Thematische Aufgabensammlung

Aufgaben und Lösungen der I. bis IV. Runde der Klassenstufe 5 der Mathematik-Olympiaden von 1960 bis 1994

Zentrales Komitee für die Olympiaden Junger Mathematiker

unter Nutzung von Manuela Kugels
https://www.olympiade-mathematik.de/

zusammengestellt von Steffen Polster
https://mathematikalpha.de
Chemnitz, 2019/22

bearbeitet von Christian Hercher
Flensburg, 2022

I. Algebra

I.I. Gleichungen, Gleichungssysteme, Rechnungen

Runde 1

Aufgabe V00502:
Nimm eine dreistellige Zahl; allerdings mit der Einschränkung, dass die erste und letzte Ziffer nicht übereinstimmen; setze die Ziffer in umgekehrter Reihenfolge darunter und stelle die Differenz fest! Schreibe die Umkehrung dieser Zahl nochmals darunter! Addiere dann Umkehrung und Differenz! Führe die Aufgabe an zwei Beispielen durch! Was stellst du fest?

Lösung von Steffen Polster:
Die nachfolgenden Beispiele ergeben am Ende als Ergebnis 1089:

$$\begin{array}{cccc} & 4 & 5 & 2 \\ - & 2 & 5 & 4 \\ \hline & 1 & 9 & 8 \\ + & 8 & 9 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 8 & 9 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} & 6 & 9 & 1 \\ - & 1 & 9 & 6 \\ \hline & 4 & 9 & 5 \\ + & 5 & 9 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 8 & 9 \end{array}$$

Aufgabe V00503:
Zu einer gedachten Zahl wird 16 addiert, anschließend mit 7 multipliziert, dann 8 subtrahiert und schließlich mit 9 dividiert. Man erhält dann 22 Rest 4.
Wie heißt die gedachte Zahl?

Lösung von Steffen Polster:
x sei die gedachte Zahl. Dann ergibt sich mit den Operationen der Term

$$((x+16)\cdot 7-8):9$$

Dieser Term soll 22 mit einem Rest 4 werden, d. h. es gilt

$$((x+16)\cdot 7-8)=9\cdot 22+4$$

Schrittweises Zusammenfassen und Umstellen ergibt

$$\begin{aligned} ((x+16)\cdot 7-8)&=9\cdot 22+4 \\ (x+16)\cdot 7-8&=198+4 \\ (x+16)\cdot 7&=202+8 \\ x+16&=210:7 \\ x&=30-16=14 \end{aligned}$$

Die gedachte Zahl ist 14.

Aufgabe V00504:
Die dreifache Summe der beiden Zahlen 14076 und 1009 soll um die doppelte Summe der beiden Zahlen 8072 und 496 vermehrt werden.

Lösung von Steffen Polster:
Zu berechnen ist

$$3 \cdot (14076 + 1009) + 2 \cdot (8072 + 496) = 62391$$

Aufgabe V00506:
1; 4; 5; 7; 12; 15; 16; 18; 23; usf.
Diese Zahlenfolge ist nach einem bestimmten Gesetz aufgebaut. Setze diese Zahlenfolge bis über 50 hinaus fort!

Lösung von Steffen Polster:
Beginnend bei der 1 werden folgende Summanden addiert: 3, 1, 2, 5. Danach beginnt man wieder mit der 3 und addiert weiter 1, 2, 5, usw.

Damit ist die gesuchte Zahlenfolge:

$$1; 4; 5; 7; 12; 15; 16; 18; 23; 26; 27; 29; 34; 37; 38; 40; 45; 48; 49; 51; 56; \dots$$

Aufgabe 020511:
Beim Aufbau des Berliner Stadtzentrums entsteht am Alexanderplatz das „Haus des Lehrers". Zuerst wurde die Baugrube ausgehoben. Dabei mussten etwa 7100m^3 Boden abtransportiert werden:

a) Wie viel Muldenkipperladungen waren das, wenn ein Kipper 4m^3 Boden transportieren kann?
b) Wie lang wäre der für den gesamten Transport nötige „Muldenkipperzug" gewesen, wenn jeder Muldenkipper eine Länge von 3m hat?

Lösung von Steffen Polster:
a) Das Gesamtvolumen von 7100m^3 ist durch die Ladefähigkeit eines Kippers von 4m^3 zu teilen: $\frac{7100\text{m}^3}{4\text{m}^3} = 1775$.
Es waren 1775 Muldenkipperladungen.

b) Da jeder Kipper 3 m lang ist, ergibt sich für die Gesamtlänge aller Kipper $3\text{ m} \cdot 1775 = 5325\text{ m}$.

Aufgabe 030511:
Der VEB Simson Suhl produziert gegenwärtig täglich 235 Kleinstroller KR 50. Im Jahre 1958 betrug die Produktion dagegen nur 42 Kleinstroller täglich.
Wie viel Kleinstroller wurden im Jahre 1963 mehr produziert als im Jahre 1958? Die Anzahl der Arbeitstage eines Jahres sei dabei mit 300 angenommen.

Lösung von Steffen Polster:
1958: Da täglich 42 Kleinstroller an 300 Arbeitstagen produziert wurden, ergibt dies insgesamt $42 \cdot 300 = 12600$ Stück im Jahr 1958.
Da 1963 täglich 235 Roller hergestellt wurden, sind dies für das ganze Jahr $235 \cdot 300 = 70500$ Kleinstroller.
Die Differenz beider Produktionszahlen ist $70500 - 12600 = 57900$. Somit wurden 1963 insgesamt 57900 Kleinstroller mehr produziert als 1958.

Aufgabe 030512:
Nach der Kreisolympiade Junger Mathematiker wurde ein Pionier gefragt, wie viel Punkte er bekommen habe. Scherzhaft sagte er: „Wenn man zu der Zahl meiner Punkte 10 hinzufügt und die Summe verdoppelt, so fehlen mir noch 10 Punkte an 100.“

a) Wie viel Punkte erzielte der Thälmann-Pionier?
b) Wie hast du das Ergebnis gefunden?

Lösung von Steffen Polster:
a) Der Pionier erzielte 35 Punkte.

b) Die erreichten Punkte seien x. Dann ergibt sich die Gleichung: $(x + 10) \cdot 2 = 100 - 10$.
Über die äquivalenten Umformungen: $(x + 10) \cdot 2 = 90$ und weiter $x + 10 = \frac{90}{2} = 45$ ergibt sich die gesuchte Punktzahl $x = 35$.

Aufgabe 050511:
In drei Abteilen eines Eisenbahnwagens befinden sich 90 Fahrgäste. Würden aus dem ersten Abteil 12 Fahrgäste in das zweite und aus dem zweiten 9 Fahrgäste in das dritte umsteigen, dann wären in allen drei Abteilen gleich viel Personen.
Wie viel Fahrgäste waren ursprünglich in den einzelnen Abteilen?

Lösung von Steffen Polster:
Sind 90 Fahrgäste auf 3 Abteile gleichverteilt, so befinden sich in jedem Abteil 30 Fahrgäste.

Wenn aus dem ersten 12 in den zweiten wechseln, so sind im ersten zu Beginn 12 zu viel, d. h. 42 Fahrgäste.
Wenn 9 vom zweiten in den dritten wechseln müssen um 30 Personen zu erhalten, so fehlen zu Beginn im 3 Abteile diese 9, d. h. es sind vor dem Umsteigen 21 im dritten Abteil.
Damit sind zu Beginn im 2. Abteil 90 - 42 - 21 = 27 Fahrgäste.

Aufgabe 050514:
Gerd, Fred, Heinz und Werner befinden sich auf dem Weg zur Schule. Fred ist noch dreimal so weit entfernt von der Schule wie Gerd. Heinz hat bis zur Schule noch den vierfachen Weg von Gerd zurückzulegen.
Werner muss noch 2,4 km bis zur Schule laufen; das ist die doppelte Länge von Freds Weg.

a) Welche Strecken müssen die einzelnen Schüler noch zurücklegen, bis sie die Schule erreicht haben?
b) Wie viel Minuten vergehen, bis alle Schüler in der Schule angekommen sind, wenn jeder Schüler für je 100 m genau 90 sec braucht?

Lösung von Steffen Polster:
a) Die noch zu laufenden Wege der Schüler seien für Fred f, für Gerd g, für Heinz h und für Werner w. Dann gelten entsprechend der Aufgabenstellung die Gleichungen:

$$f = 3g \quad (1); \qquad h = 4g \quad (2); \qquad w = 2{,}4 \text{ km} \quad (3); \qquad w = 2f \quad (4)$$

Aus (3) und (4) folgt für Freds Weg 1,2 km. Damit hat nach (1) Gerd noch einen Restweg von 400 m zu laufen. Beziehung (2) ergibt für Heinz dann einen Weg von 1,6 km.

b) Da Werner noch am weitesten entfernt ist, treffen sich die Schüler erst wenn Werner ankommt. Für ihn gilt:
Werner braucht für 2,4 km: $24 \cdot 90\text{s} = 2160\text{s} = 36\text{min}$.

Damit vergehen noch 36 min, bis alle Schüler in der Klasse sind.

Aufgabe 060511:
Laut Jahresplan sind von einem Zementwerk im 2. Halbjahr 16400 t Zement zu produzieren. Im Juli wurden 2430 t, im August 2310 t, im September 2680 t, im Oktober 2830 t, im November 2940 t produziert.

a) Berechne die hinreichende kleinste Anzahl von Tonnen Zement, die im Dezember hergestellt werden müssen, damit das Werk seinen Plan erfüllt!
b) Berechne den Preis dieser Menge vom Dezember, wenn eine Tonne Zement 39,- MDN kostet!

Lösung von Steffen Polster:
a) Von Juli bis November wurden hergestellt (in Tonnen): $2430 + 2310 + 2680 + 2830 + 2940 = 13190$ Tonnen. Da das Ziel 16400 Tonnen sind, müssen im Dezember 16400 t - 13190 t = 3210 t produziert werden.

b) Mit $39 \cdot 3210 = 125190$ ergibt sich ein Preis von 125190 MDN für 3210 t Zement.

Aufgabe 060512:
Eine Strecke von 168 m Länge wurde in drei Teile geteilt. Die zweite Teilstrecke war dreimal so groß wie die erste, dagegen betrug die dritte Teilstrecke das Vierfache der ersten Teilstrecke.
Berechne die Längen der einzelnen Teilstrecken!

Lösung von Steffen Polster:
Ist die Länge der ersten Teilstrecke a, so ist die zweite Teilstrecke $3a$ lang und die dritte $4a$ lang. In der Summe ist dies $a + 3a + 4a = 168$ m, d. h. die erste Teilstrecke hat eine Länge von $a = 21$ m.
Die zweite Teilstrecke hat somit die Länge $3 \cdot 21\text{m} = 63\text{m}$ und die dritte Teilstrecke $4 \cdot 21\text{m} = 84\text{m}$.

Aufgabe 080513:
Annerose bringt aus dem Garten Äpfel und Pflaumen mit.
Als sie nach Hause kommt, wird sie von ihrem Bruder Gerd gefragt: „Wie viel Äpfel und wie viel Pflaumen hast du mitgebracht?“
Verschmitzt antwortet Annerose: „Es sind zusammen weniger als 50 Stück, und zwar dreimal so viel Pflaumen wie Äpfel. Wenn Mutter von den mitgebrachten Äpfeln und Pflaumen jedem von uns vier Geschwistern je einen Apfel und je eine Pflaume gibt, bleiben noch viermal so viel Pflaumen wie Äpfel übrig.“

Wie viel Äpfel und wie viel Pflaumen hatte sie mitgebracht?

Lösung von Steffen Polster:
Die Anzahl der Pflaumen sei p, die der Äpfel a.
Aus der Aufgabenstellung ergeben sich dann die Gleichungen

$$p - 4 = 4(a - 4) \qquad ; \qquad p = 3a$$

Setzt man die 2. Gleichung in die erste ein, wird

$$3a - 4 = 4a - 16 \qquad \Rightarrow a = 12; \quad p = 36$$

Annerose hat 12 Äpfel und 36 Pflaumen mitgebracht. Die Bedingung der Aufgabe, dass die Summe von p und a kleiner als 50 sein muss, ist erfüllt.

Aufgabe 100512:
In einem alten Buch mit lustigen mathematischen Knobeleien fand Annerose folgenden Vers:

Eine Zahl hab' ich gewählt,
107 zugezählt,
dann durch 100 dividiert
und mit 11 multipliziert,
endlich 15 subtrahiert,
und zuletzt ist mir geblieben
als Resultat die Primzahl 7.

Gibt es wenigstens eine Zahl, die den gegebenen Bedingungen genügt? Wenn ja, ermittle alle diese Zahlen!

Lösung von Steffen Polster:
Die gesuchte Zahl sei z. Dann ergibt sich die Gleichung:

$$(z + 107) : 100 \cdot 11 - 15 = 7 \qquad \Rightarrow \qquad z = 93$$

Die gesuchte Zahl lautet 93. Die Probe bestätigt diese Lösung.

Aufgabe 110511:
Bei einem Manöver unserer NVA legte ein Fahrzeug in 9 Teilstrecken eine Gesamtstrecke von 1780 km zurück. Die erste Teilstrecke betrug 220 km. Die restlichen 8 Teilstrecken waren untereinander gleich lang.
Berechne die Länge einer jeden dieser restlichen 8 Teilstrecken!

Lösung von Steffen Polster:
Die Länge der restlichen 8 Teilstrecken ist 1780 - 220 = 1560 km.
Damit hat ein Teilstück die Länge 1560 : 8 = 195, d. h. 195 km.

Aufgabe 120511:
Auf einer Geburtstagsfeier stellt Rainer seinen Gästen folgende - schon im Altertum bekannte - Knobelaufgabe:

Eine Schnecke beginnt am Anfang eines Tages vom Erdboden aus eine 10 m hohe Mauer emporzukriechen. In der folgenden Zeit kriecht sie während der ersten 12 Stunden je eines Tages um 5 m höher und gleitet während der restlichen 12 Stunden des gleichen Tages jeweils um 4 m nach unten.

Nach wie viel Stunden hat sie erstmals die gesamte Mauerhöhe erreicht?

Lösung von Steffen Polster:
Nach 12 Stunden erreicht die Schnecke eine Höhe von 5 m, rutscht aber in den darauffolgenden 12 Stunden wieder 4 m zurück.
Damit startet sie am 2. Tag in 1 m Höhe, am 3. Tag in 2 m Höhe, usw. Am 6. Tag beginnt sie in 5 m Höhe zu kriechen und erreicht nach 12 h die geforderten 10 Meter Höhe.

Da sie 5 Tage kroch und zurück rutschte, am 6. Tag aber nach 12 Stunden am Ziel ankam, benötigte sie $5 \cdot 24 + 12 = 132$ Stunden.

Aufgabe 130513:
Das Dreifache der Summe der Zahlen 38947 und 12711 soll durch das Sechsfache der Differenz der Zahlen 9127 und 8004 dividiert werden.
Wie lautet der Quotient?

Lösung von Steffen Polster:
Nach der Aufgabenstellung ist zu berechnen:

$$3 \cdot (38947 + 12711) : (6 \cdot (9127 - 8004)) = 3 \cdot 51568 : (6 \cdot 1123) = 154974 : 6738 = 23$$

Aufgabe 140511:
Ermittle die natürlichen Zahlen a, b, c, d, e, von denen folgendes bekannt ist:

(1) a ist die Hälfte von b.
(2) b ist die Summe von c und d.
(3) c ist die Differenz von d und e.
(4) d ist das Dreifache von e.
(5) e ist der vierte Teil von 56.

Lösung von Steffen Polster:
Die natürlichen Zahlen lasse sich von (5) nach (1) berechnen:
Aus (5) folgt sofort $e = \frac{56}{4} = 14$ und somit $d = 42$. Mit $d - e = c = 28$ wird $b = 70$ und abschließend $a = 35$.

Aufgabe 150513:
Eine Gruppe von Pionieren unternahm eine Radwanderung. Sie starteten innerhalb eines Ortes und erreichten nach 800 m Fahrt den Ortsausgang. Nachdem sie danach das Fünffache dieser Strecke zurückgelegt hatten, rasteten sie.
Nach weiteren 14 km machten sie Mittagspause. Die Reststrecke bis zu ihrem Fahrtziel betrug 2,5 km weniger als die bisher zurückgelegte Strecke.
Ermittle die Gesamtlänge der Strecke vom Start bis zum Ziel!

Lösung von Steffen Polster:
Addition der Teilstrecken ergibt

$$s = (800m + 5 \cdot 800m + 14000m) + (800m + 5 \cdot 800m + 14000m) - 2500m = 35100m$$

Die Radwanderung war 35 km und 100 m lang.

Aufgabe 150514:
An einem Waldlauf beteiligten sich insgesamt 81 Personen. Von den teilnehmenden Erwachsenen (18 Jahre oder älter) war die Anzahl der Männer doppelt so groß wie die der Frauen.
Die Anzahl der teilnehmenden Kinder und Jugendlichen (unter 18 Jahren) betrug die Hälfte der Anzahl der teilnehmenden Erwachsenen. Dabei waren es halb soviel Kinder (unter 16 Jahren) wie Jugendliche (16 Jahre oder älter, aber unter 18 Jahre).
Gib die Anzahlen der teilnehmenden erwachsenen Männer, Frauen sowie der teilnehmenden Kinder und Jugendlichen an!

Lösung von Steffen Polster:
Die Anzahl der Frauen, Männer, Kinder und Jugendlichen sei f, m, k und j. Dann ergeben sich aus der Aufgabenstellung die Beziehungen:

$$f + m + k + j = 81; \qquad m = 2f; \qquad m + f = 2 \cdot (k + j); \qquad j = 2k$$

Setzt man die vierte und zweite Gleichung jeweils in die erste und dritte ein, so wird

$$f + 2f + k + 2k = 3f + 3k = 81 \qquad ; \qquad 3f = 2f + f = 2 \cdot (3k)$$

Damit wird, mit erneutem Einsetzen: $6k + 3k = 81$, d. h. also $k = 9$ und weiter $f = 18$, $j = 18$, $m = 36$. Am Waldlauf nahmen 9 Kinder, 18 Jugendliche, 18 Frauen und 36 Männer teil.

Aufgabe 160511:
In einer Mathematik-Arbeitsgemeinschaft stellt Monika den Teilnehmern folgende Aufgabe:

„Jeder der Buchstaben A, L, P, H bedeutet eine einstellige natürliche Zahl. Dabei gilt:

(1) Die Zahl H ist doppelt so groß wie die Zahl P.

(2) Die Zahl A ist gleich der Summe aus der Zahl P und dem Doppelten der Zahl H.

(3) Die Zahl L ist gleich der Summe der Zahlen A, P und H.

Schreibt man die Zahlen $ALPHA$ in dieser Reihenfolge hintereinander, dann erhält man die (fünfstellige) Leserzahl der mathematischen Schülerzeitschrift „alpha“.

Wie groß ist diese Leserzahl?“

Lösung von Steffen Polster:
Als Gleichungen ergeben sich

$$H = 2P; \qquad A = P + 2H; \qquad L = A + P + H$$

Außerdem sind A, L, P, H Ziffern von 0 bis 9.
Setzt man die erste Gleichung in die zweite und dritte ein, wird $A = 5P$ und $L = A + 3P$ und folglich $L = 8P$. Da P und L kleiner als 10 sind, muss $P = 1$ und $L = 8$ sein und damit $H = 2$, $A = 5$.
Die „alpha“ hat somit 58125 Leser.

Aufgabe 160513:
Um zu ermitteln, welchen Durchschnittswert die Masse eines Maiskolbens von einem Versuchsfeld hat, hatten Schüler einer Mathematik-Arbeitsgemeinschaft sechs Kolben ausgewählt und gewogen.
Der größte Kolben hatte eine Masse von 850 g, drei Kolben hatten eine Masse von je 640 g, zwei Kolben von je 460 g.
Wie viel Gramm betrug hiernach die durchschnittliche Masse eines dieser sechs Maiskolben?

Lösung von Steffen Polster:
Die Masse der sechs Maiskolben ist $850 + 3 \cdot 640 + 2 \cdot 460 = 3690$ Gramm.
Als durchschnittliche Masse erhält man damit $3690\text{g} : 6 = 615\text{g}$.

Aufgabe 210512:
Die Pioniergruppen der Klassen 5a, 5b und 5c einer Schule fertigten für einen Solidaritätsbasar Buchhüllen an. Dabei fertigte die Klasse 5a genau 6 Hüllen mehr als die Klasse 5b an, und die Klasse 5c schaffte das Doppelte von dem, was die Klasse 5b anfertigte.
Insgesamt wurden von den Pionieren der drei Klassen 66 Buchhüllen hergestellt.
Wie viel Buchhüllen fertigte jede der drei Pioniergruppen an?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, die Klasse 5a hätte 6 Hüllen weniger angefertigt. Dann wären insgesamt 60 Buchhüllen hergestellt worden. Außerdem könnte man dann die Menge dieser 60 Buchhüllen so in vier gleichgroße Teilmengen zerlegen, dass die Klassen 5a und 5b je eine dieser Teilmengen angefertigt hätten und die Klasse 5c die Übrigen zwei Teilmengen.
Wegen $60 : 4 = 15$ und $2 \cdot 15 = 30$ hat die Klasse 5b daher genau 15 Hüllen und die Klasse 5c genau 30 Hüllen angefertigt, während die Klasse 5a wegen $15 + 6 = 21$ genau 21 Buchhüllen hergestellt hat.

Aufgabe 220512:
Mutter kauft ein. Sie hat genau 50 M bei sich. Eigentlich möchte sie drei Schals, eine Mütze und ein Paar Handschuhe kaufen, aber das Geld reicht hierfür nicht. Eine Mütze kostet 18 M, ein Schal halb so viel, ein Paar Handschuhe kosten 1,50 M mehr als ein Schal. Sie kauft drei Schals und ein Paar Handschuhe.
Wie viel Geld hat sie danach noch insgesamt übrig?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Ein Schal kostet halb so viel wie 18 M, also 9 M. Drei Schals kosten daher $3 \cdot 9\text{M} = 27\text{M}$.
Ein Paar Handschuhe kostet $9\text{M} + 1{,}50\text{M} = 10{,}50\text{M}$.
Somit hat die Mutter $27\text{M} + 10{,}50\text{M} = 37{,}50\text{M}$ bezahlt. Danach hat sie noch $50\text{M} - 37{,}50\text{M} = 12{,}50\text{M}$ übrig.

Aufgabe 230512:
Die Maßzahlen der (in Zentimeter gemessenen) Seitenlängen einen Dreiecks sind drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen. Der Umfang diesen Dreiecks beträgt 42 cm.
Wie lang sind seine drei Seiten?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Maßzahl des Dreiecksumfangs ergibt sich durch Addition seiner drei Seitenlängen. Nun ist die Summe dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen gleich dem Dreifachen der mittleren dieser drei Zahlen (denn die erste Zahl ist um 1 kleiner und die dritte um 1 größer als die mittlere Zahl).
Wegen $42 : 3 = 14$ beträgt mithin die mittlere Zahl im vorliegenden Fall 14, und die beiden anderen Zahlen betragen 13 und 15.

Die Seiten des Dreiecks, dessen Umfang 42 cm beträgt, sind also 13 cm, 14 cm und 15 cm lang. Diese drei Seitenlängen erfüllen auch die Bedingung, dass die Summe zweier Seitenlängen stets größer als die dritte Seitenlänge ist.

Aufgabe 250513:
Drei Kunden in einem Eisenwarengeschäft kauften Schrauben. Jede Schraube kostete 7 Pfennig. Der zweite Kunde kaufte vier Schrauben mehr als der erste Kunde. Der dritte Kunde kaufte doppelt so viele Schrauben wie der zweite Kunde. Die drei Kunden bezahlten dafür insgesamt 5 Mark und 32 Pfennig.
Wie viel bezahlte der dritte Kunde?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn der erste Kunde x Schrauben kaufte, dann kaufte der zweite Kunde $x+4$ Schrauben und der dritte Kunde $2 \cdot (x+4)$ Schrauben. Hierfür gilt $2 \cdot (x+4) = 2x + 8$.

Addiert man die drei Anzahlen, so ergibt sich $x + x + 4 + 2x + 8 = 4x + 12$, also kauften die drei Kunden insgesamt $4x + 12$ Schrauben.
Da sie insgesamt 5,32 M bezahlten und jede Schraube 7 Pfennig kostete, kauften sie wegen $532 : 7 = 76$ insgesamt 76 Schrauben. Also gilt $4x + 12 = 76$ und somit $x = 16$.

Der erste Kunde kaufte also 16 Schrauben, der zweite kaufte 4 Schrauben mehr, also 20 Schrauben, der dritte kaufte doppelt so viele, also 40 Schrauben. Wegen $40 \cdot 7 = 280$ bezahlte er hierfür 2,80 M.

Aufgabe 270512:
Eine Strecke von 240 mm Länge soll in zwei Teilstrecken zerlegt werden. Die größere Teilstrecke soll genau 47 mal so lang sein wie die kleinere.
Wie lang muss dann die kleinere Teilstrecke sein und wie lang die größere? Begründe deine Antwort!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Da die größere Teilstrecke genau 47 mal so lang sein soll wie die kleinere, müssen genau 48 solcher kleinen Teile zusammengesetzt eine Strecke ergeben, die genau so lang ist wie die ganze Strecke.
Wegen 240 : 48 = 5 muss also die kleinere Teilstrecke 5 mm lang sein, und wegen 240 - 5 = 235 muss die größere Teilstrecke 235 mm lang sein.

Aufgabe 290511:
Kerstin erhält am 30. April zu ihrem Geburtstag von mehreren Verwandten Geld geschenkt. Sie hat nun genau 35 Mark in ihrer Sparbüchse und nimmt sich vor, in den folgenden Monaten fleißig Altstoffe zu sammeln, so dass sie am Ende jedes Monats genau 5 Mark in die Sparbüchse stecken kann.
Am Ende welchen Monats werden, wenn ihr Vorhaben gelingt, erstmals 55 Mark in der Sparbüchse sein?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wegen 55 - 35 = 20 benötigt Kerstin zum Erreichen ihres Zieles noch genau 20 Mark. Da sie in jedem Monat 5 Mark sparen will, braucht sie wegen 20 : 5 = 4 noch genau 4 Monate dazu.
Der vierte Monat nach dem April ist der August. Die gewünschten 55 Mark werden also erstmals am Ende des Monats August in der Sparbüchse sein.

Aufgabe 300513:
Fritz, Hans und Petra haben am Ostseestrand einen Beutel voll Muscheln gesammelt. Sie wissen nicht, wie viel Muscheln sie im Beutel haben.

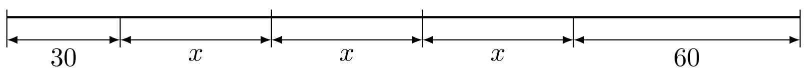
Fritz meint: „Wenn man siebenmal hintereinander je 12 Muscheln aus dem Beutel nimmt, dann bleiben noch mehr als 6 Muscheln übrig.“
Hans meint: „Wenn man aber neunmal hintereinander je 10 Muscheln aus dem Beutel nehmen wollte, dann würden die Muscheln dafür nicht ausreichen.“
Petra zählt nun die Muscheln nach und stellt fest: „Keiner von euch beiden hat recht.“

Wie viel Muscheln waren insgesamt im Beutel?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Hätte Fritz recht gehabt, dann hätten wegen $7 \cdot 12 + 6 = 90$ mindestens 91 Muscheln in dem Beutel sein müssen.
Hätte dagegen Hans recht gehabt, dann hätten es wegen $9 \cdot 10 = 90$ höchstens 89 Muscheln sein können.
Da keiner von beiden recht hatte, waren mithin genau 90 Muscheln in dem Beutel.

Aufgabe 320514:
Ein 6 m 30 cm langer Kupferdraht ist in drei Teile zu unterteilen. Der erste Teil soll 30 cm länger als der zweite Teil sein und der dritte Teil 60 cm länger als der zweite.
Wie lang wird jeder der Teile?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Aus der Abbildung wird ersichtlich:
Durch Subtraktion von 90 cm von der Gesamtlänge des Drahtes erhält man eine Länge, die dreimal so groß ist wie die Länge x des zweiten Teilstücks. Wegen 630 cm - 90 cm = 540 cm und 540 cm : 3 = 180 cm hat das zweite Teilstück eine Länge von 1 m 80 cm.

Wegen 180 cm + 30 cm = 210 cm und 180 cm + 60 cm = 240 cm haben das erste Teilstück eine Länge von 2 m 10 cm und das dritte Teilstück eine Länge von 2 m 40 cm.

Aufgabe 330512:
Bei einer Geburtstagsfeier wird ein Spiel mit blauen Spielmarken und ebenso vielen roten Spielmarken gespielt.
Nach einiger Zeit hatte jedes Kind 12 blaue und 15 rote Spielmarken bekommen, und es waren noch 48 blaue und 15 rote Spielmarken übrig.
Wie viele Kinder spielten dieses Spiel?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn jedes Kind noch 3 blaue Spielmarken bekommen würde, so müssten ebenso viele blaue wie rote Spielmarken übrigbleiben, d. h., 15 Stück. Es müssten dabei also 48 - 15 = 33 Spielmarken verteilt werden. Weil dabei jedes Kind 3 Spielmarken bekäme, nahmen 11 Kinder an dem Spiel teil.

Runde 2

Aufgabe 010522:
Bei einem Probeflug von Moskau zur sowjetischen Südpolar-Beobachtungsstation Mirny über insgesamt 25300 km legte ein Flugzeug vom Typ „IL 18“ die letzten 6700 km in zwei Etappen zurück. Dabei war die erste Etappe um rund 1700 km länger als die zweite.
Wie viel Kilometer betrugen die beiden Etappen?

Lösung von Steffen Polster:
Es sei a die Länge der ersten Etappe und b die Länge der zweiten Etappe. Damit ergeben sich die Gleichungen

$$a + b = 6700 \text{ km} \qquad ; \qquad a = b + 1700 \text{ km}$$

Einsetzen der ersten Gleichung in die zweite Gleichung ergibt

$$(b + 1700 \text{ km}) + b = 6700 \text{ km} \quad \Rightarrow b = 2500 \text{ km} \quad ; \quad a = 2500 \text{ km} + 1700 \text{ km} = 4200 \text{ km}$$

Die erste Etappe ist 4200 km und die zweite 2500 km lang.

Aufgabe 030521:
Die Kosmonautin Valentina Tereschkowa umkreiste mit dem Raumschiff „Wostok 6“ rund 48 mal die Erde. Durchschnittlich benötigte sie für jede Umkreisung rund 88 Minuten.
Wie lange dauerte der gesamte Weltraumflug?

Lösung von Steffen Polster:
Ohne Berücksichtigung der Start- und Ladezeit wird: Eine Umrundung dauert durchschnittlich 88 Minuten. Damit benötigen 48 Umrundungen $48 \cdot 88\text{min} = 4224\text{min}$, also 70 Stunden und 24 Minuten.

Aufgabe 060521:
In jeder von fünf Kisten befindet sich genau die gleiche Anzahl von Äpfeln. Entnimmt man jeder Kiste 60 Äpfel, bleiben in den Kisten insgesamt soviel Äpfel übrig, wie vorher in zwei Kisten waren.
Ermittle die Gesamtzahl aller Äpfel, die sich anfangs in den Kisten befanden !

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Aus den fünf Kisten wurden 300 Äpfel herausgenommen; denn $5 \cdot 60 = 300$.

Diese Menge entspricht dem Inhalt von drei Kisten, da nur soviel Äpfel übrig blieben, wie vorher in zwei Kisten Waren.
Folglich befanden sich in jeder Kiste anfangs genau 100 Äpfel. Insgesamt waren daher genau 500 Äpfel vorhanden.

Aufgabe 060523:
Die Zahl 97236 ist in sechs Summanden zu zerlegen.

Der erste Summand ist gleich dem neunten Teil dieser Zahl, der zweite Summand ist doppelt so groß wie der erste, der dritte ist um 12792 kleiner als der zweite Summand, der vierte dreimal so groß wie der dritte und der fünfte ist ebenso groß wie der dritte Summand.
Wie lauten die sechs Summanden?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Der erste Summand lautet 10804; denn $97236 : 9 = 10804$;
der zweite Summand lautet 21608; denn $10804 \cdot 2 = 21608$;
der dritte Summand lautet 8816; denn 21608 - 12792 = 8816;
der vierte Summand lautet 26448; denn $8816 \cdot 3 = 26448$;
der fünfte Summand lautet 8816 und
der sechste Summand lautet 20744; denn $10804 + 21608 + 8816 + 26448 + 8816 + 20744 = 97236$.

Aufgabe 060524:
Hans nimmt am Training der Sektion Leichtathletik seiner Schulsportgemeinschaft teil. Eine der Übungen besteht in rhythmischem Gehen mit anschließendem Nachfedern im Stand.
Die Länge der Übungsstrecke beträgt 30 m. Am Anfang und am Ende stehen Fahnenstangen. Hans legt die Strecke auf folgende Weise zurück:
Zwei Schritte vor, nachfedern, dann einen Schritt zurück, nachfedern, dann wieder zwei Schritte vor ... u.s.f., bis er die zweite Fahnenstange erreicht.

Welches ist die genaue Anzahl von Schritten, die er unter den angegebenen Bedingungen insgesamt macht, wenn seine Schrittlänge genau 5 dm beträgt?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Mit je 3 Schritten kommt Hans 50 cm vorwärts. Daher ist er nach genau $2 \cdot 3 \cdot 29$ Schritten = 174 Schritten 29 m vom Startpunkt entfernt.
Da er nach zwei weiteren Schritten die zweite Fahnenstange erreicht und dann nach Voraussetzung mit der Übung aufhört, legt er die Übungsstrecke mit genau 176 Schritten zurück.

Aufgabe 080522:
In einem Lagerraum befinden sich dreimal so viel Kilogramm Weizen wie in einem zweiten. Nachdem aus dem ersten 85000 kg und aus dem zweiten 5000 kg entnommen wurden, waren die Bestände gleich.
Wie viel Tonnen Weizen befanden sich vor der Entnahme in dem ersten und wie viel in dem zweiten Lagerraum?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es gilt: 85000 kg = 85 t und 5000 kg = 5 t.
Wenn nach der Entnahme von 85 t Weizen aus dem ersten und 5 t aus dem zweiten die Bestände in den beiden Lagerräumen gleich sind, befanden sich im ersten Lagerraum 80 t mehr als im zweiten; denn 85 t - 5 t = 80 t.

Da im ersten Lagerraum der Bestand anfangs dreimal so groß wie im zweiten war und nach der Entnahme in beiden die Bestände gleich sind, muss anfangs der Überschuss des ersten Raumes zweimal so groß wie der Bestand des zweiten Raumes gewesen sein.
Also befanden sich im zweiten Raum die Hälfte von 80 t, das sind 40 t, und im ersten 120 t Weizen; denn 40 t - 3 = 120 t.

Aufgabe 100524:
Eine Gruppe Junger Mathematiker führte eine Exkursion durch. Jeder Teilnehmer bezahlte 1,50 Mark für die Fahrkosten. Bei der Bezahlung des Sammelfahrscheines blieb ein Betrag von 1,10 Mark übrig.
Hätte jeder Teilnehmer 1,40 Mark eingezahlt, so hätten 1,10 Mark an den Kosten des Sammelfahrscheines gefehlt.
Ermittle die Anzahl der Teilnehmer an dieser Exkursion! Wie viel Geld erhielt jeder dieser Teilnehmer zurück, als der zu viel eingezahlte Betrag gleichmäßig unter ihnen verteilt wurde?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Da bei einem Teilnehmerbeitrag von 1,40 Mark genau 1,10 Mark zuwenig, bei einem Betrag von 1,50 Mark genau 1,10 Mark zu viel zusammengekommen wäre, so hätte das gesammelte Geld genau das Doppelte der Kosten des einen Sammelfahrscheines betragen, wenn jeder Teilnehmer 2,90 Mark eingezahlt hätte.

Folglich wären genau die Kosten des einen Sammelfahrscheines zusammengekommen, wenn jeder Teilnehmer 1,45 Mark bezahlt hätte. Jeder der Teilnehmer hatte also 0,05 Mark zu viel bezahlt.
Dieser Betrag wurde jedem zurückerstattet. Wegen 110 : 5 = 22 handelte es sich um 22 Junge Mathematiker, die an dieser Exkursion teilnahmen.

Aufgabe 120522:
Eine Oberschule führte für alle Schulklassen ein Schulsportfest durch. Nach dem Sportfest behauptete Gerald, es hätte insgesamt 325 Teilnehmer gegeben.
Günter, der wusste, dass die Anzahl der an dem Sportfest teilnehmenden Mädchen um genau 24 größer war als die der teilnehmenden Jungen, meinte, Geralds Behauptung sei falsch.
Weise nach, dass Günters Meinung richtig ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Günter konnte z. B. folgendermaßen schließen:
Die Differenz der Anzahl der Mädchen zu der der Jungen war eine gerade Zahl. Daher mussten die Anzahlen der Mädchen und die der Jungen entweder beide gerade oder beide ungerade sein.
In jedem dieser Fälle ist aber die Summe eine gerade Zahl, kann also nicht 325 sein.

Oder:
Die Anzahl aller Teilnehmer ist gleich der Summe aus der doppelten Anzahl der teilnehmenden Jungen und 24, und damit eine gerade Zahl. Günters Meinung ist also richtig.

Aufgabe 130521:
Eine Fischereigenossenschaft hatte an einem Tage nur Hechte, Barsche und Plötzen gefangen. Davon waren insgesamt 125 Plötzen. Ferner waren es doppelt soviel Barsche wie Hechte; die Anzahl der Hechte betrug ein Fünftel der Anzahl der Plötzen.
Stelle fest, wie viel Fische die Fischereigenossenschaft an diesem Tage insgesamt gefangen hatte!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Da die Anzahl der Hechte ein Fünftel der Anzahl der Plötzen betrug, wurden genau 25 Hechte gefangen.

Laut Aufgabe waren im Fang doppelt soviel Barsche wie Hechte, also genau 50 Barsche. Wegen 125 + 25 + 50 = 200 werden mithin insgesamt 200 Fische der genannten Arten gefangen.

Aufgabe 140522:
Anita und Peter sollten für ihre Gruppe aus dem Konsum 7 Flaschen Selterswasser holen. Sie hatten eine Geldsumme bei sich, die genau hierfür gereicht hätte. Sie konnten aber nur Brause bekommen, von der jede Flasche 15 Pfennige mehr kostete als eine Flasche Selterswasser. Für ihr gesamtes Geld erhielten sie nunmehr 4 Flaschen Brause.

Ermittle den Preis für eine Flasche Selterswasser und den Preis für eine Flasche Brause. Wie viel kosteten die 4 Flaschen Brause?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Anita und Peter bezahlten für die 4 Flaschen Brause wegen $4 \cdot 15 = 60$ insgesamt 60 Pfennige mehr, als sie für 4 Flaschen Selters bezahlt hätten.
Für diese 60 Pfennig hätten sie genau $7 - 4 = 3$ Flaschen Selterswasser kaufen können. Wegen $60 : 3 = 20$ kostete mithin jede Flasche Selterswasser 20 Pfennig, und folglich jede Flasche Brause 35 Pfennig.
Wegen $4 \cdot 35 = 7 \cdot 20 = 140$ kosteten die 4 Flaschen Brause 1,40 Mark.

Aufgabe 160522:
Zwei Junge Pioniere legten in ihrem Ruderboot stromabwärts in 10 Minuten eine Strecke zurück, deren Länge insgesamt 1 km und 200 m betrug.
Wie viel Zeit brauchten sie, um dieselbe Strecke gegen den Strom zurückzurudern, wenn sie dabei durchschnittlich in jeder Minute 40 m weniger zurücklegten als auf der Hinfahrt?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Auf der Hinfahrt legten die Pioniere eine Strecke von 1200 m in 10 Minuten zurück, in jeder Minute also durchschnittlich 120 m. Auf der Rückfahrt legten sie wegen 120 - 40 = 80 folglich in jeder Minute 80 m zurück.
Wegen 1200 : 80 = 15 brauchten sie daher für die Rückfahrt 15 Minuten.

Aufgabe 220523:
Über die 650 Schüler einer Schule liegen folgende Angaben vor:

500 Schüler sind Mitglied einer Sport-Arbeitsgemeinschaft.
400 Schüler sind Mitglied einer anderen Arbeitsgemeinschaft.
100 Schüler sind nicht Mitglied einer Arbeitsgemeinschaft.

Aus diesen Angaben soll ermittelt werden, wie viel der 650 Schüler sowohl Mitglied einer Sport-Arbeitsgemeinschaft als auch Mitglied einer anderen Arbeitsgemeinschaft sind.
Erkläre, wie man diese Anzahl finden kann!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wegen 650 - 100 = 550 sind 550 Schüler Mitglied mindestens je einer Arbeitsgemeinschaft.
Wegen 550 - 400 = 150 sind von diesen 550 Schülern 150 Mitglied nur in einer Sport-Arbeitsgemeinschaft.
Unter den 500 Mitgliedern von Sport-Arbeitsgemeinschaften sind wegen 500 - 150 = 350 folglich 350 Schüler auch Mitglied je einer anderen Arbeitsgemeinschaft.

Aufgabe 220524:
Ein Schüler kauft 5 gleiche Hefte und 7 gleiche Bleistifte, wofür er insgesamt 3,80 M bezahlt.
Wie teuer ist ein derartiges Heft und wie teuer ein derartiger Bleistift, wenn ein Bleistift doppelt so viel kostet wie ein Heft?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wegen $2 \cdot 7 + 5 = 19$ kosten die 7 Bleistifte und 5 Hefte ebenso viel wie 19 Hefte. Wegen $380 : 19 = 20$ kostet ein Heft folglich 20 Pf.
Wegen $2 \cdot 20 = 40$ kostet also ein Bleistift 40 Pf.

Aufgabe 260524:
Du kannst die mit zwei Würfeln von jemandem geworfenen beiden Augenzahlen nennen, ohne sie gesehen zu haben, wenn du folgende Rechenschritte (1) bis (4) ausführen und dir nur das Endergebnis nach Schritt (4) ansagen lässt:

(1) Die mit dem einen Würfel geworfene Augenzahl ist zu verdoppeln.
(2) Hierzu ist 5 zu addieren.
(3) Die erhaltene Summe ist mit 5 zu multiplizieren.
(4) Zum Produkt ist die mit dem anderen Würfel geworfene Augenzahl zu addieren.

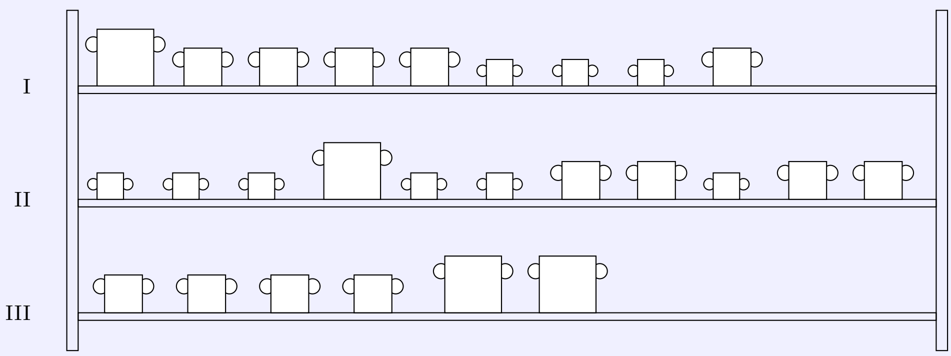
Wenn du nämlich vom Ergebnis des Schrittes (4) die Zahl 25 subtrahierst, so erhältst du diejenige Zahl, deren eine Ziffer die Augenzahl des einen Würfels und deren andere Ziffer die Augenzahl des anderen Würfels bezeichnet.
a) Überprüfe dies an einem selbstgewählten Beispiel!
b) Weise nach, dass das für jeden mit zwei Würfeln möglichen Wurf gilt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Wählt man zum Beispiel die Augenzahlen 3 und 5, dann führt die Ausführung der Schritte (1) bis (4) zu folgenden Ergebnissen:
(1) $2 \cdot 3 = 6$ (2) $6 + 5 = 11$ (3) $11 \cdot 5 = 55$ (4) $55 + 5 = 60$
Wenn man von 60 die Zahl 25 subtrahiert, erhält man wie behauptet mit 35 eine Zahl, deren eine Ziffer die Augenzahl des einen und deren andere Ziffer die Augenzahl des anderen Würfels angibt.

b) Für jeden möglichen Wurf sind die mit zwei Würfeln geworfenen Augenzahlen zwei natürliche Zahlen a und b, für die $1 \leq a \leq 6$ und $1 \leq b \leq 6$ gilt. Damit führt die Ausführung der Schritte (1) bis (4) zu folgenden Ergebnissen:
(1) $2 \cdot a$, (2) $2 \cdot a + 5$, (3) $5 \cdot (2 \cdot a + 5) = 10 \cdot a + 25$, (4) $10 \cdot a + 25 + b$

Wenn man von $10 \cdot a + 25 + b$ die Zahl 25 subtrahiert, so erhält man wie behauptet mit $10 \cdot a + b$ diejenige Zahl, deren eine Ziffer a die Augenzahl des einen und deren andere Ziffer b die Augenzahl des anderen Würfels angibt.

Aufgabe 270524:



Die Abbildung zeigt ein Regal, in dem Töpfe von genau drei verschiedenen Größen stehen. In jeder der Reihen I, II, III ergibt sich das gleiche Fassungsvermögen von genau 24 Litern.
Welches Fassungsvermögen hat jeweils ein Topf der verschiedenen Sorten?
Erkläre, wie sich für jede Topfsorte das Fassungsvermögen aus den Angaben über die Reihen I, II und III ergibt!
Überprüfe, dass bei deinen Ergebnissen sich wirklich für jede Reihe ein Fassungsvermögen von genau 24 Litern ergibt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Aus den Angaben ergibt sich durch Vergleich der Reihen I und II:
Ein mittelgroßer Topf fasst genau soviel wie drei kleine Töpfe.

Durch Vergleich der Reihen II und III ergibt sich: Ein großer Topf fasst genau soviel wie sechs kleine Töpfe.
Wegen $4 \cdot 3 + 2 \cdot 6 = 24$ folgt damit: Die Reihe III fasst genau soviel wie 24 kleine Töpfe. Da Reihe III genau 24 Liter fasst, ergibt sich:
Jeder kleine Topf fasst genau 1 Liter, jeder mittelgroße Topf fasst genau 3 Liter, jeder große Topf fasst genau 6 Liter.
Die Überprüfung der Reihen ergibt mit diesen Fassungsvermögen folgende Literzahlen:

Reihe I: $3 + 5 \cdot 3 + 6 = 24$,
Reihe II: $6 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + 6 = 24$,
Reihe III: $4 \cdot 3 + 2 \cdot 6 = 24$.

Aufgabe 280521:
In einer Gaststätte, die aus einem Speisesaal und einem Grillrestaurant besteht, sind im Speisesaal genau 135 Plätze für die Gäste vorhanden. Die Anzahl der Plätze im Grillrestaurant beträgt ein Drittel von der Anzahl der Plätze im Speisesaal.

a) Wie viel Plätze stehen in der Gaststätte insgesamt zur Verfügung?
b) Im Sommer kommen noch Plätze im Freien hinzu. Ihre Anzahl ist doppelt so groß wie die Anzahl der Plätze im Grillrestaurant.
Wie groß ist im Sommer das Platzangebot der Gaststätte?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Wegen $135 : 3 = 45$ und $135 + 45 = 180$ stehen in der Gaststätte insgesamt 180 Plätze zur Verfügung.
b) Wegen $45 \cdot 2 = 90$ und $180 + 90 = 270$ umfasst das Platzangebot der Gaststätte im Sommer 270 Plätze.

Aufgabe 290522:
Susanne besitzt 18 Spielwürfel. Einige davon sind rot, andere blau und die restlichen gelb. Sie stellt fest, dass die Anzahl der blauen Würfel um 1 kleiner ist als die doppelte Anzahl der roten Würfel.
Weiter bemerkt sie, dass das Dreifache der Anzahl der roten Würfel, wenn man es um 1 vermehrt, gerade die Anzahl der gelben Würfel ergibt.
Zeige, dass Susannes Feststellungen nur bei einer einzigen Möglichkeit für die drei Anzahlen der roten, blauen und gelben Würfel wahr sein können! Gib diese drei Anzahlen an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn x die Anzahl der roten Würfel ist, dann ist nach Susannes Feststellungen $2x - 1$ die Anzahl der blauen Würfel und $3x + 1$ die Anzahl der gelben Würfel.

Die Summe der drei Anzahlen ist 18, also folgt

$$x + 2x - 1 + 3x + 1 = 18 \qquad ; \qquad x = 3$$

Daraus folgt weiter $2x - 1 = 2 \cdot 3 - 1 = 5$ und $3x + 1 = 3 \cdot 3 + 1 = 10$.
Also können Susannes Feststellungen nur wahr sein, wenn die Anzahl der roten Würfel 3, die Anzahl der blauen Würfel 5 und die Anzahl der gelben Würfel 10 beträgt.

Aufgabe 320524:
In einem Haus mit Erdgeschoss und drei weiteren Etagen wohnen 72 Personen. In der zweiten Etage sind es 7 Personen mehr als in der ersten, in der dritten 6 Personen mehr als in der ersten.
Da im Erdgeschoss außer Wohnungen auch ein Geschäft ist, wohnen dort 12 Personen weniger als in der ersten Etage.
Wie viele Personen wohnen im Erdgeschoss und in jeder der weiteren Etagen?
Begründe, wie sich diese Personenzahlen aus den obigen Angaben herleiten lassen und überprüfe, dass bei den von dir angegebenen Zahlen diese Angaben zutreffen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Aus den Angaben folgt:
In der ersten Etage wohnen 12 Personen mehr als im Erdgeschoss.
In der zweiten Etage wohnen 12 + 7 = 19 Personen mehr als im Erdgeschoss.
In der dritten Etage wohnen 12 + 5 = 17 Personen mehr als im Erdgeschoss.
Würden diese hier genannten 12 + 19 + 17 = 48 Personen ausziehen, so blieben in jeder Etage ebenso viele Personen wie im Erdgeschoss; d. h., es blieb im ganzen Haus die vierfache Bewohnerzahl des Erdgeschosses.
Da dabei im Haus 72 - 48 = 24 Personen blieben, folgt: Im Erdgeschoss wohnen 24 : 4 = 6 Personen.

Hieraus und aus den eingangs genannten Vergleichsangaben folgt:
In der ersten Etage wohnen 6 + 12 = 18 Personen, in der zweiten Etage 6 + 19 = 25 Personen, in der dritten Etage 6 + 17 = 23 Personen.

Aufgabe 330521:
In einer kleinen Stadt stehen auf einer Straße am linken und am rechten Straßenrand insgesamt 47 Laternen. Auf jeder Straßenseite beträgt der Abstand zwischen je zwei benachbarten Laternen 35 m.
Am linken Straßenrand steht je eine Laterne genau am Anfang und am Ende der Straße.
Wie lang ist diese Straße?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Am linken Straßenrand muss genau eine Laterne mehr als am rechten Straßenrand stehen. Zählt man am linken Straßenrand die Laterne am Ende der Straße nicht mit, so stehen auf beiden Seiten der Straße gleich viele Laternen, also 46 : 2 = 23 Stück.
Also ist die Straße $23 \cdot 35\text{m} = 805\text{m}$ lang.

Aufgabe 340523:
Man kann jede natürliche Zahl 1, 2, 3, ... als eine Summe darstellen, in der jeder Summand eine 1 oder eine 2 ist. Zum Beispiel gibt es für die Zahl 3 unter Beachtung der Reihenfolge genau die Darstellungen

$$3 = 1 + 1 + 1 = 1 + 2 = 2 + 1$$

(a) Gib auch für jede der Zahlen 4, 5 und 6 alle Darstellungen an!
(b) Wie groß ist für jede der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 und 6 jeweils die Anzahl aller Darstellungen?
Finde eine Gesetzmäßigkeit, die für diese sechs Anzahlen gilt!
Wie viele Darstellungen muss es - wenn die von dir genannte Gesetzmäßigkeit sogar allgemein gilt - für die Zahl 10 geben?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(a) Die gesuchten Darstellungen sind:

$$4 = 1+1+1+1 = 1+1+2 = 1+2+1 = 2+1+1 = 2+2$$

$$5 = 1+1+1+1+1 = 1+1+1+2 = 1+1+2+1 = 1+2+1+1 = 2+1+1+1 = 1+2+2 =$$
$$= 2+1+2 = 2+2+1$$

$$6 = 1+1+1+1+1+1 = 1+1+1+1+2 = 1+1+1+2+1 = 1+1+2+1+1 =$$
$$= 1+2+1+1+1 = 2+1+1+1+1 = 1+1+2+2 = 1+2+1+2 = 1+2+2+1 =$$
$$= 2+1+1+2 = 2+1+2+1 = 2+2+1+1 = 2+2+2$$

(b) Als Anzahlen erhält man:

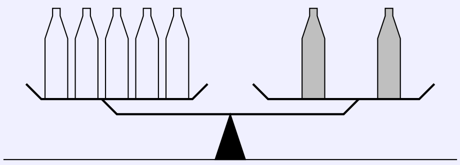
Darzustellende Zahl	1	2	3	4	5	6
Anzahl der Darstellungen	1	2	3	5	8	13

Für sie gilt folgende Gesetzmäßigkeit:
Die Summe zweier benachbarter Anzahlen ist gleich der darauffolgenden Anzahl. Wenn diese Gesetzmäßigkeit allgemein gilt, so erhält man als Fortsetzung:

Darzustellende Zahl	7	8	9	10
Anzahl der Darstellungen	8+13=21	13+21=34	21+34=55	34+55=89

Für die Zahl 10 muss es dann also genau 89 Darstellungen geben.

Aufgabe 340524:



Auf einer Waage sind fünf links stehende leere Mineralwasserflaschen mit zwei rechts stehenden vollen im Gleichgewicht (siehe Abbildung).

(a) Britta füllt zwei leere Flaschen mit Mineralwasser und erreicht dann, dass wieder Gleichgewicht eintritt, indem sie auf die rechte Waagschale leere Flaschen dazustellt.
Wie viele leere Flaschen sind das?
(b) Jan entleert dann eine der rechts stehenden Flaschen und nimmt von der linken Waagschale eine leere Flasche weg. Welche Waagschale neigt sich nun nach unten?
(c) Pia nimmt alle Flaschen von der Waage und stellt dann links zwei volle Flaschen und eine leere Flaschen auf, rechts eine volle Flasche und drei leere Flaschen.
Welche Waagschale neigt sich nun nach unten?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(a) Werden rechts noch drei leere Flaschen dazugestellt, so stehen sowohl links als auch rechts je zwei volle und drei leere Flaschen; also tritt Gleichgewicht ein. Die gesuchte Anzahl ist somit 3.

(b) Denkt man sich in der Abbildung des Aufgabentextes auf beiden Waagschalen das Gewicht von zwei leeren Flaschen entfernt, so folgt:
Drei leere Flaschen haben dasselbe Gewicht wie das Mineralwasser, das zwei Flaschen füllt. Daraus ergibt sich die Aussage:
Eine leere Flasche hat ein kleineres Gewicht als das Wasser für eine Flasche. Da Jan links die Flasche und rechts das Wasser wegnimmt und vorher Gleichgewicht herrschte, neigt sich nun die linke Waagschale nach unten.

(c) Die Aufstellung, die Pia vornimmt, kann stattdessen auch aus der nach (b) erreichten Aufstellung erhalten werden, indem man dort links und rechts je eine leere Flasche wegnimmt.
Daher neigt sich auch bei Pias Aufstellung die linke Waagschale nach unten.

I.II. Ungleichungen, der Größe ordnen

Runde 1

Aufgabe V00507:
Wie heißen Subtrahend und Minuend in der folgenden Subtraktionsaufgabe: $\star\star\star\star - \star\star\star = 1$.

Lösung von Steffen Polster:
Die einzige vierstellige Zahl, die bei der Subtraktion mit einer dreistelligen Zahl 1 ergibt, ist die 1000. Damit ist der Subtrahend 1000 und der Minuend 999.

Aufgabe 030515:
Von fünf Thälmann-Pionieren sind folgende zehn Altersvergleiche bekannt:
Doris ist jünger als Marga, Bärbel älter als Inge, Renate älter als Doris, Inge jünger als Marga, Bärbel jünger als Renate, Renate jünger als Marga, Doris älter als Inge, Marga älter als Bärbel, Inge jünger als Renate, Doris älter als Bärbel.

a) Wie lautet die Reihenfolge der fünf Mädchen nach ihrem Alter? Beginne mit der Jüngsten!
b) Welche angegebenen Vergleiche sind überflüssig? Warum?

Lösung von Steffen Polster:
a) Inge, Bärbel, Doris, Renate, Marga

b) Für die Bestimmung der Reihenfolge benötigt man nur die Aussagen:
Bärbel ist älter als Inge, Doris ist älter als Bärbel, Renate ist älter als Doris und Renate ist jünger als Marga. Damit ergibt sich die Anordnung nach dem Alter.

Nicht notwendig sind die Aussagen:
Doris ist jünger als Marga, Inge ist jünger als Marga, Bärbel ist jünger als Renate, Doris ist älter als Inge, Marga ist älter als Bärbel und Inge ist jünger als Renate.

Aufgabe 120514:
Erklärung: Mit der Schreibweise einer „fortlaufenden Ungleichung“ $a < b < c < d$ drückt man aus, dass die drei Ungleichungen $a < b$, $b < c$ und $c < d$ gelten. Es gelten dann auch die Ungleichungen $a < c$, $a < d$ und $b < d$.

Aufgabe:
Es seien w, x, y, z vier natürliche Zahlen, für die folgende Ungleichungen gelten:

(1) $z > x$
(2) $z < w$
(3) $w > x$
(4) $x < y$
(5) $y > w$

(6) $z < y$

Stelle fest, ob sich alle diese Ungleichungen in Form einer fortlaufenden Ungleichung schreiben lassen!

Lösung von Steffen Polster:
Schreibt man alle Ungleichungen so, dass das Zeichen „>“ verwendet wird, ergibt sich:

$$(1) \quad z > x, \quad (2) \quad w > z, \quad (3) \quad w > x, \quad (4) \quad y > x, \quad (5) \quad y > w, \quad (6) \quad y > z$$

Nach (5), (2) und (1) ist y die größte Zahl. Beginnt man mit (5) und setzt die restlichen Ungleichungen an, ergibt sich $y > w > z > x$.
Die Probe mit allen 6 Ungleichungen bestätigt das Ergebnis.

Aufgabe 140513:
Die Schüler Lutz, Dora, Erich, Nina, Bernd und Manja beteiligten sich an der Kreisolympiade Junger Mathematiker.
Dabei erzielte Bernd mehr Punkte als Erich, Lutz bekam zwar mehr Punkte als Dora, aber weniger als Erich. Nina erhielt eine kleinere Punktzahl als Dora. Manjas Punktzahl war größer als die Punktzahl Bernds.
Ermittle die Reihenfolge der Punktzahlen der genannten Schüler; schreibe sie mit der größten beginnend auf!

Lösung von Steffen Polster:
Werden die Punktzahlen von Lutz, Dora, Erich, Nina, Bernd und Manja mit l, d, e, n, b und m bezeichnet, gelten nach der Aufgabenstellung die Ungleichungen

$$b > e; \qquad e > l > d; \qquad d > n; \qquad m > b$$

Aus der ersten und vierten Ungleichung ergibt sich: $m > b > e$, aus den anderen beiden $e > l > d > n$. Beide Ungleichungen kann man zu $m > b > e > l > d > n$ zusammenfassen. Die Reihenfolge war: Manja, Bernd, Erich, Lutz, Dora, Nina.

Aufgabe 150512:
Ermittle alle positiven geraden Zahlen u, p, g, die folgende Ungleichungen erfüllen:

a) $42 > 5u > 19$
b) $11 < (3p + 3) < 22$
c) $23 > (3g - 3) \geq 3$,
und für die $(3g - 3)$ eine natürliche Zahl ist!

Gib die Lösungsmenge so an, dass die geraden Zahlen, die jeweils die betreffende Ungleichheit erfüllen, der Größe nach geordnet sind! Beginne stets mit der kleinsten!

Lösung von Steffen Polster:
a) $u = \{4, 6, 8\}$
b) $8 < 3p < 19 \Rightarrow p = \{4, 6\}$
c) $26 > 3g \geq 6 \Rightarrow g = \{2, 4, 6, 8\}$

Aufgabe 170511:
Die Oberschule „Wilhelm Pieck“ hat genau 314 Jungen und genau 322 Mädchen als Schüler. Ein Sechstel von ihnen gehört der FDJ an, alle anderen sind Mitglieder der Pionierorganisation „Ernst Thälmann“.
Ermittle die Anzahl der FDJler unter diesen Schülern und die Anzahl der Pioniere unter ihnen!

Lösung von Steffen Polster:
Insgesamt sind 314 + 322 = 636 Schüler in der Oberschule. Ein Sechstel sind Mitglieder in der FDJ, d. h. 636 : 6 = 106 Schüler. Pioniere sind es somit 636 - 106 = 530.
Es gibt in der Schule 106 FDJler und 530 Pioniere.

Aufgabe 170514:
Eine Strecke von 240 m ist so in vier Teilstrecken geteilt, dass folgendes gilt:
(1) Die erste Teilstrecke ist doppelt so lang wie die zweite Teilstrecke.
(2) Die zweite Teilstrecke ist so lang wie die Summe der Längen der dritten und vierten Teilstrecke.
(3) Die dritte Teilstrecke ist ein Fünftel der Gesamtstrecke.

Ermittle die Längen der einzelnen Teilstrecken!

Lösung von Steffen Polster:
Die vier Teilstrecken seien a, b, c, d. Es ergeben sich die Gleichungen:

$$a = 2b; \qquad b = c + d; \qquad 5c = 240 \text{ m}; \qquad a + b + c + d = 240 \text{ m}$$

Aus der dritten Beziehung folgt sofort $c = 48$ m. Setzt man in die vierte Gleichung für $c + d$ (aus der 2.) ein und zusätzlich noch (1), erhält man 240 m $= a + b + c + d = 2b + b + b = 4b$. Somit ist $b = 60$ m und damit auch $a = 120$ m.
d erhält man nun aus $d = 240 \text{ m} - a - b - c = 12m$.
Die Teilstrecken haben die Längen 120 m, 60 m, 48 m und 12 m.

Aufgabe 180514:
Auf einem Parkplatz stehen insgesamt 60 Personenkraftwagen der Typen „Trabant“, „Wartburg“, „Skoda“ und „Wolga“. Die Anzahl der Wagen vom Typ „Trabant“ ist doppelt so groß wie die Anzahl der Wagen der drei anderen Typen zusammengenommen. Außerdem gilt:
Es stehen dreimal soviel Wagen vom Typ „Wartburg“ wie von den Typen „Skoda“ und „Wolga“ zusammen auf dem Parkplatz und drei Wagen mehr vom Typ „Skoda“ als vom Typ „Wolga“.
Wie viel PKW jeden Typs stehen auf diesem Parkplatz?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Teilt man die Wagen „Trabant“ in zwei Gruppen gleicher Anzahl, so bilden alle übrigen Wagen eine dritte Gruppe derselben Anzahl. Jede Gruppe enthält daher 20 Wagen, also gibt es 40 „Trabant“-Wagen auf dem Parkplatz. Für die restlichen 20 Wagen gilt:

Teilt man die Wagen „Wartburg“ in drei Gruppen gleicher Anzahl, so bilden die nun noch verbleibenden eine vierte Gruppe derselben Anzahl. Also enthält jede dieser Gruppen 5 Wagen, folglich sind 15 „Wartburg“-Wagen auf dem Parkplatz. Für die verbleibenden 5 Wagen gilt:

Es handelt sich nur um Wagen der Typen „Wolga“ und „Skoda“. Dabei ist laut Aufgabe die Anzahl der „Skoda“-Wagen um drei größer als die der „Wolga“-Wagen. Das ist nur möglich, wenn 4 „Skoda“-Wagen und 1 „Wolga“-Wagen auf dem Parkplatz stehen.

Aufgabe 200513:
Annegret, Heidi, Katrin, Lore, Petra und Ruth bewohnen im Pionierlager gemeinsam ein Zelt und beschließen, die Reihenfolge für ihren Ordnungsdienst nach ihrem Alter festzulegen, beginnend mit dem ältesten Mädchen.

Alle sechs Mädchen sind im gleichen Jahr geboren, jedes an einem anderen Tag. Katrin ist älter als die fünf anderen Mädchen. Heidi hat einen Monat nach Annegret Geburtstag, sie ist aber älter als Petra.
Lore ist jünger als Annegret. Ruth ist älter als Heidi und hat einen Tag später Geburtstag als Lore.
In welcher Reihenfolge müssen die sechs Pioniere ihren Ordnungsdienst versehen, wenn sie ihren Beschluss verwirklichen wollen?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Da Katrin älter als alle fünf anderen Mädchen ist, gilt auch:

Katrin ist älter als Annegret.
Lore ist jünger als Annegret, also, gilt: Annegret ist älter als Lore.
Ruth hat später als Lore Geburtstag, also gilt: Lore ist älter als Ruth.
Ferner gilt: Ruth ist älter als Heidi.
Schließlich gilt: Heidi ist älter als Petra.
Folglich lautet die gesuchte Reihenfolge: Katrin, Annegret, Lore, Ruth, Heidi, Petra.

Aufgabe 320513:
Vergleiche der Körpergrößen ergaben:
Jan ist größer als Steffi, Anna kleiner als Ingo, Franziska kleiner als Jan, Steffi kleiner als Moritz, Franziska kleiner als Moritz, Franziska größer als Steffi, Steffi kleiner als Anna, Anna kleiner als Moritz, Jan kleiner als Anna, Moritz größer als Ingo.

(a) Ordne diese Kinder nach ihrer Größe, beginnend mit dem kleinsten Kind.
(b) Welche der angegebenen zehn Vergleiche hätten ausgereicht, um die Aufgabe eindeutig zu lösen? Warum?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(a) Steffi, Franziska, Jan, Anna, Ingo, Moritz.

(b) Die sechste, dritte, neunte, zweite und zehnte Aussage genügen, um in dieser Reihenfolge die gewünschte Ordnung zu erreichen.

Runde 2

Aufgabe 050522:
Für die fünf natürlichen Zahlen a, b, c, d, e gelten die folgenden Ungleichungen:
$a > e$; $b < c$; $c > e$; $d < e$; $a > b$; $b < d$; $c > a$; $a > d$;
Ordne diese Zahlen der Größe nach an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Man sucht zunächst die kleinste Zahl, indem man der Reihe nach ausscheidet:
Die kleinste Zahl ist nicht: a, c, e, d.
Also ist b die kleinste Zahl. Indem man so fortfährt, erhält man schließlich

$$b < d < e < a < c$$

Aufgabe 170522:
Auf drei Bäumen sitzen insgesamt 56 Vögel.
Nachdem vom ersten Baum 7 auf den zweiten und vom zweiten 5 Vögel auf den dritten Baum geflogen waren, saßen nun auf dem zweiten Baum doppelt so viel Vögel wie auf dem ersten und auf dem dritten doppelt so viel Vögel wie auf dem zweiten Baum.
Berechne, wie viel Vögel ursprünglich auf jedem der Bäume saßen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Bezeichnet man die Anzahl der Vögel, die am Ende auf dem ersten Baum sitzen, mit x, dann sitzen auf dem zweiten Baum $2x$ Vögel, auf dem dritten $4x$ Vögel. Das sind zusammen $7x$ Vögel.
Wegen $56 : 7 = 8$ müssen mithin zuletzt auf dem ersten Baum 8 Vögel, auf dem zweiten Baum 16 Vögel, auf dem dritten Baum 32 Vögel sitzen.

Auf dem ersten Baum saßen daher am Anfang 7 Vögel mehr als 8 Vögel, das sind 15 Vögel.
Auf dem zweiten Baum saßen zu Anfang noch nicht die später vom ersten Baum zugeflogenen 7 Vögel, dafür aber die dann zum dritten Baum geflogenen 5 Vögel; also waren es zu Anfang 2 Vögel weniger als 16 Vögel, das sind 14 Vögel.
Auf dem dritten Baum saßen am Anfang 5 Vögel weniger als 32 Vögel, das sind 27 Vögel.

Aufgabe 180523:
Vier Kooperative Abteilungen Pflanzenproduktion (KAP), die mit A, B, C und D bezeichnet sein sollen, besitzen zusammen 92 Traktoren.
Wenn B zur besseren Nutzung drei ihrer Traktoren an A und vier ihrer Traktoren an D weitergibt, dann verfügen alle vier KAP über die gleiche Anzahl von Traktoren.
Wie viele Traktoren besaß ursprünglich jede der vier KAP?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wegen $92 : 4 = 23$ verfügt nach dem Ausleihen jede der vier KAP über 23 Traktoren. Da C weder einen Traktor erhielt, noch einen Traktor abgab, besaß sie auch ursprünglich genau 23 Traktoren.
A besaß 3 Traktoren weniger als 23, also 20 Traktoren. D besaß 4 Traktoren weniger als 23, also 19 Traktoren. B besaß 7 Traktoren mehr als 23, also 30 Traktoren.

Aufgabe 190522:
In einem Bericht eines Schülers über einen 60 m-Lauf war zu lesen:

„Es war ein spannender Lauf unserer Mädchen. Astrid zog an Doris vorbei und konnte dann ihren Vorsprung bis ins Ziel behaupten. Auf den letzten Metern gelang es sogar noch Beate, Doris zu überholen. Das war zwar eine anerkennenswerte Leistung, jedoch kam Beate noch etwas später ins Ziel als Christine. Doris wurde nur teilweise den in sie gesetzten Erwartungen gerecht; immerhin konnte sie Christine hinter sich lassen.“

Können alle Aussagen dieses Berichtes gleichzeitig wahr sein? Begründe deine Entscheidung!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wären alle Aussagen des Berichtes wahr, so hätte Beate Doris „auf den letzten Metern überholt“, und Doris hätte Christine „hinter sich gelassen“. Also wäre Beate vor Christine ins Ziel gekommen.
Das steht im Widerspruch zu der Aussage, Beate wäre „etwas später ins Ziel gekommen als Christine“. Folglich können nicht alle Aussagen des Berichtes gleichzeitig wahr sein.

Aufgabe 270521:
Von Anja, Beate, Kerstin, Steffen und Maik wissen wir folgendes:

(1) Steffen ist kleiner als Kerstin und größer als Beate.
(2) Maik ist kleiner als Steffen und größer als Beate.
(3) Anja ist kleiner als Beate.

Ordne die Kinder nach ihrer Größe! Beginne mit dem größten Kind! Eine Begründung wird nicht verlangt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Reihenfolge lautet: Kerstin, Steffen, Maik, Beate, Anja.

Aufgabe 300522:
Über das Alter der fünf Personen Antje, Dirk, Manuela, Susanne und Thomas werden folgende Angaben gemacht:

(1) Antje ist älter als Manuela, aber jünger als Susanne.
(2) Thomas ist genau so alt wie Antje und Manuela zusammen.
(3) Dirk ist älter als Antje und Susanne zusammen.

a) Zeige, dass aus diesen Angaben eindeutig folgt, wer die jüngste und wer die älteste dieser fünf Personen ist!
b) Stelle fest, ob aus den Angaben auch eindeutig folgt, welche Reihenfolge für die Altersangaben der übrigen drei Personen vorliegt! Begründe deine Feststellung!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Bezeichnet man für jede Person das Alter mit dem Anfangsbuchstaben ihres Vornamens, so folgt aus den Angaben:

$$S > A > M \quad (1); \qquad T = A + M \quad (2); \qquad D > A + S \quad (3)$$

Nach (1) sind weder Susanne noch Antje die Jüngste, nach (2) auch Thomas nicht und nach (3) auch Dirk nicht. Also ist Manuela die Jüngste der fünf Personen.

Nach (1) sind weder Antje noch Manuela die älteste, nach (3) auch Susanne nicht. Also ist entweder Dirk oder Thomas die älteste der fünf Personen. Wegen (3) und $S > M$ (siehe (1)) gilt aber $D > A + M$, und nach (2) besagt dies $D > T$.
Folglich ist Dirk die älteste der fünf Personen.

b) Es gibt sowohl Altersangaben, für die (1), (2), (3) zutreffen und bei denen $S < T$ gilt, als auch Altersangaben, für die (1), (2), (3) zutreffen und bei denen $S > T$ gilt.
Zur Begründung genügt es, je ein Beispiel hierfür anzugeben und die genannten Aussagen zu bestätigen. Solche Beispiele sind etwa

$$D = 16, T = 13, S = 8, A = 7, M = 6 \text{ bzw. } D = 22, S = 14, T = 13, A = 7, M = 6$$

Daher folgt aus den Angaben nicht eindeutig, welche Reihenfolge für die Altersangaben von Antje, Susanne und Thomas vorliegt.

Aufgabe 310523:
Nach einem 100 m-Lauf, an dem 5 Sportler teilnahmen, fragt jemand, in welcher Reihenfolge sie ins

Ziel kamen. Gert erinnert sich:

(1) Achim kam eher ins Ziel als Christian.
(2) Zeitgleich mit Emil kam kein anderer ins Ziel, und zwar war Emil der Dritte oder der Vierte.
(3) Frank kam nicht eher ins Ziel als Bernd.
(4) Frank kam jedoch eher ins Ziel als Achim.

Nenne alle hiernach bestehenden Möglichkeiten der Reihenfolge! Zeige, dass nur bei den von dir genannten Möglichkeiten Gerts Aussagen wahr sind!
Hinweis: Beachte, dass es für die gesuchten Möglichkeiten der Reihenfolge einen Unterschied bedeutet, ob zwei Sportler gleichzeitig ins Ziel kamen oder nicht!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Mit A, B, C, E, F seien die Laufzeiten von Achim, Bernd, Christian, Emil bzw. Frank bezeichnet. Die Aussagen (4) und (1) können nur bei der Reihenfolge $F < A < C$ von Achim, Christian und Frank wahr sein.
Nach (3) gibt es für die Reihenfolge von Bernd und Frank nur die beiden Möglichkeiten $B < F$ bzw. $B = F$, für Achim, Bernd, Christian und Frank also nur $B < F < A < C$, (5) $B = F < A < C$. (6)
Sowohl zu (5) als auch zu (6) gibt es nur zwei Möglichkeiten, auch (2) zu erfüllen: Entweder ist E an die dritte Stelle zwischen F und A einzufügen oder an die vierte Stelle zwischen A und C. Also gibt es dafür, dass Gerts Aussagen wahr sind, nur die vier Möglichkeiten

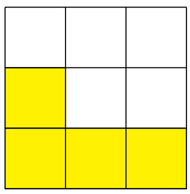
$$B < F < E < A < C, \quad B < F < A < E < C, \quad B = F < E < A < C, \quad B = F < A < E < C$$

I.III. Verhältnisse, Proportionalitäten

Runde 1

Aufgabe V00510:
Zeichne ein Quadrat mit einer Seitenlänge von 6 cm!
Schraffiere davon $\frac{4}{9}$ (vier Neuntel)!

Lösung von Steffen Polster:



Aufgabe 010511:
Im Rechenschaftsbericht an den XXII. Parteitag der KPdSU heißt es, dass an die Bevölkerung der Sowjetunion im Jahre 1953 insgesamt 1757000 t, im Jahre 1960 aber 4158000 t Fleisch und Fleischerzeugnisse verkauft wurden.
Wie viel Tonnen Fleisch und Fleischerzeugnisse wurden 1960 mehr verkauft als 1953?

Lösung von Steffen Polster:
Zur Lösung ist die Differenz der Massen der Fleisch und Fleischerzeugnisse von 1960 und 1953 zu berechnen. Es ist 4158000 t - 1757000 t = 2401000 t, d. h. es wurden 2,401 Millionen Tonnen mehr produziert.

Aufgabe 020512:
„Genau eine Million zweihundertneuntausendsechshundert Sekunden dauert es, bis wir uns wieder treffen", sagt Walter, der gern mit großen Zahlen rechnet, zu Rolf, als sie sich am 10. Mai um 12.00 Uhr verabschieden.
Wann treffen die beiden wieder zusammen?

Lösung von Steffen Polster:

$$1209600 \text{ s} = \frac{1209600}{60} \text{ min} = 20160 \text{ min} = \frac{20160}{60} \text{ h} = 336 \text{ h} = \frac{336}{24} \text{ d} = 14 \text{ d}$$

14 Tage nach dem 10. Mai 12.00 Uhr sind der 24. Mai 12.00 Uhr. Walter und Rolf treffen sich am 24. Mai 12.00 Uhr wieder.

Aufgabe 020513:
Zwei Pioniergruppen wollen an einem Sonntag eine Wanderung nach dem zwölf Kilometer entfernten Neuendorf machen. Die erste Gruppe will um 8.00 Uhr aufbrechen. Sie legt in jeder Stunde 4 km zurück.
Die andere Gruppe macht eine Radwanderung und kann in jeder Stunde 12 km schaffen.
Wann muss sie aufbrechen, wenn beide Gruppen gleichzeitig in Neuendorf eintreffen wollen?

Lösung von Steffen Polster:
Die erste Gruppe wandert 4 km pro Stunde und erreicht das Ziel in 12 km Entfernung in 3 Stunden, d. h. sie erreichen Neuendorf um 11.00 Uhr.
Die zweite Gruppe legt 12 km pro Stunde zurück und benötigt nur 1 Stunde bis zum Ziel. Damit mussen sie um 10.00 Uhr in Neuendorf starten.

Aufgabe 070512:
Ein Bezirk plante, die Instandsetzung dreier Straßen durchzuführen. Die erste Straße hat eine Länge von 8 km, die zweite eine Länge von 7 km, die dritte eine Länge von 6 km. Für jeden Kilometer wurden 3000 MDN Kosten vorgesehen.
Eine der drei Straßen war nur wenig beschädigt, so dass man für diese mit der Hälfte der Kosten pro Kilometer auskam, während bei jeder der beiden anderen genau die eingeplante Summe verwendet wurde. Die Gesamtkosten für die Instandsetzung betrugen 51000 MDN.
Für welche der drei Straßen wurde nicht die eingeplante Summe verwendet?

Lösung von Steffen Polster:
Hätte man alle Straßen vollständig erneut, wären Kosten entstanden von

$$(8 + 7 + 6) \text{ km} \cdot 3000 \frac{\text{MDN}}{\text{km}} = 63000 \text{ MDN}$$

Da nur 51000 MDN benötigt wurden, blieb die Differenz 63000 MDN - 51000 MDN = 12000 MDN über. Da eine Straße nur 1500 MDN je Kilometer Kosten verursachte, muss diese $\frac{12000}{1500} = 8$ km sein. Der dritte Streckenabschnitt benötigte nur die halben Kosten.

Aufgabe 080511:
Auf einer Großbaustelle sind drei Bagger eingesetzt. Bei gleichbleibender Leistung befördern sie in 20 min insgesamt 90 m^3 Erde. Für die Bedienung dieser drei Bagger ist ein Kollektiv von insgesamt sechs Arbeitern notwendig. Wir nehmen an, dass an Stelle dieser drei Bagger sechs Erdarbeiter diese Arbeit verrichten müssten.
Nach wie viel Arbeitstagen würden sie frühestens die 90 m^3 Erde ausgehoben haben, wenn jeder der Erdarbeiter an jedem Arbeitstag durchschnittlich 5 m^3 Erde bewegt?

Lösung von Steffen Polster:
Wenn 6 Erdarbeiter jeden Tag 5 m^3 Erde ausheben, so schaffen sie je Tag 30 m^3. Damit benötigen sie für 90 m^3 3 Tage.

Aufgabe 120513:
Von einem Bahnhof wurden mit zwei LKW Kartoffeln abtransportiert, und zwar insgesamt 170 t. Der erste LKW, der bei jeder Fahrt mit 4 t Kartoffeln beladen wurde, führte insgesamt 20 Fahrten aus.

Wie viel Fahrten führte der zweite LKW insgesamt aus, wenn er bei jeder Fahrt mit 5 t der Kartoffeln beladen wurde, die der erste LKW nicht abtransportiert hatte?

Lösung von Steffen Polster:
Der erste LKW transportiert in 20 Fahrten $20 \cdot 4 = 80$ t Kartoffeln.
Vom Rest von 170 t - 80 t = 90 t transportiert der 2. LKW je Fahrt 5 Tonnen, d. h. $90 : 5 = 18$. Der 2. LKW muss 18 mal fahren.

Aufgabe 150511:
Im Jahre 1974 erzielten 187 Schiffe der DDR-Handelsflotte eine Transportleistung von insgesamt 1080000 t.

Berechne zur Veranschaulichung dieser Leistung, welche Länge ein Güterzug bei gleicher Transportleistung haben müsste!
Dabei sei angenommen, dass dieser Zug aus Güterwagen mit einer Tragfähigkeit von je 25 t besteht und dass jeder dieser Wagen (einschließlich der Koppelvorrichtung) eine Länge von 12 m besitzt.
Wie viel Güterzüge zu je 60 dieser Güterwagen hätten 1974 täglich fahren müssen, um die gleiche Transportleistung zu erzielen (das Jahr sei zu 360 Tagen gerechnet)?

Lösung von Steffen Polster:
Der Güterzug besteht aus $10800000t : 25t = 432000$ Güterwagen, die damit $432000 \cdot 12m = 5184000m = 5184km$ lang sind.

Jeden Tag hätten $10800000t : 360 = 30000t$ transportiert werden müssen. Ein Zug mit 60 Güterwagen zu je 25 t Tragfähigkeit transportiert $60 \cdot 25t = 1500t$. Folglich müssten täglich $30000t : 1500t = 20$ solcher Züge fahren, um die Leistung der Handelsschiffe zu erbringen.

Aufgabe 280513:
Vier gleich große Kisten mit gleichem Inhalt haben zusammen eine Masse von 132 kg.
Welche Masse hat dann der Inhalt einer Kiste, wenn die Masse aller vier leeren Kisten zusammen 12 kg beträgt?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wegen 132 - 12 = 120 beträgt die Gesamtmasse des Inhalts der vier Kisten 120 kg. Folglich beträgt wegen $120 : 4 = 30$ die Masse des Inhalts je einer Kiste 30 kg.

Runden 2 & 3

Aufgabe 010521:
Im Jahre 1961 wurden in der DDR 70000 t Schlachtvieh und Geflügel, 115000 t Milch und 300000000

Eier mehr auf den Markt gebracht als im Jahre 1960. Die Einwohnerzahl unserer Republik beträgt rund 17000000.
Wie viel Schlachtvieh und Geflügel, wie viel Milch und wie viel Eier konnte jeder Bürger unserer Republik im Jahre 1961 zusätzlich verbrauchen? Runde auf volle Kilogramm bzw. volle Stückzahlen!

Lösung von Steffen Polster:
Für jedes Produkt ist der Quotient aus der produzierten Menge und der Einwohnerzahl zu berechnen:

Schlachtvieh und Geflügel: $\frac{70000}{17000000}$ t $= \frac{70000000}{17000000}$ kg ≈ 4 kg;

Milch: $\frac{115000}{17000000}$ t $= \frac{115000000}{17000000}$ kg ≈ 7 kg;

Eier: $\frac{300000000}{17000000}$ Stück ≈ 18 Stück.

Für jeden Bürger waren im Jahre 1961 durchschnittlich rund 4 kg Schlachtvieh und Geflügel, rund 7 kg Milch und rund 18 Eier zusätzlich verfügbar.

Aufgabe 020521:
Während der Herbstferien waren viele Oberschüler im Ernteeinsatz. Dabei sammelte jeder der 1200 Schüler eines Stadtbezirkes durchschnittlich 8 dt Kartoffeln täglich. Die Schüler arbeiteten 4 Tage.

a) Wie viel Kartoffeln wurden von den Schülern dieses Stadtbezirkes insgesamt gesammelt? (Angabe in dt)
b) Wie viel Familien können von diesem Vorrat Kartoffeln erhalten, wenn der Jahresbedarf je Familie 250 kg beträgt?

Lösung von Steffen Polster:
a) $1200 \cdot 8 \frac{\text{dt}}{\text{d}} \cdot 4 \text{ d} = 38400$ dt. Von den Schülern wurden insgesamt 38400 dt Kartoffeln geerntet.
b) Die Gesamtmenge ist durch die Menge 250 kg = 2,5 dt je Familie zu teilen, d. h. $\frac{38400 \text{ dt}}{2{,}5 \text{ dt}} = 15360$. 15360 Familien können versorgt werden.

Aufgabe 020522:
Die Erdölleitung „Trasse der Freundschaft“ wird etwa 4000 km lang sein. In jeder Stunde wird die DDR durch diese Leitung 540 t Erdöl erhalten.

a) Wie viel Tonnen sind das in einer Minute?
b) Wie viel Kilogramm sind das in einer Sekunde?

Lösung von Steffen Polster:
a) Wenn in einer Stunde 540 t Erdöl transportiert werden, so sind dies je Minute $\frac{540}{60} = 9$ Tonnen.
b) 9 t sind 9000 kg, so dass $\frac{9000}{60} = 150$ kg je Sekunde transportiert werden.

Aufgabe 020523:
Petra spielt mit Werner eine Partie Schach.
Als sie fertig sind, fragt Werner: „Wie lange haben wir eigentlich gespielt?“
Petra antwortet: „Ich weiß es nicht, aber ich habe aus dem Fenster gesehen und gezählt, dass die Straßenbahn genau zehnmal in dieser Zeit an unserem Hause in Stadtrichtung vorbeifuhr. Die erste Bahn kam, als wir mit dem Spiel anfingen, und die zehnte, als wir gerade fertig waren.“
(Die Bahn fährt alle 20 Minuten.)
Wie lange haben Petra und Werner gespielt?

Lösung von Steffen Polster:
Zwischen der ersten vorbeifahrenden Straßenbahn und der zehnten Bahn liegen $9 \cdot 20 = 180$ Minuten, da die Bahnen im Abstand von 20 Minuten fahren.
Petra und Werner haben somit 180 Minuten = 3 Stunden gespielt.

Aufgabe 030522:
In einem volkseigenen Betrieb wurden bis Ende Juni von einem bestimmten Maschinenteil täglich 12 Stück hergestellt. Durch den sozialistischen Wettbewerb gelang es, täglich 2 Stück mehr zu produzieren.

a) Wie viel Maschinenteile dieser Art wurden nunmehr monatlich – 26 Arbeitstage – angefertigt?
b) Wie viel solche Teile können dadurch bis zum Jahresende über den Plan hinaus produziert werden?

Lösung von Steffen Polster:
a) Bei 26 Arbeitstagen in einem Monat, an denen jeweils 14 Stück je Tag hergestellt wurden, sind dies für den ganzen Monat: $26 \cdot 14$ Stück = 364 Stück.

b) Ein Halbjahr besteht aus 6 Monaten. Jeden Tag (26 Tage je Monat) werden 2 Stück mehr produziert, als der Plan vorsieht.
Somit ergibt sich: $6\text{Monate} \cdot 26\text{Tage pro Monat} \cdot 2\text{Stück pro Tag} = 312\text{Stück}$. Es werden 312 Maschinenteile über den Plan produziert.

Aufgabe 040521:
Zwei Dreher übernahmen am 11. Januar 1965 (früh) den Auftrag, 1100 Werkstücke herzustellen. Der erste Dreher stellt 19 Werkstücke je Tag her, der zweite täglich 3 Stück mehr als der erste.
An welchem Tage werden sie bei gleichbleibender Leistung je Tag mit dieser Arbeit fertig, wenn an den Sonntagen nicht, an den Sonnabenden ausnahmsweise voll gearbeitet wird?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
An jedem Tage werden 41 Werkstücke hergestellt.
Wegen $26 \cdot 41 = 1066$ und $27 \cdot 41 = 1107$ werden die Dreher im Laufe des 27. Tages fertig.
Dieser Tag ist der 10. Februar 1965.

Aufgabe 050523:
Für jeden von 600000 Einwohnern Leipzigs werden 125 kg Kartoffeln eingekellert.

a) Berechne die bereitzustellende Menge in Tonnen!
b) Welches ist die größte Anzahl von Güterwagen mit je 15 t Ladefähigkeit, die mit dieser Menge voll beladen werden können?
c) Wie viel Tonnen werden durchschnittlich an jedem Tag ausgeliefert, wenn der erste Auslieferungstag der 17.9. und der letzte Auslieferungstag der 14.10. ist und auch an Sonn- und Feiertagen ausgeliefert wird?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Die bereitzustellende Kartoffelmenge beträgt in Tonnen $(600000 \cdot 125) : 1000 = 75000$.

b) Die größte Anzahl der erwähnten Güterwagen, die mit 75000 t Kartoffeln voll beladen werden können, beträgt $75000 : 15 = 5000$.

c) Da an 28 Tagen ausgeliefert wird, beträgt die an jedem Tag durchschnittlich ausgelieferte Menge in Tonnen: $75000 : 28 \approx 2679$ Tonnen je Tag.

Aufgabe 070521:
Die Schüler einer Klasse sammelten insgesamt 336 kg Altpapier. Aus 1 kg Altpapier stellt man in einer Papierfabrik genau 700 g reines weißes Papier her und aus je 30 g von diesem ein Schreibheft. (In der Produktion wird weißes Papier nicht unmittelbar aus Altpapier hergestellt. Durch Zusatz von Altpapier wird aber eine entsprechende Menge Rohstoff eingespart.)

Gib die größtmögliche Anzahl von Heften an, die aus dem gesammelten Altpapier hergestellt werden kann!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Berechnung der Menge des reinen weißen Papiers: Wegen

$$336 \cdot 700 = 235200 \quad \text{und} \quad 235200 \text{ g} = 235{,}2 \text{ kg}$$

können aus 336 kg Altpapier höchstens 255,2 kg weißes Papier hergestellt werden.

Berechnung der Menge von Schreibheften:
Wegen 235200 : 30 = 7840 können aus 336 kg Altpapier höchstens 7840 Schreibhefte hergestellt werden.

Aufgabe 090522:
In einem HO-Bekleidungshaus kauften drei Kunden von dem gleichen Stoff. Der erste kaufte genau 3 m, der zweite genau 5 m und der dritte genau 9 m. Der zweite Kunde bezahlte 30 M mehr als der erste.

Wie viel Mark hatten die drei Kunden insgesamt für den Stoff zu bezahlen?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Der zweite Kunde kaufte genau 2 m Stoff mehr als der erste; denn $5m - 3m = 2m$. Für diese 2 m Stoff hatte er 30 M zu bezahlen.
Jedes Meter Stoff kostete daher die Hälfte davon, das sind 15 M. Die drei Kunden kauften zusammen 17 m Stoff; folglich hatten sie insgesamt $17 \cdot 15 = 255$ M zu bezahlen.

Aufgabe 100523:
Die Mitglieder einer Arbeitsgemeinschaft „Junge Botaniker“ unterstützten ihre Paten-LPG beim Obstbau.
Zu diesem Zwecke hielten sie eine 2,6 ha große Obstplantage, auf der je Hektar durchschnittlich 150 Apfelbäume standen, von Schädlingen frei. Danach wurden von jedem Baum durchschnittlich 50 kg Äpfel geerntet.
Berechne, wie viel Tonnen Äpfel unter diesen Umständen insgesamt auf der Plantage geerntet wurden!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es gilt 2,6 ha = 260 a.
Da auf 1 ha = 100 a durchschnittlich 150 Apfelbäume standen, standen auf 10 a durchschnittlich 15 Apfelbäume, auf 260 a mithin 26 mal soviel, das sind insgesamt 590 Apfelbäume.

Diese 390 Apfelbäume trugen 390 mal soviel, wie jeder Apfelbaum durchschnittlich trug, das sind wegen $590 \cdot 50 = 19500$ insgesamt 19500 kg Äpfel.
Wegen 19500 kg = 19,5 t wurden somit auf der Plantage 19,5 t Äpfel geerntet.

Aufgabe 110523:
Am Wettbewerb der mathematischen Schülerzeitschrift „alpha“ beteiligten sich 1970 von einer Oberschule insgesamt 216 Schüler. Das waren dreimal so viele wie im Jahr 1969.
Im Jahr 1969 gab es an derselben Schule doppelt so viele Teilnehmer am alpha-Wettbewerb wie im Jahr 1968.
Berechne jeweils die Anzahl aller Schüler dieser Oberschule, die am alpha-Wettbewerb der Jahre 1968 und 1969 teilgenommen haben!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Da es 1970 dreimal so viele Teilnehmer waren wie 1969, muss man die Anzahl 216 der Teilnehmer von 1970 durch 3 dividieren, um die Anzahl der Teilnehmer von 1969 zu erhalten.
Diese betrug wegen $216 : 3 = 72$ somit 72.

Da es 1969 doppelt so viele Teilnehmer waren wie 1968, muss man die Anzahl 72 der Teilnehmer von 1969 durch 2 dividieren, um die Anzahl der Teilnehmer von 1968 zu erhalten.
Diese betrug wegen $72 : 2 = 36$ somit 36.

Aufgabe 140523:
Uwe fuhr mit einem Sonderzug ins Ferienlager. Als der Zug genau die Hälfte seiner Reisestrecke zurückgelegt hatte, schlief Uwe ein und erwachte erst, als der Zug noch eine Strecke von genau 25 km bis zum Reiseziel zurückzulegen hatte.
Diese Strecke war halb so lang wie die Strecke, die der Zug zurückgelegt hatte, während Uwe schlief.
Wie viel Kilometer betrug Uwes Reisestrecke?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Laut Aufgabe legte der Zug, während Uwe schlief, eine Strecke zurück, die doppelt so lang wie 25 km war, also 50 km betrug.
Vom Zeitpunkt des Einschlafens an bis zum Reiseziel musste wegen $50 + 25 = 75$ Uwe folglich 75 km fahren.
Das war laut Aufgabe die Hälfte der Länge seiner Reisestrecke. Daher war diese Reisestrecke 150 km lang.

Aufgabe 150521:
Die Werktätigen des Flachglaskombinates Torgau beschlossen, im Jahre 1975 als Beitrag zum Wohnungsbauprogramm 135000 m^2 Flachglas über den Plan hinaus zu produzieren. Diese Glasmenge reicht für 4500 Neubauwohnungen eines bestimmten Typs aus.
Ermittle den Bedarf an Flachglas (in Quadratmetern), der nach diesen Angaben für 1000 Neubauwohnungen dieses Typs zugrunde gelegt wurde.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wegen $4500 : 9 = 500$ und $135000 : 9 = 15000$ wurde als Bedarf für 500 Neubauwohnungen 15000 m^2 Flachglas angenommen, für 1000 Neubauwohnungen folglich das Doppelte, also 30000 m^2.

Aufgabe 160524:
Jeder Schüler braucht im Jahr 15 Hefte. Aus 1 Tonne Papier können 25000 Hefte hergestellt werden.
Wie viele Schüler insgesamt kann man unter diesen Umständen aus 3 Tonnen Papier für ein Jahr mit Heften versorgen?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wegen $3 \cdot 25000 = 75000$ können aus 3 Tonnen Papier 75000 Hefte hergestellt werden.

Wegen 75000 : 15 = 5000 lassen sich mit diesen Heften in einem Jahr insgesamt 5000 Schüler versorgen.

Aufgabe 180521:
Die Gleise der BAM werden nach ihrer Fertigstellung eine Gesamtlänge von 3200 km haben. Je 1 m Gleis entsprechen 2 m Schiene.
Wie viel Tonnen Stahl werden für die Schienen der BAM insgesamt benötigt, wenn man für je 1 m Schiene 65 kg Stahl braucht?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wegen $3200 \cdot 2 = 6400$ werden insgesamt 6400 km Schienen benötigt.
Wegen 6400 km = 6400000 m und $6400000 \cdot 65 = 416000000$ werden insgesamt 416000000 kg = 416000 t Stahl für diese Schienen benötigt.

Aufgabe 200521:
Zwei Geschwister erhielten im September zusammen 6 Mark für abgelieferte Altstoffe. Im Oktober erhielten sie zusammen 13 Mark. Im November bekamen sie 2 Mark weniger als in den beiden vorigen Monaten zusammen.
Ein Drittel ihres in den drei Monaten erzielten Gesamterlöses spendeten sie für die Solidarität, ein weiteres Drittel des Gesamterlöses legten sie in ihre gemeinsame Ferienkasse. Den Rest teilten sie sich zu gleichen Teilen zum persönlichen Gebrauch.
Ermittle den Betrag, den damit jeder der beiden für sich persönlich erhielt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wegen 6 + 13 = 19 und 19 - 2 = 17 erhielten die Geschwister im November zusammen 17 Mark, wegen 6 + 13 + 17 = 36 mithin insgesamt 36 Mark.
Wegen 36 : 3 = 12 betrug ihre Solidaritätsspende 12 Mark. Den gleichen Betrag legten sie in ihre Ferienkasse.
Wegen 36 - 12 - 12 = 12 verblieben 12 Mark, davon erhielt jeder für sich die Hälfte, also jeder 6 Mark.

Aufgabe 210521:
Ein Behälter, der mit Sonnenblumenöl gefüllt ist, wiegt 17 kg 500 g. Der leere Behälter würde 2 kg 700 g wiegen.

a) Wie viel Liter Öl befinden sich in dem Behälter, wenn 1 Liter Sonnenblumenöl 925 g wiegt ?
b) Für den Ladenverkauf wird das Öl in Flaschen zu 400 g abgefüllt. Wie viel Flaschen lassen sich mit dem im Behälter befindlichen Öl füllen?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Wegen 17500 - 2700 = 14800 sind 14 kg 800 g Sonnenblumenöl im Behälter. Aus 14800 : 925 = 16 erhält man, dass sich 16 Liter Sonnenblumenöl im Behälter befinden.

b) Wegen 14800 : 400 = 37 lassen sich 37 Flaschen mit der im Behälter vorhandenen Ölmenge füllen.

Aufgabe 230523:
Die drei Pioniere Hans, Karl und Peter fuhren mit dem Rad von Leipzig nach Halle. Hans fuhr dabei in je 10 Minuten 2 Kilometer, Karl benötigte für je 2,5 Kilometer 10 Minuten, während Peter in je 10 Minuten 3 Kilometer zurücklegte und Halle nach genau 100 Minuten erreichte.
Wie viel Minuten nach Peter trafen Hans und Karl in Halle ein, wenn alle drei Pioniere zur gleichen Zeit in Leipzig abfuhren?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn Peter in 10 Minuten 3 km zurücklegt, dann legt er in 100 Minuten zehnmal soviel zurück, also 30 km.
Wenn Hans für 2 km 10 Minuten braucht, dann benötigt er für 30 km fünfzehnmal soviel, also 150 Minuten.
Wenn Karl für 2,5 km 10 Minuten braucht, dann benötigt er für 5 km 20 Minuten, also für 30 km 120 Minuten.
Wegen 150 - 100 = 50 kam Hans mithin 50 Minuten später als Peter in Halle an. Wegen 120 - 100 = 20 kam Karl 20 Minuten später als Peter in Halle an.

Aufgabe 240522:
In einem metallverarbeitenden VEB werden verschiedene Einzelteile produziert. Dazu werden vier Maschinen eingesetzt; mit jeder Maschine wird eine Sorte dieser Einzelteile hergestellt. Die Ergebnisse einer Schicht waren folgende:

Es wurden insgesamt 4320 Teile hergestellt, und zwar auf der ersten Maschine ein Drittel der 4320 Teile, auf der zweiten Maschine ein Fünftel der 4320 Teile. Auf der dritten Maschine wurden ebenso viele Teile hergestellt wie auf der vierten Maschine.
Berechne für jede der vier Maschinen die Stückzahl der auf dieser Maschine hergestellten Teile!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wegen 4320 : 3 = 1440 wurden auf der ersten Maschine 1440 Teile hergestellt.
Auf der zweiten Maschine wurden 864 Teile produziert; denn es ist 4320 : 5 = 864.
Wegen 4320 - 1440 - 864 = 2016 und 2016 : 2 = 1008 wurden auf der dritten und auf der vierten Maschine je 1 008 Teile angefertigt.

Aufgabe 250522:
Vom Bahnhof Mathestädt fährt zu jeder vollen Viertelstunde ein Bus ab und trifft nach 2 Stunden in Knobelhausen ein.
Von dort fahren ebenfalls im Viertelstundenabstand Busse auf derselben Straße nach Mathestädt, wo sie nach 2 Stunden Fahrzeit eintreffen.
Morgens fährt der erste Bus von Mathestädt um 5.00 Uhr und der erste Bus von Knobelhausen um 7.10 Uhr ab. Die Busfahrer begrüßen einander jedesmal mit Kopfnicken, wenn sie sich unterwegs begegnen.

Wie viele ihm entgegenkommende Kollegen begrüßt der Busfahrer Franz Freundlich auf einer Fahrt von Mathestädt nach Knobelhausen, wenn diese Fahrt um 10.00 Uhr beginnt?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Als ersten begrüßt Franz Freundlich denjenigen Kollegen, der als erster nach 8.00 Uhr in Knobelhausen abgefahren ist; als letzten denjenigen, der als letzter vor 12.00 Uhr in Knobelhausen abfährt. Also begrüßt er alle diejenigen Kollegen, die zu einer der folgenden Zeiten in Knobelhausen abfahren:

8.10 Uhr, 8.25 Uhr, 8.40 Uhr, 8.55 Uhr, 9.10 Uhr, 9.25 Uhr, 9.40 Uhr, 9.55 Uhr, 10.10 Uhr, 10.25 Uhr, 10.40 Uhr, 10.55 Uhr, 11.10 Uhr, 11.25 Uhr, 11.40 Uhr, 11.55 Uhr.

Das sind insgesamt 16 Kollegen.

Aufgabe 270523:
In einer Olympiadeklasse wurde genau die Hälfte aller Teilnehmer mit einem Preis ausgezeichnet. Es gab nur erste, zweite und dritte Preise. Genau ein Achtel aller Teilnehmer erhielt einen ersten Preis.

Genau ein Sechstel aller Teilnehmer erhielt einen zweiten Preis. In dieser Olympiadeklasse waren insgesamt mindestens 20, aber weniger als 30 Teilnehmer.
Wie viel Teilnehmer genau waren in dieser Olympiadeklasse?
Wie viele erste, zweite bzw. dritte Preise gab es darin?
Gib an, wie du diese gesuchten Anzahlen eindeutig aus den obigen Angaben findest!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Anzahl der Teilnehmer war eine der Zahlen 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29. Genau ein Achtel davon erhielt einen ersten Preis, also war die Anzahl durch 8 teilbar.
Daraus folgt eindeutig: Die Anzahl der Teilnehmer war 24.
Wegen $24 : 2 = 12$ erhielten genau 12 Teilnehmer einen Preis.
Wegen $24 : 8 = 3$ erhielten genau 3 Teilnehmer einen ersten Preis.
Wegen $24 : 6 = 4$ erhielten genau 4 Teilnehmer einen zweiten Preis.
Wegen $12 - 3 - 4 = 5$ erhielten genau 5 Teilnehmer einen dritten Preis.

Aufgabe 340531:
Fritz hat geträumt, er bekäme ein Paket voller Gummibärchen, wenn er drei Aufgaben (a), (b), (c) löst.
Obwohl es nur ein Traum war und er nicht weiß, ob die Zahlen des Traumes genau stimmen, möchte er die Aufgaben doch lösen. In seinem Traum hieß es:

Ein Paket enthält 1000 Gummibärchen. Sie sind in 50 Tüten verteilt.
Der Inhalt einer Tüte kostet 1,60 DM. Ein Kilogramm Gummibärchen kostet 20 DM. In jeder Tüte ist dieselbe Anzahl Gummibärchen wie in jeder anderen Tüte. Jedes Gummibärchen wiegt ebenso viel und kostet ebenso viel wie jedes andere Gummibärchen.
Die Aufgaben lauten:

(a) Wie viel kosten zusammengenommen die Gummibärchen in einem Paket?
(b) Wie viel wiegt der Inhalt einer Tüte?
(c) Wie viel wiegt ein Gummibärchen?

Gib die Lösungen zu (a), (b), (c) an und begründe, wie du sie erhalten hast!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(a) Da ein Paket 50 Tüten enthält und der Inhalt jeder Tüte 1,60 DM kostet, kosten die Gummibärchen in einem Paket zusammengenommen $50 \cdot 1{,}60\text{DM} = 80\text{DM}$.

(b) Da 1000 Gramm Gummibärchen 2000 Pfennig kosten, kostet 1 Gramm 2 Pfennig. Also kosten 80 Gramm 1,60 DM.
Das ist der Preis für den Inhalt einer Tüte; dieser Inhalt wiegt also 80 Gramm.

(c) Da die 50 Tüten in einem Paket 1000 Gummibärchen enthalten, enthält wegen $1000 : 50 = 20$ eine Tüte 20 Gummibärchen. Da diese, wie in (b) gefunden, 80 Gramm wiegen, wiegt ein Gummibärchen $80\text{g} : 20 = 4\text{g}$.

II. Geometrie

II.I. Abstände, Flächen, Volumina berechnen

Runde 1

Aufgabe V00501:
Die Umzäunung eines quadratischen Gartens wird erneuert. Sie kostet 992,00 DM. Ein Meter Zaun wird mit 4,00 DM berechnet.
Berechne die Fläche dieses Gartens und verwandle das Ergebnis in Hektar.

Lösung von Steffen Polster:
Der Umfang u des Quadrates bei Seitenlänge a ist $u = 4a$. Da $\frac{992}{4} = 248$ m Zaun verbaut wurden, ist $a = 62$ m.
Für den Flächeninhalt wird $A = a^2 = 62^2 = 3844$ m^2, d. h. rund 0,38 ha.

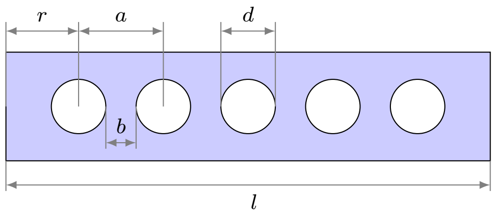
Aufgabe V00505:
Wie viel Zündhölzer (5 cm lang, 2 mm breit und 2 mm hoch) lassen sich in einem Würfel von 1 m Kantenlänge unterbringen?

Lösung von Steffen Polster:
Ein Zündholz hat ein Volumen von $V = 50 \cdot 2 \cdot = 200$ mm^3 $= 0{,}2$ cm^3. Das Würfelvolumen ist $V_W = 1000000$ cm^3. Damit passen $\frac{1000000}{0{,}2} = 5000000$ Zündhölzer in den Würfel.

Aufgabe 010512:
Im Werkunterricht sollen Reagenzglasständer für je 5 Reagenzgläser hergestellt werden. Das obere Brettchen ist 160 mm lang.
Es soll 5 Bohrungen von je 18 mm Durchmesser erhalten. Der Abstand der ersten bzw. letzten Lochmitte von den Brettchenenden beträgt je 24 mm. Alle Bohrungen sollen untereinander gleichen Abstand haben.

a) Wie groß ist der Abstand von Lochmitte zu Lochmitte?
b) Wie groß sind die Zwischenräume zwischen den Bohrlochrändern?

Lösung von Steffen Polster:



Für die gegebenen Größen (siehe Abbildung) wird: Länge des Brettchens $l = 160$ mm, Durchmesser eines Lochs $d = 18$ mm und als Abstand zwischen den Randbohrungen und dem Rand $r = 24$ mm. Gesucht sind der Abstand zwischen zwei Lochmitten a und der Abstand zwischen zwei Bohrungen b.

a) Da links und rechts der Abstand r auftritt, verbleiben für die vier Abstände zwischen den Bohrungen $l - 2r$ und somit $a = \frac{1}{4}(l - 2r) = 28$ mm.
Der Abstand von Lochmitte zu Lochmitte beträgt 28 mm.

b) Da eine Bohrung einen Radius $\frac{d}{2}$ wird ebenso $b = a - 2\frac{1}{2}d = 10$ mm.
Der Zwischenraum zwischen zwei Bohrungen beträgt 10 mm.

Aufgabe 040513:
Der Schulgarten einer Stadtschule hat einen Flächeninhalt von 0,15 ha. Der Garten wird in 9 Parzellen aufgeteilt, die einen Flächeninhalt von je 150 m^2 bzw. 200 m^2 besitzen.
Wie viel Parzellen von jeder der beiden Größen befinden sich im Garten?

Lösung von Steffen Polster:
Die Fläche 0,15 ha sind 1500 m^2. Im Garten befinden sich 6 Parzellen zu je 150 m^2 und 3 Parzellen zu je 200 m^2. Es ist $6 \cdot 150 + 3 \cdot 200 = 1500$.

Anmerkung: Das Gleichungssystem $x + y = 9$, $150x + 200y = 1500$ ist normalerweise in der 5. Klasse nicht lösbar. Wahrscheinlich soll durch Probieren gelöst werden.

Aufgabe 040514:
In Mücheln (Geiseltal, Bezirk Halle) wurde die längste Eisenbahnbrücke der DDR fertiggestellt. Sie besteht aus 7 gleichen Brückenbögen.
Für einen Brückenbogen wurden 147 m^3 Beton verwendet. 1 m^3 Beton hat eine Masse von 24 dt.
Wie viel Tonnen Beton wurden für den Brückenbau benötigt? (Runde auf ganze Tonnen!)

Lösung von Steffen Polster:
7 (Bögen) $\cdot$ 147 $m^3 \cdot 24 \frac{\text{dt}}{\text{m}^3} = 24696$ dt. Es werden insgesamt rund 2470 Tonnen Beton benötigt.

Aufgabe 080514:
Fünf Flächen eines Würfels von 3 cm Kantenlänge werden rot angestrichen, die sechste Fläche bleibt ohne Anstrich. Danach wird dieser Würfel in genau 27 Würfel von je 1 cm Kantenlänge zersägt.
Wie viel dieser kleinen Würfel haben 0; 1; 2; 3 bzw. 4 rot angestrichene Flächen?

Anleitung: Du kannst dir auch zur Veranschaulichung einen Würfel von 3 cm Kantenlänge basteln. Zerlege jede Fläche in Quadratzentimeter!

Lösung von Steffen Polster:
Nur die Würfel, die bis zur farbigen Außenseiten des großen Würfels reichen, haben eine farbige Fläche, d. h. der kleine Würfel im Inneren hat keinen Anstrich, ebenso der mittlere Würfel der sechsten Fläche.

Eine Farbfläche haben die mittleren Würfel der farbigen Seitenflächen und die 4 Würfel der sechsten Fläche, die in der Mitte der 4 Kanten liegen. Insgesamt 9 Würfel.

Zwei Farbflächen haben die mittleren Kantenwürfel die von beiden farbigen Seitenflächen des großen Würfels begrenzt sind, insgesamt 8. Die 4 Eckenwürfel der sechsten Fläche sind auch auf zwei Seiten farbig. In der Summe sind die 12 Würfel mit zwei farbigen Flächen.

Da es keinen keinen Würfel mit 4 farbigen Seiten gibt, verbleiben für kleine Würfel mit 3 angestrichen Seiten als Anzahl 27 - 2 - 9 - 12 = 4.

Es gibt somit kleine Würfel mit 2 mal 0, 9 mal 1, 12 mal 2, 4 mal 3 und 0 mal 4 angestrichenen Seiten.

Aufgabe 090514:
Im Werkunterricht fertigen Schüler Bauklötze an, die die Form von Quadern besitzen, und zwar sind bei jedem Bauklotz je drei in verschiedenen Richtungen verlaufende Seitenkanten 55 mm, 55 mm und 70 mm lang.
Zur besseren Aufbewahrung werden diese Bauklötze in quaderförmige Baukästen (mit Schiebedeckel) gepackt, deren Innenmaße (in den drei Richtungen der Seitenkanten gemessen) 0,33 m, 2,2 dm und 21 cm betragen.

Berechne die größtmögliche Anzahl von Bauklötzen, die in sechs dieser Baukästen eingeschichtet werden können!

Lösung von Steffen Polster:
Das Volumen des Kasten zur Aufbewahrung der Bauklötze ist

$$V_{\text{Box}} = 33 \text{ cm} \cdot 22 \text{ cm} \cdot 21 \text{ cm} = 15246 \text{ cm}^3$$

Das Volumen eines Bauklotzes beträgt:

$$V_{\text{Bauklotz}} = 5{,}5 \text{ cm} \cdot 5{,}5 \text{ cm} \cdot 7 \text{ cm} = 211{,}75 \text{ cm}^3$$

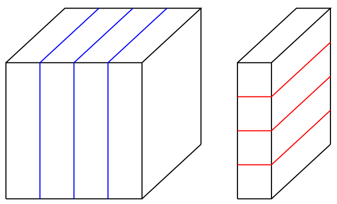
Damit passen theoretisch $15246 : 211{,}75 = 72$ Bauklötze in den Aufbewahrungskasten.

Es ist zu allerdings zu prüfen, ob die Bauklötze lückenlos in den Kasten eingefügt werden können.
Mit den Kantenlängen 55 mm und 55 mm können auf die Grundfläche des Kastens in der Länge $6 \cdot 5{,}5\text{cm} = 33\text{cm}$ und in der Breite von $4 \cdot 5{,}5\text{cm} = 22\text{cm}$ alle Lücken gefüllt werden. Auf der Grundfläche liegen somit $6 \times 4 = 24$ Bauklötze.
Da nun die Höhe des Kastens 21 cm beträgt und ein Bauklotz 7 cm Höhe besitzt, können 3 Schichten Bauklötze eingefügt werden, d. h. insgesamt 72 Bauklötze.

Aufgabe 130512:
Karl soll einen Würfel der Kantenlänge 4 cm aus Knetmasse, ohne ihn zu verformen, so zerteilen, dass am Ende nur Würfel von je 1 cm Kantenlänge entstehen.

a) Ermittle die Anzahl der Würfel (der geforderten Art), die auf diese Weise entstehen!
b) Stelle fest, wie viel Schnitte Karl dabei insgesamt ausführen muss, wenn ein Schnitt niemals mehr als einen der vorher vorhandenen Körper zerteilen darf, d. h., wenn das Schneiden „im Paket“ nicht gestattet ist!

Lösung von Steffen Polster:
a) Das Volumen des großen Würfels beträgt $4\text{cm} \cdot 4\text{cm} \cdot 4\text{cm} = 64\text{cm}^3$, das Volumen eines kleinen Würfels 1 cm^3. Damit ergeben sich 64 kleine Würfel.



b) Zuerst schneidet man den Würfel längs der blauen Linien und erhält mit drei Schnitten 4 Quader mit den Abmessungen 1 cm $\times$ 4 cm $\times$ 4 cm.
Danach schneidet man jeden dieser Quader mit je 3 Schnitten, insgesamt 12 Schnitte, längs der roten Linien und erhält insgesamt 16 Quader der Abmessung 1 cm $\times$ 4 cm $\times$ 1 cm.
Jeder dieser 16 Quader wird mit je 3 Schnitten, insgesamt 48 Schnitte, zum Abschluss in je 4 Würfel der gewünschten Größe zerschnitten.
Insgesamt benötigt man damit $4 + 12 + 48 = 63$ Schnitte.

Aufgabe 140512:
Ein Quader von der Länge $a = 1{,}50$ m, der Breite b und der Höhe c hat eine Grundfläche von 12600 cm^2 und ein Volumen von 1323 dm^3.
Ermittle b und c (in Zentimetern)!

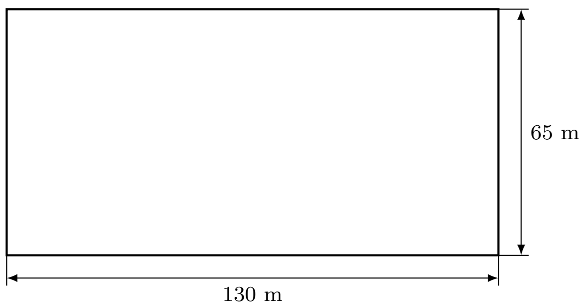
Lösung von Steffen Polster:
Aus der Gleichung der Grundfläche $A_G = a \cdot b$ wird $b = \frac{A_G}{a} = 84$ cm.
Da für das Volumen $V = A_G \cdot c$ gilt, folgt $c = \frac{V}{A_G} = 105$ cm.

Aufgabe 160514:
Ein rechteckiger Spielplatz wird eingezäunt. Die Gesamtlänge des Zaunes beträgt 390 m; die langen Seiten des Rechtecks sind doppelt so lang wie die kurzen.

a) Ermittle die Seitenlängen des Spielplatzes!
b) Zeichne den Spielplatz (Konstruktion des Rechtecks) im Maßstab 1 : 1000!

Lösung von Steffen Polster:
Die kurze Seite sei a m lang und damit die lange Seite $b = 2a$ m lang. Für den Umfang des Rechtecks wird $u = 2a + 2b = 2a + 2 \cdot 2a = 6a = 390$ m. Damit ist $a = 65$.

a) Die kurzen Seiten des Spielplatzes sind 65 m und die langen Seiten sind 130 m lang.



b) In der Zeichnung im Maßstab 1 : 1000 muss das Rechteck 13 cm breit und 6,5 cm hoch sein.

Aufgabe 180512:
Marie-Luise hat einen außen rot angestrichenen Würfel aus naturfarbenem Holz. Der Würfel hat 3 cm Kantenlänge. Marie-Luise denkt sich diesen Würfel in kleine Würfel von 1 cm Kantenlänge zerlegt.

a) Wie viele derartige kleine Würfel würden aus dem roten Würfel insgesamt entstehen?
b) Wie viele von den kleinen Würfeln hätten drei rot angestrichene Seitenflächen,
c) zwei rot angestrichene Seitenflächen,
d) eine rot angestrichene Seitenfläche,
e) keine rot angestrichene Seitenfläche?

Als Lösung genügt die Angabe der in a) bis e) erfragten Anzahlen. Eine Begründung wird nicht verlangt.

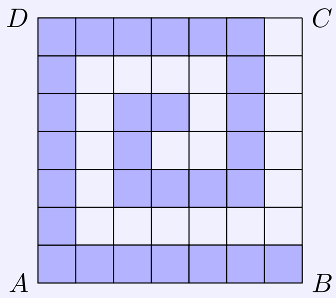
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) 27 Würfel,
b) 8 Würfel,

c) 12 Würfel,
d) 6 Würfel,
e) 1 Würfel

Aufgabe 190514:
Wie viele Streichhölzer würden sich insgesamt in einem hohlen Würfel unterbringen lassen, dessen Kantenlänge, innen im Hohlraum gemessen, 1 m beträgt?
Wir wollen dabei annehmen, dass jedes Streichholz genau 5 cm lang, 2 mm breit und 2 mm hoch ist.
Die Verdickung am Streichholzkopf und andere Unregelmäßigkeiten sollen bei dieser Aufgabe nicht berücksichtigt werden.

Lösung von Steffen Polster:
Ein Streichholz hat ein Volumen von $V = 50 \cdot 2 \cdot 2 = 200$ mm^3 $= 0{,}2$ cm^3. Das Würfelvolumen ist $V_W = 1000000$ cm^3. Damit passen $\frac{1000000}{0{,}2} = 5000000$ Streichhölzer in den Würfel.

Aufgabe 210511:

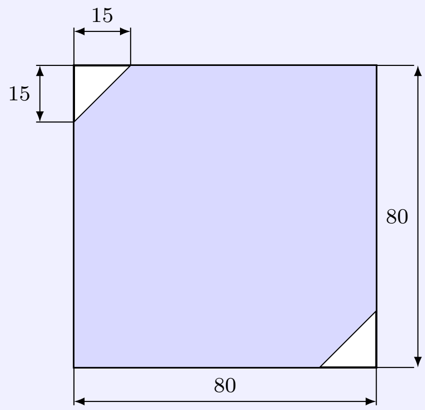


Ein Quadrat $ABCD$ mit 14 cm Seitenlänge ist in 7 mal 7 gleichgroße Teilquadrate zerlegt. Aus einigen dieser Teilquadrate ist ein Streifenzug so zusammengestellt, wie die Abbildung zeigt. Der Streifenzug ist farbig hervorgehoben.
Berechne den Umfang und den Flächeninhalt dieses Streifenzuges!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wegen $14 : 7 = 2$ hat jedes der Teilquadrate die Seitenlange 2 cm. Der Umfang des Streifenzuges besteht aus je 3 Seiten seines Anfangs- bzw. Endquadrates sowie je 2 Seiten seiner übrigen 26 Quadrate. Wegen $2 \cdot 26 = 52$, $3 + 3 + 52 = 58$ beträgt sein Umfang also das 58 fache der Seitenlänge eines Teilquadrates; wegen $58 \cdot 2 = 116$ sind das 116 cm.

Jedes der 28 Quadrate des Streifenzuges hat wegen $2 \cdot 2 = 4$ den Flächeninhalt 4 cm^2. Folglich beträgt wegen $28 \cdot 4 = 112$ der Flächeninhalt des Streifenzuges 112 cm^2.

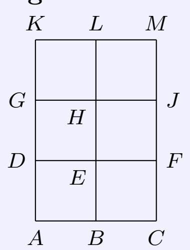
Aufgabe 240513:



Die farbige Fläche in der Abbildung entsteht aus einem Quadrat, von dem vier gleichgroße Dreiecke abgeschnitten werden.
Berechne aus den in Millimeter angegebenen Maßen den Flächeninhalt der farbigen Fläche in Quadratzentimeter!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wegen $80 \cdot 80 = 6400$ beträgt der Flächeninhalt des Quadrates 6400 mm^2.
Die vier abgeschnittenen Dreiecke ergänzen sich paarweise zu insgesamt zwei Quadraten mit einer Seitenlänge von je 15 mm. Wegen $15 \cdot 15 = 225$ beträgt der Flächeninhalt eines solchen Quadrates 225 mm^2.
Wegen $6400 - 225 - 225 = 5950$ beträgt der Flächeninhalt der farbigen Fläche also 5950 mm^2, das sind 59,5 cm^2.

Aufgabe 270513:

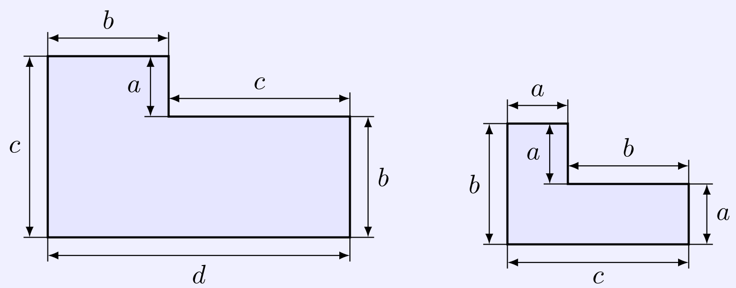


Die Abbildung zeigt ein Rechteck $ACMK$, das aus sechs kleinen Quadraten zusammengesetzt ist. Man kann in der Abbildung außer diesem Rechteck noch weitere Rechtecke finden, die sich aus solchen kleinen Quadraten zusammensetzen und die selbst keine Quadrate sind. Zum Beispiel ist $DFJG$ ein derartiges Rechteck.
Nenne alle derartigen Rechtecke außer $ACMK$!
Eine Begründung wird nicht verlangt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Alle derartigen Rechtecke sind $ABHG$, $ABLK$, $ACFD$, $BCJH$, $BCML$, $DELK$, $DFJG$, $EFML$, $GJMK$

Runde 2

Aufgabe 020524:
Die Abbildung zeigt zwei verschieden große Flächen. ($a = 2$ cm, $b = 4$ cm, $c = 6$ cm, $d = 10$ cm)



a) Wie oft ist die kleine Fläche in der großen enthalten?
b) Weise die Richtigkeit dieser Behauptung durch eine Zeichnung nach!

Lösung von Steffen Polster:
a) Der Flächeninhalt der kleinen Fläche ergibt sich als Differenz der Flächeninhalte eines Rechtecks mit den Seitenlängen b und c, von dem rechts oben ein Rechteck mit den Maßen a und b herausgeschnitten wurde:

$$A_{klein} = bc - ab = 4\text{ cm} \cdot 6\text{ cm} - 2\text{ cm} \cdot 4\text{ cm} = 16\text{ cm}^2$$

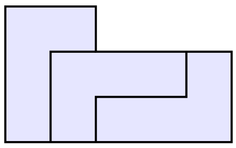
Für die große Fläche wird aus einem Rechteck mit den Seiten c und d ein Rechteck mit den Seiten a und c entfernt.

$$Agroß = cd - ac = 6\text{ cm} \cdot 10\text{ cm} - 2\text{ cm} \cdot 6\text{ cm} = 48\text{ cm}^2$$

Damit passt die kleine Fläche in die große mit

$$\frac{A_{groß}}{A_{klein}} = \frac{48\text{ cm}^2}{16\text{ cm}^2} = 3$$

genau 3 mal hinein, wie auch die Abbildung zur Teilaufgabe b) zeigt.

b) 

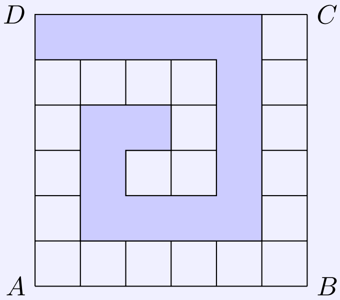
Aufgabe 020525:
Trage auf einer Geraden nacheinander die Strecken $AB = 3$ cm, $BC = 5$ cm und $CD = 4$ cm ab! Wie groß ist die Entfernung zwischen den Mitten der Strecken AB und CD? Begründe deine Antwort durch Rechnung!

Lösung von Steffen Polster:

Die Entfernung zwischen M_{AB} und M_{CD} ergibt sich aus der Länge der Strecke BC und jeweils der Hälfte der Strecken AB und CD, d. h.

$$M_{AB}M_{CD} = 0{,}5 \cdot AB + BC + 0{,}5 \cdot CD = 0{,}5 \cdot 3cm + 5cm + 0{,}5 \cdot 4cm = 8{,}5cm$$

Aufgabe 040522:

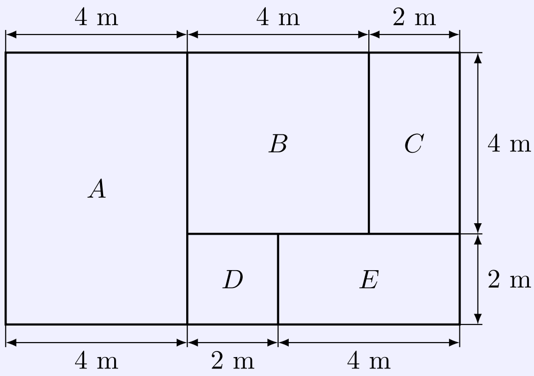


Teile die Seiten eines Quadrats in sechs gleiche Teile und ziehe von dem Mittelpunkt M aus den aus der Abbildung ersichtlichen blauen Streifenzug. Eine Seite des Quadrats hat eine Länge von 12 cm.

Berechne den Umfang und den Flächeninhalt des Streifens!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Jedes kleine Quadrat hat eine Seitenlänge von 2 cm. Der Umfang besteht aus 32 Seitenlängen, die Fläche aus 15 Teilquadraten.
Der Umfang beträgt 64 cm, der Flächeninhalt 60 cm^2.

Aufgabe 120524:

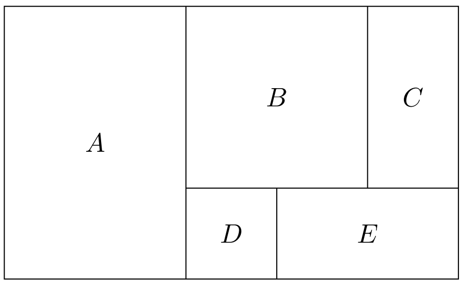


Die Abbildung stellt den Grundriss einer Wohnung mit den Räumen A, B, C, D, E dar.

a) Zeichne den Grundriss dieser Wohnung im Maßstab 1:100!
b) Die Fußböden der Räume A und B sollen gestrichen, die der Räume C, D und E mit einem Fußbodenbelag ausgelegt werden.

Ermittle den Flächeninhalt der Fußböden der einzelnen Räume und gib die Anzahl der zu streichenden und die der auszulegenden Quadratmeter an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



a) Bei dem angegebenen Maßstab 1 : 100 entspricht 1 cm auf der Zeichnung 1 m in der Wirklichkeit. Daher ergibt sich folgende Zeichnung:

b) Der Grundriss lässt sich in der aus der Abbildung ersichtlichen Weise in Quadrate von je 1 cm Kantenlänge, also von 1 cm^2 Flächeninhalt, einteilen.
Wegen des Maßstabes 1 : 100 entspricht jedem solchen Quadrat in der Wirklichkeit ein Quadrat mit der Kantenlänge 1 m, also mit dem Flächeninhalt 1 m^2.

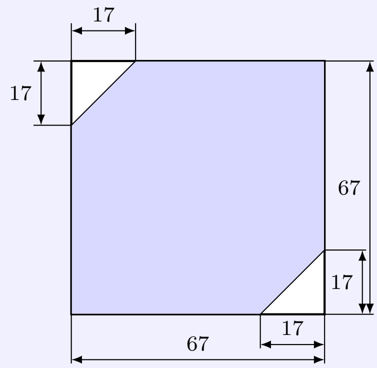
Die Fußböden der Räume haben folgenden Flächeninhalt:
Raum A: 24 m^2, Raum B: 16 m^2, Raum C: 8 m^2, Raum D: 4 m^2, Raum E: 8 m^2.

Zu streichen sind insgesamt 40 m^2 Fußbodenfläche. Auszulegen sind 20 m^2 Fußbodenfläohe.

Aufgabe 170521:
Im Schulgarten steckten Schüler auf einem 8 m^2 großen Beet als Saatgut Erbsen, und zwar ebenso dicht, wie dies auf großen Flächen üblich ist. Der Ernteertrag dieses Beetes betrug das Fünfzehnfache des Saatgutes.
Wie viel kg Erbsen ernteten die Schüler von diesem Beet, wenn für eine 1 ha große Fläche 2 dt Erbsen als Saatgut üblich sind?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Für 1 ha : 10000 m^2 sind 2 dt = 200000 g Saatgut üblich; folglich werden für je 1 m^2 dann 20 g benötigt.
Für 8 m^2 wurden wegen $8 \cdot 20 = 160$ daher 160 g Saatgut genommen.
Der Ernteertrag betrug wegen $15 \cdot 160 = 2400$ folglich 2400 g = 2,4 kg.

Aufgabe 180524:



Die abgebildete farbige Fläche entsteht, indem von einer quadratischen Fläche zwei (gleichgroße) dreieckige Flächen abgeschnitten werden.

Aus den in der Abbildung angegebenen Maßen (in mm) ist der Flächeninhalt der farbigen Fläche (in cm^2) zu berechnen.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wegen $67^2 = 4489$ beträgt der Flächeninhalt des abgebildeten Quadrats 4489 mm^2.
Die beiden Dreiecke lassen sich zu einem Viereck ergänzen, das vier gleichlange Seiten und zwei rechte Winkel enthält, also ein Quadrat ist. Wegen $17^2 = 289$ beträgt der Flächeninhalt dieses Quadrats 289 mm^2.

Wegen 4489 - 289 = 4200 und 4200 mm^2 = 42 cm^2 hat die farbige Fläche den Flächeninhalt 42 cm^2.

Aufgabe 200523:
Fritz will auf einer Geraden vier Punkte A, B, C, D in dieser Reihenfolge angeordnet zeichnen. Dabei sollen folgende Bedingungen erfüllt werden:

(1) Die Länge der Strecke AD soll 15 cm betragen.
(2) Die Strecke BC soll um 3 cm länger sein als die Strecke AB.
(3) Die Strecke CD soll doppelt so lang sein wie die Strecke AC.
Untersuche, ob diese Bedingungen erfüllbar sind! Wenn dies der Fall ist, so ermittle alle diejenigen Längenangaben für die Strecken AB, BC und CD, durch die diese Bedingungen erfüllt werden!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(I) Wenn die Bedingungen der Aufgabe erfüllt sind und dabei $AB = x$ cm gilt, dann folgt aus (2) $BC = (x + 3)$ cm, also

$$AC = AB + BC = xcm + (x + 3)cm = (2x + 3)cm$$

Wegen (3) gilt dann $CD = 2AC = 2(2x + 3)cm = (4x + 6)cm$ und damit

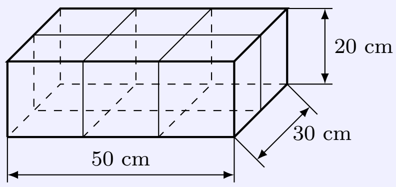
$$AD = AC + CD + (2x + 3)cm + (4x + 6)cm = (6x + 9)cm$$

Wegen (1) folgt nun $6x + 9 = 15$, also $6x = 6$ und mithin $x = 1$.
Daher können die gestellten Bedingungen nur dann erfüllt werden, wenn $AB = 1$ cm und folglich (wegen (2) und (3)) $BC = 4$ cm und $CD = 10$ cm gilt.

(II) Dass durch diese Längenangaben die gestellten Bedingungen tatsächlich erfüllt werden, zeigt folgende Probe:

Wegen $AD = AB + BC + CD = 1cm + 4cm + 10cm = 15$ cm ist Bedingung (1) erfüllt.
Die Strecke BC ist um 3 cm länger als die Strecke AB, also ist auch Bedingung (2) erfüllt.
Wegen $AC = AB + BC = 5$ cm ist die Strecke CD doppelt so lang wie die Strecke AC, und somit ist auch Bedingung (3) erfüllt.

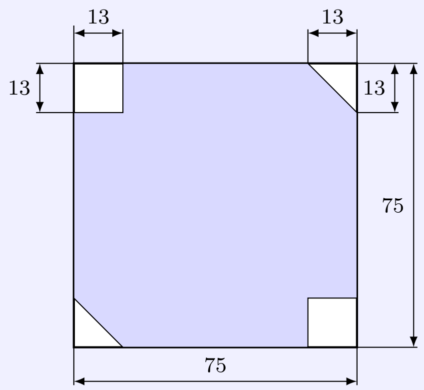
Aufgabe 220522:



Das Bild zeigt ein 50 cm langes, 30 cm breites und 20 cm hohes verschnürtes Paket. Die Schnur wurde möglichst sparsam verwendet, also von Knoten zu Knoten überall nur einfach gelegt. Zum Verknoten wurden noch zusätzlich 10 cm Schnur gebraucht.
Wie viel Zentimeter Schnur wurden daher zum Verschnüren dieses Paketes insgesamt verwendet?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wegen $2 \cdot 50 + 4 \cdot 30 + 6 \cdot 20 + 10 = 100 + 120 + 120 + 10 = 350$ wurden 350 cm Schnur verwendet.

Aufgabe 240523:



Die abgebildete farbige Fläche entsteht aus einem Quadrat, indem man von ihm zwei gleichgroße Dreiecke und zwei gleichgroße Quadrate abschneidet.
Berechne aus den in Millimeter angegebenen Längen den in Quadratzentimeter gemessenen Flächeninhalt der farbigen Fläche!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wegen $75^2 = 5625$ beträgt der Flächeninhalt des ursprünglichen Quadrates 5625 mm^2.
Die beiden abgeschnittenen Dreiecke lassen sich zu einem Quadrat zusammensetzen, das die gleiche Seitenlänge wie die beiden abgeschnittenen Quadrate hat. Wegen $13^2 = 169$ beträgt der Flächeninhalt eines solchen Quadrates 169 mm^2.

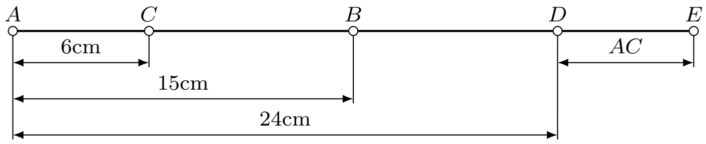
Wegen $5625 - 3 \cdot 169 = 5118$ beträgt der Flächeninhalt der farbigen Fläche daher 5118 mm^2, das sind 51,18 cm^2.

Aufgabe 260523:
Zeichne eine Strecke AB der Länge 15 cm! Auf dem Strahl, der den Ausgangspunkt A hat und durch B geht, sollen nun zwei weitere Punkte C und D so eingezeichnet werden, dass $4 \cdot AC = AD$ und $CB = BD$ gilt.
Wie groß sind dafür AC und AD zu wählen?
Erkläre, wie man zur Berechnung dieser beiden Längen AC und AD kommen kann, und zeichne dann die Punkte C und D!

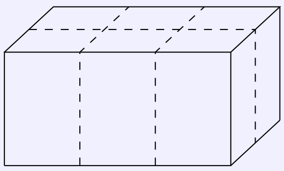
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Aus der Forderung $4 \cdot AC = AD$ folgt, dass C auf dem genannten Strahl näher bei A liegen muss als D. Wegen der Forderung $CB = BD$ muss B der Mittelpunkt der Strecke CD sein.
Verlängert man AD über D hinaus nochmals um die Länge AC bis zu einem Punkt E, so ist folglich B auch der Mittelpunkt der Strecke AE. Wegen $AB = 15$ cm ergibt sich somit $AE = 30$ cm. Andererseits folgt

$$AE = AD + DE = 4 \cdot AC + AC = 5 \cdot AC$$

Wegen $30 : 5 = 6$ und $4 \cdot 6 = 24$ muss daher $AC = 6$ cm und $AD = 24$ cm gewählt werden.



Aufgabe 280522:
Das in der Abbildung abgebildete Paket ist von links nach rechts 45 cm lang, von vorn nach hinten 30 cm breit, und es ist 25 cm hoch.
Es soll in der dargestellten Weise (gestrichelte Linie) mit Klebeband verklebt werden. Für das Überlappen von End- und Anfangsstücken sind zusätzlich insgesamt 10 cm Klebeband vorgesehen.
Wie viel Zentimeter Klebeband werden demnach insgesamt gebraucht? Wie viel Meter sind das?



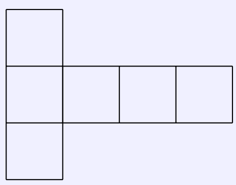
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wegen $2 \cdot 45 = 90$ benötigt man in Längsrichtung 90 cm Klebeband, wegen $4 \cdot 30 = 120$ in Breitenrichtung 120 cm und wegen $6 \cdot 25 = 150$ in Höhenrichtung 150 cm, wenn sich die Klebestreifen nicht überlappen.
Wegen $90 + 120 + 150 = 360$ benötigt man unter Berücksichtigung der für die Überlappung der Klebestreifen benötigten 10 cm Klebeband insgesamt 370 cm Klebeband. Das sind 3,70 m.

II.II. Figuren zerlegen/ zeichnen

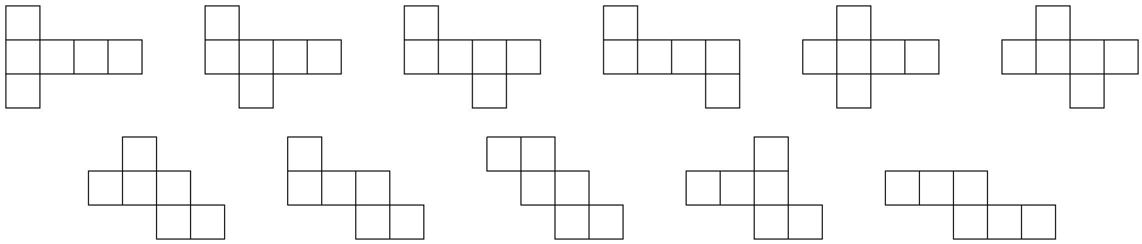
Runde 1

Aufgabe 010515:

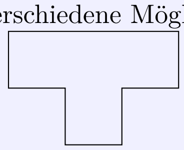
Die Abbildung zeigt das Netz eines Würfels. Es gibt noch andere Möglichkeiten, das Netz eines Würfels zu zeichnen.
Versuche, 5 andere Würfelnetze zu finden, und zeichne sie möglichst genau (Kantenlänge $a = 2$ cm)!



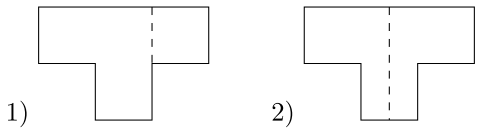
Lösung von Steffen Polster:
Es existieren elf verschiedene inkongruente Netze des Würfels, von denen außer dem in der Aufgabenstellung fünf andere zu wählen sind:



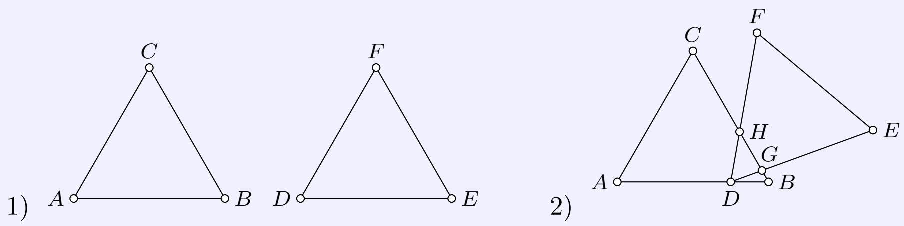
Aufgabe 020516:
Wer kann die Figur mit einem Scherenschnitt so zerschneiden, dass die Teile zu einem Quadrat zusammengelegt werden können? Wer findet dazu zwei völlig verschiedene Möglichkeiten?



Lösung von Steffen Polster:
Mögliche Schnitte sind:

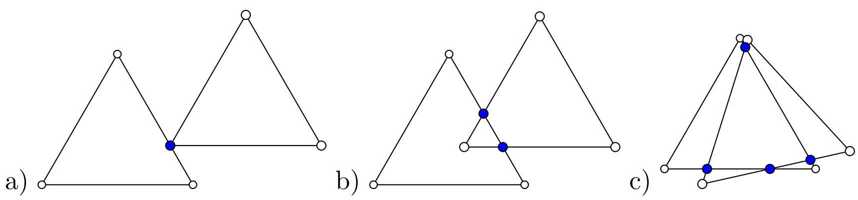


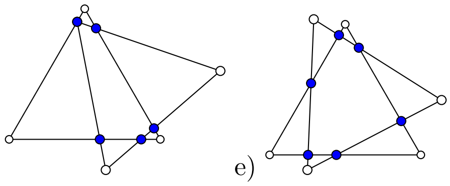
Aufgabe 030516:
Gegeben seien die beiden unter 1) abgebildeten Dreiecke. Sie haben dabei keinen Punkt gemeinsam. Wenn sie dagegen so liegen wie auf der Abbildung 2), haben sie genau drei Punkte, nämlich D, G und H, gemeinsam.



Wie können die Dreiecke liegen, wenn sie genau
a) einen Punkt, b) zwei Punkte, c) vier Punkte, d) fünf Punkte, e) sechs Punkte
gemeinsam haben sollen?
Zeichne die Dreiecke in diesen verschiedenen Lagen!

Lösung von Steffen Polster:





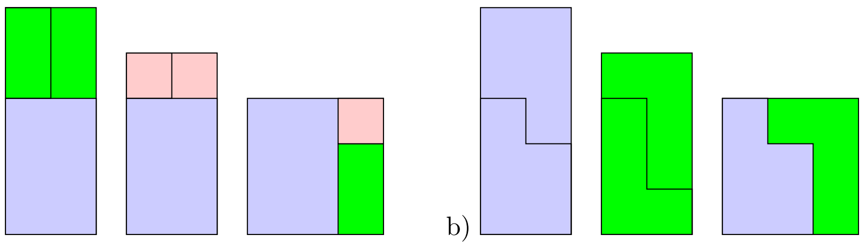
d) e)

Aufgaben der I. Runde 1963 gelöst von Steffen Polster

Aufgabe 040515:
Gegeben seien ein Rechteck von 120 mm Länge und 60 mm Breite und ein zweites von 150 mm Länge und 60 mm Breite.

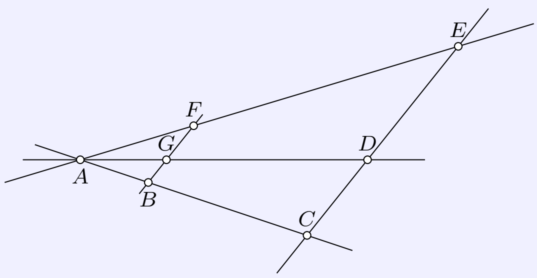
a) Zerlege die beiden Rechtecke so, dass beim Zusammenfügen aller Teile zwei gleichgroße Quadrate entstehen!
b) Ist es möglich, jedes Rechteck nur in zwei Teile zu zerlegen und dennoch zwei gleichgroße Quadrate zusammenfügen zu können?
Fertige zu a) und b) je eine Zeichnung an!

Lösung von Steffen Polster:



a) b)

Aufgabe 090513:



Die Abbildung zeigt genau 7 Punkte A, B, C, D, E, F, G und genau 5 Geraden, von denen eine durch A, B, C, eine durch A, F, E, eine durch A, G, D, eine durch B, G, F und eine durch C, D, E geht. Außerdem gilt $BF \parallel CE$.

Wir wollen sagen $\left\{\begin{array}{l}\text{eine Strecke}\\ \text{ein Dreieck}\\ \text{ein Trapez}\end{array}\right\}$ gehört der Zeichnung an; wenn $\left\{\begin{array}{l}\text{ihre Endpunkte zwei}\\ \text{seine Eckpunkte drei}\\ \text{seine Eckpunkte vier}\end{array}\right\}$ der Punkte A, B, C, D, E, F, G sind und wenn $\left\{\begin{array}{l}\text{die Strecke}\\ \text{alle Seiten des Dreiecks}\\ \text{alle Seiten des Trapezes}\end{array}\right\}$ schon vollständig gezeichnet in der Abbildung $\left\{\begin{array}{l}\text{vorkommt.}\\ \text{vorkommen.}\\ \text{vorkommen.}\end{array}\right\}$

Beispiele: Die Strecke AB, das Dreieck $\triangle ABF$ „gehören der Zeichnung an“. Die Strecke BD „gehört der Zeichnung“ nicht „an“, auch nicht die Strecke, die den Mittelpunkt von AB mit B verbindet, auch nicht das Dreieck $\triangle ABD$.

Gib alle Strecken, Dreiecke und Trapeze an, die „der Zeichnung angehören“!

Lösung von Steffen Polster:
Die „zur Zeichnung gehörenden“ Strecken sind: AB, AC, AG, AD, AF, AE, BC, BG, BF, CD, CE, GF, GD, DE, FE.

Die „zur Zeichnung gehörenden“ Dreiecke sind: $\triangle ABG$, $\triangle ABF$, $\triangle AGF$, $\triangle ACD$, $\triangle ADE$, $\triangle ACE$.

Die „zur Zeichnung gehörenden“ Trapeze sind: $BCDG$, $BCEF$, $GDEF$.

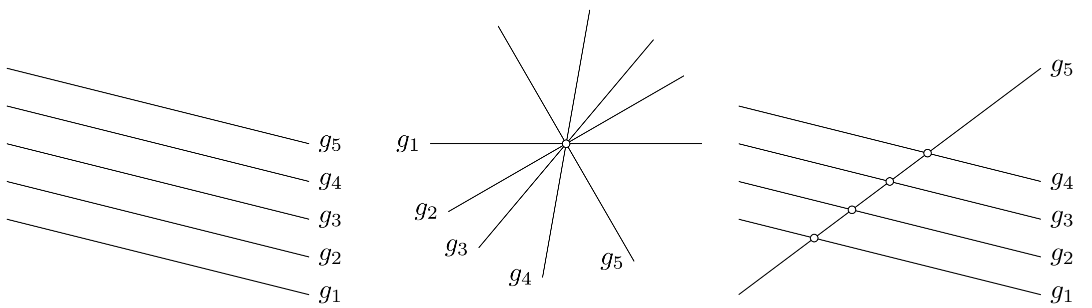
Aufgabe 110513:
Zeichne 5 Geraden g_1, g_2, g_3, g_4, g_5 so, dass sie

a) keinen gemeinsamen Punkt,
b) genau einen Schnittpunkt,
c) genau vier Schnittpunkte,
d) genau fünf Schnittpunkte,
e) genau sechs Schnittpunkte,
f) genau sieben Schnittpunkte,
g) genau acht Schnittpunkte,
h) genau neun Schnittpunkte,
i) genau zehn Schnittpunkte

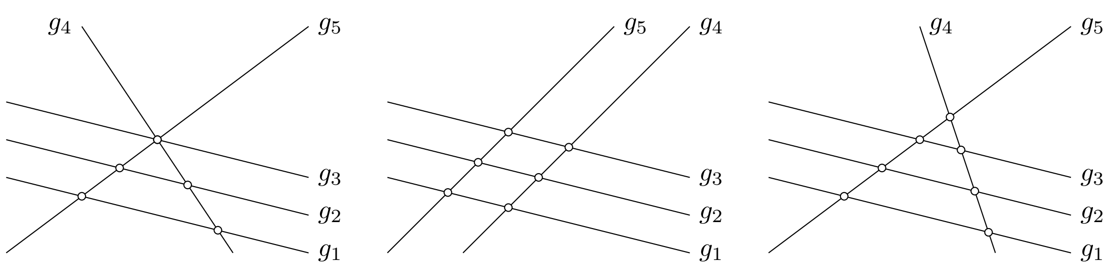
miteinander haben!

Als Lösung gilt eine jeweilige Zeichnung ohne Begründung. Parallele Geraden sind als solche zu kennzeichnen (z. B. $g_1 \parallel g_2$).

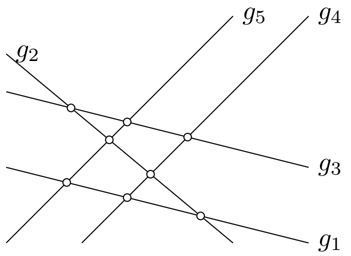
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



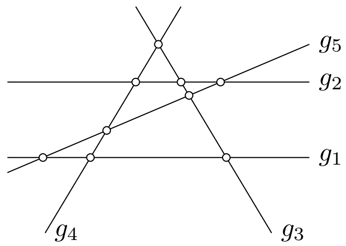
a) $g_1 \parallel g_2 \parallel g_3 \parallel g_4 \parallel g_5$ b) c) $g_1 \parallel g_2 \parallel g_3 \parallel g_4$



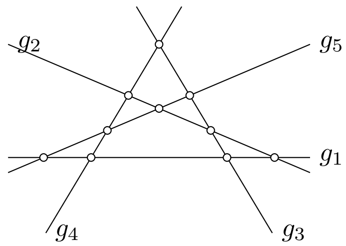
d) $g_1 \parallel g_2 \parallel g_3$ e) $g_1 \parallel g_2 \parallel g_3, g_4 \parallel g_5$ f) $g_1 \parallel g_2 \parallel g_3$



g) $g_1 \parallel g_3, g_4 \parallel g_5$



h) $g_1 \parallel g_2$



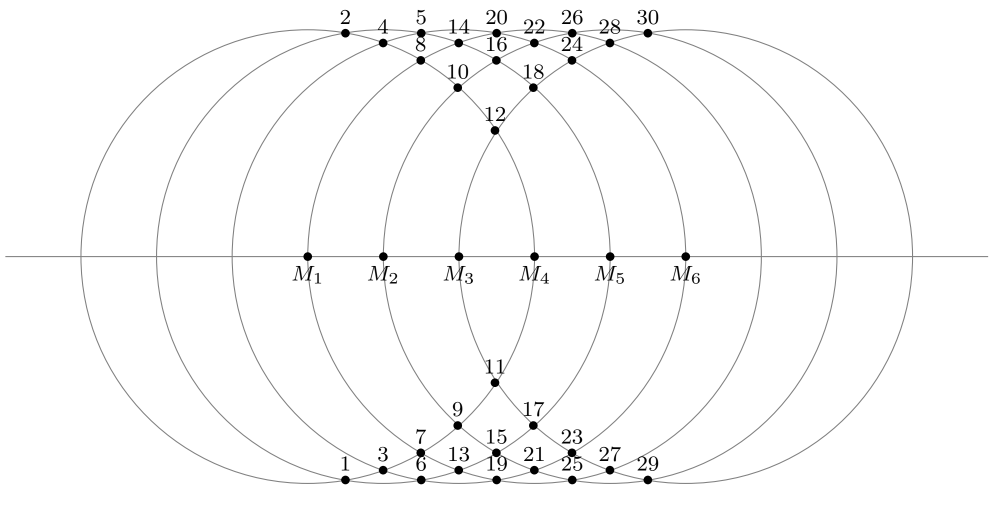
i)

Aufgabe 130511:
a) Ermittle die größte Anzahl von Schnittpunkten, die 6 voneinander verschiedene gleichgroße Kreise insgesamt miteinander haben können! Dabei sind als Schnittpunkte jeweils die Schnittpunkte zweier Kreise zu verstehen.

b) Zeichne ein Beispiel, bei dem 6 Kreise die unter a) ermittelte größte Anzahl von Schnittpunkten miteinander haben und die Kreismittelpunkte überdies alle auf einer und derselben Geraden liegen! Wähle als Radius $r = 3$ cm und nummeriere die Schnittpunkte.

Lösung von Steffen Polster:
a) Zwei Kreise können sich höchstens in 2 Punkten schneiden. Die größtmögliche Anzahl von Schnittpunkten der sechs Kreise entsteht, wenn jeder Kreis jeden der anderen fünf anderen zweimal schneidet. Die scheinbare Schnittpunktzahl $6 \cdot 5 = 60$ muss aber noch durch 2 geteilt werden, da bei diesem Produkt jeder Schnittpunkt zweimal gezählt wurde. Damit gibt es höchstens 30 Schnittpunkte.

b) Die Mittelpunkte der sechs Kreise müssen voneinander einen Abstand kleiner als 2 mal den Radius $r = 3$ cm haben, da sie nur so sich paarweise in jeweils zwei Punkten schneiden können.
Ein mögliches Beispiel ist:

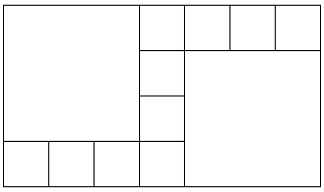


Aufgabe 220514:
Ein Rechteck mit den Seitenlängen 4 cm und 7 cm soll in Quadrate zerlegt werden. Zwei dieser Quadrate sollen die Seitenlänge 3 cm haben. Die anderen Quadrate sollen dann noch so groß wie möglich sein.

a) Zeichne eine Zerlegung, von der du vermutest, dass sie die geforderten Eigenschaft hat!

Wie viel Quadrate (außer den beiden der Seitenlänge 3 cm) kommen in deiner Zeichnung insgesamt vor?
b) Beweise, dass in jeder Zerlegung der geforderten Art diese anderen Quadrate alle dieselbe Seitenlänge haben müssen!
Wie groß ist sie? Wie kann man die Anzahl dieser Quadrate auch rechnerisch finden, ohne sie zu zeichnen?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



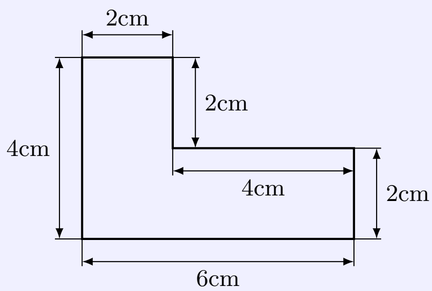
a) Eine Zerlegung liegt z. B. in der Abbildung vor. Außer den beiden Quadraten der Seitenlänge 3 cm kommen 10 Quadrate vor.

b) Da $2 \cdot 3 > 4$ ist, können die beiden Quadrate der Seitenlänge 3 cm nicht in Richtung der Rechteckseiten zu 4 cm nebeneinander liegen, sondern nur in Richtung der Rechteckseiten zu 7 cm. Wegen $4 - 3 = 1$ und $7 - 2 \cdot 3 = 1$ bleibt dann neben diesen Quadraten in beiden Richtungen genau 1 cm Platz. Also müssen die anderen Quadrate, da sie möglichst groß sein sollen, alle die Seitenlänge 1 cm haben.

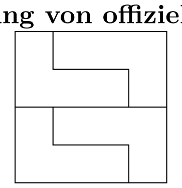
Wegen $4 \cdot 7 = 28$ beträgt der Flächeninhalt des Rechtecks 28 cm^2.
Wegen $3 \cdot 3 = 9$ hat jedes der großen Quadrate den Flächeninhalt 9 cm^2, beide zusammen haben also den Flächeninhalt 18 cm^2. Für die Quadrate von je 1 cm Seitenlänge verbleibt somit der Flächeninhalt $28\text{cm}^2 - 18\text{cm}^2 = 10\text{cm}^2$.
Da jedes dieser Quadrate den Flächeninhalt 1 cm^2 hat, sind es genau 10 solcher Quadrate.

Aufgabe 240511:

Aus Flächenstücken wie in der Abbildung kann man eine Quadratfläche zusammensetzen, deren Seitenlänge 8 cm beträgt.
Wie viele solcher Flächenstücke sind hierzu erforderlich?
Weise die Richtigkeit deiner Antwort durch eine Zeichnung nach!

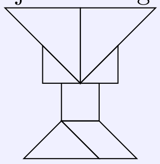


Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



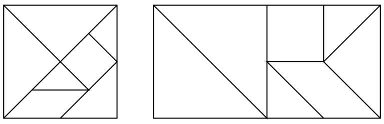
Es sind vier Flächenstücke erforderlich.
Eine Zeichnung der geforderten Art zeigt die Abbildung.

Aufgabe 250511:
Die Teilflächen der dargestellten Figur lassen sich
a) zu einer Quadratfläche und
b) zu einer Rechteckfläche, die keine Quadratfläche ist, zusammensetzen.
Gib je eine Möglichkeit dafür an!



Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

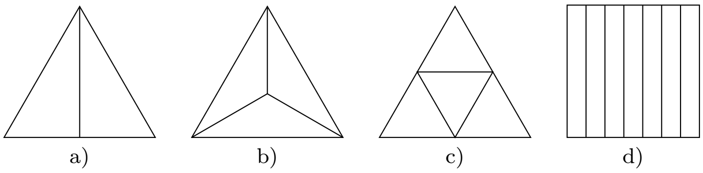
Eine mögliche Lösung ist



Aufgabe 300511:
Die folgenden Figuren sollen jeweils in gleichgroße Teile zerlegt werden, d. h. in Teile, die alle denselben Flächeninhalt haben.

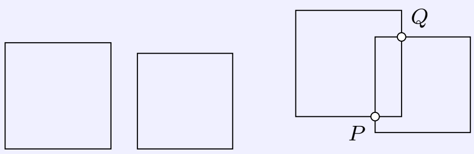
a) Zeichne ein gleichseitiges Dreieck der Seitenlänge 5 cm und zeichne darin ein, wie es in zwei gleich große Teile zerlegt werden kann!
b) Zeichne ein weiteres gleichseitiges Dreieck der Seitenlänge 5 cm und seine Zerlegung in drei gleich große Teile!
c) Zeichne für ein weiteres solches Dreieck eine Zerlegung in vier gleich große Teile!
d) Zeichne ein Quadrat der Seitenlänge 7 cm und eine Zerlegung dieses Quadrates in sieben gleich große Teile!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Abbildungen a bis d. Es gibt noch andere Lösungsmöglichkeiten.

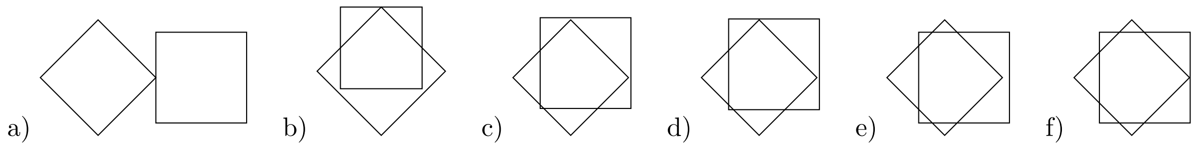


Aufgabe 320511:
Gegeben seien zwei unterschiedlich große Quadrate, wie sie hier dargestellt sind:

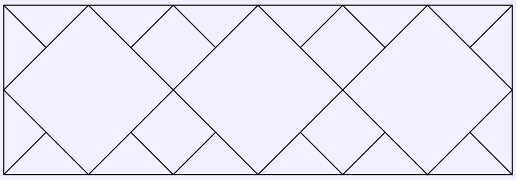
Bei der linken Abbildung haben sie keinen gemeinsamen Punkt, bei der rechten genau zwei, nämlich P und Q. Wie können die Quadrate liegen, wenn sie genau
(a) einen Punkt
(b) drei Punkte
(c) vier Punkte
(d) fünf Punkte
(e) sechs Punkte
(f) sieben Punkte
gemeinsam haben sollen? Zeichne die Quadrate in diesen verschiedenen Lagen.



Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

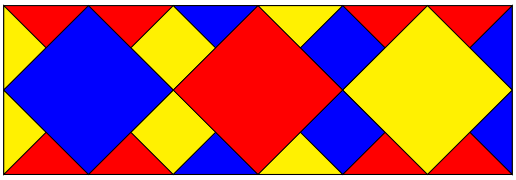


Aufgabe 330513:



Kann man die Felder der Abbildung so mit den Farben Blau, Rot, Gelb färben, dass jede Farbe eine gleichgroße Gesamtfläche bedeckt wie jede andere Farbe und dass niemals zwei Farben längs einer Strecke zusammenstoßen?
Wenn das möglich ist, stelle eine solche Färbung her! Eine Begründung wird nicht verlangt.

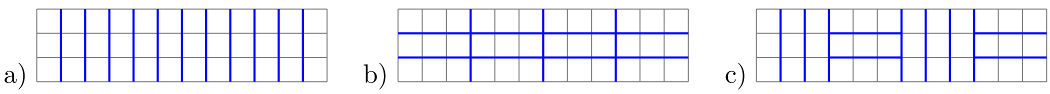
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Abbildung zeigt eine Färbung der geforderten Art.



Runde 2

Aufgabe 010524:
Aus einem Holzbrettchen von der Länge $a = 60$ cm und der Breite $b = 15$ cm sollen 12 kleine Brettchen von der Größe 5 cm mal 15 cm ausgesägt werden. Lutz bemüht sich, mit möglichst wenig Sägeschnitten auszukommen.
Wie viel Schnitte muss er mindestens durchführen? (Das Sägen „im Paket“ soll dabei nicht gestattet sein.) Wie viel Zentimeter beträgt der Sägeweg?

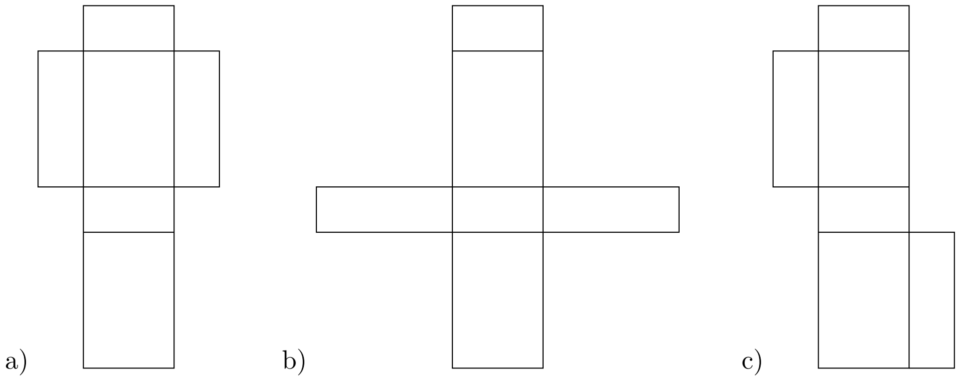
Lösung von Steffen Polster:



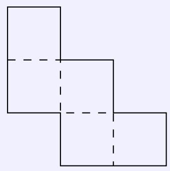
Lutz kann auf drei verschiedene Arten die Schnitte ausführen.
In Bild a) sägt er 11 mal vertikal, womit 12 kleine Brettchen entstehen. Er benötigt 11 Schnitte.
Im Bild b) schneidet er zweimal horizontal und anschließend 9 mal vertikal, d. h. wieder 11 Schnitte. Das gleiche Ergebnis erhält er, wenn er dreimal vertikal und danach 8 mal horizontal durchsägt.
Im dritten Bild c) zersägt er das Brett mit 3 Schnitten und 4 kleinere Bretter der Größe 15 cm $\times$ 15 cm und anschließend jedes Teilbrett zweimal, je nach Bedarf waagerecht oder senkrecht.
In allen drei Fällen benötigt er 11 Schnitte. Der gesamte Sägeweg ist bei a) $11 \cdot 15$ cm $= 165$ cm. Auch in den anderen zwei Fällen muss er 165 cm lang schneiden.

Aufgabe 030525:
Zeichne drei verschiedene Körpernetze für einen Quader mit den Kantenlängen $a = 3$ cm (Länge), $b = 2$ cm (Breite) und $c = 1$ cm (Höhe)!

Lösung von Steffen Polster:
Drei mögliche Netze des Quaders zeigt die Abbildung. Es sind weitere möglich:



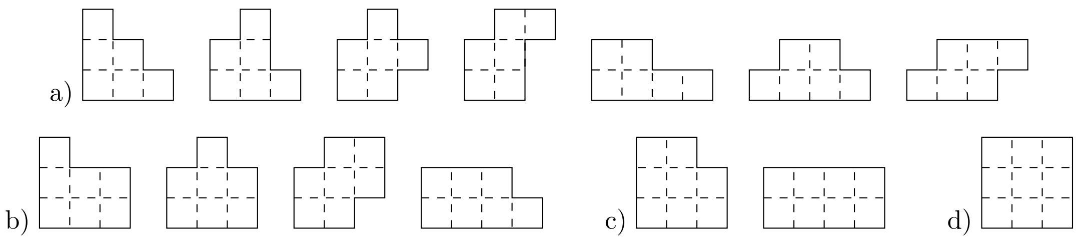
Aufgabe 230522:
Mit 12 gleichlangen Hölzchen sollen Begrenzungen von Flächen gelegt werden. Es sind jedesmal alle 12 Hölzchen für eine Fläche zu verwenden. Außerdem dürfen benachbarte Hölzchen nur gestreckte oder rechte Winkel bilden. Die Abbildung zeigt als Beispiel eine solche Fläche, die einen Inhalt von 5 Flächeneinheiten besitzt.



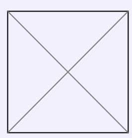
(Als Flächeneinheit gilt der Flächeninhalt eines Quadrates mit der Seitenlänge eines Hölzchens.) Zeichne jeweils eine solche Fläche mit einem Flächeninhalt von

a) 6 Flächeneinheiten,
b) 7 Flächeneinheiten,
c) 8 Flächeneinheiten,
d) 9 Flächeneinheiten!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Einige mögliche Lösungen zeigt nachstehende Abbildung:

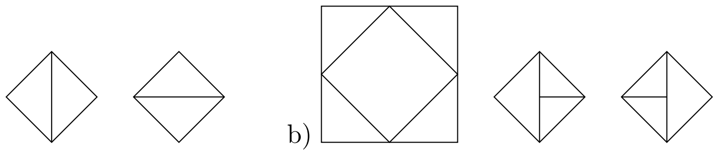


Aufgabe 300521:
a) Die Abbildung zeigt eine Zerlegung eines Quadrates durch geradlinige Schnitte in vier Teilfiguren.
Gib an, wie sich aus diesen Teilfiguren zwei einander gleichgroße Quadrate zusammensetzen lassen! Als Lösung genügt eine Zeichnung der beiden neu zusammengesetzten Quadrate.



b) Stelle fest, ob man ein Quadrat durch geradlinige Schnitte so in sechs Teilfiguren zerlegen kann, dass sich aus ihnen zwei einander gleichgroße Quadrate zusammensetzen lassen!
Wenn eine solche Zerlegung möglich ist, genügt es als Lösung, eine solche Zerlegung und die beiden neu zusammengesetzten Quadrate zu zeichnen.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Abbildungen a, b zeigen jeweils Zeichnungen der geforderten Art. Es gibt noch mehrere andere Möglichkeiten.

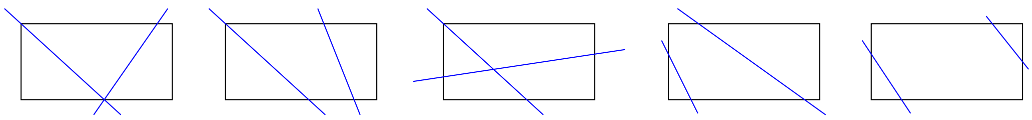


a) b)

Aufgabe 320523:
Zeichne fünf Rechtecke! Zu jedem dieser Rechtecke sollen dann zwei Geraden gezeichnet werden, die den Rand des Rechtecks schneiden und dabei das betreffende Rechteck in folgende Figuren zerlegen:

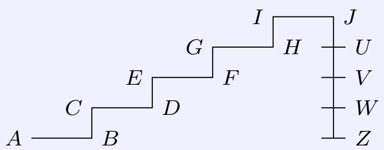
a) Zwei Dreiecke und ein Viereck.
b) Ein Dreieck und zwei Vierecke.
c) Ein Dreieck und drei Vierecke.
d) Ein Dreieck, ein Viereck und ein Fünfeck.
e) Zwei Dreiecke und ein Sechseck.
Führe diese Zeichnungen aus! Begründungen werden nicht verlangt

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Abbildung zeigt für a) bis e) je ein Beispiel, wie die Geraden liegen können.



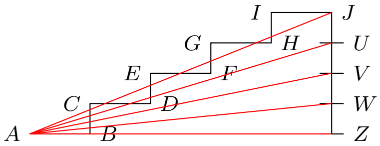
a) b) c) d) e)

Aufgabe 330523:
Die Abbildung zeigt eine treppenartig aufsteigende Linie $ABCDEFGHIJ$ und eine abwärtsgehende Strecke JZ.
Alle Winkel bei B, C, D, E, F, G, H, I, J sind rechte Winkel.
Die Strecken BC, DE, FG, HI haben einander gleiche Länge, doppelt so lang sind AB, CD, EF, GH, IJ, und viermal so lang ist JZ.
Diese Strecke ist in vier gleichlange Strecken JU, UV, VW, WZ zerlegt.



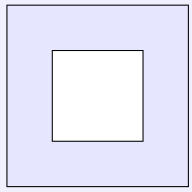
a) Konstruiere eine derartige Figur $ABCDEFGHIJUVWZ$!
b) Finde dann durch Konstruktion die Anzahl der Schnittpunkte, die beim Schnitt der Treppenlinie $ABCDEFGHIJ$
(1) mit der Strecke AJ zwischen A und J,
(2) mit der Strecke AU zwischen A und U,
(3) mit der Strecke AV zwischen A und V,
(4) mit der Strecke AW zwischen A und W
vorkommen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



a) Die Abbildung zeigt die zu konstruierende Figur; zusätzlich wurden die Strecken AJ, AU, AV, AW konstruiert.
Als gesuchte Anzahlen von Schnittpunkten sind daran ersichtlich: b) 7, c) 3, d) 1, e) 1.

Aufgabe 340522:
Die Abbildung zeigt eine ringförmige Fläche. Sie wird von einem Quadrat der Seitenlänge 4 cm und einem Quadrat der Seitenlänge 2 cm eingeschlossen.



Beide Quadrate haben denselben Mittelpunkt, jede Seite des kleinen Quadrats ist zu einer Seite des großen Quadrates parallel.
Nun sollen mehrere Geraden gezeichnet werden, so dass sie, genügend verlängert, die ringförmige Fläche in Teilflächen zerlegen. Die Teilflächen einer Zerlegung sollen einander gleiche Größe und gleiche Form haben. Folgende Anzahlen sollen erreicht werden:

Aufgabe	Anzahl der Geraden	Anzahl der entstehenden Teilflächen
(a)	2	4
(b)	3	6
(c)	4	8
(d)	6	12

Fertige zu jeder der Aufgaben (a), (b), (c), (d) eine Zeichnung an!
Zu zwei der Aufgaben (a), (b), (c), (d) fertige noch je eine weitere Zeichnung an, in der die Teilflächen von anderer Gestalt sind als in den vorigen Zeichnungen!
Eine Begründung oder Beschreibung wird nicht verlangt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Abbildung zeigt Zeichnungen der geforderten Art.

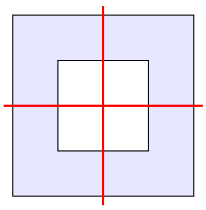


Abbildung a_1

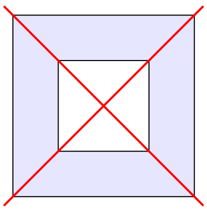


Abbildung a_2

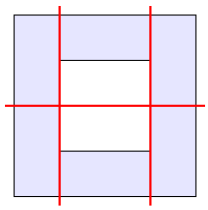


Abbildung b

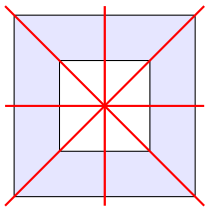


Abbildung c

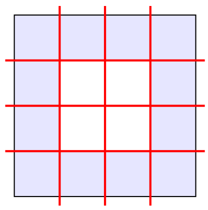


Abbildung d

II.III. Konstruktionen, Kongruenz-Abbildungen

Runde 1

Aufgabe 100511:

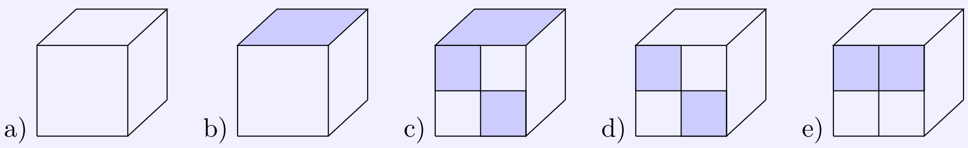


Abbildung 1

Die Abbildung 1 zeigt unter a) bis e) von fünf Würfeln je ein Schrägbild.

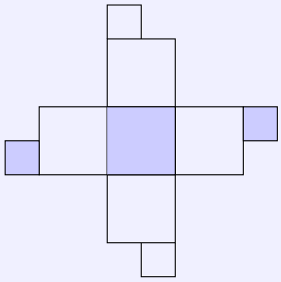


Abbildung 2

Die Abbildung 2 zeigt ein Netz, aus dem genau ein Würfel hergestellt werden kann, wenn die Seite mit den gefärbten Flächen nach außen kommen soll.
Beantworte für jedes der fünf Schrägbilder die Frage, ob es den aus dem abgebildeten Netz (Abbildung 2) hergestellten Würfel darstellen kann oder nicht!
(In den Fällen, in denen die Antwort „Ja“ lautet, genügt die Angabe dieser Antwort. In den Fällen, in denen die Antwort „Nein“ lautet, ist sie zu begründen.)

Lösung von Steffen Polster:
Würfel a) ist keine Lösung sein, da jede Ecke, die nicht an eine aus vier kleinen Quadraten bestehende Seitenfläche stößt, die komplett farbige Quadratseite berührt.

Würfel b) kann aus dem Würfelnetz hergestellt werden.

Würfel c) ist keine Lösung sein. Die Fläche mit den kleinen Quadraten stößt nicht an die Fläche, die vollständig farbig ist.

Würfel d) kann aus dem Würfelnetz hergestellt werden.

Würfel e) kann keine Lösung sein, da die kleinen farbigen Quadrate nicht nebeneinander liegen. Sie berühren sich nur an einer Ecke.

Aufgabe 160512:
Auf einer Geraden g sollen fünf Punkte A, B, C, D, E in dieser Reihenfolge angeordnet sein und folgende Bedingungen erfüllen:

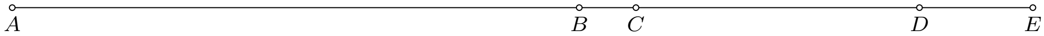
(1) Die Strecke AE hat die Länge $AE = 18$ cm.
(2) Die Strecke AD ist 2 cm kürzer als die Strecke AE.
(3) Die Strecke CD hat die Länge $CD = 5$ cm.
(4) Die Strecke AB ist 3 cm länger als die Strecke CE.

a) Konstruiere fünf derartige Punkte A, B, C, D, E!
b) Ermittle die Längen der Strecken AD, AB, BC!

Als Lösung genügt:
a) eine Konstruktion ohne Beschreibung und
b) die Ermittlung der Streckenlängen AD, AB, BC aus den Bedingungen (1) bis (4).

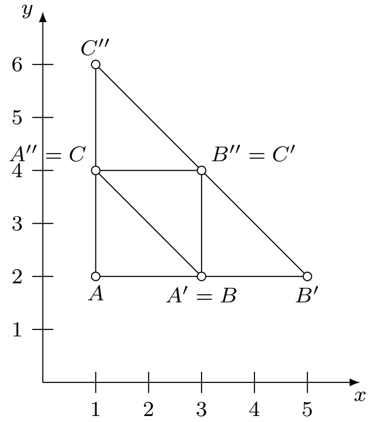
Lösung von Steffen Polster:
Aus (2) und (1) wird $AD = 16$ cm und somit mit (3) $AC = 11$ cm.
Weiterhin ist $CE = AE - AC = 18$ cm -11 cm $= 7$ cm und damit mit (4) $AB = 10$ cm.
Für die Streckenlängen folgt somit:
$AD = 16$ cm, $AB = 10$ cm, $BC = AC - AB = 11$ cm -10 cm $= 1$ cm.

Konstruktion:



Aufgabe 290514:
a) Zeichne in einem Koordinatensystem (Einheit 1 cm) ein Dreieck ABC mit $A(1;2)$, $B(3;2)$, $C(1;4)$!
b) Wähle $\overrightarrow{AB}$ als Verschiebungspfeil und zeichne das bei dieser Verschiebung aus dem Dreieck ABC entstehende Bild $A'B'C'$ in dasselbe Koordinatensystem!
c) Zeichne dazu noch das bei der Verschiebung $\overrightarrow{AC'}$ entstehende Bild $A''B''C''$ des Dreiecks $A'B'C'$!
d) Welche Dreiecke und welche Parallelogramme sind mit ihren vollständigen Seitenkanten in der nun entstandenen Gesamtfigur insgesamt enthalten? Zähle diese Dreiecke und Parallelogramme wie üblich durch Angabe ihrer Eckpunkte auf!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

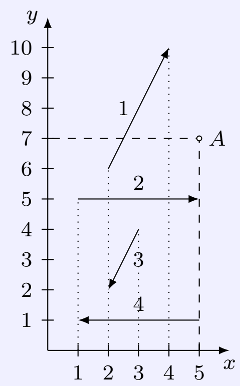


a) bis c) siehe Abbildung.

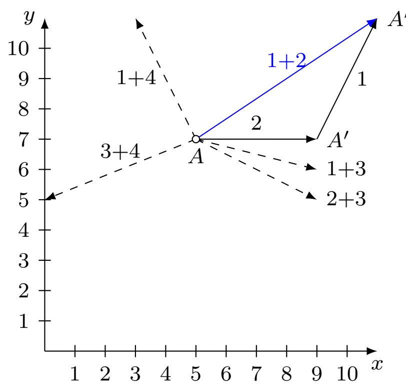
d) In der Gesamtfigur sind insgesamt die Dreiecke ABC, $AB'C''$, $A'B'C'$, $A'B''C$, $A''B''C''$ und die Parallelogramme $ABB''A''$, $A'B'B''A''$, $A'C'C''A''$ mit ihren vollständigen Seitenkanten enthalten.

Aufgabe 310513:

Die Abbildung zeigt einen Punkt A und vier Verschiebungspfeile 1, 2, 3, 4.
Verschiebt man den Punkt nacheinander mit zwei dieser Verschiebungspfeile, so erhält man einen Punkt A''.
Stelle fest, welche zwei Verschiebungspfeile Du nehmen musst, damit A'' möglichst weit von A entfernt ist!
Eine Begründung wird nicht verlangt.



Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

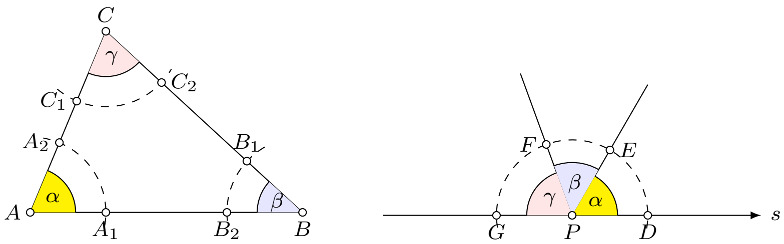


Der Punkt A'' ist dann am weitesten von A entfernt, wenn man auf A die Verschiebungspfeile 2 und 1 (bzw. 1 und 2) anwendet.

Runde 2

Aufgabe 010525:
Zeichne ein beliebiges Dreieck und nenne seine Winkel α, β und γ!
Konstruiere mit Zirkel und Lineal außerhalb des Dreiecks den Winkel $\alpha + \beta + \gamma$! Wie groß ist der konstruierte Winkel vermutlich?

Lösung von Steffen Polster:

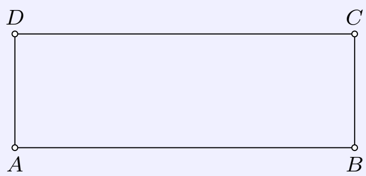


Die linke Abbildung zeigt das Dreieck ABC mit den Innenwinkeln α, β und γ. Zur Konstruktion der Summe der Winkel $\alpha + \beta + \gamma$ wählt man einen beliebigen Punkt P und von diesem aus einen Strahl s. (rechte Abbildung)

Um die Punkte A, B und C des Dreiecks und den Punkt P zeichnet man Kreisbögen mit gleichem Radius. Die Schnittpunkte der Kreisbögen mit den Dreiecksseiten seien A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 und C_2. Der Schnittpunkt des Kreisbogens mit dem Strahl s sei D.

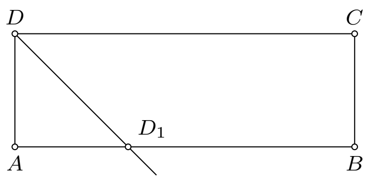
Die Zirkelspannen A_1A_2, B_1B_2 und C_1C_2 trägt man nacheinander, beginnend bei D, auf dem Kreisbogen um P ab und erhält die Schnittpunkte E, F und G. Verbindet man G mit P, so ist der Winkel $\angle DPG$ die Summe der Innenwinkel des Dreiecks. Man sieht, dass D, P und G auf einer Geraden liegen. Der Winkel $\alpha + \beta + \gamma$ ist also ein gestreckter Winkel und beträgt somit 180°.

Aufgabe 070523:



Gegeben ist ein Rechteck $ABCD$ (siehe Abbildung) mit folgenden Seitenlängen: $AB = 6$ cm und $BC = 2$ cm.
Konstruiere unter alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal das rechtwinklige Dreieck $\triangle DAD_1$, bei dem der Punkt D_1 auf der Seite AB liegt und der Winkel $\angle D_1DA$ eine Größe von 45° hat!

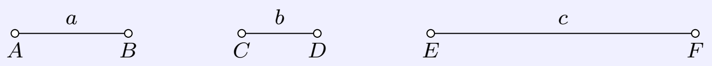
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Da der Winkel $\angle CDA$ ein rechter ist, ist der gesuchte Winkel $\angle D_1DA$ die Hälfte dieses Winkels.
Man halbiert daher den Winkel $\angle CDA$. Die Winkelhalbierende schneidet wegen $AD_1 = AD < AB$ die Seite AB im Punkt D_1. Das Dreieck $\triangle DAD_1$ ist das gesuchte.



Alternativ-Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Da der Winkel $\angle CDA$ ein rechter ist, ist der gesuchte Winkel $\angle D_1DA$ die Hälfte dieses Winkels.
Jede Diagonale eines Quadrate halbiert zwei gegenüberliegende Winkel des Quadrate.

Man konstruiert nun das Quadrat DAD_1D_2, indem man von A auf AB die Strecke AD_1 mit $AD = AD_1$ und von D auf DC die Strecke DD_2 mit $AD = AD_2$ abträgt, und verbindet D mit D_1.
Dann ist DD_1 Diagonale des Quadrats DAD_1D_2 und der Winkel $\angle D_1DA$ ist $45°$ groß. Das Dreieck $\triangle DAD_1$ ist daher das gesuchte.

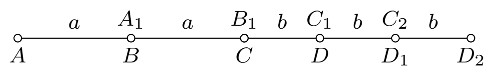
Aufgabe 090523:



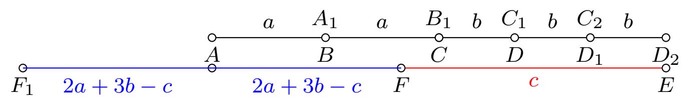
Gegeben seien drei Strecken mit den Längen a, b und c (siehe Abbildung).
Konstruiere eine Strecke mit der Länge $2 \cdot (2a + 3b - c)$!
Bei der Konstruktion darf die Maßeinteilung des Lineals nicht benutzt werden. Eine Konstruktionsbeschreibung ist nicht verlangt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Konstruktion von Strecken der Längen $2a$ und $3b$

Konstruktion einer Strecke der Länge $2a + 3b$

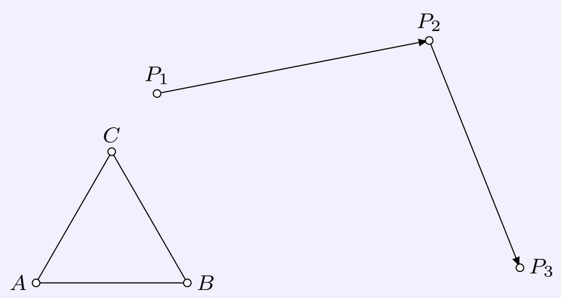


Konstruktion der Strecken der Länge $2a + 3b - c$ und $2(2a + 3b - c)$



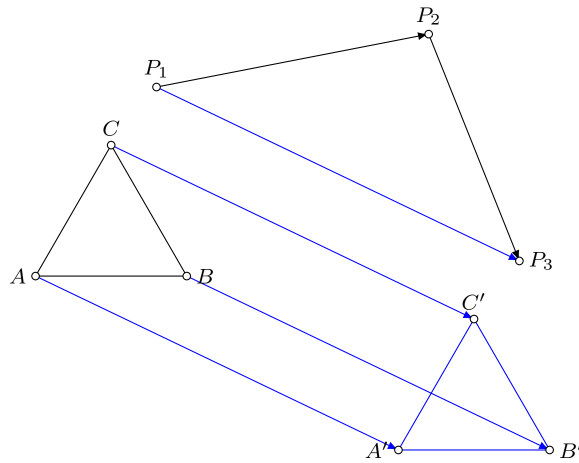
Die Strecke $\overline{FF_1}$ ist die gesuchte.

Aufgabe 100521:

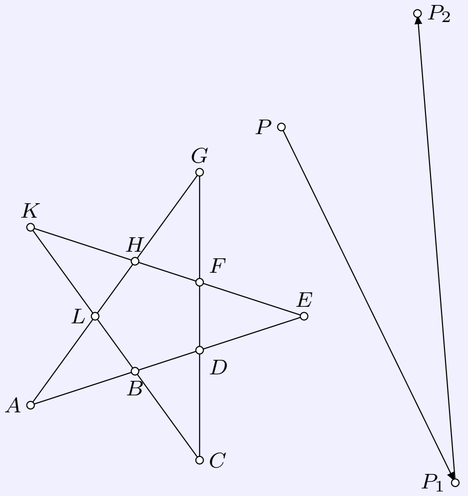


Auf der Abbildung sind ein Dreieck $\triangle ABC$ und zwei Verschiebungspfeile $\overrightarrow{P_1P_2}$ und $\overrightarrow{P_2P_3}$ abgebildet.
Mit dem Dreieck $\triangle ABC$ sollen nacheinander die Verschiebungen ausgeführt werden, die durch die Verschiebungspfeile $\overrightarrow{P_1P_2}$ und $\overrightarrow{P_2P_3}$ gegeben sind.
Konstruiere unter alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal das dabei entstehende Dreieck $\triangle A_2B_2C_2$!
(Konstruktionsbeschreibung wird nicht verlangt.)

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Zwei Verschiebungen können zu einer Verschiebung zusammengefasst werden, indem der Verschiebungspfeil $\overrightarrow{P_1P_3}$ gebildet wird.
Zu diesem Verschiebungspfeil werden die Parallelen durch die Punkte A, B und C konstruiert. Der Abstand P_1P_3 wird auf die Parallelen zu dem Verschiebungspfeil in den jeweiligen Punkten A, B und C abgetragen.



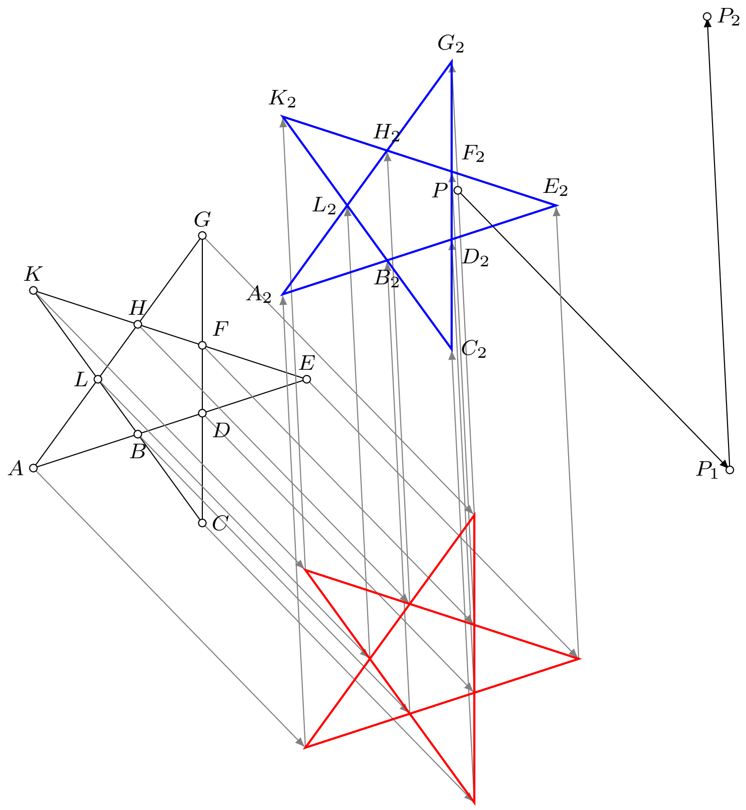
Aufgabe 110521:



Auf der Abbildung sind eine Sternfigur $ABCDEFGHKL$ und zwei Verschiebungspfeile $\overrightarrow{PP_1}$ und $\overrightarrow{P_1P_2}$ abgebildet.
Auf die Sternfigur sollen nacheinander die Verschiebungen $\overrightarrow{PP_1}$ und $\overrightarrow{P_1P_2}$ angewendet werden.

Konstruiere unter alleiniger Verwendung von Zirkel, Lineal und Zeichendreieck die dabei entstehende Sternfigur $A_2B_2C_2D_2E_2F_2G_2H_2K_2L_2$!
Eine Konstruktionsbeschreibung wird nicht verlangt.

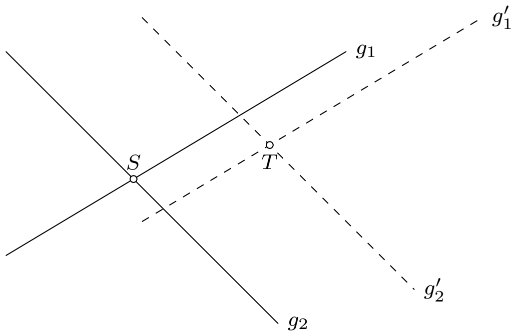
Lösung von Steffen Polster:



Aufgabe 130522:
Zeichne zwei Geraden g_1 und g_2, die einander in einem Punkte S schneiden! Wähle einen Punkt T, der auf keiner der beiden Geraden liegt!
Konstruiere die bei der Verschiebung ST entstehenden Bilder g_1' und g_2' der beiden Geraden!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

Als vollständige Lösung gilt jede Zeichnung mit einer möglichen Lage der beiden Geraden g_1, g_2, der Punkte S und T sowie der beiden Bildgeraden $g_1 \parallel g_1'$ und $g_2 \parallel g_2'$ die einander im Punkte T schneiden.

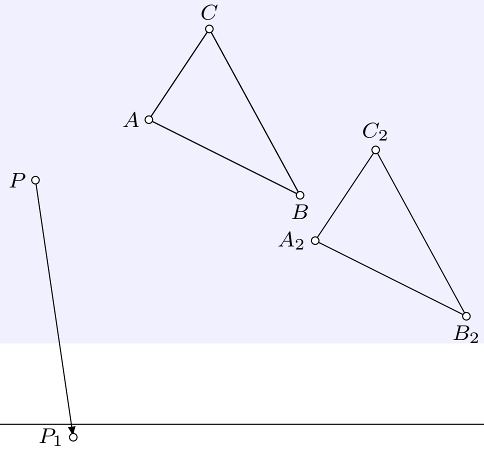


Aufgabe 140521:

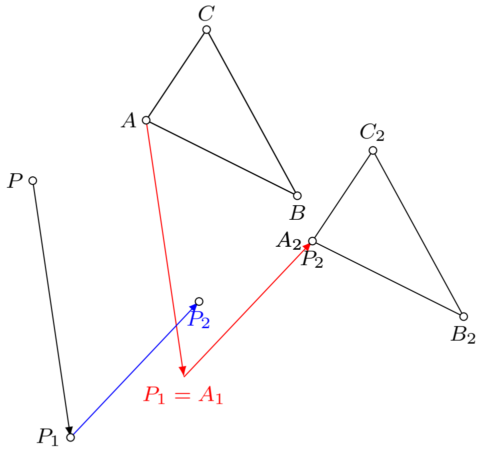
Auf dem beiliegenden Arbeitsblatt sind ein Dreieck ABC, ein Verschiebungspfeil $\overrightarrow{PP_1}$ sowie ein Dreieck $A_2B_2C_2$ abgebildet.

Das Dreieck $A_2B_2C_2$ ist dadurch entstanden, dass auf das Dreieck ABC zuerst die Verschiebung $\overrightarrow{PP_1}$, und dann eine zweite Verschiebung angewendet wurde.

Konstruiere unter alleiniger Verwendung von Zirkel, Lineal und Zeichendreieck denjenigen Verschiebungspfeil $\overrightarrow{P_1P_2}$, der diese zweite Verschiebung angibt!
Eine Konstruktionsbeschreibung wird nicht verlangt.



Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Als Lösung gilt jede einwandfreie Zeichnung, in der (1. Lösungsweg) für mindestens einen der Punkte A, B, C sein Bild A_1, B_1 bzw. C_1 bei der Verschiebung $\overrightarrow{PP_1}$ und dann gleichsinnig parallel und gleichlang zu $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{B_1B_2}$ bzw. $\overrightarrow{C_1C_2}$ der gesuchte Verschiebungspfeil $\overrightarrow{P_1P_2}$ oder

(2. Lösungsweg) gleichsinnig parallel und gleichlang zu einem der Verschiebungspfeile $\overrightarrow{AA_2}$, $\overrightarrow{BB_2}$ bzw. $\overrightarrow{CC_2}$ der Verschiebungspfeil $\overrightarrow{PP_2}$ und dann durch Verbindung von P_1 mit P_2 der gesuchte Verschiebungspfeil $\overrightarrow{P_1P_2}$ konstruiert wurde.

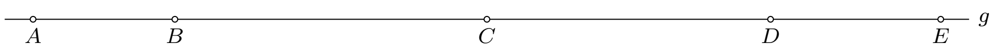
Aufgabe 150524:
Gegeben sei eine Gerade g und auf ihr ein Punkt A.
Konstruiere auf dieser Geraden g vier weitere Punkte B, C, D, E, die in dieser Reihenfolge auf derselben von A ausgehenden Halbgeraden liegen und für die folgendes zutrifft:

(1) Die Strecke AB ist 2,5 cm lang.
(2) Die Strecke BC ist um 0,3 dm länger als die Strecke AB.
(3) Die Strecke CE ist genauso lang wie die Summe der Strecken AB und BC.
(4) Die Strecke DE ist um 50 mm kürzer als die Strecke CE.

Beschreibe die Konstruktion, und ermittle die Länge der Strecke AD (in cm)!

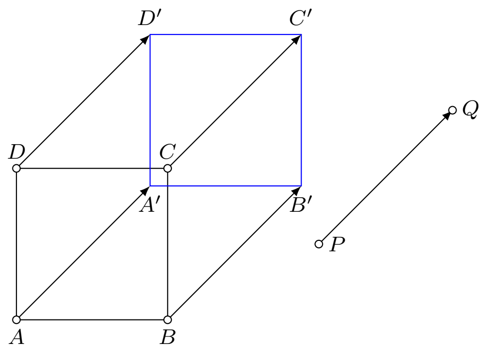
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wir tragen zunächst von A aus auf g mit dem Zirkel eine Strecke von 2,5 cm Länge ab. Ihr anderer Endpunkt sei 3.
Dann tragen wir wegen 0,3 dm = 3 cm und 2,5 cm + 3 cm = 5,5 cm von B aus auf der Halbgeraden von g, auf der A nicht liegt, eine Strecke von 5,5 cm Länge ab und nennen ihren anderen Endpunkt C.

Wegen 2,5 cm + 5,5 cm = 8 cm tragen wir nun von C aus auf der Halbgeraden von g, auf der B nicht liegt, eine Strecke von 8 cm Länge ab und nennen ihren anderen Endpunkt E.
Da D laut Aufgabe zwischen C und E liegt, tragen wir schließlich wegen 50 mm = 5 cm und 8 cm - 5 cm = 3 cm von E aus auf derselben Halbgeraden von g, auf der C liegt, eine Strecke von 3 cm Länge ab und nennen ihren anderen Endpunkt D.
Wegen 2,5 cm + 5,5 cm + 8 cm - 3 cm = 13 cm hat die Strecke AD eine Länge von 13 cm.



Aufgabe 160523:
Zeichne ein Quadrat $ABCD$ mit $AB = 4$ cm!
Zeichne dann einen Verschiebungspfeil $\overrightarrow{PQ}$, der 5 cm lang ist und parallel zur Geraden durch A und C in Richtung von A nach C verläuft!
Konstruiere das Bild $A'B'C'D'$ des Quadrates $ABCD$ bei der Verschiebung $\overrightarrow{PQ}$!
Eine Konstruktionsbeschreibung wird nicht verlangt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

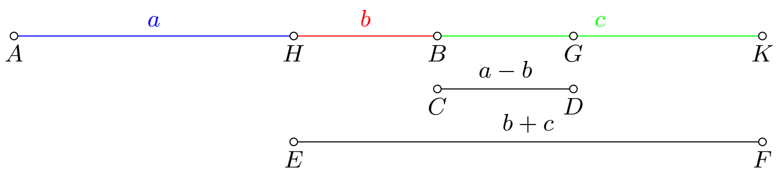


Aufgabe 170524:
Drei vorgegebene Strecken AB, CD, EF und drei Strecken gesuchter Längen a, b, c sollen die folgenden Eigenschaften haben:

$AB = a + b = 5{,}6$ cm; $CD = a - b = 1{,}8$ cm; $EF = b + c = 6{,}2$ cm.

Zeichne drei derartige Strecken AB, CD, EF, und ermittle aus ihnen durch eine Konstruktion (nur mit Zirkel und Lineal) die gesuchten Längen a, b und c!
Begründe, warum deine Konstruktion die gesuchten Längen a, b, c ergibt, wenn sie die geforderten Eigenschaften haben!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Trägt man auf der Verlängerung von AB über B hinaus eine Strecke BG der Länge $BG = CD$ ab, so wird

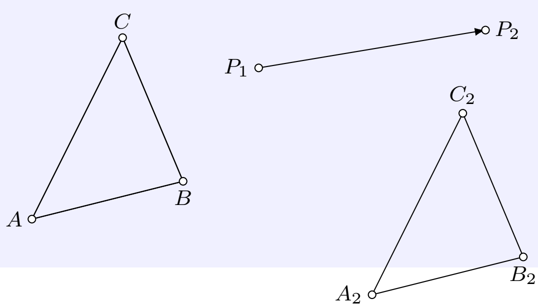
$$AG = AB + BG = AB + CD = (a + b) + (a - b) = 2a$$

Konstruiert man den Mittelpunkt H der Strecke AG, so wird folglich $AH = a$.
Hiernach wird ferner $HB = AB - AH = (a + b) - a = b$.
Konstruiert man daher auf der Verlängerung von HB über B hinaus einen Punkt K so, dass $HK = EF$ gilt, so ergibt sich

$$BK = HK - HB = EF - HB = (b + c) - b = c$$

Aufgabe 190523:
Auf diesem Arbeitsblatt sind ein Dreieck ABC, ein Verschiebungspfeil $\overrightarrow{P_1P_2}$ sowie ein Dreieck $A_2B_2C_2$ abgebildet. Gesucht ist ein Verschiebungspfeil $\overrightarrow{PP_1}$ mit folgender Eigenschaft:

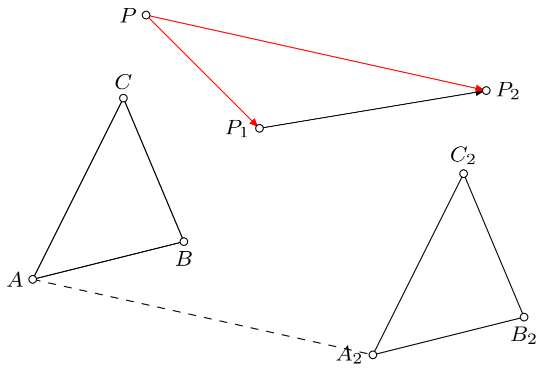
Wendet man auf das Dreieck ABC zuerst die Verschiebung $\overrightarrow{PP_1}$ und dann die Verschiebung $\overrightarrow{P_1P_2}$ an, so entsteht das Dreieck $A_2B_2C_2$.



Konstruiere einen Verschiebungspfeil $\overrightarrow{PP_1}$ mit dieser Eigenschaft!

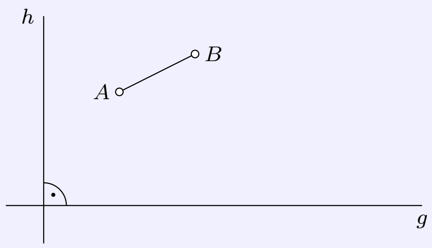
Verwende dabei nur Lineal (ohne Benutzung der Millimetereinteilung), Zirkel und (nur zum Konstruieren von Parallelen) Zeichendreieck! Eine Konstruktionsbeschreibung wird nicht verlangt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Beispiel einer als Lösung möglichen Konstruktion:



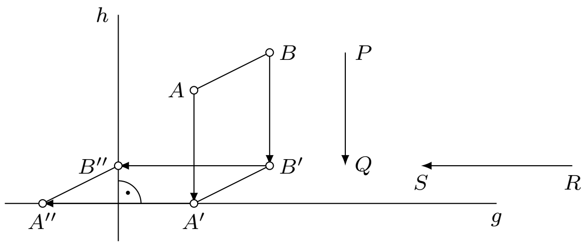
Aufgabe 210524:
Auf dem Arbeitsblatt sind zwei Geraden g, h und eine Strecke AB gegeben. Konstruiere einen Verschiebungspfeil PQ parallel zu h und danach einen Verschiebungspfeil RS parallel zu g, und zwar so, dass folgendes gilt:

Wenn man die Strecke AB durch die Verschiebung PQ in die Strecke $A'B'$ überführt und diese danach durch die Verschiebung RS in die Strecke $A''B''$, so liegt A'' auf g und B'' auf h.



Eine Beschreibung und Begründung der Konstruktion wird nicht verlangt.

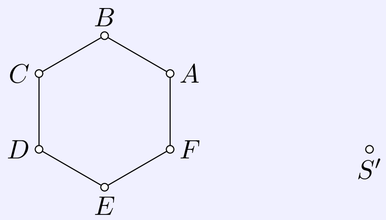
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



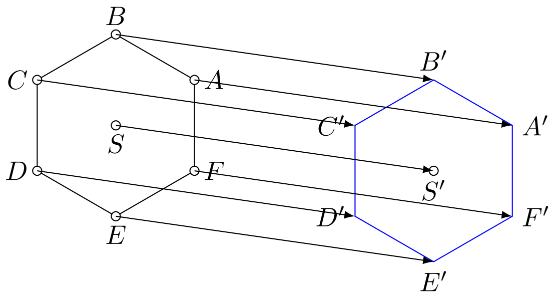
Aufgabe 230524:
In der nachstehenden Abbildung sind ein regelmäßiges Sechseck $ABCDEF$ und ein Punkt S' gegeben. Der Schnittpunkt der Diagonalen AD, BE und CF des Sechsecks sei S.

Wir betrachten diejenige Verschiebung, bei der S den Bildpunkt S' hat.

Konstruiere den Verschiebungspfeil $\overrightarrow{SS'}$ und das Bild $A'B'C'D'E'F'$ des Sechsecks $ABCDEF$ bei dieser Verschiebung!



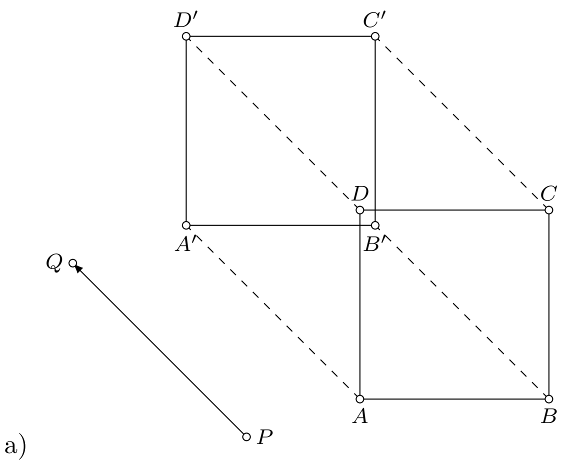
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

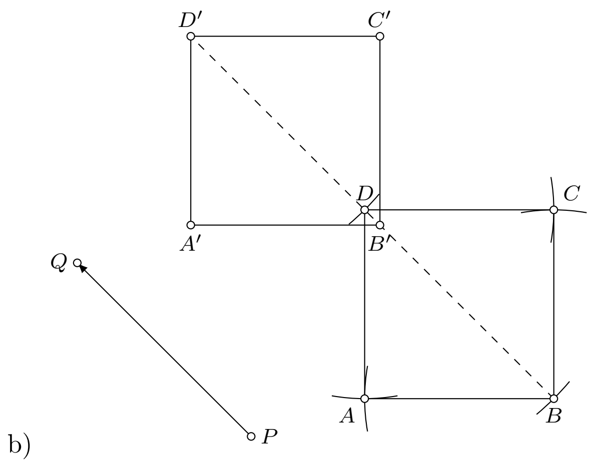


Aufgabe 250524:
Zeichne ein Quadrat $A'B'C'D'$ mit $A'B' = 5{,}0$ cm! Zeichne dann einen Verschiebungspfeil $\overrightarrow{PQ}$, der 6,5 cm lang ist und parallel zur Geraden durch B' und D' in Richtung von B' nach D' verläuft!

Es soll nun zum Bild $A'B'C'D'$ bei dieser Verschiebung das Original $ABCD$ ermittelt werden. Bei der Lösung dieser Aufgabe darf die mm-Skala des Lineals nicht mehr verwendet werden.
a) Löse die genannte Aufgabe so, dass außer Zirkel und Lineal auch das Zeichendreieck zum Ziehen von Parallelen durch die Punkte A', B', C' und D' benutzt wird!
b) Löse (in einer neuen Zeichnung) die Aufgabe nur mit Zirkel und Lineal und so, dass weder die Gerade durch A und A' noch die Gerade durch C und C' gezeichnet wird!
Eine Begründung und Konstruktionsbeschreibungen werden nicht verlangt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



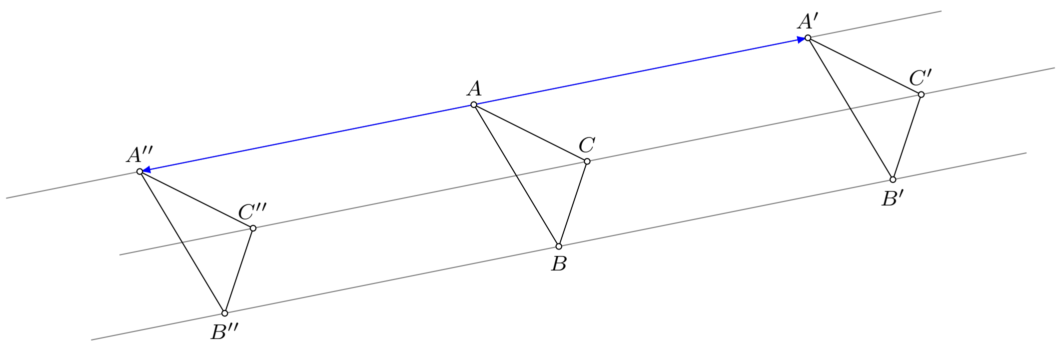


Aufgabe 280523:
a) Zeichne eine Gerade g und ein Dreieck ABC, dessen Eckpunkt C auf g liegt, während A und B nicht auf g liegen, sondern sich auf verschiedenen Seiten der Geraden g befinden!

b) Von einer Verschiebung wird verlangt, dass bei ihr die Gerade g sich selbst als Bild hat und dass die Verschiebungsweite 6 cm beträgt.
Wie viele solcher Verschiebungen gibt es insgesamt?
Zeichne zu jeder dieser Verschiebungen einen Verschiebungspfeil!

c) Konstruiere das Bild des Dreiecks ABC bei jeder der in b) genannten Verschiebungen!

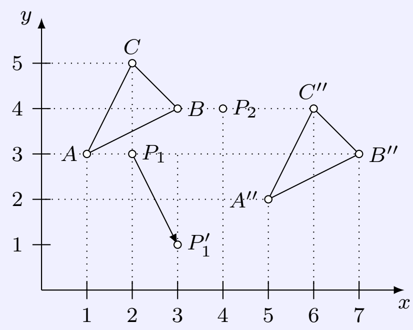
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



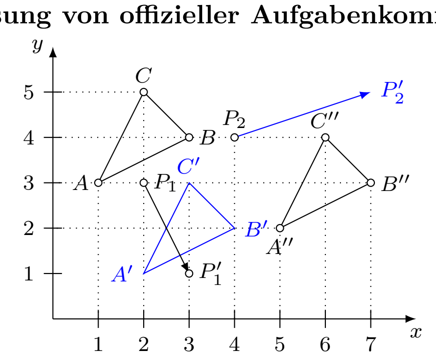
a) Die Abbildung zeigt ein Beispiel der geforderten Zeichnung von g und $\triangle ABC$.
b) Es gibt genau zwei solcher Verschiebungen. Verschiebungspfeile hierzu sind in der Abbildung gezeichnet.
c) Die Bilder $A'B'C'$ und $A''B''C''$ des Dreiecks ABC bei den beiden in b) genannten Verschiebungen sind ebenfalls in der Abbildung konstruiert.

Aufgabe 310522:

In der Abbildung sind gegeben: Zwei Dreiecke ABC und $A''B''C''$, ein Verschiebungspfeil $\overrightarrow{P_1P_1'}$ sowie ein Punkt P_2.
a) Konstruiere das Bild $A'B'C'$ des Dreiecks ABC bei der Verschiebung mit dem Verschiebungspfeil $\overrightarrow{P_1P_1'}$!
b) Konstruiere den bei P_2 beginnenden Verschiebungspfeil $\overrightarrow{P_2P_2'}$ derjenigen Verschiebung, bei der $A'B'C'$ das Bild $A''B''C''$ hat!
Eine Beschreibung der Konstruktionen wird nicht verlangt.



Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



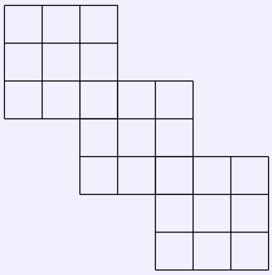
Die Abbildung zeigt eine verlangte Konstruktion.
Die zu konstruierenden Punkte A', B', C', P_2' sind eindeutig bestimmt, für die Wahl von Hilfslinien gibt es verschiedene Möglichkeiten.

III. Kombinatorik

III.I. Kryptogramme, Figuren (mit Zahlen)

Runde 1

Aufgabe V00509:

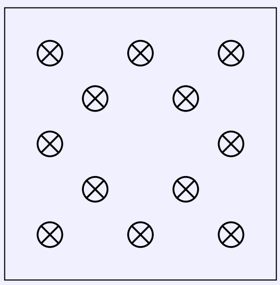


Setze in der Figur Zahlen zwischen 1 und 9 so ein, dass die waagerechte und senkrechte Addition stets die Summe von 18 ergibt!

Lösung von Steffen Polster:

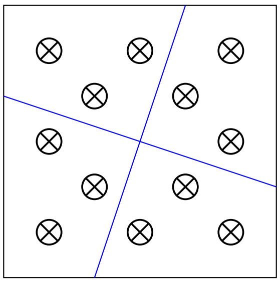
7	8	3				
6	8	4				
5	2	6	4	1		
		3	9	6		
		2	5	4	6	1
				6	3	9
				1	9	8

Aufgabe V00511:



In einem quadratischen Obstgarten sind 12 Obstbäume so angeordnet, wie die Zeichnung zeigt.
Der Garten soll durch zwei gerade Linien so in vier Teile zerlegt werden, dass auf jedem Stück drei Bäume stehen.

Lösung von Steffen Polster:



Aufgabe 010513:

Ersetze die fehlenden Ziffern!
Wie hast du die fehlenden Ziffern gefunden?

	□	□	□	·	□	2
	□	0	8			
□	6	□				
□	1	2	□			

Lösung von Steffen Polster:
Die Addition der zwei Zwischenprodukte ergibt sofort

	□	□	□	·	□	2
	5	0	8			
□	6	2				
□	1	2	8			

Da das erste Zwischenprodukt 508 vollständig ist und durch Multiplikation des ersten Faktors mit 2 entsteht, ist der erste Faktor folglich 254.
Die letzten Stelle der zweiten Multiplikation ist 2 erhalten. Damit muss die Einerstelle von 254 entweder mit 3 oder 8 multipliziert werden. Nur mit 3 ergibt sich aber die Zehnerstelle 6 des zweiten Produkts und somit

	2	5	4	·	3	2
	5	0	8			
□	6	2				
□	1	2	8			

Die Ausgangsaufgabe ist vollständig bestimmt und ergibt damit als vollständige Lösung:

	2	5	4	·	3	2
	5	0	8			
7	6	2				
8	1	2	8			

Aufgabe 020514:

Bei dieser Multiplikationsaufgabe sind einige Ziffern unleserlich.
Sie sollen ergänzt werden.
Beschreibe, wie du die fehlenden Ziffern gefunden hast!

4	□	□	·	□	2	□
	□	3	□	□		
			□	1	2	
			□	□	4	□
	□	□	□	□	□	8

Lösung von Steffen Polster:
Aus den letzten zwei Spalten ergibt sich, dass das Ergebnis auf 68 und das dritte Zwischenprodukt auf 48 endet.

Die letzte Stelle des linken Faktors kann nur 1 oder 6 sein, um als letzte Stelle des zweiten Zwischenprodukts eine 2 zu erhalten. Die 1 im Zehner dieses Produkts muss aber durch einen Übertrag entstehen,

womit die letzte Stelle des linken Faktors sicher eine 6 ist. Für die Zehnerstelle dieses Faktors ist damit eine 0 oder 5 möglich.
Die Ziffer 0 kann ausgeschlossen werden, da dann die 3 im ersten Zwischenprodukt ohne einen Übertrag aus einer Multiplikation der 4 mit einer anderen Ziffer folgen müsste, was nicht möglich ist:

4	5	6	·	□	2	□
	□	3	□	□		
			9	1	2	
			□	□	4	8
	□	□	□	□	6	8

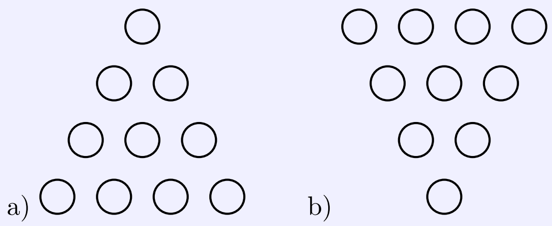
Der Einer des rechten Faktors kann nur noch 3 oder 8 sein. Die 3 entfällt, da das letzte Produkt dann nicht auf 48 enden kann.

4	5	6	·	□	2	8
	□	3	□	□		
			9	1	2	
			3	6	4	8
	□	□	□	□	6	8

Die noch offen erste Multiplikation wird durch Probieren gelöst, wobei nur die 3 die erste Stelle der zweiten Faktors sein kann. Werden noch alle Zwischenergebnisse addiert, ergibt sich als Ergebnis:

4	5	6	·	3	2	8
	1	3	6	8		
			9	1	2	
			3	6	4	8
	1	4	9	5	6	8

Aufgabe 030514:



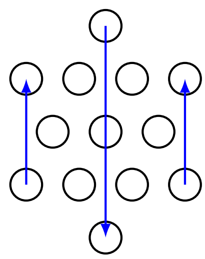
Zehn Pfennige liegen in der Anordnung auf dem Tisch, die die Abbildung a) zeigt. Es sollen einige Pfennige so umgelegt werden, dass die auf der Abbildung b) dargestellte Anordnung entsteht.

a) Wie viel Pfennige muss man mindestens umlegen?

b) Welche Pfennige sind das? Kreuze sie an!

Lösung von Steffen Polster:

Es müssen nur 3 Pfennige umgelegt werden, wie die Abbildung zeigt.



Aufgabe 080512:
Setze die Vielfachen der Zahl 3 von 3 bis 27 so in die einzelnen Felder des Quadrates ein, dass die Summen jeder Zeile (waagerecht), jeder Spalte (senkrecht) und jeder Diagonale (von links oben nach rechts unten und von rechts oben nach links unten) gleich sind!

Lösung von Steffen Polster:
Die Summe der Vielfachen von 3 bis 27 beträgt: $3+6+9+12+15+18+21+24+27=135$.
Da das Quadrat 3 Spalten und Zeilen hat, muss die Summe längs einer Zeile, Spalte oder Diagonalen gleich $\frac{135}{3}=45$ sein.
Setzt man die mittlere Zahl 15 der Vielfachen von 3 in das Zentrum des Quadrates, ergibt sich durch Probieren u.a. die Lösung:

18	3	24
21	15	9
6	27	12

Aufgabe 090511:

Gib eine Möglichkeit an, die Ziffern 1; 2; 3; 4 und 5 so in das gegebene quadratische Netz einzutragen, dass in jeder Zeile, jeder Spalte und in jeder der beiden Hauptdiagonalen jede der 5 Ziffern genau einmal vorkommt!
Anmerkung: Es genügt ein Beispiel. Begründungen werden nicht verlangt.

Lösung von Steffen Polster:

Eine mögliche Lösung ist

1	5	2	3	4
4	2	1	5	3
5	4	3	2	1
3	1	5	4	2
2	3	4	1	5

Aufgabe 100513:
Gib eine Möglichkeit an, die Zahlen 1; 1; 2; 2; 3; 3; 4; 4; 5; 5; 6; 6; 7; 7; 8; 8 so in die Felder des abgebildeten quadratischen Netzes einzutragen, dass als Summe der Zahlen jeder Zeile (waagerecht), jeder Spalte (senkrecht), jeder der beiden Diagonalen (von links oben nach rechts unten und von rechts oben nach links unten) und als Summe der Zahlen in den vier Eckfeldern die Zahl 18 erhalten wird!
(Keine Begründung erforderlich)

Lösung von Steffen Polster:

Eine mögliche Lösung ist

1	7	2	8
4	6	3	5
7	1	8	2
6	4	5	3

Aufgabe 180513:

	31		
	26	20	
			8

In die freien Felder des abgebildeten Rechtecks sind Zahlen so einzutragen, dass sie von links nach rechts gelesen und von oben nach unten gelesen immer kleiner werden und dass für jede Zeile und jede Spalte gilt:

Alle Differenzen, die man in einer Zeile bzw. Spalte zwischen zwei unmittelbar neben- bzw. untereinanderstehenden Zahlen bilden kann, sind für diese Zeile bzw. Spalte gleich.
Gib ferner für jede Zeile und jede Spalte diese Differenz an! Der Lösungsweg ist zu beschreiben.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Aus 26 - 20 = 6 folgt, dass die Differenz benachbarter Zahlen in der zweiten Zeile 6 beträgt. Entsprechend folgt wegen 31 - 26 = 5 für die zweite Spalte 5 als Differenz. Hiermit ergeben sich die eingetragenen Zahlen in der zweiten Zeile und Spalte:

	31		
32	26	20	14
	21		
	16		8

In der vierten Spalte ist 14 - 8 = 6 das Doppelte der Differenz benachbarter Zahlen. Damit erhält man für diese Spalte die Differenz 3 sowie die in der folgenden Abbildung eingetragenen Zahlen der vierten Spalte.
Jetzt erhält man für die erste Zeile 31 - 17 = 14 als Doppeltes der Differenz dieser Zeile, also die Differenz 7 und damit die eingetragenen Zahlen der Abbildung.

38	31	24	17
32	26	20	14
	21		11
	16		8

Für die erste Spalte folgt dann 38 - 32 = 6, und für die dritte Spalte ergibt sich 24 - 20 = 4 als Differenz. Das vollständig ausgefüllte Rechteck sieht folgendermaßen aus, wobei die Differenzen für die Spalten und Zeilen am unteren bzw. rechten Rand angegeben sind.

38	31	24	17	7
32	26	20	14	6
26	21	16	11	5
20	16	12	8	4
6	5	4	3	

Aufgabe 190512:

In die sieben leeren Felder des folgenden Bildes sind Zahlen derart einzutragen, dass alle vier waagerechten und alle vier senkrechten Aufgaben richtig gerechnet sind.
Eine Begründung wird nicht verlangt.

4	+	□	-	□	=	2
+		-		+		+
□	-	2	+	0	=	□
-		+		-		-
□	+	□	-	6	=	6
=		=		=		=
1	+	5	-	□	=	3

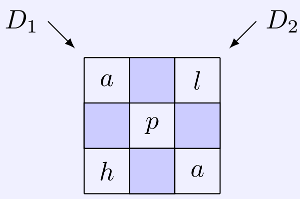
Lösung von Steffen Polster:

4	+	7	-	9	=	2
+		-		+		+
9	-	2	+	0	=	7
-		+		-		-
12	+	0	-	6	=	6
=		=		=		=
1	+	5	-	3	=	3

Jede Gleichung, in der nur ein leeres Kästchen steht, ist sofort lösbar; die anderen anschließend:

Aufgabe 200511:

Ralph, ein eifriger Leser der mathematischen Schülerzeitschrift alpha stellt in einer Arbeitsgemeinschaft seinen Mitschülern folgende Aufgabe:



In der abgebildeten Figur sind für a, h, l, p natürliche Zahlen so einzutragen, dass sich in jeder der beiden Diagonalen D_1, D_2 die Summe 135 ergibt. Dabei soll die Zahl p das Dreifache der Zahl a sein, und die Zahl h soll das Fünffache der Zahl l sein.
Ermittle alle derartigen Eintragungen, und erkläre, wie man sie finden kann!
Überprüfe dabei auch, ob alle geforderten Bedingungen erfüllt sind!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn eine Eintragung von natürlichen Zahlen für a, h, l, p die Bedingungen erfüllt, so folgt $p = 3a$.
In der Diagonalen $_D1$ steht also die Summe $a + 3a + a = 5a$. Somit ist $5a = 135$, also $a = 135 : 5 = 27$, und, da $p = 3a$ ist, $p = 3 \cdot 27 = 81$. Ferner folgt $h = 5l$.
Also steht in der Diagonalen D_2 die Summe $l + 81 + 5l = 6l + 81$. Somit ist $6l + 81 = 135$ und daher $6l = 135 - 81 = 54$, mithin $l = 54 : 6 = 9$, und, da $h = 5l$ ist, $h = 5 \cdot 9 = 45$. Also kann nur die Eintragung

27		9
	81	
45		27

alle geforderten Bedingungen erfüllen.

Aufgabe 210513:

8	0	0	-	□	□	=	□	□	□
	:				+	=		-	
	□	□	·	□	□	=	6	0	8
	2	5	+	□	3	=	□	□	□

In jedes leere Kästchen der Abbildung soll eine der Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 so geschrieben werden, dass die drei waagerechten und die senkrechten Aufgaben richtig gerechnet sind.
Eine Beschreibung und Begründung der Lösung wird nicht verlangt.

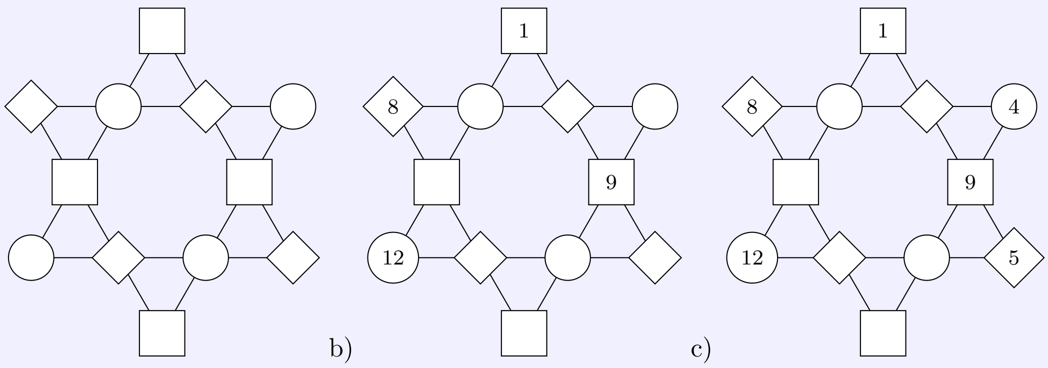
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

8	0	0	-	7	4	=	7	2	6
	:				+	=		-	
	3	2	·	1	9	=	6	0	8
	2	5	+	9	3	=	1	1	8

Aufgabe 220511:
In die 12 Felder des Bildes a sind die Zahlen von 1 bis 12 so einzutragen, dass folgendes gilt:

Auf jeder eingezeichneten Geraden beträgt die Summe der Zahlen in den vier Feldern 26;
die Summe der Zahlen in den vier auf einer Ecke stehenden Quadrate beträgt 26;
die Summe der Zahlen in den vier Kreisfeldern beträgt 26;
die Summe der Zahlen in den vier Quadratfeldern beträgt 26.

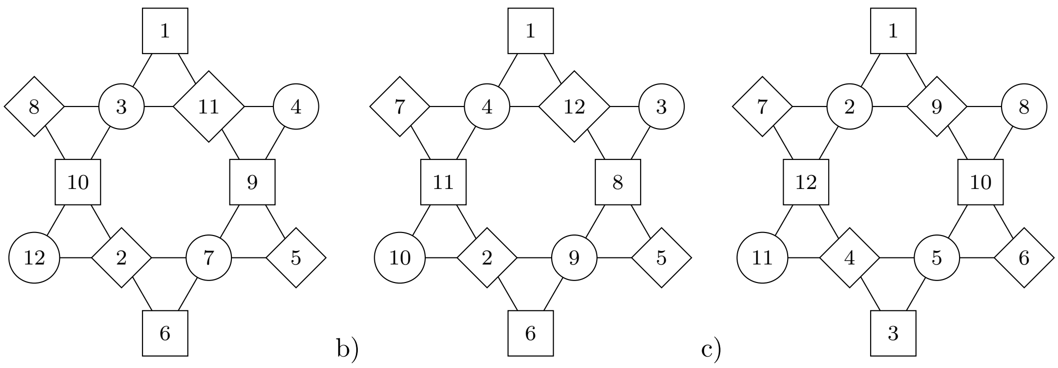
a) Vervollständige die Eintragung Bild b), und überprüfe, ob dann alle Forderungen erfüllt sind!
b) Nenne einen Rechenweg, der zu derselben vollständigen Eintragung führt, aber nur die Vorgabe aus Bild c) benutzt!
c) Versuche, noch andere Eintragungen für Bild a) zu finden, z. B. solche, bei denen die Zahl 12 nicht in einem der sechs „äußeren“ Felder steht!



a) b) c)

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Die Eintragung in Abbildung a) erfüllt alle Forderungen; denn es gilt

$$8+3+11+4=26 \quad , \quad 12+2+7+5=26 \quad , \quad 12+10+3+1=26$$
$$6+7+9+4=26 \quad , \quad 6+2+10+8=26 \quad , \quad 5+9+11+1=26$$
$$1+10+6+9=26 \quad , \quad 8+2+5+11=26 \quad , \quad 12+7+4+3=26$$



a) b) c)

b) Die Summe der beiden auf der Spitze stehenden Quadratfelder muss 26 - 1 - 9 = 16 betragen, für das linke untere auf der Spitze stehende Quadratfeld ergibt sich also 26 - 8 - 16 = 2. Es verbleiben die Zahlen 3, 4, 5, 6, 7, 10, 11.
Mit ihnen kann die Summe 16 der beiden rechten auf der Spitze stehenden Quadratfelder nur durch 5, 11 oder 6, 10 erreicht werden.

Die Summe des rechten unteren Kreis- bzw. auf der Spitze stehenden Quadratfeldes beträgt 26 - 12 - 2 = 12; sie kann nur durch 5, 7 erreicht werden. Also muss 5 in das rechte untere auf der Spitze stehende Quadratfeld, 7 in das rechte untere Kreisfeld, 11 in das rechte obere auf der Spitze stehende Quadratfeld kommen.
Es verbleiben 3, 4, 6, 10. Die Summe der beiden oberen Kreisfelder beträgt 26-8-11 = 7; sie kann nur durch 3, 4 erreicht werden. Die Summe des unteren Quadratfeldes und des rechten oberen Kreisfeldes beträgt 26 - 7 - 9 = 10; sie kann nur durch 4, 6 erreicht werden.
Also muss 4 in das rechte obere, 3 in das linke obere Kreisfeld, 6 in das untere Quadratfeld und hiernach 10 in das linke Quadratfeld kommen.

c) Zwei weitere Eintragungen liegen z. B. in Abbildung b und c vor.

Aufgabe 220513:
Rolf, ein Mitglied im Bezirksklub Junger Mathematiker, schreibt seinen Mitschülern die folgenden drei Gleichungen auf:

$$B \cdot J \cdot M = 135$$
$$M + A + T + H + E = 32$$
$$(H + E + I) : (T - E - R) = 3$$

Er verlangt, jeden der Buchstaben A, B, E, H, I, J, M, R, T so durch eine der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 zu ersetzen, dass alle drei Gleichungen wahr sind. Dabei sollen gleiche Buchstaben durch gleiche Zahlen, verschiedene Buchstaben durch verschiedene Zahlen ersetzt werden.

a) Anke antwortet: „Ich finde schon aus der ersten Gleichung, welche drei Zahlen für B, J und M einzusetzen sind. Nur ihre Reihenfolge weiß ich noch nicht.“
Welche drei Zahlen sind dies!
b) Bertolt sagt: „Dann erhält man aus der zweiten Gleichung, welche Zahl M bedeutet.“ Wie könnte Bertolt die beiden anderen von Anke genannten Zahlen ausgeschlossen haben?
c) Nach weiterem Probieren finden die Mitschüler eine vollständige Lösung. Welche könnte es z. B. sein?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Die Primfaktorzerlegung von 135 ist $135 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$. Da bereits $3 \cdot 5$ (und erst recht $3 \cdot 3 \cdot 5$ bzw. $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$) größer als jede der Zahlen $1, 2, \dots, 9$ ist, muss der Primfaktor 5 als eine der Zahlen für B, J, M genommen werden. Aus den verbleibenden drei Faktoren 3 kann man die beiden anderen der Zahlen für B, J, M nur so bilden, dass sie 3 und $3 \cdot 3 = 9$ lauten.
Also sind 3, 5 und 9 die drei Zahlen für B, J, M.

b) Für A, T, H, E kommen dann nur noch vier der Zahlen 1, 2, 4, 6, 7, 8, in Frage.
Wäre $M = 3$ oder $M = 5$, so müssten wegen der zweiten Gleichung die Zahlen für A, T, H, E die Summe 29 oder 27 haben. Das ist aber nicht möglich, da selbst die Summe der vier größten unter den Zahlen 1, 2, 4, 6, 7, 8 nur 25 beträgt. Also muss $M = 9$ sein.

c) Eine Lösung ist z. B.:

$$A = 8, \quad B = 3, \quad E = 2, \quad H = 6, \quad I = 4, \quad J = 5, \quad M = 9, \quad R = 1, \quad T = 7$$

denn die Gleichungen $3 \cdot 5 \cdot 9 = 135$, $9 + 8 + 7 + 6 + 2 = 32$, $(6 + 2 + 4) : (7 - 2 - 1) = 3$ sind wahr.

Es gibt noch genau eine weitere Lösung. Sie entsteht aus der genannten durch Vertauschen von B und J.

Aufgabe 230513:
Für die Buchstaben a, b, c, d, e, f sind in den nachstehenden Aufgaben (1) bis (6) natürliche Zahlen so einzusetzen, dass richtig gerechnete Aufgaben entstehen. Dabei sollen gleiche Buchstaben gleiche Zahlen und verschiedene Buchstaben verschiedene Zahlen bedeuten.

(1) $a + b + c = 21$,
(2) $b \cdot c = 42$,
(3) $c + d = 70 : b$,
(4) $e : a = d$,
(5) $c = 54 : 9$,
(6) $a + b + c + d + e + f = 60$

Finde eine solche Eintragung und überprüfe, ob sie alle Forderungen erfüllt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Aus (5) folgt c = 6.
Setzt man das in (2) ein, so ergibt sich $b \cdot 6 = 42$, also $b = 42 : 6$, d. h. $b = 7$.
Damit folgt aus (1), dass $a + 7 + 6 = 21$, also $a = 21 - 13$, d. h. $a = 8$ gilt.
Aus (3) erhält man ferner $d + 6 = 70 : 7$, also $d = 10 - 6$, d. h. $d = 4$.
Aus (4) erhält man daher $e : 8 = 4$, also $e = 4 \cdot 8$, d. h. $e = 32$.
Aus (6) ergibt sich schließlich $8 + 7 + 6 + 4 + 32 + f = 60$, also $f = 60 - 57$, d. h. $f = 3$.

Die so gefundenen Zahlen a, b, c, d, e, f sind paarweise verschieden und erfüllen (1) bis (6).

Aufgabe 230514:

In die leeren Felder der Abbildung sind natürliche Zahlen so einzusetzen, dass alle waagerechten und senkrechten Aufgaben richtig gelöst werden.
a) Gib eine solche Einsetzung an!
b) Es gibt insgesamt vier solche Einsetzungen. Erkläre, wie man diese finden kann und gib sie an!

3	$+$		$-$		$= 7$
$\cdot$		$+$		$\cdot$	
	$\cdot$		$:$		$= 3$
$-$		$-$		$+$	
	$+$		$-$	7	$= 6$
$= 2$		$= 4$		$= 7$	

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Siehe eine der unter b) erhaltenen Einsetzungen. b) Wir bezeichnen die leeren Felder und die darin einzusetzenden Zahlen so mit a, b, c, d, e, f, g wie in der Abbildung angegeben. Für jede der gesuchten Einsetzungen gilt dann:

Zeile 1:	3	$+$	a	$-$	b	$= 7$
	$\cdot$		$+$		$\cdot$	
Zeile 2:	c	$\cdot$	d	$:$	e	$= 3$
	$-$		$-$		$+$	
Zeile 3:	f	$+$	g	$-$	7	$= 6$
	$= 2$		$= 4$		$= 7$	
	Sp.1:		Sp.2:		Sp.3:	

Da in der 2. Zeile durch e dividiert wird, gilt $e \neq 0$. Aus der 3. Spalte folgt $b \cdot e = 0$, wegen $e \neq 0$ also $b = 0$. Daher ergibt sich aus der 1. Zeile $a = 4$.
Aus der 3. Zeile folgt $f + g = 13$. Da f und g natürliche Zahlen sind, kommen folglich für sie nur die Zahlen 0, 1, 2, $\cdots$, 13 in Frage.
Nach der 1. Spalte ist $3 \cdot c = 2 + f$, also ist $2 + f$ durch 3 teilbar. Daher verbleiben nur die Möglichkeiten

$f = 1$, $c = 1$, $g = 12$; (1) $\quad$ $f = 4$, $c = 2$, $g = 9$; (2)
$f = 7$, $c = 3$, $g = 6$; (3) $\quad$ $f = 10$, $c = 4$, $g = 3$; (4)

$f = 13$, $c = 5$, $g = 0$. (5)

Aus der 2. Spalte und $a = 4$ folgt $d - g = 0$, also $d = g$. Daher führen (1) bis (5) in der 2. Zeile auf folgende Gleichungen und Werte für e:

(1) $1 \cdot 12 : e = 3$, $e = 4$;
(2) $2 \cdot 9 : e = 3$, $e = 6$;
(3) $3 \cdot 6 : e = 3$, $e = 6$;
(4) $4 \cdot 3 : e = 3$, $e = 4$;
(5) $5 \cdot 0 : e = 3$, kein möglicher Wert für e.

Mithin können nur die folgenden Einsetzungen alle genannten Aufgaben lösen:

3	+	4	−	0	= 7
·		+		·	
1	·	12	:	4	= 3
−		−		+	
1	+	12	−	7	= 6
= 2		= 4		= 7	

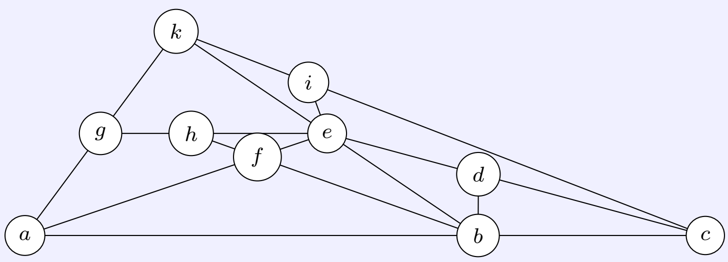
3	+	4	−	0	= 7
·		+		·	
2	·	9	:	6	= 3
−		−		+	
4	+	9	−	7	= 6
= 2		= 4		= 7	

3	+	4	−	0	= 7
·		+		·	
3	·	6	:	6	= 3
−		−		+	
7	+	6	−	7	= 6
= 2		= 4		= 7	

3	+	4	−	0	= 7
·		+		·	
4	·	3	:	4	= 3
−		−		+	
10	+	3	−	7	= 6
= 2		= 4		= 7	

Man bestätigt, dass bei diesen Einsetzungen alle waagerechten und alle senkrechten Aufgaben richtig gelöst sind.

Aufgabe 240514:

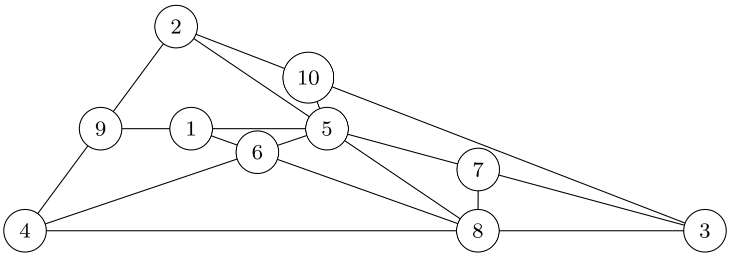


In die Felder der Abbildung soll für jeden Buchstaben eine der Zahlen von 1 bis 10 eingetragen werden. Jede dieser Zahlen soll genau einmal vorkommen. Auf jeder eingezeichneten Geraden soll die Summe der Zahlen 15 betragen; es soll also gelten:

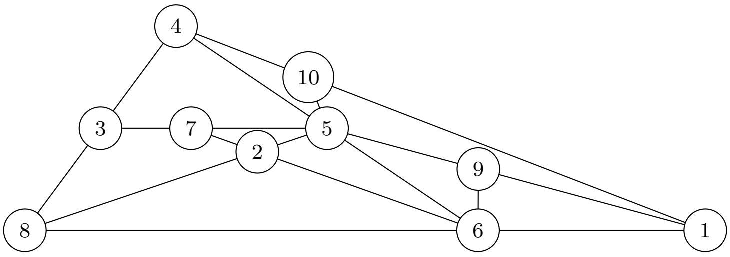
$$15 = a+b+c = a+f+e = a+g+k = b+d = b+e+k = b+f+h = c+d+e = c+i+k = e+h+g = e+i$$

(a) Gib eine solche Eintragung an, bei der zusätzlich festgelegt wird, dass $e = 5$ und $k = 2$ ist!
(b) Gib eine weitere von (a) verschiedene Eintragung an, die die Bedingungen der Aufgabe erfüllt! (Für e und k dürfen auch andere als die in (a) eingesetzten Zahlen verwendet werden.)
(c) Beweise, dass es keine Eintragung gibt, bei der alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt sind und außerdem $e = 10$ gilt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(a) Für $e = 5$ und $k = 2$ gibt es genau eine Eintragung, die alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt; es ist die Eintragung in der Abbildung



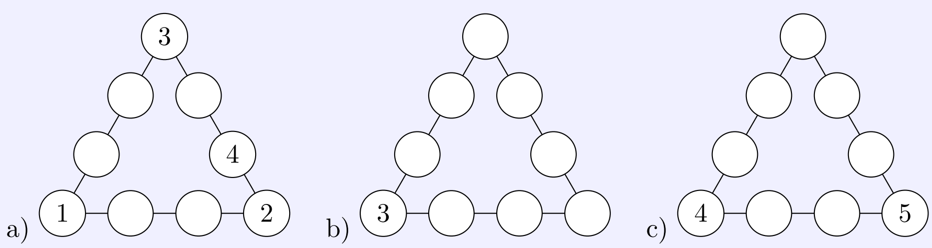
(b) Eine weitere Eintragung, die alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt, zeigt die 2.Abbildung.



(c) Wäre eine Eintragung mit $e = 10$ möglich, die alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt, so folgte: Wegen $a + f + e = b + e + k = c + d + e (= e + h + g) = 15$ müsste $a + f = b + k = c + d (= h + g) = 5$ sein, also wären die Zahlen a, f, b, k, e, d (, h, g) sämtlich kleiner als 5. Das ist unmöglich, da es unter den Zahlen von 1 bis 10 nur vier gibt, die kleiner als 5 sind. Also kann es keine Eintragung mit $e = 10$ geben, die alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

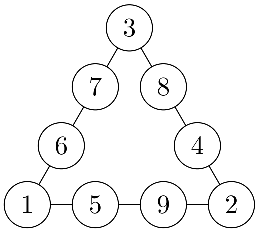
Aufgabe 250514:
In jede der Abbildungen a), b), c) sollen die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 in die Kreise eingetragen werden.
Jede dieser Zahlen soll (jeweils bei einer solchen Eintragung) genau einmal vorkommen. Für einige Kreise ist die einzutragende Zahl bereits vorgeschrieben. Ferner soll für jede Eintragung folgendes gelten:

Addiert man auf je einer Dreiecksseite die vier Zahlen, so ergibt sich bei jeder der drei Seiten dieselbe Summe.
a) Finde eine Eintragung in Abbildung a), bei der sich für jede der drei Seiten die Summe 17 ergibt!
b) Finde möglichst viele Eintragungen in Abbildung b), bei denen sich für jede der drei Seiten die Summe 21 ergibt!
c) Finde möglichst viele Eintragungen in Abbildung c), bei denen sich für jede der drei Seiten derselbe Wert der Summe ergibt! Gib zu jeder dieser Eintragungen diesen Wert an!

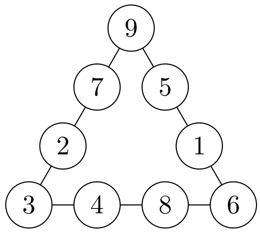


Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Abbildung a zeigt eine Lösung der Aufgabe a);
die Abbildungen b 1, 2, 3, 4 zeigen vier Lösungen von Aufgabe b);

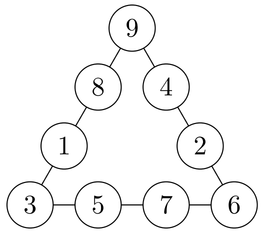
die Abbildungen c 1, 2 zeigen zwei Lösungen der Aufgabe c), für jede Dreiecksseite beträgt die Summe in diesen beiden Lösungen 20.



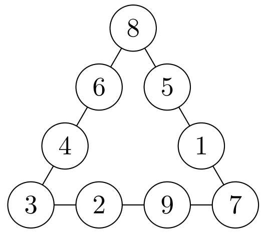
a



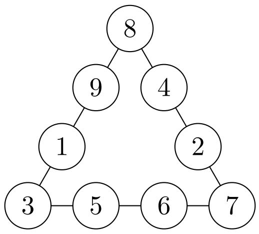
$b1$



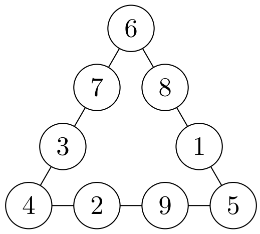
$b2$



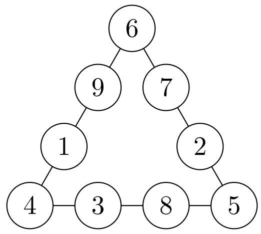
$b3$



$b4$

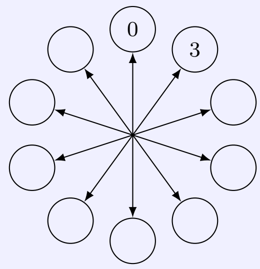


$c1$



$c2$

Aufgabe 260512:
a) Die Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 sollen so in die kleinen Kreise der Abbildung eingetragen werden, dass jedes Paar benachbarter Kreise dieselbe Summe wie das Paar an den beiden entgegengesetzten Pfeilspitzen ergibt.



Jede der zehn Zahlen soll genau einmal vorkommen. Die Zahlen 0 und 3 sollen wie angegeben eingetragen werden.

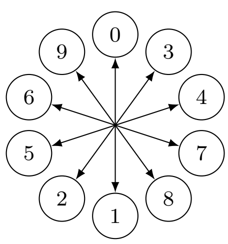
Gib eine Eintragung an, die alle diese Forderungen erfüllt!

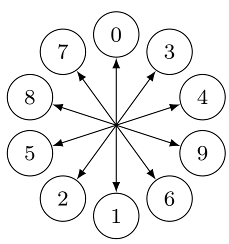
b) Für die Zahlen 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19 lässt sich eine entsprechende Aufgabe stellen. Wie kann man für sie auf einfache Weise eine Lösung aus der Lösung von a) gewinnen?

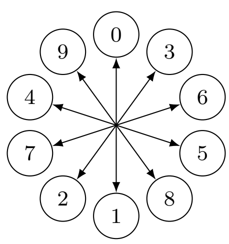
c) Löse die entsprechende Aufgabe für die natürlichen Zahlen n, $n+1$, $n+2$, $n+3$, $n+4$, $n+5$, $n+6$, $n+7$, $n+8$, $n+9$!

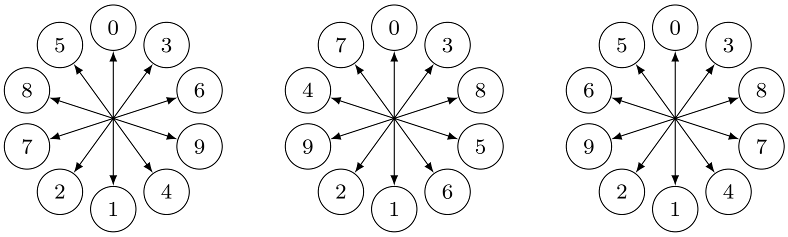
d) Begründe deine Lösung von c)!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Jede der Eintragungen in der Abbildung ist eine Eintragung der geforderten Art. Als vollständige Lösung zu a) gilt eine dieser Eintragungen.





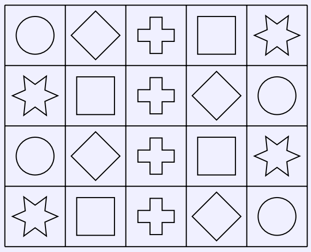




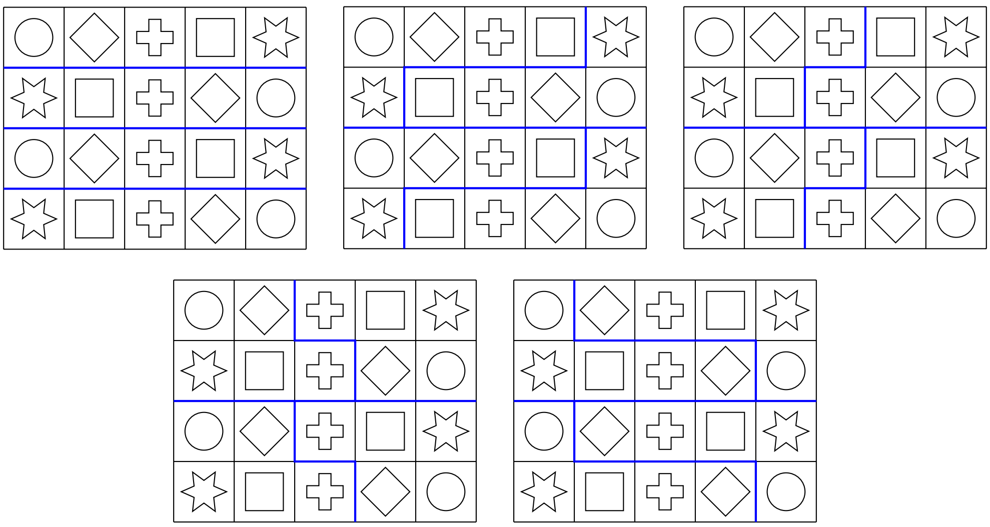
b) Man erhält z. B. aus der Lösung von a) eine Lösung von b), wenn man zu jeder Zahl der Figur 10 addiert.
c) Indem man in der Lösung von a) zu jeder Zahl der Figur die Zahl n addiert, erhält man eine mögliche Lösung der Aufgabe.
d) Bei dem in c) beschriebenen Vorgehen vergrößern sich jeweils beide in Aufgabe a) betrachtete Summen um den gleichen Wert, und zwar um das Doppelte von n.
Die Gleichheit der beiden Summen bleibt somit bei dieser Veränderung erhalten. Aus einer jeden Lösung von a) ergibt sich so bei der Veränderung eine Lösung von c).

Aufgabe 270511:

Jemand will die abgebildete Figur in genau vier Teile zerschneiden. Keines der 20 kleinen Quadrate soll dabei zerschnitten werden. Die vier Teile sollen sich so übereinander legen lassen, dass sie sich dann völlig gleichen (gleiche Gestalt und gleiche Verteilung der Muster).
Es gibt fünf Möglichkeiten für eine derartige Zerlegung.
Zeichne diese fünf Zerlegungen! Eine Begründung wird nicht verlangt.



Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Aufgabe 280511:
In jedes der acht freien Felder der Figur ist genau eine natürliche Zahl so einzutragen, dass die Summe der drei in jeder waagerechten und jeder senkrechten Reihe stehenden Zahlen jeweils 39 beträgt.
Finde eine derartige Eintragung, bei der neun Zahlen vorkommen, von denen keine zwei einander gleich sind!

	9	

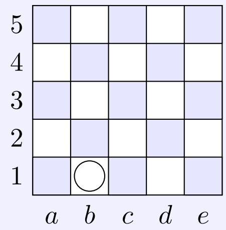
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

10	14	15
17	9	13
12	16	11

Eine mögliche Eintragung, die die Bedingungen der Aufgabe erfüllt, zeigt die Abbildung. Es gibt noch weitere derartige Eintragungen.

Aufgabe 290513:
Das Bild zeigt ein Spielbrett mit einem Damestein auf dem Feld b1. Er darf, wie im Damespiel üblich, stets einen Schritt nach links oben oder nach rechts oben gehen. So kann er in vier Schritten auf die oberste Zeile (d. h. auf irgendeines der beiden Felder b5, d5) gelangen.

Gesucht ist die Anzahl aller verschiedenen Wege, auf denen dieses Ziel erreichbar ist.
Gib diese Anzahl an und beschreibe, wie du sie gefunden hast!



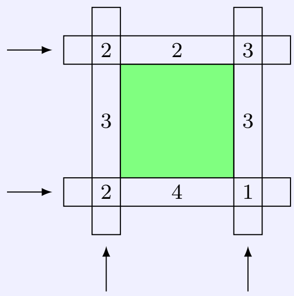
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

	a	b	c	d	e
5		5		4	
4	2		3		1
3		2		1	
2	1		1		0
1		1		0	

Die Anzahl aller genannten Wege ist 9. Man kann sie finden, indem man in jedes (weiße) Feld die Anzahl aller derjenigen Wege einträgt, auf denen dieses Feld von b1 aus erreichbar ist, und dabei der Reihe nach die Felder der Zeilen 1, 2, 3, 4, 5 abarbeitet:
Das Feld b1 erhält die Anzahl 1, das Feld d1 die Anzahl 0.
In jedes weitere Feld wird die Summe der (höchstens zwei) Anzahlen eingetragen, die schräg unter diesem Feld liegen, denn genau aus solchen Feldern führen alle Wege auf das betrachtete Feld.

So kommt man zu den Eintragungen in der Abbildung und damit wegen $5 + 4 = 9$ zur gesuchten Anzahl 9 aller genannten Wege.

Aufgabe 300514:
In einem Schema wie im Bild sollen natürliche Zahlen eingetragen werden. Das Bild zeigt ein Beispiel. Darin beträgt die Summe aller acht Zahlen 20. In jeder Zeile und in jeder Spalte (siehe die Pfeile) entsteht dieselbe Teilsumme, nämlich 7.

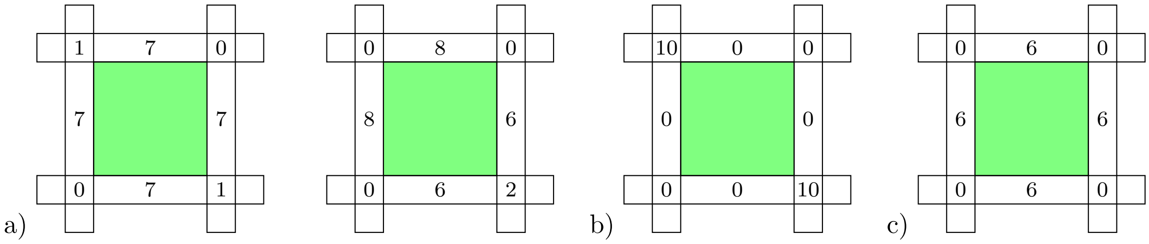


a) Gib zwei verschiedene Eintragungen an, bei denen jeweils die Summe aller acht Zahlen 30 beträgt und in jeder Zeile sowie in jeder Spalte die Teilsumme 8 entsteht!

b) Gib eine Eintragung an, bei der in jeder Zeile, und in jeder Spalte die Teilsumme 10 entsteht und die Summe aller acht Zahlen möglichst klein ist!

c) Gib eine Eintragung an, bei der die Summe aller acht Zahlen 24 beträgt und in jeder Zeile sowie in jeder Spalte ein einheitlicher Wert als Teilsumme entsteht, der möglichst klein ist! Eine Begründung zu den Eintragungen wird nicht verlangt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Abbildungen a bis c Es gibt noch andere Lösungsmöglichkeiten.



Aufgabe 310511:
a) In die neun Felder eines 3 × 3 - Quadrates sollen die Zahlen 11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33 so eingetragen werden, dass folgende Bedingungen erfüllt sind:
In jeder Zeile kommt jede der Ziffern 1, 2, 3 sowohl an der Einerstelle als auch an der Zehnerstelle je genau einmal vor. Dasselbe gilt auch in jeder Spalte.

b) In die Felder eines 4 × 4 - Quadrates sollen die zweistelligen Zahlen eingetragen werden, die sich unter Verwendung der Ziffern 1, 2, 3, 4 bilden lassen. Dabei sollen für die Ziffern 1, 2, 3, 4 dieselben Bedingungen wie bei a) erfüllt sein.
Gib je eine geforderte Eintragung an!
Stelle bei a) und b) jeweils fest, ob sich zwei Eintragungen finden lassen, die sich nicht durch Vertauschen von Zeilen oder Spalten miteinander, durch Vertauschen von Spalten miteinander oder durch Umwandeln der Zeilen in Spalten (oder durch mehrere solche Vorgänge) ineinander überführen lassen! Eine Begründung wird nicht verlangt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die (bis auf die genannten Vertauschungen einzige) Eintragung zu a) ist:

11	22	33
23	31	12
32	13	21

zwei Eintragungen zu b) sind z. B.

11	22	33	44
23	14	41	32
34	43	12	21
42	31	24	13

11	22	33	44
24	13	42	31
32	41	14	23
43	34	21	12

Aufgabe 340513:

$$\begin{array}{ccccccc}
\square & \square & 8 & \cdot & 4 & \square & \square \\
\hline
 & 1 & 4 & 3 & \square & & \\
 & & 2 & 1 & \square & \square & \\
 & & & \square & \square & \square & 6 \\
\hline
 & \square & \square & \square & \square & \square & \square
\end{array}$$

In die leeren Felder der Abbildung sind derart Ziffern einzutragen, dass eine richtig gerechnete Multiplikationsaufgabe entsteht.

Dabei soll die Regel beachtet werden, dass in jeder Zeile am Anfang eine von 0 verschiedene Ziffer steht.
Zeige, dass es genau eine Eintragung der gesuchten Art gibt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

A	B	8	$\cdot$	4	C	D
	1	4	3	E		
		2	1	F	G	
			H	J	K	6
	L	M	N	P	Q	R

3	5	8	$\cdot$	4	6	7
	1	4	3	2		
		2	1	4	8	
			2	5	0	6
	1	6	7	1	8	6

Bezeichnet man die fehlenden Ziffern wie in der linken Abbildung, so folgt:
Wegen $8 \cdot 4 = 32$ muss $E = 2$ sein.
Daher muss das Vierfache des ersten Faktors 1432 betragen, also ist der erste Faktor $1432 : 4 = 358$. Weiter muss die Zahl $358 \cdot C$ mit den Ziffern 21.. beginnen. Probiert man die Werte ≤ 5, C = 6, $C \geq 7$, so findet man wegen

$$358 \cdot 5 = 1790, \quad 358 \cdot 6 = 2148, \quad 358 \cdot 7 = 2506$$

dass nur $C = 6$ in Frage kommt. Die Zahl $358 \cdot D$ muss auf die Ziffer 6 enden; das ist nur mit $D = 2$ oder $D = 7$ möglich. Da aber $358 \cdot 2 = 716$ nicht vier Ziffern H, J, K, 6 mit von 0 verschiedener Anfangsziffer H ergibt, verbleibt nur $D = 7$und damit insgesamt nur die Multiplikation $358 \cdot 467$.
Wie die rechte Abbildung zeigt, führt diese Multiplikation auf eine Eintragung der gesuchten Art.

Runde 2

Aufgabe 050524:
Ermittle die fehlenden Ziffern!

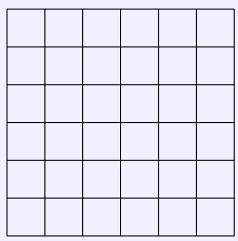
6	☐	$\cdot$	☐	☐	☐
☐	☐				
	☐	☐			
		☐	☐		
☐	☐	☐	6		

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Da alle Teilprodukte zweistellige Zahlen sind, muss der zweite Faktor 111 sein.
An der Einerstelle des ersten Faktors muss eine 6 stehen, da das Produkt von 111 mit einer natürlichen Zahl, an deren letzter Stelle keine 6 steht, nicht 6 als letzte Ziffer haben kann.
Die ergänzte Aufgabe lautet daher:

6	6	$\cdot$	1	1	1
6	6				
	6	6			
		6	6		
7	3	2	6		

Aufgabe 080521:

Kreuze 6 der 36 Felder des gegebenen quadratischen Netzes so an, dass in jeder Zeile und in jeder Spalte genau ein angekreuztes Feld und in jeder der Diagonalen höchstens ein angekreuztes Feld liegt!



Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Eine Lösungsmöglichkeit ist z. B. die in der Abbildung dargestellte.

			×		
×					
				×	
	×				
					×
		×			

Aufgabe 100522:

A	B	+	8	=	3	C
	-		-			-
1	D	+	C	=	1	C
1	B	+	3	=	A	D

Gib sämtliche Lösungen des Kryptogramms (siehe Abbildung) an, d. h. ersetze die Buchstaben so durch je eine der Ziffern 0 bis 9, dass zusammen mit den bereits angegebenen Ziffern sämtliche (waagerecht und senkrecht stehenden) Aufgaben richtig gelöst sind. Dabei bedeuten gleiche Figuren gleiche Ziffern.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Aus $8 - C = 3$ folgt $C = 5$. Setzt man für C in Spalte 5 jeweils 5 ein, so erhält man $D = 0$ und $A = 2$. Schließlich ermittelt man auf diese Weise aus Zeile 1, dass $B = 7$ sein muss.

2	7	+	8	=	3	5
	-		-			-
1	0	+	5	=	1	5
1	7	+	3	=	2	0

Tatsächlich erfüllen die angegebenen Ziffern alle Bedingungen der Aufgabe; denn in sind alle waagerecht und senkrecht stehenden Aufgaben richtig gelöst.

Aufgabe 120521:

4	□	□	·	3	□	□
	□	□	□	5		
		3	□	□	□	
				8	□	□
	□	□	□	□	3	□

In der folgenden Aufgabe ist jedes Kästchen □ so durch eine der Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 zu ersetzen, dass eine richtig gelöste Multiplikationsaufgabe entsteht.
Dabei muss jede Zeile mit einer von 0 verschiedenen Ziffer beginnen.
Als Ergebnis wird nur eine richtig ergänzte Aufgabe ohne Begründung verlangt.

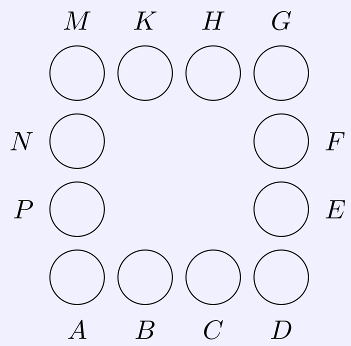
Lösung von Steffen Polster:
4□□ · 3 kann nur auf 5 enden, wenn der erste Faktor 4□5 ist. Der Faktor 3□□ muss auf zwei enden, da nur so das 3. Teilergebnis dreistellig mit einer 8 am Anfang ist. Das erste Zwischenprodukt beginnt mit 1. Das 2. Produkt endet auf 0. Würde es auf 5 enden, so müsste das 3. Produkt 880 sein, was nicht möglich ist. Damit wird vorerst

4	□	5	·	3	□	2
	1	□	□	5		
		3	□	□	0	
				8	□	0
	□	□	□	□	3	0

Das dritte Produkt ist durch die Endsumme gleich 830. Damit ist der erste Faktor 415 und das erste Zwischenprodukt 1245. Damit wird der Zehner im 2. Faktor gerade. Diese ist nur mit 8 möglich. Die Lösung ist somit eindeutig.

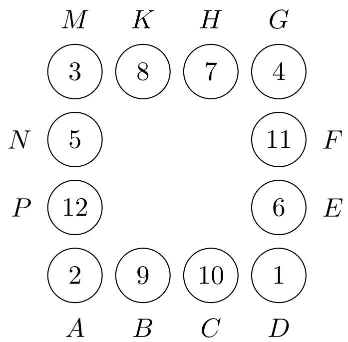
4	1	5	·	3	8	2
	1	2	4	5		
		3	3	2	0	
				8	4	0
	1	5	8	5	3	0

Aufgabe 130523:
In die 12 Felder A, B, C, D, E, F, G, H, K, M, N, P der Figur sollen die natürlichen Zahlen von 1 bis 12, jede genau in eines der Felder, so eingetragen werden, dass die Summe der in den Feldern A, B, C, D stehenden Zahlen 22 beträgt, ebenso die Summe der in den Feldern D, E, F, G stehenden Zahlen, gleichfalls die Summe der in den Feldern G, H, K, M stehenden Zahlen und auch die Summe der in den Feldern M, N, P, A stehenden Zahlen.



a) Gib eine derartige Eintragung von Zahlen an!
b) Untersuche, welche Zahlen bei jeder derartigen Eintragung in den Feldern A, D, G und M stehen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



a) Die Abbildung zeigt ein Beispiel dafür, wie die geforderte Eintragung lauten kann.

b) Es liege eine Eintragung vor und es seien a, b, c, d, e, f, g, h, k, m, n, p die in dieser Reihenfolge in den Feldern A, B, C, D, E, F, G, H, K, M, N, P stehenden Zahlen. Ferner sei

$$s_1 = e + b + c + d \qquad s_2 = d + e + f + g$$
$$s_3 = g + h + k + m \qquad s_4 = m + n + p + a$$

Dann gilt laut Aufgabe $s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = 22$. Daraus folgt $s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = 88$.

Die Summe der natürlichen Zahlen von 1 bis 12 beträgt 78. Sie ist also um 10 kleiner als die Summe $s_1 + s_2 + s_3 + s_4$.

Nun werden aber die in den Eckfeldern A, D, G, M stehenden Zahlen bei der Bildung der vier Summen je zweimal berücksichtigt. Daher muss die Summe dieser Zahlen 10 betragen.
Wären nun a, g, d, m nicht die Zahlen 1, 2, 3, 4, so wäre mindestens eine von ihnen größer als 4, und die anderen wären nicht kleiner als 1, 2, 3, also wäre ihre Summe größer als 10.
Daher müssen bei jeder richtigen Eintragung der genannten Art in den Eckfeldern die Zahlen 1, 2, 3 und 4 und keine anderen stehen.

Aufgabe 160521:

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{A} & \cdot & \mathrm{A} & = & \mathrm{B} \\
+ & & \cdot & & - \\
\mathrm{C} & \cdot & \mathrm{D} & = & \mathrm{E} \\
\hline
\mathrm{F} & - & \mathrm{G} & = & \mathrm{H}
\end{array}$$

In das obenstehende Kryptogramm sind für die Buchstaben Ziffern (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) so einzutragen, dass für gleiche Buchstaben gleiche Ziffern stehen und dass alle angegebenen Rechenaufgaben richtig gerechnet sind.
Stelle fest, ob es eine solche Eintragung gibt, ob sie die einzige ist und wie sie in diesem Falle lautet!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn es eine solche Eintragung gibt, so ist nach der 1. Zeile B das Quadrat von A ($\neq B$), also $B = 4$ oder $B = 9$.
Ferner ist B das Produkt zweier einstelliger Zahlen C, D, also nicht 0 und nicht 1. Daher ist auch keine der Zahlen C, D gleich 0 bzw. gleich 1.

Wegen $2 \cdot 3 = 6$ ist E mithin mindestens gleich 6. Da ferner E nach der 3. Spalte kleiner als B ist, scheidet $B = 4$ aus. Es folgt $B = 9$, also $A = 3$.
Da G ($\neq 3$) somit das Dreifache von D ($\neq 3$), aber größer als 0 und kleiner als 10 ist, verbleibt nur die Möglichkeit $D = 2$, $G = 6$.

Nach der dritten Zeile ist F größer als 6, also wegen $F \neq B$, $B = 9$, entweder $F = 7$ oder $F = 8$. Nach der zweiten Zeile ist E gerade, nach der dritten Spalte ist H ungerade, nach der dritten Zeile also F ungerade. Daher folgt $F = 7$ und somit $H = 1$, $E = 8$ sowie $C = 4$. Also kann nur die folgende Eintragung alle Bedingungen erfüllen:

$$\begin{array}{ccccc} 3 & \cdot & 3 & = & 9 \\ + & & \cdot & & - \\ 4 & \cdot & 2 & = & 8 \\ \hline 7 & - & 6 & = & 1 \end{array}$$

Sie erfüllt die Bedingungen; denn die für A, B, C, D, E, F, G, H eingetragenen Ziffern 3, 9, 4, 2, 8, 7, 6, 1 sind sämtlich verschieden, und die angegebenen Rechenaufgaben sind richtig gerechnet.

Aufgabe 190524:
Das untenstehende Muster einer Multiplikationsaufgabe soll so ausgefüllt werden, dass in jedes Kästchen genau eine Ziffer eingetragen wird und dass dabei eine richtig gerechnete Aufgabe entsteht.
Für gleiche Variable sind gleiche Ziffern einzusetzen. Wie üblich soll 0 nicht als Anfangsziffer vorkommen. Für das Ausfüllen der leeren Kästchen werden sonst keine weiteren Vorschriften gemacht.

$$\begin{array}{ccccccc} x & y & z & \cdot & 8 & x & z \\ \hline & x & x & 8 & 8 & & \\ & & & \square & \square & x & \\ & & & \square & \square & \square & \square \\ \hline & \square & \square & \square & \square & \square & \square \end{array}$$

Begründe, wie sich aus diesen Forderungen eine vollständige Eintragung ergibt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Aus dem ersten Teilprodukt ist ersichtlich, dass $z \cdot 8$ auf 8 endet; daher muss $z = 1$ oder $z = 6$ gelten.
Wäre $z = 1$, so könnte das dritte Teilprodukt nicht aus vier Ziffern bestehen, sondern nur aus drei. Folglich verbleibt nur die Möglichkeit $z = 6$.
Aus dem zweiten Teilprodukt ist nun ersichtlich, dass $6 \cdot x$ auf x endet. Da x auch als Anfangsziffer vorkommt, also $x \neq= 0$ gilt, kann folglich nur $x = 2$ oder $x = 4$ oder $x = 6$ oder $x = 8$ sein.
Wäre x eine der Ziffern 4, 6, 8, so würde das zweite Teilprodukt nicht dreistellig, sondern vierstellig. Also verbleibt nur die Möglichkeit $x = 2$.

Hiernach lautet das erste Teilprodukt 2288. Wegen $2288 : 8 = 286$ muss daher der erste Faktor der Multiplikationsaufgabe die Zehnerziffer $y = 8$ enthalten.
Nun kann die vollständige Eintragung durch Fertigstellen des schriftlichen Multiplizierens erfolgen. Man erhält:

$$\begin{array}{ccccccc} 2 & 8 & 6 & \cdot & 8 & 2 & 6 \\ \hline & 2 & 2 & 8 & 8 & & \\ & & & 5 & 7 & 2 & \\ & & & 1 & 7 & 1 & 6 \\ \hline & 2 & 3 & 6 & 2 & 3 & 6 \end{array}$$

Aufgabe 250523:
Auf die Randlinie eines Quadrates sollen zwölf Damesteine so verteilt werden, dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

(1) Auf jeder Ecke des Quadrates liegen gleich viele Damesteine. Dabei ist es zulässig, dass die Ecken frei von Damesteinen sind; es dürfen aber auch mehrere Damesteine übereinander auf den Ecken liegen.
(2) Auf jeder Seite des Quadrates (einschließlich ihrer beiden Eckpunkte) sind gleich viele Damesteine. Dabei sollen alle Damesteine, die auf einer Quadratseite, aber zwischen deren Eckpunkten liegen, übereinander gestapelt sein.

a) Gib vier verschiedene Verteilungen der zwölf Damesteine an, so dass jede dieser Verteilungen die Bedingungen (1) und (2) erfüllt!
b) Begründe, dass es nicht mehr als vier verschiedene Verteilungen dieser Art geben kann!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Die folgenden Verteilungen erfüllen die Bedingungen (1) und (2):

0	3	0		1	2	1		2	1	2		3	0	3
3		3		2		2		1		1		0		0
0	3	0		1	2	1		2	1	2		3	0	3

b) Für jede Verteilung der geforderten Art gilt:
Wenn auf einer Ecke genau x Damesteine liegen, dann nach (1) auf jeder Ecke. Wenn ferner auf einer Seite außer den $2x$ Damesteinen, die auf beiden Endpunkten liegen, noch genau y Damesteine vorhanden sind, dann gilt das nach (2) auf jeder Seite mit derselben Anzahl y.

Daher sind insgesamt $4x + 4y$ Damesteine verteilt, also ist $4 \cdot x + 4 \cdot y = 12$, d. h. $x + y = 3$.
Dies kann aber mit den Anzahlen x und y nur durch 0 + 3 = 3, 1 + 2 = 3, 2 + 1 = 3 oder 3 + 0 = 3 erfüllt werden. Daher kann es nur die vier in a) genannten Verteilungen geben.

Aufgabe 290521:
Die leeren Felder im Bild sind so mit Zahlen 1, 2, 3, 4 auszufüllen, dass jede dieser Zahlen in jeder Zeile und in jeder Spalte genau einmal vorkommt.
Gib alle solche Eintragungen an!
(Ein Beweis, dass es keine weiteren derartigen Eintragungen gibt, wird nicht verlangt.)

1			
		2	
	3		
			4

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

Die Abbildung zeigt alle geforderten Eintragungen:

1	2	4	3
3	4	2	1
4	3	1	2
2	1	3	4

1	4	3	2
4	1	2	3
2	3	4	1
3	2	1	4

Aufgabe 290523:
Gesucht ist eine natürliche Zahl z, die folgende Bedingungen erfüllt:

(1) An der Zehnerstelle von z steht die Ziffer 0.
(2) Wenn man aus z durch Weglassen der Ziffer 0 an der Zehnerstelle eine neue Zahl z' bildet und dann die Summe $z + z'$ ausrechnet so erhält man 5174.

Zeige, dass es nur eine Zahl geben kann, die diese Bedingungen erfüllt, und gib diese Zahl an!
Überprüfe auch, dass die von dir angegebene Zahl z die Bedingungen erfüllt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn eine Zahl z die Bedingungen erfüllt, so muss sie vierstellig sein; denn hätte sie mehr Stellen, so erst recht $z + z'$; hätte sie aber 3 oder weniger Stellen, so könnte $z + z'$ höchstens mit der Anfangsziffer 1 vierstellig sein.
Sind nun a, b, c, d die Ziffern von z, so folgt aus (1), dass $c = 0$ ist, und wegen (2) wird das Kryptogramm

$$\begin{array}{ccccc} & \mathrm{a} & \mathrm{b} & 0 & \mathrm{d} \\ + & & \mathrm{a} & \mathrm{b} & \mathrm{d} \\ \hline & 5 & 1 & 7 & 4 \end{array}$$

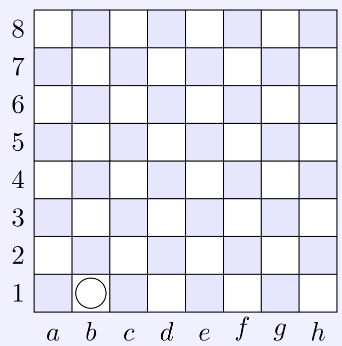
erfüllt. An der Einerstelle ist ersichtlich, dass $2d = 4$ oder $2d = 14$ gilt.
Im Fall $2d = 4$, also $d = 2$, folgt für die Zehnerstelle $b = 7$, und an der Hunderterstelle kann wegen $7 + a = 11$ nur $a = 4$ stehen.
Im Fall $2d = 14$, also $d = 7$, folgte für die Zehnerstelle $b = 6$, für die Hunderterstelle wegen $6 + a = 11$ also $a = 5$, und wegen des Übertrags ergäbe sich in der Tausenderstelle der Summe nicht 5, sondern 6. Also scheidet der Fall $2d = 14$ aus.

Daher können die Bedingungen nur von der Zahl $z = 4702$ erfüllt werden. Die Überprüfung

$$\begin{array}{ccccc} & 4 & 7 & 0 & 2 \\ + & & 4 & 7 & 2 \\ \hline & 5 & 1 & 7 & 4 \end{array}$$

zeigt, dass diese Zahl die Bedingungen erfüllt.

Aufgabe 290524:



Das Bild zeigt ein Spielbrett mit einem Damenstein aus dem Feld b1. Er darf, wie im Damespiel üblich, nur stets einen Schritt nach links oben oder nach rechts oben gezogen werden.
a) Ermittle die Anzahl aller Wege, auf denen der Stein von b1 bis zum Feld g8 gelangen kann!
b) Ermittle die Anzahl aller Wege, auf denen der Stein von b1 bis zum Feld e8 gelangen kann!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

	a	b	c	d	e	f	g	h
8					20		7	
7				14		6		1
6			9		5		1	
5		5		4		1		0
4	2		3		1		0	
3		2		1		0		0
2	1		1		0		0	
1		1		0		0		0

Die gesuchten Anzahlen lassen sich ermitteln, indem man in jedes (weiße) Feld die Anzahl aller derjenigen Wege einträgt, auf denen dieses Feld von b1 aus erreichbar ist, und dabei der Reihe nach die Felder der Zeilen 1, 2,...,8 abarbeitet.
(Wie man feststellen kann, genügt es, nur die in der Abbildung eingetragenen Zahlen zu berücksichtigen.)
Das Feld b1 erhält die Anzahl 1, die anderen Felder der Zeile 1 die Anzahl 0. In jedes weitere Feld wird die Summe der (höchstens zwei) Anzahlen eingetragen, die schräg unter diesem Feld liegen; denn genau aus solchen Feldern führen alle Wege auf das betrachtete Feld.

So kommt man zu den Eintragungen in der Abbildung und damit zu den Angaben:
a) Von b1 nach g8 führen genau 7 Wege.
b) Von b1 nach e8 führen genau 20 Wege.

Aufgabe 300523:

1	2	3	→ 6
4	5	9	→ 18
6	8	7	→ 21

↙ 14, ↓ 11, ↓ 15, ↓ 19, ↘ 13

a) Die Zahlen 1, 2, ..., 9 lassen sich so in ein Quadrat von 3 x 3 Feldern eintragen, dass keine zwei der acht Summen in den drei Zeilen, den drei Spalten und den beiden Diagonalen einander gleich sind. Die Abbildung zeigt ein Beispiel hierfür.

Gib zwei weitere Beispiele an, die aus der Abbildung weder durch Spiegeln noch durch Drehen zu erhalten sind und die auch nicht auseinander durch Spiegeln oder Drehen hervorgehen!

b) Ist es möglich, in ein Quadrat von 2 x 2 Feldern die Zahlen 1, 2, 3, 4 so einzutragen, dass keine zwei der Summen in den Zeilen, den Spalten und den Diagonalen einander gleich sind?
Begründe Deine Antwort!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

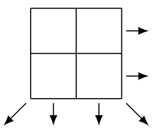
a) Zwei Beispiele der geforderten Art:

2	5	1	→ 8
3	8	7	→ 18
6	9	4	→ 19

↙ 15, ↓ 11, ↓ 22, ↓ 12, ↘ 14

7	2	1	→ 10
4	3	6	→ 13
5	9	8	→ 22

↙ 9, ↓ 16, ↓ 14, ↓ 15, ↘ 18



b) Wäre eine solche Eintragung möglich, so müssten sechs verschiedene Summen auftreten, wie die Abbildung zeigt. Es gibt aber überhaupt nur die fünf verschiedenen Summen

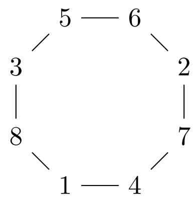
$$1 + 2 = 3, \quad 1 + 3 = 4, \quad 1 + 4 = 2 + 3 = 5, \quad 2 + 4 = 6, \quad 3 + 4 = 7$$

aus je zwei der Zahlen 1, 2, 3, 4. Daher ist eine Eintragung der in b) genannten Art nicht möglich.

Aufgabe 310524:
Klaus möchte an die Ecken eines Achtecks die Zahlen 1, 2, . . . , 8 schreiben, an jede Ecke eine Zahl. Er will dann für jede Ecke die Summe aus den drei Zahlen bilden, die an dieser Ecke und an ihren beiden Nachbarecken stehen. Er möchte erreichen, dass jede der so gebildeten acht Summen
a) größer als 11 ist,

b) größer als 13 ist.
Gib für jedes der beiden Vorhaben a), b) an, ob es sich erfüllen lässt!
Ist es erfüllbar, so belege dies durch ein Beispiel mit der Angabe der acht Summen!
Ist das betreffende Vorhaben a) bzw. b) nicht erfüllbar, so begründe, warum nicht!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



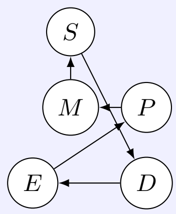
a) Das Vorhaben ist erfüllbar. Ein mögliches Beispiel zeigt die Abbildung; die acht Summen sind

$$8+1+4=13, \quad 1+4+7=12, \quad 4+7+2=13, \quad 7+2+6=15,$$

$$2+6+5=13, \quad 6+5+3=14, \quad 5+3+8=16, \quad 3+8+1=12$$

b) Bei jeder Verteilung der Zahlen 1, 2, ..., 8 auf die Ecken gibt es von den drei Zahlen 1, 2, 3 mindestens zwei, zwischen denen keine oder nur eine Ecke liegt (denn lägen sowohl zwischen 1 und 2 als auch zwischen 1 und 3 als auch zwischen 2 und 3 jeweils mindestens zwei Ecken, so gäbe es insgesamt mindestens $3+3\cdot 2=9$ Ecken).
Bei jeder Verteilung hat daher eine der acht zu bildenden Summen zwei Summanden aus den drei Zahlen 1, 2, 3, der dritte Summand ist nicht größer als 8; diese Summe ist also nicht größer als $2+3+8=13$.
Damit ist bewiesen: Es ist nicht möglich, die Zahlen so zu verteilen, dass jede der zu bildenden Summen größer als 13 ist.

Aufgabe 320521:
Ein Handelsvertreter mit Wohnsitz in Dresden (D) möchte jede der Städte Erfurt (E), Magdeburg (M), Potsdam (P), Schwerin (S) genau einmal aufsuchen und danach zu seinem Wohnsitz zurückkehren.
Die erste auswärtige Stadt dieser Reise soll Erfurt sein, die Reihenfolge der anderen Städte ist noch nicht festgelegt. Die Abbildung zeigt eine mögliche Reiseroute.



Gib alle Reiserouten an, die unter den genannten Bedingungen gewählt werden können!
Wie viele Reiserouten sind das insgesamt? Eine Begründung wird nicht verlangt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es kann unter genau den folgenden Reiserouten gewählt werden:

$$D-E-M-P-S-D, \quad D-E-M-S-P-D, \quad D-E-P-M-S-D,$$

$$D-E-P-S-M-D, \quad D-E-S-M-P-D, \quad D-E-S-P-M-D.$$

Das sind insgesamt 6 Reiserouten. Die Angabe der Routen kann in dieser oder ähnlicher Abkürzung oder zeichnerisch erfolgen.

Aufgabe 330524:
Rita berechnet die drei Zahlen

$$1+9-9+3=a, \qquad 1\cdot 9+9-3=b, \qquad 1\cdot 9\cdot 9\cdot 3=c$$

Sie betrachtet weitere Möglichkeiten, in die Kästchen der Zeile

$$1 \square 9 \square 9 \square 3 =$$

Zeichen einzusetzen, die entweder + oder − oder · sind. Dabei sucht sie alle diejenigen Einsetzungen, bei denen die auszurechnende Zahl größer als 30, aber kleiner als 100 ist.
Finde alle diese Einsetzungen; weise nach, dass du alle gefunden hast!
Addiere die dabei entstandenen auszurechnenden Zahlen!
Zur so gefundenen Summe addiere weiterhin das Produkt der beiden kleinsten unter den zwischen 30 und 100 gefundenen Zahlen! Addiere schließlich die oben als a, b und c berechneten Zahlen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die auszurechnende Zahl kann nur dann größer als 30 sein, wenn mindestens in einem der beiden Kästchen zwischen 9 und 9 bzw. zwischen 9 und 3 das Zeichen · steht.
Steht es zwischen 9 und 3, so kann davor nicht − stehen (es würde eine zu große Zahl subtrahiert), aber auch nicht · (denn 1 durch eine Rechenoperation +, − oder · mit $9 \cdot 9 \cdot 3 = 243$ verbunden, gibt kein Ergebnis zwischen 30 und 100). Also muss davor dann + stehen.

Ferner kann dann zwischen 1 und 9 nicht − stehen (wieder würde eine zu große Zahl subtrahiert). Steht das Zeichen zwischen 9 und 9, so kann danach nur + oder − stehen (weil · eben schon widerlegt wurde) und davor nicht − (es würde eine zu große Zahl subtrahiert).

Also entstehen genau bei den Ersetzungen

$$\begin{aligned} 1+9+9\cdot 3 &= 37,\\ 1\cdot 9+9\cdot 3 &= 36,\\ 1+9\cdot 9+3 &= 85,\\ 1\cdot 9\cdot 9+3 &= 84,\\ 1+9\cdot 9-3 &= 79,\\ 1\cdot 9\cdot 9-3 &= 78 \end{aligned}$$

auszurechnende Zahlen zwischen 30 und 100.

Mit der Summe s dieser Zahlen ergeben die weiteren geforderten Additionen $s = 37+36+85+84+79+78 = 399$; $36 \cdot 37 = 1332$, $a+b+c = 4+15+243 = 262$, in der Summe 1993.

III.II. Logik, Mengen

Runde 1

Aufgabe V00508:
Drei Freunde sitzen in einer Gaststätte. Jeder hat 10 DM zu zahlen. Das sind insgesamt 30 DM. Der Wirt beauftragt jedoch den Ober, den Gästen 5 DM zurückzuzahlen.
Der Ober gibt jedem Gast aber nur 1 DM zurück, also insgesamt 3 DM, und behält 2 DM für sich. Die Freunde haben also für die Zeche zusammen 27 DM bezahlt. 2 DM hat der Ober behalten. Das sind 29 DM.
Wo ist die restliche Mark?

Lösung von Steffen Polster:
Jeder Gast hatte $(30-5) : 3 = 8\frac{1}{3}$ DM zu bezahlen, zahlte jedoch $(30-3) : 3 = 9$ DM, also $\frac{2}{3}$ DM zu viel.
Das sind $\frac{2}{3} \cdot 3 = 2$ DM, die der Ober für sich behielt. Die Bezugnahme auf die restliche 1 DM ist eine Irreführung.

Aufgabe 020515:
An einem Tisch sitzen sieben Schüler. Einer hört auf den Vornamen Fred, einer heißt Willi, vier heißen Lutz und einer heißt Christian.
Weiter wissen wir nur, dass unter ihnen zwei Brüder mit dem Familiennamen Scheibner, einer mit dem Zunamen Franke und vier Schüler mit dem Namen Schulz sind.

a) Von wem können wir mit absoluter Sicherheit Vor- und Zunamen angeben?
b) Warum muss er so heißen?

Lösung von Steffen Polster:
a) Einer der Schüler muss Lutz Schulz heißen.

b) Vier der sieben Schülern heißen mit Vornamen Lutz. Ebenso heißen vier von sieben Schülern mit Nachnamen Schulz.
Nur drei Schüler haben nicht den Nachnamen Schulz. Da aber vier Jungen Lutz heißen, muss mindestens einer den Familiennamen Schulz tragen.

Aufgabe 050512:

```
1 2 = 3
1 2 3 = 4
1 2 3 4 = 5
1 2 3 4 5 = 6
1 2 3 4 5 6 = 7
1 2 3 4 5 6 7 = 8
1 2 3 4 5 6 7 8 = 9
1 2 3 4 5 6 7 8 9 = 10
```

Setze auf der linken Seite Rechenzeichen derart, dass wahre Ausagen in Form von Gleichungen entstehen.
(Nebeneinanderstehende Ziffern dürfen als eine Zahl betrachtet, doch die Reihenfolge darf nicht geändert werden. Du darfst auch Klammern verwenden. Zu jeder Aufgabe genügt eine Lösung.)

Lösung von Steffen Polster:
Mögliche Lösungen sind:

$$1 + 2 = 3$$
$$12 : 3 = 4$$
$$(1 + 2) \cdot 3 - 4 = 5$$
$$1 + 2 \cdot 3 + 4 - 5 = 6$$
$$1 + 2 - 3 - 4 + 5 + 6 = 7$$
$$1 + 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 = 8$$
$$1 \cdot 2 + 3 + 4 + 5 - 6 - 7 + 8 = 9$$
$$1 \cdot 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 - 8 - 9 = 10$$

Aufgabe 100514:
Hans und Günter wollen Briefmarken tauschen. Auf die Frage nach der Anzahl seiner Tauschmarken antwortet Günter:

„Ich habe heute polnische, sowjetische und bulgarische Briefmarken und sonst keine anderen zum Tausch anzubieten. Es sind insgesamt 30 Stück.
Die Anzahl der sowjetischen Marken ist größer als die der polnischen, aber kleiner als die der bulgarischen. Die Anzahl der bulgarischen Marken dagegen ist größer als das Vierfache, aber kleiner als das Fünffache der Anzahl meiner sowjetischen Marken.“

Gib alle Möglichkeiten an, die folgende Tabelle so auszufüllen, dass diese Bedingungen erfüllt sind!

Anzahl der polnischen Marken	...
Anzahl der sowjetischen Marken	...
Anzahl der bulgarischen Marken	...
Ungleichung zwischen der Anzahl der sowjetischen und der Anzahl der polnischen Marken	...
Ungleichung zwischen der Anzahl der sowjetischen und der Anzahl der bulgarischen Marken	...
Ungleichung zwischen der Anzahl der bulgarischen Marken und dem Vierfachen der Anzahl der sowjetischen Marken	...
Ungleichung zwischen der Anzahl der bulgarischen Marken und dem Fünffachen der Anzahl der sowjetischen Marken	...

Lösung von Steffen Polster:
Die Anzahl der sowjetischen Marken sei s, die der polnischen p und die der bulgarischen b.Dann gilt nach der Aufgabenstellung

$$s + p + b = 30 \quad ; \quad p < s < b \quad ; \quad 4s < b < 5s$$

s, b und p sind größer als 0. p muss aber kleiner als 5 sein, da andernfalls s mindestens 6 und $b > 4s > 24$ wäre. Damit würde die Summe $p + s + b$ größer als 30 sein.

Addiert man zur letzten Ungleichung p und b, so ergibt sich $4s + s + p < s + p + b = 30 < 5s + s + p$, also $5s < 30 - p < 6s$. Das bedeutet für die möglichen Werte für p:

p	1	2	3	4
$5s < 30 - p < 6s$	$5s < 29 < 6s$	$5s < 28 < 6s$	$5s < 27 < 6s$	$5s < 26 < 6s$
mögliche Werte für s	5	5	5	5

D. h., s ist stets 5. Damit erhält man für die Anzahl der bulgarischen Briefmarken aus $b = 30 - p - s$ für $p = 1,2,3,4$ die Werte $b = 24,23,22,21$.

Es gibt damit genau die folgenden 4 Tripel (p,s,b): (1,5,24), (2,5,23), (3,5,22), (4,5,21), die auch alle Bedingungen erfüllen, wie die Tabelle zeigt.

Anzahl der polnischen Marken	1	2	3	4
Anzahl der sowjetischen Marken	5	5	5	5
Anzahl der bulgarischen Marken	24	23	22	21
Ungleichung zwischen der Anzahl der sowjetischen und der Anzahl der polnischen Marken	$5 > 1$	$5 > 2$	$5 > 3$	$5 > 4$
Ungleichung zwischen der Anzahl der sowjetischen und der Anzahl der bulgarischen Marken	$5 < 24$	$5 < 23$	$5 < 22$	$5 < 21$
Ungleichung zwischen der Anzahl der bulgarischen Marken und dem Vierfachen der Anzahl der sowjetischen Marken	$24 > 4 \cdot 5 = 20$	$23 > 20$	$22 > 20$	$21 > 20$
Ungleichung zwischen der Anzahl der bulgarischen Marken und dem Fünffachen der Anzahl der sowjetischen Marken	$24 < 5 \cdot 5 = 25$	$23 < 25$	$22 < 25$	$21 < 25$

Aufgabe 110512:
Rolf behauptet, dass sich eine Additionsaufgabe mit der Summe 1000 bilden lässt, wobei sämtliche Summanden natürliche Zahlen sind, in deren dekadischer Darstellung ausschließlich die Ziffer 8 auftritt, und zwar insgesamt genau 8 mal.

Stelle fest, ob Rolfs Behauptung richtig ist!
Wenn sie es ist, so gib alle derartigen Additionsaufgaben an und ordne darin die Summanden der Größe nach, beginnend mit dem größten!

Lösung von Steffen Polster:
Das Ergebnis der Additionsaufgabe soll auf Null enden, was nur möglich ist, wenn mindestens 5 Summanden auf 8 enden. 10 Summanden oder mehr sind nach der Aufgabenstellung nicht möglich.

Um 8 Ziffern 8 in 5 Summanden unterzubringen, müssen 3 Ziffern 8 als Zehner, Hunderter oder Tausender auftreten. Damit gibt es nur die Möglichkeiten

$$88 + 88 + 88 + 8 + 8 = 280 \quad (1)$$
$$888 + 88 + 8 + 8 + 8 = 1000 \quad (2)$$
$$8888 + 8 + 8 + 8 + 8 = 8920 \quad (3)$$

Nur (2) ergibt eine Summe von 1000 und ist damit die einzige mögliche Lösung. Rolf hat recht, es gibt so eine Additionsaufgabe und zwar genau eine.

Aufgabe 120512:
Heinz, Gerd und Jochen haben sich in einem Zeltlager für Thälmann-Pioniere kennengelernt. Von diesen drei Jungen ist folgendes bekannt:

(1) Mindestens zwei von ihnen spielen Tischtennis, mindestens zwei Fußball.
(2) Einer von ihnen wohnt in Berlin, einer in Leipzig und einer in Rostock. Keiner von ihnen wohnt gleichzeitig in zwei dieser Orte.
(3) Nur Heinz und der Berliner sind Tischtennisspieler.
(4) Nur Gerd und der Leipziger sind Fußballspieler.
(5) Jochen, der Handball spielt, ist älter als der Leipziger.
(6) Keiner der Tischtennisspieler spielt auch Handball.
(7) Der Handballspieler ist nicht der älteste der drei Jungen.

Gib von jedem der drei Jungen an, wo er wohnt und welche der drei Sportarten er betreibt!
Wer ist der älteste und wer der jüngste der drei Jungen?

Lösung von Steffen Polster:
Aus (2) und (4) bzw. (5) folgen, dass Gerd und Jochen nicht in Leipzig wohnen, also Heinz.
Dann folgt aus (4), dass Gerd und Heinz Fußball spielen; außerdem aus (5) und (6), dass Jochen kein Tischtennisspieler ist und somit Heinz und Gerd Tischtennis spielen.

Ergebnis: Heinz und Gerd spielen sowohl Fußball als auch Tischtennis; Jochen ist der Handballspieler.

Nach (3) muss Gerd nun aus Berlin sein, also Jochen in Rostock, da (siehe oben) Heinz in Leipzig wohnt.
Weiterhin ist ist Jochen nach (5) älter als Heinz (Leipziger) und nach (6) Jochen (Handball) nicht der Älteste. Damit ergibt ist Gerd der Älteste, Jochen der Mittlere und Heinz der Jüngste.

Aufgabe 170512:
Von drei Pionieren, die sich in einem Rätelager treffen, ist folgendes bekannt:

(1) Ihre Vornamen sind Frank, Gerd und Harald.
(2) Ihre Familiennamen lauten Schulze, Müller und Krause.
(3) Frank heißt mit Familiennamen nicht Krause.
(4) Der Vater von Gerd ist Offizier der NVA.
(5) Gerd besucht die 6. Klasse, der Pionier mit dem Familiennamen Krause geht in die 7. Klasse.
(6) Der Vater des Pioniers mit dem Familiennamen Schulze arbeitet als Dreher.

Wie heißen diese drei Pioniere mit Vor- und Zunamen?

Lösung von Steffen Polster:
Da Frank wegen (3) und Gerd wegen (5) nicht Krause heißen, ist Haralds Familienname Krause. Gerd kann nicht Schulze heißen nach Bedingung (4) und (6). Er heißt Gerd Müller. Damit ist Franks Familienname Schulze.

D. h., die Namen sind Frank Schulze, Gerd Müller, Harald Krause.

Aufgabe 180511:
Gerda, Peter und Renate sehen auf dem Tisch einen Teller mit Haselnüssen stehen. Sie wissen nicht, wie viel Nüsse es sind.

Gerda meint: „Wenn man fünfmal nacheinander 19 Nüsse vom Teller wegnimmt, bleiben noch mehr als 5 Nüsse auf dem Teller zurück.“
Renate meint: „Wollte man aber fünfmal nacheinander 20 Nüsse von dem Teller wegnehmen, so würden die Nüsse dafür nicht ausreichen.“
Peter sagt: „Eine von euch beiden hat bestimmt recht.“

Nach dem Auszählen wurde festgestellt, dass Peter sich geirrt hatte.
Wie viel Nüsse lagen insgesamt auf dem Teller?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Gerda hatte wegen $5 \cdot 19 + 5 = 100$ gemeint, es seien mehr als 100 Nüsse auf dem Teller gewesen. Renate hatte wegen $5 \cdot 20 = 100$ gemeint, es seien weniger als 100 Nüsse gewesen. Da Peter sich geirrt hatte, hatte keines der beiden Mädchen recht. Daher lagen genau 100 Nüsse auf dem Teller.

Aufgabe 190513:
Kurt, Peter und Konrad sind jeweils in genau einer der drei Arbeitsgemeinschaften „Mathematik“, „Biologie“, „Zeichnen“. Ferner ist bekannt:

(1) Peter geht häufiger zum Schwimmen als der Junge aus der AG „Mathematik“.
(2) Der Junge aus der AG „Mathematik“ und Konrad haben nicht gleich viele Urkunden bei einem Sportwettkampf erhalten.
(3) Peter geht in eine niedrigere Klasse als der Junge aus der AG „Biologie“.
Welcher der drei Jungen besucht die AG „Mathematik“, welcher die AG „Biologie“ und welcher die AG „Zeichnen“?

Lösung von Steffen Polster:
Aus den ersten beiden Aussagen folgt, dass nur Kurt die AG „Mathematik“ besucht. Damit ergibt die dritte Aussage dann, dass Peter gern zeichnet und Konrad sich besonders für Biologie interessiert.

Aufgabe 200514:
Von den sieben Schülern Annette, Beate, Christine, Dieter, Frank, Gerd und Hans hatte jeder in mindestens einem der beiden Fächer Mathematik und Russisch die Note 1.
Auf die Frage, wer in genau einem dieser beiden Fächer die Note 1 hat, meldeten sich von diesen Schülern nur Annette, Christine, Frank, Gerd und Hans. In Mathematik hatten von ihnen nur Beate, Christine, Dieter und Frank die Note 1.
Ermittle aus diesen Angaben alle diejenigen der sieben Schüler, die

a) in Mathematik und in Russisch,
b) in Mathematik, aber nicht in Russisch,
c) in Russisch, aber nicht in Mathematik die Note 1 hatten!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
b) Von allen denjenigen unter den sieben Schülern, die in Mathematik die Note 1 hatten, haben sich genau Christine und Frank gemeldet, als gefragt wurde, wer in genau einem der beiden Fächer die Note 1 hat. Also hatten genau diese beiden Schüler in Mathematik, aber nicht in Russisch die Note 1.

a) Genau die übrigen unter denjenigen Schülern, die in Mathematik die Note 1 hatten, d.s. genau Beate und Dieter, hatten folglich in Mathematik und in Russisch die Note 1.

c) Genau diejenigen unter den sieben Schülern, die nicht in Mathematik die Note 1 hatten, d.s. genau Annette, Gerd und Hans, hatten in Russisch, aber nicht in Mathematik die Note 1.

Aufgabe 210514:
Eine Aufgabe aus einer Leningrader Mathematikolympiade:

Ein „Oktoberkind" (das ist ein Jungpionier bis zur 3. Klasse), ein Pionier und ein Komsomolze fuhren in ein Pionierlager. Ihre Vornamen sind (nicht unbedingt in derselben Reihenfolge) Kolja, Igor und Sascha. Aus ihren Gesprächen im Zug erfuhren wir:

(1) Kolja und der Komsomolze sind zwei begeisterte Angler.
(2) Das Oktoberkind wohnt in Leningrad; Sascha auch, aber in einer anderen Straße.
(3) Sascha ist jünger als der Komsomolze.

Welchen Vornamen hat das Oktoberkind, welchen Vornamen hat der Pionier, und welchen Vornamen hat der Komsomolze?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Aus (1) folgt: Der Komsomolze heißt nicht Kolja.
Aus (3) folgt: Der Komsomolze heißt nicht Sascha. Also hat er den Vornamen Igor. Daher heißt das Oktoberkind nicht Igor.
Aus (2) folgt: Das Oktoberkind heißt nicht Sascha. Somit hat es den Vornamen Kolja. Damit verbleibt für den Pionier nur der Vorname Sascha.

Aufgabe 230511:
Bernd, Peter und Fred nahmen mit Erfolg an der Schulolympiade teil. Jeder von ihnen bekam genau eine der folgenden drei Auszeichnungen: 1. Preis, 2. Preis oder Diplom. Ferner ist bekannt:

(1) Der Schüler mit den 2. Preis ist älter als Bernd.
(2) Fred erhielt nicht den 1. Preis.
(3) Bernd gehört keiner mathematischen Arbeitsgemeinschaft an.
(4) Der Schüler, der den 1. Preis errang, ist in einer mathematischen Arbeitsgemeinschaft.

Wer von ihnen erhielt den 1. Preis, wer von ihnen erhielt den 2. Preis, und wer von ihnen erhielt das Diplom? Begründe deine Antwort!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Aus (3) und (4) folgt, dass Bernd nicht den 1. Preis errang. Da genau einer der drei Schüler einen 1. Preis erhielt, folgt dann aus (2): Peter erhielt den 1. Preis. (5)
Wegen (1) erhielt Bernd nicht den 2. Preis; wegen (5) erhielt auch Peter nicht den 2. Preis. Daraus folgt: Fred erhielt den 2. Preis. (6)
Da jeder der drei Schüler genau eine Auszeichnung bekam, folgt dann: Bernd bekam das Diplom.

Aufgabe 250512:
Bei einem Gruppenfest im Pionierlager verabreden 17 Kinder folgendes Spiel:
Es wird im Kreis herum immer wieder von 1 bis 7 gezählt, wobei sich jedes siebente Kind aus dem Kreis entfernen soll und dann auch beim weiteren Zählen nicht mehr berücksichtigt wird. Wer zuletzt übrigbleibt, hat verloren und muss einen Pfand geben.

Frank Pfiffig darf vorschlagen, bei welchem Kind mit dem Abzählen begonnen werden soll. Er will seinen Freund Norbert Nörgel ärgern und beginnt mit dem Abzählen so, dass dieser verliert.
Wie kann er das erreichen?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Bezeichnet man die am Spiel beteiligten Kinder mit den Zahlen 1 bis 17 und beginnt bei 1 mit dem Abzählen, so findet man durch Probieren, dass das Kind mit der Nr. 2 als Verlierer übrigbleibt. Das Probieren kann z. B. in einer Tabelle der folgenden Art geschehen:

Pionier Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
scheidet als ...ter aus	16		5	3	14	7	1	11	10	12	9	4	6	2	15	13	8

Frank Pfiffig kann also sein Ziel erreichen, indem er mit den Abzählen einen Platz vor seinem Freund Herbert Nörgel beginnt.

Aufgabe 260511:
Die Mädchen Grit, Regina und Beate tragen jede eine einfarbige Bluse. Von diesen drei Blusen ist eine gelb, eine rot und eine blau.
Grit stellt fest, dass keines der Mädchen eine Bluse von der Farbe trägt, die den gleichen Anfangsbuchstaben wie der Vorname des Mädchens hat.
Das Mädchen mit der roten Bluse antwortet darauf: „Das hatte ich noch gar nicht bemerkt, aber du hast recht. Grit!“
Welche Bluse trägt jedes der Mädchen?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Aus Grits Feststellung folgt:
(1) Grits Bluse ist nicht gelb.
(2) Regina hat nicht die rote Bluse an.
(3) Beate trägt nicht die blaue Bluse.
Da das Mädchen mit der roten Bluse nicht Grit ist (denn es hatte Grits Feststellung noch nicht bemerkt), folgt:
(4) Grits Bluse ist nicht rot.
Aus (1) und (4) folgt, dass Grit die blaue Bluse trägt. Dann aber muss wegen (2) Regina die gelbe Bluse anhaben. Daraus folgt weiter, dass Beate die rote Bluse trägt.

Aufgabe 260514:
Der Pionier Klaus Knobler tritt als Zauberkünstler vor seiner Pioniergruppe auf. Nachdem ihm die Augen verbunden wurden, bittet er einen Zuschauer, aus einer Streichholzschachtel eine beliebige ungerade Anzahl von Hölzern, jedoch mindestens 13, zu entnehmen.
Diese Hölzer sollen in zwei parallelen Reihen auf den Tisch gelegt werden, wobei die obere Reihe genau ein Streichholz mehr enthalten soll als die untere. Nachdem dies geschehen ist, lässt Klaus Knobler

(1) irgendeine von ihm selbst genannte Anzahl a (mindestens 1, jedoch weniger als 7) Streichhölzer aus der oberen Reihe fortnehmen, dann
(2) aus der unteren Reihe so viele Streichhölzer wegnehmen, wie oben noch liegen, und dann
(3) aus der oberen Reihe alle übrigen Streichhölzer entfernen.

Danach nennt Klaus Knobler den staunenden Zuschauern die Anzahl der auf dem Tisch verbliebenen Hölzer. Wie groß ist sie?
Durch welche Überlegung kann Klaus Knobler sie finden, ohne die Anzahl der zu Beginn auf dem Tisch liegenden Hölzer zu kennen?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Klaus Knobler kann folgendermaßen überlegen:

Angenommen, zu Beginn haben in der oberen Reihe außer den a Streichhölzern noch weitere b Hölzer gelegen. Dann lagen also anfangs in der oberen bzw. unteren Reihe $\begin{matrix} a+b \\ a+b-1 \end{matrix}$ Hölzer. Nach Ausführen von (1) liegen in der oberen bzw. unteren Reihe $\begin{matrix} b \\ a+b-1 \end{matrix}$ Hölzer. Nach Ausführen von (2) liegen in der oberen bzw. unteren Reihe $\begin{matrix} b \\ a-1 \end{matrix}$ Hölzer. Schließlich verbleiben nach Ausführen von (3) noch $a-1$ Hölzer auf dem Tisch. Klaus Knobler braucht also nur den Vorgänger der von ihm bei (1) genannten Zahl a zu bilden und als Anzahl der auf dem Tisch verbliebenen Streichhölzer anzugeben.

Aufgabe 270514:
a) Die Figur der Abbildung a soll so „in einem Zuge“ gezeichnet werden, dass dabei keine Linie zweimal durchlaufen wird.
Ein solcher „Zug“ kann z. B. im Punkt L beginnen und über die Punkte M, J, K, L, B, A, H, G, H, J, F, G, F, M, D, F, E, D, C, B, H, K, B, C, D nach Punkt L zurückführen.
Suche mindestens einen weiteren derartigen „Zug“ und schreibe ihn wie im Beispiel mit Hilfe der bei ihm zu durchlaufenden Punkte auf!
b) Auch die Figur der Abbildung b lässt sich in einem Zuge so zeichnen, dass jede Linie genau einmal durchlaufen wird. Gib mindestens einen derartigen „Zug“ an!
c) Vergleiche Anfangs- und Endpunkt der von dir in den Abbildungen a und b gefundenen Wege! Was stellst du fest?

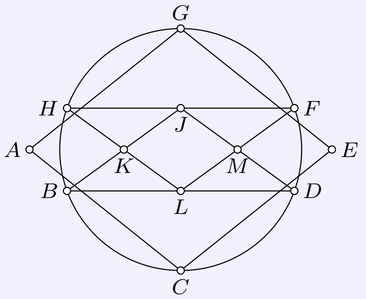


Abbildung a)

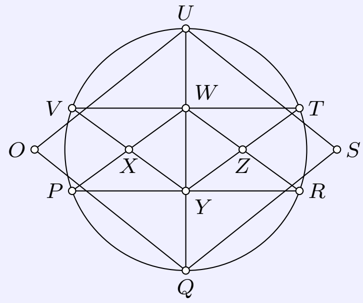


Abbildung b)

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es gibt zu a) und b) jeweils mehrere Lösungen, z. B.

a) $J, M, L, K, J, H, A, B, C, B, L, D, C, D, M, F, D, E, F, G, H, B, K, H, G, F, J,$

b) U, V, U, W, V, X, W, Y, X, P, O, V, P, Y, Q, P, Q, R, S, T, R, Z, T, U, T, W, Z, Y, R, Q.
Für alle Lösungen gelten die Aussagen zu c).

c) Jeder Zug bei a) endet im gewählten Anfangspunkt. (Man sagt dafür auch: Der Zug ist ein „geschlossener Weg“. Dabei kann jeder Punkt Anfangs- und damit auch Endpunkt sein.)
Die Züge bei b) beginnen alle entweder im Punkt U oder im Punkt Q und enden je nachdem im Punkt Q oder im Punkt U. Anfangs- und Endpunkt fallen also bei b) nicht zusammen, es handelt sich um einen „offenen Weg“.

Aufgabe 300512:
Die Schüler Arnim, Bert, Conny und Detlef wohnen in verschiedenen Städten der DDR, und zwar jeder in genau einer der Städte Dresden, Magdeburg, Potsdam, Schwerin. Darüber macht Arnim folgende vier Aussagen:

(1) Ich bin weder aus Potsdam noch aus Dresden.
(2) Bert ist entweder aus Potsdam oder aus Schwerin.
(3) Conny ist weder aus Dresden noch aus Magdeburg.
(4) Detlef ist entweder aus Potsdam oder aus Magdeburg.

Stelle fest, ob alle diese Aussagen Arnims gleichzeitig wahr sein können! Begründe deine Feststellung!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wären alle Aussagen wahr, dann wäre wegen (1) Arnim nicht aus Dresden, wegen (2) Bert ebenfalls nicht. Wegen (3) wohnte auch Conny nicht in Dresden und wegen (4) schließlich auch Detlef nicht.

Das steht aber im Widerspruch zu den Angaben der Aufgabe. Folglich können nicht alle vier Aussagen Arnims gleichzeitig wahr sein.

Aufgabe 310512:
Maik trifft sich mit sechs Mitschülern. Einer davon hat den Vornamen Heino, einer den Vornamen Torsten, und vier heißen mit Vornamen Steffen. Ferner haben vier von diesen sieben Schülern den Familiennamen Lehmann, einer heißt mit Familiennamen Krull und zwei haben den Familiennamen Pfitzner, aber unterschiedliche Vornamen.

a) Zeige, dass für zwei der sieben Schüler der Vor- und Familienname eindeutig aus diesen Angaben hervorgeht! Gib den Vor- und Familiennamen dieser beiden Schüler an!
b) Untersuche, ob noch für weitere Schüler Vor- und Familiennamen eindeutig aus den Angaben hervorgeht oder ob für jeden weiteren Schüler mehr als eine Möglichkeit besteht, die obigen Angaben durch Zusammenstellen von Vor- und Familiennamen zu erfüllen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Wenn kein Schüler Steffen Lehmann hieße, so wären die vier Schüler Steffen und die vier Schüler Lehmann acht verschiedene Schüler, was nicht möglich ist. Also heißt mindestens einer der Schüler Steffen Lehmann.
Wenn von den anderen sechs Schülern ebenfalls keiner Steffen Lehmann hieße, so wären drei Schüler Steffen und drei Schüler Lehmann bereits diese sechs verschiedenen Schüler. Also käme der Familienname Pfitzner nur für Schüler mit dem Vornamen Steffen in Betracht, was ebenfalls den Angaben widerspricht.
Somit heißt noch mindestens ein zweiter Schüler Steffen Lehmann.

b) Für die übrigen fünf Schüler entspricht es aber z. B. sowohl den Angaben zu den Vornamen
Steffen, Steffen, Maik, Heino, Torsten die Familiennamen Lehmann, Lehmann, Pfitzner, Pfitzner, Krull als auch die Familiennamen Pfitzner, Krull, Lehmann, Lehmann, Pfitzner
zusammenzustellen. Daher geht für keinen der übrigen fünf Schüler der Vor- und Familienname eindeutig aus den Angaben hervor.

Aufgabe 310514:
Thomas schreibt die Zahl 2375246895 an die Tafel und erklärt, sie sei durch Hintereinanderschreiben von drei Zahlen entstanden. Diese drei Zahlen habe er der Größe nach geordnet aufgeschrieben, beginnend mit der kleinsten. Keine der drei Zahlen enthalte eine Ziffer zweimal.

a) Sebastian vermutet, die drei Zahlen seien 2, 375 und 246895; denn sie entsprechen den Angaben von Thomas.
Werner entgegnet: „Die Angaben von Thomas können auch durch drei andere Zahlen erfüllt werden."
Stimmt das? Begründe Deine Antwort!

b) Ändere in der von Thomas angeschriebenen Zahl eine Ziffer so, dass es dann nur noch genau eine Möglichkeit gibt, die Angaben durch drei Zahlen zu erfüllen. Nenne (bei der von Dir gewählten Änderung) diese eine Möglichkeit für die drei Zahlen!
Ein Begründung wird nicht verlangt.

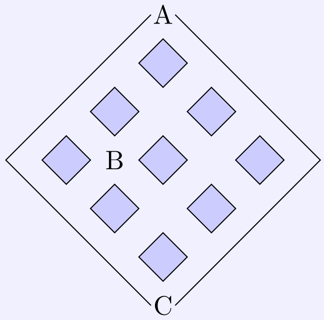
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Die Angaben können auch durch drei andere Zahlen erfüllt werden. Zur Begründung genügt es, zwei der folgenden Möglichkeiten anzugeben (wobei zu 2, 375, 246895 ein Hinweis genügt):

$$2, 3, 75246895; \quad 2, 37, 5246895; \quad 2, 375, 246895; \quad 2, 3752, 46895;$$

$$23, 75, 246895; \quad 23, 752, 46895; \quad 237, 524, 6895$$

b) Ändert man z. B. die Ziffer 4 in 6, wählt also 2375266895 als anzuschreibende Zahl, so gibt es nur die Möglichkeit, dass 237, 526, 6895 die drei Zahlen sind.

Aufgabe 340514:
In das Gefäß aus der Abbildung können Kugeln durch die Öffnung A hineinfallen. Auf ihrem Weg nach unten werden sie jedesmal, wenn sie an die obere Ecke eines Hindernisses kommen, entweder nach links oder nach rechts abgelenkt.



a) Wie viele derartige Wege von A nach B gibt es insgesamt?
b) Wie viele derartige Wege von B nach C gibt es insgesamt?
c) Wie viele derartige Wege von A über B nach C gibt es insgesamt?
d) Wie viele derartige Wege von A nach C gibt es insgesamt?

Erläutere für wenigstens eine der Teilaufgaben a), b), c), d), wie du die gesuchte Anzahl möglicher Wege gefunden hast!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Zur Beschreibung des Weges einer Kugel werde die Ablenkung nach links bzw. rechts durch l bzw. r angegeben.

a) Auf jedem Weg von A nach B kommt man dreimal an eine Weggabelung. Um B zu erreichen, muss man an genau zwei Gabelungen nach links, an genau einer Gabelung nach rechts gehen. Daher gibt es genau die 3 Wege llr, lrl, rll.

b) Um von B nach C zu gelangen, muss man genau einmal nach links und genau zweimal nach rechts gehen. (Dabei handelt es sich in jedem dieser drei Fälle entweder um die Entscheidung an einer Weggabelung oder um die Fortsetzung, die durch den Rand des Gefäßes eindeutig erzwungen ist.)
Hiernach gibt es genau die 3 Wege lrr, rlr, rrl.

c) Um von A über B nach C zu gelangen, hat man nach jedem der drei Wege aus a) die Möglichkeit, jeden der drei Wege aus b) anzuschließen. Also gibt es insgesamt $3 \cdot 3 = 9$ derartige Wege.

d) Um von A nach C zu gelangen, muss man genau dreimal nach links und genau dreimal nach rechts gehen (jeweils entweder bei einer Weggabelung oder durch den Rand des Gefäßes erzwungen). Damit gibt es genau die Wege
beginnend mit lll: lllrrr,
beginnend mit llr: llrlrr, llrrlr, llrrrl,
beginnend mit lrr: lrllrr, lrlrlr, lrlrrl,
beginnend mit lrr: lrrllr, lrrlrl, lrrrll,
beginnend mit rll: rlllrr, rllrlr, rllrrl,
beginnend mit rlr: rlrllr, rlrlrl, rlrrll,
beginnend mit rrl: rrlllr, rrllrl, rrlrll,
beginnend mit rrr: rrrlll,
das sind insgesamt 20 Wege.

Runden 2 & 3

Aufgabe 040524:
Während einer Vorstellung im „Theater der Jungen Welt“ in Leipzig blieben einige Plätze frei. Alfred zählte 17, Annerose dagegen 16 freie Plätze.
Heinz sagte, Alfred habe sich auf jeden Fall verzählt.
Wie konnte Heinz seine Aussage begründen, wenn er wusste, dass es im Theater 520 Plätze gibt und in dieser Vorstellung 68 Mädel mehr als Jungen anwesend waren?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn die Anzahl der Jungen ungerade ist, so ist es auch die der Mädchen. Die Summe zweier ungerader Zahlen ist aber eine gerade Zahl.

Wenn die Anzahl der Jungen gerade ist, so ist es auch die der Mädchen. Die Summe zweier gerader Zahlen ist ebenfalls eine gerade Zahl. Die Anzahl der freien Plätze muss somit gerade sein, denn die Differenz zweier gerader Zahlen ist wieder eine gerade Zahl.

Oder: Ist a die Anzahl der Jungen, so ist $2a + 68$ die Anzahl der Jungen und Mädel im Theater. Die Anzahl der freien Plätze muss somit gerade sein.

Aufgabe 070524:
Nachdem der Mathematiklehrer sämtliche 4 Olympiadeaufgaben seiner 36 Schüler korrigiert und ausgewertet hatte, gab er den Mitgliedern seiner Arbeitsgemeinschaft die folgende Tabelle und führte dazu aus:

„Die Anzahl der Schüler, die keine Aufgabe richtig lösten, ist gleich der Anzahl derjenigen, die alle Aufgaben richtig lösten.
Die Anzahl derjenigen, die nur 1 Aufgabe richtig bewältigten, ist doppelt so groß wie die An- zahl der Teilnehmer, die alle Aufgaben richtig lösten, und gleich der Anzahl derjenigen, die genau 3 richtige Lösungen abgaben.
Die Anzahl der richtigen (s. Spalte III, Zeile f) ist genau dreimal so groß wie die Anzahl der Teilnehmer mit genau 2 richtigen Lösungen und doppelt so groß wie die Anzahl aller Teilnehmer. Mit diesen Angaben seid ihr in der Lage, die Tabelle zu vervollständigen.“

	I Anzahl der richtigen Lösungen pro Schüler	II Anzahl der Schüler	III Anzahl der richtigen Lösungen insgesamt
a)	0	...	...
b)	1	...	...
c)	2	...	...
d)	3	...	...
e)	4	...	...
f)	Gesamtzahlen	36	...

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Da die Anzahl aller Teilnehmer 36 ist, ist die Anzahl der richtigen Lösungen insgesamt laut Aufgabe 72 und die Anzahl der Schüler mit genau 2 richtigen Lösungen 72 = 3 - 24.

Da die Anzahl der Schüler in Zeile a) gleich der in Zeile 0) und gleich der Hälfte der Anzahlen in Zeile b) bzw. in d) sein soll, sind die restlichen 12 Schüler wie folgt zu verteilen, und die Tabelle kann danach vervollständigt werden:

	I Anzahl der richtigen Lösungen pro Schüler	II Anzahl der Schüler	III Anzahl der richtigen Lösungen insgesamt
a)	0	2	0
b)	1	4	4
c)	2	24	48
d)	3	4	12
e)	4	2	8
f)	Gesamtzahlen	36	72

Aufgabe 080523:
Heinz fragt Gerd: „Wie viel Jahre bist du alt?“
Gerd antwortet: „Meine Schwester ist viermal so alt wie mein Bruder. Ich bin mehr als doppelt, aber weniger als viermal so alt wie meine Schwester. Zusammen sind wir drei Geschwister 17 Jahre alt.“

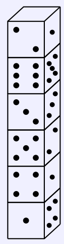
Berechne, wie viel Jahre Gerd alt ist!
(Alle Altersangaben sollen in vollen Jahren erfolgen.)

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Da Gerd mehr als doppelt so alt ist wie seine Schwester und seine Schwester viermal so alt ist wie ihr Bruder, muss Gerd mehr als achtmal so alt sein wie sein Bruder.
Wäre sein Bruder zwei oder mehr Jahre alt, dann müsste Gerd mehr als 16 Jahre alt sein. Das widerspräche der Angabe, dass die Summe der Jahre 17 beträgt.

Also ist der Bruder 1 Jahr alt, die Schwester demnach 4 Jahre, und wegen 17 - 1 - 4 = 12 muss Gerd 12 Jahre alt sein.

Wegen $4 \cdot 4 > 12$ ist auch die Bedingung erfüllt, dass Gerd weniger als viermal so alt ist wie seine Schwester. Die angegebene Lösung genügt damit allen Bedingungen und ist zugleich die einzig mögliche.

Aufgabe 090521:
Auf einem Tisch sind sechs gleichgroße Spielwürfel so übereinandergesetzt, wie es die Abbildung zeigt. Auf der obersten Fläche ist die Augenzahl 1 zu sehen.



Ermittle die Summe der Augenzahlen der verdeckten Flächen dieser Würfel!

Beachte dabei, dass die Augenzahl von je zwei gegenüberliegenden Würfelflächen eines jeden Spielwürfels stets 7 beträgt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Bei genau 5 Würfeln sind je zwei gegenüberliegende Würfelflächen verdeckt. Die Summe ihrer Augenzahlen beträgt daher $5 \cdot 7 = 35$.
Bei dem obersten Würfel ist nur die der Fläche mit der Augenzahl 1 gegenüberliegende Fläche verdeckt. Sie hat aus dem in der Aufgabe genannten Grunde die Augenzahl 6.
Mithin beträgt die Summe der Augenzahlen aller verdeckten Flächen $35 + 6 = 41$.

Aufgabe 110522:
Bernd hat an Monika insgesamt 21 Mark an Beiträgen abzurechnen. Er hat 8 Zweimarkstücke und 6 Fünfmarkstücke und kein weiteres Geld bei sich.
In Monikas Kasse befinden sich genau 20 Mark, und zwar in Form von 10 Zweimarkstücken.
Sie behauptet, dass es unter diesen Umständen 3 verschiedene Möglichkeiten gibt, den angegebenen Betrag abzurechnen.

Dabei sollen keine Möglichkeiten gezählt werden, bei denen ein Geldstück einmal zwischen Bernd und Monika hin- und ein gleichwertiges später wieder zurückgegeben wird. Auch sollen Möglichkeiten, die sich nur in der Reihenfolge unterscheiden, in der Geldstücke gegeben werden, nicht als verschieden gelten.
Ebenso soll es nicht darauf ankommen, welches Fünfmark- oder welches Zweimarkstück gegeben wird.

Stelle fest, ob Monikas Behauptung richtig ist.
Anmerkung: Eine Untersuchung, ob diese 3 Möglichkeiten, falls es sie gibt, die einzigen sind, ist nicht erforderlich.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
1. Möglichkeit: Bernd gibt Monika 1 Fünfmarkstück und 8 Zweimarkstücke. Wegen $5 + 8 \cdot 2 = 21$ sind das genau 21 Mark.
2. Möglichkeit: Bernd gibt Monika 3 Fünfmarkstüche und 3 Zweimarkstücke. Wegen $3 \cdot 5 + 3 \cdot 2 = 21$ sind das ebenfalls genau 21 Mark.
3. Möglichkeit: Bernd gibt Monika 5 Fünfmarkstücke und erhält von ihr 2 Zweimarkstücke zurück. Wegen $5 \cdot 5 - 2 \cdot 2 = 21$ sind das wiederum genau 21 Mark.

Aufgabe 150523:
Als eine Pioniergruppe über ihre in den letzten Jahren durchgeführten Ferienreisen berichtete, stellte sich folgendes heraus:

(1) Genau 13 Mitglieder dieser Gruppe waren schon einmal an der Ostsee.
(2) Genau 15 Pioniere waren schon einmal im Harz.
(3) Genau 6 Pioniere waren schon einmal sowohl an der Ostsee als auch im Harz.
(4) Genau 4 Pioniere waren bisher weder an der Ostsee noch im Harz.

Ermittle die Anzahl aller Pioniere, die dieser Gruppe angehören!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Nach (1) waren genau 13 der Pioniere schon einmal an der Ostsee.

Nach (2) und (3) betrug die Anzahl der Pioniere, die schon einmal im Harz, aber noch nicht an der Ostsee waren, wegen 15 - 6 = 9 genau 9 Pioniere. Also waren wegen $13 + 9 = 22$ genau 22 Pioniere dieser Gruppe schon einmal in wenigstens einer der genannten Feriengegenden.

Nach (4) und weil damit jeder der anwesenden Pioniere erfasst wurde; betrug wegen $22 + 4 = 26$ deren Anzahl 26.

Aufgabe 200524:
Ein Mathematiklehrer, ein Physiklehrer und ein Deutschlehrer treffen sich auf einer Tagung. Sie heißen Meyer, Peters und Siewert. (Die Reihenfolge der Familiennamen braucht nicht mit der Reihenfolge der Berufe übereinzustimmen.)

Im Gespräch stellen sie fest, dass einer von ihnen mit Vornamen Otmar, ein anderer Kurt und der dritte Karl heißt und dass einer in Leipzig, einer in Suhl und einer in Schwerin wohnt. Ferner wissen wir:

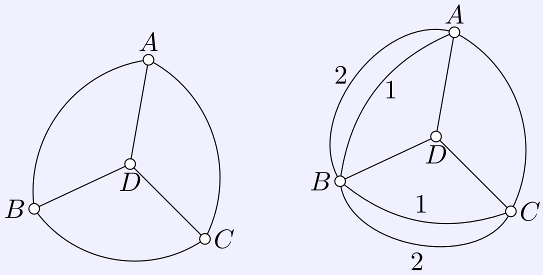
(1) Herr Meyer erzählt dem Physiklehrer, dass er den Mathematiklehrer in Leipzig besucht habe.
(2) Darauf erwidert ihm Herr Peters: „Das weiß ich schon, Kurt.“
(3) Karl hatte ihm nämlich berichtet, dass er Besuch aus Suhl gehabt habe.

In diesem Gespräch ist nur von diesen drei Personen die Rede. Ordne jedem Familiennamen den zugehörigen Vornamen, Wohnort und Beruf zu!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wegen (1) ist Herr Meyer weder der Physiklehrer noch der Mathematiklehrer, also muss er der Deutschlehrer sein.
Wegen (2) heißt er Kurt mit Vornamen, und wegen (3) wohnt er in Suhl.
Wegen (1) und (2) ist Herr Peters der Physiklehrer und hat nicht den Vornamen Kurt.
Wegen (3) heißt er auch nicht Karl; also heißt er Otmar mit Vornamen. In Suhl kann er nicht wohnen, denn dies trifft ja für Herrn Meyer zu. In Leipzig kann er auch nicht wohnen, denn dies trifft wegen (1) für den Mathematiklehrer zu. Also wohnt er in Schwerin.
Folglich verbleibt für Herrn Siewert nur die Möglichkeit, dass er der Mathematiklehrer ist, in Leipzig wohnt und mit Vornamen Karl heißt.

Aufgabe 210522:
Die vier Springbrunnen A, B, C, D eines Parkes sind so durch Wege verbunden, wie es das Bild zeigt.
Ein Spaziergänger möchte so durch den Park gehen, dass er jeden dieser Wege genau einmal durchläuft. Ein solcher Spaziergang soll bei einem beliebigen Brunnen beginnen und bei einem beliebigen Brunnen (nicht unbedingt bei demselben) enden.

a) Untersuche, ob ein derartiger Spaziergang möglich ist!
b) Später wurde noch ein weiterer Weg zwischen B und A und ein weiterer Weg zwischen B und C angelegt, wie das Bild zeigt.
Untersuche, ob es danach möglich ist, einen Spaziergang der gewünschten Art zu machen!



Hinweis: Lautet bei a) oder b) die Antwort, dass ein derartiger Spaziergang nicht möglich ist, so beweise, warum nicht!
Lautet die Antwort aber, dass er möglich ist, so gib einen solchen Spaziergang an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Angenommen, ein Spaziergang der genannten Art wäre möglich. Dann gäbe es unter den vier Springbrunnen A, B, C, D einen, der nicht Ausgangspunkt und nicht Endpunkt des Spaziergangs wäre.
Zu diesem Springbrunnen käme man bei dem Spaziergang auf einem der drei Wege, die von ihm, wie von jedem der vier Brunnen abgehen; auf einem zweiten Weg müsste man ihn wieder verlassen. Es verbleibt ein dritter Weg zu diesem Springbrunnen, und dieser Weg müsste während des Spaziergangs ebenfalls durchlaufen werden und somit entweder zum betrachteten Springbrunnen hin oder von ihm weg fuhren.

Es gäbe dann aber keinen vierten Weg, auf dem man wieder von diesem Springbrunnen weg oder vorher zu ihm hin kommen könnte; d. h., der Springbrunnen wäre doch End- oder Anfangspunkt des Spaziergangs.
Damit ist die Annahme, es gäbe einen derartigen Spaziergang, zu einem Widerspruch geführt. Sie muss also falsch sein, d. h.: Es gibt in diesem Fall keinen Spaziergang der genannten Art.

b) Ein möglicher Spaziergang nach dem Einrichten der beiden weiteren Verbindungswege ist z. B.

$$B \to A \to D \to C \to B \to A \to C \to B \to D$$

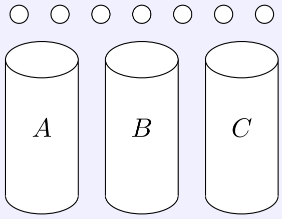
Aufgabe 210523:
Vier Schüler mit den Familiennamen Erdborn, Freimuth, König und Meyer haben die Vornamen Alfred, Martin, Norbert und Torsten (nicht unbedingt in derselben Reihenfolge).
Sie treffen sich auf der Geburtstagsfeier ihres Mitschülers Franz Neubert. Außer ihnen nahmen keine weiteren Personen an dieser Feier teil. Es ist bekannt:
(1) Als ersten Gast konnte Franz seinen Mitschüler Meyer begrüßen, als zweiten Norbert und danach Erdborn und später Martin.
(2) Jeder Gast brachte genau ein Geschenk mit: Meyer hatte ein Würfelspiel, Alfred einen Kugelschreiber, Martin einen Strauß Rosen und König ein Buch mitgebracht.

Wie heißen die vier Schüler mit ihren Vor- und Familiennamen?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Meyer heißt nach (1) weder Norbert noch Martin. Nach (2) heißt er auch nicht Alfred. Daher gilt: Meyer heißt Torsten.
König heißt folglich nicht Torsten. Nach (2) heißt er auch weder Alfred noch Martin. Hieraus folgt: König heißt Norbert.
Erdborn heißt demnach weder Torsten noch Norbert. Nach (1) heißt er auch nicht Martin. Somit ergibt sich: Erdborn heißt Alfred.
Es verbleibt nun noch: Freimuth heißt Martin.
Damit sind alle zusammengehörigen Vor- und Familiennamen (eindeutig) ermittelt.

Aufgabe 220521:

Sieben Kugeln sind so auf drei Becher A, B und C zu verteilen, dass im Becher C nicht weniger Kugeln als im Becher B und im Becher B nicht weniger als im Becher A liegen.
Es dürfen auch Becher leer bleiben.
Gib alle verschiedenen Möglichkeiten einer solchen Verteilung an!



Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es gibt genau die folgenden Verteilungen der geforderten Art:

A	0	0	0	0	1	1	1	2
B	0	1	2	3	1	2	3	2
C	7	6	5	4	5	4	3	3

Aufgabe 230521:
Die Zahlen von 1 bis 10 sollen als Ergebnisse von Rechenaufgaben auftreten, bei denen außer den Zeichen für die vier Grundrechenoperationen und Klammern jeweils nur die Ziffer 3 auftreten soll, und zwar genau 5 mal. Für zwei Aufgaben wurden Beispiele angegeben.
Gib für die Ergebnisse 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 und 10 je eine derartige Aufgabe an!

Beispiele:
$1 = 3 - 3 : 3 - 3 : 3 = (3 + 3 + 3) : 3 : 3$
$7 = (33 - 3) : 3 - 3 = 3 \cdot 3 + 3 : 3 - 3$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Lösungen sind z. B.:

$$\begin{array}{ll}
2 = 3 - 33 : 33 = 3 + 3 - 3 - 3 : 3 & 3 = 3 + 3 + 3 - 3 - 3 = 3 + 33 - 33 \\
4 = 3 + 33 : 33 = 3 + 3 : 3 + 3 - 3 & 5 = 3 + 3 : 3 + 3 : 3 = 3 \cdot 3 - 3 : 3 - 3 \\
6 = (3 \cdot 3 + 3 \cdot 3) : 3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 : 3 - 3 & 8 = 3 + 3 + 3 - 3 : 3 = (33 - 3 \cdot 3) : 3 \\
9 = 3 + 3 + 3 + 3 - 3 = (33 + 3) : 3 - 3 & 10 = 3 + 3 + 3 + 3 : 3 = 33 : 3 - 3 : 3
\end{array}$$

Aufgabe 240521:
Harald will an der Wandzeitung über die rege Freizeitbeschäftigung der Pioniere Marion, Petra und Ruth berichten. Ihm ist bekannt:

(1) Jedes der drei Mädchen betreibt genau eine der Sportarten Schwimmen, Tischtennis, Volleyball. Jede dieser drei Sportarten wird von einem der drei Mädchen betrieben.
(2) Marion liest in ihrer Freizeit außerdem gern Abenteuerbücher, die Volleyballspielerin aber nicht.
(3) Die Volleyballspielerin beschäftigt sich dagegen gern mit Mathematik, sie hat bei der letzten Mathematik-Olympiade mehr Aufgaben richtig gelöst als Petra.
(4) In der Russisch-Olympiade hat Marion besser abgeschnitten als die Tischtennisspielerin.

Beweise, dass die Verteilung der drei Sportarten auf die drei Mädchen durch die Angaben (1), (2), (3), (4) eindeutig bestimmt ist! Welches Mädchen betreibt welche Sportart?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Aus (2) und (3) folgt, dass die Volleyballspielerin weder Marion noch Petra ist. Nach (1) ist also Ruth die Volleyballspielerin und somit die Tischtennisspielerin nicht Ruth.
Nach (4) ist sie auch nicht Marion. Also ist Petra die Tischtennisspielerin.
Nochmals wegen (1) verbleibt daher für Marion die Sportart Schwimmen.
Damit ist bewiesen, dass die Verteilung der Sportarten durch (1), (2), (3), (4) eindeutig bestimmt ist.

Aufgabe 260521:
Auf der DDR-Olympiade Junger Mathematiker treffen sich Andreas, Britta, Dirk und Kerstin. Sie kommen jeder aus einer anderen Stadt, und zwar aus Berlin, Dresden, Halle und Schwerin. Wir wissen folgendes über sie:

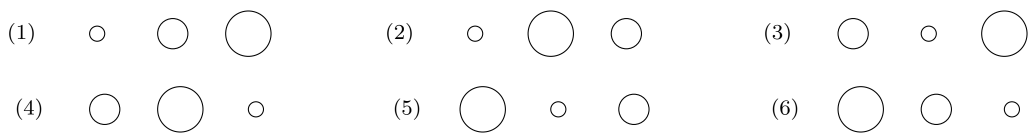
(1) Andreas und der Teilnehmer aus Berlin sind von den vier Schülern die beiden einzigen, die schon im Vorjahr auf der DDR-Olympiade waren;
(2) die beiden anderen, nämlich Kerstin und der Teilnehmer aus Dresden sind zum ersten Mal bei der DDR-Olympiade anwesend.
(3) Dirk ist älter als der Teilnehmer aus Berlin.
(4) Kerstin ist jünger als der Teilnehmer aus Schwerin.

Welcher Teilnehmer kommt aus welcher Stadt?
Wer sind die beiden, die schon in Vorjahr an der DDR- Olympiade teilgenommen haben?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Aus (2) und (4) folgt, dass Kerstin nicht aus Dresden, aber auch nicht aus Schwerin sein kann. Wegen (1) und (2) ist Kerstin auch nicht aus Berlin, also folgt: (5) Kerstin kommt aus Halle.
Aus (1) und (2) folgt, dass Andreas nicht aus Berlin, aber auch nicht aus Dresden kommt. Daraus und wegen (5) folgt: (6) Andreas kommt aus Schwerin.
Aus (3), (5) und (6) ergibt sich: (7) Dirk kommt aus Dresden.
Weiter folgt: (8) Britta kommt aus Berlin.
Aus (1) und (8) ergibt sich: Andreas und Britta nahmen schon im Vorjahr an der DDR-Olympiade teil.

Aufgabe 260522:
Fritz hat drei rot und drei blau angestrichene kreisförmige Spielmarken. Keine zwei von diesen sechs Spielmarken sind in der Größe einander gleich.
a) Fritz legt zuerst nur die drei verschieden großen roten Spielmarken nebeneinander auf den Tisch.
Zeichne alle möglichen Anordnungen dieser drei Spielmarken auf! Wie viele Anordnungsmöglichkeiten sind dies insgesamt?
b) Nun möchte Fritz alle sechs Spielmarken so nebeneinander legen, dass sich stets die Farben der Spielmarken abwechseln.
Wie viele Anordnungsmöglichkeiten der Spielmarken gibt es hierfür insgesamt? Nenne die Anzahl und erkläre, warum es genau diese Anzahl der Anordnungsmöglichkeiten gibt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Es gibt genau sechs derartige Anordnungen für die drei roten Spielmarken, und zwar:



b) Ebenso wie für die drei roten Spielmarken gibt es genau sechs Anordnungsmöglichkeiten für die drei blauen Spielmarken. Da die Farben sich abwechseln sollen und sich jede Anordnung der roten Spielmarken mit jeder Anordnung der blauen Spielmarken zu einer neuen Reihe vereinigen lässt, gibt es wegen $6 \cdot 6 = 36$ insgesamt 36 Anordnungen, die mit einer roten Spielmarke beginnen, und ebenso viele Anordnungen, die mit einer blauen Spielmarke beginnen.
Folglich gibt es insgesamt 72 unterschiedliche Anordnungen der geforderten Art für die drei roten und die drei blauen Spielmarken.

Aufgabe 280524:
a) In einer Kiste sind 3 grüne und 4 gelbe Kugeln und keine weiteren. Kerstin und Steffen überlegen, wie viel Kugeln sie mindestens aus der Kiste herausholen müssen, um zu sichern, dass von jeder Farbe (mindestens) eine dabei ist. Beim Herausholen der Kugeln soll nicht in die Kiste geschaut werden.

Kerstin meint, man müsse mindestens 5 Kugeln herausholen; dies würde aber auch ausreichen, um das Gewünschte zu sichern. Steffen ist dagegen der Ansicht, dass dafür schon 4 Kugeln reichen.
Wer von beiden hat recht? Begründe deine Entscheidung.

b) Jetzt seien in der Kiste 23 rote, 33 blaue, 21 schwarze, 21 weiße, 2 grüne Kugeln und keine weiteren.
Gib an und begründe, wie viel Kugeln man mindestens herausnehmen muss, um zu sichern, dass 6 dieser Kugeln einander gleiche Farbe haben!
Zeige, dass die von dir angegebene Zahl dafür auch ausreicht!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Steffen hat nicht recht; denn werden 4 Kugeln herausgeholt, so besteht auch die Möglichkeit, dass dies 4 gelbe Kugeln sind, also keine grüne Kugel dabei ist.
Also muss man mindestens 5 Kugeln herausholen, um das Gewünschte zu sichern. Dies reicht aber auch; denn unter 5 herausgeholten Kugeln können nicht nur gelbe sein (da es nur 4 gelbe gibt), und es können nicht nur grüne sein (da es nur 3 grüne gibt). Kerstin hat also recht.

b) 22 Kugeln reichen nicht aus; denn diese können 5 rote, 5 blaue, 5 schwarze, 5 weiße Kugeln und die beiden grünen sein, und dann haben keine 6 dieser Kugeln einander gleiche Farbe.
Also muss man mindestens 23 Kugeln herausnehmen, um das Gewünschte zu erreichen.

Das reicht aber auch; denn wären unter den herausgeholten Kugeln keine 6 von einander gleicher Farbe, so wären dabei höchstens 5 rote, 5 blaue, 5 schwarze, 5 weiße Kugeln und höchstens 2 grüne (da es nicht mehr grüne gibt). Dann wären aber höchstens 22 Kugeln herausgeholt worden, im Widerspruch zu der Voraussetzung, dass 23 Kugeln herausgeholt wurden.

Aufgabe 310521:
Blaue, gelbe und rote Würfel sollen in eine Reihe gelegt werden. Der erste Würfel der Reihe soll blau, der zweite soll gelb sein. In der Reihe sollen niemals zwei gleichfarbige Würfel nebeneinander liegen, und es soll sich auch niemals die Farbfolge von zwei nebeneinanderliegenden Würfeln wiederholen.

a) Nenne ein Beispiel für eine Reihe, die diese Bedingungen erfüllt und nicht mehr durch Anlegen eines weiteren Würfels verlängert werden kann!
b) Es gibt insgesamt vier solche Reihen; sie sind nicht alle gleichlang. Nenne alle diejenigen, die möglichst große Länge haben!
Eine Begründung wird nicht verlangt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Alle Reihen, von denen zu a) eine zu nennen ist, sind:

$$bgbrb, \quad bgbrgrb, \quad bgrbrgb, \quad bgrgbrb.$$

Möglichst große Länge haben, also in b) zu nennen sind die drei letzten.

Aufgabe 320522:
In einem Schrank befinden sich 11 karierte, 7 liniierte und 12 unliniierte Schreibblöcke und keine weiteren. Es ist zu dunkel, um die Blöcke unterscheiden zu können, und sie liegen ungeordnet.
Jemand will eine Anzahl Schreibblöcke herausnehmen und erst dann feststellen, wie viele Blöcke der einzelnen Sorten er herausgenommen hat.

a) Welches ist die kleinste Anzahl von Blöcken, durch deren Herausnehmen gesichert wird, dass sich unter den herausgenommenen Blöcken auch 5 karierte befinden?
b) Welches ist die kleinste Anzahl von Blöcken, durch deren Herausnehmen gesichert wird, dass sich unter den herausgenommenen Blöcken auch 5 befinden, die von einander gleicher Sorte sind?
Begründe deine Antworten, indem du jedesmal nachweist, dass die von dir angegebene Anzahl, aber keine kleinere Anzahl, das Gewünschte sichert!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Nimmt man 24 Blöcke heraus, so können sich darunter höchstens 7 liniierte und höchstens 12 unliniierte befinden (da es von diesen Sorten nicht mehr gibt); also muss die Anzahl der herausgenommenen karierten Blöcke mindestens $24 - 7 - 12 = 5$ betragen.
Nimmt man dagegen 23 Blöcke oder weniger heraus, so kann es sein, dass dabei nur 4 oder weniger karierte sind; denn die restlichen höchstens 19 Blöcke können liniiert bzw. unliniiert sein (da es von diesen Sorten zusammen so viele gibt).
Also ist 24 die in a) gesuchte kleinste Anzahl.

b) Nimmt man 13 Blöcke heraus, so ist es nicht möglich, dass sich darunter von jeder der drei Sorten nur 4 Blöcke befinden (denn $3 \cdot 4$ ist kleiner als 13); d. h., dann müssen sich unter den herausgenommenen Blöcken auch 5 befinden, die von einander gleicher Sorte sind.
Nimmt man dagegen höchstens 12 Blöcke heraus, so kann es sein, dass dies von jeder der drei Sorten höchstens 4 Blöcke sind; denn dazu reichen die von den einzelnen Sorten vorhandenen Anzahlen aus, die alle größer als 4 sind.
Also ist 13 die in b) gesuchte kleinste Anzahl.

Aufgabe 340521:
In einem Zirkus treten vier Artisten auf. Sie heißen Meier, Neumann , Opitz und Pfeifer. Ihre Vornamen sind, möglicherweise in anderer Reihenfolge: Dieter, Erich, Fritz und Gert. Außerdem ist bekannt:

(1) Die Reihenfolge ihrer Auftritte ist: Pfeifer, Fritz, Meier, Erich.
(2) Diese Auftritte sind, möglicherweise in anderer Reihenfolge: Dieter jongliert, Erich zaubert, Neumann tritt als Clown auf und Pfeifer arbeitet auf dem Drahtseil.

Zeige, dass durch diese Angaben für jeden der Artisten Meier, Neumann, Opitz und Pfeifer eindeutig bestimmt ist, welchen Vornamen er hat!
Nenne diese vier zusammengehörenden Vor- und Familiennamen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Nach (1) heißt Pfeifer weder Fritz noch Erich, nach (2) heißt er auch nicht Dieter. Daher gilt: Pfeifer heißt Gert. (3)
Nach (1) heißt Meier weder Fritz noch Erich, nach (3) heißt er auch nicht Gert. Daher gilt: Meier heißt Dieter. (4)
Nach (2) heißt Neumann nicht Erich, nach (3) und (4) heißt er weder Gert noch Dieter. Daher gilt: Neumann heißt Fritz. (5)
Wegen (3), (4), (5) verbleibt schließlich nur: Opitz heißt Erich. (6)
Damit ist gezeigt, dass die Vornamen zu den Familiennamen eindeutig bestimmt sind, und diese zusammengehörenden Namen sind angegeben.

Aufgabe 340533:
Annette, Bernd, Christiane, Dieter und Ruth spielen folgendes Spiel: die vier Kinder außer Ruth verabreden, dass eines von ihnen einen Brief bei sich versteckt und dass dann jedes dieser Kinder drei Aussagen macht, von denen mindestens zwei wahr sind.
Ruth, die nur diese Regeln und die Aussagen der vier erfährt, soll herausfinden, wer den Brief hat. Eines der vier Kinder Annette, Bernd, Christiane, Dieter hatte sich das Spiel ausgedacht, sie wissen auch, wer es war; nur Ruth weiß das nicht. Folgende Aussagen werden gemacht:

Annette: Ich habe den Brief nicht. Entweder hat Bernd den Brief, oder Bernd hat den Brief nicht. Christiane hat sich das Spiel ausgedacht.
Bernd: Wenn ich den Brief nicht habe, dann hat ihn Dieter. Ich habe den Brief nicht. Annette oder Christiane oder Dieter hat den Brief.
Christiane: Entweder Bernd oder Dieter hat den Brief. Bernd hat drei wahre Aussagen ge- macht. Annette hat den Brief nicht.
Dieter: Wenn ich den Brief nicht habe, dann hat ihn Christiane. Ich habe den Brief nicht. Alle drei Aussagen von Christiane sind wahr.

Untersuche, ob durch die Regeln und die Aussagen eindeutig bestimmt ist, wer den Brief hat!
Wenn das der Fall ist, gib diesen Spieler an! Stelle dann auch fest, ob alle Aussagen den Regeln entsprechen, wenn der Brief bei dem von dir angegebenen Spieler ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Da Bernds zweite und dritte Aussage einander gleichwertig sind, sind sie entweder beide wahr oder beide falsch. Nach den Regeln können sie nicht beide falsch sein, also sind sie beide wahr. Also hat Bernd den Brief nicht.
Wenn auch Bernds erste Aussage wahr ist, so folgt daher weiter: Dieter hat den Brief.
Wenn aber Bernds erste Aussage falsch ist, so folgt: Christianes zweite Aussage ist falsch. Nach den Regeln müssen also Christianes erste und dritte Aussage wahr sein. Aus der ersten Aussage und daraus, dass Bernd den Brief nicht hat, folgt damit wieder: Dieter hat den Brief.

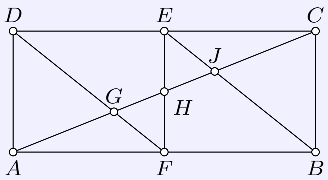
Damit hat sich insgesamt ergeben: Wenn alle Aussagen den Regeln entsprechen, so kann eindeutig nur Dieter den Brief haben.

II. Wenn Dieter den Brief hat, so haben Bernd, Christiane und Dieter je drei wahre Aussagen gemacht, und mindestens die ersten beiden Aussagen von Annette sind wahr. Also entsprechen dann alle Aussagen den Regeln.

III.III. Anzahlen berechnen

Runde 1

Aufgabe 010514:

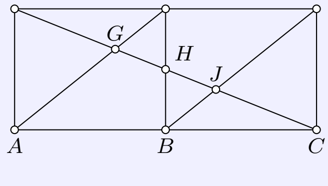


Wie viel Dreiecke sind in der Figur enthalten? Schreibe alle Dreiecke auf (z. B. ABC)!

Lösung von Steffen Polster:
Die Figur besteht aus 8 Teilflächen, wovon 2 unregelmäßige Vierecke und sechs Dreiecke sind. Diese Dreiecke sind: AGD, AFG, GFH, EHJ, EJC und JBC.

Verbindet man zwei, drei oder vier der insgesamt 8 Teilflächen, so können weitere Dreiecke entstehen.
Aus zwei Teilflächen sind die sechs Dreiecke AFD, AFH, FED, EFB, EHC und EBC zusammengesetzt, aus drei Teilflächen die zwei Dreiecke ABJ und DGC und sogar aus vier Teilflächen die zwei Dreiecke ABC und DAC. Verbindet man mehr als vier Teilflächen, so entsteht kein Dreieck.
Damit gibt es ist der Figur insgesamt $6 + 6 + 2 + 2 = 16$ Dreiecke.

Aufgabe 040511:



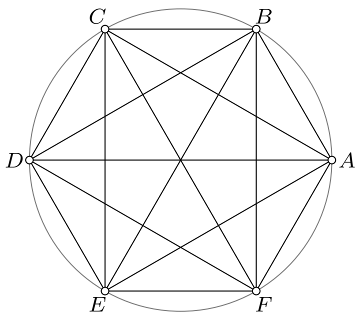
Wie viel Dreiecke erkennst du in der obigen Figur?
Stelle eine Übersicht dieser Dreiecke auf, z. B. $\triangle ABE$; $\triangle ACF$.

Lösung von Steffen Polster:
Es gibt in der Figur 16 Dreiecke:

$$ABE,\quad BCD,\quad CDI,\quad DFI,\quad EGH,\quad ACF,\quad BCI,\quad CDF,$$
$$EFG,\quad ACG,\quad BCH,\quad EFH,\quad AEF,\quad BIH,\quad AGF,\quad BDE$$

Aufgabe 050513:
Konstruiere ein regelmäßiges Sechseck! Zeichne in das Sechseck alle möglichen Diagonalen ein!
Wie viel Diagonalen findest Du? Zähle sie auf, indem du sie benennst (z. B. AB, ...)!

Lösung von Steffen Polster:



Von jedem Endpunkt des Sechsecks gehen je fünf Strecken zu den anderen Eckpunkten aus. Da aber jede Strecke einen Anfangs- und einen Endpunkt besitzt und bei dieser Überlegung somit zweimal gezählt wird, gibt es $\frac{6\cdot 5}{2} = 15$ Strecken am Sechseck.

Da die sechs Seiten des Sechsecks nicht als Diagonalen gelten, verbleiben noch 9, d. h. in einem Sechseck gibt es neun verschiedene Diagonalen, in der Abbildung:

$$AC, AD, AE, BD, BE, BF, CE, CF, DF$$

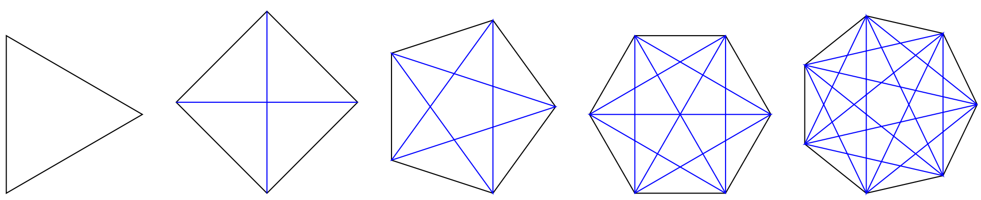
Aufgabe 060513:
Ein Betrieb kann unter Verwendung des gleichen Uhrwerks verschiedene Ausführungen von Uhren herstellen. Dazu stehen ihm drei verschiedene Gehäuse, vier verschiedene Zifferblätter und zwei verschiedene Zeigerausführungen zur Verfügung.
Gib die größte Anzahl voneinander verschiedener Ausführungen von Uhren an, die sich unter Verwendung der angegebenen Teile herstellen lassen!

Lösung von Steffen Polster:
Für jede Uhr können 3 verschiedene Gehäuse, vier Ziffernblätter und zwei Zeigerarten gewählt werden, so dass es insgesamt $3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$ verschiedene Ausführungen der Uhren mit dem gleichen Uhrwerk gibt.

Aufgabe 070511:
Unter einer Diagonalen eines ebenen Vielecks mit 3 oder mehr Ecken versteht man die Verbindungsstrecken zweier nicht benachbarter Ecken des ebenen Vielecks.
Gibt es ebene konvexe Vielecke (d. h. Vielecke, bei denen jeder Innenwinkel kleiner als 180° ist), bei denen

a) die Anzahl der Diagonalen halb so groß ist wie die Anzahl der Eckpunkte?
b) die Anzahl der Diagonalen doppelt so groß ist wie die Anzahl der Eckpunkte?
Wenn es solche Vielecke gibt, dann zeichne jeweils ein Beispiel dafür!

Lösung von Steffen Polster:



Ein Dreieck besitzt keine Diagonalen, ein Viereck 2 Diagonalen (siehe Abbildung) und ist somit die Lösung von Aufgabe a).

Das Fünfeck hat 5 Diagonalen, das Sechseck 9 Diagonalen und das Siebeneck 14 Diagonalen. Es ist die Lösung von Teilaufgabe b).

Vergleicht man die Diagonalenanzahl eines $n-1$-Ecks mit der Anzahl im n-Eck, so hat das n-Eck eine Ecke mehr von der zu $n-3$ Ecken eine Diagonale gezogen werden kann (zu den Nachbarecken und zu sich selbst nicht). Außerdem liegt eine Seite des $n-1$-Ecks jetzt im Inneren und ist damit Diagonale.
D. h., die Diagonalenzahl nimmt um $n-2$ zu, so dass die Anzahl der Diagonalen schneller als die Eckenzahl n für größere n wächst.
Die gefundenen Lösungen für a) und b) sind damit jeweils die einzigen.

Aufgabe 070514:
Im Ferienlager erhält eine Zeltbelegung von ihrem Pionierleiter den Auftrag, in der Küche beim Kartoffelschälen zu helfen. Von sechs Jungen sollen drei für diese Tätigkeit ausgewählt werden.
Welches ist die Anzahl aller Möglichkeiten, verschiedene Gruppen zusammenzustellen?

Lösung von Steffen Polster:
Die Jungen seien mit A, B, C, D, E, F bezeichnet. Davon sind immer drei auszuwählen, wobei für unterschiedliche Gruppen nur die ausgewählten Jungen, aber nicht die Reihenfolge des Auswählens von Bedeutung ist.
Durch systematisches Vorgehen findet man folgende 20 Gruppen:

$$\begin{array}{cccccccccc} ABC & BCD & CDE & DEF & ABD & BCE & CDF & ABE & BCF & CEF \\ ABF & BDE & ACD & BDF & ACE & BEF & ACF & ADE & ADF & AEF \end{array}$$

Anmerkung: Die gesuchte Anzahl ist gleich der Kombinationen von 3 Elementen aus einer Gesamtheit von 6 Elementen.

Aufgabe 130514:
Aus einer Schulklasse arbeiten einige Thälmann-Pioniere im Klub der internationalen Freundschaft mit. Auf die Frage, wer von ihnen im Dolmetscherbüro dieses Klubs mitarbeitet, melden sich 7.
Dann wird gefragt, wer im Länderzirkel des Klubs mitarbeitet; hierauf melden sich 6. Ebenso wird festgestellt, dass 5 der Pioniere im Zirkel junger Korrespondenten des Klubs tätig sind. Andere als diese 3 Zirkel gibt es in diesem Klub nicht.

Als Nächstes wird die Frage gestellt, wer gleichzeitig mindestens im Dolmetscherbüro und im Länderzirkel mitarbeitet; diesmal melden sich 4 der Pioniere. Ebenso ermittelt man, dass 3 von ihnen gleichzeitig mindestens im Dolmetscherbüro und im Zirkel junger Korrespondenten tätig sind und 2 von den Pionieren gleichzeitig mindestens zum Länderzirkel und zum Zirkel junger Korrespondenten gehören.
Genau einer der Pioniere der genannten Schulklasse gehört allen drei Zirkeln an.

Ermittle die Anzahl aller derjenigen Pioniere dieser Klasse, die im Klub der internationalen Freundschaft mitarbeiten! (Sämtliche Zahlenangaben gelten als genau)

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Werden die Schülerzahlen je Zirkel nach deren Anfangsbuchstaben bezeichnet, so gilt $(d) = 7$, $(l) = 6$ und $k = 6$. Weiterhin sind in mehreren Zirkeln $(d + l) = 4$, $(d + k) = 3, (l + k) = 2, (d + k + l) = 1$.

In d und l ohne k sind entsprechend $(d + l) - (d + k + l) : 4 - 1 = 3$ Schüler, (*)
in l und k ohne d sind entsprechend $(l + k) - (d + k + l) : 2 - 1 = 1$ Schüler, (**)
in k und d ohne l sind entsprechend $(d + k) - (d + k + l) : 3 - 1 = 2$ Schüler. (***)

In d ohne k und l sind entsprechend $(d) - (*) - (**) - (***) : 7 - 3 - 2 - 1 = 1$ Schüler. Analog ist in l ohne k und d 1 Schüler, und ebenso in k ohne l und d entsprechend 1 Schüler.

Insgesamt wird damit $1 + 1 + 1 + 3 + 1 + 2 + 1 = 10$.
10 Schüler der Klasse arbeiten folglich im Klub der internationalen Freundschaft mit.

Aufgabe 140514:
Einige Schüler einer Klasse 5 trugen ein Schachturnier aus. Jeder Teilnehmer spielte gegen jeden anderen genau 2 Partien. Insgesamt wurden an 24 Tagen je 3 Partien ausgetragen.
Ermittle die Anzahl der Teilnehmer an diesem Turnier!

Lösung von Steffen Polster:
Es gab insgesamt $24 \cdot 3 = 72$ Partien.
Wenn Jeder gegen Jeden 2 Partien spielt, gibt es $n \cdot (n-1)$ Partien bei n Teilnehmern. Damit kommt man zu der Gleichung $n \cdot (n-1) = 72$, die im Bereich der natürlichen Zahlen (da es ja nur eine natürliche Zahl von Teilnehmern geben kann) nur durch $n = 9$ erfüllt wird. Auf diese Lösung kommt man durch systematisches Probieren.
Dazu prüft man nacheinander die Produkte $n(n-1)$, d. h. $2 \cdot 1$, $3 \cdot 2$, ... bis zum Erreichen von $9 \cdot 8 = 72$.

Eine Lösung über die Lösungsformel für quadratische Gleichungen $n^2 - n - 72 = 0$ mit $n_1 = 9$, $n_2 = -8$ ist für Schüler der Klassenstufe 5 im Allgemeinen nicht möglich.

Aufgabe 280512:
Aus den Ziffern 1, 2 und 3 sollen dreistellige Zahlen gebildet werden.

a) Jede dieser drei gegebenen Ziffern soll in jeder der zu bildenden Zahlen genau einmal vorkommen.
Schreibe alle dreistelligen Zahlen auf, die sich auf diese Art und Weise bilden lassen!
b) In weiteren dreistelligen Zahlen aus den drei gegebenen Ziffern dürfen Ziffern auch mehr als einmal auftreten; dafür brauchen sie nicht alle vorzukommen.
Schreibe alle diejenigen dreistelligen Zahlen auf, die nun zusätzlich zu den in a) aufgezählten Zahlen noch gebildet werden können!

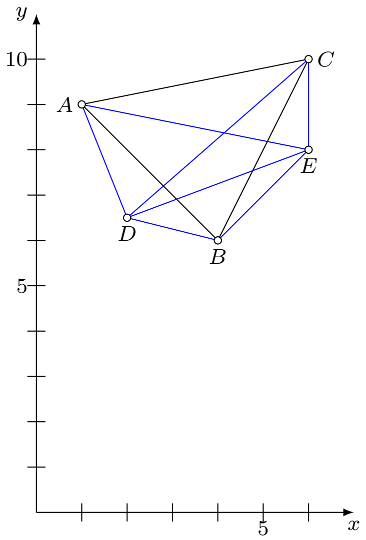
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Die gesuchten Zahlen sind 123, 132, 213, 231, 312 und 321.

b) Die zusätzlich zu den in a) schon aufgezählten Zahlen noch zu bildenden Zahlen sind:

111, 112, 113, 121, 122, 131, 133, 211, 212, 221, 222, 223, 232, 233, 311, 313, 322, 323, 331, 332, 333.

Aufgabe 280514:
a) Zeichne in ein Koordinatensystem die Punkte $A(1; 9)$, $B(4; 6)$ und $C(6; 10)$!
Verbinde je zwei dieser drei Punkte durch eine Strecke! Wie viel Verbindungsstrecken sind das insgesamt?
b) Zeichne zwei weitere Punkte D und E; wähle sie so, dass jede Verbindungsstrecke von zwei der fünf Punkte A, B, C, D, E keinen weiteren der fünf Punkte enthält! Verbinde je zwei der fünf Punkte durch eine Strecke! Wie viel Verbindungsstrecken sind das insgesamt?
c) Man kann die in b) gesuchte Anzahl von Verbindungsstrecken auch durch eine Überlegung ermitteln, ohne die Punkte und die Strecken zu zeichnen.
Beschreibe eine solche Überlegung!
d) Ermittle auf die in c) beschriebene Weise die Anzahl aller Verbindungsstrecken zwischen je zwei von zehn Punkten, für die dasselbe wie in b) gilt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



a) Es gibt genau 3 solcher Verbindungsstrecken.

b) Eine mögliche Lage der Punkte D und E, bei der die geforderten Bedingungen erfüllt sind, zeigt die Abbildung. Es gibt genau 10 solcher Verbindungsstrecken.

c) Eine mögliche Überlegung dafür, dass es bei der geforderten Lage der Punkte A, B, C, D, E genau 10 Verbindungsstrecken gibt, wäre:
Von A aus lassen sich genau 4 Strecken zu den von A verschiedenen Punkten zeichnen, von B aus dann noch genau 3 Strecken zu den von A und von B verschiedenen Punkten, von C aus noch genau 2 Strecken zu den von A, B und C verschiedenen Punkten und von D aus noch genau eine Strecke zu dem von A, B, C und D verschiedenen Punkt E.
Das sind wegen $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ insgesamt genau 10 Strecken.

d) Durch entsprechende Überlegungen wie in c) erhält man, dass es unter den angeführten Bedingungen wegen

$$9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 45$$

(bzw. wegen $9 \cdot 10 = 90$ und $90 : 2 = 45$) genau 45 Strecken gibt, die die zehn Punkte auf die geforderte Weise miteinander verbinden.

Aufgabe 340511:
In einer Schachtel liegen 20 Buntstifte. Jeder Stift hat eine der Farben blau, gelb, rot, violett.
Jede Farbe kommt mindestens einmal vor. Es gibt mehr blaue Stifte als gelbe, es gibt ebenso viele gelbe Stifte wie rote, es gibt weniger violette Stifte als rote.
Gib alle hiernach möglichen Verteilungen an!
(Eine Verteilung wird angegeben, indem man angibt, wie viele Stifte von jeder Farbe in der Schachtel liegen.)

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die folgende Tabelle zeigt alle Möglichkeiten.

violett	rot	gelb	blau	violett	rot	gelb	blau	violett	rot	gelb	blau
1	2	2	15	1	3	3	13	1	4	4	11
1	5	5	9	1	6	6	7	2	3	3	12
2	4	4	10	2	5	5	8	3	4	4	9
3	5	5	7	4	5	5	6				

Runden 2 & 3

Aufgabe 030524:
Klaus, Ingrid, Peter und Susanne sollen bei einem Sportfest an einem Staffellauf teilnehmen.

a) Wie viel verschiedene Möglichkeiten gibt es für die Reihenfolge, in der sie laufen? Begründe deine Antwort!
b) Wie viel Möglichkeiten gäbe es, wenn die Staffel aus fünf Läufern bestehen würde?

Lösung von Steffen Polster:
a) An erster Stelle können Klaus, Ingrid, Peter oder Susanne stehen. Dies sind 4 Möglichkeiten.
Ist ein Kind ausgewählt, so können an zweiter Stelle noch 3 Kinder stehen, d. h. 3 Möglichkeiten. Übrig bleiben 2 Kinder für die letzten beiden Stellen. Dazu gibt es noch 2 Möglichkeiten.
Insgesamt sind dies $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ verschiedene Reihenfolgen.

b) Für jede Reihenfolge der vier Schüler aus der Teilaufgabe a) kann der fünfte Schüler vor dem ersten, vor dem zweiten, vor dem dritten, vor dem vierten oder am Ende eingeordnet werden. Dies sind 5 Möglichkeiten.
Damit ist das Ergebnis das Fünffache des Ergebnisses von a), also 120.

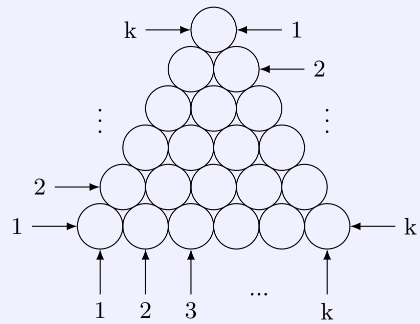
Aufgabe 120523:
In einem Kasten befinden sich insgesamt 100 gleichgroße Kugeln, nämlich 28 rote, 28 blaue, 26 schwarze, 16 weiße und 2 grüne.
Ulrike soll aus diesem Kasten im Dunkeln (also ohne bei irgendeiner der herausgenommenen Kugeln die Farbe erkennen zu können) eine Anzahl von Kugeln herausnehmen. Diese Anzahl soll sie so wählen, dass unter den herausgenommenen Kugeln mindestens 9 die gleiche Farbe haben müssen.

Welches ist die kleinste Kugelanzahl, die Ulrike wählen kann, um diese Aufgabe zu erfüllen?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Im ungünstigsten Falle kann Ulrike zunächst 8 rote, 8 blaue 8 schwarze, 8 weiße und die beiden grünen Kugeln herausnehmen.

Nimmt sie zu diesen 34 Kugeln nun noch eine weitere heraus, dann kann diese Kugel nur eine der vier Farben rot, blau, schwarz oder weiß tragen.
In diesem Fall erhält Ulrike also 9 Kugeln gleicher Farbe.
Die kleinste Anzahl von Kugeln, bei denen das mit Sicherheit der Fall ist, beträgt daher 35.

Aufgabe 130524:



Im Centrum-Warenhaus sind zu Dekorationszwecken gleichgroße Konservenbüchsen zu einer „Pyramide“ aufgeschichtet worden.
In jeder Schicht sind die Büchsen so „im Dreieck“ angeordnet, wie die Abbildung zeigt.

Die dort mit k bezeichnete Anzahl der Büchsen längs einer jeden „Seitenkante des Dreiecks“ beträgt für die unterste Schicht 9. In jeder weiteren Schicht ist die entsprechende Anzahl k um 1 kleiner als in der unmittelbar darunterliegenden Schicht. Die oberste Schicht besteht aus einer Büchse.
Ermittle die Anzahl aller in der „Pyramide“ enthaltenen Büchsen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die unterste Schicht besteht aus 9 Reihen, von denen die erste genau 1 Büchse und jede weitere genau eine Büchse mehr als die unmittelbar vorhergehende hat. Die neunte Reihe enthält danach genau 9 Büchsen.
Folglich ist die Zahl aller Büchsen dieser Schicht gleich der Summe der natürlichen Zahlen von 1 bis 9, also gleich 45.

Die unmittelbar darüberstehende Schicht von Konservenbüchsen enthält genau eine Reihe, nämlich die mit 9 Büchsen, weniger. Entsprechendes gilt auch für alle übrigen Schichten. Somit erhält man:

Erste Schicht:	45
zweite Schicht:	36 = 45 - 9
dritte Schicht:	28 = 36 - 8
vierte Schicht:	21 = 28 - 7
fünfte Schicht:	15 = 21 - 6
sechste Schicht:	10 = 15 - 5
siebente Schicht:	6 = 10 - 4
achte Schicht:	3 = 6 - 3
neunte Schicht:	1 = 3 - 2
insgesamt:	165

Für den Bau der „Pyramide“ wurden insgesamt 165 Konvervenbüchsen verwendet.

Aufgabe 140524:
Schülerinnen und Schüler einer Klasse 5 trugen ein 14tägiges Schachturnier aus. Dabei wurden an jedem der 14 Tage genau 6 Spiele ausgetragen.
Die Anzahl der teilnehmenden Jungen war größer als die der teilnehmenden Mädchen. Jedes Mädchen spielte gegen jedes andere Mädchen und jeder Junge gegen jeden anderen Jungen genau zweimal. Keines der Mädchen spielte gegen einen Jungen.
Ermittle die Anzahl der Mädchen und die der Jungen, die an diesem Turnier teilnahmen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Laut Aufgabe wurden wegen $14 \cdot 6 = 84$ in diesem Turnier insgesamt 84 Spiele ausgetragen. Diese Anzahl setzt sich additiv zusammen aus der Anzahl der Spiele, die die Mädchen gegeneinander durchführten, und der Anzahl der Spiele, an denen die Jungen beteiligt waren.

Bei n Spielern, von denen jeder gegen jeden $(n|1)$ der anderen Spieler genau zwei Spiele austrägt, beträgt die Anzahl aller Spiele $n(n-1)$.
Damit lässt sich folgende Tabelle aufstellen:

Anzahl der Spieler	Anzahl der Spiele	Ergänzung zu 84
2	2	82
3	6	78
4	12	72
5	20	64
6	30	54
7	42	42
8	56	28
9	72	12
≥ 10	≥ 90	-

Da laut Aufgabe 84 Spiele insgesamt durchgeführt wurden, kann die Anzahl der teilnehmenden Jungen bzw. die der Mädchen nicht größer als 9 gewesen sein.
Als Summanden können nur die in der Tabelle ermittelten Zahlen auftreten, und zwar müssen es genau zwei Summanden der Form $n(n-1)$ sein, deren Summe 84 beträgt. Das ist, wie ein Vergleich der Zahlen der zweiten und dritten Spalte der Tabelle zeigt, nur für $42 + 42 = 84$ und $12 + 72 = 84$ möglich.

Da die Anzahl der teilnehmenden Jungen größer war als die der Mädchen, kann die gesuchte Lösung nur lauten: Es nahmen 4 Mädchen und 9 Jungen an dem in der Aufgabe erwähnten Turnier teil.

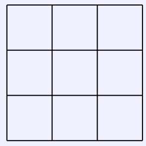
Aufgabe 190521:
In einer Konsumverkaufsstelle werden genau vier verschiedene Waschpulversorten A, B, C und D angeboten. Insgesamt sind 900 Pakete Waschpulver im Lager der Verkaufsstelle vorhanden; jedes Paket hat 250 g Inhalt. Ein Drittel des gesamten Lagerbestandes an Waschpulver ist von der Sorte A. Ein Viertel des übrigen Bestandes ist von der Sorte B. Von der Sorte C sind ebenso viele Pakete im Lager wie von der Sorte D.

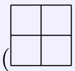
a) Wie viel Pakete beträgt für jede einzelne der vier Sorten der Lagerbestand?
b) Wie viel Kilogramm Waschpulver sind insgesamt in den Paketen enthalten?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Für die Sorte A beträgt wegen $900 : 3 = 300$ der Lagerbestand 300 Pakete.
Für die Sorte B beträgt wegen $900 - 300 = 600$ und $600 : 4 = 150$ der Bestand 150 Pakete.
Wegen $600 - 150 = 450$ und $450 : 2 = 225$ beträgt für die Sorten C und D der Bestand je 225 Pakete.

b) Wegen $250 \cdot 900 = 225000$ und 225000 g = 225 kg sind insgesamt 225 kg Waschpulver in den Paketen enthalten.

Aufgabe 250521:

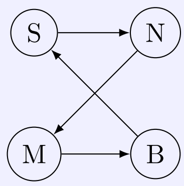


In einem (3×3)-Felderbrett (siehe Abbildung) sind genau neun Quadrate enthalten, die aus einem Feld bestehen (), außerdem genau vier Quadrate, die aus vier Feldern bestehen (), und genau ein Quadrat, das aus neun Feldern besteht.

Insgesamt sind in dem (3×3)-Felderbrett also 14 Quadrate enthalten.
Beantworte folgende Fragen:
a) Wie viel Quadrate sind insgesamt in einem (4×4)-Felderbrett enthalten?
b) Wie viel Quadrate sind insgesamt in einem (5×5)-Felderbrett enthalten?
c) Wie viel Quadrate sind insgesamt in einem (6×6)-Felderbrett enthalten?
Eine Begründung der Antworten wird nicht verlangt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) In einem (4×4)-Felderbrett sind insgesamt $16 + 9 + 4 + 1 = 30$ Quadrate enthalten.
b) In einem (5×5)-Felderbrett sind insgesamt $25 + 16 + 9 + 4 + 1 = 55$ Quadrate enthalten.
c) In einem (8×8)-Felderbrett sind insgesamt $64 + 49 + 36 + 25 + 16 + 9 + 4 + 1 = 204$ Quadrate enthalten.

Aufgabe 270522:
Ein Tourist, der in Magdeburg (M) wohnt, möchte bei einer Rundreise jede der Städte Schwerin (S), Neubrandenburg (N) und Berlin (B) genau einmal aufsuchen und erst dann in seinen Wohnort zurückkehren.
Eine mögliche Reiseroute wäre von Magdeburg aus über Berlin, Schwerin und Neubrandenburg zurück nach Magdeburg (siehe Abbildung).
Gib alle Reiserouten an, die der Tourist unter den genannten Bedingungen wählen kann!
Wie viel Reiserouten sind das insgesamt?
Eine Begründung wird nicht verlangt.



Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die geforderte Angabe der Reiserouten kann in zeichnerischer Darstellung oder durch die Angabe der jeweils zu wählenden Reihenfolge der Städte erfolgen.
Ein Beispiel für eine vollständige Angabe ist etwa: $MBNSM$, $MBSNM$, $MNBSM$, $MNSBM$, $MSBNM$, $MSNBM$.
Die Anzahl der Reiserouten beträgt 6.

Aufgabe 300524:
An einem Sportwettkampf sollen 10 Mannschaften teilnehmen. Sie sollen so mit einfarbigen Turnhemden und mit einfarbigen Turnhosen ausgestattet werden, dass sie an den damit erreichbaren Farbkombinationen voneinander zu unterscheiden sind.

a) Welches ist die kleinste Anzahl von Farben, mit der das zu erreichen ist?
b) Wie lautet die Antwort, wenn zusätzlich verlangt wird, dass bei jeder Mannschaft die beiden Farben von Turnhemd und Turnhose voneinander verschieden sind?
Begründe deine beiden Antworten!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Mit drei Farben, etwa blau, gelb, rot, lassen sich nur 9 verschiedene Farbkombinationen bilden, nämlich $bb, bg, br, gb, gg, gr, rb, rg, rr$.
Zur Unterscheidung von 10 Mannschaften reichen daher drei Farben nicht aus. Fügt man jedoch eine weitere Farbe, etwa weiß, hinzu, so lassen sich 10 Mannschaften unterscheiden, da es außer den genannten 9 Farbkombinationen z. B. noch die Kombination ww gibt.
Die kleinste Anzahl von Farben, mit der eine Unterscheidung von 10 Mannschaften erreichbar ist, beträgt daher 4.

b) Das gilt auch unter der in b) geforderten Bedingung.
Begründung: Mit drei Farben kann man schon, ohne diese Bedingung zu fordern, nicht 10 Mannschaften ausstatten. Also geht das erst recht nicht, wenn durch die zusätzliche Bedingung noch Kombinationen ausgeschlossen werden.
Mit vier Farben hat man aber zur Unterscheidung von 10 Mannschaften die Kombinationen

$$bg, br, bw, gb, gr, gm, rb, rg, rw, wb, wg, wr$$

zur Verfügung, was ausreichend ist.

Aufgabe 330522:
Rolf sucht vierstellige Zahlen, in denen keine zwei gleichen Ziffern vorkommen. Der Unterschied zwischen der Zehner- und der Hunderterziffer soll 3 betragen, der Unterschied zwischen der Hunderter- und der Tausenderziffer soll 4 betragen.
Beim Berechnen dieser Unterschiede soll es nicht auf die Reihenfolge der betreffenden beiden Ziffern ankommen.
Wie viele vierstellige Zahlen der gewünschten Art gibt es insgesamt?
Begründe, warum es nicht mehr als von dir angegeben sein können!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Tausenderziffer einer gesuchten Zahl kann nicht 0 sein, da die Zahl sonst nicht vierstellig wäre.
Ist die Tausenderziffer 1, 2 oder 3, so kann die Hunderterziffer nicht um 4 kleiner sein, sie muss also um 4 größer sein, d. h. 5, 6 bzw. 7 lauten. Bei der Tausenderziffer 6, 7, 8 bzw. 9 kann die Hunderterziffer nicht um 4 größer sein. Nur wenn die Tausenderziffer 4 oder 5 lautet, ist jeweils sowohl die um 4 kleinere als auch die um 4 größere Hunderterziffer möglich.

Ähnlich gibt es zu den Hunderterziffern 0, 1, 2 nur die um 3 größere und zu 7, 8, 9 nur die um 3 kleinere Zehnerziffer, während für die Hunderterziffern 3, 4, 5, 6 beide Möglichkeiten bestehen.

Daher gibt es genau die folgenden Möglichkeiten, die ersten drei Ziffern gesuchter Zahlen zusammenzustellen:

$$158, 152, 269, 263, 374, 403, 485, 514, 596, 625, 730, 736, 841, 847, 958, 952$$

Da in jeder dieser 16 Zusammenstellungen genau drei verschiedene Ziffern auftreten, gibt es jedesmal für die noch fehlende Einerziffer genau 7 Möglichkeiten. Die Anzahl aller Zahlen der gesuchten Art beträgt daher $7 \cdot 16 = 112$.

Aufgabe 340532:
Aus genau 4 Stäbchen, von denen jedes etwas weniger als 1 cm Länge hat, lässt sich ein kleines Quadrat der Seitenlänge 1 cm legen:

```
 __
|__|
```

Für ein Quadrat, das aus vier der zuvor betrachteten kleinen Quadrate besteht, benötigt man genau 12 Stäbchen:

```
 __ __
|__|__|
|__|__|
```

(a) Wie viele Stäbchen genau benötigt man für ein Quadrat, das aus (1) neun, (2) sechzehn dieser kleinen Quadrate besteht?

```
 __ __ __ ...
|__|__|__ ...
|__|__|__ ...
|  |  |
:  :  :
```

Wie viele Stäbchen genau benötigt man, um mit diesen kleinen Quadraten ein Quadratgitter auszulegen, das 1 m lang und 1 m breit ist?
Eine Begründung wird nicht verlangt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(a) Man benötigt
(1) genau $(3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 =)$ 24 Stäbchen,
(2) genau $(4 \cdot 5 + 4 \cdot 5 =)$ 40 Stäbchen.

(b) Für dieses Quadratgitter aus $100 \cdot 100$ kleinen Quadraten benötigt man (in jeder waagerechten Reihe 101 senkrechte Stäbchen, in allen waagerechten Reihen zusammen also $100 \cdot 101$ senkrechte Stäbchen; ebenso viele waagerechte Stäbchen in allen senkrechten Reihen; insgesamt also) genau $(100 \cdot 101 + 100 \cdot 101 =)$ 20200 Stäbchen.

Aufgabe 340534:
In einem Schachverein wurde ein Turnier für Anfänger und für Fortgeschrittene durchgeführt. Jeder Anfänger spielte gegen jeden anderen Anfänger genau zwei Partien; jeder Fortgeschrittene spielte gegen jeden anderen Fortgeschrittenen genau zwei Partien.
Diese Partien wurden so angesetzt, dass an jedem von genau 28 Spieltagen genau 3 Partien gespielt wurden.
Es nahmen an dem Turnier mehr Anfänger als Fortgeschrittene teil.

Zeige, dass durch diese Angaben eindeutig bestimmt ist, wie viele Anfänger und wie viele Fortgeschrittene an dem Turnier teilnahmen! Nenne diese beiden Anzahlen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Multipliziert man die Anzahl der Anfänger mit der um 1 kleineren Zahl, so erhält man die Anzahl aller von diesen Spielern gespielten Partien. Entsprechendes gilt für die von den Fortgeschrittenen gespielten Partien.

Zum Beweis kann man z. B. annehmen, dass für je zwei der betreffenden Spieler die beiden Partien so festgelegt werden, dass jeder der beiden einmal die weißen Steine bekommt. Dann kann man für jeden Spieler alle diejenigen Partien abzählen, die er insgesamt mit den weißen Steinen spielt. Einerseits hat man damit für jeden Spieler als Beitrag zu der so errechneten Zahl gerade die um 1 verringerte Anzahl der Spieler genommen; andererseits hat man insgesamt jede Partie genau einmal erfasst.

Die folgende Tabelle zeigt, welche Anzahlen von Partien so zustandekommen können:

Anzahl der Spieler	2	3	4	5	6	7	8	9	> 10
Anzahl der Partien	$2 \cdot 1$ $= 2$	$3 \cdot 2$ $= 6$	$4 \cdot 3$ $= 12$	$5 \cdot 4$ $= 20$	$6 \cdot 5$ $= 30$	$7 \cdot 6$ $= 42$	$8 \cdot 7$ $= 56$	$9 \cdot 8$ $= 72$	$> 10 \cdot 9$ $= 90$

Da genau $28 \cdot 3 = 84$ Partien gespielt wurden, muss 84 als Summe von zwei der hier aufgezählten Anzahlen darstellbar sein; dabei müssen diese beiden Summanden (wegen der unterschiedlichen Spielerzahlen) von einander verschieden sein.
Die einzige Möglichkeit hierfür ist, 84 als Summe von 12 und 72 darzustellen, das sind die Anzahlen der Partien für 4 bzw. 9 Spieler. Da mehr Anfänger als Fortgeschrittene teilnahmen, ist folglich eindeutig bestimmt: Es nahmen genau 9 Anfänger und genau 4 Fortgeschrittene teil.

IV. Zahlentheorie

IV.I. Primzahlen, Teilbarkeit

Runde 1

Aufgabe 340512:
Xaver und Yvette berichten: Jeder von uns hat sich eine natürliche Zahl gedacht. Wir haben diese Zahlen uns gegenseitig mitgeteilt.

Xaver sagt: Der Nachfolger meiner Zahl ist durch den Nachfolger von Yvettes Zahl teilbar.
Yvette sagt: Die Summe aus dem Nachfolger meiner Zahl und dem Nachfolger von Xavers Zahl ist eine ungerade Zahl.
Anette lässt sich das Produkt von Xavers Zahl und Yvettes Zahl sagen: Es beträgt 36.
Nenne zwei Zahlen, für die diese Aussagen zutreffen! Zeige, dass es keine weiteren derartigen Zahlen gibt!

Hinweis: Der Nachfolger einer natürlichen Zahl ist die um 1 größere Zahl. Beispielsweise hat 115 den Nachfolger 116.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Alle Möglichkeiten, 36 als Produkt zweier natürlicher Zahlen zu schreiben, sind

$$36 = 1 \cdot 36, \quad 36 = 2 \cdot 18, \quad 36 = 3 \cdot 12, \quad 36 = 4 \cdot 9, \quad 36 = 6 \cdot 6$$

Die Summe aus den Nachfolgern zweier Zahlen ist genau dann ungerade, wenn eine dieser Zahlen gerade, die andere ungerade ist. Hiernach verbleiben genau die Möglichkeiten

$$36 = 1 \cdot 36, \quad 36 = 3 \cdot 12, \quad 36 = 4 \cdot 9$$

Die hier genannten Zahlen haben die Nachfolger 2, 37 bzw. 4, 13 bzw. 5, 10. Genau im letzten Fall ist einer dieser beiden Nachfolger durch den anderen teilbar.
Also treffen die Aussagen genau dann zu, wenn Xavers Zahl 4 und Yvettes Zahl 9 lautet.

Runde 2

Aufgabe 010523:
Jemand behauptet, er könne 30 Äpfel so unter 3 Kinder (ungleichmäßig) verteilen, dass jedes Kind eine ungerade Anzahl Äpfel erhält.
Ist das möglich? Begründe deine Antwort!

Lösung von Steffen Polster:
Eine ungerade Zahl kann geschrieben werden als $2 \cdot n + 1$, wobei n eine beliebige natürliche Zahl ist. Bei dieser Aufgabenstellung soll die 30 sich als Summe von drei ungeraden Zahlen ergeben, d. h.

$$30 = (2 \cdot n_1 + 1) + (2 \cdot n_2 + 1) + (2 \cdot n_3 + 1) \qquad \Rightarrow \qquad 27 = 2 \cdot (n_1 + n_2 + n_3)$$

Da 27 eine ungerade Zahl ist und auf der rechten Seite der Gleichung auf Grund des Faktors 2 immer eine gerade Zahl entsteht, gibt es keine natürliche Zahlen n_1, n_2 und n_3 als Lösungen.
Es ist nicht möglich, wie gefordert die Äpfel unter den Kindern zu verteilen.

Aufgabe 030523:
Heidi, Fritz und Dieter sammeln Briefmarken. Auf die Frage, wie viel Briefmarken sie alle zusammen besitzen, antwortet Fritz:
„Jeder von uns hat eine ungerade Zahl von Briefmarken, zusammen sind es genau 500 Stück.“
Was meinst du zu dieser Behauptung?

Lösung von Steffen Polster:
Die Behauptung ist falsch.
Eine ungerade Zahl kann immer in der Form $2n + 1$, wobei n eine natürliche Zahl ist, geschrieben werden. Angenommen die Behauptung wäre richtig, so hätte Heidi $2a+1$, Fritz $2b+1$ und Dieter $2c+1$ Briefmarken. Als Summe ergibt sich:

$$(2a+1)+(2b+1)+(2c+1) = 2(a+b+c)+2+1 = 2(a+b+c+1)+1$$

Da $a+b+c+1$ eine natürliche Zahl ist, ist die Summe selbst ungerade. 500 ist aber eine gerade Zahl, so dass die Annahme, d. h. die Behauptung, nicht stimmen kann.

Aufgabe 050521:
Aus 36 gleich großen Quadraten soll durch Aneinanderlegen ein Rechteck gebildet werden.

a) Wie viel Lösungsmöglichkeiten gibt es? (Bei jeder Lösung sollen sämtliche Quadrate verwendet werden.)
b) Welches der möglichen Rechtecke hat den kleinsten Umfang?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Der Flächeninhalt des Rechtecks beträgt 36 Flächeneinheiten. Die Länge jeder Rechteckseite muss infolge der Konstruktion ein ganzzahliges Vielfaches der Länge einer Quadratseite sein. Daher gibt es die folgenden 5 Möglichkeiten:

l. Rechteck: Länge 1, Breite 36, Umfang 74 Einheiten,
2. Rechteck: Länge 2, Breite 18, Umfang 40 Einheiten,
3. Rechteck: Länge 5, Breite 12, Umfang 30 Einheiten,
4. Rechteck: Länge 4, Breite 9, Umfang 26 Einheiten,
5. Rechteck: Länge 6, Breite 6, Umfang 24 Einheiten.

b) Unter diesen Rechtecken hat das 5. Rechteck (Quadrat) den kleinsten Umfang.

Aufgabe 080524:
Ermittle zwei natürliche Zahlen a und b, die gleichzeitig folgenden beiden Bedingungen genügen:

(1) Die Differenz $a - b$ der beiden natürlichen Zahlen beträgt 3.
(2) Das Produkt dieser beiden natürlichen Zahlen beträgt 180.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Zahl 180 lässt sich nur auf die folgenden Weisen in zwei Faktoren a und b (mit natürlichen Zahlen a, b) zerlegen:

$$180 = 180 \cdot 1 = 90 \cdot 2 = 60 \cdot 3 = 45 \cdot 4 = 36 \cdot 5 = 30 \cdot 6 = 20 \cdot 9 = 18 \cdot 10 = 15 \cdot 12$$

Dabei ist wegen 15 - 12 = 3 nur für $a = 15$ und $b = 12$ auch die Bedingung (1) erfüllt.

Aufgabe 090524:
Ermittle alle natürlichen Zahlen z, für die die nachfolgenden Bedingungen gleichzeitig gelten:

(a) z ist ungerade;
(b) z ist durch 3, 5 und 7 teilbar;
(c) $500 < z < 1000$.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Zahlen 3, 5 und 7 sind paarweise teilerfremd. Daher ist wegen $3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$ eine Zahl genau dann sowohl durch 3 als auch durch 5 als auch durch 7 teilbar, wenn sie ein ganzzahliges Vielfaches von 105 ist.
Nun gilt

$$4 \cdot 105 = 420 \quad , \quad 5 \cdot 105 = 525 \quad , \quad 6 \cdot 105 = 530 \quad , \quad 7 \cdot 105 = 735$$

$$8 \cdot 105 = 840 \quad , \quad 9 \cdot 105 = 945 \quad , \quad 10 \cdot 105 = 1050$$

Die Bedingungen (b) und (c) werden daher von den Zahlen 525; 630; 735; 840; 945 und nur von diesen erfüllt; denn jedes Vielfache von 105 mit einer kleineren ganzen Zahl als 5 ist kleiner als 500 und jedes Vielfache von 105 mit einer größeren ganzen Zahl als 9 ist größer als 1000.

Von diesen Zahlen erfüllen 525, 735 und 945 und nur diese auch die Bedingung (3). Die gesuchten Zahlen sind daher 525. 735 und 945 und nur diese.

Aufgabe 150522:
Bei den folgenden fünf Gleichungen sind für die Buchstaben x, y, z, u, v natürliche Zahlen so einzusetzen, dass wahre Aussagen entstehen. Dabei bedeuten gleiche Buchstaben gleiche Zahlen.

(1) $x = y : 40$,
(2) $z = 4 \cdot u$,
(3) $u = 280 : 7$,
(4) $160 = v + 40$,
(5) $y = z + v$.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Aus Gleichung (3) entsteht wegen $280 : 7 = 40$ genau dann eine wahre Aussage, wenn man $u = 40$ einsetzt.
Hiernach entsteht wegen $4 \cdot 40 = 160$ genau dann aus (2) eine wahre Aussage, wenn man $z = 160$ einsetzt. Gleichung (4) wird genau dann wahr, wenn man $v = 120$ einsetzt; denn es gilt $160 = 120 + 40$, während die Summe aus 40 und je einer anderen Zahl als 120 eine andere Zahl als 160 ergibt.
Wegen $160 + 120 = 280$ wird (5) genau für $y = 280$ wahr, und wegen $280 : 40 = 7$ wird (1) genau für $x = 7$ wahr.

Aufgabe 240524:
Peter berichtet: „Ich habe eine natürliche Zahl aufgeschrieben. Eine zweite natürliche Zahl habe ich aus der ersten durch Anhängen einer Ziffer 0 gebildet. Die Summe der beiden Zahlen beträgt 3058.“

Beweise, dass man aus diesen Angaben eindeutig ermitteln kann, welche Zahl Peter als erste Zahl aufgeschrieben hat!
Gib diese Zahl an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn die gesuchte Zahl x lautet, so ist $10 \cdot x$ die durch Anhängen der Ziffer 0 gebildete Zahl. Die Summe beträgt folglich $11 \cdot x$; nach Peters Angabe gilt also $11 \cdot x = 3058$.
Wegen $3058 : 11 = 278$ folgt hieraus $x = 278$.
Damit ist bewiesen, dass man aus Peters Angaben die von ihm als erste aufgeschriebene Zahl eindeutig ermitteln kann. Sie lautet 278.

IV.II. (Dezimal-)Zahldarstellung, Reste

Runde 1

Aufgabe 030513:
Klaus hat sich für die „Knobelecke“ eine interessante Aufgabe ausgedacht:
Es sollen bei der Multiplikationsaufgabe

$$13* \cdot \quad 7* = 1****$$

alle * so durch Ziffern ersetzt werden, dass alle drei Zahlen auf die gleiche Ziffer enden und dass beim Ergebnis an der Zehnerstelle die gleiche Ziffer steht wie an der Hunderterstelle.
Was hast du bei der Lösung dieser Aufgabe überlegt?

Lösung von Steffen Polster:
Da die letzten Stellen der zwei Faktoren und des Produkts die gleiche Ziffer x, mit $0 \leq x \leq 9$, haben, muss auch das Produkt aus x mit sich selbst wieder auf x enden.
Dies gilt nur für die Ziffern $x = 0$, $x = 1$, $x = 5$ und $x = 6$. Die zwei Faktoren sind also 130, 70 oder 131, 71 oder 135, 75 oder 136, 76. Die Multiplikation ergibt:

$130 \cdot 70 = 9100$ ist vierstellig und damit keine Lösung;
$131 \cdot 71 = 9301$ ist vierstellig und ebenfalls keine Lösung;
$135 \cdot 75 = 10125$ ist zwar fünfstellig, jedoch sind Zehner- und Hunderterstelle nicht gleich;
$136 \cdot 76 = 10336$ erfüllt alle Forderungen und ist somit einzige Lösung der Aufgabe.

Aufgabe 040512:
Nach der Eichordnung sind im Bereich von 1 g bis 1 kg nur Wägestücke in den Größen von:

1 g, 2 g, 5 g, 10 g, 20 g, 50 g, 100 g, 200 g, 500 g, 1 kg.

zugelassen. Mit einer Waage soll man alle Massebeträge zwischen 1 g und 2 kg in Abstufungen von 1 g ermitteln können. Dabei sollen die Wägestücke nur auf einer Seite aufgestellt werden.

Wie viel Wägestücke der oben angegebenen Sorten werden dann benötigt, wenn ihre Gesamtzahl möglichst gering sein soll?

Lösung von Steffen Polster:
Mit den Stücken 1 g, 2 g, 2 g, 5 g kann man alle Werte von 1 g bis 9 g erreichen, mit 10 g, 20 g, 20 g, 50 g alle möglichen Zehner von 10 g bis 90 g und mit 100 g, 200 g, 200 g, 500 g alle Hunderter von 100 g bis 900 g. Mit dem 1 kg Wägestücke sind alle Werte von 1 kg bis 2 kg bestimmbar, d. h. man benötigt die folgenden Wägestücke:
1 g, 2 g, 2 g, 5 g, 10 g, 20 g, 20 g, 50 g, 100 g, 200 g, 200 g, 500 g und 1 kg.

Aufgabe 040516:
Die Summe zweier natürlicher Zahlen beträgt 968. Ein Summand endet mit einer Null. Streicht man diese Null, so erhält man die andere Zahl.
Bestimme diese beiden Zahlen!

Lösung von Steffen Polster:
Die letzte Ziffer der kleineren Zahl muss 8 sein. Dann ist 8 aber auch die mittlere Ziffer der größeren Zahl.
Aus der angegebenen Summe erkennt man leicht, dass die beiden Summanden 88 und 880 lauten müssen. Als Formel:

$$a + b = 968 \qquad ; \qquad a = 10 \cdot b$$

Einsetzen ergibt $10 \cdot b + b = 968$ mit $b = 88$ und folglich $a = 880$.

Aufgabe 060514:
Gesucht ist eine natürliche Zahl mit folgenden Eigenschaften:
Dividiert man 100 durch diese Zahl, so bleibt der Rest 4, dividiert man 90 durch diese Zahl, so bleibt der Rest 18.
Wie lautet die gesuchte Zahl?

Lösung von Steffen Polster:
a sei die gesuchte Zahl. Wenn 100 bei Division mit a den Rest lässt, ist 100 - 4 = 96 ein Vielfaches von a. Ebenso muss dann 90 - 18 = 72 ein Vielfaches von a sein. a ist aber auch größer als 18, da sonst kein Rest 18 entstehen würde.

72 und 96 haben nur einen gemeinsamen Teiler, der größer als 18 ist. Dieser Teiler ist 24, d. h. das gesuchte a ist 24.

Aufgabe 070513:
Gesucht ist die größte fünfstellige Zahl, für die folgendes gilt:
a) Die Zehnerziffer stellt eine halb so große Zahl dar wie die Tausenderziffer.
b) Die Einer- und die Hunderterziffer kann man vertauschen, ohne dass sich die fünfstellige Zahl ändert.

Lösung von Steffen Polster:
Eine fünfstellige natürliche Zahl mit den Ziffern [abcde] kann

$$z = 10000 \cdot a + 1000 \cdot b + 100 \cdot c + 10 \cdot d + e,$$

geschrieben werden. Dabei kann a jede Ziffer von 0 bis 9, b, c, d, e jedoch nur von 1 bis 9 annehmen. Mit der Aussage a) kann d durch b ersetzt werden: $\frac{b}{2} = d$. b kann nun aber nicht mehr 9 werden. Die Aussage b) führt zu $e = c$. Damit wird:

$$z = 10000a + 1000b + 100c + 5b + c = 10000a + 1005b + 101c$$

Eine Summe wird dann am größten, wenn jeder Summand möglichst groß ist. Mit den Einschränkungen sind a und c maximal 9 und b maximal 8. Die gesuchte Zahl ist somit

$$z = 10101 \cdot 9 + 1005 \cdot 8 = 90909 + 8040 = 98949$$

Aufgabe 090512:
In einer Mathematikarbeitsgemeinschaft wurde die folgende Aufgabe aus einem sowjetischen Lehrbuch gestellt:

Wassja kaufte zwei Alben für Briefmarken. Kolja fragte ihn, wie viel er dafür bezahlt habe.
„Ich verwendete zur Bezahlung nur Geldstücke einer Sorte“, antwortete Wassja, „und zwar für das eine Album genau 7, für das andere genau 5. Für beide Alben bezahlte ich insgesamt 60 Kopeken.“

(In der Sowjetunion gibt es 1-, 2-, 3-, 5-, 10-, 15-, 20- und 50-Kopekenstücke und keine anderen Sorten von Kopekenstücken.)
Wie viel Kopeken kostete das eine und wie viel das andere Album?

Lösung von Steffen Polster:
a sei die Sorte, mit der das erste Album bezahlt wurde, b entsprechend die Sorte für das zweite Album. a und b können einen Wert von 1, 2, 3, 5, 10, 15, 20, 50 annehmen.
Da einmal 7 und einmal 5 Münzen verwendet wurden, gilt $7a + 5b = 60$ Kopeken.

Da a und b natürliche Zahlen größer Null sind, muss $5b = 60 - 7a$ eine natürliche Zahl sein, d. h. $60 - 7a$ ist eine durch 5 teilbare Zahl.
Für die möglichen Werte von $a = 1, 2, 3, 5$ (ab 10 wird $60 - 7a < 0$) ergibt sich $60 - 7a = 53, 46, 39, 25$. Nur ein Ergebnis, die 25, ist durch 5 teilbar und $b = 5$. a ist dann ebenfalls 5.

Damit kostete erste Album 35 Kopeken und das 2. Album 25 Kopeken. Das erste Album wurde mit 7× 5-Kopekenstücken bezahlt, das zweite Album mit 5× 5 Kopekenstücken.

Aufgabe 110514:
Es soll das Produkt $21 \cdot 12 \cdot 25$ berechnet werden.
Manfred will diese Aufgabe schriftlich lösen.
Annerose sagt: „Mit Hilfe eines Rechenvorteils kann ich die Aufgabe auch im Kopfe rechnen.“
Gib an, welchen Rechenvorteil Annerose benutzt haben könnte!

Lösung von Steffen Polster:
Annerose nutzt zum Beispiel, dass $4 \cdot 25 = 100$ ist. Da 12 durch 4 teilbar ist (Ergebnis 3), kann sie rechnen: $21 \cdot 3 = 63$.
Die noch fehlende Multiplikation mit 100 wird durch Anhängen von 2 Nullen erreicht. Das Ergebnis ist damit 6300.

Aufgabe 170513:
Fritz möchte eine Subtraktionsaufgabe aufschreiben, bei der die Differenz zweier natürlicher Zahlen zu bilden ist.
Als Ergebnis soll eine dreistellige Zahl entstehen, deren drei Ziffern alle einander gleich sind. Der Minuend soll eine Zahl sein, die auf Null endet. Streicht man diese Null, so soll sich der Subtrahend ergeben.
Gib alle Subtraktionsaufgaben an, für die das zutrifft!

Lösung von Steffen Polster:
m sei der auf Null endende Minuend sein, s der Subtrahend s. Streicht man bei m die Null, so ergibt sich s, d. h. der Minuend ist das Zehnfache des Subtrahenden: $m = 10s$. Die Differenz $m - s$ ist damit $10s - s = 9s$.

Die Differenz ist eine dreistellige Zahl, bei der alle Ziffern gleich sind. n sei diese Ziffer ($n = 1, 2, ..., 9$), d. h.

$$9s = 100n + 10n + n = 111n \qquad \Rightarrow \qquad 3s = 37n$$

Da 37 nicht durch teilbar ist, muss 3 durch teilbar sein. Probiert man die möglichen $n = 3, 6, 9$, ergibt sich
$n = 3 \Rightarrow s = 37, m = 370 \Rightarrow 370 - 37 = 333$
$n = 6 \Rightarrow s = 74, m = 740 \Rightarrow 740 - 74 = 666$
$n = 9 \Rightarrow s = 111, m = 1110 \Rightarrow 1110 - 111 = 999$.
Damit gibt es drei mögliche Subtraktionsaufgaben.

Aufgabe 240512:
Roland löste eine Divisionsaufgabe. Er erhielt als Ergebnis den Quotienten 36.
Roland machte die Probe, indem er den Divisor mit diesem Quotienten multiplizierte. Dabei las er versehentlich im Divisor statt einer Ziffer 7 eine 1 und erhielt als Ergebnis dieser Multiplikation nicht den gegebenen Dividenden, sondern die Zahl 756.
Wie hieß die Divisionsaufgabe, die Roland lösen sollte?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Bei der Probe multiplizierte Roland die falsche Zahl mit 36 und erhielt 756. Wegen $756 : 36 = 21$ war diese falsche Zahl 21. Der Fehler war entstanden, indem er statt einer 7 eine 1 gelesen hatte. Die richtige Zahl hätte also 27 lauten müssen.
Mit dieser hätte Roland bei seiner Probe $27 \cdot 36 = 972$ erhalten. Dies war somit der gegebene Dividend.
Die Divisionsaufgabe, die Roland lösen sollte, hieß folglich $972 : 27$.

Aufgabe 290512:
Wenn man zwei zweistellige Zahlen hintereinanderschreibt, entsteht eine vierstellige Zahl.
Gib zwei zweistellige Zahlen so an, dass die Summe aus diesen beiden Zahlen und der daraus gebildeten vierstelligen Zahl genau 1478 beträgt!
(Ein Nachweis, dass es nur eine einzige Möglichkeit für zwei solche Zahlen gibt, wird nicht verlangt. Du kannst aber versuchen, einen solchen Nachweis zu finden.)

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Zwei solche Zahlen sind 14 und 32; denn es gilt 14 + 32 + 1432 = 1478.

Aufgabe 320512:
Gesucht ist die größte sechsstellige Zahl, für die folgendes gilt:

a) Die Zahl ist gerade.
b) Die Zehnerziffer stellt eine dreimal so große Zahl dar wie die Zehntausenderziffer.
c) Die Einer- und die Tausenderziffer kann man vertauschen, ohne dass sich die sechsstellige Zahl ändert.
d) Die Hunderterziffer stellt eine halb so große Zahl dar wie die Hunderttausenderziffer.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Nach d) muss die Hunderttausenderziffer gerade sein; damit sie so groß wie möglich wird, versucht man zunächst für die Acht und somit für die Hunderterstelle Vier eine Lösung zu finden.

Nach b) kann die Zehntausenderziffer nicht größer als Drei sein, also versucht man, mit der Zehntausenderziffer Drei und somit mit der Zehnerziffer Neun eine Lösung zu finden.
Da nach a) und c) an der Einer- und an der Tausenderstelle dieselbe gerade Ziffer steht, versucht man - um die größte Zahl zu erhalten - jeweils eine Acht einzusetzen.

Die jetzt erhaltene Zahl 838498 erfüllt die Bedingungen a), b), c) und d) und ist nach Konstruktion die größtmögliche.

Aufgabe 330511:
Bernd fragt seinen Großvater: „Wie viele Jahre mag dieses Foto alt sein?“
Er bekommt zur Antwort: „Addiere die größte einstellige Zahl und die größte zweistellige Zahl und die größte dreistellige Zahl! Dann subtrahiere die kleinste vierstellige Zahl, und du erhältst die Altersangabe.“

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die größte einstellige Zahl ist 9, die größte zweistellige Zahl ist 99, die größte dreistellige Zahl ist 999.
Durch Addieren dieser drei Zahlen ergibt sich 1107. Die kleinste vierstellige Zahl ist 1000. Subtrahiert man sie von der vorigen Zahl, so ergibt sich 107.
Das Foto ist also 107 Jahre alt.

Aufgabe 330514:
Die Zahlen 100 und 90 sollen beide durch eine gesuchte Zahl geteilt werden. Im ersten Fall soll der Rest 4 und im zweiten Fall der Rest 18 bleiben.
Zeige, dass es hierfür genau eine gesuchte Zahl gibt; finde sie und bestätige, dass sie das Verlangte leistet!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Würde man nicht 100, sondern 100 - 4 = 96 durch die gesuchte Zahl teilen, so würde die Division ohne Rest aufgehen. Ebenso würde kein Rest bleiben, wenn man nicht 90, sondern 90 - 18 = 72 durch die gesuchte Zahl teilen würde. Ferner muss die gesuchte Zahl größer als 18 sein, da der Rest stets kleiner ist als die Zahl, durch die man teilt.

Die einzigen Zahlen, durch die sich 72 ohne Rest teilen lässt und die größer als 18 sind, sind die Zahlen 24 und 36. Durch 36 ist aber 96 nicht ohne Rest teilbar.
Damit ist gezeigt, dass es nur eine Zahl geben kann, die als die gesuchte Zahl in Frage kommt, nämlich 24.
Bestätigung: 100 : 24 = 4, Rest 4 90 : 24 = 3, Rest 18

Runde 2

Aufgabe 040523:
a) Wie viel zweistellige natürliche Zahlen gibt es, bei denen die Differenz der beiden Ziffern gleich 5 ist?

b) Bei wie vielen dieser Zahlen ist die Zahl selbst achtmal so groß wie ihre Quersumme, d. h. wie die Summe ihrer beiden Ziffern?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Es gibt neun dieser Zahlen, nämlich 16, 27, 38, 49, 50, 61, 72, 83, 94.
b) Der zusätzlichen Bedingung genügt nur die Zahl 72.

Aufgabe 060522:
Gesucht ist eine zweistellige natürliche Zahl mit folgenden Eigenschaften:
Die Summe ihrer Ziffern beträgt 10. Vertauscht man ihre Ziffern und addiert zu dieser dadurch entstandenen Zahl die Zahl 2, so erhält man das Dreifache der ursprünglichen Zahl.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die durch Vertauschung der Ziffern entstehende Zahl muss größer sein als die ursprüngliche Zahl, da sie gleich dem um 2 verminderten Dreifachen dieser Zahl sein soll.
Bei der ursprünglichen Zahl ist also die Anzahl der Zehner kleiner als die der Einer. Man braucht daher unter Berücksichtigung der Bedingung, dass die Summe der beiden Anzahlen 10 beträgt, nur die Zahlen 19, 28, 37 und 46 in Betracht zu ziehen.
Von ihnen erfüllt 28 und nur 28 die Bedingungen der Aufgabe.

Aufgabe 070522:
Von einer zweistelligen Zahl z ist bekannt, dass die Einerziffer eine dreimal so große Zahl darstellt wie die Zehnerziffer. Vertauscht man die Ziffern, so entsteht eine Zahl, die um 36 größer als die ursprüngliche ist.
Wie lautet z im Dezimalsystem?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es gibt genau drei zweistellige Zahlen, bei denen die Anzahl der Einer dreimal so groß ist wie die der Zehner, nämlich 15, 26, 59.
Von ihnen erfüllt nur 26 die Bedingungen der Aufgabe; denn

$$31 - 13 = 18, \qquad 62 - 26 = 36, \qquad 93 - 39 = 549$$

Daher ist $z = 26$.

Aufgabe 110524:
Ermittle alle diejenigen zweistelligen natürlichen Zahlen z, von denen jede alle folgenden Bedingungen gleichzeitig erfüllt:
(a) Die Zahl z ist nicht durch 10 teilbar.
(b) Subtrahiert man die Einerziffer der Zahl von ihrer Zehnerziffer, so erhält man 4.
(c) Vertauscht man die Ziffern von z miteinander, dann erhält man eine neue zweistellige Zahl z_1, deren Dreifaches kleiner ist als z.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Bedingung (1) ist genau dann erfüllt, wenn die Einerziffer der gesuchten Zahlen nicht 0 ist. Daher werden die Bedingungen (1) und (2) genau von den Zahlen 51; 62; 73; 84; 95 erfüllt.
Vertauscht man jeweils ihre Ziffern, dann erhält man der Reihe nach die Zahlen 15; 26; 37; 48; 59.

Das Dreifache dieser Zahlen beträgt der Reihe nach 45; 78; 111; 144; 177. Wegen $45 < 51$ und $78 > 62$; $111 > 73$; $144 > 84$; $177 > 95$ erfüllt somit genau die Zahl 51 alle Bedingungen der Aufgabe.

Aufgabe 180522:
Marie-Luise möchte eine zweistellige natürliche Zahl z angeben, die die folgenden Bedingungen (1), (2), (3) gleichzeitig erfüllt:

(1) Die Zahl z ist nicht durch 10 teilbar.
(2) Vergrößert man die Einerziffer der Zahl z um 4, so erhält man die Zehnerziffer von z.
(3) Vertauscht man die Ziffern von z miteinander, dann erhält man eine Zahl, deren Dreifaches kleiner als 100 ist.

Ermittle alle Zahlen z, die die genannten Bedingungen erfüllen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn eine Zahl z die genannten Bedingungen erfüllt, so gilt:

Die Einerziffer ist nach (1) nicht 0 und nach (2) so beschaffen, dass aus ihr nach Vergrößerung um 4 ein Ergebnis kleiner oder gleich 9 entsteht.

Daher ist die Einerziffer eine der Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, und für z verbleiben höchstens die Möglichkeiten 51, 62, 73, 84, 95.

Durch Vertauschen der Ziffern entsteht jeweils 15, 26, 37, 48, 59, und das Dreifache dieser Zahlen ist jeweils 45, 78, 111, 144, 177.

Daher können wegen (3) nur die Zahlen 51 und 62 alle Bedingungen erfüllen. Die für diese Zahlen bereits durchgeführten Rechnungen zeigen, dass diese Zahlen die Bedingungen (1), (2) und (3) auch tatsächlich erfüllen.

IV.III. Diophantische Gleichungen

Runde 1

Aufgabe 190511:
(Eine historische Aufgabe, 2000 Jahre v.u.Z.)
In einem Käfig sind Kaninchen und Fasane eingesperrt. Diese Tiere haben zusammen 40 Köpfe und 104 Füße.
Nenne die Anzahl aller Kaninchen und die Anzahl aller Fasane, die in dem Käfig sind!

Lösung von Steffen Polster:
Die Anzahl der Kaninchen sei k, der Fasanen f.
Dann gilt $k + f = 40$ und $4 \cdot k + 2 \cdot f = 104$ denn sie haben jeweils 4 bzw. 2 Beine.
Subtrahiert man die erste Gleichung zweimal von der zweiten wird $2k = 24$, also $k = 12$ und damit $f = 28$.

Aufgabe 200512:
Zum Transport einer bestimmten Menge Schotter hätte ein LKW mit 5 t Ladefähigkeit genau 105 vollbeladene Fuhren durchführen müssen. Nach 35 dieser Fuhren wurde er durch einen anderen LKW mit 7 t Ladefähigkeit abgelöst.
Stelle fest, wie viel vollbeladene Fuhren dieser zweite LKW noch durchzuführen hat, um die restliche Schottermenge abzutransportieren!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wegen $105 \cdot 5 = 525$ waren insgesamt 525 t Schotter zu transportieren.
Wegen $35 \cdot 5 = 175$ hatte der erste LKW davon bis zu seiner Ablösung genau 175 t Schotter transportiert.
Mithin waren wegen $525 - 175 = 350$ noch genau 350 t Schotter zu transportieren. Wegen $350 : 7 = 50$ konnte diese Menge von dem zweiten LKW mit genau 50 vollbeladenen Fuhren abtransportiert werden.

Aufgabe 260513:
Jörg bewundert Holgers Kaninchen und Tauben. Er möchte gern wissen, wie viel Kaninchen und Tauben Holger besitzt, und fragt ihn deshalb danach.

Dieser antwortet: „Ich habe insgesamt 24 Tiere, die zusammen 62 Beine haben. Andere Tiere als Kaninchen und Tauben habe ich nicht.“

Wie viel Kaninchen und wie viel Tauben besitzt Holger? Begründe deine Antworten!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Hätte jedes von Holgers Tieren nur zwei Beine, so wären es wegen $24 \cdot 2 = 48$ zusammen genau 48 Beine. Nach Holgers Angaben und wegen $62 - 48 = 14$ sind es aber 14 Beine mehr als 48.
Da Tauben nur zwei Beine besitzen, können diese 14 Beine nur zu den Kaninchen gehören. Zwei Beine eines jeden Kaninchen wurden schon bei den 48 Beinen mitgezählt. Die zwei restlichen Beine eines jeden Kaninchens müssen zusammengezählt 14 Beine ergeben.
Also können Holgers Angaben nur dann zutreffen, wenn er 7 Kaninchen und 17 Tauben besitzt, da $14 : 2 = 7$ und $24 - 7 = 17$ ist.

Runde 2

Aufgabe 170523:
Eine Fläche von 1710 m^2 ist in 9 Parzellen eingeteilt. Jede der Parzellen hat entweder die Größe 150 m^2 oder die Größe 210 m^2.
Wie viel Parzellen jeder dieser Größe gibt es insgesamt auf der genannten Fläche?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Anzahl der Parzellen der Größe 150 m^2 ist eine der Zahlen von 0 bis 9. Für jede dieser Zahlen erhält man folgende Werte:

Parzellen 150 m^2		Parzellen 210 m^2		Flächeninhalt
Anzahl	Flächeninhalt	Anzahl	Flächeninhalt	aller Parzellen
0	0 m^2	9	1890 m^2	1890 m^2
1	150 m^2	8	1680 m^2	1830 m^2
2	300 m^2	7	1470 m^2	1770 m^2
3	450 m^2	6	1260 m^2	1710 m^2
4	600 m^2	5	1050 m^2	1650 m^2
5	750 m^2	4	840 m^2	1590 m^2
6	900 m^2	3	630 m^2	1530 m^2
7	1050 m^2	2	420 m^2	1470 m^2
8	1200 m^2	1	210 m^2	1410 m^2
9	1350 m^2	0	0 m^2	1350 m^2

Da der Flächeninhalt aller Parzellen 170 m^2 beträgt, gibt es folglich 3 Parzellen der Größe 150 m^2 und 6 Parzellen der Größe 210 m^2.

Aufgabe 200522:
Bei einem Einkauf wurde der Preis von 170 Mark mit genau 12 Geldscheinen bezahlt. Jeder dieser Geldscheine war ein 10-Mark Schein oder ein 20-Mark-Schein.
Ermittle die Anzahl der 10-Mark-Scheine und die der 20-Mark-Scheine, die zum Bezahlen der angegebenen Summe verwendet wurden!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die folgende Tabelle enthält alle Zusammenstellungen von 2 Geldscheinen, von denen jeder ein 10-Mark- Schein oder ein 20-Mark-Schein ist. Anschließend wird für jede dieser Zusammenstellungen der Gesamtwert ermittelt:

Anzahl der Scheine zu je		Wert der Scheine zu		
10 M	20 M	10 M	20 M	Gesamtwert
0	12	0 M	240 M	240 M
1	11	10 M	220 M	230 M
2	10	20 M	200 M	220 M
3	9	30 M	180 M	210 M
4	8	40 M	160 M	200 M
5	7	50 M	140 M	190 M
6	6	60 M	120 M	180 M
7	5	70 M	100 M	170 M
8	4	80 M	80 M	160 M
9	3	90 M	60 M	150 M
10	2	100 M	40 M	140 M
11	1	110 M	20 M	130 M
12	0	120 M	0 M	120 M

Daraus ist ersichtlich, dass genau für die Anzahlen 7 und 5 der 10-Mark-Scheine bzw. 20-Mark-Scheine der Gesamtwert 170 Mark entsteht.