie die Zahl z^2 und daher auch wie die b^2. Somit muss a die Einerziffer von b^2-b sein.

Außer $b=0$ scheiden damit auch $b=1{,}5{,}6$ aus, da sie auf $a=0$ führen würden. Für die übrigen Möglichkeiten wird in der folgenden Tabelle geprüft, ob z^2 die durch Hintereinanderschreiben von b, a und $a+b$ erhaltene Zahl z' ist:

b	b^2	b^2-b	a	z	z^2	z'
2	4	2	2	22	484	224
3	9	6	6	63	3969	369
4	16	12	2	24	576	426
7	49	42	2	27	729	729
8	64	56	6	68	4624	8614
9	81	72	2	29	841	9211

Damit ist $z = 27$ als einzige Lösung ermittelt.

Aufgabe 230912:
Ermitteln Sie alle diejenigen zweistelligen natürlichen Zahlen x und y, die folgende Bedingungen erfüllen:

(1) Die Zahl y entsteht aus x durch Vertauschen der beiden Ziffern.

(2) Es gilt $x + y = 121$.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Bedingung (1) wird genau dann erfüllt, wenn

$$x = 10a + b, \qquad y = 10b + a \tag{3}$$

mit zwei natürlichen Zahlen a,b gilt, für die $1 \leq a \leq 9$ und $1 \leq b \leq 9$ (4) gilt. Hiermit wird (2) genau dann erfüllt, wenn a und b außer (4) auch

$$10a + b + 10b + a = 121 \qquad \text{oder, gleichwertig hiermit} \qquad 11 \cdot (a + b) = 121 \quad , \quad a + b = 11 \tag{5}$$

erfüllen.

Da (4) und (5) genau durch die in der folgenden Tabelle angegebenen natürlichen Zahlen a,b erfüllt werden, folgt nach (3), dass genau die anschließend angegebenen Zahlen x,y die geforderten Eigenschaften haben.

a	b	x	y	a	b	x	y
2	9	29	92	3	8	38	83
4	7	47	74	5	6	56	65
6	5	65	56	7	4	74	47
8	3	83	38	9	2	92	29

Aufgabe 290911:
Für das Quadrieren von zweistelligen Zahlen, die mit der Ziffer 5 enden, gibt es folgende einfache Regel:

Man multipliziere die Ziffer an der Zehnerstelle mit derjenigen Zahl, die um 1 größer ist, und schreibe hinter das Produkt die Ziffern 25.

Beispielsweise zur Berechnung von 25^2 führt die Regel wegen $2 \cdot 3 = 6$ auf das Ergebnis 625.

Beweisen Sie diese Regel!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Sind a, 5 die Ziffern der zu quadrierenden Zahl, so lautet diese $10a + 5$. Ihr Quadrat ist

$$(10a + 5)^2 = 100a^2 + 100a + 25 = 100 \cdot a \cdot (a + 1) + 25$$

also die nach der angegebenen Regel zu bildende Zahl.

Aufgabe 330916:
Bekanntlich gilt $2^{10} = 1024$.

Formulieren Sie ein Computerprogramm, mit dessen Hilfe man den kleinsten natürlichen Exponent $p > 10$ ermitteln kann, für den die Zahl 2^p ebenfalls auf die Ziffern $\ldots 024$ endet! Begründen Sie, dass das von Ihnen formulierte Programm diese Aufgabe löst!

Hinweis: Es ist zu beachten, dass für die im Rechenweg vorkommenden Zahlen bei weithin üblicher Computernutzung Einschränkungen der Stellenzahl auftreten.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Ein BASIC-Programm der geforderten Art ist zum Beispiel: 10 P = 10
20 Z = 24
30 P = P+1
40 Z = Z*2
50 IF Z > 999 THEN Z = Z-1000
60 IF Z <> 24 THEN GOTO 30
70 PRINT P

Zu Werten des Exponenten p werden die letzten drei Ziffern der Potenz 2^p in Gestalt einer ganzen Zahl z mit $0 \leq z \leq 999$ gebildet. Ausgehend nämlich von den Anfangswerten $p = 10, z = 024$ (Zeilen 10, 20) werden die nächsten Werte schrittweise gefunden:

In jedem Schritt wird p um 1 erhöht (Zeile 30) und z verdoppelt (Zeile 40) sowie, falls dabei zunächst ein nicht mehr dreistelliger Wert entstand, nur dessen drei Endziffern beibehalten. Hierzu genügt es, 1000 zu subtrahieren (Zeile 50); denn wenn für den Vorgängerwert z schon $0 \leq z < 1000$ galt, so ist der in Zeile 40 zunächst entstandene Wert $2 \cdot z < 2000$, und galt für ihn außerdem $1000 \leq 2 \cdot z$, so erfüllt der durch Subtraktion von 1000 entstehende Wert nun wieder $0 \leq 2 \cdot -1000 < 1000$.

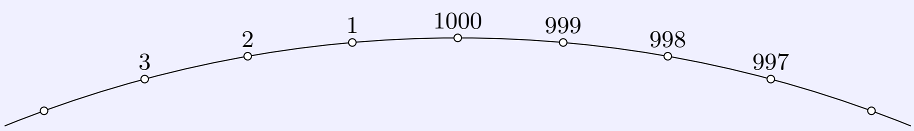
Durch das schrittweise Reduzieren werden die vielstelligen Zahlen 2^p vermieden, wie es nach dem „Hinweis“ erforderlich ist.

Diese Schritte werden wiederholt, solange die Ziffernfolge $z = 024$ nicht nicht wieder erreicht wurde (Zeile 60). Andernfalls endet der Ablauf mit der Ausgabe des gesuchten Exponenten p (Zeile 70).

Das Ende muss erreicht werden (es tritt keine „Endlos-Schleife“ auf). Man kann diese Feststellung als Ergebnis eines „Probelaufs mit Risiko“ erhalten (und damit zugleich den gesuchten Exponenten $p = 110$ finden); man kann auch beweisen, dass für jedes $p \geq 3$ die Ziffernfolge der drei Endziffern von 2^p bei einem größeren p wiederkehren muss.

II Runde 2

Aufgabe 130924:
Man denke sich eine Kreislinie in 1000 gleich lange Teilbögen zerlegt und jeden der 1000 Teilpunkte der Reihe nach mit den natürlichen Zahlen 1 bis 1000 bezeichnet.



Es sollen nun nacheinander die Zahl 1 und jede weitere 15. Zahl, also 1, 16, 31, 46, ..., durchgestrichen werden. Dabei sind bei wiederholten „Umläufen“ auch die bereits gestrichenen Zahlen mitzuzählen. Dieses Durchstreichen ist so lange fortzusetzen, bis nur noch Zahlen durchgestrichen werden müssten, die bereits gestrichen sind.
Ermitteln Sie die Anzahl aller Zahlen, die bei diesem Verfahren nicht durchgestrichen werden!

Lösung von cyrix:
Damit eine Zahl $1 \leq n \leq 1000$ gestrichen wird, muss es nicht-negative ganze Zahlen u und q geben, sodass $n + 1000 \cdot u = 1 + 15 \cdot q$ ist. Dabei beschreibt u die Anzahl der bisher vollständigen Umläufe um den Kreis und $1 + 15 \cdot q$ beschreibt jede 15. Zahl, beginnend mit 1, wenn einfach immer weiter gezählt wird.

Betrachtet man, welchen Rest beide Seiten dieser Gleichung bei der Teilung durch 5 lassen, so muss dies 1 sein, da $15q$ durch 5 teilbar ist. Da aber auch $1000u$ durch 5 teilbar ist, muss auch n den Rest 1 bei der Teilung durch 5 lassen. Es gibt also eine ganze Zahl k mit $0 \leq k < 200$, sodass $n = 5k + 1$ gilt. Setzt man dies in die Gleichung ein, erhält man, dass die Zahl $5k + 1$ genau dann gestrichen wird, wenn es nicht-negative ganze Zahlen q und u gibt, sodass $5k + 1 + 1000u = 1 + 15q$ bzw. nach Subtraktion von 1 und Division durch 5 die äquivalente Gleichung $k + 200u = 3q$ erfüllt ist.

Diese nicht-negativen ganzen Zahlen q und u existieren aber für jedes nicht-negative k: Ist k durch 3 teilbar, wähle man $u = 0$ und $q = \frac{k}{3}$. Lässt k den Rest 1 bei der Division durch 3, so ist $k + 200$ durch 3 teilbar und man kann $u = 1$ sowie $q = \frac{k+200}{3}$ wählen. Und lässt abschließend k den Rest 2 bei der Division durch 3, ist $k + 400$ durch 3 teilbar, sodass man $u = 2$ und $q = \frac{k+2\cdot 200}{3}$ wählen kann.

Zusammen erhält man also, dass genau die Zahlen $1 \leq n \leq 1000$ gestrichen werden, die sich als $n = 5k+1$ mit einer nicht-negativen ganzen Zahl k mit $0 \leq k < 200$ darstellen lassen. Das sind aber genau 200 Stück, sodass von den 1000 Zahlen genau 800 nicht gestrichen werden.

Aufgabe 180921:
Eine Familie fährt mit der Straßenbahn. Der Vater zieht an der Zahlbox vier Fahrscheine, die durch sechsstellige Zahlen fortlaufend nummeriert sind.
Der jüngste Sohn meint: „Gleichgültig, wie die erste der vier Zahlen lautet, eine unter diesen Zahlen muss eine durch 4 teilbare Quersumme haben.“
Der ältere Sohn behauptet dagegen, dass unter vier aufeinanderfolgenden sechsstelligen Zahlen nicht notwendig eine Zahl vorkommen muss, deren Quersumme durch 4 teilbar ist.
Wer von beiden hat recht?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es kommt z. B. unter den sechsstelligen Zahlen

$$1000008, \quad 100009, \quad 100010 \quad \text{und} \quad 10011$$

keine Zahl vor, deren Quersumme durch 4 teilbar ist. Also hat der ältere Sohn recht.

Aufgabe 180924:
Man ermittle alle dreistelligen natürlichen Zahlen z, die die folgenden Eigenschaften (1) bis (4) haben:
(1) z ist eine Primzahl.
(2) Jede Ziffer von z stellt eine Primzahl dar.
(3) Die Quersumme z' von z ist eine zweistellige Primzahl.
(4) Die Quersumme z'' von z' ist eine Primzahl.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, eine dreistellige Zahl z hat die Eigenschaften (1) bis (4).
Wegen (2) können dann in ihr nur folgende Zahlen als Ziffer vorkommen: 2, 3, 5 und 7.
Davon können wegen (1) die Zahlen 2 und 5 nicht als Endziffern auftreten. Also endet z auf eine Ziffer 3 oder 7.
Da die Quersumme z' eine zweistellige Primzahl ist, die als Summe von drei Summanden gebildet wird, von denen keiner größer als 7 ist, kann z' nur eine der Zahlen 11; 13 oder 17; 19 sein. Von ihnen hat nur $z' = 11$ eine Primzahl, nämlich die Zahl 2, als Quersumme.
Also gilt $z' = 11$.

Sei nun die letzte Ziffer von z die Zahl 7. Dann muss die Summe der durch die beiden ersten Ziffern dargestellten Zahlen 4 betragen. Von den möglichen Zerlegungen der Zahl vier in zwei natürliche Zahlen als Summanden (nämlich $0+4$; $1+3$; $2+2$; $3+1$ und $4+0$) erfüllt nur $2+2$ die Bedingung (2). Damit erhält man $z = 227$.

Sei nun 3 die letzte Ziffer von z. Dann muss die Summe der durch die ersten beiden Ziffern von z dargestellten Zahlen 8 betragen.
Von den möglichen Zerlegungen der Zahl 8 in zwei natürliche Zahlen als Summanden (nämlich $0+8$; $1+7$; $2+6$; $3+5$; $4+4$; $5+3$; $6+2$; $7+1$; $8+0$) erfüllen nur $3+5$ und $5+3$ die Bedingung (2).
Das führt auf die Zahlen $z = 353$ und $z = 533$.
Wegen $533 = 13 \cdot 14$ erfüllt die Zahl 533 nicht die Bedingung (1).
Also können höchstens die Zahlen 227 und 353 die Bedingungen der Aufgabe erfüllen.
Sie erfüllen sie tatsächlich; denn 227 und 353 sind Primzahlen. (Beweis: 227 ist durch keine Primzahl $p < 17$ teilbar, und es gilt $17^2 > 227$, 353 ist durch keine Primzahl $p < 19$ teilbar, und es gilt $19^2 > 353$.)
Ihre Ziffern 2, 2, 7 bzw. 3, 5, 3 sind ebenfalls Primzahlen. Das gilt auch für ihre Quersumme 11. Schließlich ist die Quersumme 2 von 11 eine Primzahl, wie es gefordert war.

Aufgabe 230921:
Ermitteln Sie alle diejenigen zweistelligen natürlichen Zahlen x, für die die Summe aus x und der durch Vertauschen der Ziffern von x entstehenden Zahl y eine Quadratzahl ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Sind a und b die Ziffern einer zweistelligen Zahl x, so gilt

$$1 \leq a \leq 9; \quad 0 \leq b \leq 9; \qquad \text{und} \qquad x = 10a + b \tag{1}$$

Durch Vertauschen der Ziffern entsteht daraus $y = 10b + a$. Die Summe

$$x + y = 11a + 11b = 11(a + b)$$

ist genau dann eine Quadratzahl, wenn der Primfaktor 11 und weitere Primfaktoren jeweils in gerader Anzahl in $a + b$ enthalten sind. Wegen (1), also $1 \leq a + b \leq 18$, kann $a + b$ außer dem Primfaktor 11 keinen weiteren Primfaktor enthalten. Also ist $x + y$ genau dann eine Quadratzahl, wenn $a + b = 11$ gilt.
Das trifft unter den Bedingungen (1) genau für die Wertetabelle $(a; b)$ der folgenden Tabelle zu. Daher haben genau die hierzu angegebenen Zahlen x die verlangte Eigenschaft.

a	2	3	4	5	6	7	8	9
b	9	8	7	6	5	4	3	2
x	29	38	45	56	65	74	83	92

Aufgabe 290923:
Man ermittle die kleinste natürliche Zahl n, für die (bei Darstellung im dekadischen Positionssystem) 5 sowohl Teiler der Quersumme von n als auch Teiler der Quersumme von $n + 1$ ist.

Lösung von cyrix:
Endet die Zahl n auf genau k Neunen und besitzt davor die Ziffer $z < 9$ (ggf. mit führender Null), so endet die Zahl $n+1$ auf genau k Nullen und besitzt davor die Ziffer $z+1 \leq 9$. (Die Ziffern vor z bzw. $z+1$ sind in beiden Zahlen identisch.) Seien q_n und q_{n+1} die Quersummen von n bzw. $n+1$. Dann gilt also $q_{n+1} = q_n - k \cdot 9 + 1$.

Damit beide Quersummen durch 5 teilbar sind, muss also $k \cdot 9 - 1$ durch 5 teilbar sein. Dies tritt zum ersten mal für $k = 4$ auf, sodass jede Zahl n, die der Aufgabenstellung genügt, auf mindestens vier Neunen enden muss.

Tatsächlich erfüllen die ersten dieser Zahlen, nämlich 9999, 19999, 29999 und 39999 nicht die Bedingung, dass ihre Quersumme durch 5 teilbar ist. Die nächste solche Zahl $n = 49999$ erfüllt aber die Aufgabenstellung, da sowohl ihre Quersumme 40 als auch die Quersumme 5 von $n+1 = 50000$ durch 5 teilbar sind.

Aufgabe 310921:
a) Geben Sie eine natürliche Zahl n an, für die (im dekadischen Positionssystem) die Bedingung erfüllt ist, dass sowohl die Quersumme von n als auch die Quersumme von $n+1$ durch 10 teilbar sind!
Überprüfen Sie, dass die von Ihnen angegebene Zahl diese Bedingung erfüllt!
b) Geben Sie die kleinste natürliche Zahl an, die die in a) genannte Bedingung erfüllt!
Beweisen Sie für die von Ihnen angegebene Zahl, dass es sich um die kleinste Zahl mit dieser Bedingung handelt!

Lösung von cyrix:
Endet die Zahl n nicht auf die Ziffer Neun, so ist die Quersumme von $n+1$ genau um eins größer als die von n, da sich nur die letzte Ziffer um eins erhöht und alle anderen gleich bleiben. Also können nicht beide Quersummen durch 10 teilbar sein. endet dagegen n auf genau k Neunen, so werden diese beim Übergang zu $n+1$ alle zu Nullen, während die Ziffer vor diesen Neunen (ggf. eine führende Null) um eins erhöht. Die Quersumme von $n+1$ erhält man also aus der von n durch Subtraktion von $k \cdot 9 - 1$.

Damit beide Quersummen durch 10 teilbar sind, muss also sowohl die von n als auch $k \cdot 9 - 1$ durch 10 teilbar sein. Das kleinste k, welches die letzte Bedingung erfüllt, ist, $k = 9$. Also muss n auf mindestens neun Neunen enden. Damit hat n mindestens die Quersumme 81, also, da es eine durch 10 teilbare Quersumme haben soll, von mindestens 90.

Die kleinste Zahl, die auf mindestens neun Neunen endet und Quersumme mindestens 90 hat, ist 9.999.999.999. Diese endet aber auf genau zehn Neunen, sodass die Quersumme ihres Nachfolgers sich auf 1 reduziert, was nicht durch 10 teilbar ist.

Die nächstgrößere, also zweitkleinste Zahl, die auf mindestens neun Neunen endet und Quersumme mindestens 90 hat, ist $n = 18.999.999.999$. Tatsächlich ist die Quersumme von n gleich $1+8+9 \cdot 9 = 90$ und die von $n+1 = 19.000.000.000$ gleich $1+9+9 \cdot 0 = 10$, sodass dieses n die Bedingung erfüllt und das kleinste solche ist.

Aufgabe 330921:
Multipliziert man eine dreistellige natürliche Zahl mit 7, so entsteht eine Zahl, die auf die Ziffern ...638 endet.
Wie heißt die dreistellige Zahl?

Lösung von Steffen Polster:
Die gesuchte Zahl sei [abc].

Die letzte Ziffer des Ergebnisses kann nur 8 sein, wenn mit einer $c = 4$ multipliziert wurde. Alle Produkte von 7 mit einer anderen einstelligen Zahl enden mit einer anderen Ziffer.
Der Zehner 3 enthält damit aus dem Produkt $7 \cdot 4 = 28$ einen Übertrag 2. Somit muss $b = 3$ sein. Analog schließt man auf $a = 2$. Die gesuchte Zahl ist 234 und es ist $234 \cdot 7 = 1638$.

III Runden 3 & 4

Aufgabe V10935:
Mit welcher Ziffer endet die Zahl 2^{100}? Begründen Sie das!

Lösung von svrc:
Es ist $2^{10} = 1024 \equiv 4 \pmod{10}$. Damit ist $2^{20} \equiv 16 \equiv 6 \pmod{10}$.
Dann gilt $2^{25} = 2^5 \cdot 2^20 \equiv 2 \cdot 6 \equiv 2 \pmod{10}$.
Damit folgt $2^{50} \equiv 4 \pmod{10}$ und somit $2^{100} \equiv 16 \equiv 6 \pmod{10}$.
Das bedeutet, dass die Zahl 2^{100} auf der Ziffer 6 endet.

Alternativ-Lösung von cyrix:
Es ist $2^4 = 16$, endet also auf die Ziffer 6. Da $6 \cdot 6 = 36$ auch auf die Ziffer 6 endet, gilt dies auch für jede Potenz einer Zahl, welche auch auf die Ziffer 6 endet, insbesondere also auch für $2^{100} = (2^4)^{25}$.

Aufgabe 030931:
Gesucht sind alle aus verschiedenen Ziffern bestehenden dreistelligen Zahlen, bei denen die Summe aller aus je zwei ihrer Ziffern zu bildenden zweistelligen Zahlen gleich dem Doppelten der Zahl ist.

Lösung von Manuela Kugel:
Die gesuchte Zahl z kann man aus ihren Ziffern wie folgt schreiben:

$$z = 100a + 10b + c \qquad (\text{mit } 0 \leq a, b, c \leq 9 \text{ sowie } a \neq 0)$$

Jede zweistellige Zahl aus den Ziffern von z ergibt sich als $10x + y$ mit $x \in a, b, c, y \in a, b, c$ und $x \neq y$.
Die Gleichung lautet nun mit den 6 zweistelligen Zahlen aus den Ziffern von z:

$$2 \cdot z = 2 \cdot (100a + 10b + c) = (10a + b) + (10a + c) + (10b + a) + (10b + c) + (10c + a) + (10c + b)$$

Zusammengefasst ergibt sich: $200a + 20b + 2c = 22a + 22b + 22c$ und weiter: $178a = 2b + 20c$ bzw. nach dem Kürzen: $89a = b + 10c$.
Schätzt man den rechten Term nach oben ab, d. h. setzt man $b = 9$ und $c = 9$, so kommt man auf die Ungleichung $89a \leq 99$ und mithin $a \leq 1$. Dies impliziert $a = 1$ und ergibt für die beiden restlichen Ziffern $b = 9$ sowie $c = 8$.
Die gesuchte Zahl lautet also $z = 198$ und ist die einzige Zahl, die den geforderten Bedingungen genügt.

Aufgabe 050931:
Beweisen Sie die folgende Behauptung!
Jede nicht durch 9 teilbare (ganzzahlige) Quadratzahl lässt bei Division durch 3 den Rest 1.

Lösung von Kitaktus:
Sei n^2 eine nicht durch 9 teilbare Quadratzahl. Dann ist n nicht durch 3 teilbar (sonst wäre n^2 durch 9 teilbar).
n lässt bei Division durch 3 also den Rest 1 oder 2 und lässt sich daher schreiben als

$$n = 3m + 1 \qquad \text{oder} \qquad n = 3m + 2$$

mit passend gewähltem ganzzahligem m. Dann ist

$$n^2 = (3m+1)^2 = 9m^2 + 6m + 1 = 3(3m^2 + 2m) + 1 \qquad \text{oder}$$

$$n^2 = (3m+2)^2 = 9m^2 + 12m + 4 = 3(3m^2 + 4m + 1) + 1$$

In beiden Fällen lässt n^2 bei Division durch 3 den Rest 1.

Aufgabe 050933:
Die positive ganze Zahl x ende auf die Ziffern a und b (in dieser Reihenfolge).
Man ermittle alle geordneten Paare (a, b), für die x^2 auf dieselben Ziffern a und b (auch in Bezug auf die Reihenfolge) endet!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es sei

$$x = 100c + d, \qquad d = 10a + b$$

und a, b, c natürliche Zahlen mit $0 \leq a \leq 9$, $0 \leq b \leq 9$. Dann gilt

$$(100c + d)^2 = 100e + d \qquad \text{, e natürliche Zahl}$$

$$10000c^2 + 200cd + d^3 = 100e + d$$
$$100e = 10000c^2 + 200cd + d^2 - d$$
$$e = 100c^2 + 2cd + \frac{d^2 - d}{100}$$

Es ist e genau dann ganzzahlig, wenn $d(d-1)$ durch 100 teilbar ist. Da d und $d-1$ nicht gleichzeitig durch 5 teilbar sein können, muss einer der beiden Faktoren durch 25 teilbar sein. Wegen $d < 100$ ergeben sich genau folgende Möglichkeiten dafür

d	$d-1$	$100\|(d^3-d)$	d	$d-1$	$100\|(d^3-d)$
0	-1	ja	1	0	ja
25	24	ja	26	25	nein
50	49	nein	51	50	nein
75	74	nein	76	75	ja

Folgende geordnete Paare (a,b) und nur diese erfüllen die gestellte Bedingung: $(0;0), (0;1), (2;5)$ und $(7;6)$.

Aufgabe 070931:
Es sind ohne Benutzung der Zahlentafel alle vierstelligen Quadratzahlen zu ermitteln, deren erste zwei und letzte zwei Grundziffern jeweils gleich sind.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es sei x die erste und y die letzte Ziffer einer derartigen Quadratzahl z. Dann gilt

$$z = 1000x + 100x + 10y + y = 1100x + 11y = 11(100x + y)$$

mit $1 \leq x \leq 9$ und $0 \leq y \leq 9$.
Daraus folgt $11|z$ und, da z Quadratzahl und 11 Primzahl ist, sogar $112|z$. Somit muss gelten $11|100x+y$.
Nun ist aber $100x + y = 99x + x + y$, und somit $11|x + y$.
Wegen der Einschränkungen für x und y kommt nur $1 \leq x + y \leq 18$ und damit $x + y = 11$ in Frage.

Daraus folgt $100x + y = 99x + x + y = 11(9x + 1)$ und somit $z = 11^2(9x + 1)$.

Da z Quadratzahl ist, muss auch $9x+1$ Quadratzahl sein. Wegen $1 \leq x \leq 9$ ist dies (wie man z. B. durch Berechnung der Zahlen $9x+1$ für $x = 1, ..., 9$ feststellen kann) nur für $x = 7$ der Fall.

Umgekehrt führt $x = 7$ in der Tat wegen $9 \cdot 7 + 1 = 64$ auf die Quadratzahl $z = 121 \cdot 64 = 7744 = 88^2$. Diese ist somit die einzige vierstellige Quadratzahl mit den geforderten Bedingungen.

Aufgabe 110931:
Günter erzählt:
„Die sechsstellige Telefonnummer unserer Schule merke ich mir folgendermaßen:
Ich schreibe unsere zweistellige Hausnummer hin. Dahinter schreibe ich die Quersumme der Hausnummer und füge nun jeweils die Summe aus den letzten beiden hingeschriebenen Zahlen an, bis sechs Ziffern dastehen. Übrigens kommt in der Telefonnummer unserer Schule keine Eins vor, und unsere Hausnummer ist eine durch 3 teilbare Zahl.“
Wie lautet Günters Hausnummer und wie die Telefonnummer seiner Schule?

Lösung von ZePhoCa:
Wenn die Quersumme der ersten beiden Zahlen zweistellig wäre, dann wäre sie höchstens 18 und damit enthielte die Telefonnummer eine 1, was nicht sein kann. Also ist die Quersumme einstellig. Da auch die Hausnummer keine 1 enthalten darf, bleiben für die Hausnummer noch die Möglichkeiten:
$24, 27, 30, 33, 36, 42, 45, 54, 60, 63, 72, 90$ mit den Quersummen $6, 9, 3, 6, 9, 6, 9, 9, 6, 9, 9, 9$ übrig.
In allen Fällen außer bei 30,33,60 und 90 ist die erste Ziffer der nächsten Summe eine 1, was nicht geht. Bei 33 ergibt sich 336915, bei 60 ergibt sich 606612 und bei 90 ergibt sich 909918 was nicht geht. Also ist die Hausnummer 30 und die Telefonnummer 303369.

Aufgabe 130931:
Wie man an Beispielen sehen kann, gibt es Paare (x, y), worin x und y je eine zweistellige natürliche Zahl mit folgender Eigenschaft sind:
Tauscht man die Ziffern dieser Zahl gegeneinander aus und addiert 9 zu der so entstandenen Zahl, so erhält man die andere Zahl des Paares. (Ein solches Paar ist z. B. (25; 61), denn es gilt 52+9 = 61 und 16+9 = 25.)
Hinweis: Entsteht beim Vertauschen der Ziffern eine mit 0 beginnende Ziffernfolge (etwa aus 30 die „03“), so ist statt dessen für die weiteren Operationen die (einstellige) Zahl zu nehmen, die nach dem Streichen der Null entsteht (in unserem Beispiel „3“).
Wir nennen die Zahlen x, y eines solchen Paares $(x; y)$ einander zugeordnet.

a) Geben Sie alle zweistelligen Zahlen an, die als Elemente solcher Paare auftreten können!
b) Ermitteln Sie alle zweistelligen Zahlen, die auf diese Weise sich selbst zugeordnet sind!

Lösung von cyrix:
a) Sind $10a + b$ und $10c + d$ mit a,b,c,$d \in \{0; 1; 2; \cdot; 9\}$ und $a \neq 0$, $c \neq 0$ (sonst würde es sich nicht um zweistellige Zahlen handeln) die beiden Zahlen eines solchen Paares, so gilt $10c + d = 10b + a + 9$. Wegen $1 \leq a < 10$ ist $10 \leq a + 9 < 19$, sodass die Zehnerziffer von $10b + a + 9$ also $b + 1$ und die Einerziffer $a + 9 - 10 = a - 1$ ist. Wir erhalten also $c = b + 1$ und $d = a - 1$. Da $a \geq 1$ ist, ist d auf jeden Fall eine Ziffer, sodass hier keine Zusatzbedingungen entstehen. Jedoch erhalten wir wegen $c = b + 1$, dass $b \leq 8$ sein muss, denn für $b = 9$ erhielte man $c = 10$, was keine Ziffer mehr ist.

Tatsächlich sind diese Bedingungen nicht nur notwendig, sondern sogar schon hinreichend: Wendet man das Verfahren auf $10c+d$ an, so erhält man die Zahl $10d+c+9 = 10(a-1)+(b+1)+9 = 10a-10+b+9+1 = 10a + b$; also die Ausgangszahl.
Es können also genau diejenigen zweistelligen Zahlen Elemente eines solchen Paares sein, die als Einerziffer keine 9 besitzen.

b) Mit obigen Bezeichnungen muss dann $a = c = b + 1$ und $b = d = a - 1$ gelten, sodass dies nur für die Zahlen 21; 32; 43; 54; 65; 76; 87 und 98 der Fall sein kann. Die Probe bestätigt jeweils, dass diese Zahlen sich auch jeweils selbst zugeordnet werden.

Aufgabe 140931:
Gesucht ist die kleinste natürliche Zahl x (wobei x nicht unbedingt einstellig sein soll), die folgende Eigenschaft hat:
Die Zahl $83 \cdot x$ (das Produkt aus 83 und x) hat als Darstellung die Ziffernfolge $3x8$ (d. h., vor die Ziffer oder Ziffernfolge der Zahl x ist eine 3, hinter die so gebildete Ziffernfolge eine 8 zu setzen).

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Genau dann ist x die gesuchte Zahl, wenn es die kleinste natürliche Zahl ist, zu der eine natürliche Zahl $n \geq 2$ mit $10^{n-2} \leq x < 10^{n-1}$ und

$$83x = 3 \cdot 10^n + 10x + 8$$

oder, äquivalent hierzu, mit $73x = 3 \cdot 10^n + 8$ existiert.
Untersucht man die Zahlen 308, 3008, 30008, 300008, 3000008 der Reihe nach auf Teilbarkeit durch 73, so ergibt sich, dass von ihnen nur die Zahl
Daher ist $x = 41096$ die gesuchte Zahl, und es gilt $83 \cdot 41096 = 3410968$.

Aufgabe 150934:
Man ermittle alle Möglichkeiten, die Zahl 60 als Summe von mindestens zwei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen darzustellen.

Lösung von cyrix:
1. Fall:
Die Anzahl der Summanden ist ungerade, d. h. $2k + 1$ für eine positive ganze Zahl k. Ist n der dann existierende mittlere Summand, so lässt sich die Summe schreiben als

$$(n - k) + (n - (k - 1)) + \cdots + (n - 1) + n + (n + 1) + \cdots + (n + (k - 1)) + (n + k) = n \cdot (2k + 1)$$

Dabei muss $n \geq k$ gelten, damit auch der kleinste Summand $n - k$ eine nicht-negative ganze Zahl ist. Soll diese Summe den Wert 60 ergeben, muss also $2k + 1$ ein ungerader Teiler von 60 sein und $n = \frac{60}{2k+1} > k$ gelten.

Damit ergeben sich folgende Lösungen:
Für $2k + 1 = 3$ ist $n = 20 > 1$, also $60 = 19 + 20 + 21$ und
für $2k + 1 = 5$ ist $n = 12 > 2$, also $60 = 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15$.
Für den einzigen weiteren ungeraden Teiler $2k + 1 = 15$ von 60 erhält man $n = 4$, was aber kleiner ist als $k = 7$. Auf diese Weise erhielte man nur die Summe

$$60 = (-3) + (-2) + (-1) + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11$$

welche auch negative Summanden enthält, also keine Lösung im Sinne der Aufgabenstellung ist.

2. Fall:
Die Anzahl der Summanden ist gerade, d. h. $2k$ für eine positive ganze Zahl k. Insbesondere enthält die Summe dann k ungerade Summanden, ist also nur dann – wie 60 – gerade, wenn k auch gerade ist, sich also als $2m$ mit einer positiven ganzen Zahl m schreiben lässt. Die Summe besteht demnach aus $4m$ Summanden.
Sei der kleinste dieser Summanden mit $n - (2m - 1)$ bezeichnet, wobei $n \geq 2m - 1$ eine natürliche Zahl sei. Dann gilt

$$60 = (n - (2m - 1)) + \cdots + (n + (2m - 1)) + (n + (2m)) = 4mn + 2m = 2m(2n + 1)$$

Insbesondere ist $2n+1$ ein ungerader Teiler von 60, sodass $2m = \frac{60}{2n+1} \leq n+1$ gilt. Dies liefert die folgende Lösung:
Für $2n+1 = 15$ ist $2m = 4 \leq 8$ und wir erhalten $60 = 4+5+6+7+8+9+10+11$.
Sonst ist $2n+1 \leq 5$, also $n \leq 2$, aber $2m = \frac{60}{2n+1} \geq 12$, sodass man wieder nur ganzzahlige, aber keine natürlichen Lösungen erhält.

Aufgabe 180932:
In der Aufgabe der 2. Stufe war zu zeigen, dass unter vier aufeinanderfolgenden sechsstelligen Zahlen nicht notwendig eine sein muss, deren Quersumme durch 4 teilbar ist.
Man ermittle die größte natürliche Zahl n, für die die folgende Aussage wahr ist:
„Es gibt n aufeinanderfolgende natürliche Zahlen, unter denen sich keine befindet, deren Quersumme durch 4 teilbar ist.“

Lösung von cyrix:
Die gesuchte Zahl n ist 6. Dazu zeigen wir zuerst, dass es 6 aufeinanderfolgende natürliche Zahlen gibt, deren Quersummen allesamt keine durch 4 teilbaren Zahlen sind, und dann, dass für je 7 aufeinanderfolgende natürliche Zahlen (mindestens) eine dieser eine durch 4 teilbare Quersumme besitzt.
Wir betrachten die natürlichen Zahlen 4997, 4998, 4999, 5000, 5001 und 5002. Diese 6 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen besitzen die Quersummen 29, 30, 31, 5, 6 und 7, welche alle nicht durch 4 teilbar sind.
Es können sich 7 aufeinanderfolgende natürliche Zahlen auf nur maximal zwei „Zehner“, also Intervalle der Form $[k\cdot 10+0; k\cdot 10+9]$ mit nicht-negativem ganzem k, aufteilen. Dann müssen aber in mindestens einem solchen Intervall 4 aufeinanderfolgende dieser Zahlen befinden, deren Quersummen 4 aufeinanderfolgende natürliche Zahlen sind, wovon eine durch 4 teilbar ist.

Aufgabe 180935:
Beweisen Sie, dass für jede Primzahl p der Rest, den p bei Division durch 30 lässt, entweder 1 oder eine Primzahl ist!

Lösung von cyrix:
Ist p gleich 2, 3 oder 5, so ist der Rest von p bei der Division durch 30 offensichtlich p selbst und damit eine Primzahl. Andernfalls ist p weder durch 2, 3 noch 5 teilbar.
Sei nun $p > 5$ eine solche Primzahl und $0 \leq r < 30$ sein Rest bei der Teilung durch 30. Also gibt es eine ganze Zahl q mit $p = 30\cdot q + r$. Dann kann wegen $30 = 2\cdot 3\cdot 5$ auch r nicht durch 2, 3 bzw. 5 teilbar sein, denn sonst wäre es $30\cdot q + r$, und damit p, auch.
Es verbleiben als mögliche Reste also nur diejenigen Zahlen $0 \leq r < 30$, die selbst weder durch 2, 3 noch 5 teilbar sind. Dies sind aber (wegen $7^2 = 49 > 30$) genau die Primzahlen und 1, $\Box$.

Aufgabe 190934:
a) Beweisen Sie, dass es im dekadischen Zahlensystem keine dreistellige Primzahl gibt, deren drei einzelne Ziffern sich so anordnen lassen, dass sie drei unmittelbar aufeinanderfolgende natürliche Zahlen darstellen!
b) Beweisen Sie, dass es für eine geeignete natürliche Zahl $n \geq 3$ im Zahlensystem mit der Basis n eine dreistellige Primzahl gibt, deren drei einzelne Ziffern sich so anordnen lassen, dass sie drei unmittelbar aufeinanderfolgende natürliche Zahlen darstellen!

Lösung von cyrix:
a) Es seien $a-1$, a, $a+1$ die drei aufeinanderfolgenden Ziffern der dreistelligen Zahl p in irgendeiner Reihenfolge. Dann ist die Quersumme von p gleich $(a-1)+a+(a+1) = 3a$ durch 3 teilbar, also auch p, sodass p keine Primzahl sein kann.

b) Es ist mit $n = 8$ die Zahl $123_8 = 1\cdot 8^2 + 2\cdot 8 + 3 = 83$ eine Primzahl.

Aufgabe 200934:
Ermitteln Sie alle Paare $(a;b)$ natürlicher Zahlen a, b mit $a > b$, für die die folgenden Aussagen (1), (2), (3) zutreffen!
(1) Die Zahl a ist (in dekadischer Ziffernschreibweise) zweistellig, die Zahl b ebenfalls.
(2) Vertauscht man die Ziffern von a miteinander, so erhält man b.
(3) Subtrahiert man b^2 von a^2, so erhält man eine Quadratzahl.

Lösung von cyrix:
Nach (1) und (2) existieren positive Ziffern $c > d$ mit $c,d \in \{1,2,\ldots,9\}$, sodass $a = 10c+d$ und $b = 10d+c$ gilt. Dann ist

$$a^2 - b^2 = (100c^2 + 20cd + d^2) - (100d^2 + 20dc + c^2) = 99(c^2 - d^2)$$

eine Quadratzahl, also wegen $9 = 3^2$ auch $11(c^2 - d^2) = 11(c - d)(c + d)$. Da 11 eine Primzahl ist, muss mindestens einer der Faktoren $(c - d)$ bzw. $(c + d)$ auch durch 11 teilbar sein, damit in der Primfaktorzerlegung des Produkts die Primzahl 11 nicht nur einmal vorkommt.

Da aber $0 < c-d \leq 9-1 = 8 < 11$ ist, muss $c+d$ durch 11 teilbar sein. Wegen $0 < c+d < 10+10 = 20 < 22$ muss damit $c+d = 11$ gelten. Dann ist $11 \cdot (c-d) \cdot 11 = 11^2 \cdot (c-d)$, sodass auch $c-d$ eine Quadratzahl sein muss. Wegen $0 < c - d \leq 9 - 1 = 8$ kommen also nur 1 und 4 als Quadratzahlen in Frage, sodass sich folgende zwei Fälle ergeben:

1. Fall: $c - d = 1$. Dann ist wegen $c + d = 11$ also $c = 6$ und $d = 5$. Es ergeben sich $a = 65$ und $b = 56$. Tatsächlich ist $a^2 - b^2 = 65^2 - 56^2 = 4225 - 3136 = 1089 = 33^2$ eine Quadratzahl, sodass $(a,b) = (65,56)$ eine Lösung ist.

2. Fall: $c - d = 4$. Dann wäre aber wegen $c + d = 11$ also $2c = (c + d) + (c - d) = 15$ die Ziffer c keine natürliche Zahl, was ein Widerspruch ist.
Demzufolge gibt es keine weitere neben der einen angegebenen Lösung.

Aufgabe 210935:
Beweisen Sie den folgenden Satz!
Die Summe zweier Quadratzahlen ist genau dann durch 11 teilbar, wenn jede dieser beiden Quadratzahlen durch 11 teilbar ist.

Lösung von cyrix:
Man überzeugt sich leicht durch Einsetzen der Zahlen ± 5, ± 4, ± 3, ± 2, ± 1 und 0, dass Quadratzahlen bei der Teilung durch 11 nur die Reste 3, 5, 9, 4, 1 und 0 lassen. Damit die Summe zweier Quadratzahlen durch 11 teilbar ist, muss die Summe ihrer Reste durch 11 teilbar sein.
Dies ist aber offenbar nur genau dann der Fall, wenn beide Quadratzahlen den Rest 0 lassen, also durch 11 teilbar sind, $\square$.

Aufgabe 220931:
Man ermittle alle diejenigen (im dekadischen System geschriebenen) dreistelligen Zahlen z, die die Gleichung $z = (a + b)^c$ erfüllen, wobei a, b und c in irgendeiner Reihenfolge die Ziffern von z sind.

Lösung von cyrix:
Es ist $c > 0$, da für alle a, b gilt, dass $(a + b)^0 = 1$, also nicht dreistellig ist. Es ist wegen $a + b \leq 18$ auch $c > 1$, da sonst $z = (a + b)^c$ nicht dreistellig wäre.

Ist $c = 2$, so folgt wegen $10^2 = 100 \leq z = (a+b)^2$, dass $10 \leq a+b \leq 18$ ist. Die auftretenden Quadratzahlen lauten $10^2 = 100$, $11^2 = 121$, $12^2 = 144$, $13^2 = 169$, $14^2 = 196$, $15^2 = 225$, $16 = 256$, $17^2 = 289$ und

$18^2 = 324$. Von diesen fallen 100, 144, 169 und 196 heraus, da sie keine Ziffer $c = 2$ enthalten. Für die übrigen ist zu prüfen, ob die anderen beiden Ziffern neben der Zwei (bzw. einer der Zweien) als a und b gewählt werden können. Dies ist weder bei $121 = 11^2$ (wegen $1 + 1 \neq 2$), $256 = 16^2$ (wegen $5 + 6 \neq 16$) noch $324 = 18^2$ (wegen $3+4 \neq 18$) der Fall, wohl aber bei $17^2 = 289$ (wegen $8+9 = 17$). Also ist $z = 289$ die einzige Lösung dieses Falls.

Ist $c = 3$, so folgt wegen $4^3 = 64 < z < 1000 = 10^3$, dass $5 \leq a + b \leq 9$ ist. Die betreffenden Kubikzahlen $5^3 = 125$, $6^3 = 216$, $7^3 = 343$, $8^3 = 512$ und $9^3 = 729$ enthalten bis auf $343 = 7^3$ keine Ziffer $c = 3$, können also keine Lösungen sein. Dagegen ist wegen $3 + 4 = 7$ tatsächlich $z = 343$ damit die einzige Lösung für diesen Fall.

Ist $c = 4$, so folgt wegen $3^4 = 81 < z < 6^4 = 1296$, dass $4 \leq a+b \leq 5$ ist. Die relevanten vierten Potenzen $4^4 = 256$ und $5^4 = 625$ enthalten keine Ziffer $c = 4$, sodass es hier keine Lösung gibt.

Ist $c = 5$, so folgt wegen $2^5 = 32 < z < 4^5 = 1024$, dass $a + b = 3$ sein müsste. Jedoch enthält $3^5 = 243$ keine Ziffer $c = 5$, sodass es in diesem Fall keine Lösung gibt.

Ist $c = 6$, so folgt wegen $2^6 = 64 < z < 4^6 = 4096$, dass $a + b = 3$ sein müsste, was aber wegen $3^6 = 729$, was keine Ziffer $c = 6$ enthält, zu keiner Lösung führt.

Ist $c \geq 7$, so folgt wegen $z < 1000 < 2187 = 3^7 \leq 3^c$, dass $a + b \leq 2$ sein muss. Da aber $1^c = 1 < 100 \leq z$ ist, muss immer auch $1 < a + b$, also in diesen Fällen zusammen immer $a + b = 2$ gelten. Wegen $2^{10} = 1024 > z$ muss also $c \leq 9$ sein, sodass noch die Fälle $2^7 = 128$, $2^8 = 256$ und $2^9 = 512$ zu betrachten, die jedoch keine Lösungen liefern, weil jeder der Potenzen jeweils nicht das zugehörige c als Ziffer enthält.

Also gibt es insgesamt genau zwei Lösungen, nämlich $z_1 = 289 = (8 + 9)^2$ und $z_2 = 343 = (3 + 4)^3$.

Aufgabe 220934:
Jens behauptet, dass man alle natürlichen Zahlen mit Ausnahme von endlich vielen als Summe von zwei Quadratzahlen darstellen kann.
Dirk behauptet dagegen, dass es unendlich viele natürliche Zahlen gibt, die man nicht als Summe von zwei Quadratzahlen darstellen kann.
Wer hat recht?

Lösung von cyrix:
Dirk hat recht:
Das Quadrat einer geraden Zahl ist immer durch 4 teilbar, das Quadrat einer ungeraden lässt aber wegen $(2m+1)^2 = 4m^2+4m+1 = 4(m^2+m)+1$ bei der Teileung durch 4 immer den Rest 1. Also lässt der Rest der Summe zweier Quadratzahlen bei der Teilung durch 4 immer den Rest $0 + 0 = 0$, $0 + 1 = 1 + 0 = 1$ oder $1 + 1 = 2$, nie aber den Rest 3, sodass alle unendlich vielen natürlichen Zahlen der Form $4k + 3$ sich nicht also Summe zweiter Quadratzahlen darstellen lassen.

Aufgabe 250932:
Ermitteln Sie alle diejenigen Paare (a, b) von zweistelligen Zahlen a und b, für die folgendes gilt:
Bildet man durch Hintereinanderschreiben von a und b in dieser Reihenfolge eine vierstellige Zahl z, so ist $z = (a + b)^2$.

Lösung von cyrix:
Es ist nach Aufgabenstellung $z = 100a + b = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ bzw. $a^2 + (2b - 100)a + b(b - 1) = 0$.
Für $b \geq 26$ ist aber

$$0 = a^2 + (2b - 100)a + b(b - 1) \geq a^2 - 48a + 26 \cdot 25 = (a - 24)^2 - 24^2 + 650 = (a - 24) + 650 - 576 > 0$$

was ein Widerspruch darstellt. Also muss $b \leq 25$ gelten.

Es ist b die aus den letzten zwei Stellen einer Quadratzahl gebildeten Zahl. Wegen $(10n+m)^2 = 100n^2 + 20nm + m^2$ und $0^2 = 00$, $1^2 = 01$, $2^2 = 04$, $3^2 = 09$, $4^2 = 16$, $5^2 = 25$, $6^2 = 36$, $7^2 = 49$, $8^2 = 64$ und $9^2 = 81$ ist die vorletzte Stelle einer Quadratzahl nur dann ungerade, wenn die letzte Stelle eine 6 ist. Ist die vorletzte Stelle gerade, verbleiben als mögliche Endziffern 0, 1, 4 und 5.

Damit schränken sich die Möglichkeiten für b auf die Elemente der Menge $\{16, 20, 21, 24, 25\}$ ein. Diese werden nun der Reihe nach untersucht:
Wäre $b = 16$, so müsste $z = 100a + 16 = (a+16)^2 = a^2 + 32a + 256$ gelten, was äquivalent ist zu $a^2 - 68a + 240 = 0$ bzw. $a = 34 \pm \sqrt{34^2 - 240}$. Es ist $34^2 - 240 = (30+4)^2 - 240 = 900 + 240 + 16 - 240 = 916$, also $30 < \sqrt{34^2 - 240} < 31$, sodass es keine Lösung mit $b = 16$ gibt.

Wäre $b = 20$, so wäre $z = 100a + 20$ zwar durch 5, aber nicht 25 teilbar, was ein Widerspruch zu $z = (a+b)^2$ ist.

Für $b = 21$ müsste $100a + 21 = (a+21)^2 = a^2 + 42a + 441$, also $a^2 - 58a + 420 = 0$ und damit $a = 29 \pm \sqrt{29^2 - 420} = 29 \pm 841 - 420 = 29 \pm \sqrt{421}$ gelten, was wegen $20 < \sqrt{421} < 21$ wieder keine Lösung besitzt.

Wäre $b = 24$, dann $100a + 24 = (a+24)^2 = a^2 + 48a + 576$ und $a^2 - 52a + 552 = 0$, also $a = 26 \pm \sqrt{26^2 - 552}$. Es ist $26^2 - 552 = 900 - 2 \cdot 30 \cdot 4 + 4^2 - 552 = 900 - 240 + 16 - 552 = 124$, also $11 < \sqrt{26^2 - 552} < 12$, sodass es auch in diesem Fall keine Lösung gibt.

Abschließend sei $b = 25$. Dann ist $100a + 25 = (a+25)^2 = a^2 + 50a + 625$ und damit $a^2 - 50a + 600 = 0$, was die Lösungen $25 \pm \sqrt{25^2 - 600} = 25 \pm \sqrt{25} = 25 \pm 5$, d. h. $a_1 = 20$ und $a_2 = 30$ besitzt.
Tatsächlich ist $(20+25)^2 = 45^2 = 2025$ und $(30+25)^2 = 55^2 = 3025$, sodass $(a,b) \in \{(20, 25), (30, 25)\}$ die gesuchte Lösungsmenge ist.

Aufgabe 300934:
Man ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen n zwischen 100 und 400, für die die Summe s der Ziffern bei Darstellung von n im Dezimalsystem (die übliche „Quersumme“) gleich der Summe t der Ziffern ist, die bei der Darstellung von n im System mit der Basis 9 auftreten.
Hinweis:
Um eine Summe von Ziffern bilden zu können, ist natürlich jede einzelne Ziffer als Zahl aufzufassen. Das ist ohne Missverständnis möglich, da die für das System der Basis 9 notwendige Ziffern 0, 1,... , 8 dort dieselben Zahlen darstellen wie im Dezimalsystem.

Lösung von cyrix:
Es sei $n = z_2 \cdot 10^2 + z_1 \cdot 10 + z_0$ die Darstellung von n im Dezimalsystem und $n = n_2 \cdot 9^2 + n_1 \cdot 9 + n_0$ die Darstellung im System zur Basis 9. Dabei reichen wegen $9^3 = 729 > 400 \geq n$ auch drei Ziffern aus. Dann ist $s = z_2 + z_1 + z_0$ und $t = n_2 + n_1 + n_0$.

Wegen $10 \equiv 1 \pmod 9$ ist $n \equiv z_2 \cdot 1^2 + z_1 \equiv 1 + z_0 = s \pmod 9$ und analog wegen $9 \equiv 1 \pmod 8$ auch $n \equiv n_2 \cdot 1^2 + n_1 \cdot 1 + n_0 = t \pmod 8$.

Gilt $s = t$, so ist also $n - s = n - t$ sowohl durch 9 als auch 8, also wegen $\text{ggT}(9,8) = 1$ auch durch $9 \cdot 8 = 72$ teilbar. Es folgt $n - s = n - t \in \{144, 216, 288, 360\}$.
Es ist $n \leq 400 < 404 = 5 \cdot 81 - 1$, also $n < 488_9$. Damit gilt $t < 4 + 8 + 8 = 20$, also $t \leq 19$.

Fall 1: $n - s = n - t = 144$.

Dann ist $145 \le n \le 144 + 19 = 163$, also $s \le 1 + 5 + 9 = 15$ und damit $145 \le n \le 144 + 15 = 159$. Es ist $145 = 171_9$ und $159 = 186_9$, also $9 \le t \le 16$. Damit ergibt sich $149 \le n \le 159$. Für $n = 149$ ist $s = 14$ und wegen $n = 175_9$ dann $t = 13$, also keine Lösung.
Für $n = 150 + z_0$ ist $s = 6 + z_0$. Ist $0 \le z_0 \le 2$, so $176_9 \le n \le 178_9$, also $s \le 8$ und $t \ge 14$, sodass es keine Lösung gibt. Für $3 \le z_0 \le 9$ dagegen ist $n = 1 \cdot 9^2 + 8 \cdot 9 + (z_0 - 3)$, sodass sich $t = 1 + 8 + (z_0 - 3) = 6 + z_0 = s$ ergibt.
Also sind alle $n \in \{153{,}154{,}155{,}156{,}157{,}158{,}159\}$ Lösungen.

Fall 2: $n - s = n - t = 216$.
Dann ist $217 \le n \le 216 + 19 = 235$ und damit $s \le 2 + 2 + 9 = 13$, d. h. $n \le 216 + 13 = 229$. Es ist $217 = 261_9$ und $229 = 274_9$, also $9 \le t$ und damit $225 \le n \le 229$.
Es ist $n = 220 + z_0$ mit $z_0 \ge 5$ und $n = 2 \cdot 9^2 + 7 \cdot 9 + (z_0 - 5)$, also $s = 2 + 2 + z_0 = 4 + z_0$ und $t = 2 + 7 + (z_0 - 5) = z_0 + 4 = s$, sodass alle Werte $n \in \{225{,}226{,}227{,}228{,}229\}$ Lösungen sind.

Fall 3: $n - s = n - t = 288$.
Dann ist $289 \le n \le 288 + 19 = 307$. Es ist $289 = 351_9$ und $307 = 371_9$, also $9 \le t \le 17$. Damit ist $297 \le n \le 305$. Ist $300 \le n \le 300$, so also $s \le 3 + 0 + 5 = 8$, was wegen $t \ge 9$ keine Lösungen liefert.
Also ist $297 \le n \le 299$ und damit $s \ge 18$, während $297 = 360_9$ und $299 = 362_9$, also $t \le 3 + 6 + 2 = 11$, sodass es hier keine Lösung gibt.

Fall 4: $n - s = n - t = 360$.
Dann ist $361 \le n \le 379$. Dann ist $s \ge 10$, also $370 \le n \le 379$, d. h. $n = 370 + z_0$ und $s = 10 + z_0$. Es ist $370 = 451_9$, also für $0 \le z_0 \le 7$ ist $n = 4 \cdot 9^2 + 5 \cdot 9 + (z_0 + 1)$ und $t = 4 + 5 + z_0 + 1 = 10 + z_0 = s$, sodass alle $n \in \{370{,}371{,}372{,}373{,}374{,}375{,}376{,}377\}$ Lösungen sind.
Ist dagegen $n = 370 + z_0$ mit $8 \le z_0 \le 9$, also weiterhin $s = 10 + z_0$, so ist $n = 4 \cdot 9^2 + 6 \cdot 9 + (z_0 - 8)$ und damit $t = 4 + 6 + z_0 - 8 = 2 + z_0 \neq s$, sodass es keine weiteren Lösungen gibt.

Zusammenfassend erfüllen genau die folgenden n die Bedingung der Aufgabenstellung:
$n \in \{153{,}154{,}155{,}156{,}157{,}158{,}159{,}225{,}226{,}227{,}228{,}229{,}370{,}371{,}372{,}373{,}374{,}375{,}376{,}377\}$

Aufgabe 320934:
Ist p eine Primzahl, so sei M_p die Menge aller derjenigen Zahlen z, die sich mit positiven ganzen Zahlen x und y in der Gestalt $z = x^2 + p \cdot y^2$ darstellen lassen.
Beweisen Sie, dass für jede Primzahl p die folgende Aussage $(*)$ gilt!
Wenn eine Zahl z der Menge M_p angehört, dann gehört auch die Zahl z^2 der Menge M_p an. $(*)$

Lösung von cyrix:
Es sei $z \in M_p$, sodass es also positive ganze Zahlen x und y mit $z = x^2 + p \cdot y^2$ gibt. Dann ist

$$z^2 = x^4 + 2px^2y^2 + p^2y^4 = x^4 - 2px^2y^2 + p^2y^4 + 4px^2y^2 = |x^2 - py^2|^2 + p \cdot (2xy)^2$$

Offensichtlich sind mit x und y auch $|x^2 - py^2|$ und $2xy$ ganze Zahlen. Mit $x,y > 0$ ist auch $2xy > 0$.
Nach Definition ist $|x^2 - py^2| \ge 0$. Es kann aber nicht $x^2 - py^2 = 0$ gelten, da sonst $p = \frac{x^2}{y^2}$, also $\sqrt{p} = \frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$ folgen würde, was ein Widerspruch ist.
Also ist $x^2 - py^2 \neq 0$ und damit $|x^2 - py^2| > 0$, sodass auch $z^2 \in M_p$ folgt, $\square$.

Aufgabe 330932:
Für jede positive ganze Zahl n denke man sich nach folgender Vorschrift eine weitere Zahl n' gebildet:
Aus der Zifferndarstellung von n im Dezimalsystem wird die erste Ziffer weggenommen und stattdessen hinter die letzte Ziffer angefügt.
Dann sei n' die Zahl mit der entstandenen Zifferndarstellung. Untersuchen Sie, ob es durch 7 teilbare Zahlen n gibt, für die $n' = n : 7$ gilt!

Lösung von Nuramon:
Wir schreiben n in der Form $n = a \cdot 10^x + b$, wobei $a \in \{1, \dots, 9\}, x,b \in \mathbb{N}$ und $b < 10^x$ sei. Dann ist $n' = 10b + a$.
Damit $n' = n : 7$, also $7 \cdot (10b + a) = a \cdot 10^x + b$ gilt, muss demnach $a(10^x - 7) = 69b$ gelten.

Wir wählen $a = 1$ und suchen ein $x \in \mathbb{N}$, für das $10^x - 7$ durch $69 = 3 \cdot 23$ teilbar ist. Da $10^x - 7 \equiv 1^x - 1 \equiv 0 \pmod 3$ immer erfüllt ist, genügt es ein x zu finden mit $10^x \equiv 7 \pmod{23}$. Nach dem kleinen Satz von Fermat gilt $1 \equiv 10^{22} \pmod{23}$. Multiplikation mit 7 liefert $7 \equiv (7 \cdot 10) \cdot 10^{21} \equiv 10^{21} \pmod{23}$. Also können wir $x = 21$ wählen.

Für $b = \frac{10^x - 7}{69}$ gilt offenbar $b < 10^x$, so dass wir schließen können, dass $n = 10^{21} + \frac{10^{21} - 7}{69}$ eine Zahl mit den geforderten Eigenschaften ist.

Aufgabe 330944:
Jemand findet die Angabe

$$22! = 11240007277 * *607680000$$

Darin sind auch die zwei durch $*$ angedeuteten unleserlichen Ziffern. Er möchte diese Ziffern ermitteln, ohne die Multiplikationen vorzunehmen, die der Definition von 22! entsprechen.
Führen Sie eine solche Ermittlung durch und begründen Sie sie! Dabei darf verwendet werden, dass die angegebenen Ziffer korrekt sind.
Hinweis: Für jede positive ganze Zahl n wird $n!$ definiert als das Produkt aller positiven ganzen Zahlen von 1 bis n.

Lösung von cyrix:
Es sei a die vordere und b die hintere der beiden unleserlichen Ziffern. Da 22! durch 9 teilbar ist, muss ihre Quersumme durch 9 teilbar sein. Sie lautet $1+1+2+4+7+2+7+7+a+b+6+7+6+8 = 58+a+b$, sodass wegen $0 \leq a + b \leq 18$ dann $a + b \in \{5,14\}$ gilt.

Weiterhin ist 22! durch 11 teilbar, sodass ihre alternierende Quersumme durch 11 teilbar ist. Diese lautet $1-1+2-4+0-0+0-7+2-7+7-a+b-6+0-7+6-8 = -22-a+b$, sodass $a - b$ durch 11 teilbar ist, was wegen $-9 \leq a - b \leq 9$ auf $a - b = 0$ und damit $a = b$ führt.

Da es keine Lösung in natürlichen Zahlen für $a + b = 5$ und $a = b$ gibt, muss $a + b = 14$ und damit $a = b = 7$ gelten. Dies sind die gesuchten Ziffern.

V.III Diophantische Gleichungen

I Runde 1

Aufgabe 330913:
Für welche ganzen, nicht negativen Zahlen t ist $z = \sqrt{t + \sqrt{t}}$ eine rationale Zahl, für welche nicht?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

I Für $t = 0$ ist $z = \sqrt{0 + \sqrt{0}} = 0$, also eine rationale Zahl.

II Angenommen, für eine ganze Zahl $t > 0$ wäre z rational. Aus dieser Annahme folgt, dass auch die Zahlen $z^2 = t + \sqrt{t}$ und somit $\sqrt{t} = z^2 - t$ rationale wären.

Also wäre $t = m^2$ mit einer positiven ganzen Zahl m. Mit dieser wäre demnach $z = \sqrt{m^2 + m}$, woraus ebenso folgt, dass auch $m^2 + m$ eine Quadratzahl sein müsste.

Wegen $m^2 < m^2+m < (m+1)^2$ liegt aber m^2+m zwischen zwei aufeinanderfolgenden Quadratzahlen und ist somit selbst keine Quadratzahl.

Dieser Widerspruch zeigt, dass die Annahme, z wäre rational, falsch war; d. h., es ist bewiesen: Für alle ganzen Zahlen $t > 0$ ist z keine rationale Zahl.

II Runde 2

Aufgabe 080923:
Geben Sie alle Paare (x, y) natürlicher Zahlen an, für die $x^3 - y^3 = 999$ ist!

Lösung von Nuramon:
Offenbar erfüllt jede Lösung $x > y$. Es gibt also ein positives $z \in \mathbb{N}$ mit $x = y + z$. Das führt zur äquivalenten Gleichung $z(z^2 + 3yz + 3y^2) = 999$.
Es muss also z ein Teiler von $999 = 3^3 \cdot 37$ sein. Da $z(z^2 + 3yz + 3y^2)$ genau dann durch 3 teilbar ist, wenn z durch drei teilbar ist und weil $z \leq z^2 + 3yz + 3y^2$ gilt, bleiben nur noch die Möglichkeiten $(z,z^2 + 3yz + 3y^2) = (3, 333)$ und $(z,z^2 + 3yz + 3y^2) = (9, 111)$ übrig.

1. Fall: $(z,z^2 + 3yz + 3y^2) = (3, 333)$
Dann gilt $9+9z+9y^2 = 333$, also $y^2+3y = 108$. Die einzige natürliche Lösung dieser Gleichung ist $y = 9$. Das führt zur Lösung $(x,y) = (12,9)$.

2. Fall: $(z,z^2 + 3yz + 3y^2) = (9, 111)$
Dann ist $81 + 27y + 3y^2 = 111$, also $y^2 + 9y = 10$, also $y = 1$. Somit ist $(x,y) = (10,1)$ eine Lösung.
Insgesamt gibt es also genau zwei Lösungspaare, nämlich (12,9) und (10,1).

Aufgabe 110922:
Ermitteln Sie alle geordneten Paare (a, b) ganzer Zahlen a und b $(b \neq 0)$ mit folgender Eigenschaft:
Ersetzt man den Zähler a des Bruches $\frac{a}{b}$ durch die Summe aus a und einer geeigneten natürlichen Zahl n $(n \neq 0)$ und ersetzt man zugleich den Nenner b dieses Bruches durch das Produkt aus b und der gleichen Zahl n, so erhält man einen Bruch, der dem zu Anfang genannten Bruch $\frac{a}{b}$ gleich ist.

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:
Gesucht sind Zahlentripel (a,b,n), die die Gleichung

$$\frac{a}{b} = \frac{a+n}{bn}$$

erfüllen. b kann gekürzt werden und ist somit beliebig wählbar. Nach Umformung erhalten wir

$$(a-1)(n-1) = 1.$$

Da Lösungen in $\mathbb{Z}$ gesucht sind, folgt daraus $a - 1 = n - 1 = \pm 1$. Also sind wegen $n \neq 0$ die Tripel durch $(2,b,2), b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ gegeben.

Aufgabe 110924:
Beweisen Sie den folgenden Satz!
Sind p_1 und p_2 Primzahlen, für die $3 < p_1 < p_2$ gilt, dann gibt es stets zwei natürliche Zahlen a und b, so dass die Gleichungen

$$(1) \quad a + b = p_2 \qquad \text{und} \qquad (2) \quad a - b = p_1$$

gleichzeitig erfüllt sind und das Produkt $a \cdot b$ durch 6 teilbar ist.

Lösung von ZePhoCa:
Addition von (1) und (2) ergibt $2a = p_1 + p_2$, Subtraktion ergibt $2b = p_2 - p_1$.

Setze also $a = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)$ und $b = \frac{1}{2}(p_2 - p_1)$.
Weil p_1,p_2 Primzahlen größer als 2 mit $p_2 > p_1$ sind, gilt a,$b \in \mathbb{N}$.

Außerdem ist $ab = \frac{1}{4}(p_1 + p_2)(p_2 - p_1)$. Da p_i Primzahlen mit $p_i > 3$ sind, sind die p_i nicht durch 2 teilbar. Dann ist aber entweder $p_1 + p_2$ oder $p_2 - p_1$ durch 3 teilbar. Außerdem ist einer der Faktoren $(p_2 \pm p_1)$ durch 4 und einer durch 2 teilbar.
Damit ist $(p_1 + p_2)(p_2 - p_1)$ durch 24 teilbar, also ab durch $24/4 = 6$.

Aufgabe 150921:
Klaus hat bei einer Hausaufgabe $4^2 - 3^2$ auszurechnen. Ihm fällt dabei auf, dass das Ergebnis 7 gleich der Summe der beiden benutzten Zahlen 4 und 3 ist. Als er seine Entdeckung an den Zahlen 10 und 11 überprüft, stellt er fest, dass auch hier $11^2 - 10^2 = 21 = 11 + 10$ ist.
Ermitteln Sie alle Paare (a, b) natürlicher Zahlen mit $a > b$, für die die (positive) Differenz der Quadrate der beiden Zahlen gleich der Summe beider Zahlen ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Laut Aufgabenstellung sind alle Paare $(a$,$b)$ mit a, b natürlich und $a > b$ zu ermitteln, für die $a^2 - b^2 = a + b$ gilt.
Nun ist nach einer binomischen Formel $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$, und daher ist die geforderte Eigenschaft gleichwertig mit $(a + b)(a - b) = a + b$.
Wegen a, b natürlich und $a > b$, ist $a + b \neq 0$. Also ist die genannte Eigenschaft weiterhin gleichwertig mit $a - b = 1$, d. h. die gestellte Bedingung wird genau von den Paaren (a, b) natürlicher Zahlen erfüllt, für die a um 1 größer ist als b.

Aufgabe 190924:
Ermitteln Sie alle diejenigen natürlichen Zahlen x, für die folgendes gilt!
(1) x ist das Quadrat einer natürlichen Zahl.
(2) Vergrößert man x um 24, so erhält man das Quadrat einer natürlichen Zahl.
(3) Vermindert man x um 24, so erhält man das Quadrat einer natürlichen Zahl.

Lösung von cyrix:
Es sei nach (1) $x = n^2$ und nach (2) $x + 24 = n^2 + 24 = (n + s)^2 = n^2 + 2sn + s^2$ mit positiven ganzen Zahlen n und s. Es folgt $24 = 2sn + s^2$ und $s^2 = 24 - 2sn = 2(12 - sn)$, sodass s^2 und damit s gerade sowie $s \geq 2$ ist.
Weiterhin ist nach (3) $x \geq 24$, also $n \geq 5$ und damit $s^2 \leq 24 - 2 \cdot 2 \cdot 5 = 4$, also auch $s \leq 2$. Man erhält, dass $s = 2$ und damit $n = \frac{24-s^2}{2s} = \frac{20}{4} = 5$ sein muss. Es ist $x = n^2 = 25$ also die einzig mögliche Lösung.

Tatsächlich ist nicht nur $x = 25 = 5^2$ das Quadrat einer natürlichen Zahl (1), sondern auch $x^2 + 24 = 59 = 7^2$ (2) und $x^2 - 24 = 1 = 1^2$ (3), sodass $x = 25$ tatsächlich auch Lösung (und damit die einzige) ist.

Aufgabe 200921:
Ermitteln Sie die größte Primzahl p, für die ein Tripel (a, b, c) von natürlichen Zahlen a, b und c so existiert, dass $(a + p)(b + p)(c + p) = 1980$ gilt!
Ermitteln Sie zu dieser Primzahl p alle verschiedenen zugehörigen Tripel (a, b, c) mit der genannten Eigenschaft!

Lösung von cyrix:
Bemerkung: In dieser Lösung wird die Menge der natürlichen Zahlen mit $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ angenommen, wie es die Aufgabe vermutlich voraussetzt.

Es sei o. B. d. A. $a \leq b \leq c$ und damit auch $a + p \leq b + p \leq c + p$.
Es wird p maximal, wenn auch $a + p$ seinen größtmöglichen Wert annimmt. Wegen $13^3 = 169 \cdot 13 = 2197 > 1980$ muss dann $a + p < 13$, also $a + p \leq 12$ gelten. Es ist $1980 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$, sodass für $a + p = 12 = 2^2 \cdot 3$ auch $(b + p)(c + p) = 3 \cdot 5 \cdot 11$. Eine Zerlegung dieses Produkts in zwei Faktoren besitzt aber immer mindestens einen Faktor, der höchstens 11 beträgt, was im Widerspruch dazu steht, dass $a + p$ den kleinsten Wert der drei Faktoren $a + p$, $b + p$, $c + p$ annimmt. Also muss sogar $a + p \leq 11$ sein.

Ist $a + p = 11$, so verbleibt $(b + p)(c + p) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$, was sich etwa in $b + p = 2^2 \cdot 3 = 12 \geq a + p$ und $c + p = 3 \cdot 5 = 15 \geq a + p$ zerlegen lässt, sodass p maximal 11 gewählt werden kann.

Wählt man das p maximal, also $p = 11$, so ist also – unter der weiterhin angenommenen Sortierung der Variablen a, b und c – $a = 0$ und $(b + p)(c + p) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$. Dann ist genau einer der beiden Faktoren $b + p$ bzw. $c + p$ durch 5 teilbar.

Ist dieser auch durch 3 teilbar, so verbleiben für den anderen Faktor höchstens die Faktoren $2^2 \cdot 3 = 12$. Also darf der durch 5 teilbare Faktor neben dem einen Faktor 3 keinen weiteren (und auch keinen Faktor 2) enthalten, da sonst der andere Faktor ein echter Teiler von 12, also höchstens 6, wäre, was im Widerspruch zu $a + p \leq b + p \leq c + p$ steht.
Demzufolge gibt es in diesem Fall nur die eine Zerlegung in $12 \cdot 15$, sodass aufgrund der Anordnung $b + p = 12$ und $c + p = 15$, also $(a,b,c) = (0,1,4)$ gilt.

Ist der durch 5 teilbare Faktor nicht durch 3, aber durch 2 teilbar, so muss er wegen $5 \cdot 2 = 10 < 11$ auch durch den zweiten Faktor 2 teilbar sein. Dann ergibt sich aber für den zweiten Faktor, dass dieser höchstens $3^2 = 9$, also kleiner als $a + p = 11$ ist, was einen Widerspruch darstellt. Ein solcher ergibt sich auch, wenn der durch 5 teilbare Faktor weder durch 2 noch 3 teilbar ist, da er dann genau 5 beträgt und $5 < 11$ ist.

Also gibt es unter der Zusatzannahme $a \leq b \leq c$ genau ein Tripel (a,b,c) für das maximal mögliche $p = 11$.
Lässt man die Zusatzannahme fallen, ergeben sich alle 6 möglichen Anordnungen dieses einen Tripels als Lösungen:
$$(a,b,c) \in \{(0,1,4);\ (0,4,1);\ (1,0,4);\ (1,4,0);\ (4,0,1);\ (4,1,0)\}$$

Aufgabe 240924:
Beweisen Sie: Sind a und b beliebige ganze Zahlen, wobei nur $b \neq 0$ vorausgesetzt wird, so ist die Zahl
$$z = a^5 + 3a^4b - 5a^3b^2 - 15a^2b^3 + 4ab^4 + 12b^5$$
das Produkt aus fünf ganzen Zahlen, von denen keine zwei einander gleich sind!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es gilt

$$z = (a - b) \cdot (a + b) \cdot (a - 2b) \cdot (a + 2b) \cdot (a + 3b) \qquad (1)$$

was man durch Ausmultiplizieren bestätigen kann.
Von den in (1) auftretenden Faktoren sind keine zwei einander gleich; denn aus $a + nb = a + n'b$ (n, n' zwei verschiedene Zahlen -1, 1, -2, 2, 3) folgte $(n - n') \cdot b = 0$ und daraus wegen $n \neq n'$, also $b = 0$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

Aufgabe 250921:
Ermitteln Sie alle diejenigen Tripel (a, b, c) von natürlichen Zahlen a, b, c, für die $a \leq b \leq c$ und $a \cdot b \cdot c = 19 \cdot 85$ gilt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Primfaktorzerlegung von $19 \cdot 85 = 1615$ lautet $1615 = 5 \cdot 17 \cdot 19$. Für die zu ermittelnden Tripel gibt es daher genau die folgenden Möglichkeiten.
1. Genau die beiden Zahlen a und b sind gleich 1. Das führt auf das Tripel $(1, 1, 1615)$.
2. Genau die eine Zahl a ist gleich 1. Dann enthält b mindestens einen der Primfaktoren 5, 17, 19. Enthielte b mehr als einen dieser Faktoren, so wäre $b \geq 5 \cdot 17 = 85$. Andererseits enthielte c dann nur noch höchstens einen dieser Faktoren, also wäre $c \leq 19$. Das widerspricht der Bedingung $b \leq c$.
Also enthält b genau einen der Primfaktoren 5, 17, 19 und c enthält die beiden anderen. Das führt auf die Tripel $(1, 5, 323)$, $(1, 17, 135)$, $(1, 19, 85)$.
3. Keine der drei Zahlen a, b, c ist gleich 1, führt auf das Tripel $(5, 17, 19)$.
Somit sind genau die fünf in 1., 2., 3. angegebenen Tripel die gesuchten.

Aufgabe 260923:
Ermitteln Sie alle diejenigen Tripel $(a; b; c)$ natürlicher Zahlen a, b, c, die die folgenden Bedingungen (1) bis (5) erfüllen!
(1) Es gilt $b < c$.
(2) b und c sind zueinander teilerfremd.
(3) a ist von jeder der Zahlen 4; 9; 12 verschieden.
(4) b und c sind von jeder der Zahlen 13; 16; 21 verschieden.
(5) Jede Zahl, die die Summe zweier verschiedener Zahlen der Menge $A = \{4; 9; 12; a\}$ ist, ist in der Menge $B = \{13; 16; 21; b; c\}$ enthalten.

Lösung von cyrix:
Nach (5) sind die Summen $4+9 = 13$, $4+12 = 16$, $9+12 = 21$, $4+a$, $9+a$ und $12+a$ alle in B enthalten. Da nach (3) a verschieden von 4, 9 und 12 ist, ist in dieser Liste von sechs Additionsaufgaben doppelt. Da aber B nur höchstens fünf Elemente enthält, müssen mindestens zwei das gleiche Ergebnis besitzen. Nach (4) sind b und c von den sonstigen Elementen von B und nach (1) auch voneinander verschieden, sodass B tatsächlich genau fünf Elemente besitzt und damit von den drei obigen Summen, die a als Summand enthalten, genau eine einen schon vorhanden Wert 13; 16 oder 21 annimmt.

Fall 1: Es ist $4 + a \in \{13; 16; 21\}$. Dann kann $4 + a$ nicht 13 oder 16 sein, da sonst $a = 9$ bzw. $a = 12$ folgen würde; im Widerspruch zu (3). Also muss $a + 4 = 21$ und damit $a = 17$ gelten. Dann ist $a + 9 = 26 = b < a + 12 = 29 = c$, was auch (2) erfüllt, sodass man ein erstes Lösungstripel $(a,b,c) = (17,26,29)$ erhält.

Fall 2: Es ist $9 + a \in \{13; 16; 21\}$. Dann kann $9 + a$ nicht 13 oder 21 sein, da sonst $a = 4$ bzw. $a = 12$ folgen würde; im Widerspruch zu (3). Also muss $a + 9 = 16$ und damit $a = 7$ gelten. Dann ist $a + 4 = 13 = b < a + 12 = 19 = c$, was auch (2) erfüllt, sodass man ein zweites Lösungstripel $(a,b,c) = (7,13,19)$ erhält.

Fall 3: Es ist $12 + a \in \{13; 16; 21\}$. Dann kann $12 + a$ nicht 16 oder 21 sein, da sonst $a = 4$ bzw. $a = 9$ folgen würde; im Widerspruch zu (3). Also muss $a + 12 = 13$ und damit $a = 1$ gelten. Dann ist $a + 4 = 5 = b < a + 9 = 10 = c$. Dies widerspricht aber (2), sodass es in diesem Fall kein Lösungstripel gibt.

Zusammenfassend gibt es also genau zwei Lösungstripel, die die Aufgabenstellung erfüllen, nämlich (7,13,19) und (17,26,29).

III Runde 3

Aufgabe 070934:
Man ermittle alle geordneten Tripel (a, b, c) natürlicher Zahlen a, b und c, für die

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1 \qquad (1)$$

gilt. Zwei Tripel (a_1, b_1, c_1) und (a_2, b_2, c_2) heißen dabei genau dann gleich, wenn $a_1 = a_2, b_1 = b_2$ und $c_1 = c_2$ ist.

Lösung von Kitaktus:
Diese Aufgabe lässt sich mit Fallunterscheidung lösen.
Es seien $0 < a \le b \le c$ drei natürliche Zahlen mit $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$ (1).

1. Fall: $a = 1$.
$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > \frac{1}{a} = 1$ im Widerspruch zu (1). In diesem Fall gibt es keine Lösung.

2. Fall: $a \ge 3$
Wenn $c > 3$ ist, dann ist

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \le \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{c} < \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$$

im Widerspruch zu (1)
Wenn $c \le 3$ ist, dann folgt wegen $3 \le a \le b \le c \le 3$, dass $a = b = c = 3$ gilt.
In diesem Fall ist tatsächlich $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$.

3. Fall: $a = 2$

$$\begin{aligned} (1) \Leftrightarrow \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2} &\Leftrightarrow 2(c + b) = bc \qquad \text{(Multiplikation mit } 2bc > 0) \\ &\Leftrightarrow 4 = bc - 2(b + c) + 4 = (b - 2)(c - 2) \qquad (2) \end{aligned}$$

Wegen $b \geq= a$ muss $b \ge 2$ sein und $b = 2$ ist nicht möglich, weil $4 \ne (2 - 2)(c - 2) = 0$.
$5 \le b \le c$ ist auch nicht möglich, da dann $(b - 2)(c - 2) \ge (5 - 2)(5 - 2) = 9 > 4$ gilt, im Widerspruch zu (2).
Es kommen also nur die Fälle $b = 3$ und $b = 4$ in Betracht.

3.1. Fall: $b = 3$
(2) $\Leftrightarrow 4 = c - 2$, also $c = 6$. Tatsächlich ist $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$.
3.2. Fall: $b = 4$
(2) $\Leftrightarrow 4 = 2(c - 2)$, also $c = 4$. Tatsächlich ist $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$.

Es gibt also genau zehn Lösungstripel: (3,3,3), (2,3,6) und (2,4,4) sowie die Permutationen des 2. und 3. Tripels.

Aufgabe 080931:
Marlies erklärt Claus-Peter ein Verfahren, nach dem man, wie sie meint, die Quadrate der natürlichen Zahlen von 26 bis 50 leicht ermitteln kann, wenn man die Quadrate der natürlichen Zahlen bis 25 auswendig weiß.
„Wenn du beispielsweise das Quadrat von 42 berechnen willst, dann bildest du die Ergänzung dieser Zahl bis 50 und quadrierst sie. Das wäre in diesem Falle 64.
Davor setzt du die Differenz zwischen deiner Zahl und 25, in deinem Falle also 17.
Die so gebildete Zahl, hier also 1764, ist bereits das gesuchte Quadrat von 42.“
Prüfen Sie die Richtigkeit dieses Verfahrens für alle Zahlen des angegebenen Bereichs!

Lösung von ZePhoCa:
Wir betrachten drei Fälle. Sei immer x die betrachtete Zahl.

1. Das Quadrat der Ergänzung der Zahl zu 50 ist einstellig (d. h. $x \in \{47,\ldots,50\}$). Da $(50-x)^2$ einstellig ist, ist die gebildete Zahl dann $10(x-25)+(50-x)^2 = x^2 - 90x + 2250$.

   Das ist genau dann gleich x^2 wenn $x = 25$, dies liegt aber nicht im betrachteten Bereich. Für diese Zahlen funktioniert das Verfahren also nicht.

2. Das Quadrat der Ergänzung der Zahl zu 50 ist zweistellig (d. h. $x \in \{41,\ldots,46\}$). Dann erhält man mit dem Verfahren die Zahl $100(x-25)+(50-x)^2 = x^2$, hier funktioniert das Verfahren also.

3. Das Quadrat der Ergänzung der Zahl zu 50 ist dreistellig (d. h. $x \in \{26,\ldots,40\}$). Dann erhält man mit dem Verfahren die Zahl $1000(x-25)+(50-x)^2 = x^2+900x-22500$ und dies ist genau dann gleich x^2 wenn $x = 25$, was nicht im betrachteten Bereich liegt.

Also geht das Verfahren genau dann, wenn x zwischen 41 und 46 liegt.

Aufgabe 100933:
Wenn x eine reelle Zahl ist, so bedeute $[x]$ die größte ganze Zahl, die nicht größer als x ist. (So ist z. B. $[3,7]=3, [-3,7]=-4, [4]=4$.)
Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen x, für die gilt:

$$\left[\frac{10+3x}{6}\right] = \frac{5x+3}{7}$$

Lösung von cyrix:
Die Gleichung wird genau dann erfüllt, wenn die folgenden beiden Ungleichungen zugleich wahr sind: $\frac{5x+3}{7} \leq \frac{10+3x}{6}$ und $\frac{10+3x}{6} < \frac{5x+3}{7} + 1 = \frac{5x+10}{7}$.
Die erste Ungleichung ist äquivalent zu $\left(\frac{5}{7}-\frac{3}{6}\right)x \leq \frac{10}{6}-\frac{3}{7}$ bzw. $\frac{3}{14}\cdot x \leq \frac{26}{21}$, also $x \leq \frac{26}{21}\cdot\frac{14}{3} = \frac{52}{9}$.
Und die zweite Ungleichung ist äquivalent zu $\left(\frac{3}{6}-\frac{5}{7}\right)\cdot x < \frac{10}{7}-\frac{10}{6}$ bzw. $-\frac{3}{14}\cdot x < -\frac{5}{21}$, also $x > \frac{5}{21}\cdot\frac{14}{3} = \frac{10}{9}$.
Zusammengefasst erfüllen also genau die reellen Zahlen x mit $\frac{10}{9} < x \leq \frac{52}{9}$ die gegebene Betragsgleichung.

Aufgabe 100934:
Gesucht sind alle geordneten Tripel reeller Zahlen (x,y,z), welche Lösungen des Gleichungssystems sind:

$$(1) \quad x+y=2 \qquad ; \qquad (2) \quad xy-z^2=1$$

Lösung von cyrix:
Aus der zweiten Gleichung erhält man $xy = 1+z^2 \geq 1$ und damit

$$0 \leq (x-y)^2 = (x+y)^2 - 4xy = 2^2 - 4xy \leq 4-4 = 0$$

Also muss in dieser Ungleichungskette an jeder Stelle Gleichheit gegolten haben, sodass $x - y = 0$ und $xy = 1$, also $x = y = \pm 1$, und mit Gleichung (2) auch $z = 0$ folgt.
Es kann also nur zwei Lösungstripel (x,y,z) geben, nämlich $(-1,-1,0)$ und $(1,1,0)$. Die Probe bestätigt aber nur das zweite, sodass $(1,1,0)$ die einzige Lösung des gegebenen Gleichungssystems ist.

Aufgabe 110936:
Ermitteln Sie alle geordneten Paare (x, y) ganzer Zahlen x, y, die Lösungen der folgenden Gleichung sind!

$$2x^2 - 2xy - 5x - y + 19 = 0$$

Lösung von cyrix:
Mittels der Substitution $y = z - 3$ mit $z \in \mathbb{Z}$ geht die Gleichung über in

$$2x^2 - 2xz + 6x - 5x - z + 3 + 19 = 0 \qquad \text{also} \qquad 2x^2 - 2xz + x - z = -22$$

bzw. $(2x + 1)(x - z) = -22$.
Damit ist $2x+1$ ein ganzzahliger Teiler von -22. Da dieser Term auch ungerade ist, ergeben sich folgende vier Fälle:

1. Fall: $2x + 1 = 1$ und $x - z = -22$. Dann ist $x = 0$, $z = 22$ und $y = 19$.
2. Fall: $2x + 1 = -1$ und $x - z = 22$. Dann ist $x = -1$, $z = -23$ und $y = -26$.
3. Fall: $2x + 1 = 11$ und $x - z = -2$. Dann ist $x = 5$, $z = 7$ und $y = 4$.
4. Fall: $2x + 1 = -11$ und $x - z = 2$. Dann ist $x = -6$, $z = -8$ und $y = -11$.

Die Probe bestätigt alle Ergebnisse. Die Gleichung wird demnach genau von den ganzzahligen Paaren $(x,y) \in \{(-6,-11),(-1,-26),(0,19),(5,4)\}$ gelöst.

Aufgabe 120936:
a) Man ermittle die Anzahl aller verschiedenen Tripel (k, n, m) natürlicher Zahlen k, n, m, für die $k \cdot n^2 \cdot (2m + 1) = 3808$ gilt.
b) Man gebe von den unter a) genannten Tripeln alle diejenigen an, für die das Produkt knm den kleinsten Wert annimmt.

Lösung von ZePhoCa:
a) Es gilt $3808 = 2^5 \cdot 7 \cdot 17$. Da $2m + 1$ ein ungerader Teiler von 3808 sein muss kann dies nur 7,17 oder $119 = 7 \cdot 17$ sein. Damit gilt $m \in \{3,8,59\}$.
Für n^2 gibt es die Möglichkeiten $n^2 = 4^2 = 2^4$ oder $n^2 = 2^2$ oder $n^2 = 1^2$ (unabhängig davon, wie m gewählt wurde). Jede dieser Wahlen legt k eindeutig fest, also gibt es $3 \cdot 3 = 9$ Möglichkeiten.

b) Wählt man $n = 1$ oder $n = 2$ so enthält k den zu 4 fehlenden Faktor quadratisch, um ein möglichst kleines Produkt zu erhalten muss also $n = 4$ gewählt werden. Von den verbleibenden Möglichkeiten $(k,m,n) \in \{(34,4,3),(14,4,8),(2,4,59)\}$ hat das Produkt $34 \cdot 4 \cdot 3 = 408$ den kleinsten Wert.

Aufgabe 140932:
Man gebe alle geordneten Quadrupel (a_1, a_2, a_3, a_4) aus vier unmittelbar aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen a_1, a_2, a_3, a_4 mit $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$ an, die folgender Bedingung genügen:
Die Summe der dritten Potenz der ersten beiden Zahlen des Quadrupels ist gleich der Differenz der dritten Potenz der letzten und vorletzten Zahl des Quadrupels.

Lösung von cyrix:
Wir können für eine ganze Zahl n die Elemente des Quadrupels schreiben als $a_1 = n-1$, $a_2 = n$, $a_3 = n+1$ und $a_4 = n+2$. Damit geht die Bedingung über in die Gleichung

$$(n-1)^3 + n^3 = (n+2)^3 - (n+1)^3 \qquad \text{bzw.}$$

$$2n^3 - 3n^2 + 3n - 1 = n^3 + 6n^2 + 12n + 8 - (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) = 3n^2 + 9n + 7$$

also $2n^3 - 6n^2 - 6n - 8 = 0$ und damit $n^3 - 3n^2 - 3n - 4 = 0$.
Es ist 4 eine Lösung dieser Gleichung, sodass wir (3,4,5,6) als Lösungsquadrupel erhalten.
Für den Fall $n \neq 4$ können wir die Gleichung durch $n-4$ teilen und erhalten $n^2 + n + 1 = 0$. Diese Gleichung hat aber keine ganzzahligen Lösungen, sodass auch keine weiteren Lösungsquadrupel existieren.

Aufgabe 150931:
Es sind drei aufeinanderfolgende ungerade natürliche Zahlen zu ermitteln, bei denen die Summe ihrer Quadrate eine vierstellige Zahl ist, die aus vier gleichen Ziffern besteht.

Lösung von cyrix:
Es seien $2n-1$, $2n+1$ und $2n+3$ die drei aufeinanderfolgenden ungeraden natürlichen Zahlen. Dann ist die Summe S ihrer Quadrate gleich

$$S = (2n-1)^2 + (2n+1)^2 + (2n+3)^2 = 4n^2 - 4n + 1 + 4n^2 + 4n + 1 + 4n^2 + 12n + 9 =$$

$$= 12n^2 + 12n + 11 = 12(n^2 + n + 1) - 1$$

Diese Summe soll eine vierstellige Zahl sein, die aus vier gleichen Ziffern z besteht. Also gilt $S = 1111 \cdot z$.
Es ist S ungerade, sodass auch z ungerade sein muss. Weiterhin lässt wegen $S = 1110z + z = 3 \cdot 370z + z$ die Summe S den gleichen Rest bei der Teilung durch 3 wie z selbst. Da aber S um 1 kleiner als ein Vielfaches von 12 (und damit auch von 3) ist, muss dieser Rest bei der Teilung durch 3 genau 2 betragen.
Als einzige Ziffer $1 \leq z \leq 9$ erfüllt $z = 5$ beide Bedingungen.
Demnach muss $S = 5555$ sein, woraus man $n^2 + n + 1 = \frac{5556}{12} = 463$ und $n = 21$ (bzw. $n = -22$, was aber wegen $2n - 1 \in \mathbb{N}$ entfällt) erhält, sodass die drei gesuchten aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen 41, 43 und 45 lauten.

Aufgabe 190931:
Beim Lösen einer Gleichung der Form $ax - 6 = bx - 4$ mit gegebenen natürlichen Zahlen a und b stellt Matthias fest:
(1) Die Gleichung hat eine natürliche Zahl x als Lösung.
(2) Die gleiche Zahl ergibt sich, wenn man - zur Durchführung der Probe - jeweils auf einer Seite dieser Gleichung die gefundene Lösung x einsetzt.
Ermitteln Sie alle Paare (a, b) natürlicher Zahlen, für die diese Feststellungen (1) und (2) zutreffen!

Lösung von cyrix:
Die Gleichung ist äquivalent zu $(a-b)x = 2$. Weiterhin ist nach (1) $x \in \mathbb{N}$, also $x \geq 0$, sodass auch $a - b \geq 0$ und also $a - b \in \mathbb{N}$ gilt. Insbesondere ist also x ein Teiler von 2, d. h., $x = 1$ oder $x = 2$.

1. Fall: $x = 1$. Dann ist nach (2) $a - 6 = b - 4 = 1$, also $a = 7$ und $b = 5$. Die Probe bestätigt, dass das Paar $(a,b) = (7,5)$ beide Eigenschaften erfüllt.

2. Fall: $x = 2$. Dann ist nach (2) $2a - 6 = 2b - 4 = 2$, also $a = 4$ und $b = 3$, was wieder durch die Probe bestätigt wird. Das zweite Paar (a,b), was die Aufgabenstellung erfüllt, lautet also (4,3), und weitere gibt es nicht.

Aufgabe 260931:
Ermitteln Sie alle diejenigen geordneten Paare (a, b) natürlicher Zahlen, für die die Gleichung

$$2(a+b) = ab$$

gilt!

Lösung von cyrix:
Es ist die Gleichung äquivalent zu $4 = ab-2a-2b+4 = (a-2)\cdot(b-2)$, sodass $a-2$ und $b-2$ das gleiche Vorzeichen haben und Teiler sowie zugehöriger Gegenteiler von 4 sind. Da a und b natürliche Zahlen sind, gilt dabei $a-2 \geq -2$ und $b-2 \geq -2$, sodass keine ganzzahlige Zerlegung der 4 mit Faktor -4 in Frage kommt. Damit gilt $(a-2)\cdot(b-2) = 4\cdot 1 = (\pm 2)\cdot(\pm 2) = 1\cdot 4$ und also

$$(a{,}b) \in \{(6{,}3), (0{,}0), (4{,}4), (3{,}6)\}.$$

Dass dies auch alles Lösungen der Ausgangsgleichungen sind, zeigt die Probe.

Aufgabe 260933:
Wenn eine reelle Zahl a gegeben ist, so werde jeder reellen Zahl x eine Zahl y, nämlich

$$y = \frac{x^3+x^2+ax+1}{x^2+1}$$

zugeordnet.
(A) Ermitteln Sie, wenn $a=-3$ gegeben ist, zwei ganze Zahlen x, deren zugeordnete Zahlen y ebenfalls ganze Zahlen sind!
(B) Ermitteln Sie eine reelle Zahl a, für die die folgende Aussage (*) gilt!
(*) Wenn die Zahl a gegeben ist, so gibt es unendlich viele ganze Zahlen x, deren jeweils zugeordnete Zahlen y ebenfalls ganze Zahlen sind.
(C) Untersuchen Sie, ob es außer der in (B) ermittelten Zahl a noch eine andere reelle Zahl a gibt, für die die Aussage (*) gilt!

Lösung von cyrix:
Es ist für jedes $a \in \mathbb{R}$

$$y = \frac{x^3+x+x^2+1+(a-1)x}{x^2+1} = x+1+\frac{a-1}{x^2+1}$$

(A): Für $a=-3$ ist also $y = x+1+\frac{-4}{x^2+1} = x+1-\frac{4}{x^2+1}$. Damit ist für jede ganze Zahl x die Zahl y ganz, wenn auch $x+1-y = \frac{4}{x^2+1}$ eine ganze Zahl, also x^2+1 ein Teiler von 4 ist. Dies ist z. B. für $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$ der Fall. Tatsächlich ist $y(0) = 1$ und $y(1) = 0$.

(B)/(C): Damit für ein a die Aussage (*) gilt, muss also für unendlich viele ganze Zahlen x auch $y-(x+1) = \frac{a-1}{x^2+1}$ eine ganze Zahl sein. Da auch x^2+1 eine ganze Zahl ist, ist damit auch $a-1 = (y-(x+1))\cdot(x^2+1) \in \mathbb{Z}$ und es gilt $a-1$ ist durch x^2+1 teilbar.
Insbesondere ist also $a-1$ durch unendlich viele verschiedene ganze Zahlen teilbar, was nur die ganze Zahl 0 erfüllt, sodass $a=1$ sein muss. Für $a=1$ ist aber $y=x+1$ für jedes ganzzahlige x selbst ganzzahlig, insbesondere also auch für unendlich viele x. Damit ist $a=1$ die einzige reelle Zahl, die (*) erfüllt.

Aufgabe 270931:
a) Beweisen Sie, dass die Gleichung

$$x_1^{11} + x_2^{11} + ... + x_{1987}^{11} = 1988 \tag{1}$$

keine reelle Lösung $(x_1, x_2, ..., x_{1987})$ besitzt, in der alle Zahlen $x_1, x_2, ..., x_{1987}$ natürliche Zahlen sind!

b) Beweisen Sie, dass die Gleichung (1) unendlich viele verschiedene Lösungen besitzt, in denen alle Zahlen ganze Zahlen sind!
Dabei heißen zwei Lösungen $(x_1, x_2, ..., x_{1987})$ und $(x'_1, x'_2, ..., x'_{1987})$ genau dann von einander verschieden, wenn mindestens eine der Ungleichungen gilt:

$$x_1 \neq x'_1, x_2 \neq x'_2, ..., x_{1987} \neq x'_{1987}$$

Lösung von cyrix:
a) Angenommen, es gäbe eine solche Lösung für die Gleichung (1) der Aufgabenstellung.
Wegen $x_i \geq 0$ für alle $i = 1, \dots, 1987$ ist dann auch für alle diese Indizes i der Wert $x_i^{11} \geq 0$, sodass genauso für alle diese i die Abschätzung $x_i^{11} \leq 1987 < 2048 = 2^{11}$, also $x_i < 2$ und damit wegen $x_i \in \mathbb{N}$ schließlich $x_i \leq 1$, also auch $x_i^{11} \leq 1$, was dann aber wegen

$$x_1^{11} + x_2^{11} + \cdots + x_{1987}^{11} \leq 1987 < 1988$$

einen Widerspruch zu (1) erzeugen würde, $\square$.

b) Es sei k eine beliebige ganze Zahl. Setze $x_1 := x_2 := \cdots = x_{61} := -1$, $x_{62} := 2$, $x_{63} := k$, $x_{64} := -k$ und für alle $i \geq 65$ $x_i := 0$. Dann ist

$$x_1^{11}+x_2^{11}+\cdots+x_{1987}^{11} = (-1)^{11}\cdot(61)+2^{11}+k^{11}+(-k)^{11}+0^{11}\cdot(1987-64) = -61+2048+k^{11}-k^{11} = 1987$$

also eine Lösung der Gleichung (1) in ganzen Zahlen. Dabei unterscheiden sich je zwei solche Lösungen durch die verschiedenen Werte von k, sodass es unendlich viele verschiedene gibt.

Aufgabe 300935:
Ermitteln Sie alle diejenigen Tripel (x, y, z) natürlicher Zahlen, für die gilt:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{4}{5}$$

Lösung von cyrix:
O. B. d. A. gelte $0 < x \leq y \leq z$. Dann ist $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{y} \geq \frac{1}{z} > 0$ und damit $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{15} > \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$, also $x < 4$. Es ist auch $x > 1$, da sonst $x = 1$, also $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} > \frac{1}{x} = 1$ im Widerspruch zur Gleichung aus der Aufgabenstellung gelten würde. Es verbleiben zwei Möglichkeiten für x.

Fall 1: Es ist $x = 2$. Dann ist die folgende Gleichung zu lösen: $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{4}{5} - \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$. Wegen $y \leq z$ ist $\frac{1}{y} \geq \frac{1}{z}$, also $\frac{1}{y} \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{10} = \frac{3}{20} > \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$, sodass $y \leq 6$ folgt. Wegen $\frac{1}{3} > \frac{3}{10}$ ist auch $y \geq 4$, da sonst $\frac{1}{y} \geq \frac{1}{3}$ mit analogem Widerspruch wie oben folgen würde.

Fall 1.1: Es ist $y = 4$. Dann folgt $\frac{1}{z} = \frac{3}{10} - \frac{1}{4} = \frac{6-5}{20} = \frac{1}{20}$, also $z = 20$.

Fall 1.2: Es ist $y = 5$. Dann folgt $\frac{1}{z} = \frac{3}{10} - \frac{1}{5} = \frac{3-2}{10} = \frac{1}{10}$, also $z = 10$.

Fall 1.3: Es ist $y = 6$. Dann folgt $\frac{1}{z} = \frac{3}{10} - \frac{1}{6} = \frac{9-5}{30} = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$, sodass es hier keine Lösung gibt.

Fall 2: Es ist $x = 3$. Dann ist folgende Gleichung zu lösen: $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{4}{5} - \frac{1}{3} = \frac{12-5}{15} = \frac{7}{15}$. Dann ist wegen $\frac{1}{y} \geq \frac{1}{z}$ auch $\frac{1}{y} \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{15} = \frac{7}{30} > \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$, also $y \leq 4$. Wegen $y \geq x$ ist auch $y \geq 3$.

Fall 2.1: Es ist $y = 3$. Dann folgt $\frac{1}{z} = \frac{7}{15} - \frac{1}{3} = \frac{7-5}{15} = \frac{2}{15}$, sodass es hier keine Lösung gibt.

Fall 2.2.: Es ist $y = 4$. Dann folgt $\frac{1}{z} = \frac{7}{15} - \frac{1}{4} = \frac{28-15}{60} = \frac{13}{60}$, sodass es auch hier keine Lösung gibt.

Zusammenfassend erfüllen also genau die Tripel
(3,4,20), (3,20,4), (4,3,20), (4,20,3), (20,3,4), (20,4,3), (3,5,10), (3,10,5), (5,3,10), (5,10,3), (10,3,5), (10,5,3)
positiver ganzer Zahlen die Gleichung.

Aufgabe 320936:
a) Geben Sie drei ganze Zahlen x, y und z an, für die gilt:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 12y - 14z - 57 = 0 \qquad (1)$$

b) Ermitteln Sie die Anzahl aller derjenigen Tripel (x, y, z) ganzer Zahlen x, y, z, die die Gleichung (1) erfüllen!

Lösung von cyrix:
Es ist

$$(x-2)^2+(y+6)^2+(z-7)^2 = x^2-4x+4+y^2+12y+36+z^2-14z+49 = x^2+y^2+z^2-4x+12y-14z+89,$$

also (1) äquivalent zu

$$(x-2)^2 + (y+6)^2 + (z-7)^2 - 89 - 57 = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad 146 = (x-2)^2 + (y+6)^2 + (z-7)^2$$

Es ist $146 = 12^2 + 1^2 + 1^2$, sodass man etwa $x - 2 = 12$, $y + 6 = z - 7 = 1$, also $(x,y,z) = (14, -5,8)$ wählen kann, was eine Lösung der Ausgangsgleichung liefert und Teilaufgabe a) löst.

Für b) stellen wir fest, dass die Anzahl der ganzzahligen Lösungen (x,y,z) der Ausgangsgleichung offenbar genau der Anzahl der ganzzahligen Lösungen (a,b,c) der Gleichung $146 = a^2 + b^2 + c^2$ entspricht, da man aus jeder Lösung der einen eindeutig eine Lösung der anderen via $x - 2 = a$, $y + 6 = b$ und $z - 7 = c$ erhält.
Es lässt sich die Zahl 146 auf ausschließlich folgende Weisen (ohne Beachtung der Reihenfolge) als Summe von drei Quadratzahlen darstellen:

$$146 = 144 + 1 + 1 = 121 + 25 + 0 = 121 + 16 + 9 = 81 + 64 + 1 = 81 + 49 + 16$$

Für die letzten drei Darstellungen gibt es je 6 mögliche Reihenfolgen der Summanden und unabhängig voneinander jeweils beide Wahlen für die Vorzeichen von a, b und c, also jeweils $6 \cdot 2^3 = 48$ Lösungen; für beide Darstellungen insgesamt also 144 Lösungen.

Für die zweite Darstellung $146 = 121+25+0$ gibt es wieder 6 mögliche Reihenfolgen der Summanden, aber nur noch für die von Null verschiedenen Quadrate je zwei mögliche Vorzeichen, also für diese Darstellung $6 \cdot 2^2 = 24$ Lösungen.

Und für die erste Darstellung gibt es wieder für jede der Variablen zwei mögliche Vorzeichen, dafür aber nur 3 mögliche Reihenfolgen der Summanden, also $3 \cdot 2^3 = 24$ Lösungen.
Insgesamt besitzt also $146 = a^2+b^2+c^2$ genau $144+24+24 = 192$ verschiedene ganzzahlige Lösungstripel, sodass dies auch die gesuchte Anzahl an Lösungen für die Ausgangsgleichung (1) ist.

VI Klasse 10

VI.I Teibarkeit, Primzahen

I Runde 1

Aufgabe 061012:
Wieviel natürliche Zahlen $n < 1000$ gibt es, die weder durch 3 noch durch 5 teilbar sind?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Bezeichnet man mit $[x]$ die größte ganze Zahl, de nicht größer als x ist, so beträgt die Anzahl der durch 5 teilbaren Zahlen, die kleiner als 1000 sind $\left[\frac{999}{5}\right] = 199$.

Entsprechend ergibt sich für die Anzahl der durch 3 teilbaren Zahlen $\left[\frac{999}{3}\right] = 333$.

Dabei wurden aber die Zahlen, die sowohl durch 3 als auch durch 5 teilbar sind, doppelt gerechnet. Ihre Anzahl ist $\left[\frac{999}{15}\right] = 66$.

Von den 999 Zahlen sind also 999 - 333 - 199 + 66 = 533 Zahlen weder durch 3 noch durch 5 teilbar.

Aufgabe 231011:
Anne setzt in den beiden Termen $a^2 - b^2$ und $a - b$ je eine natürliche Zahl für a und b ein. Sie berechnet die dabei entstehenden Zahlen. Entsteht aus $a^2 - b^2$ beim Einsetzen die Zahl z und aus $a - b$ die Zahl n, so stellt Anne fest, dass sich aus z und n dann $\frac{z}{n}$ als eine natürliche Zahl ergibt.

Gilt das immer?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es gilt nicht immer. Setzt man nämlich sowohl für a als auch für b dieselbe Zahl ein, so erhält man $n = 0$, und es ergibt sich nicht $\frac{z}{n}$ als eine natürliche Zahl, da Brüche mit dem Nenner 0 nicht existieren.

Aufgabe 251012:
Drei Mathematiklehrer, die am selben Tag Geburtstag hatten und von denen jeder zu diesem Zeitpunkt jünger als 50 Jahre, aber älter als 20 Jahre war, trafen sich beim gemeinsamen Geburtstagsfest.

Jeder von ihnen hatte zwei Kinder; erstaunlicherweise hatten auch alle diese sechs Kinder am selben Tag Geburtstag.

Während eines Gespräches sagte der ältere von ihnen: „Ich bin heute $5\frac{1}{2}$ mal so alt wie mein Sohn und 11 mal so alt wie meine Tochter geworden. Wenn meine Tochter so alt sein wird, wie mein Sohn jetzt ist, dann werde ich 6 mal so alt sein wie sie und 4 mal so alt wie mein Sohn.“

Nach kurzem Überlegen stellte der zweite Mathematiklehrer fest, dass diese Angaben auch für ihn und sein älteres und jüngstes Kind zutreffen. Jetzt rechnete auch der jüngste von ihnen nach und sagte: „Es ist doch merkwürdig, die gleichen Aussagen gelten auch für mich und meine beiden Kinder, obgleich wir drei Lehrer doch verschieden alt sind.“

Stellen Sie fest, ob es für die drei Lehrer und ihre Kinder Altersangaben gibt, bei denen alle diese Aussagen zutreffen und ob durch die Aussagen die Altersangaben eindeutig bestimmt sind! Wenn das zutrifft, geben Sie das Alter der drei Lehrer und ihrer Kinder an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn die von einem der drei Lehrer gemachten Aussagen zutreffen und x das Alter seines jüngeren Kindes ist, dann ist $11x$ das Alter dieses Lehrers und somit, de er $\frac{11}{2}$ mal so alt ist wie sein älteres Kind, $2x$ das Alter des älteren Kindes.

Daher können die Altersangaben für die drei Lehrer nur durch 11 teilbare Zahlen sein. Da es zwischen 20 und 50 nur die drei durch 11 teilbaren Zahlen 22, 33 und 44 gibt und die Lehrer sämtlich verschieden alt sind, können die Aussagen folglich nur dann zutreffen, wenn (*)

der älteste Lehrer 44 Jahre alt ist und seine Kinder 4 bzw. 8 Jahre alt sind,

der zweite Lehrer 33 Jahre alt ist und seine Kinder 3 bzw. 6 Jahre alt sind,

der jüngste Lehrer 22 Jahre alt ist und seine Kinder 2 bzw. 4 Jahre als sind.

II. Wenn einer der Lehrer $11x$ Jahre alt ist und seine Kinder x bzw. $2x$ Jahre alt sind, so ist er $5\frac{1}{2}$ mal so alt wie sein älteres und 11 mal so alt wie sein jüngeres Kind.

Ferner ist sein jüngeres Kind in genau x Jahren so alt wie sein älteres jetzt, nämlich $2x$ Jahre, und dann ist sein älteres Kind $3x$ Jahre alt und der Lehrer $12x$ Jahre, d. h. aber 6 mal so alt wie sein jüngeres und 4 mal so alt wie sein älteres Kind.

Mit I. und II. ist bewiesen, dass es für die drei Lehrer und ihre Kinder Altersangaben gibt, bei denen alle in der Aufgabe genannten Aussagen zutreffen und dass durch diese Aussagen die Altersangaben eindeutig bestimmt sind. Sie lauten wie in (*) angegeben.

Aufgabe 271011:
Wie viele geordnete Paare von ganzen Zahlen (x, y) gibt es insgesamt, für die $x \cdot y = 1987$ gilt?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Zahl 1987 ist durch keine der Zahlen

$$2, 3, 5, 6, 7, 11, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43$$

teilbar (wie man z. B. durch Berechnen der 14 Divisionen 1987 : 2, 1987 : 3, ... mit einem Taschenrechner feststellen kann. Wegen $\sqrt{1987} < 44$ besagt dies, dass 1987 durch keine Primzahl p teilbar ist, für die $p \leq \sqrt{1987}$ gilt.

Damit ist bewiesen: 1987 ist eine Primzahl. Daraus folgt, dass es genau die folgenden vier geordneten Paare ganzer Zahlen $(x; y)$ mit $x \cdot y = 1987$ gibt:

$$(1{,}1987) \quad , \quad (-1, -1987) \quad , \quad (1987, 1) \quad , \quad (-1987, -1)$$

Aufgabe 281011:

a) Bernd hörte, dass der Mathematiker Leonhard Euler (1707 bis 1783) nachwies:

Für jede ganze Zahl x mit $-40 < x < 41$ ist die Zahl $x^2 - x + 41$ eine Primzahl. Bernd wollte dies für mindestens zehn dieser Zahlen nachrechnen.

Rechnen Sie dies ebenfalls für mindestens zehn dieser Zahlen nach!

b) Untersuchen Sie, ob sogar für jedes ganzzahlige x die Zahl $x^2 - x + 41$ eine Primzahl ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Es genügt z. B., mindestens für zehn der genannten Zahlen x die unten angegebenen Feststellungen I., II., III. auszuführen:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x^2 - x + 41$	41	43	47	53	61	71	83	97	113	131
x	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$x^2 - x + 41$	151	173	197	23	251	281	313	347	383	421
x	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$x^2 - x + 41$	461	503	547	593	641	691	733	797	853	911
x	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
$x^2 - x + 41$	971	1033	1097	1163	1231	1301	1373	1447	1523	1601

I. Die Quadratwurzeln aller hier aufgeführten Zahlen $x^2 - x + 41$ sind kleiner als 41.

II. Alle Primzahlen unterhalb 41 sind 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37.

III. Für jede der hier aufgeführten Zahlen $x^2 - x + 41$ gilt: Sie ist durch keine der in II. genannten Primzahlen teilbar.

Aus I., II., III. folgt nämlich, dass alle diese Zahlen $x^2 - x + 41$ selbst Primzahlen sind.

b) Nicht für jedes ganzzahlige x ist $x^2 - x + 41$ eine Primzahl. Zum Beweis dieser Aussage genügt es, eine ganze Zahl x zu nennen, für die sich erweist, dass $x^2 - x + 41$ keine Primzahl ist. Ein solches Beispiel ist etwa $x = 41$; denn hierfür wird $x^2 - x + 41 = 41^2$.

Aufgabe 301012:
Armin möchte ein (auf einem KC lauffähiges) BASIC-Programm schreiben, mit dem sich nach Eingabe jeweils einer natürlichen Zahl $Z > 1$ feststellen lässt, ob Z eine Primzahl ist. Er legt das Programm so an, dass darin (durch eine FOR ... NEXT-Anweisung) alle natürlichen Zahlen $N = 2, \ldots, Z - 1$ geprüft werden, ob sie Teiler von Z sind.

Bert sagt dazu: „Es genügt, nur die natürlichen Zahlen $N = 2, \ldots, G$ zu prüfen, wobei G die ganze Zahl mit $G \leq \sqrt{Z} < G + 1$ ist (also durch $G = \mathrm{INT}(\mathrm{SQR}(Z))$ ermittelt werden kann).“
Er sagt außerdem: „Wenn Z eine mindestens dreistellige Primzahl ist, so sind nach meinem Vorschlag weniger als ein Zehntel so vieler Zahlen zu überprüfen wie bei deinem Verfahren.“

Armin entgegnet: „Bei deinem Vorschlag, bei dem ja Teiler von Z ungeprüft bleiben können, hat man keine Sicherheit, dass jede Nichtprimzahl als solche erkannt wird.“

a) Ist Berts erste Aussage oder Armins Entgegnung wahr?

b) Ist Berts zweite Aussage wahr?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Zu jeder Nichtprimzahl $Z > 1$ gibt es natürliche Zahlen $A,B > 1$ mit $Z = A \cdot B$, und mindestens eine dieser Zahlen muss kleiner oder gleich $\sqrt{Z}$ sein; denn wären $A > \sqrt{Z}$ und $B > \sqrt{Z}$, so folgte der Widerspruch $Z = AB > \sqrt{Z} \cdot \sqrt{Z} = Z$. Also hat jede Nichtprimzahl auch mindestens einen Teiler, der gemäß Berts Vorschlag geprüft wird. Daher ist Berts Aussage wahr, Armins Entgegnung nicht.

b) Für jede Primzahl Z sind nach Armins Verfahren $Z - 2$ Zahlen zu überprüfen, nach Berta Vorschlag $G - 1$ Zahlen. Ist Z eine mindestens dreistellige Zahl, also $100 \leq Z$, so folgt

$$10 \cdot (G - 1) \leq 10 \cdot \sqrt{Z} - 10 \leq \sqrt{Z} \cdot \sqrt{Z} - 10 < Z - 2$$

also ist die Anzahl $G-1$ kleiner als ein Zehntel der Anzahl $Z-2$. Berts zweite Aussage ist somit ebenfalls wahr.

Aufgabe 331012:
Gibt es eine sechsstellige natürliche Zahl, die genau vierzehn verschiedene natürliche Zahlen als Teiler hat, unter denen sich auch die Zahl 14 befindet?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Eine derartige Zahl gibt es; denn die Zahl $z = 2 \cdot 7^6$ hat die genannten Eigenschaften.

Beweis: Diese Zahl lautet 235298, sie ist also sechsstellig. Ferner sind Teiler von z unter den natürlichen Zahlen genau die Zahlen 1, 7, 7^2, 7^3, 7^4, 7^5, 7^6 sowie das Zweifache dieser sieben Zahlen.

Keine zwei dieser vierzehn Zahlen sind einander gleich, und unter ihnen befindet sich auch die Zahl $2 \cdot 7 = 14$.

II Runde 2

Aufgabe 021023:
Beweisen Sie, dass für alle natürlichen Zahlen m die Zahl

$$n = \frac{m}{3} + \frac{m^2}{2} + \frac{m^3}{6}$$

immer eine natürliche Zahl ist!

Lösung von André Lanka:

$$\frac{m}{3} + \frac{m^2}{2} + \frac{m^3}{6} = \frac{2m + 3m^2 + m^3}{6} = \frac{m(m+1)(m+2)}{6}$$

Von drei aufeinander folgenden Zahlen ist immer genau eine durch 3 und mindestens eine durch 2 teilbar. Damit ist das Produkt der drei Zahlen auf jeden Fall durch 6 teilbar.

Aufgabe 021025:
Gegeben sei eine beliebige mehrstellige natürliche Zahl. Man bilde durch eine beliebige Umstellung ihrer Ziffern daraus eine zweite Zahl. Beweisen Sie, dass die Differenz dieser beiden Zahlen stets durch 9 teilbar ist!

Lösung von André Lanka:
Eine Zahl lässt bei Division durch 9 den gleichen Rest wie ihre Quersumme. Das liegt daran, dass jede 10er Potenz bei Division durch 9 den Rest 1 lässt.
Beim Umstellen der Ziffern ändert sich die Quersumme der Zahl nicht, weswegen die gegebene Zahl und die umgestellte Zahl den gleichen Rest bei Division durch 9 lassen. Ihre Differenz ist deswegen durch 9 teilbar.

Aufgabe 031021:
a) Beweisen Sie, dass die Zahl $2^{256} - 1$ keine Primzahl ist!
b) Geben Sie mindestens drei Primfaktoren dieser Zahl an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Mit Hilfe der dritten binomischen Formel kann man einen Term der Form $2^{2^n} - 1$ in zwei Faktoren zerlegen. Es gilt:

$$2^{2^n} - 1 = (2^n - 1)(2^n + 1)$$

Den Ausdruck $2^{256} - 1$ kann man, wenn man dieses Verfahren mehrfach anwendet, in mehrere Faktoren aufspalten.

$$2^{256} - 1 = (2^1 - 1)(2^1 + 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)(2^{32} + 1)(2^{64} + 1)(2^{128} + 1)$$

b) $2^1 + 1 = 3, 2^2 + 1 = 5$ und $2^4 + 1 = 17$ sind Primzahlen und damit Primfaktoren von $2^{256} - 1$.

Aufgabe 031025:
Durch welche Zahlen ist das Produkt dreier beliebiger, aber aufeinanderfolgender positiver ganzer Zahlen teilbar, deren Summe ungerade ist?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Da die Summe ungerade ist, besteht das Produkt aus zwei geraden und einem ungeraden Faktor. Jede gerade Zahl ist durch 2 teilbar.
Von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist genau eine durch 3 teilbar. Von zwei aufeinanderfolgenden geraden Zahlen ist genau eine durch 4 teilbar.
Wegen der drei im Produkt enthaltenen Faktoren 2, 3 und 4 ist das Produkt stets durch 2, 3, 4, 6, 8, 12 und 24 teilbar.

Aufgabe 061022:
Es sei $\frac{p}{q}$ ein unkürzbarer Bruch (p, q ganzzahlig und $q \neq 0$). Man beweise, dass dann auch $\frac{q-p}{q}$ ein unkürzbarer Bruch ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Indirekter Beweis:
Angenommen, $\frac{q-p}{q}$ wäre durch c kürzbar (c ganz, $c \neq 0, \pm 1$), dann müsste gelten $q - p = c \cdot m$ (m ganzzahlig) und $q = c \cdot n$ (n ganzzahlig).
Daraus würde folgen $q = c(n - m)$. Dann wären q und p durch c teilbar, was der Voraussetzung widerspricht.

Aufgabe 091022:
Gesucht sind vier natürliche Zahlen $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$ so, dass jede der Zahlen

$$d_1 = a_4 - a_3; \quad d_2 = a_3 - a_2; \quad d_3 = a_2 - a_1; \quad d_4 = a_4 - a_2; \quad d_5 = a_3 - a_1; \quad d_6 = a_4 - a_1$$

eine Primzahl ist, wobei auch gleiche Primzahlen auftreten dürfen.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen $a_1, \dots, a_4$ seien die vier Zahlen der gesuchten Art. Dann gelten für die nach Aufgabenstellung gebildeten Zahlen $d_1, \dots, d_6$ die Gleichungen

$$d_4 = d_1 + d_2, \qquad d_5 = d_2 + d_3, \qquad d_6 = d_1 + d_2 + d_3$$

Nun sind höchstens folgende Fälle möglich:

I. d_1, d_2, d_3 sind ungerade Primzahlen. Dann ergibt sich der Widerspruch, dass d_4 und d_5 gerade und größer als 2, also keine Primzahlen sind. Daher scheidet der Fall aus.

II. d_1, d_2, d_3 sind gerade Primzahlen (also ist jede gleich 2(, dann ergibt sich derselbe Widerspruch.

III. Von den Zahlen d_1, d_2, d_3 ist genau eine gerade (also gleich 2). Dann ergibt sich der Widerspruch, dass d_6 gerade und größer als 2 ist.

IV. Von den Zahlen d_1, d_2, d_3 sind genau zwei gerade (also ist jede gleich 2).

a) unter diesen befindet sich d_2. Dann ergibt sich, dass entweder d_4 oder d_5 gerade und größer als 2 ist.

b) $d_1 = d_3 = 2$; d_2 ungerade Primzahl. Dann folgt $d_4 = d_5 = d_2 + 2$ und $d6 = d_2 + 4$. Nun ist von den drei ganzen Zahlen der Form $d_2, d_2 + 2, d_2 + 4$ stets eine durch 3 teilbar.

Die einzige Primzahl, die durch 3 teilbar ist, ist die 3. Da aber $d_2 > 1$ ist, also $d_2 + 2$ und $d_2 + 4$ größer als 3 sind, verbleibt nur die Möglichkeit $d_2 = 3$.

Hiernach folgt weiter

$$a_2 = a_1 + d_3 = a_1 + 2, \qquad a_3 = a_2 + d_2 = a_1 + 5, \qquad a_4 = a_3 + d_1 = a_1 + 7$$

Daher können $a_1, ..., a_4$ nur dann den Bedingungen der Aufgabe genügen, wenn sie von der Form

$$a_1 = 0, \qquad a_2 = n + 2, \qquad a_3 = n + 5, \qquad a_4 = n + 7 \tag{*}$$

mit einer natürlichen Zahl n sind.
Umgekehrt genügen je vier Zahlen der Form (*) in der Tat den Bedingungen der Aufgabe; denn für sie ist jede der Zahlen Primzahl

$$d_1 = a_4 - a_3 = 2, \qquad d_2 = a_3 - a_3 = 3, \qquad d_3 = a_2 - a_1 = 2$$
$$d_4 = a_4 - a_2 = 5, \qquad d_5 = a_3 - a_1 = 5, \qquad d_6 = a_4 - a_1 = 7$$

Aufgabe 101024:
Es seien m und n beliebige ganze Zahlen. Beweisen Sie, dass mindestens eine der Zahlen

$$x = 2mn; \qquad y = m^2 - n^2; \qquad z = m^2 + n^2$$

durch 5 teilbar ist!

Lösung von cyrix:
Ist m oder n durch 5 teilbar, so auch x. Andernfalls sind sowohl $m^4 - 1$ als auch $n^4 - 1$ und damit auch

$$(m^4 - 1) - (n^4 - 1) = m^4 - n^4 = (m^2 + n^2)(m^2 - n^2) = yz$$

durch 5 teilbar, sodass auch mindestens eine der Zahlen y oder z durch 5 teilbar sein muss, $\square$.

Bemerkung: Dass für eine nicht durch 4 teilbare ganze Zahl t die Zahl $t^4 - 1$ durch 5 teilbar sein muss, folgt aus dem kleinen Satz von Fermat oder auch via

$$(5s \pm 1)^4 = 5^4 s^4 \pm 4 \cdot 5^3 s^3 \cdot 1 + 6 \cdot 5^2 s^2 \cdot 1^2 \pm 5s \cdot 1^3 + 1^4 - 1 \quad \text{und}$$
$$(5s \pm 2)^4 = 5^4 s^4 \pm 4 \cdot 5^3 s^3 \cdot 2 + 6 \cdot 5^2 s^2 \cdot 2^2 \pm 4 \cdot 5s \cdot 2^3 + 2^4 - 1$$

welche wegen $1^4 - 1 = 0$ und $2^4 - 1 = 15$ alle durch 5 teilbare Zahlen sind.

Aufgabe 161021:
Es sei q eine ganze Zahl. Beweisen Sie, dass dann $\frac{q^3-q}{6}$ ebenfalls eine ganze Zahl ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es gilt:

$$q^3 - q = q(q^2-1) = q(q-1)(q+1)$$

Von den drei aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen $q-1, q, q+1$ ist stets eine durch 2 und eine durch 3 teilbar. Mithin ist ihr Produkte q^3-q durch 6 teilbar, d. h., $\frac{q^3-q}{6}$ ist eine ganze Zahl. **Alternativ-Lösung von cyrix:**
Es ist

$$\binom{q+1}{3} = \frac{(q+1)\cdot q\cdot(q-1)}{3\cdot 2\cdot 1} = \frac{q^3-q}{6}$$

eine ganze Zahl, da sie die Anzahl der Möglichkeiten entspricht, aus einer Menge mit $q+1$ Elementen eine drei-elementige Teilmenge auszuwählen.

Aufgabe 201021:
Ermitteln Sie alle diejenigen natürlichen Zahlen n, für die die Zahl $1+4\cdot 9^{2n}$ eine Primzahl ist!

Lösung von Nuramon:
Es gilt

$$1+4\cdot 9^{2n} \equiv 1+4\cdot(-1)^{2n} \equiv 1+4 \equiv 0 \pmod 5$$

Daher ist $1+4\cdot 9^{2n}$ nur für $n=0$ prim.

Alternativ-Lösung von cyrix:
Es ist

$$1+4\cdot 9^{2n} = 1^4 + 4\cdot(3^n)^4, \tag{VI.1}$$

sodass wir die Sophie-Germain-Identität anwenden können und erhalten die Faktorisierung

$$\begin{aligned} 1+4\cdot 9^{2n} &= (1^2+2\cdot(3^n)^2+2\cdot 1\cdot 3^n)\cdot(1^2+2\cdot(3^n)^2-2\cdot 1\cdot 3^n) && \text{(VI.2)}\\ &= (1+2\cdot 9^n+2\cdot 3^n)\cdot(1+2\cdot 9^n-2\cdot 3^n). && \text{(VI.3)} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich nur dann eine Primzahl, wenn der kleinere zweite Faktor den Wert 1 annimmt, was aber wegen $9^n > 3^n$ für positive n nie der Fall ist. Für $n=0$ erhält man dagegen die Primzahl $1+4\cdot 9^{2\cdot 0}=2$, sodass dies die einzige Lösung darstellt.

Aufgabe 251021:
Geben Sie alle Tripel (a,b,c) von ganzen Zahlen a,b,c mit $a\le b\le c$ und $a\cdot b\cdot c=1985$ an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Primfaktorzerlegung von 1985 lautet $5\cdot 397=1985$.
Nimmt man noch den Faktor 1 hinzu, so gibt es für natürliche Zahlen a,b,c genau die folgenden Darstellungen:

(1) $1\cdot 5\cdot 397=1985$ (2) $1\cdot 1\cdot 1985=1985$

Da die Tripel aller ganzen Zahlen gesucht sind, sind noch die Fälle zu beachten, in denen genau zwei der Faktoren negatives Vorzeichen haben:
Aus (1) entstehen so genau die Darstellungen $(-1)\cdot(-5)\cdot 397$, $(-19\cdot 5\cdot(-397)$ und $1\cdot(-5)\cdot(-397$.
Aus (2) ergeben sich die Darstellungen $(-1)\cdot(-1)\cdot 1985$ und $1\cdot(-1)\cdot(-1985)$.
Insgesamt gibt es genau die sieben genannten Tripel, die die Aufgabenstellung erfüllen.

Aufgabe 271022:
Ermitteln Sie alle diejenigen natürlichen Zahlen n, für die

$$\frac{n^4 - 2n^3 - 3n^2 + 7n - 6}{n+2} \qquad (1)$$

eine natürliche Zahl ist!

Lösung von Steffen Polster:
Polynomdivision von Zähler und Nenner ergibt

$$(n^4 - 2n^3 - 3n^2 + 7n - 6) : (n+2) = n^3 - 4n^2 + 5n - 3$$

Der Term $a_n = n^3 - 4n^2 + 5n - 3$ (n natürliche Zahl) wächst ab einem n_0 streng monoton. Es wird $a_0 = -3, a_1 = -1, a_2 = -1, a_3 = 3, ...$ (2) und

$$a_{n+1} - a_n = 3n^2 - 5n + 2 > 0 \quad \text{für} \quad n \geq 2; n_0 = 2$$

Damit wird (1) für alle natürlichen Zahlen $n \geq 3$ zu einer natürlichen Zahl.

Aufgabe 281021:
Gesucht ist die kleinste positive natürliche Zahl, deren Zifferndarstellung (im Dezimalsystem) nur aus den Ziffern 0 und 1 besteht und die durch 450 teilbar ist.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Für natürliche Zahlen, deren Zifferndarstellung nur us Ziffern 0 und 1 besteht, gilt:

1. Eine solche Zahl ist genau dann positiv, wenn die Anzahl der Ziffern 1 nicht Null ist.
2. Sie ist genau dann durch 450 teilbar, wenn sie durch 9 und durch 50 teilbar ist, da 9 und 50 zueinander teilerfremd sind.
3. Sie ist genau dann durch 50 teilbar, wenn ihre Ziffernfolge auf ...00 endet; da die Teilbarkeit durch auch bei Endung ...50 möglich ist, da hier aber nur 0 und 1 vorkommen.
4. Sie ist genau dann durch 9 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist; ihre Quersumme ist hier gleich der Anzahl der Ziffern 1 in der Zifferndarstellung.

Die Zifferndarstellung der kleinsten Zahl, die alle diese Bedingungen erfüllt, besteht folglich aus genau neun Ziffern 1 und zwei anschließenden Ziffern 0. D. h., die gesuchte Zahl lautet 11111111100.

Aufgabe 321021:
Ermitteln Sie die kleinste natürliche Zahl z, die genau vier Teiler t_1, t_2, t_3, t_4 mit $1 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < z$ hat!

Lösung von Steffen Polster:
Hat die natürliche Zahl z die Primfaktorzerlegung

$$z = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot ... \cdot p_n^{a_n}$$

wobei die p_i ($i = 1,2,...,n$) verschiedene Primfaktoren sind und die a_i deren Häufigkeit in der Zerlegung, so ist die Anzahl der Teiler t von z (inkl. 1 und z selbst) gleich

$$t = (a_1 + 1) \cdot (a_2 + 1) \cdot ... \cdot (a_n + 1)$$

Da die gesuchte Zahl z 6 Teiler (inkl. 1 und z) haben soll, wird

$$6 = (a_1 + 1) \cdot (a_2 + 1) \cdot ... \cdot (a_n + 1)$$

Jeder Faktor $(a_i + 1)$ ist größer als 1, so dass nur das Produkt $6 = 3 \cdot 2$ möglich ist, d. h. z hat genau 2 Primteiler, von denen einer doppelt, der andere einfach auftritt, d. h.

$$z = p_1^2 \cdot p_2$$

Setzt man die kleinsten Primzahlen 2 und 3 für p_1 und p_2 ein, wird $z = 2^2 \cdot 3 = 12$. 12 ist die gesuchte Zahl. Ihre von 1 und z verschiedenen Teiler sind: 2, 3, 4 und 6.

III Runde 3

Aufgabe V11035:
Unter der Zahl $n!$, gelesen „n Fakultät“, versteht man das Produkt $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$ aller natürlichen Zahlen von 1 bis n.
So ist z. B. $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.
Wieviel Endnullen hat die Zahl 50! (50 Fakultät)? Begründen Sie Ihre Antwort!

Lösung von weird:
Tatsächlich ist ja die Vielfachheit einer Primzahl p in $n!$ bekanntlich einfach

$$\sum_{k=1}^{\lfloor \log_p n \rfloor} \lfloor \frac{n}{p^k} \rfloor,$$

was für $n = 50$ und $p = 5$ dann tatsächlich

$$\lfloor \frac{50}{5} \rfloor + \lfloor \frac{50}{25} \rfloor = 12$$

ergibt.

Alternativ-Lösung von svrc:
Wir zerlegen alle Faktoren in ihre Primfaktoren. Eine Endnull entsteht genau dann, wenn die Primzahlen 2 und 5 miteinander multipliziert werden. Die Anzahl der Fünfen ergibt sich aus den Faktoren, die als Endziffer eine Null oder eine Fünf haben, d.h:

$$5, 10 = 2 \cdot 5, 15 = 3 \cdot 5, 20 = 2^2 \cdot 5, 25 = 5^2, 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5, 35 = 5 \cdot 7, 40 = 2^3 \cdot 5, 45 = 3^2 \cdot 5, 50 = 2 \cdot 5^2.$$

Insgesamt taucht der Primfaktor 5 12 Mal auf. Da der Primfaktor 2 in jeder geraden Zahl auftaucht, hat die Zahl 50! insgesamt 12 Endnullen.

Aufgabe 021033:
Es ist eine dreistellige Zahl zu finden, die folgende Eigenschaften hat:
a) Die Zahl ist durch 9 und 11 teilbar.
b) Vertauscht man die erste und die letzte Ziffer, so erhält man $\frac{2}{9}$ der ursprünglichen Zahl.
Wie viele Lösungen gibt es?

Lösung von André Lanka:
Die gesuchte Zahl muss durch 11 und durch 9 teilbar sein. Wegen letzterem ist auch die Quersumme durch 9 teilbar. Beim Umstellen der Ziffern ändert sich die Quersumme der Zahl nicht. Die neu gebildete ist also auch durch 9 teilbar.
Da sie durch Multiplikation mit $\frac{2}{9}$ aus der ursprünglichen Zahl erhalten wurde, muss die anfängliche Zahl zweimal durch 9 teilbar sein. Die gesuchte Zahl ist also nicht nur durch $11 \cdot 9$ sondern sogar durch $11 \cdot 9 \cdot 9$ teilbar.
Die einzige dreistellige Zahl, die diese Bedingung erfüllt ist 891. Sie ist zugleich die einzige Lösung der Aufgabe.

Aufgabe 021035:
Beweisen Sie, dass die Summe der Kuben dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen stets durch 9 teilbar ist!

Lösung von André Lanka:
Seien $n-1$, n und $n+1$ die drei aufeinander folgenden natürlichen Zahlen. Dann ist

$$(n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 = 3n^3 + 6^n = 3n(n^2+2)$$

Wenn n durch 3 teilbar ist, ist der Faktor $3n$ durch 9 teilbar und damit das ganze Produkt. Wenn n bei Division durch 3 den Rest 1 lässt, also wenn $n = 3k+1$ gilt, dann ist der zweite Faktor $n^2+2 = (3k+1)^2 + 2 = 9k^2 + 6k + 3$ durch 3 teilbar und mit der ersten 3 dann das ganze Produkt durch 9.
Bei der letzten Möglichkeit, Rest 2 bei Division durch 3 kann auch äquivalent genutzt werden, dass bei Division durch 3 der Rest -1 auftritt. Dann gilt $n = 3k-1$ und für den zweiten Faktor analog $n^2+2 = (3k-1)^2 + 2 = 9k^2 - 6k + 3$. Damit ist der zweite Faktor durch 3 und das ganze Produkt durch 9 teilbar sind.

Aufgabe 031034:
Man zeige, dass für jede natürliche Zahl n der Term $n^3 + 11n$ durch 6 teilbar ist!

Lösung von cyrix:
Da $6 = 2 \cdot 3$ und 2 und 3 teilerfremd sind, ist zu zeigen, dass $3|(n^3+11n)$ und $2|(n^3+11n)$.
Der Term $n^3 + 11n$ lässt sich aber als $n \cdot (n^2+11)$ schreiben. Es ist nun nachzuweisen, dass 2 entweder n oder n^2+11 teilt und dass 3 entweder n oder n^2+11 teilt.
Wenn 2 kein Teiler von n ist, dann lässt sich n durch $n = 2p+1$ darstellen, wobei p eine natürliche Zahl ist. Daraus folgt:

$$n^2 + 11 = 4p^2 + 4p + 12 = 2 \cdot (2p^2 + 2p + 6) \Rightarrow 2|(n^2+11)$$

Wenn 3 kein Teiler von n ist, dann lässt n beim Teilen durch 3 den Rest 1 oder den Rest 2. n lässt sich also darstellen durch $n = 3p+1$ oder $n = 3p+2$, wobei p jeweils wieder eine natürliche Zahl ist.
Im ersten Fall gilt:

$$n^2 + 11 = 9p^2 + 6p + 12 = 3 \cdot (3p^2 + 2p + 4) \Rightarrow 3|(n^2+11)$$

Im zweiten Fall gilt:

$$n^2 + 11 = 9p^2 + 12p + 15 = 3 \cdot (3p^2 + 4p + 5) \Rightarrow 3|(n^2+11)$$

Das heißt: In jedem Fall ist $n^3 + 11n$ durch 2 und durch 3 und damit durch 6 teilbar.

Alternativ-Lösung von cyrix:
Es ist $(n-1)n(n+1) = n^3 - n$ das Produkt dreier aufeinanderfolgender Zahlen, von denen damit min. eine durch 2 und eine durch drei, das Produkt also durch 6 teilbar ist. Damit ist auch $n^3 + 11n = (n^3 - n) + 12n$ durch 6 teilbar, $\square$.

Zweite Alternativ-Lösung von Nuramon:
Wir nehmen $n^3 + 11n$ Bauklötze, die alle Einheitswürfel seien. Die Aufgabe ist es diese Bauklötze auf 6 gleich große Haufen zu verteilen.
Aus n^3 davon bauen wir dazu einen Würfel mit Kantenlänge n. Den Rest legen wir erstmal zur Seite.

Falls $n > 1$ ist, dann betrachten wir zunächst all jene Bauklötze, die an der Oberfläche des n^3 Würfels liegen. Da ein Würfel 6 Seiten hat, können wir die Bauklötze, die nicht an einer Kante des n^3-Würfels liegen ohne Rest verteilen.

Ebenso können wir die Bauklötze, die an den Kanten liegen, aber keine Ecken sind, ohne Rest verteilen, denn ein Würfel hat $12 = 2 \cdot 6$ Kanten. Um die 8 Ecken zu verteilen nehmen wir uns noch 4 Klötze von den beiseite gelegten $11n$ Bauklötzen hinzu, so dass wir 12 Klötze haben, die sich ohne Rest auf 6 Haufen verteilen lassen.
Somit bleiben nun noch ein $(n-2)^3$-Würfel und die restlichen, beiseite gelegten Bauklötze zu verteilen.
Wir wiederholen dieses Verfahren (d. h. das Verteilen der Oberfläche des großen Würfels unter Hinzunahme von 4 extra Klötzen), bis von dem großen Würfel nichts mehr übrig ist (das passiert, wenn n gerade ist), oder bis noch genau 1 Klotz von ihm übrig bleibt (wenn n ungerade ist).
Schreibt man n in der Form $n = 2m$ bzw. $n = 2m+1$, so braucht man dafür m Wiederholungen.
Am Schluss hat man dann noch $11n-4m = 18m = 6 \cdot 3m$ (falls $n = 2m$) bzw. $1+11n-4m = 12+18m = 6 \cdot (2+3m)$ (falls $n = 2m+1$) Bauklötze übrig, die man offenbar ohne Rest verteilen kann.

Aufgabe 041032:
Eine ganze Zahl schreibt sich im Dezimalsystem mit 300 Einsen und einer Anzahl von Nullen am Ende der Zahl.
Kann diese Zahl eine Quadratzahl sein?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Zahl n hat die Quersumme 300. Da 300 durch 3 aber nicht durch 9 teilbar ist, gilt dieses auch für n. Daher kann n keine Quadratzahl sein.

Aufgabe 081036:
Beweisen Sie die folgende Behauptung!
Wenn p und q Primzahlen sind ($p > 3, q > 3$), dann ist $p^2 - q^2$ ein Vielfaches von 24.

Lösung von cyrix:
Beweis:
Einerseits ist p ungerade, also $p-1$ und $p+1$ zwei aufeinanderfolgende gerade Zahlen, sodass eine von beiden sogar durch 4, also $p^2-1 = (p-1)(p+1)$ durch 8 teilbar ist. Analog ist q^2-1 und damit auch $p^2-q^2 = (p^2-1)-(q^2-1)$ durch 8 teilbar.
Andererseits ist, da q teilerfremd zu 3 ist, genau eine der drei im Abstand q aufeinander folgenden ganzen Zahlen $p-q$, p, $p+q$ durch 3 teilbar. Da es p nicht ist, muss es also eine der beiden anderen Zahlen, und damit auch $p^2-q^2 = (p-q)(p+q)$ sein.
Da 8 und 3 teilerfremd sind, folgt aus der Teilbarkeit von p^2-q^2 durch 8 und durch 3 auch die durch $8 \cdot 3 = 24$, $\square$.

Aufgabe 121033:
Man denke sich alle Primzahlen, beginnend mit der Primzahl 5, der Größe nach fortlaufend nummeriert; es mögen also nummeriert sein:

Primzahl	5	7	11	13	17	19	...
Nummer	1	2	3	4	5	6	...

Es ist zu beweisen, dass dann jede Primzahl größer als das Dreifache ihrer Nummer ist.

Lösung von cyrix:
Für die Primzahlen mit Nummern (in dieser Liste) 1 und 2, also 5 und 7, gilt die Aussage offenbar. Wenn sie darüber hinaus für die Primzahl mit Nummer (in dieser Liste) k für eine positive ganze Zahl k gilt, dann zeigen wir nun, dass sie auch für die mit Nummer $k+2$ gilt, womit sie induktiv für alle Primzahlen ≥ 5 gezeigt ist.
Sei also p die Primzahl mit Nummer k und es gelte $p > 3k$. Da $p > 2$ ungerade ist, können $p+1$, $p+3$ und $p+5$ keine Primzahlen sein.

Von den drei aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen p, $p+2$ und $p+4$ ist darüber hinaus eine durch drei teilbar. Da es $p > 3$ nicht ist, ist neben den genannten drei geraden noch mindestens eine der zwei ungeraden Zahlen unter $p+1$ bis $p+5$ keine Primzahl. Es kann also nach p höchstens eine weitere Primzahl geben, die $\leq p+5$ ist.
Demzufolge hat die nun noch nächstgrößere Primzahl – also jene mit Nummer $k+2$ – mindestens den Wert $p+6 > 3k+6 = 3(k+2)$, was zu beweisen war.

Aufgabe 171034:
Geben Sie alle Primzahlen p an für die $3p+4 = z^2$ gilt, wobei z eine natürliche Zahl ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, es gibt eine derartige Primzahl p, dann ist mit einer natürlichen Zahl z

$$3p+4 = z^2 \qquad \text{also} \qquad 3p = z^2 - 4 = (z+2)(z-2)$$

Da $3p$ und $z+2$ positiv sind, ist auch $z-2$ eine positive ganze Zahl. Die einzigen Möglichkeiten, $3p$ in positiv ganzzahlige Faktoren zu zerlegen, bestehen aber darin, dass die Faktoren entweder 1 und $3p$ oder 3 und p lauten.
Ferner haben $z+2$ und $z-2$ die Differenz 4 voneinander. Daher würde die Zerlegung mit 1 als Faktor auf 5 als zweiter Faktor führen und somit nicht auf einen Faktor der Form $3p$.
Also bleibt nur die Möglichkeit, dass ein Faktor 3 und folglich der andere $p = 7$ lautet. Tatsächlich erfüllt $p = 7$ die Bedingung $3 \cdot 7 + 4 = 25 = 5^2$. Die einzige Primzahl, die die gestellte Bedingung erfüllt, ist 7.

Aufgabe 241034:
Jemand sucht natürliche Zahlen, die sich als Summe zweier Quadratzahlen darstellen lassen.
Er findet z. B., dass sowohl jede der Zahlen 89 und 90 als auch ihr Produkt 8010 diese Eigenschaft hat.
a) Bestätigen Sie, dass sich jede der Zahlen 89, 90 und 8010 als Summe von jeweils zwei Quadratzahlen darstellen lässt!
b) Beweisen Sie den folgenden allgemeinen Satz!
Wenn s und t jeweils eine natürliche Zahl mit der Eigenschaft ist, sich als Summe von zwei Quadratzahlen darstellen zu lassen, dann hat auch stets die Zahl $s \cdot t$ diese Eigenschaft.

Lösung von cyrix:
a) Es ist $89 = 64 + 25 = 8^2 + 5^2$, $90 = 81 + 9 = 9^2 + 3^2$ und (nach Aufgabenteil b) $8010 = 57^2 + 69^2$. Tatsächlich $57^2 = 3249$ und $69^2 = 4761$, sodass man die behauptete Gleichung leicht nachrechnet.

b) Seien $s = s_1^2 + s_2^2$ und $t = t_1^2 + t_2^2$. Dann ist

$$(s_1t_1 - s_2t_2)^2 + (s_1t_2 + s_2t_1)^2 = s_1^2t_1^2 - 2s_1t_1s_2t_2 + s_2^2t_2^2 + s_1^2t_2^2 + 2s_1t_2s_2t_1 + s_2^2t_1^2 =$$
$$= s_1^2t_1^2 + s_2^2t_2^2 + s_1^2t_2^2 + s_2^2t_1^2 = (s_1^2 + s_2^2) \cdot (t_1^2 + t_2^2) = s \cdot t$$

IV Runde 4

Aufgabe 021042:
Beweisen Sie, dass für alle positiven geraden Zahlen n die Zahl $z = 3^n + 63$ stets durch 72 teilbar ist!

Lösung von Manuela Kugel:
Primfaktorenzerlegung: $72 = 2^3 \cdot 3^2$. Damit ist zu zeigen, dass z sowohl durch 8 als auch durch 9 teilbar sein muss.

(1) Teilbarkeit durch 9:

$z = 3^n + 63$ mit n gerade: $n = 2k$ mit $k \in \ltimes$, $k > 0 \Rightarrow$

$$z = 3^{2k} + 63 = \left(3^2\right)^k + 63 = 9^k + 9 \cdot 7 = 9 \cdot (9^{k-1} + 7)$$

Da k positiv ist, folgt daraus $k-1 \geq 0$, damit ist der Klammerausdruck $a := 9^{k-1}+7 \geq 90+7 = 8 > 0$ und ganzzahlig. Es gilt also $z = 9 \cdot a$ mit $a > 0$, $a \in \mathbb{N}$, d. h. z ist durch 9 teilbar.

(2) Teilbarkeit durch 8:

Mittels Induktionsbeweis kann diese Teilbarkeit für den Term $a := 9^{k-1} + 7$ nachgewiesen werden.

Induktionsvoraussetzung: Es existiert ein $k > 0$, $k \in \mathbb{N}$, für das gilt: $8|9^{k-1} + 7$

Induktionsbehauptung: $8|9^k + 7$

Induktionsschritt: Für $k = 1$ gilt: $a = 9^{k-1} + 7 = 8$ und $8|8$.

Induktionsbeweis: Es gilt

$$9^k + 7 = 9^{k-1} \cdot 9 + 7 = 9^{k-1} \cdot (8 + 1) + 7 = 8 \cdot 9^{k-1} + 9^{k-1} + 7$$

Damit ist jeder der beiden Summanden $8 \cdot 9^{k-1}$ sowie $9^{k-1} + 7$ (wegen Induktionsvoraussetzung) durch 8 teilbar, folglich auch deren Summe. 2

Aufgabe 031044:
Wieviel Endnullen hat das Produkt

$$p_1^1 \cdot (p_1^2 \cdot p_2^1) \cdot (p_1^3 \cdot p_2^2 \cdot p_3^1) \cdot ... \cdot (p_1^{100} \cdot p_2^{99} \cdot p_3^{98} \cdot ...p_{98}^3 \cdot p_{99}^2 \cdot p_{100}^1)$$

Dabei sind $p_1, p_2, p_3, ..., p_{100}$ die ersten hundert Primzahlen in ihrer natürlichen Reihenfolge.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Anzahl der Endnullen hängt von der Anzahl der Faktoren $p_1 = 2$ und $p_3 = 5$ ab; denn nur das Produkt der beiden Primzahlen 2 und 5 liefert eine Null.
Im angegebenen Produkt kommt die Zahl 2 genau $(1 + 2 + 3 + ... + 100)$mal, die Zahl 5 genau $(1 + 2 + 3 + ... + 98)$mal als Faktor vor.
Also hat die Zahl genau $1 + 2 + 3 + ... + 98 = 98 \cdot \frac{99}{2} = 4851$ Endnullen.

Aufgabe 041043:
Beweisen Sie folgende Behauptung!
Ist die Summe dreier natürlicher Zahlen durch 6 teilbar, dann ist auch die Summe der Kuben dieser drei Zahlen durch 6 teilbar.

Lösung von Kitaktus:
a, b und c seien beliebige ganze (natürliche) Zahlen. Es gilt $(a - 1)a(a + 1) = a^3 - a$.
Von den drei aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen $a - 1, a$ und $a + 1$ ist mindestens eine gerade und mindestens eine durch drei teilbar. Das Produkt ist also durch 6 teilbar.
a und a^3 lassen somit stets den selben Rest bei Division durch 6. Das Gleiche gilt natürlich auch für b und c.
Daher lässt $a^3 + b^3 + c^3$ bei Division durch 6 den selben Rest wie $a + b + c$.
Insbesondere ist $a^3 + b^3 + c^3$ genau dann durch 6 teilbar, wenn $a + b + c$ durch 6 teilbar ist.

Aufgabe 051041:
Es seien m, n, p und q ganze Zahlen mit der Eigenschaft $m - p \neq 0$.
Man zeige, dass in diesem Falle $m - p$ genau dann Teiler von $mq + np$ ist, wenn $m - p$ Teiler von $mn + pq$ ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Gilt
$$mn + pq = r(m - p) \qquad \text{, r ganz} \tag{1}$$
so folgt wegen
$$(mn + pq) : (m - p) = n + \frac{pq + pn}{m - p} \tag{2}$$
aus (1) und (2)
$$pq + pn = s(m - p) \qquad \text{, s ganz} \tag{3}$$
Andererseits gilt
$$(pq + mn) : (-p + m) = -q + \frac{mn + mq}{m - p} \tag{4}$$
und aus (1) und (4) folgt
$$mn + mq = t(m - p) \qquad \text{, t ganz} \tag{5}$$
Also gilt
$$pq + pn + mn + mq = (s + t)(m - q) \tag{6}$$
woraus wegen (1)
$$mq + np = w(m - p) \qquad \text{, w ganz} \tag{7}$$
folgt. Umgekehrt folgt aus (6) wegen
$$(mq + np) : (m - q) = q + \frac{pq + np}{m - p} \tag{8}$$
$$pq + np = u(m - p) \qquad \text{, u ganz} \tag{9}$$
sowie wegen
$$(np + mq) : (-p + m) = -n + \frac{mn + mq}{m - p} \tag{10}$$
$$mn + mq = v(m - p) \qquad \text{, v ganz} \tag{11}$$
Also gilt
$$pq + np + mn + mq = (u + v)(m - q) \tag{12}$$
woraus wegen (6)
$$mn + pq = k(m - p) \qquad \text{, k ganz} \tag{13}$$
folgt. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Alternativ-Lösung von cyrix:
Wir betrachten die Differenz
$$(mq + np) - (mn + pq) = m(q - n) + p(n - q) = (m - p)(q - n).$$
Diese ist offensichtlich durch $m - p$ teibar, sodass der Minuend genau dann durch $m - p$ teilbar ist, wenn es der Subtrahend auch ist, $\square$.

Aufgabe 061041:
Man beweise: Sind m und n natürliche Zahlen, so ist die Zahl
$$m \cdot n \cdot (m^4 - n^4)$$
durch 30 teilbar.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die zu untersuchende Zahl ist

$$z = m \cdot n \cdot (m - n) \cdot (m + n) \cdot (m^2 + n^2)$$

(a) Behauptung: z ist durch 2 teilbar.
Beweis: Sind m, n nicht beide ungerade, so enthält z einen geraden Faktor, nämlich m oder n. Sind m, n beide ungerade, so enthält z den geraden Faktor $m - n$.

(b) Behauptung: z ist durch 3 teilbar.
Beweis: Ist eine der Zahlen m,n durch 3 teilbar, so auch z.
Lassen m,n bei Division durch 3 denselben Rest, so ist $m - n$, also auch z, durch 3 teilbar. Lässt eine der Zahlen m,n bei Division durch 3 den Rest 1, die andere den Rest 2, so ist $m + n$, also auch z, durch 3 teilbar.

(c) Behauptung: z ist durch 5 teilbar.
Beweis: Ist eine der Zahlen m,n durch 5 teilbar, so auch z.
Lassen m,n bei Division durch 5 denselben Rest, so ist $m - n$; also auch z, durch 5 teilbar.
Lässt eine der Zahlen m,n bei Division durch 5 den Rest 1, die andere den Rest 4, so ist $m+n$, also auch z, durch 5 teilbar; dasselbe gilt, wenn eine der Zahlen m,n den Rest 2, die andere den Rest 3 lässt.
Lässt schließlich eine der Zahlen m,n bei Division durch 5 den Rest 1 oder 4 die andere den Rest 2 oder 3, so lässt das Quadrat der erstgenannten Zahl den Rest 1, das Quadrat der letztgenannten Zahl den Rest 4; also ist dann $m^2 + n^2$ und somit z durch 5 teilbar.

Wegen $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ und da 2, 3, 5 zu je zweien teilerfremd sind, folgt aus (a), (b) und (c), dass z durch 30 teilbar ist.

Alternativ-Lösung von cyrix:
Ist mindestens eine der Variablen m oder n durch 5 teilbar, so ofenbar auch das Produkt. Andernfalls gilt aufgrund des kleinen Satzes von Fermat $m^4 \equiv n^4 \equiv 1 \pmod 5$, sodass $m^4 - n^4$ und damit das gesamte Produkt durch 5 teilbar ist.
Analog ist das Produkt sofort durch 3 teilbar, wenn es mindestens eine der beiden Werte m oder n ist. Andernfalls ist $m^4 = (m^2)^2 \equiv 1^2 = 1 \pmod 3$ und genauso $n^4 \equiv 1 \pmod 3$, sodass wie oben die Differenz $m^4 - n^4$ und damit das gesamte Produkt durch 3 teilbar ist.
Abschließend ist das Produkt gerade, was bei geradem m oder geradem n sofort folgt und für ungerade m und n wieder die Differenz $m^4 - n^4$ als Differenz zweier ungerader Zahlen gerade ist.
Da 5, 3 und 2 paarweise teilerfremd sind, folgt mit dem Chinesischen Restsatz, dass das Produkt also durch $5 \cdot 3 \cdot 2 = 30$ teilbar ist, w. z. b. w.

Aufgabe 111041:
a) Man beweise den folgenden Satz!
Ist die Summe dreier Primzahlen, von denen jede größer als 3 ist, durch 3 teilbar, dann sind alle Differenzen je zwei dieser Primzahlen durch 6 teilbar.
b) Man beweise, dass die Behauptung des Satzes nicht immer wahr ist, wenn die Einschränkung, dass jede der Primzahlen größer als 3 ist, fallengelassen wird!

Lösung von cyrix:
Die Summe von drei natürlichen Zahlen ist genau dann durch 3 teilbar, wenn entweder alle drei Zahlen den gleichen Rest bei der Teilung durch 3 lassen, oder aber jeder der drei möglichen Reste unter den drei Zahlen vertreten ist.

Der zweite Fall kann in der in der Aufgabe gegebenen Situation nicht vorkommen, da der Rest 0 nicht vertreten ist, da keine Primzahl die größer als 3 ist, durch 3 teilbar sein kann. Also müssen alle drei Primzahlen den gleichen Rest (1 oder 2) bei der Teilung durch 3 lassen und somit jede ihrer Differenzen durch 3 teilbar sein.

Weiterhin sind alle diese Primzahlen größer als 2 und somit ungerade. Ihre Differenzen sind damit alle gerade und insgesamt (wegen ggT(2,3) = 1) durch 6 teilbar, was a) zeigt.

Für den Aufgabenteil b) betrachte man die drei Primzahlen 3, 5 und 7, deren Summe 15 durch 3 teilbar ist, die Differenz 7-5=2, aber nicht durch 6.

Aufgabe 111042:
Es sind alle geordneten Quadrupel (x_1, x_2, x_3, x_4) positiver ganzer Zahlen zu ermitteln, die die folgenden Eigenschaften haben:
a) Das Produkt dieser vier Zahlen ist gleich 82944000000.
b) Ihr größter gemeinsamer Teiler(ggT) ist gleich 24.
c) Ihr kleinstes gemeinsames Vielfaches (kgV) ist gleich 120000.
d) Der größter gemeinsame Teiler von x_1 und x_2 ist gleich 1200.
e) Das kleinste gemeinsame Vielfache von x_2 und x_3 ist gleich 30000.

Lösung von cyrix:
Es ist $82944000000 = 2^{16} \cdot 3^4 \cdot 5^6$, sodass nur die Primzahlen 2, 3 und 5 in der Primfaktorzerlegung der x_i vorkommen. Wir können also schreiben $x_i = 2^{a_i} \cdot 3^{b_i} \cdot 5^{c_i}$ mit nicht-negativen ganzen Zahlen a_i, b_i, c_i für $i \in \{1,2,3,4\}$.
Dann ist nach a) $a_1 + \cdots + a_i = 16$, $b_1 + \cdots + b_4 = 4$ und $c_1 + \cdots + c_4 = 6$.

Es ist $24 = 2^3 \cdot 3^1$, sodass nach b) alle $a_i \geq 3$ und alle $b_i \geq 1$ sind. Aus letzterem folgt mit der Summenbedingung an die b_i sofort $b_1 = \cdots = b_4 = 1$. weiterhin ist mindestens eines der c_i gleich 0, da sonst der ggT auch durch 5 teilbar wäre. Analog ist auch mindestens eines der a_i genau gleich 3.

Es ist $120000 = 2^6 \cdot 3^1 \cdot 5^4$, sodass nach c) alle $a_i \leq 6$ und alle $c_i \leq 4$ sind, wobei diese Maximalwerte auch jeweils mindestens einmal angenommen werden. Aus der Summenbedingung an die a_i, diese obere und die zuvor gezeigte untere Schranke für deren Größe folgt, dass genau eines der a_i den Wert 6, ein zweites den Wert 4 und die beiden übrigen den Wert 3 annehmen müssen.

Es ist $1200 = 2^4 \cdot 3^1 \cdot 5^2$, sodass nach d) $a_1 \geq 4$, $a_2 \geq 4$, $c_1 \geq 2$ und $c_2 \geq 2$ folgt. Insbesondere folgt damit $a_3 = a_4 = 3$. Da mindestens eines der c_i den Wert 4 hat, ist die Summenbedingung an die c_i nur zu erfüllen, wenn $c_3 = c_4 = 0$, einer der beiden Werte c_1 und c_2 gleich 4 und der andere gleich 2 ist.

Es ist $30000 = 2^4 \cdot 3^1 \cdot 5^4$, sodass nach e) $a_2 \leq 4$, $a_3 \leq 4$, $c_2 \leq 4$ und $c_3 \leq 4$ folgt, wobei jeweils mindestens einer der a- bzw. c-Werte die Schranke auch annimmt. Aufgrund der zuvor gewonnenen Abschätzung an a_2 gilt $a_2 = 4$ und analog wegen $c_3 = 0$ auch $c_2 = 4$. Es folgt $c_1 = 2$ und abschließend $a_1 = 6$.
Zusammen erhalten wir
$x_1 = 2^{a_1} \cdot 3^{b_1} \cdot 5^{c_1} = 2^6 \cdot 3^1 \cdot 5^2$, $\quad x_2 = 2^{a_2} \cdot 3^{b_2} \cdot 5^{c_2} = 2^4 \cdot 3^1 \cdot 5^4$
$x_3 = 2^{a_3} \cdot 3^{b_3} \cdot 5^{c_3} = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^0$, $\quad x_4 = 2^{a_4} \cdot 3^{b_4} \cdot 5^{c_4} = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^0$.

Aufgabe 201043B:
Beweisen Sie, dass für keine natürliche Zahl n die Zahl $625 + 4(9^{2n})$ eine Primzahl sein kann!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Der Versuch, eine Produktdarstellung mit Hilfe binomischer Formeln zu erreichen, führt auf folgendes:

Für jede natürliche Zahl n gilt

$$\begin{aligned} 625 + 4 \cdot (9^{2n}) &= 5^4 + 4 \cdot 3^{4n} \\ &= (5^2 + 2 \cdot 3^{2n})^2 - 4 \cdot 5^2 \cdot 3^{2n} \\ &= (5^2 + 2 \cdot 3^{2n} + 2 \cdot 5 \cdot 3^n)(5^2 + 2 \cdot 3^{2n} - 2 \cdot 5 \cdot 3^n) \\ &= [(5 + 3^n)^2 + 3^{2n}] - [(5 - 3^n)^2 + 3^{2n}] \end{aligned}$$

Es bleibt zu zeigen, dass beide Faktoren größer als 1 sind. Es gilt jedoch

$$(5 + 3^n)^2 + 3^{2n} \geq (5 + 3^0)^2 > 1$$

und $5 \neq 3^n$, also $(5 - 3^n)^2 > 0$, $(5 - 3^n)^2 + 3^{2n} > 0 + 3^0 = 1$, womit auch dieser Teil der Lösung erbracht ist: Die Zahl $625 + 4 \cdot (9^{2n})$ ist in zwei ganzzahlige Faktoren, die beide größer als 1 sind, zerlegbar und ist somit keine Primzahl.

Alternativ-Lösung von cyrix:
Die Sophie-Germain-Identität liefert direkt

$$\begin{aligned} 625 + 4 \cdot (9^{2n}) &= 5^4 + 4 \cdot (3^n)^4 \\ &= (5^2 + 2 \cdot (3^n)^2 + 2 \cdot 5 \cdot 3^n) \cdot (5^2 + 2 \cdot (3^n)^2 - 2 \cdot 5 \cdot 3^n) \\ &= (25 + 2 \cdot 9^n + 10 \cdot 3^n) \cdot (25 + 2 \cdot 9^n - 10 \cdot 3^n), \end{aligned}$$

was nur dann eine Primzahl sein kann, wenn der kleinere zweite Faktor den Wert 1 annimmt. Jedoch lässt dieser für $n \geq 2$ bei der Division durch 9 den Rest $25 \equiv -2 \pmod 9$, kann also nicht 1 werden. Im Falle $n = 0$ bzw. $n = 1$ erhält man die Werte 17 bzw. 13, sodass die Faktorisierung also in allen Fällen nichttrivial ist und der zu betrachtende Ausdruck nie eine Primzahl werden kann.

Aufgabe 211041:
Ermitteln Sie alle Paare $(a; b)$ aus positiven ganzen Zahlen a, b, die die Eigenschaft haben, dass von den folgenden vier Aussagen (1), (2), (3), (4) genau drei wahr sind und eine falsch ist!
Die Aussagen lauten:

$$\begin{array}{llcll} b|(a+1), & (1) & ; & a = 2b + 5, & (2) \\ 3|(a+b), & (3) & ; & a + 7b \quad \text{ist eine Primzahl.} & (4) \end{array}$$

Lösung von Nuramon:
Angenommen (2) wäre falsch. Dann müsste einerseits nach (4) gelten, dass $a+7b \geq 8$ prim ist, andererseits müsste wegen (3) aber auch $a + 7b = (a + b) + 6b$ durch 3 teilbar sein. Also ist (2) wahr.
Dann ist $a + b = 3b + 5$ nicht durch drei teilbar, also ist (3) falsch. Demnach müssen (1) und (4) wahr sein.
Aus (2) folgt $a + 1 = 2b + 6$ und mit (1) ist daher genau dann erfüllt, wenn $b \mid 6$, also $b \in \{1,2,3,6\}$.
Wegen (2) ist $a + 7b = 9b + 5$. Also kann $a + 7b$ höchstens dann prim sein, wenn b gerade ist. Für $b = 2$ ist dies der Fall, denn $9 \cdot 2 + 5 = 23$ ist prim. Für $b = 6$ ebenso: $9 \cdot 6 + 5 = 59$ ist prim.
Also sind $(a,b) = (9,2)$ und $(a,b) = (17,6)$ alle gesuchten Paare.

Aufgabe 251041:
Beweisen Sie, dass

$$\frac{1281^3 + 1282^3 + 1283^3 + 1284^3 + 1285^3 + 1286^3 + 1287^3}{639 \cdot 640 + 641 \cdot 642 + 642 \cdot 643 + 644 \cdot 645}$$

eine durch 7 teilbare natürliche Zahl ist!

Lösung von cyrix:
Mit $u := 642$ wird die in der Aufgabenstellung beschrieben Zahl z zu

$$z = \frac{(2u-3)^2 + (2u-2)^3 + (2u-1)^3 + (2u)^3 + (2u+1)^3 + (2u+2)^3 + (2u+3)^3}{(u-3)(u-2) + (u-1)u + u(u+1) + (u+2)(u+3)} =$$

$$= \frac{7\cdot 8u^3+3\cdot(2u)^2\cdot(-3-2-1+1+2+3)+3\cdot(2u)\cdot(3^2+2^2+1^2+1^2+2^2+3^2)+(-3^3-2^3-1^3+1^3+2^3+3^3)}{4u^2+u\cdot(-3-2-1+1+2+3)+6+6}$$

$$= \frac{56u^3+168u}{4u^2+12} = \frac{14\cdot u\cdot(u^2+3)}{u^2+3} = 7\cdot 2u = 7\cdot 1284 \in 7\mathbb{N}, \square$$

Aufgabe 261042:
Man ermittle die kleinste positive natürliche Zahl n, die die folgenden Bedingungen (1), (2) erfüllt:
(1) Es gibt genau 144 natürliche Zahlen, die Teiler von n sind.
(2) Unter den Teilern von n befinden sich 10 unmittelbar aufeinanderfolgende natürliche Zahlen.

Lösung von cyrix:
E habe n die Primfaktorzerlegung $n = p_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k}$.
Dann hat n genau $(\alpha_1+1)\cdot\ldots\cdot(\alpha_k+1)$ verschiedene Teiler, da man aufgrund der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung unabhängig für jede Primzahl p_i einen Exponenten $0\leq\beta_i\leq\alpha_i$ auswählen kann, um so die Primfaktorzerlegung $t = p_1^{\beta_1}\cdot\ldots\cdot p_k^{\beta_k}$ eines beliebigen Teilers t von n zu erhalten.

Also gilt $(\alpha_1+1)\cdot\ldots\cdot(\alpha_k+1) = 144 = 2^4\cdot 3^2$. Damit kann n höchstens sechs verschiedene Primteiler besitzen, sodass $k\leq 6$ gilt.

Von 10 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist immer mindestens je eine der Zahlen durch $2^3=8$, $3^2=9$, 5 bzw. 7 teilbar. Also ist n durch $f := 2^3\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7$ teilbar. O. B. d. A. seien also $p_1=2$, $p_2=3$, $p_3=5$ und $p_4=7$ sowie $\alpha_1\geq 3$, $\alpha_2\geq 2$, $\alpha_3\geq 1$ und $\alpha_4\geq 1$.

Jede natürliche Zahl, die f als Teiler besitzt, ist damit insbesondere durch alle natürlichen Zahlen von 1 bis 10 teilbar, sodass Bedingung (2) für diese Zahlen immer erfüllt ist.

Weiterhin hat jedes Vielfache von f immer mindestens $(\alpha_1+1)\cdot(\alpha_2+1)\cdot(\alpha_3+1)\cdot(\alpha_4+1)\geq 4\cdot 3\cdot 2\cdot 2 = 48$ Teiler.

Hätte n noch zwei verschiedene Primfaktoren p_5 und p_6, die beide verschieden von den bisherigen p_1 bis p_4 sind, so hätte n mindestens $48\cdot(\alpha_5+1)\cdot(\alpha_6+1)\geq 48\cdot 2\cdot 2 = 192 > 144$ Teiler, sodass dies nicht zutreffen kann.

Hat n noch einen weiteren Primfaktor $p_5\notin\{p_1,\ldots,p_4\}$, der in einer Vielfachheit $\alpha_5\geq 3$ in n enthalten ist, so hätte n mindestens $48\cdot(\alpha_5+1)\geq 48\cdot 4 = 192 > 144$ Teiler, sodass dies nicht vorkommen kann.

Ist dieser Primfaktor jedoch in der Vielfachheit $\alpha_5 = 2$ in n enthalten, so hat n mindestens $48\cdot(\alpha_5+1) = 48\cdot 3 = 144$ Teiler, sodass jede Zahl der Form $f\cdot p_5^2$ auch Bedingung (1) erfüllt. (Dabei dürfen die Primfaktoren $p_1^{\alpha_1}$ bis $p_4^{\alpha_4}$ keine höheren Exponenten als die oben angegebenen unteren Schranken besitzen, da sonst das Produkt echt mehr als $48\cdot 3 = 144$ Teiler hätte.) Die kleinste unter den natürlichen Zahlen dieser Form ist $n_1 = f\cdot 11^2$, da $p_5 = 11$ die kleinste noch nicht verwendete Primzahl ist.

Ist der fünfte Primfaktor p_5 jedoch nur in der ersten Potenz in n enthalten, so hätte es, wenn alle Exponenten α_1 bis α_4 ihren minimal möglichen Wert annehmen, nur $48\cdot(\alpha_5+1) = 48\cdot 2 = 96 = \frac{2}{3}\cdot 144$ verschiedene Teiler. Also muss mindestens einer der Exponenten von p_1 bis p_4 erhöht werden, um genau 144 Teiler zu erreichen. Erhöht man α_4 von 1 auf den nächstmöglichen Wert 2, so steigt die Teileranzahl um den Faktor $\frac{2+1}{1+1} = \frac{3}{2}$, sodass dann schon die 144 Teiler erreicht wären, also alle anderen Exponenten unverändert bleiben müssen.
Damit erfüllt jede Zahl der Form $f\cdot 7\cdot p_5$ beide Bedingungen, wovon $n_2 = f\cdot 7\cdot 11$ die kleinste ist. Ein analoges Vorgehen zeigt auch, dass eine Erhöhung von α_3 nur möglich ist, wenn diese um den kleinstmöglichen Wert geschieht, und alle anderen Exponenten unverändert bleiben, sodass jede Zahl der

Form $f \cdot 5 \cdot p_5$ beide Bedingungen erfüllt, wovon $n_3 = f \cdot 5 \cdot 11$ der kleinste ist.

Eine Erhöhung von $\alpha_2 = 2$ auf den nächsthöheren Wert 3 würde dagegen die Teileranzahl nur um den Faktor $\frac{3+1}{2+1} = \frac{4}{3} < \frac{3}{2}$ steigern, sodass eine weitere Erhöhung (von α_2 oder α_1 notwendig wäre. Dann jedoch hätte jede Zahl dieser Form mindestens die Größe $f \cdot 2 \cdot 3 \cdot p_5 \geq f \cdot 6 \cdot 11 > n_3$, muss also nicht weiter betrachtet werden.

Eine Erhöhung von ausschließlich α_1 vom bisherigen Wert 3 müsste also bis 5 geschehen, sodass sich die Teileranzahl um den gewünschten Faktor $\frac{5+1}{3+1} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ erhöht. Damit erfüllt auch jede Zahl der Form $f \cdot 2^2 \cdot p_5$ beide Bedingungen, wovon $n_4 = f \cdot 4 \cdot 11$ die kleinste ist.

Von den bisher gefundenen Zahlen, die beide Bedingungen erfüllen, ist $n_4 = 44 \cdot f$ die kleinste.
Es verbleibt noch der Fall, dass n keine weiteren außer den vier Primteilern p_1 bis p_4 besitzt.

Eine gemeinsame Erhöhung von α_4 und α_3 könnte jeweils höchstens um den Wert 1 erfolgen, da man sonst schon Zahlen konstruieren würde, die mindestens die Größe $f \cdot 5^2 \cdot 7 = f \cdot 245$ besitzen, also größer als n_4 sind und damit nicht mehr betrachtet werden müssen.
Erhöht man jedoch beide um genau 1, so steigt die Teileranzahl nur auf $48 \cdot \frac{2+1}{1+1} \cdot \frac{2+1}{1+1} = 48 \cdot \frac{9}{4} < 48 \cdot 3 = 144$, sodass noch mindestens ein weiterer Exponent erhöht werden müsste.
Dann jedoch hätte die Zahl mindestens die Größe $f \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7 = 70 \cdot f > n_4$, sodass dieser Fall auch nicht weiter betrachtet werden muss. Demnach wird nur höchstens einer der beiden Werte α_4 und α_3 erhöht, sodass zur Konstruktion einer möglichst kleinen Zahl also α_4 konstant bleibt und höchstens α_3 erhöht wird.

Eine Erhöhung von α_3 von derzeit 1 auf 3 würde würde die Teileranzahl um den Faktor $\frac{3+1}{1+1} = 2 < 3$ erhöhen, sodass noch nicht genügend Teiler vorhanden wären, also eine weitere Erhöhung mindestens eines Exponenten α_1 bis α_3 nötig wäre. Dann jedoch würden Zahlen entstehen, die mindestens den Wert $f \cdot 2 \cdot 5^2 = 50 \cdot f > n_4$ besitzen, sodass dieser Fall nicht weiter betrachtet werden muss. Damit ist $1 \leq \alpha_3 \leq 2$.

Ist $\alpha_3 = 1$, so muss

$$(\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) = \frac{144}{(\alpha_3 + 1) \cdot (\alpha_4 + 1)} = \frac{144}{4} = 36$$

gelten. Nach der Ungleichung von arithmetischem und geometrischem Mittel ist damit

$$6 = \sqrt{36} = \sqrt{(\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1)} \leq \frac{(\alpha_1 + 1) + (\alpha_2 + 1)}{2}$$

also $\alpha_1 + \alpha_2 \geq 10$, wobei Gleichheit nur für $\alpha_1 = \alpha_2 = 5$ eintritt. Im Gleichheitsfall entsteht die Zahl $n_6 = 2^5 \cdot 3^5 \cdot 5^1 \cdot 7^1 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot f = 108 \cdot f > n_5$. Sonst gilt $\alpha_1 + \alpha_2 \geq 11$, sodass α_1 und α_2 von ihren bisherigen Werten 3 und 2 in Summe um mindestens 6 erhöht werden müssen, was dann Zahlen ergibt, die mindestens die Größe $2^6 \cdot f = 64 \cdot f > n_4$ besitzen, also nicht weiter beachtet werden brauchen.

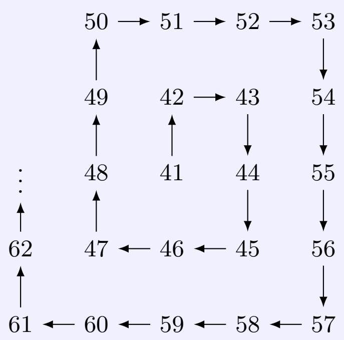
Ist dagegen $\alpha_3 = 2$, so muss

$$(\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) = \frac{144}{(\alpha_3 + 1) \cdot (\alpha_4 + 1)} = \frac{144}{6} = 24$$

gelten. Wegen $p_2^2 \cdot p_3 = 3^2 \cdot 5 = 45 > 44$ würde eine Erhöhung von α_2 um 2 schon Zahlen liefern, die größer sind als n_4. Also ist $\alpha_2 \leq 2 + 1 = 3$. Ist $\alpha_2 = 2$, so folgt $\alpha_1 + 1 = \frac{24}{\alpha_2 + 1} = \frac{24}{3} = 8$, sodass wir die Zahl $n_7 = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^1 = 2^4 \cdot 5^1 \cdot f = 80 \cdot f > n_4$ erhalten. Ist dagegen $\alpha_2 = 3$, so folgt $\alpha_1 + 1 = \frac{24}{4} = 6$, sodass wir die Zahl $n_8 = 2^6 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^1 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot f = 120 \cdot f > n_4$ erhalten.

Da diese Fallunterscheidung vollständig ist, ist damit sicher $n_4 = 44 \cdot f = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ die kleinste natürliche Zahl, die beide Bedingungen (1) und (2) erfüllt.

Aufgabe 281043A:



Man denke sich die natürlichen Zahlen, beginnend mit 41, so spiralförmig angeordnet, wie aus der Abbildung als Anfang einer solchen Anordnung zu erkennen ist:
Beweisen Sie, dass (bei dieser Anordnung) in der Diagonale, von der in der Abbildung die Zahlen 61, 47, 41, 43, 53 auftreten, mindestens 30 Primzahlen stehen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Um die Zahlen in der genannten Diagonalen zu erreichen, hat man von 41 aus, immer abwechselnd nach rechts oben und links unten Wege der Schrittlänge 1, 2, 3, 4, ... zu gehen. Mit der Formel

$$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

folgt daraus, dass jede in der Diagonale stehende Zahl z ausgedrückt werden kann durch

$$z = x^2 - x + 41 \qquad (x = 1, 2, 3, ...)$$

Bezugnehmend auf die Aufgabe 281011, in der das Ergebnis von Euler zu überprüfen war, dass z für alle Zahlen $x = 1, 2, 3, ..., 40$ prim ist, ergibt sich das Gesuchte.

Aufgabe 301042:
Es seien $x_1, x_2, ..., x_n$ Zahlen, von denen jede entweder gleich 1 oder gleich -1 ist.
Ferner sei $x_{n+1} = x_1, x_{n+2} = x_2, x_{n+3} = x_3$; für jedes $i = 1, ..., n$ sei

$$p_i = x_i \cdot x_{i+1} \cdot x_{i+2} \cdot x_{i+3}$$

und es werde $p_1 + p_2 + ... + p_n = 0$ vorausgesetzt.
Man beweise, dass aus diesen Voraussetzungen stets folgt: n ist durch 4 teilbar.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Nach Voraussetzung ist auch jede der Zahlen p_1, p_2,...,p_n entweder gleich 1 oder gleich -1. Wegen $p_1 + p_2 + ... + p_n = 0$ ist die Anzahl m der $p_j = 1$ gleich der Anzahl der $p_k = -1$. Also gilt $n = 2m$.
Mit dieser Anzahl m gilt einerseits $p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_n = (-1)^m$. Andererseits enthält dieses Produkt

$$p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_n = x_1x_2x_3x_4 \cdot x_2x_3x_4x_5 \cdot ... \cdot x_nx_1x_2x_3$$

jeden Faktor x_i genau 4 mal (nämlich innerhalb der Teilprodukte $x_1x_2x_3x_4, ..., x_nx_1x_2x_3$ genau einmal an erster, genau einmal an zweiter, genau einmal an dritter und genau einmal an vierter Stelle); also ist $p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_n = 1$. Daher ist m gerade und folglich $n = 2m$ durch 4 teilbar, w. z. b. w.

Aufgabe 341041:
Zeigen Sie, dass die Zahl $z = 7 + 7^3 + 7^5 + 7^7 + ... + 7^{93} + 7^{95}$ durch 336 teilbar ist!

Lösung von cyrix:
Es ist $z = 7 \cdot (1 + 7^2 + 7^4 + 7^6 + \cdots + 7^{94})$ offensichtlich durch 7 teilbar und

$$\frac{z}{7} = 49^0 + 49^1 + 49^2 + 49^3 + \cdots + 49^{47} \equiv 1^0 + 1^1 + 1^2 + \cdots + 1^{47} = 48 \equiv 0 \pmod{48}$$

durch 48 teilbar, also z durch $7 \cdot 48 = 336$ teilbar, $\square$.

Aufgabe 341043:
Beweisen Sie, dass für jede natürliche Zahl n mit $n \geq 2$ und jede natürliche Zahl k mit $k \geq 1$ die Zahl

$$z = (1 + k + k^2 + ... + k^n)^2 - k^n$$

keine Primzahl ist.

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:
Für $k = 1$ gilt $z = (n+1)^2 - 1 = n(n+2)$. Sei im folgenden $k \geq 2$. Nach der dritten binomischen Formel gilt $R_{k,n} := \frac{k^n-1}{k-1} = 1 + k + k^2 + \ldots + k^{n-1} > 1$. Wir erhalten für z:

$$z = (R_{k,n} + k^n)^2 - k^n = R_{k,n}^2 + 2R_{k,n}k^n + k^{2n} - k^n = R_{k,n}^2 + 2R_{k,n}k^n + k^n(k^n - 1) =$$

$$= R_{k,n}^2 + 2R_{k,n}k^n + k^n(k-1)R_{k,n} = R_{k,n}(R_{k,n} + 2k^n + k^n(k-1)).$$

Beide Faktoren sind größer als 1 und somit ist z keine Primzahl.

VI.II (Dezimal-) Zahldarstellung, (quadratische) Reste

I Runde 1

Aufgabe V01001:
Die Quersumme einer zweistelligen Zahl ist 9. Multipliziert man die Zahl mit 5 und subtrahiert man von dem Produkt 9, so erhält man eine zweistellige Zahl mit denselben Ziffern in umgekehrter Folge. Wie heißt die zweistellige Zahl?

Lösung von svrc:
Wir bezeichnen die zweistellige Zahl mit a. Wegen der zweiten Bedingung, dass $5a - 9 < 100$ sein muss, muss $a < 22$ gelten. Daher ist der gesuchte Kandidat 18, da

$$5 \cdot 18 - 9 = 90 - 9 = 81$$

ist, somit die zweite Bedingung erfüllt ist und 18 als Quersumme 9 besitzt.

Aufgabe V01005:
Ein Mathematiker, nach seiner Autonummer gefragt, antwortet:

'„Sie heißt III Z ...“ Die Zahl können Sie gleich selbst ausrechnen. Von den vier Ziffern sind die letzten 3 gleich. Die Quersumme beträgt 22.
Setzt man die erste Ziffer an das Ende, so entsteht eine Zahl, die 1998 kleiner ist als die tatsächliche.

Lösung von J. Lehmann und W. Unze:
Die erste Ziffer sei y, die drei letzten Ziffern: $3x$. Dann ergibt sich das Gleichungssystem

$$y + 3x = 22$$
$$(1000y + 100x + 10x + x) - 1998 = 1000x + 100x + 10x + y$$

Dieses System hat die Lösung $x = 5$ und $y = 7$. Die Autonummer heißt folglich III Z 7555.

Aufgabe V01006:
Welches ist die kleinste Zahl mit der linken Anfangsziffer 7, die in ihren dritten Teil übergeht, wenn man diese 7 vorn streicht und an die verbleibende Zahl als rechte Endziffer ansetzt?

Lösung von ochen:
x sei die Zahl ohne die Anfangsziffer 7. Dann wird

$$7 \cdot 10^n + x = 3(10x + 7) = 30x + 21$$
$$7 \cdot 10^n - 21 = 7(10^n - 3) = 29x$$

Da x eine natürliche Zahl ist, muss $10^n - 3$ die Zahl 29 als Teiler besitzen.

Setze $r_0 = -2$ und $r_{n+1} = 10r_n - 2 \bmod 29$, so gilt $r_n \equiv 10^n - 3 \pmod{29}$.
Durch systematisches Berechnen der Folgenglieder erhält man für $n = 1,2,...$
-22, -19, -18, -8, -24, -10, -15, -7, -14, -26, -1, -12, -6, -4, -13, -16, -17, -27, -11, -25, -20, -28 -21, -9, -5, -23, 0
Damit ist $10^{27} - 3$ ein Vielfaches von 29. Die gesuchte Zahl ist somit

$$7 \cdot 10^{27} + \frac{7 \cdot 10^{27} - 3}{29} = \frac{3}{29}(7 \cdot 10^{28} - 1)$$

Alternativ-Lösung von cyrix:
Wir bestimmen zuerst die kleinste positive ganze Zahl o, für die $10^o \equiv 1 \pmod{29}$ ist. Da 29 eine Primzahl ist, muss o ein Teiler von $29 - 1 = 28 = 2^2 \cdot 7$ sein. Da weder $2^4 - 1 = 15 = 3 \cdot 5$ noch $2^{2\cdot 7} - 1 = (2^7 - 1) \cdot (2^7 + 1) = 127 \cdot 129 = 3 \cdot 43 \cdot 127$ durch die Primzahl 29 teilbar sind, muss $o = 28$ gelten.
Weiterhin ist $3 \cdot 10^1 \equiv 1 \equiv 10^o \pmod{29}$, also $3 \equiv 10^{o-1} \pmod{29}$. Damit ist $n = 28$ die kleinste positive ganze Zahl, für die $10^n - 3$ durch 29 teilbar ist. Daraus erhält man, wie oben, die gesuchte Zahl.

Aufgabe V01007:
Eine sechsstellige ganze Zahl endet an der niedrigsten Stelle (E) mit 1. Streicht man diese letzte Ziffer und setzt sie vorn wieder an, so erhält man den dritten Teil der ursprünglichen Zahl.
a) Wie lauten die beiden Zahlen?
b) Erläutern Sie, durch welche Überlegung sie zur Lösung kamen.

Lösung von Steffen Polster:
Die gesuchte Zahl z hat die Form $z = 10x + 1$, wobei x die Restzahl nach dem Streichen der 1 am Ende ist. Dann wird

$$z = 10x + 1 = 3 \cdot (100000 + x) \quad \Rightarrow \quad x = 42857$$

Die gesuchten Zahlen sind somit 428571 und 142857. Die Probe bestätigt das Ergebnis.

Aufgabe 011016:
Eine sechsstellige Zahl beginnt an der höchsten Stelle mit der Ziffer 1. Streicht man diese Ziffer und hängt sie hinten an die Zahl an, so erhält man das Dreifache der ursprünglichen Zahl.

Lösung von Manuela Kugel:
a) Teilt man diese sechsstellige Zahlx in ihre 1. Ziffer 1 und die restliche 5-stellige Zahl a, so lässt sich dies wie folgt ausdrücken: $x = 100000 + a$.
Gleichzeitig gilt für die zweite sechsstellige Zahl y, dass sie aus x durch Streichen der 1. Ziffer und Anfügen dieser Ziffer am Ende der Zahl entsteht, also: $y = 10 \cdot a + 1$.
Ferner wird gesagt, dass gelte: $y = 3x$ und somit $10 \cdot a + 1 = 3 \cdot (100000 + a)$. Nach Umformen erhält man $7a = 3 \cdot 100000 - 1$, was ergibt: $a = 42857$. Für x und y ergibt sich damit: $x = 142857, y = 428571$.

b) Es gelten folgende Aussagen:
Streicht man einer sechsstelligen Zahl ihre ersten beiden Ziffern 14 und hängt sie an die verbleibende vierstellige Zahl, so entsteht eine doppelt so große wie die ursprüngliche Zahl.
Streicht man einer sechsstelligen Zahl ihre letzten beiden Ziffern 57 und stellt sie der verbleibenden vierstelligen Zahl voran, so entsteht eine viermal so große Zahl wie die ursprüngliche Zahl.
Streicht man einer sechsstelligen Zahl ihre letzte Ziffer 7 und stellt sie der verbleibenden fünfstelligen Zahl voran, so entsteht eine fünfmal so große Zahl wie die ursprüngliche Zahl.
Streicht man einer sechsstelligen Zahl ihre ersten drei Ziffern 142 und hängt sie an die verbleibende dreistellige Zahl, so entsteht eine sechsmal so große wie die ursprüngliche Zahl.

c) Die Aufgabe kann aus der Antwort zu Teil a) entnommen werden:

$$x = 100000 + a = 100000 + \frac{3 \cdot 100000 - 1}{7} \qquad \text{sowie} \qquad y = 10 \cdot a + 1 = 10 \cdot \frac{3 \cdot 100000 - 1}{7} + 1$$

Aufgabe 021015:
Es ist folgender Satz zu beweisen:
Wenn die Summe zweier ganzer Zahlen durch 10 teilbar ist, so enden die Quadrate dieser Zahlen auf die gleiche Ziffer.

Lösung von André Lanka:
Seien n und m diese Zahlen. Damit ihre Summe durch 10 teilbar ist, muss gelten:

$$n = 10a + b \qquad , \qquad m = 10c - b$$

Daraus folgt $n^2 = 100a^2 + 20ab + b^2$ und $m^2 = 100c^2 - 20cb + b^2$. Für die letzte Ziffer beider Quadrate ist ausschließlich der Summand b^2 zuständig, der bei beiden Quadraten gleich ist.

Aufgabe 021016:
Es ist die kleinste natürliche Zahl n zu bestimmen, welche folgende Eigenschaften besitzt:
a) ihre dekadische Darstellung hat als letzte Ziffer die Ziffer 6;
b) wenn man diese letzte Ziffer 6 streicht und sie als erste Ziffer vor die anderen unveränderten Ziffern schreibt, so bekommt man das Vierfache der Zahl n.

Lösung von André Lanka:
Wir wissen, dass die gesuchte Zahl n auf 6 endet. Daher endet das Vierfache von n auf 4. Das ist zugleich die vorletzte Ziffer von n.
Da nun n auf 46 endet, steht 84 an den letzten beiden Stellen von $4n$. Also endet n auf 846. Wenden wir dieses Verfahren so weiter an, erhalten wir für n die Zahl 153846.

Aufgabe 041015:
Die Zahl $2^{3217} - 1$ wurde als Primzahl ermittelt.
a) Stellen Sie fest, wieviel Stellen diese Zahl hat!
b) Wie lautet die letzte Ziffer dieser Zahl?

Lösung von Daniel Gutekunst:
Sei $\lg x$ der Logarithmus von x zur Basis 10 und $[x]$ die Gauß-Klammer, welche die größte ganze Zahl $\leq x$ liefert.

(a) Umschreiben der Zahl 2^{3217} auf die Basis 10 ergibt:

$$2^{3217} = 10^{\lg(2^{3217})} = 10^{3217 \cdot \lg 2}$$

Da 10^n im Dezimalsystem jeweils die kleinste $(n+1)$-stellige Zahl ist, folgt für eine positive reelle Zahl r, dass die Anzahl der Stellen von 10^r gleich $[r]+1$ ist. Die Anzahl der Stellen von 2^{3217} ist also gleich

$$[3217 \cdot \lg 2] + 1 = 969.$$

Da 2^{3217} nicht den Faktor 5 enthält, kann 2^{3217} nicht von der Form 10^n sein. Insbesondere ist 2^{3217} damit nicht die kleinste 969-stellige Zahl und dem zu Folge hat $2^{3217} - 1$ ebenfalls 969 Dezimalstellen.

(b) Es genügt die Betrachtung der letzten Ziffer, also alle Berechnungen modulo 10 auszuführen. Es gilt:

$$2^1 \equiv 2 \pmod{10} \quad ; \quad 2^2 \equiv 4 \pmod{10} \quad ; \quad 2^3 \equiv 8 \pmod{10}$$
$$2^4 \equiv 6 \pmod{10} \quad ; \quad 2^5 \equiv 2 \pmod{10}.$$

Man hat es also mit einem 4-er Zyklus zu tun. Sei $n \in \mathbb{N}$ und 2^n gegeben. Gilt $n \equiv 1 \pmod 4$, endet 2^n auf 2, bei $n \equiv 2 \pmod 4$ auf 4, bei $n \equiv 3 \pmod 4$ auf 8 und bei $n \equiv 0 \pmod 4$ auf 6. Weitere Möglichkeiten gibt es nicht.
Wegen $3217 \equiv 1 \pmod 4$ endet 23217 auf 2 und $2^{3217} - 1$ demzufolge auf 1.
Die Information, dass $2^{3217} - 1$ eine Primzahl ist, wurde für die Lösung der Aufgabe nicht benötigt.

Aufgabe 051011:
Finden Sie eine zweistellige Zahl, die gleich der Summe aus der Zahl an ihrer Zehnerstelle und dem Quadrat der Zahl an der Einerstelle ist!
Weisen Sie nach, dass es nur eine solche Zahl gibt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, es gäbe eine solche Zahl $z = 10a + b$ mit natürlichen Zahlen a, b und $0 < a < 10$, $b < 10$, so gilt die Gleichung

$$10a + b = a + b^2$$

Dann muss $9a = b^2 - b$, also $a = \frac{b(b-1)}{9}$ sein.
Da a eine natürliche Zahl ist und b sowie $b-1$ nicht gleichzeitig durch 3 teilbar sein können, muss entweder b oder $b-1$ durch 9 teilbar sein. Wegen $b < 10$ und $a \neq 0$ kann $b-1$ nicht durch 9 teilbar sein, also muss $b = 9$ sein. a ist dann 8.
Also kann nur die Zahl 89 die Bedingungen erfüllen. Da $89 = 8 + 92$ gilt, genügt 89 wirklich den Bedingungen der Aufgabe.

Aufgabe 061014:
Am Neujahrstag des Jahres 1953 lernten sich A und B während einer Bahnfahrt kennen. Im Laufe des Gesprächs kam die Rede auf das Alter der beiden.

A sagte: „Wenn Sie die Quersumme meines (vierstellig geschriebenen) Geburtsjahres bilden, so erhalten Sie mein Alter.“ Nach kurzem Überlegen gratuliert ihm daraufhin B zum Geburtstag.

a) Woher wusste B, ohne weitere Angaben erhalten zu haben, das Geburtsdatum?

b) Wann wurde A geboren?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
A kann höchstens 27 Jahre alt sein; denn die größte Quersumme, die unter den angegebenen Bedingungen möglich ist, beträgt $1+8+9+9=27$. Er ist also nach dem Jahre 1924 geboren. Sein Geburtsjahr sei $1900+10a+b$ mit a, b ganz und $2 \leq a \leq 5$; $0 \leq b \leq 9$. Sein Alter beträgt am 1.1.1953 folglich (laut Voraussetzung) $1+9+a+b$ Jahre.

Daher gilt, falls er am 1.1. geboren ist (Fall 1):

$$\begin{aligned} 1+9+a+b &= 1953-(1900+10a+b), \\ 43 &= 11a+2b. \end{aligned}$$

Diese Gleichung wird, berücksichtigt man die Bedingungen für a und b, nur von $a=3$ und $b=5$ erfüllt. A wurde daher am 1.1.1935 geboren und ist 18 Jahre alt.

Er könnte aber auch an einem anderen Tage geboren sein (Fall 2):

$$\begin{aligned} 1+9+a+b &= 1952-(1900+10a+b), \\ 42 &= 11a+2b. \end{aligned}$$

Diese Gleichung wird unter den Bedingungen der Aufgabe von keinem Zahlenpaar (a, b) erfüllt. Die für den Fall 1 angegebene Lösung ist also die einzige.

Aufgabe 071011:
Dietmar und Jörg sehen bei einem Spaziergang ein Auto, bei dem im Kennzeichen die Zahl 4949 steht. Die Tatsache, dass 49 eine Quadratzahl ist, führt sie auf die Frage, ob auch die Zahl 4949 eine Quadratzahl ist.

Nach kurzer Überlegung sagt Dietmar: „Ich kann sogar beweisen, dass keine vierstellige Zahl, deren erste gleich ihrer dritten Ziffer und deren zweite gleich ihrer vierten Ziffer ist, eine Quadratzahl sein kann. Übrigens lässt sich auch beweisen, dass unter diesen Zahlen genau eine Primzahl ist.“

Führen Sie diese Beweise durch! (Dietmar fasst dabei alle Kennzeichen von 0001 bis 9999 als vierstellige Zahlen auf.)

Lösung von cyrix:
Die vierstellige Zahl sei z, die aus der ersten und zweiten Ziffer gebildete Zahl sei a (a ganz; $0 < a < 100$).

Dann gilt $z = 100a + a = 101a$.
Das heißt, es gilt $101|z$. Nur für $a=1$ ist z Primzahl. Das ergibt das Zeichen 0101.

Da 101 Primzahl ist, so folgte, falls z eine Quadratzahl wäre, aus $101|z$ auch $101^2|z$. Das ist aber nicht möglich, da sonst wegen $101^2 > 10000$ die Zahl z mindestens fünfstellig sein müsste.

Aufgabe 151011:
Ermitteln Sie alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ jeweils mit folgender Eigenschaft!

a) Die Summe aller natürlichen Zahlen von 1 bis n ist eine zweistellige Zahl, deren beide Ziffern gleich sind.

b) Die Summe aller natürlichen Zahlen von 1 bis n ist eine dreistellige Zahl, deren drei Ziffern einander gleich sind.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Summe S der natürlichen Zahlen von 1 bis n ist laut Zahlentafel $s = \frac{n(n+1)}{2}$.

a) Angenommen, für eine natürlich Zahl n sei s eine zweistellige Zahl aus zwei gleichen Ziffern. Dann ist s, also auch $s = n(n+1)$ durch 11 teilbar. Da 11 Primzahl ist, ist somit entweder n oder $n+1$ durch 11 teilbar. Wäre $n \geq 14$, so wäre $s \geq 7 \cdot 15 > 100$, also nicht zweistellig. Daher ist $n < 14$, $n+1 < 15$, so dass entweder $n = 11$ oder $n+1 = 11$, d. h. $n = 10$ folgt.

Tatsächlich erhält man für $n = 11$ den Wert $s = \frac{11 \cdot 12}{2} = 66$ und für $n = 10$ entsprechend 55; also ist für $n = 10$ und $n = 11$ die Bedingung a) erfüllt.

b) Angenommen, für eine natürliche Zahl n sei s eine dreistellige Zahl aus drei gleichen Ziffern. Dann ist s, also auch $2s = n(n+1)$ durch 111 teilbar. Wäre $n \geq 45$, so wäre $s \geq 45 \cdot 23 > 1000$, also nicht dreistellig. Daher ist $n < 45$, $n+1 < 46$.

Also muss wegen $111 = 3 \cdot 37$ und, weil 3 und 37 Primzahlen sind, einer der beiden Faktoren $n, n+1$ durch 3 teilbar und der andere gleich 37 sein. Da $n+1$ für $n = 37$ nicht durch 3 teilbar ist, verbleibt nur $n+1 = 37$. Tatsächlich erhält man dabei $s = \frac{36 \cdot 37}{2} = 666$, also eine dreistellige Zahl aus drei gleichen Ziffern als einzige Lösung.

Aufgabe 251014:
Stellen Sie die Zahl 1985

a) im 2adischen Positionasystem (*Dualsystem*)

b) im 3adischen Positionssystem dar!

c) Woran erkennt man bei den Darstellungen in diesen Positionssystemen, dass die Zahl ungerade ist?

Anmerkung: Unter der Darstellung einer Zahl im m-adischen Positionssystem versteht man diejenige, die die Basis m und die Ziffern $0, 1, \ldots, m-1$ benutzt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Es gilt

$$1985 = 1 \cdot 2^{10} + 1 \cdot 2^9 + 1 \cdot 2^8 + 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$

Damit hat die Zahl 1985 im Dualsystem die Darstellung $[11111000001]_2$.

b) Es gilt

$$1985 = 2 \cdot 3^6 + 2 \cdot 3^5 + 0 \cdot 3^4 + 1 \cdot 3^3 + 1 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0$$

Damit hat die Zahl 1985 3adischen System die Darstellung $[2201112]_3$.

c) Da alle Potenzen von 2 mit Ausnahme von $2^0 = 1$ durch 2 teilbar sind, ist eine natürliche Zahl genau dann durch 2 teilbar, wenn in ihrer 2-adischen Darstellung der Summand $1 \cdot 2^0$ auftritt, d. h., sie ist ungerade genau dann, wenn die Darstellung auf 1 endet.

Die Zahl 3 ist ungerade; alle ihre Potenzen sind folglich ebenfalls ungerade. Daher ist eine natürliche Zahl genau dann ungerade, wenn in ihrer 3-adischen Darstellung die (einzige) ungerade Ziffer 1 in ungerader Anzahl auftritt.

Gleichwertig hiermit kann man auch das Kennzeichen verwenden, dass die „Quersumme“ der Zahl in ihrer 3-adischen Darstellung ungerade ist. (Die für das Dezimalsystem bekannte „Neunerregel“ wird also im 3adischen System zur „Zweierregel“.)

Aufgabe 261011:
Auf welche Ziffer endet die Zahl
$$z = 4444^{444^{44^4}}?$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Potenzen von 4444 enden jeweils auf die gleiche Ziffer wie dieselben Potenzen von 4. Diese enden auf 6, falls der Exponent gerade ist, und sie enden auf 4, falls der Exponent ungerade ist. Der Exponent
$$n = 444^{44^4}$$
ist eine gerade Zahl, da n selbst eine Potenz ist, deren Basis gerade ist. Also endet $z = 4444^{444^{44^4}}$ auf 6.

Aufgabe 281012:
Antje will alle diejenigen vierstelligen natürlichen Zahlen z ermitteln, die den folgenden Bedingungen (1), (2), (3) genügen:

(1) Die erste und die zweite Ziffer von z sind einander gleich.

(2) Die dritte und die vierte Ziffer von z sind einander gleich.

(3) Die Zahl z ist eine Quadratzahl.

Antje will diese Aufgabe lösen, ohne eine Zahlentafel, einen Taschenrechner oder einen anderen Rechner zu benutzen. Wie kann sie vorgehen?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

I Wenn z den geforderten Bedingungen genügt und a, b die erste bzw. dritte Ziffer von z sind, so folgt aus (1), (2): a und b sind natürliche Zahlen mit
$$1 \leq a \leq 9 \qquad , \qquad 0 \leq b \leq 9 \tag{4}$$
$$z = 1000a + 100a + 1ob + b = 11(100a + b) \tag{5}$$
Ferner gibt es nach (3) eine natürliche Zahl n mit $n^2 = z$, also $n^2 = 11(100a+b)$. Die Primzahl 11 ist also Teiler von n^2 und folglich auch Teiler von n; es gibt somit eine natürliche Zahl m mit $n = 11m$, also
$$11^2m^2 = 11(100a + b) \qquad ; \qquad 11m^2 = 100a + b \qquad ; \qquad 11(m^2 - 9a) = a + b \tag{6}$$
d. h., $a + b$ ist durch 11 teilbar. Da nach (4) aber $1 \leq a + b \leq 18$ gilt, ist dies nur mit
$$a + b = 11 \tag{7}$$
möglich. Damit führt (6) auf
$$11m^2 = 99a + 11 \qquad ; \qquad m^2 = 9a + 1 \tag{8}$$
Für $a = 1,...,9$ hat $9a + 1$ die Werte 10, 19, 28, 37, 46, 55, 64, 73, 82; danon ist nur der für $a = 7$ entstehende Wert 64 eine Quadratzahl, Daher und wegen (7), (5) können die Bedingungen der Aufgabe nur mit $a = 7, b = 4, z = 7744$ erfüllt werden.

II Die Zahl z erfüllt (1), (2) und wegen $88^2 = 7744$ auch (3).

Mit I. und II. ist bewiesen, dass genau die Zahl $z = 7744$ den Bedingungen der Aufgabe genügt.

Aufgabe 281014:
Wenn Frank große natürliche Zahlen auf ihre Teilbarkeit durch 7 untersucht, geht er folgendermaßen vor:

Von rechts beginnend teilt er die Zahl in Gruppen zu je drei Ziffern ein. (Damit auch die links stehende Gruppe aus drei Ziffern besteht, wird sie nötigenfalls durch Davorsetzen von einer oder zwei Ziffern 0 ergänzt.)

In jeder Gruppe addiert Frank zur rechts stehenden Ziffer das Dreifache der mittleren und das Doppelte der linken Ziffer. So erhält er *Gruppensummen*; diese versieht er (von rechts beginnend) abwechselnd mit den Vorzeichen + und −. Schließlich addiert er alle so abgewandelten *Gruppensummen* und erhält damit eine *Gesamtsumme*. Diese kann man leicht auf ihre Teilbarkeit durch 7 überprüfen.

1. Beispiel: Zu untersuchen sei die Zahl 45893127, in Gruppen 045 893 127.
Die Gruppe 127 hat die Gruppensumme $7 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 15$,
die Gruppe 893 hat die Gruppensumme $3 + 3 \cdot 9 + 2 \cdot 8 = 46$,
die Gruppe 045 hat die Gruppensumme $5 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 0 = 17$.

Als Gesamtsumme ergibt sich die Zahl $+15 - 46 + 17 = -14$; diese ist durch 7 teilbar.

2. Beispiel: Zu der Zahl 45693127 findet man entsprechend die Gesamtsumme $+15 - 42 + 17 = -10$; diese ist nicht durch 7 teilbar.

Frank sagt nun, bei seinem Verfahren gelte stets: Genau dann, wenn die *Gesamtsumme* durch 7 teilbar ist, ist es auch die ursprüngliche Zahl.
Beweisen Sie diese Aussage!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Bei der Zifferndarstellung einer natürlichen Zahl sind die Ziffern der Reihe nach (von rechts nach links) zu multiplizieren mit den Zehnerpotenzen $10^0, 10^1, 10^2, \ldots$ Das sind die Zahlen

$$\begin{aligned}
&10^0 && = 1\\
&10^1 && = 7+3\\
&10^2 = 70+30 = 7(10+4)+2 && = 7a+2 \text{ mit } a = 10+4\\
&10^3 = 70a+20 = 7(10a+3)-1 && = 7b-1 \text{ mit } b = 10a+3\\
&10^4 = 70b-10 = 7(10b-1)-3 && = 7c-3 \text{ mit } c = 10b-1\\
&10^5 = 70c-30 = 7(10c-4)-2 && = 7d-2 \text{ mit } d = 10c-4\\
&10^6 = 70d-20 = 7(10d-3)+1 && = 7e-1 \text{ mit } e = 10d-3\\
&\ldots
\end{aligned}$$

Anschließend wiederholen sich in der gleichen Reihenfolge die Darstellungen der Zehnerpotenzen als Sonne aus einem Vielfachen von 7 und einer (jeweils der nächsten) der Zahlen 1, 3, 2, -1, -3, -2, ...

Die zu untersuchende Zahl ist damit gleich der Summe aus einem Vielfachen von 7

und den Produkt der (von rechts gezählt) 1. Ziffer mit 1
und dem Produkt der (von rechts gezählt) 2. Ziffer mit 3 (*)
und dem Produkt der (von rechts gezählt) 3. Ziffer mit 2
und dem Produkt der (von rechts gezählt) 4. Ziffer mit -1
und dem Produkt der (von rechts gezählt) 5. Ziffer mit -3 (**)
und dem Produkt der (von rechts gezählt) 6. Ziffer mit -2 ...

Die Summe der hier genannten Produkte ist aber gerade die „Gesamtsumme“, wie man an der Gliederung in Dreiergruppen und dem dabei auftretenden Vorzeichenwechsel in (*), (**),... feststellt.

Da sich somit die zu untersuchende zahl von ihrer „Gesamtsumme“ nur um ein Vielfaches von 7 unterscheidet, erhält man, wie verlangt, die Aussage, dass die zu untersuchende Zahl genau dann durch 7 teilbar ist, wenn die „Gesamtsumme“ es ist.

Aufgabe 331016:
Bekanntlich gilt $2^{10} = 1024$.

Formulieren Sie ein Computerprogramm, mit dessen Hilfe man den kleinsten natürlichen Exponent $p > 10$ ermitteln kann, für den die Zahl $2p$ ebenfalls auf die Ziffern $\dots 024$ endet! Begründen Sie, dass das von Ihnen formulierte Programm diese Aufgabe löst!

Hinweis: Es ist zu beachten, dass für die im Rechenweg vorkommenden Zahlen bei weithin üblicher Computernutzung Einschränkungen der Stellenzahl auftreten.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Ein BASIC-Programm der geforderten Art ist zum Beispiel: 10 P = 10

```
20 Z = 24
30 P = P+1
40 Z = Z*2
50 IF Z > 999 THEN Z = Z-1000
60 IF Z <> 24 THEN GOTO 30
70 PRINT P
```

Zu Werten des Exponenten p werden die letzten drei Ziffern der Potenz 2^p in Gestalt einer ganzen Zahl z mit $0 \leq z \leq 999$ gebildet. Ausgehend nämlich von den Anfangswerten $p = 10, z = 024$ (Zeilen 10, 20) werden die nächsten Werte schrittweise gefunden:

In jedem Schritt wird p um 1 erhöht (Zeile 30) und z verdoppelt (Zeile 40) sowie, falls dabei zunächst ein nicht mehr dreistelliger Wert entstand, nur dessen drei Endziffern beibehalten. Hierzu genügt es, 1000 zu subtrahieren (Zeile 50); denn wenn für den Vorgängerwert z schon $0 \leq z < 1000$ galt, so ist der in Zeile 40 zunächst entstandene Wert $2 \cdot z < 2000$, und galt für ihn außerdem $1000 \leq 2 \cdot z$, so erfüllt der durch Subtraktion von 1000 entstehende Wert nun wieder $0 \leq 2 \cdot -1000 < 1000$.

Durch das schrittweise Reduzieren werden die vielstelligen Zahlen 2^p vermieden, wie es nach dem„Hinweis“ erforderlich ist.

Diese Schritte werden wiederholt, solange die Ziffernfolge $z = 024$ nicht nicht wieder erreicht wurde (Zeile 60). Andernfalls endet der Ablauf mit der Ausgabe des gesuchten Exponenten p (Zeile 70).

Das Ende muss erreicht werden (es tritt keine „Endlos-Schleife“ auf). Man kann diese Feststellung als Ergebnis eines „Probelaufs mit Risiko“ erhalten (und damit zugleich den gesuchten Exponenten $p = 110$ finden); man kann auch beweisen, dass für jedes $p \geq 3$ die Ziffernfolge der drei Endziffern von 2^p bei einem größeren p wiederkehren muss.

II Runde 2

Aufgabe 011025:
Gegeben ist die Zahl $9^{(9^9)}$.
a) Wieviel Ziffern hat diese Zahl etwa? (Auf vier geltende Ziffern runden.)
b) Wie lang müsste der Streifen sein, auf den man diese Zahl drucken wollte, wenn die Ziffernbreite 2 mm betragen würde?
c) Mit welcher Ziffer endet die gesuchte Zahl?

Lösung von Christiane Czech:
a) Die Anzahl der Ziffern ist gleich der kleinsten ganzen Zahl, die größer ist als

$$\log_{10} 9^{(9^9)} = 9^9 \cdot \log_{10} 9$$

Wegen $9^9 = 387420489$ und $\log_{10} 9 \approx 0{,}954243$ hat $9^{(9^9)}$ somit rund 369700000 Stellen.

b) So ein Streifen müsste ungefähr $369700000 \cdot 2$ mm $= 739400000$ mm $= 739{,}4$ km lang sein.

c) Da 9^9 eine ungerade Zahl ist, endet die Zahl wegen

$$9^{(9^9)} \equiv (-1)^{(9^9)} \equiv -1 \equiv 9 \pmod{10}$$

auf die Ziffer 9.

Aufgabe 071023:
Beweisen Sie, dass für jedes natürliche n, $n > 1$, die Zahl $2^{2^n} + 1$ mit der Ziffer 7 endet!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Für $n \geq 2$ gilt

$$2^{2^n} = 2^{4 \cdot 2^{n-2}} = 16^{2^{n-2}}$$

Da jede Potenz von 16 mit 6 endet, ist die letzte Ziffer von 2^{2^n} im Fall $n \geq 2$ stets die 6 und die von $2^{2^n} + 1$ demzufolge die 7.

Aufgabe 101021:
Beweisen Sie, dass jede mehrstellige natürliche Zahl größer ist als das aus ihren sämtlichen Ziffern gebildete Produkt!

Lösung von cyrix:
Sei n eine k-stellige Zahl ($k > 1$) mit führender Ziffer $z > 0$.
Dann ist einerseits $n \geq z \cdot 10^{k-1}$ und andererseits das Produkt ihrer Ziffern $\leq z \cdot 9^{k-1}$, also echt kleiner als n selbst, $\square$.

Aufgabe 121021:
Beweisen Sie den folgenden Satz!
Bildet man aus irgendeiner im dekadischen System geschriebenen natürlichen Zahl z_1 durch beliebiges Vertauschen ihrer Ziffern untereinander eine neue Zahl z_2, dann ist $|z_1 - z_2|$ stets durch 9 teilbar.

Lösung von Steffen Polster:
Es sei $z_1 = [a_1 a_2 ... a_n]$ eine o. B. d. A. n-stellige natürliche Zahl, wobei $[a_1 a_2 ... a_n]$ die Ziffernfolge im dekadischen System darstelle.

Mit $z_2 = [b_1 b_2 ... b_n]$ sei die Ziffernfolge von z_2 bezeichnet, wobei die b_i $(i = 1,2,...,n)$ eine beliebige Permutation der a_i $(i = 1,2,...,n)$ sind, d. h. für jedes a_i aus z_1 existiert ein b_j in z_2 $(i,j = 1,2,...,n)$.
Für die Differenz $z_1 - z_2$ sei die Ziffernfolge $[c_1 c_2 ... c_n]$, wobei auch $c_1 = 0$ auftreten kann.

Bei der ziffernweisen Subtraktion von z_1 und z_2 können zwei Möglichkeiten auftreten:

1. Für ein a_i und das entsprechende b_i aus z_2 gilt $a_i \geq b_i$. Das c_i in $z_1 - z_2$ ist dann gleich $c_i = a_i - b_i$.
2. Für ein a_i und das entsprechende b_i in z_2 gilt $a_i < b_i$. Bei der Subtraktion tritt damit ein Überlauf auf, d. h. das a_{i-1} wird um 1 gesenkt. Ist in diesem Fall $i = 1$ wird das Ergebnis insgesamt negativ. Für die Ziffer c_i ergibt sich $c_i = 10 - (b_i - a_i)$.

Die Zahl $|z_1 - z_2|$ ist genau dann durch 9 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist. Die Quersumme ist

$$Q = |c_1 + c_2 + c_3 + ... + c_n|$$

Nun wird sowohl in z_1 als auch die z_2 die Nummerierung der Ziffern geändert, ohne ihre tatsächliche Position zu verschieben.

Es seien dann genau $m \leq n$ Ziffern a_i die größer oder gleich den b_i sind. Für die $\{a_{m+1}, ..., a_n\}$ sei a_i kleiner als b_i. Für die Quersumme wird

$$Q = |(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + ... + (a_m - b_m) + (10 - (b_{m+1} - a_{m+1}) + ... + (10 - (b_n - a_n)) - (n - m)|$$

wobei der letzte Summand die Gesamtzahl der Überträge charakterisiert. Durch Umformen wird

$$= |(a_1 + ... + a_m) - (b_1 + ... + b_m) - (b_{m+1} + ... + b_n) + (a_{m+1} + ... + a_n) + 10(m - n) - (n - m)|$$
$$= |(a_1 + a_2 + ... + a_n) - (b_1 + b_2 + ... + n) + 9(m - n)|$$

Da es für jedes a_i $(i = 1,2,...,n)$ ein entsprechende Ziffer b_i in z_2 gibt, heben sich die Summen der a_i und b_i gegenseitig auf und die Quersumme wird zu $Q = |9(m - n)|$.
Diese ist offensichtlich durch 9 teilbar, so dass $|z_1 - z_2|$ durch 9 teilbar ist. w. z. b. w.

Aufgabe 131021:
Ermitteln Sie alle (im dekadischen Zahlensystem) dreistelligen Primzahlen mit folgenden Eigenschaften!
(1) Schreibt man jede Ziffer der dreistelligen Primzahl einzeln, so bezeichnet jede eine Primzahl.
(2) Die ersten beiden und die letzten beiden Ziffern der dreistelligen Primzahl bezeichnen (in dieser Reihenfolge) je eine zweistellige Primzahl.

Lösung von weird:
Da eine mehrstellige Primzahl nur auf 3 oder 7 enden kann, muss wegen (1) die Endziffer und wegen (2) auch die mittlere Ziffer in $\{3,7\}$ liegen. Die aus den beiden letzten Ziffern gebildete Zahl muss daher 37 oder 73 sein, da die beiden anderen Möglichkeiten 33 und 77 durch 11 teilbar sind, was der Bedingung (2) widerspricht.
Damit kommt aber auch für die erste Ziffer, die nach (1) in $\{2,3,5,7\}$ liegen muss nur mehr 3 oder 7 in Frage, da sonst die Ziffernsumme und damit auch die Zahl selbst durch 3 teilbar wäre.

Nach dem bisher Bewiesenen müssen also sämtliche Ziffern der Zahl in $\{3,7\}$ liegen, wobei niemals zwei aufeinanderfolgende Ziffern gleich sein können, da dies der Bedingung (2) widersprechen würde. Von den beiden dann nur noch verbleibenden Möglichkeiten 373 und 737 ist aber die 737 durch 11 teilbar und damit nicht prim, während 373 dann tatsächlich als einzige Zahl sämtliche Bedingungen hier erfüllt.

Aufgabe 141021:
Klaus überprüft während der Ferien seine Vokabelkenntnisse in Russisch. Als er unter den 2555 Wörtern, die er im Laufe der Zeit sorgfältig in sein Vokabelheft eingetragen hat, die Anzahl z_1 derjenigen Wörter ermittelt, die er noch beherrscht, und danach die Anzahl z_2 der übrigen Wörter, stellt er beim Aufschreiben dieser beiden Zahlen fest, dass $z_1 > z_2$ ist und dass er beim Aufschreiben genau zwei Ziffern verwendet hat, und zwar immer abwechselnd, wobei die an erster Stelle stehende Ziffer bei beiden Zahlen dieselbe ist.
Man ermittle z_1 und z_2!

Lösung von weird:
Bei der Addition der beiden Zahlen z_1 und z_2 kann bei ihrer Addition an keiner Stelle ein Übertrag stattgefunden haben, sonst wären etwa die Einer- und Zehnerstelle ihrer Summe 2555 nicht gleich.

Aus der Tatsache, dass genau die letzten 3 Stellen von 2555 gleich sind, können wir ferner schließen, dass z_1 vierstellig und z_2 dreistellig sein muss. Ist also die Dezimaldarstellung von z_1 von der Bauart $xyxy$, wobei x und y die beiden fraglichen alternierenden Ziffern sind, so muss die Dezimaldarstellung von z_2 dann von der Form xyx sein, wobei $x = 2$ und $x + y = 5$, also dann $y = 3$ gelten muss. Und tatsächlich erfüllen die beiden Zahlen $z_1 = 2323$ und $z_2 = 232$ alle Bedingungen der Angabe.

Aufgabe 171024:
Wenn eine natürliche Zahl $Z \neq 0$ im dekadischen System durch die Ziffernfolge $a_n a_{n-1} a_{n-2} ... a_1 a_0$ (mit $0 \leq a_i \leq 9$ für $i = 0, ..., n$ und mit $a_n \neq 0$) dargestellt ist, so bezeichnen wir als Quersumme $Q(Z)$ dieser Zahl Z die Summe

$$Q(Z) = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + ... + a_1 + a_0$$

und als Querprodukt $P(Z)$ dieser Zahl Z das Produkt

$$P(Z) = a_n \cdot a_{n-1} \cdot a_{n-2} \cdot ... \cdot a_1 \cdot a_0$$

Ermitteln Sie alle natürlichen Zahlen Z mit $0 < Z < 1000$, für die $Q(Z) + P(Z) = Z$ gilt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
1) Angenommen, für eine einstellige Zahl Z wäre (1) erfüllt. Dann folgte $a_0 + a_0 = a_0$ und damit $a_0 = 0$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

2) Wenn eine zweistellige Zahl die Eigenschaft (1) hat, so folgt

$$a_1 + a_0 + a_1 a_0 = 10a_1 + a_0 \Rightarrow a_1 a_0 = 9a_1$$

wegen $a_1 \neq 0$ also $a_0 = 9$.
Daher kann ein zweistellige Zahl Z nur dann die Bedingungen (1) erfüllen, wenn sie mir der Ziffer 9 endet. Für jede solche Zahl in der Tat

$$a_1 + a_0 + a_1 a_0 = a_1 + 0 - 9a_1 = 10a_1 + 9 = 10a_1 + a_0$$

also ist die Bedingung (1) erfüllt.

3) Angenommen, für eine dreistellige Zahl Z wäre (1) erfüllt. Dann folgte

$$a_2 + a_1 + a_0 + a_2 a_1 a_0 = 100a_2 + 10a_1 + a_0 \Rightarrow a_2 a_1 a_0 = 99a_2 + 9a_1$$

wegen $9 \geq a_0$ mithin $9a_1 a_2 \geq 99a_2 + 9a_1 \geq 99a_2$. Hieraus ergäbe sich wegen $a_2 > 0$ der Widerspruch $a_1 \geq 11$.

Damit erfüllen für $0 < Z < 1000$ genau die Zahlen 19, 29, 39, 49, 59, 69, 79, 89 und 99 die Bedingung (1).

Aufgabe 181023:
Beweisen Sie, dass die Summe der Quadrate zweier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen nicht durch 3 teilbar ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die erste der beiden Zahlen sei a. Dann ist die andere $a+1$, und für die Summe s ihrer Quadrate gilt

$$s = a^2 + (a+1)^2 = 2a^2 + 2a + 1 = 2a(a+1) + 1$$

Jede natürliche Zahl lässt bei Division durch 3 einen der Reste 0, 1 Oder 2.

Fall 1: a ist durch 3 teilbar.
Dann ist auch $2a(a+1)$ durch 3 teilbar, und s lässt bei Division durch 3 den Rest 1.

Fall 2: a lässt bei Division durch 3 den Rest 2.
Dann ist $a+1$ durch 3 teilbar; damit auch $2a(a+1)$, und somit lässt s bei Division durch 3 den Rest 1.

Fall 3: a lässt bei Division durch 3 den Rest 1.
Dann ist es mit einer natürlichen Zahl n in der Form $3n+1$ darstellbar. Man erhält mithin

$$s = 2(3n+1)\cdot(3n+2) + 1 = 2(9n^2 + 9n + 2) + 1 = 18n^2 + 18n + 5$$

und $18n^2 + 18n$ ist durch 3 teilbar, während 5 und somit auch s bei Division durch 3 den Rest 2 lässt.
Damit ist die Behauptung in jedem der möglichen Fälle bewiesen.

Alternativ-Lösung von cyrix:
Da Quadrate nur die Reste 0 oder 1 bei der Division durch 3 lassen können, ist die Summe zweier Quadratzahlen nur genau dann durch 3 teilbar, wenn es die beiden Basen auch schon waren. Dann können sie aber nicht aufeinander folgende natürliche Zahlen gewesen sein.

Aufgabe 191022:
Beweisen Sie die folgende Aussage!
Wenn die Summe dreier Quadratzahlen durch 9 teilbar ist, dann sind entweder alle drei Quadratzahlen durch 9 teilbar, oder genau zwei der Quadratzahlen ergeben bei Division durch 9 den gleichen Rest.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Ergibt eine natürliche Zahl bei Division durch 9 den Rest $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ bzw. 8, so ergibt ihr Quadrat jeweils den Rest $0, 1, 4, 0, 7, 7, 0, 4$ bzw. 1; d. h., für jede Quadratzahl ist der Rest, den sie bei Division durch 9 ergibt, eine der Zahlen 0, 1, 4, 7.
Wenn die Summe dreier Quadratzahlen durch 9 teilbar ist, so gilt das auch für die Summe der Reste, die diese Quadratzahlen jeweils bei Division durch 9 ergeben.

1. Fall: Einer der Reste ist 0.
Dann ist die Summe der beiden anderen Reste durch 9 teilbar. Alle Summen aus zwei Summanden, von denen jeder eine der Zahlen 0, 1, 4, 7 ist, sind aber

$$0+0=0; 0+1=1; 0+4=4; 0+7=7; 1+4=5; 1+7=8; 4+7=11$$

Daher verbleibt nur die Möglichkeit, dass auch die beiden anderen Reste 0 sind; d. h., es folgt: Alle drei Quadratzahlen sind durch 9 teilbar.

2., 3. und 4. Fall: Einer der Reste ist $\left\{\begin{matrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{matrix}\right\}$

Dann ergibt die Summe der beiden anderen Rest bei Division durch 9 den Rest $\left\{\begin{matrix} 8 \\ 5 \\ 2 \end{matrix}\right\}$. Hierfür verbleibt unter den Summen (1) nur die Möglichkeit, dass die beiden anderen Reste $\left\{\begin{matrix} 1 \text{ und } 7 \\ 1 \text{ und } 4 \\ 4 \text{ und } 7 \end{matrix}\right\}$ lauten. In jedem dieser Fälle ergeben also genau zwei der drei Quadratzahlen bei Division durch 9 den gleichen Rest. Damit ist für jeden möglichen Fall der verlangte Beweis geführt.

Aufgabe 241023:
Ermitteln Sie alle diejenigen natürlichen Zahlen z, für die folgendes gilt:
Streicht man aus der Zifferndarstellung von z die letzte Ziffer, so entsteht die Zifferndarstellung einer Zahl, die ein Teiler von z ist.

Lösung von Steffen Polster:
Entsprechend der Aufgabenstellung muss z mindestens zweistellig sein. Dann kann z dargestellt werden durch $z = 10a + b$, wobei $0 \leq b \leq 9$ und $a = \left[\frac{z}{10}\right]$ ist. Nach dem Streichen verbleibt als Zahl a.
D. h., damit a Teiler von z ist, muss

$$\frac{10a + b}{a} = 10 + \frac{b}{a}$$

ganzzahlig sein. Die ist genau dann möglich, wenn entweder $b = 0$ oder b ein Vielfaches von a ist. Da im Fall $b \neq 0$ b maximal 9 werden kann, gibt es nur für $1 \leq a \leq 9$ folgende Möglichkeiten

a	b	a	b	a	b	a	b
1	1,2,...,9	2	2,4,6,8	3	3,6,9	4	4, 8
5...9	jeweils $b = 2a$						

Damit sind folgende Zahlen z Lösung der Aufgabe:

1. alle auf 0 endenden natürlichen Zahl mit $z > 0$ und
2. $z \in \{11,12,13,14,15,16,17,18,19,22,24,26,28,33,36,39,44,48,55,66,77,88,99\}$

Aufgabe 261023:
Zahlen stellen wir gewöhnlich im dekadischen Positionssystem (unter Verwendung der Basis 10 und der Ziffern 0, 1, ..., 9) dar.
Man kann die Zahlen auch im dyadischen Positionssystem (oder Dualsystem) unter Verwendung der Basis 2 und der Ziffern 0 und 1 darstellen. Zur Unterscheidung sei diese dyadische Darstellung einer Zahl durch eckige Klammern und eine klein angehängte 2 gekennzeichnet.

a) Geben Sie für die Zahl 47 die dyadische Darstellung an!
Ermitteln Sie für die Zahl, deren Darstellung im dyadischen System $[110001]_2$ lautet, die Darstellung im dekadischen Positionssystem!

b) Eine natürliche Zahl heiße dekadische Spiegelzahl, wenn ihre dekadische Darstellung von rechts nach links gelesen dieselbe Ziffernfolge ergibt wie von links nach rechts gelesen.

Ermitteln Sie mindestens zwei natürliche Zahlen, die größer als 9 sind und die Eigenschaft haben, sowohl dekadische als auch dyadische Spiegelzahl zu sein!

Lösung von Steffen Polster:
a) Es ist

$$47 = 32 + 8 + 4 + 2 + 1 = 2^5 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = [101111]_2$$

Für $[110001]_2$ wird

$$[110001]_2 = 2^0 + 2^4 + 2^5 = 48$$

b) Systematisches Probieren der zweistelligen Spiegelzahlen 11, 22, ... liefert Zahlen, die gleichzeitig dekadische als auch dyadische Spiegelzahl sind:

$$33 = [100001]_2 \qquad ; \qquad 99 = [1100011]_2$$

Aufgabe 331021:
Untersuchen Sie, ob es eine vierstellige Quadratzahl q mit den nachstehenden Eigenschaften (1), (2) gibt! Wenn es sie gibt, ermitteln Sie alle derartigen Quadratzahlen!
(1) Alle vier Ziffern von q sind kleiner als 7.
(2) Vergrößert man jede Ziffer von q um 3, so ist die entstehende vierstellige Zahl ebenfalls eine Quadratzahl.

Lösung von cyrix:
Sei die in (2) entstehende Quadratzahl m^2 genannt und es gelte $n^2 = q$, wobei m und n positive ganze Zahlen seien.
Dann gilt $m^2 = n^2 + 3333$ bzw. $(m-n)(m+n) = m^2 - n^2 = 3333 = 3 \cdot 11 \cdot 101$. Da m^2 und n^2 vierstellig sind, gilt $30 < n < m < 100$, also $60 < m+n < 200$, sodass $m+n$ als Teiler von $3 \cdot 11 \cdot 101$ nur die Werte $3 \cdot 11 = 33$ und 101 annehmen kann.
Im ersten Fall wäre aber $m - n = 101 > m + n$, was ein Widerspruch zu $n > 0$ darstellt. Also ist $m + n = 101$ und $m - n = 33$, sodass $m = 67$ und $n = 34$ folgt.
Tatsächlich ist $q^2 = 34^2 = 1156$ und $m^2 = 67^2 = 4489 = 1156 + 3333$ und es werden auch alle Ziffernvorgaben erfüllt, sodass 1156 die einzige vierstellige Quadratzahl q ist, die (1) und (2) erfüllt.

Aufgabe 341023:
Jens-Uwe hat einige natürliche Zahlen quadriert, deren Zifferndarstellung (im dekadischen Positionssystem) nur aus Neunen besteht.
Er äußert zu seinem Freund anhand der Ergebnisse von $9^2, 99^2, 999^2$ die Vermutung, dass in solchen Ergebnissen niemals mehr als vier verschiedene Ziffern auftreten.
Dieser meint nach einigem Überlegen, er könne sogar für jedes einzelne Quadrat einer nur aus Neunen bestehenden Zahl (ohne solche Quadrate noch einzeln auszurechnen) die Fragen genau beantworten, welche Ziffern darin vorkommen und an welchen Stellen sie dort stehen.
Beantworten Sie diese Fragen und beweisen Sie ihre Antwort!

Lösung von Steffen Polster:
Eine im Dezimalsystem ausschließlich aus Ziffern 9 bestehende n-stellige Zahl ($n \geq 3$) hat die Darstellung $10^n - 1$. Es wird

$$(10^n - 1) \cdot (10^n - 1) = 10^{2n} - 2 \cdot 10^n + 1$$

Das Ergebnis ist damit eine $2n$-stellige Zahl, deren erste $(n-1)$ Ziffern '9' sind, gefolgt von einer '8', gefolgt von $(n-1)$ Ziffern '0' und einer '1'.
Ausnahmen ist $9^2 = 81$.

III Runde 3

Aufgabe V11033:
Fritz ermittelt als Ergebnis einer Divisionsaufgabe 57 Rest 52. Er macht die Probe und erhält 17380. Das ist falsch; denn er hatte die Zahlen undeutlich geschrieben und bei der Probe beim Divisor im Zehner eine 6 als 0 gelesen.
Wie heißt die Aufgabe? Wie haben Sie das Ergebnis gefunden?

Lösung von StrgAltEntf:
Die Divisionsaufgabe die Fritz gestellt wird, möge $\frac{a}{b}$ lauten. Fritz rechnet $a = 57 \cdot b + 52$, macht die Probe und erhält dabei $57 \cdot b' + 52 = 17380$ wobei sich der Faktor b' irrtümlich in der Zehnerstelle vom korrekten Wert b unterscheidet.

Es folgt dann $b' = \frac{17380-52}{57} = 304$. Laut Aufgabenstellung ergibt sich der wirkliche Wert b, indem die Zehnerstelle 0 von b' durch 6 ersetzt wird. Folglich ist $b = 364$, $a = 57 \cdot 364 + 52 = 20800$ und die Divisionsaufgabe, die Fritz gestellt wurde, lautet $\frac{20800}{364}$.

Aufgabe 011035:
Mit welcher Ziffer endet die Summe $11^6 + 12^6 + 13^6 + 14^6 + 15^6 + 16^6$?
Begründen Sie Ihre Aussage!

Lösung von Christiane Czech:
Es gilt:

$$\begin{aligned}
&11^6 \equiv 1^6 \equiv 1 \pmod{10},\\
&12^6 \equiv 2^6 \equiv 64 \equiv 4 \pmod{10},\\
&13^6 \equiv 3^6 \equiv 27 \cdot 27 \equiv 49 \equiv 9 \pmod{10},\\
&14^6 \equiv 4^6 \equiv 16^3 \equiv 6^3 \equiv 6 \pmod{10} \text{ (denn } 6 \cdot 6 \equiv 6 \pmod{10}\text{)},\\
&15^6 \equiv 5^6 \equiv 5 \pmod{10} \text{ (denn } 5 \cdot 5 \equiv 5 \pmod{10}\text{)},\\
&16^6 \equiv 6^6 \equiv 6 \pmod{10} \text{ (denn } 6 \cdot 6 \equiv 6 \pmod{10}\text{)}.
\end{aligned}$$

Damit ist $11^6 + 12^6 + 13^6 + 14^6 + 15^6 + 16^6 \equiv 1 + 4 + 9 + 6 + 5 + 6 \equiv 1 \pmod{10}$.

Alternativ-Lösung von weird:
Es gilt

$$11^6 + 12^6 + 13^6 + 14^6 + 15^6 + 16^6 \equiv 1^6 + 2^6 + (-2)^6 + (-1)^6 + 0^6 + 1^6 = 131 \equiv 1 \pmod 5$$

Von den beiden dann nur mehr möglichen Endziffern 1 bzw. 6 kommt aber nur die 1 in Frage, da die fragliche Summe eine ungerade Anzahl von ungeraden Summanden enthält und somit selbst ungerade ist.

Aufgabe 041035:
Ist die folgende Aussage richtig? Für alle ganzen Zahlen a und b gilt: Wenn $a^2 + b^2$ durch 3 teilbar ist, dann sind auch a und b durch 3 teilbar.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn a nicht durch 3 teilbar ist, hat a die Gestalt $3n + 1$ oder $3n + 2$.
Durch Quadrieren der Gleichungen sehen wir, dass a^2 dann in beiden Fällen die Gestalt $3m + 1$ hat ($m = 9n^2 + 6n$ oder $m = 9n^2 + 12n$).

Wenn a und b beide nicht durch 3 teilbar sind, hat $a^2 + b^2$ die Gestalt $3N + 2$. Wenn a durch 3 teilbar und b nicht durch 3 teilbar ist, hat $a^2 + b^2$ die Gestalt $3N + 1$.
In beiden Fällen ist $a^2 + b^2$ nicht durch 3 teilbar. Also folgt aus „$a^2 + b^2$ durch 3 teilbar“ bereits, dass a und b durch 3 teilbar sind.

Alternativ-Lösung von cyrix:
Quadratzahlen lassen bei der Division durch 3 nur die Reste 0 – wenn die Basis selbst durch 3 teilbar ist – bzw. 1 – sonst.
Wären aso nicht sowohl a als auch b durch 3 teilbar, so könnte die Summe $a^2 + b^2$ nur die Reste $0 + 1 = 1 + 0 = 1$ bzw. $1 + 1 = 2$ bei Division durch 3 annehmen, nicht aber durch 3 teilbar sein. Dementsprechend ist die Aussage aus der Aufgabenstelung korrekt.

Aufgabe 051031:
Weisen Sie nach, dass alle Zahlen

$$1331; 1030301; 1003003001; ...; 1\underbrace{00...00}_{\text{k Nullen}}3\underbrace{00...00}_{\text{k Nullen}}3\underbrace{00...00}_{\text{k Nullen}}1$$

Kubikzahlen sind!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es ist

$$1331 = 1 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 1 = (10 + 1)^3$$
$$1030301 = 1 \cdot 10^6 + 3 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^2 + 1 = (10^2 + 1)^3$$
$$1003003001 = 1 \cdot 10^9 + 3 \cdot 10^6 + 3 \cdot 10^3 + 1 = (103 + 1)^3$$

Folgen bei einer Zahl in der angegebenen Weise jeweils k Nullen direkt aufeinander, so erhält man

$$1 \cdot 10^{3(k+1)} + 3 \cdot 10^{2(k+1)} + 3 \cdot 10^{k+1} + 1 = (10^{k+1} + 1)^3$$

Also ist die angegebene Zahl eine Kubikzahl.

Aufgabe 091031:
Geben Sie alle durch 11 teilbaren natürlichen dreistelligen Zahlen an, die bei Division durch 5 den Rest 1 und bei der Division durch 7 den Rest 3 ergeben!

Lösung von cyrix:
Sei n eine solche Zahl. Dann ist mit n auch $n - 66 = n - 11 \cdot 6$ durch 11 teilbar. Wenn n den Rest 1 bei der Division durch 5 lässt, dann ist $n - 66 = (n - 1) - 5 \cdot 13$ auch durch 5 teilbar. Und schließlich: Wenn n bei der Division durch 7 den Rest 3 lässt, ist $n - 66 = (n - 3) - 7 \cdot 9$ auch durch 7 teilbar.

Da 5, 7 und 11 paarweise teilerfremd sind, ist $n - 66$ also sogar durch das Produkt $5 \cdot 7 \cdot 11 = 385$ teilbar, sodass man für n die Darstellung $n = 385 \cdot k + 66$ mit einer nicht-negativen ganzen Zahl k erhält.
Offenbar ist für $k \geq 3$ auch $n > 1000$, also nicht mehr dreistellig (und für $k = 0$ nur zweistellig), sodass man genau folgende beiden Lösungen erhält:
$n_1 = 385 \cdot 1 + 66 = 451$ und $n_2 = 385 \cdot 2 + 66 = 836$.

Aufgabe 111032:
Ermitteln Sie alle geordneten Paare $(x; y)$ jeweils zweistelliger natürlicher Zahlen x und y mit $x > y$, für die folgendes gilt:
a) Schreibt man die Ziffern der Zahl x in umgekehrter Reihenfolge, so erhält man die Zahl y.
b) Schreibt man die Ziffern der Zahl x^2 in umgekehrter Reihenfolge, so erhält man die Zahl y^2.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, es gäbe ein Zahlenpaar (x, y), das den Bedingungen a) und b) genügt. Setzt man $x = 10a+b$ (mit a, b natürlich und $1 \leq a \leq 9$, $1 \leq b \leq 9$), denn folgt $y = 10b + a$, und wegen $x > y$ auch $a > b$. Wegen $a \neq 0, b \neq 0$ und $a > b$ ist $2 \leq a \leq 9$ und $1 \leq b \leq 8$.
Das Quadrat der zweistelligen Zahl x ist entweder dreistellig oder vierstellig. Wir betrachten zunächst die Fälle, in denen x^2 dreistellig ist. Wegen $40^2 > 1000$ ist dann $a \leq 3$.
Da auch $32^2 = 1024$ bereits vierstellig ist, können höchstens die Zahlen 21 bzw. 31 die Bedingungen erfüllen. Tatsächlich gilt

$$21^2 = 441 \quad \text{und} \quad 12^2 = 144 \qquad \text{sowie} \qquad 21^2 = 961 \quad \text{und} \quad 13^2 = 169$$

Also erfüllen die Paare $(21, 12)$ und $(31, 13)$ die Bedingungen a) und b).
Angenommen nun, die Bedingungen der Aufgabe seien mit einer Zahl x erfüllbar, deren Quadrat x^2 vierstellig ist. Dann gilt für die Ziffern a,b dieser Zahl

$$(3) \quad (10a + b)^2 = 1000c + 100d + 10e + f \qquad \text{sowie} \qquad (4) \quad (10b + a)^2 = 1000f + 100e + 10d + c$$

(mit c, d, e, f natürlich und $0 \leq c,d,e,f \leq 9$; $c, f \neq 0$). Aus (3) und (4) folgt

$$100a^2 + 20ab + b^2 = 1000c + 100d + 10e + f \qquad ; \qquad a^2 + 20ab + b^2 = c + 10d + 100e + 1000f$$

Durch Subtraktion erhält man

$$99a^2 - 99b^2 = 999c + 90d - 90e - 999f \qquad \text{also}$$

$$(5) \quad 11(a^2 - b^2) = 111c + 10d - 10e - 111f$$

Da die linke Seite von (5) durch 11 teilbar ist, muss es auch die rechte Seite sein.
Addiert man zu $111c+10d-10e-111f$ die durch 11 teilbar Zahle $1111f+110e-110c$, dann erhält man $1000f + 100e + 10d + c = (10b + a)^2$, und auch diese Zahl muss durch 11 teilbar sein.
Daher muss schließlich $11|(10b+a)$ gelten, was wegen $a \neq b$ nicht der Fall ist. Dieser Widerspruch beweist, dass es für vierstellige Zahlen x^2 kein derartiges Zahlenpaar (x, x) gibt.

Aufgabe 131034:
Man beweise: Wenn die Summe dreier Kubikzahlen durch 7 teilbar ist, dann ist wenigstens eine von ihnen durch 7 teilbar.

Lösung von cyrix:
Wegen $(\pm 1)^3 \equiv \pm 1 \pmod 7$, $(\pm 2)^3 \equiv \pm 8 \equiv \pm 1 \pmod 7$ und $(\pm 3)^3 \equiv \pm 27 \equiv \pm 1 \pmod 7$ lassen die Kuben von nicht durch 7 teilbaren Zahlen bei der Teilung durch 7 nur die Reste 1 oder -1.

Bildet man nun von drei solchen Zahlen die Summe, so kann diese nur die Reste ± 1 oder ± 3 bei der Teilung durch 7, nicht aber 0 annehmen, sodass umgekehrt gelten muss, dass, wenn die Summe dreier Kuben durch 7 teilbar ist, nicht alle Basen (und damit auch nicht alle Kuben) nicht durch 7 teilbar sein können.
Es muss demnach dann mindestens eine Basis (und damit auch ihre zugehörige Kubikzahl) durch 7 teilbar sein.

Bemerkung: Man kann diese Lösung auch ohne Verwendung von Kongruenzbetrachtungen formulieren, indem man die Zahlen $(7k \pm 1)^3$, $(7k \pm 2)^3$ und $(7k \pm 3)^3$ per binomischen Satz explizit ausrechnet und an diesen Termen die Reste, die sie bei der Teilung durch 7 lassen, direkt abliest.

Aufgabe 141035:
Man gebe alle natürlichen Zahlen n mit $n < 40$ an, für die die Zahl $n^2 + 6n - 187$ ohne Rest durch 19 teilbar ist!

Lösung von weird:
Wegen $-187 \equiv 3 \pmod{19}$ geht es hier als um die Auflösung der quadratischen Kongruenz

$$n^2 + 6n + 3 \equiv 0$$

oder nach der einfachen Umformung

$$(n+3)^2 \equiv 6 \pmod{19} \tag{*}$$

dann im Folgenden eigentlich nur mehr um die Frage, ob 6 ein quadratischer Rest mod 19 oder nicht, und falls ja, wie man die beiden Wurzeln aus 6 mod 19 bestimmt.

Aus der Theorie der quadratischen Reste weiß man nun, dass die Lösungen einer Kongruenz $x^2 \equiv a \pmod{p}$ für eine Primzahl $p \equiv 3 \pmod{4}$ die Gestalt $x \equiv \pm a^{(p+1)/4} \pmod{p}$ haben müssen, falls a quadratischer Rest modulo p ist.
In unserem Fall hier ist $6^5 \equiv 5 \pmod{19}$, und ja, $x \equiv \pm 5 \pmod{19}$ sind tatsächlich Lösungen von $x^2 \equiv 6 \pmod{19}$, was dann auch sofort auf die beiden Lösungen $n \equiv 2 \pmod{19}$ und $n \equiv 11 \pmod{19}$ der Kongruenz (*) führt. Auf die ursprüngliche Frage bezogen heißt das, dass genau die Zahlen $n \in \{2,11,21,30\}$ die Aufgabe hier lösen.

Alternativ-Lösung von cyrix:
Mit $n^2+6n-187$ ist auch $n^2+6n-187+9\cdot 19 = n^2+6n-16 = (n-2)(n+8)$ durch 19 teilbar. Da 19 eine Primzahl ist, muss einer der beiden Faktoren durch 19 teilbar sein. Also kommen im zu betrachtenden Intervall für n nur die natürlichen Zahlen 2 und 21 (im ersten Fall) sowie 11 und 30 (im zweiten) in Frage. Die Probe bestätigt, dass dies auch alles Lösungen sind.

Aufgabe 151035:
Ermitteln Sie alle diejenigen natürlichen Zahlen $n \geq 2$ und alle diejenigen natürlichen Zahlen $x > 0$, für die folgendes gilt!
Im Ziffernsystem mit der Basis n ist x eine zweistellige Zahl, und durch Vertauschen ihrer Ziffern erhält man das Doppelte von x.
(Dabei sollen wie üblich für positive Zahlen nur solche Zifferndarstellungen zugelassen sein, die nicht mit 0 beginnen.)

Lösung von Nuramon:
x habe die Zifferndarstellung $x = ab$; $1 \leq a,b < n$ zur Basis n. Dann gilt

$$b\cdot n + a = 2(a\cdot n + b) \iff b(n-2) = a(2n-1) \iff b = 2a + \frac{3a}{n-2}\ .$$

Damit $\frac{3a}{n-2}$ ganz ist, muss es ein $l \in \mathbb{Z}$ geben mit $3a = l(n-2)$. Da $a > 0$ ist, folgern wir $l \geq 1$ (und $n \neq 2$). Dann ist $b = l + \frac{2l(n-2)}{3}$. Da $b \leq n-1$, folgt

$$l = \frac{b}{1+\frac{2(n-2)}{3}} \leq \frac{n-1}{1+\frac{2(n-2)}{3}} = \frac{3n-3}{2n-1} < \frac{3n-3}{2n-2} = \frac{3}{2} < 2.$$

Also ist $1 \leq l < 2$ und somit folgt $l = 1$.
Folglich ist $a = \frac{n-2}{3}$; $n-2$ durch 3 teilbar und $b = 2a + \frac{3a}{n-2} = 2a+1$. Daher erhalten wir für jedes $k \in \mathbb{N}$; $k > 0$ mit $n = 3k+2$, $a = k$, $b = 2k+1$ und $x = an+b = 3k^2+4k+1$ genau eine Lösung.

Aufgabe 251034:
Von einer natürlichen Zahl x wird gefordert, dass sie die folgenden Bedingungen (1) bis (5) erfüllt:
(1) Die Zahl x hat, im Zweiersystem (System mit der Basis 2) geschrieben, genau zehn Stellen.
(2) Schreibt man x im Dreiersystem, so steht an der zweiten Stelle die Ziffer 1.

(3) Schreibt man x im Vierersystem, so steht an der zweiten Stelle die Ziffer 0.
(4) Die Zahl x hat, im Fünfersystem geschrieben, genau vier Stellen.
(5) Schreibt man x im Zehnersystem, so steht an der letzten Stelle die Ziffer 2.
Beweisen Sie, dass es genau eine natürliche Zahl x gibt, die diese Bedingungen erfüllt, und ermitteln Sie diese Zahl!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn eine natürliche Zahl x die Bedingungen (1) bis (5) erfüllt, so folgt:
Wegen (1) und 84) ist $2^9 \leq x$ und $x < 5^4$, d. h.

$$512 \leq x \leq 625 \tag{6}$$

Unter Beachtung von $2 \cdot 3^5 = 586$ und $3^6 = 729$ ergibt sich aus (6), dass x im Dreiersystem genau sechs Stellen hat, wobei an der ersten Stelle die Ziffer 2 steht. Wegen (2) ist somit $x \geq 2 \cdot 3^5 + 1 \cdot 3^4$, d. h.

$$567 \leq x \tag{7}$$

Unter Beachtung von $2 \cdot 4^4 = 512$ und $3 \cdot 4^4 = 768$ ergibt sich aus (6), dass x im Vierersystem genau fünf Stellen hat, wobei an der ersten Stelle die Ziffer 2 steht. Wegen (3) ist somit $x < 2 \cdot 4^4 + 1 \cdot 4^3$, d. h.

$$x < 576 \tag{8}$$

Die Bedingungen (7), (8) und (5) werden nur von $x = 572$ erfüllt. Daher kann nur diese Zahl den Bedingungen (1) bis (5) genügen.

II. Sie genügt diesen Bedingungen; denn sie hat folgende Darstellungen:
Zweiersystem: 1000111100 (10 Stellen)
Dreiersystem: 210012 (Ziffer 1 an der zweiten Stelle)
Vierersystem: 20330 (Ziffer 0 an der zweiten Stelle)
Fünfersystem: 4242 (4 Stellen)
Zehnersystem: 572 (Ziffer 2 an der letzten Stelle)

Mit I. und II. ist der geforderte Beweis erbracht; die zu ermittelnde Zahl ist $x = 572$.

Aufgabe 261031:
Von einer natürlichen Zahl x sollen folgende Bedingungen erfüllt werden:
(1) Im Zweiersystem geschrieben hat x genau sieben Stellen.
(2) Schreibt man x im Dreiersystem, so tritt keine Ziffer mehr als zweimal auf.
(3) Im Fünfersystem geschrieben hat x genau vier Stellen.
Beweisen Sie, dass es genau eine natürliche Zahl x gibt, die diese Bedingungen erfüllt, und geben Sie diese Zahl an!

Lösung von Steffen Polster:
Eine Zahl, die im Zweiersystem siebenstellig ist, ist mindestens $[1000000]_2 = 64$ und höchstens $[1111111]_2 = 127$.
Eine Zahl, die im Fünfersystem vierstellig ist, ist mindestens $[1000]_5 = 5^3 = 125$ und höchstens $[1111]_5 = 5^3 + 5^2 + 5^1 + 5^0 = 624$.
Da (1) und (3) gleichzeitig gelten sollen, kann die gesuchte Zahl nur 125, 126 oder 127 sein. Für diese 3 Zahlen ermittelt man die Darstellung im Dreiersystem

$$125 = [11122]_3 \qquad ; \qquad 126 = [11200]_3 \qquad ; \qquad 127 = [11201]_3$$

Entsprechend (2) ist die gesuchte Zahl 126.

Aufgabe 271031:
Ermitteln Sie die Anzahl aller derjenigen Paare $(x;y)$, die die folgenden Bedingungen (1) bis (4) erfüllen!
(1) x und y sind dreistellige natürliche Zahlen.
(2) Die drei Ziffern von x sind sämtlich voneinander verschieden.
(3) Die drei Ziffern von x sind auch die drei Ziffern von y, nur in anderer Reihenfolge.
(4) Es gilt $x - y = 45$.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Bedingungen (1) bis (4) sind genau dann erfüllt, wenn als Ziffern von x drei natürliche Zahlen a,b,c auftreten, für die folgendes gilt: Es ist

$$1 \leq a \leq 9, \quad 0 \leq b \leq 9, \quad 0 \leq c \leq 9, \quad a \neq b, \quad a \neq c, \quad b \neq c \tag{5}$$

und die Bedingung (4) wird erfüllt durch die Zahl $x = 100a + 10b + c$ und diejenige Zahl y, für die genau einer der folgenden Fälle I bis V vorliegt:

(I) Es gilt $y = 100a + 10c + b$

(II) Es gilt $y = 100b + 10a + c$ und außer (5) auch $b \neq 0$. (6)

(III) Es gilt $y = 100b + 10c + a$ und außer (5) auch (6).

(IV) Es gilt $y = 100c + 10a + b$ und außer (5) auch $c \neq 0$. (7)

(V) Es gilt $y = 100c + 10b + a$ und außer (5) auch (7).

Im Fall I ist (4) wegen $x - y = 9(b - c9$ äquivalent mit $b - c = 5$, was unter den Bedingungen (5) genau durch

$$(b;c) = (5;0), (6;1), (7{,}2), (8;3), (9;4)$$

erfüllt wird, jeweils zusammen mit denjenigen der Zahlen $a = 1,...,9$, die auch $a \neq b$ und $aneqc$ erfüllen. Für jede der 9 Zahlen $a = 1,...,9$ verbleiben damit genau 4 Paare $(b;c)$.

Im Fall II ist (4) wegen $x - y = 90(a - b)$ nicht erfüllbar, da 45 kein Vielfaches von 90 ist.

Im Fall III ist (4) wegen $x - y = 9(11a - 10b - c)$ äquivalent mit $11a - 10b - c = 5$ und dies mit $11a - 5 = 10b + c$.

Wegen (5), (6) scheiden hierfür die Werte $a \geq 5$ aus; denn für diese Werte würde sich bei Berechnung von $11a - 5$ eine zweistellige Zahl mit der Zehnerziffer a und damit der Widerspruch $a = b$ ergeben. Ferner scheidet $a = 1$ aus, denn hierfür würde $11a - 5$ eine einstellige Zahl.
Die verbleibenden Werte $a = 2,3,4$ erfüllen wegen $11a - 5 = 17, 28, 39$ jeweils zusammen genau mit

$$(b;c) = (1;7), (2;8), (3;9)$$

alle Bedingungen (5), (6). Also werden (1) bis (4) im Fall III durch genau 3 Paare $(x;y)$ erfüllt.

Im Fall IV ist (4) wegen $x - y = 9(10a + b - 11c)$ äquivalent mit $10a + b - 11c = 5$ und dies mit $11c + 5 = 10a + b$.
Wegen (5), (7) scheiden hierfür die Werte $c \leq 4$ und der Wert $c = 9$ aus, den $c = 0$ erfüllt nicht (7), und für $1 \leq c \leq 4$ bzw. $c = 9$ würde sich $11c + 5$ als zweistellige Zahl mit der Zehnerziffer $a = c$ bzw. als dreistellige Zahl ergeben.
Die verbleibenden Werte $c = 5,6,7,8$ erfüllen wegen $11c + 5 = 60, 71, 82, 93$ jeweils zusammen genau mit

$$(a;b) = (6;0), (7;1), (8;2), (9;3)$$

alle Bedingungen (5), (7). Also werden (1) bis (4) im Fall IV durch genau 4 Paare $(x;y)$ erfüllt.

Im Fall V ist (4) wegen $x - y = 99(a - c)$ nicht erfüllbar, da 45 kein Vielfaches von 99 ist.
Als gesuchte Anzahl aller Paare $(x; y)$, die (1) bis (4) erfüllen, ergibt sich somit $36 + 3 + 4 = 43$.

Aufgabe 281031:
Für jede natürliche Zahl n werde ihre Zifferndarstellung mit der Basis 2 (Darstellung als Dualzahl), ferner ihre Zifferndarstellung mit der Basis 3 usw. ..., schließlich ihre Zifferndarstellung mit der Basis 10 (Darstellung als Dezimalzahl) betrachtet.
Wenn es natürliche Zahlen $n > 1$ gibt, bei denen in jeder dieser Zifferndarstellungen (mit den Basen 2, 3, 4, ..., 10) die letzte Ziffer (Einerziffer) eine 1 ist, so ermittle man die kleinste derartige natürliche Zahl n.

Lösung von Steffen Polster:
Damit die gesuchte Zahl n in jedem Stellenwertsystem zu den Basen 2 bis 10 an letzter Stelle eine Ziffer 1 hat, muss n bei Division durch 2, 3, 4, ..., 10 stets den Rest 1 lassen.
Es muss $n - 1 > 0$ durch $2,3,4,\dots,10$ teilbar sein. Per Definition ist also $n - 1$ das kleinste gemeinsame Vielfache von $2,3,\dots,10$, also ist $n - 1 = 8 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 7 = 2520$. Die gesuchte Zahl ist $n = 2521$.

Aufgabe 281036:
Beweisen Sie die folgende Aussage!
Für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ gibt es eine $(n+2)$-stellige natürliche Zahl, die mit genau n Ziffern 3, genau einer Ziffer 4 und genau einer Ziffer 6 in geeigneter Reihenfolge geschrieben wird und durch 7 teilbar ist.
Hinweis:
Die Verwendung eines - nicht programmierbaren - Taschenrechners ist gestattet.

Lösung von Steffen Polster:
Durch Kontrolldivisionen mit dem Taschenrechner findet man schnell, dass die kleinste nur aus Ziffern 3 bestehende natürliche Zahl, die durch 7 teilbar ist, die $333333 = 3^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37$ ist.
Für $1 \leq n \leq 6$ kann man durch schrittweises Permutieren der $(n-2)$ Ziffern 3 und der einen 4 sowie der einen 6 durch Testdivisionen die gesuchte Zahl z_n ermitteln:

n	z_n	n	z_n
1	$364 = 2^2 \cdot 6 \cdot 13$	2	$3346 = 2 \cdot 7 \cdot 239$
3	$34363 = 7 \cdot 4909$	4	$343336 = 2^3 \cdot 7 \cdot 6131$
5	$3333463 = 7 \cdot 29 \cdot 16421$	6	$33334336 = 2^6 \cdot 7 \cdot 37 \cdot 2011$

Für $n > 6$ ergibt sich das gesuchte z_n durch gegebenenfalls wiederholtes Anfügen der Ziffern „333333“ an die Ziffernfolge von $z_{n \pmod 7}$, bis die gesuchte Länge der Zahl z_n erreicht wird; wobei hier unter z_0 die leere Ziffernfolge verstanden wird.

Aufgabe 301031:
Beim Umrechnen natürlicher Zahlen aus dem Dezimalsystem in Systeme mit anderer Basis kann man feststellen, dass es Zahlen gibt, deren Darstellung sowohl im System mit der Basis 2 als auch im System mit der Basis 4 auf die Ziffernfolge ...01 endet; z. B. hat $17 = [10001]_2 = [101]_4$ diese Eigenschaft.
Gibt es auch natürliche Zahlen, deren Darstellung in beiden Systemen (sowohl mit der Basis 2 als auch mit der Basis 4) auf die Ziffernfolge ...10 endet?

Lösung von cyrix:
Nein, gibt es nicht: Eine Zahl, die im Zweiersystem auf die Ziffern 10 endet, ist durch 2 teilbar (da letzte

Ziffer 0), nicht aber durch $2^2 = 4$ (da die vorletzte Ziffer nicht auch 0 ist); eine Zahl, die im Vierersystem auf 0 endet, ist aber durch 4 teilbar, sodass nicht beide Darstellungen für die gleiche Zahl möglich sind.

Aufgabe 321035:
Beweisen Sie, dass für jede natürliche Zahl k mit $k > 1$ die folgende Aussage gilt:
Wenn die im Positionssystem der Basis k mit genau n Ziffern 1 geschriebene Zahl 11...1 eine Primzahl ist, dann ist n eine Primzahl.

Lösung von cyrix:
Es sei z die aus n Ziffern 1 bestehende Zahl. Dann ist $z = \frac{k^n-1}{k-1}$. Wir nehmen nun indirekt an, dass z eine Primzahl, aber n keine ist und führen dies zum Widerspruch:

Da z eine Primzahl ist, ist insbesondere $z > 1$, also $n > 1$. Da n keine Primzahl ist, existieren dann zwei natürliche Zahlen $a,b > 1$ mit $n = a \cdot b$. Insbesondere ist dann $k^a - 1$ ein Teiler von $(k^a)^b - 1 = k^{ab} - 1 = k^n - 1$, wie man leicht durch Berechnen der geometrischen Summe

$$\sum_{i=0}^{b-1} (k^a)^i = \frac{k^{ab} - 1}{k^a - 1}$$

oder Polynomdivision bestätigt. Damit existiert eine natürliche Zahl q mit $k^n - 1 = q \cdot (k^a - 1)$. Wegen $1 < a < n$ ist auch $k - 1 < k^a - 1 < k^n - 1$, also auch $1 < q < k^n - 1$.

Es ist analog $k-1|k^a-1$, sodass eine natürliche Zahl $r > 1$ (wegen $k^a - 1 > k - 1$) mit $k^a - 1 = r \cdot (k - 1)$ gibt.

Zusammen ist also

$$z = \frac{k^n - 1}{k - 1} = \frac{(k^a - 1) \cdot q}{k - 1} = \frac{(r \cdot (k - 1)) \cdot q}{k - 1} = r \cdot q$$

wobei q und r beides natürliche Zahlen größer als 1 sind. Damit ist aber z entgegen der Annahme keine Primzahl, sodass wir den gewünschten Widerspruch erhalten und n also auch eine Primzahl gewesen sein muss, $\square$.

Aufgabe 331032:
Für jede positive ganze Zahl n denke man sich nach folgender Vorschrift eine weitere Zahl n' gebildet:
Aus der Zifferndarstellung von n im Dezimalsystem wird die erste Ziffer weggenommen und statt dessen hinter die letzte Ziffer angefügt. Dann sei n' die Zahl mit der entstandenen Zifferndarstellung.
(Bei dieser Zifferndarstellung von n' wird auch die Möglichkeit einer Anfangsziffer Null zugelassen, wenn nämlich die zweite Ziffer von n eine Null war.)
Untersuchen Sie, ob es durch 7 teilbare Zahlen n gibt, für die $n' = n : 7$ gilt!
Ermitteln Sie, wenn es solche Zahlen gibt, die kleinste unter ihnen!

Lösung von ochen:
Es gibt solche Zahlen n, die kleinste unter ihnen ist

$$n = 10^{21} + \frac{10^{21} - 7}{69}.$$

Sei $1 \leq a < 10$ die erste Ziffer von n und $0 \leq b < 10^k$ die ganze Zahl, die aus den restlichen Ziffern von n gebildete Zahl. Weiter sei $k + 1$ die Anzahl der Ziffern von n, so sind $n = 10^k a + b$ und $n' = 10b + a$. Aus $n' = n : 7$ folgt

$$10^k a + b = 7(10b + a)$$

Wenn wir alle Terme mit a auf die linke Seite und alle Terme mit b auf die rechte Seite bringen, erhalten wir

$$(10^k - 7)a = 69b$$

Da die rechte Seite der Gleichung durch 23 teilbar ist, muss dies auch für die linke gelten. Da 23 eine Primzahl ist und $a < 10$ ist, muss $10^k - 7$ durch 23 teilbar sein. Tatsächlich ist $10^k - 7$ für $k = 21$ durch 23 teilbar und für $0 < k < 21$ nicht durch 23 teilbar. Somit ist gezeigt, dass $k \geq 21$ gelten muss. Mehr noch ist $10^{21} - 7$ sogar durch 69 teilbar.

Die Wahl von $a = 1$, $b = \frac{10^{21}-7}{69}$ und $k = 21$ erfüllt unsere Eigenschaften, insbesondere $a \geq 1$ und $b < 10^{21}$. Weiterhin wird n für diese Wahl minimal, da $k \geq 21$ und $a \geq 1$ gelten muss und $b = \frac{10^{21}-7}{69}$ für $k = 21$ und $a = 1$ gilt.

Sei r_k der Rest von 10^k bei der Division durch 23, so gilt

$$r_{k+1} = 10 r_k \bmod 23, \quad r_0 = 1.$$

Wir ermitteln die Reste also rekursiv. Falls wir ein k mit $r_k = 7$ gefunden haben, hören wir auf. Falls wir kein solches k gefunden hätten, hören wir bei $k = 22$ auf, da dann auch keines mehr vorkommen kann.

Aufgabe 341031:
Beweisen Sie, dass es keine natürliche Zahl n gibt, für die die Zifferndarstellung der Zahl $9^n + 1$ auf mehr als eine Null enden würde!

Lösung von cyrix:
Würde $9^n + 1$ auf mindestens zwei Nullen Enden, so wäre es durch 4 teilbar. Es ist aber $9^n - 1 = 9^n - 1^n$ durch $9 - 1 = 8$, also insbesondere durch 4 teilbar, sodass $9^n + 1 = (9^n - 1) + 2$ nie durch 4 teilbar sein kann, $\square$.

IV Runde 4

Aufgabe 071041:
Welchen Rest lässt eine natürliche Zahl a bei der Division durch 73, wenn die Zahlen $a^{100} - 2$ und $a^{101} - 69$ durch 73 teilbar sind!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn a eine solche natürliche Zahl ist, dass $a^{100} - 2$ und $a^{101} - 69$ durch 73 teilbar sind, dann folgt einerseits die Teilbarkeit von $a^{101} - 2a$ durch 73, also die Existenz einer ganzen Zahl r mit $a^{101} - 2a = 73r$ und andererseits die Existenz einer ganzen Zahl s mit $a^{101} - 69 = 73s$.
Daraus folgt $2a - 69 = 73(s - r)$, also die Existenz einer ganzen Zahl t mit

$$2a = 69 + 73t \to 2a = 69 + 73 + 73(t - 1) \to 2a = 142 + 73(t - 1)$$

Da $2a - 69$ ungerade ist, muss auch t eine ungerade Zahl sein. Dann ist $t - 1$ gerade, also von der Form $t - 1 = 2n$, n ganz, und es gilt

$$2a = 142 + 2n \cdot 73 \qquad \text{also} \qquad a = 71 + 73n$$

Als Rest, den a bei Division durch 73 lässt, kommt demnach höchstens die Zahl 71 in Frage.

Zusätzlich wird noch gezeigt, dass 71 als Rest tatsächlich möglich ist, d. h., dass mindestens eine Zahl a mit den in der Aufgabe genannten Eigenschaften existiert. Dies kann folgendermaßen geschehen. Es ist:

$$\begin{aligned} 71 &\equiv -2 \pmod{73} \\ 71^9 \equiv (-2)^9 = -512^2 = -7 \cdot 73 - 1 &\equiv -1 \pmod{73} \\ 71^{99} &\equiv 2 \pmod{73} \\ 71^{100} \equiv -4 &\equiv 69 \pmod{73} \end{aligned}$$

Wenn allgemeiner $a \equiv 71 \pmod{73}$ ist, also $a \equiv -2 \pmod{73}$ ist, gilt

$$a^{100} \equiv 2 \pmod{73} \quad ; \quad a^{101} \equiv -4 \pmod{73}.$$

Folglich ist

$$a^{100} - 2 \equiv 2 - 2 = 0 \pmod{73} \quad ; \quad a^{101} - 69 \equiv -4 - (-4) = 0 \pmod{73}.$$

Also genügen genau alle natürlichen Zahlen $a \equiv -2 \pmod{73}$ allen Bedingungen der Aufgabe.

Alternativ-Lösung von cyrix:
Mit $a^{100} - 2$ und $a^{101} - 69$ ist auch $a^{101} - 69 - a \cdot (a^{100} - 2) + 73 = 2a + 4$ und damit auch $a + 2$ durch 73 teilbar, d. h., es ist $a \equiv -2 \equiv 71 \pmod{73}$.

Aufgabe 121045:
Geben Sie alle g-adischen Zahlensysteme an, in denen die folgende Aufgabe wenigstens eine Lösung hat, und ermitteln Sie für diese Zahlensysteme alle Lösungen der Aufgabe!
Welche im g-adischen Zahlensystem zweistellige Zahl hat die Eigenschaft, dass sich erstens durch Vertauschen der beiden Ziffern wieder eine g-adisch-zweistellige Zahl ergibt und dass man zweitens bei deren Subtraktion von der ersten Zahl die im gleichen Zahlensystem geschriebene Zahl 12 erhält?

Lösung von cyrix:
Sei $g > 2$ eine fest gewählte natürliche Zahl. ($g > 2$, damit die Zahl 12 überhaupt g-adisch aufgefasst werden kann.) Für eine zweistellige Zahl darf die führende (= Nicht-Einer-) Stelle nicht 0 sein. Damit dies für die durch Vertauschung der Ziffern entstehende Zahl genauso gilt, müssen also beide Ziffern verschieden von 0 sein. Seien a und b diese Ziffern. Dann gilt demnach $1 \leq a,b < g$ und es ergibt sich die zu lösende Gleichung $(a \cdot g + b) - (b \cdot g + a) = g + 2$ bzw. $(a - b) \cdot (g - 1) = g + 2$.

Wenn diese Gleichung eine Lösung hat, dann muss $g - 1 \geq 2$ ein Teiler von $g + 2$ sein, also auch einer von $(g + 2) - (g - 1) = 3$. Demnach ist $g - 1 = 3$ und man erhält nach Einsetzen $a - b = 2$, also (aufgrund der Größenbeschränkungen für a und b) $a = 3$ und $b = 1$. Tatsächlich ist auch $31_4 - 13_4 = 12_4$, wobei z_4 dafür stehen soll, dass die Ziffernfolge z im System zur Basis 4 zu lesen ist.

Zusammenfassung: Die zu betrachtende Gleichung ist ausschließlich im Vierersystem lösbar und besitzt dann dafür die einzige Lösung 31_4.

Aufgabe 151044:
Man ermittle alle ungeordneten Paare (x, y) aus zwei natürlichen Zahlen x, y mit $x \neq y$, für die folgendes gilt!
Das arithmetische Mittel von x und y ist eine zweistellige Zahl. Vertauscht man deren Ziffern, so erhält man das geometrische Mittel von x und y (das ist die Zahl $\sqrt{xy}$).

Lösung von Nuramon:
Es sei $\frac{x+y}{2} = u$ und $\sqrt{xy} = v$. Nach Voraussetzungen gibt es $a,b \in \{0,1,\ldots,9\}$ mit $u = 10a + b$ und $v = 10b + a$.

Aus $x + y = 2u$ und $xy = v^2$ folgt nach Vieta, dass x,y die Lösungen der quadratischen Gleichung $z^2 - 2uz + v^2 = 0$ sind. Diese sind gegeben durch $z = u \pm \sqrt{u^2 - v^2}$.
Somit muss $u^2 - v^2 = (u + v)(u - v) = 11(a + b) \cdot 9(a - b)$ eine Quadratzahl sein.

Da $a - b$ wegen $a \neq b$ (da $x \neq y$) nicht durch 11 teilbar ist, muss also $a + b$ durch 11 teilbar sein. Das ist nur möglich, wenn $a + b = 11$ gilt. Es folgt, dass $a - b$ ebenfalls eine Quadratzahl sein muss, also $a - b \in \{1,4,9\}$. Da $a + b = 11$ ungerade ist, muss auch $a - b$ ungerade sein, also ist $a - b \neq 4$. Wäre $a - b = 9$, so müsste $a = 9$ und $b = 0$ gelten, im Widerspruch zu $a + b = 11$. Also ist $a - b = 1$.
Damit erhalten wir jetzt $a = 6$ und $b = 5$, also $u = 65$ und $v = 56$, woraus wir letztendlich erhalten, dass

$$\{x,y\} = \{u \pm \sqrt{u^2 - v^2}\} = \{65 \pm 11 \cdot 3\} = \{32,98\}.$$

Aufgabe 171043A:
Sind $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ natürliche Zahlen mit $0 \leq a_i \leq 3$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ und gilt

$$z = a_n \cdot 4^n + a_{n-1} \cdot 4^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 4 + a_0$$

so sagt man, z sei im 4-adischen System durch die Ziffern $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ dargestellt, und schreibt kurz $z = [a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0]_4$.
Ist dabei $a_n \neq 0$, so heißt die (auf genau eine Weise derart darstellbare) Zahl z (im 4-adischen System) $(n + 1)$-stellig.
Wir bilden nun jeweils zu einer natürlichen Zahl $z \neq 0$, nachdem sie in dieser Weise dargestellt ist, die Zahl

$$z' = a_n^2 + a_{n-1}^2 + \cdots + a_1^2 + a_0^2$$

Dieses Verfahren kann dann wiederholt werden; aus der Zahl z' erhält man, nachdem sie im 4adischen System dargestellt wurde, in der angegebenen Weise die Zahl z'' usw.

Beispiel: $z = 54$: Es ist $z = 3 \cdot 4^2 + 1 \cdot 4^1 + 2 = [312]_4$, d. h., die Ziffern dieser Zahl sind 3, 1, 2. Also ist
$z' = 3^2 + 1^2 + 2^2 = 14 = 3 \cdot 4^1 + 2 = [32]_4$, $z'' = 3^2 + 2^2 = 13 = 3 \cdot 4^1 + 1 = [31]_4$ usw.

Bezeichnet man jeweils die Anwendung des Verfahrens durch einen Pfeil und lässt bei Darstellungen im 4-adischen System die Klammern [ ] und die Angabe der Basis 4 fort, so kann man abgekürzt schreiben: $312 \to 32 \to 31$ usw.
a) Beweisen Sie, dass für jede natürliche, im 4-adischen System dreistellige Zahl z die Zahl z' kleiner als z ist!
b) Beweisen Sie, dass man aus jeder natürlichen Zahl $z \neq 0$ bei genügend häufiger Wiederholung des oben angegebenen Verfahrens die Zahl 1 erhält!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es sei z eine im 4-adischen Zahlensystem mindestens dreistellige Zahl. Dann ist

$$z = \sum_{i=0}^{n} a_i 4^i \qquad \text{und} \qquad z' = \sum_{i=0}^{n} a_i^2$$

mit $n \geq 2$, $0 \leq a \leq 3$ für $i = 0, 1, \ldots, n$ und $a_n \neq 0$, woraus

$$z - z' = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i (4^i - a_i) \right) - a_0(a_0 - 1)$$

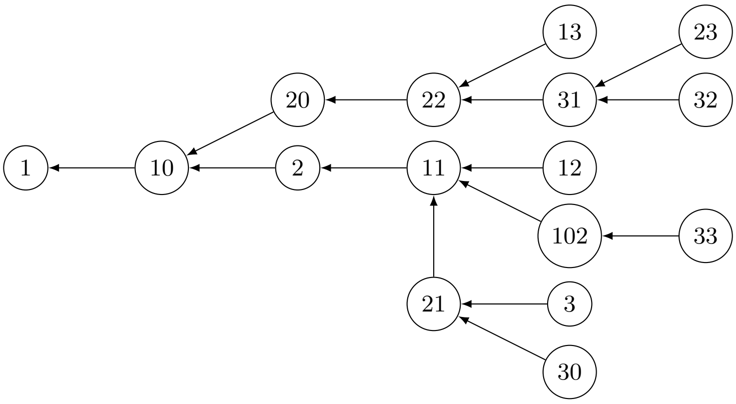
folgt. Da $a_0(a_0 - 1) \leq 6$, $a_i(4^i - a_i) \geq 0$ für $i = 1, 2, \ldots, n - 1$ und $a_n(4^n - a_n) \geq 4^2 - a_n \geq 16 - 3 = 13$ ist, gilt $z - z' > 0$.
Somit entsteht bei wiederholter Anwendung des genannten Verfahrens eine Zahlenfolge, deren Glieder, solange sie mindestens dreistellig bleiben, ständig kleiner werden. Somit muss schließlich eine ein- oder

zweistellige Zahl auftreten. (Damit ist auch die Teilbehauptung a) bewiesen.)

Nun sind sämtliche ein- bzw. zweistellige Zahlen im 4-adischen System dargestellten Zahlen ($\neq 0$), wobei jeweils die Basis 4 aus Gründen der Vereinfachung fortgelassen sei:

$$1, 2, 3, 10, 11, 12, 13, 20, 21, 22, 23, 30, 31, 32, 33 \qquad (1)$$

Nun gilt, wenn in abgekürzter Schreibweise die Gewinnung von z' aus z jeweils durch $z \to z'$ dargestellt wird:



Hier treten alle Zahlen aus (1) auf, womit die Aufgabe vollständig gelöst ist.

Aufgabe 181041:
Wie lauten die letzten beiden Ziffern (bei üblicher dekadischer Ziffernschreibweise) derjenigen Zahl x, die die Gleichung

$$\log_{13}[\log_{12}(\log_{11} x)] = 1$$

erfüllt?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Für die genannte Zahl x gilt $\log_{12}(\log_{11} x) = 13$, also $\log_{11} x = 12^{13}$ und daher

$$x = 11^{12^{13}}$$

Wir ermitteln von den Potenzen von 11^s $(s = l, 2, \dots)$ jeweils die letzten beiden Ziffern:

letzte Ziffer	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
von 11^s	11	21	31	41	51	61	71	81	91	01	...

Daraus folgt: Multipliziert man eine mindestens zweistellige natürliche Zahl t mit 11^{10}, so hat die entstehende Zahl dieselben letzten beiden Ziffern wie die Zahl t.
Hieraus ergibt sich weiter: Hat eine natürliche Zahl n die letzte Ziffer w, so hat 11^u dieselben letzten beiden Ziffern wie 11^w; denn mit einer natürlichen Zahl v ist $u = 10v + w$, also entstehe $11^u = (11^{10}) \cdot 11^w$ aus 11^w durch v-maliges Multiplizieren mit 11^{10}.

Wir ermitteln nun von den Potenzen 12^y $(y = 1, 2, \dots)$ jeweils die letzte Ziffer:

y	1	2	3	4	...
letzte Ziffer von 12^y	2	4	8	6	...

Daraus folgt: Multipliziert man eine natürliche Zahl z, die die letzte Ziffer 2 hat, mit 12^4, so hat auch die entstehende Zahl die letzte Ziffer 2.
Hieraus ergibt sich weiter: Die Zahl $u = 12^{13}$ hat die letzte Ziffer $w = 2$; denn $12^{13} = (12^4)^3$. 12 entsteht aus 12 durch dreimaliges Multiplizieren mit 12^4.
Somit hat $x = 11^{12^{13}}$ dieselben letzten beiden Ziffern wie 11^2, also die Ziffern 2, 1 (in dieser Reihenfolge).

Aufgabe 261044:
Ermitteln Sie für jede natürliche Zahl $k \geq 2$ die Anzahl aller Lösungen (x, y, z, t) der Gleichung $\overline{xy} + \overline{zt} = \overline{yz}$, worin für x, y, z, t nur natürliche Zahlen mit

$$1 \leq x \leq k-1, \qquad 1 \leq y \leq k-1 \qquad 1 \leq z \leq k-1 \qquad 1 \leq t \leq k-1$$

zugelassen sind!
Dabei bezeichnet jeweils $\overline{pq}$ diejenige Zahl, die im Positionssystem der Basis k mit den Ziffern p, q (in dieser Reihenfolge) geschrieben wird.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn k, x, y, z, t natürliche Zahlen sind, für die $k \geq 2$ sowie $1 \leq x$,y,$z \leq k-1$ und $0 \leq t \leq k-1$ sowie die geforderte Gleichung, d. h.

$$k \cdot x + +k \cdot z + t = k \cdot y + z \qquad (1)$$

gilt, so folgt: Es gilt

$$k \cdot x + t = (k-1) \cdot (y-z) \qquad (2)$$

wegen $x \geq 1$ und $t \geq 0$ also

$$y - z \geq \frac{k \cdot 1 + 0}{k-1} > 1 \qquad \text{und daher} \qquad y - 1 > z \qquad (3)$$

Wegen $z \geq 1$ gilt folglich $y > 2$ (4) und wegen $k-1 \geq y$ demnach $k > 3$. Gemäß (4) ist also y eine der Zahlen 3,4,...,$k-1$ (5)
Gemäß (3) ist z eine der Zahlen 1,2,...,$y-2$ (6).

II. Umgekehrt folgt, wenn $k > 3$ ist, und (5), (6) sowie (2) gelten: y und Z erfüllen erst recht die Bedingungen $1 \leq y$,$z \leq k-1$; daher gilt einerseits

$$(k-1) \cdot (y-z) < (k-1) \cdot (k-0) < k^2$$

Andererseits gilt wegen (6), also (3) auch

$$(k-1) \cdot (y-z) > k-1$$

also ist $(k-1) \cdot (y-z)$ eine im Positionssystem der Basis k zweistellige Zahl. Durch (2) sind folglich zu y,z jeweils natürliche Zahlen x,t mit $1 \leq x \leq k-1$m $0 \leq t \leq k-1$ eindeutig bestimmt, und für diese y,z,x,t ist mit (2) auch die geforderte Gleichung (1) erfüllt.

III. Nach I. und II. ergibt sich: Für $k = 2$ und für $k = 3$ ist die gesuchte Lösungsanzahl 0; im Fall $k \geq 4$ ist die gesuchte Lösungsanzahl gleich der Anzahl aller derjenigen Paare (y,z), die gemäß (5) und (6) zu bilden sind. Dabei durchläuft z jeweils

für $y = 3$ den Wert $z = 1$,
für $y = 4$ den Wert $z = 1, 2$
...
für $y = k-1$ den Wert $z = 1, 2, ..., k-3$ (9)

Die gesuchte Anzahl beträgt somit $1 + 2 + ... + (k-3) = \frac{1}{2}(k-3)(k-2)$.

Aufgabe 311044:
Für jede natürliche Zahl n sei $\overline{n}$ diejenige Zahl, die im Ziffernsystem mit der Basis 10 durch dieselbe Ziffernfolge dargestellt wird wie n im Ziffernsystem mit der Basis 9.

Man zeige, dass es eine natürliche Zahl k gibt, so dass für jedes Paar $(m; n)$ natürlicher Zahlen mit $m > 100$ und $n - m > k$ die Ungleichung

$$n - m < \overline{n} - \overline{m}$$

gilt. Man ermittle auch die kleinste derartige natürliche Zahl k.

Lösung von cyrix:
Wir zeigen zuerst folgendes

Lemma: Endet die natürliche Zahl n bei ihrer Darstellung im Ziffernsystem zur Basis 9 auf genau $\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ Achten, so gilt $\overline{n+1} - \overline{n} = \frac{10^k-1}{9} + 1$.

Beweis: In der Darstellung der Zahl $n+1$ im System zur Basis 9 sind dann die letzten k Ziffern gleich Null, während sich die letzte davor befindliche Ziffer gegenüber n um genau 1 erhöht hat. Dementsprechend ist $\overline{n+1} = \overline{n} - 8 \ldots 8 + 10^k = \overline{n} - 8 \cdot \frac{10^k-1}{9} + 10^k$, woraus direkt die Aussage des Lemmas folgt.

Nun zur Aufgabe: Aus dem Lemma folgt $\overline{n+1} = \overline{n} + 1$ für alle natürlichen Zahlen n, die in ihrer Darstellung im System zur Basis 9 nicht auf eine Acht enden. Insbesondere gilt dies für die natürlichen Zahlen $108 = 130_9$ bis $115 = 137_9$.
Also folgt für alle natürlichen Zahlen ℓ zwischen inklusive 108 und 115, dass $\overline{\ell+1} = \overline{\ell} + 1$ gilt. Setzen wir dies zusammen, wählen $m = 108$ und $n = 116$, so gilt also $\overline{m} = \overline{n} + 8$ bzw. $\overline{n} - \overline{m} = 8 = n - m$, sodass man k nicht als $n - m - 1 = 8 - 1 = 7$, oder kleiner, wählen kann, damit in jedem der vorgegebenen Fälle $n - m < \overline{n} - \overline{m}$ gilt.

Ist dagegen $k \geq 8$, so endet wegen $n > m + k \geq m + 8$ wenigstens eine der natürlichen Zahlen m, $m + 1$, $\ldots$, $n - 1$ in ihrer Darstellung im System zur Basis 9 auf die Ziffer Acht.
Für diese Zahl a ist dann $\overline{a+1} > \overline{a} + 1$. Da für alle natürlichen Zahlen b die Ungleichung $\overline{b+1} \geq \overline{b} + 1$ gilt, folgt durch Zusammensetzen aller dieser Ungleichungen nun $\overline{n} > \overline{m} + (n - m)$ bzw. die zu zeigende Ungleichung $n - m < \overline{n} - \overline{m}$.

Damit ist die Aussage für alle $k \geq 8$ gezeigt, während sie für $k \leq 7$, wie oben gezeigt, nicht für alle entsprechenden m und n gilt. Es ist also $k = 8$ das kleinste solche k.

Aufgabe 321044:
Jemand stellt durch Ausrechnen genügend vieler Ziffern der Zahl 2^n für alle natürlichen Zahlen n aus $\{10, 11, 12, \ldots, 108, 109\}$ fest:
(*) Als Zifferngruppe der letzten drei Ziffern (Hunderter-, Zehner- und Einerziffer) tritt bei keiner der Zahlen 2^n mit $n \in \{11, 12, \ldots, 108, 109\}$ die Zifferngruppe 024 auf, die bei $2^10 = 1024$ auftritt.
Danach hat er die einzelnen Ziffern von Zahlen 2^n aus seinen Aufzeichnungen (und, soweit er sie sich gemerkt hatte, auch aus seinem Gedächtnis) verloren. Nur die Feststellung (*) ist ihm noch bekannt.
Nun wird folgende Frage gestellt:
(**) Gibt es unter den Zahlen 2^n $(n \in \{11, 12, \ldots, 108, 109\})$ zwei, die in der Zifferngruppe der letzten drei Ziffern miteinander übereinstimmen?
Beweisen Sie, dass die Frage (**) mit „Nein“ zu beantworten ist, wenn man die Feststellung (*) zur Verfügung hat, jedoch ohne dass man zur Begründung doch noch die Zifferngruppe der letzten drei Ziffern aller einzelnen Zahlen 2^n $(n \in \{11, 12, ..., 108, 109\})$ wieder berechnen müsste!

Lösung von cyrix:
Angenommen, es gäbe zwei Zahlen $m > n$ mit $m,n \in \{11,11,12, \ldots ,108,109\}$, für die die beiden Zweierpotenzen 2^m und 2^n in den letzten drei Stellen übereinstimmen würden.

Dann wäre $2^m - 2^n = 2^n \cdot (2^{m-n} - 1)$ durch $1000 = 2^3 \cdot 125$ teilbar.
Da 2^n und 125 teilerfremd sind, wäre damit $2^{m-n}-1$ durch 125 teilbar, also $2^{10}\cdot(2^{m-n}-1) = 2^{m-n+10}-2^{10}$ durch 1000 teilbar, sodass die beiden Zweierpotenzen 2^{10} und 2^{m-n+10} die gleichen letzten drei Stellen 024 besitzen.

Wegen $10 < n < m \leq 109$ ist $11 \leq m-n+10 \leq 109$, sodass also doch eine der betrachteten Zweierpotenzen auf die Stellen 024 hätte enden müssen, im Widerspruch zu (*). Also gibt es in diesem Bereich keine zwei Zweierpotenzen mit gleichen letzten drei Stellen, □.

Aufgabe 331044:
Jemand findet die Angabe

$$23! = 2585201673 * 8849 * 6640000$$

Darin sind auch die zwei durch $*$ angedeuteten unleserlichen Ziffern. Er möchte diese Ziffern ermitteln, ohne die Multiplikationen vorzunehmen, die der Definition von 23! entsprechen.
Führen Sie eine solche Ermittlung durch und begründen Sie diese! Dabei darf verwendet werden, dass die angegebenen Ziffer korrekt sind.
Hinweis: Für jede positive ganze Zahl n wird $n!$ definiert als das Produkt aller positiven ganzen Zahlen von 1 bis n.

Lösung von Steffen Polster:
Die beiden unbekannten Ziffern seien x und y ($0 \leq x,y \leq 9$), d. h. die Zifferndarstellung

$$23! = 2585201673x8849y6640000$$

23! ist auf Grund ihrer Konstruktion garantiert durch 3, 9 und 11 teilbar. Eine Zahl, die durch 3 teilbar ist, hat eine durch 3 teilbare Quersumme. Eine Zahl lässt bei Division durch 9 den gleichen Rest wie ihre Quersumme. Außerdem ist eine Zahl durch 11 teilbar, wenn ihre alternative Quersumme durch 11 teilbar ist.
Die Quersumme ist $Q = 2 + 5 + ... + 3 + x + 8 + ... + 8 + y + 6 + ... + 0 = 84 + x + y$. Die alternierende Quersumme ist $A = 2 - 5 + 6 - 5 \pm ... + x - 8 \pm ...y + 6 \mp ...0 = 47 + x - 37 - y = 10 + x - y$.
Aus $84 \equiv 0 \pmod 3$ folgt dass $x + y$ durch 3 teilbar sein müssen. Damit verbleiben noch folgende Möglichkeiten

x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
0	0,3,6,9	1	2,5,8	2	1,4,7	3	0,3,6,9	4	2,5,8
5	1,4,7	6	0,3,6,9	7	2,5,8	8	1,4,7	9	0,3,6,9

Aus $84 \equiv 3 \pmod 9$ ergibt sich das $a + b \equiv 6 \pmod 9$ sein müssen. Von den in der Tabelle genannten Möglichkeiten verbleiben nur noch

x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
0	6	1	5	2	4	3	3	4	2
5	1	6	0,6	7	5	8	4	9	3

Für die Teilbarkeit durch 11 muss $10+a-b \equiv 0 \pmod 1)1$ gelten. Testet man die verbliebenen Ziffernpaare (x,y), so erfüllt nur $x = 8$, $y = 7$ die letzte Forderung. Die unleserlichen Ziffern sind 8 und 7, es gilt

$$23! = 25852016738884976640000$$

wie ein Kontrollmultiplikation zeigt.

VI.III Diophantische Gleichungen

I Runde 1

Aufgabe 071013:
Ein Mathematiker hat den Schlüssel für das Fach eines Gepäckautomaten verloren. Von der Nummer des Faches wusste er allerdings noch, dass sie eine durch 13 teilbare dreiziffrige Zahl war und dass sich die mittlere Ziffer als arithmetisches Mittel aus den beiden anderen Ziffern ergab. Das Fach konnte schnell ermittelt werden, da nur wenige Zahlen diese Eigenschaften haben.

Geben Sie alle diese Zahlen an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Laut Aufgabe gilt:

$$100a + 10b + c = 13n \quad (a,\, b,\, c,\, n \text{ ganz}) \tag{1}$$

$$0 < a \leq 9; \quad 0 < b = \frac{a+c}{2} \leq 9; \quad 0 \leq c \leq 9; \quad n > 0. \tag{2}$$

Daraus folgt:

$$c = 2b - a \tag{3}$$

sowie $99a + 12b = 13n$

$$b = \frac{13n - 99a}{12} = n - 8a + \frac{n - 3a}{12}. \tag{4}$$

Mithin muss $n - 3a = 12m$ (m ganz) gelten, woraus man

$$n = 12m + 3a \tag{5}$$

erhält. Aus (3) und (4) ergibt sich

$$b = 13m - 5a. \tag{6}$$

Aus (2) und (5) folgt

$$c = 26m - 11a \tag{7}$$

und aus (5) und (6) $16a + b + c = 39m$, woraus man unter Berücksichtigung von (1) $17 \leq 39m \leq 162$ erhält. Daraus folgt

$$1 \leq m \leq 4. \tag{8}$$

Da $m > 0$ und ganzzahlig sein muss, ergibt sich aus (6) und (1)

$$11a \leq 26m \leq 11a + 9. \tag{9}$$

Mit Hilfe von (7) und (8) ermittelt man aus (5) und (2) als einzig mögliche Zahlen 234, 468, 741 und 975, da jeder Wert von m in (7) genau einen Wert für a in (8) liefert. Da jede dieser vier Zahlen allen Bedingungen der Aufgabe genügt, ist sie auch Lösung.

Aufgabe 111011:
Ein Raum soll mit 32 Glühlampen so ausgestattet werden, dass sich eine Gesamtleistung von 1800 W ergibt. Es stehen je ausreichend viele Glühlampen von 40 W, 60 W und 75 W, aber keine anderen, zur Verfügung.

Geben Sie alle Möglichkeiten einer derartigen Ausstattung an.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Bezeichnet man die Anzahl der Glühlampen von 40, 60 bzw. 75 Watt der Reihe nach mit x, y, z, so erfüllt eine Ausstattung genau dann die Voraussetzungen der Aufgaben, wenn x, y, z natürliche Zahlen mit

$$x + y + z = 32 \quad (1) \qquad ; \qquad 40x + 60y + 75z = 1800 \quad (2)$$

sind. Angenommen x,y,z seien drei solche natürliche Zahlen. Aus (1) und (2) folgt dann

$$4y + 7z = 104 \quad (3) \qquad \text{also} \qquad z = \frac{104 - 4y}{7} \leq \frac{104}{7} = 14 + \frac{6}{7}$$

woraus sich $0 \leq z \leq 14 \quad (4)$ ergibt. Nach (3) ist ferner

$$y = 26 - \frac{7z}{4} \tag{5}$$

Da y eine natürliche Zahl ist, muss also $7z$ und somit auch z durch 4 teilbar sein.

Hiernach ergibt sich aus (4), dass für z nur die Werte 0, 4, 8, 12 möglich sind. Aus (5) erhält man als zugehörige Werte für y der Reihe nach die Zahlen 26, 19, 12, 5 und aus (1) als zugehörige Werte für x die Zahlen 6, 9, 12, 15. Daher können höchstens die Ausstattungen mit folgenden Anzahlen der drei Glühlampensorten die Bedingungen der Aufgabe erfüllen:

x	y	z	x	y	z	x	y	z	x	y	z
6	26	0	9	19	4	12	12	8	15	5	12

Durch Einsetzen zeigt man, dass in allen vier Fällen die Gleichungen (1) und (2) erfüllt sind.

Aufgabe 131013:
Jemand möchte als Rechenaufgabe stellen, aus der Menge der natürlichen Zahlen von 1 bis zu einer angegebenen natürlichen Zahl n genau eine angegebene natürliche Zahl x wegzulassen und die übrigen $n-1$ Zahlen zu addieren. Er möchte die Zahlen n und x so angeben, dass als Ergebnis dieser Rechenaufgabe die Summe 448 entsteht.

Man ermittle alle Möglichkeiten, x und n in dieser Weise anzugeben!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Summe aller natürlichen Zahlen von 1 bis n beträgt $\frac{n(n+1)}{2}$. Daher sind für natürliche Zahlen n, x genau dann die Bedingungen der Aufgabe erfüllt, wenn

$$\frac{n(n+1)}{2} = 448 + x \quad (1) \qquad \text{und} \qquad 0 \leq x \leq n \quad (2)$$

ist. Gelten (1), (2), so folgt $448 < \frac{n^2+n}{2} \leq 448 + n$, also

$$896 < n^2 + n \leq 896 + 2n$$

Aus $896 < n^2 + n$ ergibt sich $n > 29$; denn wäre $0 < n \leq 29$, so wäre $n(n+1) \leq 29 \cdot 30 = 870 < 896$. Aus $n^2 + n \leq 896 + 2n$ ergibt sich $n(n-1) \leq 896$ und hieraus $n < 31$; denn wäre $n \geq 31$, so wäre

$$n(n-1) \geq 31 \cdot 30 = 930 > 896$$

Aus beiden Bedingungen für n folgt $n = 30$, hieraus und aus (1)

$$x = \frac{30 \cdot 31}{2} - 448 = 17$$

Daher können nur $n = 30$, $x = 17$ den Forderungen der Aufgabe genügen. Wegen $\frac{30 \cdot 31}{2} = 448 + 17$ und $0 < 17 \leq 30$ erfüllen sie sie tatsächlich.

Aufgabe 141011:
Jemand wählt eine natürliche Zahl n, addiert die natürlichen Zahlen von 1 bis n zueinander und erhält als Summe $1 + 2 + ... + n$ eine dreistellige Zahl, die (wie z. B. 777) aus lauter gleichen Ziffern besteht.

Man ermittle alle Möglichkeiten, eine Zahl n zu wählen, für die das zutrifft!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, n sei eine natürliche Zahl, die die Bedingungen der Aufgabe erfüllt. Dann gilt einerseits

$$1+2+3+...+(n-1)+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

andererseits lässt sich die laut Aufgabe entstehende Summe in der Form $111x$ schreiben, wobei x eine natürliche Zahl ist, für die $1 \leq x \leq 9$ gilt. Daher ist

$$n(n+1)=2\cdot 111x=2\cdot 3\cdot 37x$$

Da 37 Primzahl ist, folgt, dass entweder n oder $n+1$ durch 37 teilbar ist; Ferner gilt, da die Summe $1+2+...+n$ dreistellig sein soll, $n(n+1)<2000$, also erst recht $n^2<2000$ und daher $n<45$. Folglich kann n nur eine der Zahlen 36, 37 sein.

Wegen $\frac{36\cdot 37}{2}$ und $\frac{37\cdot 38}{2}=703$ erhält man somit genau dann eine dreistellige Zahl mit drei gleichen Ziffern als Summe der natürlichen Zahlen von 1 bis n, wenn $n=36$ ist.

Aufgabe 191012:
Es seien b und c von Null verschiedene natürliche Zahlen und a eine Primzahl. Ferner gelte für sie die Gleichung $a^2+b^2=c^2$.

Beweisen Sie, dass unter diesen Voraussetzungen stets $a<b$ und $b+1=c$ gilt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Nach Voraussetzung ist $a^2=c^2-b^2=(c-b)(c+b)$ in zwei ganzzahlige Faktoren zerlegbar, von denen der erste wegen $b>0$ kleiner als der zweite und dieser, also auch der erste, positiv ist.

Da a Primzahl ist, ist dies nur möglich mit $c-b=1$ und $c+b=a^2$.

Mit (1) ist bereits die Behauptung $b+1=c$ bewiesen. Aus $a^2=c^2-b^2$ und $b>0$ folgt ferner $a^2<c^2$; hieraus folgt wegen $c>0$ auch $a<c$, also $a\leq c-1=b$. Wäre nun $a=b$, so ergäbe sich $c^2=a^2+a^2=2a^2$, also wäre die Quadratzahl c^2 das Produkt der drei Primfaktoren $2,a,a$. Da dies unmöglich ist, folgt auch $a<b$.

Aufgabe 291011:
Geben Sie mindestens ein Beispiel für 1989 natürliche Zahlen an, deren Summe gleich ihrem Produkt ist! Bestätigen Sie durch Berechnung der Summe und des Produktes die geforderte Gleichung!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Einige Beispiele und die zugehörigen Bestätigungen lauten:

$$\begin{aligned}
1989,2,\underbrace{1,\dots,1}_{1987} &\quad \text{wegen} \quad 1989+2+1987\cdot 1=3978=1989\cdot 2\cdot 1^{1987}\\
995,3,\underbrace{1,\dots,1}_{1987} &\quad \text{wegen} \quad 995+3+1987\cdot 1=2985=995\cdot 3\cdot 1^{1987}\\
105,5,4,\underbrace{1,\dots,1}_{1986} &\quad \text{wegen} \quad 105+5+4+1986\cdot 1=2100=105\cdot 5\cdot 4\cdot 1^{1986}\\
15,15,9,\underbrace{1,\dots,1}_{1986} &\quad \text{wegen} \quad 15+15+9+1986\cdot 1=2025=15\cdot 15\cdot 9\cdot 1^{1986}
\end{aligned}$$

Bemerkung: Zum Auffinden der ersten beiden Beispiele führt z. B. der Ansatz $a+b+1987=ab$, mit $b=2$ also $a+1989=2a$ und mit $b=3$ also $a+1990=3a$.

Zum Auffinden der letzten beiden Beispiele führt nach dem Ansatz $a+b+c+1986 = abc$ die Suche nach zwei Zahlen b,c, für die $b+c+1986$ durch $bc-1$ teilbar ist.

Durch Probieren (z. B. mit einem Rechner) findet man mit $b = 5, c = 4$ dann a als Lösung der Gleichung $a + 1995 = 20a$, mit $b = 15, c = 9$ dann a als Lösung der Gleichung $a + 2010 = 135a$.

Aufgabe 301011:

a) Beweisen Sie, dass es unendlich viele pythagoreische Zahlentripel gibt!

b) Beweisen Sie, dass es auch pythagoreische Zahlentripel mit verschiedenen Werten jeweils des Quotienten aus der größten und der kleinsten Zahl des Tripels gibt!

Hinweis: Ein pythagoreisches Zahlentripel ist ein Tripel (a, b, c) aus drei positiven natürlichen Zahlen a, b, c, für die $a^2 + b^2 = c^2$ gilt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Ein Beispiel für unendliche viele pythagoreische Zahlentripel bilden die Tripel $(3n, 4n, 5n)$ für $n =$ 1,2,3,...; denn für sie gilt

$$(3n)^2 + (4n)^2 = 9n^2 + 16n^2 = 25n^2 = (5n)^2$$

b) Ein Beispiel für zwei pythagoreische Zahlentripel (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2) mit $a_1 < b_1 < c_1$, $a_2 < b_2 < c_2$ und $\frac{c_1}{a_1} \neq \frac{c_2}{a_2}$ bilden (3,4,5) und (5,12,13).

Aufgabe 321012:
Drei natürliche Zahlen a, b, c mit $0 < a \leq b < c$, für die die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ gilt, nennt man ein pythagoreisches Zahlentripel.

Man beweise: In jedem pythagoreischen Zahlentripel a, b, c muss $a \neq 2$ sein.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
In jedem pythagoreischen Zahlentripel gilt

$$a^2 = c^2 - b^2 = (c-b) \cdot (c+b) \qquad (1)$$

Wäre $a = 2$, so wäre (1) für die ganzen Zahlen $c-b$ und $c+b$, die wegen $0 < b < c$ positiv sind und $c-b < c+b$ erfüllen, nur mit $c-b = 1$ und $c+b = 4$ möglich. Daraus folgte $c = \frac{5}{2}$ im Widerspruch zur Ganzzahligkeit von c. Also muss $a \neq 2$ sein.

Aufgabe 331013:
Für welche ganzen, nicht negativen Zahlen t ist $z = \sqrt{t + \sqrt{t}}$ eine rationale Zahl, für welche nicht?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

I Für $t = 0$ ist $z = \sqrt{0 + \sqrt{0}} = 0$, also eine rationale Zahl.

II Angenommen, für eine ganze Zahl $t > 0$ wäre z rational. Aus dieser Annahme folgt, dass auch die Zahlen $z^2 = t + \sqrt{t}$ und somit $\sqrt{t} = z^2 - t$ rationale wären.

Also wäre $t = m^2$ mit einer positiven ganzen Zahl m. Mit dieser wäre demnach $z = \sqrt{m^2 + m}$, woraus ebenso folgt, dass auch $m^2 + m$ eine Quadratzahl sein müsste.

Wegen $m^2 < m^2+m < (m+1)^2$ liegt aber m^2+m zwischen zwei aufeinanderfolgenden Quadratzahlen und ist somit selbst keine Quadratzahl.

Dieser Widerspruch zeigt, dass die Annahme, z wäre rational, falsch war; d. h., es ist bewiesen: Für alle ganzen Zahlen $t > 0$ ist z keine rationale Zahl.

II Runde 2

Aufgabe 051024:
Die 1007 Teilnehmer eines Kongresses sollen auf möglichst wenig Autobusse mit 13, 29 bzw. 41 Plätzen für Fahrgäste so verteilt werden, dass kein Platz leer bleibt.
Wieviel Autobusse, jeder Art sind zu bestellen?

Lösung von Kitaktus:
Es gilt

$$20 \cdot 41 + 6 \cdot 29 + 1 \cdot 13 = 820 + 174 + 13 = 1007$$

Es gibt daher eine Lösung, die $20 + 6 + 1 = 27$ Busse benutzt.
Angenommen, es gäbe eine (nichtnegative ganzzahlige) Lösung mit a Bussen mit je 41 Plätzen, b Bussen mit je 29 Plätzen und c Bussen mit je 13 Plätzen für die

$$a + b + c = n \quad \text{(mit ganzzahligem } n \leq 26) \tag{1}$$

$$41a + 29b + 13c = 1007 \tag{2}$$

gilt.
$41 \cdot (1) - (2)$ ergibt die Gleichung $12b + 28c = 41 \cdot n - 1007 \quad (3)$.
Für $n = 26$ vereinfacht sich (3) zu:

$$12b + 28c = 41 \cdot 26 - 1007 = 59 \tag{4}$$

Dabei ist die linke Seite gerade, die rechte aber nicht. Eine solche Lösung kann es also nicht geben.

Für $n \leq 24$ ergibt sich aus (3) die Ungleichung

$$12b + 28c = 41 \cdot n - 1007 \leq 41 \cdot 24 - 1007 = -23 \tag{5}$$

Hier gibt es offenbar keine nichtnegativen Lösungen.
Es bleibt also nur noch der Fall $n = 25$. Hier ergibt sich aus (3) die Gleichung

$$12b + 28c = 41 \cdot 25 - 1007 = 18 \tag{6}$$

Da a, b und c nichtnegative ganze Zahlen sind, muss $c = 0$ sein, da sonst die linke Seite von (6) bereits zu groß wäre.
Es bleibt also die Gleichung $12b = 18$, die aber keine ganzzahlige Lösung hat.
In allen Fällen führte die obige Annahme zum Widerspruch. Es gibt also keine Lösung, die mit weniger als 27 Bussen auskommt.
Die oben angegebene Lösung mit 27 Bussen benutzt also die kleinstmöglich Anzahl an Bussen.

Aufgabe 141022:
Geben Sie alle (geordneten) Tripel (x, y, z) an, die die folgenden Bedingungen erfüllen!
(1) $x - y = 96$,
(2) $y - z = 96$,
(3) x, y und z sind Quadrate natürlicher Zahlen.

Lösung von weird:
Wir bestimmen zunächst alle Paare $(u,v) \in \mathbb{N}^2$, für welche $u^2 - v^2 = 96$ ist. Wegen $(u+v)(u-v) = 96$ müssen wir dazu einfach alle Zerlegungen $96 = a \cdot b$ von 96 mit $a > b > 0$ durchgehen, wobei die beiden komplementären Teiler a,b von 96 auch noch die gleiche Parität haben müssen. Damit ist dann garantiert, dass

$$u := \frac{a+b}{2},\ v := \frac{a-b}{2}$$

ein Paar $(u,v) \in \mathbb{N}^2$ mit obigen Eigenschaften ist. Dies führt auf die folgenden 4 Fälle:

- $(a,b) = (48,2) \mapsto (u,v) = (25,23)$; • $(a,b) = (24,4) \mapsto (u,v) = (14,10)$
- $(a,b) = (16,6) \mapsto (u,v) = (11,5)$; • $(a,b) = (12,8) \mapsto (u,v) = (10,2)$

Die einzige Möglichkeit, die Gleichungen (1)-(3) in der Aufgabenstellung für $x,y,z \in \mathbb{N}$ zu erfüllen, besteht somit darin $x = 14^2 = 196$, $y = 10^2 = 100$, $z = 2^2 = 4$ zu setzen.

Aufgabe 201023:
Ermitteln Sie die größte natürliche Zahl n, für die ein Tripel (a,b,c) natürlicher Zahlen so existiert, dass gilt:

$$(a+n)(b+n)(c+n) = 1980$$

Ermitteln Sie zu dieser Zahl n alle verschiedenen zugehörigen Tripel (a,b,c) mit der genannten Eigenschaft!

Lösung von Nuramon:
Sei (a,b,c) ein Tripel natürlicher Zahlen, so dass für das gesuchte maximale n gilt

$$(a+n)(b+n)(c+n) = 1980$$

Dann muss $\min\{a,b,c\} = 0$ sein, denn sonst gäbe es zu $n' := n+1$ das Tripel $(a',b',c') = (a-1,b-1,c-1) \in \mathbb{N}^3$ mit $(a'+n')(b'+n')(c'+n') = 1980$.

Also ist n ein Teiler von $1980 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$. Es gilt $n \geq 11$, denn $(0+11)(1+11)(4+11) = 1980$.
Angenommen es wäre $n \geq 12$. Da 12^2 kein Teiler von 1980 ist, wäre dann

$$1980 = (a+n)(b+n)(c+n) \geq 12 \cdot 13 \cdot 13 = 2028$$

Somit muss $n = 11$ gelten.
Sei o. B. d. A. $a \leq b \leq c$. Insbesondere ist dann $a = 0$, also $(b+11)(c+11) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180$. Da 11 kein Teiler von 180 ist, müssen $b,c \geq 1$ sein.
Die einzigen Teiler t von 180 mit der Eigenschaft, dass $t \geq 12$ und $\frac{180}{t} \geq 12$ ist, sind 12 und 15 (13 und 14 sind keine Teiler von 180 und für $t > 15$ ist $\frac{180}{t} < 12$).
Also muss $b + 11 = 12$ und $c + 11 = 15$ gelten.

Demnach ist (a,b,c) genau dann ein Tripel mit $(a+n)(b+n)(c+n) = 1980$, wenn (a,b,c) eine der sechs Permutationen von $(0,1,4)$ ist.

Aufgabe 211023:
Ermitteln Sie alle diejenigen Paare $(x;y)$ ganzer Zahlen x,y, für die $x^2 - y^2 = 1981$ gilt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Ein Paar $(x;y)$ ganzer Zahlen hat genau dann die verlangte Eigenschaft, wenn es $(x-y)(x+y) = l98l$ (1) erfüllt.

Wegen der Primzerlegung $1981 = 7 \cdot 283$ gibt es für (1) in ganzen Zahlen $x - y$ und $x + y$ genau die in der folgenden Tabelle genannten Möglichkeiten. Durch Addieren bzw. Subtrahieren und jeweils anschließendes Halbieren erhält man, dass nur die anschließend angegebenen Werte von x und y die genannten Zahlen $x - y$ bzw. $x + y$ ergeben können; eine Probe zeigt jeweils, dass sie in der Tat diese Ergebnisse liefern.

$x-y$	$x+y$	x	y
1	1981	991	990
-1	-1981	-991	-990
1981	1	991	-990
-1981	-1	-991	990
7	283	145	138
-7	-283	-145	-138
283	7	145	-138
-283	-7	-145	138

Daher haben genau die Paare $(991; 990)$, $(-991; -990)$, $(991; -990)$, $(-991; 990)$, $(145; 138)$, $(-145; -138)$, $(-145; 138)$, $(145; -138)$ die verlangte Eigenschaft.

Aufgabe 221021:
Man ermittle alle diejenigen Paare $(x; y)$ ganzer Zahlen, die die Gleichung $2x^3 + xy - 7 = 0$ erfüllen.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn ein Paar $(x; y)$ ganzer Zahlen die Gleichung $2x^3 + xy - 7 = 0$ erfüllt, so gilt $x(2x^2 + y) = 7$.
Da x und $2x^2 + y$ ganze Zahlen sind und 7 eine Primzahl ist, folgt daraus

(1) entweder $x = 1$ und $2x^2 + y = 7$
(2) oder $x = 7$ und $2x^2 + y = 1$
(3) oder $x = -1$ und $2x^2 + y = -7$
(4) oder $x = -7$ und $2x^2 + y = -1$

Aus (1) folgt $y = 5$; aus 82) folgt $y = -97$; aus (3) folgt $y = -9$; aus (4) folgt $y = -99$.
Also können höchstens $(1; 5)$, $(7; -97)$, $(-1; -9)$, $(-7; -99)$ Paare $(x; y)$ ganzer Zahlen sein, die die Gleichung erfüllen.
Die Probe bestätigt, dass genau diese vier Paare die geforderten Eigenschaften haben.

Aufgabe 261021:
Ermitteln Sie alle diejenigen geordneten Paare $(x; y)$ ganzer Zahlen x und y, für die

$$3x^2 + 3y^2 - 18x + 12y + 27 = 0 \qquad (1)$$

gilt!

Lösung von Steffen Polster:
Mittel quadratischer Ergänzung wird aus (1)

$$(x-3)^2 - 9 + (y+2)^2 - 4 + 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x-3)^2 + (y+2)^2 = 4 \qquad (2)$$

Da x, y ganze Zahlen sind, müssen $(x-3)$, $(y+2)$ ebenfalls ganzzahlig sein. Außerdem sind bei Summanden von (2) garantiert > 0. 4 lässt sich als Summe zweier ganzzahliger Quadratzahlen durch $4 = 0+4 = 4+0$ darstellen. Daraus ergeben sich zwei Fälle.

1. Fall: $(x-3)^2 = 0$ und $(y+2)^2 = 4$
Das ergibt $x = 3$ und $y + 2 = \pm 2$ und somit für (x, y) die Lösungspaare $(3; 0)$ und $(3; -4)$.

2. Fall: $(x-3)^2 = 4$ und $(y+2)^2 = 0$

Das ergibt $y = -2$ und $x - 3 = \pm 2$ und somit für (x, y) die Lösungspaare $(1; -2)$ und $(5; -2)$.

Ein Probe bestätigt die vier gefundenen Paare als Lösungen.

Aufgabe 301022:
Beweisen Sie, dass für jede natürliche Zahl n, die nicht Quadratzahl ist, die Zahl $\sqrt{n}$ irrational ist!
Dabei werde wie üblich eine natürliche Zahl n genau dann Quadratzahl genannt, wenn es eine natürliche Zahl k gibt, mit der $n = k^2$ gilt.

Lösung von cyrix:
Es sei eine natürliche Zahl n, die nicht Quadratzahl ist. Wegen $0 = 0^2$ und $1 = 1^2$ ist $n > 1$. Damit hat es eine eindeutige Primfaktorzerlegung mit mindestens einem Primteiler.
Auch mindestens eine Primzahl p besitzt in der Primfaktorzerlegung von n einen ungeraden Exponenten u (sonst könnte man die Zahl, deren Primfaktorzerlegung aus der von n dadurch entsteht, indem man jeden Exponenten halbiert, k nennen und es würde $n = k^2$ gelten, sodass n im Widerspruch zur Aufgabe eine Quadratzahl wäre). Also gilt $p^u \mid n$, aber $p^{u+1} \nmid n$.

Wäre $\sqrt{n} > 0$ rational, so gäbe es teilerfremde positive ganze Zahlen a und b mit $\sqrt{n} = \frac{a}{b}$ bzw. $n^2 = \frac{a^2}{b^2}$ und damit $a^2 = n \cdot b^2$.

Es ist $p \mid n$, also auch $p \mid n \cdot b^2$ und damit $p \mid a^2$. Da p eine Primzahl ist, muss es dann auch Teiler von a sein, sodass es (wie jede Primzahl) mit geradem Exponenten in der Primfaktorzerlegung von a^2, also auch der von b^2 vorkommt.
In der Primfaktorzerlegung von n ist es aber nur mit ungeradem Exponenten enthalten, sodass es auch mit ungeradem Exponenten in der Primfaktorzerlegung von b^2 enthalten sein muss, was ein Widerspruch ist, da auch dort alle Primfaktoren einen geraden Exponenten besitzen, $\Box$.

Aufgabe 311024:
Ermitteln Sie alle diejenigen natürlichen Zahlen t, für die $\sqrt{t + 24\sqrt{t}}$ rational ist!

Lösung von cyrix:
Es sei $r^2 = t + 24\sqrt{t}$ mit einer rationalen Zahl r. Dann ist auch $\sqrt{t} = \frac{r^2 - t}{24}$ eine rationale Zahl, da t eine natürliche Zahl ist. Die Quadratwurzel einer natürlichen Zahl t ist aber nur genau dann rational, wenn diese eine Quadratzahl ist, also eine natürliche Zahl n mit $t = n^2$ existiert.

Dann ist $r^2 = n^2 + 24n$ sogar eine natürliche Zahl und damit auch r. Es ist damit $r^2 + 144 = n^2 + 2 \cdot n \cdot 12 + 12^2 = (n + 12)^2$, also mit $m := n + 12 > 0$ schließlich $144 = m^2 - r^2 = (m + r)(m - r)$. Damit sind (wegen $m > 0$ und $r > 0$, also $m + r > 0$ und damit auch $m - r > 0$) $m + r$ und $m - r$ positiver Teiler und Gegenteiler von 144.

Wegen $r > 0$ ist dabei $m + r$ der größere und $m - r$ der kleinere Teiler und wegen $(m + r) - (m - r) = 2r$ unterscheiden sich die beiden Teiler um ein Vielfaches von 2, sodass, da 144 durch 2 teilbar ist, also beide Faktoren durch 2 teilbar sein müssen. Da 144 genau die Zahlen 2, 4, 6 und 8 als gerade Teiler besitzt, die kleiner als $\sqrt{144} = 12$ sind, ergeben sich also folgende Lösungen:

- Für $m - r = 2$ ist $m + r = 72$, also $r = 35$, $m = 37$, $n = m - 12 = 25$ und $t = n^2 = 625$. Tatsächlich ist $\sqrt{625 + 24 \cdot \sqrt{625}} = \sqrt{625 + 24 \cdot 25} = \sqrt{1225} = 35$ rational.
- Für $m - r = 4$ ist $m + r = 36$, also $r = 16$, $m = 20$, $n = m - 12 = 8$ und $t = n^2 = 64$. Tatsächlich ist $\sqrt{64 + 24 \cdot \sqrt{64}} = \sqrt{64 + 24 \cdot 8} = \sqrt{256} = 16$ rational.

- Für $m - r = 6$ ist $m + r = 24$, also $r = 9$, $m = 15$, $n = m - 12 = 3$ und $t = n^2 = 9$. Tatsächlich ist $\sqrt{9 + 24\sqrt{9}} = \sqrt{9 + 24 \cdot 3} = \sqrt{81} = 9$ rational.
- Und für $m - r = 8$ ist $m + r = 18$, also $r = 5$, $m = 13$ und $n = t = 1$. Tatsächlich ist $\sqrt{1 + 24 \cdot \sqrt{1}} = \sqrt{25} = 5$.

Damit ergeben sich genau vier Lösungen $t \in \{1{,}9{,}64{,}625\}$.

Aufgabe 331022:
Man beweise, dass es keine natürliche Zahl n gibt, für die $121 \cdot n - 3$ das Produkt zweier unmittelbar aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen wäre.

Lösung von cyrix:
Wir nehmen an, es gäbe eine natürliche Zahl m, sodass $121 \cdot n - 3 = m \cdot (m + 1) = m^2 + m$ gilt.
Dann wäre $4 \cdot (121 \cdot n - 3) + 1 = 4 \cdot (m^2 + m) + 1 = 4m^2 + 4m + 1 = (2m + 1)^2$ eine Quadratzahl. Es ist jedoch $4 \cdot (121 \cdot n - 3) + 1 = 4 \cdot 11^2 \cdot n - 11$ durch 11, aber nicht 11^2 teilbar, also keine Quadratzahl.
Damit war die Annahme der Existenz einer solchen Zahl m falsch und die Behauptung ist bewiesen, $\square$.

III Runde 3

Aufgabe 051034:
Beweisen Sie, das $\log_2 6$ keine rationale Zahl ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, $\log_2 6$ wäre eine rationale Zahl. Dann gibt es zwei teilerfremde ganze Zahlen p, q mit $q > 0$, so dass

$$\log_2 6 = \frac{p}{q}$$

gilt. Hieraus folgt nach der Definition des Logarithmus $2^{\frac{p}{q}} = 6$. Diese Aussage ist äquivalent mit

$$2^p = 6^q = (2 \cdot 3)^q$$

Also müsste $2^{p-q} = 3^q$ gelten. Es sei $p - q = n$. Dann ist n ganz, und es müsste $2^n = 3^q$ gelten, woraus wegen $q > 0$ folgt, dass $n > 0$ sein muss. Daraus ergäbe sich $2|3^q$, was nicht wahr ist.
Also ist $\log_2 6$ keine rationale Zahl.

Alternativ-Lösung von cyrix:
Es ist $\log_2 6 > 0$, da $6 > 2$ gilt. Wäre es eine rationale Zahl, gäbe es also positive ganze Zahlen p, q mit $\log_2 6 = \frac{p}{q}$ bzw. $2^{\frac{p}{q}} = 6$ und damit

$$2^p = 6^q = 2^q \cdot 3^q.$$

Aufgrund der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung müssen aber auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens alle Primfaktoren jeweils gleichhäufig vorkommen, woraus $q = 0$ folgt; im Widerspruch zur Annahme $q > 0$. Also muss $\log_2 6$ irrational sein.

Aufgabe 071034:
Gesucht sind alle diejenigen Tripel natürlicher Zahlen a_i $(i = 1, 2, 3)$, die die Gleichung

$$\sqrt{2a_1^2 - 2a_2^2} = a_3$$

erfüllen und für die außerdem $1 \leq a_i \leq 10$ gilt!

Lösung von cyrix:
Die Gleichung ist offenbar äquivalent zu $2(a_1 - a_2)(a_1 + a_2) = a_3^2$.
Da 2 eine Primzahl ist, folgt aus $2|a_3^2$ direkt $2|a_3$, sodass die rechte Seite der Gleichung durch 4 teilbar ist. Also muss auch $(a_1 - a_2)(a_1 + a_2)$ gerade sein, und damit mindestens einer dieser beiden Faktoren. Da nur beide zugleich (oder keiner von beiden) gerade sein können, ist die rechte Seite der Gleichung also sogar durch 8 teilbar, sodass aufgrund der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung a_3 zumindest durch 4 teilbar sein muss.
Es verbleiben also zwei Fälle: $a_3 = 4$ und $a_3 = 8$.

1. Fall: $a_3 = 4$.
Dann ist also $(a_1-a_2)(a_1+a_2) = 8$ und, da beide Faktoren gerade sind, wegen $a_1+a_2 > 0$ auch $a_1-a_2 > 0$ und schließlich $a_1 + a_2 > a_1 - a_2$, also $a_1 + a_2 = 4$ sowie $a_1 - a_2 = 2$. Es ergibt sich als Lösungstripel $(a_1,a_2,a_3) = (3,1,4)$, was durch Einsetzen in die Ausgangsgleichung auch bestätigt wird.

2. Fall: $a_3 = 8$.
Dann ist $(a_1 - a_2)(a_1 + a_2) = 32$. Nun ergeben sich folgende mögliche Zerlegungen in zwei positive und gerade Faktoren:
*) $a_1 + a_2 = 16$ und $a_1 - a_2 = 2$, was auf $a_1 = 9$ und $a_2 = 7$ führt.
*) $a_1 + a_2 = 8$ und $a_1 - a_2 = 4$, was dan auf $a_1 = 6$ und $a_2 = 2$ führt.
Beide mögliche Lösungen werden durch die Probe bestätigt.

Zusammenfassung: Im zu betrachtenden Bereich gibt es genau drei Lösungstripel, nämlich (3,1,4), (6,2,8) und (9,7,8).

Aufgabe 081032:
Die fünf aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen 10, 11, 12, 13 und 14 haben die Eigenschaft, dass die Summe der Quadrate der ersten drei dieser Zahlen gleich der Summe der beiden letzten Zahlen ist.
Es gilt also

$$10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$$

a) Gibt es noch andere fünf aufeinanderfolgende ganze Zahlen mit dieser Eigenschaft?
b) Gegeben sei eine positive ganze Zahl n.
Ermitteln Sie alle Zusammenstellungen von $2n + 1$ aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen, für die die Summe der Quadrate der ersten $n + 1$ Zahlen gleich der Summe der Quadrate der letzten n Zahlen ist:
1) für $n = 3$.
2) für beliebiges positives ganzes n.

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:
b) Angenommen, es gäbe $2n + 1$ Zahlen der gesuchten Art. Bezeichnen wir die $(n + 1)$-te dieser Zahlen mit x, so lauten sie $x - n, x - n + 1, ..., x, ..., x + n$ und erfüllen die Gleichung

$$(x - n)^2 + ... + (x - 1)^2 + x^2 = (x + 1)^2 + ... + (x + n)^2 \tag{1}$$

Wegen $(x + k)^2 - (x - k)^2 = 4kx$ $(k = 1, ..., n)$ folgt aus Gleichung (1)

$$x^2 = 4(1 + ... + n)x = 4\frac{n(n + 1)}{2}x \qquad \text{also} \qquad x(x - 2n(n + 1)) = 0 \tag{2}$$

Daher muss $x = 0$ oder $x = 2n(n + 1) = 2n^2 + 2n$ sein, d. h., es kommen nur die Zusammenstellungen

$$-n, -n + 1, ...0, ..., n \tag{3}$$

$$2n^2 + n, 2n^2 + n + 1, ..., 2n^2 + 2n, ...2n^2 + 3n \tag{4}$$

als Lösungen in Frage.

In der Tat erfüllen (3) und (4) die Bedingungen der Aufgabe; denn sowohl für $x = 0$ als auch für $x = 2n(n+1)$ ist (2) erfüllt, woraus man umgekehrt wie oben auf (1) schließen kann.

a) Setzt man in b) speziell $n = 2$, so entsteht a). Man erhält hierfür aus (4) die bereits genannten Zahlen $10, ..., 14$, aus (3) die somit einzige weitere Lösung $-2, ..., 2$.

Aufgabe 101031:
a) Beweisen Sie folgenden Satz!
Addiert man zu einer ganzen Zahl k das Quadrat der Hälfte ihres unmittelbaren Vorgängers, so entsteht das Quadrat einer rationalen Zahl.
b) Nutzen Sie eine bei diesem Beweis erhaltene Gleichung, um vier voneinander verschiedene pythagoreische Zahlentripel zu finden!

Anmerkung: Ein pythagoreisches Zahlentripel (x, y, z) ist ein geordnetes Tripel dreier von Null verschiedener natürlicher Zahlen x, y, z mit der Eigenschaft $x^2 + y^2 = z^2$.
Zwei derartige Tripel heißen genau dann voneinander verschieden, wenn nicht eines von ihnen aus dem anderen dadurch erhalten werden kann, dass man x, y und z mit einer natürlichen Zahl $\neq 1$ multipliziert oder dass man x mit y vertauscht oder dass man beides durchführt.

Lösung von cyrix:
a) Sei k eine ganze Zahl. Dann ist

$$k + \left(\frac{k-1}{2}\right)^2 = \frac{4k + (k-1)^2}{4} = \frac{k^2 - 2k + 1 + 4k}{2^2} = \frac{k^2 + 2k + 1}{2^2} = \left(\frac{k+1}{2}\right)^2$$

b) Ist $k = n^2$ eine Quadratzahl, so erhalten wir

$$n^2 + \left(\frac{n^2-1}{2}\right)^2 = \left(\frac{n^2+1}{2}\right)^2$$

bzw. nach Multiplikation mit 4 die Gleichung

$$(2n)^2 + (n^2-1)^2 = (n^2+1)^2$$

sodass man mit $(x,y,z) = (2n, n^2-1, n^2+1)$ ein pythagoräisches Zahlentripel erhält.
Setzt man hierin für n die Zahlen 3; 4; 5 und 6 ein, erhält man die paarweise voneinander verschiedenen pythagoräischen Tripel $(6; 8; 10)$, $(8; 15; 17)$, $(10; 24; 26)$ und $(12; 35; 37)$.

Bemerkung: Die Definition der Verschiedenheit ist mit seiner Einschränkung auf natürliche „Streckungsfaktoren“ ungünstig, da dann z. B. auch die Tripel $(6; 8; 10)$ und $(9; 12; 15)$ nach dieser Definition voneinander verschieden wären, obwohl beide nicht vom Tripel $(3; 4; 5)$ verschieden sind.

Aufgabe 131032:
Man ermittle alle Paare $(x; y)$ ganzer Zahlen x, y, die die Gleichung $2x^3 + xy - 7 = 0$ erfüllen!

Lösung von cyrix:
Die Gleichung ist äquivalent zu $x \cdot (2x^2 + y) = 7$, sodass x ein ganzzahliger Teiler von 7 ist und damit nur die folgenden vier Fälle zu möglich sind:

1. Fall: $x = 1$. Dann folgt $y = \frac{7}{1} - 2 \cdot 1^2 = 5$.
2. Fall: $x = -1$. Dann folgt $y = \frac{7}{-1} - 2 \cdot (-1)^2 = -9$.
3. Fall: $x = 7$. Dann folgt $y = \frac{7}{7} - 2 \cdot 7^2 = -97$.
4. Fall: $x = -7$. Dann folgt $y = \frac{7}{-7} - 2 \cdot (-7)^2 = -99$.

Die Proben bestätigen jeweils die Ergebnisse, sodass wir vier Lösungspaare erhalten, nämlich $(x,y) \in \{(-7,-99),(-1,-9),(1,5),(7,-97)\}$.

Aufgabe 201034:
Ermitteln Sie alle Tripel (a,h,x) von Null verschiedener natürlicher Zahlen mit folgender Eigenschaft!
Wenn a und h die Maßzahlen der in Zentimeter gemessenen Grundkantenlänge bzw. Höhenlänge einer geraden quadratischen Pyramide sind, dann hat sowohl die in Quadratzentimeter gemessene Oberfläche als auch das in Kubikzentimeter gemessene Volumen dieser Pyramide die Maßzahl x.

Lösung von MontyPythagoras:
Das Volumen ist
$$x = \frac{1}{3}a^2h$$
Die Oberfläche ist
$$x = a^2 + 4 \cdot \left(\frac{1}{2}a\sqrt{h^2 + \frac{1}{4}a^2}\right) = a^2 + a\sqrt{a^2+4h^2}$$
Somit muss gelten:
$$\frac{1}{3}a^2h = a^2 + a\sqrt{a^2+4h^2}$$
Dabei müssen beide Seiten der Gleichung ganzzahlig sein. Man kann durch a teilen, und auch dann noch müssen beide Seiten ganzzahlig sein:
$$\frac{1}{3}ah = a + \sqrt{a^2+4h^2}$$
(Begründung: a^2h muss durch 3 teilbar sein. Entweder a ist ein Vielfaches von 3, dann ist auch $\frac{1}{3}ah$ immer noch ganzzahlig, oder h ist durch drei teilbar, dann ist $\frac{1}{3}ah$ auf jeden Fall auch ganzzahlig). Wir lösen zunächst die Gleichung nach a auf:
$$\left(\frac{1}{3}h - 1\right)a = \sqrt{a^2+4h^2} \qquad \rightarrow \qquad \frac{1}{9}h^2a^2 - \frac{2}{3}ha^2 + a^2 = a^2 + 4h^2$$
$$a^2 = \frac{4h}{\frac{1}{9}h - \frac{2}{3}} = \frac{36h}{h-6} \qquad \rightarrow \qquad a = 6\sqrt{\frac{h}{h-6}}$$
Somit muss $\frac{h}{h-6}$ eine Quadratzahl sein. Offensichtlich muss $h > 6$ gelten, aber andererseits auch
$$\frac{h}{h-6} \geq 4$$
denn $\frac{h}{h-6} = 1$ ist nicht möglich. Daraus folgt: $h \geq 4h - 24$ und $h \leq 8$.
Daher kommen für h nur die Zahlen 7 und 8 in Frage, wobei für $h = 7$ keine Quadratzahl vorliegt. Somit gilt $h = 8$, und durch Einsetzen erhält man $a = 12$ und $x = 384$. Das einzige Tripel, was die Bedingungen erfüllt, lautet also $(a;h;x) = (12;8;384)$.

Aufgabe 211031:
Ermitteln Sie alle Tripel (a,b,c) natürlicher Zahlen mit folgenden Eigenschaften!
(1) Es gilt $0 < a \leq b \leq c$.
(2) In einem Quader mit der Länge a cm, der Breite b cm und der Höhe c cm beträgt die Summe aller Kantenlängen ebenso viele Zentimeter, wie das Volumen Kubikzentimeter beträgt.

Lösung von cyrix:
(2) bedeutet, dass die Gleichung $4(a+b+c) = abc$ zu lösen ist. Wegen (1) ist $abc = 4(a+b+c) \leq 12c$, also $ab \leq 12$ und damit $a \leq 3$.

Fall 1: $a = 1$. Dann ist die Gleichung $bc = 4(1+b+c)$ mit $b \leq 12$ zu lösen.
Fall 1.1: $b = 4$. Dann erhält man $4c = 4(5+c)$, was keine Lösung besitzt.
Fall 1.2: $b \neq 4$. Es gilt $c = \frac{4(b+1)}{b-4}$. Wegen $\{ggT(b+1,b-4) = \text{ggT}(b-4,5) \in \{1,5\}$ kann c höchstens dann eine natürliche Zahl sein, wenn $b-4$ ein Teiler von $4 \cdot 5 = 20$ ist. Tatsächlich liefern die verbleibenden Möglichkeiten $8 = 12-4 \geq b-4 = 1,2,4,5$ die Lösungen $(1,5,24), (1,6,14), (1,8,9)$ und $(1,9,8)$, wobei die letzte wegen $c < b$ entfällt.

Fall 2: $a = 2$. Dann ist die Gleichung $2bc = 4(2+b+c)$ bzw. $bc = 2(2+b+c)$ mit $2 \leq b \leq 6$ zu lösen.
Fall 2.1: $b = 2$. Dann ist $2c = 2(4+c)$, was keine Lösung besitzt.
Fall 2.2: $b \neq 2$. Man erhält $c = \frac{2(b+2)}{b-2} = 2 + \frac{8}{b-2}$, was nur für $b-2|8$ natürliche Zahlen ergibt. Wegen $4 = 6-2 \geq b-2$ erhält man für $b-2 = 1,2,4$ die Lösungen $(2,3,10), (2,4,6)$ und $(2,6,4)$, wobei die letzte wieder wegen $c < b$ entfällt.

Fall 3: $a = 3$. Dann ist die Gleichung $3bc = 4(3+b+c)$ mit $3 \leq b \leq 4$ zu lösen.
Fall 3.1: $b = 3$. Dann ist $9c = 4(6+c)$ bzw. $5c = 24$, was keine Lösung in natürlichen Zahlen besitzt.
Fall 3.2: $b = 4$. Dann ist $12c = 4(7+c)$ bzw. $3c = 7+c$, also $c = \frac{7}{2} \notin \mathbb{N}$, sodass es auch hier keine Lösung gibt.
Insgesamt erhalten wir also die folgenden fünf Lösungstripel:

$$L = \{(1,5,24), (1,6,14), (1,8,9), (2,3,10), (2,4,6)\} \; .$$

Aufgabe 221031:
Ermitteln Sie alle diejenigen Quintupel (x,y,z,u,v) aus natürlichen Zahlen, für die

$$0 < x \leq y \leq z \leq u \leq v \qquad \text{und} \qquad x+y+z+u+v = x \cdot y \cdot z \cdot u \cdot v$$

gilt!

Lösung von Nuramon:
Es gibt offenbar keine Lösung, in der $x = y = z = u = v$ gilt. Daher ist $5v > x+y+z+u+v = xyzuv$, also $xyzu < 5$. Es bleiben vier Fälle:

1. Fall: $xyzu = 1$.
Das ist nur möglich, wenn $x = y = z = u = 1$. Also müsste $1+1+1+1+v = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot v$ gelten, was unmöglich ist.

2. Fall: $xyzu = 2$.
Dann ist $(x,y,z,u) = (1,1,1,2)$ und daher $1+1+1+2+v = 2v$, also $v = 5$.

3. Fall: $xyzu = 3$.
Dann ist $(x,y,z,u) = (1,1,1,3)$ und daher $1+1+1+3+v = 3v$, also $v = 3$.

4. Fall: $xyzu = 4$.
Dann ist $(x,y,z,u) = (1,1,2,2)$ oder $(x,y,z,u) = (1,1,1,4)$.

Im ersten Fall folgt aus $1+1+2+2+v = 4v$, dass $v = 2$. Im anderen Fall steht $1+1+1+4+v = 4v$ im Widerspruch zu $v \in \mathbb{N}$.

Insgesamt erhalten wir also, dass (1,1,1,2,5), (1,1,1,3,3) und (1,1,2,2,2) alle gesuchten Quintupel sind.

Aufgabe 221033:
Beweisen Sie, dass $\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{7}$ eine irrationale Zahl ist!

Lösung von MontyPythagoras:
Sei

$$r=\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{7}$$

Dann folgt:

$$\sqrt{5}+\sqrt{7}=r-\sqrt{2}$$

Quadrieren:

$$12+2\sqrt{35}=r^2+2-2r\sqrt{2}$$
$$2\sqrt{35}=(r^2-10)-2r\sqrt{2}$$

Noch einmal quadrieren:

$$140=r^4-20r^2+100+8r^2-4r(r^2-10)\sqrt{2}$$
$$4r(r^2-10)\sqrt{2}=r^4-12r^2-40$$
$$\sqrt{2}=\frac{r^4-12r^2-40}{4r(r^2-10)}$$

Wenn r eine rationale Zahl wäre, dann wäre die rechte Seite dieser Gleichung eine rationale Zahl. Dann müsste aber auch $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl sein, was nicht der Fall ist. Aus der Irrationalität von $\sqrt{2}$, die als bekannt vorausgesetzt wird, folgt somit die Irrationalität von $\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{7}$.

Aufgabe 231034:
Jürgen überlegt: Im Jahre 1983 begann die 23. OJM. Für mich persönlich wird es der 5. Start sein. Unter Verwendung dieser Zahlen bildet Jürgen die Gleichung

$$1983+23\cdot x^2=5\cdot y^2 \qquad (1)$$

Gibt es ganze Zahlen x und y, für die diese Gleichung (1) gilt?

Lösung von cyrix:
Gäbe es solche ganze Zahlen, so müsste die Gleichung auch bei der Betrachtung modulo 8 erfüllt sein.
Da Quadratzahlen bei der Teilung durch 8 nur die Reste 0, 1 oder 4 lassen können, ist die linke Seite der Gleichung $1983+23\cdot x^2 \equiv 7+7\cdot x^2 \pmod 8$ in einer der Restklassen 7, 6 oder 3 modulo 8, während die rechte in einer der Restklassen 0, 5 oder 4 modulo 8 liegt.
Es kann also keine Gleichheit modulo 8 und damit auch nicht in den ganzen Zahlen gelten, sodass diese Gleichung keine ganzzahlige Lösung besitzt.

Aufgabe 251031:
Ermitteln Sie alle diejenigen geordneten Paare $(a;b)$ von ganzen Zahlen a und b, die die Gleichung $a+b=(a-b)^2$ erfüllen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, (a,v) sei ein Paar von ganzen Zahlen, die die genannte Gleichung erfüllen. Da a und b ganze Zahlen sind, ist auch ihre Differenz eine ganze Zahl g.

Damit gilt $a-b=g$ sowie $a+b=g^2$ und damit

$$a=\frac{1}{2}(g^2+g)=\frac{1}{2}g(g+1) \qquad ; \qquad b=\frac{1}{2}(g^2-g)=\frac{1}{2}g(g-1)$$

Also erfüllen höchstens alle Paar

$$\left(\frac{1}{2}g(g+1);\frac{1}{2}g(g-1)\right)$$

mit ganzzahligem m die in der Aufgabe genannte Gleichung. Sie erfüllen diese Gleichung tatsächlich, denn es ist

$$\frac{1}{2}g(g+1)+\frac{1}{2}g(g-1)=g^2=\left(\frac{1}{2}g(g+1-g+1)\right)^2$$

und sowohl $\frac{1}{2}g(g+1)$ als auch $\frac{1}{2}g(g-1)$ sind ganze Zahlen.

Aufgabe 261034:
Ermitteln Sie unter allen denjenigen Werten, die

$$z=x^2+y^2+2x-22 \qquad (1)$$

für ganzzahlige x und y annehmen kann, den kleinsten Wert z, der eine natürliche Zahl ist!
Geben Sie alle diejenigen Paare $(x;y)$ ganzer Zahlen an, bei denen sich in (1) dieser Wert z ergibt!

Lösung von Steffen Polster:
Umformen von (1) ergibt

$$z=x^2+y^2+2x-22=(x+1)^2+y^2-23$$

Damit z eine natürliche Zahl wird, muss $(x+1)^2+y^2-23\geq 0$ sein. Die kleinste natürliche Zahl ist 0, d. h. es müsste $(x+1)^2+y^2=23$ sein.
Eine Darstellung der 23 als Summe zweier Quadratzahlen existiert aber nicht, ebenso nicht für 24. Erst die 25 kann als Summe zweier ganzzahliger Quadratzahlen dargestellt werden, d. h. $z=2$ ist der kleinste Wert, der eine natürliche Zahl ist.
Zur Bestimmung der entsprechenden Paare (x,y) wird die 25 zerlegt

$$(x+1)^2+y^2=25=0+25=25+0=9+16=16+9$$

Damit sind folgende Möglichkeiten und die daraus resultierenden Paare möglich:

$(x+1)^2$	$x+1$	x_i	y^2	y_i	Paare (x,y)
0	0	-1	25	± 5	$(-1{,}5);(-1,-5)$
25	± 5	$-6;4$	0	0	$(-6{,}0);(4{,}0)$
9	± 3	$-4;2$	16	± 4	$(-4,-4);(-4,4);(2,-4);(2,4)$
16	± 4	$-5;3$	9	± 3	$(-5,-3);(-5,3);(3,-3);(3,3)$

Damit existieren 12 Paare (x,y) für die z den kleinstmöglichen Wert 2 annehmen kann.

Aufgabe 271034:
Ermitteln Sie alle diejenigen positiven rationalen Zahlen x, für die $x^{2x}=\frac{1}{2}$ gilt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Jede positive rationale Zahl x hat seine Darstellung

$$x=\frac{p}{q} \qquad (1)$$

mit natürlichen Zahlen $p, q > 0$, die zueinander teilerfremd sind. Hierfür ist die geforderte Gleichung der Reihe nach äquivalent mit

$$\left(\frac{p}{q}\right)^{\left(\frac{2p}{q}\right)} = \frac{1}{2}$$
$$\left(\frac{p}{q}\right)^{2p} = \left(\frac{1}{2}\right)^{q}$$
$$2^q \cdot p^{2p} = q^{2p} \tag{2}$$

Wegen der Teilerfremdheit von p, q folgt aus (2), dass in der Primfaktorzerlegung von q nur der Primfaktor 2 auftreten kann und in der von p überhaupt kein Primfaktor, d. h., es muss

$$q = 2^m \tag{3}$$

mit einer natürlichen Zahl m und $p = 1$ (4) gelten. Für diese p,q ist (2) äquivalent mit

$$2^{2^m} = 2^{2m} \quad \text{mit} \qquad 2^m = 2m \tag{5}$$

Unter den natürlichen Zahlen $m = 0{,}1{,}2$ gilt (5) genau für $m = 1$ und $m = 2$, Vergrößert man m für $m \geq 2$ jeweils um 1, so wird die rechte Seite von (5) um 2 vergrößert, die linke Seite aber verdoppelt, d. h. um 2^m und damit um mindestens 4 vergrößert. Für alle $m \geq 3$ ist somit (5) nicht erfüllt. Demnach ist $m = 1$ oder $m = 2$.

Folglich sind nach (1), (3), (4) diejenigen positiven rationalen Zahlen x, für die die geforderte Gleichung gilt, genau die Zahlen

$$x = \frac{1}{2} \qquad \text{und} \qquad x = \frac{1}{4}$$

Aufgabe 291031:
Man stelle fest, ob die Zahl

$$x = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + ... + \sqrt{1989 + \sqrt{1990}}}}}$$

rational oder irrational ist.

Lösung von Nuramon:
Es sei festgestellt, dass x eine reelle Zahl ist und somit rational oder irrational ist.
Tatsächlich können wir sogar zeigen, dass x irrational ist: Wäre x nämlich rational, so wäre auch

$$((\dots(((x^2-1)^2-2)^2-3)^2-\dots)^2-1988)^2-1989=\sqrt{1990}$$

rational. Da 1990 durch 10 aber nicht durch 100 teilbar ist, ist 1990 keine Quadratzahl und somit ist $\sqrt{1990}$ irrational.

Aufgabe 291036:
a) Man beweise, dass es zu jeder natürlichen Zahl k eine natürliche Zahl m sowie eine Möglichkeit gibt, m Vorzeichen (jeweils $+$ oder $-$) derart zu wählen, dass mit den gewählten Vorzeichen

$$\pm 1^2 \pm 2^2 \pm 3^2 \pm ... \pm m^2 = k \qquad (*)$$

gilt.
b) Man beweise, dass es zu jeder natürlichen Zahl k sogar unendlich viele verschiedene natürliche Zahlen m und zugehörige Vorzeichenwahlen gibt, mit denen (1) gilt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Man bestätigt durch Nachrechnen

$$1^2+2^2-3^2+4^2-5^2-6^2+7^2=0 \qquad (0)$$
$$1^2=1 \qquad (1)$$
$$-1^2-2^2-3^2+4^2=2 \qquad (2)$$
$$-1^2+2^2=3 \qquad (3)$$

sowie für jede natürliche Zahl n

$$(n+1)^2-(n+2)^2-(n+3)^2+(n+4)^2=2n-4n-6n+8n+1^2-2^2-3^2+4^2=4 \qquad (4)$$

Für jede natürliche Zahl k gibt es natürliche Zahlen q,r mit $k=r+4q$ und $r\leq 3$.
Setzt man $m_0=7$, $m_1=1$, $m_2=4$, $m_3=2$, so kann man nach (0), (1), (2) oder (3) die Zahl r in der Form

$$r=\pm 1^2 \pm ... \pm m_r^2$$

darstellen. Ist $q=0$, so ist damit k in der geforderten Form (*) dargestellt.
Ist $q>0$, so kann man $n_1=m_r$, $n_2=m_r+4$, ..., $n_q=m_r+4(q-1)$ setzen und dann nach (4), angewandt auf $n=n_1$, $n=n_2$, ..., $n=n_{q-1}$, die Zahl k in der geforderten Form (*) nämlich

$$\begin{aligned} k=r+4q &= \pm\, 1^2 \pm ... \pm m_r^2 \\ &\quad + (n_1+1)^2-(n_1+2)^2-(n-1+3)^2+(n_1+4)^2 \\ &\quad ... \\ &\quad + n_q+1)^2-(n_q+2)^2-(n_q+3)^2+(n_q+4)^2 \end{aligned}$$

darstellen, w. z. b. w.

b) Für jede natürliche Zahl m folgt aus (4), angewandt mit $n=m$ und $n=m+4$

$$(m+1)^2-(m+2)^2-(m+3)^2+(m+4)^2-(m+5)^2+(m+6)^2+(m+7)^2-(m+8)^2=4-4=0$$

Zu jeder; nach a) existierenden; Darstellung

$$k=\pm 1^2 \pm ... \pm m^2$$

gibt es daher auch die Darstellung

$$k=\pm 1^2 \pm ... \pm m^2+(m+1)^2-(m+2)^2-...+(m+7)^2-(m+8)^2$$

Dieses Bilden weiterer Darstellungen der Zahl k kann man beliebig oft fortsetzen. Damit ist auch der in b) verlangte Beweis geführt.

Aufgabe 311034:
a) Untersuchen Sie, wie viele rationale Zahlen t es insgesamt gibt, die den folgenden drei Bedingungen (1), (2), (3) genügen
(1) Es gilt $t>1$.
(2) Die Zahl $\sqrt{t+\sqrt{t}}$ ist rational.
(3) In der Darstellung $t=\frac{n}{m}$ als vollständig gekürzter Bruch zweier natürlicher Zahlen n,m ist $n=1000$.
b) Lösen Sie dieselbe Aufgabe, wenn in der Bedingung (3) die Gleichung $n=10000$ anstelle von $n=1000$ steht!

Lösung von cyrix:
a) Falls $t,s\in\mathbb{Q}$ eine Lösung der Gleichung $\sqrt{t+\sqrt{t}}=s$ ist, gilt $\sqrt{t}=s^2-t\in\mathbb{Q}$. Also ist t das Quadrat eine rationalen Zahl und in der gekürzten Darstellung $t=\frac{n}{m}$ müssen n,m Quadrate in $\mathbb{N}$ sein. Dieses ist

für $n = 1000$ nicht der Fall. Daher gibt es keine Lösung.

b) Setze $r := \sqrt{t} = \frac{100}{q} \in \mathbb{Q}$ mit $q^2 = m$. Aus (1) folgt $q < 100$.
Die Gleichung $\sqrt{t + \sqrt{t}} = s$ ist äquivalent zu $r(r+1) = s^2 \iff 100(100+q) = (qs)^2 \in \mathbb{N}$. Die Gleichung hat genau dann eine Lösung, wenn $100+q$ ein Quadrat in $\mathbb{N}$ ist. Daher gilt wegen (1): $q \in \{21,44,69,96\}$. Da eine vollständig gekürzte Lösung gesucht ist, fällts $q = 44$ weg und somit gibt es für t die drei Lösungen $\frac{10000}{21^2}, \frac{10000}{69^2}, \frac{10000}{96^2}$.

Bemerkung:
Ohne die Bedingung (1) gibt es in b) unendlich viele Lösungen $t = \frac{10000}{(a^2-100)^2}$ mit $a \in \mathbb{N}, a > 10$ und $\mathrm{ggT}(a,10) = 1$. Diese ergeben eine alternative Lösung zu Aufgabe 331042.

Aufgabe 321034:
Ermitteln Sie alle diejenigen Tripel $(x;y;z)$ natürlicher Zahlen x, y, z, für die gilt:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{4}{5}$$

Lösung von cyrix:
O. B. d. A. gelte $0 < x \leq y \leq z$. Dann ist $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{y} \geq \frac{1}{z} > 0$ und damit $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{15} > \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$, also $x < 4$. Es ist auch $x > 1$, da sonst $x = 1$, also $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} > \frac{1}{x} = 1$ im Widerspruch zur Gleichung aus der Aufgabenstellung gelten würde. Es verbleiben zwei Möglichkeiten für x.

Fall 1: Es ist $x = 2$. Dann ist die folgende Gleichung zu lösen: $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{4}{5} - \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$. Wegen $y \leq z$ ist $\frac{1}{y} \geq \frac{1}{z}$, also $\frac{1}{y} \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{10} = \frac{3}{20} > \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$, sodass $y \leq 6$ folgt. Wegen $\frac{1}{3} > \frac{3}{10}$ ist auch $y \geq 4$, da sonst $\frac{1}{y} \geq \frac{1}{3}$ mit analogem Widerspruch wie oben folgen würde.

Fall 1.1: Es ist $y = 4$. Dann folgt $\frac{1}{z} = \frac{3}{10} - \frac{1}{4} = \frac{6-5}{20} = \frac{1}{20}$, also $z = 20$.

Fall 1.2: Es ist $y = 5$. Dann folgt $\frac{1}{z} = \frac{3}{10} - \frac{1}{5} = \frac{3-2}{10} = \frac{1}{10}$, also $z = 10$.

Fall 1.3: Es ist $y = 6$. Dann folgt $\frac{1}{z} = \frac{3}{10} - \frac{1}{6} = \frac{9-5}{30} = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$, sodass es hier keine Lösung gibt.

Fall 2: Es ist $x = 3$. Dann ist folgende Gleichung zu lösen: $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{4}{5} - \frac{1}{3} = \frac{12-5}{15} = \frac{7}{15}$. Dann ist wegen $\frac{1}{y} \geq \frac{1}{z}$ auch $\frac{1}{y} \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{15} = \frac{7}{30} > \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$, also $y \leq 4$. Wegen $y \geq x$ ist auch $y \geq 3$.

Fall 2.1: Es ist $y = 3$. Dann folgt $\frac{1}{z} = \frac{7}{15} - \frac{1}{3} = \frac{7-5}{15} = \frac{2}{15}$, sodass es hier keine Lösung gibt.

Fall 2.2.: Es ist $y = 4$. Dann folgt $\frac{1}{z} = \frac{7}{15} - \frac{1}{4} = \frac{28-15}{60} = \frac{13}{60}$, sodass es auch hier keine Lösung gibt.

Zusammenfassend erfüllen also genau die Tripel
$(3,4,20), (3,20,4), (4,3,20), (4,20,3), (20,3,4), (20,4,3), (3,5,10), (3,10,5), (5,3,10), (5,10,3), (10,3,5), (10,5,3)$ positiver ganzer Zahlen die Gleichung.

IV Runde 4

Aufgabe 021041:
Bestimmen Sie alle Paare $(x; y)$ der positiven ganzen Zahlen x und y, für die $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{50}$ ist!

Lösung von Manuela Kugel:
Abschätzung nach unten: $x > 0$ und $y > 0$; Abschätzung nach oben: $\sqrt{x} = \sqrt{50} - \sqrt{y} < \sqrt{50}$, also $x < 50$; analog für y.

$$\begin{aligned} \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{50},\ \text{also} \\ x &= 50 + y - 2\sqrt{50y} \\ &= 50 + y - 10\sqrt{2y}. \end{aligned}$$

Damit muss $\sqrt{2y}$ ganzzahlig sein. Dies wird durch $y = 2\sqrt{a}^2$ mit $a \in \mathbb{N}$ erreicht. In den obigen Grenzen bedeutet dies:

$$\begin{aligned} y_1 &= 2 \cdot 1^2 = \ \ 2 \Rightarrow x_1 = 32; \qquad & y_2 &= 2 \cdot 2^2 = \ \ 8 \Rightarrow x_2 = 18; \\ y_3 &= 2 \cdot 3^2 = 18 \Rightarrow x_3 = \ \ 8; \qquad & y_4 &= 2 \cdot 4^2 = 32 \Rightarrow x_4 = \ \ 2. \end{aligned}$$

Die Probe bestätigt alle Lösungen.

Aufgabe 091041:
Zu ermitteln sind alle Paare natürlicher Zahlen derart, dass jedes der Paare zusammen mit der Zahl 41 ein Tripel bildet, für das sowohl die Summe der drei Zahlen des Tripels als auch die Summe von je zwei beliebig aus dem Tripel ausgewählten Zahlen Quadrate natürlicher Zahlen sind.

Lösung von Nuramon:
Gesucht sind natürliche Zahlen $a,b \in \mathbb{N}$ und $p,q,r,s \in \mathbb{N}$, so dass die Gleichungen

$$a + b + 41 = p^2 a + b = q^2 a + 41 = r^2 b + 41 = s^2$$

erfüllt sind. Die Differenz der ersten beiden Gleichungen ergibt $41 = p^2 - q^2 = (p+q)(p-q)$. Da p,q natürliche Zahlen sind, ist die einzige Lösung $p + q = 41, p - q = 1 \iff p = 21, q = 20$ und somit $a + b = 400$.
Die beiden letzten Gleichungen ergeben direkt die Abschätzung $r,s \geq 7$. Durch Addition dieser erhalten wir $r^2 + s^2 = a + b + 82 = 482$, woraus $r,s \leq 20$ folgt. Die Endziffer einer Quadratzahl kann nur die Werte 0,1,4,5,6,9 annehmen.
Damit die Summe zweier Quadratzahlen die Endziffer 2 hat, sind für r^2,s^2 nur die Endziffern 1,6 und somit für r,s nur die Endziffern 1,4,6,9 möglich. Daher gilt $r,s \in \{9,11,14,16,19\}$ und man findet, dass $(r,s) = (11,19)$ oder $(r,s) = (19,11)$ gelten muss. Dadurch ergeben sich $(a,b) = (80,320)$ und $(a,b) = (320,80)$ als einzige Lösungen.

Aufgabe 091046:
Man beweise folgenden Satz!
Wenn in einer quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ die Koeffizienten a, b, c sämtlich ungerade Zahlen sind, dann hat die Gleichung keine rationale Lösung.

Lösung von cyrix:
Wir nehmen an, es gäbe eine rationale Lösung $\frac{p}{q}$ mit ganzzahligen und teilerfremden p und q der quadratischen Gleichung. Einsetzen und multiplizieren mit q^2 liefert dann

$$ap^2 + bpq + cq^2 = 0$$

Wären p und q beide ungerade, dann auch ap^2, bpq und cq^2, da alle drei Koeffizienten nach Aufgabenstellung selbst ungerade sind. Also ist es auch die Summe dieser drei Produkte, was ein Widerspruch darstellt, da natürlich 0 gerade ist.

Wäre dagegen p gerade und q ungerade, so ist wieder cq^2 ungerade, aber ap^2 und bpq beide gerade, sodass die Summe wieder eine ungerade Zahl und damit nicht 0 ergibt. Widerspruch. Der analoge Widerspruch ergibt sich auch, wenn q gerade und p ungerade ist.
Und wären p und q beide gerade, so wären sie nicht mehr teilerfremd.
Also ergibt sich in jedem Fall ein Widerspruch zur Annahme der Existenz einer rationalen Lösung, sodass es keine rationale Lösung geben kann, $\Box$.

Aufgabe 131043B:
Man ermittle alle ganzzahligen Zahlenpaare $(x; y)$, die die Gleichung $(x + 2)^4 - x^4 = y^3$ erfüllen!

Lösung von cyrix:
Ist $y = 0$, dann $(x + 2)^4 = x^4$, also $|x + 2| = |x|$. Da $x + 2 \neq x$ gilt, muss dann $x + 2 = -x$ und also $x = -1$ sein. Tatsächlich bestätigt die Probe das Lösungspaar $(-1{,}0)$.
Sei ab nun $y \neq 0$.
Es ist

$$y^3 = (x+2)^4 - x^4 = ((x+2)^2 + x^2) \cdot ((x+2)^2 - x^2) = (2x^2 + 4x + 4) \cdot (4x + 4) = 2 \cdot (x^2 + 2x + 2) \cdot 4 \cdot (x + 1)$$

Also ist y^3 durch 8 und damit y durch 2 teilbar. Sei $t \neq 0$ die ganze Zahl mit $y = 2t$. Dann geht die Gleichung über in $t^3 = (x^2 + 2x + 2) \cdot (x + 1)$. Insbesondere sind mit $t \neq 0$ auch beide Faktoren ungleich Null. Damit besitzen diese Zahlen alle bis auf die Reihenfolge eindeutige Primfaktorzerlegungen. (Für negative Zahlen sei dies die Primfaktorzerlegung ihres Betrags multipliziert mit (-1).)

Wegen $x^2 + 2x + 2 = (x + 1) \cdot (x + 1) + 1$ sind die beiden Faktoren teilerfremd. Sei nun p ein Primteiler von t. Dann ist diese auch Teiler von genau einem der beiden Faktoren $x^2 + 2x + 2$ und $x + 1$. Wenn p in der Primfaktorzerlegung von $t \neq 0$ mit der Vielfachheit a vorkommt (d. h. $p^a | t$, aber $p^{a+1} \nmid t$), dann in t^3 mit der Vielfachheit $3a$. Da nur einer der beiden Faktoren $x^2 + 2x + 2$ und $x + 1$ durch p teilbar ist, muss also in der Primfaktorzerlegung dieses Faktors dann p auch in der gleichen Vielfachheit $3a$ enthalten sein.

Da dies für jeden Primteiler von t und damit $t^3 = (x^2 + 2x + 2) \cdot (x + 1)$ gilt, müssen also aufgrund der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegungen alle in den Primfaktorzerlegungen von $x^2 + 2x + 2$ bzw. $x + 1$ auftauchenden Primzahlen eine durch drei teilbare Vielfachheit besitzen. Damit sind aber $x^2 + 2x + 2$ und $x + 1$ Kubikzahlen. Mit $x + 1$ ist auch $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$ eine Kubikzahl, sodass $x^2 + 2x + 1$ und $x^2 + 2x + 2$ zwei aufeinanderfolgende ganze Zahlen sind, die beide Kubikzahlen sind.

Dafür gibt es nur zwei Möglichkeiten, nämlich -1 und 0 bzw. 0 und 1. Die erste fällt wegen $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2 \geq 0$ weg, sodass nur $x^2 + 2x + 1 = 0$ und $x^2 + 2x + 2 = 1$ verbleibt. Beide Gleichungen führen auf $(x + 1)^2 = 0$, d. h. $x = -1$, was zu $t = y = 0$ führt, also schon oben betrachtet wurde.
Es gibt also genau eine ganzzahlige Lösung dieser Gleichung, nämlich $(x{,}y) = (-1{,}0)$.

Aufgabe 161044:
Man ermittle alle ganzzahligen Zahlenpaare $(x; y)$, die die folgende Gleichung erfüllen!

$$xy + 3x - 2y - 3 = 0$$

Lösung von Nuramon:
Es kann keine Lösung geben, in der $x = 2$ gilt, denn sonst wäre $0 = 2y + 6 - 2y - 3 = 3$.
Also können wir äquivalent umformen zu $y = \frac{3-3x}{x-2} = -3 - \frac{3}{x-2}$.
Damit y ganz ist, muss also $x - 2$ ein Teiler von 3 sein. Somit ist $x \in \{2 \pm 1, 2 \pm 3\} = \{-1,1,3,5\}$.
Folglich ist (x,y) genau dann ein ganzzahliges Lösungspaar, wenn $(x,y) \in \{(-1,-2),(1,0),(3,-6),(5,-4)\}$ gilt.

Alternativ-Lösung von cyrix:
Die Gleichung lässt sich äquivalent umformen in

$$-3 = xy + 3x - 2y - 6 = (x-2)(y+3).$$

Da x, y ganze Zahlen sind, gilt dies für $x-2$ und $y+3$ auch. Da sich -3 nur auf die (unter Beachtung der Reihenfolge) folgenden vier verschiedenen Weisen als Produkt von zwei ganzen Zahlen schreiben lässt, ergeben sich daraus entsprechend die zugehörigen Lösungspaare $(x;y)$:
Es ist

$$\begin{aligned} -3 =& (-3) \cdot 1, \text{ also } (x;y) = (-1;-2), && \text{oder} \\ -3 =& (-1) \cdot 3, \text{ also } (x;y) = (1;0), && \text{oder} \\ -3 =& \quad 1 \cdot (-3), \text{ also } (x;y) = (3;-6), && \text{oder} \\ -3 =& \quad 3 \cdot (-1), \text{ also } (x;y) = (5;-4). \end{aligned}$$

Aufgabe 171042:
Man ermittle alle rationalen Zahlen x, für die die Zahl $z = x^2 + x + 6$ das Quadrat einer natürlichen Zahl ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen eine rationale Zahl x habe die verlangte Eigenschaft. Dann gibt es ganze zueinander teilerfremde Zahlen p,q mit $q > 0$ und $x = \frac{p}{q}$ sowie eine natürliche Zahl n mit

$$\frac{p^2}{q^2} + \frac{p}{q} + 6 = n^2$$

Daraus folgt $p^2 = q(-p - 6q + n^2 q)$. Also ist p^2 durch q teilbar. Wäre q durch eine Primzahl teilbar, so müsste diese folglich in p^2 und damit in p enthalten sein, im Widerspruch zur Teilerfremdheit von p und q. Daher ist $q = 1$ und es gilt:

$$\begin{aligned} p^2 + p + 6 &= n^2 \\ \left(p + \frac{1}{2}\right)^2 &= n^2 - \frac{23}{4} \\ 23 = 4n^2 - (2p+1)^2 &= (2n - 2p - 1)(2n + 2p + 1) \end{aligned}$$

Damit ist die Primzahl 23 in zwei ganzzahlige Faktoren zerlegt, deren Summe eine nichtnegative Zahl, nämlich $4n$, ist. Folglich scheidet von den beiden einzigen ganzzahligen Zerlegungen $23 = 1 \cdot 23 = (-l) \cdot (-23)$ die zweite aus, und es gilt entweder

$$2n - 2p - 1 = 1, \qquad 2n + 2p + 1 = 23 \qquad \text{oder} \qquad 2n - 2p - 1 = 23, \qquad 2n + 2p + 1 = 1$$

Im ersten Fall folgt $n - p = 1$, $n + p = 11$ und daraus $p = 5$, im zweiten folgt $n - p = 12$, $n + p = 0$ und daraus $p = -6$.
Folglich können nur die Zahlen $x = 5$ und $x = -6$ die geforderten Eigenschaften haben. Tatsächlich ist sowohl $25 + 5 + 6 = 36$ als auch $36 - 6 + 6 = 36$ das Quadrat einer natürlichen Zahl.

Alternativ-Lösung von cyrix:
Es gelte $n^2 = x^2 + x + 6$ mit einer natürlichen Zahl n. Da das quadratische Polynom $x^2 + x + 6 - n^2$

nur ganzzahlige Koeffizienten hat und normiert ist, ist jede seiner rationalen Nullstellen auch ganzzahlig, sodass wir $x \in \mathbb{Z}$ annehmen können.
Die Nullstellen lauten

$$x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - (6 - n^2)} = \frac{-1 \pm \sqrt{4n^2 - 23}}{2}.$$

Damit x ganzzahlig ist, muss also $4n^2 - 23$ eine ungerade Quadratzahl sein. Da dieser Radikand kleiner ist als $4n^2 = (2n)^2$, muss $4n^2 - 23 \geq (2n-1)^2 = 4n^2 - 4n + 1$ und damit $n \leq 6$ gelten. Andererseits muss der Radikand auch positiv sein, sodass $4n^2 - 23 \geq 1$ und damit $n \geq 3$ folgt.
Einsetzen der Werte von 3 bis 6 liefert nur im Fall $n = 6$ eine ungerade Quadratzahl für $4n^2 - 23$, nämlich 11^2, sodass wir daraus $x = \frac{-1 \pm 11}{2}$, aso $x = -5$ oder $x = 6$ erhalten. Proben bestätigen diese Werte auch als Lösungen.

Aufgabe 181045:
Ermitteln Sie alle Paare natürlicher Zahlen $(n; z)$, für die $2^n + 12^2 = z^2 - 3^2$ gilt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die gegebene Gleichung ist äquivalent mit

$$z^2 - 2^n = 153 \qquad (1)$$

(I) Angenommen, für ein Paar natürlicher Zahlen $(n; z)$ sei (1) erfüllt.
1. Fall: n ist gerade, d. h., es gilt $n = 2m$ mit natürlichem m. Aus (1) folgt dann

$$(z - 2^m)(z + 2^m) = 153 \qquad (2)$$

Da $153 = 3^2 \cdot 17$ als Zerlegungen in zwei ganzzahlige Faktoren, von denen der erste kleiner als der zweite und dieser (also auch der erste) größer als 0 ist, nur $1 \cdot 153$, $3 \cdot 51$ und $9 \cdot 17$ besitzt, gibt es für (2) höchstens die Möglichkeiten

$$\begin{aligned} z - 2^m &= 1 \quad , \quad z + 2^m = 153 \qquad (3) \\ z - 2^m &= 3 \quad , \quad z + 2^m = 51 \qquad (4) \\ z - 2^m &= 9 \quad , \quad z + 2^m = 17 \qquad (5) \end{aligned}$$

Hiervon führt (3) auf den Widerspruch $2^m = 76$ und (4) auf den Widerspruch $2^m = 24$; (5) führt auf $z = 13$, $2^m = 4$, also $m = 2$, $n = 4$.

2. Fall: n ist ungerade, Es gilt $2 \equiv 1 \pmod 3$, also $2^n \equiv -1 \pmod 3$. Ist nun $z \equiv 0 \pmod 3$, so folgt

$$z^2 - 2^n \equiv 0 + 1 \pmod 3 \qquad (6)$$

ist aber $z \equiv -1 \pmod 3$, so folgt

$$z^2 - 2^n \equiv 1 + 1 \pmod 3 \qquad (7)$$

Wegen $153 \equiv 0 \pmod 3$ ergibt sowohl (6) als auch (7) einen Widerspruch gegen (1). Daher kann (1) nur durch $(4; 13)$ erfüllt werden.
(II) In der Tat erfüllen diesen Zahlen (1), denn er gilt $2^4 + 12^2 = 160 = 169 - 9$. Also ist genau dieses Zahlenpaar das gesuchte.

Alternativ-Lösung von cyrix:
Die Gleichung ist äquivalent zu $z^2 - 2^n = 153$. Da 2^n nicht durch 3 teilbar ist, 153 aber schon, ist auch z^2 nicht durch 3 teilbar. Es folgt $z^2 \equiv 1 \pmod 3$, also auch $2^n \equiv 1 \pmod 3$, was genau für gerade Zahlen $n = 2m$ mit nichtnegativem ganzen m erfüllt ist. Dann jedoch folgt $153 = (z - 2^m)(z + 2^m)$, wobei sich die beiden Faktoren um die Zweierpotenz $2 \cdot 2^m = 2^{m+1}$ unterscheiden und beide positiv sind (da es 153 und der zweite Fator sicher sind). Es ist $153 = 3^2 \cdot 17$, sodass sich als ganzzahlige Faktorisierungen nur $1 \cdot 153$; $3 \cdot 51$ und $9 \cdot 17$ ergeben, von denen ausschließlich in der letzten die Differenz der beiden Faktoren eine Zweierpotenz ist. Es folgt $m = 2$ und mithin $n = 4$ sowie $z = 13$. Einsetzen bestätigt, dass das Paar $(n; z) = (6; 13)$ tatsächlich (die also einzige existierende) Lösung der gegebenen Gleichung ist.

Aufgabe 191043B:
Beweisen Sie, dass es unendlich viele natürliche Zahlen z gibt, für die sich die Gleichung $a^{2m} + b^{2n} + c^{2k} = z$ nicht durch natürliche Zahlen a, b, c, m, n, k erfüllen lässt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Da z die Summe dreier Quadratzahlen, nämlich $(a^m)^2 + (b^n)^2 + (c^k)^2$, sein soll, bietet es sich an, Teilbarkeitsbetrachtungen für solche Zahlen anzustellen. Dabei gelangt man zur Untersuchung der Restklassen von Quadratzahlen bezüglich 8 und erhält:
Falls $x \equiv 0 \pmod 8$ oder $x \equiv 4 \pmod 8$, so $x^2 \equiv 0 \pmod 8$.
Falls $x \equiv 1 \pmod 8$ oder $x \equiv 3 \pmod 8$ oder $x \equiv 5 \pmod 8$ oder $x \equiv 7 \pmod 8$, so $x^2 \equiv 1 \pmod 8$.
Falls $x \equiv 2 \pmod 8$ oder $x \equiv 6 \pmod 8$, so $x^2 \equiv 4 \pmod 8$.

Also können die drei Summanden jeweils nur einen der Rest 0, 1 oder 4 lassen, wenn sie durch 8 dividiert werden. Dann kann systematisch probiert werden:

$$\begin{array}{cccc} 0+0+0=0 & 0+0+1=1 & 0+1+1=2 & 1+1+1=3 \\ & 0+0+4=4 & 0+1+4=5 & 1+1+4=6 \end{array}$$

Damit ist bewiesen, dass Summe $(a^m)^2 + (b^n)^2 + (c^k)^2$ in keinem Fall bei Division durch 8 den Rest 7 lassen kann.
Hiermit haben wir bereits unendlich viele Zahlen z, nämlich all jene, für die eine natürliche Zahl z' existiert, sodass $z = 8z' + 7$ ist, gefunden.

Aufgabe 201041:
Beweisen Sie die folgende Aussage!
Zu jeder natürlichen Zahl $n \geq 2$ gibt es von Null verschiedene natürliche Zahlen $a_1, a_2, ..., a_n$ und b für die gilt:

$$a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 = b^2$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Zum Beweis kann die Methode der vollständigen Induktion herangezogen werden.
Für $n = 2$ gilt wegen $3^2 + 4^2 = 5^2$ die Aussage mit $a_1 = 3$, $a_2 = 4$, $b = 5$. Sei nun k eine natürliche Zahl, so dass die Aussage für $n = k$ gilt, d. h., es gebe von Null verschiedene natürliche Zahlen c_1, c_2, ..., c_k, d mit $d > l$ und

$$c_1^2 + c_2^2 + ... + c_k^2 = d^2 \tag{1}$$

Wir können jedenfalls $k = 2$ setzen. Aus dieser Gleichung ergibt sich durch Multiplikation mit 2^2 die Beziehung

$$(2c_1)^2 + (2c_2)^2 + ... + (2c_k)^2 = (2d)^2 = (d^2 + 1)^2 - (d^2 - 1)^2$$

Setzt man $a_1 = 2c_1$, ..., $a_k = 2c_k$, $a_{k+1} = d^2 - 1$ und $b = d^2 + 1$ so erhält man von Null verschiedene Zahlen $a_1, ..., a_{k+1}, b$ mit $b > 1$ und der Eigenschaft $a_1^2 + ... + a_{k+1}^2 = b^2$, d. h., die Aussage gilt auch für $n = k + 1$.
Durch den Beweis für $n = 2$ und den Schluss von $n = k$ auf $n = k + 1$ ist die Aussage für alle natürlichen Zahlen n, die ≥ 2 sind, bewiesen.

Aufgabe 211045:
Ermitteln Sie alle Mengen a, b, c aus positiven ganzen Zahlen a, b, c, die jeweils zusammen mit der Zahl $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ die Gleichung erfüllen

$$\sqrt{s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)} = 2s$$

Lösung von Nuramon:
Anmerkung: Sind a,b,c die Seitenlängen eines Dreiecks, dann ist $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ sein Flächeninhalt. Andererseits ist der Flächeninhalt des Dreiecks auch gleich dem Produkt aus Inkreisradius und halbem Umfang. In der Aufgabe geht es also darum alle Dreiecke mit ganzzahligen Seitenlängen zu finden, die den Inkreisradius 2 haben.

Es seien $p := s-a$, $q := s-b$ und $r := s-c$. Die zu lösende Gleichung ist dann

$$\sqrt{spqr} = 2s.$$

Wir zeigen zunächst, dass p,q,r positiv sein müssen:
Sei dazu o. B. d. A. $c \geq b \geq a$. Dann ist $b+c > a$ und $a+c > b$. Somit ist auch $p = s-a = \frac{1}{2}(b+c-a) > 0$ und $q = s-b = \frac{1}{2}(a+c-b) > 0$. Wäre $r = s-c < 0$, dann wäre wegen $s > 0$ der Term unter der Wurzel negativ und somit könnte die Gleichung nicht erfüllt sein. Es kann aber auch nicht $s-c = 0$ gelten, denn sonst erhielten wir den Widerspruch $0 = 2s > 0$.

Als nächstes zeigen wir, dass p,q,r ganz sind:
Es ist klar, dass $2p, 2q, 2r, 2s \in \mathbb{N}$ gilt. Wegen $2s-2p = 2a, 2s-2q = 2b, 2s-2r = 2c$ und a,b,$c \in \mathbb{N}$, müssen $2p, 2q, 2r, 2s$ alle die gleiche Parität haben.
Durch quadrieren und multiplizieren mit 2^4 erhalten wir:

$$(2s)(2p)(2q)(2r) = 16(2s)^2.$$

Rechts steht eine gerade Zahl. Also muss auch links eine gerade Zahl stehen, und folglich müssen $2s, 2p, 2q$,$2r$ alle gerade sein. Insbesondere folgt, dass p,q,$r \in \mathbb{N}$.

Nach obigen Bemerkungen und wegen $s = p+q+r$, erhalten wir die äquivalente Gleichung

$$pqr = 4(p+q+r).$$

Auflösen nach p liefert

$$p = \frac{4(q+r)}{qr-4}.$$

(Es ist $qr-4 \neq 0$, denn sonst wäre $0 = p(qr-4) = 4(q+r) > 0$.) Wegen $p > 0$, stellen wir fest, dass $qr-4 > 0$ gelten muss. Also gilt $qr \geq 5$.

Als nächstes finden wir alle Lösungen dieser Gleichung, in der mindestens eine der Variablen p,q,r den Wert 1,2 oder 3 hat. O. B. d. A. sei q diese Variable.

1. Fall: $q = 1$.
Dann ist

$$p = \frac{4(1+r)}{r-4} = 4 + \frac{20}{r-4}.$$

Es muss also $r-4$ ein Teiler von 20 sein. Wegen $r = qr \geq 5$, ist das genau dann erfüllt, wenn $r \in \{5, 6{,}8{,}9{,}14{,}24\}$. Demnach ist $(p$,q,$r)$ ein Lösungstripel, genau dann wenn

$$(p,q,r) \in \{(24, 1, 5), (14{,}1{,}6), (9{,}1{,}8), (8{,}1{,}9), (6{,}1{,}14), (5{,}1{,}24)\}.$$

2. Fall: $q = 2$.
Dann ist

$$p = \frac{4(2+r)}{2r-4} = 2 + \frac{8}{r-2}.$$

Also muss $r-2$ ein Teiler von 8 sein. Da außerdem $2r = qr \geq 5$ ist, muss $r \geq 3$ gelten. Somit ist $r \in \{3{,}4{,}6{,}10\}$. Daher ist $(p$,q,$r)$ ein Lösungstripel, genau dann wenn

$$(p,q,r) \in \{(10{,}2{,}3), (6{,}2{,}4), (4{,}2{,}6), (3{,}2{,}10)\}.$$

3. Fall: $q = 3$.

Dann ist
$$p = \frac{4(3+r)}{3r-4} = 1 + \frac{r+16}{3r-4}.$$
Insbesondere ist $p \geq 2$. Wegen $3r = qr \geq 5$ ist auch $r \geq 2$. Lösungen, in denen $p = 2$ oder $r = 2$ gilt, haben wir oben bereits erfasst. Damit $p \geq 3$ gilt, muss $r + 16 \geq 2(3r-4)$, also $5r \leq 24$ und somit $r \leq 4$ gelten. Durch explizites Einsetzen, sehen wir, dass weder $r = 3$ noch $r = 4$ zu einem ganzzahligem p führen.
Für $q = 3$ finden wir also keine weiteren Lösungen, die wir nicht bereits in einem der oberen beiden Fällen erfasst haben.

Gäbe es eine Lösung von $pqr = 4(p+q+r)$, in der $p,q,r \geq 4$ sind, dann wäre
$$1 = \frac{4(p+q+r)}{pqr} = 4\left(\frac{1}{qr} + \frac{1}{pr} + \frac{1}{pq}\right) \leq 4 \cdot \left(3 \cdot \frac{1}{4 \cdot 4}\right) = \frac{3}{4},$$
was offenbar falsch ist.
Damit sind alle positiv ganzzahligen Lösungen (p,q,r) von $pqr = 4(p+q+r)$, in denen $p \leq q \leq r$ gilt, gegeben durch
$$(p,q,r) \in \{(1,5,24),(1,6,14),(1,8,9),(2,3,10),(2,4,6)\}.$$
Mit $s = p+q+r = \frac{1}{2}(a+b+c)$ und $(a,b,c) = (s-p, s-q, s-r)$ erhalten wir daher, dass alle positiven, ganzzahligen Lösungen (a,b,c) mit $a \geq b \geq c$ von
$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = 2s$$
gegeben sind durch
$$(a,b,c) \in \{(29,25,6),(17,10,9),(20,15,7),(13,12,5),(10,8,6)\}.$$
Alle anderen Lösungstripel (a,b,c) erhält man durch Permutation dieser Tripel.

Aufgabe 221041:
Beweisen Sie folgende Aussage!
Zu jeder natürlichen Zahl $n \geq 2$ gibt es von Null verschiedene natürliche Zahlen $a_1, a_2, ..., a_n$, für die
$$a_1 + a_2 + ... + a_n = a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n$$
gilt.

Lösung von Kornkreis:
Für $n = 2$ wähle $a_1 = a_2 = 2$. Für $n \geq 3$ wähle $a_1 = ... = a_{n-2} = 1$, $a_{n-1} = 2$, $a_n = n$, dann wird
$$\underbrace{1+1+...+1}_{n-2 \text{ Summanden}} + 2 + n = n - 2 + 2 + n = 2n = \underbrace{1 \cdot 1 \cdot ... \cdot 1}_{n-2 \text{ Faktoren}} \cdot 2 \cdot n$$

Aufgabe 221042:
In einem Mathematikzirkel wird diskutiert, für welche Paare $(x;y)$ natürlicher Zahlen x,y mit $x \neq 0$, $y \neq 0$, $x \neq y$ die Zahl $z = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{x+y}$ irrational ist.
Rolf meint: Für unendlich viele der genannten Paare $(x;y)$ ist z rational.
Eva meint: Für unendlich viele der genannten Paare $(x;y)$ ist z irrational.
Untersuchen Sie sowohl für Rolfs als auch für Evas Meinung, ob sie wahr oder falsch ist!

Lösung von MontyPythagoras:
Es ist

$$z-\sqrt{x+y}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$$

Quadrieren:

$$z^2+x+y-2z\sqrt{x+y}=x+y+2\sqrt{xy}$$
$$z^2-2z\sqrt{x+y}=2\sqrt{xy}$$

Erneut quadrieren:

$$z^4+4z^2(x+y)-4z^3\sqrt{x+y}=4xy$$
$$\sqrt{x+y}=\frac{z^4+4z^2(x+y)-4xy}{4z^3}=\frac{1}{4}z+\frac{x+y}{z}-\frac{xy}{z^3}$$

Eva hat recht: wenn z rational wäre, dann müsste immer $\sqrt{x+y}$ rational sein, was offenkundig nicht sein kann, denn wann immer $x+y$ keine Quadratzahl ist, ist $\sqrt{x+y}$ irrational und damit auch z. Es gibt aber unendlich viele Zahlenpaare $(x{,}y)$, für die $x+y$ keine Quadratzahl ist.
Was Rolfs Meinung betrifft, so setzt man $x=(n^2-1)^2$ und $y=4n^2$ mit $n\in\mathbb{N}$. Dann ist

$$z=(n^2-1)+2n+\sqrt{n^4-2n^2+1+4n^2}=n^2-1+2n+n^2+1=2n^2+2n=2n(n+1)$$

z ist in diesem Fall also immer ganzzahlig und damit rational. Damit gibt es auch unendlich viele Zahlenpaare $(x{,}y)$, für die z rational ist.

Aufgabe 231041:
Stellen Sie fest, ob es Quadratzahlen z gibt, die sich in der Form

$$z=n^6+3n^5-5n^4-15n^3+4n^2+12n+3$$

mit einer natürlichen Zahl n darstellen lassen!

Lösung von cyrix:
Nein, die gibt es nicht.
Die Quadratzahl z lässt bei der Teilung durch 4 den Rest 0 oder 1, während für gerade n der Term $n^6+3n^5-5n^4-15n^3+4n^2+12n=z-3$ offenbar durch 4 teilbar ist, also z den Rest 3 bei der Teilung durch 4 lassen würde, und für ungerade n wegen $n^2\equiv 1 \pmod 4$, genauso auch

$$z=n^6+3n^5-5n^4-15n^3+4n^2+12n+3\equiv 1+3n-5-15n+4+12n+3=3 \pmod 4$$

den Rest 3 bei der Teilung durch 4 lässt.
Demnach gibt es kein n, sodass $n^6+3n^5-5n^4-15n^3+4n^2+12n+3$ eine Quadratzahl ist.

Aufgabe 241041:
Ermitteln Sie alle diejenigen geordneten Paare $(x;y)$ ganzer Zahlen, für die $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{1985}$ gilt!

Lösung von cyrix:
Offensichtlich sind (0,1985) und (1985,0) Lösungen aus $\mathbb{Z}$. Dieses sind auch die einzigen Lösungen, wie wir nun zeigen.
Sei $x\neq 0$. Äquivalentes Quadrieren liefert: $x+y+2\sqrt{xy}=1985 \quad (*)$.
Sei nun $y=xt^2$ mit $t\in\mathbb{Q}$. Einsetzen in $(*)$ liefert:

$$x+xt^2+2xt=1985 \iff x=\frac{1985}{(t+1)^2}$$

Teiler von 1985 sind $\{1;5;397;1985\}$. Nur $(t+1)^2=1$ liefert jedoch für rationales t eine Lösung. Die haben wir oben jedoch schon notiert.

Aufgabe 241044:
Ermitteln Sie alle diejenigen Paare $(a;b)$ natürlicher Zahlen, für die $a!+b!=(a+b)!$ gilt!
Hinweis: Für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ ist $n!$ definiert als das Produkt aus allen denjenigen natürlichen Zahlen k, für die $1 \leq k \leq n$ gilt; ferner ist $0! = 1$ definiert.

Lösung von MontyPythagoras:
Aufgrund der Symmetrie gilt allgemein, dass $(b;a)$ eine Lösung ist, wenn $(a;b)$ eine Lösung ist. Wir betrachten nachfolgend daher nur Fälle, für die $a \leq b$ ist. Da $0! = 1$ ist, ist offensichtlich, dass $a > 0$ sein muss, denn sonst müsste $1 + b! = b!$ gelten, was nicht möglich ist. Man kann die Fakultät-Funktion darstellen als

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k$$

Allgemein soll gelten: $a! + b! = (a+b)!$

$$\prod_{k=1}^{a} k + \prod_{k=1}^{b} k = \prod_{k=1}^{a+b} k$$

Wir teilen durch $b!$:

$$\frac{\prod_{k=1}^{a} k}{\prod_{k=1}^{b} k} + 1 = \frac{\prod_{k=1}^{a+b} k}{\prod_{k=1}^{b} k}$$

Da $b \geq a$ und $(a+b) > b$, kann man kürzen:

$$\frac{1}{\prod_{k=a+1}^{b} k} + 1 = \prod_{k=b+1}^{a+b} k$$

Rechts steht eine natürliche Zahl, so dass der Bruch links auch eine natürliche Zahl ergeben muss. Das ist für $b > a$ nicht möglich. Es bleiben also nur noch die Fälle $a = b > 0$ zu untersuchen. Dann muss gelten

$$2\prod_{k=1}^{a} k = \prod_{k=1}^{2a} k \qquad \rightarrow \qquad 2 = \frac{\prod_{k=1}^{2a} k}{\prod_{k=1}^{a} k} \qquad \rightarrow \qquad 2 = \prod_{k=a+1}^{2a} k$$

Das ist nur für $a = 1$ erfüllt, für größere a gilt immer

$$2 \cdot a! < (2a)!$$

Daher ist das Paar $(1;1)$ die einzige Lösung.

Alternativ-Lösung von cyrix:
Aufgrund der Definition der Fakultät gilt für beliebige nichtnegative ganze Zahlen $m \leq n$, dass $m! \mid n!$ und damit natürlich auch $m! \leq n!$ gilt.
Insbesondere ist also wegen $a + b \geq a$ auch $(a+b)!$ und damit auch $b! = (a+b)! - a!$ durch $a!$ teilbar. Genauso folgt analog umgekehrt auch $a! \mid b!$, sodass $a! = b!$ und also $2a! = 2b! = (a+b)!$ folgt.
Wäre $b \geq 2$, so würde

$$2 = \frac{(a+b)!}{a!} \geq (a+1)\cdot(a+2)$$

folgen, woraus $a = 0$ und damit der Widerspruch $2b! = (0+b)! = b!$, also $b! = 0$, folgen würde. Also muss $b \leq 1$ sein, wobei man analog eben auch $b = 0$ ausschließen kann. Es folgt $b = 1$ und durch Vertauschung der Variablen analog auch $a = 1$. Einsetzen bestätigt:

$$1! + 1! = 2 = (1+1)!,$$

sodass $(1;1)$ das einzige Lösungspaar dieser Gleichung ist.

Aufgabe 281041:
Zeigen Sie, dass es genau eine natürliche Zahl n gibt, mit der $2^8 + 2^{11} + 2^n$ eine Quadratzahl ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn für eine natürliche Zahl n die genannte Zahl das Quadrat einer natürlichen Zahl k ist, so folgt

$$2^8 + 2^{11} + 2^n = k^2$$
$$2^n = k^2 - (1+8)\cdot 2^8 = k^2 - (3\cdot 2^4)^2 = (k-48)(k+48) \qquad (1)$$

Wegen der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung muss

$$k - 48 = 2^i \qquad ; \qquad k + 48 = 2^j \qquad (2)$$

mit natürlichen Zahlen i, j sein. Daraus folgt $i < j$ sowie

$$2^j - 2^i = 96 \qquad ; \qquad 2^i \cdot (2^{j-i} - 1) = 2^s \cdot 3$$

Nochmals wegen der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung und da $2^{j-i} - 1$ wegen $i < j$ ungerade ist, folgt $i = 5$, nach (2) also $k = 80$. Hieraus und aus (2) ergibt sich $j = 7$, woraus nach (1) $2n = 2^5 \cdot 2^7$ und $n = 12$ folgt.

II. In der Tat ist $2^8 + 2^{11} + 2^{12} = (1 + 8 + 16)\cdot 2^8 = (5 \cdot 2^4)^2$ eine Quadratzahl.

Aufgabe 301043A:
Untersuchen Sie, ob es eine natürliche Zahl m derart gibt, dass es zu jeder positiven natürlichen Zahl k höchstens m natürliche Zahlen t gibt, mit denen die Zahl $\sqrt{t + k\cdot\sqrt{t}}$ rational ist.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Eine derartige Zahl m gibt es nicht; im Gegenteil gilt:
Für jede natürliche Zahl m gibt es eine natürliche Zahl $k > 0$ und zu ihr mehr als m natürliche Zahlen t, mit denen $\sqrt{t + k\cdot\sqrt{t}}$ rational ist.

Zum Beweis genügt es, für jede natürliche Zahl $m > 0$ ein Beispiel einer natürlichen Zahl $k > 0$ und paarweise voneinander verschiedener Zahlen $t_1, t_2, \ldots, t_{m+1}$ anzugeben und mit ihnen die Zahlen $\sqrt{t_i + k\cdot\sqrt{t_i}}$ $(i = 1, \ldots, m+1)$ als rational nachzuweisen.
Ein solches Beispiel bilden die Zahlen

$$k = (2^2 - 1)\cdot(3^2 - 1)\cdot\ldots\cdot((m+1)^2 - 1)$$
$$t_1 = 0$$
$$t_i = \frac{k^2}{(i^2-1)^2} \qquad (i = 2, \ldots, m+1)$$

Sie sind nämlich sämtlich natürliche Zahlen; k ist positiv; es gilt $t_2 > t_3 > \cdots > t_{m+1} > 0$, also sind $\sqrt{t_1 + k\cdot\sqrt{t_1}} = 0$, $t_1, \ldots, t_{m+1}$ paarweise voneinander verschieden, und die Zahlen

$$\sqrt{t_i + k\cdot\sqrt{t_i}} = \sqrt{\frac{k^2}{(i^2-1)^2} + k\cdot\frac{k}{i^2-1}} = \frac{k}{i^2-1}\sqrt{1 + (i^2-1)}$$
$$= \frac{k}{i^2-1}\cdot i \qquad (i = 2, \ldots, m+1)$$

sind (natürliche, also) rationale Zahlen.
Ein anderes Beispiel bilden die Zahlen $k = 2^{2m+1}$ und $t_i = (2^{2m-1} - 2^i)^4$ $(i = 0, \ldots, m)$, wie aus $t_0 > \cdots > t_m$ und

$$\sqrt{t_i + k\cdot\sqrt{t_i}} = \sqrt[4]{t_i}\sqrt{\sqrt{t_i} + k} = (2^{2m-1} - 2^i)(2^{2m-1} + 2^i)$$

folgt. Zu solchen Beispielen gelangt man z. B., indem man

$$x = \sqrt{t + k \cdot \sqrt{t}}$$

als $x^2 + \frac{k^2}{4} = (\sqrt{t} + \frac{k}{2})^2$ schreibt und mit dem Ansatz $x = p^2 - q^2$, $\frac{k}{2} = 2pq$, $\sqrt{t} + \frac{k}{2} = p^2 +^2$ pythagoreischer Tripel bei passender Wahl von k dann m ganzzahlige $t = (p - \frac{k}{4p})^4$ erhält.

Alternativ-Lösung von cyrix:
Ist der Ausdruck $\sqrt{t + k \cdot \sqrt{t}}$ für natürliches k und t rational, so auch sein Quadrat $t + k \cdot \sqrt{t}$ und also auch $\sqrt{t}$, woraus folgt, dass $t = n^2$ das Quadrat einer natürlichen Zahl n ist.
Der Ausdruck vereinfacht sich damit zu $\sqrt{n^2 + kn}$. Dieser ist genau dann rational, wenn $n^2 + kn = \ell^2$ das Quadrat einer natürlichen Zahl ℓ ist. Ist k gerade, also $k = 2i$ mit einer natürlichen Zahl i, so geht die Gleichung über in $(n + i)^2 - i^2 = \ell^2$ bzw. $i^2 = (n + i)^2 - \ell^2 = (n + i + \ell) \cdot (n + i - \ell)$.
Ist nun $i^2 = p \cdot q$ mit zwei natürlichen Zahlen $p \geq q$ gleicher Parität, so liefert $n + i := \frac{p+q}{2}$ und $\ell := \frac{p-q}{2}$ eine Lösung der vorgenannten Gleichung.
Sei nun z. B. $i = 2^m$ mit einer natürlichen Zahl m. (Dann ist $k = 2^{m+1}$.) Dann können wir als Zerlegungen von i^2 alle Produkte der Form $2^{2m-j} \cdot 2^j$ mit $1 \leq j \leq m$ wählen, was m verschiedene Lösungen mit $n + i = \frac{2^{2m-j}+2^j}{2}$, also $n = 2^{2m-j-1} + 2^{j-1} - 2^m$ und $\ell = \frac{2^{2m-j}-2^j}{2} = 2^{2m-j-1} - 2^{j-1}$ liefert.
Da m hierbei beliebig groß gewählt werden kann, finden wir also für jedes m ein k, sodass der zu untersuchende Ausdruck mindestens für m natürliche Zahlen t einen rationalen Wert annimmt.

Aufgabe 321041:
Gibt es in einer Ebene mit einem x,y-Koordinatensystem eine Kreislinie, die keinen Punkt hat, für den beide Koordinaten rationale Zahlen sind?

Lösung von cyrix:
Der Kreis um den Koordinatenursprung mit Radius 3 ist ein solcher. Die Koordinaten aller Punkte auf diesem erfüllen die Gleichung $x^2 + y^2 = 3$. Ist x rational, so gibt es teilerfremde ganze Zahlen p und $q \neq 0$ mit $x = \frac{p}{q}$.
Also gilt $y^2 = 3 - \left(\frac{p}{q}\right)^2 = \frac{3q^2 - p^2}{q^2}$ bzw. $y = \pm \frac{\sqrt{3q^2 - p^2}}{q}$.
Wäre $y \in \mathbb{Q}$, so also auch $\sqrt{3q^2 - p^2}$. Da $3q^2 - p^2$ eine ganze Zahl ist, müsste dann auch $\sqrt{3q^2 - p^2}$ eine ganze Zahl n sein, also $3q^2 - p^2 = n^2$ für ein $n \in \mathbb{Z}$ gelten.
Quadratzahlen lassen bei der Teilung durch 4 entweder den Rest 1 (bei ungerader Basis) oder 0 (bei gerader Basis). Damit lässt $3q^2 - p^2$ bei der Teilung durch 4 den Rest 0 (wenn p und q beide gerade sind), 3 ((q ungerade, p gerade) oder (q gerade, p ungerade)) oder 2 (beide ungerade).

Da aber auch n eine Quadratzahl ist und den Rest 0 oder 1 bei der Teilung durch 4 lässt, müsste der erste Fall eintreten, was $\{ggT(p,q) \geq 2$ im Gegensatz zur geforderten Teilerfremdheit nach sich zieht, also einen Widerspruch, sodass es keinen rationalen Punkt auf dem Kreis mit Radius 3 um den Koordinatenursprung gibt, $\square$.

Aufgabe 331042:
Man beweise, dass es unendlich viele rationale Zahlen t gibt, für die $\sqrt{t + \sqrt{t}}$ rational ist.

Lösung von cyrix:
Mit dem Ansatz $t = r^2$, reicht es zu zeigen, dass es unendlich viele Zahlen r,$s \in \mathbb{Q}$ mit $r(r + 1) = s^2$ gibt.
Falls r und $r + 1$ Quadrate in $\mathbb{Q}$ sind, gibt es eine Lösung für die Gleichung.
Für $0 < q < p \in \mathbb{N}$ definiere das pythagoreisches Zahlentripel $a := 2pq, b := p^2 - q^2, c =: p^2 + q^2$ und $r := \frac{a^2}{b^2}$. Dann gilt $r + 1 = \frac{c^2}{b^2}$.

Somit ist für $t = \frac{16p^4q^4}{(p^2-q^2)^4}$ der Ausdruck $\sqrt{t+\sqrt{t}}$ rational. Einsetzen ergibt

$$\sqrt{t+\sqrt{t}} = \sqrt{\frac{16p^4q^4}{(p^2-q^2)^4} + \sqrt{\frac{16p^4q^4}{(p^2-q^2)^4}}} = \sqrt{\frac{16p^4q^4}{(p^2-q^2)^4} + \frac{4p^2q^2}{(p^2-q^2)^2}} = \frac{2pq(p^2+q^2)}{(p^2-q^2)^2} \in \mathbb{Q}$$

VII Oberstufe

VII.I Teilbarkeit; Primzahlen; ggT

I Runde 1

Aufgabe 011111:
Es ist zu beweisen, dass bei beliebigem n (n eine natürliche Zahl) die Zahl $6^{2n} - 1$ durch 7 teilbar ist.

Lösung von Korinna Grabski:
Es ist zu zeigen, dass 7 Teiler von $6^{2n} - 1$ für alle natürlichen Zahlen n ist. Die Behauptung können wir auch schreiben als $7 \cdot z = 6^{2n} - 1$, wobei z eine natürliche Zahl ist. Wir führen den Beweis durch vollständige Induktion:
Als Induktionsanfang finden wir die Behauptung für $n = 0$ durch $6^{2\cdot 0} - 1 = 1 - 1 = 0 = 7\cdot$ bestätigt.
Zum Induktionsschritt setzen wir voraus, dass es zu jedem $n = k$ ein $z_k \in \mathbb{N}$ gibt, für welches die Gleichung $7 \cdot z_k = 6^{2k} - 1$ gilt.
Die Induktionsbehauptung lautet dann, dass es für $n = k + 1$ auch ein $z_{k+1} \in \mathbb{N}$ gibt, das die Gleichung $7 \cdot z_{k+1} = 6^{2(k+1)} - 1$ erfüllt. Den Induktionsbeweis führen wir nun mit folgender Gleichungskette:

$$6^{2(k+1)} - 1 = 6^{2k+2} - 1 = 36 \cdot 6^{2k} - 1 = 36 \cdot 6^{2k} - 36 + 35 = 36 \cdot (6^{2k} - 1) + 35 =$$

$$= 36 \cdot 7z_k + 7 \cdot 5 = 7 \cdot (36z_k + 5) = 7 \cdot z_{k+1}$$

Aufgabe 011211:
Ist die Summe $21^{39} + 39^{21}$ durch 45 teilbar? Die Antwort ist zu begründen!

Lösung von W. Engel und U. Pirl:
Da für 45 die Primzahlzerlegung $45 = 3^2 \cdot 5$ gilt, ist zu zeigen, dass die Summe $21^{39} + 39^{21}$ durch 32 und 5 teilbar ist.
Die letzte Ziffer von 21^n ist für jedes natürliche n gleich 1, und die letzte Ziffer von 39^{2n+1} ist für jedes natürliche n gleich 9. Daher ist die letzte Ziffer der Summe gleich 0 und die Summe damit durch 5 teilbar.
Wegen $21 = 3 \cdot 7$ und $39 = 3 \cdot 13$ ist sowohl 21^{39} als auch 39^{21} durch 3^2 teilbar und damit auch die Summe.
Also ist $21^{39} + 39^{21}$ durch 45 teilbar.

Aufgabe 021216:
Es ist zu beweisen, dass es genau ein Paar natürlicher Zahlen x und y gibt, für das die Zahl $N = x^4 + 4y^4$ eine Primzahl ist!

Lösung von Steffen Weber:
Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned} N &= x^4 + 4y4 = (x^2)^2 + (2y^2)^2 + 2(2y^2x^2) - 4(x^2y^2) \\ &= (x^2 + 2y^2)^2 - (2xy)^2 \\ &= (x^2 + 2y^2 + 2xy)(x^2 + 2y^2 - 2xy) \end{aligned}$$

Da $x^2 + 2y^2 + 2xy \geq x^2 + 2y^2 - 2xy = (x-y)^2 + y^2 > 0$ für $x + y > 0$ und $N = 0$ für $x + y = 0$ gilt, ist N genau dann prim, wenn der zweite Faktor in obiger Gleichung

$$x^2 + 2y^2 - 2xy = (x-y)^2 + y^2 = 1$$

und $x^2 + 2y^2 + 2xy$ Primzahl sind.

Da Quadrate immer nichtnegativ sind, muss zur Erfüllung der ersten Bedingung entweder $y = 1$ und $|x - y| = 0$ oder $y = 0$ und $|x - y| = 1$ sein. Im letzteren Fall wäre $(x, y) = (1, 0)$, aber $N = 1$ ist nicht prim.

Für $y = 1$ und $|x - y| = 0$ ist $(x, y) = (1, 1)$, d. h. $N = 1 + 4 = 5$ ist tatsächlich eine Primzahl.
Somit gibt es nur ein Paar (x, y) natürlicher Zahlen: $(1, 1)$, für das $N = x^4 + 4y^4$ eine Primzahl ist.

Alternativ-Lösung von cyrix:
Die Sophie-Germain-Identität liefert

$$N = x^4 + 4y4 = (x^2 + 2y^2 + 2xy)(x^2 + 2y^2 - 2xy).$$

Dabei ist sowohl N als auch der erste Faktor positiv, sodass es der zweite auch sein muss. Damit N eine Primzahl sein kann, muss diese Faktorisierung also die Form „$N \cdot 1$“ haben, da der zweite Faktor offenbar kleiner ist als der erste.
Es folgt also

$$1 = x^2 + 2y^2 - 2xy = (x-y)^2 + y^2.$$

Da 0 und 1 die kleinsten Quadratzahlen sind, ist diese Gleichung nur dann lösbar, wenn eine der beiden Zahlen $|x - y|$ und y gleich 1 und die andere gleich 0 ist. Im Fall $y = 0$ ergibt sich damit $x = |x - y| = 1$ und $N = 1^4 + 4 \cdot 0^4 = 1$, was keine Primzahl ist. Dagegen erhalten wir im Fall $|x - y| = 0$ direkt $y = x = 1$ und $N = 1^4 + 4 \cdot 1^4 = 5$, was natürlich eine Primzahl ist.
Damit erzeugt nur genau das eine Paar $(x,y) = (1,1)$ eine Primzahl N der Form $x^4 + 4y^4$, $\square$.

Aufgabe 031113:
Beweisen Sie, dass $p^2 - 1$ für jede Primzahl $p \geq 5$ durch 24 teilbar ist!

Lösung von Manuel Naumann:
Aufgrund der dritten binomischen Formel gilt: $p^2 - 1 = (p - 1)(p + 1)$.
Von drei aufeinander folgenden natürlichen Zahlen ist stets genau eine durch 3 teilbar. Da p nach den Voraussetzungen nicht durch 3 teilbar sein kann, gilt entweder $3|(p - 1)$ oder $3|(p + 1)$. Somit ist 3 ein Teiler von $p^2 - 1$.
Des Weiteren muss p eine ungerade Zahl sein. $p - 1$ und $p + 1$ sind demzufolge zwei aufeinander folgende gerade Zahlen und damit durch 2 teilbar. Von zwei aufeinander folgenden geraden Zahlen ist aber sogar genau eine durch 4 teilbar. Es gilt also ebenfalls: $8|(p^2 - 1)$.
Da 3 und 8 teilerfremd sind, folgt aus $3|(p^2 - 1)$ und $8|(p^2 - 1)$ die Behauptung, dass $24|(p^2 - 1)$. $\square$

Aufgabe 051213:
Jemand benutzt, um die Teilbarkeit natürlicher Zahlen durch 7 zu untersuchen, die folgende „Siebenerregel“:

Von der (mindestens zweistelligen) zu untersuchenden Zahl z wird die letzte Ziffer gestrichen. Von der erhaltenen Zahl wird sodann das Doppelte der gestrichenen Zahl subtrahiert. Die so entstandene Zahl z_1 ist dann und nur dann durch 7 teilbar, wenn z durch 7 teilbar ist. Indem er das Verfahren gegebenenfalls wiederholt anwendet, kann er so von jeder natürlichen Zahl z feststellen, ob sie durch 7 teilbar ist.

Man untersuche, ob diese „Siebenerregel“ richtig ist.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Nach der gegebenen Regel gilt, wenn a die letzte Ziffer von z bedeutet,

$$z - a \quad = \quad 10(z_1 + 2a),$$

also

$$z \quad = \quad 10z_1 + 21a.$$

Daher ist z genau dann durch 7 teilbar, wenn $10z_1$ es ist. Lässt nun z_1 den Rest r bei der Teilung durch 7, wobei $0 \leq r \leq 6$ gilt, so lässt z denselben Rest wie $10r$, und dieser Rest ist dann und nur dann Null, wenn $r = 0$ ist ($10p$ ist auf Grund der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung genau dann durch 7 teilbar, wenn p durch 7 teilbar ist).

Die „Siebenerregel“ ist also richtig. Ob sie allerdings schneller zum Ziel führt als die übliche Division durch 7, die bei Nichtteilbarkeit auch den Rest liefert, hängt von der Übung im Umgang mit der Regel ab.

Aufgabe 131213:
Es seien a und n natürliche Zahlen mit $a \geq 2$ und $n \geq 2$.

Man beweise: Die Menge $M = \{a,a^2,\dots,a^n\}$ ist nicht die Vereinigung zweier solcher elementefremder nichtleerer Mengen M_1 und M_2, für die die Summe der in M_1 enthaltenen Zahlen gleich der Summe der in M_2 enthaltenen Zahlen ist.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, die Menge M kann so in in zwei elementfremde Teilmengen M_1 und M_2 aufgeteilt werden, dass die jeweiligen Elementesummen gleich groß sind, dann ergibt die Differenz dieser beiden Summen Null. Jedes Element dieser Gleichung der Menge M_1 hat dann ein positives und das der Menge M_2 ein negatives Vorzeichen und lässt sich wie folgt schreiben:

$$\pm a \pm a^2 \pm a^3 \pm \dots \pm a^n \quad = \quad 0$$

Nach Division durch a^2 (was nicht Null sein kann, da $a \geq 2$ ist) erhält man

$$\pm\frac{1}{a} \pm 1 \pm a \pm a^2 \pm \dots \pm a^{n-2} \quad = \quad 0$$
$$\pm 1 \pm a \pm a^2 \pm \dots \pm a^{n-2} \quad = \quad \mp\frac{1}{a}$$

Die linke Seite ist die Summe mehrerer ganzzahliger (positiver oder negativer) Zahlen, die rechte Seite ist auf jeden Fall nicht ganzzahlig ($\frac{1}{n}$ ist für $n \geq 2$ nie ganzzahlig). Aus diesem offensichtlichen Widerspruch folgt das Gegenteil der Annahme und mithin das zu Beweisende.

Aufgabe 141212:
Man beweise:

Wenn die Summe zweier natürlicher Zahlen m und n durch 7 teilbar ist, so ist die Summe $m^7 + n^7$ durch 49 teilbar.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Nach Voraussetzung existiert eine ganze Zahl g mit $m + n = 7g$, also $m = 7g - n$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} m^7 + n^7 &= (7g - n)^7 + n^7 \\ &= (7g)^7 - 7(7g)^6 n + 21(7g)^5 n^2 - 35(7g)^4 n^3 + 35(7g)^3 n^4 - 21(7g)^2 n^5 + 7(7g)n^6 \end{aligned}$$

ist durch 49 teilbar, w. z. b. w.

Aufgabe 171211:
Man ermittle alle im dekadischen Positionssystem fünfstelligen natürlichen Zahlen, die durch 17, 19 und 23 teilbar sind und deren Zehnerziffer 0 lautet.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, eine natürliche Zahl a habe die geforderten Eigenschaften. Dann ist a durch die Primzahlen 17, 19 und 23 teilbar, also auch durch ihr Produkt $17 \cdot 19 \cdot 23 = 7429$. Daher gibt es eine ganze Zahl n mit $a = 7429n$.

Da a fünfstellig ist, gilt $10000 \leq 7429n \leq 99999$, also $2 \leq n \leq 13$. Ist y die Einerziffer von a, so gilt: Da a die Zehnerziffer 0 hat, hat die Zahl $a - y$ an ihren beiden letzten Stellen je eine 0, sie ist also durch 1100 teilbar. Daher gibt es eine ganze Zahl g mit $7429n - y = 100g$ bzw.

$$29n = 100(g - 74n) + y$$

Setzt man $x = g - 74n$, dann erhält man $29n = 100x + y$ bzw. $100x = 29n - y$. Wegen $2 \leq n \leq 13$ und $0 \leq y \leq 9$ gilt nun

$$49 = 29 \cdot 2 - 9 \leq 29n - y = 100x \leq 29 \cdot 13 - 0 = 377$$

Daraus folgt $1 \leq x \leq 3$. Aus $29n = 100x + y$ bzw. $29(n - 3x) = 13x + y$ erhält man, wenn man $z = n - 3x$ setzt,

$$13 = 13 \cdot 1 + 0 \leq 29z = 13x + y \leq 13 \cdot 3 + 9 = 48$$

also $z = 1$.
Daraus ergibt sich $13x + y = 29$, also ist $29 - y$ durch 13 teilbar, was wegen $0 \leq y \leq 9$ nur für $y = 3$ gilt. Mithin gilt $x = 2$, $n = 3x + z = 7, a = 7929 \cdot 7 = 52003$. Daher kann nur diese Zahl die verlangten Eigenschaften haben.

Sie hat diese Eigenschaften; denn sie ist als Vielfaches von $17 \cdot 19 \cdot 23$ durch 17, 19 und 23 teilbar und hat 0 als Zehnerziffer.

Aufgabe 211214:
Jede natürliche Zahl lässt sich bekanntlich eindeutig als Produkt von Primzahlpotenzen darstellen.

In welcher der beiden natürlichen Zahlen 1981! und $1000! \cdot 981!$ erhält bei dieser Darstellung die Primzahl 7 den größeren Exponenten?

Hinweis: Wenn n eine natürliche Zahl mit $n \geq 1$ ist, so ist $n!$ definiert durch $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Von den Faktoren $1, 2, \dots, 1981$ der Zahl 1981! sind wegen $1981 = 283 \cdot 7$ genau die 283 Zahlen

$$7(= 1 \cdot 7) \quad ; \quad 14(= 2 \cdot 7) \quad ; \quad \dots \quad ; \quad 1981(= 283 \cdot 7)$$

durch 7 teilbar. Daher kann man 1981 durch 7^{283} dividieren, indem man anstelle dieser 283 Faktoren die Zahlen 1, 2, ..., 283 schreibt (und die übrigen, nicht durch 7 teilbaren Faktoren in 1981! unverändert stehenlässt). Bei dieser Ersetzung entsteht aus 1981! ein Produkt P, in dem wegen $283 = 40 \cdot 7 + 3$ genau die 40 Zahlen

$$7(= 1 \cdot 7) \quad ; \quad 14(= 2 \cdot 7) \quad ; \quad \dots \quad ; \quad 280(= 40 \cdot 7)$$

nochmals durch 7 teilbar sind. Daher kann man P nochmals durch 7^{40} dividieren, indem man anstelle dieser 40 Faktoren die Zahlen 1, 2, ..., 40 schreibt. Von den Faktoren des nun entstandenen Produktes Q sind genau die 5 Zahlen 7, 14, ..., 35 durch 7 teilbar. Daher kann man Q nochmals durch 7^5 dividieren, und in dem dann entstandenen Produkt enthält kein Faktor mehr die Primzahl 7.

Somit tritt 7 in 1981! insgesamt mit dem Exponenten $283 + 40 + 5 = 328$ auf.

In entsprechender Weise ergibt sich aus

$$1000 = 142 \cdot 7 + 6 \quad , \quad 142 = 20 \cdot 7 + 2 \quad , \quad 20 = 2 \cdot 7 + 6$$

dass 7 in 981! insgesamt mit dem Exponenten $140 + 20 + 2 = 162$ auftritt. Also tritt 7 in $1000! \cdot 981!$ insgesamt mit dem Exponenten 326 auf. Daher erhält die Primzahl 7 bei Darstellung der Zahl 1981! den größeren Exponenten.

Aufgabe 241213:
Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen x, für die $2x-3$, $5x-14$ und $\frac{2x-3}{5x-14}$ ganze Zahlen sind.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn für eine reelle Zahl x die Zahlen

$$g = 2x - 3 \qquad ; \qquad h = 5x - 14 \qquad \text{und} \qquad k = \frac{2x-3}{5x-14} = \frac{g}{h} \tag{1,2,3}$$

ganze Zahlen sind, so folgt aus (1), (2)

$$5g = 10x - 15 \qquad ; \qquad 2h = 10x - 28$$

und daher

$$5h - 2h = 13$$

Berücksichtigt man hierin due aus (3) folgende Gleihcung $g = hk$, so folgt

$$(5k - 2)h = 13 \tag{4}$$

Somit ist $5k-2$ ein Teiler von 13, also eine der Zahlen 1, -1, 13, -13. Von diesen hat aber nur 13 die Form $5k-2$ mit ganzzahligem k, und damit folgt aus (4) weiter $h = 1$, nach (2) also $5x = h + 14 = 15$, $x = 3$.

Also kann nur $x = 3$ die geforderte Eigenschaft haben. In der Tat sind $2 \cdot 3 - 3 = 3$, $5 \cdot 3 - 14 = 1$ und $\frac{2\cdot 3-3}{5\cdot 3-14} = 3$ ganze Zahlen. Somit hat genau $x = 3$ die geforderte Eigenschaft.

II Runde 2

Aufgabe V11222:
Es ist zu beweisen, dass das Produkt von 6 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen stets durch 720 teilbar ist.

Lösung von svrc:
Der Binomialkoeffizient für nichtnegative ganze Zahlen k und n mit $n \geq k$ ist durch

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

definiert. Dieser ist in diesem Falle stets eine nichtnegative ganze Zahl. Es gilt $720 = 6!$. Wir bezeichnen das Produkt von sechs aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen mit

$$n_k = k \cdot (k+1) \cdot (k+2) \cdot (k+3) \cdot (k+4) \cdot (k+5) = \prod_{j=k}^{k+5} j$$

für eine beliebige natürliche Zahl k. Mit der Definition des Binomialkoeffizienten und $720 = 6!$ folgt

$$n_k = \prod_{j=k}^{k+5} j = 6! \cdot \frac{\left(\prod_{j=1}^{k-1} j\right) \cdot \left(\prod_{j=k}^{k+5} j\right)}{6! \cdot \left(\prod_{j=1}^{k-1} j\right)} = 6! \cdot \frac{(k+5)!}{6! \cdot (k-1)!} = 720 \cdot \binom{k+5}{k-1}$$

und da der Binomialkoeffizient stets eine nichtnegative ganze Zahl ist, folgt die Behauptung.

Aufgabe 011222:
Wenn die drei natürlichen Zahlen x, y und z der Bedingung $x^2 + y^2 = z^2$ genügen, ist ihr Produkt $x \cdot y \cdot z$ stets durch 60 teilbar.
Beweisen Sie diese Behauptung!

Lösung von W. Engel und U. Pirl:
Da $60 = 3 \cdot 4 \cdot 5$ gilt, ist zu zeigen, dass unter der Voraussetzung $x^2 + y^2 = z^2$ (1) das Produkt $P = x \cdot y \cdot z$ durch 3, 4 und 5 teilbar ist.

1. Teilbarkeit durch 3:
Bei der Division natürlicher Zahlen durch 3 treten als mögliche Reste die Zahlen 0, 1 oder 2 auf und daher bei der Division der Quadrate dieser Zahlen durch 3 nur die Reste 0 und 1. Die möglichen Reste der Summe der Quadrate zweier natürlicher Zahlen sind daher 0, 1 oder 2.
Wegen (1) kann $x^2 + y^2$ nur die Reste 0 oder 1 haben, d. h., mindestens eine der Zahlen x^2, y^2 hat den Rest 0 und ist damit durch 3 teilbar.
Aus $3|x^2$ oder $3|y^2$ folgt $3|x$ oder $3|y$, und damit teilt 3 das Produkt $P = xyz$.

2. Teilbarkeit durch 5:
Bei der Division natürlicher Zahlen durch 5 kommen als Reste die Zahlen 0, 1, 2, 3 oder 4 vor und daher bei der Division der Quadrate dieser Zahlen nur die Reste 0, 1, oder 4. Die möglichen Reste der Summe zweier Quadrate natürlicher Zahlen sind daher 0, 1, 2, 3, oder 4.
Wegen (1) kann $x^2 + y^2$ nur einen der Reste 0, 1 oder 4 haben, und daher hat mindestens eines der Quadrate x^2, y^2 oder z^2 den Rest 0 und ist somit durch 5 teilbar.
Wegen des Satzes über die eindeutige Zerlegbarkeit einer natürlichen Zahl in Primfaktoren ist daher weiter mindestens eine der Zahlen x, y oder z durch 5 teilbar und damit auch das Produkt P.

3. Teilbarkeit durch 4:
Zunächst ist mindestens eine der Zahlen x, y oder z gerade; denn die Annahme, dass sowohl x, y und z (und damit auch x^2, y^2, z^2) ungerade Zahlen wären, führt zu dem Widerspruch, dass $x^2 + y^2 = z^2$ als Summe zweier ungerader Zahlen eine ungerade Zahl wäre.
Ist z gerade, so sind entweder

- x und y gerade - in diesem Falle teilt 4 das Produkt P - oder
- x und y ungerade. In diesem Falle lassen sich x, y und z schreiben als $x = 2x' + 1$ und $y = 2y' + 1$ und $z = 2z'$, wobei x', y', z' beliebige natürliche Zahlen bedeuten.

  (1) ist dann äquivalent mit
  $$4x'^2 + 4x' + 1 + 4y'^2 + 4y' + 1 = 4z'^2 \qquad \text{bzw. mit} \qquad 4(x'^2 + x' + y'^2 + y') + 2 = 4z'^2$$
  Dies ist ein Widerspruch, da eine natürliche Zahl nicht gleichzeitig durch 4 teilbar sein kann und bei der Division durch 4 den Rest 2 lässt. Also ist Fall b) nicht möglich.

Ist z ungerade und eine der Zahlen x oder y gerade, so kann o. B. d. A. x als gerade vorausgesetzt werden. Dann ist y ungerade. In diesem Falle lassen sich x, y und z schreiben als $x = 2x'$ und $y = 2y' + 1$ und $z = 2z' + 1$, wobei x', y', z' beliebige natürliche Zahlen bedeuten. (1) ist dann gleichbedeutend mit:

$$4x'^2 + 4y'^2 + 4y' + 1 = 4z'^2 + 4z' + 1 \qquad \text{und weiter mit} \qquad x'^2 = z'^2 + z' - y'^2 - y'$$

d. h., x'^2 ist als Summe von vier ungeraden Zahlen gerade, und daher ist auch x' durch 2 teilbar. Wegen $x = 2x'$ ist daher x durch 4 teilbar und damit auch das Produkt P.

Alternativ-Lösung von weird:
Es genügt offenbar der Nachweis, dass xyz durch jede der drei Zahlen 3,4,5 teilbar ist, weil daraus wegen deren Teilerfremdheit auch die Teilbarkeit durch deren Produkt 60 folgt.
Wäre nun $3 \nmid xyz$, so würde daraus sofort

$$z^2 = x^2 + y^2 \equiv (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 2 \pmod 3$$

folgen, im Widerspruch dazu, dass 2 quadratischer Nichtrest mod 3 ist. Genauso wenig kann auch $5 \nmid xyz$ gelten, da dies

$$x^2 \equiv \pm 1 \pmod 5,\ y^2 \equiv \pm 1 \pmod 5,\ z^2 \equiv \pm 1 \pmod 5$$

zur Folge hätte, womit $x^2 + y^2 \equiv z^2 \pmod 5$ ebenfalls nicht gelten kann.
Für den Nachweis von $4 \mid xyz$ bemerken wir zunächst, dass die Zahlen x,y nicht beide ungerade sein können, da daraus

$$z^2 \equiv x^2 + y^2 \equiv (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 = 2 \pmod 4$$

folgen würde, im Widerspruch dazu, dass 2 ein quadratischer Nichtrest mod 4 ist. Ist also dann o. B. d. A. x gerade, und damit y und z ungerade, so folgt dann daraus und der Tatsache, dass $u^2 \equiv 1 \pmod 8$ für ein beliebiges ungerades u gilt, dass

$$x^2 \equiv z^2 - y^2 \equiv 1 - 1 = 0 \pmod 8$$

d. h., x muss wie behauptet sogar durch 4 teilbar sein.

Aufgabe 021125:
Beweisen Sie, dass für alle natürlichen Zahlen n stets

$$5^{2n+1} \cdot 2^{n+2} + 3^{n+2} \cdot 2^{2n+1}$$

durch 19 teilbar ist!

Lösung von Manuela Kugel:
Der Beweis erfolgt über das Prinzip der Vollständigen Induktion. Dazu wird zunächst nachgewiesen, dass es ein n gibt, mit dem die zu beweisende Aussage korrekt ist.
Sei $n = 1$:

$5^{2n+1} \cdot 2^{n+2} + 3^{n+2} \cdot 2^{2n+1} = 5^3 \cdot 2^3 + 3^3 \cdot 2^3 = 152 \cdot 8 = 19 \cdot 8^2 Damitistnachgewiesen, dassesmindestenseinenatürlicheZahl$

n$gibt, fürdiedieBehauptungwahrist, d. h. fürdiegilt$:19k $= 5^{2n+1} \cdot 2^{n+2} + 3^{n+2} \cdot 2^{2n+1}$ für eine natürliche Zahl k.
Kann unter dieser Induktionsvoraussetzung nun gezeigt werden, dass aus der Existenz eines n auch die

Behauptung für $n+1$ gilt, so wäre der Beweis erbracht:

$$\begin{aligned}
x &= 5^{2(n+1)+1} \cdot 2^{(n+1)+2} + 3^{(n+1)+2} \cdot 2^{2(n+1)+1} \\
&= 5^{2n+1+2} \cdot 2^{n+2+1} + 3^{n+2+1} \cdot 2^{2n+1+2} \\
&= 25 \cdot 5^{2n+1} \cdot 2 \cdot 2^{n+2} + 3 \cdot 3^{n+2} \cdot 4 \cdot 2^{2n+1} \\
&= 50 \cdot 5^{2n+1} \cdot 2^{n+2} + 12 \cdot 3^{n+2} \cdot 2^{2n+1} \\
&= 50 \cdot 5^{2n+1} \cdot 2^{n+2} + 12 \cdot \left(19k - 5^{2n+1} \cdot 2^{n+2}\right) \\
&= (50-12) \cdot 5^{2n+1} \cdot 2^{n+2} + 12 \cdot 19k \\
&= 2 \cdot 19 \cdot 5^{2n+1} \cdot 2^{n+2} + 12 \cdot 19k \\
&= 19 \cdot \left(2 \cdot 5^{2n+1} \cdot 2^{n+2} + 12 \cdot k\right)
\end{aligned}$$

Dies bedeutet, dass der Induktionsbeweis geführt worden ist.

Alternativ-Lösung von weird:
Unter Verwendung der Umformung

$$5^{2n+1} \cdot 2^{n+2} + 3^{n+2} \cdot 2^{2n+1} = 10 \cdot 25^n \cdot 2^{n+1} + 9 \cdot 2^{n+1} \cdot 3^n$$

sowie

$$25^n \equiv 6^n \equiv 2^n \cdot 3^n \pmod{19}$$

gilt dann

$$10 \cdot 25^n \cdot 2^{n+1} + 9 \cdot 2^{n+1} \cdot 3^n \equiv 10 \cdot 2^{2n+1} \cdot 3^n + 9 \cdot 2^{2n+1} \cdot 3^n = 19 \cdot 2^{2n+1} \cdot 3^n \equiv 0 \pmod{19},$$

was die Behauptung beweist.

Aufgabe 031121:
Es ist zu beweisen, dass $n^3 + 3n^2 - n - 3$ bei ungeradem n stets durch 48 teilbar ist!

Lösung von Henning Thielemann:
Für jedes ungerade n gibt es eine natürliche Zahl (Null eingeschlossen) k mit $n = 2k+1$.

$$\begin{aligned}
n^3 + 3n^2 - n - 3 &= (n^2-1)(n+3) \\
&= (n-1)(n+1)(n+3) \\
&= 2k(2k+2)(2k+4) \\
&= 8 \cdot k(k+1)(k+2)
\end{aligned}$$

Von den zwei aufeinanderfolgenden Zahlen k und $k+1$ ist immer eine gerade und von den drei aufeinanderfolgenden Zahlen k, $k+1$ und $k+2$ ist immer eine durch drei teilbar. Da 2 und 3 teilerfremd sind, ist $k(k+1)(k+2)$ durch 6 teilbar und damit der ganze Ausdruck durch 48.

Alternativ-Lösung von ZePhoCa:
Es gilt $m := n^3 + 3n^2 - n - 3 = n^2(n+3) - (n+3) = (n-1)(n+1)(n+3)$. Von den drei Zahlen $n-1$,$n+1$,$n+3$ ist genau eine durch 3 teilbar, also ist m durch 3 teilbar. Da n ungerade ist, sind diese drei Zahlen außerdem gerade und entweder $n-1$ oder $n+1$ ist sogar durch 4 teilbar. Also ist m durch $2 \cdot 4 \cdot 2 = 16$ teilbar. Da dies teilerfremd zu 3 ist, ist m auch durch $48 = 3 \cdot 16$ teilbar.

Aufgabe 041222:
Es ist zu beweisen, dass alle Zahlen der Form

$$73^n + 1049 \cdot 58^n$$

wobei n eine ungerade natürliche Zahl ist; durch 1965 teilbar sind.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es ist:
$$1049 \cdot 58 = 60842 = 31 \cdot 1965 - 73$$

Daher ist
$$z_n = 73^n + 1049 \cdot 58^n = 73^n + (31 \cdot 1965 - 73) \cdot 58^{n-1} = 73(73^{n-1} - 58^{n-1}) + 31 \cdot 1965 \cdot 58^{n-1}$$

Da $n - 1 = 2k$ eine gerade Zahl mit $k \geq 0$ ist, folgt
$$73^{n-1} - 58^{n-1} = (73^2)^k - (58^2)^k = 5329^k - 3364^k.$$

Diese Zahl ist durch $5329 - 3364 = 1965$ teilbar. Also ist auch z_n durch 1965 teilbar.

Aufgabe 051222:
Man ermittle sämtliche nicht negativen ganzen Zahlen n, für die die Zahl $z = 5^n - 4^n$ durch 61 teilbar ist.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Jede nichtnegative ganze Zahl n lässt sich in genau einer der folgenden Formen darstellen:
$$n = 3k \qquad \text{oder} \qquad n = 3k + 1 \qquad \text{oder} \qquad n = 3k + 2$$

Dabei ist k eine nichtnegative ganze Zahl. Für $n = 3k$ gilt:
$$z = 5^{3k} - 4^{3k} = (5^3)^k - (4^3)^k$$

Da $a^m - b^m$ für alle nichtnegativen ganzen Zahlen m stets durch $(a - b)$ teilbar ist, ist $(5^3)^k - (4^3)^k$ durch $5^3 - 4^3 = 61$ teilbar.
Für $n = 3k + 1$ gilt:
$$z = 5^{3k+1} - 4^{3k+1} = 5 \cdot 5^{3k} - 4 \cdot 4^{3k} = 5(5^{3k} - 4^{3k}) + 4^{3k}$$

In diesem Falle ist z nicht durch 61 teilbar, da der Summand $5(5^{3k} - 4^{3k})$ durch 61 teilbar ist, der Summand 4^{3k} aber nicht.
Für $n = 3k + 2$ gilt:
$$z = 5^{3k+2} - 4^{3k+2} = 25 \cdot 5^{3k} - 16 \cdot 4^{3k} = 25(5^{3k} - 4^{3k}) + 9 \cdot 4^{3k}$$

In diesem Falle ist z ebenfalls nicht durch 61 teilbar, da der Summand $25(5^{3k} - 4^{3k})$ durch 61 teilbar ist, der Summand $9 \cdot 4^{3k}$ aber nicht.
Die Zahl $z = 5^n - 4^n$ ist also genau dann durch 61 teilbar, wenn n durch 3 teilbar ist.

Aufgabe 061223:
Beweisen Sie folgende Behauptung! Ist $s = a_1 + a_2 + ... + a_n$ durch 30 teilbar, dann ist auch
$$p = a_1^5 + a_2^5 + .. + a_n^5$$

durch 30 teilbar. ($a_1, a_2, ..., a_n$ seien n ganze Zahlen.)

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es genügt zu zeigen, dass $p - s$ durch 30 teilbar ist. Mit $p - s$ ist auch $p = (p - s) + s$ durch 30 teilbar.
Es ist
$$p - s = (a_1^5 - a_1) + (a_2^5 - a_2) + ... + (a_n^5 - a_n)$$

Da für alle k $(k = 1,2,...,n)$

$$d_k = a_k^5 - a_k = a_k(a_k - 1)(a_k + 1)(a_k^2 + 1) \qquad (1)$$

gilt, und da alle a_k ganze Zahlen sind, ist jedes d_k sowohl durch 2 als auch durch 3 teilbar, d. h., jedes d_k ist durch 6 teilbar.

Ebenfalls kann man zeigen, dass jedes d_k auch durch 5 teilbar ist.
Wenn $a_k \equiv 0 \pmod 5$ ist, so ist $d_k \equiv 0 \pmod 5$.
Wenn $a_k \equiv \pm 1 \pmod 5$ ist, so ist wegen (1) $d_k \equiv 0 \pmod 5$.
Wenn $a_k \equiv 2 \pmod 5$ oder wenn $a_k \equiv -2 \pmod 5$ ist, so ist $a_k^2 \equiv -1 \pmod 5$, d. h. $a_k^2 + 1 \equiv 0 \pmod 5$ und daher $d_k \equiv 0 \pmod 5$.

Folglich ist bei beliebigem ganzzahligen a_k das entsprechende d_k durch 5 teilbar.
Da alle d_k sowohl durch 6 als auch durch 5 teilbar sind und da ferner 5 und 6 teilerfremd zueinander sind, sind alle d_k und damit neben $p - s$ auch p durch 30 teilbar.

Aufgabe 081221:
Geben Sie alle Primzahlen p an, für die sowohl $p + 10$ als auch $p + 14$ Primzahlen sind!

Lösung von ZePhoCa:
Sei $a \in \{0,1,2\}$ der Rest von p bei Division durch 3.
Gilt $a = 1$, so ist $p + 14$ durch 3 teilbar und wegen $p + 14 > 3$ keine Primzahl.
Gilt $a = 2$, so ist analog $p + 10$ durch 3 teilbar und keine Primzahl. Also muss p durch 3 teilbar sein, es muss also $p = 3$ gelten.
Dann gilt $p + 10 = 13, p + 14 = 17$ und da dies Primzahlen sind gibt es genau eine Lösung, nämlich $p = 3$.

Aufgabe 211224:
Man beweise:
Für jede ungerade ganze Zahl $n \geq 3$ ist

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n-1}\right) \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot ... \cdot (n-1)$$

eine durch n teilbare ganze Zahl.

Lösung von weird:
Für eine ungerade ganze Zahl $n \geq 3$ gilt nämlich

$$(n-1)! \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = (n-1)! \sum_{k=1}^{(n-1)/2} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k}\right) = n \sum_{k=1}^{(n-1)/2} \frac{(n-1)!}{k(n-k)}$$

Nun sind hier alle Summanden

$$\frac{(n-1)!}{k(n-k)}$$

der rechtsstehenden Summe ganze Zahlen, da die beiden Faktoren des Nenners ja auch im Zähler $(n-1)!$ an verschiedenen Stellen als Faktoren vorkommen, weshalb dann auch der gesamte Ausdruck ein ganzzahliges Vielfaches von n ist, wie behauptet.

Aufgabe 251224:
Man ermittle alle diejenigen positiven ganzen Zahlen n, die die folgende Eigenschaft haben:
Im abgeschlossenen Intervall $[2^n, 2^{n+1}]$ befindet sich mindestens eine durch n^3 teilbare natürliche Zahl.

Lösung von cyrix:
Offenbar sind $n = 1$ und $n = 2$ Zahlen mit dieser Eigenschaft, da z. B. $2 = 2^1$ bzw. $8 = 2^3$ in den jeweiligen Intervallen liegen und durch $1 = 1^3$ bzw. $8 = 2^3$ teilbar sind.
Liegt n zwischen inklusive 3 und 7, so ist jeweils das kleinste positive Vielfache von n^3; nämlich n^3 selbst; größer als 2^{n+1}, wie man durch Einsetzen leicht nachrechnet: Es ist $2^4 = 16 < 27 = 3^3$, $2^5 = 32 < 64 = 4^3$, $2^6 = 64 < 125 = 5^3$, $2^7 = 128 < 216 = 6^3$ und $2^8 = 256 < 343 = 7^3$.

Wir zeigen im Folgenden, dass für $n \geq 8$ die Ungleichung $n^3 \leq 2^{n+1}$ gilt:
Es ist $8^3 = 2^9 = 2^{8+1}$, sodass die Ungleichung für $n = 8$ erfüllt ist. Und gilt für eine natürliche Zahl $n \geq 8$ die Ungleichung, so gilt sie wegen $2^{(n+1)+1} = 2 \cdot 2^{n+1} \geq 2 \cdot n^3 = n^3 + n^3 \geq n^3 + 8n^2 = n^3 + 3n^2 + 5n^2 \geq n^3 + 3n^2 + 40n \geq n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = (n+1)^3$ auch für deren Nachfolger $n + 1$ und damit für alle natürlichen Zahlen $n \geq 8$.

Es folgt, dass für alle $n \geq 8$ der Wert n^3 direkt im Intervall $[2^n; 2^{n+1}]$ liegt, und damit die Bedingung der Aufgabenstellung erfüllt, oder aber $n^3 < 2^n$ gilt. In diesem Fall ist aber von je n^3 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen genau eine durch n^3 teilbar, also insbesondere eine der Zahlen $2^n + 1$, $2^n + 2$, $\ldots$, $2^n + n^3 < 2^n + 2^n = 2^{n+1}$, die alle im Intervall $[2^n; 2^{n+1}]$ liegen.

Damit gilt, dass genau diejenigen positiven ganzen Zahlen n, die $n = 1$, $n = 2$ oder $n \geq 8$ erfüllen, Lösungen der Aufgabe sind.

III Runde 3

Aufgabe 051231:
Es ist zu beweisen, dass die Zahl $z = 2^n + 1$ für keine natürliche Zahl $n \geq 0$ Kubikzahl ist.

Lösung von W. Engel und U. Pirl:
$2^0 + 1 = 2$ ist nicht Kubikzahl. Für $n \geq 1$ ist die Zahl $2^n + 1$ ungerade.
Angenommen, $2^n + 1$ wäre Kubikzahl, so ist sie die dritte Potenz einer ungeraden Zahl, die sich in der Form $2k + 1$ darstellen lässt, wobei k eine natürliche Zahl ist. Es gilt also

$$2^n + 1 = (2k+1)^3 \qquad (1)$$

Da die Zahl $2^n + 1$ für $n = 1$ nicht Kubikzahl ist, muss man in (1) $n > 1$ und $k > 0$ annehmen. Nun folgt aus (1)

$$\begin{aligned} 2^n + 1 = 8k^3 + 12k^2 + 6k + 1 \Rightarrow 2^n &= 2k(4k^2 + 6k + 3) \\ 2^{n-1} &= k(4k^2 + 6k + 3) \end{aligned}$$

Der zweite Faktor der rechten Seite ist eine ungerade natürliche Zahl, die größer als 3 ist. Diese Zahl müsste, da k eine von Null verschiedene natürliche Zahl ist, Teiler von 2^{n-1} sein. Das ist aber wegen der Eindeutigkeit der Zerlegbarkeit jeder natürlichen Zahl ≥ 2 in Primfaktoren nicht möglich.
Wir erhalten einen Widerspruch, also ist keine der Zahlen z der Form $2^n + 1$ Kubikzahl.

Alternativ-Lösung von cyrix:
Gäbe es ein solches z, dass Kubikzahl wäre, so also auch eine natürliche Zahl k mit $2^n + 1 = k^3$ bzw. $2^n = k^3 - 1 = (k-1)(k^2 + k + 1)$.

Insbesondere wären sowohl $k-1$ als auch k^2+k+1 Teiler einer Zweierpotenz und damit selbst Zweierpotenzen.
Wegen $k-1 < k^2+k+1$ müsste $k-1|k^2+k+1$ folgen, was aber wegen $k^2+k+1-(k-1)(k+2) = k^2+k+1-(k^2+k-2) = 3$ auf $k=1$ oder $k=3$ führt. Jedoch sind weder $1^3-1=0$ noch $3^3-1=26$ Zweierpotenzen, sodass es keine solche Zahlen gibt.

Zweite Alternativ-Lösung von weird:
Dies folgt einfach daraus, dass im Falle einer Gleichheit $2^n+1=k^3 \quad (k,n \in \mathbb{N})$ bei einer Division durch 7 die linke Seite dieser Gleichung einen Rest in $\{2,3,5\}$, die rechte aber einen Rest in $\{0,1,6\}$ ergeben würde, Widerspruch!

Aufgabe 091231:
a) Es ist zu beweisen, dass die Zahl

$$z = \frac{65533^3+65534^3+65535^3+65536^3+65537^3+6538^3+65539^3}{32765\cdot 32766+32767\cdot 32768+32768\cdot 32769+32770\cdot 32771}$$

eine ganze Zahl ist!
b) Die Zahl z ist zu berechnen!

Lösung von cyrix:
Mit $n := 2^{15} = 32768$ ist

$$z = \frac{(2n-3)^3+(2n-2)^3+(2n-1)^3+(2n)^3+(2n+1)^3+(2n+2)^3+(2n+3)^3}{(n-3)(n-2)+(n-1)n+n(n+1)+(n+2)(n+3)}$$

$$= \frac{7\cdot(2n)^3+3\cdot(2n)^2\cdot(-3-2-1+1+2+3)}{4n^2+n\cdot(-3-2-1+1+2+3)+6+6}+$$

$$+\frac{3\cdot(2n)\cdot((-3)^2+(-2)^2+(-1)^2+1^2+2^2)-3^3-2^3-1^3+1^3+2^3+3^3)}{4n^2+n\cdot(-3-2-1+1+2+3)+6+6}$$

$$= \frac{56n^3+168n}{4n^2+12} = \frac{4\cdot 14\cdot n\cdot(n^2+3)}{4\cdot(n^2+3)} = 4n = 2^{17} = 131072.$$

Aufgabe 121234:
Es seien a und b natürliche Zahlen, für die $0 \le b < a$ gilt. Ferner sei durch $z_n = an+b$ $(n = 0,1,2,\dots)$ eine Folge natürlicher Zahlen gegeben.
Ein Element z_m dieser Folge habe mit a den größten gemeinsamen Teiler d.
Es ist festzustellen, ob dann alle Elemente dieser Folge mit a den größten gemeinsamen Teiler d haben.

Lösung von cyrix:
Nach dem euklidischen Algorithmus ist für alle natürlichen Zahlen n

$$\text{ggT}(z_n,a) = \text{ggT}(an+b,a) = \text{ggT}(b,a)$$

unabhängig vom Index n. Damit besitzen alle Folgenglieder den gleichen größten gemeinsamen Teiler d.

Aufgabe 221232:
Man ermittle für alle diejenigen 30-Tupel $(a_1, a_2, ..., a_{30})$ von (nicht notwendig verschiedenen) positiven ganzen Zahlen a_i $(i = 1, ..., 30)$, die

$$\sum_{i=1}^{30} a_i = 1983$$

erfüllen, den größten Wert, den der größte gemeinsame Teiler d der Zahlen a_i annehmen kann.

Lösung von weird:
Da alle a_i natürlich durch d teilbar sind, gilt dies auch für deren Summe 1983 mit der Primfaktorzerlegung $1983 = 3 \cdot 661$, d. h., es muss

$$d \in \{1{,}3{,}661{,}1983\}$$

sein. Da $d = 1983$ und $d = 661$ bei 30 positiven Summanden natürlich sofort ausscheiden, kommt dann als nächstes in Hinblick auf ein Maximum $d = 3$ in Betracht und damit ist das Problem hier natürlich leicht lösbar, z. B. mit der Belegung

$$a_1 = a_2 = ... = a_{29} = 3,\ a_{30} = 1983 - 29 \cdot 3 = 1896$$

Aufgabe 261233A:
Man untersuche ob es vier aufeinanderfolgende natürliche Zahlen gibt, die die folgende Eigenschaft haben:
Jede der vier Zahlen lässt sich so in zwei positive ganzzahlige Summanden x und y zerlegen, dass sie jeweils ein Teiler von $x \cdot y$ ist.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es gibt vier solche Zahlen. Zum Beweis genügt es ein Beispiel anzugeben. Ein solches Beispiel bilden die Zahlen 242, 243, 244, 245:
$242 = 22 + 220$ ist wegen $242 \cdot 20 = 22 \cdot 220$ ein Teiler von $22 \cdot 220$
$243 = 81 + 162$ ist wegen $243 \cdot 54 = 81 \cdot 162$ ein Teiler von $81 \cdot 162$
$244 = 122 + 122$ ist wegen $244 \cdot 61 = 122 \cdot 122$ ein Teiler von $122 \cdot 122$
$245 = 35 + 210$ ist wegen $245 \cdot 30 = 35 \cdot 210$ ein Teiler von $35 \cdot 210$

Heuristische Lösung:
Eine natürliche Zahl n hat genau dann die genannte Eigenschaft, wenn ($n \geq 2$ gilt und) n ein Teiler von einem der Produkte $k \cdot (n-k)$ $(k = 1,...,n-1)$ ist. Wegen $k \cdot (n-k) = kn - k^2$ ist das gleichbedeutend damit, dass n ein Teiler von einer der Quadratzahlen k^2 $(k = 1,...,n-1)$ ist.
Hierfür ist hinreichend, dass die Zahl n ihrerseits durch eine Quadratzahl $q^2 > 1$ teilbar ist; denn wenn dies zutrifft, so existiert eine natürliche Zahl a mit $n = q^2 \cdot a$, und damit ist n wegen $n \cdot a = q^2 a^2$ ein Teiler des Quadrates der natürlichen Zahl $k = qa$, die wegen $k = \frac{n}{q}$ und $q > 1$ kleiner als n ist.
Nun kann man z. B. versuchen, vier Zahlen der geforderten Art etwa als

$$n = 2^2 \cdot a \tag{1}$$
$$n + 1 = 3^2 \cdot b \tag{2}$$
$$n + 2 = 5^2 \cdot c \tag{3}$$
$$n + 3 = 7^2 \cdot d \tag{4}$$

zu finden. Hiervon werden (1) und (2), also $4a + 1 = 9b$ etwa gelöst durch $b = 1 + 4t$, $a = 2 + 9t$

$$n = 8 + 36t \tag{5}$$

sodann werden (5) und (3), also $10 + 36t = 25c$ etwa gelöst durch $t = -10 + 25u$, $c = -14 + 36u$

$$n = -352 + 900u \tag{6}$$

schließlich werden (6) und (4), also $-349+900u = 49d$ etwa gelöst durch $u = -16+49v$, $d = -301+900v$,

$$n = -14572 + 44100v$$

für $v = 1$ also $n = 29348$.

Hat man die Lösungsfindung wie hier als Nachweis hinreichender Bedingungen formuliert, so ist eine Probe nicht erforderlich.
Andernfalls ist es für die Korrektheit der Lösung (wie oben bemerkt, sogar allein) erforderlich, die verlangte Eigenschaft zu bestätigen:

$29348 = 4 \cdot 7337 = x + y$ ist Teiler von xy für $x = 2 \cdot 7337$, $y = 2 \cdot 7337$,
$29349 = 9 \cdot 3261 = x + y$ ist Teiler von xy für $x = 3 \cdot 3261$, $y = 6 \cdot 3261$,
$29350 = 25 \cdot 1174 = x + y$ ist Teiler von xy für $x = 5 \cdot 1174$, $y = 20 \cdot 1174$,
$29351 = 49 \cdot 599 = x + y$ ist Teiler von xy für $x = 7 \cdot 599$, $y = 42 \cdot 599$.

Alternativ-Lösung von cyrix:
Wir betrachten zuerst folgenden Hilfssatz, wobei für die Aufgabe nur die erste Implikation von Bedeutung ist:

Eine natürliche Zahl n lässt sich genau dann als Summe zweier positiver ganzer Zahlen x und y mit $n|x \cdot y$ darstellen, wenn es eine Primzahl p gibt, sodass p^2 ein Teiler von n ist.

Beweis: Nehmen wir zuerst an, dass n durch p^2 teilbar ist und wählen $x := \frac{n}{p}$ sowie $y := n - x$. Dann ist $0 < x < n$ eine positive ganze Zahl und damit auch $0 < y < n$ eine solche. Weiterhin ist x durch p teilbar, also auch $y = n - x$, sodass es eine ganze Zahl t mit $y = t \cdot p$ gibt. Dann ist n ein Teiler von $n \cdot t = \frac{n}{p} \cdot (t \cdot p) = x \cdot y$.

Seien nun x und y positive ganze Zahlen mit $x+y = n$ und $n|x \cdot y$. Weiterhin sei p ein beliebiger Primteiler von n, sodass auch $p|x \cdot y$, also $p|x \vee p|y$ und damit wegen $x + y = n$ auch $p|x \wedge p|y$ gilt. Insbesondere sind also sowohl x als auch y durch jeden Primteiler p von n teilbar.
Wäre n quadratfrei, also für keine Primzahl p durch p^2 teilbar, so wäre es das Produkt paarweiser verschiedener Primzahlen, die aber auch alle Teiler von x und von y sein müssten, sodass wegen $x,y > 0$ und $n|x$, $n|y$, also $n \leq x,y$, ein Widerspruch zu $x + y = n$ entstehen würde. Also gibt es mindestens eine Primzahl p mit $p^2|n$, $\square$.

Nun zur Aufgabe:
Da $4 = 2^2$, $9 = 3^2$, $25 = 5^2$ und $49 = 7^2$ paarweise teilerfremd sind, gibt es nach dem Chinesischen Restsatz eine (und damit unendlich viele) natürliche Zahl m, sodass m bei der Teilung durch 49 den Rest 0, bei der Teilung der 25 den Rest 1, bei der Teilung durch 9 den Rest 2 und bei der Teilung durch 4 den Rest 3 lässt. (Dann ist, wie man leicht nachprüft, $m > 3$, sodass auch $m - 3$ eine natürliche Zahl ist.)

Sei m eine solche natürliche Zahl. Dann ist $m - 3$ durch 2^2, $m - 2$ durch 3^3, $m - 1$ durch 5^2 und m durch 7^2 teilbar, sodass nach dem vorhergehenden Hilfssatz sich jede dieser vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen darstellen lässt als Summe $x + y$ positiver ganzer Zahlen und gleichzeitig Teiler vom Produkt $x \cdot y$ dieser beiden Summanden ist. Also gibt es solche Zahlen.

Bemerkung: Das Konstruktionsverfahren lässt sich in analoger Weise auf beliebig viele aufeinanderfolgende natürlicher Zahlen mit dieser Eigenschaft erweitern.

Aufgabe 291236:
Man beweise:
Schreibt man alle natürlichen Zahlen n mit $111 \leq n \leq 999$ in beliebiger Reihenfolge hintereinander auf, so erhält man stets die Ziffernfolge einer durch 37 teilbaren Zahl.

Lösung von weird:
Stellt man eine beliebige natürliche Zahl a im Zahlensystem mit der Basis 1000 dar, also

$$a = \sum_{k=0}^{m} a_k\, 1000^k \quad (0 \leq a_k < 1000,\ m \in \mathbb{N})$$

so gilt bez. der Teilbarkeit durch 37 wegen $1000 \equiv 1 \pmod{37}$ die einfache Regel, dass a genau dann durch 37 teilbar ist, wenn dies für ihre „Ziffernsumme“ $\sum_{k=0}^{m} a_k$ gilt.
Im gegenständlichen Fall sind die Ziffern einfach alle natürlichen Zahlen von 111 bis 999, wobei in Hinblick auf die Ziffernsumme die Reihenfolge natürlich keine Rolle spielt. Und ja, diese Ziffernsumme, nämlich

$$\frac{111 + 999}{2}\,(999 - 111 + 1)$$

ist wegen $111 = 3 \cdot 37$ tatsächlich durch 37 teilbar.

Aufgabe 301236:
Man beweise: Es gibt unendlich viele natürliche Zahlen n, für die $2^n + n^2$ durch 100 teilbar ist.

Lösung von weird:
Sieht man sich einmal den ersten Teilsummanden 2^n für $(n \in \mathbb{N})$ an, so ist klar, dass er für $n \geq 2$ stets durch 4 teilbar ist und er mod 25 wegen ggt(2,25) = 1 die Periode $20 (= \varphi(25))$ oder einen Teiler davon hat, was dann also für $n \geq 2$ auch mod 100 gilt. Für den zweiten Teilausdruck n^2 gilt dagegen

$$\forall k \in \mathbb{N}: \quad (n + 50k)^2 = n^2 + 100nk + 2500k^2 \equiv n^2 \pmod{100}$$

sodass also für den Gesamtausdruck $2^n + n^2$ für $n \geq 2$ dann jedenfalls gilt

$$\forall k \in \mathbb{N}: \quad 2^{n+100k} + (n + 100k)^2 \equiv 2^n + n^2 \pmod{100} \qquad (*)$$

Es genügt somit eine einzige(!) Zahl $n \in \mathbb{N}$ zu finden, für die $2^n + n^2$ durch 100 teilbar ist, denn wegen (*) hat man damit automatisch dann auch unendlich viele solcher Zahlen. Und ja, $n = 6$ ist z. B. eine solche, wie man wohl am einfachsten durch Probieren - es kommen ja offensichtlich nur gerade n in Frage! - sehr schnell herausfindet.

Aufgabe 321234:
Von einer ungeraden natürlichen Zahl n und von n Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ werde vorausgesetzt, dass jede der Zahlen $1, 2, \ldots, n$ genau einmal unter den $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vorkommt.
Man beweise, dass unter dieser Voraussetzung das Produkt

$$(a_1 - 1) \cdot (a_2 - 2) \cdot \ldots \cdot (a_n - n)$$

stets eine gerade Zahl sein muss.

Lösung von MontyPythagoras:
Das Produkt kann nur dann ungerade sein, wenn jeder einzelne der Faktoren ungerade ist. Die Faktoren $(a_i - i)$ sind nur dann alle ungerade, wenn a_i und i verschiedene Parität haben, also z. B. a_i ungerade ist, wenn i gerade ist, oder anders herum.

Da $n = 2m - 1$ mit $m \in \mathbb{N}$ ungerade ist, gibt es in der Menge $\{1,2,3,\ldots,n\}$ eine ungerade Zahl mehr als es gerade gibt, also $m - 1$ gerade Zahlen und m ungerade Zahlen. Jedem ungeraden $i \in \{1,2,3,\ldots,n\}$, von denen es m gibt, muss ein gerades a_i zugeordnet werden. Von denen gibt es aber nur $m - 1$, also eines zu wenig, so dass auf jeden Fall immer ein Faktor dabei ist, wo zwei ungerade Zahlen voneinander abgezogen werden.
Dieser Faktor ist dann gerade, und somit ist auch das Produkt gerade.

IV Runde 4

Aufgabe 021241:
a) Beweisen Sie, dass der Rest bei der Division einer beliebigen Primzahl durch 30 entweder 1 oder eine Primzahl ist!
b) Gilt das auch bei der Division einer Primzahl durch 60? Begründen Sie Ihre Antwort!

Lösung von Burkhard Thiele:
a) Jede Primzahl p lässt sich folgendermaßen schreiben:
$p = 30q + r$, q und r natürliche Zahlen mit $1 \leq r \leq 29$.
Für alle Zahlen r, die durch 2, 3, oder 5 teilbar sind, ist $30q + r$ keine Primzahl. Daher kommen nur die Zahlen 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 als Rest r in Frage, d. h., r ist entweder gleich 1 oder eine Primzahl.

b) Jede Primzahl p lässt sich folgendermaßen schreiben:
$p = 60q + r$, q und r natürliche Zahlen mit $1 \leq r \leq 59$.
Da sich die Primzahl 109 in der Form $109 = 60 \cdot 1 + 49$ schreiben lässt und da 49 keine Primzahl ist, gilt die Aussage von a) nicht für b).

Aufgabe 041242:
Es ist zu entscheiden, durch welche der Primzahlen $2, 3, 5, 7, 11, 13, 109, 151, 491$ die Zahl $z = 1963^{1965} - 1963$ teilbar ist.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es gilt:

$$z = 1963^{1965} - 1963 = 1963(1963^{1964} - 1) = 1963(1963^{982} + 1)(1963^{491} + 1)(1963^{491} - 1)$$

Wegen

$$a^k - 1(a - 1)(a^{k-1} + a^{k-2} + ... + 1)$$

für jedes positive ganze k und jedes a sowie

$$a^k + 1 = (a + 1)(a^{k-1} - a^{k-2} + ... + 1)$$

für jedes ungerade natürliche k und jedes a gilt:

$$z = 1962 \cdot 1963 \cdot 1964 \cdot P$$

wobei P das Produkt der übrigen Faktoren ist. Wegen

$$1962 = 2 \cdot 3^3 \cdot 109; \qquad 1963 = 13 \cdot 151; \qquad 1964 = 2^4 \cdot 491$$

ist z durch 2, 3, 13, 109, 151, 491 teilbar. Es gilt

$$1963^{1964} - 1 = (1963^4)^{491} - 1$$

Die letzte Ziffer von 1963^4 ist 1, deshalb ist auch 1 die letzte Ziffer von $(1963^4)^{491}$. Daher ist die letzte Ziffer von $1963^{1964} - 1$ gleich 0, damit ist diese Zahl durch 5 teilbar, und deswegen ist auch z durch 5 teilbar.
z ist also durch alle angegebenen Primzahlen teilbar.

Aufgabe 181245:
Es sei n eine natürliche Zahl größer als 1.
Man zeige, dass es zu jeder der n Zahlen $a_1, a_2, ..., a_n$ mit $a_j = n! + j$ $(j = 1, 2, ..., n)$ eine Primzahl p_j gibt, die die Zahl a_j, aber keine weitere Zahl a_k $(k \neq j)$ dieser n Zahlen teilt.

Lösung von Zeitschrift „Mathematik in der Schule“:
Es sei j eine der Zahlen $1, 2, ..., n$.
1. Fall: Es existiert ein Primteiler p_j von a_j mit $p_j \geq n$.
Wir behaupten, dass dieser Primteiler kein weiteres a_k $(k \neq j)$ teilt.
Angenommen, es existierte ein $k \neq j$, $0 < k \leq n$ derart, dass p_j a_k teilt. Dann würde p_j aber auch $a_k - a_j = k_j$ teilen, was wegen $|k - j| < n$ im Widerspruch zur Voraussetzung $p_j \geq n$ steht.

2. Fall: Sämtliche Primteiler von a_j sind kleiner als n.
Dann ist

$$q = \frac{a_j}{j} = \frac{n!}{j} + 1$$

eine ganze Zahl, für die folgendes gilt:
q ist größer als 1 und besitzt daher Primteiler, die, da q ein Teiler von a_j ist, sämtlich kleiner als n sind.
Diese Primteiler können keine der Zahlen m mit $1 < m < n$ und $m \neq j$ sein, da m ein Teiler von $\frac{n!}{j}$, also keiner von $\frac{n!}{j} + 1$ wäre. Dann muss aber j Primteiler von q und damit von a_i, a_j also von der Form j^i sein.
Es bleibt zu zeigen, dass für kein k mit $0 < k \leq n$ und $k \neq j$ j Teiler von a_k ist.
Angenommen also, ein solches k existierte. Wie im ersten Fall müsste dann j auch Teiler von $k - j$ und damit von k sein, d. h., es existierte eine ganze Zahl g mit $k = g_j$. Es ist $0 < g_j \leq nm$ $g_j \neq j$, also g_j Teiler von $\frac{n!}{j}$.
Dies steht im Widerspruch dazu, dass j die Zahl $q = \frac{n!}{j} + 1$ teilt. Mit $p_j = j$ ist also auch im zweiten Fall eine Primzahl gefunden, die den Bedingungen der Aufgabe genügt.

Aufgabe 221244:
Man beweise, dass das Polynom

$$f(x) = \frac{1}{630} \cdot x^9 - \frac{1}{21} \cdot x^7 + \frac{13}{30} \cdot x^5 - \frac{82}{63} \cdot x^3 + \frac{32}{35} \cdot x$$

für alle ganzzahligen x ganzzahlige Werte annimmt.

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:
Wir klammern zunächst aus und erhalten:

$$f(x) = \frac{1}{630} \left(x^9 - 30x^7 + 273x^5 - 820x^3 + 576x\right)$$

Es bleibt also zu zeigen: $630 \mid n^9 - 30n^7 + 273n^5 - 820n^3 + 576n$.
Nun ist $630 = 63 \cdot 10 = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9$. Wir zeigen nun also die Teilbarkeit:

$$n^9 - 30n^7 + 273n^5 - 820n^3 + 576n \equiv n^9 + n^5 = n^5(n^4 + 1) \equiv 0 \pmod 2$$

$$n^9 - 30n^7 + 273n^5 - 820n^3 + 576n \equiv n^5 + 3n^5 + n = n(4n^4 + 1) \equiv 0 \pmod 5$$

$$n^9 - 30n^7 + 273n^5 - 820n^3 + 576n \equiv n^3 - 30n - n^3 + 2n \equiv 0 \pmod 7$$

$$n^9 - 30n^7 + 273n^5 - 820n^3 + 576n \equiv n^9 - 3n^7 + 3n^5 - n^3 = n^3(n^6 - 3n^4 + 3n^2 - 1) =$$
$$= n^3(n-1)^3(n+1)^3 \equiv 0 \pmod 9$$

Aufgabe 241246A:
Man untersuche, ob es 40 aufeinanderfolgende natürliche Zahlen gibt, die sämtliche kleiner als 10^9 und nicht Primzahlen sind.

Lösung von Kornkreis:
Betrachte $n = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$. Für jede natürliche Zahl $a > 0$ und alle $k \in \{0, \pm 2, \pm 3, ..., \pm 22\}$ ist $a \cdot n \pm k$ keine Primzahl: Jede der ersten Primzahlen bis 19 kommt in $a \cdot n$ als Primfaktor vor, sodass jedes k aus der angegebenen Menge einen Primfaktor besitzt, der in $a \cdot n$ enthalten ist, sodass man diesen ausklammern kann. Des Weiteren ist stets $a \cdot n - 22 > 0$.

Nun gilt es nur noch, ein a zu finden, sodass $a \cdot n \pm 1$ keine Primzahlen sind. Man findet schnell mit Modulo-Rechnung und geeignetem Zusammenfassen der Faktoren in n, dass $n \equiv -8 \mod 23$ und $n \equiv 2 \mod 29$ gilt.
Wenn wir nun ein a finden könnten mit $a \equiv 3 \mod 23$ und $a \equiv 15 \mod 29$, so wäre $a \cdot n \equiv -1 \mod 23$ und $a \cdot n \equiv 1 \mod 29$, und wir wären fertig. Mit dem chinesischen Restsatz findet man, dass das kleinste natürliche a mit dieser Eigenschaft $a = 624$ ist. Leider gilt dann aber $a \cdot n > 10^9$, sodass wir etwas anderes probieren müssen.

Ein a mit $a \equiv -3 \mod 23$ und $a \equiv -15 \mod 29$ ergibt $a \cdot n \equiv 1 \mod 23$ und $a \cdot n \equiv -1 \mod 29$. Das kleinste natürliche a mit dieser Eigenschaft ist $a = 43$, und tatsächlich kann man abschätzen bzw. ausrechnen, dass $a \cdot n + 22 < 10^9$ gilt. (Anmerkung: $a = 43$ ergibt sich auch aus obigem Fehlversuch vermittels $23 \cdot 29 - 624 = 43$.)

Demzufolge gibt es 45 (und insbesondere 40) aufeinanderfolgende Zahlen kleiner als 10^9, die keine Primzahlen sind, nämlich $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 43 + k$ mit $k \in \{0, \pm 1, ..., \pm 22\}$

Aufgabe 251245:
Es sei (p_n) die Folge der ihrer Größe nach geordneten Primzahlen, d. h., es sei $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7, \ldots$
Man untersuche, ob es eine natürliche Zahl N derart gibt, dass für alle natürlichen Zahlen n mit $n > N$ die Ungleichung $p_n > 4n$ gilt.

Lösung von cyrix:
Wir zeigen im Folgenden, dass es ein solches N gibt, indem wir die dazu äquivalente Behauptung beweisen, dass es ein S gibt, sodass für jedes $s > S$ weniger als $\frac{s}{4}$ Primzahlen $p \leq s$ gibt. Ist dem nämlich so, dann gilt insbesondere für jede Primzahl $p_n > S$ mit $s := p_n$, dass $n < \frac{s}{4} = \frac{p_n}{4}$, also $p_n > 4n$ gilt.

Für eine Primzahl $p > 7$ gilt, dass sie weder durch 2, 3, 5 noch 7 teilbar ist. Also kann sie nur in einer von zwei Restklassen modulo 2, in nur zwei von drei Restklassen modulo 3, in nur 4 von 5 Restklassen modulo 5 und in nur 6 der 7 Restklassen modulo 7 liegen. Nach dem chinesischen Restsatz lässt sich wegen der paarweisen Teilerfremdheit von 2, 3, 5 und 7 jede Kombination der Restklassen modulo 2, 3, 5 und 7 zu einer modulo $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$ zusammenfassen, sodass p nur in $1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 = 48$ der 210 Restklassen modulo liegen kann.

Da 210 aufeinanderfolgende natürliche Zahlen alle Restklassen modulo 210 durchlaufen, können sich unter diesen nur höchstens 48 Primzahlen, die größer als 7 sind, befinden. Insbesondere gibt es also für jedes positive ganze k höchstens $48 \cdot k + 4$ Primzahlen, die kleiner oder gleich $210 \cdot k$ sind.

Es sei $S := 12 \cdot 210$, $s > S$ und k die größte ganze Zahl mit $210k \leq s$. Dann ist einerseits $k \geq 12$ und andererseits $s < (k+1) \cdot 210$. Also gibt es höchstens so viele Primzahlen $p \leq s$, wie es Primzahlen $p \leq (k+1) \cdot 210$ gibt. Nach dem Vorabsatz sind dies aber höchstens

$$48 \cdot (k+1) + 4 = 48k + 52 = \frac{210}{4} \cdot k - \frac{18}{4} \cdot k + 52 \leq \frac{s}{4} - \frac{9}{2} \cdot 12 + 52 = \frac{s}{4} - 54 + 52 < \frac{s}{4}, \square$$

Aufgabe 261244:
Man ermittle die kleinste positive ganze Zahl a, für die $(a+1)^5 - a^5 - 1$ durch 18305 teilbar ist.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Für jede positive ganze Zahl a ist

$$(a+1)^5 - a^5 - 1 = 5a(a^3 + 2a^2 + 2a + 1) = 5a(a+1)(a^2 + a + 1)$$

genau dann durch $18305 = 5 \cdot 7 \cdot 523$ teilbar, wenn

$$a(a+1)(a^2 + a + 1) \quad \text{durch } 7 \cdot 523 \tag{1}$$

teilbar ist. Darin ist 523 Primzahl (2); denn 523 ist durch keine der Zahlen 2,3,5,7,11,13,17,19 teilbar, und es gilt $23^2 > 523$.
Man kann zunächst a so zu ermitteln versuchen dass $a^2 + a +^1$ durch 523 teilbar ist (3), d. h. dass eine positive ganze Zahl k mit

$$a^2 + a + 1 = 523k \tag{4}$$

existiert. Ist diese Gleichung lösbar, so gilt wegen $a > 0$

$$a = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{523 \cdot 4k - 3} \tag{5}$$

dann ist also $523 \cdot 4k - 3$ eine ungerade Quadratzahl. Daraus folgt der Reihe nach

1. $2092k - 3$ hat eine der Einerziffern 1, 5, 9;
2. $2092k$ hat eine der Einerziffern 4, 8, 2;
3. k hat eine der Einerziffern 2, 7, 4, 9, 1, 6.

Außerdem ist nach (4) und weil $a^2 + a + 1 = a(a+1) + 1$ eine ungerade Zahl ist, auch k ungerade und hat somit einer der Einerziffern 1, 7, 9. Betrachtet man solche Zahlen k der Reihe nach, so zeigt sich:

Für $k = 1$ ist $523 \cdot 4k - 3 = 2089$ wegen $45^2 < 2089 < 46^2$ keine Quadratzahl.
Für $k = 7$ ist $523 \cdot 4k - 3 = 14641 = 121^2$, nach (5) also $a = 60$.
Damit ist gezeigt: Für $a = 60$ gilt

$$a^2 + a + 1 = 523 \cdot 7$$

und zwar ist $k = 7$ in (4) die kleinste positive ganze Zahl, also auch $a = 60$ die kleinste positive ganze Zahl, für die (3) gilt. (7)

Wegen (6) erfüllt $a = 60$ sogar (1). Für alle positiven ganzen $a < 60$ folgt dagegen aus $0 < a, a+1 < 523$ sowie aus (7) und (2), dass diese a nicht (1) erfüllen.
Die kleinste Zahl mit den in der Aufgabe genannten Eigenschaften ist somit $a = 60$.

Aufgabe 341246A:
Zu gegebenen positiven ganzen Zahlen a und b sei $(x_n)_{n=0,1,2,\dots}$ diejenige Zahlenfolge, die durch

$$x_0 = 1, \qquad x_{n+1} = ax_n + b \qquad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

definiert ist.
Man beweise: Für jede Wahl von a und b enthält die so gebildete Folge unendlich viele Zahlen, die keine Primzahlen sind.

Lösung von weird:
Beweis: Sei p ein beliebiger Primteiler von $x_1 = a + b$. Gilt dann auch $p \mid a$, so würde daraus auch sofort $p \mid b = (a + b) - a$, d. h., mit Ausnahme von $x_0 = 1$ wären dann alle Folgenglieder durch p teilbar und da die Folge streng monton wächst, würde nicht nur $p \mid x_n$, sondern auch gleichzeitig $x_n > x_1 \geq p$ für $n > 1$ gelten, woraus die Behauptung in trivialer Weise folgt.
Sei also im Folgenden $p \nmid a$ vorausgesetzt und (y_n) die aus (x_n) durch die Definition

$$y_n \equiv x_n \pmod n, \text{ mit } 0 \leq y_n < p \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

abgeleitete Folge. Diese muss dann, da es ja nur endlich viele Restklassen modulo p gibt, notwendigerweise periodisch werden. Ist nun $m > 1$ minimal so gewählt, dass $y_m = y_k$ für ein $k \in \{0,1,\dots,m-1\}$ gilt, so muss dann $k = 0$ sein, denn andernfalls könnte man aus

$$y_{m-1} + b = y_m = y_k = ay_{k-1} + b \pmod p,$$

indem man hier $-b$ beidseitig addiert und anschließend die Gleichung mit dem wegen $p \not| a$ existierenden Inversen $a^{-1} \pmod p$ multipliziert, sofort schließen, dass auch $y_{m-1} = y_{k-1}$ gelten müsste, im Widerspruch zur Minimaleigenschaft von m. Es gilt somit auch $y_{m+1} = y_1 = 0$ bzw. allgemeiner

$$y_{km+1} = y_1 = 0$$

und auf die ursprüngliche Folge bezogen (x_n) bezogen bedeutet dies

$$p \mid x_{km+1} \quad (k \in \mathbb{N})$$

Wieder mit der ev. Ausnahme von x_1, für welches ja auch $x_1 = p$ gelten könnte, wären dann mit einer ähnlichen Schlussweise wie oben wieder alle Folgenglieder $x_{km+1}, k = 0,1,2,\dots$, also dann jedenfalls unendlich viele, zusammengesetzt, q. e. d.

VII.II Diophantische Gleichungen

I Runde 1

Aufgabe 091213:
Es sind alle natürlichen Zahlen a anzugeben, für welche die Gleichung $a^{a^a} = (a^a)^a$ erfüllt ist.

Anmerkung: a^{a^a} bedeutet $a^{(a^a)}$.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Da für alle positiven ganzen Zahlen

$$(a^a)^a = a^{a \cdot a} = a^{\left(a^2\right)}$$

gilt, kann die gegebene Gleichung auch in der Form $a^{a^a} = a^{\left(a^2\right)}$ geschrieben werden.

(1) Für $a \neq 1$ folgt hieraus die Bedingung, dass die Exponenten übereinstimmen müssen, so dass $a^a = a^2$ gefolgert werden kann. Wegen $a \neq 1$ folgt daraus weiter die Bedingung $a = 2$. Also kann für $a \neq 1$ nur die natürliche Zahl 2 Lösung sein.

Tatsächlich gilt $2^{2^2} = 2^4 = 16$ und $(2^2)^2 = 4^2 = 16$.

(2) Prüft man den bisher ausgeschlossenen Fall $a = 1$ unmittelbar durch Einsetzen in die gegebene Gleichung, so zeigt sich, dass auch die natürliche Zahl 1 die gegebene Gleichung löst; denn es gilt $1^{1^1} = 1 = (1^1)^1$.

Weitere Lösungswerte gibt es nicht.

Alternativ-Lösung von cyrix:
Offensichtlich ist $a = 1$ eine Lösung. Sei ab nun deshalb $a > 1$. Wegen $(a^a)^a = a^(a \cdot a) = a^(a^2)$ folgt aufgrund der strengen Monotonie die Potenz-Funktion a^x aus der gegebenen Gleichung direkt die Gleichheit der Exponenten, also $a^a = a^2$ und damit analog $a = 2$, was auch eine Lösung liefert, wie man durch Einsetzen leicht nachprüft.
Also sind $a = 1$ und $a = 2$ die beiden einzigen Lösungen.

Aufgabe 121214:
Es sind alle geordneten Paare (x, y) positiver ganzer Zahlen x und y $(x \leqslant y$)anzugeben, für die die Gleichung $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{1980}$ erfüllt ist.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, es seien x und y zwei derartige positive ganze Zahlen, so dass

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{1980} = 6\sqrt{5 \cdot 11} \tag{1}$$

gilt. Dann folgt

$$x + y + 2\sqrt{xy} = 36 \cdot 5 \cdot 11 \tag{2}$$

Nun sei t der größte gemeinsame Teiler von x und y; dann gilt $x = tu$ und $y = tv$, wobei u und v positive ganze Zahlen mit dem größten gemeinsamen Teller 1 sind, für die $u \leq v$ gilt.

Ferner ist wegen (2) $\sqrt{xy} = t\sqrt{uv}$ eine positive ganze Zahl, woraus wegen der Teilerfremdheit von u, v weiter $u = u_1^2, v = v_1^2$ folgt, wobei u_1 und v_1 teilerfremde positive ganze Zahlen sind, für die $u_1 \leq v_1$ gilt. Daraus folgt wegen (2)

$$t(u_1^2 + v_1^2 + 2u_1v_1) = t(u_1 + v_1)^2 = 36 \cdot 5 \cdot 11$$

also kann nur einer der folgenden vier Fälle vorliegen:

a) $t = 36 \cdot 5 \cdot 11$, $u_1 + v_1 = 1$;
b) $t = 9 \cdot 5 \cdot 11$, $u_1 + v_1 = 2$;
c) $t = 4 \cdot 5 \cdot 11$, $u_1 + v_1 = 3$;
d) $t = 5 \cdot 11$, $u_1 + v_1 = 5$.

Fall a) ist durch U_1, v_1 mit den oben angegebenen Eigenschaften nicht erfüllbar,

Fall b) nur durch $u_1 = 1, v_1 = 1$ und damit $x = 495, y = 495$,

Fall c) nur durch $u_1 = 1, v_1 = 2$ und damit $x = 220, y = 880$,

Fall d) nur durch $u_1 = l, v_1 = 5$ und damit $x = 55, y = 1375$ erfüllbar.

Daher können nur diese Werte die geforderten Eigenschaften haben. Eine Probe zeigt, dass sie diese tatsächlich besitzen.

Also sind genau die folgenden geordneten Paare positiver ganzer Zahlen Lösungen der gegebenen Gleichung: $(55, 1375)$, $(220, 880)$, $(495, 495)$.

Aufgabe 261211:
Man ermittle alle Tripel $(x; y; z)$ von Zahlen mit den folgenden Eigenschaften (1), (2):

(1) Die Zahlen x, y, z sind in dieser Reihenfolge aufeinanderfolgende ganze Zahlen.

(2) Es gilt: $x \cdot (x + y + z) = x \cdot y \cdot z$.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn $(x; y; z)$ ein Tripel mit den Eigenschaften (1) und (2) ist, dann ist nach (1)

$$x = n - 1 \quad , \quad y = n \quad , \quad z = n + 1 \tag{3}$$

mit einer ganzen Zahl n, also $x + y + z = 3n$, und aus (2) folgt

$$(n - 1) \cdot 3 \cdot n = (n - 1) \cdot n \cdot (n + 1)$$
$$n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) = 0$$

Da ein Produkt nur dann 0 sein kann, wenn ein Faktor 0 ist, folgt: $n = 0$ oder $n = 1$ oder $n = 2$. Wegen (3) können also nur die Tripel $(-1; 0; 1), (0; 1; 2), (1; 2; 3)$ die geforderten Eigenschaften.

II. Sie haben diese Eigenschaften; denn sie sind Tripel von in dieser Reihenfolge aufeinanderfolgenden ganzen Zahl x,y,z und sie erfüllen die Probe in der Gleichung (2).

Aufgabe 301211:
Man untersuche, ob es natürliche Zahlen a, b, c, d gibt, für die die folgenden beiden Bedingungen (1) und (2) gelten:

$$a \cdot b \cdot c \cdot d = 111111111111, \tag{1}$$
$$a + b + c + d < 11111. \tag{2}$$

Falls das zutrifft, gebe man solche Zahlen an.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es genügt, in einem Beispiel natürliche Zahlen a,b,c,d anzugeben und (1), (2) für die angegebenen Zahlen zu bestätigen. Ein solches Beispiel sind etwa

$$a = 37, \quad b = 3 \cdot 11 \cdot 13 = 429, \quad c = 7 \cdot 101 = 707, \quad d = 9901$$

wie man durch Berechnung von $a + b + c + d = 11074$ und

$$3 \cdot 37 = 111, \quad 7 \cdot 11 \cdot 13 = 1001, \quad 101 \cdot 9901 = 1000001$$

also

$$3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37 = 111 \cdot 1001 = 111111$$
$$a \cdot b \cdot c \cdot d = 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37 \cdot 101 \cdot 9901 = 111111 \cdot 1000001 = 111111111111$$

bestätigen kann.

Aufgabe 311212:
Man ermittle alle diejenigen Tripel (a, b, n) positiver ganzer Zahlen a, b, n, für die folgende Aussagen (1) und (2) gelten:

(1) Die Zahlen a und b sind Primzahlen.

(2) Es gilt $97ab = (a+n)(b+n)$.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn a,b,n positive ganze Zahlen sind, die (1),(2) erfüllen, so folgt:

Wegen der Eindeutigkeit der Primfaktorenzerlegung und weil $a+n > 1$, $b+n > 1$ gelten, muss eine der Zahlen $a+n$, $b+n$ gleich einer der Primzahlen 97, a, b sein, die andere gleich dem Produkt der beiden übrigen Primzahlen. Hierfür gibt es nur die Fälle

1. $a+n = 97a$, $b+n = b$,
2. $a+n = 97b$, $b+n = a$,
3. $a+n = ab$, $b+n = 97$

sowie die drei durch Vertauschung von a,b entstehenden Fälle.

Fall 1. führt auf den Widerspruch $n = 0$ und scheidet daher aus.

Fall 2. führt auf $(b+n)+n = 97b$, $2n = 96b$, $n = 48b$, $a = b+n = 49b$ und damit auf einen Widerspruch zur Primzahleigenschaft von a. Also scheidet auch dieser Fall aus.

Fall 3. führt auf $a+n = a(97-n)$, $n(a+l) = 96a$ (3)

Da a teilerfremd zu $a+1$ ist, muss n durch a teilbar sein, etwa $n = k \cdot a$ (4) mit einer positiven ganzen Zahl k. Aus (3) folgt damit $k(a+1) = 96$. (5)

Nun hat 96 genau die positiv-ganzzahligen Teiler 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 96. Von ihnen haben nur

$$3, \quad 4 \quad 6, \quad 8, \quad 12, \quad 24, \quad 32, \quad 48$$

die Form $a+1$ mit einer Primzahl a, nämlich jeweils mit

$$a = 2, \quad 3, \quad 5, \quad 7, \quad 11, \quad 23, \quad 31, \quad 47$$

Hiermit führen (5),(4) und die Bedingung $b+n = 97$ jeweils auf

$$\begin{aligned} k &= 32, \quad 24, \quad 16, \quad 12, \quad 8, \quad 4, \quad 3, \quad 2 \\ n &= 64, \quad 72, \quad 80, \quad 84, \quad 88, \quad 92, \quad 93, \quad 94 \\ b &= 33, \quad 25, \quad \mathbf{17}, \quad \mathbf{13}, \quad 9, \quad \mathbf{5}, \quad ,4, \quad \mathbf{3} \end{aligned}$$

Nur für die hervorgehobenen Werte ist b Primzahl. Also können nur die Tripel

$$(5{,}17{,}80), (7{,}13{,}84), (23{,}5{,}92), (47{,}3{,}94) \tag{6}$$

sowie die durch Vertauschung von a,b entstehenden Tripel

$$(17{,}5{,}80), (13{,}7{,}84), (5{,}23{,}92), (3{,}47{,}94) \tag{7}$$

die Bedingungen (1),(2) erfüllen

II. Sie erfüllen diese Bedingungen, da 3, 5, 7, 13, 17, 23, 47 Primzahlen sind und die Gleichung (2) für jedes Tripel erfüllt ist.

Nach I. und II. sind genau die Tripel in (6) und (7) alle diejenigen Tripel positiver ganzer Zahlen, die (1) und (2) erfüllen.

Aufgabe 321211:
Man ermittle alle diejenigen Paare $(a; b)$ nicht-negativer ganzer Zahlen a und b, für die das Quadrat ihren Produkts doppelt so groß wie die Summe ihrer Quadrate ist.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn ein Paar $(a; b)$ nicht-negativer ganzer Zahlen a und b die genannte Bedingung $(ab)^2 = 2(a^2 + b^2)$ erfüllt, so folgt

$$a^2(b^2 - 2) = 2b^2$$

und daraus wegen der Ganzzahligkeit von b, also $b^2 - 2 \neq 0$,

$$a^2 = \frac{2b^2}{b^2 - 2} = 2 + \frac{4}{b^2 - 2} \qquad (1)$$

Da a^2 eine ganze Zahl ist, muss $b^2 - 2$ ein Teiler von 4, d. h. eine der Zahlen $1, -1, 2, -2, 4, -4$, sein. Die Werte $1, 4, -4$ scheiden aus, da sie auf $b^2 = 3, b^2 = 6$ bzw. $b^2 = -2$ führen würden, was für kein ganzzahliges b zutrifft. Auch $b^2 - 2 = -1$ scheidet aus, da nach (1) hiermit $a^2 = -2$ folgte, was für kein a gilt.

Also kann nur $b^2 - 2 = 2$ oder $b^2 - 2 = -2$ sein, was zusammen mit (1) wegen $a \geq 0$, $b \geq 0$ auf $(a; b) = (2; 2)$ oder $(a; b) = (0; 0)$ (2) führt.

II. Die in (2) genannten Paare erfüllen die Bedingungen. Mit I. und II. ist gezeigt, dass genau die in (2) genannten Paare den Bedingungen der Aufgabe genügen.

II Runde 2

Aufgabe 011121:
3, 4, 5 ist ein sogenanntes pythagoreisches Zahlentripel, da $3^2 + 4^2 = 5^2$.
Es ist das einzige derartige Zahlentripel, dessen Elemente sich nur jeweils um 1 unterscheiden. Gibt es für die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ noch andere Zahlentripel, bei denen $c = b + 1$ ist?
Welche Gesetzmäßigkeit können Sie hier erkennen? Versuchen Sie, einen Ausdruck zu finden, mit dessen Hilfe sich schnell derartige Tripel finden lassen!

Lösung von Korinna Grabski:
Es gibt noch andere Zahlentripel, die die Bedingungen $a^2 + b^2 = c^2$ und $c = b + 1$ erfüllen:

$$a^2 + b^2 = (b + 1)^2 = b^2 + 2b + 1 \Rightarrow a^2 = 2b + 1 \qquad (1)$$

$$\Rightarrow b = \frac{a^2 - 1}{2} \qquad (2)$$

Aus (1) lässt sich leicht erkennen, dass a^2 und damit a eine ungerade Zahl sein muss.
Ein Tripel (a, b, c) mit den geforderten Eigenschaften kann somit schnell gefunden werden, indem man a eine ungerade Zahl zuweist und b mittels (2) berechnet.
c ist dann um 1 größer als b.
Es lässt sich also für jede beliebige ungerade natürliche Zahl a ein derartiges Tripel bestimmen.

Aufgabe 071224:
Beweisen Sie, dass das Produkt von vier aufeinanderfolgenden positiven ganzen Zahlen nicht das Quadrat einer positiven ganzen Zahl sein kann!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Jedes in der Aufgabe genannte Produkt hat die Form

$$n(n+1)(n+2)(n+3) = n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n = (n^2 + 3n + 1)^2 - 1$$

wobei n eine positive ganze Zahl ist. Da

$$(n^2 + 3n)^2 < (n^2 + 3n + 1)^2 - 1 < (n^3 + 3n + 1)^2$$

gilt, liegt $n(n+1)(n+2)(n+3)$ zwischen den Quadraten von zwei unmittelbar aufeinanderfolgenden positiven ganzen Zahlen, nämlichen denen von $n^2 + 3n$ und $n^2 + 3n + 1$ und kann daher selbst nicht das Quadrat einer positiven ganzen Zahl sein.

Aufgabe 111224:
Man betrachte in einer mit einem rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem versehenen Ebene die Schar aller konzentrischen Kreise um den Mittelpunkt $M(\sqrt{2}; \sqrt{3})$.

Es ist zu beweisen, dass keine Kreislinie dieser Schar mehr als einen Punkt (x, y) mit rationalen Zahlen x, y als Koordinaten enthält.

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:
Angenommen ein Kreis um M enthält zwei rationale Punkte P,Q. Dann liegt M auf der Mittelsenkrechten der Strecke PQ.

Da P,Q rationale Koordinaten haben, sind ebenfalls der Mittelpunkt der Strecke und die Steigung der Mittelsenkrechten rational. Daher liegt M auf einer Gerade $y = ax + b$ mit a,$b \in \mathbb{Q}$. Aus $\sqrt{3} - a\sqrt{2} = b$ folgt $3 - 2a\sqrt{6} + 2a^2 = b^2 \Rightarrow 2a\sqrt{6} = 3 + 2a^2 - b^2$, was nicht möglich ist, da $\sqrt{6}$ irrational ist.

Falls $a = 0$, so hat $b^2 = 3$ keine rationale Lösung. Falls die Mittelsenkrechte parallel zur y-Achse ist, erhalten wir durch Vertauschen der Koordinaten analog einen Widerspruch.

Aufgabe 121221:
Es seien u und v zwei ungerade natürliche Zahlen, für die $u > v$ gilt.
a) Man beweise, dass dann

$$x = u \cdot v; \quad y = \frac{u^2 - v^2}{2} \quad \text{und} \quad z = \frac{u^2 + v^2}{2}$$

drei natürliche Zahlen sind, für die $x^2 + y^2 = z^2$ gilt, d. h. dass (x, y, z) ein pythagoreisches Zahlentripel bilden.
b) Geben Sie je eine hinreichende Bedingung dafür an, dass $x > y$ bzw. $x < y$ gilt!

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:
a) Da u,v ungerade sind, sind $u^2 - v^2, u^2 + v^2$ gerade und somit x,y,$z \in \mathbb{N}$. Es gilt

$$4x^2 + 4y^2 = 4uv + (u^2 - v^2)^2 = u^4 + 2u^2v^2 + v^4 = (u^2 + v^2) = 4z^2$$

und somit $x^2 + y^2 = z^2$. b) Aus $u > v$ folgt

$$u + v > 2v \Rightarrow (u + v)^2 > 4v^2 > 2v^2 \Rightarrow 0 < (u + v)^2 - 2v^2 = u^2 - v^2 + 2uv = 2x - 2y$$

Also gilt stets $y < x$.

Aufgabe 151221:
a) Man untersuche, ob es natürliche Zahlen n derart gibt, dass in der nach dem binomischen Lehrsatz gebildeten Entwicklung

$$(a + b)^n = c_0 a^n + c_1 a^{n-1} \cdot b + c_2 a^{n-2} \cdot b^2 + ... + c_n b^n \qquad (1)$$

die Koeffizienten c_0, c_1, c_2 die Summe $c_0 + c_1 + c_2 = 79$ haben. Gibt es solche Zahlen n, so ermittle man sie.
b) Man untersuche, ob es natürliche Zahlen n derart gibt, dass aus (1) durch die Ersetzung $a = x^2, b = \frac{1}{x}$ eine Entwicklung

$$\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^n = c_0 x^{k_0} + c_1 x^{k_1} + c_2 x^{k_2} + ... + c_n x^{k_n}$$

entsteht, in der einer der Exponenten den Wert $k_i = 0$ hat, d. h., in der ein von x freies Glied vorkommt. Gibt es solche Zahlen, so ermittle man sie.
b) Man ermittle alle natürlichen Zahlen n, die sowohl die in a) als auch die in b) angegebenen Bedingungen erfüllen.

Lösung von ochen:
a) Für festes n gilt $c_0 = \binom{n}{0} = 1$, $c_1 = \binom{n}{1} = n$ und $c_2 = \binom{n}{2} = \frac{1}{2}n(n-1)$. Es ist also die Gleichung

$$1 + n + \frac{1}{2}n(n-1) = 79$$

zu lösen. Nach der Multiplikation mit 2 und der Subtraktion von 79 erhalten wir die quadratische Gleichung

$$n^2 + n + 156 = 0.$$

Diese lässt sich mit der *pq*-Formel lösen und wir erhalten die Lösungen

$$n_1 = 12, \quad n_2 = -13.$$

Offenbar ist hier nur $n = 12$ sinnvoll. Dies ist die einzige Zahl, die die in a) gegebene Bedingung erfüllt.

b) Das Monom x^0 entsteht, wenn es eine Zahl k gibt, so dass k mal x^2 und $n - k$ mal $\frac{1}{x}$ mit einander multipliziert werden und

$$2k + (-1)(n - k) = 0 \quad (2)$$

ist. Da keine Summanden negativ eingehen, kann es auch nicht wieder verschwinden. Gleichung (2) ist also auch die einzige Bedingung, der n genügen muss. Außerdem ist sie äquivalent zu $n = 3k$. Es muss also n durch 3 teilbar sein.

c) Es erfüllt 12 als einzige natürliche Zahl sowohl die in a) als auch die in b) angegebenen Bedingungen.

Aufgabe 171223:
Es sind alle ganzen Zahlen x zu ermitteln, für die

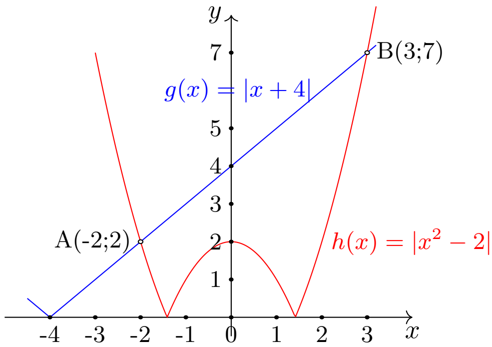
$$f(x) = \frac{3x^2 + x - 2}{x^2 - 2}$$

ganzzahlig ist.

Lösung von Steffen Polster:
Durch Polynomdivision erhält man

$$f(x) = \frac{3x^2 + x - 2}{x^2 - 2} = 3 + \frac{x + 4}{x^2 - 2}$$

Damit kann $f(x)$ nur ganzzahlig sein, wenn der Bruch $\frac{x+4}{x^2-2}$ ganzzahlig ist, d. h. auch $|x + 4| \geq |x^2 - 2|$ oder $x + 4 = 0$ gilt. Die Gleichung $|x + 4| = |x^2 - 2|$ hat ihre Lösungen bei $x_1 = -2$ und $x_2 = 3$.
Man kann sich überlegen, dass nur im Intervall $[-2; 3]$ die Beziehung $|x + 4| \geq |x^2 - 2|$ gilt, wie auch durch folgende Grafik verdeutlicht wird:



Eine zusätzliche Möglichkeit für ein ganzzahligen Bruch $\frac{x+4}{x^2-2}$ ergibt sich für $x = -4$, da durch ein Zähler $= 0$ der ganze Bruch 0 wird (Nenner wird nicht 0).
Da x ganzzahlig sein soll, verbleiben für x nur die Möglichkeiten $x \in \{-4, -2, -1,0,1,2,3\}$. Einsetzen von x in die Ausgangsfunktion ergibt

x	$f(x)$	x	$f(x)$	x	$f(x)$	x	$f(x)$
-4	3	-2	4	-1	0	0	1
1	-2	2	6	3	4		

Da in jedem Fall $f(x)$ ganzzahlig ist, ist die gesuchte Lösungsmenge $x \in \{-4, -2, -1,0,1,2,3\}$.

Alternativ-Lösung von cyrix:
Durch Polynomdivision erhält man

$$f(x) = \frac{3x^2 + x - 2}{x^2 - 2} = 3 + \frac{x + 4}{x^2 - 2}$$

Damit kann $f(x)$ nur ganzzahlig sein, wenn der Bruch $\frac{x+4}{x^2-2}$ ganzzahlig ist, also x^2-2 ein Teiler von $x+4$ ist. Damit ist x^2-2 auch ein Teiler von $(x+4)(x-4) = x^2-16$ und damit auch von $x^2-16-(x^2-2) = 14$.

Wegen $x^2 \geq 0$ ist $x^2 - 2 \geq -2$, sodass, da 14 genau die ganzzahligen Teiler ± 1, ± 2, ± 7 und ± 14 besitzt, $x^2 - 2 \in \{-2, -1, 1, 2, 7, 14\}$ bzw. $x^2 \in \{0,1,3,4,9,16\}$, also $x \in \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4\}$ gilt.
Für alle diese Werte, bis auf $x = 4$, zeigt die Probe, dass $f(x)$ tatsächlich auch eine ganze Zahl ist, sodass genau für diejenigen ganzen Zahlen x mit $-4 \leq x \leq 3$ der Funktionswert $f(x)$ auch eine ganze Zahl ist.

Aufgabe 241223:
Man prüfe, ob es eine natürliche Zahl n und ganze Zahlen $a_0, a_1, ..., a_n$ gibt, so dass für

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

sowohl $p(7) = 1985$ als auch $p(3) = 1984$ gilt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, es gäbe eine natürliche Zahl n und ganze Zahlen $a_0, a_1, ..., a_n$ so, dass für $p(x)$ sowohl $p(7) = 1985$ als auch $p(3) = 1984$ gelten würde. Dann müsste

$$p(7) - p(3) = a_n(7^n - 3^n) + a_{n-1}(7^{n-1} - 3^{n-1}) + ... + a_1(7 - 3)$$

gelten. Da für beliebige reelle Zahlen a und b und beliebiger natürlicher Zahlen k die Beziehung

$$a^k - b^k = (a-b)\left(a^{k-1} + a^{k-2}b + ... + ab^{k-2} + b^{k-1}\right)$$

gilt, müsste $p(7) - p(3)$ durch $7 - 3 = 4$ teilbar sein.
Dies steht im Widerspruch dazu, dass andererseits $p(7) - p(3) = 1$ ist und 1 nicht durch 4 teilbar ist. Es gibt also keine natürliche Zahl n und keine ganzen Zahlen $a_0, a_1, ..., a_n$ mit der verlangten Eigenschaft.

Aufgabe 261222:
Man ermittle alle diejenigen Tripel (p, q, r) von Primzahlen, die die folgenden Bedingungen (1), (2) erfüllen:
(1) In der Folge aller Primzahlen sind p, q, r in dieser Reihenfolge aufeinanderfolgende Primzahlen.
(2) Die Zahl $s = p^2 + q^2 + r^2$ ist eine Primzahl.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn p, q, r ein Tripel ist, das die Bedingungen (1), (2) erfüllt, so folgt (p, q, r) ist nicht das Tripel $(2, 3, 5)$; denn dieses erfüllt wegen $2^2 + 3^2 + 5^2 = 38$ nicht die Bedingung (2).
Ferner folgt:
(p, q, r) ist kein Tripel mit $p > 3$ (also auch $q > 3$, $r > 3$); denn jede Primzahl, die größer als 3 ist, lässt bei Division durch 3 entweder den Rest 1 oder den Rest 2, ihr Quadrat lässt also in beiden Fällen den Rest 1.
Für jedes Tripel (p, q, r) von Primzahlen $p, q, r > 3$ ist somit $p^2 + q^2 + r^2$ durch 3 teilbar (und größer als 3), also keine Primzahl.
Nach (1) verbleibt daher nur die Möglichkeit, dass p, q, r das Tripel $(3, 5, 7)$ ist.

II. Dieses Tripel erfüllt als Tripel dreier aufeinanderfolgender Primzahlen die Bedingung (1), und wegen $3^2 + 5^2 + 7^2 = 83$ auch die Bedingung (2).
Mit I. und II. ist gezeigt, dass genau das Tripel $(3, 5, 7)$ die Bedingungen (1) und (2) erfüllt.

III Runde 3

Aufgabe 041235:
Gibt es eine natürliche Zahl z, die auf zwei verschiedene Weisen in der Form

$$z = x! + y!$$

dargestellt werden kann, wobei x und y von Null verschiedene natürliche Zahlen sind und $x \leq y$ ist?

Lösung von Kornkreis:
Angenommen, $z = x! + y! = a! + b!$ mit $a \neq 0$ und $x \neq a \leq b$. Aufgrund der gleichen Gestalt beider Gleichungen kann man o. B. d. A. $a < x$ wählen.
Ausklammern liefert

$$z = x!(1 + \frac{y!}{x!}) = a!(1 + \frac{b!}{a!})$$

Division beider Gleichungen ergibt

$$1 = \frac{(a+1)\cdots x(1 + \frac{y!}{x!})}{(1 + \frac{b!}{a!})}$$

Der Quotient kann aber nicht 1 sein, da keiner der Primfaktoren von $a+1$ im Divisor $1+\frac{b!}{a!} = 1+(a+1)\cdots b$ enthalten ist (beachte, dass wegen $a < x$ auch $a < b$ gelten muss).
Damit kann es keine solche zweite Darstellung von z als Summe zweier Fakultäten geben.

Aufgabe 111232:
Man beweise, dass die Gleichung $4^x + 6^x = 9^x$ keine rationalen Lösungen besitzt.

Lösung von weird:
Diese Gleichung lässt sich nach Division durch 9^x auch schreiben als

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} + \left(\frac{2}{3}\right)^{x} - 1 = 0$$

d. h., $\left(\frac{2}{3}\right)^x$ ist die positive Lösung der quadratischen Gleichung $u^2 + u - 1 = 0$, woraus sich unmittelbar die sehr viel einfachere Gleichung

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

ergibt. Diese hat auf jeden Fall eine eindeutig bestimmte reelle Lösung $\tilde{x} > 0$. Wäre $\tilde{x}$ rational, also $\tilde{x} = \frac{r}{s}$ für gewisse $r,s \in \mathbb{N}^*$, so würde daraus unmittelbar

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{r} = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{s}$$

und weiter

$$2^{r+s} = 3^r(\sqrt{5}-1)^s$$

folgen. (Anmerkung siehe unten)

Diese letzte Gleichung kann aber nicht gelten, da deren rechte Seite in $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ offensichtlich durch 3 teilbar ist, die linke Seite aber nicht, was den geforderten Widerspruch ergibt.

Aufgabe 191235:
Man beweise:
Es gibt keine positiven ganzen Zahlen p und q mit der Eigenschaft

$$\frac{p}{q} - \frac{1}{9q^2} < \frac{1}{\sqrt{3}} < \frac{p}{q} + \frac{1}{9q^2}$$

Lösung von svrc:
Wir führen eine Fallunterscheidung durch.

Fall 1:

Sei $p \geq q$. Dann gilt

$$\frac{p}{q} - \frac{1}{9q^2} \geq 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} > \frac{6}{9} > \frac{3\cdot\sqrt{3}}{9} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

was den Voraussetzungen widerspricht.

Fall 2:

Sei $p < q$. Dann gilt

$$\frac{p}{q} - \frac{1}{9q^2} < \frac{1}{\sqrt{3}} < \frac{p}{q} + \frac{1}{9q^2}.$$

Multiplikation mit $9 \cdot \sqrt{3} \cdot q^2$ liefert

$$9\cdot\sqrt{3}\cdot p\cdot q - \sqrt{3} < 9\cdot q^2 < 9\cdot\sqrt{3}\cdot p\cdot q + \sqrt{3}$$

und somit

$$\sqrt{3} \cdot (9pq - 1) < 9q^2 < \sqrt{3} \cdot (9pq + 1)\,.$$

Quadrieren gibt

$$3 \cdot (9pq - 1)^2 < 81q^4 < 3 \cdot (9pq + 1)^2\,.$$

Division durch 3 ergibt

$$(9pq - 1)^2 < 27q^4 < (9pq + 1)^2\,.$$

Division durch $9q^2$ liefert

$$\left(3p - \frac{1}{3q}\right)^2 < 3q^2 < \left(3p + \frac{1}{3q}\right)^2.$$

Ausmultiplizieren führt zu

$$9p^2 - 2\frac{p}{q} + \frac{1}{9q^2} < 3q^2 < 9p^2 + 2\frac{p}{q} + \frac{1}{9q^2}.$$

Wegen $p < q$ gilt

$$9p^2 - 2 < 3q^2 < 9p^2 + 3.$$

Somit muss

$$3q^2 = s$$

mit

$$s \in \left\{9p^2 - 1, 9p^2, 9p^2 + 1, 9p^2 + 2\right\}$$

sein.

Fall 2.1:
Falls $3q^2 = 9p^2 - 1$ gilt, betrachten wir diese Gleichung $\mathbf{mod}\,3$. Wegen $3q^2 \mathbin{\mathbf{mod}} 3 = 0 \mathbin{\mathbf{mod}} 3$ und $9p^2 - 1 \mathbin{\mathbf{mod}} 3 = 2 \mathbin{\mathbf{mod}} 3$ kann dieser Fall nicht eintreten.

Fall 2.2:
Falls $3q^2 = 9p^2$ ist, muss $p = \frac{q}{\sqrt{3}}$ und somit $p \notin \mathbb{N}$ sein. Dieser Fall kann also auch nicht eintreten.

Fall 2.3:
Falls $3q^2 = 9p^2 + 1$ gilt, betrachten wir diese Gleichung $\mathbf{mod}\,3$. Wegen $3q^2 \mathbin{\mathbf{mod}} 3 = 0 \mathbin{\mathbf{mod}} 3$ und $9p^2 + 1 \mathbin{\mathbf{mod}} 3 = 1 \mathbin{\mathbf{mod}} 3$ kann dieser Fall nicht eintreten.

Fall 2.4:
Falls $3q^2 = 9p^2 + 2$ gilt, betrachten wir diese Gleichung $\mathbf{mod}\,3$. Wegen $3q^2 \mathbin{\mathbf{mod}} 3 = 0 \mathbin{\mathbf{mod}} 3$ und $9p^2 + 2 \mathbin{\mathbf{mod}} 3 = 2 \mathbin{\mathbf{mod}} 3$ kann dieser Fall nicht eintreten.

Somit widerspricht auch Fall 2 den Voraussetzungen. Insgesamt kann gefolgert werden, dass es keine positiven ganzen Zahlen p und q geben kann, welche die vorausgesetzten Eigenschaften erfüllen.

Alternativ-Lösung von MontyPythagoras:
Man betrachte zunächst nur die linke Hälfte der Ungleichung:

$$\frac{p}{q} - \frac{1}{9q^2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$p < \frac{q}{\sqrt{3}} + \frac{1}{9q}$$

Analog dazu aus der rechten Hälfte:

$$p > \frac{q}{\sqrt{3}} - \frac{1}{9q}$$

Wir führen das wieder zusammen und quadrieren:

$$\frac{q}{\sqrt{3}} - \frac{1}{9q} < p < \frac{q}{\sqrt{3}} + \frac{1}{9q}$$

$$\frac{1}{3}q^2 - \frac{2}{27}\sqrt{3} + \frac{1}{81q^2} < p^2 < \frac{1}{3}q^2 + \frac{2}{27}\sqrt{3} + \frac{1}{81q^2}$$

Noch mit 3 multiplizieren:

$$q^2 - \frac{2}{9}\sqrt{3} + \frac{1}{27q^2} < 3p^2 < q^2 + \frac{2}{9}\sqrt{3} + \frac{1}{27q^2}$$

Da $\frac{2}{9}\sqrt{3} < \frac{2}{9} \cdot 1.8 = 0.4$ und $\frac{1}{27q^2} \leq \frac{1}{27} < 0.04$ ist, kann man daraus ableiten, dass

$$q^2 - 1 < 3p^2 < q^2 + 1$$

sein muss. Daraus folgt aber direkt $q^2 = 3p^2$ bzw.

$$q = \sqrt{3}\, p$$

was aufgrund der Irrationalität von $\sqrt{3}$ nicht möglich ist.

Aufgabe 201234:
Man ermittle alle diejenigen ganzen Zahlen k, für die die Gleichung

$$\frac{x}{k-4} + \frac{k}{2(k-4)} + \frac{k+4}{x} = 0$$

lösbar ist (d. h. mindestens eine Lösung x besitzt), wobei alle Lösungen x ganzzahlig sind.

Lösung von cyrix:
Sei k eine ganze Zahl, für die die angegebene Gleichung eine Lösung $x \in \mathbb{Z}$ besitzt. Insbesondere ist dann $x \neq 0$, da sonst der dritte Summand nicht definiert wäre. Nach Multiplikation mit $2(k-4) \cdot x$ erhalten wir die Gleichung

$$2x^2 + kx + 2k^2 - 32) = 0 \text{ bzw. } x^2 + \frac{k}{2} + k^2 - 16 = 0,$$

welche die beiden Lösungen

$$x_{1,2} = -\frac{k}{4} \pm \sqrt{\frac{k^2}{16} - k^2 + 16} = \frac{1}{4} \cdot (-k \pm \sqrt{256 - 15k^2})$$

besitzt. Insbesondere muss also die Wurzel $\sqrt{256-15k^2}$ existieren und rational sein, was auf $|k| \leq 4$ führt. Weiterhin ist die Summe beider Lösungen gleich $-\frac{k}{2}$, sodass, wenn alle Lösungen ganzzahlig sind, es dieser Term auch sein muss, also k eine gerade Zahl ist. Es verbleibt damit $k \in \{-4; -2; 0; 2; 4\}$. Die Probe bestätigt, dass in all diesen Fällen jeweils zwei reelle Lösungen, die beide auch ganzzahlig sind, existieren.

Aufgabe 201235:
Man beweise, dass für jede natürliche Zahl n die folgende Aussage gilt:
Wenn die Anzahl der Ecken eines regelmäßigen Vielecks gleich $3n$ ist, dann gibt es kein rechtwinkliges Koordinatensystem, in dem beide Koordinaten jedes Eckpunktes dieses Vielecks rationale Zahlen sind.

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:
Es reicht die Aussage für $n = 1$ zu zeigen, da jedes regelmäßige $3n$-Eck ein gleichseitiges Dreieck enthält.

Angenommen ein gleichseitiges Dreieck ABC habe zwei rationale Koordinatenpunkte. Dann können wir dieses verschieben, so dass A im Ursprung liegt und B die Koordinaten (x,y) mit $x,y \in \mathbb{Q}$ hat. Die Höhe des gleichseitigen Dreiecks ist durch $\frac{\sqrt{3}}{2}AB$. Daher hat C die Koordinaten

$$\frac{1}{2}(x,y) \pm \frac{\sqrt{3}}{2}(-y,x) = (\frac{1}{2}x \mp \frac{\sqrt{3}}{2}y, \frac{1}{2}y \pm \frac{\sqrt{3}}{2}x) \ .$$

Mindestens eine der Koordinaten von B ist von null verschieden. Für $y \neq 0$ sei $z := \frac{1}{2}x \mp \frac{\sqrt{3}}{2}y \iff \frac{2z-x}{y} = \mp\sqrt{3}$, was ein Widerspruch ist, falls $z \in \mathbb{Q}$. Für $x \neq 0$ ergibt die zweite Koordinate ebenfalls einen Widerspruch.

Aufgabe 231235:
Man ermittle alle Paare $(a;b)$ von Primzahlen a und b für die gilt:

$$3a^2 + a = b^2 + b$$

Lösung von weird:
Wir halten zunächst fest, dass gilt

$$2a^2 = b^2 + b - a^2 - a = (b-a)(b+a+1) \quad (*)$$

und hier nicht $b - a = 1$ sein kann, da daraus wegen der Primzahleigenschaft von a und b sofort $a = 2$ und $b = 3$ folgen würde, was aber keine Lösung unserer Gleichung hier ist. Es kann aber auch nicht $a|b-a$ gelten, da aus $b = ka$ für ein $k \in \mathbb{N}^*$ sofort $b = (k+1)a$ folgen würde, wieder im Widerspruch zur Primalität von b. Es muss daher $b - a = 2$, d. h., $b = a + 2$ sein. Einsetzen in (*) führt dann zunächst auf

$$2a^2 = 2(2a+3)$$

und nach einer einfachen Umformung weiter auf

$$(a-1)^2 = 4$$

Wegen $a > 1$ muss also dann $a = 3$ und damit $b = a + 2 = 5$ gelten, was dann tatsächlich als einziges Paar von Primzahlen die Aufgabe hier löst.

Aufgabe 241235:
Man ermittle alle diejenigen Tripel (a,b,c) positiver natürlicher Zahlen, für die $a^b + b^c = abc$ gilt.

Lösung von weird:
Wir beginnen mit zwei einfachen Hilfssätzen.

Lemma 1:

$$\forall a \geq 2\ \forall b \geq 4: \quad a^b \geq a^2 b$$

Beweis: Offenbar genügt es dafür

$$\forall b \geq 4: \quad 2^{b-2} \geq b$$

einfach zu zeigen. Dies ist aber für $b = 4$ trivialerweise erfüllt und falls es für ein $b \geq 4$ gilt, dann wegen

$$2^{(b+1)-2} = 2 * 2^{b-2} \geq 2b > b + 1$$

auch für $b + 1$, q. e. d.

Lemma 2:

$$\forall b \geq 4\ \forall c \geq 3: \quad b^c > bc^2$$

Beweis: Auch das lässt sich sofort wieder auf die einfachere Behauptung

$$\forall c \geq 3: \quad 4^{c-1} > c^2$$

zurückführen, welche wir wieder mit Induktion beweisen. Dabei kann die Gültigkeit der Behauptung für $c = 3$ sofort direkt nachgerechnet werden kann und aus der Gültigkeit für ein $c \geq 3$ folgt sofort auch ihr Gültigkeit für $c + 1$:

$$4^c = 4 \cdot 4^{c-1} > (2c)^2 > (c+1)^2$$

q. e. d.

Damit folgt nun aus der bekannten Ungleichung für das arithmetische und geometrische Mittel sofort, dass es unter den Voraussetzungen der beiden obigen Hilfssätze keine Lösung der Gleichung in der Aufgabe geben kann:

$$\forall a \geq 2\ \forall b \geq 4\ \forall c \geq 3: \quad a^b + b^c > 2\sqrt{(a^2b)(bc^2)} = 2abc > abc \quad (*)$$

Wir müssen also nur die durch (*) noch nicht abgedeckten Tripel (a,b,c) überprüfen, was dann schließlich auf die folgenden fünf Lösungen der Aufgabe hier führt:

$$(a,b,c) \in \{(1,1,2),(2,2,2),(2,2,3),(4,2,3),(4,2,4)\}$$

Aufgabe 251233A:
Man untersuche, ob es keine, endlich viele oder unendlich viele 5-Tupel $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ von positiven ganzen Zahlen gibt, für die die folgende Gleichung (1) erfüllt ist:

$$x_1^3 + x_2^5 + x_3^7 + x_4^{11} = x_5^{13} \qquad (1)$$

Lösung von cyrix:
Wir definieren $p := 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$. Dann ist einerseits p durch 3, 5 , 7 und 11 teilbar, also $\frac{p}{3}, \frac{p}{5}, \frac{p}{7}, \frac{p}{11} \in \mathbb{N}$ und andererseits $p \equiv 2 \cdot 7 \cdot (-2) \equiv 2 \cdot (-14) \equiv 2 \cdot (-1) \equiv -2 \pmod{13}$, also $\frac{p+2}{13} \in \mathbb{N}$.
Für jede positive ganze Zahl k ist mit $x_1 := 2^{\frac{p+13kp}{3}}$, $x_2 := 2^{\frac{p+13kp}{5}}$, $x_3 := 2^{\frac{p+13kp}{7}}$, $x_4 := 2^{\frac{p+13kp}{11}}$ und $x_5 := 2^{\frac{p+2}{13}+kp}$

$$x_1^3 + x_2^5 + x_3^7 + x_4^{11} = 2^{p+13kp} + 2^{p+13kp} + 2^{p+13kp} + 2^{p+13kp} = 2^{2+p+13kp} = \left(2^{\frac{p+2}{13}+kp}\right)^{13} = x_5^{13}$$

Damit gibt es unendlich viele Lösungen.

Aufgabe 271235:
Man ermittle alle diejenigen Tripel (x, y, z) ganzer Zahlen, die die folgende Gleichung (1) erfüllen:

$$1243 \cdot (1 + yz) = 65 \cdot (xyz + x + z) \qquad (1)$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn x,y,z ganze Zahlen sind, die (1) erfüllen, so folgt:
Da 1243 zu 65 teilerfremd istm mit $1 + yz$ durch 65 teilbar sein, d. h., eine ganze Zahl k mit

$$1 + yz = 65 \cdot k \qquad (2)$$

muss existieren, Aus (1) folgt damit

$$65 \cdot (xyz + x + z) = 1243 \cdot 65 \cdot k \qquad \text{also} \qquad (1 + yz) \cdot x + z = 1243 \cdot k$$

Mit (2) ergibt das $65kx + z = 1243k$ also

$$z = (1243 - 65 \cdot x) \cdot k \tag{3}$$

Setzt man dies in die aus (2) folgende Gleichung $65k - yz = 1$, so folgt

$$(65 - y(1243 - 65 \cdot x)) \cdot k = 1$$

Dies kann wegen der Ganzzahligkeit der Faktoren nur mit

$$65 - y(1243 - 65 \cdot x) = k = \pm 1 \tag{4}$$

erfüllt werden. Somit gilt

$$y(1243 + 65 \cdot x) = 64 \qquad \text{oder} \qquad y(1243 + 65 \cdot x) = 66 \tag{5}$$

d. h., es ist $1243 - 65x$ Teiler von 64 oder 66. (6)
Daraus folgt insbesondere

$$-66 \leq 1243 - 65 \cdot x \leq 66 \quad \Rightarrow \quad 1177 \leq 65 \cdot x \Rightarrow 66 \quad \Rightarrow x = 19 \quad \text{oder} \quad x = 20$$

$$1243 - 65 \cdot x = 8 \qquad \text{oder} \qquad 1243 - 65 \cdot x = -57 \tag{7}$$

Die Bedingungen (6) und (7) werden nur von $1243 - 65 \cdot x = 8$, also $x = 19$ erfüllt, wegen (5) zusammen mit $y = 8$, wonach (4) auf $k = 1$ und daher (3) auf $z = 8$ führt.
Also kann unter allen Tripeln ganzer Zahlen nur

$$(x,y,z) = (19,8,8) \tag{8}$$

die Gleichung (1) erfüllen.
II. Wie aus $1243(1 + 8 \cdot 8) = 1243 \cdot 65 = 65 \cdot (19 \cdot 8 \cdot 8 + 19 + 8)$ ersichtlich ist, erfüllt es diese Gleichung.
Mit I. und II. ist gezeigt, dass genau das in (8) genannte Tripel die Forderungen der Aufgabe erfüllt.

Aufgabe 321231:
Man untersuche, ob es eine positive ganze Zahl n gibt, für die die Zahl $\sqrt{n} + \sqrt{n+4}$ rational ist.
Hinweis:
Als bekannter Sachverhalt kann die Aussage verwendet werden, dass für jede natürliche Zahl k, die keine Quadratzahl ist, die Zahl $\sqrt{k}$ nicht rational ist.

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:
Es ist also $n \in \mathbb{N}$.
Wenn $q := \sqrt{n} + \sqrt{n+4} \in \mathbb{Q}$, dann ist auch $q^2 \in \mathbb{Q}$. Nun ist $q^2 = n + n + 4 + 2\sqrt{n^2 + 4n}$, also ist auch $\sqrt{n^2 + 4n} \in \mathbb{Q}$. Somit ist $n^2 + 4n$ eine Quadratzahl.
Das kleinstmögliche Quadrat wäre $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$. Es ist aber $2n + 1 < 4n \, \forall n \in \mathbb{N}$.
Das nächstgrößere Quadrat wäre $(n+2)^2 = n^2 + 4n + 4 > n^2 + 4n$. Somit ist $\sqrt{n} + \sqrt{n+4} \notin \mathbb{Q}$ für $n \in \mathbb{N}$.

IV Runde 4

Aufgabe 041245:
Ermitteln Sie alle Ziffertripel (x, y, z) mit $x, y, z \neq 0$, mit denen

$$\sqrt{(xxx...x) - (yyy...y)} = (zzz...z) \qquad (1)$$

$(xxx...x)$: $2n$ Ziffern; $(yyy...y)$: n Ziffern; $(zzz...z)$: n Ziffern
für mindestens zwei voneinander verschiedene positive natürliche Zahlen n erfüllt ist!
Geben Sie sodann alle Zahlen n an, für die (1) mit den ermittelten Tripeln gilt!

Lösung von Rainer Müller:
Da wir nur mit positiven Zahlen rechnen, können wir beide Seiten von (1) quadrieren:

$$(1) \Leftrightarrow (xxx...x) - (yyy...y) = (zzz...z)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{9}(10^{2n}-1)x - \frac{1}{9}(10^n-1)y = \left(\frac{1}{9}(10^n-1)z\right)^2 \Leftrightarrow (10^n+1)x - y = \frac{1}{9}(10^n-1)z^2 \qquad (2)$$

Im Sonderfall $n = 1$ wird (2) zu $11x = z^2 + y$, und durch Einsetzen findet man, dass es zu jeder Ziffer $z > 1$ genau ein y gibt, so dass die rechte Seite durch 11 teilbar ist.
Für $n \geq 2$ betrachten wir (2) modulo 100 (beachte $\frac{1}{9}(10^n - 1) = 111...11 \equiv 11)1$.

$$x - y = 11z^2 \qquad (3)$$

Für $z = 1, 2, ..., 9$ ist $11z^2$ modulo 100 gleich $11, 44, 99, 76, 75, 96, 39, 4, 91$. $x - y$ kann aber nur die Werte $0, ..., 8$ oder $92, ..., 99$ annehmen.
Also sind nur Lösungen mit $z = 3, z = 6$ oder $z = 8$ möglich. $x - y$ muss dann gleich $-1, -4$ bzw. $+4$ sein (nicht nur modulo 100). Ob diese notwendige Bedingung auch hinreichend ist, prüfen wir durch Einsetzen in (2).

- $z = 3, y = x + 1$ liefert $10^n x = 10^n$, also $x = 1$, d. h. $(x, y, z) = (1, 2, 3)$ ist eine Lösung für alle n.
- $z = 6, y = x + 4$ liefert $10^n x = 10^n \cdot 4$, also $x = 4$, d. h. $(x, y, z) = (4, 8, 6)$ ist eine Lösung für alle n.
- $z = 8, y = x - 4$ führt auf $10^n x = \frac{1}{9}(10^n - 1) \cdot 64 - 4$, was äquivalent zu $9 \cdot 10^n x = 64 \cdot 10^n - 100$ ist. Für $n \geq 3$ ist diese Gleichung nicht erfüllbar (wie man modulo 1000 sieht), für $n = 2$ wird die Gleichung zu $9x = 63$, also ist $(x, y, z) = (7, 3, 8)$ eine zusätzliche Lösung für $n = 2$.

Die folgende Tabelle enthält alle Lösungsquadrupel (n, x, y, z). Die 2. und die 5. Zeile sind eigentlich überflüssig, da es Spezialfälle der beiden letzten Zeilen sind, und wurden nur zur Nachvollziehbarkeit der Herleitung aufgenommen.

n	x	y	z	n	x	y	z	n	x	y	z
1	1	7	2	1	1	2	3	1	2	6	4
1	3	8	5	1	4	8	6	1	5	6	7
1	6	2	8	1	8	7	9	2	7	3	8
bel.	1	2	3	bel.	4	8	6				

Aus dieser Tabelle aller Lösungen von (1) ist auch die Antwort auf die Aufgabenstellung zu entnehmen: Die einzigen Tripel (x, y, z), die Lösung von (1) für mindestens zwei verschiedene n sind, sind $(1, 2, 3)$ und $(4, 8, 6)$.
Für diese Tripel gilt (1) für alle positiven natürlichen Zahlen n.

Aufgabe 121242:
Es sind alle Paare (x, y) ganzer Zahlen anzugeben, für die die Gleichung erfüllt ist:

$$x(x + 1)(x + 7)(x + 8) = y^2$$

Lösung von Kornkreis:
Mit $x = z - 4$ wird die Gleichung handlicher:

$$(z - 4)(z - 3)(z + 3)(z + 4) = y^2 \qquad \text{bzw.}$$
$$(z^2 - 16)(z^2 - 9) = z^4 - 25z^2 + 144 = (z^2 - 12)^2 - z^2 = y^2$$

Aus der letzten Gleichung $(z^2 - 12)^2 - z^2 = y^2$ wird ersichtlich, dass für ein Paar (z,y), das die Gleichung erfüllt, zum einen

$$(z^2 - 12)^2 > y^2$$

gilt (für $z \neq 0$), aber auch

$$(z^2-13)^2 = z^4 - 26z^2 + 169 < z^4 - 24z^2 + 144 - z^2 = y^2$$

für $z^2 > 25$. Dies bedeutet, dass $(z^2-12)^2 - z^2$ echt zwischen zwei aufeinanderfolgenden Quadratzahlen liegt und daher nicht gleich einer Quadratzahl y^2 sein kann. Folglich muss man nur die Fälle für $z^2 \leq 25$ prüfen.
Man sieht schnell, dass genau $z \in \{-5,-4,-3,0,3,4,5\}$ eine Quadratzahl liefert. Die Lösung der Aufgabe lautet also $(x,y) \in \{(-9,\pm 12),(-8,0),(-7,0),(-4,\pm 12),(-1,0)(0,0),(1,\pm 12)\}$.

Alternativ-Lösung von weird:
Ich gehe dazu mit $z = x+4$ ebenfalls von der Gleichung

$$(z^2-16)(z^2-9) = z^4 - 25z^2 - 144 = y^2$$

aus, welche sich nach einer einfachen Umformung auch schreiben lässt als

$$\left(z^2 - \frac{25}{2}\right)^2 = \frac{(2y)^2+49}{4} \qquad (*)$$

Damit haben wir nur mehr die einfache Frage zu beantworten, für welche Werte von y der Term $(2y)^2+49$ eine Quadratzahl ist. Wir müssen dazu nur zwei Fälle betrachten:
1. Fall: $y = 0$
Einsetzen in (*) ergibt dann $z \in \{\pm 3, \pm 4\}$, also dann die Lösungen

$$(x,y) \in \{(-8,0),(-7,0),(-1,0),(0,0)\}$$

2. Fall: $y \neq 0$
Ist dann $(2y)^2+49 = u^2$ für ein $u \in \mathbb{N}^*$, so ist $(2|y|,7,u)$ ein primitives pythagoräisches Zahlentripel, d. h., es muss

$$rs = |y|,\ r^2 - s^2 = 7,\ r^2 + s^2 = u$$

für gewisse $r,s \in \mathbb{N}^*$ gelten, wobei offensichtlich $r \leq 4$ sein muss. Tatsächlich ist $r = 4$, $s = 3$ die einzige Lösung von $r^2 - s^2 = 7$ in natürlichen Zahlen. Daraus folgt sofort $y = \pm 12$, sowie $z \in \{0, \pm 5\}$, was dann auf die restlichen 6 Lösungen

$$(x,y) \in \{(-9,\pm 12),(-4,\pm 12),(1,\pm 12)\}$$

hier führt.

Aufgabe 161245:
Man ermittle die Anzahl aller Paare (p,q) natürlicher Zahlen mit $1 \leq p \leq 100$ und $1 \leq q \leq 100$ und der Eigenschaft, dass die Gleichung $x^5 + px + q = 0$ mindestens eine rationale Lösung hat.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, für ein Paar (p,q) natürlicher Zahlen mit $1 \leq p \leq 100$ und $1 \leq q \leq 100$ sei x eine rationale Lösung der Gleichung $x^5 + px + q = 0$.
Wegen $p \geq 1$, $q \geq 1$ gilt dann $x = -\frac{a}{b} < 0$, wobei a,b teilerfremde Zahlen mit $a \neq 0, b \neq 0$ sind. Es gilt also

$$-\frac{a^5}{b^5} - p\frac{a}{b} + q = 0 \quad \Rightarrow \quad qb^5 = pab^4 + a^5$$

Daher gilt $b|a^5$, also $b = 1$, da a und b teilerfremd sind. Daraus ergibt sich:

$$q = pa + a^5 \quad \Rightarrow \quad q = a(p + a^4)$$

Wegen $p,q,a \geq 1$ und $q \leq 100$ gilt daher $1 \leq a < 3$, also $a = 1$ oder $a = 2$.

1. Im Falle $a = 1$ erhält man $q = p + 1$.
Wegen $q \leq 100$ gilt $p \leq 99$, d. h., es gibt in diesem Falle nur 99 Paare $(p, p + 1)$ $(p = 1,2,...,99)$, die die geforderte Eigenschaft haben können.

2. Im Falle $a = 2$ erhält man $q = 2p + 32$.
Wegen $q \leq 100$ gilt $p \leq 34$, d. h., es gibt in diesem Falle nur 34 Paare $(p, 2 + +32)$ $(p = 1,2,...,34)$, die die geforderte Eigenschaft haben können.

Die angegebenen $99 + 34 = 133$ Paare sind wegen $p + 1 < 2p + 32$ sämtlich voneinander verschieden. Ferner haben sie die geforderte Eigenschaft; denn es gilt
im Falle 1: $x = -\frac{a}{b} = -1$, also $x^5 + px + (p + 1) = 0$ und
im Falle 2: $x = -\frac{a}{b} = -2$, also $x5 + px + (2p + 32) = 0$.
Daher gibt es genau 133 Paare (p,q) mit der verlangten Eigenschaft.

Aufgabe 191244:
Man beweise, dass für keine natürlichen Zahlen n, m, b mit $n \geq 2$, $m \geq 2$ und $(2n)^{2n} - 1 = b^m \quad (1)$ gilt!

Lösung von Zeitschrift „Mathematik in der Schule“:
Aus der Annahme der Existenz natürlicher Zahlen $n \geq 1$, $m \geq 2$ und b die der Gleichung (1) genüge, ergibt sich wegen $n \geq 1$ nach einer binomischen Formel

$$(2n)^{2n} - 1 = ((2n)^n - 1)((2n)^n + 1) = b^m$$

wobei $(2n)^n - 1$ und $(2n)^n + 1$ teilerfremd sind, da es sich um aufeinanderfolgende ungerade Zahlen handelt. Demzufolge muss jeder Primfaktor von $(2n)^n - 1$ und jeder Primfaktor von $(2n)^n + 1$ in den entsprechenden Primzerlegungen in einer Anzahl auftreten, die ein natürliches Vielfaches von m ist. Das bedeutet, es gibt natürliche Zahlen h und k mit

$$(2n)^n - 1 = h^m \qquad ; \qquad (2n)^n + 1 = k^m \qquad (*)$$

Damit erhält man unter Beachtung von $m \geq 2$

$$2 = k^m - h^n = (k - h) \sum_{i=0}^{m-1} k^{m-1-i} \cdot h^i$$

Andererseits gilt aber mit $n \geq 1$ und (*)

$$k^m > k^h \geq (2 \cdot 1)^1 - 1 = 1$$

also $k > h \geq 1$, woraus sich $k - h \geq 1$ und

$$\sum_{i=0}^{m-1} k^{m-1-i} \cdot h^i = k^{m-1} + k^{m-2}h + ... + h^{m-1} > mh^{m-1} \geq 2$$

ergibt. Das liefert aber den Widerspruch

$$2 = (k - h) \sum_{i=0}^{m-1} k^{m-1-i} \cdot h^i > 1 \cdot 2$$

Damit kann die oben gemachte Annahme nicht zutreffen.

Aufgabe 291243:
Man beweise:
Zu jedem System (a, b, c, d) von positiven ganzen Zahlen a, b, c, d, die den Bedingungen $a \cdot b = c \cdot d$ und $a + b = c - d$ genügen, gibt es ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Seitenlängen, in cm gemessen, sämtlich ganze Zahlen als Maßzahlen haben und dessen Flächeninhalt, in cm^2 gemessen, die Maßzahl $a \cdot b$ hat.

Lösung von Monika Noack:
Als ein möglicher Versuch, aus dem in den beiden Gleichungen zwischen den Zahlen a, b, c und d gespeicherten Wissen, Hinweise über das gesuchte pythagoreische Zahlentripel zu erhalten, kann das Quadrieren der Gleichung $a + b = c - d$ dienen. Man erhält:

$$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 - 2cd + d^2$$

woraus unter Nutzung der Identitäten $c = a + b + d$ und $a \cdot b = c \cdot d$ die Gleichung

$$a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + 2ad + d^2 + b^2 + 2bd + d^2 \qquad \text{also}$$

$$(a + b)^2 = (a + d)^2 + (b + d)^2$$

folgt, d. h. mit den Maßzahlen $u = a + d$, $v = b + d$ und $w = a + b$ sind (positiv-ganzzahlige) Seitenlängen eines rechtwinkligen Dreiecks gefunden. Für den Flächeninhalt A dieses rechtwinkligen Dreiecks gilt:

$$A = \frac{1}{2} u \cdot v = \frac{1}{2}(a + d)(b + d) = \frac{1}{2}(ab + d(a + b + d)) = \frac{1}{2}(ab + cd),$$

d. h. $A = a \cdot b$. Also ist mit dem Zahlentripel $a + d$, $b + d$ und $a + b$ die Aufgabe gelöst.

Aufgabe 291244:
Man ermittle alle diejenigen Tripel (x, y, z) natürlicher Zahlen x, y und z, die das folgende Gleichungssystem (1), (2) erfüllen:

$$x + 2y^2 - 3z = 17 \qquad (1)$$
$$x^2 - 3y + 2z = 9 \qquad (2)$$

Lösung von Zeitschrift „alpha“:
I. Wenn für ein Tripel (x, y, z) natürlicher Zahlen das System (1), (2) gilt, so folgt

$$3x^2 + 2x + 4y^2 - 9y = 61$$
$$16(3x + 1)^2 + 3(8y - 9)^2 = 3187 \qquad (3)$$
$$0 < (3x + 1)^2 \leq 199, \quad 0 < x \leq 4$$

Bei $x = 1; 2; 4$ ergibt sich für y keine natürliche Zahl. Für $x = 3$ folgt (aus (3)) $y = 4$ und (aus (2)) $z = 6$.
Somit kann nur das Tripel $(3, 4, 6)$ aus natürlichen Zahlen bestehen und (1), (2) erfüllen.
Die Probe zeigt, dass dieses Tripel (1), (2) erfüllt.

Aufgabe 331246B:
Man ermittle alle diejenigen Paare $(m; n)$ ganzer, nicht negativer Zahlen m, n, für die $2^m - 5^n = 7$ gilt.

Lösung von weird:
Bei einem festgehaltenem Wert von $n \in \mathbb{N}$ hat die Gleichung $2^m - 5^n = 7$ genau eine reelle Lösung $m \in \mathbb{R}$, nämlich

$$m = \log_2(5^n + 7)$$

und genau dann, wenn dieser Wert von m sogar ganzzahlig ist, ist (m,n) dann auch eine Lösung unserer Aufgabe. In dieser Weise kann man zu den Werten $n = 0,1,2$ die Lösungen, soweit solche existieren, leicht bestimmen und erhält so einmal die 2 Lösungen

$$(m,n) \in \{(3,0),(5,2)\}$$

Unser Ziel ist es im Folgenden zu zeigen, dass diese auch schon die einzigen Lösungen hier sind, d. h., dass sich für die Annahme $n > 2$ (und damit auch $m > 5$), welche wir ab nun voraussetzen, ein Widerspruch zur Lösbarkeit der Gleichung ergibt.

Dazu formen wir die Ausgangsgleichung zunächst um zu

$$2^5(2^{m-5} - 1) = 5^2(5^{n-2} - 1) \quad (*)$$

Aus dieser Darstellung sieht man sofort, dass

$$25 \mid 2^{m-5} - 1 \quad \text{bzw.} \quad 2^{m-5} \equiv 1 \pmod{25}$$

gilt. Da nun, wie man leicht nachrechnet, die Folge der Zweierpotenzen modulo 25 die Periode 20 hat, muss also schon mal die einschränkende Beziehung

$$m \equiv 5 \pmod{20}$$

gelten. Darüber hinaus muss aber auch

$$m \not\equiv 5 \pmod{100} \quad (**)$$

gelten, da sonst die linke Seite von (*) sogar durch 125 teilbar wäre, die rechte aber nicht. Mit einer ähnlichen Schlussweise sieht man, dass aus

$$32 \mid 5^{n-2} - 1 \quad \text{bzw.} \quad 5^{n-2} \equiv 1 \pmod{32}$$

und der Tatsache, die Folge der Potenzen 5^k modulo 32, $k = 0,1,2,\ldots$ die Periode 8 hat, folgt, dass

$$n \equiv 2 \pmod 8$$

gelten muss. Wegen

$$2^{20} - 1 \mid 2^{m-5} - 1 \quad \text{und} \quad 2^{20} \equiv 1 \pmod{31}$$

besitzt der Ausdruck $5^{n-2} - 1$ auf der rechten Seite von (*) jedenfalls ebenfalls den Primfaktor 31 und indem wir ähnlich wie oben wieder die Folge der Reste von 5^k, $k = 0,1,2,\ldots$ modulo 31 betrachten, welche sich mit einer Periode von 3 wiederholen, können wir insgesamt sogar schließen, dass $n - 2$ sogar durch 24 $(= 3 \cdot 8)$ teilbar sein muss. Nun gilt aber

$$5^{24} \equiv 1 \pmod{601}$$

für die Primzahl 601, sodass dann auch der Faktor $5^{n-2} - 1$ auf der rechten Seite von (*) und damit auch der Faktor $2^{m-5} - 1$ auf dessen linker Seite diesen Primfaktor haben müssen. Die Folge der Reste $2^k \pmod{601}$, $k = 0,1,2,\ldots$ hat aber nun die Periode 25, d. h., es muss

$$m \equiv 5 \pmod{25}$$

gelten, woraus in Verbindung mit der schon bewiesenen Beziehung $m \equiv 5 \pmod{20}$ nun endgültig

$$m \equiv 5 \pmod{100}$$

folgt, im klaren Widerspruch zu (**), q. e. d.

Aufgabe 341245:
Man ermittle alle diejenigen Paare $(x;y)$ nichtnegativer ganzer Zahlen x, y, für die gilt:

$$x^3 + 8x^2 - 6x + 8 = y^3$$

Lösung von weird:
Wegen

$$8x^2 - 6x + 8 = 8\left(x - \frac{3}{8}\right)^2 + \frac{55}{8}$$

gilt zunächst

$$y^3 \geq x^3 + \frac{55}{8}$$

woraus in Verbindung mit $x,y \in \mathbb{N}$ und der Tatsache, dass wegen

$$y^3 - x^3 = (y-x)(y^2 + xy + x^2) = 8x^2 - 6x + 8$$

x und y die gleiche Parität haben müssen, dann auch sofort

$$y \geq x + 2$$

folgt. Hier gilt aber dann sogar das Gleichheitszeichen, denn wäre $y = x + k$ für ein $k \geq 3$, so könnte wegen

$$\forall x \in \mathbb{N}: \; y^3 = x^3 + 3kx^2 + 3k^2 + k^3 > x^3 + 8x^2 - 6x + 8$$

eine Gleichheit dann nicht mehr auftreten, wie man durch einen Größenvergleich der Koeffizienten der beiden Polynomfunktionen in x sofort sieht.

Der Rest ist einfach, da nun mithilfe der Substitution $y = x + 2$ die Ausgangsgleichung eine einfache Gleichung in x allein wird, nämlich

$$(x+2)^3 - x^3 - 8x^2 + 6x - 8 = 2x(9-x) = 0$$

aus der wir die einzigen beiden Lösungen

$$(x,y) \in \{(0,2),(9,11)\}$$

der Aufgabe dann unmittelbar ablesen können.

VII.III (Dezimal-)Zahldarstellung; (End-)Ziffern; (quadratische) Reste

I Runde 1

Aufgabe V01202:
Der Ausdruck

$$\sqrt[3]{\bigstar\bigstar\bigstar 9}$$

ist eine ganze Zahl. Wie heißt die Zahl? Die Sterne stellen unleserliche Ziffern dar.

Lösung von OlgaBarati:
Die Ziffer 9 ist die einzige Endziffer einer Zahl, die mit 9^3 eine 9 als Endziffer hat. So muss auch die gesuchte Zahl die Endziffer 9 haben. Es kann somit nur die 19 sein da 29^3 bereits 5-stellig ist. Die gesuchte Zahl ist $19^3 = 6859$.

Aufgabe V01206:
Welche Ziffer steht in der Einerstelle der Summe

$$11^6 + 14^6 + 16^6$$

Lösung von svrc:
Da uns nur die Einerstellen der Summanden interessiert, folgt modulo 10

$$\left(11^6 + 14^6 + 16^6\right) \equiv \left(1^6 + 4^6 + 6^6\right) \pmod{10}.$$

Es ist $4^6 = 4096$, d. h. $4^6 \equiv 6 \pmod{10}$ und es ist $6^6 = 6^3 \cdot 6^3 = 216 \cdot 216$, d. h. $6^6 \equiv 6 \pmod{10}$. Also gilt

$$\left(11^6 + 14^6 + 16^6\right) \equiv 13 \equiv 3 \pmod{10}.$$

Somit endet die Summe auf der Einerstelle 3.

Alternativ-Lösung von weird:
Mod 5 errechnet sich die fragliche Summe sehr leicht zu

$$11^6 + 14^6 + 16^6 \equiv 1^6 + (-1)^6 + 1^6 = 3 \pmod{5},$$

weshab ihre Endziffer also nur 3 oder 8 sein kann. Da sie aber als Summe von einer ungeraden und von zwei geraden Zahlen sicher ungerade ist, kommt letztlich dann nur 3 in Frage.

Aufgabe 041114:
Wie lauten die letzten beiden Ziffern der Zahl $3^{999} - 2^{999}$ (im Dezimalsystem)?

Lösung von W. Engel und U. Pirl:
Wir beweisen zunächst folgenden Hilfssatz:
Sind a_i und b_i die vorletzte bzw. die letzte Ziffer der natürlichen Zahl z_i im Dezimalsystem, $i = 1, 2$, so stimmt die vorletzte bzw. die letzte Ziffer von $z_1 \cdot z_2$ mit der entsprechenden Ziffer von $(10a_1+b_1)(10a_2+b_2)$ überein.

Beweis:
Auf Grund der Voraussetzungen gibt es zwei natürliche Zahlen c_1 und c_2 derart, dass

$$z_i = 100c_i + 10a_i + b_i, \quad i = 1, 2$$

gilt. Daraus folgt

$$z_1 \cdot z_2 = 100[100c_1c_2 + (10a_1 + b_1)c_2 + (10a_2 + b_2)c_1] + (10a_1 + b_1)(10a_2 + b_2)$$

woraus sich unmittelbar die Behauptung ergibt.

Berechnet man die letzten beiden Ziffern der Potenz 3^n für $n = 1, 2, 3, ...20$, so erkennt man die letzten beiden Ziffern von 3^{19} gleich 67 und die von 3^{20} gleich 01 sind.
Wegen $3^{999} = (3^{20})^{49} \cdot 3^{19}$ sind dann die letzten beiden Ziffern von 3^{999} gleich 67.
Durch Berechnung der letzten beiden Ziffern von 2^m für $m = 1, 2, 3, ..., 22$ erkennt man, dass die letzten beiden Ziffern von 2^{22} gleich 04 sind. Es gilt:

$$2^{999} = (2^{22})^{45} \cdot 2^9$$

Die letzten beiden Ziffern von $(2^{22})^{45}$ sind also gleich den letzten beiden Ziffern von $4^{45} = 2^{90} = (2^{22})^4 \cdot 2^2$.
Die letzten beiden Ziffern von $(2^{22})^4$ sind dieselben wie die von $4^4 = 2^8$, und zwar 56, und die letzten beiden Ziffern von 2^9 lauten 12.

Daher sind die letzten beiden Ziffern von 2^{999} gleich den letzten beiden Ziffern des Produktes $56 \cdot 4 \cdot 12$. Die letzten beiden Ziffern dieses Produktes lauten 88, und damit sind die letzten beiden Ziffern von $3^{999} - 2^{999}$ gleich 79.

Aufgabe 061214:
Geben Sie alle n-stelligen natürlichen Zahlen an, die gleich der n-ten Potenz ihrer Quersumme sind!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

a) Es ist x^n für $x \geq 10$ und $n \geq 1$ eine mindestens $(n+1)$-stellige Zahl, weil $x^n = 10^n + s$ mindestens $(n+1)$-stellig ist. Daher kommen als Lösung nur solche Zahlen in Frage, deren Quersumme $x < 10$ ist.

b) Ist x^n eine k-stellige Zahl, so ist $x^{n+1} = x^n \cdot x$ wegen $x < 10$ höchstens $(k+1)$-stellig.

c) Im Fall $n = 1$ erhält man für x^n die Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 und 9.

d) Im Fall $n \geq 2$ sei $r \geq 2$ die kleinste natürliche Zahl, für die x^r eine höchstens $(r-1)$-stellige Zahl ergibt. Dann können wir uns auf die Betrachtung der Zahlen x^2, x^3, $\dots$, x^{r-1} beschränken.

Für x=0, 1, 2, 3 ist $r = 2$, also gibt es für diese Quersummen keine derartigen Zahlen mit $n \geq 2$.

Da ferner alle Potenzen von 4 auf 4 oder 6, alle Potenzen von 5 auf 5 und alle Potenzen von 6 auf 6 enden und bei $n \geq 2$ außer dieser Endziffer mindestens noch eine von Null verschiedene Ziffer vorkommen muss, kann es auch für x=4, 5 und 6 keine derartigen Zahlen geben.

Man braucht daher nur zu untersuchen, ob es für x=7, 8 oder 9 solche n-stelligen Zahlen x^n gibt, deren Quersumme gleich x ist.

Es sei x=7.

Wegen (immer mod 10): $7^2 \equiv 9$, $7^3 \equiv 3$, $7^4 \equiv 1$, $7^5 \equiv 7$ braucht man nur die Potenzen der Form 7^m mit $m \equiv 3 \pmod 4$ und $m \equiv 0 \pmod 4$ zu untersuchen. Nun ist $7^3 = 343$ (Quersumme $x > 7$), $7^4 = 2401$ (Quersumme $x = 7$), $7^7 = 823543$ (sechsstellig) und 7^m weniger als m-stellig für $m > 7$. Also ist $7^4 = 2401$ die einzige derartige Zahl mit der Quersumme 7.

Es sei x=8.

Wegen (immer mod 10): $8^2 \equiv 4$, $8^3 \equiv 2$, $8^4 \equiv 6$, $8^5 \equiv 8$ braucht man nur die Potenzen der Form 8^m mit $m \equiv 2 \pmod 4$, $m \equiv 3 \pmod 4$ und $m \equiv 0 \pmod 4$ zu untersuchen. Wegen

$$n \lg 8 < n \cdot 0{,}904 < n - 1 \quad \text{für } n \geq 11$$

ist 8^n für $n \geq 11$ höchsten $(n-1)$-stellig. Daher bleiben noch folgende Fälle zu untersuchen:

$8^2 = 64$ (Quersumme $x > 8$),
$8^3 = 512$ (Quersumme $x = 8$),
$8^4 = \dots 096$ (Quersumme $x > 8$),
$8^6 = \dots 144$ (Quersumme $x > 8$),

$8^7 = \dots 152$ (Quersumme $x > 8$),
$8^8 = \dots 216$ (Quersumme $x > 8$), $8^{10} = \dots 824$ (Quersumme $x > 8$).

(Es genügt eine Betrachtung der letzten drei Stellen.) Also ist $8^3 = 512$ die einzige derartige Zahl mit der Quersumme 8.

Es sei x=9.

Wegen (immer modulo 10): $9^2 \equiv 1$, $9^3 \equiv 9$ braucht man nur alle Potenzen der Form 9^{2m} mit $m = 1,2,3,\dots$ zu betrachten. Analoge Überlegungen wie im Falle $x = 8$ ergeben: Wegen

$$n \lg 9 < n \cdot 0{,}9544 < n - 1 \quad \text{für } n \geq 22$$

ist 9^n eine höchstens $(n-1)$-stellige Zahl. Es bleiben also zu untersuchen übrig:

$9^2 = 81$ (Quersumme $x = 9$),
$9^4 = 6561$ (Quersumme $x > 9$),
$9^6 = \dots 1441$ (Quersumme $x > 9$),
$9^8 = \dots 6721$ (Quersumme $x > 9$),
$9^{10} = \dots 4401$ (Quersumme $x > 9$),
$9^{12} = \dots 6481$ (Quersumme $x > 9$),
$9^{14} = \dots 4961$ (Quersumme $x > 9$),
$9^{16} = \dots 1841$ (Quersumme $x > 9$),
$9^{18} = \dots 9121$ (Quersumme $x > 9$),
$9^{20} = \dots 8801$ (Quersumme $x > 9$).

(Es genügt die Betrachtung der letzten 4 Stellen.) Also ist $9^2 = 81$ die einzige derartige Zahl mit der Quersumme 9. Die gesuchten Zahlen sind also für

$n = 1$: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9
$n = 2$: 81
$n = 3$: 512 $n = 4$: 2401

Für $n \geq 5$ gibt es keine derartigen Zahlen.

Aufgabe 151214:
Es sei M die Menge aller derjenigen siebenstelligen Zahlen (im dekadischen Positionssystem), in denen jede der sieben Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 einmal auftritt.

Man beweise, dass keine der Zahlen aus M durch eine andere Zahl aus M teilbar ist.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Jedes $z \in M$ hat die Quersumme $g(z) = 1+2+3+4+5+6+7 = 28$ und lässt daher bei Division durch 3 und durch 9 den Rest 1.

Angenommen, $z_1 = a_0 + a_1 \cdot 10^1 + ... + a_6 \cdot 10^6 \in M$ wäre durch $z_2 = b_0 + b_1 \cdot 10^2 + ... + b_6 \cdot 10^6 \in M$ teilbar ($(a_0, a_1, ..., a_6)$ und $(b_0, b_1, ..., b_6)$ zwei verschiedene Anordnungen der Ziffern 1,2,...,7), d. h., es gäbe eine ganze Zahl k mit $z_1 = kz_2$.

Wegen $z_1 > 0, z_2 > 0$ folgte dann $k > 0$, wegen $z_1 \neq z_2$ folgte $k \neq 1$. Ferner wäre

$$kz_2 = z_1 \leq 765431 < 7 \cdot 10^6 + 7 \cdot 10^5 < 7 \cdot (10^6 + 2 \cdot 10^5) < 7 \cdot 1234567 \leq 7z_2$$

also $k \leq 7$.
Da je zwei Zahlen z_1 und z_2 aus M bei Division durch 9 den gleichen Rest lassen, müsste die Zahl $z_1 - z_2 = (k-1) \cdot z_2$ durch 9 teilbar sein. Das steht im Widerspruch dazu, dass z_2 nicht durch 3 und $k - 1$ (als eine der Zahlen $2 - 1, ..., 7 - 1$) nicht durch 9 teilbar wäre.

Folglich ist keine der Zahlen aus M durch eine andere Zahl aus M teilbar.

Aufgabe 221213:
In einem alten Rechenbuch wird das folgende Verfahren für die Multiplikation der Zahl 142857 mit einer natürlichen Zahl n, die größer als 7 ist, angegeben:

	Beispiel für $n = 326$
Man dividiere zunächst n durch 7 und schreibe als erste Zahl den	(326 : 7 = 46, Rest 4)
ganzzahligen Teil des Ergebnisses auf. Dann multipliziere man 142857 mit	$\boxed{46}$
dem Rest und schreibe das Produkt hinter	($142857 \cdot 4 = 571428$)
die zuerst aufgeschriebene Zahl. Von der so gebildeten Zahl subtrahiere	46571428
man die zuerst aufgeschriebene Zahl. Das Ergebnis ist das gesuchte Produkt.	-46 $46571382 = 142857 \cdot 326$

Es zeigt sich jedoch, dass dieses Verfahren nicht für alle natürlichen Zahlen $n > 7$ zum richtigen Ergebnis führt.

a) Ermitteln Sie alle diejenigen natürlichen n mit $n > 7$, für die das Verfahren zum richtigen Ergebnis führt!

b) Nennen und begründen Sie für die anderen $n > 7$ ein zum richtigen Ergebnis führendes Verfahren, das ebenfalls das Multiplizieren von 142857 mit einer Zahl größer als 7 vermeidet und die Division von n durch 7 zum Ausgangspunkt hat!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Ist q der ganzzahlige Teil und r der Rest, der sich bei Division einer natürlichen Zahl $n > 7$ durch 7 ergibt, so gilt

$$n = 7q + r \qquad \text{und} \qquad 0 \leq r \leq 6 \tag{1,2}$$

Die Multiplikation von 142857 mit r ergibt ein Produkt $p = 142857 \cdot r$, das

- im Fall $r = 0$ den Wert $p = 0$ hat und

- im Fall $1 \leq r \leq 6$ die Ungleichung $142857 \leq p \leq 142857 \cdot 6 = 857142$ erfüllt, also eine sechsstellige Zahl ist.

Daher führt das angegebene Verfahren

- im Fall $r = 0$ auf die Zahl $q \cdot 10 - q = 9q$,

- im Fall $1 \leq r \leq 6$ auf die Zahl $q \cdot 10^5 + p - q = 999999q + 142857r$.

Andererseits ist das gesuchte Produkt in jedem Fall nach (1) die Zahl

$$142857n = 142857(7q + r) = 999999q + 1428574$$

Der Vergleich zeigt: Das Verfahren führt für genau diejenigen $n > 7$ zum richtigen Ergebnis, für die der Fall $1 \leq r \leq 6$ vorliegt, das sind genau diejenigen $n > 7$, die nicht durch 7 teilbar sind.

b) Das einfachste Verfahren wäre, statt $n = 7q + r$ mit $r = 0$ den Ansatz $n = 7q + 7$ mit $r = 7$ zu verwenden und anschließend wie beschreiben fortzufahren.

Aufgabe 251213:
Man ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen n, die folgende Eigenschaften haben:

(1) n lässt bei der Division durch 3 den Rest 1,

(2) n^2 lässt bei der Division durch 11 den Rest 1,

(3) es gilt: $100 < n < 200$.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn $n = 11k + r$ mit einer natürlichen Zahl k und $r = 0, 1, 2, ..., 10$ ist, so ist

$$n^2 = 11(11k^2 + 2kr) +^2 = 11m + s$$

mit einer natürlichen Zahl m und $s = 0, 1, 4, 9, 5, 3, 3, 5, 9, 4, 1$. Also wird (2) genau von den Zahlen der Form

$$n = 11k + 1 \qquad \text{oder} \qquad n = 11k + 10 \tag{4}$$

erfüllt.
Die Bedingungen (3) und (2) werden somit genau von den 18 Zahlen 111, 122, ..., 199 und 109, 120, ..., 197 erfüllt. Für diese Zahlen ist (1) zu überprüfen.

Eine Zahl der Form (4) erfüllt genau dann (1), wenn mit einer natürlichen Zahl p auch $n = 3p + 1$, also

$$11k + 1 = 3p + 1 \qquad \text{bzw.} \qquad 11k + 10 = 3p + 1$$

oder, gleichwertig hiermit,

$$11k = 3p \qquad \text{bzw.} \qquad 11k = 3(p - 3)$$

gilt. Hierfür ist $3 \mid k$, also $k = 3q$ mit einer natürlichen Zahl q, notwendig und hinreichend; daher und nach (4) werden (1) und (2) genau von den Zahlen der Form

$$n = 33q + 1 \qquad \text{oder} \qquad n = 33q + 10$$

erfüllt, (1), (2), (3) somit genau von den Zahlen 133, 166, 199 und 109, 142, 175.

Aufgabe 271212:
Man ermittle alle diejenigen zweistelligen und alle diejenigen dreistelligen natürlichen Zahlen, bei denen das Produkt der Ziffern doppelt so groß ist wie die Quersumme!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

I. Wenn eine zweistellige Zahl z die verlangte Eigenschaft hat, so folgt:

Die Ziffern von z sind natürliche Zahlen a,b, für die $0 < a \leq 9$, $0 \leq b \leq 9$ und $ab = 2(a+b)$, also

$$(b-2)a = 2b \qquad (1)$$

gilt. Für $b = 1,2,5,7,8,9$ lautet diese Gleichung $(-1)a = 2$, $0 \cdot a = 4$, $3a = 10$, $5a = 14$, $6a = 16$ bzw. $7a = 18$. In keinem dieser Fälle hat sie eine natürliche Lösung. Daher kann b nur einer der zahlen 3, 4, 6 sein; in diesen Fällen ergibt sich aus (1) $1a = 6$, $2a = 8$ bzw. $4a = 12$, und daraus $a = 6$, $a = 4$ bzw. $a = 3$. Damit folgt, dass z einer der Zahlen 63, 44, 36 ist.

II. Wenn z eine dieser Zahlen ist, so hat z wegen die verlangte Eigenschaft, wie die Probe zeigt.

III. Wenn eine dreistellige Zahl z die verlangte Eigenschaft hat, so folgt: Die Ziffern von z sind natürliche Zahlen a,b,c, für die

$$0 < a \leq 9 \quad ; \quad 0 \leq b \leq 9 \quad ; \quad 0 \leq c \leq 9 \quad \text{und} \qquad (2)$$

$$abc = 2(a+b+c) \quad (3) \qquad \text{also} \qquad (bc-2)a = 2(b+c) \quad (4)$$

gilt. Aus (2) folgt $a+b+c+ > 0$; hiernach und wegen (3) müssen auch $b > 0$ und $c > 0$ sein, so dass über (2) hinaus sogar

$$0 < a,b,c \leq 9 \qquad (2')$$

gilt. Wegen (3) muss mindestens eine der Zahlen a,b,c gerade sein. Da (3) und (2') bei beliebiger Umordnung von a,b,c erhalten bleiben, genügt es, etwa den Fall zu betrachten, dass c gerade ist, also wegen (2') eine der Zahlen 2,4,6,8.

Die folgende Tabelle enthält für diese Werte und alle $b = 1,2,...,9$ jedes Mal die durch 2 dividierte Gleichung (4) und Angaben über ihre Lösung a:

b	$c=2$		$c=4$		$c=6$		$c=8$	
1	$0a=3$	$-$	$1a=5$	$a=5$	$2a=7$	$-$	$3a=9$	$a=3$
2	$1a=4$	$a=4$	$3a=6$	$a=2$	$5a=9$	$-$	$7a=10$	$-$
3	$2a=5$	$-$	$5a=7$	$-$	$8a=9$	$-$	$11a=11$	$a=1$
4	$3a=6$	$a=2$	$7a=8$	$-$	$11a=10$	$-$	$15a=12$	$-$
5	$4a=7$	$-$	$9a=9$	$a=1$	$14a=11$	$-$	$19a=13$	$-$
6	$5a=8$	$-$	$11a=10$	$-$	$17a=12$	$-$	$23a=14$	$-$
7	$6a=9$	$-$	$13a=11$	$-$	$20a=13$	$-$	$27a=15$	$-$
8	$7a=10$	$-$	$15a=12$	$-$	$23a=14$	$-$	$31a=16$	$-$
9	$8a=11$	$-$	$17a=13$	$-$	$26a=15$	$-$	$35a=17$	$-$

Daraus folgt, dass z einer der folgenden Zahlen oder ein daraus durch Ziffernumordnung entstehende Zahl ist: 422, 242, 514, 224, 154, 318, 138.

IV. Wenn z eine derartige Zahl ist, so hat z wegen $2 \cdot 2 + 4 = 16 = 2(2+2+24)$ bzw. analog für die anderen Zahlen die verlangte Eigenschaft.

Mit I., II., III., IV. ist bewiesen, dass genau die Zahlen 36, 44, 63, 138, 145, 154, 183, 224, 242, 318, 381, 422, 514, 541, 813, 831 die verlangte Eigenschaft haben.

Aufgabe 271214:
Man ermittle den Rest, den die Summe $s = 1^5 + 2^5 + 3^5 + ... + 1987^5$ bei Division durch 25 lässt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Für jede natürliche Zahl a gibt es natürliche Zahlen m und r mit $0 \leq r \leq 4$, so dass $n = 5m + r$ ist. Es gilt:

$$(5m+r)^5 = 5^5 \cdot m^5 + 5 \cdot 5^4 \cdot m^4 \cdot r + 10 \cdot 5^3 \cdot m^3 \cdot r^2 + 10 \cdot 5^2 \cdot m^3 \cdot r^3 + 5 \cdot 5 \cdot m \cdot r^4 + r^5$$

Folglich lässt $(5m+r)^5$ bei Division durch 25 $(= 5^2)$ denselben Rest wie r^5.

Fallunterscheidung:

Es sei r gleich	0, 1, 2, 3, 4,
dann ist r^5 gleich	0, 1, 32, 243, 1024
und der Rest von r^5 bei Division	
durch 25 gleich	0, 1, 7, 18, 24

Unter den Zahlen $1^5, 2^5, ..., 1987^5$ sind (wegen $1987 = 5 \cdot 397 + 2$) jeweils genau 397 Zahlen von der Form $(5k)^5$ bzw. $(5k+3)^5$ bzw. $(5k+4)^5$ und jeweils genau 398 Zahlen von der Form $(5k+1)^5$ bzw. $(5k+2)^5$, d. h. jeweils 397 Zahlen, die bei Division durch 25 den Rest 0 bzw. 18 bzw. 24 lassen, jeweils 398 Zahlen, die bei Division durch 25 den Rest 1 bzw. 7 lassen.

Die Summe der Reste bei der Division von $1^5, 2^5, ..., 1987^5$ durch 25 ist also

$$397 \cdot 18 + 397 \cdot 24 + 398 \cdot 1 + 398 \cdot 7 = 397 \cdot (18+7) + 7 + 397 \cdot (24+1) + 1 = 397 \cdot 25 + 397 \cdot 25 + 8$$

Also lässt $s = 1^5 + 2^5 + 3^5 + ... + 1987^5$ bei Division durch 25 den Rest 8.

Aufgabe 331212:
Zeigen Sie, dass sich jede positive ganze Zahl z in der Form

$$z = a_1 \cdot 1^2 + a_2 \cdot 2^2 + ... + a_n \cdot n^2$$

darstellen lässt, wobei n eine positive ganze Zahl ist und jeder Koeffizient a_1, a_2, ..., a_n eine der Zahlen 0, 1, -1 ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es gibt z. B. die Darstellungen

$$1 = 1 \cdot 1^2, \quad 2 = (-1) \cdot 1^2 + (-1) \cdot 2^2 + (-1) \cdot 3^2 + 1 \cdot 4^2$$

für ungerade $z = 2k+1$ ($k = 1$ ganzzahlig) wegen $z = (k+1)^2 - k^2$ die Darstellung mit

$$a_k = -1, \quad a_{k+1} = 1 \quad \text{und} \quad a_i = 0 \quad (i \neq k,k+1)$$

sowie für gerade $z = 2k$ ($k \geq 2$ ganzzahlig) wegen $z = (k+1)^2 - k^2 - 1$ die Darstellung mit

$$a_1 = -1, \quad a_k = -1, \quad a_{k+1} = 0 \quad \text{und} \quad a_i = 0 \quad (i \neq 1,k,k+1)$$

Aufgabe 341211:
Von einer natürlichen Zahl n sei bekannt, dass ihre Dezimaldarstellung nur die Ziffern Drei und Null enthält, wobei die Drei genau 1994 mal und die Null genau 1995 mal auftritt.

Man untersuche, ob eine solche Zahl Quadratzahl sein kann.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Eine solche Zahl kann nicht Quadratzahl sein.

Beweis: Ihre Quersumme $1994 \cdot 3$ ist durch 3 teilbar, aber nicht durch 9, da 1994 nicht durch 3 teilbar ist. Also ist auch die genannte Zahl durch 3, aber nicht durch 9 teilbar. Jede durch die Primzahl $p = 3$ teilbare Quadratzahl ist aber auch durch $p^2 = 9$ teilbar.
Also kann die genannte Zahl keine Quadratzahl sein.

II Runde 2

Aufgabe V11225:
Gesucht ist eine vierstellige Zahl, die gleich der 4. Potenz ihrer Quersumme ist.
Wie haben Sie die Zahl ermittelt?

Lösung von StrgAltEntf:
Da die vierte Potenz der Quersumme vierstellig sein soll und $5^4 < 1000$, $10^4 > 9999$ gilt, kommt für die Quersumme nur 6, 7, 8 oder 9 infrage. Es gilt weiterhin $6^4 = 1296$, $7^4 = 2401$, $8^4 = 4096$ und $9^4 = 6561$. Die gesuchte Zahl ist somit 2401 mit der Quersumme 7.

Aufgabe 031221:
Geben Sie ohne Benutzung einer Tafel der Kubikzahlen alle zweistelligen Zahlen an, deren dritte Potenzen mit den Ziffern der ursprünglichen Zahl in derselben Anordnung beginnen!

Lösung von W. Engel und U. Pirl:
Wenn es eine Zahl x gibt, die den Bedingungen der Aufgabe genügt, so ist x^3 entweder vierstellig (Fall 1) oder fünfstellig (Fall 2) oder sechsstellig (Fall 3), da x eine zweistellige Zahl ist und $10^3 = 1000$ und $99^3 = 970299$.

1. Da x^3 mit denselben Ziffern in derselben Anordnung wie x beginnt, lässt sich x^3 in folgender Form schreiben: $x^3 = 100x + y$ mit $0 \leq y \leq 99$, d. h., es gilt: $100x \leq x^3 < 100x + 100$, $100x \leq x^3 < 100(x + 1)$ und folglich
$$100 \leq x^2 < 100(1 + \frac{1}{x}) \leq 100(1 + \frac{1}{10}) = 110$$
wegen $x \geq 10$. Also $100 \leq x^2 < 110$. Diese Beziehung ist nur für $x = 10$ erfüllt.
2. Da x^3 mit denselben Ziffern in derselben Anordnung wie x beginnt, lässt sich x^3 in folgender Form schreiben: $x^3 = 1000x + y$ mit $0 \leq y \leq 999$, d. h. es gilt:
$$1000x \leq x^3 < 1000x + 1000 \quad ; \quad 1000x \leq x^3 < 1000(x + 1)$$
und folglich $1000 \leq x^2 < 1000(1 + \frac{1}{x}) \leq 1100$.
Diese Beziehung ist nur für $x = 32$ erfüllt.
3. Da x^3 mit denselben Ziffern in derselben Anordnung wie x beginnt, lässt sich x^3 in folgender Form schreiben: $x^3 = 10000x + y$ mit $0 \leq y \leq 9999$, d. h. es gilt:
$$10000x \leq x^3 < 10000x + 10000 \quad ; \quad 10000x \leq x^3 < 10000(x + 1)$$
und folglich $10000 < x^2$. Dies ist nicht möglich, da x zweistellig ist und daher x^2 höchstens vierstellig sein kann.

Folglich sind wegen $10^3 = 1000$ und $32^3 = 32768$ die Zahlen 10 und 32 die einzigen, die der Bedingung der Aufgabe entsprechen.

Aufgabe 031225:
Zwei Hirten verkaufen eine Anzahl von Tieren, von denen jedes genausoviel Groschen einbringt, wie die Anzahl der Tiere beträgt. Den Erlös verteilen sie folgendermaßen:
Der erste Hirte erhält 10 Groschen, der zweite 10 Groschen, dann wieder der erste 10 Groschen, der zweite 10 Groschen usw. Nachdem der erste zum letzten Mal 10 Groschen erhalten hat, verbleibt ein Rest, der kleiner als 10 Groschen ist.
Von diesem Rest kaufen sie ein Messer.
Wieviel kostet das Messer?

Lösung von Henning Thielemann:
Der Erlös für ein Tier betrage n Groschen, mithin werden n Tiere verkauft und die Hirten bekommen insgesamt n^2 Groschen für ihre Tiere.
Nach jeder Runde beim Verteilen (erster Hirte bekommt 10 Groschen, zweiter Hirte ebenfalls) verringert sich der verbleibende Betrag um 20 Groschen.
Sei r die Anzahl der Groschen, die bei der Verteilung noch vorhanden sind, nachdem der zweite Hirte zum letzten Mal volle 10 Groschen erhalten hat. Es gilt also $r \equiv n^2 \pmod{20}$ und $0 < r < 20$. Von denen bekommt der erste Hirte noch einmal 10 Groschen und danach sind noch $r - 10$ Groschen übrig, sodass $10 < r < 20$ gilt.
Jede natürliche Zahl n lässt sich darstellen als $10a + b$ mit $a \in \mathbb{N}_0$ und $b \in \mathbb{Z} \cap [-4, 5]$. Damit erhalten wir

$$n^2 = (10a + b)^2 = (100a^2 + 20ab + b^2) \equiv b^2 \pmod{20}.$$

Wegen $(-b)^2 = b^2$ testen wir nur

$$\begin{aligned} b = 0 &: \quad 0 \equiv 0 \pmod{20} \\ b = 1 &: \quad 1 \equiv 1 \pmod{20} \\ b = 2 &: \quad 4 \equiv 4 \pmod{20} \\ b = 3 &: \quad 9 \equiv 9 \pmod{20} \\ b = 4 &: \quad 16 \equiv 16 \pmod{20} \\ b = 5 &: \quad 25 \equiv 5 \pmod{20} \end{aligned}$$

und erhalten, dass nur $|b| = 4$ die Bedingung erfüllt, dass der Rest r von n^2 bei Division durch 20 zwischen 10 und 20 liegt, und schließen daraus, dass das Messer 6 Groschen kostet, unabhängig davon, wie viele Tiere genau verkauft wurden.

Aufgabe 111222:
Beweisen Sie, dass für keine ganze Zahl n die Zahl $7n + 3$ Quadrat einer ganzen Zahl sein kann!

Lösung von weird:
Beweis: Aus der Lösbarkeit von $x^2 = 7n + 3$ in $\mathbb{Z}$ würde sofort auch die Lösbarkeit der Kongruenz $x^2 \equiv 3 \pmod{7}$ folgen.
Diese ist aber unlösbar, die man wohl am einfachsten durch Einsetzen aller „Kandidaten“ $x \in \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3\}$ sieht.

Aufgabe 121223:
Man beweise, dass für keine natürliche Zahl n die Zahl $6n + 2$ das Quadrat einer natürlichen Zahl ist.

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:
Quadratische Reste modulo 6 sind $\{0; 1; 3; 4\}$, da $0^2 \equiv 0 \pmod{6}, 1^2 \equiv 1 \pmod{6}, 2^2 \equiv 4 \pmod{6}, 3^2 \equiv 3 \pmod{6}, 4^2 \equiv 4 \pmod{6}, 5^2 \equiv 1 \pmod{6}$.

$6n + 2 \equiv 2 \pmod 6$, d. h. $6n + 2$ kann niemals Quadrat werden. qed.

Alternativ-Lösung von cyrix:
Jede natürliche Zahl m lässt sich darstellen als $m = 3k$ oder $3k \pm 1$, sodass dann $m^2 = 3 \cdot (3k^2)$ bzw. $m = 3 \cdot (3k^2 \pm 2k) + 1$ gilt. Insbesondere lässt keine Quadratzahl den Rest 2 bei der Division durch 3, sodass $6n + 2 = 3 \cdot (2n) + 2$ für kein n eine Quadratzahl sein kann.

Aufgabe 231224:
Man ermittle alle natürlichen Zahlen n, für die die Zahl $2^n + 5$ eine Quadratzahl ist.

Lösung von weird:
Wenn $2^n + 5$ eine Quadratzahl ist, so muss dann n jedenfalls gerade sein, da für ein ungerades n

$$2^n + 5 = 4^{\frac{n-1}{2}}\, 2 + 5 \equiv (-1)^{\frac{n-1}{2}}\, 2 \equiv \pm 2 \pmod 5$$

gelten würde, d. h., $2^n + 5$ wäre dann ein quadratischer Nichtrest mod 5, Widerspruch!
Für ein gerades n gilt aber $2^n = k^2$ mit $k = 2^{\frac{n}{2}} \in \mathbb{N}$, d. h., 2^n ist selbst eine Quadratzahl. Wir müssen also nur noch die Gleichung

$$k^2 + 5 = \ell^2$$

in positiven ganzen Zahlen k,ℓ lösen. Aus $(\ell - k)(\ell + k) = 5$ folgt aber sofort $\ell - k = 1$, $\ell + k = 5$ und damit $k = 2$, $\ell = 3$. Wegen $2^n = k^2 = 2^2$ ist also $n = 2$ dann eine Lösung der Aufgabe und auch die einzige.

Aufgabe 331223:
Man ermittle alle diejenigen Paare $(m; n)$ positiver ganzer Zahlen m, n, für die $1994^m - 1993^n$ eine Quadratzahl ist.

Lösung von weird:
Sei

$$1994^m - 1993^n = k^2 \quad (m,n \in \mathbb{N}^*,\ k \in \mathbb{N}) \qquad (*)$$

Indem wir diese Gleichung mod 4 betrachten, wird daraus die Kongruenz

$$2^m - 1 \equiv k^2 \pmod 4$$

Hier liegt für $m > 1$ die linke Seite der Kongruenz in der Restklasse 3 mod 4, die rechte aber in der Restklasse von 0 oder 1 mod 4, was also dann nur den Schluss zulässt, dass $m = 1$ sein muss. In diesem Fall ist aber die linke Seite von (*) für $n > 1$ negativ und daher sicher keine Quadratzahl. Für die verbleibende Möglichkeit $n = 1$ erhält man dagegen

$$1994 - 1993 = 1$$

also dann trivialerweise eine Quadratzahl und damit ist $(m,n) = (1,1)$ dann auch das einzige Paar von positiven ganzen Zahlen, für welches dies gilt.

Aufgabe 341224:
Ist z eine 1995-ziffrige natürliche Zahl und ist n eine natürliche Zahl mit $1 \leq n \leq 1994$, so bezeichne $z[n]$ diejenige Zahl, deren Zifferndarstellung entsteht, indem man aus der Zifferndarstellung von z die ersten n Ziffern weglässt und in gleicher Reihenfolge wieder an das Ende der Zifferndarstellung anfügt.
Mit diesen Bezeichnungen beweise man für jedes 1995-ziffrige z und jedes n mit $1 \leq n \leq 1994$:
Ist z durch 27 teilbar, so ist auch $z[n]$ durch 27 teilbar.

Lösung von Nuramon:
Wir schreiben z in der Form $z = a \cdot 10^{1995-n} + b$ mit $a{,}b \in \mathbb{N}, b < 10^{1995-n}$. Dann ist $z[n] = b \cdot 10^n + a$.
Die Zahl $10^{1995} - 1$ ist durch 27 teilbar, denn $(10^{1995} - 1) \cdot \frac{1}{9} = 11\ldots 11$ hat die Quersumme 1995 und ist somit durch 3 teilbar.
Wenn z durch 27 teilbar ist, dann gilt $-b \equiv a \cdot 10^{1995-n} \pmod{27}$. Multiplikation mit 10^n liefert dann zusammen mit obiger Bemerkung:

$$-10^n b \equiv a \cdot 10^{1995} \equiv a \pmod{27}.$$

Also ist auch $z[n]$ durch 27 teilbar.

III Runde 3

Aufgabe 011132:
Gibt es eine ganze Zahl $n > 0$, die mit 6 multipliziert ein Produkt ergibt, das die gleichen Ziffern wie die ursprüngliche Zahl, aber in umgekehrter Reihenfolge enthält?
Die Behauptung ist zu begründen!

Lösung von W. Engel und U. Pirl:
Angenommen, es gäbe eine derartige Zahl n mit $m = 6n$. Dann müsste die erste Ziffer von n gleich 1 sein, weil die Ziffernanzahl von m gleich der Ziffernanzahl von n ist.
Daher wäre die letzte Ziffer von m gleich 1, was unmöglich ist, da $6n$ gerade ist.
Also gibt es keine Zahl, die den Bedingungen der Aufgabe genügt.

Aufgabe 021233:
Beweisen Sie folgende Behauptung!
Wenn eine positive ganze Zahl durch 99 teilbar ist, dann ist die Summe ihrer Ziffern nicht kleiner als 18.

Lösung von Burkhard Thiele:
Die Zahl z lässt sich im dekadischen System folgendermaßen darstellen:

$$z = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + ... + a_1 10^1 + a_0 10^0$$

wobei $a_n, ..., a_0$ natürliche Zahlen kleiner als 10 sind und $a_n \geq 0$ ist. Da z durch 9 teilbar ist, ist die Quersumme von z:

$$Q(z) = a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0$$

durch 9 teilbar. Da z durch 11 teilbar ist, ist die alternierende Quersumme von z:

$$Q_a(z) = (-1)^n a_n + (-1)^{n-1} a_{n-1} \pm ... - a_1 + a_0$$

durch 11 teilbar.
Setzt man die Summe der positiven Summanden von $Q_a(z)$ gleich a, also $a = a_0 + a_2 + ...$ und die negative Summe der übrigen Summanden gleich b, also $b = a_1 + a_3 + ...$, so gilt: $Q(z) = a + b = 9k$ und $Q_a(z) = a - b = 11m$, wobei a, b nichtnegative ganze Zahlen, k positive ganze Zahl und m eine ganze Zahl bedeuten.
Die Aufgabe ist gelöst, wenn $k \neq 1$ gezeigt wird.
Angenommen, es gelte $k = 1$, so folgt aus $a + b = 9$ und $a - b = 11m$:

$$a = \frac{1}{2}(9 + 11m) \qquad \text{und} \qquad b = \frac{1}{2}(9 - 11m)$$

Da a nichtnegativ und ganzzahlig ist, folgt aus der Formel für a: $m \geq 1$. Da b ebenfalls nichtnegativ und ganzzahlig ist, folgt aus der Formel für b gleichzeitig $m \leq -1$. Diese beiden Bedingungen für m sind jedoch unvereinbar miteinander.

Daher ist die Annahme $k = 1$ nicht richtig, und es ist $k \geq 2$, d. h., die Quersumme $Q(z)$ ist größer oder gleich 18.

Aufgabe 031231:
Geben Sie alle zweistelligen Zahlen an, die folgende Eigenschaft besitzen!
Bildet man ihre dritte Potenz und streicht bei dieser Zahl alle Ziffern mit Ausnahme der letzten beiden, so erhält man wieder die ursprüngliche Zahl.

Lösung von W. Engel und U. Pirl:
Wenn es eine Zahl x der geforderten Art gibt, so lässt sie sich in der Form

$$x = 10a + b \qquad (1)$$

mit $a = 1, 2, ..., 9$ und $b = 0, 1, 2, ..., 9$ schreiben, da x eine zweistellige Zahl ist.
$b = 0$ kommt nicht in Frage, da dann die letzten drei Ziffern von x^3 Null wären, was nur für $x = 0$ möglich ist. Laut Aufgabenstellung sind alle Zahlen x gesucht, für die gilt:

$$x^3 = 100n + 10a + b \qquad (2)$$

wobei n eine natürliche Zahl ist. Wegen (1) gilt:

$$x^3 = 1000a^3 + 300a^2b + 30ab^2 + b^3 \qquad (3)$$

Aus (2) und (3) folgt, dass $b^3 - b$ durch 10 teilbar ist, sich also in der Form $b^3 - b = 10m \quad (4)$;
m natürliche Zahl, darstellen lässt. Weiterhin folgt aus (2) und (3), dass $30ab^2 + b^3 - b - 10a$ durch 100 teilbar ist, sich also in der Form

$$30ab^2 + b^3 - b - 10a = 100k \quad \text{oder} \quad 3ab^2 + \frac{1}{10}(b^3 - b) - a = 10k \quad (5)$$

k natürliche Zahl, darstellen lässt.
Wegen (4) kommen für b von den Ziffern $1, ..., 9$ nur die Ziffern $1, 4, 5, 6$ und 9 in Frage. Setzt man diese der Reihe nach in (5) ein, so erhält man:

Für $b = 1$ ergibt sich $a = 5$, d. h. $x = 51$.
Für $b = 4$ ergibt sich $a = 2$, d. h. $x = 24$.
Für $b = 5$ ergibt sich $a = 2$ oder $a = 7$, d. h. $x = 25$ oder $x = 75$.
Für $b = 6$ folgt $a = 7$, d. h. $x = 76$.
Für $b = 9$ folgt $a = 4$ oder $a = 9$, d. h. $x = 49$ oder $x = 99$.

Für die Lösung der Aufgabe kommen also nur die Zahlen $24, 25, 49, 51, 75, 76, 99$ in Frage.
Durch Bildung der dritten Potenzen dieser Zahlen bestätigt man, dass jede von ihnen allen Bedingungen der Aufgabe genügt.

Aufgabe 071233:
Wie lauten die letzten beiden Ziffern der Zahl $7^{7^{7^7}} - 7^{7^7}$?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es ist

$$7^1 \equiv 7 \pmod{100} \qquad 7^2 \equiv 49 \pmod{100}$$
$$7^3 \equiv 43 \pmod{100} \qquad 7^4 \equiv 1 \pmod{100}$$

also

$$7^{4k} \equiv 1 \pmod{100} \quad 7^{4k-1} \equiv 43 \pmod{100}$$

wobei k eine beliebige natürliche von Null verschiedene Zahl ist. Nun ist

$$7 \equiv -1 \pmod 4, \text{ also } \quad 7^7 \equiv -1 \pmod{100},$$

d. h. $7^7 = 4m - 1$, wobei m eine von 0 verschiedene natürliche Zahl ist. Daraus folgt

$$7^{7^7} = 7^{4m-1} \equiv 43 \pmod{100}$$

Da somit

$$7^{7^7} \equiv 7^{4m-1} \equiv -1 \pmod 4$$

gilt, d. h. $7^{7^7} = 4m' - 1$ (m' natürliche von 0 verschiedene Zahl) ist, folgt weiter

$$7^{7^{7^7}} = 7^{7^{4m-1}} = 7^{4m'-1} \equiv 43 \pmod{100}.$$

Daher ist die zu untersuchende Zahl

$$7^{7^{7^7}} - 7^{7^7} \equiv 43 - 43 \equiv 0 \pmod{100},$$

d. h. durch 100 teilbar; jede ihrer letzten beiden Ziffern ist also 0.

Aufgabe 151231:
Jemand löste eine Divisionsaufgabe A; bei dieser war eine natürliche Zahl, die (in dekadischer Darstellung) mit fünf gleichen Ziffern geschrieben wird, durch eine vierstellige natürliche Zahl, die (in dekadischer Darstellung) mit vier gleichen Ziffern geschrieben wird, zu dividieren.
Bei dieser Division ergab sich die Zahl 16 und ein gewisser Rest.
Anschließend bildete jemand aus dieser Aufgabe A eine neue Divisionsaufgabe A', indem er sowohl im Dividenden als auch im Divisor je eine Ziffer wegfallen ließ.
Bei der Division der so erhaltenen Zahlen ergab sich wieder die Zahl 16 sowie ein um 2000 kleinerer Rest als bei der Aufgabe A.
Man nenne (durch Angabe von Dividend und Divisor) alle Divisionsaufgaben A, die diese Eigenschaft aufweisen.

Lösung von Arnd Hübsch:
Eine fünfstellige natürliche Zahl Z mit identischen Ziffern kann folgendermaßen dargestellt werden

$$Z = x + 10x + 100x + 1000x + 10000x = 11111x \qquad (1)$$

wobei x eine einstellige natürliche Zahl ist ($0 < x < 10$). Da analoge Beziehungen auch für drei- und vierstellige natürliche Zahlen mit identischen Ziffern gelten,kann man die Divisionsaufgabe A folgendermaßen schreiben

$$11111x = 16 \cdot 1111y + R \qquad (2)$$

wobei $0 < x < 10$, $0 < y < 10$, $0 < R < 1111y$ (3) gilt und sowohl x als auch y eine einstellige natürliche Zahl ist. Der Rest R ist eine natürliche Zahl. Eine zu (2) äquivalente Beziehung kann man auch für die Divisionsaufgabe A' aufstellen

$$1111x = 16 \cdot 111y + (R - 2000) \qquad (4)$$

wobei zusätzlich zu (3) auch $0 < (R - 2000) < 111y$ (5) erfüllt sein muss. Stellt man nun sowohl (2) als auch (4) nach R um und setzt die so gewonnen Beziehungen gleich, so erhält man

$$(11111 - 1111)x = 16 \cdot (1111 - 111)y + 2000 \qquad (6)$$

Diese Gleichung lässt sich nach x auflösen

$$x = \frac{8}{5}y + \frac{1}{5} \qquad (7)$$

Setzt man nun die 9 verschiedenen Werte für y ein [vergleiche (3)], so stellt man fest, dass sich nur für $y = 3$ und für $y = 8$ eine natürliche Zahl für x ergibt. Da das Ergebnis für x bei $y = 8$ nicht einstellig ist, gibt es nur ein mögliche Kombination: $x = 5, y = 3$.
Einsetzen in (2) ergibt unmittelbar

$$55555 = 16 \cdot 3333 + R \Rightarrow R = 2227 \qquad (8)$$

womit gezeigt wäre, dass alle Forderungen aus (3) und (5) erfüllt sind.
Damit ist gezeigt, dass es nur eine Divisionsaufgabe A gibt; der Dividend ist dabei durch 55555, der Divisor durch 3333 gegeben.

Aufgabe 201236:
Man zeige, dass zu jeder natürlichen Zahl $n \geq 1$ und jeder natürlichen Zahl $B > 1$ eine natürliche Zahl $C \geq 1$ existiert, die im Positionssystem mit der Basis B nur aus Ziffern Null und Eins besteht und durch n teilbar ist.

Lösung von StrgAltEntf:
Definiere $C_k := \sum_{l=1}^{k} B^l$.
Für $1 \leq k \leq n+1$ haben wir $n+1$ Reste bei Division durch n. Daher gibt es nach dem Schubfachprinzip zwei Indizes $k_1 < k_2 \leq n+1$, so dass C_{k_1},C_{k_2} denselben Rest haben.
Damit hat $C := C_{k_2} - C_{k_1}$ die gewünschte Darstellung und ist durch n teilbar.

Aufgabe 251231:
Man ermittle alle diejenigen Paare $(m; n)$ natürlicher Zahlen m und n, für die die folgenden Bedingungen (1) und (2) gelten:
(1) $m + n$ und $m \cdot n$ sind zweistellige Zahlen.
(2) Vertauscht man die Ziffern der Zahl $m+n$ miteinander, so erhält man die (Zifferndarstellung der) Zahl $m \cdot n$.

Lösung von cyrix:
Nach Aufgabenstellung existieren Ziffern c,$d \in \{1; 2; \ldots ; 9\}$ mit $m + n = 10c + d$ und $m \cdot n = 10d + c$. Dabei darf keine Ziffer 0 sein, da sonst die Zahl mit entsprechender Zehnerstelle nicht zweistellig wäre. Insbesondere ist

$$(m - 1) \cdot (n - 1) = (m \cdot n) - (m + n) + 1 = 10d + c - (10c + d) + 1 = 9(d - c) + 1$$

lässt bei Division durch 9 den Rest 1. Damit kann man aus der Restklasse von n eindeutig die von m modulo 9 bestimmen:
Ist $n \equiv 0,2,3,5,6,8 \pmod 9$, so muss $m \equiv 0,1,6,8,3,5 \pmod 9$ sein, während es jeweils keine Lösung gibt, falls $n \equiv 1,4,7 \pmod 9$ ist, da dann $n - 1$ und damit auch $(n - 1)(m - 1)$ durch 3 teilbar ist, was ein Widerspruch zur Kongruenz zu 1 modulo 9 darstellt.

Analog erhält man

$$(m + 1)(n + 1) = (m \cdot n) + (m + n) + 1 = (10d + c) + (10c + d) + 1 = 11(c + d) + 1$$

was den Rest 1 bei der Division durch 11 lässt, sodass man wieder aus der Kongruenz von n modulo 11 auf die von m schließen kann:
Ist $n \equiv 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 \pmod{11}$, so muss $m \equiv 0,5,3,2,8,1,7,6,4,9 \pmod{11}$ gelten, wobei es für $n \equiv 10 \pmod{11}$ keine Lösung gibt, da dann $(n + 1)$ und damit $(n + 1)(m + 1)$ durch 11 teilbar ist, was der Kongruenzbedingung widerspricht.

Es sei o. B. d. A. $m \geq n$. Dann ist $n \neq 0$, da sonst $m \cdot n = 0$ nicht zweistellig wäre. Weiterhin ist $n \neq 1{,}4{,}7$, da es dafür aufgrund der Kongruenzbedingung keine Lösung gibt. Wegen $100 > m \cdot n \geq n^2$ ist $n < 10$, sodass noch die Fälle $n \in \{2,3,5,6,8,9\}$ verbleiben. In jedem dieser Fälle folgt für m eine Kongruenz modulo 9 und eine modulo 11, was sich nach dem Chinesischen Restsatz zu einer modulo 99 zusammenfassen lässt. Da $0 < m \leq m \cdot n \leq 99$ gilt, ist damit dann m auch schon eindeutig festgelegt.

1. Fall: $n = 2$. Dann muss $m \equiv 1 \pmod 9$ und $m \equiv 3 \pmod{11}$, also $m = 91$ gelten, was wegen $mn > 100$ keine Lösung ist.
2. Fall: $n = 3$. Dann muss $m \equiv 6 \pmod 9$ und $m \equiv 2 \pmod{11}$, also $m = 24$ gelten, was wegen $mn = 72$ und $m + n = 27$ eine Lösung ist.
3. Fall: $n = 5$. Dann muss $m \equiv 8 \pmod 9$ und $m \equiv 1 \pmod{11}$, also $m = 89$ gelten, was wegen $mn > 100$ keine Lösung ist.
4. Fall: $n = 6$. Dann muss $m \equiv 3 \pmod 9$ und $m \equiv 7 \pmod{11}$, also $m = 84$ gelten, was wegen $mn > 100$ keine Lösung ist.
5. Fall: $n = 8$. Dann muss $m \equiv 5 \pmod 9$ und $m \equiv 4 \pmod{11}$, also $m = 59$ gelten, was wegen $mn > 100$ keine Lösung ist.
6. Fall: $n = 9$. Dann muss $m \equiv 0 \pmod 9$ und $m \equiv 9 \pmod{11}$, also $m = 9$ gelten, was wegen $mn = 81$ und $m + n = 18$ eine Lösung ist.

Damit gibt es insgesamt genau drei Paare, die den Bedingungen der Aufgabenstellung genügen, nämlich $(m,n) \in \{(3,24),\ (24,3),\ (9,9)\}$.

Aufgabe 291231:
Man beweise:
Wenn n eine natürliche Zahl größer als 2 ist und wenn $a_1, ..., a_n$ Zahlen sind, die

$$a_1^2 = ... = a_n^2 = 1 \qquad \text{und} \qquad a_1a_2 + a_2a_3 + ... + a_{n-1}a_n + a_na_1 = 0$$

erfüllen, dann ist stets n durch 4 teilbar.

Lösung von Nuramon:
Aus $a_i^2 = 1$ folgt $a_i = \pm 1$. Ändert man im Ausdruck $a_1a_2 + a_2a_3 + ... + a_{n-1}a_n + a_na_1$ das Vorzeichen von a_i, dann ändert sich der Ausdruck um

$$a_{i-1}a_i + a_ia_{i+1} - (a_{i-1}(-a_i) + (-a_i)a_{i+1}) = 2a_i(a_{i-1} + a_{i+1})$$

Da $a_{i-1} + a_{i+1}$ gerade ist, ändert sich bei so einer Vorzeichenänderung der Wert von $a_1a_2 + a_2a_3 + ... + a_{n-1}a_n + a_na_1$ um ein Vielfaches von 4.
Zu Beginn hat der Term den Wert 0 und ist somit durch 4 teilbar. Ändert man schrittweise das Vorzeichen aller negativen a_i, dann ergibt sich letztendlich, dass $1 \cdot 1 + \ldots + 1 \cdot 1 = n$ ebenfalls durch 4 teilbar sein muss.

Aufgabe 331233A:
Ist m eine natürliche Zahl mit $m \geq 2$, so werde eine Zahlenfolge $(x_n)_{n\in\{0,1,2,...\}}$ durch die Festsetzung definiert, dass $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ gelten soll und für $n \geq 0$ jeweils x_{n+2} der Rest (mit $0 \leq x_{n+2} < m$) sein soll, den $x_{n+1} + x_n$ bei Division durch m lässt.
Man untersuche, ob zu jeder natürlichen Zahl m mit $m \geq 2$ eine natürliche Zahl k mit $k \geq 1$ existiert, mit der die drei Gleichungen $x_0 = x_k$, $x_1 = x_{k+1}$ und $x_2 = x_{k+2}$ gelten.

Lösung von Henning Thielemann:
Es gibt nur m^2 verschiedene Werte für Paare (x_n, x_{n+1}) aufeinanderfolgender Folgenglieder, aber unendlich viele Folgenglieder.
Daher gibt es nach dem Schubfachprinzip ein n und ein k mit $k > 0$, so dass $x_n = x_{n+k}$ und $x_{n+1} = x_{n+k+1}$ gilt. (Es gibt sogar ein n für das es unendlich viele solcher k gibt.)
Für zwei aufeinanderfolgende Folgenglieder x_j, x_{j+1} lässt sich das Vorgängerglied eindeutig bestimmen mit $x_{j-1} = (x_{j+1} - x_j) \pmod m$, also gilt auch $x_{n-1} = x_{n+k-1}$, $x_{n-2} = x_{n+k-2}$ usw. bis zu $x_0 = x_k$.

Aufgabe 341234:
Man ermittle die kleinste natürliche Zahl n mit $n \geq 2$ und der folgenden Eigenschaft (*):
(*) In jeder Menge von n natürlichen Zahlen gibt es (mindestens) zwei Zahlen, deren Summe oder deren Differenz durch 7 teilbar ist.

Lösung von weird:
Für $n = 4$ (und daher natürlich auch für $n = 2{,}3$) kann man eine solche n-elementige Teilmenge M von $\mathbb{N}$ noch leicht finden, z. B. $M = \{0{,}1{,}2{,}3\}$. Sind dann nämlich $x{,}y \in M$ und ist $x \neq y$, so gilt für sie $0 < |x \pm y| < 7$, was somit $x \pm y \equiv 0 \pmod 7$ definitiv ausschließt.

Um zu zeigen, dass dies für $n > 4$ nicht mehr möglich ist, betrachten wir nun die Partition $P = \{\{0\},\{1{,}6\},\{2{,}5\},\{3{,}4\}\}$ von $\{0{,}1,\ldots,6\}$ und dazu irgendeine Teilmenge M von $\mathbb{N}$ mit mindestens 5 Elementen.
Denken wir uns nun zu jedem Element in M jenes Element in $\{0{,}1,\ldots,6\}$ zugeordnet, zu der es mod 7 kongruent ist, so muss es dann nach dem Schubfachprinzip wegen $|M| \geq 5$ eine 2-elementige Klasse von P geben, deren zwei Elemente alle bei dieser Zuordnung „getroffen“ werden. Die Summe der ihnen entsprechenden Elemente von M ist aber dann nach Konstruktion von P durch 7 teilbar, q. e. d.

IV Runde 4

Aufgabe 031244:
Es bezeichne a_n die letzte Ziffer der Zahl $n^{(n^n)}$ (n sei eine natürliche Zahl $\neq 0$).
Beweisen Sie, dass die Zahlen a_n eine periodische Folge bilden und geben Sie diese Periode an!

Lösung von Henning Thielemann:
Die Einerstelle einer natürlichen Zahlen im dekadischen Positionensystem entspricht dem Rest bei der Division durch 10. Die Einerstelle der Potenz n^k hängt nur von k und der Einerstelle von n ab.
Wir stellen fest, dass die Folge der Einerstellen der Potenzen n^k für k als Laufvariable und festes n eine Periode bildet, wobei die Länge der Periode von (der Einerstelle von) n abhängt. Die kleinste gemeinsame Periode (das kleinste gemeinsame Vielfache aller Einzelperioden) ist vier.

n	$n_1 \mod 10$	$n_2 \mod 10$	$n_3 \mod 10$	$n_4 \mod 10$
0	0	0	0	0
1	1	1	1	1
2	2	4	8	6
3	3	9	7	1
4	4	6	4	6
5	5	5	5	5
6	6	6	6	6
7	7	9	3	1
8	8	4	2	6
9	9	1	9	1

Da die kleinste gemeinsame Periode die Länge vier besitzt, hängt die Einerstelle der Potenz n^k nur von den Restklassen von n modulo 10 und k modulo 4 ab. (Der Fall $k = 0$ ist ausgeschlossen!)
In der Aufgabenstellung ist $k = n^n$ gesetzt. Daher ist die Periode der Folge dwer Reste von n^n modulo 4, $n \in \mathbb{N}$ zu untersuchen.
Wir vermuten, dass der Rest des Ausdrucks a^b modulo 4 sowohl in a als auch in b eine Periode besitzt, für festgehaltenes b bzw. a. Dieser Rest bei Division durch 4 des Ausdruck a^b besitzt in a immer eine Periode der Länge 4, weil er nur vom Rest von a und von b abhängt (vergleiche mit Argument zur Einerstelle im Dezimalsystem).
Mithilfe einer Wertetabelle ermittelt man für a^b bezüglich b eine Periode der Länge zwei.

a	a_1 mod 4	a_2 mod 4	a_3 mod 4
0	0	0	0
1	1	1	1
2	2	0	0
3	3	1	3

Die vollständige Wertetabelle für die Reste von a^b modulo 4 besteht, abgesehen von der ersten Spalte, aus identischen Blöcken der Größe 4×2 auf deren Diagonale man die Werte der Folge der Reste modulo 4 von n^n, $n \in \mathbb{N}$ ablesen kann. Offensichtlich hat diese Folge die Periode vier.
Die vollständige Wertetabelle für die Reste von a^b modulo 10 besteht, wie oben zu sehen, aus identischen Blöcken der Größe 10×4. Die Einerstelle von $n^{(n^n)}$ entspricht in der m-ten Zeile der ersten Tabelle dem n-ten Diagonal-Eintrag des Rests von n^n modulo 4 gemäß zweiter Tabelle), wobei m die Einerziffer von n ist.
Die gesuchte Folge hat die Periode $\text{kgV}(10, 4) = 20$ und lautet:

$$(1, 6, 7, 6, 5, 6, 3, 6, 9, 0, 1, 6, 3, 6, 5, 6, 7, 6, 9, 0, \dots)$$

Alternativ-Lösung von cyrix:

Ist n gerade, so n^n durch 4 teilbar. Ist n dagegen ungerade, so ist $n \equiv \pm 1 \pmod 4$ und somit auch $n \equiv (\pm 1)^n = \pm 1 \pmod 4$. Insbesondere wiederholen sich die Reste von n^n modulo 4 mit einer Periode von 4. Es folgt, dass n^n und $(n + 20)^(n + 20)$ die gleichen Reste modulo 4 lassen.
Weiterhin haben n und n^{4k+1} jeweils die gleiche Endziffer, wie man leicht durch Einsetzen von $n \in \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, 5\}$ und Induktion nach k nachweist, da diese Endziffer nur von der von n abhängt.
Damit folgt, dass $a_n = a_{n+20}$ für alle n gilt, die Folge also periodisch mit einer Periodenlänge, die Teiler von 20 ist, ist.
Es ist $20 = 2^2 \cdot 5$. Wäre die Periodenlänge echt kleiner als 20, müsste sie also $2^2 = 4$ oder $2 \cdot 5 = 10$ teilen.
Die Werte $a_1 = 1$ und $a_5 = 5$ schließen den ersten Fall aus, die Werte $a_3 = 7$ und $a_{13} = 3$ den zweiten.
Damit ist die Folge (a_n) periodisch mit Periodenlänge 20.

Aufgabe 071244:
Sechzehn im Dezimalsystem geschriebene natürliche Zahlen mögen eine geometrische Folge bilden, von der die ersten fünf Glieder neunstellig, fünf weitere Glieder zehstellig, vier Glieder elfstellig und zwei Glieder zwölfstellig sind.
Man beweise, dass es genau eine Folge mit diesen Eigenschaften gibt.

Lösung von cyrix:
Seien die Folgenglieder mit a_0, a_1, …, a_{15} bezeichnet und es gelte (da die Folge geometrisch ist) $a_i = a_0 \cdot \left(\frac{p}{q}\right)^i$ mit teilerfremden natürlichen Zahlen p und q.
Da $a_{15} = a_0 \cdot \frac{p^{15}}{q^{15}}$ ist und p^{15} und q^{15} teilerfremd sind, muss q^{15} ein Teiler von a_0 sein. Es ist $a_0 < 10^9$.
Also muss $q < 4$ gelten, denn sonst wäre

$$a_0 \geq q^{15} \geq 4^{15} = 2^{30} = \left(2^{10}\right)^3 = 1024^3 > 1000^3 = 10^9$$

Wegen $a_9 < 10^{10}$ und $a_0 \geq 10^8$ ist $\left(\frac{p}{q}\right)^9 = \frac{a_9}{a_0} < 10^2$. Insbesondere ist also $\frac{p}{q} < 2$, da sonst $\left(\frac{p}{q}\right)^9 \geq 2^9 = 512 > 10^2$ wäre.
Als mögliche Quotienten $\frac{p}{q}$ aufeinander folgender Folgenglieder verbleiben also nur die rationalen Zahlen zwischen 1 und 2, welche einen Nenner von höchstens 3 besitzen. Dies sind $\frac{4}{3}$, $\frac{3}{2}$ und $\frac{5}{3}$.

Wegen $a_{14} \geq 10^{11}$ und $a_9 < 10^{10}$ ist $\left(\frac{p}{q}\right)^5 = \frac{a_{14}}{a_9} > 10$. Es ist aber $\left(\frac{4}{3}\right)^5 < \left(\frac{3}{2}\right)^5 = \frac{3^5}{2^5} = \frac{243}{32} < 10$, sodass als einzig möglicher Quotient $\frac{p}{q}$ der Wert $\frac{5}{3}$ verbleibt.

Damit gibt es eine natürliche Zahl n, sodass $a_i = n \cdot 3^{15-i} \cdot 5^i$ für alle $0 \leq i \leq 15$ gilt.
Wegen $n \cdot 3^6 \cdot 5^9 = a_9 < 10^{10}$ und $3^6 \cdot 5^9 = (3^2 \cdot 5^3)^3 = (9 \cdot 125)^3 = (1000+125)^3 > 1000^3 + 3 \cdot 1000^2 \cdot 125 = 10^9 + 375 \cdot 10^6 > 1{,}25 \cdot 10^9 = \frac{1}{8} \cdot 10^{10}$ ist $n < 8$.

Aus $10^8 \leq a_0 = n \cdot 3^{15}$ folgt mit $3^{15} = 3^6 \cdot 3 \cdot (3^4)^2 = 9^3 \cdot 3 \cdot 81^2 = 729 \cdot 3 \cdot 6561 < 750 \cdot 20000 = 1{,}5 * 10^7$, dass $n > 6$ ist, denn sonst wäre $a_0 \leq 6 \cdot 1{,}5 \cdot 10^7 = 9 \cdot 10^7 < 10^8$.
Damit folgt zusammen, dass die Folge genau aus den Zahlen $a_i = 7 \cdot 3^{15-i} \cdot 5^i$ mit $0 \leq i \leq 15$ bestehen muss.

Bemerkung: Die Anzahl der Stellen der einzelnen Folgenglieder kann man nun nachrechnen. Dafür eignet sich ein Rechenwerkzeug, kann aber auch von Hand nachvollzogen werden.

Aufgabe 081241:
Jeder nichtnegative periodische Dezimalbruch repräsentiert eine rationale Zahl, die auch in der Form $\frac{p}{q}$ dargestellt werden kann (p und q natürliche Zahlen und teilerfremd, $p \geq 0, q > 0$).
Nun seien a_1, a_2, a_3 und a_4 Ziffern zur Darstellung von Zahlen im dekadischen System. Dabei sei $a_1 \neq a_3$ oder $a_2 \neq a_4$.
Beweisen Sie!
Die Zahlen

$$\begin{aligned} z_1 &= 0,\overline{a_1a_2a_3a_4} = 0{,}a_1a_2a_3a_4a_1a_2a_3a_4... \\ z_2 &= 0,\overline{a_4a_1a_2a_3} \\ z_3 &= 0,\overline{a_3a_4a_1a_2} \\ z_4 &= 0,\overline{a_2a_3a_4a_1} \end{aligned}$$

haben in der obigen Darstellung p/q stets gleiche Nenner.

Lösung von StrgAltEntf:
Für Ziffern $a{,}b{,}c{,}d \in \{0{,}1{,}...{,}9\}$ bezeichnen wir mit $[abcd]$ die (bis zu) vierstellige Zahl

$$[abcd] := 1000a + 100b + 10c + d$$

Dann ist $10000z_1 - z_1 = [a_1a_2a_3a_4]$, also $z_1 = \frac{[a_1a_2a_3a_4]}{9999}$. Entsprechend ist $z_2 = \frac{[a_4a_1a_2a_3]}{9999}$, $z_3 = \frac{[a_3a_4a_1a_2]}{9999}$ und $z_4 = \frac{[a_2a_3a_4a_1]}{9999}$. Diese vier Brüche haben jetzt zwar denselben Nenner, jedoch liegen sie noch nicht unbedingt in gekürzter Form vor.

Die Primfaktorzerlegung der Nenner der vier Brüche lautet $9999 = 3^2 \cdot 11 \cdot 101$. Also lassen sich hier bestenfalls die Faktoren 3, (oder sogar 9), 11 und 101 kürzen.
Bekanntlich ist eine ganze Zahl genau dann durch 3 (bzw. 9) teilbar, wenn die Quersumme der Zahl durch 3 (bzw. 9) teilbar ist. Die Quersumme der vier Zähler ist jedoch identisch, also lässt sich bei allen vier Brüchen entweder 3 oder 9 oder keins von beiden kürzen.
Ebenfalls ist allgemein bekannt, dass eine ganze Zahl genau dann durch 11 teilbar ist, wenn die alternierende Quersumme der Zahl durch 11 teilbar ist. Die alternierende Quersumme der Zähler lautet hier $a_1 - a_2 + a_3 - a_4$ bzw. das Negative von diesem Wert. Also gilt auch hier: Entweder sind alle vier Zähler durch 11 teilbar oder keiner der Zähler. Und daher: Entweder lassen sich alle vier Brüche durch 11 kürzen oder keiner.

Schließlich gilt für $x := [abcd]$, dass x genau dann durch 101 teilbar ist, wenn $a = c$ und $b = d$. (Begründung: Wenn $[abcd] = 101y$, dann ist $y < 100$ und damit $y = 10e + f$ für gewisse $e{,}f \in \{0{,}1{,}...{,}9\}$ und daher $101y = [efef]$). Nach Voraussetzung ist jedoch der Fall, dass $a_1 = a_3$ und $a_2 = a_4$ ausgeschlossen, also ist keiner der vier Zähler durch 101 teilbar und daher bei keinem der vier Brüche der Faktor 101 kürzbar.

Zusammenfassend: Bei keinem der vier Brüche z_1,z_2,z_3,z_4 lässt sich in obiger Darstellung der Faktor 101 kürzen, und die Faktoren 3 (bzw. 9) und 11 lassen sich in allen oder in keinem der Brüche kürzen. Somit besitzen alle vier Brüche in gekürzter Darstellung denselben Nenner.

Aufgabe 111245:
Man ermittle alle dreistelligen natürlichen Zahlen x, geschrieben im dekadischen Positionssystem, für die gilt:
Hängt man an die Ziffernfolge der Zahl x rechts die Ziffernfolge der Zahl $x + 1$ an, so erhält man die Ziffernfolge einer sechsstelligen Quadratzahl.

Lösung von Kornkreis:
Wir bezeichnen die Zahl, die aus einem x durch das beschriebene Anhängen entsteht, als y. Im dekadischen System hat x die Form abc, d. h. $x = 100 \cdot a + 10 \cdot b + c$ mit $a,b,c \in \{0,...,9\}$. Zusätzlich gilt $a \neq 0$, da x dreistellig sein soll, und $x \neq 999$, da y sechsstellig sein soll.
Es ist

$$y = (10^3 + 1)(100 \cdot a + 10 \cdot b + c) + 1 = (10^3 + 1)x + 1$$

und dies soll stets gleich einer Quadratzahl n^2 mit $n \in \mathbb{Z}$ sein. Wegen $10^3 + 1 = 7 \cdot 11 \cdot 13$ und da 7,11,13 Primzahlen sind, folgt daraus $n \equiv \pm 1 \mod 7$, $n \equiv \pm 1 \mod 11$, $n \equiv \pm 1 \mod 13$. Dies liefert acht mögliche Kongruenzsysteme modulo 7, 11 und 13, die n erfüllen soll.

Da 7,11,13 teilerfremd sind, kann man diese Kongruenzsysteme mit dem chinesischen Restsatz für ganze Zahlen lösen (den man schnell und elementar beweisen kann und der daher sicherlich in der Olympiade benutzt werden kann, da es sich um die Klasse 12 und Stufe 4 handelt).

Nach dem chinesischen Restsatz gilt $n = \sum_{i=1}^{3} a_i e_i + k \cdot M$, wobei k eine beliebige ganze Zahl ist und a_i die Kongruenzen bezeichnet (hier 1 oder -1). Außerdem ist $e_i = s_i \cdot M_i$, mit $m_1 = 7$, $m_2 = 11$, $m_3 = 13$ und $M = m_1 \cdot m_2 \cdot m_3$, $M_i = M/m_i$. s_i ist eine ganze Zahl, die sich aus dem erweiterten euklidischen Algorithmus ergibt: Da m_i und M_i teilerfremd sind, gibt es ganze Zahlen r_i, s_i mit $r_i \cdot m_i + s_i \cdot M_i = 1$. Man findet mit dem erweiterten euklidischen Algorithmus $(r_1,s_1) = (41,-2)$, $(r_2, s_2) = (-33,4)$, $(r_3, s_3) = (6,1)$ und erhält mit dem chinesischen Restsatz die Lösungen für n für die acht Kongruenzsysteme zu $n \in \{1, -1, 573, -573, 727, -727, 155, -155\} + 7 \cdot 11 \cdot 13\,\mathbb{Z}$.

Wegen $10^5 < n^2 < 10^6$ folgt $316 < n < 1000$ oder $-1000 < n < -316$. Deshalb kommen für n nur folgende Zahlen in Frage (erinnere $7 \cdot 11 \cdot 13 = 1001$): 573, $-573 + 1001 = 428$, $-155 + 1001 = 846$, 727 (hier nur die positiven aufgezählt).
Quadrieren liefert $y = 328329$, $y = 183184$, $y = 715716$, $y = 528529$ und dementsprechend $x = 328$, $x = 183$, $x = 715$, $x = 528$, was alle gesuchten Lösungen sind.

Aufgabe 231246B:
Man untersuche, ob es eine natürliche Zahl k mit $k \geq 1$ und k natürliche $a_1, a_2, ..., a_k$, die nicht notwendig paarweise verschieden sind, gibt, so dass

$$a_1 + a_2 + ... + a_k = 1984 \qquad \text{und} \qquad \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_k} = 1$$

gilt. Falls das zutrifft, gebe man solche natürlichen Zahlen $a_1, a_2, ..., a_k$ an.

Lösung von OlgaBarati:
Hier macht es Sinn, eine Aufteilung in 2er Potenzen vorzunehmen, da deren Quotienten wiederum einfach zu addieren sind.
Mit der fortwährenden Teilung von 1984 : 2 ergibt sich das Produkt von $2^6 \cdot 31 = 64 \cdot 31$. Die Multiplikation $32 + 64 \cdot 30 = 1952$ ergibt eine Summe der Quotienten $\frac{1}{32} + \sum_1^{30} \frac{1}{64} = \frac{1}{2}$. Die Differenz von $1984 - 1952 = 32$ bildet mit der Aufteilung in $4 \cdot 8 = 32$ die Summe der Quotienten $\sum_1^4 \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$ und somit ist $k = 30+1+4 = 35$

$$\sum_1^{30} 64 + \sum_1^{1} 32 + \sum_1^{4} 8 = 1984$$

und

$$\sum_1^{30} \frac{1}{64} + \sum_1^{1} \frac{1}{32} + \sum_1^{4} \frac{1}{8} = 1$$

Aufgabe 251246A:
Eine im dekadischen Positionssystem dargestellte natürliche Zahl sei Spiegelzahl genannt, wenn ihre Ziffern symmetrisch aufgebaut sind, d. h., wenn die erste und die letzte, die zweite und die vorletzte usw. Ziffer übereinstimmt.
Zum Beispiel sind die Zahlen 358853, 27672, 44444 Spiegelzahlen.
Man untersuche, ob es zu jeder zweistelligen natürlichen Zahl a, deren letzte Ziffer von 0 verschieden ist, eine von 0 verschiedene Spiegelzahl gibt, die durch a teilbar ist.

Lösung von cyrix:
Wir zeigen im Folgenden, dass für jede solche Zahl a eine durch a teilbare Spiegelzahl existiert:

Es sei b die Zahl, die aus a entsteht, wenn man aus ihrer Primfaktorzerlegung alle Faktoren 2 und 5 (sofern enthalten) streicht. Damit ist $\text{ggT}(b{,}10) = 1$ und nach dem Satz von Euler-Fermat gilt $10^{\phi(b)} \equiv 1 \pmod b$, wobei $\phi(b)$ die zu b teilerfremden Restklassen modulo b angibt (also die Anzahl der natürlichen Zahlen $1 \leq n \leq b$ mit $\text{ggT}(b{,}n) = 1$). Offensichtlich ist $\phi(b) \geq 1$ für alle natürlichen Zahlen $b \geq 1$. Auch gilt offenbar für jede natürliche Zahl k, dass $10^{k \cdot \phi(b)} \equiv 1 \pmod b$ gilt.

Da a nicht durch 10 teilbar ist, ist $\frac{a}{b}$ eine reine Zweier- oder Fünferpotenz (oder 1). Wegen $a < 100$ und $2^7 = 128 > 100$ sowie $5^7 > 5^3 = 125 > 100$ ist eine natürliche Zahl genau dann durch a teilbar, wenn sie sowohl durch b teilbar ist als auch die aus ihren letzten 6 Ziffern gebildete Zahl durch $\frac{a}{b}$. (Dies nutzt die Teilerfremdheit von b und $\frac{a}{b}$ aus.)

Es sei c das kleinste Vielfache von $\phi(b)$, welches größer oder gleich 6 ist. Weiter definieren wir s die (ggf. um führende Nullen ergänzte) c-stellige Zahl mit Wert $\frac{a}{b}$ und t die c-stellige Zahl, die durch Spiegelung aus s entsteht. Dann besitzt t keine führende Null, da dies die Einerziffer von s ist. Wäre diese aber 0, so s und damit a durch 10 teilbar.
Weiterhin sei m die kleinste positive ganze Zahl, die $s + 10t + m \equiv 0 \pmod b$ erfüllt. Abschließend sei die natürliche Zahl n wie folgt definiert:

$$n = s + \sum_{k=1}^{m} 10^{k \cdot c} + t \cdot 10^{m \cdot c + 1}$$

Dann ist n eine Spiegelzahl: Bei der Definition der Zahl n als die angegebene Summe treten keine Summen von Ziffern an der gleichen Stelle auf: Da s nur c-stellig ist, aber alle weiteren Summanden der Summe mindestens den Faktor 10^c beinhalten, gibt es hier keine Überlappung.

Auch die einzelnen weiteren Summanden besitzen offenbar jeweils unterschiedliche Zehnerpotenzen und abschließend wird t mit der größten in der Definition vorkommenden Zehnerpotenz multipliziert. Also können wir die Ziffern einzeln vergleichen und es gilt nach Konstruktion, dass die erste Ziffer von n gleich der von t und damit der letzten von s und damit von n ist. Dies gilt auch für die entsprechenden zweiten, dritten, …, und c-ten Ziffern.

Darüber hinaus sind alle weiteren Ziffern von n gleich Null, es sei denn, die entsprechende Stelle wurde mit einem Summanden der Form $10^{k\cdot c}$ auf Eins gesetzt. Diese liegen aber symmetrisch zur Stelle mit Exponenten $\frac{m+1}{2}\cdot c$. Da t eine c-stellige Zahl ist, besitzt n genau $(m+1)\cdot c$ Stellen, sodass die Symmetrie genau „in der Mitte“ der Zahl liegt, es sich bei n also um eine Spiegelzahl handelt.

Weiterhin ist n durch $\frac{a}{b}$ teilbar, da s dadurch teilbar ist sowie jede Zehnerpotenz mit Exponenten von mindestens 6. Nach Definition ist aber $c \geq 6$, sodass diese Teilbarkeitsaussage für jeden Summanden in der Definition von n und damit auch für n selbst gilt.

Schließlich ist nach Konstruktion auch $n \equiv s + \sum_{k=1}^{m} 1 + 10 \cdot t \equiv 0 \pmod{b}$ und somit n durch b, also insgesamt auch durch a teilbar, □.

Aufgabe 321242:
Man beweise, dass ein Würfel für jede natürliche Zahl $n \geq 100$ in genau n Würfel zerlegt werden kann.

Lösung von Kornkreis:
Lemma 1: Wenn n eine positive Kubikzahl ist, kann man den Würfel immer in n Würfel zerlegen. (offensichtlich, man nehme dazu gleich große Würfel und ordne sie schichtweise quadratisch an, mit den Seitenflächen parallel zu denen des großen Würfels)

Bemerkung 1: Überdies kann man in so einer schichtweisen quadratischen Zerlegung in n gleichgroße Würfel eine Anzahl $k < n$ von Würfeln zusammenfassen, wenn k eine positive Kubikzahl ist (offensichtlich). Damit ergibt sich dann eine Zerlegung in $n-k+1$ Würfel. Dies werden wir später noch benutzen.

Lemma 2: Wenn man eine Zerlegung in n Würfel hat, so kann man immer eine Zerlegung in $n+7$ Würfel erzielen. Beweis: Zerlege einen der Teilwürfel in 8 Würfel (was nach Lemma 1 geht), damit ist die Anzahl der Teilwürfel um 7 gestiegen.

Bemerkung 2: Daraus folgt, dass die Behauptung der Aufgabenstellung gezeigt ist, wenn man für jedes $r \in \{0,...,6\}$ eine Zerlegung in $n \leq 100$ Würfel hat, mit $n \equiv r$ mod 7. Wende dazu iterativ Lemma 2 ein.

Die folgenden 7er-Reste von n für Zerlegungen in $n \leq 100$ Würfel können einfach erzielt werden (links steht der 7er-Rest, daneben n, zusammen mit der Rechenvorschrift, die der Zerlegung entspricht):

Rest 1: $1 = 1^3$; Rest 6: $27 = 3^3$

Um die anderen 7er-Reste zu erhalten, zerlegen wir den Würfel in 6^3 gleichgroße Teilwürfel und fasse einige dieser jeweils zu einem größeren Würfel zusammen (siehe Bemerkung 1).
Wir betrachten fünf verschiedene Möglichkeiten, bei denen wir jeweils 2, 3,..., 6 27er-Würfel zusammenfassen. Damit erhalten wir Zerlegungen in

$$6^3 - 2\cdot 27 + 2, \quad 6^3 - 3\cdot 27 + 3, \quad ..., \quad 6^3 - 6\cdot 27 + 6$$

Würfel. Da sowohl 27 als auch 6^3 den 7er-Rest -1 haben, erhalten wir damit die 7er-Reste 3, 5, 0, 2, 4. Wir müssen nur noch die Anzahl der Würfel weiter verkleinern, um unter 100 zu kommen, ohne den 7er-Rest zu ändern.

Dies geht, indem wir weiter einige 8er-Würfel zusammenfassen, wodurch sich die Gesamtzahl der Würfel immer jeweils um 7 verringert. Konkret erhalten wir die folgenden Zerlegungen (kodiert mithilfe der Rechenvorschrift; man überzeugt sich leicht, dass die angegebenen Zusammenfassungen tatsächlich möglich sind):

Rest 3: $59 = 6^3 - 2 \cdot 27 + 2 - 15 \cdot 8 + 15$,
Rest 5: $61 = 6^3 - 3 \cdot 27 + 3 - 11 \cdot 8 + 11$,
Rest 0: $49 = 6^3 - 4 \cdot 27 + 4 - 9 \cdot 8 + 9$,
Rest 2: $51 = 6^3 - 5 \cdot 27 + 5 - 5 \cdot 8 + 5$, Rest 4: $39 = 6^3 - 6 \cdot 27 + 6 - 3 \cdot 8 + 3$.

Da die größten dieser Zahlen, 59 und 61, 7er-Rest 3 bzw. 5 haben, und alle anderen n kleiner als 55 (mit 7er-Rest 6) sind, können wir (nach Bemerkung 2) für jedes $n \geq 55$ eine Zerlegung des Würfels in n Teilwürfel finden. Insbesondere folgt die Behauptung der Aufgabenstellung.

Aufgabe 341241:
Man beweise:
Wenn für eine von Null verschiedene reelle Zahl x die Zahl $x + \frac{1}{x}$ eine ganze Zahl ist, dann ist für dieses x und jede positive ganze Zahl n auch $x^n + \frac{1}{x^n}$ eine ganze Zahl.

Lösung von Kornkreis:
Beweis mit Induktion:
Für $n = 1$ gilt die Aussage nach Voraussetzung. Sei $n \geq 1$ und die Aussage für alle Exponenten 1,...,n bewiesen. Wir haben

$$\left(x^n + \frac{1}{x^n}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}} + x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}},$$

sodass $x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}}$ sich als Summe von Produkten ganzer Zahlen zusammensetzt. Induktiv folgt die Behauptung.