Thematische Aufgabensammlung

# Aufgaben und Lösungen der I. bis IV. Runde der Klassenstufe 6 der Mathematik-Olympiaden von 1960 bis 1994

**Zentrales Komitee für die Olympiaden Junger Mathematiker**

unter Nutzung von Manuela Kugels
https://www.olympiade-mathematik.de/

zusammengestellt von Steffen Polster
https://mathematikalpha.de
Chemnitz, 2019/22

bearbeitet von Christian Hercher
Flensburg, 2022

# I Algebra

## I.I Gleichungen, Gleichungssysteme

### I Runde 1

**Aufgabe V00605:**
Wie viel sind eineinhalb Drittel von Hundert?

**Lösung von Steffen Polster:**

$$\frac{1\frac{1}{2}}{3} \cdot 100 = \frac{\frac{3}{2}}{3} \cdot 100 = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 100 = \frac{1}{2} \cdot 100 = 50$$

**Aufgabe V00606:**
Wie heißt der Bruch mit einem einstelligen Nenner, der größer als $\frac{7}{9}$ und kleiner als $\frac{8}{9}$ ist?

**Lösung von Steffen Polster:**
Ein möglicher Bruch ist das arithmetische Mittel von $\frac{7}{9}$ und $\frac{8}{9}$:

$$\frac{\frac{7}{9}+\frac{8}{9}}{2} = \frac{\frac{15}{9}}{2} = \frac{15}{30} = \frac{5}{6}$$

Die Aufgabe ist nicht eindeutig lösbar, da z. B. auch $\frac{6}{7}$ ein solcher Bruch ist.

**Aufgabe V00607:**
Zu einer gedachten Zahl wird 16 addiert, anschließend mit 7 multipliziert, dann 8 subtrahiert und schließlich mit 9 dividiert. Man erhält 22 Rest 4.
Wie heißt die gedachte Zahl?

**Lösung von Steffen Polster:**
$x$ sei die gedachte Zahl. Dann ergibt sich mit den Operationen der Term

$$((x+16) \cdot 7 - 8) : 9$$

Dieser Term soll 22 mit einem Rest 4 werden, d. h. es gilt

$$((x+16) \cdot 7 - 8) = 9 \cdot 22 + 4$$

Schrittweises Zusammenfassen und Umstellen ergibt

$$\begin{aligned} ((x+16) \cdot 7 - 8) &= 9 \cdot 22 + 4 \\ (x+16) \cdot 7 - 8 &= 198 + 4 \\ (x+16) \cdot 7 &= 202 + 8 \\ x + 16 &= 210 : 7 \\ x &= 30 - 16 = 14 \end{aligned}$$

Die gedachte Zahl ist 14.

**Aufgabe 010611:**
a) $9\frac{4}{15} \cdot \frac{138}{139}$

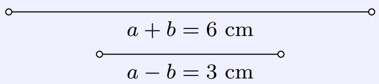
b) $3451\frac{23}{35} - 2868\frac{24}{49}$

**Lösung von Steffen Polster:**

$$\text{a)} \quad 9\frac{4}{15} \cdot \frac{138}{139} = \frac{139}{15} \cdot \frac{138}{139} = \frac{138}{15} = 9\frac{1}{5}$$

$$\text{b)} \quad 3451\frac{23}{35} - 2868\frac{24}{49} = 3451 - 2868 + \frac{23}{5 \cdot 7} - \frac{24}{7 \cdot 7} = 583 + \frac{23 \cdot 7 - 24 \cdot 5}{5 \cdot 7 \cdot 7} = 583\frac{41}{245}$$

**Aufgabe 020616:**




Gegeben sind zwei Strecken. Die eine ist gleich der Summe zweier Strecken, die andere ist gleich ihrer Differenz. Wie lang sind die Strecken a und b? Beschreibe, wie du die Lösung gefunden hast!

**Lösung von Steffen Polster:**
Die Summe der beiden Strecken $(a + b)$ und $(a - b)$ ist gleich $(a + b) + (a - b) = (a + a) = 9$ cm. Damit ist die Strecke $a = 4{,}5$ cm lang und $b = 1{,}5$ cm.

**Aufgabe 040614:**
Zerlege die Zahl 390 in drei Summanden, von denen der zweite dreimal so groß wie der erste und der dritte $2\frac{1}{2}$ mal so groß wie der erste ist!

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Der erste Summand ist doppelt so groß wie seine Hälfte, der zweite 6 mal und der dritte 5 mal so groß wie diese Hälfte. Insgesamt besteht die Summe 390 also aus 13 Summanden, von denen jeder halb so groß wie der gesuchte erste Summand ist. Auf diese Weise findet man die drei Summanden 60, 180 und 150.

**Aufgabe 060612:**
Zu Beginn des Schuljahres kaufte Heinz zwei verschiedene Sorten von Heften, die eine kostet 8 Pf, die andere 15 Pf pro Stück. Er zahlte für 12 Hefte zusammen 1,31 MDN.
Wie viel Hefte kaufte er von jeder Sorte?

**Lösung von Steffen Polster:**
$a$ sei die Anzahl der Hefte zu 8 Pf und $b$ die Anzahl der Hefte zu 15 Pf. Dann gilt

$$a \cdot 8 + b \cdot 15 = 131 \qquad ; \qquad a + b = 12 \quad \text{oder} \quad a = 12 - b$$

Setzt man die zweite Gleichung in die erste ein, wird $8 \cdot (12 - b) + 15b = 131$. Daraus gewinnt man $b = 5$ und weiter $a = 7$.
Heinz kauft 7 Hefte zu 8 Pf und 5 Hefte zu 15 Pf.

**Aufgabe 070611:**
Zu einem Straßenbahnhof einer gewissen Großstadt gehören insgesamt 83 Straßenbahnwagen. Davon sind genau 46 Anhänger. Zu einem gewissen Zeitpunkt befinden sich insgesamt 8 Triebwagen mit je zwei Anhängern und 23 Triebwagen mit je einem Anhänger im Einsatz.
Welches ist die Anzahl aller Triebwagen und Anhänger, die sich zu diesem Zeitpunkt nicht im Einsatz befinden?

**Lösung von Steffen Polster:**
Die Anzahl der Anhänger sei $a$, die der Triebwagen $t$. Dann gilt nach Aufgabenstellung $a+t = 46+t = 83$. Damit gibt es 37 Triebwagen.
Zu dem bestimmten Zeitpunkt sind $8 + 23 = 31$ Triebwagen und $16 + 23 = 39$ Anhänger im Einsatz. Folglich sind zu diesem Zeitpunkt 7 Anhänger und 6 Triebwagen nicht im Einsatz.

**Aufgabe 070613:**
In einem Speicher wurden insgesamt 2170 kg Getreide gelagert. Es waren genau 11 Sack Weizen zu je 80 kg, 6 Sack Gerste und 12 Sack Mais. Jeder Sack Gerste enthielt 5 kg mehr als jeder Sack Mais.
Wie viel Kilogramm Mais wurden im Speicher gelagert?

**Lösung von Steffen Polster:**
Die Masse des Weizens ist $11 \cdot 80\text{kg} = 880\text{kg}$, so dass die Masse von Gerste ($g$ je Sack) und Mais ($m$ je Sack) zusammen 1290 kg beträgt. Da $g = m + 5$ gilt, wird für beide (in Kilogramm):

$$6g + 12m = 1290 \qquad ; \qquad 6 \cdot (m + 5) + 12m = 1290 = 18m + 30$$

Daraus ergibt sich für den Mais je Sack $m = 70$ kg und somit für die Gerste je Sack $g = 75$ kg.
Da 12 Säcke Mais vorhanden sind, ist deren Gesamtmasse $12 \cdot 70\text{kg} = 840\text{kg}$.

**Aufgabe 090613:**
In einem Wettbewerb der Mathematischen Schülerzeitschrift „alpha“ sollten den vier dort vorgegebenen geometrischen Figuren die richtigen Namen zugeordnet werden.
In genau $\frac{3}{25}$ der eingesandten Lösungen wurden allen vier vorgegebenen Figuren die richtigen Namen zugeordnet. Bei genau doppelt soviel Lösungen wurden je zwei Figuren die richtigen und je zwei Figuren die falschen Namen zugeordnet.
Die Anzahl der Lösungen mit genau drei falschen Zuordnungen war genau viermal so groß wie die Zahl der richtigen Lösungen. Genau 240 der eingesandten Lösungen enthielten keine richtige Zuordnung. Weitere Einsendungen lagen nicht vor.

Ermittle die Anzahl aller zu diesem Wettbewerb eingesandten Lösungen!

**Lösung von Steffen Polster:**
Die Anzahl der eingesandten Lösungen sein $n$. Dann gilt:

Genau vier sind richtig, d. h $\frac{3}{25}n$, genau zwei sind richtig, d. h. $\frac{6}{25}n$, genau eine ist richtig, d. h. : $4 \cdot \frac{3}{25}n$ und keine Lösung richtig sind 240. Die Summe ergibt

$$n = \frac{3}{25}n + \frac{6}{25}n + 4 \cdot \frac{3}{25}n + 240 = \frac{21}{25}n + 240 \qquad \to \qquad \frac{4}{25}n = 240$$

Somit erfolgten insgesamt $n = 240 \cdot \frac{25}{4} = 1500$ Einsendungen.

**Aufgabe 090614:**
Eine Arbeitsgemeinschaft erhielt als Auszeichnung für sehr gute Leistungen einen Betrag von genau 240 M.
Bei gleichmäßiger Verteilung dieses Geldes auf alle Mitglieder der Arbeitsgemeinschaft hätte jedes Mitglied einen ganzzahligen Betrag (in Mark) erhalten. Die Mitglieder beschlossen jedoch, die 240 M gemeinsam auf einer Wanderfahrt auszugeben.
Genau drei der Mitglieder konnten an der Wanderfahrt nicht teilnehmen, infolgedessen standen bei gleichmäßiger Verteilung des Geldes auf alle Teilnehmer der Wanderfahrt für jeden Teilnehmer genau 4 M mehr zur Verfügung als bei gleichmäßiger Verteilung auf alle Mitglieder.

Ermittle die Mitgliederzahl der Arbeitsgemeinschaft!

**Lösung von Steffen Polster:**
Die Anzahl Schüler der Arbeitsgemeinschaft sei $x$. Bei gleichmäßiger Verteilung des Geldes erhält jeder somit $a = \frac{240}{x}$, womit $x$ ein Teiler von 240 sein muss.

Nehmen 3 Mitgliedern nicht teil so erhöht sich der Anteil für aller übrigen Mitglieder auf $a + 4$, d. h. es ist $a + 4 = \frac{240}{x-3}$, womit auch $x - 3$ ein Teiler von 240 ist.

Die Teiler $x$ von 240, für die auch $x - 3 > 0$ ist, sind

$$4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 20, 24, 30, 40, 48, 60, 80, 120, 240$$

Nur die Paare $(8; 5)$ und $(15; 12)$ sind Paare der Form $(x; x - 3)$. Einsetzen der ersten Gleichung in die zweite ergibt: $\frac{240}{x} + 4 = \frac{240}{x-3}$.
Setzt man die zwei Paare ein, so zeigt sich, dass nur $x = 15$, $x - 3 = 12$ die letzte Gleichung erfüllen. Die Arbeitsgemeinschaft hatte somit 15 Mitglieder.

**Aufgabe 100611:**
Eine LPG hatte auf zwei Feldern Kartoffeln angebaut. Vom ersten Feld wurden insgesamt 810 t, vom zweiten insgesamt 640 t Kartoffeln geerntet. Auf dem ersten Feld wurde ein Durchschnittsertrag von 180 dt je ha, auf dem zweiten von 200 dt je ha erzielt.
Welches von den beiden Feldern hat den größeren Flächeninhalt? Um wie viel Ar unterscheiden sich die beiden Flächen?

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Vom ersten Feld wurden an Kartoffeln 810 t = 8100 dt geerntet. Da der Durchschnittsertrag 180 dt je ha betrug, erhalten wir für dieses Feld wegen 8100 : 180 = 45 einen Flächeninhalt von 45 ha.

Vom zweiten Feld wurden an Kartoffeln 640 t = 6400 dt geerntet. Da der Durchschnittsertrag hier 200 dt je ha betrug, erhalten wir für das zweite Feld wegen 6400 : 200 = 32 einen Flächeninhalt von 32 ha.

Also ist das erste Feld größer als das zweite. Die Differenz der Flächeninhalte beträgt 13 ha, das sind 1300 a.

**Aufgabe 100613:**
Es seien $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$, $g$, $h$ sämtlich paarweise untereinander verschiedene einstellige natürliche Zahlen ungleich Null, und es gelte:

$$a + b = 10, \qquad c + d + e = 16, \qquad f + g + h = 14$$

Welche einstellige natürliche Zahl (ungleich Null) wurde in diesen drei Aufgaben nicht verwendet?
Gib für $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$, $g$, $h$ eine mögliche Lösung an!

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Es gibt genau 9 einstellige natürliche Zahlen ungleich Null, nämlich 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9. Die Summe aller dieser 9 Zahlen beträgt

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$$

Von ihnen wurden laut Aufgabe genau 8 verwendet.
Aus den gegebenen Gleichungen erhält man durch Addition:

$$a+b+c+d+e+f+g+h=10+16+14=40$$

Also wurde die 5 nicht verwendet. Eine mögliche Lösung ist z. B.:

$$a=1,\quad b=9,\quad c=2,\quad d=8,\quad e=6,\quad f=3,\quad g=7,\quad h=4.$$

**Aufgabe 110611:**
Von zwei Autos vom Typ „Wartburg“ legte das eine eine Strecke von 1200 km zurück, das andere eine Strecke von 800 km. Es sei angenommen, dass jedes der beiden Autos für jeden Kilometer die gleiche Menge Kraftstoff verbrauchte. Dabei verbrauchte das zweite Auto 36 Liter Kraftstoff weniger als das erste.
Berechne, wie viel Liter Kraftstoff beide Autos zusammen für die oben angegebenen Strecken verbrauchten!

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Wegen $1200-800=400$ legte das erste Auto 400 km mehr zurück als das zweite. Für diese 400 km verbrauchte es laut Aufgabe 36 Liter Kraftstoff.
Beide Autos legten zusammen 1200km + 800km = 2000km zurück. Das sind 5 mal soviel wie 400 km.
Folglich verbrauchten sie insgesamt wegen $5\cdot 36=180$ für diese Strecken 180 Liter Kraftstoff.

**Aufgabe 120611:**
Von 30 Schülern einer Klasse lesen regelmäßig 20 Schüler die Zeitschrift „Fröhlichsein und Singen“ (Frösi), 12 Schüler die mathematische Schülerzeitschrift „alpha“ und 6 Schüler weder „Frösi“ noch „alpha“.

Ermittle die Anzahl aller Schüler dieser Klasse, die beide Zeitschriften lesen!

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Die Anzahl der Schüler, die beide Zeitschriften lesen, sei $x$.
Dann lesen genau $(20-x)$ Schüler „Frösi“ aber nicht „alpha“, ferner genau $(12-x)$ Schüler „alpha“, aber nicht „Frösi“. Daher gilt

$$x+(20-x)+(12-x)+6=30$$

woraus $38-x=30$, also $x=8$ folgt.

**Aufgabe 120614:**
Eine Strecke von 168 m Länge soll in drei Teilstrecken geteilt werden, deren Längen der Reihe nach mit $a$, $b$, $c$ bezeichnet seien. Dabei soll die zweite Teilstrecke dreimal so lang wie die erste und die dritte Teilstrecke viermal so lang wie die erste sein.

Ermittle alle Möglichkeiten, die Längen $a$, $b$, $c$ der Teilstrecken so anzugeben, dass eine Teilung mit diesen Eigenschaften entsteht!

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Angenommen, die Längen $a, b, c$ haben die geforderten Eigenschaften. Dann gilt:

$a + b + c = 168$ m, ferner $b = 3a$ sowie $c = 4a$.
Daraus folgt: $a + 3a + 4a = 168$ m, also $8a = 168$ m, woraus man $a = 21$ m, also $b = 63$ m und $c = 84$ m erhält.

Deshalb können nur diese Längen die gestellten Bedingungen erfüllen. Wegen $63\text{m} = 3\cdot 21\text{m}$, $84\text{m} = 4\cdot 21\text{m}$ und $21\text{m} + 63\text{m} + 84\text{m} = 168\text{m}$ haben sie die geforderten Eigenschaften tatsächlich.

**Aufgabe 130611:**
Eine Strecke von 7 m Länge soll so in vier Teile geteilt werden, dass die zweite Teilstrecke 40 cm länger als die erste, die dritte 40 cm länger als die zweite und die vierte 40 cm länger als die dritte ist.
Untersuche, ob eine solche Einteilung möglich ist, und gib, wenn dies der Fall ist, die Längen jeder der vier Teilstrecken an!

**Lösung von Steffen Polster:**
Die Längen der vier Teilstücke seien $x$, $x + 40$, $x + 80$ und $x + 120$ (alles in cm), womit für die Summe ergibt:

$$x + x + 40 + x + 80 + x + 120 = 4x + 240 = 700 \text{ cm} \qquad \Rightarrow \qquad x = 115 \text{ cm}$$

Das erste Teilstück ist somit 115 cm lang, das zweite 155 cm, das dritte 195 cm und das vierte 235 cm.

**Aufgabe 140612:**
Bernd und Monika unterhalten sich über die letzte Zusammenkunft ihrer Arbeitsgemeinschaft Junger Mathematiker, bei der genau 6 Jungen mehr anwesend waren als Mädchen.
Bernd meint, dass bei dieser Veranstaltung von den 25 Zirkelteilnehmern genau 2 gefehlt hätten.
Monika entgegnet nach einigem Überlegen, dass das nicht stimmen könne.
Wer von beiden hat recht?

**Lösung von Steffen Polster:**
Bei der letzten Zusammenkunft waren 25 - 2 = 23 23 Teilnehmer anwesend. Ist die Anzahl der Mädchen $x$, so waren, nach Bernd, $x + 6$ Jungen da, d. h.

$$x + (x + 6) = 23 \qquad \rightarrow \qquad x = 8{,}5$$

Das Ergebnis ist nicht ganzzahlig, womit klar ist, dass Monika recht hat. Bernds Aussage ist nicht korrekt.

**Aufgabe 150611:**
Die Volksrepublik Polen lieferte vom 6. Dezember 1974 (erster Liefertag) bis zum 18. Dezember 1974 (letzter Liefertag) eine Gesamtmenge von 132000 t Steinkohle und 24000 t Koks auf dem Wasserwege in die Hauptstadt der DDR. Die Lieferung erfolgte auf Schleppkähnen mit einem Fassungsvermögen von je 600 t.
Wie viel dieser Kahnladungen trafen im angegebenen Zeitraum durchschnittlich an jedem Tag in Berlin ein (wobei Sonntage als Liefertage mitgerechnet seien)?

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Wegen 132000 + 24000 = 156000 betrug die gelieferte Gesamtmenge 156000 t. Wegen 132000 : 600 = 220, 24000 : 600 = 40 und 220 + 40 = 260 oder: wegen 156000 : 600 = 260 waren das insgesamt 260 Kahnladungen.
Da es sich vom 6. bis 18. Dezember 1974 um insgesamt 13 Liefertage handelte, trafen wegen 260 : 13 = 20 täglich durchschnittlich 20 dieser Kahnladungen aus der Volksrepublik Polen in Berlin ein.

**Aufgabe 150613:**
Im Jahre 1770 gab der Schweizer Mathematiker Leonard Euler ein Lehrbuch der Algebra heraus, das mehr als 100 Jahre lang zu den meistgelesenen Algebrabüchern gehörte. Eine Aufgabe aus diesem Lehrbuch lautet:

Die Zahl 25 ist so in zwei Summanden zu zerlegen, dass der größere der beiden Summanden 49 mal so groß ist wie der andere.

Untersuche, ob eine solche Zerlegung möglich ist, und ermittle, wenn dies der Fall ist, die beiden dabei auftretenden Summanden!

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Wenn eine solche Zerlegung möglich ist, so gilt für sie:
Bezeichnet man den kleineren der beiden Summanden mit $x$, dann lautet der größere $49x$, und es gilt $x + 49x = 25$, woraus man $x = \frac{1}{2}$ erhält.

Also kann nur eine Zerlegung die geforderten Eigenschaften haben, in der der kleinere Summand $\frac{1}{2}$ und der größere $49 \cdot \frac{1}{2} = \frac{49}{2}$ lautet.
Dies ist auch in der Tat eine Zerlegung der gesuchten Art; denn für diese beiden Summanden ist $\frac{1}{2} + \frac{49}{2} = 25$.

**Aufgabe 150614:**
Eine Pioniergruppe sammelt Altpapier. Bei der Abrechnung stellte sich heraus, dass das Sammelergebnis der letzten beiden Tage ein Viertel der insgesamt erreichten Menge betrug, und zwar waren am letzten Tag 27 kg gesammelt worden und am vorletzten Tag 6 kg weniger als am letzten Tag.

Wie viel Kilogramm betrug die insgesamt gesammelte Menge Altpapier?

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Am letzten Tag waren 27 kg gesammelt worden, am vorletzten Tag wegen $27 - 6 = 21$, also 21 kg.
Wegen $27 + 21 = 48$ betrug das Sammelergebnis der letzten beiden Tage daher 48 kg. Da dies ein Viertel der insgesamt erreichten Menge war, ist diese das Vierfache von 48 kg, wegen $4 \cdot 48 = 192$ also 192 kg Altpapier.

**Aufgabe 170613:**
Jeder der 27 Pioniere der Klasse 6a sammelte durchschnittlich 5 Flaschen und 8 kg Altpapier. Für jede Flasche gab es 5 Pfennig und für je 1 kg Altpapier 15 Pfennig.
Die Klasse 6b sammelte Altstoffe für insgesamt 25 M.
Reicht das so erworbene Geld für die gemeinsame Eisenbahnfahrt beider Klassen zum Wandertag, die 60 M kosten wird?

**Lösung von Steffen Polster:**
In der Klasse 6a wurden $27 \cdot 5 = 135$ Flaschen und $27 \cdot 8\text{kg} = 216\text{kg}$ Altpapier gesammelt. Dies sind $135 \cdot 5\text{Pf} + 216 \cdot 15\text{Pf} = 675\text{Pf} + 3240\text{Pf} = 3915\text{Pf} = 39{,}15\text{M}$.

Zusammen haben beiden Klassen $39{,}15\text{M} + 25\text{M} = 64{,}15\text{M}$ gesammelt. Der Geldbetrag genügt für die gemeinsame Eisenbahnfahrt.

**Aufgabe 190612:**
Ulrike möchte vier natürliche Zahlen in einer bestimmten Reihenfolge angeben, so dass folgendes gilt:

Die zweite Zahl ist um 1 kleiner als das Doppelte der ersten Zahl,
die dritte Zahl ist um 1 kleiner als das Doppelte der zweiten Zahl,
die vierte Zahl ist um 1 kleiner als das Doppelte der dritten Zahl,
die Summe der vier angegebenen Zahlen beträgt 79.

Zeige, wie man alle Zahlen finden kann, die diese Bedingungen erfüllen! Überprüfe, ob die gefundenen Zahlen alle Bedingungen erfüllen!

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Angenommen, vier Zahlen erfüllen die gestellten Bedingungen.
Die erste Zahl sei mit $a$ bezeichnet. Die zweite, Zahl lautet dann $2a - 1$, die dritte Zahl $2(2a - 1) - 1 = 4a - 2 - 1 = 4a - 3$, die vierte Zahl $2(4a - 3) - 1 = 8a - 6 - 1 = 8a - 7$. Daher ist die Summe der vier Zahlen

$$a + 2a - 1 + 4a - 3 + 8a - 7 = 15a - 11$$

Aus $15a - 11 = 79$ folgt $15a = 90$. Daraus folgt, dass die erste Zahl $a = 6$ lautet, die zweite, dritte, vierte also 11, 21 bzw. 41.

Daher können nur die Zahlen 6, 11, 21, 41 (in dieser Reihenfolge) die Bedingungen erfüllen. Die folgende Überprüfung zeigt, dass sie alle geforderten Bedingungen erfüllen:
Es gilt: $2 \cdot 6 - 1 = 11$, $2 \cdot 11 - 1 = 21$, $2 \cdot 21 - 1 = 41$ und $6 + 11 + 21 + 41 = 79$.

**Aufgabe 210613:**
Die drei Schülerinnen Bianka, Heike und Kerstin ernteten im Schulgarten Weißkohl, insgesamt 128 Kohlköpfe. Dabei hat Bianka genau 8 Kohlköpfe mehr als Heike geerntet, und Kerstin hat genau 5 Kohlköpfe weniger als Bianka geerntet.
Wie viel Kohlköpfe hat jedes der drei Mädchen insgesamt geerntet?

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Hätte Heike 8 Kohlköpfe mehr und Kerstin 5 Kohlköpfe mehr geerntet, so wären es wegen $128+8+5 = 141$ insgesamt 141 Kohlköpfe gewesen. Andererseits hätten dann alle drei Mädchen gleich viele Kohlköpfe geerntet, nämlich jede so viele wie Bianka.
Wegen $141 : 3 = 47$ hat also Bianka 47 Kohlköpfe geerntet, wegen 47 - 8 = 39 hat Heike 39 Kohlköpfe geerntet, wegen 47 - 5 = 42 hat Kerstin 42 Kohlköpfe geerntet.

**Aufgabe 230612:**
Eine Brigade kaufte für ihre Patenklasse drei Bücher und zwei Bälle. Eine andere Brigade kaufte drei Bücher und vier Bälle. Alle Bücher kosteten gleich viel. Alle Bälle kosteten ebenfalls gleich viel.
Die erste Brigade bezahlte 15 Mark, die zweite Brigade bezahlte 24 Mark.
Wie viel Mark kostete ein Buch? Wie viel Mark kostete ein Ball?

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Die zweite Brigade kaufte genau zwei Bälle mehr und bezahlte (wegen 24 - 15 = 9) genau 9 Mark mehr als die erste Brigade. Folglich kostet ein Ball (wegen $9 : 2 = 4,50$) genau 4,50 Mark.
Also zahlte die erste Brigade genau 9 Mark für die Bälle. Wegen 15 - 9 = 6 zahlte sie für die drei Bücher genau 6 Mark, also kostete ein Buch genau 2 Mark.

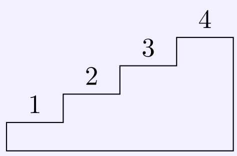
**Aufgabe 270614:**
Kerstin zerschneidet ein rechteckiges Stück Papier so, dass der Schnitt vom Mittelpunkt einer Rechteckseite zum Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite verläuft. Es entstehen zwei kleinere Rechtecke; Kerstin legt sie genau übereinander, so dass nur noch ein kleineres Rechteck zu sehen ist, das aus zwei Schichten besteht.
Kerstin zerschneidet dieses aus zwei Schichten bestehende Rechteck in gleicher Weise und legt wieder die entstandenen rechteckigen Papierstücke genau übereinander. Entsprechend wird fortgesetzt: übereinanderliegende Rechtecke werden zerschnitten, die entstandenen Papierstücke werden übereinandergelegt.
(Natürlich geht das nicht beliebig oft; denn der Papierstapel, der zerschnitten werden soll, wird immer dicker.)

(1) Nenne die Anzahl der Papierstücke, die nach dem
a) zweiten, b) dritten, c) vierten Zerschneiden entstanden sind!

(2) Angenommen, das Zerschneiden wäre beliebig oft möglich. Warum könnten dann trotzdem niemals nach einen Schnitt genau 160 Papierstücke entstehen?

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
(1) Die Anzahl ist a) 4, b) 8, c) 16.
(2) Als weitere Anzahlen nach dem fünften, sechsten, ... Schnitt usw. treten auf: 32, 64, 128, 256, ... und dann noch größere Anzahlen (nämlich jeweils das Doppelte der vorangehenden Anzahl). Daher kommt unter den auftretenden Anzahlen die Zahl 160 nicht vor.

**Aufgabe 280614:**
Die Treppe in der Abbildung besteht aus vier Stufen. Um diese vierstufige Treppe hinaufzugehen, darf man jeweils mit einem Schritt entweder genau eine oder genau zwei Stufen nach oben steigen. (Eine hiernach mögliche Schrittfolge lautet z. B. 1, 3, 4.)




a) Gib für diese Treppe alle möglichen Schrittfolgen an! Wie viel sind es insgesamt?
b) Gib für eine dreistufige Treppe alle möglichen Schrittfolgen an, ebenso für eine zweistufige Treppe und für eine einstufige Treppe!
c) Jemand behauptet: „Man kann die Anzahl aller möglichen Schrittfolgen für eine vierstufige Treppe durch eine einfache Rechnung finden, wenn man die Anzahl aller möglichen Schrittfolgen für eine dreistufige Treppe und die Anzahl aller möglichen Schrittfolgen für eine zweistufige Treppe kennt.“ Gib eine solche einfache Rechnung an! Schreibe sie in Form einer Gleichung!
d) Schreibe entsprechend eine Gleichung, mit der sich die Anzahl aller möglichen Schrittfolgen für eine dreistufige Treppe aus den entsprechenden Anzahlen für eine zweistufige und für eine einstufige berechnen lässt!
e) Wie kommt es, dass die in c) und d) gefundenen Beziehungen gelten?
f) Gib die Anzahl aller möglichen Schrittfolgen für eine fünfstufige und für eine sechsstufige Treppe an!

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
a) Alle möglichen Schrittfolgen für die vierstufige Treppe sind:

$$1,2,3,4; \quad 1,2,4; \quad 1,3,4; \quad 2,3,4; \quad 2,4$$

b) Alle möglichen Schrittfolgen für eine dreistufige Treppe sind:

$$1,2,3; \quad 1,3; \quad 2,3$$

Alle möglichen Schrittfolgen für eine zweistufige Treppe sind: $1,2;2$, Für eine einstufige Treppe gibt es genau die Schrittfolge 1.
c) Die Anzahl der Schrittfolgen bei einer vierstufigen Treppe ist gleich der Summe der Anzahlen der Schrittfolgen bei der dreistufigen und der zweistufigen Treppe: 5 = 3 + 2.

d) Die Anzahl der Schrittfolgen bei einer dreistufigen Treppe ist gleich der Summe der Anzahlen der Schrittfolgen bei der zweistufigen und der einstufigen Treppe: 3 = 2 + 1.

e) Um in der angegebenen Weise die vierstufige Treppe hinaufzugehen, kann man entweder mit dem ersten Schritt nur eine Stufe steigen und hat dann noch drei Stufen vor sich, oder man kann mit dem ersten Schritt zwei Stufen nehmen und hat dann nur noch zwei Stufen vor sich.

Im ersten Fall ist die Anzahl der möglichen Fortsetzungen gleich der Anzahl der Schrittfolgen bei einer dreistufigen Treppe, und im zweiten Fall ist sie gleich der Anzahl der Schrittfolgen bei einer zweistufigen Treppe. Folglich ist die Anzahl aller möglichen Schrittfolgen bei der vierstufigen Treppe gleich der Summe der Anzahlen möglicher Schrittfolgen bei der dreistufigen und der zweistufigen Treppe.

f) Entsprechend folgt: Die Gleichung 8 = 5 + 3 führt zur Anzahl 8 der Schrittfolgen bei einer fünfstufigen Treppe; die Gleichung 13 = 8 + 5 führt zur Anzahl 13 der Schrittfolgen bei einer sechsstufigen Treppe.

**Aufgabe 300613:**
Lina kauft 7 Bleistifte und 8 Hefte ein und stellt dabei fest, dass 7 Bleistifte teurer als 8 Hefte sind.
Was ist teurer: 10 Bleistifte und 2 Hefte oder 11 Hefte und 2 Bleistifte?
Begründe deine Antwort!

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Antwort: 10 Bleistifte und 2 Hefte sind teurer als 11 Hefte und 2 Bleistifte.

Begründung: Ist $b$ der Preis für einen Bleistift und $h$ der Preis für ein Heft, so gilt nach Linas Feststellung $7b > 8h$. (1) Daraus folgt erst recht $7b > 7h$, (2) also $b > h$. (3)

Aus (1) und (3) ergibt sich $8b > 9h$. (4)
Vergrößert man nun jeweils sowohl $8b$ als auch $9h$ um $2b + 2h$, so folgt $10b + 2h > 2b + 11h$, wie in der Antwort angegeben.

**Aufgabe 310613:**
Elke, Regina, Gerd und Joachim vergleichen ihre Briefmarkensammlungen. Sie bemerken:

(1) Joachim hat mehr Briefmarken als Gerd.
(2) Elke und Regina haben zusammen genau so viele Briefmarken, wie Joachim und Gerd zusammen haben.
(3) Elke und Joachim haben zusammen weniger Briefmarken als Regina und Gerd zusammen haben.

Stelle fest, ob diese Angaben nur durch eine Reihenfolge für die Anzahlen von Elkes, Reginas, Gerds und Joachims Briefmarken erfüllt werden können!
Wenn das der Fall ist, ermittle diese Reihenfolge, nach fallenden Anzahlen geordnet!

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Bezeichnen $E$, $R$, $G$, $J$ die Anzahlen der Briefmarken von Elke, Regina, Gerd bzw. Joachim, so folgt aus den Angaben

$$J > G, \quad (1) \qquad E + R = J + G, \quad (2) \qquad E + J < R + G \quad (3)$$

Vermehrt man von den beiden Zahlen $E+J$ und $R+G$ in (3) sowohl die kleinere als auch die größere um die in (2) auf beiden Seiten genannte Zahl, so folgt $2E+R+J<R+J+2G$.
Dies ist aber nur möglich, wenn $E<G$ (4) gilt. Hiernach kann die Gleichung (2) nur gelten, wenn für die anderen darin auftretenden Summanden $R>J$ (5) gilt. Mit (5), (1), (4) ist gezeigt, dass die Angaben nur durch die Reihenfolge $R>J>G>E$ erfüllt werden können.

## II Runden 2 & 3

**Aufgabe 040621:**
Ein Rohr von 10 m Länge soll senkrecht zur Achse so zerschnitten werden, dass der eine Teil fünfmal so lang wie der andere ist.
Wie lang werden die Teile?

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Ansatz: $x+5x=10$ ergibt $8\frac{1}{3}$ m und $1\frac{2}{3}$ m.

**Aufgabe 040623:**
Ein rechteckiger Schulgarten soll eingezäunt werden. Auf jeder der kürzeren Seiten, die jeweils je 40 m lang sind, stehen 21 Zementsäulen, auf den längeren jeweils 15 mehr. Der Abstand zwischen je zwei benachbarten Säulen ist gleich. Zwischen zwei dieser Säulen wird ein Tor eingebaut.

Wie hoch sind die Kosten, wenn 1 m Zaun 9,50 MDN, 1 Säule 11,00 MDN und das Tor 64,00 MDN kosten?
Die Dicke der Säulen wird dabei nicht berücksichtigt.

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
218 m Zaun kosten 2071 MDN, 1 Tor kostet 64 MDN und 110 Zementsäulen kosten 1210 MDN. In der Summe sind dies 3345 MDN.

**Aufgabe 050621:**
In einer Möbelfabrik wurde die Produktion von Tischen monatlich um 10 Tische gesteigert. Die Jahresproduktion betrug 1920 Tische.
Wie viel Tische wurden im Juni und wie viel im Dezember hergestellt?

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Bezeichnet man die Anzahl der im Januar produzierten Tische mit $x$, so kann man folgende Aufstellung anfertigen:

| Monat | Anzahl der produzierten Tische |
|---|---|
| Januar | $x$ |
| Februar | $x+10$ |
| März | $x+20$ |
| April | $x+30$ |
| ... | |
| Dezember | $x+110$ |
| | $12x+660$ |

Wäre die Produktion nicht gesteigert worden, d. h., wäre in jedem Monat die gleiche Anzahl wie im Januar produziert werden, so hätte die Anzahl der im ganzen Jahr produzierten Tische $1960-660=1260$ betragen.
Die Anzahl der im Januar angefertigten Tische beträgt also $1260:12=105$ und daher die der im Juni hergestellten Tische $105+50=155$ und die der im Dezember fabrizierten Tische $105+110=215$.

**Aufgabe 060621:**
Eine Strecke von 20 m wird in drei Teilstrecken geteilt. Die erste Teilstrecke ist doppelt so lang wie die zweite, und die Länge der dritten Teilstrecke beträgt das Dreifache der Länge der ersten Teilstrecke. Berechne die Längen der einzelnen Teilstrecken!

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Bezeichnet man die Länge der zweiten Teilstrecke mit $a$, dann hat die erste Teilstrecke die Länge $2a$ und die dritte Teilstrecke die Länge $6a$. Die Länge der Gesamtstrecke beträgt also

$$a + 2a + 6a = 9a$$

Das sind laut Aufgabe 20 m. Für die Länge der zweiten Teilstrecke gilt daher $20 : 9 = \frac{20}{9}$, für die Länge der ersten Teilstrecke $\frac{40}{9}$ und für die Länge der dritten Teilstrecke $\frac{40}{3}$.
Die Längen der einzelnen Teilstrecken sind also $2\frac{2}{9}$ m, $4\frac{4}{9}$ m und $13\frac{1}{3}$ m.

**Aufgabe 080622:**
Während der Sommerferien besuchte Monika die Hauptstadt der UdSSR. Für ihre Mathematikarbeitsgemeinschaft brachte sie unter anderem folgende Aufgabe mit:

Im „Gorki“-Ring der Moskauer Untergrundbahn befinden sich vier Rolltreppen von unterschiedlicher Länge.
Die Gesamtlänge der beiden Rolltreppen mittlerer Länge beträgt 136 m, wobei die Länge der einen um 8 m größer ist als die der anderen. Die Länge der längsten Rolltreppe beträgt 3 10 und die der kürzesten 3 14 von der Gesamtlänge aller vier Rolltreppen.
Berechne die Länge jeder einzelnen Rolltreppe!

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Es sei $a$ die Maßzahl der längsten, $b$ die der zweitlängsten, $c$ die der drittlängsten und $d$ die der kürzesten Rolltreppe sowie $g$ die Maßzahl der Gesamtlänge aller Rolltreppen.
Dann gilt: $b + c = 136$ und $b = c + 8$. Daraus folgt: $b = 72$ und $c = 64$.
Für die Gesamtlänge der längsten und der kürzesten Rolltreppe gilt:

$$a + d = \frac{3}{10}g + \frac{3}{14}g = \frac{36}{70}g$$

dann ergibt sich:

$$136 = b + c = g - (a + d) = \frac{34}{70}g$$

Daraus folgt: $\frac{1}{70}g = 4$ und demnach $\frac{3}{10}g = 84$ und $\frac{3}{14}g = 60$.
Die Längen der Rolltreppen betragen 84 m, 72 m, 64 m und 60 m.

In der Tat ergibt sich als Probe $72 + 64 = 136$, $72 = 64 + 8$, $84 = \frac{3}{10}(84 + 72 + 64 + 60)$ und $60 = \frac{3}{14}(84 + 72 + 64 + 60)$.

**Aufgabe 090621:**
Klaus nahm als Mitglied der Sektion Radsport einer Betriebssportgemeinschaft an einem Bahnrennen teil. Nach dem Rennen wurde Klaus von seinem Bruder Reiner nach dem Ausgang des Rennens gefragt. Klaus sagte:

„Als ich den Zielstrich überfuhr, war kein Fahrer neben mir; genau ein Drittel der beteiligten Fahrer hatte das Ziel schon erreicht, und genau die Hälfte aller Teilnehmer lag noch hinter mir.“

Gib an, welchen Platz Klaus in diesem Rennen belegte und wie viel Fahrer insgesamt an dem Rennen teilnahmen!

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
(I) Nach Aufgabenstellung waren (wegen $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$) alle Fahrer außer Klaus so viel, wie $\frac{5}{6}$ aller teilnehmenden Fahrer. Klaus stellte daher $\frac{1}{5}$ aller Teilnehmer dar.
Das ist nur möglich, wenn die Teilnehmerzahl 6 betrug.

(II) Daher erreichten wegen $\frac{1}{3} \cdot 6 = 2$ genau 2 der Teilnehmer vor Klaus das Ziel, so dass Klaus den 3. Platz belegte.

**Aufgabe 110623:**
Von dem berühmten Mathematiker Leonhard Euler (1707 bis 1783) stammt folgende Aufgabe:

Zerlege die Zahl 25 so in zwei Summanden, dass der größere Summand 49 mal so groß ist wie der kleinere Summand.

Hinweis: Die Summanden brauchen nicht natürliche Zahlen zu sein.

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Soll der größere Summand das 49-fache des kleineren Summanden betragen, so muss die Summe das 50-fache des kleineren Summanden sein. Diesen erhält man daher, wenn man die Summe durch 50 dividiert; er lautet somit $25 : 50 = \frac{1}{2}$, und hiernach muss der größere Summand $49 \cdot \frac{1}{2} = \frac{49}{2}$ sein.

In der Tat beträgt die Summe von diesen beiden Summanden (von denen der größere 49 mal so groß ist wie der kleinere) $\frac{1}{2} + \frac{49}{2} = 25$.

**Aufgabe 110624:**
Wenn man ein Drittel von Rainers Spargeld zu einem Fünftel dieses Spargeldes addiert, dann ist die Summe genau 7 Mark mehr als die Hälfte seines Spargeldes.
Wie viel Mark hat Rainer hiernach insgesamt gespart?

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Laut Aufgabe besitzt Rainer Spargeld. Dessen Betrag sei $x$ Mark. Dann gilt

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{5} = \frac{x}{2} + 7$$

Hieraus folgt nach Multiplikation mit 30 weiter $10x + 6x = 15x + 210$ und daraus $x = 210$.
Also hat Rainer insgesamt 210 Mark gespart.

**Aufgabe 170623:**
In der Dreherei eines Betriebes dreht man Einzelteile aus Bleirohlingen. Jeder Bleirohling ergibt ein Einzelteil.
Die Abfallspäne, die man bei der Anfertigung von je 6 Einzelteilen erhält, kann man schmelzen und daraus noch einen Bleirohling anfertigen. (Jede kleinere Menge von Abfallspänen ist hierfür zu wenig.)

Welches ist die größte Anzahl von Einzelteilen, die man hiernach insgesamt aus 36 Rohlingen anfertigen kann?

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Aus 36 Rohlingen ergeben sich zunächst 36 Einzelteile; die Abfallspäne von je 6 Rohlingen ergeben dann

noch einen Rohling, d. h. aus den Abfallspänen von 36 Rohlingen kann man 6 neue Rohlinge anfertigen.

Aus ihnen lassen sich noch einmal 6 Einzelteile herstellen. Die dabei anfallenden Späne ergeben einen weiteren Rohling. Fertigt man aus ihm wieder ein Einzelteil an, so fallen zwar wieder Späne an, diese lassen sich aber nicht mehr (nach Einschmelzen) zur Herstellung eines weiteren Rohlings verwenden.

Also beträgt die gesuchte Anzahl von Einzelteilen $36 + 6 + 1 = 43$.

**Aufgabe 180623:**
In einer Verkaufsstelle wird ein Artikel in drei verschiedenen Ausführungen angeboten, wobei die Ausführungen unterschiedlich im Preis sind.
Beate kauft von jeder Ausführung dieses Artikels ein Stück und bezahlt insgesamt 10,50 M. Hätte sie drei Stück von der billigsten Ausführung gekauft, dann hätte sie 0,75 M gespart.
Hätte sie dagegen drei Stück von der teuersten Ausführung gekauft, dann hätte sie 0,75 M mehr bezahlen müssen.
Wie viel kostet jede der drei Ausführungen dieses Artikels?

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Wegen 1050 - 75 = 975 und 975 : 3 = 325 kostet die billigste Ausführung des Artikels 3,25 M.
Wegen 1050 + 75 = 1125 und 1125 : 3 = 375 kostet die teuerste Ausführung des Artikels 3,75 M.
Wegen 1050 - 325 - 375 = 350 kostet die dritte Sorte 3,50 M.

**Aufgabe 190622:**
In einem Regal einer HO-Verkaufsstelle liegen sechs Geschenkartikel zum Preis von 15 M, 16 M, 18 M, 19 M, 20 M bzw. 31 M, von jeder Sorte genau ein Stück.

Ein Käufer kaufte genau zwei dieser Geschenke, ein anderer genau drei. Der zweite Käufer hatte doppelt soviel zu bezahlen wie der erste.
Ermittle aus diesen Angaben, welche der sechs Geschenke vom ersten und welche vom zweiten Käufer gekauft wurden!

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Der Gesamtpreis aller sechs Geschenke beträgt 119 M. Da genau fünf Geschenke gekauft wurden, blieb genau eines zurück. War es das zu 15 M, 16 M, 18 M, 19 M, 20 M bzw. 31 M, so hatten beide Käufer zusammen 101 M, 103 M, 101 M, 100 M, 99 M bzw. 88 M gezahlt.

Zahlte der erste Käufer $x$ Mark, so bezahlte der zweite $2x$ Mark. Die von beiden gezahlte Summe, $3x$ Mark, muss folglich durch 3 teilbar sein. Das trifft nur für den Betrag von 99 M zu.
Also wurde das Geschenk zu 20 M nicht gekauft; ferner ist $3x = 99$, der erste Käufer bezahlte 33 M.
Hätte er als eines seiner beiden Geschenke das zu 16 M, 19 M oder 31 M gekauft, so müsste das andere 17 M, 14 M bzw. 2 M gekostet haben; diese Preise kamen aber nicht vor.
Also hat der erste Käufer die Geschenke zu 15 M und 18 M gekauft, der zweite Käufer folglich die Geschenke zu 16 M, 19 M und 31 M.

**Aufgabe 190623:**
Zum Montieren eines Gerätes sind insgesamt 110 Stunden geplant. Die Montage wird in drei Abschnitten erfolgen.
Für den zweiten Abschnitt ist genau dreimal soviel Zeit vorgesehen wie für den ersten; der dritte Abschnitt soll genau halb so lange dauern wie der zweite.
Untersuche, welche Zeiten man hiernach für jeden einzelnen Abschnitt zu planen hat!
Überprüfe, ob diese Zeiten alle gestellten Forderungen erfüllen!

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Wenn die Forderungen erfüllt sind und dabei der erste Abschnitt $x$ Stunden dauert, so dauert der zweite $3x$ Stunden und der dritte $\frac{3}{2}x$ Stunden. Daraus folgt

$$x + 3x + 32x = 110 \qquad \rightarrow \qquad x = 20$$

Also können die Forderungen nur dadurch erfüllt werden, dass man für den ersten Abschnitt 20 Stunden und somit für den zweiten 60 Stunden und für den dritten 30 Stunden plant.
Diese Zeiten erfüllen die Forderungen; denn 60 Stunden sind dreimal so viel Zeit wie 20 Stunden, 30 Stunden dauern halb so lange wie 60 Stunden, und wegen $20 + 60 + 30 = 110$ ergibt sich die vorgesehene Gesamtzeit.

**Aufgabe 200622:**
Ein leeres quaderförmiges Wasserbecken ist 22 m lang, 6 m breit und 2 m tief. Beim Füllen des Beckens fließen in jeder Minute 900 l Wasser in das Becken.
Nach welcher Zeit ist das Becken bis zu einer Höhe von genau 1,50 m gefüllt?
Wir nehmen an, dass der Boden des Wasserbeckens genau waagerecht ist.

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Wegen $22 \cdot 6 \cdot 1{,}5 = 22 \cdot 9 = 198$ enthält das bis zur Höhe von 1,50 m gefüllte Becken 198 $m^3$ Wasser.
Da 1 $m^3$ = 1000 l sind, enthält das Becken also 198000 l Wasser. Wegen 198000 : 900 = 220 ist es somit nach genau 220 Minuten bis zur angegebenen Höhe gefüllt.

**Aufgabe 210623:**
Im Laufe eines Jahres ist in einem Möbelwerk die Zahl der hergestellten Tische monatlich um 10 angewachsen. Im Laufe des ganzen Jahres wurden 1920 Tische hergestellt.
a) Wie viel Tische wurden im Monat Juni hergestellt ?
b) Wie viel Tische wurden im Monat Dezember hergestellt?

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
In dem Betrieb wurden im Februar 10, im März 20, ..., im Juni 50, ..., im Dezember 110 Tische mehr hergestellt als im Monat Januar. Wegen

$$10 + 20 + 30 + 40 + 50 + 60 + 70 + 80 + 90 + 100 + 110 = 660$$

sind das insgesamt 660 Tische mehr, als wenn die Produktionssteigerung nicht erfolgt wäre, d. h. in allen 12 Monaten gleich viele Tische hergestellt worden wären, ebensoviele wie im Januar.
Wegen 1920 - 660 = 1260 und 1260 : 12 = 105 wurden im Januar somit 105 Tische produziert.

a) Aus 105 + 50 = 155 folgt, dass im Juni 155 Tische angefertigt wurden.
b) Wegen 105 + 110 = 215 wurden im Dezember 215 Tische hergestellt.

**Aufgabe 220623:**
Die Zahl 32 soll in eine Summe aus vier natürlichen Zahlen zerlegt werden, von denen folgende Eigenschaft gefordert wird.
Wenn man zum ersten Summanden 3 addiert, vom zweiten 3 subtrahiert, den dritten mit 3 multipliziert und den vierten durch 3 dividiert, dann sind die vier Ergebnisse, die man erhält, alle gleich groß.
Nenne vier derartige Summanden!
Überprüfe, dass sie alle Forderungen erfüllen! Beweise, dass die Forderungen durch keine anderen Summanden erfüllt werden können!

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Geeignete Summanden sind 3, 9, 2 und 18 in dieser Reihenfolge; denn es gilt $3 + 9 + 2 + 18 = 32$ sowie

$3 + 3 = 9 - 3 = 2 \cdot 3 = 18 : 3 = 6$.

Wäre der erste Summand eine kleinere (bzw. eine größere) Zahl als 3, so ergäbe sich durch Addition von 3 eine kleinere (bzw. eine größere) Zahl als 6. Dann müsste der zweite Summand kleiner (bzw. größer) als 9, der dritte kleiner (bzw. größer) als 2 und der vierte kleiner (bzw. größer) als 18 sein. Hiernach wäre die Summe kleiner (bzw. größer) als 32, was der Forderung der Aufgabe widerspricht.

Also muss der erste Summand gleich 3 sein, woraus folgt, dass auch für die übrigen Summanden keine anderen Zahlen als die oben angegebenen den Forderungen der Aufgabe entsprechen können.

**Aufgabe 240624:**
Rita experimentiert mit einer Balkenwaage.
(Mit einer solchen Waage kann man feststellen, ob der Inhalt einer Waagschale soviel wiegt wie der Inhalt der anderen Waagschale oder welcher dieser beiden Inhalte mehr wiegt als der andere.)
Rita hat 17 Kugeln, 6 Würfel und 1 Pyramide. Sie stellt fest:

(1) Jede Kugel wiegt soviel wie jede der anderen Kugeln.
(2) Jeder Würfel wiegt soviel wie jeder der anderen Würfel.
(3) Die Pyramide und 5 Würfel wiegen zusammen soviel wie 14 Kugeln.
(4) Ein Würfel und 8 Kugeln wiegen zusammen soviel wie die Pyramide.

Rolf fragt Rita, nachdem sie diese Feststellungen erhalten hat:
„Wie viele Kugeln wiegen soviel wie die Pyramide?“
Beweise, dass man Rolfs Frage bereits eindeutig mit Hilfe der Feststellungen (1), (2), (3), (4) beantworten kann, ohne dass ein nochmaliges Wägen nötig ist! Wie lautet die Antwort?

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Ist $k$, $w$ bzw. $p$ das Gewicht einer Kugel, eines Würfels bzw. der Pyramide, so folgt aus (1) und (2), dass jede Kugel das Gewicht $k$ und jeder Würfel das Gewicht $w$ hat. Aus (3) und (4) folgt ferner

$$p + 5w = 14k \qquad (5)$$
$$w + 8k = p. \qquad (6)$$

Wegen (6) besagt (5) $w + 8k + 5w = 14k$, also $6w = 6k$ und folglich $w = k$. Hiernach ergibt sich aus (6) $9k = p$.
Damit ist bewiesen, dass man Rolfs Frage eindeutig mit Hilfe der Feststellungen (1), (2), (3), (4) beantworten kann. Die Antwort lautet: 9 Kugeln wiegen soviel wie die Pyramide.

**Aufgabe 280622:**
Frau Müller und ihre Tochter Michaela, Frau Beyer und ihre Söhne Jan und Gerd sowie Frau Schulz mit ihren Kindern Steffi und Jens besuchen gemeinsam eine Veranstaltung. Frau Müller kauft die Eintrittskarten für alle und bezahlt 22 Mark.
Wie viel Geld müssen Frau Beyer und Frau Schulz der Frau Müller geben, um die Eintrittskarten für sich und ihre Kinder zu bezahlen, wenn für Michaela, Jan, Gerd, Steffi und Jens jeweils nur der halbe Eintrittspreis wie für einen Erwachsenen entrichtet werden musste?

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Frau Müller kauft Eintrittskarten für 3 Erwachsene und 5 Kinder. Weil Kinder nur halbe Preise zahlen, zahlt Frau Müller (wegen $3 \cdot 2 = 6$ und $6 + 5 = 11$) soviel an Eintritt, wie für 11 Kinder zu zahlen wäre. Hieraus folgt wegen $22 : 11 = 2$, dass für jedes Kind 2 Mark zu entrichten sind.

Wegen $2 \cdot 2 = 4$ kostet der Eintritt für einen Erwachsenen 4 Mark. Frau Beyer hat somit (wegen $1 \cdot 4 + 2 \cdot 2 = 8$) an Frau Müller 8 Mark zu bezahlen, ebenso Frau Schulz.

**Aufgabe 320624:**
Ein rechteckiges Kinderzimmer ist 4 m und 40 cm lang sowie 3 m und 30 cm breit. Es hat genau eine Tür, diese ist 90 cm breit. Thomas will an die Wände dieses Zimmers eine neue Fußbodenleiste anbringen. Er berechnet durch Berücksichtigung der genannten Maßangaben die erforderliche Gesamtlänge an Leistenholz.
Das laufende Meter Leistenholz kostet 5 DM. Thomas kauft die von ihm berechnete Gesamtlänge und bezahlt mit einem Hundertmarkschein.
Wie viel Geld erhält er zurück?

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Thomas berechnet unter Berücksichtigung der Länge a = 4,40 m, der Breite b = 3,30 m des Zimmers und der Türbreite t = 0,90 m die erforderliche Gesamtlänge $2a + 2b - t$ = 8,80 m + 6,60 m - 0,90 m = 14,50 m.
Hierfür sind $5 \cdot 14{,}50$ DM = 72,50 DM zu zahlen. Also erhält Thomas 100 DM - 72,50 DM = 27,50 DM zurück.

**Aufgabe 340623:**
Nach folgenden Regeln lässt sich ein „Zahlenzug“ bilden:

- Im ersten „Waggon“ steht eine natürliche Zahl größer als 1.
- Steht in einem „Waggon“ eine gerade Zahl, so steht im nächsten „Waggon“ die halb so große Zahl.
- Steht in einem „Waggon“ eine ungerade Zahl größer als 1, so steht im nächsten „Waggon“ die um 1 kleinere Zahl.
- Steht in einem „Waggon“ die Zahl 1, so ist der „Zahlenzug“ mit diesem „Waggon“ beendet.

a) Nenne alle diejenigen „Zahlenzüge“, die aus genau 4 „Waggons“ bestehen!
Begründe auch, dass deine Aufzählung vollständig ist!
b) Welches ist die größtmögliche Zahl, die im ersten „Waggon“ eines „Zahlenzuges“ vorkommen kann, der aus genau 7 „Waggons“ besteht?
Nenne einen solchen „Zahlenzug“ mit dieser Anfangszahl und zeige, dass eine größere Anfangszahl nicht möglich ist!
c) Welches ist die kleinstmögliche Zahl, die im ersten „Waggon“ eines „Zahlenzuges“ vorkommen kann, der aus genau 7 „Waggons“ besteht? Nenne einen solchen „Zahlenzug“ mit dieser Anfangszahl und zeige, dass eine kleinere Anfangszahl nicht möglich ist!

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Für jeden „Zahlenzug“ gilt:
Im letzten „Waggon“ steht eine 1. Steht in einem „Waggon“ eine ungerade Zahl, so steht im vorangehenden „Waggon“ das Doppelte. Steht aber in einem „Waggon“ eine gerade Zahl, so steht im vorangehenden „Waggon“ entweder die um 1 größere Zahl oder das Doppelte.

(a) Hieraus folgt der Reihe nach:
Im vorletzten „Waggon“ steht eine 2, davor entweder eine 3 oder eine 4; vor der 3 steht eine 6; vor der 4 steht entweder eine 5 oder eine 8.
Damit ist als vollständige Aufzählung der „Zahlenzüge“ aus genau 4 „Waggon“ begründet:
$(6,3,2,1),(5,4,2,1),(8,4,2,1)$.

(b) Wählt man bei jeder geraden Zahl die Möglichkeit, als vorangehende Zahl das Doppelte zu nehmen, so erhält man als „Zahlenzug“ aus genau 7 „Waggon“: $(64,32,16,8,4,2,1)$.

Da das Verdoppeln einer Zahl, die größer als 1 ist, stets zu einem größeren Ergebnis führt als das Addieren von 1, ist eine größere Anfangszahl nicht möglich; damit ist als größtmögliche Anfangszahl 64 nachgewiesen.

(c) Im Anschluss an (a) folgt der Reihe nach:
Als fünftletzte Zahl sind genau möglich: Wenn sie ungerade ist, 7 und 9; wenn sie gerade ist, 10, 12, 16; als sechstletzte Zahl: ungerade 11, 13, 17; gerade 14, 18, 20, 24, 32.
Für die hierzu vorangehende Anfangszahl ist damit als kleinste ungerade Zahl 15, als kleinste gerade Zahl 22, also insgesamt 15 als kleinstmögliche Anfangszahl nachgewiesen. Der „Zahlenzug" hierzu lautet $(15, 14, 7, 6, 3, 2, 1)$.

**Aufgabe 340633:**
Schon vor 5000 Jahren gab es in Ägypten eine weit entwickelte Kenntnis der Bruchrechnung. Dabei wurden Stammbrüche bevorzugt; das sind Brüche, deren Zähler 1 lautet und deren Nenner eine natürliche Zahl ist.

(a) Gib je eine Möglichkeit an, wie man die Brüche $\frac{2}{7}$ und $\frac{3}{13}$ als Summe von mindestens zwei unterschiedlichen Stammbrüchen darstellen kann!
Die Anzahl der Summanden ist nicht vorgeschrieben; eine Begründung wird nicht verlangt.
(b) Stelle den Bruch $\frac{1}{36}$ derart als Summe von mindestens zwei Stammbrüchen dar, dass einer der Summanden so groß wie möglich ist! Erkläre, warum kein größerer Summand möglich ist!
(c) Löse dieselbe Aufgabe für $\frac{1}{n}$ statt $\frac{1}{36}$, wo $n$ eine beliebige natürliche Zahl größer als 1 ist!

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Beispiele zu (a) sind etwa:

$$\frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28} \qquad ; \qquad \frac{3}{13} = \frac{1}{6} + \frac{1}{26} + \frac{1}{39}$$

(b),(c) Es gilt

$$\frac{1}{36} - \frac{1}{37} = \frac{37-36}{36 \cdot 37} = \frac{1}{3332}, \qquad \text{also} \qquad \frac{1}{36} = \frac{1}{37} + \frac{1}{3332}$$

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n \cdot (n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}, \qquad \text{also} \qquad \frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}$$

Dabei hat der Summand $\frac{1}{37}$ (bzw. der Summand $\frac{1}{n+1}$ die verlangte Eigenschaft, dass kein größerer Stammbruch Summand in einer solchen Darstellung sein kann.

Beweis:
Unter den natürlichen Zahlen ist 37 (bzw. $n+1$) die nächstgrößere zu 36 (bzw. zu $n$), d. h.: Es gibt unter den natürlichen Zahlen, die größer als 36 (bzw. als $n$) sind, keine kleinere als 37 (bzw. $n+1$).
Daraus folgt:
Es gibt unter den Stammbrüchen, die (in einer gesuchten Darstellung als Summand auftreten und daher) kleiner als $\frac{1}{36}$ (bzw. als $\frac{1}{n}$) sein müssen, keinen größeren als $\frac{1}{37}$ (bzw. $\frac{1}{n+1}$).

**Aufgabe 340634:**
Vera erzählt ihrer Freundin Ute, sie habe die Kantenlänge eines Quaders gemessen und dabei folgendes bemerkt:

(1) Eine der Kanten ist doppelt so lang wie eine andere der Kanten.
(2) Die Summe der Längen aller zwölf Kanten des Quaders beträgt 320 cm.
(3) Genau zwei der sechs Seitenflächen des Quaders sind Quadrate.

Ute meint, durch diese Angaben sei eindeutig bestimmt, welche Kantenlängen bei diesem Quader auftreten.

Untersuche, ob Utes Meinung wahr ist!
Wenn sie wahr ist, gib die Kantenlängen an; wenn sie nicht wahr ist, gib alle Möglichkeiten an, die es für die Kantenlängen eines Quaders gibt, auf den Veras Angaben zutreffen!

Hinweis: Bei der Angabe der Kantenlängen eines Quaders brauchst du natürlich nicht zwölf Kantenlängen anzugeben, sondern es genügen die Längen etwa der drei Kanten, die an der Ecke des Quaders zusammentreffen.

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
I. Wenn $a$, $b$, $c$ die Maßzahlen der in cm gemessenen Längen von drei an einer Ecke zusammentreffenden Kanten eines Quaders sind, auf den Veras Aussagen (1), (2), (3) zutreffen, so folgt:

Nach (3) sind genau zwei der $a$, $b$, $c$ einander gleich; die Bezeichnungen lassen sich so wählen, dass $b = c$ gilt.
Nach (2) und weil jede der Kantenlängen $a$, $b$, $c$ genau 4 mal vorkommt, folgt daher $a+2b = 320 : 4 = 80$. (4)
Aus (1) folgt ferner: Es gilt entweder $a = 2b$ (5) oder $b = 2a$. (6)

Gilt (4) und (5), so folgt $a + a = 80$, also $a = 40$, $b = 20$, $c = 20$. (7)
Gilt aber (4) und (6), so folgt $a + 4a = 80$, $5a = 80$, also $a = 16$, $b = 32$, $c = 32$. (8)

II. Die in (7) genannten Zahlen erfüllen (4) und (5), die in (8) genannten Zahlen erfüllen (4) und (6); außerdem gilt in beiden Fällen $b = c$.
Daher treffen in beiden Fällen Veras Aussagen (1), (2), (3) zu.
Mit I. und II. ist gezeigt: Die Kantenlängen eines Quaders sind durch Veras Angaben (1), (2), (3) nicht eindeutig bestimmt (d. h. Utes Meinung ist nicht wahr), sondern es gibt für die Kantenlängen eines Quaders, auf den Veras Aussagen zutreffen, genau die beiden Möglichkeiten, dass diese Kantenlängen entweder 40 cm, 20 cm, 20 cm oder 16 cm, 32 cm, 32 cm betragen.

# I.II Bewegungsgleichungen, Verhältnisse

## I Runde 1

**Aufgabe V00601:**
Vor dem Zusammenschluss landwirtschaftlicher Einzelbetriebe eines Dorfes zur LPG musste eine Traktorenbrigade wegen der auseinanderliegenden Felder häufig den Arbeitsplatz wechseln. Sie hatte dadurch am Tage (8 Std.) 2,3 Stunden Leerlauf je Traktor.
Nach dem Zusammenschluss konnte mit jedem Traktor ohne Unterbrechung auf dem Felde gearbeitet werden.

a) Wie viel Hektar können mit jedem Traktor je Tag zusätzlich gepflügt werden, wenn in einer Stunde 0,26 ha gepflügt werden?
b) Die Brigade arbeitet mit 5 Traktoren, ziehe die Schlussfolgerung!

**Lösung von Steffen Polster:**
a) Es werden mit einem Traktor in 2,3 Stunden: $2{,}3 \cdot 0{,}26 \approx 0{,}6$ ha mehr gepflügt.
b) Mit 5 Traktoren sind es somit $\approx 3$ ha.

**Aufgabe 010612:**
Bei den im Oktober 1961 durchgeführten sowjetischen Raketenversuchen lagen bei einer Zielentfernung von etwa 12500 km alle Treffer innerhalb eines Kreises, dessen Radius kleiner als 1 km war.
Wie groß wäre der Radius des Trefferkreises bei einem Schüler, der mit gleicher Treffsicherheit auf ein 25 m entferntes Ziel einen Schlagball werfen würde?

**Lösung von Steffen Polster:**
Das Verhältnis des Radius des Trefferkreises und der Entfernung des Zieles entspricht der Treffsicherheit. D. h., nach der Aufgabenstellung soll das unbekannte Verhältnis $x$ : 25 m den Verhältnis 1 km : 12500 km gleich sein.

$$x = 25 \text{ m} \cdot \frac{1 \text{ km}}{12500 \text{ km}} = 0{,}002 \text{ m} = 2 \text{ mm}$$

Der Trefferkreis des Schülers hätte einen Radius von 2 mm.

**Aufgabe 010613:**
Ein „Trabant“ fährt bei einem Kilometerzählerstand von 17880 km los. Nach der Rückkehr steht sein Kilometerzähler auf 18030 km. Der Benzinverbrauch betrug 10,5 Liter.

a) Wie viel Kilometer hat der „Trabant“ zurückgelegt?
b) Wie viel Liter Treibstoff muss der Fahrer tanken, wenn er eine Strecke von 350 km fahren will?

**Lösung von Steffen Polster:**
a) Die zurückgelegte Strecke ist gleich 18030 km - 17880 km = 150 km.

b) Für den Benzinverbrauch ergibt sich die Beziehung $x$ : 10,5 l = 350 km : 150 km, d. h. $x$ = 24,5 l.

**Aufgabe 020611:**
Inge fragt ihren Bruder Klaus, der mit seiner Klasse in den Herbstferien einer LPG bei der Kartoffelernte geholfen hat, nach dem Ergebnis der Erntehilfe.
Klaus antwortet: „Insgesamt wurden 15000 dt Kartoffeln geerntet. $\frac{1}{5}$ dieser Menge sammelten wir Schüler, $\frac{1}{3}$ dieser Menge wurde von einigen Genossenschaftsbauern mit der Kartoffelkombine geerntet, den Rest sammelten die anderen Genossenschaftsbauern.“
Wie viel Dezitonnen Kartoffeln ernteten
a) die Schüler?
b) die Bauern mit der Kartoffelkombine?
c) die übrigen Genossenschaftsbauern?

**Lösung von Steffen Polster:**
a) Die Schüler sammelten $\frac{1}{5} \cdot 15000$ dt = 3000 dt Kartofellen.
b) Die Bauern mit der Kartoffelkombine sammelten $\frac{1}{3} \cdot 15000$ dt = 5000 dt Kartoffeln.
c) Der Rest beträgt $15000 - 3000 - 5000 = 7000$ dt.

**Aufgabe 020612:**
Von den bisher festgesetzten 296 Minuten wurden im Rahmen des Produktionsaufgebotes von den Arbeitern des VEB Druck- und Prägemaschinen Berlin bei einem Arbeitsgang 96 Minuten eingespart. Das macht je hergestellte Maschine 2,40 DM aus.

a) Wie groß ist die Einsparung, wenn 60 Prägemaschinen hergestellt werden?
b) Infolge des Produktionsaufgebotes konnten sogar 83 statt 60 Maschinen in der gleichen Zeit hergestellt werden. Wie groß ist dabei die Einsparung?

**Lösung von Steffen Polster:**
a) Jede Maschine spart 2,40 DM, d. h. insgesamt werden $60 \cdot 2{,}40$ DM = 144 DM eingespart.
b) Werden 83 Maschinen verwendet, steigt die Einsparung auf $83 \cdot 2{,}40$ DM = 199,20 DM.

**Aufgabe 030611:**
Für kulturelle, soziale und gesundheitliche Zwecke gab unsere Regierung im Jahre 1958 rund 15 Milliarden DM aus. Im Jahre 1962 war die entsprechende Summe um ein Drittel höher als 1958.

a) Wie viel DM wurden in der DDR im Jahre 1962 für die genannten Zwecke ausgegeben?
b) Wie viel DM waren das in beiden Fällen je Kopf unserer Bevölkerung, wenn man jeweils eine Einwohnerzahl von rund 17 Millionen annimmt?

**Lösung von Steffen Polster:**
a) Ein Drittel mehr als 15 Milliarden DM sind $\frac{4}{3} \cdot 15$ Milliarden = 20 Milliarden DM, die 1962 für kulturelle, soziale und gesundheitliche Zwecke ausgegeben wurden.

b) Im Jahr 1958 waren es $\frac{15000000000}{17000000}$ DM $\approx$ 882 DM, d. h. rund 900 DM.
Im Jahr 1962 waren es dagegen 1176 DM, das sind rund 1200 DM.

**Aufgabe 030612:**
Eine Pioniergruppe fuhr um 16.00 Uhr mit einem Autobus aus der Stadt in ein Ferienlager.
Als sie neun Zehntel des Weges zurückgelegt hatten, mussten die Pioniere 2 km vor dem Lager aussteigen, weil der Bus den Waldweg, der zum Lager führte, nicht mehr befahren konnte. Für den Rest des Weges benötigten sie eine halbe Stunde und trafen um 17.00 Uhr im Lager ein.
Mit welcher Geschwindigkeit fuhr der Bus? (Wie viel Kilometer legte er in einer Stunde zurück?)

**Lösung von Steffen Polster:**
Da $\frac{1}{10}$ des Weges 2 km beträgt, wurde, wenn der Bus $\frac{9}{10}$ der Strecke in 30 Minuten fährt, eine Strecke von 18 km zurückgelegt. Das sind 36 km in einer Stunde.

**Aufgabe 040611:**
In 2 Minuten greifen und befördern 3 Bagger 108 m$^3$ Erde. Ein Erdarbeiter kann an einem achtstündigen Arbeitstag 5 m$^3$ Erde ausheben.
Verschaffe dir eine Vorstellung von der Leistungsfähigkeit eines solchen Baggers, indem du ausrechnest, wie viel Erdarbeiter erforderlich wären, um einen Bagger zu ersetzen!

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Es wären 1728 Erdarbeiter erforderlich.

**Aufgabe 050611:**
Aus Leipzig und Dresden (Entfernung 119 km) fahren gleichzeitig zwei Radfahrer ab. Der Radfahrer aus Leipzig fährt nach Dresden, der aus Dresden nach Leipzig. Der eine von ihnen legt 15 km, der andere 20 km in der Stunde zurück.

a) Wie groß ist die Entfernung zwischen beiden Radfahrern nach $2\frac{1}{2}$ Stunden?
b) Wie weit sind sie von beiden Städten entfernt, wenn sie einander treffen?

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
a) Der eine Radfahrer hat nach $2\frac{1}{2}$ Stunden insgesamt $2\frac{1}{2} \cdot 20 = 50$ km, der andere in der gleichen Zeit $2\frac{1}{2} \cdot 15 = 37{,}5$ km zurückgelegt.

Nach $2\frac{1}{2}$ Stunden beträgt daher ihre Entfernung voneinander (in Kilometern) $119 \cdot (50 + 37{,}5) = 31{,}5$.

b) In $\frac{1}{5}$ Stunde, also in 12 min fährt der eine Radfahrer 3 km, der andere 4 km. Beide legen also in 12 min zusammen 7 km zurück. Daher treffen sie einander nach $\frac{119}{7} \cdot 12 = 17 \cdot 12$ min.
In dieser Zeit hat der eine Radfahrer $17 \cdot 3$ km, der andere $17 \cdot 4$ km zurückgelegt. Der Treffpunkt liegt also 51 km von der einen und 68 km von der anderen Stadt entfernt.

**Aufgabe 090612:**
In den Ferien war Klaus auf dem Lande. Aus seinen Beobachtungen ergab sich folgende Scherzaufgabe:

$$1\tfrac{1}{2} \text{ Hühner legen in } 1\tfrac{1}{2} \text{ Tagen } 1\tfrac{1}{2} \text{ Eier}$$

Ermittle die Anzahl aller Eier, die bei gleicher Legeleistung 7 Hühner in 6 Tagen legen würden!

**Lösung von Steffen Polster:**
Wenn $1\frac{1}{2}$ Hühner in $1\frac{1}{2}$ Tagen $1\frac{1}{2}$ Eier legen, so legen sie in 6 Tagen das Vierfache ($1\frac{1}{2} \cdot 4 = 6$), d. h. 6 Eier.
7 Hühner sind das $\frac{14}{3}$-fache von $1\frac{1}{2}$ Hühner, da $\frac{14}{3} \cdot 1\frac{1}{2} = 7$ ist. Damit legen die 7 Hühner in 6 Tagen $\frac{14}{3} \cdot 6 = 28$ Eier.

**Aufgabe 140613:**
Ein Radfahrer fuhr mit gleichbleibender Geschwindigkeit auf einer Straße von $A$ nach $B$. Er startete in $A$ um 6.00 Uhr und legte in jeder Stunde 12 km zurück. Ein zweiter Radfahrer, der denselben Weg von $A$ nach $B$ ebenfalls mit gleichbleibender Geschwindigkeit fuhr, startete am selben Tag um 7.00 Uhr in $A$ und legte in jeder Stunde 15 km zurück. Er traf mit dem ersten Radfahrer zur gleichen Zeit in $B$ ein.

a) Um wie viel Uhr holte der zweite Radfahrer den ersten ein?
b) Wie lang ist der Weg von $A$ nach $B$?

**Lösung von Steffen Polster:**
Der erste Radfahrer benötigte für die Strecke $t$ Stunden, der zweite $t - 1$ Stunden, da er eine Stunden später losfuhr. Die Strecken = Geschwindigkeit · Zeit sind für beide gleich, d. h. mit $v$ in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$

$$t \cdot 12 = (t - 1) \cdot 15 \quad \rightarrow \quad 12t = 15t - 15 \quad \rightarrow \quad 3t = 15 \quad \rightarrow \quad t = 5$$

Der erste Radfahrer für 5 Stunden, der zweite 4 Stunden, d. h., er holt ihn nach 4 Stunden ein.
Die Strecke ist damit $5 \cdot 12 = 4 \cdot 15 = 60$ km.

**Aufgabe 160612:**
Knut ist ein sehr trainierter Radfahrer. Bei einem Ausflug legte er auf seinem Fahrrad in der Minute durchschnittlich 320 m zurück.
Er fuhr um 7.00 Uhr mit seinem Rad ab und erreichte um 11.00 Uhr sein Ziel. Von 9.00 Uhr bis 9.20 Uhr hatte er gerastet, in der übrigen Zeit ist er ununterbrochen gefahren.
Wie lang (in km) ist die dabei von Knut insgesamt zurückgelegte Strecke?

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Die Zeit von 7.00 Uhr bis 11.00 Uhr beträgt 4 Stunden, das sind 240 Minuten. Die Rastzeit beträgt 20 Minuten, die Fahrzeit also 220 Minuten.

Wegen $220 \cdot 320 = 70400$ ist die von Knut insgesamt zurückgelegte Strecke mithin 70400 m = 70,4 km lang.

**Aufgabe 170611:**
In der DDR wurden folgende Mengen von Stickstoffdüngemitteln (in t) produziert

| 1950 | 1960 | 1970 | 1974 |
|---|---|---|---|
| 231000 | 334000 | 395000 | 424000 |

Dabei wurden die Ergebnisse von Jahr zu Jahr gesteigert.
Berechne, um wie viel Tonnen die Stickstoffdüngemittelproduktion im Durchschnitt jährlich gesteigert wurde:
a) von 1951 bis 1960
b) von 1961 bis 1970
c) von 1971 bis 1974!

**Lösung von Steffen Polster:**
a) Von 1950 bis 1960 wurde das Ergebnis um 334000 t - 231000 t = 103000 t gesteigert, d. h. um $\frac{103000}{231000} \cdot 100\% = 44{,}59$ %.
Für 10 Jahre entspricht das einer jährlichen Steigerung von 4,46%.

b) Von 1960 bis 1970 wurde das Ergebnis um 395000 t - 334000 t = 61000 t gesteigert, d. h. um 18,26 % und jährlich um 1,83 %.

c) Von 1970 bis 1974 wurde das Ergebnis um 29000 t gesteigert, d. h. um 7,34 % und für 3 Jahre jährlichen um von 2,45 %.

**Aufgabe 170612:**
Von zwei Häfen A und B, die durch eine Schiffahrtsroute der Länge 240 km miteinander verbunden sind, legten gleichzeitig zwei Schiffe ab und fuhren auf dieser Route einander entgegen, jedes für sich mit gleichbleibender Geschwindigkeit.
Das eine entwickelte eine Geschwindigkeit von 18 km je Stunde. Nach fünfstündiger Fahrt waren die Schiffe einander noch nicht begegnet; jedoch betrug die Länge des zwischen ihnen liegenden Teils der Route nur noch 45 km.
Wie viel Kilometer legte das zweite Schiff durchschnittlich in jeder Stunde zurück?

**Lösung von Steffen Polster:**
Nach 5 Stunden ist das erste Schiff $5 \cdot 18 = 90$ km gefahren.
Da die Gesamtstrecke 240 km beträgt und das zweite Schiff nach 5 Stunden nur noch 45 km entfernt ist, muss es 105 km gefahren sein. Dies entspricht der Geschwindigkeit $\frac{105 \text{ km}}{5 \text{ h}} = 21 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

**Aufgabe 190611:**
Von einem Busbahnhof fahren um 12.00 Uhr gleichzeitig vier Busse ab. Die Zeit, die jeweils bis zur nächsten Rückkehr und anschließenden erneuten Abfahrt vom gleichen Busbahnhof vergeht, beträgt für den ersten Bus $\frac{3}{4}$ h, für den zweiten Bus $\frac{1}{2}$ h, für den dritten Bus 36 Minuten und für den vierten Bus 1 Stunde.
Zu welcher Uhrzeit fahren hiernach erstmalig alle vier Busse wieder gleichzeitig von dem Busbahnhof ab?
Wie viele Fahrten hat jeder der vier Busse bis dahin durchgeführt?

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Die Abfahrzeiten lauten
für den ersten Bus: 12.00, 12.45, 13.30, 14.15, 15.00, ...,
für den zweiten Bus: 12.00, 12.30, 13.00, 13.30, 14.00, 14.30, 15.00, ...,
für den dritten Bus: 12.00, 12.36, 13.12, 13.48, 14.24, 15.00, ...,
für den vierten Bus: 12.00, 13.00, 14.00, 15.00, ...,

Daraus ist zu sehen: Die vier Busse fahren erstmalig um 15.00 Uhr wieder gleichzeitig ab. Bis dahin hat der erste Bus 4 Fahrten, der zweite Bus 6 Fahrten, der dritte Bus 5 Fahrten, der vierte Bus 3 Fahrten, durchgeführt.

**Aufgabe 200612:**
Aus dem Wirtschaftsbuch eines Erholungsheimes war ersichtlich, dass man für 25 Urlauber, die 14 Tage lang versorgt wurden, insgesamt 21 kg Butter verbraucht hatte.
Berechne, wie viel kg Butter für 30 Personen, die 6 Tage lang versorgt werden sollen, insgesamt bereitgestellt werden müssen, wenn je Person und Tag eine gleichgroße Buttermenge wie im angegebenen Beispiel verbraucht werden soll!

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Für 14 Tage verbrauchten 25 Urlauber 21000 g Butter.
Für 1 Tag verbrauchten 25 Urlauber wegen $21000 : 14 = 1500$ also 1500 g Butter.
Für 1 Tag verbraucht 1 Urlauber wegen $1500 : 25 = 60$ also 60 g Butter.
Für 1 Tag verbrauchen 30 Urlauber wegen $60 \cdot 30 = 1800$ also 1800 g Butter.
Für 6 Tage verbrauchen 30 Urlauber wegen $1800 \cdot 6 = 10800$ also 10800 g = 10,8 kg Butter.

**Aufgabe 320614:**
Ein Radfahrer fährt von Schnellhausen nach Sausedorf, wobei er täglich 36 Kilometer zurücklegt. Gleichzeitig fährt ihm ein anderer Radfahrer, der täglich 34 Kilometer zurücklegt, von Sausedorf aus entgegen. Die Entfernung zwischen Schnellhausen und Sausedorf beträgt 350 km.
In wie viel Tagen treffen sich die beiden Radfahrer? Führe auch eine Probe durch.

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Die Entfernung zwischen den beiden Radfahrern betrug anfangs 350 Kilometer. Sie verringerte sich wegen $36\text{km} + 34\text{km} = 70\text{km}$ täglich um 70 Kilometer. Folglich treffen sich die beiden Radfahrer wegen $350\text{km} : 70\text{km} = 5$ in fünf Tagen.

Zur Probe kann man den von den Radfahrern in fünf Tagen zurückgelegten Weg berechnen:
Wegen $5 \cdot 36\text{km} = 180\text{km}$ liegt der Treffpunkt der beiden Radfahrer 180 Kilometer von Schnellhausen entfernt, und wegen $5 \cdot 34\text{km} = 170\text{km}$ beträgt seine Entfernung zu Sausedorf 170 km. Die beiden Wegstrecken ergeben zusammen die Entfernung Schnellhausen-Sausedorf: $180\text{km} + 170\text{km} = 350\text{km}$.

**Aufgabe 340611:**
Herr Eilig fuhr auf der Autobahn eine Strecke von 475 Kilometern. Er legte diese Strecke in 3 Stunden und 10 Minuten zurück und verbrauchte dabei 57 Liter Benzin.

a) Wie groß war seine durchschnittliche Geschwindigkeit?
b) Wie viel Benzin hatte er im Durchschnitt für je 100 km verbraucht?
c) Wäre er stattdessen mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von 120 km/h gefahren, so hätte er für je 100 km nur 8 Liter verbraucht.

Welche Strecke hätte er bei der Durchschnittsgeschwindigkeit 120 km/h mit dem gesparten Benzin noch fahren können?

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
a) Da Herr Eilig für 475 Kilometer 3 Stunden und 10 Minuten, d. h. 19 mal 10 Minuten brauchte, fuhr er in je 10 Minuten durchschnittlich $475 : 19 = 25$ Kilometer, in jeder Stunde also $6 \cdot 25 = 150$ Kilometer; d. h., seine durchschnittliche Geschwindigkeit betrug 150 km/h.

b) Da er für die $475 = 25 \cdot 19$ Kilometer $57 = 3 \cdot 19$ Liter Benzin brauchte, waren es für je 25 Kilometer durchschnittlich 3 Liter, also für je 100 Kilometer viermal so viel, d. h. 12 Liter.

c) Hätte er für je 100 Kilometer nur 8 Liter gebraucht, so hätte er in je 100 Kilometern noch 4 Liter übrig behalten. Da das die Hälfte von 8 Litern ist, hätte er zu der insgesamt gefahrenen Strecke von 475 Kilometern zusätzlich noch eine halb so lange Strecke fahren können.
Wegen $475 = 474 + 1$ und $474 : 2 = 237$ sind das 237 Kilometer und ein halber Kilometer (500 Meter).

## II Runde 2

**Aufgabe 010621:**
Bei einem Probeflug auf der Strecke Moskau–Mirny (sowjetische Südpolarstation) überquerten zwei sowjetische Flugzeuge vom Typ „AN-10“ und „IL-18“ Europa, Asien, Australien, die Antarktis, den Indischen Ozean und den Stillen Ozean.
Die AN-10 legte die gewaltige Strecke von 25300 km in 48 h und 7 min, die IL-18 in 44 h und 36 min zurück.
Welche Strecke überflogen die beiden Flugzeuge durchschnittlich in 1 Stunde?

**Lösung von Steffen Polster:**
Die Durchschnittsgeschwindigkeit erhält man als Quotienten der Strecke und der Flugzeit. Es wird damit für die AN-10:

$$\frac{25300 \text{ km}}{48\frac{7}{60} \text{ h}} = 525{,}8\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

und für die IL-18:

$$\frac{25300 \text{ km}}{44\frac{36}{60} \text{ h}} = 567{,}3\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Die Maschinen flogen durchschnittlich rund 526 km bzw. 567 km in einer Stunde.

**Aufgabe 010622:**
Eine Expedition legte am ersten Tage $\frac{2}{5}$ des Weges, am zweiten Tage $\frac{1}{3}$ des Weges und am dritten Tag die restlichen 1000 km zurück.

a) Welche Strecken wurden an den beiden ersten Tagen zurückgelegt?
b) Wie groß war die Gesamtstrecke?

**Lösung von Steffen Polster:**
An Tag 1 und 2 wurden $\frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \frac{11}{15}$ des Weges zurückgelegt. Die 1000 km des dritten Tages sind somit $\frac{4}{15}$ des ganzen Weges. $\frac{1}{15}$ des Weges sind folglich 250 km.

a) Am ersten Tag wurden $6 \cdot 250$ km = 1500 km und am zweiten Tag $5 \cdot 250$ km = 1250 km zurückgelegt.
b) Die Gesamtstrecke ist 3750 km lang.

**Aufgabe 020621:**
Bei dem Gruppenflug der sowjetischen Kosmonauten Nikolajew und Popowitsch umkreisten die Raumschiffe Wostok III und Wostok IV in rund 88 Minuten einmal die Erde (rund 41 000 km).

a) Welche Strecke legte jedes Raumschiff in einer Stunde zurück?
b) Welche Strecke legte es in jeder Sekunde zurück?
Die Ergebnisse sind sinnvoll zu runden!

**Lösung von Steffen Polster:**
a) Die Strecke entspricht $\frac{66}{80}$ der Erdumkreisung, d. h. $\frac{66}{80} \cdot 41000$ km $\approx 28000$ km.
b) 60 Minuten bestehen aus 3600 Sekunden, d. h., in einer Sekunde legt das Raumschiff $\frac{41000}{3600}$ km $\approx 7{,}8$ km zurück.

**Aufgabe 020622:**
Beim Werkunterricht benutzt Regine eine Tischbohrmaschine. Sie weiß, dass der Bohrer bei jeder Umdrehung $\frac{1}{4}$ mm tief in das Werkstück eindringt.
Sie soll ein Werkstück von 30 mm Dicke durchbohren. Die Bohrmaschine macht in einer Minute 240 Umdrehungen.
In welcher Zeit kann Regine eine Bohrung durchführen?

**Lösung von Steffen Polster:**
Für 30 mm Tiefe benötigt der Bohrer $\frac{30 \text{ mm}}{\frac{1}{4} \text{ mm}} = 120$ Umdrehungen und somit ein halbe Minute = 30 s.

**Aufgabe 030621:**
Schallwellen legen in der Luft in einer Sekunde eine Strecke von rund 340 m zurück, die Rundfunkwellen dagegen rund 300000 km.
Wer hört einen vor dem Mikrophon sprechenden Redner früher,

a) ein Zuhörer in der ersten Reihe im Saal, der 2 m vom Redner entfernt sitzt, oder
b) ein Rundfunkhörer, der die Sendung in einer Entfernung von 1000 km mit Kopfhörern abhört?
Begründe deine Antwort.

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Da die Schallwellen für eine Strecke von 2 m rund $\frac{1}{170}$ Sekunde benötigen, die Rundfunkwellen aber für 1000 km nur $\frac{1}{300}$ Sekunde brauchen, hört der Rundfunkhörer den Redner etwas früher.

**Aufgabe 070624:**
Von den Teilnehmern einer Schule eines Landkreises an der 1. Stufe der Mathematikolympiade wurden genau $\frac{3}{40}$ zur 2. Stufe delegiert. Von diesen Schülern erhielten bei der 2. Stufe (Kreisolympiade) genau $\frac{2}{9}$ Preise oder Anerkennungsschreiben.

Einen ersten Preis in seiner Klassenstufe erhielt genau ein Schüler, genau ein weiterer Schüler erhielt in seiner Klassenstufe einen zweiten Preis, genau zwei weitere bekamen dritte Preise. Außerdem wurden genau vier anderen Schülern dieser Schule für besonders gute Lösungen einer Aufgabe Anerkennungsschreiben überreicht.

Gib die Anzahl aller Teilnehmer dieser Schule an der 1. Stufe der Mathematikolympiade an!

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Schüler mit Preisen oder Anerkennungsschreiben:

8 Schüler = $\frac{2}{9}$ der Teilnehmer an der 2. Stufe. Daraus folgt:
4 Schüler = $\frac{1}{9}$ der Teilnehmer an der 2. Stufe und
36 Schüler = $\frac{9}{9}$, (das sind alle Teilnehmer dieser Schule an der 2. Stufe)

Laut Aufgabe gilt weiterhin: 36 Schüler = $\frac{3}{40}$ der Teilnehmer an der 1. Stufe also
480 Schüler = $\frac{40}{40}$ (das sind alle Teilnehmer dieser Schule an der 1. Stufe). Genau 480 Schüler dieser Schule beteiligten sich an der 1. Stufe der Mathematikolympiade.

**Aufgabe 080624:**
Drei Freunde bereiten sich auf die „Kleine Friedensfahrt“ vor. Sie trainieren auf einer Rundstrecke. Ihr Start erfolgt zur gleichen Zeit und in gleicher Richtung an der Startlinie $S$. Manfred legte die erste Runde in genau 3 Minuten, Klaus in genau $3\frac{3}{4}$ Minuten und Helmut in genau 5 Minuten zurück.

a) Nach wie viel Minuten würden die drei Freunde erstmalig die Startlinie $S$ wieder gleichzeitig erreichen, wenn wir annehmen, dass Manfred für alle weiteren Runden je Runde genau 3 Minuten, Klaus genau $3\frac{3}{4}$ Minuten und Helmut genau 5 Minuten brauchten?
b) Wie viel Runden hätte jeder von ihnen bis dahin zurückgelegt?

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
(a) Nach 15 Minuten würden die drei Freunde unter den Bedingungen der Aufgabe erstmalig wieder gleichzeitig die Startlinie $S$ erreichen.

Beweis hierzu: Helmut brauchte für jede Runde genau 300 Sekunden, Klaus genau 225 Sekunden und Manfred genau 180 Sekunden. Das kgV von 225, 300 und 180 beträgt 900, und 900 Sekunden sind gleich 15 Minuten.

(b) In 15 Minuten würden Helmut genau 3, Klaus genau 4 und Manfred genau 5 Runden zurücklegen.

**Aufgabe 090624:**
Jürgen und seine jüngere Schwester Elke haben den gleichen Schulweg. Elke braucht vom Elternhaus bis zum Schultor genau 30 Minuten, Jürgen genau 20 Minuten. An einem Tage ging Elke genau 5 Minuten vor Jürgen aus dem Haus.

Nach wie viel Minuten holte Jürgen seine Schwester ein?
(Es sei angenommen, dass jeder von beiden mit gleichbleibender Geschwindigkeit ging.)

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Laut Aufgabe legt Elke in jeder Minute genau $\frac{1}{30}$ des Schulweges, Jürgen in jeder Minute genau $\frac{1}{20}$ des gleichen Weges zurück. Da Elke 5 Minuten vor Jürgen losgegangen ist, hat sie vor Jürgen in dieser Zeit einen Vorsprung von $\frac{5}{30} = \frac{10}{60}$ des Weges.

Wegen $\frac{1}{20} - \frac{1}{30} = \frac{1}{60}$ verringert sich dieser Vorsprung in jeder Minute um $\frac{1}{60}$ des Gesamtweges.
Die gesuchte Anzahl der Minuten bis zum Einholen kann also nur diejenige Zahl sein, mit der man $\frac{1}{60}$ multiplizieren muss, um $\frac{10}{60}$ zu erhalten. Das ist die Zahl 10.
Jürgen holt unter den angegebenen Umständen seine Schwester in genau 10 Minuten ein.

**Aufgabe 100622:**
Die sowjetischen Raumschiffe Sojus 6, Sojus 7 und Sojus 8 umkreisten im Gruppenflug die Erde. Dabei brauchte die Gruppe der drei Raumschiffe für jede Umkreisung durchschnittlich 88 Minuten und legte in dieser Zeit rund 41000 km zurück.
Berechne die Länge des Weges, den die Raumschiffgruppe während ihres Fluges durchschnittlich

a) in jeder Stunde,
b) in jeder Sekunde zurücklegte!

Bei der Aufgabe a) soll die Angabe in Kilometern erfolgen und auf volle Tausend Kilometer gerundet werden, bei Aufgabe b) soll die Angabe in Metern erfolgen und auf volle Hundert Meter gerundet werden.

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
a) Da die Raumschiffgruppe in 88 Minuten durchschnittlich 41000 km zurücklegte, legte sie in jeder Minute wegen $41000 : 88 \approx 466$ rund 466 km, in 60 Minuten also rund $60 \cdot 466$ km, das sind rund 28000 km zurück.

b) Da die Raumschiffgruppe in jeder Minute 466 km = 466000 m zurücklegte, legte sie in jeder Sekunde den 60. Teil davon, also wegen $466000 : 60 = 7767$ rund 7800 m zurück.

**Aufgabe 120624:**
Manfred berichtete im Zirkel Junger Mathematiker von einem Besuch des Rostocker Überseehafens:

„Ich habe dort insgesamt 21 Schiffe aus fünf verschiedenen Ländern gesehen. Die Anzahl der Schiffe aus der DDR war halb so groß wie die aller im Hafen liegenden ausländischen Schiffe. Diese kamen aus der Sowjetunion, der Bulgarischen Volksrepublik, aus Finnland sowie aus Indien.
Dabei war die Anzahl der sowjetischen Schiffe um zwei größer als die der bulgarischen, diese wieder um eins größer als die der finnischen, diese schließlich um zwei größer als die der indischen Schiffe.“

Ermittle die Anzahl der Schiffe aus der DDR, aus der Sowjetunion, der Bulgarischen Volksrepublik, aus Finnland und aus Indien, die Manfred in Rostock gesehen hat!

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Die Anzahl der in der DDR beheimateten Schiffe beträgt laut Aufgabe $\frac{1}{3}$ der Gesamtzahl, also stammten 7 Schiffe aus der DDR. Die restlichen 14 Schiffe stammten aus den anderen vier Ländern.

Nun hat Manfred laut Aufgabe mindestens 1 indisches Schiff sowie infolgedessen mindestens 3 finnische, 4 bulgarische und 6 sowjetische Schiffe gesehen. Da das zusammen bereits 14 Schiffe sind, sind damit die gesuchten Anzahlen gefunden.

**Aufgabe 140624:**
Ein Radfahrer fuhr mit gleichbleibender Geschwindigkeit auf einer Straße von $A$ nach $B$. Er startete in $A$ um 6.00 Uhr und legte in jeder Stunde 14 km zurück. Ein zweiter Radfahrer fuhr auf derselben Straße mit gleichbleibender Geschwindigkeit von $B$ nach $A$. Er startete am selben Tag um 8.00 Uhr in $B$ und legte in jeder Stunde 21 km zurück.
Beide Radfahrer begegneten sich genau am Mittelpunkt der Strecke von $A$ nach $B$.

Um wie viel Uhr begegneten sie sich? Wie lang ist die Strecke von $A$ nach $B$?

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Der erste Radfahrer war um 8.00 Uhr genau zwei Stunden gefahren und hatte dabei eine Strecke von 28 km zurückgelegt.
Von diesem Zeitpunkt an legte der zweite Radfahrer in jeder Stunde genau 7 km mehr zurück als der erste.
Da sie sich genau am Mittelpunkt der Strecke von $A$ nach $B$ trafen, geschah das wegen $28 : 7 = 4$ genau 4 Stunden nach Abfahrt des zweiten Radfahrers, also um 12.00 Uhr.
Bis zu diesem Zeitpunkt hatte wegen $6 \cdot 14 = 84$ bzw. $4 \cdot 21 = 84$ jeder von beiden genau 84 km zurückgelegt.

Die Länge der Strecke von $A$ nach $B$ beträgt wegen $2 \cdot 84 = 168$ mithin 168 km.

**Aufgabe 150621:**
Ein sowjetischer Hubschrauber vom Typ Mi-10 kann eine Nutzlast von 15000 kp befördern.
Bei einem Transport von Sperrgut mit drei Hubschraubern dieses Typs wurde der erste Hubschrauber zu $\frac{1}{3}$, der zweite zu $\frac{7}{8}$ und der dritte zu $\frac{3}{5}$ seiner Tragfähigkeit ausgelastet.
Ermittle das Gesamtgewicht des in diesem Transport von den drei Hubschraubern beförderten Sperrgutes!

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Der erste Hubschrauber beförderte $\frac{1}{3}$ von 15000 kp, das sind 5000 kp. Der zweite beförderte damit 13125 kp; der dritte beförderte 9000 kp.
Das Sperrgut hatte somit wegen $5000 + 13125 + 9000 = 27125$ ein Gesamtgewicht von 27125 kp.

**Aufgabe 160622:**
Von zwei Häfen $A$ und $B$, die durch eine Schiffahrtsroute der Länge 240 km miteinander verbunden sind, legten gleichzeitig zwei Schiffe ab und fuhren auf dieser Route einander entgegen, jedes für sich mit gleichbleibender Geschwindigkeit.
Das eine entwickelte eine Geschwindigkeit von 18 km je Stunde. Nach fünfstündiger Fahrt waren die Schiffe einander noch nicht begegnet; jedoch betrug die Länge des zwischen ihnen liegenden Teils der Route nur noch 45 km.
Wie viel Kilometer legte das zweite Schiff durchschnittlich in jeder Stunde zurück?

**Lösung von Steffen Polster:**
Wegen 68 + 76 + 64 + 52 = 260 besitzen die vier Räume eine Gesamtbodenfläche von 260 $m^2$.
Wegen 260 : 65 = 4 standen für jeden Pionier laut Aufgabe 4 $m^2$ Bodenfläche zur Verfügung. Daher ergab sich wegen 68 : 4 = 17, 76 : 4 = 19, 64 : 4 = 16 sowie 52 : 4 = 13 folgende Belegung:

Im ersten Raum: 17 Thälmann-Pioniere,
im zweiten Raum: 19 Thälmann-Pioniere,
im dritten Raum: 16 Thälmann-Pioniere,
im vierten Raum: 13 Thälmann-Pioniere,
zusammen also: 65 Thälmann-Pioniere.

**Aufgabe 160624:**
Ein Kraftfuttergemisch für Zuchteber ist aus Haferschrot, Weizenkleie, Gerstenschrot, Mineralstoffen und Wasser zusammengesetzt, und zwar ist die Hälfte des Gemischs Haferschrot, $\frac{1}{10}$ des Gemischs ist Weizenkleie, $\frac{1}{4}$ des Gemischs ist Gerstenschrot, $\frac{1}{100}$ des Gemischs sind Mineralstoffe, der Rest ist Wasser.
Berechne (in kg) den Anteil an Wasser, den 35 kg dieses Kraftfuttergemischs enthalten!

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Laut Aufgabe enthalten 35 kg des in der Aufgabe genannten Gemischs wegen $\frac{1}{2} \cdot 35 = 17{,}5$ genau 17,5 kg Haferschrot,
wegen $\frac{1}{10} \cdot 35 = 3{,}5$ genau 3,5 kg Weizenkleie,
wegen $\frac{1}{4} \cdot 35 = 8{,}75$ genau 8,75 kg Gerstenschrot,
wegen $\frac{1}{100} \cdot 35 = 0{,}35$ genau 0,35 kg Mineralstoffe.

Das sind wegen 17,5 + 3,5 + 8,75 + 0,35 = 30,1 insgesamt 30,1 kg. Wegen 35 - 30,1 = 4,9 verbleiben mithin genau 4,9 kg Wasser als Wasseranteil dieses Kraftfuttergemischs.

**Aufgabe 170621:**
Eine Expedition von Wissenschaftlern legte am ersten Tag ein Drittel der geplanten Gesamtstrecke, am zweiten Tag 150 km und am dritten Tag noch einmal ein Viertel der Gesamtstrecke zurück und erreichte damit den Zielort.
Wie lang war die von der Expedition zurückgelegte Strecke?

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Am ersten Tag legte man $\frac{1}{3}$ und am dritten Tag $\frac{1}{4}$ der Gesamtstrecke zurück. Damit wurde wegen $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}$ an diesen beiden Tagen $\frac{7}{12}$ der gesamten Strecke bewältigt.

Die restlichen 150 km sind also genau $\frac{5}{12}$ der Gesamtstrecke. Wegen $150 : 5 = 30$ sind folglich 30 km genau $\frac{1}{12}$ der Gesamtstrecke; diese beträgt demnach $12 \cdot 30\text{km} = 360\text{km}$.

**Aufgabe 180621:**
a) Die Multispektralkamera MKF-6 von Sojus-22 fotografierte bei jeder Aufnahme ein rechteckiges Gebiet von 115 km Breite und 165 km Länge.
Berechne den Flächeninhalt eines solchen Gebietes!

b) Während der 83. Erdumkreisung am 20. September 1976 überflog Sojus 22 die DDR in Richtung von Eisenach nach Pasewalk. Auf einer Landkarte im Maßstab 1 : 700000 hat die dabei überflogene Strecke eine Länge von 65 cm.
Wie lang ist diese Strecke in Wirklichkeit? (Angabe in km) (Rechnung ohne Berücksichtigung der Erdkrümmung)

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
a) Wegen $115 \cdot 165 = 18975$ beträgt der Flächeninhalt eines solchen Gebietes 18975 km$^2$.
b) Wegen $700000 \cdot 65 = 45500000$ ist die Strecke in Wirklichkeit 45500000 cm = 455 km lang.

**Aufgabe 200621:**
Ein Flugzeug, das mit konstanter (gleichbleibender) Geschwindigkeit von A nach B fliegt, war um 10.05 Uhr noch 2100 km, um 11.20 Uhr nur noch 600 km von B entfernt.
Um welche Zeit wird es in B eintreffen, wenn es mit der bisherigen Geschwindigkeit weiterfliegt?

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Die Zeit von 10.05 Uhr bis 11.20 Uhr beträgt 1 h 15 min = 75 min.
Wegen $2100 - 600 = 1500$ hat das Flugzeug in dieser Zeit 1500 km zurückgelegt. Wegen $75 : 15 = 5$ benötigt es für je 100 km also 5 min, wegen $6 \cdot 5 = 30$ für die noch zurückzulegenden 600 km mithin 30 min. Daher trifft es 30 min nach 11.20 Uhr, d. h. um 11.50 Uhr in B ein.

**Aufgabe 210621:**
Ein Güterzug fährt von einer Station $A$ (Kilometer 0) zu einer Station $B$ (Kilometer 60). Beim Kilometer 15 hält der Zug 30 Minuten lang; in der übrigen Zeit fährt er mit der gleichbleibenden Geschwindigkeit von 45 Kilometern je Stunde. Um 9.30 Uhr fährt der Zug in $A$ ab.

Lege eine Tabelle an, aus der zu ersehen ist, bei welchem Kilometer sich der Zug zu den Uhrzeiten alle 10 Minuten nach der Abfahrt (9.40 Uhr, 9.50 Uhr, 10.00 Uhr usw.) befindet!
Begründe diese Kilometerangaben!

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Bei der Geschwindigkeit von 45 Kilometern je Stunde legt der Zug jeweils in 10 Minuten ein Sechstel der Strecke 45 km zurück, das sind (wegen $45 : 6 = 7\frac{1}{2}$) jeweils $7\frac{1}{2}$ km.
Berücksichtigt man noch die Wartezeit, so ergibt sich folgende Tabelle:

| Uhrzeit | 9.40 | 9.50 | 10.00 | 10.10 | 10.20 | 10.30 | 10.40 | 10.50 | 11.00 | 11.10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Kilometer | $7\frac{1}{2}$ | 15 | 15 | 15 | 15 | $22\frac{1}{2}$ | 30 | $37\frac{1}{2}$ | 45 | $52\frac{1}{2}$ |

**Aufgabe 230621:**
Von einem Milchhof sollen an einem Tag 2200 Kästen mit je 25 Behältern zu $\frac{1}{4}$ Liter Milch, ferner 600 Kästen mit je 24 Flaschen zu $\frac{1}{2}$ Liter und 800 Kästen mit je 12 Beuteln zu 1 Liter Milch ausgeliefert werden.
Die hierfür insgesamt benötigte Milchmenge wurde in Tankwagen angeliefert, von denen jeder 9000 Liter Milch fasst.

a) Berechne, wie viel Liter Milch insgesamt an diesem Tag ausgeliefert werden sollen!
b) Berechne die kleinstmögliche Anzahl von Tankwagen, die zur Anlieferung der benötigten Milchmenge insgesamt ausreichend waren!

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
a) Wegen $2200 \cdot 25 : 4 = 13750$, $600 \cdot 24 : 2 = 7200$, $800 \cdot 12 \cdot 1 = 9600$ und $13750 + 7200 + 9600 = 30550$ sollen insgesamt 30550 Liter Milch ausgeliefert werden.
b) Wegen $30550 : 9000 = 3 + \frac{3550}{9000}$ waren für den Abtransport der 30550 Liter Milch vier Tankwagen ausreichend, aber nicht weniger. Also ist 4 die gesuchte kleinstmögliche Anzahl.

**Aufgabe 240623:**
Drei Motorradfahrer Rainer, Jürgen und Frank fahren zur gleichen Zeit in Karl-Marx-Stadt an der gleichen Stelle ab; sie fahren auf der gleichen Straße in Richtung Leipzig.
Rainer legt mit seiner Maschine in je 10 Minuten eine Weglänge von 9 Kilometern zurück, Jürgen fährt in je 10 Minuten 8 Kilometer, Frank nur 6 Kilometer.
Wie groß sind nach einer Stunde die Weglängen zwischen Rainer und Jürgen, zwischen Rainer und Frank und zwischen Jürgen und Frank, wenn bis zu diesem Zeitpunkt jeder Fahrer seine Geschwindigkeit beibehalten hat?

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Da eine Stunde das Sechsfache von 10 Minuten ist, legt jeder Fahrer in einer Stunde das Sechsfache der von ihm in 10 Minuten gefahrenen Weglänge zurück. Daraus folgt:

Rainer fährt wegen $6 \cdot 9 = 54$ in einer Stunde 54 km,
Jürgen fährt wegen $6 \cdot 8 = 48$ in einer Stunde 48 km,
Frank fährt wegen $6 \cdot 6 = 36$ in einer Stunde 36 km.

Somit betragen nach einer Stunde wegen $54 - 48 = 6$ bzw. $54 - 36 = 18$ bzw. $48 - 36 = 12$ die Weglängen zwischen Rainer und Jürgen 6 km, zwischen Rainer und Frank 18 km, zwischen Jürgen und Frank 12 km.

**Aufgabe 340621:**
Ein Jogger benötigt im Dauerlauf für 100 m jeweils 20 Sekunden.
a) Welche Stecke schafft er, wenn er dieses Tempo 20 Minuten lang unverändert durchhält?
b) Welche Strecke schafft er, wenn sich in den insgesamt gelaufenen 20 Minuten auch Zeiten befinden, in denen er für 100 m jeweils 30 Sekunden benötigt, und zwar auf Teilstrecken, die zusammen 1600 m betragen?

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
(a) Da der Jogger in 20 Sekunden 100 m schafft und da 20 Minuten 60 mal so viel Zeit sind wie 20 Sekunden, schafft er in 20 Minuten $60 \cdot 100\text{m} = 6000\text{m}$.

(b) Während er die 1600 m mit der niedrigeren Geschwindigkeit läuft, braucht er 16 mal so viel Zeit wie für 100 m, also $16 \cdot 30$ Sekunden $= 480$ Sekunden $= 8$ Minuten.
Wegen $20 - 8 = 12$ bleiben 12 Minuten für die höhere Geschwindigkeit. Da eine Minute 3 mal so viel Zeit wie 20 Sekunden ist, schafft er in diesen 12 Minuten $3 \cdot 12 \cdot 100\text{m} = 3600\text{m}$.
Insgesamt legt er so $1600\text{m} + 3600\text{m} = 5200\text{m}$ zurück.

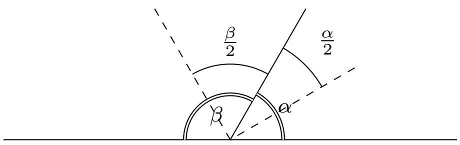
# II Geometrie

## II.I Dreiecke, Geraden, Winkel

### I Runde 1

**Aufgabe 010616:**
Zeichne zwei Nebenwinkel und konstruiere ihre Winkelhalbierenden.
Was für einen Winkel bilden die Winkelhalbierenden? Begründe deine Antwort!

**Lösung von Steffen Polster:**



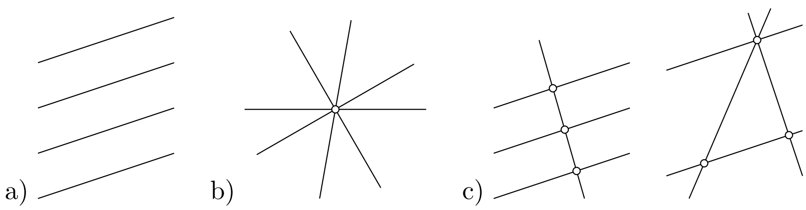

$\alpha$ und $\beta$ seien die zwei Nebenwinkel mit $\alpha + \beta = 180°$.
Die Winkel zwischen den Winkelhalbierenden und einem gemeinsamen Schenkel sind somit $\frac{\alpha}{2}$ bzw. $\frac{\beta}{2}$.
Der Winkel zwischen den zwei Winkelhalbierenden ist damit

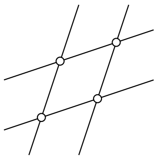
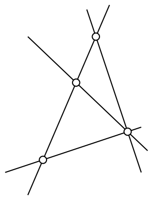
$$\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2} = 90°$$

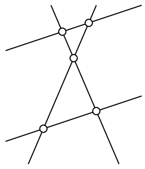
d. h. sie bilden einen rechten Winkel.

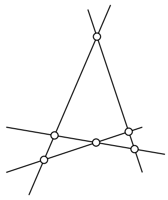
**Aufgabe 020615:**
In einer Ebene sollen vier Geraden so gezeichnet werden, dass genau
a) kein Schnittpunkt,
b) 1 Schnittpunkt,
c) 3 Schnittpunkte (zwei Möglichkeiten),
d) 4 Schnittpunkte (zwei Möglichkeiten),
e) 5 Schnittpunkte,
f) 6 Schnittpunkte entstehen!
Wie müssen die Geraden zueinander liegen? Zeichne!

**Lösung von Steffen Polster:**
Die Geraden müssen für a) zueinander parallel sein, bei b) sich alle in einem Punkt schneiden.
Die Bedingung c) wird erfüllt, wenn entweder drei zueinander parallele Geraden von der vierten Geraden geschnitten werden oder wenn ein Dreieck von der vierten in einem Eckpunkt berührt wird.
Für die Aufgabe d) können je zwei paarweise parallele Geraden vorliegen oder ein Dreieck von der letzten Gerade in einem Eckpunkt und der gegenüberliegenden Seite geschnitten werden.
Für Bedingung e) müssen zwei Geraden parallel zueinander sein und bei f) dürfen keine der Geraden zueinander parallel sein.



d)  

e) 

f) 

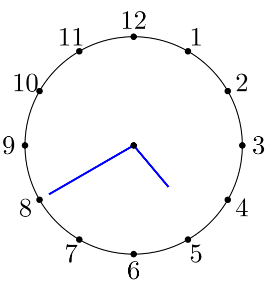
**Aufgabe 040613:**
Eine 6. Klasse stellte verschiedenartige Pappdreiecke her. Die Schüler wollten diese Dreiecke im Mathematischen Kabinett ihrer Schule in einem Schränkchen aufbewahren, das neun Fächer enthielt. Jeweils drei Fächer hatten die Schüler für die gleichseitigen Dreiecke, für die nur gleichschenkligen Dreiecke (d. h. für die nicht gleichseitigen) und für die ungleichschenkligen Dreiecke vorgesehen. Innerhalb dieser Gruppen sollten die Figuren nämlich noch in spitzwinklige, rechtwinklige und stumpfwinklige Dreiecke unterteilt werden.

Überprüfe, ob die Anzahl der Fächer richtig gewählt war!

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Da es keine rechtwinkligen oder stumpfwinkligen Dreiecke gibt, die gleichseitig sind, bleiben 2 Fächer unbenutzt. Die Anzahl der Fächer hätte also 7 betragen müssen.

**Aufgabe 080612:**
Berechne die Größe des kleineren der beiden Winkel, die der Stunden- und der Minutenzeiger einer Uhr um 16 Uhr 40 Minuten miteinander bilden!

**Lösung von Steffen Polster:**




Der große Zeiger steht auf der 8. Der kleine Zeiger steht zwischen der 4 und 5.
In 60 Minuten bewegt sich der kleine Zeiger jeweils 30°. Zum Zeitpunkt 16:40 Uhr ist er somit $\frac{40}{60} \cdot 30° = 20°$ von der 4 in Richtung 5 gewandert, bzw. er steht noch 10° vor der 5.

Der Winkel zwischen der 5 und der 8 ist ein rechter Winkel, da zwischen zwei Stundenangaben jeweils 30° liegen.
Damit ist der Winkel zwischen dem großen und dem kleinen Zeiger $90° + 10° = 100°$.

**Aufgabe 260613:**
Die Verbindungsstraßen dreier Orte $A$, $B$, $C$ bilden ein Dreieck. In der Mitte der Verbindungsstraße von $B$ nach $C$ liegt ein weiterer Ort $D$. Von $A$ über $B$ nach $C$ beträgt die Entfernung 25 km, von $B$ über $C$ nach $A$ dagegen 27 km und von $C$ über $A$ nach $B$ schließlich 28 km.
Eine Pioniergruppe wandert auf den genannten Straßen auf kürzestem Wege vom Ort $A$ zum Ort $D$.

a) Über welchen der beiden Orte $B$ oder $C$ läuft die Pioniergruppe?
Begründe deine Entscheidung!
b) Wie viel Zeit spart sie gegenüber dem längeren der beiden möglichen Wege von $A$ nach $D$ ein, wenn sie stündlich 4 km zurücklegt?
c) Wie lang ist der von ihr insgesamt zurückgelegte Weg?

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
a) Wegen $AB + BC = 25$ km und $AC + BC = 27$ km ist $AC$ um 2 km länger als $AB$. Damit ist wegen

$CD = BD$ eine Wanderung von $A$ über $C$ nach $D$ um 2 km länger als eine Wanderung von $A$ über $B$ nach $D$.
Weil die Pioniergruppe den kürzeren der beiden Wege wählte, läuft sie über den Ort $B$.

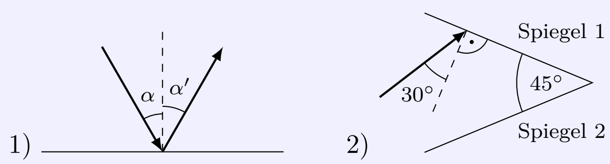
b) Nach den Überlegungen zu a) spart die Pioniergruppe auf dem kürzeren Wege von $A$ nach $D$ gegenüber dem längeren Wege 2 km ein. Wenn sie stündlich 4 km zurücklegt, benötigt sie für 2 km eine halbe Stunde. Sie spart damit bei einer Wanderung von $A$ nach $D$ auf dem kürzeren Wege gegenüber einer auf dem längeren Wege $\frac{1}{2}$ Stunde ein.

c) Würde man hintereinander von $A$ über $B$ nach $C$, dann von $C$ über $A$ nach $B$ und dann von $B$ über $C$ nach $A$ laufen, so würde man zweimal den Umfang des Dreiecks $ABC$ durchlaufen und wegen 25 + 28 + 27 = 80 insgesamt 80 km zurücklegen.

Folglich ist wegen 80 : 2 = 40 der Umfang des Dreiecks $ABC$ gleich 40 km. Subtrahiert man von ihm $AC + BC = 27$ km, so verbleibt $AB = 40$ km - 27 km = 13 km.
Subtrahiert man vom Umfang aber $AC + AB = 28$ km, so verbleibt $BC = 40$ km - 28 km = 12 km. Daher ist $BD = 12$ km : 2 = 6 km. Der gesuchte Weg beträgt folglich $AB + BD = 13$ km + 6 km = 19 km.

## II Runde 2

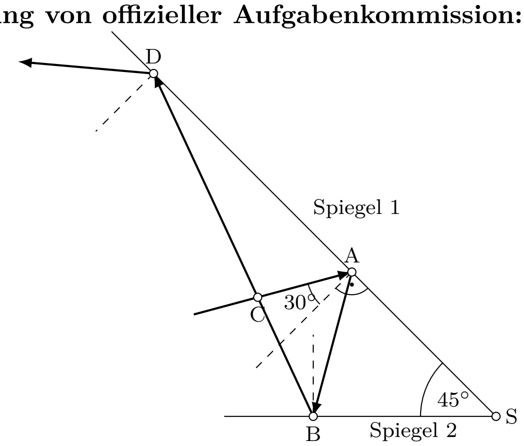
**Aufgabe 030622:**




Fällt ein Lichtstrahl auf einen ebenen Spiegel, so wird er so reflektiert, dass der Einfallswinkel $\alpha$ und der Reflexionswinkel $\alpha'$ gleich groß sind (siehe Abbildung).

a) Konstruiere den Verlauf eines Lichtstrahls, der auf den in der Abbildung 2) dargestellten Winkelspiegel unter einem Einfallswinkel von 30° fällt!
b) Welchen Winkel bildet der auf den Spiegel 1 einfallende Strahl mit dem vom Spiegel 2 reflektierten?

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**




a) Die folgende Zeichnung stellt den Verlauf des Lichtstrahles dar. Eine weitere Reflexion tritt nicht auf, da der bei $D$ reflektierte Lichtstrahl nicht mehr auf den Spiegel 2 trifft. Die kann man wie folgt beweisen:

Der Einfallswinkel bei $A$ beträgt 30°, also auch der Reflexionswinkel, und damit ist der Winkel $\angle BAS = 60°$. Nun ergibt sich nach Innenwinkelsummensatz im Dreieck $\triangle BAS$ für den Winkel $\angle ABS$:

$$\angle ABS = 180° - 45° - 60° = 75°$$

Der Einfallswinkel ergibt sich als Ergänzung zu 90°, also ist der Winkel $\angle ABC = 2 \cdot 15° = 30°$ als Summe von Einfalls- und Reflexionswinkel. Im Dreieck $\triangle BSD$ gilt dann:

$$\angle BDS = 180° - \angle ASB - \angle ABS - \angle ABC = 180° - 45° - 75° - 30° = 30°$$

Damit beträgt auch $\beta = 30°$. Dieser Winkel ist kleiner als $\angle BSD$, weshalb der letzte Lichtstrahl den Spiegel 1 nicht mehr treffen wird.

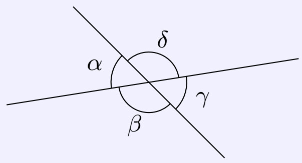
b) Gesucht ist Winkel $\angle BCA$. Nach dem Innenwinkelsummensatz im Dreieck $\triangle ABC$ ergibt sich:

$$\angle BCA = 180° - \angle BAC - \angle ABC = 180° - 2 \cdot 30° - 30° = 90°$$

Der gesuchte Winkel ist also ein rechter Winkel.

**Aufgabe 040622:**

Beim Schnitt zweier Geraden entstehen die Winkel $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ (Abbildung).
Wie groß sind diese Winkel, wenn die ersten drei von ihnen die Winkelsumme 234° haben?

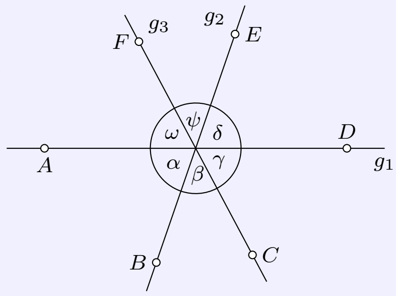



**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Über den Vollwinkel wird $\delta = 126°$. Mit den Beziehungen über Scheitel- und Nebenwinkel folgt dann $\alpha = 54°$, $\beta = 126°$, $\gamma = 54°$.

**Aufgabe 050622:**

Die drei Geraden $g_1$, $g_2$ und $g_3$ schneiden einander im Punkt $M$. Dabei entstehen Winkel mit den Maßen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\psi$ und $\omega$ (siehe Abbildung).

Wie groß sind diese 6 Winkelmaße, wenn
(1) $\gamma + \delta + \psi + \omega = 252°$ und
(2) $\alpha$ dreimal so groß wie $\beta$ ist?

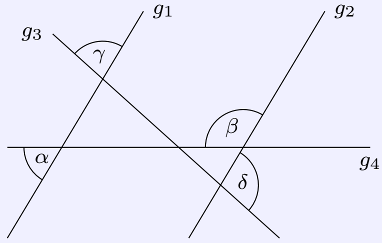



**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Es gilt: $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \psi + \omega = 360°$
und wegen (1) $\alpha + \beta = 108°$ also wegen (2) $4\beta = 108°$, d. h. $\beta = 27°$ und daher wegen (2) $\alpha = 81°$.

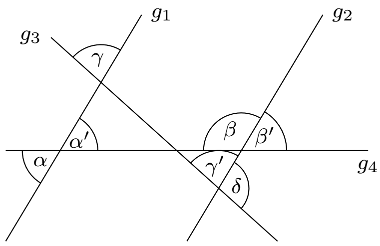
Weiter sind Scheitelwinkel, d. h. $\delta = \alpha = 81°$ und $\psi = \beta = 27°$. Nach der Nebenwinkelbeziehung wird $(\alpha + \beta) + \gamma = 180°$ und somit $\gamma = \omega = 72°$.

**Aufgabe 070621:**

Die Geraden $g_1$, $g_2$, $g_3$ und $g_4$ schneiden einander in der aus der Abbildung ersichtlichen Weise. Von den Größen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ und $\delta$ der dadurch entstehenden Winkel sei $\alpha = 50°$, $\beta = 130°$ und $\gamma = 70°$.
Ermittle $\delta$!



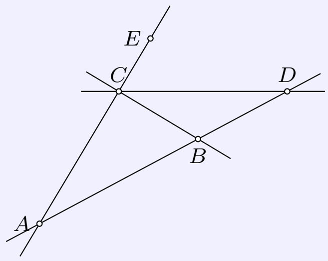

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**




Es gilt mit den Bezeichnungen in der Abbildung
$\alpha = \alpha'$ als Scheitelwinkelpaar
$\beta + \beta' = 180°$ als Nebenwinkelpaar mithin $\beta' = 180° - \beta = 50°$, also $\beta' = \alpha$. Daraus folgt $g_1 \parallel g_2$.

Nun ist ferner: $\gamma = \gamma'$ als Stufenwinkelpaar an geschnittenen Parallelen und $\gamma' + \delta = 180°$ als Nebenwinkel.
Damit wird $\delta = 180° - \gamma' = 110°$.

**Aufgabe 090623:**




Die Abbildung zeigt drei verschiedene Geraden durch einen Punkt $C$ und eine vierte Gerade, die nicht durch $C$ geht.
Diese möge die drei erstgenannten Geraden in den Punkten $A$, $B$ bzw. $D$ schneiden, wobei $B$ zwischen $A$ und $D$ liegen möge, Punkt $E$ liege auf der Geraden durch $A$ und $C$ so, dass $C$ zwischen $A$ und $E$ liegt.
Ferner gelte $\angle ECD \cong \angle ABC$.

Beweise, dass $\angle BCD \cong \angle BAC$ ist!

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Die Summe der Winkel $\angle ACB$ und $\angle ECD$ wird von $\angle BCD$ zu 180° ergänzt.
Die nach Voraussetzung ihr gleiche Summe der Winkel $\angle ACB$ und $\angle ABC$ wird von $\angle BAC$ zu 180° ergänzt (Winkelsumme im Dreieck $\triangle ABC$). Daraus folgt die Behauptung $\angle BCD \cong \angle BAC$.

**Aufgabe 190621:**
Gegeben seien zwei einander schneidende Geraden. Die Größen dreier der dabei entstehenden vier Schnittwinkel haben die Summe 226°.
Ermittle die Größe jedes einzelnen dieser vier Schnittwinkel!

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Die Größen aller vier Schnittwinkel haben die Summe 360°. Hiernach und wegen 360 - 226 = 134 hat einer der Schnittwinkel die Größe 134°.
Von den übrigen ist einer der Scheitelwinkel dieses Winkels, hat also ebenfalls die Größe 134°. Die anderen beiden sind jeweils Nebenwinkel des zuerst genannten Winkels. Wegen 180 - 134 = 46 hat daher jeder von ihnen die Größe 46°.
Die gesuchten Größen sind mithin: 131°, 46°, 131° und 46°.

# II.II Vier-, Vielecke

## I Runde 1

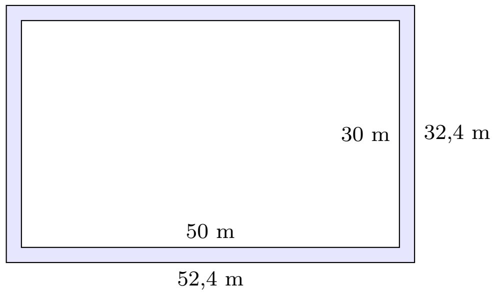
**Aufgabe V00603:**
Um ein Schwimmbad mit der Beckengröße 50 m mal 30 m wird ein 1,20 m breiter Weg mit Zementplatten ausgelegt.
Wie viel Platten sind erforderlich, wenn die Maße der Platten 30 cm mal 30 cm betragen?

**Lösung von Steffen Polster:**

Die auszulegende Fläche ist die Differenz der zwei Rechtecke (siehe Abildung). Damit wird für den Flächeninhalt

$$F = 52{,}4 \text{ m} \cdot 32{,}4 \text{ m} - 50 \text{ m} \cdot 30 \text{ m} = 197{,}76 \text{ m}^2$$

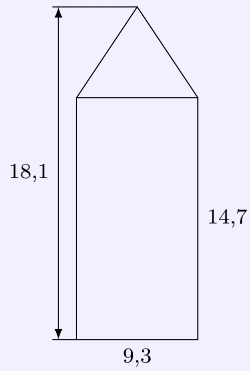
Ein Platte hat den Flächeninhalt $0{,}3 \text{ m} \cdot 0{,}3 \text{ m} = 0{,}09 \text{ m}^2$. Damit benötigt man $\frac{197{,}76}{0{,}9} = 2197{,}3 \approx 2200$ Platten.




**Aufgabe V00609:**

In Leipzig werden viele Häuser neu verputzt! Das Verputzen einer Giebelwand kostet ohne Arbeitslohn 131,17 DM.
Berechne die zu verputzende Fläche aus der Abbildung und die Kosten für 1 m$^2$ Kalkanstrich!

Hinweis: Maßzahlen in der Abbildung in Meter.



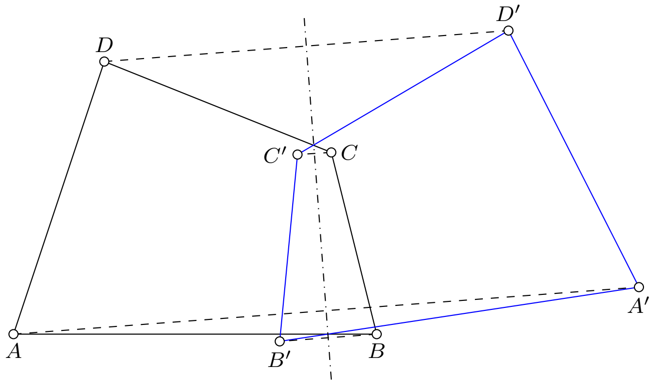

**Lösung von Steffen Polster:**
Die Giebelwand setzt sich aus einem Rechteck und einem Dreieck (Höhe = 18,1 - 14,7 = 3,4 m) zusammen. Für den Flächeninhalt ergibt sich somit

$$F = 9{,}3 \cdot 14{,}7 + \frac{1}{2} \cdot 9{,}3 \cdot 3{,}4 = 152{,}52 \text{ m}^2$$

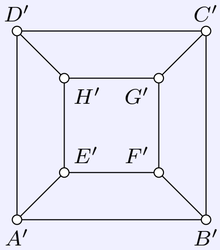
Die zu verputzende Fläche hat einen Inhalt von 152,5 m$^2$. 1 m$^2$ Putz kostet damit $\frac{131{,}17}{152{,}52} = 0{,}86$ DM.

**Aufgabe V00610:**
Zeichne ein beliebiges Viereck und eine Symmetrieachse, die das Viereck schneidet!
Konstruiere das zum ersten Viereck symmetrische!

**Lösung von Steffen Polster:**




**Aufgabe 040616:**



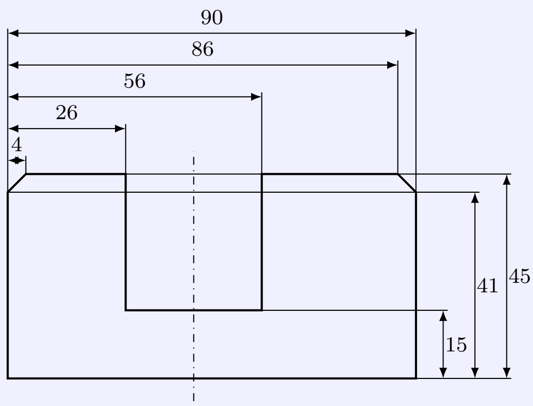

Die abgebildete Figur ist der Grundriss eines ebenflächig begrenzten Körpers.
Die Bilder seiner Eckpunkte $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$, $G$, $H$ sind mit $A'$, $B'$, $C'$, $D'$, $E'$, $F'$, $G'$, $H'$ bezeichnet. Das Quadrat $ABCD$ liegt auf der Grundrissebene; das Quadrat $EFGH$ liegt parallel zur Grundrissebene im Abstand von 4 cm.
Die Seite $AB$ ist 5 cm, die Seite $EF$ 3 cm lang.

Um welchen Körper handelt es sich? Baue ein Modell dieses Körpers! Das Material kannst du selbst wählen.

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Es handelt sich um einen Pyramidenstumpf.

**Aufgabe 060611:**

Berechne den Flächeninhalt der abgebildeten Figur! Runde das Ergebnis auf volle Quadratzentimeter! (Die Maßeinheit aller angegebenen Maßzahlen ist Millimeter.)




**Lösung von Steffen Polster:**
Aus einem Rechteck mit den Maßen 90 mm und 45 mm werden in der Mitte ein Quadrat der Seitenlänge

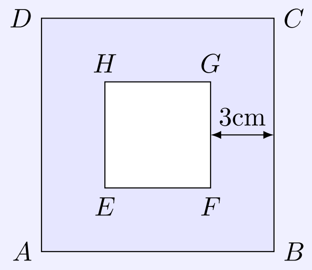
30 mm und an den oberen Ecken zwei rechtwinklige Dreiecke (Katheten je 4 mm) herausgeschnitten. Daraus ergibt sich:

$$A = 45 \cdot 90 - 30 \cdot 30 - 2 \cdot \frac{4 \cdot 4}{2} = 3134 \text{ mm}^2$$

Der Flächeninhalt der Figur beträgt rund 31 cm$^2$.

**Aufgabe 070612:**

Die Abbildung stellt zwei Quadrate $ABCD$, $EFGH$ dar. Sie sind so gelegen, dass die vier Diagonalen $AC$, $BD$, $EG$ und $FH$ einander in genau einem Punkt schneiden, und dass $AB \parallel EF$ gilt.
Die Differenz der Flächeninhalte der beiden Quadrate $ABCD$ und $EFGH$ beträgt 96 cm$^2$.
Berechne die Längen der Strecken $BC$ und $GH$!




**Lösung von Steffen Polster:**
Für die Seiten gilt $a = AB = BC = CD = DA$ sowie $b = EF = FG = GH = HE$ und nach Aufgabenstellung $a = b + 6$ cm.

Die Differenz der Flächeninhalte der zwei Quadrate ist somit (Angaben in cm$^2$):

$$A_{\text{groß}} - A_{\text{klein}} = a^2 - b^2 = (b+6)^2 - b^2 = b^2 + 12b + 36 - b^2 = 12b + 36 = 96$$

Daraus folgt sofort, dass $b = 5$ cm ist und $a = b + 6 = 11$ cm ist.

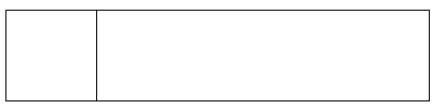
**Aufgabe 080611:**
a) Die Summe der Inhalte einer Rechteckfläche und einer Quadratfläche beträgt 3000 m$^2$. Die Quadratseite und eine Rechteckseite haben eine Länge von je 30 m.

a) Wie lang ist die andere Rechteckseite?
b) Zeichne beide Flächen im Maßstab 1 : 2000!

**Lösung von Steffen Polster:**
$a$ sei die Länge der Quadratseiten, $b$ die bekannte und $c$ die gesuchte Rechteckseite. Dann gilt (Angabe in Metern bzw. Quadratmetern):

$$A_Q + A_R = a^2 + b \cdot c \Rightarrow 3000 = 30^2 + 30 \cdot c \Rightarrow c = 70$$

Die unbekannte Rechteckseite ist 70 m lang.



b) siehe Abbildung. Die Quadratseite mit 30 m Länge muss in der Abbildung 3000 cm : 2000 = 1,5 cm groß sein.

**Aufgabe 120613:**
In einem Raum mit einer rechteckigen Bodenfläche von 11 m Breite und 36 m Länge stehen 6 Maschinen mit Standflächen von folgendem Flächeninhalt:

Maschine A: 15 $^2$ | Maschine D: 60 m$^2$
Maschine B: 5 m$^2$ | Maschine E: 18 m$^2$
Maschine C: 18 m$^2$ | Maschine F: 50 m$^2$

Für die Lagerung und Bereitstellung der zu bearbeitenden Werkstücke werden an den Maschinen weitere Flächen mit folgendem Flächeninhalt benötigt:

| | |
|---|---|
| An der Maschine A: 14 m$^2$ | An der Maschine D: 21 m$^2$ |
| An der Maschine B: 6 m$^2$ | An der Maschine E: 13 m$^2$ |
| An der Maschine C: 15 m$^2$ | An der Maschine F: 17 m$^2$ |

Die restliche Bodenfläche soll für Transportwege genutzt werden.

a) Berechne (in m$^2$) den Flächeninhalt der Bodenfläche, die für Transportwege zur Verfügung steht!

b) Wir nehmen an, dass die Anordnung der Maschinen und der Lagerplätze es gestattet, die Transportwege aus Rechteckflächen von gleicher Breite zusammenzusetzen. Die Summe der Längen dieser Rechteckflächen wollen wir dann als „Gesamtlänge der Transportwege“ bezeichnen.
Wie breit sind diese Transportwege, wenn sie eine Gesamtlänge von 48 m besitzen?

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
a) Der Flächeninhalt der Standfläche für die Maschinen beträgt 166 m$^2$, derjenige der Fläche für die Lagerung der Werkstücke 86 m$^2$, der Flächeninhalt der gesamten Bodenfläche wegen $11 \cdot 36 = 396$ insgesamt 396 m$^2$.
Mithin verbleiben wegen $396 - 166 - 86 = 144$ für die Transportwege 144 m$^2$.

b) Die Breite der Transportwege betrage $x$ m. Dann gilt $48 \cdot x = 144$, woraus man $x = 144 : 48$, also $x = 3$ erhält. Dann beträgt die gesuchte Breite 3 m.

**Aufgabe 130612:**
Für die „Galerie der Freundschaft“ ist ein rechteckiges Bild mit den Seitenlängen 18 cm und 12 cm durch einen rechteckigen Rahmen von 3 cm Breite aus Zeichenkarton eingerahmt worden.
Ermittle den Flächeninhalt dieses Rahmens!

**Lösung von Steffen Polster:**
Der Flächeninhalt des Bildes ist $12 \cdot 18 = 216\text{cm}^2$. Der Flächeninhalt von Rahmen und Bild wird

$$(12 + 2 \cdot 3) \cdot (18 + 2 \cdot 3) = 18 \cdot 24 = 432 \text{ cm}^2$$

Damit ist die Rahmenfläche gleich 432 cm$^2$ - 216 cm$^2$ = 216 cm$^2$.

**Aufgabe 180611:**
In einem Stadtbezirk Leipzigs wurden 260 große Wohnungen renoviert.
Bei einem Zehntel dieser Wohnungen hat jede Wohnung 55 m$^2$ Wohnfläche; bei einem Viertel der 260 Wohnungen hat jede Wohnung 67 m$^2$ Wohnfläche; jede andere der 260 Wohnungen hat 80 m$^2$ Wohnfläche.
Berechne die gesamte Wohnfläche dieser 260 renovierten Wohnungen!

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Ein Zehntel der 260 Wohnungen sind 26 Wohnungen; denn es gilt $260 : 10 = 26$.
Ein Viertel der 260 Wohnungen sind 65 Wohnungen; denn es gilt $260 : 4 = 65$.
Die restlichen Wohnungen sind 169 Wohnungen; denn es gilt $260 - 26 - 65 = 169$.

Die Wohnfläche der zuerst genannten 26 Wohnungen beträgt 1430 m$^2$; denn es gilt $26 \cdot 55 = 1430$.
Die Wohnfläche der danach genannten 65 Wohnungen beträgt 4355 m$^2$; denn es gilt $65 \cdot 67 = 4355$.
Die Wohnfläche der restlichen 169 Wohnungen beträgt 13520 m$^2$; denn es gilt $169 \cdot 80 = 13520$.
Die gesamte Wohnfläche der 260 Wohnungen beträgt 19305 m$^2$; denn es gilt $1430 + 4355 + 13520 = 19305$.

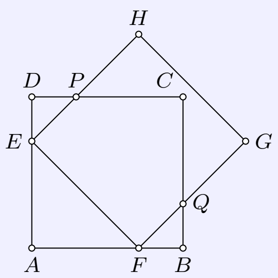
**Aufgabe 210611:**
Von einem Rechteck sind folgende Eigenschaften bekannt:
Wenn seine beiden Seitenlängen in Metern gemessen werden, so ergeben sich natürliche Zahlen als Maßzahlen. Die Differenz der beiden Seitenlängen beträgt 20 m. Der Umfang des Rechtecks beträgt 60 m.

a) Welchen Flächeninhalt hat dieses Rechteck?
b) Welche Längen erhalten seine beiden Seiten im Maßstab 1 : 250?
Zeichne das Rechteck in diesem Maßstab!

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
a) Verringert man die größere Seitenlänge des Rechtecks um 20 m, so verringert sich sein Umfang um 40 m, erreicht also den Wert 20 m. Andererseits entsteht dabei ein Quadrat.
Wegen $20 : 4 = 5$ beträgt seine Seitenlänge 5 m; dies ist zugleich die Länge der kleineren Seite des ursprünglichen Rechtecks. Die Länge seiner größeren Seite beträgt somit 25 m. Wegen $5 \cdot 25 = 125$ beträgt sein Flächeninhalt 125 m$^2$.

b) Im Maßstab 1 : 250 wird wegen 5 m = 500 cm und $500 : 250 = 2$ die kleinere Seitenlänge durch die Seitenlänge 2 cm wiedergegeben. Wegen 25 m = 2500 cm und $2500 : 250 = 10$ wird die größere Seitenlänge durch die Länge 10 cm wiedergegeben.

**Aufgabe 230613:**

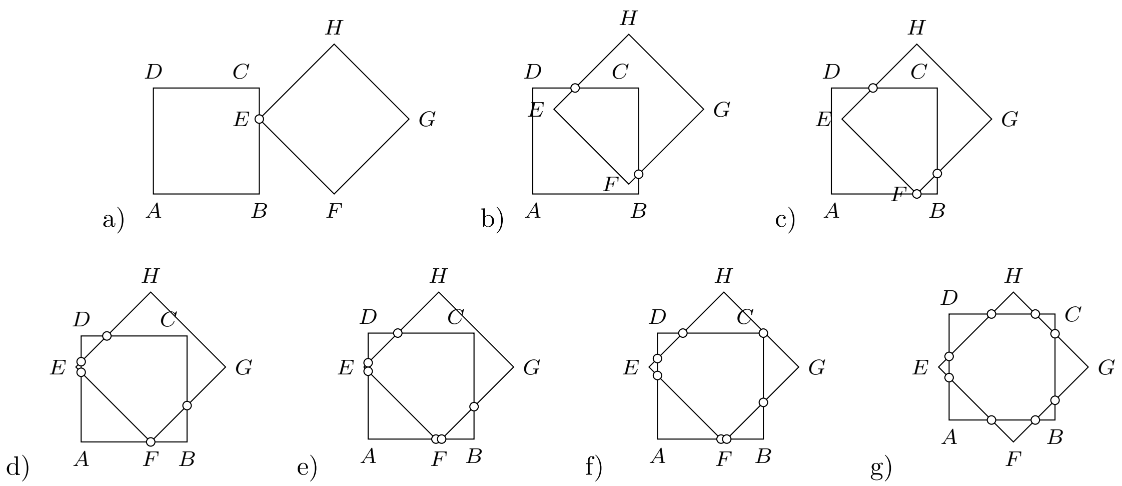



Im Bild sind zwei gleichgroße Quadrate $ABCD$ und $EFGH$ gezeichnet, die genau vier Randpunkte ($E$, $F$, $P$ und $Q$) gemeinsam haben. Zeichne zwei gleichgroße Quadrate $ABCD$ und $EFGH$, die so liegen, dass sie

a) genau einen Punkt, b) genau zwei Punkte,
c) genau drei Punkte, d) genau fünf Punkte,
e) genau sechs Punkte, f) genau sieben Punkte,
g) genau acht Punkte

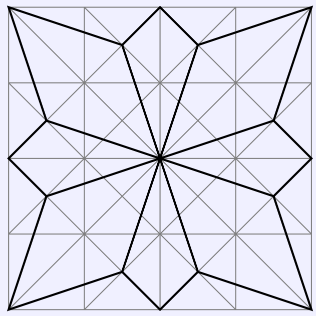
gemeinsam haben! Eine Begründung wird nicht verlangt.

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**

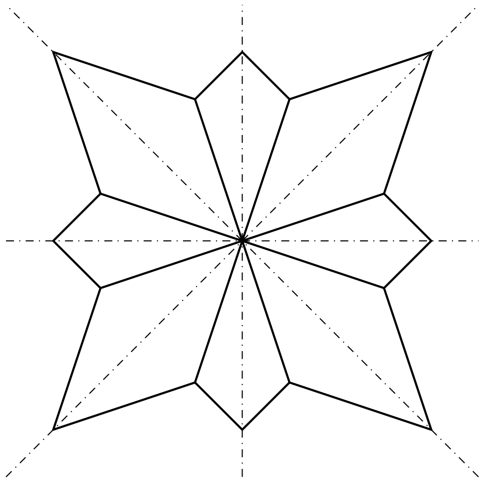



Die Abbildungen (a) bis (g) zeigen je eine Möglichkeit für die zu konstruierenden Quadrate.

**Aufgabe 250614:**
In dem Bild ist - auf einem (mit dünnen Linien gezeichneten) Hintergrund von Quadraten und ihren Diagonalen - mit dicken Linien ein Ornament gezeichnet.
Überprüfe mit durchsichtigem Papier (oder Folie), ob das Ornament axialsymmetrisch ist!
Überprüfe ferner, ob es Drehungen gibt, bei denen das Ornament sich selbst als Bild hat!
Ist beides der Fall, so nenne
a) die Anzahl aller Symmetrieachsen des Ornaments,
b) alle diejenigen Drehungen, bei denen das Ornament sich selbst als Bild hat!
Zu Aufgabe a) zeichne auch das Ornament und alle seine Symmetrieachsen!



**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**

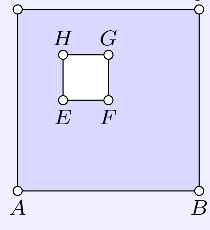


Die Überprüfung ergibt, dass das Ornament sowohl axialsymmetrisch als auch drehsymmetrisch ist.
a) Das Ornament hat genau vier Symmetrieachsen (siehe Abbildung).

b) Das Ornament hat genau bei den Drehungen um seinen Mittelpunkt um 90°, 180° und 270° sich selber als Bild, außerdem natürlich bei der Drehung um 0° (d. h. bei derjenigen Drehung, bei der jeder Punkt der Ebene sich selbst als Bild hat).

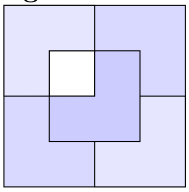
**Aufgabe 260611:**

In ein Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge 8 cm ist ein Quadrat $EFGH$ mit der Seitenlänge 2 cm so eingezeichnet, wie es das Bild zeigt.
$HG$ und $DC$ sind zueinander parallele Strecken mit dem Abstand 2 cm voneinander. $EH$ und $AD$ sind zueinander parallele Strecken mit dem Abstand 2 cm voneinander.




a) Berechne den Flächeninhalt der im Bild gefärbten Fläche!
b) Die gefärbte Fläche soll in fünf Teile zerlegt werden. Diese Teile sollen so gestaltet sein, dass man je zwei von ihnen durch Drehen oder Verschieben miteinander zur Deckung bringen kann.
Zeichne eine solche Aufteilung der gefärbten Fläche!

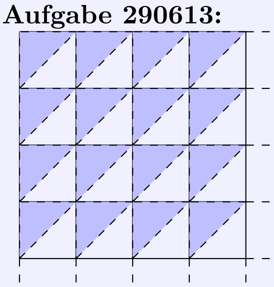
**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**



a) Die Quadrate $ABCD$ und $EFGH$ haben wegen $8 \cdot 8 = 64$ und $2 \cdot 2 = 4$ die Flächeninhalte 64 cm$^2$ bzw. 4 cm$^2$. Somit besitzt die schraffierte Fläche wegen $64 - 4 = 60$ den Flächeninhalt 60 cm$^2$.

b) Die Abbildung zeigt eine mögliche Lösung der Aufgabe.

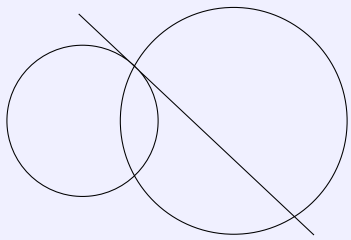
**Aufgabe 290613:**



Ein rechteckiger Fußboden, der 3,6 m lang und 2,7 m breit ist, soll mit zwei Sorten gleichgroßer, aber verschiedenfarbiger dreieckiger Teppichfliesen so ausgelegt werden, dass ein Muster entsteht, wie es durch Fortsetzen des Musters des Bildes zu erhalten ist.
Je zwei solcher dreieckigen Fliesen einer Farbe sollen durch einmaliges Zerschneiden einer quadratischen Fliese mit der Seitenlänge 30 cm hergestellt werden.
Wie viele quadratische Teppichfliesen werden von jeder der beiden Sorten insgesamt benötigt?

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Wegen 3,6m = 360cm, 2,7m = 270cm, $360 : 30 = 12$, $270 : 30 = 9$ und $12 \cdot 9 = 108$ lässt sich der Fußboden mit insgesamt 108 quadratischen Fliesen auslegen.
Das bleibt auch so, wenn man diese Fliesen zerschneidet und zu dem gewünschten Muster umordnet. Da dieses Muster die Fliesen beider Farben in einander gleichen Mengen enthält, werden von jeder der beiden Sorten quadratischer Teppichfliesen wegen $108 : 2 = 54$ insgesamt je 54 Stück benötigt.

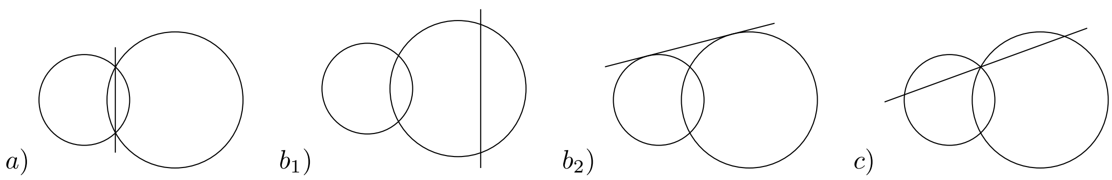
**Aufgabe 330613:**
Karin zeichnet zwei Kreise, die sich in zwei verschiedenen Punkten schneiden. Dann zeichnet sie eine Gerade und zählt an der entstandenen Figur,



1. wie viele Punkte es gibt, die als gemeinsamer Punkt (Schnitt- oder Berührungspunkt) von mindestens zwei der drei gezeichneten Linien vorkommen,
2. wie viele Gebiete es gibt, die von Teilen der Linien vollständig eingeschlossen werden und in ihrem Innern frei von anderen Linienteilen sind.

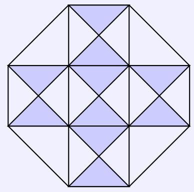
Die Abbildung zeigt als Beispiel eine Figur mit 3 Punkten und 4 Gebieten.
Zeichne Figuren mit
a) 2 Punkten, 4 Gebieten; b) 4 Punkten, 4 Gebieten; c) 4 Punkten, 5 Gebieten!

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Die Abbildung zeigt Beispiele für Zeichnungen der geforderten Art.

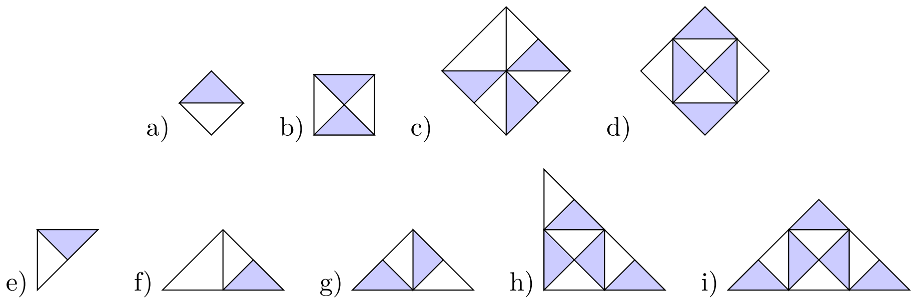


**Aufgabe 340612:**

Das Fliesenmuster in der Abbildung wurde aus 14 weißen und 10 gemusterten dreieckigen Fliesen zusammengesetzt. Man kann darin mehrere Quadrate und Dreiecke finden, die jeweils aus mehr als einer Fliese zusammengesetzt sind.
Wie viele solcher Quadrate lassen sich insgesamt finden?



**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Es gibt genau 4 Quadrate aus je zwei Fliesen, 5 Quadrate aus je vier Fliesen, 4 Quadrate aus je sieben Fliesen, 1 Quadrat aus acht Fliesen (siehe die Beispiele Abb. a, b, c, d), also insgesamt 14 Quadrate der gesuchten Art.




Es gibt genau 20 Dreiecke aus je zwei Fliesen, 8 Dreiecke aus je drei Fliesen, 8 Dreiecke aus je vier Fliesen, 4 Dreiecke aus je acht Fliesen, 4 Dreiecke aus je neun Fliesen (siehe die Beispiele Abb. e, f, g, h, i), also insgesamt 44 Dreiecke der gesuchten Art.

## II Runden 2 & 3

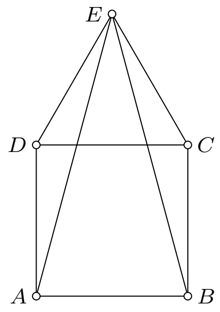
**Aufgabe 060624:**
Im Rahmen des Wiederaufbaus der Leipziger Innenstadt entstehen moderne Wohnkomplexe. Vor den Häusern werden Rasenflächen, Blumenbeete und Terrassen angelegt.
Für eine der rechteckigen Terrassen werden genau 400 Sandsteinplatten verwendet. Die Platten bedecken lückenlos den Boden. Jede dieser Platten ist 60 cm lang und 40 cm breit. Die Länge dieser Terrasse beträgt 10 m.
Ermittle die Breite dieser Terrasse!

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Der Flächeninhalt jeder dieser Platten beträgt $60 \cdot 40 \text{ cm}^2 = 2400 \text{ cm}^2$.
Daher bedecken 400 solche Platten eine Fläche von $400 \cdot 2400 \text{ cm}^2 = 960000 \text{ cm}^2 = 96 \text{ m}^2$.
Die Terrassenfläche ist rechteckig, ihr Flächeninhalt mithin gleich dem Produkt aus ihrer Länge und ihrer Breite. Die unbekannte Breite betrage $b$ Meter, dann gilt $10b = 96$, woraus man $b = 9{,}6$ erhält.
Die Breite der Terrasse beträgt also 9,6 m.

**Aufgabe 080623:**
Über der Seite $CD$ eines Quadrates $ABCD$ mit $AB = 4$ cm ist ein gleichseitiges Dreieck $\triangle DCE$ so zu konstruieren, dass das Quadrat und das Dreieck die Seite $CD$ gemeinsam haben.
Der Punkt $E$ des Dreiecks $\triangle DCE$ sei dabei außerhalb des Quadrates $ABCD$ gelegen. Verbinde $E$ mit $A$ und mit $B$!
Berechne die Größe des Winkels $\angle AEB$!

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Im Dreieck $\triangle AED$ gilt: (siehe Abbildung) $AD = DE$ (nach Konstruktion)

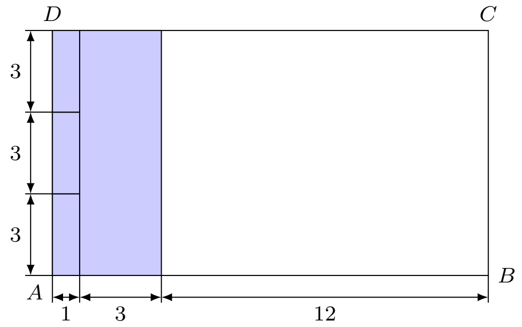
(1) Daraus folgt $\angle DAE = \angle AED$ (als Basiswinkel). Ferner ist:
(2) $\angle EDA = \angle EDC + \angle CDA = 150°$; ($\angle ABC$ bezeichnet die Größe des Winkels $\angle ABC$) denn $\angle EDC = 60°$ (Winkel im gleichseitigen Dreieck) und $\angle CDE = 90°$ (Winkel im Quadrat).

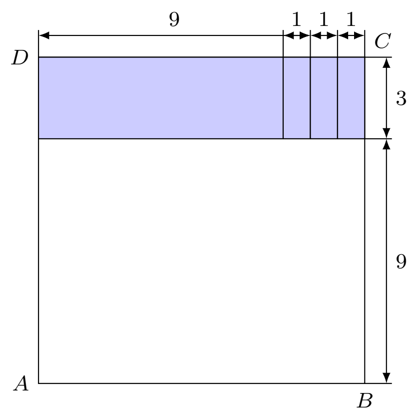



Aus (1), (2) und $\angle AED + \angle EDA + \angle DAE = 180°$ (nach Winkelsummensatz) folgt $\angle AED = 15°$. Entsprechend ist $\angle BEC = 15°$, also $\angle AEB = \angle DEC - \angle AED - \angle BEC = 30°$.

**Aufgabe 100624:**
Die Fläche des Rechtecks $ABCD$ mit den Seitenlängen $a = 16$ cm, $b = 9$ cm ist so in fünf Rechtecksflächen zu zerlegen, dass sich diese zu einer Quadratfläche zusammensetzen lassen, wobei sämtliche Teilrechtecke verwendet werden sollen und die gesamte Fläche des Quadrats lückenlos und ohne Überlappungen von den Flächen dieser Teilrechtecke ausgefüllt werden soll.
Gib eine Möglichkeit hierfür an!

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**

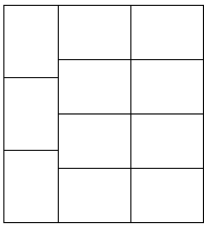



Alle Maßangaben in cm.
Das Rechteck $ABCD$ hat laut Aufgabe einen Flächeninhalt von $9\text{cm} \cdot 16\text{cm} = 144\text{cm}^2$.
Da das Quadrat den gleichen Flächeninhalt haben muss, und da 12 die einzige natürliche Zahl ist, deren Quadratzahl 144 beträgt, so muss seine Seite 12 cm lang sein.

**Aufgabe 130621:**
Eine rechteckige Glasscheibe ist 24 cm lang und 22 cm breit. Daraus sollen rechteckige Scheiben von 8 cm Länge und 6 cm Breite geschnitten werden.
Welches ist die größte Anzahl derartiger Scheiben, die man dabei erhalten kann?
Stelle eine Möglichkeit, diese größte Anzahl zu gewinnen, in einer Zeichnung im Maßstab 1 : 2 dar!

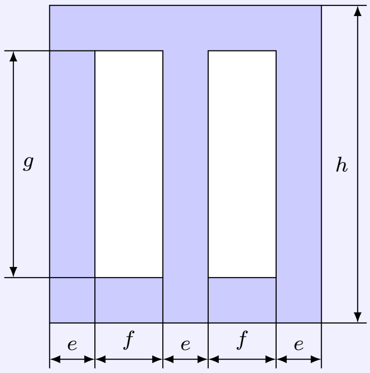
**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**



Die gesamte Glasscheibe hat wegen $24 \cdot 22 = 528$ einen Flächeninhalt von 528 $cm^2$. Jede der kleinen Glasscheiben hat wegen $6 \cdot 8 = 48$ einen Flächeninhalt von 48 $cm^2$.
Wegen $528 : 48 = 11$ lassen sich also höchstens 11 derartige kleine Scheiben aus der großen schneiden.

Dass dies auch tatsächlich möglich ist, zeigt die Abbildung.

**Aufgabe 150624:**



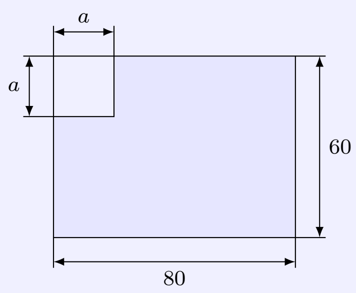

Berechne den Inhalt $A$ der gefärbten Fläche der in der Abbildung dargestellten Figur (die Maße sind der Abbildung zu entnehmen)

a) für $e = 10$ mm, $f = 15$ mm, $g = 50$ mm, $h = 70$ mm,
b) allgemein, indem du eine Formel für $A$ herleitest, in der nur die Variablen $e$, $f$, $g$, $h$ auftreten!

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
a) Die gefärbte Fläche kann man sich dadurch entstanden denken, dass aus einem Rechteck $R$ zwei Rechtecke $S$ und $T$ herausgeschnitten wurden, wobei wegen $10 + 15 + 10 + 15 + 10 = 60$ das Rechteck $R$ die Seitenlängen 60 mm und 70 mm hat und jedes der Rechtecke $S$, $T$ die Seitenlängen 15 mm und 50 mm.
Daher ergeben sich für $R, S, T$ wegen $60 \cdot 70 = 4200$ bzw. $15 \cdot 50 = 750$ die Flächeninhalte 4200 $mm^2$ bzw. 750 $mm^2$ bzw. 750 $mm^2$.
Somit hat wegen $4200 - 750 - 750 = 2700$ die gefärbte Fläche den Flächeninhalt $A = 2700$ $mm^2$.

b) Die Seitenlängen von $R$ sind $(3e + 2f)$ und $h$, die Seitenlängen von jedem der Rechtecke $S$, $T$ sind $f$ und $g$. Daher hat $R$ den Flächeninhalt $(3e + 2f)h$, und jedes der Rechtecke $S$, $T$ hat den Flächeninhalt $f \cdot g$.
Also ist $A = (3e + 2f)h - 2fg$.

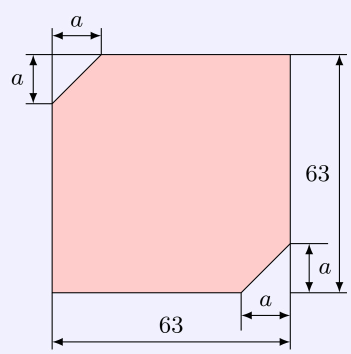
**Aufgabe 160623:**




Die abgebildete farbige Fläche besteht aus einer Rechteckfläche, aus der eine quadratische Fläche herausgeschnitten wurde.
Die farbige Fläche hat einen Flächeninhalt von 44 $cm^2$.
Aus den in der Abbildung angegebenen Maßen (in mm) ist die Seitenlänge $a$ (in mm) des herausgeschnittenen Quadrats zu berechnen.

**Lösung von Steffen Polster:**
Wegen $80 \cdot 60 = 4800$ beträgt der Flächeninhalt des großen Rechtecks 4 800 $mm^2$ = 48 $cm^2$.
Für den Flächeninhalt des herausgeschnittenen Quadrats verbleiben wegen $48 - 44 = 4$ somit 4 $cm^2$. Also beträgt seine Seitenlänge $a = 2$ cm, da 2 die einzige natürliche Zahl ist, die mit sich selbst multipliziert 4 ergibt.
Die Seitenlänge $a$ des herausgeschnittenen Quadrats beträgt somit $a = 20$ mm.

**Aufgabe 180624:**



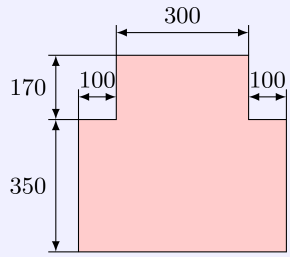

Die abgebildete farbige Fläche ist 38 $cm^2$ groß. Sie ist aus einer quadratischen Fläche entstanden, von der zwei (gleichgroße) dreieckige Flächen abgeschnitten wurden.

Aus den in der Abbildung angegebenen Maßen (in mm) ist die Seitenlänge $a$ der Dreiecke (in mm) zu berechnen.

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Wegen $63^2 = 3969$ hat das abgebildete Quadrat den Flächeninhalt 3969 $mm^2$. Wegen 38 $cm^2$ = 3800 $mm^2$ und 3969 - 3800 = 169 haben die beiden Dreieckflächen zusammen den Flächeninhalt 169 $mm^2$.

Da die beiden Dreiecke gleich groß und rechtwinklig-gleichschenklig sind, ergänzen sie sich zu einem Quadrat. Dieses Quadrat hat einen Flächeninhalt von 169 $mm^2$ und daher die Seitenlänge $a = 13$ mm.
Die Seitenlänge $a$ der genannten Dreiecke beträgt 13 mm.

**Aufgabe 220621:**
Die Abbildung zeigt den Grundriss eines Zimmers. Alle Maße sind in Zentimeter angegeben.
Das Zimmer ist 280 cm hoch. In diesem Zimmer ist ein alter Tapetenbelag von den Wänden und von der Decke zu entfernen. Danach sind Wände und Decke mit Makulatur zu streichen und zu tapezieren.




Errechne für diese Arbeiten mit Hilfe der folgenden Tabelle die insgesamt erforderlichen Lohnkosten!
Dabei ist jede Wand vollständig zu berücksichtigen, auch wenn Fenster und Türen vorhanden sind. (Es wird also angenommen, dass sich die Einsparung an Fläche wieder durch den komplizierten Arbeitsaufwand ausgleicht.) Das Ergebnis ist auf vollen Markbetrag zu runden.

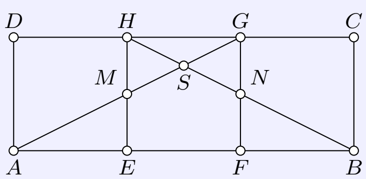
| Leistung | Lohnkosten pro m$^2$ |
|---|---|
| Alte Tapezierung entfernen | 28 Pf |
| Makulatur streichen | 26 Pf |
| Wandtapezierung | 83 Pf |
| Deckentapezierung | 112 Pf |

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Folgende Wandfläche $A_W$ ist zu bearbeiten:

$$A_W = (350 + 170 + 100 + 350 + 550 + 350 + 100 + 170) \cdot 280cm^2 = 599200cm^2$$

das sind 59,92 m$^2$, also rund 60 m$^2$.
Die Lohnkosten $L_W$ für die Bearbeitung der Wandfläche $A_W$ betragen somit rund $L_W = 60\cdot(28+26+83)$ Pf = 8220 Pf, das sind 82,20 M. Folgende Deckenfläche $A_D$ ist zu bearbeiten: $A_D = (350\cdot 550+170\cdot 350) =$ 252000 cm$^2$, das sind 25,2 m$^2$, also rund 25 m$^2$. Die Lohnkosten $L_D$ für die Bearbeitung der Deckenfläche $A_D$ betragen somit, mit analoger Rechnung, rund 41,83 M.
Die gesamten Lohnkosten $L$ betragen daher $L = 124{,}03$ M, das sind rund 124 M.

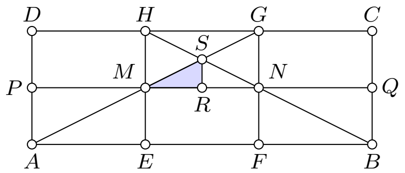
**Aufgabe 230622:**
Die abgebildete Figur $ABCD$ (siehe Abbildung) stellt ein Rechteck dar, das sich aus den drei gleichgroßen Quadraten $AEHD$, $EFGH$ und $FBCG$ zusammensetzt. Die Strecke $AG$ schneidet die Strecke $EH$ in deren Mittelpunkt $M$, die Strecke $BH$ schneidet die Strecke $FG$ in deren Mittelpunkt $N$. Der Flächeninhalt des Rechtecks $ABCD$ beträgt 48 Flächeneinheiten.




Ermittle
a) den Flächeninhalt des Dreiecks $SGH$,
b) den Flächeninhalt des Dreiecks $ABS$,
c) den Flächeninhalt den Vierecks $ASHD$!

Hinweis: Zur Herleitung darfst du den Satz verwenden, dass jedes Rechteck durch seine Diagonalen in vier gleich große Dreiecke zerlegt wird.

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Wegen 48 : 3 = 16 beträgt der Flächeninhalt jedes der drei Quadrate genau 16 Flächeneinheiten.




Die Gerade durch $M$ und $N$ schneide die Strecke $AD$ in $P$ und die Strecke $BC$ in $Q$. Der Abbildung ist dann zu entnehmen:

Da $M$ der Mittelpunkt von $EH$ und $N$ der Mittelpunkt von $FG$ ist, ist $MNGH$ ein Rechteck, das halb so groß ist wie das Quadrat $EFGH$. Sein Flächeninhalt beträgt daher 8 Flächeneinheiten.

Ganz entsprechend werden auch die anderen beiden Quadrate durch die Gerade durch $P$ und $Q$ jeweils in zwei Rechtecke mit je 8 Flächeneinheiten Inhalt zerlegt.

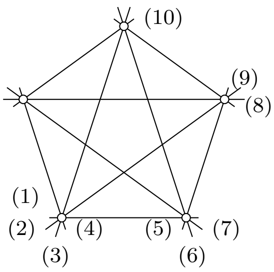
a) Die Diagonalen $MG$ und $NH$ zerlegen das Rechteck $MNGH$ in vier inhaltsgleiche Teildreiecke. Jedes von ihnen, und folglich auch das Dreieck $SGH$, hat einen Inhalt von 2 Flächeneinheiten.
b) Der Flächeninhalt des Dreiecks $ABS$ ist gleich der Summe der Flächeninhalte der (untereinander gleich großen) Dreiecke $AEM$ und $FBN$, des Rechtecks $EFNM$ sowie des Dreiecks $MNS$.
Die Dreiecke $AEM$ und $FBN$ sind jeweils halb so groß wie das Rechteck $EFMN$, ihr Inhalt beträgt daher jeweils 4 Flächeneinheiten. Wegen $2 \cdot 4 + 8 + 2 = 18$ beträgt daher der Flächeninhalt des Dreiecks $ABS$ 18 Flächeneinheiten.

c) Der Flächeninhalt des Vierecks $ASHD$ ist gleich der Summe der Flächeninhalte des Dreiecks $AMP$, des Rechtecks $PMHD$ und des Dreiecks $MSH$. Wegen $4 + 8 + 2 = 14$ beträgt daher der Flächeninhalt des Vierecks $ASHD$ 14 Flächeneinheiten.

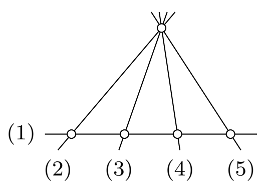
**Aufgabe 230624:**
Fünf voneinander verschiedene Punkte einer Ebene sollen durch Geraden miteinander verbunden werden. Dabei sollen stets alle möglichen Verbindungsgeraden gezeichnet werden.

Uwe behauptet: Die fünf Punkte können so liegen, dass es genau zehn verschiedene Verbindungsgeraden gibt.
Norbert behauptet: Die fünf Punkte können aber auch so liegen, dass es nur fünf Verbindungsgeraden gibt.
Fritz behauptet: Die fünf Punkte können sogar so liegen, dass es nur eine einzige Verbindungsgerade gibt.
a) Zeige durch Zeichnung von je einem Beispiel, dass alle drei Aussagen wahr sind!
b) Untersuche, ob bei entsprechender Lage der fünf Punkte auch noch andere Anzahlen verschiedener Verbindungsgeraden vorkommen können, und zeichne auch dafür Beispiele!

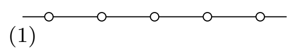
**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
a) Folgende Beispiele zeigen, dass alle drei Aussagen wahr sind:



10 Verbindungsgeraden

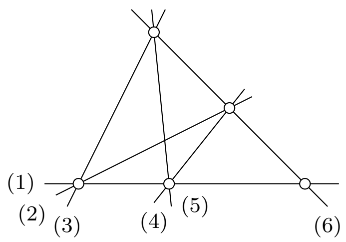


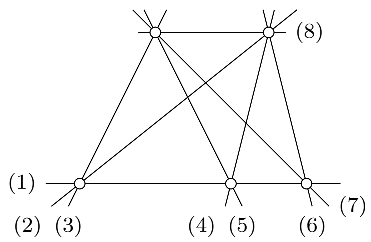
5 Verbindungsgeraden



1 Verbindungsgerade

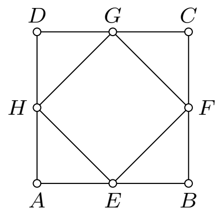
b) Folgende beiden Beispiele zeigen, dass die fünf Punkte auch so liegen können, dass es genau 6 bzw. genau 8 verschiedene Verbindungsgeraden gibt:




**Aufgabe 250623:**
Es sei $ABCD$ ein Quadrat mit der Seitenlänge 14 cm. Die Punkte $E$, $F$, $G$ und $H$ seien die Mittelpunkte der Quadratseiten. Dabei liege $E$ auf $AB$, $F$ auf $BC$, $G$ auf $CD$, $H$ auf $DA$.
a) Konstruiere dieses Quadrat und verbinde die Mittelpunkte $E$ und $F$, $F$ und $G$, $G$ und $H$ sowie $H$ und $E$ durch Strecken!
b) Ermittle den Flächeninhalt der Fläche $EFGH$!

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**




b) Die Strecken $EG$ und $FH$ zerlegen das Quadrat $ABCD$ in vier inhaltsgleiche Quadrate. Jedes dieser Quadrate wird durch die eingezeichnete Diagonale in zwei (gleichschenklig-rechtwinklige) inhaltsgleiche Dreiecke zerlegt.

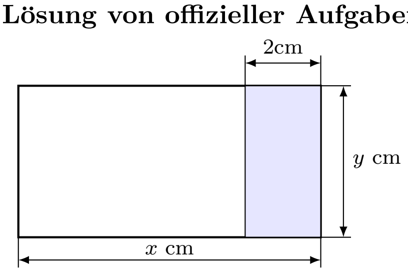
Das Quadrat $ABCD$ ist aus acht solchen Dreiecken zusammengesetzt, die Fläche $EFGH$ aus vier solchen Dreiecken; ihr Flächeninhalt ist daher halb so groß wie der von $ABCD$. Wegen $14 \cdot 14 = 196$ hat $ABCD$ den Flächeninhalt 196cm$^2$.
Wegen $196 : 2 = 98$ hat somit $EFGH$ den Flächeninhalt 98cm$^2$.

**Aufgabe 280623:**
Rolf zeichnet ein Rechteck. Er verkleinert dann dessen größere Seitenlänge um 2 cm und stellt fest:

Dabei entsteht ein zweites Rechteck, dessen Flächeninhalt um 8 cm$^2$ kleiner ist als der Flächeninhalt des ersten Rechtecks.
Ferner vergrößert er beide Seitenlängen des ersten Rechtecks um je 1 cm und stellt fest:

Dabei entsteht ein drittes Rechteck, dessen Flächeninhalt um 13 cm$^2$ größer ist als der Flächeninhalt des ersten Rechtecks.
Weise nach, dass sich allein aus Rolfs Feststellungen die beiden Seitenlängen des ersten Rechtecks ermitteln lassen!
Gib diese Seitenlängen an!

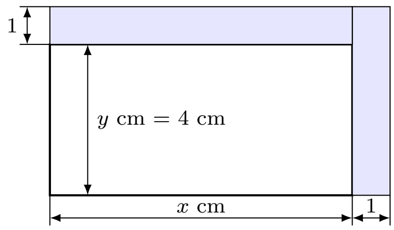
**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**




Das Verkleinern der größeren Seitenlänge des ersten Rechtecks kann erfolgen, indem ein Teilrechteck abgeschnitten wird, dessen eine Seitenlänge 2 cm und dessen Flächeninhalt 8 cm$^2$ beträgt.
Wegen $8 : 2 = 4$ beträgt seine andere Seitenlänge 4 cm. Sie ist zugleich die kleinere Seitenlänge des ersten Rechtecks; diese ist damit eindeutig ermittelt.

Das Vergrößern beider Seitenlängen des ersten Rechtecks kann erfolgen, indem zwei Teilrechtecke hinzugefügt werden, eines mit der Seitenlänge 1 cm und (wegen $4 + 1 = 5$) 5 cm, also einem Flächeninhalt von 5 cm$^2$, das andere mit einer Seitenlänge 1 cm und (wegen 13 - 5 = 8) dem Flächeninhalt 8 cm$^2$.

Wegen $8 : 1 = 8$ beträgt seine andere Seitenlänge 8 cm. Sie ist zugleich die größere Seitenlänge des ersten Rechtecks; auch diese ist damit eindeutig ermittelt.

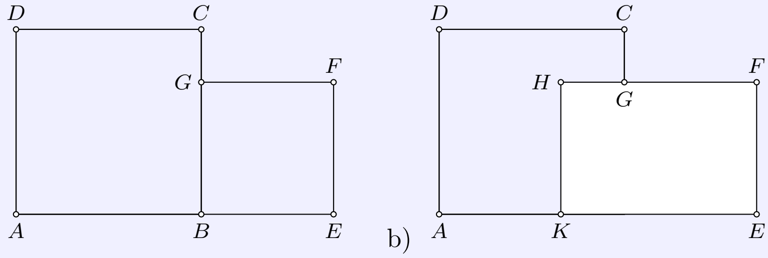



In der Abbildung hat jede farbige Flächen den Flächeninhalt 13 cm$^2$.

Somit lässt sich eindeutig ermitteln: Die Seitenlängen des ersten Rechtecks betragen 4 cm und 8 cm.

**Aufgabe 340622:**
Die Gärten von Familie Kniffel und Familie Knobel haben jeweils die Form eines Quadrates und grenzen so aneinander, wie die Abbildung a zeigt.
Die Fläche von Kniffels Garten beträgt 1225 Quadratmeter, die von Knobels Garten 625 Quadratmeter.

a) Welche Breite $AD$ bzw. $EF$ haben die Gärten?
b) Familie Kniffel gibt Familie Knobel ein Stück ihres Gartens ab. Danach haben beide Gärten gleichgroße Fläche. Wie groß ist diese?
c) Abbildung b zeigt die neue Aufteilung. Um welche Länge $GH$ ist Knobels Garten länger geworden?




a) b)

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
(a) Wegen $35 \cdot 35 = 1225$ hat ein Quadrat mit der Seitenlänge 35 m den Flächeninhalt 1225 Quadratmeter. Also ist die Breite von Kniffels Garten $AD = 35$ m. Aus $25 \cdot 25 = 625$ folgt ebenso $EF = 25$ m.

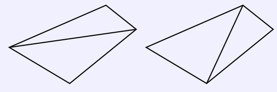
(b) Wegen $1225 + 625 = 1850$ haben beide Gärten zusammen 1850 Quadratmeter. Nach der Aufteilung in zwei gleichgroße Flächen hat jede von ihnen wegen $1850 : 2 = 925$ somit 925 Quadratmeter.

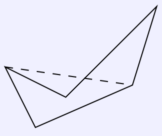
(c) In dem Rechteck $KEFH$ mit diesem Flächeninhalt und der Seitenlänge $EF = 25$ m ist wegen $925 : 25 = 37$ die andere Seitenlänge $FH = 37$ m.
Damit ergibt sich $GH = FH - FG = 37\text{m} - 25\text{m} = 12\text{m}$.

**Aufgabe 340631:**
Jedes konvexe Vieleck lässt sich in Dreiecke zerlegen, deren Eckpunkte zugleich Eckpunkte des Vielecks sind. Bei einem Viereck beispielsweise findet man dafür genau 2 Möglichkeiten (siehe Abbildung a). Skizziere für ein selbstgewähltes

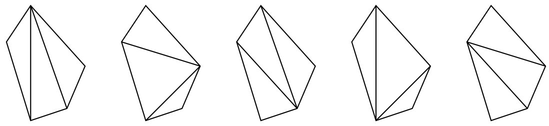
a) konvexes Fünfeck b) konvexes Sechseck
alle Zerlegungen dieser Art!

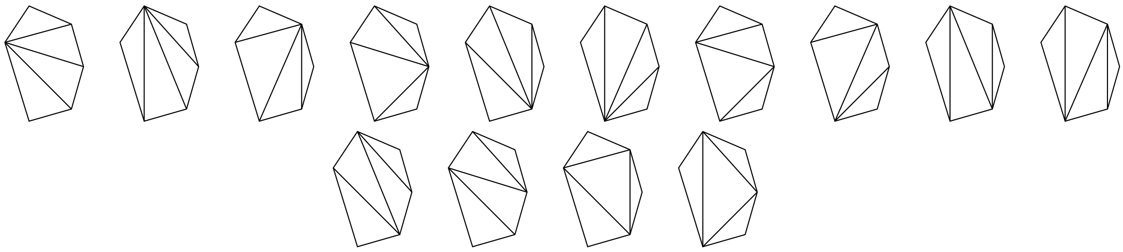
Hinweis: Ein Vieleck wird genau dann konvex genannt, wenn alle seine Diagonalen ganz der Fläche des Vielecks angehören. Ein Beispiel für ein Vieleck, das nicht konvex ist, zeigt Abbildung b.

a) 

b) 

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Die Abbildungen a, b zeigen Zeichnungen der verlangten Art.

a) 

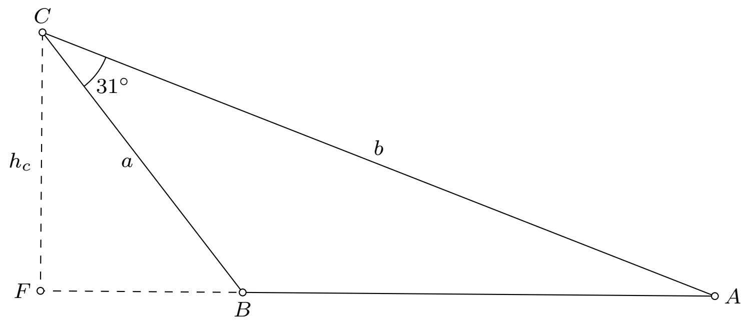
b) 

# II.III Konstruktionen

## I Runde 1

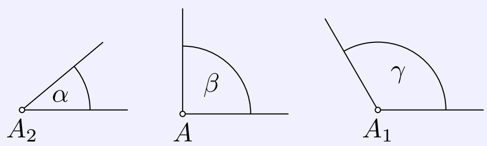
**Aufgabe V00608:**
Konstruiere ein Dreieck aus: $a = 4{,}8$ cm, $b = 10{,}6$ cm und $\gamma = 31°$.
Konstruiere die Höhe $h_c$ mit dem Zirkel! Miss die anderen Stücke!

**Lösung von Steffen Polster:**

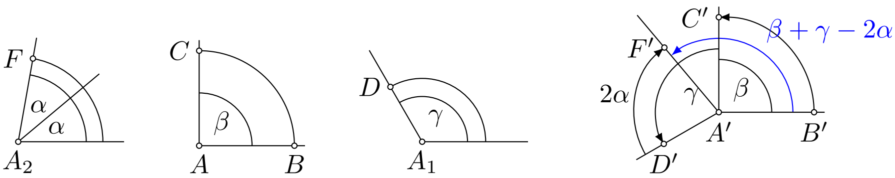



Messung: $c \approx 6{,}9$ cm; $\alpha \approx 21°$; $\beta \approx 128°$; $h_c \approx 3{,}8$ cm

**Aufgabe 050613:**
Gegeben sind die Winkel $\alpha, \beta$ und $\gamma$ (siehe Abbildung)
a) Konstruiere den Winkel $\beta + \gamma - 2\alpha$ mit Zirkel und Lineal!
b) Beschreibe die Konstruktion!



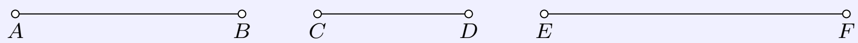

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
a) siehe Abbildung



b) Konstruktionsbeschreibung:
Ich zeichne einen Strahl mit dem Anfangspunkt $A'$. Dann schlage ich um den in der Abb. gegebenen Punkt $A$ und um $A'$ je einen Kreisbogen mit dem gleichen Radius.
Der Kreisbogen um $A$ schneidet die Schenkel des Winkels $\beta$ in den Punkten $B$ und $C$. Der Kreisbogen um $A'$ schneidet den Strahl im Punkt $B'$.
Dann schlage ich um $B'$ mit $BC$ als Radius einen Kreisbogen, der den Kreisbogen durch $B'$ in $C'$ schneidet. Ich verbinde $A'$ mit $C'$.
Dann ist $\angle B'A'C'$ der verlangte Winkel $\beta$.

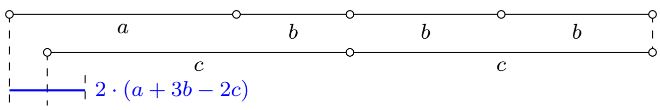
Nun trage ich in der gleichen Weise im Punkt $A'$ an $A'C'$ entgegen dem Uhrzeigersinn den Winkel $\gamma$ an. Dabei erhalte ich (siehe Abbildung) den Punkt $D'$.
Schließlich trage ich in $A'$ an $A'D'$ im Uhrzeigersinn den Winkel $2\alpha$ an (der Winkel $2\alpha$ wurde vorher in der für den Winkel $(\beta + \gamma)$ beschriebenen Weise konstruiert). Das ergibt den Punkt $F'$.
Der Winkel $\angle B'A'F'$ ist der verlangte Winkel $(\beta + \gamma - 2\alpha)$.

**Aufgabe 060613:**




Gegeben sind drei Strecken mit den Längen $a$, $b$ und $c$ (siehe Abbildung).
Konstruiere eine Strecke mit der Länge $2 \cdot (a + 3b - 2c)$!
Anmerkung: Bei der Konstruktion darf die Maßeinteilung des Lineals nicht benutzt werden. Eine Konstruktionsbeschreibung wird nicht verlangt.

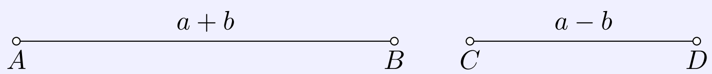
**Lösung von Steffen Polster:**



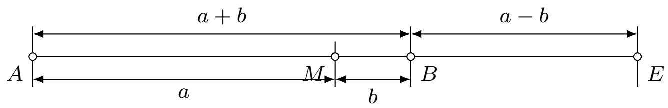

Auf einer Geraden wird die Strecke $AB$ abgetragen und an diese nacheinander dreimal die Strecke $CD$. Vom erreichten Endpunkt wird die Strecke $EF$ zweimal in entgegengesetzter Richtung abgetragen.

Die entstehende Strecke zwischen dem Startpunkt und dem jetzt erreichten Punkt ist dann $a + 3b - 2c$ lang. Diese Strecke wird verdoppelt werden und hat die gesuchte Länge (in der Abbildung blau).

**Aufgabe 110612:**
Von den beiden abgebildeten Strecken $AB$ und $CD$ hat die erste die Länge $a+b$, die zweite die Länge $a - b$.
Konstruiere unter ausschließlicher Verwendung von Zirkel und Lineal eine Strecke der Länge $a$ und eine Strecke der Länge $b$! Beschreibe und begründe deine Konstruktion!

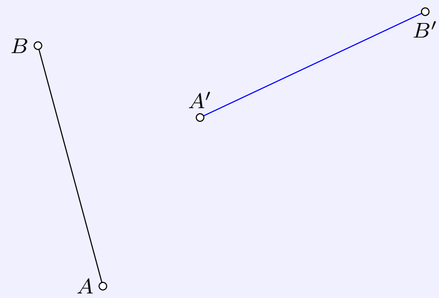



**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Konstruktionsbeschreibung:
(1) Wir zeichnen die Strecke $AB$.
(2) Wir verlängern die Strecke $AB$ über $B$ hinaus um (eine Strecke der gleichen Länge wie) $CD$.
(3) Ist $E$ der Endpunkt dieser Verlängerung, so halbieren wir die Strecke $AE$. Der Mittelpunkt von $AE$ sei $M$ genannt. Dann ist $AM$ eine Strecke der Länge $a$ und $MB$ eine Strecke der Länge $b$.

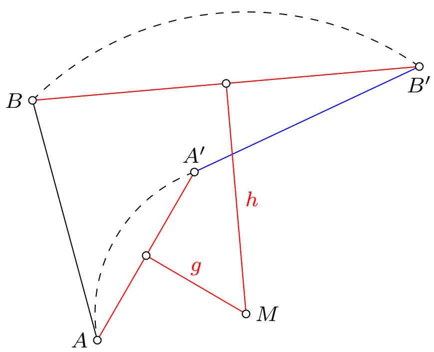



Begründung: Nach Konstruktion hat $AE$ die Länge $a+b+a-b=2a$. Daher hat $AM$ die Länge $a$ sowie $MB$ die Länge $a+b-a=b$.

**Aufgabe 310612:**
a) Begründe, dass jede Drehung, die einen gegebenen Punkt $A$ in einen anderen gegeben Punkt $A'$ überführt, ihren Drehpunkt $M$ auf der Mittelsenkrechten von $AA'$ haben muss!
b) Die Abbildung zeigt zwei einander gleichlange Strecken $AB$ und $A'B'$.
Konstruiere den Drehpunkt $M$ derjenigen Drehung, bei der $A$ in $A'$ und $B$ in $B'$ übergeht, also die Strecke $AB$ das Bild $A'B'$ hat!
Eine Konstruktionsbeschreibung wird nicht verlangt.




**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**

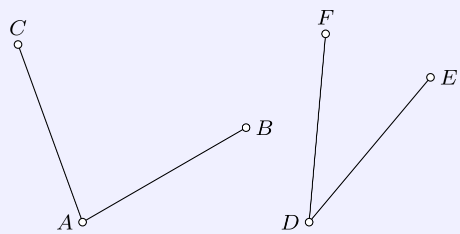



a) Wenn $M$ der Drehpunkt einer Drehung ist, die $A$ in $A'$ überführt, so gilt $MA = MA'$. (1)
Daraus folgt, dass $M$ auf der Mittelsenkrechten von $AA'$ liegen muss, da dies für alle Punkte $M$ gilt, die (1) erfüllen.

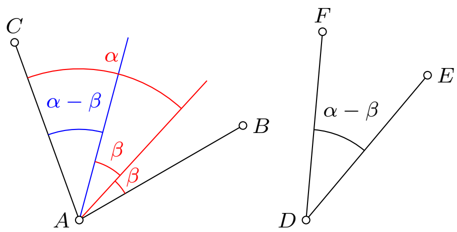
b) Die Abbildung zeigt eine geforderte Konstruktion.
$g$ und $h$ sind die Mittelsenkrechten von $AA'$ bzw. $BB'$, ihr Schnittpunkt ist der gesuchte Punkt $M$. Zur Kontrolle kann man überprüfen, dass im Kreis um $M$ durch $A$ die Radien $MA$, $MA'$ einen gleichgroßen Winkel bilden wie $MB$, $MB'$ im Kreis um $M$ durch $B$.

**Aufgabe 320613:**

Gegeben seien zwei Winkel $BAC$ und $EDF$ mit den Maßen $\alpha+\beta$ bzw. $\alpha-\beta$ (siehe Abbildung).
Konstruiere unter alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal zwei Winkel mit den Maßen $\alpha$ und $\beta$.
Beschreibe, wie du die Konstruktion gefunden hast.




**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**

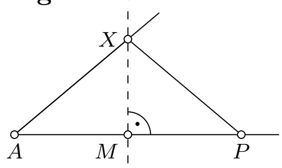



Wenn man die Winkelmaße $\alpha + \beta$ und $\alpha - \beta$ addiert bzw. subtrahiert, so erhält man $2\alpha$ bzw. $2\beta$. Entsprechend kann man durch Antragen des Winkels mit dem Maß $\alpha - \beta$ an den Strahl $AB^+$ bzw. $AC^+$ Winkel mit den Maßen $2\alpha$ bzw. $2\beta$ zeichnen. Diese Winkel kann man halbieren und so je einen Winkel mit den Maßen $\alpha$ bzw. $\beta$ erhalten.

## II Runde 2

**Aufgabe 010624:**
Zeichne einen beliebigen Winkel und nenne seinen Scheitelpunkt $A$! Wähle auf einem der beiden Schenkel einen beliebigen Punkt und nenne ihn $P$!
Konstruiere nun auf dem anderen Schenkel einen Punkt $X$ so, dass $PX = AX$ ist! Begründe die Konstruktion!

**Lösung von Steffen Polster:**



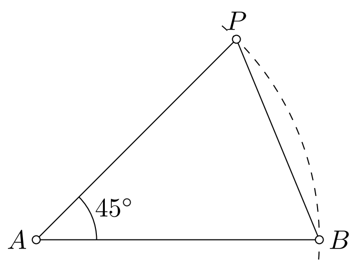

Alle Punkte, die von $A$ und $P$ den gleichen Abstand haben, liegen auf der Mittelsenkrechten der Strecke $\overline{AB}$.
Konstruiert man diese Mittelsenkrechte, so schneidet sie den zweiten Schenkel des Winkels im gesuchten Punkt $X$.

**Aufgabe 020625:**
Zeichne eine Strecke $AB = 5$ cm! Trage in $A$ an $AB$ den Winkel $\alpha = 45°$ an!
Gesucht ist auf dem Schenkel, auf dem nicht der Punkt $B$ liegt, ein Punkt $P$ mit folgender Eigenschaft:

Verbindet man $P$ und $B$, dann soll $\angle ABP = \angle APB$ sein.
Wie kann man diesen Punkt P konstruieren?

**Lösung von Steffen Polster:**

Die Punkte $A, B$ und $P$ bilden ein Dreieck, bei dem die zwei Winkel bei $B$ und $P$ gleich groß sind. Das Dreieck $\triangle ABP$ ist also gleichschenklig, die Basis ist $BP$ und die Schenkel sind $AB = AP$. Damit findet man den Punkt $P$, indem man die Strecke $\overline{AB} = 5$ cm auf dem zweiten Schenkel abträgt.

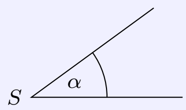



**Aufgabe 030623:**
Gegeben seien zwei Punkte $A$ und $B$, deren Abstand 10 cm beträgt. Du hast als Hilfsmittel nur ein Lineal von 8 cm Länge (ohne Zentimetereinteilung) und einen Zirkel zur Verfügung.
Zeichne die Gerade, die durch $A$ und $B$ geht, und begründe die Konstruktion!

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Man schlägt um $A$ und um $B$ Kreise mit gleichem Radius, der etwas größer als 5 cm sein muss.

Die beiden Schnittpunkte dieser Kreise werden durch das Lineal miteinander verbunden und die so entstandene Strecke mit Zirkel und Lineal halbiert. Dann ist der Halbierungspunkt auch der Mittelpunkt der Strecke $AB$, und diese lässt sich nunmehr mit dem Lineal zeichnen.

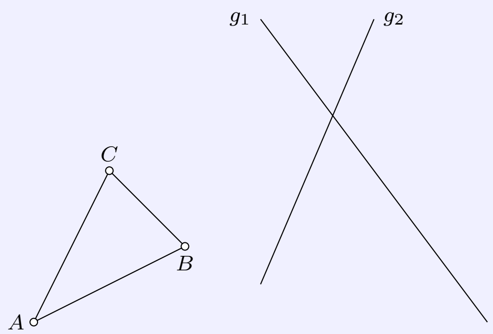
**Aufgabe 060623:**
Gegeben ist ein Winkel mit dem Gradmaß $\alpha = 36°$ (siehe Abbildung).
Konstruiere unter alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal einen Winkel, dessen Gradmaß 99° beträgt!




**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Der geforderte Winkel lässt sich als Summe aus einem rechten Winkel und einem Winkel vom Gradmaß 9° konstruieren.
Der rechte Winkel wird wie üblich konstruiert. Dann halbiert man den gegebenen Winkel und halbiert einen der beiden so erhaltenen Winkel (Gradmaß $\frac{\alpha}{2} = 18°$) noch einmal. Dadurch entsteht ein Winkel vom Gradmaß $\frac{\alpha}{4} = 9°$.

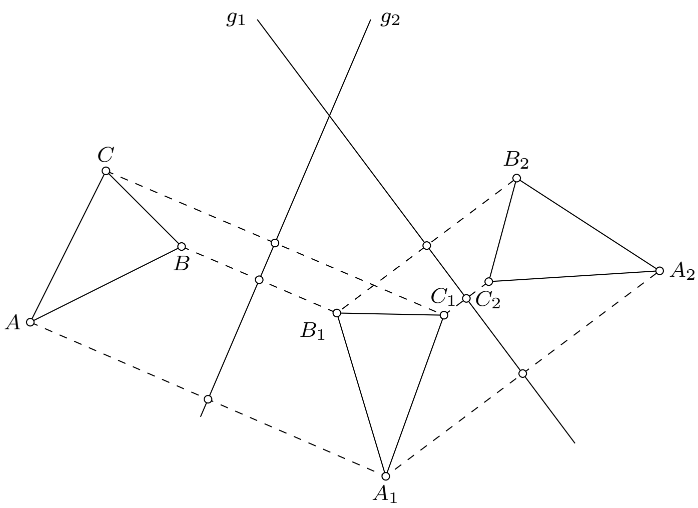
Man addiert auf die im Lehrbuch Klasse 5 angegebene Weise den rechten Winkel und den Winkel von 9° und erhält, wie verlangt, einen Winkel von 99°.

**Aufgabe 100621:**
Die Abbildung zeigt ein Dreieck $\triangle ABC$ und zwei Geraden $g_1$ und $g_2$. Das Dreieck $\triangle ABC$ soll nacheinander an den Geraden $g_1$ und $g_2$ gespiegelt werden.



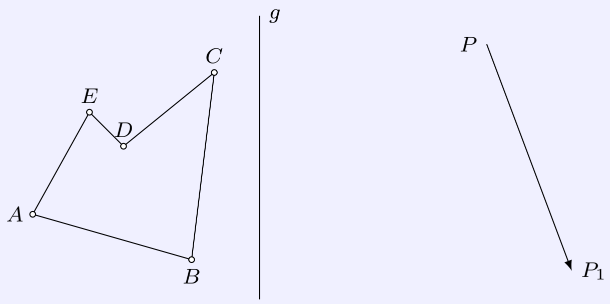

Konstruiere unter alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal das dabei entstehende Dreieck $\triangle A_2B_2C_2$!
(Konstruktionsbeschreibung wird nicht verlangt.)

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**

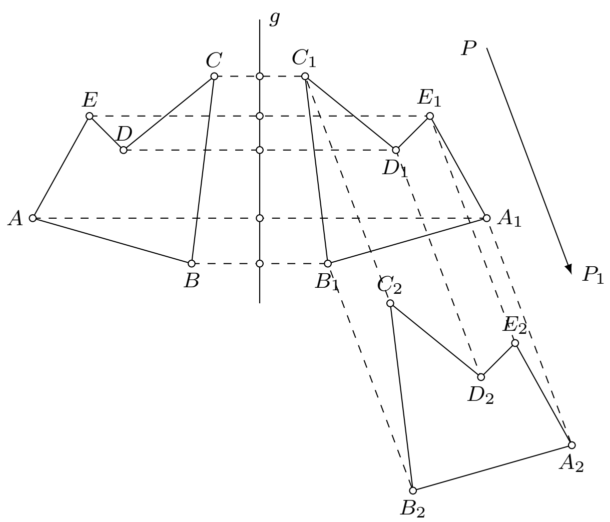



**Aufgabe 110621:**
Das auf der untenstehenden Zeichnung abgebildete Fünfeck $ABCDE$ soll an der Geraden $g$ gespiegelt werden. Auf das so entstandene Fünfeck $A_1B_1C_1D_1E_1$ ist anschließend die Verschiebung anzuwenden, die durch den Verschiebungspfeil $\overrightarrow{PP_1}$ gegeben ist.

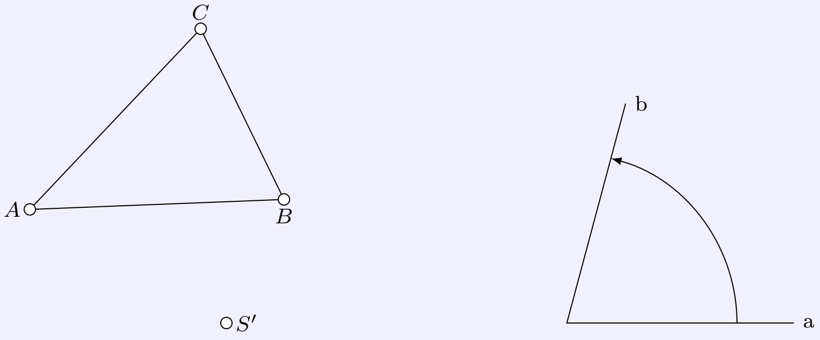
Konstruiere unter alleiniger Verwendung von Zirkel, Lineal und Zeichendreieck auf dem Arbeitsblatt das dadurch entstehende Fünfeck $A_2B_2C_2D_2E_2$! Eine Konstruktionsbeschreibung wird nicht verlangt.



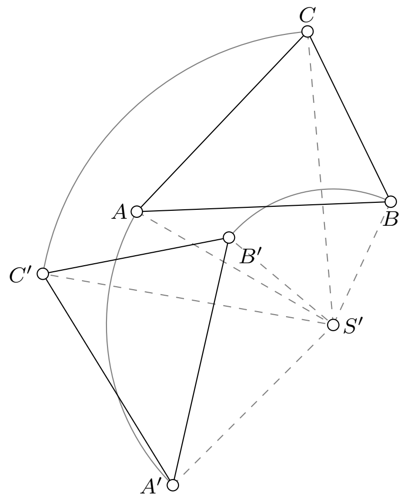

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**



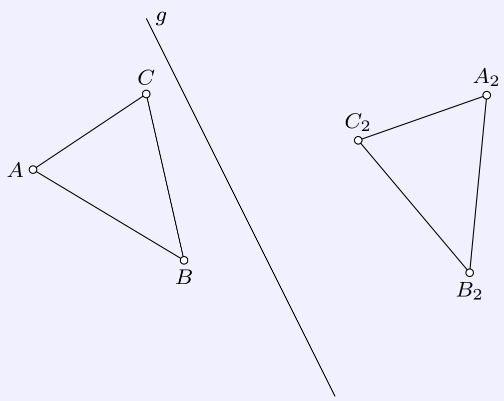
**Aufgabe 120621:**
Das abgebildete Dreieck $ABC$ ist um den Drehpunkt $S$ um den Drehwinkel $\angle(a,b)$ im angegebenen Drehsinn zu drehen. Konstruiere unter alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal das dadurch entstehende Dreieck $A'B'C'$! Eine Konstruktionsbeschreibung wird nicht verlangt.




**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**

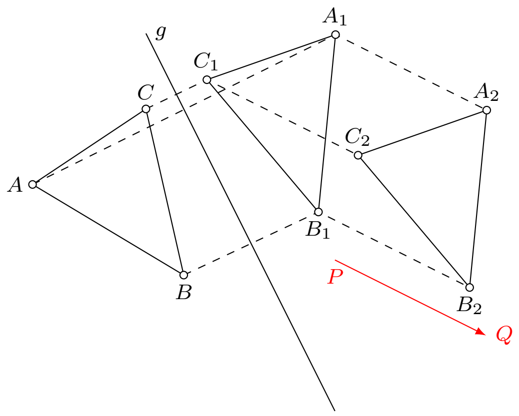



**Aufgabe 140621:**
Auf dem beiliegenden Arbeitsblatt sind ein Dreieck $ABC$ und ein Dreieck $A_2B_2C_2$, ein Punkt $P$ sowie eine Gerade $g$ abgebildet.




Das Dreieck $A_2B_2C_2$ ist aus dem Dreieck $ABC$ durch folgende Konstruktionen entstanden:
Zunächst wurde $\triangle ABC$ an $g$ gespiegelt, wobei ein Dreieck $A_1B_1C_1$ entstand. Danach wurde auf $\triangle A_1B_1C_1$ eine solche Verschiebung angewendet, dass $\triangle A_2B_2C_2$ als Bild des Dreiecks $A_1B_1C_1$ entstand.
Konstruiere unter Verwendung von Zirkel, Lineal und Zeichendreieck den Verschiebungspfeil $\overrightarrow{PQ}$ dieser auf $\triangle A_1B_1C_1$ anzuwendenden Verschiebung. Eine Konstruktionsbeschreibung wird nicht verlangt.

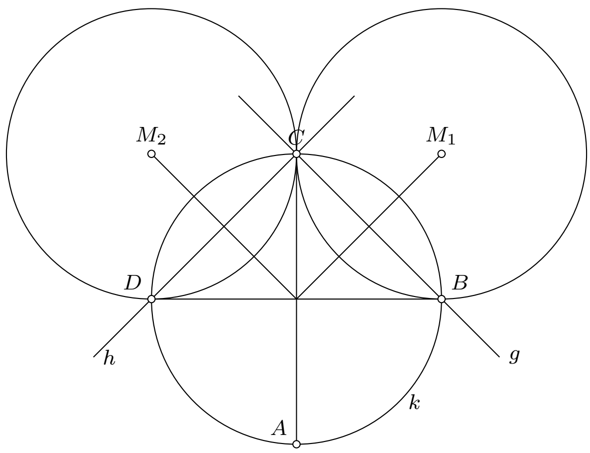
**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**



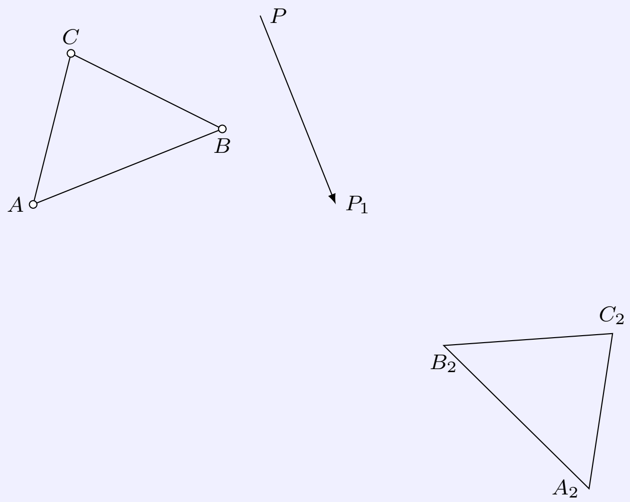

Als Lösung gilt jede (einwandfreie) Zeichnung, in der für mindestens einen der Punkte $A_1$, $B_1$ bzw. $C_1$ bei der Spiegelung an $g$ und dann gleichsinnig parallel und gleichlang zu $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{B_1B_2}$ bzw. $\overrightarrow{C_1C_2}$ der gesuchte Verschiebungspfeil $\overrightarrow{PQ}$ konstruiert wurde.

**Aufgabe 150623:**
Zeichne einen Kreis $k$ mit dem Mittelpunkt $M$ und einem Durchmesser von 6,4 cm!
Trage in diesen Kreis zwei aufeinander senkrecht stehende Durchmesser ein und bezeichne ihre auf $k$ liegenden vier Endpunkte der Reihe nach entgegen dem Uhrzeigersinn mit $A, B, C, D$!
Die Gerade durch $B$ und $C$ sei $g$, die Gerade durch $C$ und $D$ sei $h$. Spiegele den Kreis $k$ an $g$ und nenne den Mittelpunkt des gespiegelten Kreises $M_1$!
Spiegele den Kreis $k$ an $h$ und nenne den Mittelpunkt des gespiegelten Kreises $M_2$!
Als Lösung gilt die ausgeführte Konstruktion ohne Beschreibung.

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**

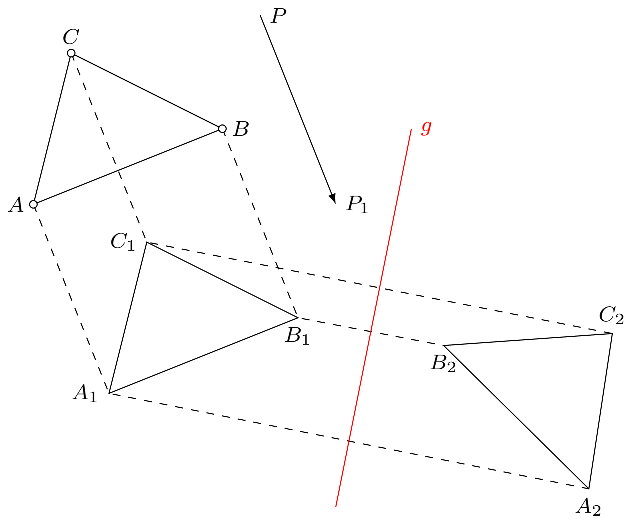



**Aufgabe 170624:**




Auf der Abbildung sind ein Dreieck $ABC$, ein Verschiebungspfeil $\overrightarrow{PP_1}$, sowie ein Dreieck $A_2B_2C_2$ abgebildet.
Gesucht ist eine Gerade $g$ mit folgender Eigenschaft:
Wendet man auf das Dreieck $ABC$ zuerst die Verschiebung $\overrightarrow{PP_1}$ und dann die Spiegelung an der Geraden $g$ an, so entsteht das Dreieck $A_2B_2C_2$.
Konstruiere unter alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal eine Gerade $g$ mit dieser Eigenschaft!
Eine Konstruktionsbeschreibung wird nicht verlangt.

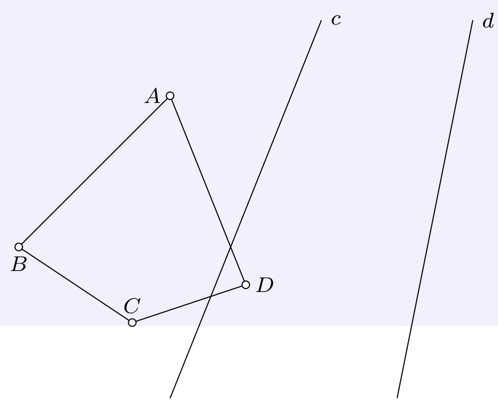
**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**



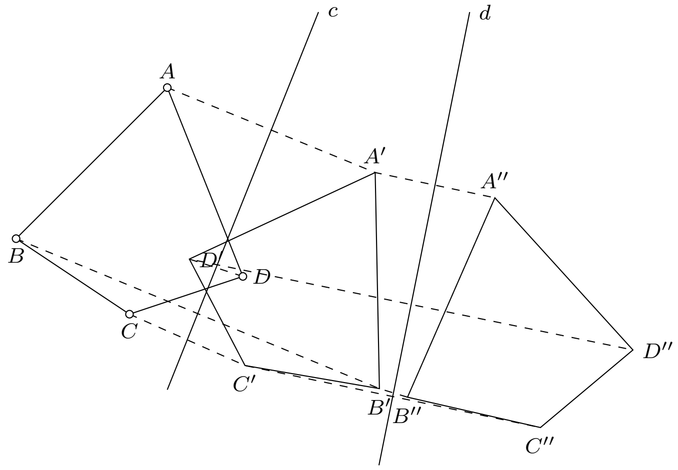

**Aufgabe 210624:**

Spiegele die Figur $ABCD$ auf dem Arbeitsblatt nacheinander an den gegebenen Geraden $c$ und $d$!

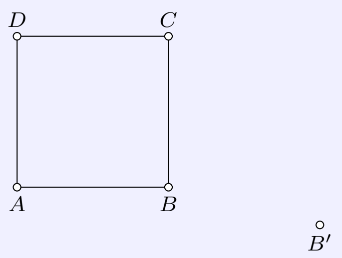
Eine Beschreibung der Konstruktion ist nicht erforderlich.



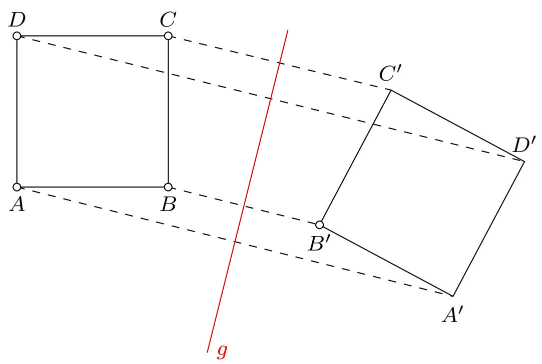
**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**



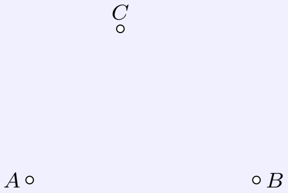

**Aufgabe 220622:**
Der Punkt $B'$ auf dem Arbeitsblatt sei das Bild von $B$ bei der Spiegelung an einer Geraden $g$. Konstruiere diese Gerade $g$ und die Bilder $A'$, $C'$, $D'$ der Punkte $A$, $C$, $D$ bei der Spiegelung an $g$! Eine Beschreibung und Begründung der Konstruktion wird nicht verlangt.




**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**

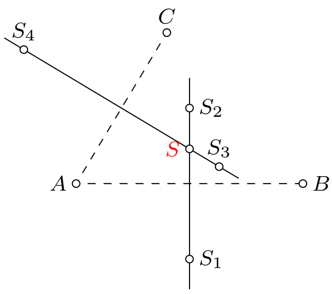


**Aufgabe 260623:**




Es seien $A$, $B$, $C$ die drei in der Abbildung gegebenen Punkte, die nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen.
a) Konstruiere (mindestens) zwei Punkte $S_1$ und $S_2$, für die $S_1A = S_1B$ und $S_2A = S_2B$ gilt!
b) Es gibt genau einen Punkt $S$, der von $A$, $B$ und $C$ gleich weit entfernt ist. Konstruiere diesen Punkt $S$!
c) Begründe, warum der Punkt $S$ bei deiner Konstruktion die geforderten Bedingungen erfüllt!

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**




a) Eine mögliche Konstruktion ist die folgende (siehe Abbildung):
Wir zeichnen um $A$ und um $B$ je einen Kreis mit dem gleichen Radius $r$, der größer als $\frac{1}{2}AB$ und sonst beliebig gewählt wird. Die beiden Schnittpunkte $S_1$ und $S_2$ dieser beiden Kreise erfüllen die Bedingung $S_1A = S_1B$ und $S_2A = S_2B$.

b) In entsprechender Weise konstruieren wir für die Punkte $A$ und $C$ zwei Punkte $S_3$, und $S_4$, für die $S_3A = S_3C$ und $S_4A = S_4C$ gilt. Der Schnittpunkt $S$ der Geraden durch $S_1$, $S_2$ und der Geraden durch $S_3$, $S_4$ erfüllt die geforderten Bedingungen.

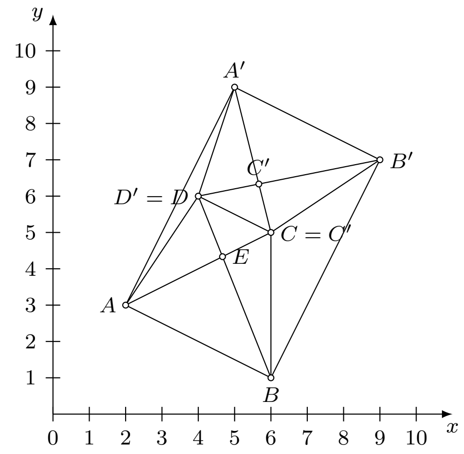
c) Nach Konstruktion ist die Gerade durch $S_1$, $S_2$ Symmetrieachse zu $A$, $B$, wobei alle ihre Punkte ebenso weit von $A$ wie von $B$ entfernt sind.
Ferner ist die Gerade durch $S_3$, $S_4$ Symmetrieachse zu $A$, $C$, wobei alle ihre Punkte ebenso weit von $A$ wie von $C$ entfernt sind.
Nach Konstruktion ist $S$ ein Punkt beider Symmetrieachsen. Deshalb gilt für ihn: $S_A = S_B$ und $S_A = S_C$ und damit auch $S_B = S_C$, d. h., $S$ ist von $A$, $B$ und $C$ gleich weit entfernt.

**Aufgabe 290622:**
a) Zeichne in ein Koordinatensystem (Einheit 1 cm) die Punkte $A(2;3)$, $B(6;1)$, $C(6;5)$ und $D(4;6)$ ein! Verbinde die Punkte $A$, $B$, $C$ und $D$ so miteinander, dass ein Viereck entsteht! Verbinde dann in diesem Viereck den Punkt $A$ mit dem Punkt $C$ und den Punkt $B$ mit $D$! Bezeichne den Schnittpunkt der Strecken $AC$ und $BD$ mit $E$!

b) Spiegele die erhaltene Figur an der Geraden durch $C$ und $D$! Verbinde anschließend noch den Punkt $A$ mit seinem Bildpunkt $A'$ und den Punkt $B$ mit seinem Bildpunkt $B'$!

c) Die insgesamt erhaltene Figur soll längs ihrer Strecke so durchlaufen werden, dass jede Strecke genau einmal in einem solchen Weg vorkommt.
Wähle einen geeigneten Anfangspunkt und schreibe einen derartigen Weg auf!

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**




a,b)

c) Ein möglicher Weg ist: $D, A, B, E, D, C, E, A, A', D, E', B', C, E', A', B', B, C$.

**Aufgabe 300621:**
a) Zeichne in ein Koordinatensystem das Quadrat $ABCD$ mit den Eckpunkten

$$A(1;1), \quad B(5;1), \quad C(5;5), \quad D(1;5)$$

und das Quadrat $PQRS$ mit den Eckpunkten

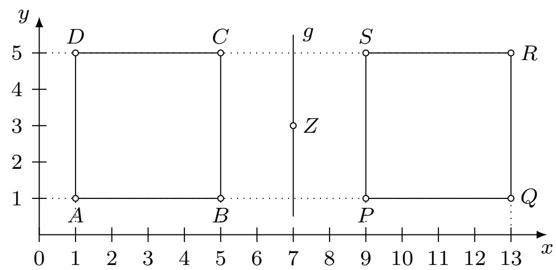
$$P(9;1), \quad Q(13;1), \quad R(13;5), \quad S(9;5)$$

ein!
b) Gibt es eine Spiegelung und auch eine Drehung, bei der das Quadrat $PQRS$ das Bild des Quadrates $ABCD$ ist?
Wenn dies der Fall ist, gib die Koordinaten des Drehzentrums und die Größe des Drehwinkels an! Eine Begründung wird nicht verlangt.

Hinweis: Wenn das Quadrat $PQRS$ das Bild des Quadrates $ABCD$ ist, so braucht die Reihenfolge $P$, $Q$, $R$, $S$ nicht die Reihenfolge der Bildpunkte $A$, $B$, $C$, $D$ zu sein.

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**

a) Die Abbildung zeigt die in ein Koordinatensystem eingezeichneten Quadrate.
b) Die Abbildung zeigt auch die Spiegelgerade $g$ und eine Konstruktion dieser Geraden.
c) Das Drehzentrum ist $Z(7;3)$, der Drehwinkel beträgt 180°.

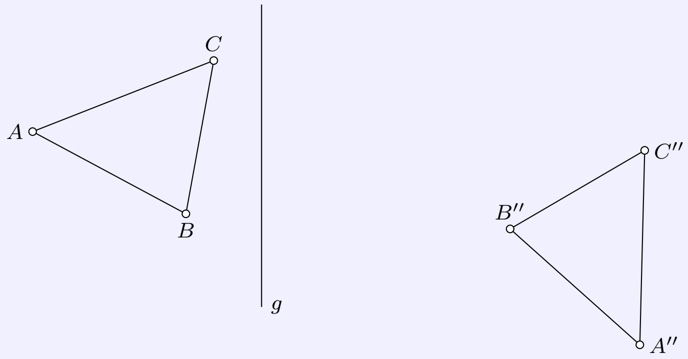



**Aufgabe 310624:**
Auf dem Arbeitsblatt befinden sich zwei Dreiecke $ABC$, $A''B''C''$ und eine Gerade $g$. Zu konstruieren ist

1. das Bild $A'B'C'$ von $ABC$ bei der Spiegelung an $g$,
2. der Drehpunkt $M$ derjenigen Drehung, die $A'B'C'$ in $A''B''C''$ überführt.

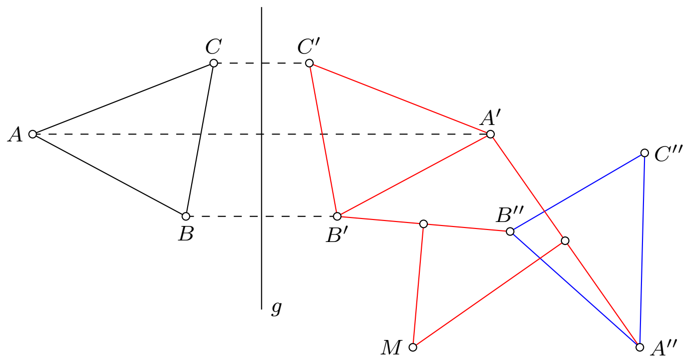
a) Fertige auf dem Arbeitsblatt eine Konstruktionszeichnung an, die alle benötigten Hilfslinien enthält!

b) Beschreibe deine Konstruktion! Eine Begründung wird nicht verlangt.




**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Die Abbildung zeigt eine Konstruktion. Sie kann folgendermaßen beschrieben werden:

(1) Man konstruiert die Lote $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ von $A$, $B$, $C$ auf $g$ und verlängert sie über $A_1$, $B_1$ bzw. $C_1$ hinaus um ihre eigene Länge bis $A'$, $B'$, $C'$.
(2) Man konstruiert die Mittelsenkrechten $m_1$, $m_2$ von $A'A''$ bzw. bzw. $B'B''$ und ihren Schnittpunkt $M$.



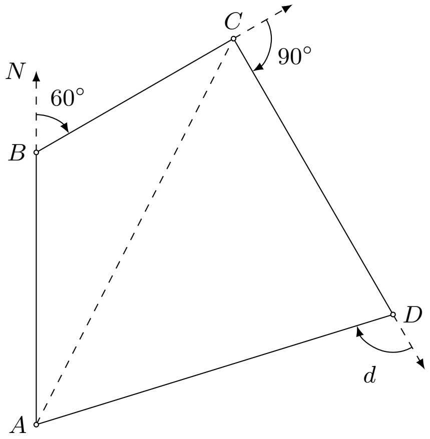

**Aufgabe 320623:**
Bei einem Geländespiel erhält eine Pfadfindergruppe folgenden Auftrag:

- Geht vom Ausgangspunkt $A$ aus 600 m geradlinig nach Norden! Dort befindet sich ein Aussichtsturm (Punkt $B$).
- Ändert nun euren Kurs um 60° in nordöstliche Richtung! Nach 500 m erreicht ihr eine alte Scheune (Punkt $C$).
- Geht jetzt im rechten Winkel in etwa südöstliche Richtung um 700 m weiter! Dort ist eine hohle Eiche (Punkt $D$). Von ihr aus sollt ihr wieder nach $A$ zurückfinden.

a) Um wie viel Grad muss die Pfadfindergruppe in $D$ den Kurs ändern, um geradlinig nach $A$ zu gelangen?
b) Wie lang ist die Strecke von $A$ nach $D$?
c) Ein Mitglied der Gruppe will bereits von $C$ aus nach $A$ zurückkehren. Wie weit ist $A$ von $C$ entfernt?

Fertige zur Beantwortung dieser Fragen eine Zeichnung an (auf weißem, nicht kariertem oder liniertem Papier; in geeigneter Verkleinerung); entnehme die gesuchten Angaben mit Zeichengenauigkeit!

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Die Abbildung zeigt eine Darstellung, bei der 100 m verkleinert als 1 cm wiedergegeben werden. An einer solchen Zeichnung kann man mit Zeichengenauigkeit (etwa auf 1° genau bzw. etwa auf 1 mm genau, d. h. für die Wegstrecken etwa auf 10 m genau) ablesen:
a) In $D$ muss der Kurs um $\delta \approx 103°$ (in etwa südwestliche Richtung) geändert werden.
b) Die Strecke von $D$ nach $A$ ist etwa 820 m lang.
c) Der Punkt $A$ ist von $C$ etwa 950 m entfernt.



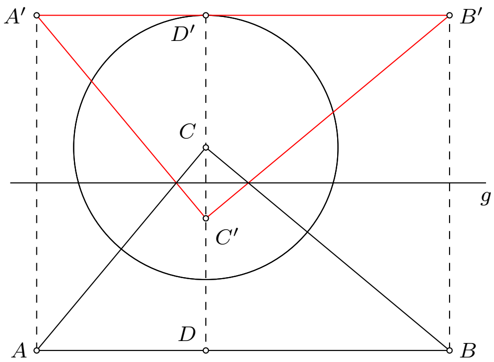

**Aufgabe 330623:**
Konstruiere ein rechtwinkligen Dreieck $ABC$ mit $AC = 5$ cm, $BC = 6$ cm und dem rechten Winkel bei $C$!
Konstruiere weiter den Kreis $k$ um $C$ mit dem Radius 2,5 cm!
Nun soll eine Gerade $g$ so gelegt werden, dass folgende Bedingung erfüllt wird:

Wenn man das Dreieck $ABC$ an $g$ spiegelt und dabei das Dreieck $A'B'C'$ erhält, so hat der Kreis $k$ genau 3 gemeinsame Punkte (Schnitt- oder Berührungspunkte) mit diesem Dreieck, d. h. mit der Linie, die sich aus den drei Strecken $A'B'$, $B'C'$ und $C'A'$ zusammensetzt.

Konstruiere eine solche Gerade $g$ und überprüfe durch Konstruktion des durch Spiegelung entstehenden Dreiecks $A'B'C'$, ob die Bedingung erfüllt ist!

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
In Abbildung ist eine mögliche Lösungen gezeigt.

Die dort jeweils verwendete Gerade $g$ kann nach folgender Beschreibung konstruiert werden:
a) Man konstruiert das Lot von $C$ auf $AB$. Ist $D$ sein Fußpunkt, so verlängert man $DC$ über $C$ hinaus bis zum Schnitt $D'$ mit $k$.
Dann konstruiert man $g$ als die Mittelsenkrechte von $DD'$.



# II.IV Raumgeometrie

## I Runde 1

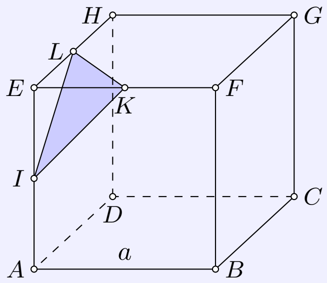
**Aufgabe 050614:**
In einem Betrieb sollen 1600 Pakete, die je 1,6 dm lang, 7 cm breit und 45 mm hoch sind (Außenmaße), zum Versand gebracht werden.
Arbeiter wollen sie in Kisten von 64 cm Länge, 0,28 m Breite und 1,8 dm Höhe (Innenmaße) einschichten.

Welches ist die kleinste Anzahl von Kisten, die ausreicht, um alle diese Pakete gleichzeitig zu versenden?

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Wir können in jede der Kisten 64 Pakete einpacken, wenn wir die Pakete so hineinlegen, dass ihre längsten Kanten parallel der längsten Kistenkante und ihre zweitlängsten Kanten parallel der zweitlängsten Kistenkante liegen. In diesem Fall erhalten wir 4 übereinanderliegende Schichten von je 16 Paketen.

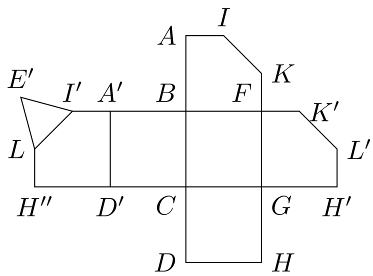
Mit 25 so gepackten Kisten kommen wir aus; denn die Anzahl der in ihnen liegenden Pakete beträgt $25 \cdot 64 = 1600$.
Die Summe der Volumina der Innenräume aller 25 Kisten beträgt genau soviel wie die Summe der Volumina der Pakete. Da weniger als 25 Kisten ein kleineres Volumen als das hier ermittelte haben, ist 25 die kleinste Anzahl von Kisten, die ausreicht, um 1600 Pakete der in der Aufgabe angegebenen Größe gleichzeitig zu versenden.

**Aufgabe 090611:**




Gegeben sei ein Würfel mit den Eckpunkten $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$, $G$, $H$ (siehe Abbildung) und der Kantenlänge $a = 4$ cm. Von ihm werde durch einen ebenen Schnitt durch die Punkte $I, K, L$ eine Ecke abgeschnitten, wobei $I$ der Mittelpunkt von $AE$, $K$ der Mittelpunkt von $EF$ und $L$ der Mittelpunkt von $EH$ ist.
Zeichne ein Netz des Restkörpers und bezeichne die Eckpunkte!

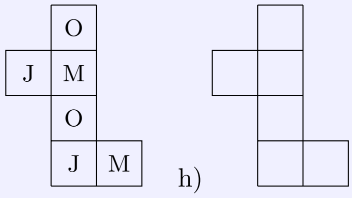
**Lösung von Steffen Polster:**
Ein mögliches Netz:




**Aufgabe 220611:**
In einem Aquarium hat der Hohlraum, der mit Wasser gefüllt werden könnte, die Gestalt eines Würfels von 60 cm Kantenlänge. Dieser Hohlwürfel soll aber nur bis zu einer Höhe von 10 cm unter seinem oberen Rand gefüllt werden.
Wie viel Eimer Wasser sind dafür insgesamt erforderlich, wenn jeder Eimer 9 Liter fasst?

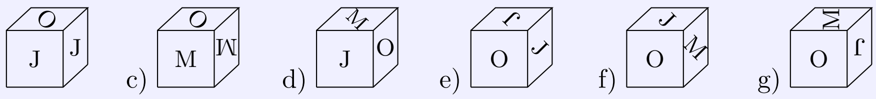
**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Wegen $60 - 10 = 50$ hat der mit Wasser zu füllende Teil des Aquariums die Gestalt eines Quaders vom Volumen $60\text{cm} \cdot 60\text{cm} \cdot 50\text{cm} = 180000\text{cm}^3 = 180\text{dm}^3$.
Da 1 Liter Wasser ein Volumen von 1 $\text{dm}^3$ hat, sind folglich 180 Liter Wasser einzufüllen. Wegen $180 : 9 = 20$ sind das genau 20 Eimer Wasser.

**Aufgabe 220612:**
Die sechs quadratischen Flächen der Oberfläche eines Würfels sind so mit den Buchstaben O, J, M beschriftet, wie es das Würfelnetz in Bild a) zeigt. (Der Buchstabe O gelte dabei als kreisförmig.)



a) h)

a) Welche der in den Bildern b) bis g) abgebildeten Würfel könnten aus diesem Netz hergestellt worden sein?
Für welche Würfel ist dies nicht möglich? (Als Lösung genügt jeweils die Angabe, ob Herstellbarkeit vorliegt, ohne Begründung.)


b) c) d) e) f) g)

b) In das Würfelnetz des Bildes h) sollen die Buchstaben O, J, M so eingetragen werden, dass sich aus dem Netz ein Würfel mit den folgenden Eigenschaften (1), (2) und (3) herstellen lässt:

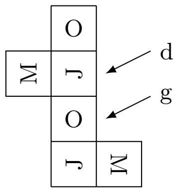
(1) Je zwei gegenüberliegende Seitenflächen des Würfels tragen denselben Buchstaben.
(2) Der Würfel lässt sich so drehen, dass Bild d) entsteht.
(3) Der Würfel lässt sich so drehen, dass Bild g) entsteht.

Als Lösung ist eine mögliche Eintragung anzugeben, ohne Begründung, aber mit der Kennzeichnung einer Fläche, die J enthält und in Bild d) sichtbar sein soll, sowie einer Fläche, die O enthält und in Bild g) sichtbar sein soll.

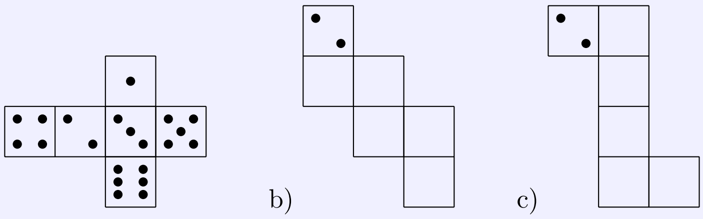
**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**

a) Die Würfel in den Abbildungen c), e), f) lassen sich aus dem Netz in Abbildung a) herstellen, die Würfel in den Abbildungen b), d), g) nicht.

b) Eine mögliche Eintragung zeigt die Abbildung.

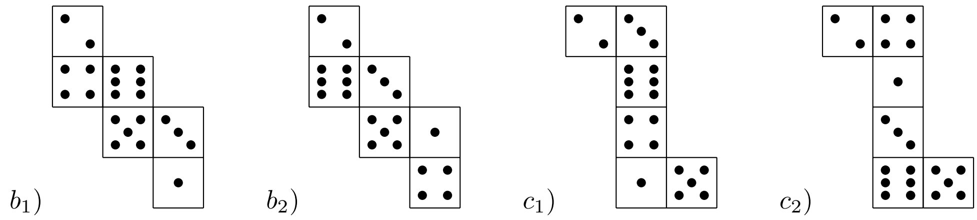


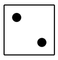
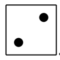

**Aufgabe 230611:**
Die Bilder a) bis c) zeigen drei Würfelnetze.


a) b) c)

Wie können die Punkte auf dem Würfelnetz b) und auf dem Netz c) verteilt werden, damit der gleiche Würfel entsteht wie aus dem Netz a)?
Gib je ein Beispiel für b) und c) an!

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**




Es gibt genau die in der Abbildung angegebenen Möglichkeiten. Von ihnen ist zu b) und c) je eine anzugeben.
Man kann auch Lösungen zulassen, in denen die Punkte auf den Flächen des Würfels zwar dieselben Zahlen darstellen, aber anders angeordnet sind, z. B.  .

**Aufgabe 240613:**
Wenn man einen Würfel auf einen Tisch stellt, so dass er nirgends seitlich über die Tischplatte hinausragt, so sind von seinen sechs Flächen genau fünf sichtbar.
Ebenso kann man einen kleineren Würfel so auf einen größeren stellen, dass von den sechs Flächen des kleineren Würfels genau fünf sichtbar sind, während die sechste vollständig auf dem größeren Würfel aufliegt, ohne seitlich über ihn hinauszuragen.

In dieser Art sollen drei Würfel mit den Kantenlängen $a_1 = 20$ cm, $a_2 = 10$ cm, $a_3 = 4$ cm der Größe nach so übereinander gestellt werden, dass der größte Würfel zuunterst auf der Tischplatte steht.
Wie groß ist dann die Summe der Flächeninhalte aller sichtbaren Flächenteile der drei Würfel?

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Sichtbar sind von jedem der drei Würfel erstens die vier Seitenflächen (der Mantel). Sie haben die Flächeninhalte

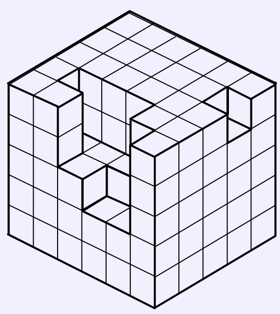
$$A_1 = 4 \cdot a_1^2 = 1600 \text{ cm}^2, \qquad A_2 = 4 \cdot a_2^2 = 400 \text{ cm}^2, \qquad A_3 = 4 \cdot a_3^2 = 64 \text{ cm}^2$$

Sichtbare Flächenteile sind zweitens Teile der Deckflächen der drei Würfel.
Die Flächeninhalte dieser Flächenteile ergeben zusammen den Flächeninhalt der Deckfläche des größten Würfels, also $A_D = a_1^2 = 400 \text{ cm}^2$. Weitere sichtbare Flächenteile kommen nicht vor.
Für die Summe der Flächeninhalte aller sichtbaren Flächenteile gilt daher

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_D = 2464 \text{ cm}^2$$

**Aufgabe 280612:**

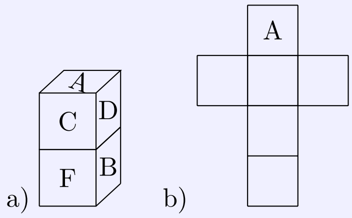
Ein großer Quader wurde in kleine, untereinander gleich große Würfel zerlegt. Wie in der Abbildung ersichtlich, wurden dann einige kleine Würfel herausgenommen. Von denjenigen kleinen Würfeln, die in der Abbildung nicht zu sehen sind, wurde aber keiner weggenommen.
Wie viele der kleinen Würfel enthält dann der in der Abbildung gezeigte Restkörper insgesamt noch?
Beschreibe, wie du die gesuchte Anzahl gefunden hast!



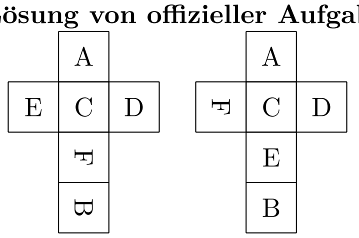
**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Die gesuchte Anzahl der kleinen Würfel beträgt 135; man kann sie durch folgende Überlegung finden:

Der große Quader bestand ursprünglich wegen $6 \cdot 5 \cdot 5 = 150$ aus genau 150 kleinen Würfeln. Aus ihm wurden genau 15 kleine Würfel herausgenommen, nämlich
genau 8 aus der vordersten Schicht,
genau 6 aus der zweiten Schicht von vorn,
genau 1 aus der vierten Schicht von vorn.
Wegen $150 - 15 = 135$ enthält der Restkörper somit genau 135 kleine Würfel.

**Aufgabe 300611:**
Das Bild a) zeigt zwei gleiche, mit den Buchstaben $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$ in gleicher Anordnung beschriftete Würfel.
Man soll die Beschriftung des Würfelnetzes im Bild b) so ergänzen, dass zwei Würfel, die mit je einem solchen Netz hergestellt werden, sich zum Bild a) zusammenstellen lassen.
Gib zwei verschiedene Ergänzungsmöglichkeiten an!
Gib zu beiden Ergänzungsmöglichkeiten an, welche Fläche des unteren Würfels dann als Grundfläche gewählt werden muss!




**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**




Die Abbildung zeigt zwei Ergänzungsmöglichkeiten der geforderten Art.
Bei beiden muss als Grundfläche des unteren Würfels die als E beschriftete Fläche gewählt werden.

## II Runde 2

**Aufgabe 130622:**
Vier undurchsichtige Würfel mit den Kantenlängen $a_1 = 24$ cm, $a_2 = 12$ cm, $a_3 = 6$ cm und $a_4 = 3$ cm sollen so übereinander auf eine undurchsichtige Tischplatte gestellt werden, dass der größte zuunterst, darauf der nächstgrößte usw., schließlich der kleinste Würfel zuoberst steht, wobei jeder der Würfel vollständig auf der Deckfläche des unter ihm stehenden (bzw. auf der Tischplatte) ruht (d. h. ohne über diese Fläche hinauszuragen).
Ermittle von diesen Würfeln den Gesamtflächeninhalt derjenigen Oberflächenteile, die sichtbar (d. h. nicht verdeckt) sind!

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Jeder der Würfel hat genau 6 Flächen. Von ihnen ist bei jedem die Fläche, auf der er steht, nicht sichtbar. Außerdem verdeckt der zweitgrößte Würfel mit seiner Standfläche einen gleichgroßen Teil der obersten Fläche des größten Würfels. Entsprechendes gilt für den drittgrößten und für den kleinsten der vier Würfel. Weitere nicht sichtbare Teilflächen kommen nicht vor.

Daher erhält man den gesuchten Gesamtflächeninhalt, indem man von der Summe der Flächeninhalte von jeweils 5 Flächen der vier Würfel die Summe der Flächeninhalte je einer Fläche des zweitgrößten, des drittgrößten und des kleinsten Würfels subtrahiert.
Wegen $5 \cdot (242 + 122 + 62 + 32) - (122 + 62 + 32) = 3636$ beträgt der gesuchte Gesamtflächeninhalt der sichtbaren Oberflächenteile der vier Würfel 3636 cm$^2$.

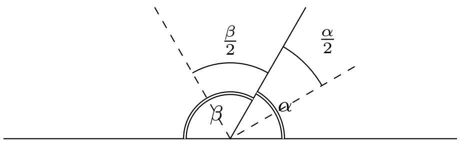
# III Geometrie

## III.I Dreiecke, Geraden, Winkel

### I Runde 1

**Aufgabe 010616:**
Zeichne zwei Nebenwinkel und konstruiere ihre Winkelhalbierenden.
Was für einen Winkel bilden die Winkelhalbierenden? Begründe deine Antwort!

**Lösung von Steffen Polster:**



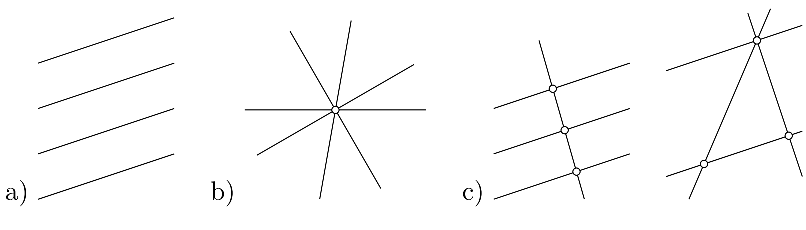

$\alpha$ und $\beta$ seien die zwei Nebenwinkel mit $\alpha + \beta = 180°$.
Die Winkel zwischen den Winkelhalbierenden und einem gemeinsamen Schenkel sind somit $\frac{\alpha}{2}$ bzw. $\frac{\beta}{2}$.
Der Winkel zwischen den zwei Winkelhalbierenden ist damit

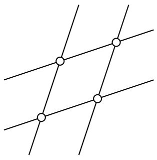
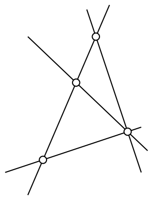
$$\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2} = 90°$$

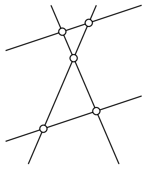
d. h. sie bilden einen rechten Winkel.

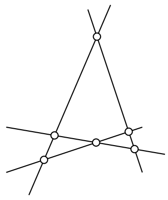
**Aufgabe 020615:**
In einer Ebene sollen vier Geraden so gezeichnet werden, dass genau
a) kein Schnittpunkt,
b) 1 Schnittpunkt,
c) 3 Schnittpunkte (zwei Möglichkeiten),
d) 4 Schnittpunkte (zwei Möglichkeiten),
e) 5 Schnittpunkte,
f) 6 Schnittpunkte entstehen!
Wie müssen die Geraden zueinander liegen? Zeichne!

**Lösung von Steffen Polster:**
Die Geraden müssen für a) zueinander parallel sein, bei b) sich alle in einem Punkt schneiden.
Die Bedingung c) wird erfüllt, wenn entweder drei zueinander parallele Geraden von der vierten Geraden geschnitten werden oder wenn ein Dreieck von der vierten in einem Eckpunkt berührt wird.
Für die Aufgabe d) können je zwei paarweise parallele Geraden vorliegen oder ein Dreieck von der letzten Gerade in einem Eckpunkt und der gegenüberliegenden Seite geschnitten werden.
Für Bedingung e) müssen zwei Geraden parallel zueinander sein und bei f) dürfen keine der Geraden zueinander parallel sein.



d)  

e) 

f) 

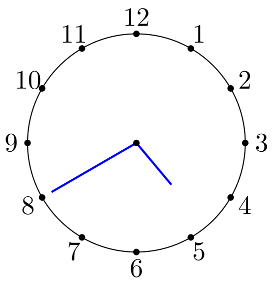
**Aufgabe 040613:**
Eine 6. Klasse stellte verschiedenartige Pappdreiecke her. Die Schüler wollten diese Dreiecke im Mathematischen Kabinett ihrer Schule in einem Schränkchen aufbewahren, das neun Fächer enthielt. Jeweils drei Fächer hatten die Schüler für die gleichseitigen Dreiecke, für die nur gleichschenkligen Dreiecke (d. h. für die nicht gleichseitigen) und für die ungleichschenkligen Dreiecke vorgesehen. Innerhalb dieser Gruppen sollten die Figuren nämlich noch in spitzwinklige, rechtwinklige und stumpfwinklige Dreiecke unterteilt werden.

Überprüfe, ob die Anzahl der Fächer richtig gewählt war!

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Da es keine rechtwinkligen oder stumpfwinkligen Dreiecke gibt, die gleichseitig sind, bleiben 2 Fächer unbenutzt. Die Anzahl der Fächer hätte also 7 betragen müssen.

**Aufgabe 080612:**
Berechne die Größe des kleineren der beiden Winkel, die der Stunden- und der Minutenzeiger einer Uhr um 16 Uhr 40 Minuten miteinander bilden!

**Lösung von Steffen Polster:**




Der große Zeiger steht auf der 8. Der kleine Zeiger steht zwischen der 4 und 5.
In 60 Minuten bewegt sich der kleine Zeiger jeweils 30°. Zum Zeitpunkt 16:40 Uhr ist er somit $\frac{40}{60} \cdot 30° = 20°$ von der 4 in Richtung 5 gewandert, bzw. er steht noch 10° vor der 5.

Der Winkel zwischen der 5 und der 8 ist ein rechter Winkel, da zwischen zwei Stundenangaben jeweils 30° liegen.
Damit ist der Winkel zwischen dem großen und dem kleinen Zeiger $90° + 10° = 100°$.

**Aufgabe 260613:**
Die Verbindungsstraßen dreier Orte $A$, $B$, $C$ bilden ein Dreieck. In der Mitte der Verbindungsstraße von $B$ nach $C$ liegt ein weiterer Ort $D$. Von $A$ über $B$ nach $C$ beträgt die Entfernung 25 km, von $B$ über $C$ nach $A$ dagegen 27 km und von $C$ über $A$ nach $B$ schließlich 28 km.
Eine Pioniergruppe wandert auf den genannten Straßen auf kürzestem Wege vom Ort $A$ zum Ort $D$.

a) Über welchen der beiden Orte $B$ oder $C$ läuft die Pioniergruppe?
Begründe deine Entscheidung!
b) Wie viel Zeit spart sie gegenüber dem längeren der beiden möglichen Wege von $A$ nach $D$ ein, wenn sie stündlich 4 km zurücklegt?
c) Wie lang ist der von ihr insgesamt zurückgelegte Weg?

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
a) Wegen $AB + BC = 25$ km und $AC + BC = 27$ km ist $AC$ um 2 km länger als $AB$. Damit ist wegen

$CD = BD$ eine Wanderung von $A$ über $C$ nach $D$ um 2 km länger als eine Wanderung von $A$ über $B$ nach $D$.
Weil die Pioniergruppe den kürzeren der beiden Wege wählte, läuft sie über den Ort $B$.

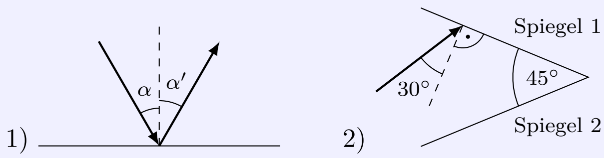
b) Nach den Überlegungen zu a) spart die Pioniergruppe auf dem kürzeren Wege von $A$ nach $D$ gegenüber dem längeren Wege 2 km ein. Wenn sie stündlich 4 km zurücklegt, benötigt sie für 2 km eine halbe Stunde. Sie spart damit bei einer Wanderung von $A$ nach $D$ auf dem kürzeren Wege gegenüber einer auf dem längeren Wege $\frac{1}{2}$ Stunde ein.

c) Würde man hintereinander von $A$ über $B$ nach $C$, dann von $C$ über $A$ nach $B$ und dann von $B$ über $C$ nach $A$ laufen, so würde man zweimal den Umfang des Dreiecks $ABC$ durchlaufen und wegen 25 + 28 + 27 = 80 insgesamt 80 km zurücklegen.

Folglich ist wegen 80 : 2 = 40 der Umfang des Dreiecks $ABC$ gleich 40 km. Subtrahiert man von ihm $AC + BC = 27$ km, so verbleibt $AB = 40$ km - 27 km = 13 km.
Subtrahiert man vom Umfang aber $AC + AB = 28$ km, so verbleibt $BC = 40$ km - 28 km = 12 km. Daher ist $BD = 12$ km : 2 = 6 km. Der gesuchte Weg beträgt folglich $AB + BD = 13$ km + 6 km = 19 km.

## II Runde 2

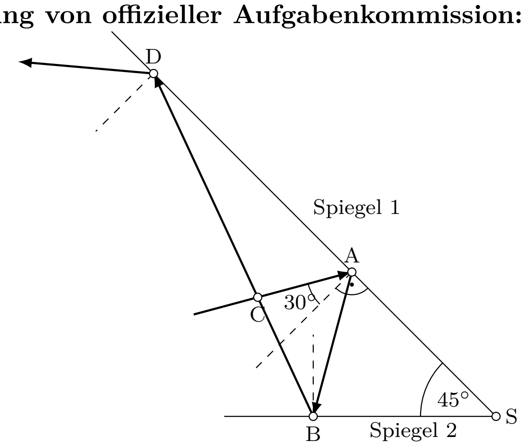
**Aufgabe 030622:**




Fällt ein Lichtstrahl auf einen ebenen Spiegel, so wird er so reflektiert, dass der Einfallswinkel $\alpha$ und der Reflexionswinkel $\alpha'$ gleich groß sind (siehe Abbildung).

a) Konstruiere den Verlauf eines Lichtstrahls, der auf den in der Abbildung 2) dargestellten Winkelspiegel unter einem Einfallswinkel von 30° fällt!
b) Welchen Winkel bildet der auf den Spiegel 1 einfallende Strahl mit dem vom Spiegel 2 reflektierten?

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**




a) Die folgende Zeichnung stellt den Verlauf des Lichtstrahles dar. Eine weitere Reflexion tritt nicht auf, da der bei $D$ reflektierte Lichtstrahl nicht mehr auf den Spiegel 2 trifft. Die kann man wie folgt beweisen:

Der Einfallswinkel bei $A$ beträgt 30°, also auch der Reflexionswinkel, und damit ist der Winkel $\angle BAS = 60°$. Nun ergibt sich nach Innenwinkelsummensatz im Dreieck $\triangle BAS$ für den Winkel $\angle ABS$:

$$\angle ABS = 180° - 45° - 60° = 75°$$

Der Einfallswinkel ergibt sich als Ergänzung zu 90°, also ist der Winkel $\angle ABC = 2 \cdot 15° = 30°$ als Summe von Einfalls- und Reflexionswinkel. Im Dreieck $\triangle BSD$ gilt dann:

$$\angle BDS = 180° - \angle ASB - \angle ABS - \angle ABC = 180° - 45° - 75° - 30° = 30°$$

Damit beträgt auch $\beta = 30°$. Dieser Winkel ist kleiner als $\angle BSD$, weshalb der letzte Lichtstrahl den Spiegel 1 nicht mehr treffen wird.

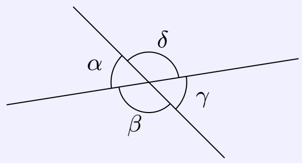
b) Gesucht ist Winkel $\angle BCA$. Nach dem Innenwinkelsummensatz im Dreieck $\triangle ABC$ ergibt sich:

$$\angle BCA = 180° - \angle BAC - \angle ABC = 180° - 2 \cdot 30° - 30° = 90°$$

Der gesuchte Winkel ist also ein rechter Winkel.

**Aufgabe 040622:**

Beim Schnitt zweier Geraden entstehen die Winkel $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ (Abbildung).
Wie groß sind diese Winkel, wenn die ersten drei von ihnen die Winkelsumme 234° haben?

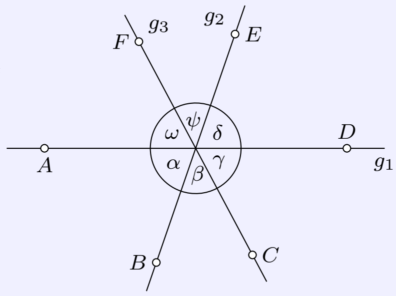



**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Über den Vollwinkel wird $\delta = 126°$. Mit den Beziehungen über Scheitel- und Nebenwinkel folgt dann $\alpha = 54°$, $\beta = 126°$, $\gamma = 54°$.

**Aufgabe 050622:**

Die drei Geraden $g_1$, $g_2$ und $g_3$ schneiden einander im Punkt $M$. Dabei entstehen Winkel mit den Maßen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\psi$ und $\omega$ (siehe Abbildung).

Wie groß sind diese 6 Winkelmaße, wenn
(1) $\gamma + \delta + \psi + \omega = 252°$ und
(2) $\alpha$ dreimal so groß wie $\beta$ ist?

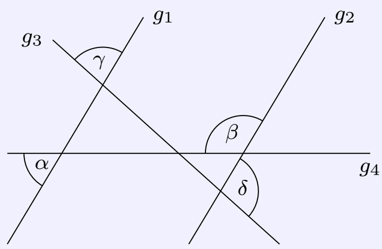



**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Es gilt: $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \psi + \omega = 360°$
und wegen (1) $\alpha + \beta = 108°$ also wegen (2) $4\beta = 108°$, d. h. $\beta = 27°$ und daher wegen (2) $\alpha = 81°$.

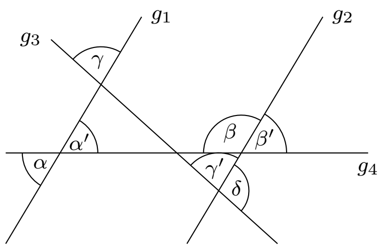
Weiter sind Scheitelwinkel, d. h. $\delta = \alpha = 81°$ und $\psi = \beta = 27°$. Nach der Nebenwinkelbeziehung wird $(\alpha + \beta) + \gamma = 180°$ und somit $\gamma = \omega = 72°$.

**Aufgabe 070621:**

Die Geraden $g_1$, $g_2$, $g_3$ und $g_4$ schneiden einander in der aus der Abbildung ersichtlichen Weise. Von den Größen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ und $\delta$ der dadurch entstehenden Winkel sei $\alpha = 50°$, $\beta = 130°$ und $\gamma = 70°$.
Ermittle $\delta$!



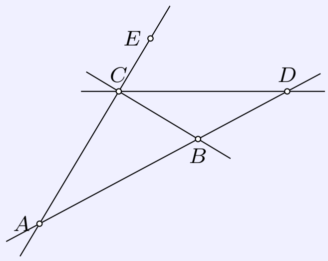

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**




Es gilt mit den Bezeichnungen in der Abbildung
$\alpha = \alpha'$ als Scheitelwinkelpaar
$\beta + \beta' = 180°$ als Nebenwinkelpaar mithin $\beta' = 180° - \beta = 50°$, also $\beta' = \alpha$. Daraus folgt $g_1 \parallel g_2$.

Nun ist ferner: $\gamma = \gamma'$ als Stufenwinkelpaar an geschnittenen Parallelen und $\gamma' + \delta = 180°$ als Nebenwinkel.
Damit wird $\delta = 180° - \gamma' = 110°$.

**Aufgabe 090623:**




Die Abbildung zeigt drei verschiedene Geraden durch einen Punkt $C$ und eine vierte Gerade, die nicht durch $C$ geht.
Diese möge die drei erstgenannten Geraden in den Punkten $A$, $B$ bzw. $D$ schneiden, wobei $B$ zwischen $A$ und $D$ liegen möge, Punkt $E$ liege auf der Geraden durch $A$ und $C$ so, dass $C$ zwischen $A$ und $E$ liegt.
Ferner gelte $\angle ECD \cong \angle ABC$.

Beweise, dass $\angle BCD \cong \angle BAC$ ist!

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Die Summe der Winkel $\angle ACB$ und $\angle ECD$ wird von $\angle BCD$ zu 180° ergänzt.
Die nach Voraussetzung ihr gleiche Summe der Winkel $\angle ACB$ und $\angle ABC$ wird von $\angle BAC$ zu 180° ergänzt (Winkelsumme im Dreieck $\triangle ABC$). Daraus folgt die Behauptung $\angle BCD \cong \angle BAC$.

**Aufgabe 190621:**
Gegeben seien zwei einander schneidende Geraden. Die Größen dreier der dabei entstehenden vier Schnittwinkel haben die Summe 226°.
Ermittle die Größe jedes einzelnen dieser vier Schnittwinkel!

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Die Größen aller vier Schnittwinkel haben die Summe 360°. Hiernach und wegen 360 - 226 = 134 hat einer der Schnittwinkel die Größe 134°.
Von den übrigen ist einer der Scheitelwinkel dieses Winkels, hat also ebenfalls die Größe 134°. Die anderen beiden sind jeweils Nebenwinkel des zuerst genannten Winkels. Wegen 180 - 134 = 46 hat daher jeder von ihnen die Größe 46°.
Die gesuchten Größen sind mithin: 131°, 46°, 131° und 46°.

## III.II Vier-, Vielecke

### I Runde 1

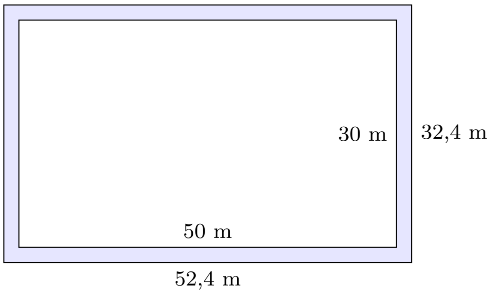
**Aufgabe V00603:**
Um ein Schwimmbad mit der Beckengröße 50 m mal 30 m wird ein 1,20 m breiter Weg mit Zementplatten ausgelegt.
Wie viel Platten sind erforderlich, wenn die Maße der Platten 30 cm mal 30 cm betragen?

**Lösung von Steffen Polster:**

Die auszulegende Fläche ist die Differenz der zwei Rechtecke (siehe Abildung). Damit wird für den Flächeninhalt

$$F = 52{,}4 \text{ m} \cdot 32{,}4 \text{ m} - 50 \text{ m} \cdot 30 \text{ m} = 197{,}76 \text{ m}^2$$

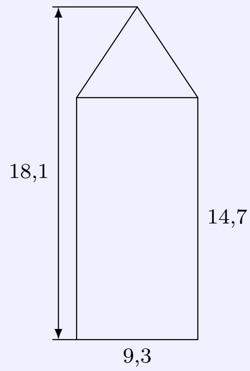
Ein Platte hat den Flächeninhalt $0{,}3 \text{ m} \cdot 0{,}3 \text{ m} = 0{,}09 \text{ m}^2$.
Damit benötigt man $\frac{197{,}76}{0{,}9} = 2197{,}3 \approx 2200$ Platten.




**Aufgabe V00609:**

In Leipzig werden viele Häuser neu verputzt! Das Verputzen einer Giebelwand kostet ohne Arbeitslohn 131,17 DM.
Berechne die zu verputzende Fläche aus der Abbildung und die Kosten für 1 m$^2$ Kalkanstrich!

Hinweis: Maßzahlen in der Abbildung in Meter.



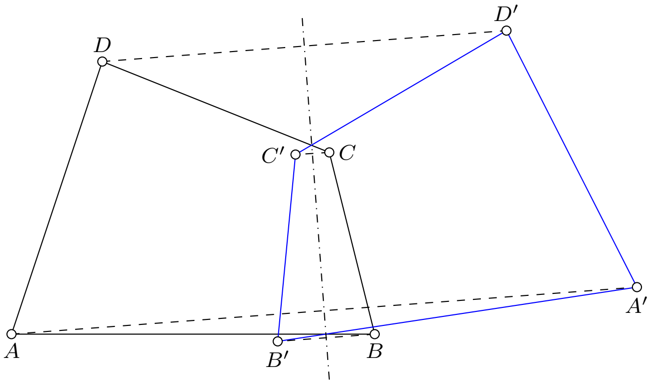

**Lösung von Steffen Polster:**
Die Giebelwand setzt sich aus einem Rechteck und einem Dreieck (Höhe = 18,1 - 14,7 = 3,4 m) zusammen.
Für den Flächeninhalt ergibt sich somit

$$F = 9{,}3 \cdot 14{,}7 + \frac{1}{2} \cdot 9{,}3 \cdot 3{,}4 = 152{,}52 \text{ m}^2$$

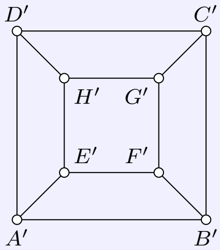
Die zu verputzende Fläche hat einen Inhalt von 152,5 m$^2$. 1 m$^2$ Putz kostet damit $\frac{131{,}17}{152{,}52} = 0{,}86$ DM.

**Aufgabe V00610:**
Zeichne ein beliebiges Viereck und eine Symmetrieachse, die das Viereck schneidet!
Konstruiere das zum ersten Viereck symmetrische!

**Lösung von Steffen Polster:**




**Aufgabe 040616:**



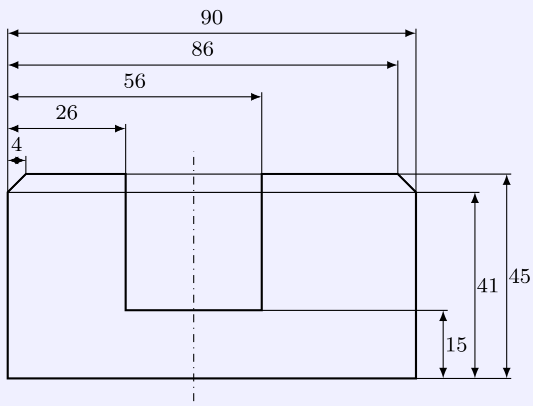

Die abgebildete Figur ist der Grundriss eines ebenflächig begrenzten Körpers.
Die Bilder seiner Eckpunkte $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$, $G$, $H$ sind mit $A'$, $B'$, $C'$, $D'$, $E'$, $F'$, $G'$, $H'$ bezeichnet. Das Quadrat $ABCD$ liegt auf der Grundrissebene; das Quadrat $EFGH$ liegt parallel zur Grundrissebene im Abstand von 4 cm.
Die Seite $AB$ ist 5 cm, die Seite $EF$ 3 cm lang.

Um welchen Körper handelt es sich? Baue ein Modell dieses Körpers! Das Material kannst du selbst wählen.

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Es handelt sich um einen Pyramidenstumpf.

**Aufgabe 060611:**

Berechne den Flächeninhalt der abgebildeten Figur! Runde das Ergebnis auf volle Quadratzentimeter! (Die Maßeinheit aller angegebenen Maßzahlen ist Millimeter.)




**Lösung von Steffen Polster:**
Aus einem Rechteck mit den Maßen 90 mm und 45 mm werden in der Mitte ein Quadrat der Seitenlänge

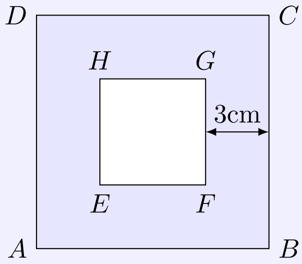
30 mm und an den oberen Ecken zwei rechtwinklige Dreiecke (Katheten je 4 mm) herausgeschnitten. Daraus ergibt sich:

$$A = 45 \cdot 90 - 30 \cdot 30 - 2 \cdot \frac{4 \cdot 4}{2} = 3134 \text{ mm}^2$$

Der Flächeninhalt der Figur beträgt rund 31 cm$^2$.

**Aufgabe 070612:**

Die Abbildung stellt zwei Quadrate $ABCD$, $EFGH$ dar. Sie sind so gelegen, dass die vier Diagonalen $AC$, $BD$, $EG$ und $FH$ einander in genau einem Punkt schneiden, und dass $AB \parallel EF$ gilt.
Die Differenz der Flächeninhalte der beiden Quadrate $ABCD$ und $EFGH$ beträgt 96 cm$^2$.
Berechne die Längen der Strecken $BC$ und $GH$!




**Lösung von Steffen Polster:**
Für die Seiten gilt $a = AB = BC = CD = DA$ sowie $b = EF = FG = GH = HE$ und nach Aufgabenstellung $a = b + 6$ cm.

Die Differenz der Flächeninhalte der zwei Quadrate ist somit (Angaben in cm$^2$):

$$A_{\text{groß}} - A_{\text{klein}} = a^2 - b^2 = (b+6)^2 - b^2 = b^2 + 12b + 36 - b^2 = 12b + 36 = 96$$

Daraus folgt sofort, dass $b = 5$ cm ist und $a = b + 6 = 11$ cm ist.

**Aufgabe 080611:**
a) Die Summe der Inhalte einer Rechteckfläche und einer Quadratfläche beträgt 3000 m$^2$. Die Quadratseite und eine Rechteckseite haben eine Länge von je 30 m.

a) Wie lang ist die andere Rechteckseite?
b) Zeichne beide Flächen im Maßstab 1 : 2000!

**Lösung von Steffen Polster:**
$a$ sei die Länge der Quadratseiten, $b$ die bekannte und $c$ die gesuchte Rechteckseite. Dann gilt (Angabe in Metern bzw. Quadratmetern):

$$A_Q + A_R = a^2 + b \cdot c \Rightarrow 3000 = 30^2 + 30 \cdot c \Rightarrow c = 70$$

Die unbekannte Rechteckseite ist 70 m lang.

b) siehe Abbildung. Die Quadratseite mit 30 m Länge muss in der Abbildung 3000 cm : 2000 = 1,5 cm groß sein.

**Aufgabe 120613:**
In einem Raum mit einer rechteckigen Bodenfläche von 11 m Breite und 36 m Länge stehen 6 Maschinen mit Standflächen von folgendem Flächeninhalt:

| | |
|---|---|
| Maschine A: 15 $^2$ | Maschine D: 60 m$^2$ |
| Maschine B: 5 m$^2$ | Maschine E: 18 m$^2$ |
| Maschine C: 18 m$^2$ | Maschine F: 50 m$^2$ |

Für die Lagerung und Bereitstellung der zu bearbeitenden Werkstücke werden an den Maschinen weitere Flächen mit folgendem Flächeninhalt benötigt:

An der Maschine A: 14 $m^2$ An der Maschine D: 21 $m^2$
An der Maschine B: 6 $m^2$ An der Maschine E: 13 $m^2$
An der Maschine C: 15 $m^2$ An der Maschine F: 17 $m^2$

Die restliche Bodenfläche soll für Transportwege genutzt werden.

a) Berechne (in $m^2$) den Flächeninhalt der Bodenfläche, die für Transportwege zur Verfügung steht!

b) Wir nehmen an, dass die Anordnung der Maschinen und der Lagerplätze es gestattet, die Transportwege aus Rechteckflächen von gleicher Breite zusammenzusetzen. Die Summe der Längen dieser Rechteckflächen wollen wir dann als „Gesamtlänge der Transportwege“ bezeichnen.
Wie breit sind diese Transportwege, wenn sie eine Gesamtlänge von 48 m besitzen?

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
a) Der Flächeninhalt der Standfläche für die Maschinen beträgt 166 $m^2$, derjenige der Fläche für die Lagerung der Werkstücke 86 $m^2$, der Flächeninhalt der gesamten Bodenfläche wegen $11 \cdot 36 = 396$ insgesamt 396 $m^2$.
Mithin verbleiben wegen $396 - 166 - 86 = 144$ für die Transportwege 144 $m^2$.

b) Die Breite der Transportwege betrage $x$ m. Dann gilt $48 \cdot x = 144$, woraus man $x = 144 : 48$, also $x = 3$ erhält. Dann beträgt die gesuchte Breite 3 m.

**Aufgabe 130612:**
Für die „Galerie der Freundschaft“ ist ein rechteckiges Bild mit den Seitenlängen 18 cm und 12 cm durch einen rechteckigen Rahmen von 3 cm Breite aus Zeichenkarton eingerahmt worden.
Ermittle den Flächeninhalt dieses Rahmens!

**Lösung von Steffen Polster:**
Der Flächeninhalt des Bildes ist $12 \cdot 18 = 216\text{cm}^2$. Der Flächeninhalt von Rahmen und Bild wird

$$(12 + 2 \cdot 3) \cdot (18 + 2 \cdot 3) = 18 \cdot 24 = 432 \text{ cm}^2$$

Damit ist die Rahmenfläche gleich 432 $cm^2$ - 216 $cm^2$ = 216 $cm^2$.

**Aufgabe 180611:**
In einem Stadtbezirk Leipzigs wurden 260 große Wohnungen renoviert.
Bei einem Zehntel dieser Wohnungen hat jede Wohnung 55 $m^2$ Wohnfläche; bei einem Viertel der 260 Wohnungen hat jede Wohnung 67 $m^2$ Wohnfläche; jede andere der 260 Wohnungen hat 80 $m^2$ Wohnfläche.
Berechne die gesamte Wohnfläche dieser 260 renovierten Wohnungen!

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Ein Zehntel der 260 Wohnungen sind 26 Wohnungen; denn es gilt $260 : 10 = 26$.
Ein Viertel der 260 Wohnungen sind 65 Wohnungen; denn es gilt $260 : 4 = 65$.
Die restlichen Wohnungen sind 169 Wohnungen; denn es gilt $260 - 26 - 65 = 169$.

Die Wohnfläche der zuerst genannten 26 Wohnungen beträgt 1430 $m^2$; denn es gilt $26 \cdot 55 = 1430$.
Die Wohnfläche der danach genannten 65 Wohnungen beträgt 4355 $m^2$; denn es gilt $65 \cdot 67 = 4355$.
Die Wohnfläche der restlichen 169 Wohnungen beträgt 13520 $m^2$; denn es gilt $169 \cdot 80 = 13520$.
Die gesamte Wohnfläche der 260 Wohnungen beträgt 19305 $m^2$; denn es gilt $1430+4355+13520 = 19305$.

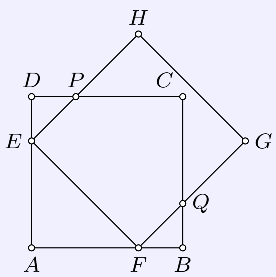
**Aufgabe 210611:**
Von einem Rechteck sind folgende Eigenschaften bekannt:
Wenn seine beiden Seitenlängen in Metern gemessen werden, so ergeben sich natürliche Zahlen als Maßzahlen. Die Differenz der beiden Seitenlängen beträgt 20 m. Der Umfang des Rechtecks beträgt 60 m.

a) Welchen Flächeninhalt hat dieses Rechteck?
b) Welche Längen erhalten seine beiden Seiten im Maßstab 1 : 250?
Zeichne das Rechteck in diesem Maßstab!

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
a) Verringert man die größere Seitenlänge des Rechtecks um 20 m, so verringert sich sein Umfang um 40 m, erreicht also den Wert 20 m. Andererseits entsteht dabei ein Quadrat.
Wegen $20 : 4 = 5$ beträgt seine Seitenlänge 5 m; dies ist zugleich die Länge der kleineren Seite des ursprünglichen Rechtecks. Die Länge seiner größeren Seite beträgt somit 25 m. Wegen $5 \cdot 25 = 125$ beträgt sein Flächeninhalt 125 m$^2$.

b) Im Maßstab 1 : 250 wird wegen 5 m = 500 cm und $500 : 250 = 2$ die kleinere Seitenlänge durch die Seitenlänge 2 cm wiedergegeben. Wegen 25 m = 2500 cm und $2500 : 250 = 10$ wird die größere Seitenlänge durch die Länge 10 cm wiedergegeben.

**Aufgabe 230613:**

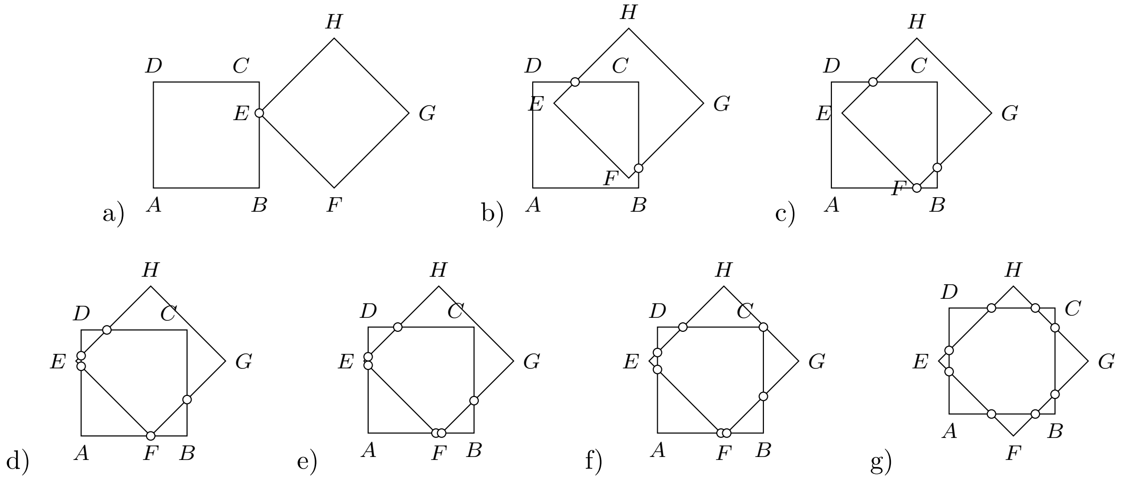



Im Bild sind zwei gleichgroße Quadrate $ABCD$ und $EFGH$ gezeichnet, die genau vier Randpunkte ($E$, $F$, $P$ und $Q$) gemeinsam haben.
Zeichne zwei gleichgroße Quadrate $ABCD$ und $EFGH$, die so liegen, dass sie

a) genau einen Punkt, b) genau zwei Punkte,
c) genau drei Punkte, d) genau fünf Punkte,
e) genau sechs Punkte, f) genau sieben Punkte,
g) genau acht Punkte

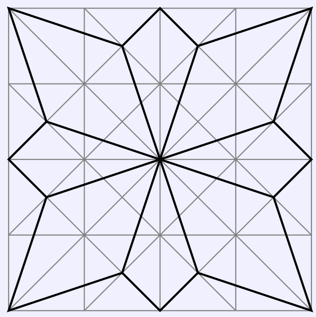
gemeinsam haben! Eine Begründung wird nicht verlangt.

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**

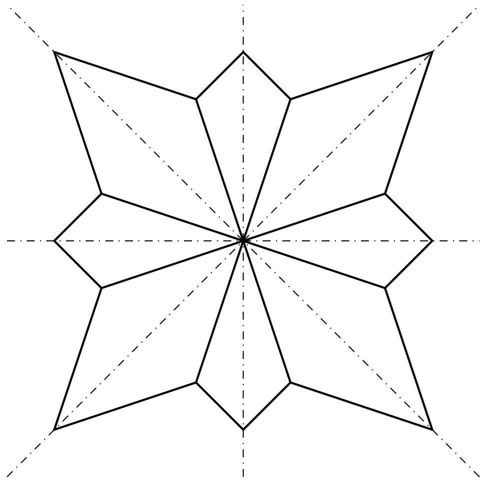



Die Abbildungen (a) bis (g) zeigen je eine Möglichkeit für die zu konstruierenden Quadrate.

**Aufgabe 250614:**
In dem Bild ist - auf einem (mit dünnen Linien gezeichneten) Hintergrund von Quadraten und ihren Diagonalen - mit dicken Linien ein Ornament gezeichnet.
Überprüfe mit durchsichtigem Papier (oder Folie), ob das Ornament axialsymmetrisch ist!
Überprüfe ferner, ob es Drehungen gibt, bei denen das Ornament sich selbst als Bild hat!
Ist beides der Fall, so nenne
a) die Anzahl aller Symmetrieachsen des Ornaments,
b) alle diejenigen Drehungen, bei denen das Ornament sich selbst als Bild hat!
Zu Aufgabe a) zeichne auch das Ornament und alle seine Symmetrieachsen!



**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**

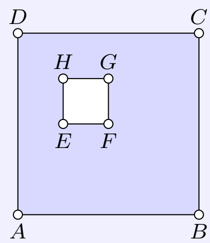


Die Überprüfung ergibt, dass das Ornament sowohl axialsymmetrisch als auch drehsymmetrisch ist.
a) Das Ornament hat genau vier Symmetrieachsen (siehe Abbildung).

b) Das Ornament hat genau bei den Drehungen um seinen Mittelpunkt um 90°, 180° und 270° sich selber als Bild, außerdem natürlich bei der Drehung um 0° (d. h. bei derjenigen Drehung, bei der jeder Punkt der Ebene sich selbst als Bild hat).

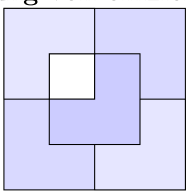
**Aufgabe 260611:**

In ein Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge 8 cm ist ein Quadrat $EFGH$ mit der Seitenlänge 2 cm so eingezeichnet, wie es das Bild zeigt.
$HG$ und $DC$ sind zueinander parallele Strecken mit dem Abstand 2 cm voneinander. $EH$ und $AD$ sind zueinander parallele Strecken mit dem Abstand 2 cm voneinander.




a) Berechne den Flächeninhalt der im Bild gefärbten Fläche!
b) Die gefärbte Fläche soll in fünf Teile zerlegt werden. Diese Teile sollen so gestaltet sein, dass man je zwei von ihnen durch Drehen oder Verschieben miteinander zur Deckung bringen kann.
Zeichne eine solche Aufteilung der gefärbten Fläche!

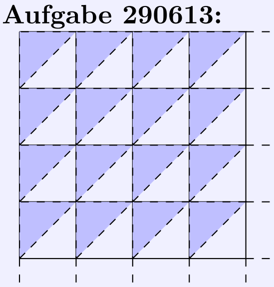
**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**



a) Die Quadrate $ABCD$ und $EFGH$ haben wegen $8 \cdot 8 = 64$ und $2 \cdot 2 = 4$ die Flächeninhalte 64 cm$^2$ bzw. 4 cm$^2$. Somit besitzt die schraffierte Fläche wegen $64 - 4 = 60$ den Flächeninhalt 60 cm$^2$.

b) Die Abbildung zeigt eine mögliche Lösung der Aufgabe.

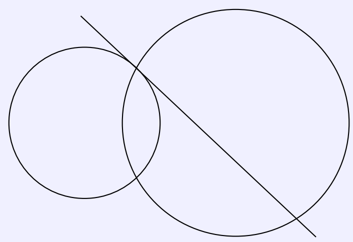
**Aufgabe 290613:**



Ein rechteckiger Fußboden, der 3,6 m lang und 2,7 m breit ist, soll mit zwei Sorten gleichgroßer, aber verschiedenfarbiger dreieckiger Teppichfliesen so ausgelegt werden, dass ein Muster entsteht, wie es durch Fortsetzen des Musters des Bildes zu erhalten ist.
Je zwei solcher dreieckigen Fliesen einer Farbe sollen durch einmaliges Zerschneiden einer quadratischen Fliese mit der Seitenlänge 30 cm hergestellt werden.
Wie viele quadratische Teppichfliesen werden von jeder der beiden Sorten insgesamt benötigt?

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Wegen 3,6m = 360cm, 2,7m = 270cm, $360 : 30 = 12$, $270 : 30 = 9$ und $12 \cdot 9 = 108$ lässt sich der Fußboden mit insgesamt 108 quadratischen Fliesen auslegen.
Das bleibt auch so, wenn man diese Fliesen zerschneidet und zu dem gewünschten Muster umordnet. Da dieses Muster die Fliesen beider Farben in einander gleichen Mengen enthält, werden von jeder der beiden Sorten quadratischer Teppichfliesen wegen $108 : 2 = 54$ insgesamt je 54 Stück benötigt.

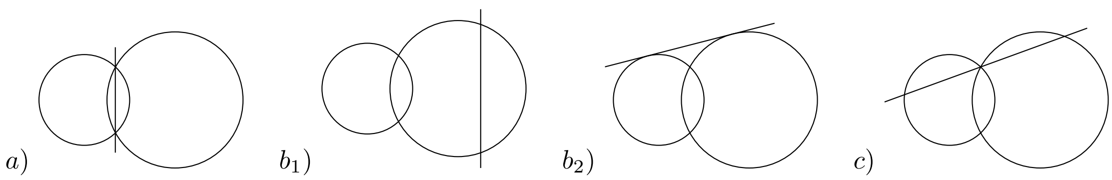
**Aufgabe 330613:**
Karin zeichnet zwei Kreise, die sich in zwei verschiedenen Punkten schneiden. Dann zeichnet sie eine Gerade und zählt an der entstandenen Figur,



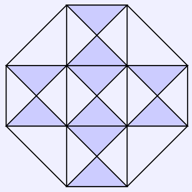
1. wie viele Punkte es gibt, die als gemeinsamer Punkt (Schnitt- oder Berührungspunkt) von mindestens zwei der drei gezeichneten Linien vorkommen,
2. wie viele Gebiete es gibt, die von Teilen der Linien vollständig eingeschlossen werden und in ihrem Innern frei von anderen Linienteilen sind.

Die Abbildung zeigt als Beispiel eine Figur mit 3 Punkten und 4 Gebieten.
Zeichne Figuren mit
a) 2 Punkten, 4 Gebieten; b) 4 Punkten, 4 Gebieten; c) 4 Punkten, 5 Gebieten!

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Die Abbildung zeigt Beispiele für Zeichnungen der geforderten Art.

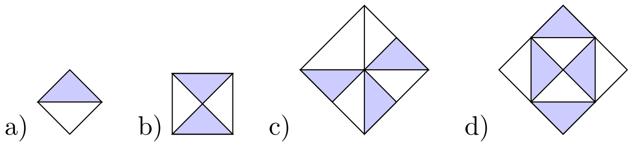


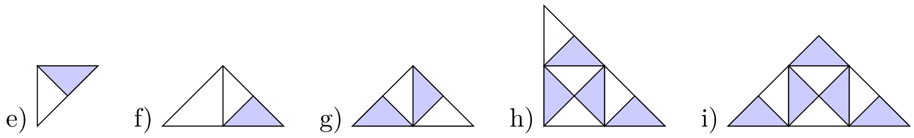
**Aufgabe 340612:**



Das Fliesenmuster in der Abbildung wurde aus 14 weißen und 10 gemusterten dreieckigen Fliesen zusammengesetzt. Man kann darin mehrere Quadrate und Dreiecke finden, die jeweils aus mehr als einer Fliese zusammengesetzt sind.
Wie viele solcher Quadrate lassen sich insgesamt finden?

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Es gibt genau 4 Quadrate aus je zwei Fliesen, 5 Quadrate aus je vier Fliesen, 4 Quadrate aus je sieben Fliesen, l Quadrat aus acht Fliesen (siehe die Beispiele Abb. a, b, c, d), also insgesamt 14 Quadrate der gesuchten Art.




Es gibt genau 20 Dreiecke aus je zwei Fliesen, 8 Dreiecke aus je drei Fliesen, 8 Dreiecke aus je vier Fliesen, 4 Dreiecke aus je acht Fliesen, 4 Dreiecke aus je neun Fliesen (siehe die Beispiele Abb. e, f, g, h, i), also insgesamt 44 Dreiecke der gesuchten Art.

## II Runden 2 & 3

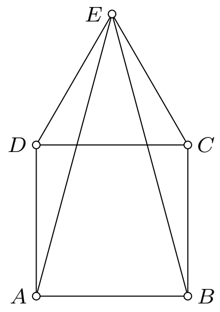
**Aufgabe 060624:**
Im Rahmen des Wiederaufbaus der Leipziger Innenstadt entstehen moderne Wohnkomplexe. Vor den Häusern werden Rasenflächen, Blumenbeete und Terrassen angelegt.
Für eine der rechteckigen Terrassen werden genau 400 Sandsteinplatten verwendet. Die Platten bedecken lückenlos den Boden. Jede dieser Platten ist 60 cm lang und 40 cm breit. Die Länge dieser Terrasse beträgt 10 m.
Ermittle die Breite dieser Terrasse!

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Der Flächeninhalt jeder dieser Platten beträgt $60 \cdot 40\text{ cm}^2 = 2400\text{ cm}^2$.
Daher bedecken 400 solche Platten eine Fläche von $400 \cdot 2400\text{ cm}^2 = 960000\text{ cm}^2 = 96\text{ m}^2$.
Die Terrassenfläche ist rechteckig, ihr Flächeninhalt mithin gleich dem Produkt aus ihrer Länge und ihrer Breite. Die unbekannte Breite betrage $b$ Meter, dann gilt $10b = 96$, woraus man $b = 9{,}6$ erhält.
Die Breite der Terrasse beträgt also 9,6 m.

**Aufgabe 080623:**
Über der Seite $CD$ eines Quadrates $ABCD$ mit $AB = 4$ cm ist ein gleichseitiges Dreieck $\triangle DCE$ so zu konstruieren, dass das Quadrat und das Dreieck die Seite $CD$ gemeinsam haben.
Der Punkt $E$ des Dreiecks $\triangle DCE$ sei dabei außerhalb des Quadrates $ABCD$ gelegen. Verbinde $E$ mit $A$ und mit $B$!
Berechne die Größe des Winkels $\angle AEB$!

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Im Dreieck $\triangle AED$ gilt: (siehe Abbildung) $AD = DE$ (nach Konstruktion)

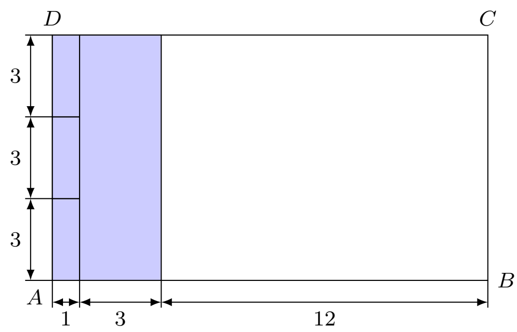
(1) Daraus folgt $\angle DAE = \angle AED$ (als Basiswinkel). Ferner ist:
(2) $\angle EDA = \angle EDC + \angle CDA = 150°$; ($\angle ABC$ bezeichnet die Größe des Winkels $\angle ABC$) denn $\angle EDC = 60°$ (Winkel im gleichseitigen Dreieck) und $\angle CDE = 90°$ (Winkel im Quadrat).

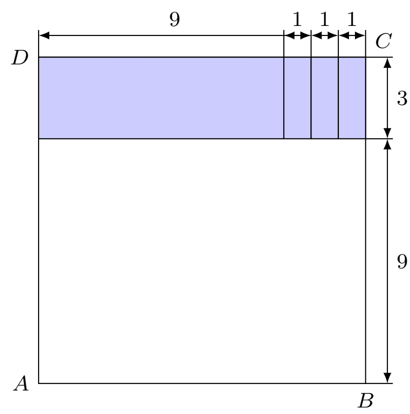



Aus (1), (2) und $\angle AED + \angle EDA + \angle DAE = 180°$ (nach Winkelsummensatz) folgt $\angle AED = 15°$. Entsprechend ist $\angle BEC = 15°$, also $\angle AEB = \angle DEC - \angle AED - \angle BEC = 30°$.

**Aufgabe 100624:**
Die Fläche des Rechtecks $ABCD$ mit den Seitenlängen $a = 16$ cm, $b = 9$ cm ist so in fünf Rechtecksflächen zu zerlegen, dass sich diese zu einer Quadratfläche zusammensetzen lassen, wobei sämtliche Teilrechtecke verwendet werden sollen und die gesamte Fläche des Quadrats lückenlos und ohne Überlappungen von den Flächen dieser Teilrechtecke ausgefüllt werden soll.
Gib eine Möglichkeit hierfür an!

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**

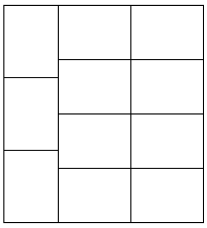



Alle Maßangaben in cm.
Das Rechteck $ABCD$ hat laut Aufgabe einen Flächeninhalt von $9\text{cm} \cdot 16\text{cm} = 144\text{cm}^2$.
Da das Quadrat den gleichen Flächeninhalt haben muss, und da 12 die einzige natürliche Zahl ist, deren Quadratzahl 144 beträgt, so muss seine Seite 12 cm lang sein.

**Aufgabe 130621:**
Eine rechteckige Glasscheibe ist 24 cm lang und 22 cm breit. Daraus sollen rechteckige Scheiben von 8 cm Länge und 6 cm Breite geschnitten werden.
Welches ist die größte Anzahl derartiger Scheiben, die man dabei erhalten kann?
Stelle eine Möglichkeit, diese größte Anzahl zu gewinnen, in einer Zeichnung im Maßstab 1 : 2 dar!

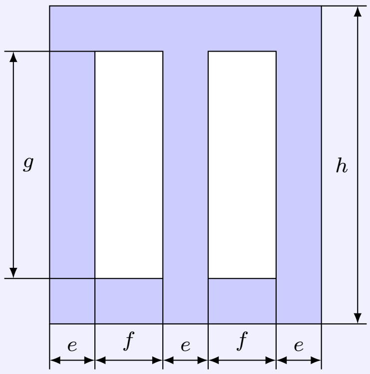
**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**



Die gesamte Glasscheibe hat wegen $24 \cdot 22 = 528$ einen Flächeninhalt von 528 cm$^2$. Jede der kleinen Glasscheiben hat wegen $6 \cdot 8 = 48$ einen Flächeninhalt von 48 cm$^2$.
Wegen $528 : 48 = 11$ lassen sich also höchstens 11 derartige kleine Scheiben aus der großen schneiden.

Dass dies auch tatsächlich möglich ist, zeigt die Abbildung.

**Aufgabe 150624:**



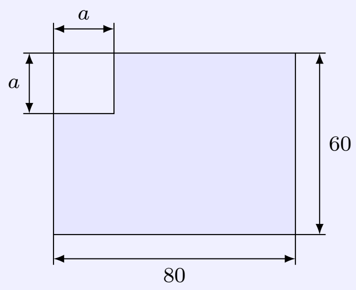

Berechne den Inhalt $A$ der gefärbten Fläche der in der Abbildung dargestellten Figur (die Maße sind der Abbildung zu entnehmen)

a) für $e = 10$ mm, $f = 15$ mm, $g = 50$ mm, $h = 70$ mm,
b) allgemein, indem du eine Formel für $A$ herleitest, in der nur die Variablen $e$, $f$, $g$, $h$ auftreten!

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
a) Die gefärbte Fläche kann man sich dadurch entstanden denken, dass aus einem Rechteck $R$ zwei Rechtecke $S$ und $T$ herausgeschnitten wurden, wobei wegen $10+15+10+15+10 = 60$ das Rechteck $R$ die Seitenlängen 60 mm und 70 mm hat und jedes der Rechtecke $S$, $T$ die Seitenlängen 15 mm und 50 mm.
Daher ergeben sich für $R, S, T$ wegen $60 \cdot 70 = 4200$ bzw. $15 \cdot 50 = 750$ die Flächeninhalte 4200 mm$^2$ bzw. 750 mm$^2$ bzw. 750 mm$^2$.
Somit hat wegen $4200 - 750 - 750 = 2700$ die gefärbte Fläche den Flächeninhalt $A = 2700$ mm$^2$.

b) Die Seitenlängen von $R$ sind $(3e + 2f)$ und $h$, die Seitenlängen von jedem der Rechtecke $S$, $T$ sind $f$ und $g$. Daher hat $R$ den Flächeninhalt $(3e + 2f)h$, und jedes der Rechtecke $S$, $T$ hat den Flächeninhalt $f \cdot g$.
Also ist $A = (3e + 2f)h - 2fg$.

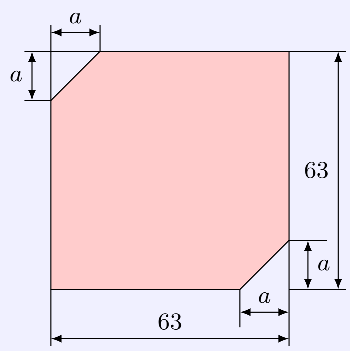
**Aufgabe 160623:**




Die abgebildete farbige Fläche besteht aus einer Rechteckfläche, aus der eine quadratische Fläche herausgeschnitten wurde.
Die farbige Fläche hat einen Flächeninhalt von 44 $\text{cm}^2$.
Aus den in der Abbildung angegebenen Maßen (in mm) ist die Seitenlänge $a$ (in mm) des herausgeschnittenen Quadrats zu berechnen.

**Lösung von Steffen Polster:**
Wegen $80 \cdot 60 = 4800$ beträgt der Flächeninhalt des großen Rechtecks 4 800 $\text{mm}^2 = 48$ $\text{cm}^2$.
Für den Flächeninhalt des herausgeschnittenen Quadrats verbleiben wegen $48 - 44 = 4$ somit 4 $\text{cm}^2$. Also beträgt seine Seitenlänge $a = 2$ cm, da 2 die einzige natürliche Zahl ist, die mit sich selbst multipliziert 4 ergibt.
Die Seitenlänge $a$ des herausgeschnittenen Quadrats beträgt somit $a = 20$ mm.

**Aufgabe 180624:**



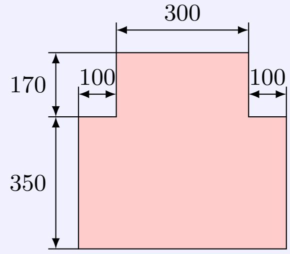

Die abgebildete farbige Fläche ist 38 $\text{cm}^2$ groß. Sie ist aus einer quadratischen Fläche entstanden, von der zwei (gleichgroße) dreieckige Flächen abgeschnitten wurden.

Aus den in der Abbildung angegebenen Maßen (in mm) ist die Seitenlänge $a$ der Dreiecke (in mm) zu berechnen.

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Wegen $63^2 = 3969$ hat das abgebildete Quadrat den Flächeninhalt 3969 $\text{mm}^2$. Wegen 38 $\text{cm}^2 = 3800$ $\text{mm}^2$ und 3969 - 3800 = 169 haben die beiden Dreieckflächen zusammen den Flächeninhalt 169 $\text{mm}^2$.

Da die beiden Dreiecke gleich groß und rechtwinklig-gleichschenklig sind, ergänzen sie sich zu einem Quadrat. Dieses Quadrat hat einen Flächeninhalt von 169 $\text{mm}^2$ und daher die Seitenlänge $a = 13$ mm.
Die Seitenlänge $a$ der genannten Dreiecke beträgt 13 mm.

**Aufgabe 220621:**
Die Abbildung zeigt den Grundriss eines Zimmers. Alle Maße sind in Zentimeter angegeben.
Das Zimmer ist 280 cm hoch. In diesem Zimmer ist ein alter Tapetenbelag von den Wänden und von der Decke zu entfernen. Danach sind Wände und Decke mit Makulatur zu streichen und zu tapezieren.




Errechne für diese Arbeiten mit Hilfe der folgenden Tabelle die insgesamt erforderlichen Lohnkosten!
Dabei ist jede Wand vollständig zu berücksichtigen, auch wenn Fenster und Türen vorhanden sind. (Es wird also angenommen, dass sich die Einsparung an Fläche wieder durch den komplizierten Arbeitsaufwand ausgleicht.) Das Ergebnis ist auf vollen Markbetrag zu runden.

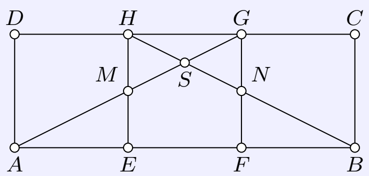
| Leistung | Lohnkosten pro m$^2$ |
|---|---|
| Alte Tapezierung entfernen | 28 Pf |
| Makulatur streichen | 26 Pf |
| Wandtapezierung | 83 Pf |
| Deckentapezierung | 112 Pf |

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Folgende Wandfläche $A_W$ ist zu bearbeiten:

$$A_W = (350 + 170 + 100 + 350 + 550 + 350 + 100 + 170) \cdot 280 cm^2 = 599200 cm^2$$

das sind 59,92 m$^2$, also rund 60 m$^2$.
Die Lohnkosten $L_W$ für die Bearbeitung der Wandfläche $A_W$ betragen somit rund $L_W = 60\cdot(28+26+83)$ Pf = 8220 Pf, das sind 82,20 M. Folgende Deckenfläche $A_D$ ist zu bearbeiten: $A_D = (350\cdot 550+170\cdot 350) =$ 252000 cm$^2$, das sind 25,2 m$^2$, also rund 25 m$^2$. Die Lohnkosten $L_D$ für die Bearbeitung der Deckenfläche $A_D$ betragen somit, mit analoger Rechnung, rund 41,83 M.
Die gesamten Lohnkosten $L$ betragen daher $L = 124{,}03$ M, das sind rund 124 M.

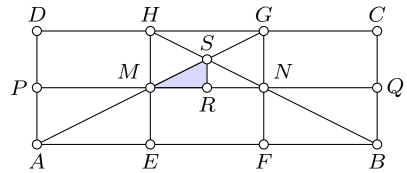
**Aufgabe 230622:**
Die abgebildete Figur $ABCD$ (siehe Abbildung) stellt ein Rechteck dar, das sich aus den drei gleichgroßen Quadraten $AEHD$, $EFGH$ und $FBCG$ zusammensetzt. Die Strecke $AG$ schneidet die Strecke $EH$ in deren Mittelpunkt $M$, die Strecke $BH$ schneidet die Strecke $FG$ in deren Mittelpunkt $N$. Der Flächeninhalt des Rechtecks $ABCD$ beträgt 48 Flächeneinheiten.




Ermittle
a) den Flächeninhalt des Dreiecks $SGH$,
b) den Flächeninhalt des Dreiecks $ABS$,
c) den Flächeninhalt den Vierecks $ASHD$!

Hinweis: Zur Herleitung darfst du den Satz verwenden, dass jedes Rechteck durch seine Diagonalen in vier gleich große Dreiecke zerlegt wird.

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Wegen 48 : 3 = 16 beträgt der Flächeninhalt jedes der drei Quadrate genau 16 Flächeneinheiten.




Die Gerade durch $M$ und $N$ schneide die Strecke $AD$ in $P$ und die Strecke $BC$ in $Q$. Der Abbildung ist dann zu entnehmen:

Da $M$ der Mittelpunkt von $EH$ und $N$ der Mittelpunkt von $FG$ ist, ist $MNGH$ ein Rechteck, das halb so groß ist wie das Quadrat $EFGH$. Sein Flächeninhalt beträgt daher 8 Flächeneinheiten.

Ganz entsprechend werden auch die anderen beiden Quadrate durch die Gerade durch $P$ und $Q$ jeweils in zwei Rechtecke mit je 8 Flächeneinheiten Inhalt zerlegt.

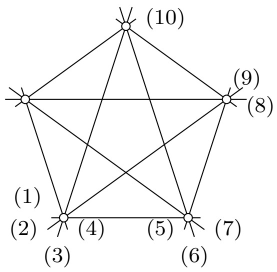
a) Die Diagonalen $MG$ und $NH$ zerlegen das Rechteck $MNGH$ in vier inhaltsgleiche Teildreiecke. Jedes von ihnen, und folglich auch das Dreieck $SGH$, hat einen Inhalt von 2 Flächeneinheiten.
b) Der Flächeninhalt des Dreiecks $ABS$ ist gleich der Summe der Flächeninhalte der (untereinander gleich großen) Dreiecke $AEM$ und $FBN$, des Rechtecks $EFNM$ sowie des Dreiecks $MNS$.
Die Dreiecke $AEM$ und $FBN$ sind jeweils halb so groß wie das Rechteck $EFMN$, ihr Inhalt beträgt daher jeweils 4 Flächeneinheiten. Wegen $2 \cdot 4 + 8 + 2 = 18$ beträgt daher der Flächeninhalt des Dreiecks $ABS$ 18 Flächeneinheiten.

c) Der Flächeninhalt des Vierecks $ASHD$ ist gleich der Summe der Flächeninhalte des Dreiecks $AMP$, des Rechtecks $PMHD$ und des Dreiecks $MSH$. Wegen $4 + 8 + 2 = 14$ beträgt daher der Flächeninhalt des Vierecks $ASHD$ 14 Flächeneinheiten.

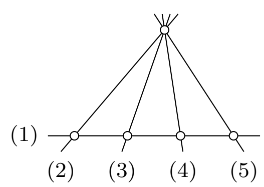
**Aufgabe 230624:**
Fünf voneinander verschiedene Punkte einer Ebene sollen durch Geraden miteinander verbunden werden. Dabei sollen stets alle möglichen Verbindungsgeraden gezeichnet werden.

Uwe behauptet: Die fünf Punkte können so liegen, dass es genau zehn verschiedene Verbindungsgeraden gibt.
Norbert behauptet: Die fünf Punkte können aber auch so liegen, dass es nur fünf Verbindungsgeraden gibt.
Fritz behauptet: Die fünf Punkte können sogar so liegen, dass es nur eine einzige Verbindungsgerade gibt.
a) Zeige durch Zeichnung von je einem Beispiel, dass alle drei Aussagen wahr sind!
b) Untersuche, ob bei entsprechender Lage der fünf Punkte auch noch andere Anzahlen verschiedener Verbindungsgeraden vorkommen können, und zeichne auch dafür Beispiele!

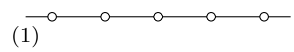
**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
a) Folgende Beispiele zeigen, dass alle drei Aussagen wahr sind:



10 Verbindungsgeraden

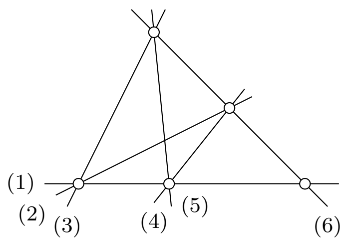


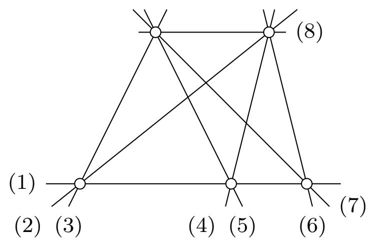
5 Verbindungsgeraden



1 Verbindungsgerade

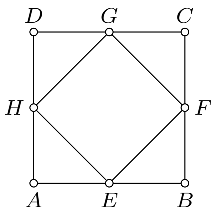
b) Folgende beiden Beispiele zeigen, dass die fünf Punkte auch so liegen können, dass es genau 6 bzw. genau 8 verschiedene Verbindungsgeraden gibt:




**Aufgabe 250623:**
Es sei $ABCD$ ein Quadrat mit der Seitenlänge 14 cm. Die Punkte $E$, $F$, $G$ und $H$ seien die Mittelpunkte der Quadratseiten. Dabei liege $E$ auf $AB$, $F$ auf $BC$, $G$ auf $CD$, $H$ auf $DA$.
a) Konstruiere dieses Quadrat und verbinde die Mittelpunkte $E$ und $F$, $F$ und $G$, $G$ und $H$ sowie $H$ und $E$ durch Strecken!
b) Ermittle den Flächeninhalt der Fläche $EFGH$!

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**




b) Die Strecken $EG$ und $FH$ zerlegen das Quadrat $ABCD$ in vier inhaltsgleiche Quadrate. Jedes dieser Quadrate wird durch die eingezeichnete Diagonale in zwei (gleichschenklig-rechtwinklige) inhaltsgleiche Dreiecke zerlegt.

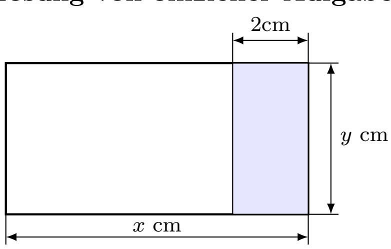
Das Quadrat $ABCD$ ist aus acht solchen Dreiecken zusammengesetzt, die Fläche $EFGH$ aus vier solchen Dreiecken; ihr Flächeninhalt ist daher halb so groß wie der von $ABCD$. Wegen $14 \cdot 14 = 196$ hat $ABCD$ den Flächeninhalt 196cm$^2$.
Wegen $196 : 2 = 98$ hat somit $EFGH$ den Flächeninhalt 98cm$^2$.

**Aufgabe 280623:**
Rolf zeichnet ein Rechteck. Er verkleinert dann dessen größere Seitenlänge um 2 cm und stellt fest:

Dabei entsteht ein zweites Rechteck, dessen Flächeninhalt um 8 cm$^2$ kleiner ist als der Flächeninhalt des ersten Rechtecks.
Ferner vergrößert er beide Seitenlängen des ersten Rechtecks um je 1 cm und stellt fest:

Dabei entsteht ein drittes Rechteck, dessen Flächeninhalt um 13 cm$^2$ größer ist als der Flächeninhalt des ersten Rechtecks.
Weise nach, dass sich allein aus Rolfs Feststellungen die beiden Seitenlängen des ersten Rechtecks ermitteln lassen!
Gib diese Seitenlängen an!

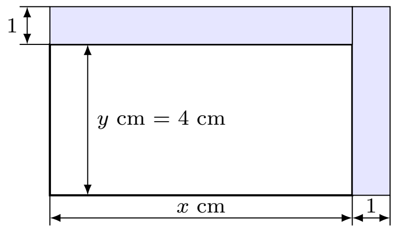
**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**




Das Verkleinern der größeren Seitenlänge des ersten Rechtecks kann erfolgen, indem ein Teilrechteck abgeschnitten wird, dessen eine Seitenlänge 2 cm und dessen Flächeninhalt 8 cm$^2$ beträgt.
Wegen $8 : 2 = 4$ beträgt seine andere Seitenlänge 4 cm. Sie ist zugleich die kleinere Seitenlänge des ersten Rechtecks; diese ist damit eindeutig ermittelt.

Das Vergrößern beider Seitenlängen des ersten Rechtecks kann erfolgen, indem zwei Teilrechtecke hinzugefügt werden, eines mit der Seitenlänge 1 cm und (wegen $4 + 1 = 5$) 5 cm, also einem Flächeninhalt von 5 cm$^2$, das andere mit einer Seitenlänge 1 cm und (wegen $13 - 5 = 8$) dem Flächeninhalt 8 cm$^2$.

Wegen $8 : 1 = 8$ beträgt seine andere Seitenlänge 8 cm. Sie ist zugleich die größere Seitenlänge des ersten Rechtecks; auch diese ist damit eindeutig ermittelt.

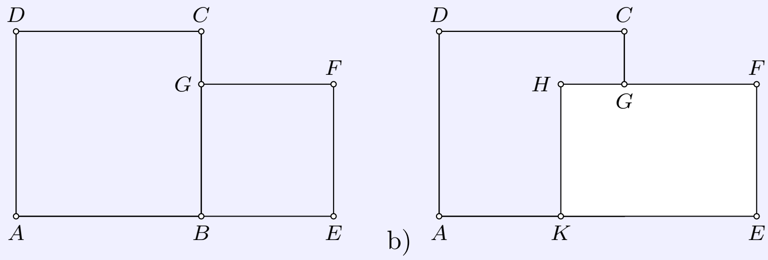



In der Abbildung hat jede farbige Flächen den Flächeninhalt 13 cm$^2$.

Somit lässt sich eindeutig ermitteln: Die Seitenlängen des ersten Rechtecks betragen 4 cm und 8 cm.

**Aufgabe 340622:**
Die Gärten von Familie Kniffel und Familie Knobel haben jeweils die Form eines Quadrates und grenzen so aneinander, wie die Abbildung a zeigt.
Die Fläche von Kniffels Garten beträgt 1225 Quadratmeter, die von Knobels Garten 625 Quadratmeter.

a) Welche Breite $AD$ bzw. $EF$ haben die Gärten?
b) Familie Kniffel gibt Familie Knobel ein Stück ihres Gartens ab. Danach haben beide Gärten gleichgroße Fläche. Wie groß ist diese?
c) Abbildung b zeigt die neue Aufteilung. Um welche Länge $GH$ ist Knobels Garten länger geworden?




a) b)

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
(a) Wegen $35 \cdot 35 = 1225$ hat ein Quadrat mit der Seitenlänge 35 m den Flächeninhalt 1225 Quadratmeter. Also ist die Breite von Kniffels Garten $AD = 35$ m. Aus $25 \cdot 25 = 625$ folgt ebenso $EF = 25$ m.

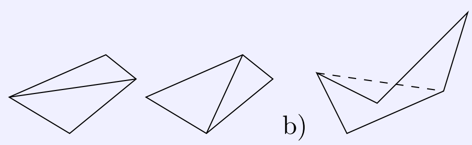
(b) Wegen $1225 + 625 = 1850$ haben beide Gärten zusammen 1850 Quadratmeter. Nach der Aufteilung in zwei gleichgroße Flächen hat jede von ihnen wegen $1850 : 2 = 925$ somit 925 Quadratmeter.

(c) In dem Rechteck $KEFH$ mit diesem Flächeninhalt und der Seitenlänge $EF = 25$ m ist wegen $925 : 25 = 37$ die andere Seitenlänge $FH = 37$ m.
Damit ergibt sich $GH = FH - FG = 37\text{m} - 25\text{m} = 12\text{m}$.

**Aufgabe 340631:**
Jedes konvexe Vieleck lässt sich in Dreiecke zerlegen, deren Eckpunkte zugleich Eckpunkte des Vielecks sind. Bei einem Viereck beispielsweise findet man dafür genau 2 Möglichkeiten (siehe Abbildung a). Skizziere für ein selbstgewähltes

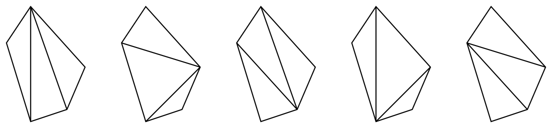
a) konvexes Fünfeck  b) konvexes Sechseck
alle Zerlegungen dieser Art!

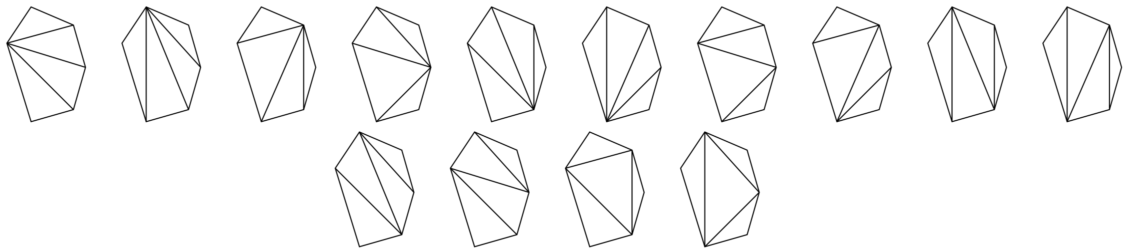
Hinweis: Ein Vieleck wird genau dann konvex genannt, wenn alle seine Diagonalen ganz der Fläche des Vielecks angehören. Ein Beispiel für ein Vieleck, das nicht konvex ist, zeigt Abbildung b.



a) b)

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Die Abbildungen a, b zeigen Zeichnungen der verlangten Art.

a) 

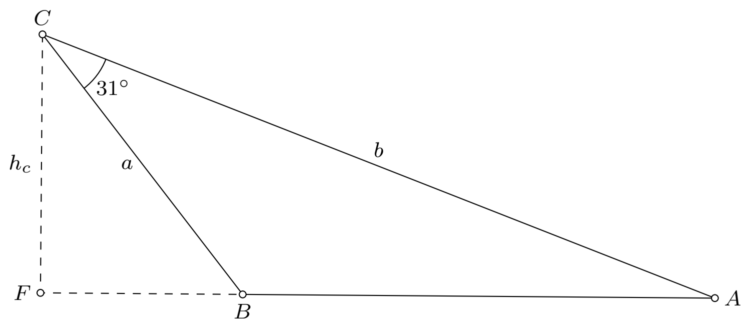
b) 

# III.III Konstruktionen

## I Runde 1

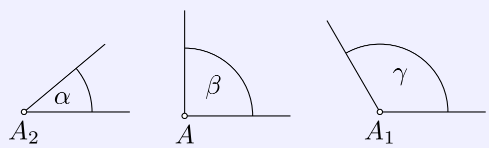
**Aufgabe V00608:**
Konstruiere ein Dreieck aus: $a = 4{,}8$ cm, $b = 10{,}6$ cm und $\gamma = 31°$.
Konstruiere die Höhe $h_c$ mit dem Zirkel! Miss die anderen Stücke!

**Lösung von Steffen Polster:**

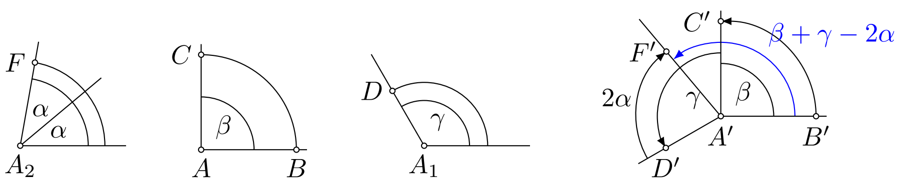



Messung: $c \approx 6{,}9$ cm; $\alpha \approx 21°$; $\beta \approx 128°$; $h_c \approx 3{,}8$ cm

**Aufgabe 050613:**
Gegeben sind die Winkel $\alpha, \beta$ und $\gamma$ (siehe Abbildung)
a) Konstruiere den Winkel $\beta + \gamma - 2\alpha$ mit Zirkel und Lineal!
b) Beschreibe die Konstruktion!



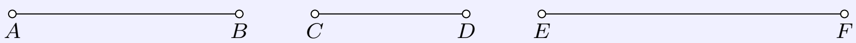

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
a) siehe Abbildung



b) Konstruktionsbeschreibung:
Ich zeichne einen Strahl mit dem Anfangspunkt $A'$. Dann schlage ich um den in der Abb. gegebenen Punkt $A$ und um $A'$ je einen Kreisbogen mit dem gleichen Radius.
Der Kreisbogen um $A$ schneidet die Schenkel des Winkels $\beta$ in den Punkten $B$ und $C$. Der Kreisbogen um $A'$ schneidet den Strahl im Punkt $B'$.
Dann schlage ich um $B'$ mit $BC$ als Radius einen Kreisbogen, der den Kreisbogen durch $B'$ in $C'$ schneidet. Ich verbinde $A'$ mit $C'$.
Dann ist $\angle B'A'C'$ der verlangte Winkel $\beta$.

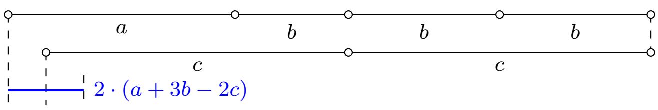
Nun trage ich in der gleichen Weise im Punkt $A'$ an $A'C'$ entgegen dem Uhrzeigersinn den Winkel $\gamma$ an. Dabei erhalte ich (siehe Abbildung) den Punkt $D'$.
Schließlich trage ich in $A'$ an $A'D'$ im Uhrzeigersinn den Winkel $2\alpha$ an (der Winkel $2\alpha$ wurde vorher in der für den Winkel $(\beta+\gamma)$ beschriebenen Weise konstruiert). Das ergibt den Punkt $F'$.
Der Winkel $\angle B'A'F'$ ist der verlangte Winkel $(\beta+\gamma-2\alpha)$.

**Aufgabe 060613:**




Gegeben sind drei Strecken mit den Längen $a$, $b$ und $c$ (siehe Abbildung).
Konstruiere eine Strecke mit der Länge $2\cdot(a+3b-2c)$!
Anmerkung: Bei der Konstruktion darf die Maßeinteilung des Lineals nicht benutzt werden. Eine Konstruktionsbeschreibung wird nicht verlangt.

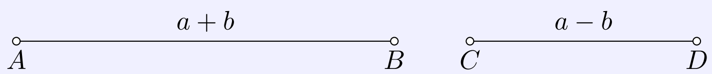
**Lösung von Steffen Polster:**



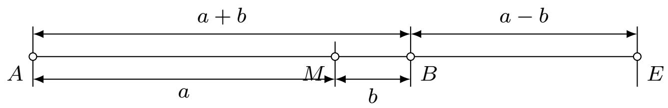

Auf einer Geraden wird die Strecke $AB$ abgetragen und an diese nacheinander dreimal die Strecke $CD$. Vom erreichten Endpunkt wird die Strecke $EF$ zweimal in entgegengesetzter Richtung abgetragen.

Die entstehende Strecke zwischen dem Startpunkt und dem jetzt erreichten Punkt ist dann $a+3b-2c$ lang. Diese Strecke wird verdoppelt werden und hat die gesuchte Länge (in der Abbildung blau).

**Aufgabe 110612:**
Von den beiden abgebildeten Strecken $AB$ und $CD$ hat die erste die Länge $a+b$, die zweite die Länge $a-b$.
Konstruiere unter ausschließlicher Verwendung von Zirkel und Lineal eine Strecke der Länge $a$ und eine Strecke der Länge $b$! Beschreibe und begründe deine Konstruktion!

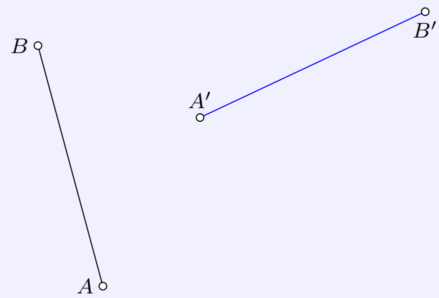



**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Konstruktionsbeschreibung:
(1) Wir zeichnen die Strecke $AB$.
(2) Wir verlängern die Strecke $AB$ über $B$ hinaus um (eine Strecke der gleichen Länge wie) $CD$.
(3) Ist $E$ der Endpunkt dieser Verlängerung, so halbieren wir die Strecke $AE$. Der Mittelpunkt von $AE$ sei $M$ genannt. Dann ist $AM$ eine Strecke der Länge $a$ und $MB$ eine Strecke der Länge $b$.

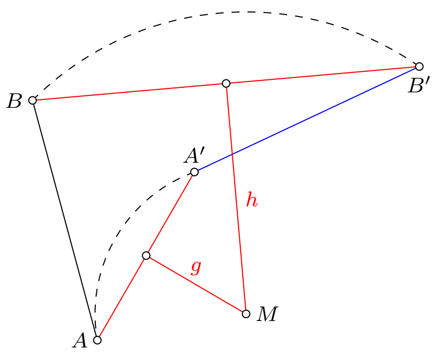



Begründung: Nach Konstruktion hat $AE$ die Länge $a+b+a-b=2a$. Daher hat $AM$ die Länge $a$ sowie $MB$ die Länge $a+b-a=b$.

**Aufgabe 310612:**
a) Begründe, dass jede Drehung, die einen gegebenen Punkt $A$ in einen anderen gegeben Punkt $A'$ überführt, ihren Drehpunkt $M$ auf der Mittelsenkrechten von $AA'$ haben muss!
b) Die Abbildung zeigt zwei einander gleichlange Strecken $AB$ und $A'B'$.
Konstruiere den Drehpunkt $M$ derjenigen Drehung, bei der $A$ in $A'$ und $B$ in $B'$ übergeht, also die Strecke $AB$ das Bild $A'B'$ hat!
Eine Konstruktionsbeschreibung wird nicht verlangt.




**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**

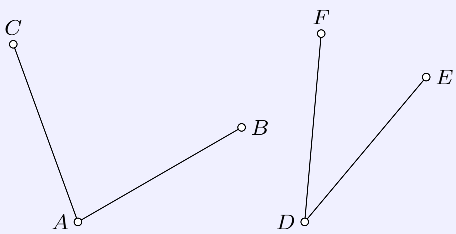



a) Wenn $M$ der Drehpunkt einer Drehung ist, die $A$ in $A'$ überführt, so gilt $MA = MA'$. (1)
Daraus folgt, dass $M$ auf der Mittelsenkrechten von $AA'$ liegen muss, da dies für alle Punkte $M$ gilt, die (1) erfüllen.

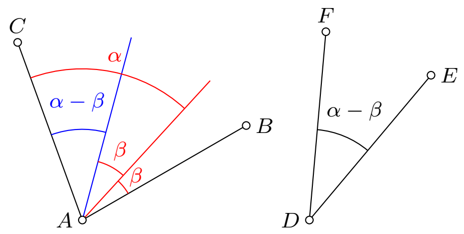
b) Die Abbildung zeigt eine geforderte Konstruktion.
$g$ und $h$ sind die Mittelsenkrechten von $AA'$ bzw. $BB'$, ihr Schnittpunkt ist der gesuchte Punkt $M$. Zur Kontrolle kann man überprüfen, dass im Kreis um $M$ durch $A$ die Radien $MA$, $MA'$ einen gleichgroßen Winkel bilden wie $MB$, $MB'$ im Kreis um $M$ durch $B$.

**Aufgabe 320613:**

Gegeben seien zwei Winkel $BAC$ und $EDF$ mit den Maßen $\alpha+\beta$ bzw. $\alpha-\beta$ (siehe Abbildung).
Konstruiere unter alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal zwei Winkel mit den Maßen $\alpha$ und $\beta$.
Beschreibe, wie du die Konstruktion gefunden hast.




**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**

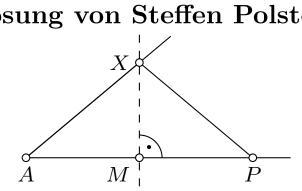



Wenn man die Winkelmaße $\alpha + \beta$ und $\alpha - \beta$ addiert bzw. subtrahiert, so erhält man $2\alpha$ bzw. $2\beta$. Entsprechend kann man durch Antragen des Winkels mit dem Maß $\alpha - \beta$ an den Strahl $AB^+$ bzw. $AC^+$ Winkel mit den Maßen $2\alpha$ bzw. $2\beta$ zeichnen. Diese Winkel kann man halbieren und so je einen Winkel mit den Maßen $\alpha$ bzw. $\beta$ erhalten.

## II Runde 2

**Aufgabe 010624:**
Zeichne einen beliebigen Winkel und nenne seinen Scheitelpunkt $A$! Wähle auf einem der beiden Schenkel einen beliebigen Punkt und nenne ihn $P$!
Konstruiere nun auf dem anderen Schenkel einen Punkt $X$ so, dass $PX = AX$ ist! Begründe die Konstruktion!

**Lösung von Steffen Polster:**



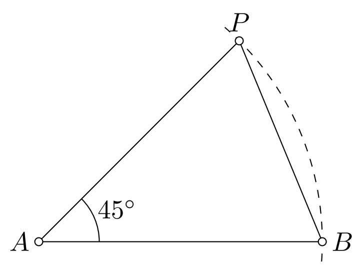

Alle Punkte, die von $A$ und $P$ den gleichen Abstand haben, liegen auf der Mittelsenkrechten der Strecke $\overline{AB}$.
Konstruiert man diese Mittelsenkrechte, so schneidet sie den zweiten Schenkel des Winkels im gesuchten Punkt $X$.

**Aufgabe 020625:**
Zeichne eine Strecke $AB = 5$ cm! Trage in $A$ an $AB$ den Winkel $\alpha = 45°$ an!
Gesucht ist auf dem Schenkel, auf dem nicht der Punkt $B$ liegt, ein Punkt $P$ mit folgender Eigenschaft:

Verbindet man $P$ und $B$, dann soll $\angle ABP = \angle APB$ sein.
Wie kann man diesen Punkt P konstruieren?

**Lösung von Steffen Polster:**

Die Punkte $A, B$ und $P$ bilden ein Dreieck, bei dem die zwei Winkel bei $B$ und $P$ gleich groß sind. Das Dreieck $\triangle ABP$ ist also gleichschenklig, die Basis ist $BP$ und die Schenkel sind $AB = AP$. Damit findet man den Punkt $P$, indem man die Strecke $\overline{AB} = 5$ cm auf dem zweiten Schenkel abträgt.

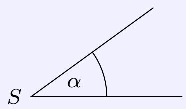



**Aufgabe 030623:**
Gegeben seien zwei Punkte $A$ und $B$, deren Abstand 10 cm beträgt. Du hast als Hilfsmittel nur ein Lineal von 8 cm Länge (ohne Zentimetereinteilung) und einen Zirkel zur Verfügung.
Zeichne die Gerade, die durch $A$ und $B$ geht, und begründe die Konstruktion!

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Man schlägt um $A$ und um $B$ Kreise mit gleichem Radius, der etwas größer als 5 cm sein muss.

Die beiden Schnittpunkte dieser Kreise werden durch das Lineal miteinander verbunden und die so entstandene Strecke mit Zirkel und Lineal halbiert. Dann ist der Halbierungspunkt auch der Mittelpunkt der Strecke $AB$, und diese lässt sich nunmehr mit dem Lineal zeichnen.

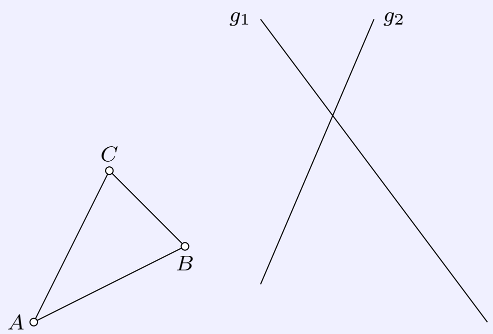
**Aufgabe 060623:**
Gegeben ist ein Winkel mit dem Gradmaß $\alpha = 36°$ (siehe Abbildung).
Konstruiere unter alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal einen Winkel, dessen Gradmaß 99° beträgt!




**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Der geforderte Winkel lässt sich als Summe aus einem rechten Winkel und einem Winkel vom Gradmaß 9° konstruieren.
Der rechte Winkel wird wie üblich konstruiert. Dann halbiert man den gegebenen Winkel und halbiert einen der beiden so erhaltenen Winkel (Gradmaß $\frac{\alpha}{2} = 18°$) noch einmal. Dadurch entsteht ein Winkel vom Gradmaß $\frac{\alpha}{4} = 9°$.

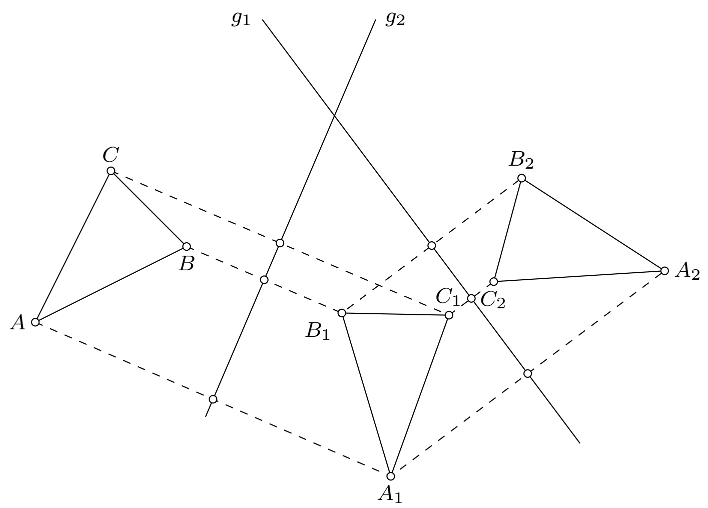
Man addiert auf die im Lehrbuch Klasse 5 angegebene Weise den rechten Winkel und den Winkel von 9° und erhält, wie verlangt, einen Winkel von 99°.

**Aufgabe 100621:**
Die Abbildung zeigt ein Dreieck $\triangle ABC$ und zwei Geraden $g_1$ und $g_2$. Das Dreieck $\triangle ABC$ soll nacheinander an den Geraden $g_1$ und $g_2$ gespiegelt werden.



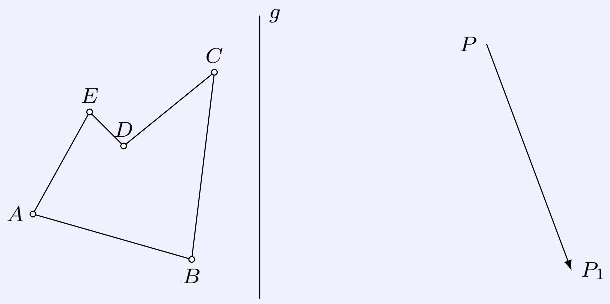

Konstruiere unter alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal das dabei entstehende Dreieck $\triangle A_2B_2C_2$!
(Konstruktionsbeschreibung wird nicht verlangt.)

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**

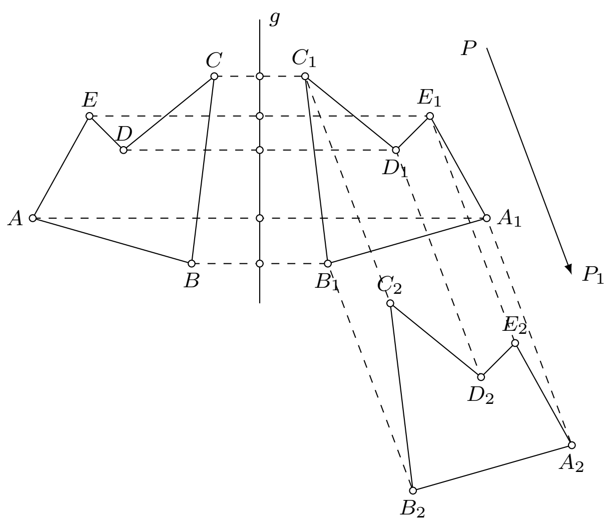



**Aufgabe 110621:**
Das auf der untenstehenden Zeichnung abgebildete Fünfeck $ABCDE$ soll an der Geraden $g$ gespiegelt werden. Auf das so entstandene Fünfeck $A_1B_1C_1D_1E_1$ ist anschließend die Verschiebung anzuwenden, die durch den Verschiebungspfeil $\overrightarrow{PP_1}$ gegeben ist.

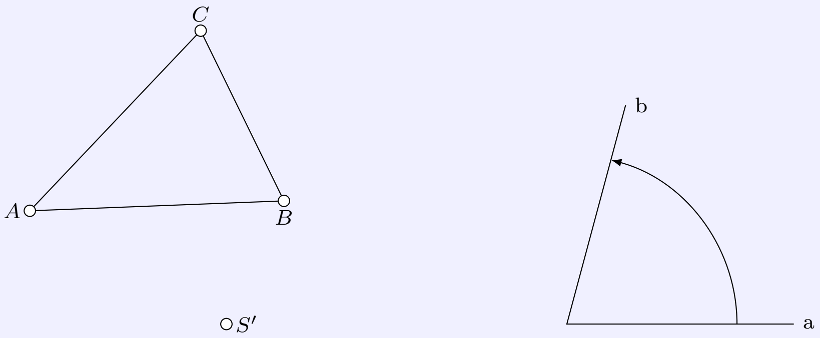
Konstruiere unter alleiniger Verwendung von Zirkel, Lineal und Zeichendreieck auf dem Arbeitsblatt das dadurch entstehende Fünfeck $A_2B_2C_2D_2E_2$! Eine Konstruktionsbeschreibung wird nicht verlangt.



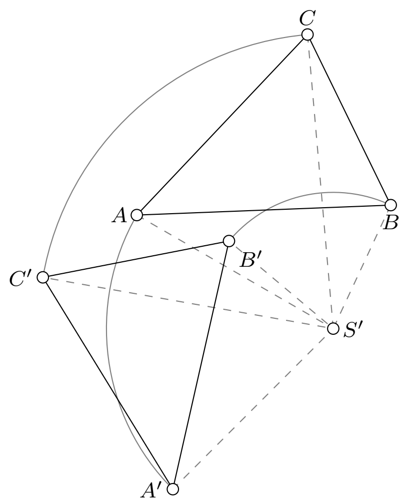

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**



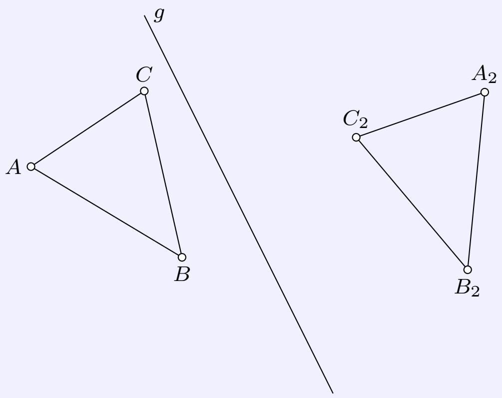
**Aufgabe 120621:**
Das abgebildete Dreieck $ABC$ ist um den Drehpunkt $S$ um den Drehwinkel $\angle(a,b)$ im angegebenen Drehsinn zu drehen. Konstruiere unter alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal das dadurch entstehende Dreieck $A'B'C'$! Eine Konstruktionsbeschreibung wird nicht verlangt.




**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**

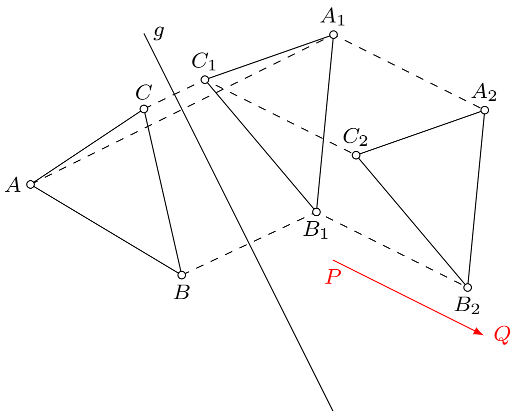



**Aufgabe 140621:**
Auf dem beiliegenden Arbeitsblatt sind ein Dreieck $ABC$ und ein Dreieck $A_2B_2C_2$, ein Punkt $P$ sowie eine Gerade $g$ abgebildet.




Das Dreieck $A_2B_2C_2$ ist aus dem Dreieck $ABC$ durch folgende Konstruktionen entstanden:
Zunächst wurde $\triangle ABC$ an $g$ gespiegelt, wobei ein Dreieck $A_1B_1C_1$ entstand. Danach wurde auf $\triangle A_1B_1C_1$ eine solche Verschiebung angewendet, dass $\triangle A_2B_2C_2$ als Bild des Dreiecks $A_1B_1C_1$ entstand.
Konstruiere unter Verwendung von Zirkel, Lineal und Zeichendreieck den Verschiebungspfeil $\overrightarrow{PQ}$ dieser auf $\triangle A_1B_1C_1$ anzuwendenden Verschiebung. Eine Konstruktionsbeschreibung wird nicht verlangt.

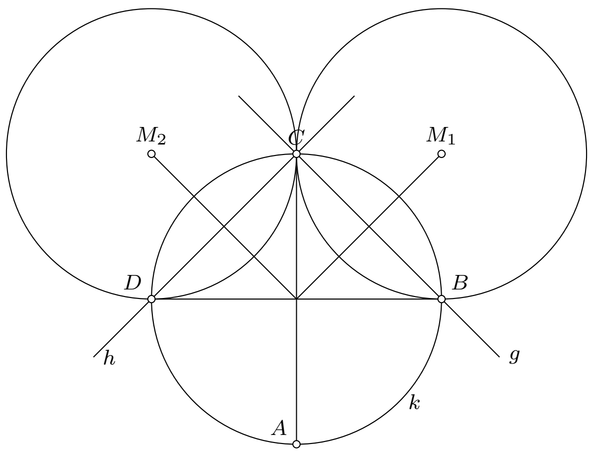
**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**



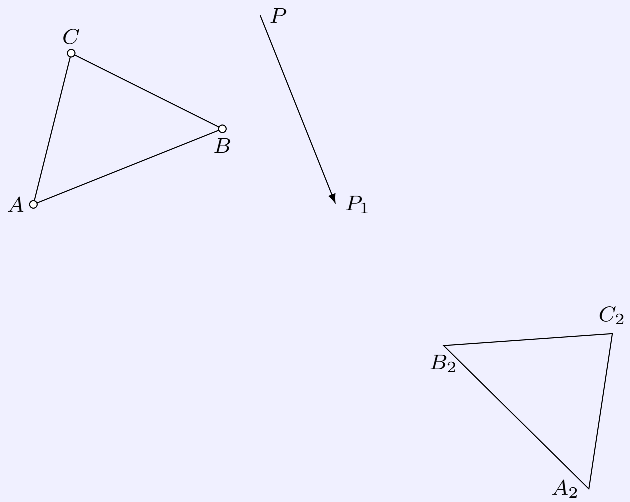

Als Lösung gilt jede (einwandfreie) Zeichnung, in der für mindestens einen der Punkte $A_1$, $B_1$ bzw. $C_1$ bei der Spiegelung an $g$ und dann gleichsinnig parallel und gleichlang zu $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{B_1B_2}$ bzw. $\overrightarrow{C_1C_2}$ der gesuchte Verschiebungspfeil $\overrightarrow{PQ}$ konstruiert wurde.

**Aufgabe 150623:**
Zeichne einen Kreis $k$ mit dem Mittelpunkt $M$ und einem Durchmesser von 6,4 cm!
Trage in diesen Kreis zwei aufeinander senkrecht stehende Durchmesser ein und bezeichne ihre auf $k$ liegenden vier Endpunkte der Reihe nach entgegen dem Uhrzeigersinn mit $A, B, C, D$!
Die Gerade durch $B$ und $C$ sei $g$, die Gerade durch $C$ und $D$ sei $h$. Spiegele den Kreis $k$ an $g$ und nenne den Mittelpunkt des gespiegelten Kreises $M_1$!
Spiegele den Kreis $k$ an $h$ und nenne den Mittelpunkt des gespiegelten Kreises $M_2$!
Als Lösung gilt die ausgeführte Konstruktion ohne Beschreibung.

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**

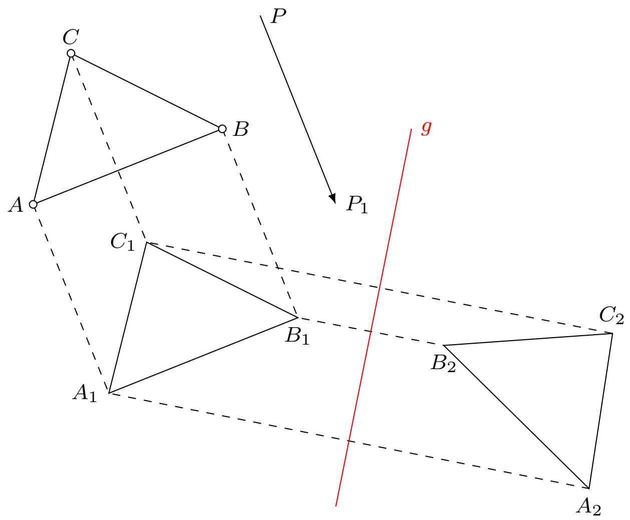



**Aufgabe 170624:**




Auf der Abbildung sind ein Dreieck $ABC$, ein Verschiebungspfeil $\overrightarrow{PP_1}$, sowie ein Dreieck $A_2B_2C_2$ abgebildet.
Gesucht ist eine Gerade $g$ mit folgender Eigenschaft:
Wendet man auf das Dreieck $ABC$ zuerst die Verschiebung $\overrightarrow{PP_1}$ und dann die Spiegelung an der Geraden $g$ an, so entsteht das Dreieck $A_2B_2C_2$.
Konstruiere unter alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal eine Gerade $g$ mit dieser Eigenschaft!
Eine Konstruktionsbeschreibung wird nicht verlangt.

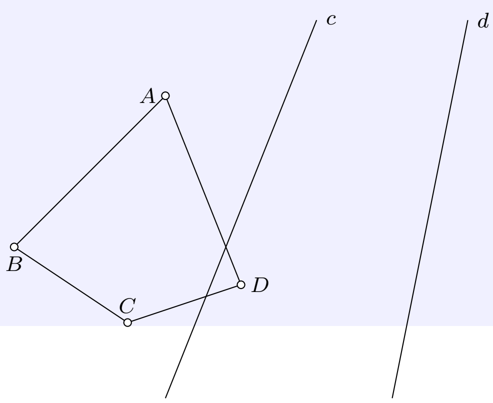
**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**



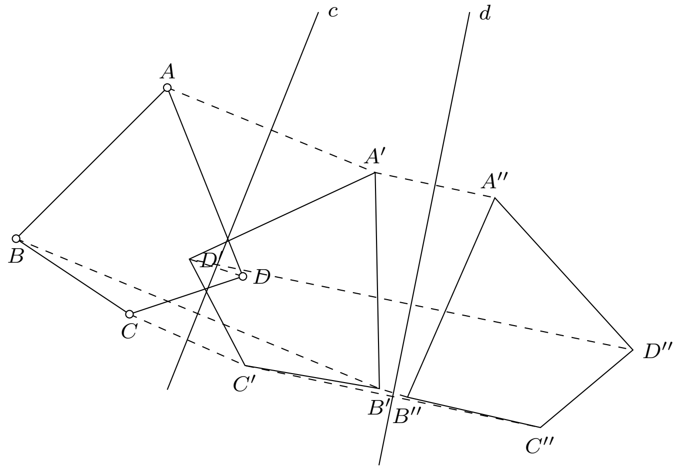

**Aufgabe 210624:**

Spiegele die Figur $ABCD$ auf dem Arbeitsblatt nacheinander an den gegebenen Geraden $c$ und $d$!

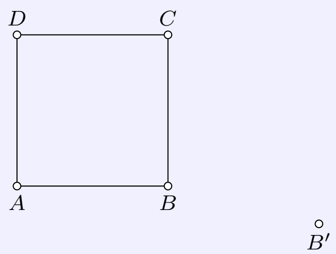
Eine Beschreibung der Konstruktion ist nicht erforderlich.



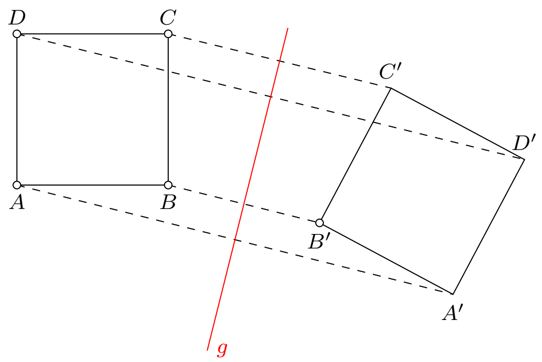
**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**



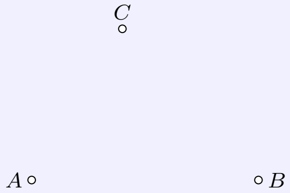

**Aufgabe 220622:**
Der Punkt $B'$ auf dem Arbeitsblatt sei das Bild von $B$ bei der Spiegelung an einer Geraden $g$.
Konstruiere diese Gerade $g$ und die Bilder $A'$, $C'$, $D'$ der Punkte $A$, $C$, $D$ bei der Spiegelung an $g$!
Eine Beschreibung und Begründung der Konstruktion wird nicht verlangt.




**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**

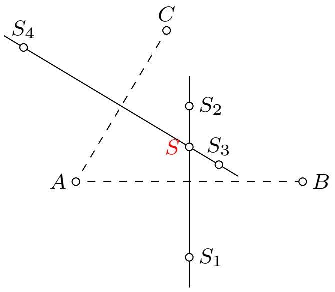


**Aufgabe 260623:**




Es seien $A$, $B$, $C$ die drei in der Abbildung gegebenen Punkte, die nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen.
a) Konstruiere (mindestens) zwei Punkte $S_1$ und $S_2$, für die $S_1A = S_1B$ und $S_2A = S_2B$ gilt!
b) Es gibt genau einen Punkt $S$, der von $A$, $B$ und $C$ gleich weit entfernt ist. Konstruiere diesen Punkt $S$!
c) Begründe, warum der Punkt $S$ bei deiner Konstruktion die geforderten Bedingungen erfüllt!

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**




a) Eine mögliche Konstruktion ist die folgende (siehe Abbildung):
Wir zeichnen um $A$ und um $B$ je einen Kreis mit dem gleichen Radius $r$, der größer als $\frac{1}{2}AB$ und sonst beliebig gewählt wird. Die beiden Schnittpunkte $S_1$ und $S_2$ dieser beiden Kreise erfüllen die Bedingung $S_1A = S_1B$ und $S_2A = S_2B$.

b) In entsprechender Weise konstruieren wir für die Punkte $A$ und $C$ zwei Punkte $S_3$, und $S_4$, für die $S_3A = S_3C$ und $S_4A = S_4C$ gilt. Der Schnittpunkt $S$ der Geraden durch $S_1$, $S_2$ und der Geraden durch $S_3$, $S_4$ erfüllt die geforderten Bedingungen.

c) Nach Konstruktion ist die Gerade durch $S_1$, $S_2$ Symmetrieachse zu $A$, $B$, wobei alle ihre Punkte ebenso weit von $A$ wie von $B$ entfernt sind.
Ferner ist die Gerade durch $S_3$, $S_4$ Symmetrieachse zu $A$, $C$, wobei alle ihre Punkte ebenso weit von $A$ wie von $C$ entfernt sind.
Nach Konstruktion ist $S$ ein Punkt beider Symmetrieachsen. Deshalb gilt für ihn: $S_A = S_B$ und $S_A = S_C$ und damit auch $S_B = S_C$, d. h., $S$ ist von $A$, $B$ und $C$ gleich weit entfernt.

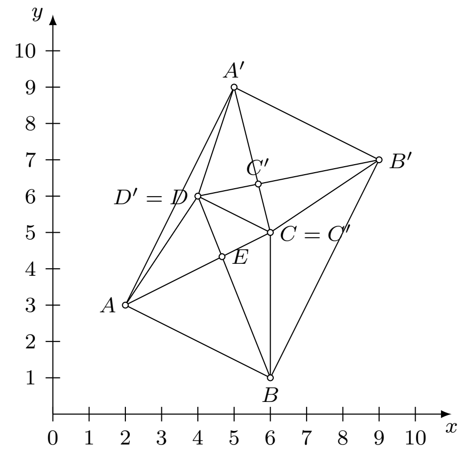
**Aufgabe 290622:**

a) Zeichne in ein Koordinatensystem (Einheit 1 cm) die Punkte $A(2;3)$, $B(6;1)$, $C(6;5)$ und $D(4;6)$ ein! Verbinde die Punkte $A$, $B$, $C$ und $D$ so miteinander, dass ein Viereck entsteht! Verbinde dann in diesem Viereck den Punkt $A$ mit dem Punkt $C$ und den Punkt $B$ mit $D$! Bezeichne den Schnittpunkt der Strecken $AC$ und $BD$ mit $E$!

b) Spiegele die erhaltene Figur an der Geraden durch $C$ und $D$! Verbinde anschließend noch den Punkt $A$ mit seinem Bildpunkt $A'$ und den Punkt $B$ mit seinem Bildpunkt $B'$!

c) Die insgesamt erhaltene Figur soll längs ihrer Strecke so durchlaufen werden, dass jede Strecke genau einmal in einem solchen Weg vorkommt.
Wähle einen geeigneten Anfangspunkt und schreibe einen derartigen Weg auf!

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**

a,b) 


c) Ein möglicher Weg ist: $D, A, B, E, D, C, E, A, A', D, E', B', C, E', A', B', B, C$.

**Aufgabe 300621:**
a) Zeichne in ein Koordinatensystem das Quadrat $ABCD$ mit den Eckpunkten

$$A(1;1),\quad B(5;1),\quad C(5;5),\quad D(1;5)$$

und das Quadrat $PQRS$ mit den Eckpunkten

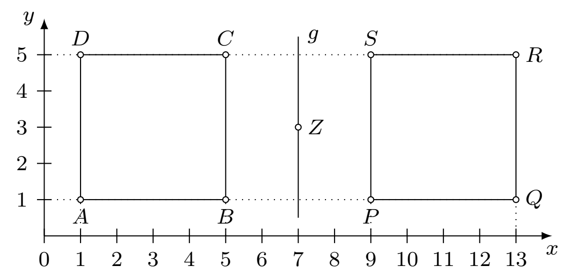
$$P(9;1),\quad Q(13;1),\quad R(13;5),\quad S(9;5)$$

ein!
b) Gibt es eine Spiegelung und auch eine Drehung, bei der das Quadrat $PQRS$ das Bild des Quadrates $ABCD$ ist?
Wenn dies der Fall ist, gib die Koordinaten des Drehzentrums und die Größe des Drehwinkels an! Eine Begründung wird nicht verlangt.

Hinweis: Wenn das Quadrat $PQRS$ das Bild des Quadrates $ABCD$ ist, so braucht die Reihenfolge $P$, $Q$, $R$, $S$ nicht die Reihenfolge der Bildpunkte $A$, $B$, $C$, $D$ zu sein.

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**

a) Die Abbildung zeigt die in ein Koordinatensystem eingezeichneten Quadrate.
b) Die Abbildung zeigt auch die Spiegelgerade $g$ und eine Konstruktion dieser Geraden.
c) Das Drehzentrum ist $Z(7;3)$, der Drehwinkel beträgt 180°.

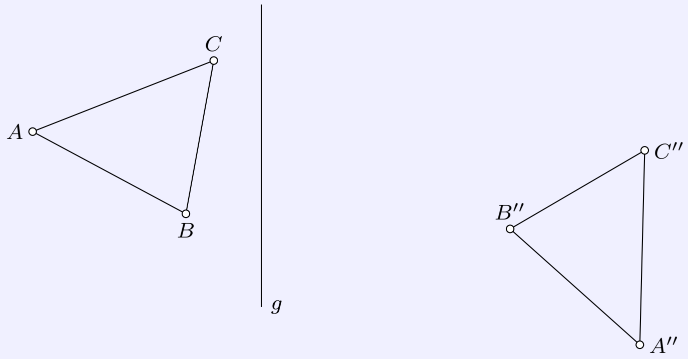



**Aufgabe 310624:**
Auf dem Arbeitsblatt befinden sich zwei Dreiecke $ABC$, $A''B''C''$ und eine Gerade $g$. Zu konstruieren ist

1. das Bild $A'B'C'$ von $ABC$ bei der Spiegelung an $g$,
2. der Drehpunkt $M$ derjenigen Drehung, die $A'B'C'$ in $A''B''C''$ überführt.

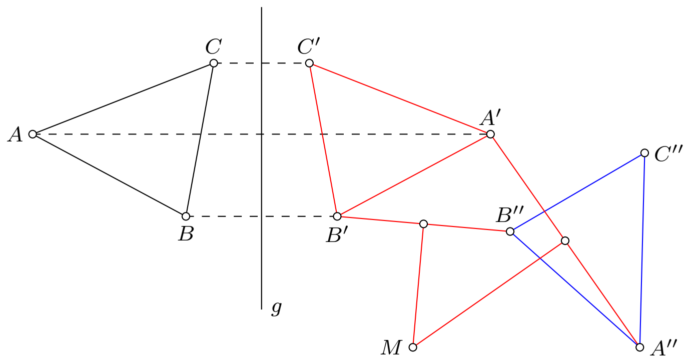
a) Fertige auf dem Arbeitsblatt eine Konstruktionszeichnung an, die alle benötigten Hilfslinien enthält!

b) Beschreibe deine Konstruktion! Eine Begründung wird nicht verlangt.




**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Die Abbildung zeigt eine Konstruktion. Sie kann folgendermaßen beschrieben werden:

(1) Man konstruiert die Lote $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ von $A$, $B$, $C$ auf $g$ und verlängert sie über $A_1$, $B_1$ bzw. $C_1$ hinaus um ihre eigene Länge bis $A'$, $B'$, $C'$.
(2) Man konstruiert die Mittelsenkrechten $m_1$, $m_2$ von $A'A''$ bzw. bzw. $B'B''$ und ihren Schnittpunkt $M$.



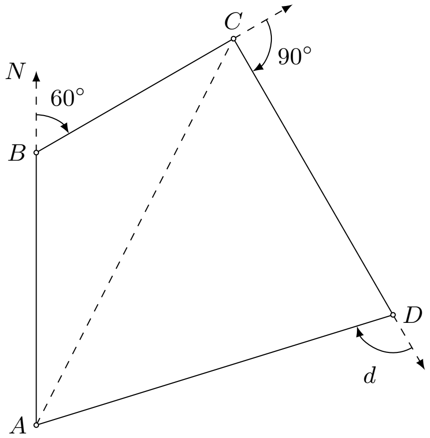

**Aufgabe 320623:**
Bei einem Geländespiel erhält eine Pfadfindergruppe folgenden Auftrag:

- Geht vom Ausgangspunkt $A$ aus 600 m geradlinig nach Norden! Dort befindet sich ein Aussichtsturm (Punkt $B$).
- Ändert nun euren Kurs um 60° in nordöstliche Richtung! Nach 500 m erreicht ihr eine alte Scheune (Punkt $C$).
- Geht jetzt im rechten Winkel in etwa südöstliche Richtung um 700 m weiter! Dort ist eine hohle Eiche (Punkt $D$). Von ihr aus sollt ihr wieder nach $A$ zurückfinden.

a) Um wie viel Grad muss die Pfadfindergruppe in $D$ den Kurs ändern, um geradlinig nach $A$ zu gelangen?
b) Wie lang ist die Strecke von $A$ nach $D$?
c) Ein Mitglied der Gruppe will bereits von $C$ aus nach $A$ zurückkehren. Wie weit ist $A$ von $C$ entfernt?

Fertige zur Beantwortung dieser Fragen eine Zeichnung an (auf weißem, nicht kariertem oder liniertem Papier; in geeigneter Verkleinerung); entnehme die gesuchten Angaben mit Zeichengenauigkeit!

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Die Abbildung zeigt eine Darstellung, bei der 100 m verkleinert als 1 cm wiedergegeben werden. An einer solchen Zeichnung kann man mit Zeichengenauigkeit (etwa auf 1° genau bzw. etwa auf 1 mm genau, d. h. für die Wegstrecken etwa auf 10 m genau) ablesen:
a) In $D$ muss der Kurs um $\delta \approx 103°$ (in etwa südwestliche Richtung) geändert werden.
b) Die Strecke von $D$ nach $A$ ist etwa 820 m lang.
c) Der Punkt $A$ ist von $C$ etwa 950 m entfernt.



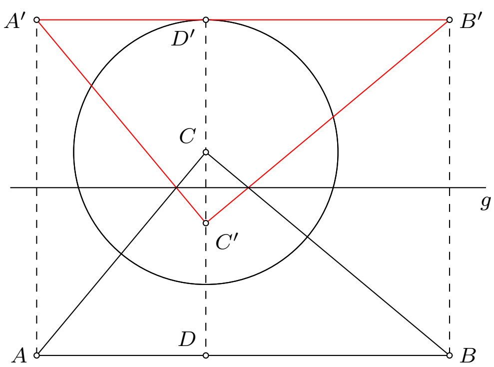

**Aufgabe 330623:**
Konstruiere ein rechtwinkligen Dreieck $ABC$ mit $AC = 5$ cm, $BC = 6$ cm und dem rechten Winkel bei $C$!
Konstruiere weiter den Kreis $k$ um $C$ mit dem Radius 2,5 cm!
Nun soll eine Gerade $g$ so gelegt werden, dass folgende Bedingung erfüllt wird:

Wenn man das Dreieck $ABC$ an $g$ spiegelt und dabei das Dreieck $A'B'C'$ erhält, so hat der Kreis $k$ genau 3 gemeinsame Punkte (Schnitt- oder Berührungspunkte) mit diesem Dreieck, d. h. mit der Linie, die sich aus den drei Strecken $A'B'$, $B'C'$ und $C'A'$ zusammensetzt.

Konstruiere eine solche Gerade $g$ und überprüfe durch Konstruktion des durch Spiegelung entstehenden Dreiecks $A'B'C'$, ob die Bedingung erfüllt ist!

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
In Abbildung ist eine mögliche Lösungen gezeigt.

Die dort jeweils verwendete Gerade $g$ kann nach folgender Beschreibung konstruiert werden:
a) Man konstruiert das Lot von $C$ auf $AB$. Ist $D$ sein Fußpunkt, so verlängert man $DC$ über $C$ hinaus bis zum Schnitt $D'$ mit $k$.
Dann konstruiert man $g$ als die Mittelsenkrechte von $DD'$.



# III.IV Raumgeometrie

## I Runde 1

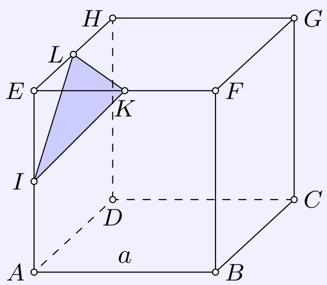
**Aufgabe 050614:**
In einem Betrieb sollen 1600 Pakete, die je 1,6 dm lang, 7 cm breit und 45 mm hoch sind (Außenmaße), zum Versand gebracht werden.
Arbeiter wollen sie in Kisten von 64 cm Länge, 0,28 m Breite und 1,8 dm Höhe (Innenmaße) einschichten.

Welches ist die kleinste Anzahl von Kisten, die ausreicht, um alle diese Pakete gleichzeitig zu versenden?

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Wir können in jede der Kisten 64 Pakete einpacken, wenn wir die Pakete so hineinlegen, dass ihre längsten Kanten parallel der längsten Kistenkante und ihre zweitlängsten Kanten parallel der zweitlängsten Kistenkante liegen. In diesem Fall erhalten wir 4 übereinanderliegende Schichten von je 16 Paketen.

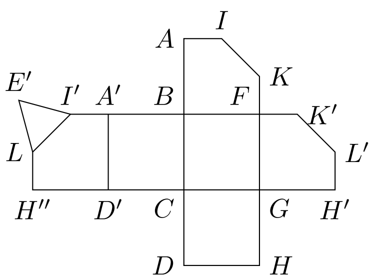
Mit 25 so gepackten Kisten kommen wir aus; denn die Anzahl der in ihnen liegenden Pakete beträgt $25 \cdot 64 = 1600$.
Die Summe der Volumina der Innenräume aller 25 Kisten beträgt genau soviel wie die Summe der Volumina der Pakete. Da weniger als 25 Kisten ein kleineres Volumen als das hier ermittelte haben, ist 25 die kleinste Anzahl von Kisten, die ausreicht, um 1600 Pakete der in der Aufgabe angegebenen Größe gleichzeitig zu versenden.

**Aufgabe 090611:**




Gegeben sei ein Würfel mit den Eckpunkten $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$, $G$, $H$ (siehe Abbildung) und der Kantenlänge $a = 4$ cm. Von ihm werde durch einen ebenen Schnitt durch die Punkte $I, K, L$ eine Ecke abgeschnitten, wobei $I$ der Mittelpunkt von $AE$, $K$ der Mittelpunkt von $EF$ und $L$ der Mittelpunkt von $EH$ ist.
Zeichne ein Netz des Restkörpers und bezeichne die Eckpunkte!

**Lösung von Steffen Polster:**
Ein mögliches Netz:

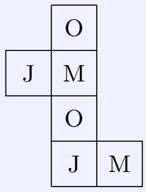


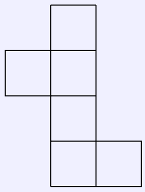

**Aufgabe 220611:**
In einem Aquarium hat der Hohlraum, der mit Wasser gefüllt werden könnte, die Gestalt eines Würfels von 60 cm Kantenlänge. Dieser Hohlwürfel soll aber nur bis zu einer Höhe von 10 cm unter seinem oberen Rand gefüllt werden.
Wie viel Eimer Wasser sind dafür insgesamt erforderlich, wenn jeder Eimer 9 Liter fasst?

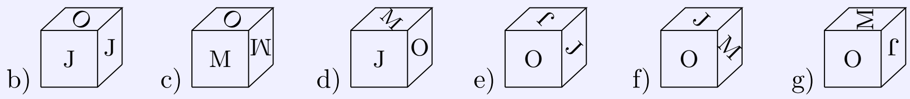
**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Wegen $60 - 10 = 50$ hat der mit Wasser zu füllende Teil des Aquariums die Gestalt eines Quaders vom Volumen $60\text{cm} \cdot 60\text{cm} \cdot 50\text{cm} = 180000\text{cm}^3 = 180\text{dm}^3$.
Da 1 Liter Wasser ein Volumen von 1 $\text{dm}^3$ hat, sind folglich 180 Liter Wasser einzufüllen. Wegen $180 : 9 = 20$ sind das genau 20 Eimer Wasser.

**Aufgabe 220612:**
Die sechs quadratischen Flächen der Oberfläche eines Würfels sind so mit den Buchstaben O, J, M beschriftet, wie es das Würfelnetz in Bild a) zeigt. (Der Buchstabe O gelte dabei als kreisförmig.)

a) Welche der in den Bildern b) bis g) abgebildeten Würfel könnten aus diesem Netz hergestellt worden sein?
Für welche Würfel ist dies nicht möglich? (Als Lösung genügt jeweils die Angabe, ob Herstellbarkeit vorliegt, ohne Begründung.)

a) 

h) 




b) In das Würfelnetz des Bildes h) sollen die Buchstaben O, J, M so eingetragen werden, dass sich aus dem Netz ein Würfel mit den folgenden Eigenschaften (1), (2) und (3) herstellen lässt:

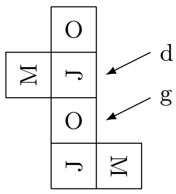
(1) Je zwei gegenüberliegende Seitenflächen des Würfels tragen denselben Buchstaben.
(2) Der Würfel lässt sich so drehen, dass Bild d) entsteht.
(3) Der Würfel lässt sich so drehen, dass Bild g) entsteht.

Als Lösung ist eine mögliche Eintragung anzugeben, ohne Begründung, aber mit der Kennzeichnung einer Fläche, die J enthält und in Bild d) sichtbar sein soll, sowie einer Fläche, die O enthält und in Bild g) sichtbar sein soll.

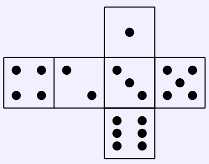
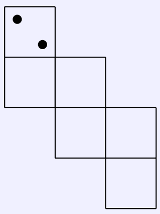
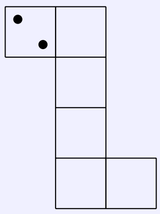
**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**

a) Die Würfel in den Abbildungen c), e), f) lassen sich aus dem Netz in Abbildung a) herstellen, die Würfel in den Abbildungen b), d), g) nicht.

b) Eine mögliche Eintragung zeigt die Abbildung.

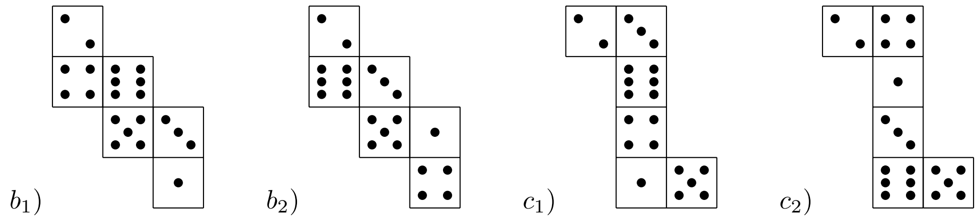


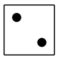
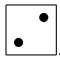

**Aufgabe 230611:**
Die Bilder a) bis c) zeigen drei Würfelnetze.

a) 
b) 
c) 

Wie können die Punkte auf dem Würfelnetz b) und auf dem Netz c) verteilt werden, damit der gleiche Würfel entsteht wie aus dem Netz a)?
Gib je ein Beispiel für b) und c) an!

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**




Es gibt genau die in der Abbildung angegebenen Möglichkeiten. Von ihnen ist zu b) und c) je eine anzugeben.
Man kann auch Lösungen zulassen, in denen die Punkte auf den Flächen des Würfels zwar dieselben Zahlen darstellen, aber anders angeordnet sind, z. B.  .

**Aufgabe 240613:**
Wenn man einen Würfel auf einen Tisch stellt, so dass er nirgends seitlich über die Tischplatte hinausragt, so sind von seinen sechs Flächen genau fünf sichtbar.
Ebenso kann man einen kleineren Würfel so auf einen größeren stellen, dass von den sechs Flächen des kleineren Würfels genau fünf sichtbar sind, während die sechste vollständig auf dem größeren Würfel aufliegt, ohne seitlich über ihn hinauszuragen.

In dieser Art sollen drei Würfel mit den Kantenlängen $a_1 = 20$ cm, $a_2 = 10$ cm, $a_3 = 4$ cm der Größe nach so übereinander gestellt werden, dass der größte Würfel zuunterst auf der Tischplatte steht.
Wie groß ist dann die Summe der Flächeninhalte aller sichtbaren Flächenteile der drei Würfel?

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Sichtbar sind von jedem der drei Würfel erstens die vier Seitenflächen (der Mantel). Sie haben die Flächeninhalte

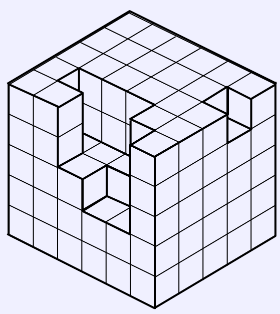
$$A_1 = 4 \cdot a_1^2 = 1600 \text{ cm}^2, \qquad A_2 = 4 \cdot a_2^2 = 400 \text{ cm}^2, \qquad A_3 = 4 \cdot a_3^2 = 64 \text{ cm}^2$$

Sichtbare Flächenteile sind zweitens Teile der Deckflächen der drei Würfel.
Die Flächeninhalte dieser Flächenteile ergeben zusammen den Flächeninhalt der Deckfläche des größten Würfels, also $A_D = a_1^2 = 400$ cm$^2$. Weitere sichtbare Flächenteile kommen nicht vor.
Für die Summe der Flächeninhalte aller sichtbaren Flächenteile gilt daher

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_D = 2464 \text{ cm}^2$$

**Aufgabe 280612:**

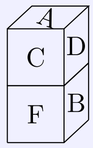
Ein großer Quader wurde in kleine, untereinander gleich große Würfel zerlegt. Wie in der Abbildung ersichtlich, wurden dann einige kleine Würfel herausgenommen. Von denjenigen kleinen Würfeln, die in der Abbildung nicht zu sehen sind, wurde aber keiner weggenommen.
Wie viele der kleinen Würfel enthält dann der in der Abbildung gezeigte Restkörper insgesamt noch?
Beschreibe, wie du die gesuchte Anzahl gefunden hast!

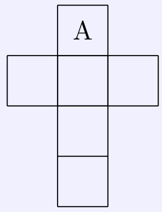


**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Die gesuchte Anzahl der kleinen Würfel beträgt 135; man kann sie durch folgende Überlegung finden:

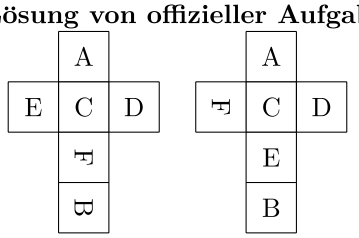
Der große Quader bestand ursprünglich wegen $6 \cdot 5 \cdot 5 = 150$ aus genau 150 kleinen Würfeln. Aus ihm wurden genau 15 kleine Würfel herausgenommen, nämlich
genau 8 aus der vordersten Schicht,
genau 6 aus der zweiten Schicht von vorn,
genau 1 aus der vierten Schicht von vorn.
Wegen $150 - 15 = 135$ enthält der Restkörper somit genau 135 kleine Würfel.

**Aufgabe 300611:**
Das Bild a) zeigt zwei gleiche, mit den Buchstaben $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$ in gleicher Anordnung beschriftete Würfel.
Man soll die Beschriftung des Würfelnetzes im Bild b) so ergänzen, dass zwei Würfel, die mit je einem solchen Netz hergestellt werden, sich zum Bild a) zusammenstellen lassen.
Gib zwei verschiedene Ergänzungsmöglichkeiten an!
Gib zu beiden Ergänzungsmöglichkeiten an, welche Fläche des unteren Würfels dann als Grundfläche gewählt werden muss!

a) 


b) 


**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**




Die Abbildung zeigt zwei Ergänzungsmöglichkeiten der geforderten Art.
Bei beiden muss als Grundfläche des unteren Würfels die als E beschriftete Fläche gewählt werden.

## II Runde 2

**Aufgabe 130622:**
Vier undurchsichtige Würfel mit den Kantenlängen $a_1 = 24$ cm, $a_2 = 12$ cm, $a_3 = 6$ cm und $a_4 = 3$ cm sollen so übereinander auf eine undurchsichtige Tischplatte gestellt werden, dass der größte zuunterst, darauf der nächstgrößte usw., schließlich der kleinste Würfel zuoberst steht, wobei jeder der Würfel vollständig auf der Deckfläche des unter ihm stehenden (bzw. auf der Tischplatte) ruht (d. h. ohne über diese Fläche hinauszuragen).
Ermittle von diesen Würfeln den Gesamtflächeninhalt derjenigen Oberflächenteile, die sichtbar (d. h. nicht verdeckt) sind!

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Jeder der Würfel hat genau 6 Flächen. Von ihnen ist bei jedem die Fläche, auf der er steht, nicht sichtbar. Außerdem verdeckt der zweitgrößte Würfel mit seiner Standfläche einen gleichgroßen Teil der obersten Fläche des größten Würfels. Entsprechendes gilt für den drittgrößten und für den kleinsten der vier Würfel. Weitere nicht sichtbare Teilflächen kommen nicht vor.

Daher erhält man den gesuchten Gesamtflächeninhalt, indem man von der Summe der Flächeninhalte von jeweils 5 Flächen der vier Würfel die Summe der Flächeninhalte je einer Fläche des zweitgrößten, des drittgrößten und des kleinsten Würfels subtrahiert.
Wegen $5 \cdot (24^2 + 12^2 + 6^2 + 3^2) - (12^2 + 6^2 + 3^2) = 3636$ beträgt der gesuchte Gesamtflächeninhalt der sichtbaren Oberflächenteile der vier Würfel 3636 $cm^2$.

# IV Kombinatorik

## IV.I Kryptogramme, Zahlen in Figuren

### I Runde 1

**Aufgabe V00612:**
Edgar hat während einer Mathematikarbeit eine Nebenrechnung so flüchtig hingeschrieben, dass er viele Ziffern selbst nicht mehr lesen kann.
Kannst Du die unleserlichen Ziffern herausfinden? Wie lautet die Aufgabe?
(Das Zeichen □ ist anstelle der unleserlichen Ziffern gesetzt).

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| □ | □ | 5 | □ | □ | : | □ | 9 | = | □ | □ | □ |
| 1 | □ | □ | | | | | | | | | |
| - | - | - | | | | | | | | | |
| | 1 | 0 | □ | | | | | | | | |
| | | □ | 7 | | | | | | | | |
| | - | - | - | | | | | | | | |
| | | □ | □ | 3 | | | | | | | |
| | | □ | □ | □ | | | | | | | |
| | | - | - | - | | | | | | | |
| | | | | 0 | | | | | | | |

**Lösung von Steffen Polster:**
Da die Division aufgeht, muss die letzte Zeile 2□3 lauten und der Dividend auf 3 enden. Die Einer von Divisor und Quotient können nur 3 ergeben, wenn der Quotient auf 7 endet. Ebenso wird die 2. Zeile zu 1□5, d. h.

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| □ | □ | 5 | □ | 3 | : | □ | 9 | = | □ | □ | 7 |
| 1 | ? | 5 | | | | | | | | | |
| - | - | - | | | | | | | | | |
| | 1 | 0 | □ | | | | | | | | |
| | | □ | 7 | | | | | | | | |
| | - | - | - | | | | | | | | |
| | | 2 | □ | 3 | | | | | | | |
| | | 2 | □ | 3 | | | | | | | |
| | | - | - | - | | | | | | | |
| | | | | 0 | | | | | | | |

Nur für einen Divisor 29 oder 39 ergibt das Produkt mit 7 eine dreistellige Zahl zwischen 200 und 300. Da aber das Produkt der Zehnerstelle des Quotienten mit dem Divisor die zweistellige Zahl □7 ergeben soll, ist die Zehnerstelle eine 3 und der Divisor 29. Andernfalls wäre das Produkt dreistellig. Mit der Multiplikation von 29 mit 7 und 3 wird somit

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| □ | □ | 5 | □ | 3 | : | 2 | 9 | = | □ | 3 | 7 |
| 1 | □ | 5 | | | | | | | | | |
| - | - | - | | | | | | | | | |
| | 1 | 0 | □ | | | | | | | | |
| | | 8 | 7 | | | | | | | | |
| | - | - | - | | | | | | | | |
| | | 2 | 0 | 3 | | | | | | | |
| | | 2 | 0 | 3 | | | | | | | |
| | | - | - | - | | | | | | | |
| | | | | 0 | | | | | | | |

Die Zeile 10□ wird zu 107 und der Dividend zu □□573. Gleichzeitig muss der Quotient mit 5 beginnen, da sonst die 2. Zeile 1?5 nicht möglich wäre. Einsetzen und Rückmultiplikation ergibt die eindeutige Lösung:

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 5 | 7 | 3 | : | 2 | 9 | = | 5 | 3 | 7 |
| 1 | 4 | 5 | | | | | | | | | |
| - | - | - | | | | | | | | | |
| | 1 | 0 | 7 | | | | | | | | |
| | | 8 | 7 | | | | | | | | |
| | - | - | - | | | | | | | | |
| | | 2 | 0 | 3 | | | | | | | |
| | | 2 | 0 | 3 | | | | | | | |
| | | - | - | - | | | | | | | |
| | | | | 0 | | | | | | | |

**Aufgabe 130613:**
In die leeren Felder des abgebildeten Quadrats sind Zahlen so einzutragen, dass die eingetragenen Zahlen, von links nach rechts gelesen und auch von oben nach unten gelesen, immer größer werden und dass dabei für jede Zeile und für jede Spalte folgendes gilt:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | | | | |
| | 8 | | | |
| | 11 | 16 | | |
| | | | | |
| | | | | |

Alle Differenzen, die man in dieser Zeile bzw. in dieser Spalte zwischen zwei unmittelbar neben- bzw. untereinanderstehenden Zahlen bilden kann, haben einen für diese Zeile bzw. Spalte einheitlichen Wert.

Dabei heiße „Differenz“: „rechte Zahl minus linke Zahl“ bzw. „untere Zahl minus obere Zahl“. Gib ferner für jede Zeile und für jede Spalte die für sie charakteristische Differenz an!

**Lösung von Steffen Polster:**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 5 | 8 | 11 | 14 | 3 |
| 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 4 |
| 6 | 11 | 16 | 21 | 26 | 5 |
| 8 | 14 | 20 | 26 | 32 | 6 |
| 10 | 17 | 24 | 31 | 39 | 7 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Differenz |

Die dritte Zeile und zweite Spalte ergeben sich durch die jeweils zwei gegebenen Zahlen. Trägt man diese ein, so ergeben sich alle anderen Zeilen.

**Aufgabe 140611:**
In der abgebildeten Tabelle sind statt der Buchstaben $a$, $b$, $c$, $d$, $e$ Zweierpotenzen so einzutragen, dass die aus den drei Zweierpotenzen jeder Zeile, jeder Spalte und jeder Diagonalen gebildeten Produkte jeweils einander gleich sind.
Beweise, dass es genau eine Möglichkeit für eine derartige Eintragung gibt, und nenne diese Eintragung!

| | | |
|---|---|---|
| $2^6$ | $2^2$ | $2^7$ |
| $e$ | $b$ | $2^4$ |
| $d$ | $c$ | $a$ |

**Lösung von Steffen Polster:**

Die oberste Zeile hat als Produkt $2^{15}$. Damit ergibt sich für $a = \frac{2^{15}}{2^4 \cdot 2^7} = 2^4$.
Da in der Diagonale von links oben nach rechts unten nur noch $b$ fehlt, kann dies berechnet werden, zu $b = 2^5$.
Die restlichen Werte ergeben sich dann zu $c = 2^8$, $d = 2^3$ und $e = 2^6$.
Zur Kontrolle aller Zeilen, Spalten und Diagonalen sind in der Abbildung deren Produkt eingetragen.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $2^6$ | $2^2$ | $2^7$ | $2^{15}$ |
| | $2^6$ | $2^5$ | $2^4$ | $2^{15}$ |
| | $2^3$ | $2^8$ | $2^4$ | $2^{15}$ |
| $2^{15}$ | $2^{15}$ | $2^{15}$ | $2^{15}$ | $2^{15}$ |

**Aufgabe 150612:**

$$\begin{array}{ccccc} a & \cdot & a & = & b \\ - & & & & - \\ c & \cdot & a & = & d \\ \hline e & \cdot & a & = & a \end{array}$$

In dem abgebildeten Kryptogramm sind in die Kästchen statt der Buchstaben Ziffern so einzusetzen, dass alle fünf angegebenen Aufgaben richtig gelöst sind.
Dabei sollen gleiche Buchstaben gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern bedeuten.

Als Lösung genügt nicht, wie bei solchen „Zahlenrätseln“ sonst üblich, die Angabe von gesuchten Zahlen. Es muss nachgewiesen werden, dass die angegebenen Zahlen alle gestellten Forderungen erfüllen und dass sie die einzigen Zahlen sind, die das tun.

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Die fünf im Kryptogramm enthaltenen Aufgaben lauten:

$$(1) \quad a \cdot a = b, \qquad (2) \quad c \cdot a = d, \qquad (3) \quad e \cdot a = a, \qquad (4) \quad a - c = e, \qquad (5) \quad b - d = a.$$

Wenn fünf Ziffern $a$, $b$, $c$, $d$, $e$ diese Aufgaben richtig lösen und sämtlich untereinander verschieden sind, so folgt $a \neq 0$; denn für $a = 0$ wäre wegen (1) auch $b = 0$. Aus (3) folgt hiernach $e = 1$.
Ferner folgt $c \neq 0$; denn für $c = 0$ wäre wegen (2) auch $d = 0$.
Hiernach und wegen $c \neq e$ ist $c \geq 2$, nach (4) also $a = c + e = 3$. Andererseits gilt nach (1) und weil $b$ einstellig ist, $a \cdot a \leq 9$, also $a \leq 3$. Folglich muss $a = 3$ sein, nach (4) somit $c = a - e = 2$.

Aus (1), (2) erhält man nun $b = 9$, $d = 6$. Daher kann nur die Eintragung den Bedingungen der Aufgabenstellung entsprechen.
Sie genügt diesen Bedingungen; denn die für $a, b, c, d, e$ eingesetzten Ziffern 3, 9, 2, 6, 1 sind untereinander verschieden, und alle im Kryptogramm enthaltenen Aufgaben sind mit diesen Ziffern richtig gelöst. Also hat genau die angegebene Eintragung die geforderten Eigenschaften.

$$\begin{array}{ccccc} 3 & \cdot & 3 & = & 9 \\ - & & & & - \\ 2 & \cdot & 3 & = & 6 \\ \hline 1 & \cdot & 3 & = & 3 \end{array}$$

**Aufgabe 160611:**

$$\begin{array}{ccccc} \text{AAA} & \cdot & \text{A} & = & \text{BBB} \\ + & & & & - \\ \text{CCC} & \cdot & \text{E} & = & \text{DDD} \\ \hline \text{FFF} & : & \text{F} & = & \text{GGG} \end{array}$$

In diesem Schema sind für die Buchstaben Ziffern (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) so einzutragen, dass für gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und für verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern stehen und dass alle fünf angegebenen Rechenaufgaben richtig gerechnet sind.

Ermittle alle möglichen derartigen Eintragungen!

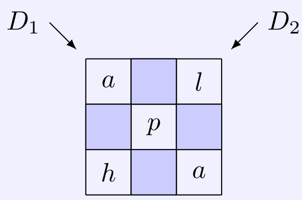
**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Wenn es eine derartige Eintragung gibt, so folgt aus der 3. Zeile $G = 1$. Ferner folgt aus der 1. Zeile, dass $B$ das Quadrat von $A$ ($\neq B$) ist, also $B = 4$ oder $B = 9$ gilt und daher $D = 3$ oder $D = 8$ sein muss.
Andererseits ist $D$ (nach der 2. Zeile) das Produkt zweier von $D$ verschiedener Ziffern $C$, $E$, also keine Primzahl.
Daher verbleibt nur die Möglichkeit $D = 8$, $B = 9$, $A = 3$.

Da $8 = 2 \cdot 4$ bis auf die Reihenfolge die einzige Zerlegung von 8 in zwei von 8 verschiedene Faktoren ist, folgt entweder $C = 2$, $E = 4$ oder $C = 4$, $E = 2$. Im ersten Fall ergibt sich $F = 5$, im zweiten Fall $F = 7$.
Also können nur die Eintragungen

$$\begin{array}{ccccc} 333 & \cdot & 3 & = & 999 \\ + & & & & - \\ 222 & \cdot & 4 & = & 888 \\ \hline 555 & : & 5 & = & 111 \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{ccccc} 333 & \cdot & 3 & = & 999 \\ + & & & & - \\ 444 & \cdot & 2 & = & 888 \\ \hline 777 & : & 7 & = & 111 \end{array}$$

alle Bedingungen der Aufgabe erfüllen. Sie erfüllen diese Bedingungen auch; denn die für $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$, $G$ eingesetzten Ziffern 3, 9, 2, 8, 4, 5, 1, bzw. 3, 9, 4, 8, 2, 7, 1 sind jeweils sämtlich voneinander verschieden, und die angegebenen Rechenaufgaben sind richtig gerechnet.

**Aufgabe 200611:**
Petra, eine eifrige Leserin der mathematischen Schülerzeitschrift alpha, stellt in einer Arbeitsgemeinschaft ihren Mitschülern folgende Aufgabe:




In der abgebildeten Figur sind für $a$, $h$, $l$, $p$ natürliche Zahlen so einzutragen, dass sich in jeder der beiden Diagonalen $D_1$, $D_2$ die Summe 80 ergibt.

Dabei soll die Zahl $a$ doppelt so groß wie die Zahl $p$ sein; für $l$ soll eine Primzahl eingetragen werden und für $h$ eine Primzahl, die größer als das Zehnfache von $l$ ist.
Ermittle alle Eintragungen, die diese Bedingungen erfüllen! Gib an, wie du sie gefunden hast!

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Wenn eine Eintragung von natürlichen Zahlen für $a$, $h$, $l$, $p$ die Bedingungen erfüllt, so folgt: Es gilt $a = 2p$.
In der Diagonalen $D_1$ steht daher die Summe $2p + p + 2p = 5p$.
Laut Aufgabe ist $5p = 80$, also $p = 16$ und $a = 32$. Ferner folgt $l + 16 + h = 80$, also $l + h = 64$.

Wäre die Primzahl $l$ größer oder gleich 7, so wäre $h$ größer als das Zehnfache hiervon, d. h. $h > 70$ und daher $l + h > 77$, im Widerspruch zu $l + h = 64$. Daher kann $l$ nur eine der Primzahlen 2, 3, 5 sein.
Für $l = 2$ ergäbe sich $h = 62$, also keine Primzahl. Demnach verbleiben nur die Möglichkeiten, dass entweder $l = 3$, $h = 61$ oder $l = 5$, $h = 59$ ist.

| | | |
|---|---|---|
| 32 | | 3 |
| | 16 | |
| 61 | | 32 |

| | | |
|---|---|---|
| 32 | | 5 |
| | 16 | |
| 59 | | 32 |

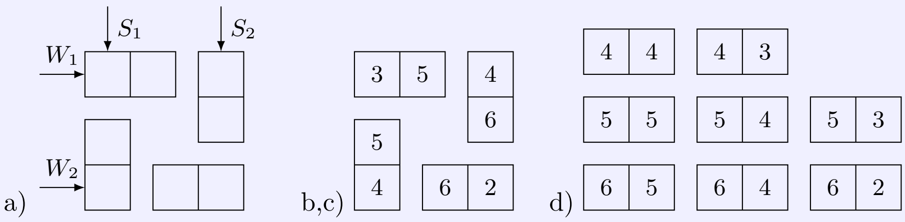
Daher können nur die Eintragungen der Abbildung alle geforderten Bedingungen erfüllen.
Sie erfüllen diese Bedingungen; denn es gilt: $32 + 16 + 32 = 80$, $3 + 16 + 61 = 80$, $5 + 16 + 59 = 80$, 32 ist doppelt so groß wie 16, die Zahlen 3, 61, 5, 59 sind Primzahlen, 61 ist größer als das Zehnfache von 3, ebenso ist 59 größer als das Zehnfache von 5.

Also erfüllen genau die beiden angegebenen Eintragungen die geforderten Bedingungen.

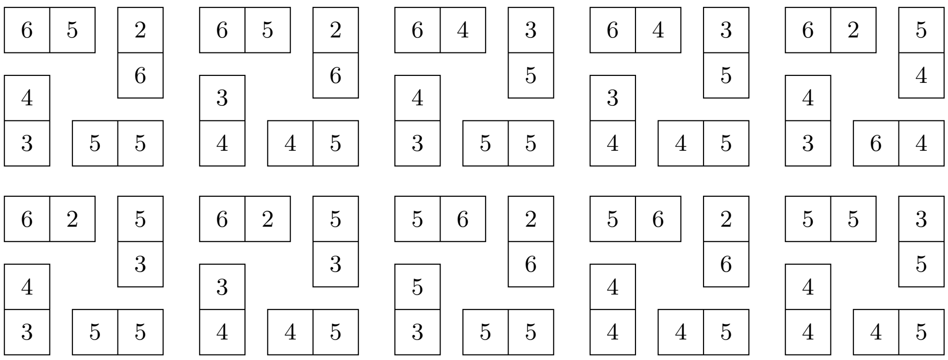
**Aufgabe 200614:**
Klaus spielt mit Dominosteinen. Er legt jeweils vier Dominosteine so zusammen, wie es das Bild a) zeigt.
Dabei entstehen zwei waagerechte Streifen $W_1$, $W_2$ und zwei senkrechte Streifen $S_1$, $S_2$. Jeder dieser vier Streifen enthält drei Zahlenfelder. Diese sollen für jeden der vier Streifen dieselbe Summe ergeben; in Bild b) z. B. ist diese Summe 12.
Die sonst übliche Regel, dass benachbarte Steine nur mit gleichlautenden Zahlenfeldern aneinanderstoßen dürfen, braucht nicht befolgt zu werden. Anstelle der üblichen Punktsymbole seien die Dominosteine einfacher mit Zahlenzeichen wiedergegeben; siehe Bild c).

Nachdem Klaus mehrmals Steine in der genannten Weise zusammengelegt hat, verbleiben ihm noch die acht in Bild d) abgebildeten Steine. Er will vier von diesen Steinen in der beschriebenen Art zusammenlegen, wobei in jedem der vier Streifen $W_1$, $W_2$, $S_1$, $S_2$ die Summe 13 entsteht.

Gib mindestens fünf Möglichkeiten hierfür an! Dabei sollen keine zwei der anzugebenden Möglichkeiten dieselben vier Steine enthalten. Eine Begründung für die anzugebenden Möglichkeiten wird nicht verlangt.




**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Es genügt, fünf der Möglichkeiten aus der Abbildung anzugeben (oder jeweils statt einer dieser Möglichkeiten eine, die sich aus ihr durch Drehung oder Spiegelung gewinnen lässt).



**Aufgabe 210612:**

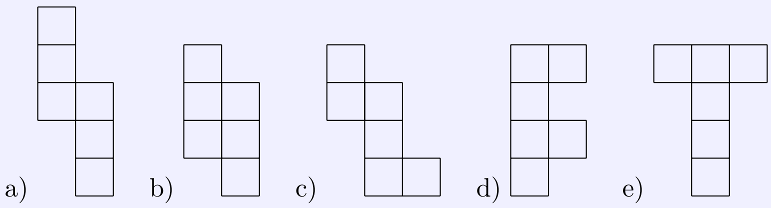
| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 4 | 6 | : | | □ | 9 | = | | □ | □ |
| | - | | | | | · | | | + | |
| □ | □ | □ | - | | □ | 6 | = | □ | 4 | □ |
| □ | 8 | □ | - | □ | □ | □ | = | □ | □ | 0 |

In jedes leere Kästchen der Abbildung soll eine der Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ,8, 9 so geschrieben werden, dass die drei waagerechten und die drei senkrechten Aufgaben richtig gerechnet sind.
Eine Beschreibung und Begründung der Lösung wird nicht verlangt.

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**

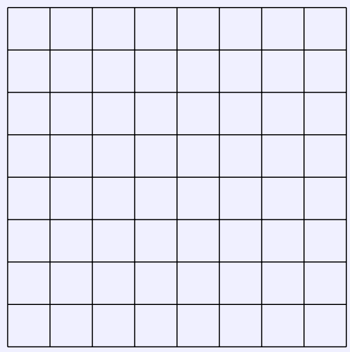
| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 4 | 6 | : | | 1 | 9 | = | | 3 | 4 |
| | - | | | | | · | | | + | |
| 1 | 6 | 2 | - | | 1 | 6 | = | 1 | 4 | 6 |
| 4 | 8 | 4 | - | 3 | 0 | 4 | = | 1 | 8 | 0 |

**Aufgabe 240612:**
Michael zeichnet fünf verschiedene Bilder: Bild a) bis e). Er behauptet, dass es Körpernetze von Würfeln seien.




(1) Gib alle diejenigen unter den Bildern a) bis e) an, für die Michaels Behauptung wahr ist! (Eine Begründung wird nicht verlangt.)

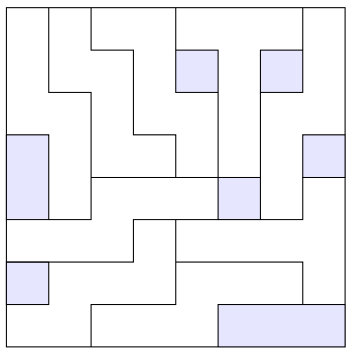
(2) Zeige, dass es möglich ist, aus einem quadratischen Gitternetz von 8 cm Seitenlänge, wie es Bild f) darstellt, neun Würfelnetze der in Aufgabe (1) gefundenen Art auszuschneiden!



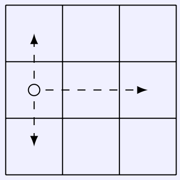
Es soll erlaubt sein, die Würfelnetze unverändert oder umgeklappt (spiegelbildlich) zu erhalten. Jedes in (1) gefundene Würfelnetz soll mindestens einmal vorkommen. Die Seitenlänge der einzelnen Quadrate in (1) soll dieselbe sein wie in (2), also 1 cm.
Zeichne derartige neun Würfelnetze in ein Gitternetz ein! Wie viele Felder des Gitternetzes werden dabei nicht benötigt?

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
(1) Genau die Bilder a), c) und e) sind Würfelnetze.

(2) Eine mögliche Anordnung von neun Würfelnetzen der geforderten Art zeigt die Abbildung. Zehn Felder des Gitternetzes werden nicht benötigt.

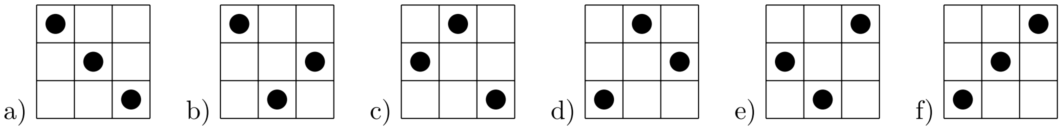


**Aufgabe 250611:**
Auf einem $(3 \times 3)$-Felderbrett sollen drei Spielsteine so aufgestellt werden, dass sie sich gegenseitig nicht bedrohen. Dabei soll ein Spielstein genau diejenigen Felder bedrohen, die in der gleichen waagerechten oder in der gleichen senkrechten Reihe wie er liegen.



a) Zeichne alle möglichen Stellungen der geforderten Art für drei solche Spielsteine!
b) Wie viele verschiedenartige Stellungen gibt es, wenn je zwei Stellungen genau dann als verschiedenartig gelten, wenn die eine nicht aus der anderen durch Drehung um das Mittelfeld hervorgehen kann?

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
a) Es gibt genau folgende sechs Stellungen der geforderten Art:




b) Da in Stellung (a) das Mittelfeld besetzt ist, in Stellung (b) dagegen nicht, kann es keine Drehung um das Mittelfeld geben, bei der eine dieser beiden Stellungen aus der anderen hervorgeht.
Die Stellung (c), (d) bzw. (e) geht aus der Stellung (b) durch Drehung um 180°, 90° bzw. 270° um das Mittelfeld hervor. Die Stellung (f) geht aus der Stellung (a) durch Drehung um 180° um das Mittelfeld hervor.
Folglich gibt es genau zwei verschiedenartige Stellungen (nämlich die Stellungen (a) und (b)).

**Aufgabe 250612:**

$$\begin{array}{cccccc} & m & a & t & h & e \\ + & & o & l & y & m \\ + & & & & p & i \\ + & & & a & d & e \\ \hline k & l & a & s & s & e \end{array}$$

In dem abgebildeten Kryptogramm sind für die Buchstaben Ziffern (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) so einzutragen, dass für gleiche Buchstaben gleiche Ziffern stehen und die Aufgabe richtig gerechnet ist. Ferner wird folgendes gefordert:

(1) Es gilt $o = m$ und $p = t$ und $y = a$, während sonst für verschiedene Buchstaben stets verschiedene Ziffern einzusetzen sind.
(2) $a$ ist zwei Drittel von $m$.
(3) $e$ ist zwei Drittel von $a$.
(4) Die Summe von $a$ und $s$ ist gleich $m$.
(5) $d$ ist kleiner als $h$.

a) Zeige, dass es genau eine Eintragung gibt, die alle diese Forderungen erfüllt, und gib diese Eintragung an!
b) Wie viel solche Eintragungen gibt es, wenn man auf Forderung (5) verzichtet?

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
a) Wenn eine Eintragung alle Forderungen der Aufgabe erfüllt, so folgt:
Wegen (2) und (3) ist sowohl $m$ als auch $a$ durch 3 teilbar, wobei $a$ zwei Drittel von $m$ beträgt. Folglich ist m sogar durch 9 teilbar.
Da $m$ als Anfangsziffer nicht 0 ist, gilt somit $m = 9$.

Wegen (2) und (3) folgt hieraus $a = 6$ und $e = 4$. Wegen (4) gilt dann $6 + s = 9$, also $s = 3$. Offensichtlich gilt $k = 1$ und $l = 0$ (da die Summe kleiner als $96994 + 9969 + 99 + 694 = 107756$ ist). Unter Beachtung von (1) erhält man daher:

$$\begin{array}{cccccc} & 9 & 6 & \mathrm{t} & \mathrm{h} & 4 \\ + & & 9 & 0 & 6 & 9 \\ + & & & & \mathrm{t} & \mathrm{i} \\ + & & & 6 & \mathrm{d} & 4 \\ \hline 1 & 0 & 6 & 3 & 3 & 4 \end{array}$$

Nur für $i = 7$ endet die Summe der Einerziffern auf 4, wobei ein Übertrag von 2 entsteht.
Für $h$, $t$ und $d$ bleiben noch die Ziffern 2, 5 und 8, deren Summe 15 beträgt, so dass die Summe aus den Zehnerziffern und dem Übertrag 2 insgesamt 23 ergibt. Unter Beachtung des sich aus 23 ergebenden neuen Übertrags folgt aus der Summe der Hunderterziffern, dass $t = 5$ gilt. Damit ist entweder $d = 2$ und $h = 8$ oder $d = 8$ und $h = 2$. (*)
Wegen (5) entfällt der letztgenannte Fall. Folglich kann nur die Eintragung

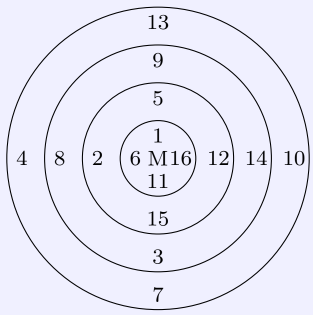
$$\begin{array}{cccccc} & 9 & 6 & 5 & 2 & 4 \\ + & & 9 & 0 & 6 & 9 \\ + & & & & 5 & 7 \\ + & & & 6 & 8 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 6 & 3 & 3 & 4 \end{array}$$

alle Forderungen der Aufgaben erfüllen. Da man für diese Eintragung in der Tat alle Forderungen bestätigt, ist damit bewiesen, dass es genau diese eine Eintragung der geforderten Art gibt.

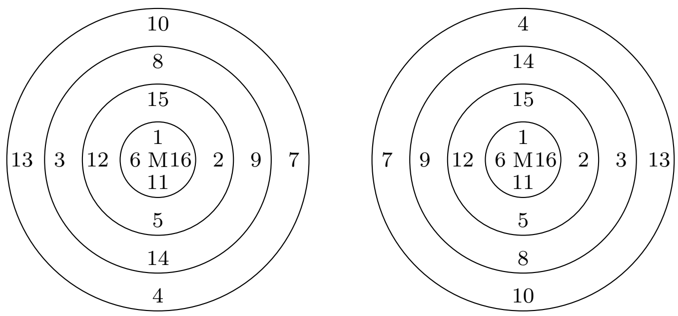
b) Verzichtet man auf die Forderung (5), dann können beide in (*) genannten Fälle eintreten, und es gibt genau zwei Lösungen des Kryptogramms.

**Aufgabe 270611:**

Vier Kreisscheiben (siehe Abbildung) sind jede für sich um ihren gemeinsamen Mittelpunkt $M$ so zu drehen, dass danach immer vier Zahlen auf je einem Strahl mit dem Anfangspunkt $M$ liegen. Dabei soll die Summe der vier Zahlen auf jedem Strahl 34 betragen.
Gib mindestens eine Möglichkeit solcher Drehungen an!
Eine Begründung wird nicht verlangt.




**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Die Abbildung zeigt zwei Möglichkeiten:




Durch systematisches Erfassen aller möglichen Fälle kann man nachweisen, dass dies die einzigen Möglichkeiten sind, abgesehen von einer Drehung der gesamten Figur um einen beliebigen Winkel.

**Aufgabe 270612:**
In jedes leere Feld des abgebildeten Quadrats (siehe Abbildung) ist eine der Zahlen 2, 3, 4, 5 einzutragen. Dabei soll in keiner Spalte oder Zeile eine dieser Zahlen mehrfach vorkommen. Ferner soll in keiner Spalte oder Zeile neben einer Zahl deren Nachfolger oder Vorgänger stehen.
Gib mindestens zwei solche Eintragungen an!
Eine Begründung wird nicht verlangt.
Hinweis: Es gibt sogar mehr als zwei solche Eintragungen.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | | | |
| | 1 | | |
| | | 1 | |
| | | | 1 |

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Es gibt die folgenden Eintragungen, von denen laut Aufgabenstellung mindestens zwei anzugeben sind:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 5 | 2 |
| 4 | 1 | 3 | 5 |
| 2 | 4 | 1 | 3 |
| 5 | 2 | 4 | 1 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 5 | 2 |
| 4 | 1 | 3 | 5 |
| 2 | 5 | 1 | 3 |
| 5 | 2 | 4 | 1 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 2 | 5 |
| 3 | 1 | 4 | 2 |
| 5 | 3 | 1 | 4 |
| 2 | 5 | 3 | 1 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 2 | 5 |
| 3 | 1 | 5 | 2 |
| 5 | 3 | 1 | 4 |
| 2 | 5 | 3 | 1 |

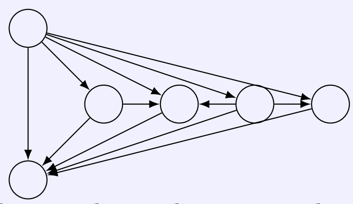
| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 2 | 5 |
| 4 | 1 | 5 | 2 |
| 2 | 5 | 1 | 4 |
| 5 | 2 | 4 | 1 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 2 | 5 |
| 5 | 1 | 4 | 2 |
| 2 | 5 | 1 | 4 |
| 4 | 2 | 5 | 1 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 2 | 4 |
| 4 | 1 | 5 | 2 |
| 2 | 4 | 1 | 5 |
| 5 | 2 | 4 | 1 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 2 | 4 |
| 5 | 1 | 4 | 2 |
| 2 | 4 | 1 | 5 |
| 4 | 2 | 5 | 1 |

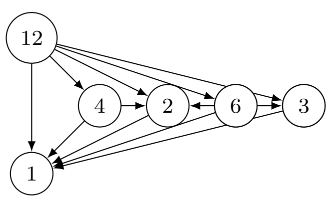
**Aufgabe 290612:**



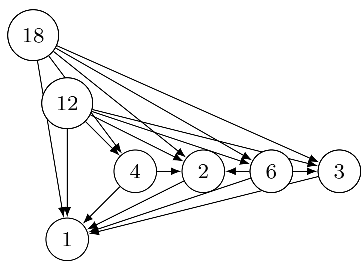
a) Trage in die sechs Kreise des Bildes je eine der Zahlen 1, 2, 3, 4, 6, 12 so ein, dass jeder Pfeil von einer Zahl zu einem ihrer Teiler führt! Dabei soll jede der genannten Zahlen genau einmal verwendet werden.

b) Ergänze die Figur durch einen weiteren Kreis mit der Zahl 18 und mit den entsprechend zu erklärenden Pfeilen!
c) Zeichne eine neue Figur, wieder bestehend aus Kreisen und entsprechend zu erklärenden Pfeilen, in der die Zahl 75 und alle ihre Teiler vorkommen!

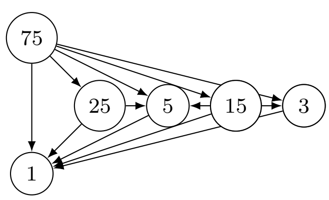
**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**



a)



b)



c)

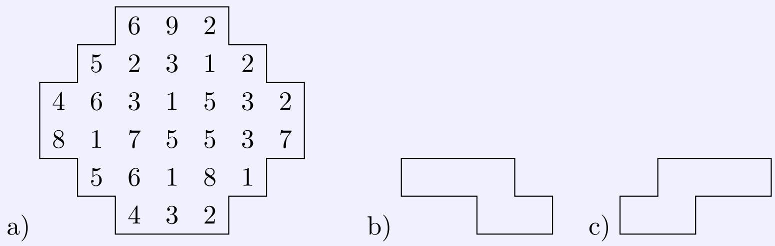
**Aufgabe 320611:**

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{A} & \cdot & \mathrm{A} & = & \mathrm{B} \\ \cdot & & - & & - \\ \mathrm{C} & \cdot & \mathrm{C} & = & \mathrm{D} \\ \hline \mathrm{E} & - & \mathrm{F} & = & \mathrm{G} \end{array}$$

Für die Buchstaben sind Grundziffern (0; 1; 2; . . . ; 8; 9) so einzutragen, dass für gleiche Buchstaben gleiche Grundziffern und für unterschiedliche Buchstaben unterschiedliche Grundziffern stehen und dass die angegebenen Rechenoperationen richtig gelöst sind.

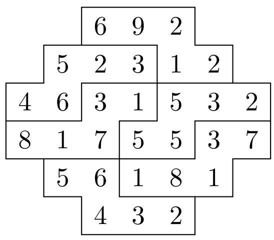
**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Die einzigen natürlichen Zahlen, deren Quadrate von der ursprünglichen Zahl verschieden und einstellig sind, sind Zwei und Drei, also sind $A$ und $C$ Zwei bzw. Drei.
$A = 2$ und $C = 3$ führt wegen $A - C = F$ zum Widerspruch, also gelten $A = 3, C = 2$ und somit $B = 9$, $D = 4$, $E = 6$, $F = 1$ und $G = 5$, was die Probe bestätigt.

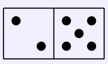
**Aufgabe 330611:**
Zerlege die Figur aus Abbildung a) so in Teilstücke, dass jedes Teilstück die Gestalt von Abbildung b) oder von Abbildung c) hat und dass auf jedem Teilstück die Summe der Zahlen 20 beträgt!



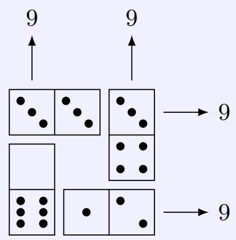

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**

Die Abbildung zeigt eine Zerlegung der geforderten Art.

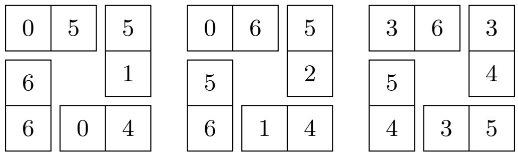



**Aufgabe 340614:**
a) Zu einem Dominospiel mit den Zahlen von 0 bis 6 gehören 28 Steine. Jede Zusammenstellung von zwei der Zahlen kommt auf einem dieser Steine vor. Die Abbildung zeigt als Beispiel den Stein mit den Zahlen 2 und 5: 

Nenne alle Steine eines Dominospiels!
b) Aus vier geeignet ausgewählten Steinen eines Dominospiels kann man ein „Fenster“ wie in Abb. b) legen, und zwar so, dass auf jeder der vier „Seiten“ des Fensters dieselbe Summe auftritt (im Beispiel beträgt diese „Seitensumme“ 9).
Nenne je ein Beispiel für ein Fenster mit der Seitensumme 10, eines mit der Seitensumme 11 und eines mit der Seitensumme 12!
Eine Begründung wird nicht verlangt.




**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
a) Alle Steine eines Dominospiels sind (0,0), (0,1), (0,2), (0,3), (0,4), (0,5), (0,6), (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,4), (4,5), (4,6), (5,5), (5,6), (6,6). Es genügt eine Angabe wie z. B. in der obigen Ziffernschreibweise; eine zeichnerische Wiedergabe mit Punktsymbolen wird nicht vom Schüler verlangt.
b) Beispiele der verlangten Art zeigen die Abbildungen.




## II Runden 2 & 3

**Aufgabe 160621:**
Ludwig sagt: „Ich kann die Leserzahl 58125 der mathematischen Schülerzeitschrift ‚alpha' als Ergebnis der Additionsaufgabe

$$\begin{array}{cccccc} & A & L & P & H & A \\ + & & & H & E & I \\ + & & & T & E & R \\ \hline & 5 & 8 & 1 & 2 & 5 \end{array}$$

erhalten, indem ich für die Buchstaben Ziffern (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) einsetze, und zwar für gleiche Buchstaben gleiche Ziffern, für verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern, und wenn ich noch weiß, dass $I < R$ ist und die Ziffern $EHPL$ in dieser Reihenfolge hintereinander gelesen die Zahl 1976 ergeben."
Welche Ziffern sind für die Buchstaben einzusetzen, damit alle diese Angaben zutreffen?
Überprüfe, ob die ermittelte Einsetzung alle Forderungen erfüllt, und ob es noch andere derartige Eintragungen gibt!

**Lösung von Steffen Polster:**
Wenn bei einer Einsetzung alle Angaben zutreffen, so folgt aus den Angaben über die Zehntausenderziffer, dass $A = 5$ ist. Aus den Angaben über die Einerziffer folgt daher $I + R = 10$.
Von den möglichen Darstellungen der 10 als Summe von zwei verschiedenen einstelligen Zahlen

$$10 = 1 + 9 = 2 + 8 = 3 + 7 = 4 + 6$$

scheiden diejenigen aus, in denen die Ziffern schon für andere Buchstaben als $I$ und $R$ eingesetzt wurden, also $E = 1$, $H = 9$, $P = 7$, $L = 6$. Daher verbleibt nur die Darstellung $10 = 2 + 8$.

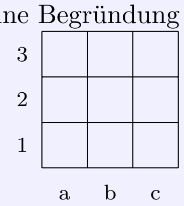
Wegen $I < R$ ist also $I = 2$, $R = 8$. Da bei der Addition der Zehnerziffern eine Zehnerübertragung von genau 1 auftritt, ergibt sich aus den Angaben über die Hunderterziffern $T = 4$.
Also kann nur die Einsetzung $ALPHA$ (56795) $HEITER$ (912418) alle Forderungen erfüllen.

Sie erfüllt diese Forderungen; denn die für verschiedene Buchstaben eingesetzten Ziffern sind sämtlich verschieden, es gilt $EHPL = 1976$ und $I < R$, und die Addition

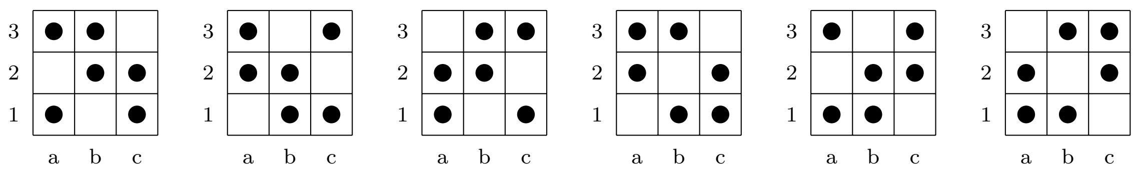
$$\begin{array}{rccccc} & 5 & 6 & 7 & 9 & 5 \\ + & & & 9 & 1 & 2 \\ + & & & 4 & 1 & 8 \\ \hline & 5 & 8 & 1 & 2 & 5 \end{array}$$

ergibt die Summe 58125.

**Aufgabe 250621:**
Auf einem $(3 \times 3)$-Spielbrett (siehe Abbildung) sind sechs Spielsteine so aufzustellen, dass jede waagerechte und jede senkrechte Reihe genau zwei Steine enthält. Auf jedem Feld des Spielbrettes darf höchstens ein Spielstein stehen.
Zeichne alle möglichen Stellungen für diese sechs Spielsteine!
Eine Begründung wird nicht verlangt.



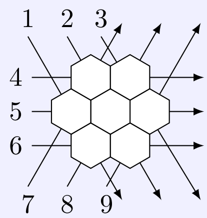

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**




**Aufgabe 290624:**

a) In ein $3 \times 3$-Quadrat sollen die Zahlen 1 bis 9 so eingetragen werden, dass jede Zahl in genau ein Feld kommt, in jedes Feld genau eine Zahl kommt und dass sich in jeder Zeile, in jeder Spalte und in jeder der beiden Diagonalen die gleiche Summe ergibt. Das linke Bild zeigt dafür ein Beispiel.
Gib eine weitere Eintragung der geforderten Art an!
b) Als in der Mathematik-AG über solche Aufgaben gesprochen wurde, versuchte Peter, eine Aufgabe mit sechseckigen Feldern zu stellen. Er wählt die Figur aus dem rechten Bild und stellt die Aufgabe:

| | | |
|---|---|---|
| 4 | 9 | 2 |
| 3 | 5 | 7 |
| 8 | 1 | 6 |




In die sieben Felder sollen die Zahlen 1 bis 7 so eingetragen werden, dass jede Zahl in genau ein Feld kommt, in jedes Feld genau eine Zahl kommt und dass sich in jeder der neun gekennzeichneten Linien die gleiche Summe ergibt.
Gibt es eine derartige Eintragung? Wenn das der Fall ist, gib ein Beispiel an!
Wenn es unmöglich ist, eine solche Eintragung zu bilden, begründe das!

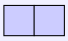
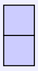
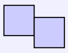
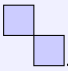
**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**

| | | |
|---|---|---|
| 8 | 3 | 4 |
| 1 | 5 | 9 |
| 6 | 7 | 2 |

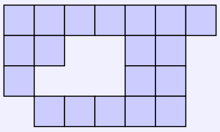
a) Ein Beispiel zeigt die Abbildung a.
b) Es gibt keine derartige Eintragung.
Da es drei der gekennzeichneten Linien gibt, die die gesamte Figur überdecken, ohne ein Feld mehrmals zu erfassen, müsste bei einer Eintragung der geforderten Art das Dreifache der in jeder Linie zu erreichenden Summe gleich 28 sein; denn es gilt $1 + 2 + \cdots + 7 = 28$.

Da aber 28 nicht durch 3 teilbar ist, ist das nicht möglich.

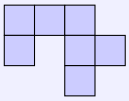
**Aufgabe 330632:**
Aus 21 Quadraten der Seitenlänge 1 cm soll eine Figur F zusammengesetzt werden:

An das erste Quadrat legt man ein zweites so an, dass sie beide genau eine Seite gemeinsam haben:
 oder  (dagegen nicht  und auch nicht .
Dann legt man immer das nächste Quadrat so an, dass es ebenfalls genau eine Seite mit einem schon hingelegten Quadrat gemeinsam hat.
Am Ende soll die Figur F folgende Bedingungen erfüllen:

(1) Es soll keine freie Fläche geben, die ganz von Quadraten der Figur F umschlossen wäre, zum Beispiel:

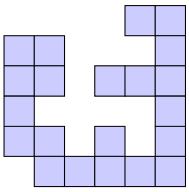


(2) Die Figur F soll ganz in ein großes Quadrat der Seitenlänge 6 cm hineinpassen.
(3) Die Figur F soll den Umfang 42 cm haben.
Beispiel: Der Umfang der folgenden Figur beträgt 16 cm.



Zeichne eine solche Figur F!

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Es gibt viele Möglichkeiten. Ein Beispiel:



**Aufgabe 330635:**
Ein 4 × 4 - Feld soll mit Buchstaben so gefüllt werden, wie folgendes Bild an einem Beispiel zeigt:
In jedem so gefüllten Feld kann man „Wörter“ lesen, die aus zwei Buchstaben bestehen. Die „Wörter“ liest man entweder von links nach rechts oder von oben nach unten.
(Als Beispiele sind die „Wörter“ ae, cd, ed, dc, cf, cd und aa hervorgehoben. Man hat also auch solche „Wörter“ zu beachten, die einen Buchstaben gemeinsam haben, wie im Beispiel ae mit ed und dc mit cf.)

| | | | |
|---|---|---|---|
| a | b | c | d |
| e | d | d | c |
| d | f | c | c |
| a | a | f | d |

„Wörter“, die sich nur in der Reihenfolge der Buchstaben voneinander unterscheiden (wie im Beispiel cd und dc), gelten nicht als einander gleich.
Folgende Bedingungen werden zusätzlich verlangt:

(1) In keinem „Wort“ dürfen die beiden Buchstaben einander gleich sein (wie im Beispiel im „Wort“ aa).

(2) Kein „Wort“ darf mehrfach vorkommen (wie im Beispiel das „Wort“ cd).
a) Finde eine Eintragung, die diese Bedingungen erfüllt und nur die 7 Buchstaben a, b, c, d, e, f, g verwendet!
b),c) Gibt es auch eine Eintragung, die diese Bedingungen erfüllt und
b) nur 6 Buchstaben, c) nur 5 Buchstaben
verwendet? Begründe Deine Antworten!

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
(a) Als Lösung genügt es, eine Eintragung der geforderten Art anzugeben, zum Beispiel Abb. a):

a)

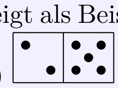
| | | | |
|---|---|---|---|
| a | b | c | d |
| e | f | g | a |
| d | b | e | c |
| e | g | b | a |

b)

| | | | |
|---|---|---|---|
| a | b | a | c |
| d | c | e | a |
| f | d | b | f |
| b | e | d | a |

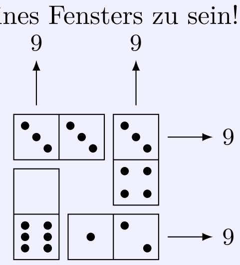
(b) Es gibt auch eine Eintragung der geforderten Art mit nur 6 verwendeten Buchstaben. Dies wird etwa durch Abb. b) bewiesen.

(c) Eine Eintragung der geforderten Art mit nur 5 verwendeten Buchstaben kann es nicht geben.
Beweis: Im $4 \times 4$ - Feld lassen sich in jeder der 4 Zeilen und in jeder der 4 Spalten 3 „Wörter“ lesen, zusammen also $(4 + 4) \cdot 3 = 24$ „Wörter“.
Es sind aber nur 20 „Wörter“ zugelassen, nämlich mit einem der 5 Buchstaben am Anfang und dann jeweils mit einem der 4 anderen Buchstaben am Ende. Bei jeder Eintragung, die nur zugelassene „Wörter“ aufweist, muss es also auch mehrfach auftretende „Wörter“ geben; daher ist sie nicht von der geforderten Art.

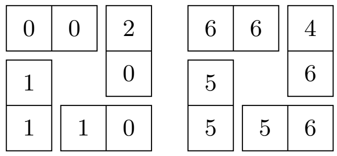
**Aufgabe 340624:**
Zu einem Dominospiel mit den Zahlen von 0 bis 6 gehören 28 Steine. Jede Zusammenstellung von zwei der Zahlen kommt auf einem dieser Steine vor.
Die Abbildung zeigt als Beispiel den Stein mit den Zahlen 2 und 5. (Auch die 0 wird hier als natürliche Zahl bezeichnet.) 

Aus vier geeignet ausgewählten Steinen eines Dominospiels kann man ein „Fenster“ wie in der unteren Abbildung legen, und zwar so, dass auf jeder der vier „Seiten“ des Fensters dieselbe Summe auftritt. Im Beispiel beträgt diese „Seitensumme“ 9.

a) Nenne je ein Beispiel für ein Fenster mit der Seitensumme 2 und eines mit der Seitensumme 16!
b) Begründe, dass es kein Fenster mit der Seitensumme 18 gibt!
c) Es gibt noch drei weitere natürliche Zahlen kleiner 19 mit der Eigenschaft, dass kein Fenster die betreffende Zahl als Seitensumme hat.
Finde diese Zahlen und begründe für sie die Unmöglichkeit, Seitensumme eines Fensters zu sein!



**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
(a) Die Abbildung zeigt je ein Beispiel der geforderten Art.



(b) Die einzige Darstellung von 18 als Summe dreier Zahlen von 0 bis 6 ist 18 = 6 + 6 + 6.
Ein Fenster mit der Seitensumme 18 könnte daher nur aus Dominosteinen (6,6) bestehen. Da nach dem Aufgabentext das Fenster aber aus Steinen eines Dominospiels zu legen wäre und das Dominospiel den Stein (6,6) nur einmal enthält, ist ein solches Fenster nicht möglich.

(c) Drei solche Zahlen sind 0, 1 und 17. Die einzige Summendarstellung (ohne Beachtung der Reihenfolge) ist nämlich 0 = 0 + 0 + 0 bzw. 1 = 0 + 0 + 1 bzw. 17 = 6 + 6 + 5. Daher könnte ein Fenster mit der Seitensumme 0 nur aus Steinen (0,0) bestehen, ist also nicht möglich; und zur Seitensumme 1 bzw. 17 müsste gelten:

Um auf der oberen waagerechten Seite diese Summe zu erreichen, müsste entweder links oben der Stein (0,1) bzw. der Stein (6,5) liegen und rechts davon eine 0 bzw. 6 vorkommen, oder es müsste links oben (0,0) bzw. (6,6) liegen und rechts davon 1 bzw. 5.
Da auch auf der rechten Seite die Summe 1 bzw. 17 zu erreichen ist, folgt in beiden Fällen:
Mindestens einer der Steine links oben, rechts oben müsste (0,1) bzw. (6,5) sein.

Ebenso folgt: Mindestens einer der Steine rechts unten, links unten müsste (0,1) bzw. (6,5) sein. Da das Dominospiel auch diesen Stein nur einmal enthält, sind somit ebenfalls die Seitensummen 1 und 17 als nicht erreichbar nachgewiesen.

**Aufgabe 340635:**
In das Schema der Abbildung a kann man anstelle der Buchstaben Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 so eintragen, dass die vier „Seitensummen“ einander gleich sind:

$$a + b + c = c + d + e = e + f + g = g + h + a$$

Ein Beispiel, hier mit dem Wert 14 der vier „Seitensummen“, zeigt die Abbildung b.

(a) Gib drei solcher Eintragungen an, eine mit dem Wert 2 der vier „Seitensummen“, eine mit dem Wert 13 der vier „Seitensummen“ und eine mit dem Wert 17 der vier „Seitensummen“!
(b) Auch mit dem Wert 18 der vier „Seitensummen“ ist eine solche Eintragung möglich; dagegen nicht, wenn das Schema so mit Steinen des Dominospiels gebildet werden soll, wie die Abbildung c zeigt.
Zeige, dass das stimmt; erkläre den Unterschied!
(c) Fritz Schlaumeier schaut das ausgefüllte Schema für die „Seitensumme“ 14 an, überlegt eine ganze Weile und meint dann:
„Die vier Zahlen für $b$, $d$, $f$ und $h$ stehen in einer ganz besonderen Beziehung zueinander. Diese Beziehung gilt auch für jede Ausfüllung mit einer anderen ‚Seitensumme‘.“
Gib eine solche Beziehung an und weise nach, dass Fritz recht hat!

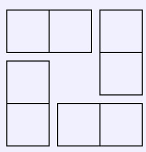
a)

| | | |
|---|---|---|
| a | b | c |
| h | | d |
| g | f | e |

b)

| | | |
|---|---|---|
| 4 | 4 | 6 |
| 5 | | 5 |
| 5 | 6 | 3 |

c)



**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
(a) Die Abbildung zeigt je ein Beispiel für Eintragungen mit den „Seitensummen“ 2, 13 und 17.

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 |
| 0 | | 2 |
| 1 | 1 | 0 |

| | | |
|---|---|---|
| 4 | 6 | 3 |
| 5 | | 4 |
| 4 | 3 | 6 |

| | | |
|---|---|---|
| 5 | 6 | 6 |
| 6 | | 5 |
| 6 | 5 | 6 |

(b) Der Unterschied kann folgendermaßen erklärt werden:
Für das Schema aus Abbildung zur Aufgabe a ist eine Eintragung mit der „Seitensumme“ 18 möglich, indem man in alle acht Felder eine 6 einträgt.
Daraus jedoch, dass ein Dominospiel nur einen Stein (6;6) enthält, folgt: Mit den Steinen eines Dominospiels ist eine solche Eintragung nicht möglich.
Die einzige Möglichkeit, 18 als Summe von drei Summanden darzustellen, die nur Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 sein dürfen, lautet nämlich 18 = 6 + 6 + 6. Demzufolge gibt es keine andere Möglichkeit, die „Seitensumme“ 18 zu erreichen, als mit der 6 in allen Feldern.
Dazu wäre aber mehr als ein Stein (6;6) erforderlich.

(c) Eine Beziehung zwischen den Zahlen für $b$, $d$, $f$, $h$ ist $b + f = d + h$.

Beweis:
Wegen der Gleichheit aller vier „Seitensummen“ gelten z. B. auch die Gleichungen $a + b + c = c + d + e$ und $e + f + g = g + h + a$, die auf beiden Seiten eine Eckenzahl enthalten.
Daher gelten auch die Gleichungen $a + b = d + e$, $e + f = a + h$.
Aus ihnen folgt $(a + b) + (e + f) = (d + e) + (h + a)$. Da auch in dieser Gleichung auf beiden Seiten übereinstimmende Summanden, nämlich a und e, vorkommen, folgt $b + f = d + h$.

# IV.II Logik, Mengen

## I Runde 1

**Aufgabe 020614:**
Drei Fluggäste aus der DDR fliegen mit der TU 104 von Prag nach Kairo.
Ihre Namen sind Baumann, Eichler und Hahn. Einer von ihnen ist Elektriker, einer Monteur und einer Ingenieur. Aus ihrer Unterhaltung entnehmen wir folgendes:

a) Zwei Fluggäste, und zwar Herr Baumann und der Ingenieur, sollen in Bombay eine von der DDR gelieferte Anlage aufbauen helfen.
b) Zwei Fluggäste, und zwar Herr Hahn und der Elektriker, kommen aus Berlin, während der dritte aus Dresden kommt.
c) Herr Eichler ist jünger als der Monteur.
d) Herr Hahn ist älter als der Ingenieur.

Wie heißt der Ingenieur? Wie heißt der Elektriker? Wie heißt der Monteur? Die Lösung ist zu begründen!

**Lösung von Steffen Polster:**
Nach Aussage a) heißt der Ingenieur nicht Baumann, nach Aussage b) ist Herr Hahn kein Elektriker.
Nach d) ist Herr Hahn auch kein Ingenieur, d. h., er ist Monteur. Herrn Baumann muss somit Elektriker sein, und folglich Herr Eichler der Ingenieur.

**Aufgabe 030614:**
Peter, ein junger Mathematiker, sagt zu seinem Vater:

„Ich weiß ein Kunststück. Jeder von uns beiden hat 30 Streichhölzer zur Verfügung und nimmt einige davon in die Hand. Du sagst mir, ob die Anzahl der Streichhölzer, die du in die Hand genommen hast, gerade oder ungerade ist. Ich werde dir dann, ohne nachzuzählen, sagen, ob die Gesamtzahl der übriggebliebenen Streichhölzer gerade oder ungerade ist.“

Wieso weiß Peter das?

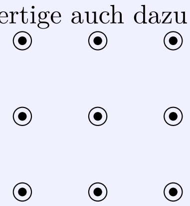
**Lösung von Steffen Polster:**
Die Summe zweier gerader Zahlen ist gerade, ebenso die Summe zweier ungerader Zahlen. Eine ungerade Summe entsteht nur, wenn ein Summand gerade und der andere ungerade ist.

Nimmt Peter eine gerade Anzahl Streichhölzer in die Hand, bleibt eine gerade Anzahl zurück.
Wählt der Vater eine gerade Anzahl, bleibt eine gerade Anzahl übrig. Wählt er „ungerade“, bleibt eine ungerade Anzahl zurück.

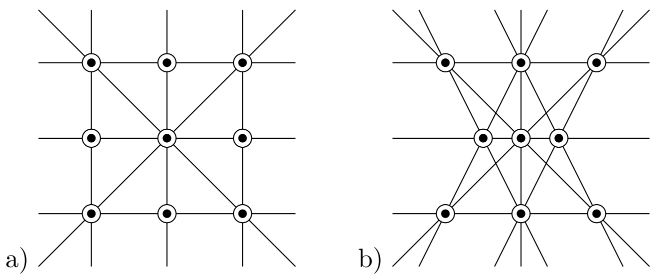
Nimmt Peter eine ungerade Anzahl Streichhölzer in die Hand, bleibt eine ungerade Anzahl zurück.
Wählt der Vater nun eine gerade Anzahl, bleibt eine ungerade Anzahl übrig. Wählt er „ungerade“, bleibt eine gerade Anzahl zurück.

**Aufgabe 030615:**
a) Zeichne 9 Punkte so, wie es die Abbildung zeigt. Lege durch diese Punkte acht verschiedene Geraden so, dass auf jeder dieser Geraden drei Punkte liegen!
Fertige eine Zeichnung an!

b) Es sollen nun 2 von diesen 9 Punkten so verschoben werden, dass man genau zehn verschiedene Geraden zeichnen kann, wobei wieder auf jeder dieser Geraden drei Punkte liegen sollen.
Fertige auch dazu eine Zeichnung an!



**Lösung von Steffen Polster:**




**Aufgabe 040612:**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| J | U | N | G | E | W |
| U | N | G | E | W | E |
| N | G | E | W | E | L |
| G | E | W | E | L | T |

Auf wie viel verschiedene Weisen kann man in der nebenstehenden Tabelle die Wörter „Junge Welt“ lesen, ohne dabei Zeilen oder Spalten zu überspringen?

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Man kann die Wörter „Junge Welt“ ohne Überspringen genau 56 mal lesen.

Anmerkung: Von jedem Buchstaben, der nicht in der letzten Zeile oder in der letzten Spalte steht, kann man entweder zum rechts daneben stehenden Buchstaben (Schritt a) oder zum darunter stehenden Buchstaben (Schritt b) weitergehen.
Jeder Möglichkeit, das Wort „Junge Welt“ in der angegebenen Weise zu lesen, ist also eine Folge von Schritten zugeordnet. z. B. ist a a b a b a b a. Die Aufgabe besteht nun in der Berechnung der Anzahl der verschiedenen Anordnungen von 5 Buchstaben $a$ und 3 Buchstaben $b$. Diese ist $\frac{(5+3)!}{5!\cdot 3!} = 56$.

**Aufgabe 060614:**
In einem Haus wohnen genau die Mietsparteien Albrecht, Becker, Conrad, Dietrich, Ermler, Fritsche, Geißler, Hamann, Ilgner, Keies, Lorenz, Männig, Nolte, Oswald, Richter und Pätzold.
Im Erdgeschoss und in jeder Etage wohnen genau zwei Mietsparteien, außerdem ist folgendes bekannt:

Albrechts wohnen zwei Stockwerke tiefer als Beckers.
Beckers wohnen sechs Stockwerke höher als Conrads.
Familie Fritsche wohnt neben Familie Geißler.
Familie Männig wohnt vier Stockwerke höher als Familie Nolte und zwei Stockwerke tiefer als Familie Fritsche.
Ein Stockwerk über Familie Nolte wohnt Familie Oswald.
Familie Albrecht wohnt drei Etagen über Familie Richter,
und Familie Pätzold wohnt fünf Stockwerke unter Familie Geißler.

a) Wie viel Stockwerke hat das Haus?
b) In welchem Stockwerk wohnt Familie Albrecht?

**Lösung von Steffen Polster:**
Die 16 Mietsparteien werden durch Anfangsbuchstaben ihrer Namen bezeichnet.
a) Da jeweils zwei Familien eine Etage bewohnen, hat das Haus neben dem Erdgeschoss noch 7 Stockwerke.

b) Es gelten die folgenden Beziehungen:

$$a+2=b \quad (1) \qquad ; \qquad c+6=b \quad (2) \qquad ; \qquad f=g \quad (3) \qquad ; \qquad n+4=m \quad (4)$$

$$m+2=f \quad (5) \qquad ; \qquad n+1=o \quad (6) \qquad ; \qquad r+3=a \quad (7) \qquad ; \qquad p+5=g \quad (8)$$

Aus (3) bis (6) folgt $n+6=o+5=m+2=f=g$. Da außerdem (8) gilt, müssen Pätzold und Oswald auf der gleichen Etage wohnen ($o=p$).
Weiterhin ergeben die Gleichungen (1), (2), (7) $c+6=r+5=a+2=b$. $c$ und $n$ können damit nur im Erdgeschosse oder in der 1. Etage wohnen.

$c$ und $n$ können aber nicht in der gleichen Etage wohnen, da dann auch $r$, $o$ und $p$ unmittelbare Nachbarn wären. Wohnt im Erdgeschoss $n$, dann müssten in der 1. Etage $o$, $p$ und $c$ wohnen, was nicht möglich ist. Damit wohnt Nolte im 1. Stock und Conrad im Erdgeschoss und Albrecht folglich im 4. Stock.

**Aufgabe 080614:**
Von drei Pionieren einer Klasse ist uns folgendes bekannt:

(1) Sie haben die Vornamen Alex, Bodo und Dietmar.
(2) Ihre Familiennamen lauten Neumann, Siebert und Keller. Dabei braucht die Reihenfolge der Vornamen nicht der Reihenfolge der Familiennamen zu entsprechen.

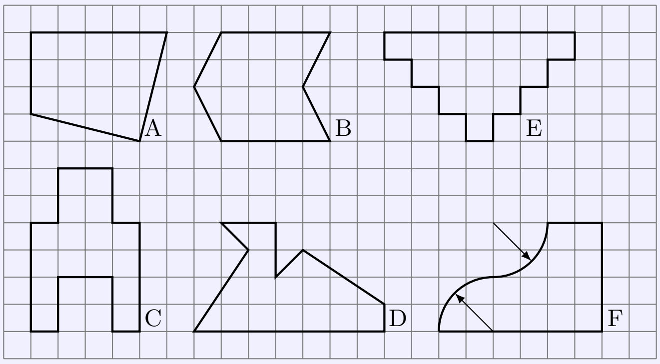
(3) Alex heißt nicht Neumann.
(4) Der Pionier mit dem Familiennamen Keller ist älter als der Pionier mit dem Vornamen Bodo.
(5) Die Mutter des Pioniers Neumann ist eine geborene Mittag.
(6) Die Mutter Bodos trägt den Geburtsnamen Rößler.

Ermittle die Familiennamen, die den Vornamen der Pioniere zugeordnet sind!

**Lösung von Steffen Polster:**
Bodo kann nach den Aussagen (5) und (6) nicht Neumann heißen. Da Bodo auch nicht Neumann heißt (Aussage 4), muss sein Nachname Siebert sein.

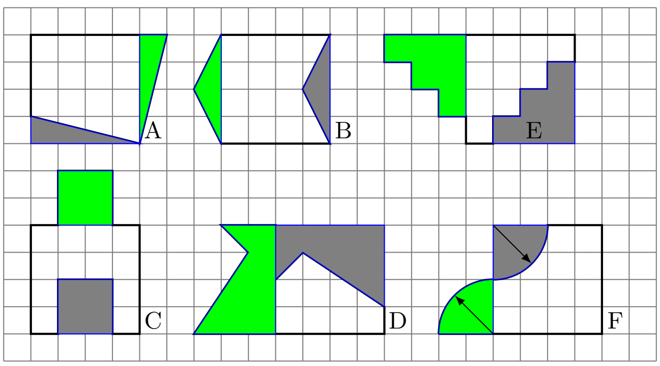
Damit folgt aus (3), dass Alex Keller heißen muss und somit der dritte Pionier den Namen Dietmar Neumann hat.

**Aufgabe 100612:**
Untersuche, welche der in der Abbildung dargestellten Figuren A bis F sich auf wenigstens eine Weise durch einen einzigen geraden Schnitt so in zwei Teilflächen zerlegen lässt, dass sich diese beiden zur gleichen Figur gehörenden Teilflächen jeweils zu einer Quadratfläche zusammensetzen lassen!




Als Lösung genügt in den Fällen, in denen eine Zerlegung der genannten Art möglich ist, je eine entsprechende Zeichnung oder die jeweils zum Quadrat zusammengesetzten aufgeklebten Teilflächen. In den Fällen dagegen, in denen eine Zerlegung und Zusammensetzung der genannten Art nicht möglich ist, genügt als Lösung eine entsprechende Angabe (ohne Begründung).

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Sämtliche Figuren lassen sich der Aufgabe gemäß zerlegen:



**Aufgabe 100614:**
An 15 Teilnehmer am Wettbewerb der mathematischen Schülerzeitschrift „alpha“ wurden insgesamt 25 Antwortkarten „sehr gut gelöst“ von der Redaktion geschickt, und zwar erhielt jeder dieser Teilnehmer mindestens eine solche Antwortkarte.

Außerdem ist über diese 15 Teilnehmer bekannt, dass mindestens ein Teilnehmer genau 2 Antwortkarten, mindestens ein Teilnehmer genau 3 Antwortkarten, mindestens ein Teilnehmer genau 4 Antwortkarten und mindestens ein Teilnehmer genau 5 Antwortkarten erhielt. An einige der 15 Teilnehmer wurde je genau eine Antwortkarte geschickt.

Ermittle die Anzahl dieser Teilnehmer!

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Laut Aufgabe gibt es unter den 15 Teilnehmern mindestens 4, für die folgendes zutrifft:

der erste von ihnen erhielt genau 2 Antwortkarten,
der zweite von ihnen erhielt genau 3 Antwortkarten,
der dritte von ihnen erhielt genau 4 Antwortkarten und
der vierte von ihnen erhielt genau 5 Antwortkarten.

Diese 4 Teilnehmer erhielten folglich zusammen genau 14 Antwortkarten. Da von den restlichen 11 Teilnehmern jeder mindestens eine Antwortkarte erhielt, sind damit schon sämtliche 25 Antwortkarten verteilt.
Keiner dieser 11 Teilnehmer kann daher mehr als eine Antwortkarte erhalten haben.
Unter den 15 erwähnten Teilnehmern gibt es mithin genau 11 mit je genau einer Antwortkarte.

**Aufgabe 170614:**
Bei einem Sportwettkampf beteiligten sich die Pioniere Anton, Bernd, Christian, Detlef, Ernst und Frank am Hochsprungwettbewerb. Über das Ergebnis gelten folgende Aussagen:

(1) Anton sprang höher als Frank, erreichte aber eine kleinere Sprunghöhe als Detlef.
(2) Frank und Ernst erreichten verschiedene Sprunghöhen; es ist jedoch nicht wahr, dass Frank höher sprang als Ernst.
(3) Christian sprang genau so hoch wie Anton, aber höher als Ernst.
(4) Es ist falsch, dass Bernd die Sprunghöhe eines anderen Schülers erreichte oder übertraf.

Ermittle die Reihenfolge der Sprunghöhen, die die Pioniere bei diesem Wettkampf erreichen! Beginne bei der Angabe der Reihenfolge mit dem Schüler, der die größte Sprunghöhe erreichte!

**Lösung von Steffen Polster:**
Aus der vierten Aussage folgt sofort, dass Bernd Letzter war. Aus (2) und (3) folgt, dass Anton und Christian gleich hoch und höher als Ernst sprangen. Ernst sprang aber auch höher als Frank. Andererseits folgt aus (1), dass Detlef höher als Anton war und somit der Beste.
Damit ergibt sich die Reihenfolge: Detlef, Anton und Christian (gleiche Sprunghöhe), Ernst, Frank, Bernd.

**Aufgabe 180613:**
Fred, Gerd, Hans und Ingo sind Schüler der Klassen 6a, 6b, 7a, 7b, und zwar ist in jeder dieser Klassen einer der vier Schüler.

In einem Gespräch, an dem nur Fred und die beiden Schüler der 7. Klasse beteiligt waren, stellt Hans fest, dass drei der vier Schüler nur je eine der Zeitschriften „alpha“ und „technikus“ lesen, nämlich Fred, Gerd und der Schüler der 6a.
Der Schüler der 7b dagegen liest sowohl den „technikus“ als auch die Zeitschrift „alpha“.
Zu welcher Klasse gehört nach diesen Angaben jeder der vier Schüler, und welcher Schüler liest die beiden Zeitschriften „alpha“ und „technikus“?

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Fred ist keiner der beiden Schüler der 7. Klasse, mit denen er sich unterhielt. Er ist auch nicht der Schüler der 6a, da dieser in der von Hans gegebenen Aufzählung außer Fred erwähnt wird. Also gehört Fred der 6b an.

Zur Klasse 6a gehören nach dieser Aufzählung weder Fred noch Gerd. Da ferner Hans einer der Schüler der 7. Klasse ist, mit denen Fred sich unterhielt, gehört auch Hans nicht zur 6a. Folglich gehört Ingo der 6a an. Die beiden Schüler der 7. Klasse sind also Gerd und Hans.

Der Schüler der 7b kann nicht Gerd sein, da er beide Zeitschriften liest, Gerd aber nur eine. Also gehört Gerd der 7a und Hans der 7b an. Der Schüler, der beide Zeitschriften liest, ist folglich Hans.

**Aufgabe 180614:**
Drei Pioniere einer Schule, Klaus, Silvia und Frank, wurden zur Kreisolympiade Junger Mathematiker delegiert und errangen dort einen ersten, einen zweiten bzw. einen dritten Preis. Als später Rainer nach dem Abschneiden seiner Mitschüler gefragt wurde, sagte er:

„Ich glaube, Silvia errang keinen ersten Preis, Klaus bekam keinen zweiten Preis, den erhielt nämlich Frank.“

Wie sich anschließend herausstellte, war unter den drei Aussagen Rainers genau eine wahr, die anderen beiden waren dagegen falsch.
Welcher von den drei genannten Pionieren erhielt den ersten, welcher den zweiten und welcher den dritten Preis?

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Angenommen, die Aussage „Frank erhielt einen zweiten Preis“ wäre wahr.
Dann müssten die beiden anderen Aussagen falsch sein. Das würde aber bedeuten, dass Klaus ebenfalls einen zweiten Preis erhielt, im Widerspruch zur Aufgabe. Also ist die betrachtete Aussage falsch.

Angenommen, die Aussage „Klaus erhielt keinen zweiten Preis“ wäre wahr.
Dann müssten die beiden anderen Aussagen falsch sein. Das würde jedoch bedeuten, dass keiner einen zweiten Preis erhielt, im Widerspruch zur Aufgabe. Also ist auch diese Aussage falsch.

Mithin kann nur die Aussage ”Silvia erhielt keinen ersten Preis” wahr sein. Da damit die beiden anderen Aussagen falsch sind, erhielt Klaus einen zweiten Preis.
Ferner kann nur Frank einen ersten Preis und mithin Silvia einen dritten Preis errungen haben. Nur bei dieser Preisverteilung ist genau eine von Rainers Aussagen wahr, und die anderen beiden sind falsch.

**Aufgabe 190613:**
In einem Kästchen befinden sich 12 rote, 15 blaue und 8 gelbe Kugeln, die sich nur durch ihre Farbe unterscheiden. Anke will mit verbundenen Augen eine Anzahl dieser Kugeln herausnehmen.

Die Anzahl will sie so wählen, dass sie mit Sicherheit erreicht, dass sich unter den herausgenommenen Kugeln 5 von gleicher Farbe befinden.

Sie meint: „Es genügt hierzu, 15 Kugeln herauszunehmen.“
Birgit meint: „Es genügen sogar 13 Kugeln.“
Cornelia behauptet: „Es genügen dafür 12 Kugeln.“
Entscheide für jede der drei Meinungen, ob sie wahr ist, und begründe deine Entscheidung!

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Cornelias Meinung ist falsch; denn greift man 12 Kugeln heraus, so erreicht man nicht mit Sicherheit, dass sich darunter 5 von gleicher Farbe befinden. Es können nämlich 4 rote, 4 blaue und 4 gelbe Kugeln herausgegriffen worden sein.

Birgits Meinung ist wahr; denn hat man 13 Kugeln herausgegriffen, so gibt es nur folgende Möglichkeiten:
1. Die ersten 12 herausgegriffenen Kugeln sind 4 rote, 4 blaue und 4 gelbe. Dann muss die 13. Kugel eine dieser Farben haben; von dieser Farbe befinden sich also insgesamt 5 unter den 13 herausgegriffenen Kugeln, wie es erreicht werden sollte.

2. Die Farbverteilung unter den ersten 12 Kugeln ist eine andere als 4 rote, 4 blaue und 4 gelbe. Dann hat sich gegenüber dieser Verteilung die Anzahl für mindestens eine dieser Farben erhöht, da sonst nicht insgesamt 12 Kugeln in der geänderten Verteilung vorliegen könnten. Also befinden sich bereits unter 12 Kugeln von mindestens einer Farbe mindestens 5 Kugeln. Damit ist dies erst recht für die 13 herausgegriffenen Kugeln der Fall.

Ankes Meinung ist ebenfalls wahr; denn schon unter 13, erst recht also unter 15 Kugeln befinden sich 5 von gleicher Farbe.

**Aufgabe 190614:**
Drei Pioniere einer Schule, Karin, Dieter und Frank, wurden zur Kreisolympiade Junger Mathematiker delegiert und errangen einen ersten, einen zweiten und einen dritten Preis (jeder der drei Pioniere genau einen dieser Preise). Später erkundigte sich Anette nach dem Abschneiden der drei Olympiadeteilnehmer. Man sagte ihr:

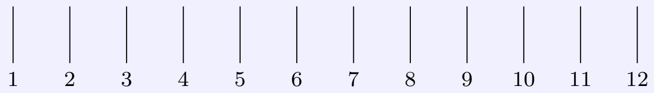
„Dieter erhielt keinen ersten Preis.“ (1)
„Karin erhielt keinen zweiten Preis.“ (2)
„Frank erhielt einen zweiten Preis“ (3)

Später stellte sich heraus, dass von diesen drei Aussagen genau eine wahr, die anderen dagegen falsch waren.
Welcher der drei Schüler erhielt hiernach den ersten, welcher den zweiten und welcher den dritten Preis?

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Dieter erhielt keinen zweiten Preis; denn hätte er einen zweiten Preis erhalten, so wären die 1. und die 2. Aussage wahr gewesen.
Auch Frank erhielt keinen zweiten Preis; denn hätte er einen zweiten Preis erhalten, so wären die 2. und die 3. Aussage wahr gewesen.
Also erhielt Karin einen zweiten Preis. Somit waren die 2. und die 3. Aussage falsch, die erste dagegen wahr.
Folglich erhielt Dieter, da er weder einen ersten noch einen zweiten Preis erhalten haben konnte, einen dritten Preis. Den ersten Preis konnte schließlich nur Frank errungen haben; denn die beiden übrigen Preise hatten ja Karin und Dieter bekommen.

**Aufgabe 210614:**
Zwölf Hölzchen, die einzeln in einer Reihe liegen (siehe Abbildung), sollen folgendermaßen in eine Anordnung von sechs „Doppelhölzchen“ (d. h. Häufchen von je zwei zusammenliegenden Hölzchen) gebracht werden:

Es soll mehrere Male jeweils ein einzeln liegendes Hölzchen entweder nach rechts oder nach links springen und dabei jedesmal (mit Ausnahme des letzten Males) genau drei Hölzchen (entweder drei einzeln liegende oder ein einzeln liegendes und ein Doppelhölzchen) überspringen. Beim letzten Male sollen genau drei Doppelhölzchen übersprungen werden.




Beschreibe eine Serie von Sprüngen die diese Forderungen erfüllt!

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Eine Serie der gesuchten Art ist z. B.: 1 auf 5, 7 auf 11, 9 auf 12, 4 auf 8, 2 auf 6, 3 auf 10.

**Aufgabe 220613:**
Bei einem Sportwettkampf beteiligten sich die Pioniere Anton, Bernd, Christian, Detlef, Ernst und Frank am Hochsprungwettbewerb. Über das Ergebnis gelten folgende Aussagen:

(1) Anton sprang höher als Frank, erreichte aber eine kleinere Sprunghöhe als Detlef.
(2) Frank und Ernst erreichten verschiedene Sprunghöhen; es ist jedoch nicht wahr, dass Frank höher als Ernst sprang.
(3) Christian erreichte die gleiche Höhe wie Anton, sprang aber höher als Ernst.
(4) Es ist falsch, dass Bernd die Sprunghöhe eines anderen Pioniers erreichte oder übertraf.

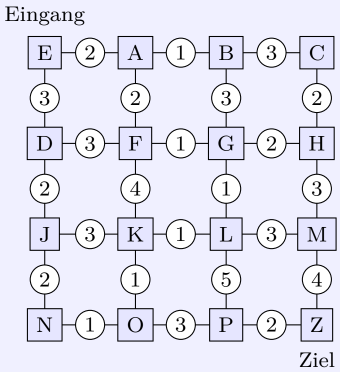
Untersuche, ob sich aus diesen Angaben die Reihenfolge der Sprunghöhen der sechs Pioniere eindeutig erhalten lässt!
Wenn dies möglich ist, so nenne diese Reihenfolge, und beginne dabei mit der größten Sprunghöhe!

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Bezeichnet man jeweils die Sprunghöhe eines Pioniers mit dem Anfangsbuchstaben seines Vornamens, so erhält man:

Aus (1) folgt $D > A$, aus (3) folgt $A = C$ und $C > E$, aus (2) folgt $E > F$, aus (4) folgt $F > B$.
Die gesuchte Reihenfolge lautet daher:

$$D > A = C > E > F > B$$

**Aufgabe 230614:**




Luise will so rasch wie möglich vom Eingang (E) zum Ort des Pionierpressefestes (Ziel (Z)) gehen. Auf dem skizzierten (nicht maßstäblichen) Plan sind alle möglichen Wege vom Eingang zum Ziel sowie jeweils die Minuten angegeben, die für die verschiedenen Teilstrecken gebraucht werden. Jeder Teilnehmer erhält einen derartigen Plan und soll angeben, wie er auf dem schnellsten Wege zum Ziel kommt.

a) Gib einen Weg an, für den möglichst wenig Zeit gebraucht wird!
Wie viel Minuten sind für diesen Weg ausreichend?
b) Gib noch mindestens zwei weitere derartige Wege an!

Hinweis: Um die Angabe der Wege zu erleichtern, werden die Abzweigungs- bzw. Kreuzungspunkte mit A, B, C, D, E, F, ..., P bezeichnet, wie es in der Abbildung angegeben ist.

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Um in kürzester Zeit zum Ziel zu kommen, sind 13 Minuten ausreichend.
Es gibt insgesamt genau vier verschiedene Wege, bei denen 13 Minuten ausreichend sind, nämlich

$$EAFGLKOPZ, \qquad EAFGLMZ, \qquad EAFGLPZ, \qquad EDJNOPZ$$

Als Lösung zu a) gilt die Angabe eines dieser Wege, als Lösung zu b) die Angabe zweier weiterer.

**Aufgabe 250613:**
Dirk und Jörg trafen sich in der Erfassungsstelle für Sekundärrohstoffe. Jörg hat sein Altpapier in mehrere Päckchen zu je 5 kg gebündelt und außerdem noch 3 kg loses Papier.
Dirk liefert 32 kg Papier ab. Als beide ihr Sammelergebnis vergleichen, stellen sie auch fest, dass sie zusammen mehr als 50 kg Altpapier gesammelt hatten.
Wie viele Bündel zu je 5 kg kann Jörg abgeliefert haben, wenn wir außerdem noch wissen, dass Dirk mehr Altpapier als Jörg hatte?
Gib alle Möglichkeiten an!

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Jörg hat weniger als (die von Dirk gebrachten) 32 kg abgeliefert. Wegen $50 - 32 = 18$ hat er aber mehr als 18 kg abgeliefert. Hätte er drei oder weniger Bündel zu 5 kg gebracht, so hätte er wegen $3 \cdot 5 + 3 = 18$ nur 18 kg oder weniger geliefert.
Hätte er sechs oder mehr Bündel zu 5 kg gebracht, so hätte er wegen $6 \cdot 5 + 3 = 33$ mehr als 32 kg geliefert.
Also kann er nur vier oder fünf Bündel zu 5 kg gebracht haben.
Diese beiden Fälle sind in der Tat möglich, da sie auf $4 \cdot 5 + 3 = 23$ bzw. $5 \cdot 5 + 3 = 28$ führen.

**Aufgabe 260612:**
Zur Durchführung eines Geländespiels war es nötig, dass jeder Teilnehmer ein Schreibgerät bei sich hatte. Es waren nur folgende Sorten Schreibgeräte von Teilnehmern mitgebracht worden. Kugelschreiber, Rotstifte und Grünstifte; keine dieser drei Sorten kam doppelt bei einem der Teilnehmer vor. Im einzelnen wurde festgestellt:

(1) Es waren insgesamt 100 Teilnehmer bei diesen Geländespiel.
(2) Genau 20 der Teilnehmer hatten einen Kugelschreiber, aber keinen Rotstift.
(3) Genau 15 der Teilnehmer hatten einen Kugelschreiber, aber keinen Grünstift.
(4) Genau 5 der Teilnehmer hatten einen Kugelschreiber, aber weder einen Rotstift noch einen Grünstift.
(5) Genau 65 der Teilnehmer hatten keinen Kugelschreiber.
(6) Genau 55 der Teilnehmer hatten keinen Rotstift.
(7) Genau 40 der Teilnehmer hatten keinen Grünstift.
(8) Genau 15 der Teilnehmer hatten weder einen Rotstift noch einen Grünstift.

a) Ermittle aus diesen Angaben die Anzahl derjenigen Teilnehmer, die wenigstens ein Schreibgerät mitgebracht hatten!
b) Reichten die mitgebrachten Schreibgeräte aus, um bei geeigneter Verteilung jeden der 100 Teilnehmer mit einem Schreibgerät zu versorgen?

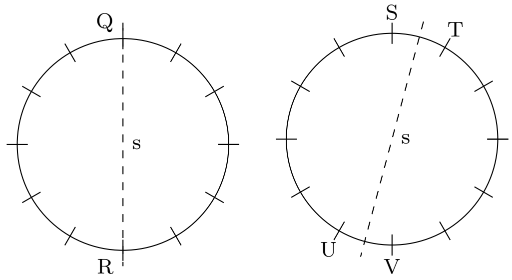
**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
a) Unter den 15 in (8) genannten Teilnehmern ohne Rot- und Grünstift befanden sich auch die 5 in (4) genannten Teilnehmer (ohne Rot- und Grünstift, aber) mit Kugelschreiber; die anderen 10 hatten folglich überhaupt kein Schreibgerät.
Aus (8) und (1) folgt ferner: Alle 85 in (8) nicht genannten Teilnehmer hatten ein Schreibgerät (nämlich mindestens eines der Geräte Rot- oder Grünstift). Also hatten nur die genannten 10 Teilnehmer kein Schreibgerät.
Damit ist gezeigt: Genau 90 der Teilnehmer hatten wenigstens ein Schreibgerät mitgebracht.

b) Unter den 20 in (2) genannten sämtlichen Teilnehmern mit Kugelschreiber, aber ohne Rotstift befanden sich auch die 5 in (4) genannten (mit Kugelschreiber, ohne Rotstift und) ohne Grünstift; die anderen 15 hatten folglich außer dem Kugelschreiber einen Grünstift mitgebracht. Daraus folgt:

Die mitgebrachten Schreibgeräte reichten aus, um alle Teilnehmer zu versorgen. Es genügte z. B., 10 der genannten Grünstifte an die in a) ermittelten Teilnehmer ohne mitgebrachtes Schreibgerät zu verteilen.

**Aufgabe 260614:**
Auf einem Kreis werden wie beim Zifferblatt einer Uhr zwölf Punkte eingetragen. Auf jeden der Punkte wird genau ein Spielstein gelegt. Zwei Spieler $A$ und $B$ sollen abwechselnd jeweils entweder genau einen Stein oder genau zwei Steine, die auf benachbarten Punkten liegen, wegnehmen.
Spieler $A$ beginnt. Gewonnen hat der Spieler, der den letzten Spielstein wegnimmt.
Wie kann Spieler $B$ vorgehen, um in jedem Fall zu gewinnen?

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**




Spieler $B$ kann die Axialsymmetrie der Figur ausnutzen. Für den ersten Zug von Spieler $A$ sind genau die folgenden zwei Fälle möglich

1. Spieler $A$ nimmt nur einen Stein weg, wir bezeichnen ihn mit $Q$. Dann wählt Spieler $B$ als Symmetrieachse $s$ der Figur diejenige Symmetrieachse, die durch $Q$ geht.
Auf $s$ liegt noch ein Stein $R$. Diesen nimmt Spieler $B$ in seinem ersten Zug weg.

2. Spieler $A$ nimmt zwei nebeneinanderliegende Steine $S$ und $T$ weg. Dann wählt Spieler $B$ als Symmetrieachse $s$ der Figur diejenige Symmetrieachse, die zwischen $S$ und $T$ verläuft.
Die Gerade $s$ verläuft dann noch zwischen zwei weiteren nebeneinanderliegenden Steinen $U$ und $V$. Diese nimmt Spieler $B$ in seinem ersten Zug weg.

Nach dem ersten Zug von Spieler $B$ liegen zwei zueinander bezüglich $s$ symmetrische Steine niemals nebeneinander, sondern sind durch mindestens einen Punkt ohne Spielstein voneinander getrennt. Daher kann Spieler $A$ niemals in einem Zug gleichzeitig einen Stein $P$ und den zu ihm bezüglich $s$ symmetrisch gelegenen Stein $P'$ wegnehmen.

Folglich wird Spieler $B$ in jedem Fall zum Wegnehmen des letzten Steines, also zum Gewinn, kommen, wenn er zu jedem Stein, den Spieler $A$ wegnimmt, im Gegenzug den bezüglich $s$ symmetrisch gelegenen Stein wegnimmt.

**Aufgabe 270613:**
Auf einer Wippe stellt sich heraus:

(1) Andreas ist leichter als Frank, aber schwerer als Dirk.
(2) Stefan ist leichter als Andreas, aber schwerer als Dirk.
(3) Peter ist leichter als Jürgen, aber schwerer als Michael.
(4) Jürgen ist leichter als Dirk.

Ordne die Jungen nach ihren Gewicht; beginne bei dem schwersten!
Überprüfe, ob bei der von dir angegebenen Reihenfolge alle Aussagen (1) bis (4) wahr sind!

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Die Reihenfolge lautet: Frank, Andreas, Stefan, Dirk, Jürgen, Peter, Michael.

Probe:
zu (1): Frank ist schwerer als Andreas und als Dirk.
zu (2): Andreas ist schwerer als Stefan, und dieser ist schwerer als Dirk.
zu (3): Jürgen ist schwerer als Peter, und dieser ist schwerer als Michael.
zu (4): Dirk ist schwerer als Jürgen.

**Aufgabe 280613:**
Mario, Petra, Rigo und Tanja unterhalten sich darüber, welche Plätze sie bei der Schulolympiade wohl belegen werden. Dabei äußern sie folgende Meinungen:

(1) Tanja wird den ersten Platz erreichen und Petra den zweiten.
(2) Tanja wird Zweite werden und Rigo Dritter.
(3) Mario wird den zweiten Platz und Rigo den vierten belegen.
(4) Keine zwei Schüler werden auf den gleichen Platz kommen.

Nach Abschluss der Schulolympiade stellt sich heraus, dass die Aussage (4) wahr ist und dass in den Meinungen (1), (2) und (3) jeweils genau eine der beiden Aussagen wahr und die andere falsch ist.
Gib an, welcher Schüler hiernach welchen Platz bei der Schulolympiade belegte!
Zeige, dass die von dir genannte Platzverteilung die Bedingungen der Aufgabe erfüllt!

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Eine mögliche Verteilung lautet:
Tanja - 1. Platz; Mario - 2. Platz; Rigo - 3. Platz; Petra - 4. Platz.

Bei dieser Verteilung ist die Angabe (4) wahr. In (1) ist „Tanja erreicht den ersten Platz“ wahr und „Petra den zweiten“ falsch. In (2) ist „Tanja wird Zweite“ falsch und „Rigo Dritter“ wahr.
In (3) ist „Mario belegt den zweiten Platz“ wahr und „Rigo den vierten“ falsch. Somit ist in den Meinungen (1) bis (3) jeweils genau eine der beiden Aussagen wahr und die andere falsch.

**Aufgabe 290611:**
Peter möchte aus einer Kanne, in der sich mehr als 13 Liter Milch befinden, genau 13 Liter abmessen. Das genaue Fassungsvermögen der Kanne ist nicht bekannt, und es ist auch nicht bekannt, wie viel Milch genau in der Kanne ist. Außer der Kanne stehen noch genau zwei weitere Gefäße zur Verfügung. Das eine hat ein Fassungsvermögen von genau 5 Liter, das andere ein Fassungsvermögen von genau 17 Liter.
(Eine Skaleneinteilung oder ähnliche Möglichkeiten zum Abmessen anderer Mengen gibt es jedoch nicht.)
Beschreibe, wie Peter allein mit diesen Hilfsmitteln genau 13 Liter Milch abmessen kann!

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Peter kann folgendermaßen verfahren:
Er entnimmt zuerst durch Füllen des kleinen Gefäßes mit anschließendem Umgießen in das große Gefäß dreimal je 5 Liter aus der Kanne. Wegen $3 \cdot 5 = 15$ enthält das große Gefäß dann genau 15 Liter; wegen $417 - 15 = 2$ passen noch genau 2 Liter Milch hinein. Diese werden aus dem noch einmal gefüllten kleinen Gefäß in das große Gefäß gegossen, so dass nun in dem kleinen Gefäß wegen $5 - 2 = 3$ noch genau 3 Liter sind.

Danach wird das große Gefäß wieder durch Zurückgießen in die Kanne entleert, und die 3 Liter werden anschließend in das große Gefäß gegossen. Gießt man nun noch zweimal je 5 Liter Milch hinzu, so enthält das große Gefäß wegen $3 + 2 \cdot 5 = 13$ genau 13 Liter Milch, wie es verlangt war.

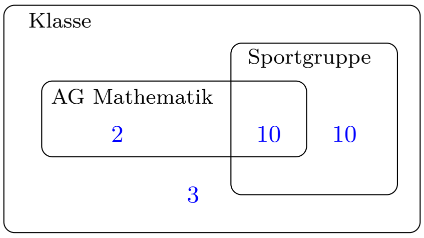
**Aufgabe 290614:**
Von den 25 Schülern einer Klasse gehören genau 20 einer Sportgruppe an. An der AG Mathematik nehmen genau 12 Schüler dieser Klasse teil. Genau 3 Schüler dieser Klasse gehören weder einer Sportgruppe noch der AG Mathematik an.
Zeige, wie man aus diesen Angaben erhalten kann, dass es auf folgende Fragen eindeutig bestimmte Zahlenangaben als Antworten gibt! Gib diese Antworten an!

a) Wie viele Schüler dieser Klasse insgesamt gehören zwar der AG Mathematik, aber nicht einer Sportgruppe an?
b) Wie viele Schüler dieser Klasse insgesamt gehören zwar einer Sportgruppe, aber nicht der AG Mathematik an?
c) Wie viele Schüler dieser Klasse insgesamt gehören sowohl der AG Mathematik als auch einer Sportgruppe an?

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Aus der ersten Angabe des Aufgabentextes folgt wegen 25 - 20 = 5:
Genau 5 Schüler der Klasse gehören nicht einer Sportgruppe an. Unter diesen müssen sich die 3 in der dritten Angabe des Aufgabentextes genannten Schüler befinden, die außerdem auch nicht der AG Mathematik angehören. Damit folgt wegen 5 - 3 = 2 als Antwort zu a): Insgesamt 2 Schüler der Klasse gehören zwar der AG Mathematik, aber nicht einer Sportgruppe an.
Diese 2 Schüler müssen zu den 12 in der zweiten Angabe des Aufgabentextes genannten Schülern gehören.

Wegen 12 - 2 = 10 folgt damit als Antwort zu c): Insgesamt 10 Schüler der Klasse gehören sowohl der AG Mathematik als auch einer Sportgruppe an. Hieraus und aus der ersten Angabe des Aufgabentextes folgt wegen 20 - 10 = 10 als Antwort zu b):
Insgesamt 10 Schüler der Klasse gehören zwar einer Sportgruppe an, aber nicht der AG Mathematik.

Hinweis: Zur Probe kann man die Anzahlen in das Diagramm Abbildung eintragen und damit durch $10+10+2+3=25$, $10+10=20$, $10+2=12$ bestätigen, dass die Angaben des Aufgabentextes erfüllt sind.




## II Runde 2

**Aufgabe 010623:**
Auf einer Wanderung sagt Rudolf: „Die Entfernung von hier bis Neustadt ist größer als 5 km."
Emil sagt: „Die Entfernung bis Neustadt ist kleiner als 5 km."
Robert sagt: „Einer von beiden hat recht."

Nun wissen wir, dass Robert eine falsche Aussage gemacht hat. Wie groß ist die Entfernung tatsächlich?

**Lösung von Steffen Polster:**
Rudolf und Emil können nicht Recht haben, da sich ihre Aussagen widersprechen. Deshalb hat keiner von beiden Recht. D. h., dass die Entfernung bis Neustadt ist weder größer noch kleiner als 5 km war, sie ist also genau 5 km.

**Aufgabe 040624:**
Fritz gibt Heinz folgendes Rätsel auf:

„In unserer Klasse können 26 Schüler Rad fahren und 12 Schüler schwimmen. Jeder Schüler kann mindestens eins von beiden. Multipliziert man die Schülerzahl mit 5, so ist die Quersumme dieses Produkts doppelt so groß wie die Quersumme der Schülerzahl. Außerdem ist das Produkt durch 6 teilbar.
Wie viel Schüler besuchen die Klasse?“

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Aus der ersten Angabe erfolgt, dass die Klasse mindestens 26, höchstens 38 Schüler haben kann.
Die letzte Angabe schränkt diese Möglichkeit auf die Zahlen 30 bzw. 36 ein. Von diesen Zahlen erfüllt nur 30 alle Bedingungen.

**Aufgabe 050624:**
Die Schüler Eva, Renate, Monika, Ingrid, Jürgen, Hans und Gerd haben sich in einer Reihe der Größe nach aufgestellt.
Der größte steht vorn, und von zwei gleichgroßen steht der, dessen Vorname einen im Alphabet vorangehenden Anfangsbuchstaben hat, vor dem anderen. Folgendes ist bekannt:

(1) Es ist wahr, dass Ingrid 2 cm kleiner als Monika ist.
(2) Es ist falsch, dass Eva nicht dieselbe Größe wie Gerd besitzt.
(3) Es ist nicht wahr, dass keiner dieser Schüler kleiner als Hans ist.
(4) Es ist wahr, dass Jürgen kleiner als Ingrid, aber größer als Hans ist.
(5) Es ist unwahr, dass Hans größer als Monika ist.
(6) Es ist nicht falsch, dass Monika 2 cm größer als Gerd und auch größer als Jürgen ist.

Es soll festgestellt werden:
a) Welche Schüler sind gleich groß?
b) Wie lautet die Reihenfolge der Vornamen, in der sich die Schüler aufgestellt haben? (Man beginne beim größten Schüler.)

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Bezeichnet man die Größe jedes der Schüler (in cm gemessen) mit dem Anfangsbuchstaben seines Vornamens, so kann man die Aussagen (1) bis (6) in folgender Form schreiben:

(1) $I = M - 2$
(2) $E = G$
(3) $H$ ist größer als der Kleinste von $(E,R,M,I,J,G)$ also $H >$ Minimum$(E,R,M,I,J,G)$
(4) $H < J < I$
(5) $H \leq M$
(6a) $M = G + 2$
(6b) $M > J$

Aus (1) und (4) folgt (7) $H < J < I < M$. Aus (1) und (6a) folgt (8) $I = G$. Aus (2) und (8) folgt (9) $E = G = I$. Aus (9) und (7) folgt (10) $H < J < E = G = I < M$ und aus (5) und (10) folgt (11) $R < H$.
Daher lauten die Antworten:
a) Eva, Gerd und Ingrid sind gleich groß. Außer ihnen gibt es keine zwei Schüler, die gleich groß sind.
b) Monika, Eva, Gerd, Ingrid, Jürgen, Hans, Renate.

**Aufgabe 070623:**
Nach einem Scheibenschießen verglichen Elke, Regina, Gerd und Joachim ihre Schießleistungen. Es ergab sich folgendes:

(1) Joachim erzielte mehr Ringe als Gerd.
(2) Elke und Regina erreichten zusammen dieselbe Ringzahl wie Joachim und Gerd zusammen.
(3) Elke und Joachim erzielten zusammen weniger Ringe als Regina und Gerd.

Ermittle auf Grund dieser Angaben die Reihenfolge der Schützen nach fallender Ringzahl!

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Bezeichnet man die Ringzahl der Schützen mit den Anfangsbuchstaben der entsprechenden Vornamen, so erhält man aus den Abgaben der Aufgabe

(1) $J > G$
(2) $E + R = J + G$
(3) $E + J < R + G$

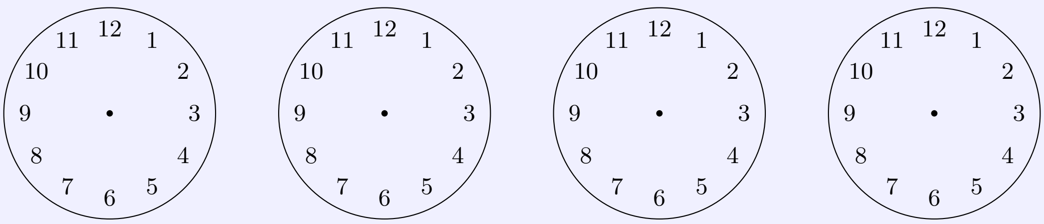
Aus (2) und (3) ergibt sich durch Addition $2E + J + R < 2G + J + R$, also $E < G$. Hieraus und aus (2) folgt $R - J = G - E > 0$, also $J < B$.
Daher gilt $R > J > G > E$. Die gesuchte Reihenfolge ist: Regina, Joachim, Gerd, Elke.

**Aufgabe 080621:**
In einer 6. Klasse erhielt als Jahresendzensur im Fach Mathematik kein Schüler die Note 5, jeder neunte die Note 1, jeder dritte die Note 2 und jeder sechste die Note 4.
Über die Schülerzahl $n$ dieser Klasse ist folgendes bekannt: $20 < n < 40$.
Berechne die Anzahl der Schüler, die als Jahresendzensur die Note 3 erhielten!

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Die Gesamtschülerzahl $n$ muss ein Vielfaches der Zahlen 3, 6 und 9 sein und dabei gleichzeitig der Bedingung $20 < n < 40$ genügen. Das trifft nur auf die Zahl 36 zu. $\frac{1}{9}$ von 36 beträgt 4, $\frac{1}{3}$ von 36 beträgt 12, $\frac{1}{6}$ von 36 beträgt 6.

Insgesamt 22 Schüler erhielten also entweder die Note 1, 2 oder 4. Demnach erreichten 14 Schüler die Note 3, denn die Differenz von 36 und 22 beträgt 14.

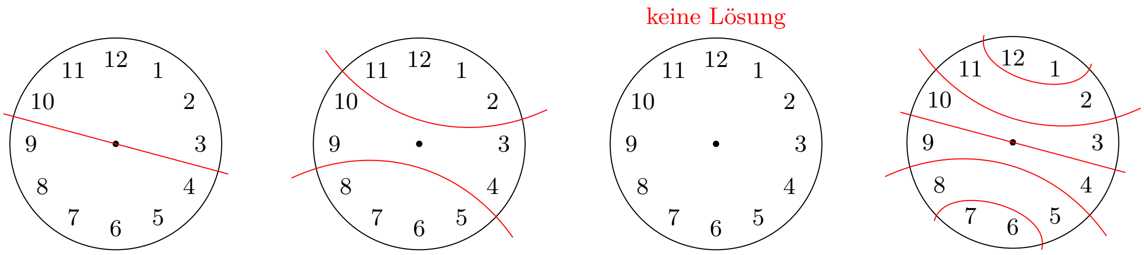
**Aufgabe 090622:**
Auf der Abbildung sind wie auf dem Ziffernblatt einer Uhr die Zahlen 1 bis 12 abgebildet.
Untersuche, ob sich diese vier Kreisscheiben durch Einzeichnen von Linien (z. B. Geraden), die keine der Ziffern treffen, so in Teilstücke zerlegen lassen, dass die Summen der auf jedem Teilstück derselben Kreisscheibe liegenden Zahlen jeweils untereinander gleich sind!
Dabei ist die erste Kreisscheibe in 2 Teile, die zweite in 3 Teile, die dritte in 4 Teile und die vierte in 6 Teile zu zerlegen.



**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Die Summe der auf jeder Kreisscheibe aufgetragenen Zahlen beträgt jeweils 78.
Die Kreisscheibe lässt sich daher höchstens dann in die laut Aufgabe geforderten Teile zerlegen, wenn die verlangte Teilanzahl (also 2; 3; 4; 6) ein Teiler von 78 ist. Das gilt für 2, 3 und 6, für 4 dagegen nicht.

Daher lassen sich höchstens die erste, die zweite und die vierte Kreisscheibe in der geforderten Weise zerlegen. Eine Zerlegung in 4 derartige Teile (Kreisscheibe 3) ist nicht möglich.
Wie die Abbildung zeigt, können die genannten Kreisscheiben tatsächlich der Aufgabe entsprechend geteilt werden. Dabei beachten wir, dass für die Zahlen 1, 2, ..., 12 gilt:

$$1 + 12 = 2 + 11 = 3 + 10 = 4 + 9 = 5 + 8 = 6 + 7 = 13$$




**Aufgabe 110622:**
Ruth, Marion und Petra verbringen einen Teil ihrer Ferien in einem Pionierlager. Jede von ihnen betreibt genau eine der Sportarten Tischtennis, Volleyball und Schwimmen. Außerdem ist bekannt:

(1) Marion leiht sich von der Volleyballspielerin gern gute Bücher.
(2) Die Volleyballspielerin und Petra haben nicht gleichviele Preise bei der Mathematikolympiade errungen.
(3) Marion geht in eine höhere Klasse als die Tischtennisspielerin.

Welche Sportart treibt jedes der drei Mädchen?

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
(4) Wegen der Aussagen (1) und (2) ist die Volleyballspielerin weder Marion noch Petra. Ruth ist also die Volleyballspielerin.
(5) Da die Tischtennisspielerin wegen (3) nicht Marion und wegen (4) nicht Ruth sein kann, ist Petra die Tischtennisspielerin.
(6) Aus (4) und (5) ergibt sich: Marion ist die Schwimmerin.

**Aufgabe 120623:**
Nach einer Solidaritätssammlung für Vietnam verglichen die Thälmann-Pioniere Rita, Werner, Margot, Beate und Jan ihre Sammelergebnisse. Dabei stellten sie fest:

(1) Beate hatte mehr als Jan, jedoch weniger als Werner gesammelt.
(2) Rita sammelte 13 M, das war weniger, als Jan gesammelt hatte.
(3) Beates Sammelergebnis war um 4 M höher als das Ergebnis Ritas.
(4) Margot sammelte zwar 2 M weniger als Werner, aber 1 M mehr als Jan.
(5) Zwei Pioniere erzielten das gleiche Sammelergebnis.

Stelle fest, welches Sammelergebnis jeder der fünf Pioniere erzielt hatte.

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Die von den Pionieren erzielten Sammelergebnisse seien mit $r$, $w$, $m$, $b$, $j$ (in Mark) bezeichnet. Dann gilt

laut Aufgabe:

(1) $w > b > j$
(2) $j > r$; $r = 13$
(3) $b = r + 4$
(4) $w = m + 2$; $m = j + 1$

Aus (2) und (3) folgt $b = 17$. Aus (1) und (2) folgt $w > b > j > r$, aus (4) $w > m > j$ und daraus sowie aus (5) $m = b$, also $m = 17$.
Daher sammelten: Werner 19 M, Beate und Margot je 17 M, Jan 16 M und Rita 13 M.

**Aufgabe 130623:**
Klaus hat gehört, dass in einer 6. Klasse von allen Schülern eine Mathematik-Klassenarbeit geschrieben wurde, bei der kein Schüler die Note „5“ bekam.
Ein Sechstel der Klasse schrieb eine „1“, ein Drittel eine „2“ und nur ein Neuntel eine „4“. Über die Anzahl der Schüler dieser Klasse wusste Klaus nur, dass sie größer als 10, aber kleiner als 40 war. Er fragt sich, wie viel Schüler insgesamt bei der erwähnten Klassenarbeit eine „3“ geschrieben hatten.

Stelle fest, ob diese Anzahl mit den in der Aufgabe enthaltenen Angaben eindeutig zu ermitteln ist! Wenn das nicht der Fall ist, dann ermittle alle mit den Angaben vereinbaren Antworten auf Klaus' Frage!

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Es sei $x$ die Anzahl aller Schüler dieser Klasse. Dann ist $x$ durch 9 teilbar, also wegen $10 < x < 40$ eine der Zahlen 18; 27; 36. Ferner ist $x$ auch durch 6 teilbar, daher entfällt 27.
Für die beiden verbleibenden Möglichkeiten zeigt die nachstehende Tabelle in ihrer 2. bis 4. Spalte die aus den Angaben folgenden Anzahlen von Schülern mit den Noten 1; 2; 4. In der 5. Spalte stehen alle mit den Angaben vereinbaren Anzahlen von Schülern mit der Note „3“. Klaus konnte die gesuchte Anzahl also nicht eindeutig ermitteln.

| Klassenstärke | Anzahl der Schüler mit der Note | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 4 | 3 |
| 18 | 3 | 6 | 2 | 7 |
| 36 | 6 | 12 | 4 | 14 |

**Aufgabe 140623:**
Anita, Brigitte, Christa und Dana trugen untereinander einen Wettkampf aus. Auf die Frage, wer den ersten, zweiten, dritten bzw. vierten Platz belegte, wurden folgende drei Aussagen gemacht:

(1) Anita siegte, Brigitte belegte den zweiten Platz.
(2) Anita belegte den zweiten Platz, Christa den dritten.
(3) Dana belegte den zweiten, Christa den vierten Platz.

Wie sich herausstellte, wurde in jeder der drei Aussagen (1), (2), (3) eine Platzierung richtig und eine falsch angegeben.
Wer belegte den ersten, zweiten, dritten bzw. vierten Platz?

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Angenommen, in Aussage (1) wäre Brigittes Platzierung richtig angegeben, dann wären die Plätze von Anita in (2) und Dana in (3) falsch angegeben, und demnach müsste Christa den dritten und zugleich den vierten Platz belegt haben, was nicht möglich ist.

Folglich ist in (1) die Platzierung von Anita richtig und die von Brigitte falsch angegeben, d. h., Anita belegte den ersten Platz und Brigitte nicht den zweiten Platz.

Danach ist in (2) der Platz Anitas falsch und der Christas richtig angegeben. Daraus folgt, dass in (3) der Platz Christas falsch und der Danas richtig angegeben wurde. Mithin belegten Anita den ersten, Dana den zweiten, Christa den dritten und Brigitte den vierten Platz.

**Aufgabe 170622:**
Bei einem Schulsportfest bestritten Christa, Doris, Elke, Franziska und Gitta den 60-m-Endlauf. Auf die Frage, welche Plätze diese fünf Schülerinnen beim Einlauf ins Ziel belegen würden, machten einige der zuschauenden Klassenkameraden folgende Voraussagen:

(1) Christa wird nicht unmittelbar vor Elke ins Ziel kommen.
(2) Elke wird entweder als Vorletzte einlaufen oder sogar einen noch besseren Platz belegen.
(3) Es ist nicht wahr, dass Doris nicht schneller als Gitta laufen wird.
(4) Franziska wird einen anderen als den dritten Platz belegen.

Als der Endlauf vorbei war, wurde festgestellt, dass die fünf Schülerinnen sämtlich verschiedene Zeiten gelaufen waren und dass alle vier Voraussagen über den Einlauf falsch waren.
Wie lautet nach diesen Angaben die tatsächliche Reihenfolge des Einlauf?

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Da (2) falsch ist, belegte Elke weder den vorletzten noch einen besseren Platz, sie wurde also Fünfte.
Da (1) falsch ist, kam Christa unmittelbar vor Elke ins Ziel und wurde daher Vierte.
Da (4) falsch ist, belegte Franziska den dritten Platz. Folglich verblieben der erste und zweite Platz für Doris und Gitta.
Da (3) falsch ist, lief Doris nicht schneller als Gitta. Da ihre Zeit ferner nicht dieselbe war wie die Gittas, belegte sie folglich den zweiten Platz und Gitta den ersten.

Die tatsächliche Reihenfolge des Einlaufs lautete mithin: Gitta, Doris, Franziska, Christa, Elke.

**Aufgabe 200624:**
Vier Schüler, je einer aus der Klasse 5a, 5b, 6a, 6b, unterhalten sich über die Zeitschriften, die sie regelmäßig lesen. Die Schüler heißen Fred, Gerd, Hans und Ingo mit Vornamen. Wie sich herausstellt, liest jeder von ihnen genau eine der beiden Zeitschriften „alpha“ bzw. „Frösi“ regelmäßig. Ferner werden folgende Angaben gemacht:

(1) Der Schüler aus der Klasse 5b liest nicht die Zeitschrift „alpha“.
(2) Hans und außer ihm der Schüler der Klasse 5a lesen die Zeitschrift „alpha“ regelmäßig.
(3) Fred und außer ihm der Schüler der Klasse 6b lesen die Zeitschrift „Frösi“ regelmäßig. Gerd dagegen nicht.
(4) Der Schüler der Klasse 6a, der Schüler der Klasse 5b und außer diesen beiden noch Gerd wurden von Ingo zum Geburtstag eingeladen.

Gesucht ist eine Zuordnung, durch die beschrieben wird, welcher der vier Schüler welche Klasse besucht und welche der beiden Zeitschriften er regelmäßig liest.
Untersuche, ob es eine solche Zuordnung gibt, die alle Angaben (1), (2), (3), (4) erfüllt, und ob sie durch diese Angaben eindeutig festgelegt ist!
Wenn dies der Fall ist, dann gib diese Zuordnung an!

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Angenommen, es gibt eine solche Zuordnung, für die die gemachten Angaben zutreffen.

Dann ist Gerd wegen (3) und (4) weder der Schüler der Klasse 6b noch der Schüler der Klasse 6a noch der der Klasse 5b. Also besucht Gerd die Klasse 5a und liest wegen (2) [oder wegen (3)] die Zeitschrift „alpha“ regelmäßig.

Folglich gehört Ingo nicht der Klasse 5a an, nach (4) auch keiner der Klassen 6a oder 5b. Somit besucht Ingo die Klasse 6b und liest wegen (3) die Zeitschrift „Frösi“ regelmäßig.

Hans gehört demnach weder der Klasse 5a noch der Klasse 6b an. Da er nach (2) regelmäßig die Zeitschrift „alpha“ liest, ist er wegen (1) auch nicht der Schüler der Klasse 5b. Also besucht Hans die Klasse 6a. Für Fred verbleibt somit nur noch die Klasse 5b. Hiernach und nach (1) liest er regelmäßig die Zeitschrift „Frösi“.

Damit ist gezeigt: Wenn es eine Zuordnung gibt, für die die gemachten Angaben zutreffen, dann kann es nur die folgende Zuordnung sein:

| Vorname | Klasse | Zeitschrift |
|---|---|---|
| Gerd | 5a | „alpha“ |
| Fred | 5b | „Frösi“ |
| Hans | 6a | „alpha“ |
| Ingo | 6b | „Frösi“ |

Man überzeugt sich leicht, dass für diese Zuordnung die gemachten Angaben tatsächlich zutreffen. Damit ist gezeigt, dass genau diese Zuordnung mit den gemachten Angaben übereinstimmt.

**Aufgabe 230623:**
Die vier Schüler Erdbach, Freimuth, Giebler und Hausmann haben die Vornamen Alfred, Bernd, Christian und Detlef (möglicherweise nicht in dieser Reihenfolge).
Sie trafen sich auf Siegfried Zanders Geburtstagsfeier. Folgenden ist bekannt:

(1) Als ersten Gast konnte Siegfried seinen Mitschüler Hausmann begrüßen, als zweiten Christian und danach Erdbach. Zuletzt kam Bernd.
(2) Jeder dieser vier Gäste brachte für das Geburtstagskind genau ein Geschenk mit: Hausmann ein Würfelspiel, Alfred einen Kugelschreiber, Bernd einen Strauß Rosen und Giebler ein Buch.

Zeige, dass sich aus diesen Angaben für die vier Geburtstagsgäste eindeutig ermitteln lässt, wie ihre zusammengehörenden Vor- und Familiennamen lauten!
Gib diese zusammengehörenden Namen an!

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Wegen (1) heißt Hausmann weder Christian noch Bernd. Wegen (2) heißt er auch nicht Alfred. Daraus folgt: (3) Hausmann hat den Vornamen Detlef.
Wegen (2) heißt Giebler weder Alfred noch Bernd und wegen (3) auch nicht Detlef. Daraus folgt: (4) Giebler hat den Vornamen Christian.
Wegen (1) heißt Erdbach weder Christian noch Bernd und wegen (3) auch nicht Detlef. Daraus folgt: (5) Erdbach hat den Vornamen Alfred.
Wegen (3), (4) und (5) bleibt für Freimuth nur der Vorname Bernd. Die zusammengehörenden Namen sind mithin: Alfred Erdbach, Bernd Freimuth, Christian Giebler und Detlef Hausmann.

**Aufgabe 240621:**
Drei Geschwisterpaare, jeweils ein Mädchen und ein Junge, sitzen bei der Geburtstagsfeier von Jörg, dem einen der drei Jungen, im Kreis um einen Tisch. Es ist folgendes bekannt:

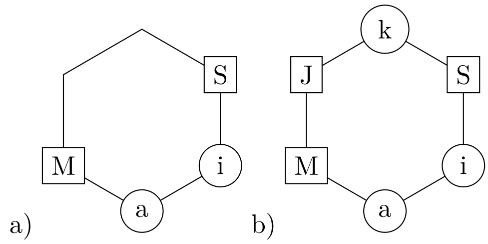
(1) Keines der sechs Kinder hat seinen Bruder oder seine Schwester als Tischnachbar.
(2) Steffen sitzt dem ältesten der drei Jungen gegenüber.
(3) Rechts von Agnes sitzt Ines, links von Agnes sitzt Michael.
(4) Kerstin ist nicht Steffens Schwester.

Beweise, dass man aus diesen Angaben sowohl die zusammengehörenden Geschwisterpaare als auch die Sitzordnung eindeutig ermitteln kann, und gib beides an!

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Wegen (3) sitzen Michael (M), Agnes (a) und Ines (i) in der Reihenfolge nebeneinander, die in der Abbildung a) gezeigt wird. Wegen (2) sitzt Steffen (S) einem Jungen, also weder Ines noch Agnes gegenüber; damit verbleibt für ihn nach der Abbildung a nur der Platz rechts neben Ines.
Für Jörg (J) und Kerstin (k) sind nur die in der Abbildung a) noch freigelassenen Plätze möglich. Da sie einander benachbart sind, ist Kerstin nach (1) nicht Jörgs Schwester. Da sie nach (4) auch nichts Steffens Schwester ist, muss Kerstin Michaels Schwester (*) sein und sitzt wegen (1) nicht neben ihm.

Wie Abbildung a) zeigt, ergibt sich damit die Sitzordnung in Abbildung b).
Weiter folgt aus Abbildung a) oder b): Ines ist wegen (1) nicht Steffens Schwester und nach (*) nicht Michaels Schwester. Also ist Ines Jörgs Schwester, (**)
und als drittes zusammengehörendes Geschwisterpaar verbleiben Agnes und Steffen. (***)

Damit ist bewiesen, dass man die zusammengehörenden Geschwisterpaare und die Sitzordnung eindeutig aus den Angaben ermitteln kann. Sie lauten wie in (*), (**), (***) bzw. Abbildung b) angegeben.




**Aufgabe 250624:**
Anke, Bernd und Claudia wollen 21 Limonadeflaschen, von denen 7 voll, 7 halbvoll und 7 leer sind, untereinander verteilen. Dabei soll jedes Kind die gleiche Anzahl Flaschen und auch gleich viel Limonade erhalten, und es soll nichts umgegossen werden. Ferner soll Anke nicht weniger volle Flaschen als Bernd bekommen, und Bernd soll nicht weniger volle Flaschen als Claudia bekommen.

a) Gib zwei Verteilungen an, die diese Bedingungen erfüllen!
b) Weise nach, dass es keine weiteren Verteilungen geben kann, die diese Bedingungen erfüllen!

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
a) Die in den folgenden Tabellen genannten Verteilungen erfüllen alle gestellten Bedingungen; denn bei diesen Verteilungen bekommt jedes der drei Kinder genau 7 Flaschen und soviel Limonade, wie in $3\frac{1}{2}$ Flaschen passt.
Außerdem ist ersichtlich, dass jeweils 7 volle, 7 halbvolle und 7 leere Flaschen verteilt werden und dass für die Anzahlen der an Anke, Bernd und Claudia verteilten vollen Flaschen $3 \geq 3 \geq 1$ bzw. $3 \geq 2 \geq 2$ gilt.

| | voll | halbvoll | leer |
|---|---|---|---|
| A | 3 | 1 | 3 |
| B | 3 | 1 | 3 |
| C | 1 | 5 | 1 |

| | voll | halbvoll | leer |
|---|---|---|---|
| A | 3 | 1 | 3 |
| B | 2 | 3 | 2 |
| C | 2 | 3 | 2 |

b) Für jede Verteilung, die die geforderten Bedingungen erfüllt, gilt: Da 21 Flaschen und der Inhalt von $7 + \frac{7}{2} = \frac{21}{2}$ Flaschen Limonade zu verteilen sind, bekommt jedes Kind 7 Flaschen und den Inhalt von

$3\frac{1}{2}$ Flaschen Limonade. Daher folgt weiter: Anke könnte höchstens 3 volle Flaschen erhalten, da sie sonst mehr Limonade bekommen würde, als in $3\frac{1}{2}$ Flaschen passt. Anke kann aber auch nicht weniger als 3 volle Flaschen erhalten, weil dann eines der beiden anderen Kinder von den verbleibenden mindestens 5 vollen Flaschen mehr Flaschen bekommen müsste als Anke. Anke erhält genau 3 volle Flaschen.

Als einzige Möglichkeiten, die restlichen 4 vollen Flaschen so zu verteilen, dass von ihnen Anke nicht weniger als Bernd und Bernd nicht weniger als Claudia bekommt, ergeben sich die Verteilungen gemäß $4 = 3 + 1$ und $4 = 2 + 2$ (Spalte „voll“ der obigen Tabellen).
Aus den Anzahlen der vollen und halbvollen Flaschen, die jedes Kind erhält, ergibt sich schließlich eindeutig, wie viel leere Flaschen es bekommen muss, um insgesamt 7 Flaschen zu erhalten (Spalte „leer“).
Damit ist gezeigt, dass nur die beiden in a) angegebenen Verteilungen alle Bedingungen der Aufgabe erfüllen.

**Aufgabe 260622:**
Die Mädchen Britta, Petra und Anja wünschen sich einen Ball, eine Puppe und ein Album für Briefmarken.
Dabei wünscht sich jedes der Mädchen genau einen der genannten Gegenstände, und zwar jedes Mädchen einen anderen. Marie soll feststellen, wer von den Mädchen sich welchen Gegenstand wünscht. Auf ihre Frage erhält sie folgende Antworten:

(1) Britta wünscht sich den Ball.
(2) Petra wünscht sich den Ball nicht.
(3) Anja wünscht sich das Album nicht.

Von diesen drei Antworten ist genau eine wahr, die anderen beiden sind falsch.
Wenn man das weiß, kann man für jedes der drei Mädchen eindeutig feststellen, welchen Gegenstand es sich wünscht.
Erkläre, wie sich diese Feststellungen gewinnen lassen und gib die Feststellungen an!

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Wir unterscheiden drei Fälle, je nachdem welche von den drei Antworten wahr ist:

1. Angenommen, die Antwort (1) wäre wahr, die Antworten (2) und (3) wären also falsch. Dieser Fall kann nicht eintreten, weil sich dann nämlich Britta und Petra beide den Ball wünschen würden.
2. Angenommen, die Antwort (2) wäre wahr und die Antworten (1) und (3) wären falsch. Dieser Fall kann nicht eintraten; denn dann würden sich weder Petra noch Britta den Ball wünschen, aber auch Anja nicht (da sie sich das Album wünschen würde.)

Also muss der folgende Fall zutreffen:
3. Die Antwort (3) ist wahr und die Antworten (1) und (2) sind falsch. Dass (2) falsch ist, besagt: Petra wünscht sich den Ball (in Übereinstimmung damit, dass auch (1) falsch ist). Anja wünscht sich also nicht den Ball; und dass (3) wahr ist, bedeutet folglich nunmehr eindeutig: Anja wünscht sich die Puppe, Britta wünscht sich das Album.

**Aufgabe 260624:**
Der Schüler Frank Schludrig meint, über seine Klasse folgendes herausgefunden zu haben:

In der Klasse sind genau 28 Schüler, davon sind genau 16 Jungen. An Arbeitsgemeinschaften nehmen genau 20 Schüler der Klasse teil, davon sind genau 8 Jungen. An der Kreisolympiade Junger Mathematiker beteiligten sich genau 4 Schüler der Klasse, davon waren genau 2 Jungen. Von diesen

Olympiadeteilnehmern sind genau 1 Junge und genau 1 Mädchen auch Mitglied einer Arbeitsgemeinschaft.

Der Schüler Rolf Schlauberger hört sich diese Angaben an und behauptet nach einigem Überlegen, dass Frank Schludrig ein Irrtum unterlaufen sein muss.
Weise nach, dass die Angaben von Frank Schludrig nicht stimmen können!

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Aufgrund der Gesamtzahl der Mitglieder von Arbeitsgemeinschaften (20) und der Zahl der Jungen unter ihnen (8) und wegen 20 - 8 = 12 müsste es in der Klasse 12 Mädchen geben, die in Arbeitsgemeinschaften tätig sind.

Aufgrund der Gesamtzahl der Olympiadeteilnehmer (4) und der Zahl der Jungen unter ihnen (2) und wegen 4 - 2 = 2 müsste es in der Klasse genau 2 Mädchen geben, die an der Olympiade teilgenommen haben. Es wird nun ausgesagt, dass genau eines dieser Mädchen auch Mitglied einer Arbeitsgemeinschaft ist.

Also folgt aus den Angaben, dass es außer 12 Mädchen, die Mitglieder von Arbeitsgemeinschaften sind, noch ein weiteres Mädchen in der Klasse geben müsste. Da somit die Zahl der Mädchen in der Klasse mindestens 13 sein würde, die Zahl der Jungen mit 16 angegeben wird, 13 + 16 = 29 ist, die Klasse aber nur 28 Schüler umfassen soll, können die Angaben von Frank Schludrig nicht stimmen.

**Aufgabe 270621:**
Über einen 100 m-Lauf, den die drei Schüler Jens, Michael und Peter austrugen, wurden folgende Vorhersagen gemacht:

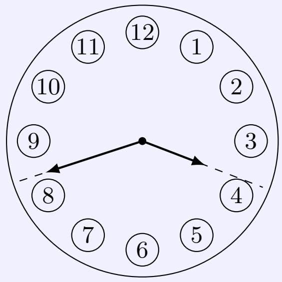
Frank sagte: „Jens oder Peter wird gewinnen."
Horst sagte: „Wenn Jens nicht gewinnt, dann gewinnt Michael."
Norbert sagte: „Wenn Michael gewinnt, dann wird Jens Zweiter."
Stefan sagte: „Michael wird schlechter abschneiden als Jens und Peter."

(a) Nach dem Lauf wurde festgestellt: Alle vier Voraussagen sind wahre Aussagen.
(b) Nach dem Lauf wurde festgestellt: Als einziger hatte Horst eine wahre Aussage gemacht.
Gib in beiden Fällen (a), (b) an, wer Erster, Zweiter bzw. Dritter wurde! In beiden Fällen (a), (b) ist noch bekannt, dass Jens, Peter und Michael alle drei verschiedene Zeiten liefen.
Erkläre, wie du deine Angaben gefunden hast!

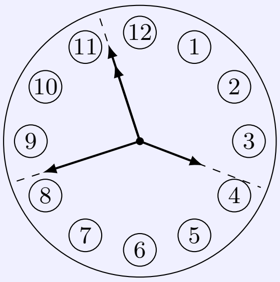
**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
(a) Nach Stefans Aussage wurde Michael Dritter. Jens muss gewonnen haben; denn andernfalls ergäbe sich aus Horsts Vorhersage die falsche Aussage, dass Michael gewonnen hätte. Also wurde Jens Erster und Peter Zweiter.

(b) Da Franks Aussage falsch war, hat Michael gewonnen. Deshalb, und weil Norberts Aussage falsch war, kann Jens nicht Zweiter geworden sein; folglich wurde er Dritter und Peter Zweiter.

**Aufgabe 270623:**
(a) Der Stundenzeiger einer Uhr (siehe Abbildung) zeigt um 3.42 Uhr in die Lücke zwischen den Zahlen 3 und 4, der Minutenzeiger in die Lücke zwischen 8 und 9.
Dadurch wird das Zifferblatt so aufgeteilt, dass in einem Teil die Summe $4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 30$ und im anderen Teil die Summe $9 + 10 + 11 + 12 + 1 + 2 + 3 = 48$ steht.




Gesucht werden Uhrzeiten folgender Art: Jeder Zeiger zeigt in eine der zwölf Lücken zwischen benachbarten Zahlen und dadurch wird das Zifferblatt in zwei Teile aufgeteilt, in denen die gleiche Summe steht.
Nenne zwei solche Uhrzeiten zwischen 0.00 Uhr und 12.00 Uhr, die sich voneinander um mehr als 5 Minuten unterscheiden!




(b) Bei einer anderen Uhr (siehe Abbildung) zeigt 57 Sekunden nach 3.42 Uhr der Sekundenzeiger in die Lücke zwischen den Zahlen 11 und 12.
Hierdurch und durch die anderen Zeiger wird das Zifferblatt in Teile mit den Summen $4+5+6+7+8 = 30$, $9+10+11 = 20$, $12+1+2+3 = 18$ aufgeteilt.
Warum gibt es keine Uhrzeit, bei der (jeder Zeiger in eine der zwölf Lücken zeigt und) das Zifferblatt in drei Teile aufgeteilt wird, in denen die gleiche Summe steht?

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
(a) Anzugeben ist eine Uhrzeit zwischen 3.45 Uhr und 3.50 Uhr sowie eine Uhrzeit zwischen 9.15 Uhr und 9.20 Uhr.
Zur Überprüfung beider Angaben ist die Gleichheit der Summen $4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 39$, $10 + 11 + 12 + 1 + 2 + 3 = 39$ zu bestätigen.

(b) Die Summe aller zwölf Zahlen des Zifferblattes beträgt 78. Gäbe es eine Uhrzeit der genannten Art, so müsste wegen $78 : 3 = 26$ in jedem der Teile die Summe 26 stehen. Dass dies nicht möglich ist, kann z. B. folgendermaßen gezeigt werden:

Die Zahl 10 kann nicht als erster Summand auftreten, da $10 + 11 < 26$ und bereits $10 + 11 + 12 > 26$ ist, also alle weiteren Summen mit 10 als erstem Summanden erst recht größer als 26 sind.
Die Zahl 10 kann nicht als zweiter Summand auftreten, da $9 + 10 < 26$ und bereits $9 + 10 + 11 > 26$ ist, also alle weiteren Summen mit 10 als zweitem Summanden erst recht größer als 26 sind.
Die Zahl 10 kann aber auch nicht als dritter oder weiterer Summand auftreten, da bereits $8+9+10 > 26$ ist, also alle anderen Summen, in denen 10 als dritter oder weiterer Summand auftritt, erst recht größer als 26 sind.

**Aufgabe 270624:**
In einer Werkhalle stehen vier Maschinen zur Herstellung von Werkstücken. Jeweils in 24 Stunden werden

| | |
|---|---|
| auf Maschine A genau 2 Werkstücke, | auf Maschine B genau 3 Werkstücke, |
| auf Maschine C genau 8 Werkstücke, | auf Maschine D genau 12 Werkstücke |

hergestellt. Für jede der Maschinen gilt, dass zum Herstellen der Werkstücke auf dieser Maschine stets die gleiche Zeit gebraucht wird. Dabei ist die Zeiteinteilung so angelegt, dass jeweils die Herstellung des nächsten Werkstückes genau dann beginnt, wenn das vorhergehende fertig ist.

An einem Tag beginnen alle vier Maschinen gleichzeitig um 0.00 Uhr mit der Herstellung eines neuen Werkstücks. Wie oft kommt es an diesem Tag bis einschließlich 24.00 Uhr insgesamt vor, dass
(a) auf allen vier Maschinen,
(b) auf genau drei der vier Maschinen,
(c) auf genau zwei der vier Maschinen
zum gleichen Zeitpunkt ein Werkstück fertig wird?

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Die Zeitpunkte, zu denen Werkstücke fertig werden, sind die folgenden Uhrzeiten:

| Maschine | Uhrzeiten | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | | | | | | | | 12 | | | | | | | | 24 |
| B | | | | | 8 | | | | | | 16 | | | | | 24 |
| C | | 3 | | 6 | | 9 | | 12 | | 15 | | 18 | | 21 | | 24 |
| D | 2 | | 4 | 6 | 8 | | 10 | 12 | 14 | | 16 | 18 | 20 | | 22 | 24 |

Daraus ist ersichtlich: Es kommt insgesamt
(a) genau einmal (nämlich um 24.00 Uhr)
(b) genau einmal (nämlich um 12.00 Uhr für A, C, D)
(c) genau viermal (nämlich um 6.00 Uhr und 18.00 Uhr für C, D sowie um 8.00 und 16.00 Uhr für B, D) vor, dass auf (a) allen, (b) genau drei bzw. (c) genau zwei Maschinen zum gleichen Zeitpunkt ein Werkstück fertig wird.

**Aufgabe 280624:**
Heidi, Manuela, Peggy und Simone starteten beim Schulsportfest, jedes dieser Mädchen in genau einer der Sportarten „Handball“, „Mehrkampf“, „Pop-Gymnastik“, „Schwimmen“. Ferner ist bekannt:

(1) Jedes der vier Mädchen errang genau eine Medaille; zwei Mädchen Gold, die beiden anderen Silber.
(2) Für Mädchen mit gleicher Medaille gilt stets: Bei jedem dieser Mädchen beginnt der Name mit demselben Buchstaben wie die Sportart des anderen Mädchens.
(3) Heidi erhielt eine Medaille geringeren Wertes als Manuela.
(4) Simone erkämpfte nicht die gleiche Medaille wie die Handballerin.

Zeige, dass aus diesen Angaben eindeutig gefunden werden kann,
a) in welcher Sportart jedes der Mädchen gestartet ist,
b) welche Medaille jedes der Mädchen errungen hat!
Überprüfe auch, ob mit den so gefundenen Sportarten und Medaillen alle Angaben (1) bis (4) erfüllt werden!

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Aus (1) und (3) folgt: (5) Heidi erhielt Silber, (6) Manuela erhielt Gold. Wegen (5) folgt aus (2): (7) Die Handballerin erhielt Silber.

Aus (4) und (7) folgt: (8) Simone erhielt Gold. In (5), (6) und (8) sind bereits drei Medaillenträgerinnen ermittelt; damit folgt aus (1): (9) Peggy erhielt Silber.

Nach (5), (9) ist (2) auf Heidi und Peggy anzuwenden und ergibt: (10) Heidi startete in Pop-Gymnastik, (11) Peggy ist die Handballerin.

Nach (6), (8) ist (2) auf Manuela und Simone anzuwenden und ergibt: (12) Manuela ist die Schwimmerin, (13) Simone startete im Mehrkampf.

In (10), (11), (12), (13) ist damit für jedes der Mädchen die Sportart und in (5), (6), (8), (9) auch die Medaillenart eindeutig gefunden. Die Überprüfung ergibt: (1) ist wegen (5), (6). (8), (9) erfüllt; (2) ist hiernach und wegen (10), (11) für die Mädchen mit Silbermedaillen sowie wegen (12), (13) für die Mädchen mit Goldmedaillen erfüllt; (3) ist wegen (5), (6) erfüllt; (4) ist wegen (8). (11) und (9) erfüllt.

**Aufgabe 290621:**
Jana will an der Wandzeitung über Christians, Alexanders und Martins Erfolge in der außerunterrichtlichen Tätigkeit berichten. Sie befragt die drei Schüler und notiert sich folgendes:

(1) Alle drei Schüler nahmen an der Mathematikolympiade teil. Einer dieser Schüler errang einen ersten Preis, ein weiterer von ihnen einen zweiten Preis und der restliche Schüler einen dritten Preis.
(2) Martin und der Gewinner des zweiten Preises betreiben gern Leichtathletik. Beide erkämpften beim letzten Sportfest je eine Silbermedaille.
(3) Im Wettbewerb der Jungen Rezitatoren schnitt der Gewinner des zweiten Preises bei der Mathematikolympiade besser als Christian ab.
(4) Der Gewinner des ersten Preises bei der Mathematikolympiade spielt in seiner Freizeit gern Schach; sein häufigster Gegner dabei ist Martin.

Als Jana ihre Notizen durchliest, stellt sie fest, dass sie gar nicht aufgeschrieben hat, welcher der drei Schüler welchen der drei Preise bei der Mathematikolympiade errang.
Stelle fest, ob sich das trotzdem aus den Notizen von Jana eindeutig ermitteln lässt!
Wenn dies der Fall ist, so gib die Verteilung der drei Preise an!

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Aus den Notizen folgt:
Nach (2) sind Martin und der Gewinner des zweiten Preises zwei Schüler, d. h., Martin gewann nicht den zweiten Preis. Nach (3) gewann auch Christian nicht den zweiten Preis. Also folgt aus (1): (5) Den zweiten Preis gewann Alexander.

Nach (4) ist Martin nicht der Gewinner des ersten Preises. Hieraus und aus (5), (1) folgt: (6) Den ersten Preis gewann Christian, (7) den dritten Preis gewann Martin.

Damit ist gezeigt, dass sich diese Verteilung (5), (6), (7) eindeutig aus Janas Notizen ermitteln lässt.

## IV.III Altersaufgaben

### I Runde 1

**Aufgabe 020613:**
Paul erzählt: „Mein Bruder Emil ist 3 Jahre älter als ich, meine Schwester Lotte ist 4 Jahre älter als Emil, und mein Vater ist dreimal so alt wie Lotte. Meine Mutter ist 5 Jahre jünger als mein Vater und ist gestern 40 Jahre alt geworden.“
Wie alt ist Paul? Die Antwort ist zu begründen!

**Lösung von Steffen Polster:**
Wenn Pauls Mutter 40 Jahre ist, ist sein Vater folglich 45 Jahre. Lotte ist $\frac{1}{3} \cdot 45 = 15$ und Emil also 11. Paul ist damit 8 Jahre alt.

**Aufgabe 310614:**
An einem Ausflug nahmen insgesamt 20 Personen teil. Man bemerkte:

(1) Genau 5 der Teilnehmer waren 30 Jahre alt oder jünger.
(2) Von den Teilnehmern, die älter als 30 Jahre waren, kauften sich genau 10 bei der ersten Rast etwas zu trinken, genau 12 bei der zweiten Rast. Kein Teilnehmer verzichtete beide Male auf diesen Kauf.
(3) Genau 6 der Teilnehmer waren 40 Jahre alt oder älter, darunter genau 2, die bei der ersten Rast nichts zu trinken kauften, und genau 2, die bei der zweiten Rast nichts zu trinken kauften.

Wie viele der Teilnehmer, die älter als 30, aber jünger als 40 Jahre waren, kauften sich sowohl bei der ersten als auch bei der zweiten Rast etwas zu trinken?

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
I. Nach (1) waren genau 20 - 5 = 15 Teilnehmer älter als 30 Jahre.
Von ihnen kauften nach (2) genau 15 - 10 = 5 bei der ersten Rast und genau 15 - 12 = 3 bei der zweiten Rast nichts zu trinken. Da niemand auf beide Käufe verzichtete, waren diese 5 + 3 = 8 Teilnehmer bereits alle, die nicht zweimal zu trinken kauften. Von den 15 Teilnehmern über 30 Jahre kauften also 15-8 = 7 zweimal zu trinken.

II. Nach (3) kauften von den 6 Teilnehmern, die 40 Jahre oder älter waren, genau 2 bei der ersten Rast und genau 2 bei der zweiten Rast nichts zu trinken, Daraus folgt entsprechend, dass 6 - (2 + 2) = 2 dieser Teilnehmer zweimal zu trinken kauften.
Aus I. und II. folgt: Von den Teilnehmern, die älter als 30, aber jünger als 40 Jahre waren, kauften genau 7 - 2 = 5 zweimal zu trinken.

**Aufgabe 320612:**
Von drei Mädchen aus unterschiedlichen Familien sei folgendes bekannt:

(1) Sie heißen Sabine, Christiane und Miriam.
(2) Miriam hätte lieber blondes Haar wie eines der drei Mädchen.
(3) Jedes der drei Mädchen hat eine andere Haarfarbe.
(4) Das rothaarige Mädchen hat dieselbe Haarfarbe wie ihr Bruder.
(5) Christiane hätte lieber solches schwarzes Haar wie die Schwester von Miriam.
(6) Das schwarzhaarige Mädchen hat keine Geschwister und ist mit seiner Haarfarbe zufrieden.

Welche Haarfarbe hat jedes der drei Mädchen?

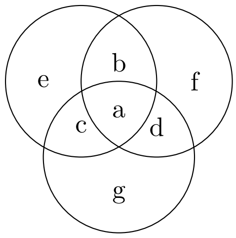
**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Das schwarzhaarige Mädchen kann wegen (5) und (6) nicht Miriam, wegen (5) aber auch nicht Christiane sein, somit ist es Sabine.
Miriam kann wegen (2) nicht blond sein, ist also rothaarig.
Damit kann das blonde Mädchen nur Christiane heißen.
In der Tat erfüllt diese Zuordnung alle sechs Forderungen.

**Aufgabe 340613:**
Nach einem Wandertag wurden die Kinder gefragt, welche Erfrischungen sie sich gekauft hatten. Es hatte Cola, Hamburger und Popcorn gegeben. Die Befragung ergab das folgende Ergebnis:

Jeder der Teilnehmer hatte wenigstens eine der drei Waren gekauft.
Von ihnen genau 22 mindestens Cola, genau 14 mindestens einen Hamburger und genau 13 wenigstens Popcorn. Mindestens Cola und Hamburger kauften genau 10 Teilnehmer, mindestens Cola und Popcorn genau 4 und genau 5 wenigstens Hamburger und Popcorn. Alle drei Waren gleichzeitig wurden nur von 2 Teilnehmern gekauft.

Weise nach, dass durch diese Angaben die Anzahl der Teilnehmer eindeutig bestimmt ist!
Berechne diese Anzahl!

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**




Für die Anzahl $t$ aller Teilnehmer und für die in der Abbildung dargestellten Anzahlen gilt nach den Angaben
$a+b+c+d+e+f+g=t$, (1)
$a+b+c+e=22$, (2)
$a+b+d+f=4$, (3)
$a+c+d+g=13$, (4)
$a+b=10$, (5) $a+c=4$, (6)
$a+d=5$, (7) $a=2$. (8)

Aus (5) und (8) folgt $b=8$, aus (6) und (8) folgt $c=2$, aus (7) und (8) folgt $d=3$.
Aus (2) und (8), (9), (10) folgt $e=10$, aus (3) und (8), (9), (ll) folgt $f=1$, aus (4) und (8), (10), (ll) folgt $g=6$.
Damit folgt aus (1) und (8) - (14), dass die Anzahl $t$ eindeutig bestimmt ist; sie beträgt $t=32$.

## II Runden 2 & 3

**Aufgabe 020624:**
Brigitte liebt lustige Knobelaufgaben. Sie erzählt:
„Mein Vater, meine Mutter und ich sind zusammen 88 Jahre alt. Meine Mutter ist genau dreimal so alt wie ich und vier Jahre jünger als mein Vater.“

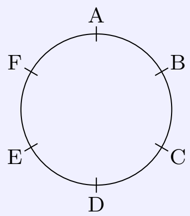
Wie alt ist Brigitte? Wie alt sind ihre Eltern? Beschreibe, wie man die Lösung finden kann!

**Lösung von Steffen Polster:**
Brigitte sei $a$ Jahre alt. Dann ist ihre Mutter $3a$ und ihr Vater $3a+4$ Jahre alt und somit

$$a+3a+(3a+4)=7a+4=88 \qquad \Rightarrow \qquad 7a=84$$

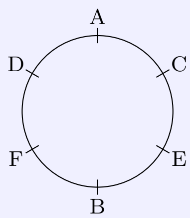
Die Lösung ist $a=12$, womit Brigitte 12 Jahre alt ist, ihre Mutter 36 Jahre und ihr Vater 40 Jahre.

**Aufgabe 300622:**




a)

Sechs Personen A, B, C, D, E, F wollen ihre Sitzordnung (Abbildung a) so ändern, dass in der neuen Sitzordnung jede Person feststellen kann:
Unter meinen beiden Nachbarn befindet sich jetzt keiner der beiden, die ich vorher (in Abbildung a) als Nachbarn hatte.




b)

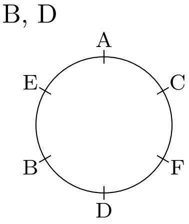
a) Abbildung b zeigt eine solche neue Sitzordnung. Fülle zur Überprüfung, dass tatsächlich eine Sitzordnung der geforderten Art vorliegt, die folgende Tabelle aus!
b) Gib alle weiteren Möglichkeiten in einer neuen Sitzordnung der geforderten Art an!
Dabei sollen jeweils außer einer schon angegebenen Möglichkeit diejenigen nicht mehr angegeben werden, die aus ihr durch Drehung oder Spiegelung zu erhalten sind. Eine Begründung wird nicht verlangt.

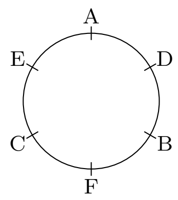
| Person | Nachbarn in Abb. a | Nachbarn in Abb. b |
|---|---|---|
| A | | |
| B | | |
| C | | |
| D | | |
| E | | |
| F | | |

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**

| Person | Nachbarn in Abb. a | Nachbarn in Abb. b |
|---|---|---|
| A | F, B | D, C |
| B | A, C | E, F |
| C | B, C | A, E |
| D | C, E | F, A |
| E | C, F | C, B |
| F | E, A | B, D |

b) Alle weiteren Möglichkeiten (bis auf Drehung und Spiegelung) zeigt Abbildung b.




**Aufgabe 310621:**
a) Eine sechsstellige Zahl soll mit den Ziffern 1, 1, 2, 2, 3, 3 geschrieben werden. Die Reihenfolge dieser sechs Ziffern soll so gewählt werden, dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

(1) Zwischen den beiden Ziffern 1 soll genau eine andere Ziffer stehen.
(2) Zwischen den beiden Ziffern 2 sollen genau zwei andere Ziffern stehen.
(3) Zwischen den beiden Ziffern 3 sollen genau drei andere Ziffern stehen.

b) Eine achtstellige Zahl soll mit den Ziffern 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4 geschrieben werden. Für die Reihenfolge soll außer den Bedingungen (1), (2), (3) auch die folgende Bedingung erfüllt werden:

(4) Zwischen den beiden Ziffern 4 sollen genau vier andere Ziffern stehen.

Gib zu a) und zu b) jeweils alle Zahlen an, die die Bedingungen erfüllen! Eine Begründung wird nicht verlangt.

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Die Bedingungen werden genau durch die Zahlen
a) 231213 und 312132,
b) 23421314 und 41312432
erfüllt.
a) An die zwei Stellen zwischen den Ziffern $2 \cdot \cdot 2$ können weder die beiden Ziffern 1 noch die beiden Ziffern 3 kommen. Also enthält die gesuchte Zahl die Teilfolge 2132 (oder umgekehrt 2312).
Nun kann die Ziffer 1 nur so hinzugefügt werden, dass 12132 (bzw. die umgekehrte Folge) entsteht. Daran anschließend ist nur 312132 (bzw. umgekehrt) möglich.

b) An den vier Stellen zwischen den Ziffern $4 \cdot \cdot \cdot \cdot 4$ muss eine der drei Ziffern 1, 2, 3 zweifach vorkommen.

Die 3 kann dies nicht sein (da zwischen zwei Ziffern 3 dann nicht genug Platz wäre). Wäre es die 2, so müsste sie an die Stellen $42\cdot\cdot 24$ kommen; zwischen den Ziffern 2 könnte dann keine Ziffer 1 stehen, also müssten dort beide Ziffern 3 stehen, was nicht möglich ist. Somit kommt nur $41\cdot 1\cdot 4$ (oder umgekehrt) in Betracht.

Nun würde die Eintragung $41\cdot 134$ aber $41\cdot 134\cdot\cdot 3$ verlangen, obwohl nur noch zwei Ziffern 2 einzutragen wären. Also kann nur mit $41\cdot 124$ und anschließend eindeutig mit $41\cdot 124\cdot 2$ sowie mit 41312432 (bzw. umgekehrt 23421314) fortgesetzt werden.

**Aufgabe 310622:**
Zwischen vier Mannschaften $A$, $B$, $C$, $D$ wurde ein Fußballturnier ausgetragen. Jede Mannschaft spielte genau einmal gegen jede andere.
Für ein gewonnenes Spiel gab es zwei Punkte, für ein unentschiedenes einen Punkt und für ein verlorenes Spiel keinen Punkt. Das Spiel zwischen den Mannschaften $C$ und $D$ endete als einziges unentschieden. Keine zwei Mannschaften erreichten die gleiche Punktzahl. Die Mannschaft $B$ wurde Letzter.

a) Untersuche, ob durch diese Informationen eindeutig bestimmt ist, welchen Platz die Mannschaft $A$ belegte und wie viel Punkte sie erreichte!
Wenn das der Fall ist, gib beides an!
b) Sind die gegebenen Informationen auch ausreichend, um den genauen Endstand (Platzierungen der einzelnen Mannschaften und jeweils erreichte Punkte) des Turniers angeben zu können?
Begründe deine Antwort!

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
a) In eine Tabelle sei zunächst das unentschiedene Spiel $C$ gegen $D$ eingetragen. Aus der Information, dass dies das einzige unentschiedene Spiel war, folgt: Alle anderen Punktzahlen sind 0 oder 2.

Hätte $A$ gegen $C$ und $D$ verloren (Tabelle 1), so müsste wegen der von $C$ und $D$ erreichten unterschiedlichen Punktzahlen $B$ gegen $C$ und $D$ unterschiedlich gespielt haben und hätte damit mindestens so viele Punkte wie $A$ erreicht; dieser Fall scheidet also aus.
Hätte $A$ gegen $B$ und eine der Mannschaften $C$, $D$ verloren (ohne Beschränkung der Allgemeinheit gegen $C$; Tabelle 2), so hätte schon deswegen $B$ mindestens so viele Punkte wie $A$.

Tabelle 1

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| A | - | | 0 | 0 |
| B | | - | | |
| C | 2 | | - | 1 |
| D | 2 | | 1 | - |

Tabelle 2

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| A | - | 0 | 0 | |
| B | 2 | - | | |
| C | 2 | | - | 1 |
| D | | | 1 | - |

Also hat $A$ mindestens zwei Spiele gewonnen.
Hätte $A$ gegen $C$ und $D$ gewonnen (Tabelle 3), so müsste $B$ gegen $C$ und $D$ unterschiedlich gespielt haben und hätte damit mehr Punkte als die von $B$ besiegte dieser beiden Mannschaften. Also folgt:
$A$ hat gegen $B$ und genau eine der Mannschaften $C$, $D$ gewonnen, o. B. d. A. gegen $C$ (Tabelle 4).

Tabelle 3

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| A | - | | 2 | 2 |
| B | | - | | |
| C | 0 | | - | 1 |
| D | 0 | | 1 | - |

Tabelle 4

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| A | - | 2 | 2 | 0 |
| B | 0 | - | | |
| C | 0 | | - | 1 |
| D | 2 | | 1 | - |

Weiter folgt: $B$ hat weniger Punkte als $A$, also höchstens ein Spiel gewonnen. Hätte $B$ gegen $C$ und $D$ dieselben Ergebnisse wie $A$ gegen $C$ und $D$ erreicht, so ergäbe das 2 Punkte für $B$ und 1 Punkt für die Verlierermannschaft. Hätte aber $B$ gegen $C$, $D$ entgegengesetzte Ergebnisse wie $A$, so hätten $C$ und $D$ beide 3 Punkte.
Also kann $B$ überhaupt kein Spiel gewonnen haben, eine der Mannschaften $C$, $D$ hat 3, die andere 5 Punkte. Daher hat sich eindeutig ergeben: $A$ belegte mit 4 Punkten den zweiten Platz.

b) Da beide Tabellen 5 und 6 allen Informationen entsprechen, jedoch voneinander abweichende Endstände angeben, folgt: Die Informationen sind nicht ausreichend, um den genauen Endstand des Turniers angeben zu können.

Tabelle 5

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| A | - | 2 | 0 | 0 |
| B | 0 | - | 0 | 0 |
| C | 0 | 2 | - | 1 |
| D | 2 | 2 | 1 | - |

Tabelle 6

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| A | - | 2 | 2 | 0 |
| B | 0 | 0 | 0 | 0 |
| C | 2 | 2 | - | 1 |
| D | 0 | 2 | 1 | - |

**Aufgabe 330634:**
Sechs Kugeln, und zwar drei blaue und drei gelbe, werden an Annette, Bernd und Christiane verteilt. Jedes dieser drei Kinder bekommt wenigstens eine Kugel, aber höchstens drei Kugeln. Damit die Verteilung nicht so leicht zu erkennen ist, macht Dieter drei falsche Aussagen.

Erika meint dennoch: Wenn man weiß, dass alle diese Aussagen falsch sind, ist die Verteilung der Kugeln (für jedes Kind die Anzahlen der blauen und der gelben Kugeln) dadurch eindeutig bestimmt. Die drei Aussagen von Dieter lauten:

(1) Die blauen Kugeln wurden an weniger als drei Kinder verteilt.
(2) Annette bekam genau zwei Kugeln.
(3) Bernd bekam Kugeln unterschiedlicher Farben.

Hat Erika recht? Begründe Deine Antwort!

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Da Dieters Aussagen falsch sind, gilt:

(1') Jedes Kind bekam eine der blauen Kugeln.
(2') Annette bekam entweder genau eine Kugel oder genau drei Kugeln.
(3') Bernd bekam keine verschiedenfarbigen Kugeln.

Nach (1') und weil nur drei blaue Kugeln vorhanden waren, bekam jedes Kind genau eine der blauen Kugeln.
Nach (3') kann Bernd überhaupt keine weitere Kugel bekommen haben. Hätte Annette genau eine Kugel bekommen, so wären auf Christiane vier Kugeln entfallen. Da sie aber (wie jedes der Kinder) höchstens drei Kugeln bekam, scheidet dieser Fall aus; d. h. nach (2'): Annette muss genau drei Kugeln bekommen haben, also außer der einen blauen Kugel noch genau zwei gelbe Kugeln. Die restliche gelbe Kugel verblieb für Christiane.
Damit sind die Zahlen der Verteilung eindeutig bestimmt:
Annette bekam genau 1 blaue Kugel und genau 2 gelbe Kugeln. Bernd bekam genau 1 blaue Kugel und keine gelbe Kugel. Christiane bekam genau 1 blaue Kugel und genau 1 gelbe Kugel.

# IV.IV Abzählen

## I Runde 1

**Aufgabe V00611:**
Ein Würfel von 12 cm Kantenlänge wird schwarz angestrichen. Dann wird er so zerschnitten, dass 27 kleinere Würfel entstehen.
Dabei entstehen Würfel mit drei schwarzen Seitenflächen, andere mit zwei, andere nur mit einer und Wieder andere, die überhaupt keine schwarzen Seitenflächen haben.

Wie viel Würfel sind in jeder Gruppe vorhanden und welche Länge haben die Kanten der 27 kleinen Würfel?

**Lösung von Steffen Polster:**
Es ergeben sich
a) 8 Würfel mit 3 schwarzen Seitenflächen
b) 12 Würfel mit 2 schwarzen Seitenflächen
c) 6 Würfel mit 1 schwarzen Seitenfläche
d) 1 Würfel ohne schwarze Seitenfläche
d. h. insgesamt 27 Würfel. Deren Kantenlänge ist $\frac{1}{3}$ der ursprünglichen Kantenlänge, d. h. also 4 cm.

**Aufgabe 010615:**
Wie viel verschiedene Arten von Personenzug-Fahrkarten II. Klasse braucht man für eine Strecke mit 15 Stationen, wenn es für jede mögliche Verbindung eine Fahrkarte geben soll?
Wie hast du die Anzahl ermittelt?

**Lösung von Steffen Polster:**
Da es ein Unterschied ist, ob man von einem Ort A nach einem Ort B fährt oder in der entgegengesetzten Richtung von B nach A, braucht man von jeder Station 14 Fahrkarten zu den anderen Stationen, d. h. insgesamt $15 \cdot 14 = 210$ Fahrkarten.

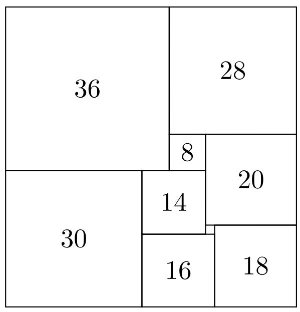
**Aufgabe 030616:**
Gegeben seien neun Quadrate mit den Seitenlängen
$a = 36$ mm, $d = 20$ mm, $g = 14$ mm, $b = 30$ mm, $e = 18$ mm, $h = 8$ mm, $c = 28$ mm, $f = 16$ mm, $i = 2$ mm.
Füge diese Quadrate so zusammen, dass sie ein Rechteck bilden! Fertige dazu eine Zeichnung an!

**Lösung von Steffen Polster:**
Addiert man die Flächeninhalte der 9 Quadrate, so hat das Rechteck einen Flächeninhalt von

$$A = (2^2 + 8^2 + 14^2 + 16^2 + 18^2 + 20^2 + 28^2 + 30^2 + 36^2)\text{ mm}^2 = 4224\text{ mm}^2$$

4224 hat die Primfaktoren 2, 3 und 11, da $4224 = 2^7 \cdot 3 \cdot 11$ gilt. Geht man von natürlichen Zahlen als Längen der Rechteckseiten aus und beachtet dass jede Seite mindestens 36 mm lang sein muss (sonst würde das 1. Quadrat nicht hineinpassen), so könnten die 44 mm und 96 mm bzw. 48 mm und 88 mm bzw. 64 mm und 66 mm lang sein.

Eine Seitenlänge 44 mm ist nicht möglich, da man zwar mit dem 36 mm-Quadrat und dem 8 mm-Quadrat eine Rechteckseite erhält, aber die entstehende Lücke am 8 mm-Quadrat nicht mehr schließen kann. Eine ähnliche Überlegung schließt die Seitenlänge 48 mm aus (30 mm-Quadrat und 18 mm-Quadrat).




Das gesuchte Rechteck hat die Seitenlängen 64 mm und 66 mm.
Setzt man die zwei großen Quadrate (36 mm, 30 mm) an eine Seite, so ergibt sich mit etwas Probieren eine gesuchte Lösung (siehe Abbildung).

**Aufgabe 110613:**
Vier Flächen eines Holzwürfels von 3 cm Kantenlänge werden rot angestrichen, die beiden übrigen bleiben ohne Anstrich. Danach wird der Würfel in genau 27 Würfel von je 1 cm Kantenlänge zersägt.

Ermittle von diesen kleinen Würfeln die Anzahl derjenigen, die

keine rot angestrichene Fläche,
genau eine rot angestrichene Fläche,
genau zwei rot angestrichene Flächen,
genau drei rot angestrichene Flächen besitzen!

Unterscheide dabei die folgenden Fälle:
a) Die nicht angestrichenen Flächen haben keine gemeinsame Kante.
b) Die nicht angestrichenen Flächen haben eine gemeinsame Kante.
Als Lösung genügt die Angabe der Anzahlen ohne Begründung.

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
a) Genau 3 kleine Würfel haben keine rot angestrichene Fläche.
Genau 12 kleine Würfel haben genau eine rot angestrichene Fläche.
Genau 12 kleine Würfel haben genau zwei rot angestrichene Flächen.
Keiner der Würfel hat drei rot angestrichene Flächen.

b) Die Anzahlen lauten in diesem Falle in der oben angegebenen Reihenfolge: 4; 12; 9; 2.

**Aufgabe 120612:**
Ein Betrieb will unter Verwendung des gleichen Uhrwerks Uhren verschiedener Ausführung herstellen. Zu diesem Zwecke stehen sechs verschiedene Gehäuseausführungen, vier verschiedene Ausführungen von Ziffer blättern und drei verschiedene Zeigerausführungen zur Verfügung.
Gib die Anzahl aller verschiedenen Ausführungen von Uhren an, die sich unter diesen Umständen herstellen lassen!

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Jedes der sechs Gehäuse muss mit einem der vier Zifferblätter ausgestattet werden. Das ergibt genau $6 \cdot 4 = 24$ verschiedene Möglichkeiten einer Ausstattung mit Gehäuse und Zifferblatt.
Jede dieser Möglichkeiten muss mit je einer der drei verschiedenen Zeigerausführungen verbunden werden. Das gibt insgesamt genau $24 \cdot 3 = 72$ verschiedene Ausführungsmöglichkeiten.

**Aufgabe 130614:**
Jörg und Claudia streiten sich darüber, ob es unter den natürlichen Zahlen von 0 bis 1000 mehr solche gibt, bei deren dekadischer Darstellung (mindestens) eine 5 vorkommt, als solche, bei denen das nicht der Fall ist.
Stelle fest, wie die richtige Antwort auf diese Frage lautet!

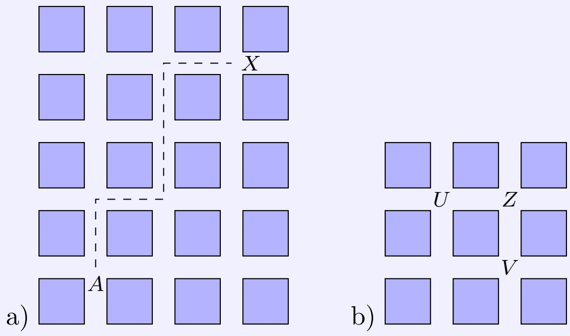
**Lösung von Steffen Polster:**
Für die Zahlen zwischen 0 und 100, die mindestens eine Ziffer 5 enthalten, gilt für einzelne Teilbereiche:

zwischen 0 und 49 gibt es 5 solche Zahlen,
zwischen 50 und 59 gibt es 10 solche Zahlen,
zwischen 60 und 100 gibt es 4 solche Zahlen.

Zwischen 0 und 99 gibt es somit 19 derartige Zahlen. Analog können auch die Bereiche 100 bis 199, 200 bis 299 usw. untersucht werden, mit Ausnahme von 500 bis 599. Es ergeben sich insgesamt $9 \cdot 19 = 171$ solche Zahlen. Zusätzlich gibt es noch die Zahlen von 500 bis 599.
Damit existieren 271 Zahlen zwischen 0 und 1000 gibt, die mindestens eine Ziffer 5 enthalten. $1001 - 271 = 730$ Zahlen haben keine Ziffer 5. Es gibt damit weniger solche Zahlen mit 5 als Zahlen in diesem Bereich

ohne Ziffer 5.

**Aufgabe 220614:**
Das Bild a) zeigt einen Teil eines Stadtplanes. Ein Auto soll auf einem möglichst kurzen Weg von $A$ zu einer anderen Kreuzung, z. B. $X$ fahren. Als Beispiel ist ein solcher Weg eingetragen. Man will - für jede von $A$ verschiedene Kreuzung $Z$ - wissen, wie viel verschiedene möglichst kurze Wege von $A$ nach $Z$ es insgesamt gibt.



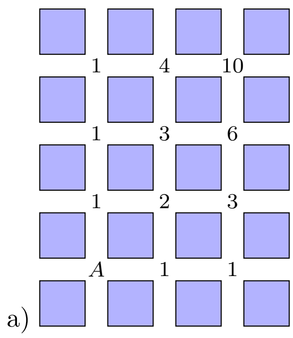

a) Suche zunächst alle diejenigen Kreuzungen, zu denen genau ein möglichst kurzer Weg von $A$ aus hinführt!

b) Das Bild b) bedeute einen Ausschnitt aus Bild a), wobei $Z$ eine der in a) nicht betrachteten Kreuzungen sein soll. Wenn man schon weiß, wie viel möglichst kurze Wege von $A$ nach $U$ es gibt und wie viel möglichst kurze Wege von $A$ nach $V$ es gibt, wie kann man dann die Anzahl aller möglichst kurzen Wege von $A$ nach $Z$ berechnen?

c) Benutze die Überlegungen zu a) und b), um für jede der elf von $A$ verschiedenen Kreuzungen $Z$ die gesuchte Anzahl zu finden!

d) Ermittle die Anzahl der möglichst kurzen Wege von $A$ nach $X$ in Bild a) noch einmal auf andere Weise:
Schreibe jeden dieser Wege durch Angabe der Richtungen seiner fünf Teilstrecken auf! Benutze dabei Abkürzungen, z. B. w für waagerecht, s für senkrecht!

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**




a) In der Abbildung sind die gesuchten Kreuzungen mit 1 bezeichnet.

b) Jeder mögliche kurze Weg von $A$ nach $Z$ führt entweder über $U$ oder über $V$. Von $U$ oder $V$ aus hat man aber jeweils nur genau eine Möglichkeit, auf möglichst kurzem Wege nach $Z$ zu kommen.
Also kann man die Anzahl aller möglichst kurzen Wege von $A$ nach $Z$ berechnen, indem man die entsprechenden Anzahlen für $U$ und $V$ addiert.

c) Ausgehend von den in a) gefundenen Kreuzungen findet man mit Hilfe der Überlegung aus b) der Reihe nach die Anzahlen

$$2 = 1 + 1, \quad 3 = 1 + 2, \quad 4 = 1 + 3, \quad 6 = 3 + 3, \quad 10 = 4 + 6$$

in der Abbildung.

d) Es gibt genau die folgenden möglichst kurzen Wege von $A$ nach $X$:

s s s w w,
s s w s w,
s s w w s,
s w s s w,
s w s w s,
s w w s s,
w s s s w,
w s s w s,
w s w s s,
w w s s s.

Ihre Aufzählung erfolgte hier „lexikographisch“ (d. h. nach der Regel für die Anordnung in einem Lexikon), was eine bessere Übersicht zur Sicherung der Vollständigkeit ergibt.

**Aufgabe 300614:**
Die Seiten eines Buches sind mit den Zahlen von 1 bis 235 durchnummeriert.
a) Wie oft wurde bei der Nummerierung insgesamt die Ziffer 4 verwendet?
b) Wie oft wurde bei der Nummerierung insgesamt die Ziffer 0 verwendet?
c) Wie viele Ziffern sind insgesamt bei dieser Nummerierung zu drucken?

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
a) Die Ziffer 4 wird in der Einerstelle jeweils genau einmal für die Zahlen 1 bis 10, 11 bis 20, ..., 221 bis 230, 231 bis 235 gebraucht, d. h. zusammen 24 mal.

An der Zehnerstelle wird sie jeweils genau einmal für die Zahlen 40, 41, ..., 49, 140, 141, ..., 149 gebraucht und für die anderen der Zahlen von 1 bis 235 nicht, d. h. zusammen 20 mal.

An der Hunderterstelle wird sie für die Zahlen 1 bis 235 nicht gebraucht. Also wurde die Ziffer 4 bei der Nummerierung insgesamt 44 mal verwendet.

b) Die Ziffer 0 wird in der Einerstelle jeweils genau einmal für die Zahlen 1 bis 10, 11 bis 20, ..., 221 bis 230 gebraucht, aber nicht für die Zahlen 231 bis 235, d. h. zusammen 23 mal.

An der Zehnerstelle wird sie jeweils genau einmal für die Zahlen 100, 101, .... 109, 200, 201, ..., 209 gebraucht und für die anderen der Zahlen von 1 bis 235 nicht, d. h. zusammen 20 mal.

An der Hunderterstelle wird sie für die Zahlen von 1 bis 235 nicht gebraucht. Also wird die Ziffer 0 bei der Nummerierung insgesamt 43 mal verwendet.

c) Unter den Zahlen von 1 bis 235 gibt es genau die 9 einstelligen 1, 2, ..., 9, genau die 90 zweistelligen 10, 11, ..., 99 und genau die 136 dreistelligen 100, 101, ..., 235.
Daher sind bei der Nummerierung insgesamt $9 + 90 \cdot 2 + 136 \cdot 3 = 9 + 180 + 408 = 597$ Ziffern zu drucken.

## II Runden 2 & 3

**Aufgabe 030624:**
Wie viel Streichhölzer von je 5 cm Länge werden gebraucht, um eine quadratische Fläche von 1 $m^2$ in gleichgroße Quadrate aufzuteilen, die von je vier Streichhölzern begrenzt werden?
(Dabei dürfen zwei benachbarte Quadrate nur durch ein Streichholz getrennt werden.)

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Man erhält insgesamt 400 Quadrate.
In jeder horizontalen Reihe liegen 20 Streichhölzer, also gibt es zusammen $20 \cdot 21 = 420$ horizontal liegende Streichhölzer.
In jeder vertikalen Reihe liegen ebenfalls 20 Streichhölzer, also gibt es zusammen $20 \cdot 21 = 420$ vertikal liegende Streichhölzer. Daher werden insgesamt 840 Streichhölzer benötigt.

**Aufgabe 120622:**
An 11 Werktätige eines volkseigenen Betriebes wurden für insgesamt 2650 M Prämien in Höhe von 150 M, 250 M, 350 M, 400 M und 500 M vergeben, wobei jede Prämienstufe mindestens einmal vorkam.
Ermittle die Anzahl aller Werktätigen, die mit je 150 M ausgezeichnet wurden!

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Da jede Prämienstufe mindestens einmal vertreten war, gibt es mindestens 1 Werktätigen, der 150 M, einen, der 250 M, einen, der 350 M, einen, der 400 M und einen, der 500 M erhalten hatte.
An diese fünf Werktätigen wurden daher insgesamt 1650 M ausgezahlt.

Für die restlichen 6 Werktätigen stehen mithin noch genau 1000 M zur Verfügung.
Hätte jeder dieser Werktätigen genau 150 M erhalten, dann wären das zusammen 900 M. Also muss mindestens einer der 6 Werktätigen mehr als 150 M Prämie bekommen haben.

Laut Aufgabe hat er dann aber mindestens 250 M Prämie bekommen. Für die restlichen 5 Werktätigen verbleiben nun höchstens 750 M, es konnte also kein weiterer der fünf Werktätigen mehr als 150 M Prämie erhalten haben. Folglich beträgt die gesuchte Anzahl 6.

**Aufgabe 150622:**
Das Wohnschiff „Kuhle Wampe“, das im Berliner Stadtbezirk Köpenick ständig vor Anker liegt, beherbergt FDGB-Urlaubsgäste. Aus einem Prospekt ist ersichtlich, dass es insgesamt für 41 Urlauber Plätze bietet und dass diese Plätze sich in Zweibett- und Dreibettkabinen aufteilen.
Ermittle alle Möglichkeiten für die Aufteilung der Plätze, die sich mit diesen Angaben vereinbaren lassen.

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Die Anzahl dar Dreibett-Kabinen muss mindestens 1 und kann wegen $3 \cdot 14 = 42 > 41$ höchstens 13 betragen.
Außerdem muss ihre Anzahl ungerade sein, da sonst (bei gerader Anzahl von Drei-Bett-Kabinen) eine gerade Zahl von Plätzen dadurch belegt waren und als Differenz zur ungeraden Zahl 41 mithin eine ungerade Zahl von Betten auftreten würde, die sich nicht ausschließlich auf Zweibett-Kabinen verteilen lässt.

Für jede der ungeraden Zahlen von Dreibett-Kabinen von 1 bis 13 gibt es nun jeweils genau eine (zugehörige) Anzahl von Zweibett-Kabinen, wie nachstehende Tabelle ausweist:

| Anzahl der Dreibett-K. | Anzahl der damit vorh. Betten | Anzahl der darüber hinaus vorh. Betten | Anzahl der Zweibett-K. | Gesamtplätze |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 38 | 19 | 41 |
| 3 | 9 | 32 | 16 | 41 |
| 5 | 15 | 26 | 13 | 41 |
| 7 | 21 | 20 | 10 | 41 |
| 9 | 27 | 14 | 7 | 41 |
| 11 | 33 | 8 | 4 | 41 |
| 13 | 39 | 2 | 1 | 41 |

**Aufgabe 190624:**
Ein automatischer Nummernstempel für ein Serienprodukt druckt in jeder Sekunde genau eine natürliche Zahl. Er beginnt mit der Zahl 0 und setzt dann das Drucken der Reihe nach mit den aufeinanderfolgenden Zahlen 1, 2, 3, $\cdots$ fort.
Ermittle die Anzahl aller Ziffern 1, die der Stempel in der ersten Viertelstunde insgesamt zu drucken hat!

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Jede Minute hat 60 Sekunden, wegen $15 \cdot 60 = 900$ hat der Stempel also genau 900 Zahlen zu drucken, d. h. die natürlichen Zahlen von 0 bis 899.

Beim Drucken der Zahlen von 0 bis 9 kommt die Ziffer 1 genau 1 mal vor.
Setzt man vor jede dieser Zahlen (also an die Zehnerstelle) jede der neun Ziffern 1, $\cdots$, 9, so erhält man alle natürlichen Zahlen von 10 bis 99, jede genau einmal. Somit kommt in diesen Zahlen die Ziffer 1 an der Einerstelle insgesamt genau 9 mal vor. Ferner gibt es unter diesen Zahlen genau zehn mit der Zehnerziffer 1 (nämlich die Zahlen 10, $\cdots$, 19). Somit kommt in den Zahlen von 10 bis 99 die Ziffer 1 an der Zehnerstelle insgesamt genau 10 mal vor.

Setzt man vor jede der Zahlen von 0 bis 99 (nachdem die Zahlen von 0 bis 9 durch Vorschalten einer Zehnerziffer 0 zweistellig geschrieben wurden) an die Hunderterstelle jede der acht Ziffern 1, $\cdots$, 8, so erhält man alle natürlichen Zahlen von 100 bis 899, jede genau einmal. Somit kommt in diesen Zahlen die Ziffer 1 an den Einer- und Zehnerstellen insgesamt achtmal so oft vor wie das bisher ermittelte Vorkommen ($1 + 9 + 10 = 20$), d. h. genau 160 mal. Ferner gibt es unter diesen Zahlen genau 100 mit der Hunderterziffer 1 (nämlich die Zahlen 100, $\cdots$, 199). Somit kommt in den Zahlen von 100 bis 899 die Ziffer 1 an der Hunderterstelle insgesamt genau 100 mal vor.

Damit sind alle zu erfassenden Ziffern 1 berücksichtigt; ihre Anzahl beträgt somit $1+9+10+160+100 = 280$.

**Aufgabe 240622:**
Die sechs Flächen eines Quaders mit den Kantenlängen $a = 3$ cm, $b = 4$ cm, $c = 5$ cm werden rot angestrichen. Danach wird der Quader in genau 60 Würfel von 1 cm Kantenlänge zersägt.
Wie viele der so entstehenden Würfel haben 0, 1, 2, 3, 4, 5 bzw. 6 rot angestrichene Flächen?
(Eine Begründung wird nicht verlangt.)

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Anzahl der Würfel mit 0 rot angestrichenen Flächen: 6
Anzahl der Würfel mit 1 rot angestrichenen Fläche: 22
Anzahl der Würfel mit 2 rot angestrichenen Flächen: 24
Anzahl der Würfel mit 3 rot angestrichenen Flächen: 8
Anzahl der Würfel mit 4 rot angestrichenen Flächen: 0

Anzahl der Würfel mit 5 rot angestrichenen Flächen: 0
Anzahl der Würfel mit 6 rot angestrichenen Flächen: 0

**Aufgabe 250622:**
Gesucht sind vier Zahlen mit folgenden Eigenschaften:

(1) Die Summe der vier Zahlen beträgt 60.
(2) Es ergibt sich viermal dasselbe Ergebnis, wenn man
(2.1.) zur ersten Zahl 4 addiert,
(2.2.) zur zweiten Zahl 3 addiert,
(2.3.) von der dritten Zahl 2 subtrahiert,
(2.4.) von der vierten Zahl 1 subtrahiert.

Ermittle aus diesen Forderungen vier solche Zahlen! Überprüfe, ob die von dir gefundenen Zahlen die geforderten Eigenschaften haben!

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
I. Wenn vier Zahlen die geforderten Eigenschaften haben und dabei $e$ das in (2) genannte Ergebnis ist, so ist $e-4$ die erste Zahl, $e-3$ die zweite Zahl, $e+2$ die dritte Zahl, $e+1$ die vierte Zahl.

Nach (1) gilt daher $e-4+e-3+e+2+e+1=60$ und somit $e=64$; also lauten die vier gesuchten Zahlen: 12, 13, 18, 17.

II. Für die Zahlen gilt 12 + 13 + 18 + 17 = 60, also ist (1) erfüllt, und es gilt 12 + 4 = 16, 13 + 3 = 16, 18 - 2 = 16, 17 - 1 = 16, also ist (2) erfüllt.

**Aufgabe 270622:**
(a) Bei einem Wettkampf, an dem sich genau vier Mannschaften $A$, $B$, $C$ und $D$ beteiligten, spielte jede dieser Mannschaften gegen jede andere dieser Mannschaften genau ein Spiel. Zähle diese Spiele auf!

(b) Bei einem anderen Wettkampf spielte ebenfalls jede der teilnehmenden Mannschaften gegen jede andere der teilnehmenden Mannschaften genau ein Spiel. So kamen genau 21 Spiele zustande.
Wie viele Mannschaften nahmen insgesamt an diesem Wettkampf teil?
Zeige, dass bei der von dir angegebenen Anzahl von Mannschaften genau 21 Spiele zustandekommen!

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
(a) Die Spiele (bezeichnet durch Hintereinanderschreiben der Buchstaben) sind $AB$, $AC$, $AD$, $BC$, $BD$, $CD$.

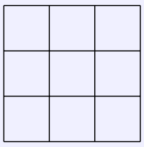
(b) Kommt noch eine fünfte Mannschaft $E$ hinzu, so ergeben sich außer diesen sechs Spielen noch weitere vier ($AE$, $BE$, $CE$, $DE$), insgesamt also zehn Spiele.
Kommt eine sechste Mannschaft hinzu, so ergeben sich zusätzlich genau die fünf weiteren Spiele, die sie mit $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ auszutragen hat, insgesamt also 15 Spiele.
Eine siebente Mannschaft hat genau sechs weitere Spiele auszutragen. Damit ist gezeigt, dass bei sieben Mannschaften genau 21 Spiele zustandekommen.

**Aufgabe 280621:**
An der Bahnstrecke von Pfiffigstadt nach Knobelshausen liegen zwischen diesen beiden Orten noch drei Bahnstationen: Adorf, Bedorf, Cedorf.

In jedem dieser fünf Bahnhöfe kann man Fahrkarten nach jedem anderen dieser Bahnhöfe kaufen. André besitzt zu jeder dieser möglichen Verbindungen genau eine Fahrkarte. Weitere Fahrkarten hat er noch nicht in seiner Sammlung.
Wie viel Fahrkarten hat André insgesamt?
(Hinweis: Hin- und Rückfahrt gelten als verschiedene Verbindungen, kombinierte „Hin- und Rückfahrkarten“ gibt es jedoch nicht.)

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Von jedem der fünf Orte gibt es genau vier Bahnverbindungen. Da alle diese Bahnverbindungen verschieden sind und André zu jeder von ihnen genau eine Fahrkarte besitzt, hat er wegen $5 \cdot 4 = 20$ insgesamt 20 Fahrkarten.

**Aufgabe 290623:**
Das Bild zeigt ein Quadrat, das sich aus neun Feldern zusammensetzt. Die Seitenlänge jedes einzelnen Feldes sei 1 cm.
a) Ermittle die Anzahl aller derjenigen Rechtecke, die aus solchen Feldern bestehen!
b) Ermittle die Summe der Flächeninhalte aller dieser Rechtecke!



**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Für jede mögliche Größe von Rechtecken der genannten Art erhält man die in der folgenden Tabelle aufgeführten Angaben:

| Rechtecke | Flächeninhalt | Anzahl der Rechtecke | Summe der Flächeninhalte |
|---|---|---|---|
| 1 cm · 1 cm | 1 cm$^2$ | 9 | 9 cm$^2$ |
| 1 cm · 2 cm | 2 cm$^2$ | 12 | 24 cm$^2$ |
| 1 cm · 3 cm | 3 cm$^2$ | 6 | 18 cm$^2$ |
| 2 cm · 2 cm | 4 cm$^2$ | 4 | 16 cm$^2$ |
| 2 cm · 3 cm | 6 cm$^2$ | 4 | 24 cm$^2$ |
| 3 cm · 3 cm | 9 cm$^2$ | 1 | 9 cm$^2$ |
| | | 36 | 100 cm$^2$ |

a) Die Anzahl der genannten Rechtecke beträgt 36.
b) Die Summe ihrer Flächeninhalte beträgt 100 cm$^2$.

**Aufgabe 320622:**
Ein Holzwürfel, dessen sechs Seitenflächen mit roter Farbe angestrichen wurden, wird anschließend in eine Anzahl untereinander gleichgroßer Teilwürfel zersägt.
a) Wie groß ist diese Anzahl, wenn bekannt ist, dass sich unter den entstandenen Teilwürfeln genau 72 mit je genau zwei roten Seitenflächen befinden?
b) Wie viele der übrigen entstandenen Teilwürfel haben je genau eine rote Seitenfläche,
c) Wie viele haben keine rote Seitenfläche?

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
a) Je genau zwei rote Seitenflächen befinden sich an genau denjenigen Teilwürfeln, die vor dem Zersägen an eine Kante des ursprünglichen Würfels angrenzten, aber nicht eine seiner Ecken enthielten.
Da der ursprüngliche Würfel genau 12 Kanten hatte, lagen an jeder seiner Kanten also genau $72 : 12 = 6$ derartige Teilwürfel. In der Verlängerung einer Reihe solcher Teilwürfel folgte nach beiden Seiten noch je genau ein Würfel, der eine Ecke des ursprünglichen Würfels enthielt. Einschließlich dieser beiden

Würfel bestand eine solche Reihe also aus genau 8 Teilwürfeln. Daher wurde der ursprüngliche Würfel in $8^3 = 512$ Teilwürfel zersägt.

b) Je genau eine rote Seitenfläche befindet sich an genau denjenigen Teilwürfeln, die an eine Seitenfläche, aber nicht an eine Kante des ursprünglichen Würfels angrenzten. Für je eine der 6 Seitenflächen des ursprünglichen Würfels bildeten diese Teilwürfel eine quadratförmige Anordnung von $6 = 36$ Stück; daher gibt es insgesamt 6-36 = 216 solche Teilwürfel.

c) Die Teilwürfel ohne rote Seitenfläche bildeten vor dem Zersägen eine würfelförmige Anordnung, die ganz im Innern des ursprünglichen Würfels lag und aus genau $6^3 = 216$ Teilwürfeln bestand.

**Aufgabe 330624:**
In einer Schachtel sind Kugeln; jede von ihnen hat eine der Farben blau, gelb, rot. Von jeder Farbe sind mindestens 3, aber höchstens 7 Kugeln vorhanden. Die Anzahl aller Kugeln in der Schachtel ist eine Primzahl.
Die Anzahl der roten Kugeln ist durch die Anzahl der gelben Kugeln teilbar. Nimmt man eine gelbe und zwei rote Kugeln heraus, so ist die Anzahl aller Kugeln in der Schachtel durch 5 teilbar, außerdem ist dann wieder die Anzahl der roten Kugeln in der Schachtel durch die Anzahl der gelben Kugeln in der Schachtel teilbar.
Wie viele Kugeln waren zu Anfang von jeder Farbe in der Schachtel?

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Für die Anzahlen $b$, $g$, $r$ der blauen, gelben bzw. roten Kugeln gilt $9 \leq b + g + r \leq 21$, da jede der drei Zahlen $b$, $g$, $r$ mindestens 3 und höchstens 7 beträgt. Da $b + g + r$ eine Primzahl ist, kann dies nur eine der Zahlen 11, 13, 17, 19 sein.
Nach dem Herausnehmen von einer gelben und zwei roten Kugeln verbleibt eine der Anzahlen 8, 10, 14, 16. Von ihnen ist nur 10 durch 5 teilbar; also musste $b + g + r = 13$ sein.
Alle Möglichkeiten, 13 in drei Summanden zu zerlegen, die mindestens 3 und höchstens 7 betragen, sind

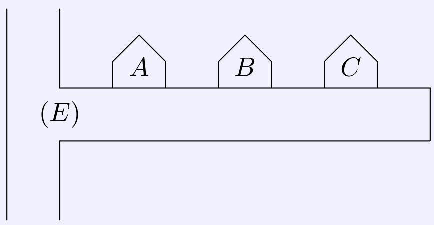
$$\begin{array}{lllll}
3+3+7, & 4+3+6, & 5+3+5, & 6+3+4, & 7+3+3 \\
3+4+6, & 4+4+5, & 5+4+4, & 6+4+3 & \\
3+5+5, & 4+5+4, & 5+5+3 & & \\
3+6+4, & 4+6+3 & & & \\
3+7+3 & & & &
\end{array}$$

Nur bei den blauen Zerlegungen ist der dritte Summand durch den zweiten teilbar. Verringert man in diesen Zerlegungen den zweiten Summanden um 1 und den dritten um 2, so entsteht

$$3+4+3, \qquad 4+2+4, \qquad 5+3+2, \qquad 7+2+1$$

Nur bei der blau markierten Zerlegung (entstanden aus der Zerlegung $4 + 3 + 6$) ist der dritte Summand durch den zweiten teilbar.
Also waren zu Anfang 4 blaue, 3 gelbe und 6 rote Kugeln in der Schachtel.

**Aufgabe 330633:**
In einer Sackgasse, die an einer Ecke $(E)$ beginnt, stehen drei Häuser $A$, $B$, $C$ in einer Reihe:



Ein Briefträger, der die Sackgasse an der Ecke ($E$) betritt, dann zu jedem Haus Post bringt und danach zur Ecke ($E$) zurückkehrt, kann dies z. B. in der Reihenfolge $(E) \Rightarrow A \Rightarrow C \Rightarrow B \Rightarrow (E)$ tun. Er kann es aber z. B. auch in der Reihenfolge $(E) \Rightarrow B \Rightarrow A \Rightarrow C \Rightarrow (E)$ tun; dabei macht er jedoch einen Umweg, weil er die Strecke zwischen $A$ und $B$ öfter als nötig durchläuft.

(a) Wie viele Möglichkeiten der Reihenfolge, bei denen kein Umweg vorkommt, gibt es insgesamt? Nenne alle diese Möglichkeiten!
(b) Jetzt sollen in der Sackgasse vier Häuser in einer Reihe stehen.
Wie viele Möglichkeiten der Reihenfolge, bei denen kein Umweg vorkommt, gibt es hierzu insgesamt? Nenne auch alle diese Möglichkeiten!
(c) Wie viele Möglichkeiten der Reihenfolge, bei denen kein Umweg vorkommt, gibt es insgesamt, wenn in der Sackgasse 10 Häuser in einer Reihe stehen?
Hinweis: Für diese Aufgabe kann man Überlegungen beim Lösen von (a) und (b) nutzen.

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Beim Angeben der Reihenfolge seien die Pfeile und die Angabe von ($E$) am Anfang und Ende weggelassen.
(a) Es gibt genau die 4 Möglichkeiten $ABC$, $ACB$, $BCA$, $CBA$.
(b) Für 4 Häuser $A$, $B$, $C$, $D$ gibt es genau die 8 Möglichkeiten $ABCD$, $ABDC$, $ACDB$, $ADCB$, $BCDA$, $BDCA$, $CDBA$, $DCBA$.

(c) Auf dem Hinweg zum letzten der 10 Häuser hat man bei jedem der vorangehenden 9 Häuser zu entscheiden, ob man dieses Haus sogleich auf dem Hinweg beliefert oder seine Belieferung erst für den Rückweg vorsieht.
Da diese 9 Entscheidungen unabhängig voneinander sind, ergeben sie insgesamt $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 512$ Möglichkeiten.

**Aufgabe 340632:**
Man kann die Buchstaben eines Wortes in eine andere Reihenfolge bringen. Jede so entstandene Aneinanderreihung von Buchstaben soll ebenfalls ein „Wort“ genannt werden, auch wenn sie (in der deutschen Sprache) keinen Sinn ergibt. Wichtig ist nur, dass jeder Buchstabe genau so oft vorkommt wie im ursprünglichen Wort.

Zum Beispiel lassen sich aus dem Wort TAL insgesamt folgende Wörter bilden:

$$ALT, \quad ATL, \quad LAT, \quad LTA, \quad TAL, \quad TLA$$

Sie sind hier alphabetisch geordnet (zum Beispiel steht ATL vor LAT, weil der erste Buchstabe A von ATL im Alphabet früher vorkommt als der erste Buchstabe L von LTA; über die Reihenfolge von LAT und LTA mit gleichem ersten Buchstaben entscheidet der zweite Buchstabe usw.).

Wie man sieht, steht bei dieser Anordnung das Wort TAL an der 5. Stelle der Aufzählung.

(a) Gib alle Wörter an, die sich ebenso aus dem Wort LAND bilden lassen (das Wort LAND ist dabei mit aufzuzählen)!
(b) Wenn die Wörter in (a) alphabetisch geordnet werden, an welcher Stelle steht dann das Wort LAND?
(c) Wie viele Wörter lassen sich aus dem Wort UMLAND bilden? (Wieder ist UMLAND mitzuzählen.)
(d) An wievielter Stelle steht bei alphabetischer Ordnung der Wörter aus (c) das Wort UMLAND?

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
(a) Die gesuchten Wörter, bereits alphabetisch geordnet, sind:

$ADLN$, $ADNL$, $ALDN$, $ALND$, $ANDL$, $ANLD$, $DALN$, $DANL$, $DLAN$, $DLNA$, $DNAL$, $DNLA$, $LADN$, $LAND$, $LDAN$, $LDNA$, $LNAD$, $LNDA$, $NADL$, $NALD$, $NDAL$, $NDLA$, $NLAD$, $NLDA$

(b) Das Wort LAND steht hierbei an der 14. Stelle.

(c) Für die Wahl des 1. Buchstabens (aus den 6 Buchstaben U, M, L, A, N, D) hat man genau 6 Möglichkeiten.
In jeder dieser Möglichkeiten hat man für die Wahl des 2. Buchstabens genau 5 Möglichkeiten. Damit ergeben sich $6 \cdot 5$ Möglichkeiten für die Wahl der ersten beiden Buchstaben.
Entsprechend folgt:

Für die Wahl der ersten drei Buchstaben hat man $6 \cdot 5 \cdot 4$ Möglichkeiten. So fortfahrend ergibt sich: Es gibt genau $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ Wörter aus den 6 Buchstaben des Wortes UMLAND.

(d) Um die Wörter zu kennzeichnen, die dem Wort UMLAND vorangehen, betrachten wir zunächst die mit A beginnenden Wörter. Sie werden gebildet, indem man auf A alle Wörter aus den 5 Buchstaben D, L, M, N, U folgen lässt.
Wie in (c) ergibt sich, dass dies genau $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ Wörter sind.
In dieser Weise fortfahrend kommt man zu folgender Aufzählung. Dem Wort UMLAND gehen insgesamt voran:
Für jeden der 5 Buchstaben A, D, L, M, N jeweils $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ Wörter, die mit diesem betreffenden Buchstaben beginnen;

weitere, mit U beginnende Wörter, und zwar für jeden der 3 Buchstaben A, D, L jeweils $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ Wörter, in denen dieser betreffende Buchstabe auf den Anfangsbuchstaben U folgt;

weitere, mit UM beginnende Wörter, und zwar für jeden der 2 Buchstaben A, D jeweils $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ Wörter, in denen dieser betreffende Buchstabe auf den Wort-Anfang UM folgt;

schließlich (nach den zuletzt erfassten Wörtern mit dem Wort-Anfang UMD) das eine Wort UMLADN.

Zusammen sind das $5 \cdot 120 + 3 \cdot 24 + 2 \cdot 6 + 1 = 685$ Wörter. Also steht das Wort UMLAND an der 686. Stelle.

# V Zahlentheorie

## V.I Primzahlen, Teilbarkeit

### I Runde 1

**Aufgabe V00604:**
Ist das kleinste gemeinsame Vielfache zweier beliebiger Zahlen stets durch ihre größten gemeinsamen Teiler teilbar? Begründe deine Antwort!

**Lösung von Steffen Polster:**
Ja, denn die kleinste Primzahlpotenz eines Teilers der ggT ist immer in der größten Primzahlpotenz eines Teilers des kgV enthalten.

**Aufgabe 010614:**
Kann eine Summe von vier beliebigen, aber aufeinanderfolgenden natürlichen (positiven ganzen) Zahlen (z. B. 11, 12, 13, 14 oder 27, 28, 29, 30) eine Primzahl sein? Begründe die Antwort!

**Lösung von Steffen Polster:**
Bei vier aufeinanderfolgenden Zahlen sind immer zwei gerade und zwei ungerade. Die Summe zweier ungerader Zahlen ist gerade, so dass die Summe der vier Zahlen immer gerade ist.
Diese Summe ist folglich stets durch 2 teilbar. Da die einzige gerade Primzahl, die 2, nicht Summe von vier aufeinanderfolgenden natürlichen ist, kann die Summe keine Primzahl sein.

**Aufgabe 030613:**
Gegeben seien drei beliebige, aber aufeinanderfolgende zweistellige natürliche Zahlen.

a) Zeige, dass unabhängig von der Wahl dieser Zahlen niemals alle drei Zahlen zugleich Primzahlen sein können!
b) Nenne alle Primfaktoren, die unabhängig von der Wahl dieser Zahlen in mindestens einer von ihnen enthalten sein müssen!

**Lösung von Steffen Polster:**
a) Da jede zweite natürliche Zahl gerade ist, muss unter den den drei Zahlen mindestens eine durch 2 teilbar sein, d. h., die zweistellige Zahl ist keine Primzahl.

b) Da jede dritte natürliche Zahl durch 3 teilbar ist, muss eine der drei Zahlen ein Vielfaches von 3 sein. Für eine Primzahl größer als 3, also mindestens 5, gilt eine analoge Aussage nicht.
Die gesuchten Primfaktoren sind 2 und 3.

**Aufgabe 080613:**
In einem Ferienlager „Junger Mathematiker“ kauft Rainer während einer Pause in der Lagerkantine für seine Freunde folgende Waren ein:
13 Flaschen Limonade zu je 0,21 M, sechs Bockwürste und neun Lachsbrötchen.

Rainer soll insgesamt 10,43 M bezahlen. „Das kann nicht stimmen“, sagt er. Dabei wusste er noch gar nicht, wie viel jedes Lachsbrötchen kostet.
Weshalb konnte er seiner Behauptung trotzdem sicher sein?

**Lösung von Steffen Polster:**
Die Limonade kostet insgesamt $13 \cdot 0{,}21\text{M} = 2{,}73\text{M}$. Für die sechs Bockwürste und neun Lachsbrötchen würde Rainer damit $10{,}43\text{M} - 2{,}73\text{M} = 7{,}70\text{M}$ bezahlen.

Sowohl die Anzahl 6 der Bockwürste und die Anzahl 9 der Lachsbrötchen ist durch 3 teilbar. Dann muss auch der Preis 7,70 M ihrer Summe durch 3 teilbar sein.
Das ist nicht der Fall, so dass die Behauptung nicht richtig sein kann.

**Aufgabe 160613:**
Luise sucht eine natürliche Zahl $x$, die sie vom Zähler des Bruches 17 19 subtrahieren und gleichzeitig zum Nenner dieses Bruches addieren möchte, wobei der so entstehende Bruch den Wert 7 11 erhalten soll.
Stelle fest, ob es eine solche Zahl $x$ gibt, ob sie die einzige ist, die die Bedingungen der Aufgabe erfüllt, und wie sie lautet!

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
I) Wenn $x$ eine solche Zahl ist, dann gilt für sie

$$\frac{17-x}{19+x} = \frac{7}{11}$$

Da der Bruch $\frac{7}{11}$ durch keine natürliche Zahl gekürzt werden kann, muss der Bruch $\frac{17-x}{19+x}$ durch Erweitern aus dem Bruch $\frac{7}{11}$ hervorgehen. Also muss die Zahl $19 + x$ ein Vielfaches der Zahl 11 sein.

Das kleinste Vielfache von 11, das größer als 19 (oder gleich 19) ist, ist 22. Also muss $x$ mindestens 3 betragen. Wäre $x > 3$, so wäre in dem Bruch $\frac{17-x}{19+x}$ der Zähler kleiner als 14, und der Nenner größer als 22, der Bruch folglich kleiner als $\frac{14}{22} = \frac{7}{11}$.
Somit kann nur die Zahl $x = 3$ die verlangte Eigenschaft haben.

II) Sie hat diese Eigenschaft; denn subtrahiert man sie vom Zähler 17 und addiert sie zum Nenner 19, so entsteht der Bruch

$$\frac{17-x}{19+x} = \frac{14}{22} = \frac{7}{11}$$

Also erfüllt genau die Zahl $x = 3$ die Bedingungen der Aufgabe.

**Aufgabe 160614:**
Eine Gruppe von mehr als 10, aber weniger als 50 Thälmann-Pionieren wollte eine Wanderfahrt durchführen. Sie brauchte dazu genau 91 Mark.
Jeder Pionier der Gruppe zahlte eine einheitlich festgesetzte Anzahl von 1-Mark-Stücken (und keine weiteren Geldbeträge) in die Reisekasse. Ein dann noch fehlender Restbetrag von genau 26 Mark wurde aus der Pionierkasse bestritten.
Ermittle die Anzahl der Pioniere dieser Gruppe und den Betrag, den jeder von ihnen zur Bezahlung dieser Fahrt in die Reisekasse zahlte!

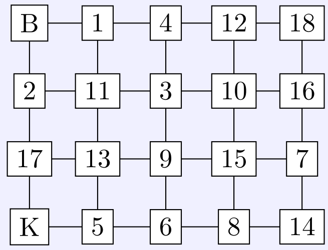
**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Wegen $91-26 = 65$ zahlten die Pioniere dieser Gruppe insgesamt genau 65 Markstücke in die Reisekasse. Also ist 65 ein Vielfaches der Anzahl der Pioniere der Gruppe. Alle natürlichen Zahlen, die 65 als Vielfaches haben, kommen in den Zerlegungen $65 = 1 \cdot 65 = 5 \cdot 13$ vor. Von diesen Zahlen ist nur 13 zugleich

größer als 10 und kleiner als 50.

Entsprechend der Aufgabe müssen daher 13 Pioniere an der Fahrt teilgenommen haben, und jeder von ihnen hat genau 5 M in die Reisekasse gezahlt.

**Aufgabe 280611:**

Bello (B) kann nur dann zum Knochen (K) gelangen, wenn er einen Weg wählt, bei dem das Produkt der dabei überquerten Zahlen 2431 beträgt.
Welchen Weg muss er wählen?




**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Die Zahl 2431 hat folgende Eigenschaften:
Sie ist weder durch 2 noch durch 4 teilbar; denn sie ist ungerade. Sie ist nicht durch 3 und auch nicht durch 9 teilbar; denn ihre Quersumme $2 + 3 + 4 + 1 = 10$ ist weder durch 3 noch durch 9 teilbar. Sie ist nicht durch 5 teilbar; denn sie hat als letzte Ziffer weder die 0 noch die 5.

Daher kommt auf dem Bild nur ein Weg in Frage, der die Zahlen 2, 3, 4, 9 und 5 vermeidet. Es gibt genau einen solchen Weg, nämlich über 1, 11, 13, 17. Wegen $1 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 = 2431$ liefert er das geforderte Produkt.
Also muss Bello genau diesen Weg wählen.

**Aufgabe 310611:**
Uwe und Jan zeichnen jeder ein Rechteck, das sich in genau 60 Quadrate von je 1 cm Seitenlänge zerlegen lässt. Jans Rechteck hat einen doppelt so großen Umfang wie Uwes Rechteck.
Ermittle die Seitenlängen der Rechtecke von Uwe und Jan!

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Durch Aufzählen aller Darstellungen von 60 als Produkt zweier natürlicher Zahlen erhält man:
Es gibt genau die folgenden Möglichkeiten für ein Rechteck, das sich in genau 60 Quadrate von je 1 cm Seitenlänge zerlegen lässt:

| Seitenlängen in cm | Umfang in cm |
|---|---|
| 1, 60 | 122 |
| 2, 30 | 64 |
| 3, 20 | 46 |
| 4, 14 | 38 |
| 5, 12 | 34 |
| 6, 10 | 32 |

Von diesen Umfängen ist genau einer doppelt so groß wie einer der anderen, nämlich 64 cm doppelt so groß wie 32 cm. Also hat Jans Rechteck die Seitenlängen 2 cm, 30 cm und Uwes Rechteck die Seitenlängen 6 cm, 10 cm.

# II Runden 2 & 3

**Aufgabe 050623:**
Gesucht ist eine natürliche Zahl $b$, die folgenden Bedingungen genügt:
(1) $40 < b < 600$,
(2) $b$ ist sowohl durch 4 als auch durch 9 teilbar,
(3) $b$ ist nicht durch 8 und nicht durch 27 teilbar,
(4) $b$ lässt bei der Division durch 11 den Rest 6.
Wie viel solche Zahlen gibt es?

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Wegen (2) ist $b$ auch durch 36 teilbar. Man muss daher 36 mit einer natürlichen Zahl multiplizieren, um $b$ zu erhalten.
Dieser Faktor kann wegen (1) nicht 0 bzw. 1 und wegen (3) nicht durch 2 bzw. 3 teilbar sein. Wegen (4) scheidet ferner 11 als Faktor aus.
Es kommen daher wegen $600 = 36 \cdot 16 + 24$ und auf Grund der obigen Überlegungen nur die Zahlen 5, 7 und 15 als Faktoren in Frage. Zu untersuchen sind also nur noch die Zahlen 180, 252 und 468, die sämtlich (l), (2) und (3) erfüllen.
Von ihnen erfüllt nur 468 auch (4). Daher ist $b = 468$ die einzige Lösung.

**Aufgabe 060622:**
Gesucht ist die Menge aller natürlichen Zahlen $a$, die folgenden Bedingungen genügen:

(1) $100 < a < 1201$,
(2) $a$ ist sowohl durch 3 als auch durch 4 als auch durch 5 teilbar,
(3) $a$ ist nicht durch 8, nicht durch 9 und nicht durch 25 teilbar,
(4) $a$ lässt bei der Division durch 11 einen Rest, der durch 2 teilbar ist.

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Wegen (2) ist $a$ durch 60 teilbar. Es gilt daher $a = 60 \cdot b$, $b$ ganz, und wegen (1) folgt $100 < 60b < 1201$. Somit muss $b$ der Bedingung $1 < b < 21$ genügen.

Wegen (3) kann $b$ nicht durch 2, nicht durch 3 und nicht durch 5 und wegen (4) auch nicht durch 11 teilbar sein.
Auf Grund der obigen Überlegungen können für den Faktor $b$ nur die Zahlen 7; 13; 17 und 19 in Frage.
Es sind also noch die Zahlen 420; 780; 1020 und 1140 zu betrachten, die sämtlich (1), (2) und (3) erfüllen.
Von ihnen genügen nur 420; 780 und 1020 der Bedingung (4).

420; 780 und 1020 sind die gesuchten Zahlen. Es gibt keine weiteren natürlichen Zahlen, die (1) bis (4) gleichzeitig erfüllen.

**Aufgabe 070622:**
Jedes der beiden Vorderräder eines Wagens hat einen Umfang von 210 cm, jedes der beiden Hinterräder einen Umfang von 330 cm.
Ermittle die kürzeste Strecke (in m), die der Wagen auf einer ebenen geraden Straße durchfahren haben muss, damit jedes seiner Räder genau eine ganze Anzahl von Umdrehungen durchgeführt hat!

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Um die Bedingungen der Aufgabe zu erfüllen, muss der Wagen eine Strecke zurücklegen, deren Länge ein gemeinsames Vielfaches, und zwar das kleinste gemeinsame Vielfache, von 210 cm und 330 cm ist. Daher ermitteln wir das kgV von 210 und 330:

$$210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$
$$330 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$$
$$\text{kgV}(210, 330) = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 2310$$

Die kürzeste Strecke, die vom Wagen zurückgelegt werden muss, bis jedes Rad genau eine ganze Anzahl von Umdrehungen durchgeführt hat, ist daher 2310 cm = 23,10 m lang.

Probe:
2310 : 210 = 11 und 2310 : 330 = 7. Die Vorderräder machen dabei genau 11, die Hinterräder genau 7 Umdrehungen.

**Aufgabe 200623:**
Ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen z, für die $1000 \leq z \leq 1700$ gilt und die durch 9, 12 und 14 teilbar sind!

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Eine Zahl ist genau dann durch 9, 12 und 14 teilbar, wenn sie durch das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) dieser Zahlen teilbar ist. Wegen der Primzahlzerlegungen

$$9 = 3^2, \quad 12 = 2^2 \cdot 3, \quad 14 = 2 \cdot 7$$

ist dieses kgV die Zahl $22 \cdot 32 \cdot 7 = 252$.
Also ist eine natürliche Zahl $z$ genau dann durch 9, 12 und 14 teilbar, wenn es zu ihr eine natürliche Zahl $n$ mit $z = 252 \cdot n$ gibt. Alle gesuchten Zahlen $z$ erhält man daher aus denjenigen $n$, für die $1000 \leq 252n \leq 1700$ gilt. Nun stellt man fest:

Für $n = 3$ gilt $252n = 252 \cdot 3 = 756 < 1000$;
für $n = 7$ gilt $252n = 252 \cdot 7 = 1764 > 1700$;
für diese $n$ erhält man also keine Zahlen $z$, die die genannten Bedingungen der Ungleichung erfüllen.

Für $n = 4$ wird $z = 252 \cdot 4 = 1008$;
für $n = 5$ wird $z = 252 \cdot 5 = 1260$;
für $n = 6$ wird $z = 252 \cdot 6 = 1512$;
diese drei Zahlen erfüllen also die Bedingung $1000 \leq z \leq 1700$.
Daher sind genau 1008, 1260 und 1512 die gesuchten Zahlen.

**Aufgabe 220624:**
An fünf voneinander und von 0 verschiedene natürliche Zahlen $a$, $b$, $c$, $d$, $e$ werden folgende acht Forderungen gestellt:

(1) $a$ ist ein [ganzzahliges] Vielfaches von $e$,
(2) $b$ ist ein Teiler von $c$,
(3) $c$ ist ein [ganzzahliges] Vielfaches von $e$,
(4) $d$ ist ein Teiler von $e$,
(5) $a$ ist ein [ganzzahliges] Vielfaches von $b$,
(6) $b$ ist ein Teiler von $d$,
(7) $c$ ist ein [ganzzahliges] Vielfaches von $a$,
(8) $a$ ist ein [ganzzahliges] Vielfaches von $d$.

Untersuche, ob diese acht Forderungen erfüllbar sind und ob sich aus ihnen die Anordnung der fünf Zahlen ihrer Größe nach ergibt!
Wenn dies der Fall ist, so nenne diese Anordnung; beginne dabei mit der größten der fünf Zahlen!

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Aus (7) folgt $c > a$,
aus (1) folgt $a > e$,
aus (4) folgt $e > d$,

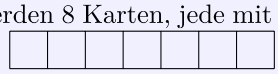
aus (6) folgt $d > b$.
Daher können nur bei der Anordnung $c > a > e > d > b$ die Forderungen (1) bis (8) erfüllt sein.
Sie sind erfüllbar, z. B. durch $b = 1$, $d = 2$, $e = 4$, $a = 8$, $c = 16$; denn 8 ist ein (ganzzahliges) Vielfaches von 4, 1 ist ein Teiler von 16, 16 ist ein (ganzzahliges) Vielfaches von 4, 2 ist ein Teiler von 4, 8 ist ein (ganzzahliges) Vielfaches von 1, 1 ist ein Teiler von 2, 16 ist ein (ganzzahliges) Vielfaches von 8, 8 ist ein (ganzzahliges) Vielfaches von 2.

**Aufgabe 310623:**
Wie viele natürliche Zahlen gibt es insgesamt, die
a) Teiler von 256 sind,
b) Teiler von $2 \cdot 256$ sind,
c) Teiler von $256 \cdot 256$ sind?
Erkläre zu jeder deiner drei Antworten, wie du sie gefunden hast!

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
a) Man stellt fest: 256 ist durch 2 teilbar; es gilt $256 : 2 = 128$. Weiter gilt $128 : 2 = 64$. Indem man so fortgesetzt die Teilbarkeit durch 2 feststellt, ergibt sich

$$256 = 2 \cdot 128 = 2 \cdot 2 \cdot 64 = \cdots = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2.$$

Also ist eine natürliche Zahl genau dann Teiler von 256, wenn sie entweder gleich 1 oder gleich dem Produkt von einer Anzahl Faktoren 2 ist, wobei diese Anzahl höchstens 8 beträgt.
Für diese Anzahl gibt es somit genau 8 Möglichkeiten. Daher gibt es insgesamt 9 natürliche Zahlen, die Teiler von 256 sind.
b) Aus $2 \cdot 256 = 2^9$;
c) aus $256 \cdot 256 = 2^{16}$ folgt: Es gibt insgesamt 10 bzw. 17 natürliche Zahlen, die Teiler von $2 \cdot 256$ bzw. von $256 \cdot 256$ sind.

**Aufgabe 330636:**
Anja und Bernd spielen ein Spiel nach folgenden Regeln: Verwendet werden 8 Karten, jede mit genau einer der Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, und ein Spielbrett aus 7 Feldern: 

Zunächst wird eine natürliche Zahl $n$ vereinbart. Dann legen Anja und Bernd abwechselnd (beginnend mit Anja) auf je ein beliebiges Feld der Figur, das noch frei ist, eine der noch nicht verwendeten Karten.
Am Ende ist eine siebenstellige Zahl entstanden. Ist sie durch $n$ teilbar, so hat Anja gewonnen, anderenfalls Bernd.

a) Finde zwei der Zahlen 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, für die gilt:
Ist diese Zahl als $n$ vereinbart worden, so kann Anja den Gewinn erzwingen, gleichgültig, wie Bernd spielt! Erkläre, wie Anja dies tun kann!
b) Beweise folgende Aussage! Wurde $n = 9$ vereinbart, so gewinnt stets Bernd, gleichgültig, welche Karten beide Spieler legen.
c) Untersuche, ob im Fall, dass $n = 21$ vereinbart wurde, einer der beiden Spieler den Gewinn erzwingen kann, gleichgültig, wie der andere spielt!

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
a) Ist $n = 2$ vereinbart, so kann Anja den Gewinn erzwingen, indem sie zu Anfang eine der Ziffern 2, 4, 6, 8 auf das Feld ganz rechts (das Feld für die Einerziffer) bringt. Nach der Teilbarkeitsregel für 2 entsteht dann nämlich bei jeder Fortsetzung eine durch 2 teilbare Zahl.
Ebenso kann Anja im Fall $n = 5$ den Gewinn erzwingen, indem sie zu Anfang die Ziffer 5 auf das Feld ganz rechts bringt.

b) Die Summe (1+8) + (2 + 7) + (3 + 6) + (4 + 5) der Zahlen auf allen Karten ist durch 9 teilbar.
Da am Ende genau eine der Zahlen 1,2,3,4,5,6,7,8 übrigbleibt und diese Zahl nicht durch 9 teilbar ist, kann auch die Summe der ausgelegten Karten nicht durch 9 teilbar sein, gleichgültig, von wem und in welcher Reihenfolge sie ausgelegt wurden.
Nach der Teilbarkeitsregel für 9 besagt das aber: Die ausgelegte siebenstellige Zahl ist nicht durch 9 teilbar; Bernd hat gewonnen.

c) Bernd kann den Gewinn erzwingen, indem er dafür sorgt, dass jedenfalls die Zahlen 3 und 6 sich unter den ausgelegten befinden (er hat ja - sogar dreimal - Gelegenheit, von ihm gewünschte Zahlen nötigenfalls selbst auszulegen).
Damit erreicht er, ähnlich wie in b): Da die Summe der Zahlen auf allen Karten durch 3 teilbar ist und eine nicht durch 3 teilbare Zahl übrigbleiben muss, kann die Summe der ausgelegten Karten nicht durch 3 teilbar sein. Also ist die ausgelegte siebenstellige Zahl nicht durch 3 teilbar; folglich kann sie auch nicht durch 21 teilbar sein.

**Aufgabe 340636:**
Vater, Mutter, Tochter und Sohn in einer Familie stellen fest:
(1) Das Produkt aus Tag- und Monatszahl des Geburtstages beträgt beim Vater 242, bei der Mutter 200 und bei der Tochter 6.
(Beispiel für eine solche Produktbildung: Ein Geburtstag am 30. Juli ergibt $30 \cdot 7 = 210$.)
(2) Die Summe aus Tag- und Monatszahl des Geburtstages ergibt bei jedem der vier Familienmitglieder die - in ganzen Zahlen gerechnete - Altersangabe in Jahren.
(3) Die Summe dieser vier Altersangaben beträgt 80.
(4) Das Produkt dieser vier Altersangaben beträgt 59400.

(a) Wie alt sind die Familienmitglieder? Wann haben Vater, Mutter und Tochter Geburtstag?
Gewinne die Antworten auf diese Fragen ausgehend von den Feststellungen (1), (2), (3), (4)!
Untersuche dabei auch, ob es für einige der erfragten Angaben mehrere Möglichkeiten gibt!
(b) Zeige, dass man die Aufgabe (a) auch noch - mit demselben Ergebnis - lösen kann, wenn man eine der Feststellungen (1), (2), (3), (4) weglässt!

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
(a) I. Aus den Feststellungen (1), (2), (3), (4) kann man folgende Schlüsse ziehen:
Um (1) anzuwenden, ermittelt man alle Zerlegungen von 242, 200 bzw. 6 in je zwei Faktoren, die als Tag- und Monatszahl möglich sind. Man findet, z. B. mithilfe der Zerlegungen $242 = 2 \cdot 11 \cdot 11$, $200 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$ bzw. $6 = 2 \cdot 3$ in Primfaktoren:
Die genannten Zerlegungen sind genau $242 = 22 \cdot 11$, $200 = 25 \cdot 8 = 20 \cdot 10$ bzw. $6 = 6 \cdot 1 = 3 \cdot 2$; daraus folgt nach (1):
Der Geburtstag des Vaters ist der 22.11., (5)
Der Geburtstag der Mutter ist der 25.8. oder der 20.10., (6)
Der Geburtstag der Tochter ist einer der Tage 6.1., 3.2., 2.3., 1.6.. (7)

Aus (2) und (5), (6), (7) ergibt sich:
Der Vater ist 33 Jahre alt, (8)
die Mutter ist entweder 33 oder 30 Jahre alt, (9)
die Tochter ist entweder 7 oder 5 Jahre alt. (10)

Nach (8) und (4) beträgt das Produkt der Altersangaben von Mutter, Tochter und Sohn $59400 : 33 = 1800$. Da diese Zahl weder durch 33 noch durch 7 teilbar ist, sind in (9), (10) und damit in (6), (7) nur möglich:
Die Mutter ist 30 Jahre alt, ihr Geburtstag ist der 20.10., (11)
die Tochter ist 5 Jahre alt, ihr Geburtstag ist entweder der 3.2. oder der 2.3.. (12)
Nochmals nach (4) folgt dann wegen $1\,800 : 30 = 60$ und $60 : 5 = 12$:

Der Sohn ist 12 Jahre alt. (13)
Daher können die Feststellungen (1), (2), (3), (4) nur bei den Angaben in (5), (8), (11), (12), (13) erfüllt sein.

II. Bei diesen Angaben sind die Feststellungen (1), (2), (3), (4) erfüllt. Wegen $33 + 30 + 5 + 12 = 80$ ist insbesondere auch die – in den bisherigen Betrachtungen noch nicht herangezogene – Feststellung (3) erfüllt.

Mit I. und II. ist gezeigt:
Die beiden in (5), (8), (11), (12), (13) angegebenen Möglichkeiten (für das Alter der vier Familienmitglieder und die Geburtstage von Vater, Mutter und Tochter) sind alle diejenigen, bei denen die Feststellungen (1), (2), (3), (4) erfüllt sind.

(b) Da in (a) I. die Feststellung (3) nicht herangezogen wird (und in (a) II. natürlich auf das Bestätigen dieser Feststellung verzichtet werden kann, wenn sie nicht zu den Forderungen der Aufgabe gehört), hat die Aufgabe nach Weglassen von (3) dieselbe Lösung.

# V.II (Dezimal-)Zahldarstellung, Reste

## I Runde 1

**Aufgabe V00602:**
Fünf Arbeitsgemeinschaften einer Schule kommen am 1. Juli zusammen, um ihre Ferienpläne zu beraten.
Sie beschließen, dass die Biologen jeden zweiten Tag, die Physiker jeden dritten Tag, die Geographen jeden vierten Tag, die Modellbauer jeden fünften Tag und die Elektrotechniker jeden sechsten Tag zusammenkommen. An dem Tag, an dem alle Gruppen wieder gleichzeitig in der Schule zusammenkommen, wollen sie ihre Arbeit auswerten.
Wann ist dieser Tag, wenn die Gruppen ab 1. Juli regelmäßig (auch an Sonntagen) zusammenkommen?

**Lösung von Steffen Polster:**
Die Arbeitsgemeinschaften treffen sich wieder, wenn die Zahl der Tage durch 2, 3, 4, 5 und 6 teilbar ist. D. h., die Anzahl der gesuchten Tage ist das kleinste gemeinsame Vielfache von 2, 3, 4, 5 und 6, d. h. 60. Die Schüler treffen sich nach 60 Tagen wieder, d. h. am 30. August.

**Aufgabe 040615:**
Es ist die kleinste natürliche Zahl zu finden, die beim Dividieren

durch 2 den Rest 1,
durch 3 den Rest 2,
durch 4 den Rest 3,
durch 5 den Rest 4 und
durch 6 den Rest 5 aufweist.

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Man untersucht die Folge der natürlichen Zahlen, die bei Division durch 6 den Rest 5 lassen, also 5, 11, 17, ... Dann streicht man von diesen die Zahlen, die bei Division durch 5 nicht den Rest 4 lassen usw.

Man findet dadurch 59 als kleinste natürliche Zahl, die den Forderungen genügt.

**Aufgabe 050612:**
Eine zweistellige natürliche Zahl soll auf Grund folgender Bedingungen ermittelt werden:
Ihre Quersumme beträgt 10. Vertauscht man ihre Ziffern und addiert zu der dadurch entstehenden Zahl die Zahl 1, so erhält man das Zweifache der ursprünglichen Zahl.

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Bezeichnet man die Anzahl der Zehner mit $a$ und die der Einer mit $b$, dann lautet die erste Zahl $(10a+b)$ und die zweite $(10b+a)$. Nach Aufgabe gilt:

$$a+b=10 \tag{1}$$
$$2(10a+b)=(10b+a)+1 \tag{2}$$

Die linke Zahl in (2) ist gerade. Wäre $a$ gerade, so wäre die rechte Zahl ungerade. Also muss $a$ ungerade und damit (wegen $a+b=10$) auch $b$ ungerade sein.
Die rechte Seite von (2) ist höchstens gleich $10b+10$. Wäre $a$ größer oder gleich $b$, dann wäre die linke Seite mindestens gleich $2(10b+b)=22b=10b+12b$.

Das ist aber (wegen $b \geq 1$) sicher größer als $10b+10$, daher muss $b$ größer als $a$ sein.
Es kommen als Lösung mithin nur die beiden Zahlenpaare $a=1$; $b=9$ und $a=3$; $b=7$ in Betracht.
Durch Probieren findet man sofort, dass $a=3$; $b=7$ das einzige Zahlenpaar ist, das den Bedingungen der Aufgabe genügt. Die gesuchte Zahl lautet also 37.

**Aufgabe 070614:**
Unter der Fakultät einer natürlichen Zahl $n \geq 2$ (geschrieben $n!$) verstehen wir das Produkt aller natürlichen Zahlen von 1 bis $n$.
Es gilt zum Beispiel: $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ und $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.
Ermittle, auf welche Ziffer die Summe $s = 3! + 4! + 5! + 6! + 7! + 8! + 9! + 10!$ endet!

**Lösung von Steffen Polster:**
Die ersten Fakultäten der Summe enden auf $3! = 6$ und $4! = 24$ auf 4.
5! und alle höheren Fakultäten enden immer auf 0, da in ihnen die Faktoren 2 und 5 vorkommen.
Die Summe s hat somit, da 4 + 6 = 10 ist, die Null als Endziffer.

**Aufgabe 110614:**
Zwei Orte $A$ und $B$ seien durch eine 999 km lange Straße miteinander verbunden.
Im Abstand von jeweils 1 km seien auf dieser Straße Kilometersteine aufgestellt, die beidseitig derart beschriftet sind, dass auf der einen Seite jedes Steines seine Entfernung von $A$ und auf der anderen Seite seine Entfernung von $B$ in km angegeben ist. Z. B. trägt der Stein am Ortsausgang von $A$ die Beschriftung 0 und 999, der Stein am Ortseingang von $B$ die Beschriftung 999 und 0.

Ermittle von diesen Steinen die Anzahl derjenigen, bei deren Beschriftung höchstens zwei voneinander verschiedene Ziffern verwendet wurden (z B. 722 und 277)!

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Da die Straße die Länge 999 km hat, ist die Summe der Kilometerangaben auf jedem der Steine 999. Daraus folgt:

(1) Auf der einen Seite jedes der Kilometersteine steht eine gerade und auf der anderen Seite eine ungerade Zahl. Beide Zahlen sind also voneinander verschieden.
(2) Die Summe der Einerziffern auf jedem Kilometerstein beträgt 9, desgleichen die Summe der beiden Zehnerziffern und ebenso die Summe der beiden Hunderterziffern.

(3) Zu jedem Kilometerstein $S$ der Aufgabe gibt es genau einen anderen $S'$, der die gleiche Bezifferung trägt ($S'$ hat von $B$ dieselbe Entfernung wie $S$ von $A$).

Die gesuchte Zahl $x$ ist daher gleich der doppelten Anzahl $y$ derjenigen Kilometersteine, bei deren Beschriftung höchstens zwei Ziffern verwendet wurden und die näher an $A$ stehen als an $B$. Bei jedem solchen Stein $S$ ist die Hunderterziffer der Kilometerangabe von $S$ nach $B$ eine der Ziffern 5, 6, 7, 8 oder 9 (wegen (2)).

Daher lautet die Hunderterziffer der anderen Kilometerangabe auf $S$ jeweils 4, 3, 2, 1 bzw. 0.
In den ersten vier Fällen sind damit die beiden vorkommenden Ziffern bestimmt; aber auch im Fall 5 kann außer 9 (und evtl. 0) keine andere Ziffer $z$ auftreten, da sonst die drei verschiedenen Ziffern 9, $z$ und $(9 - z)$ vorkämen.

Nun kann man mit den Ziffern $a$ und $b$, $b \neq a$, genau 4 verschiedene dreistellige Zahlen bilden, deren Hunderterziffer $a$ ist, nämlich $aaa$, $aab$, $aba$, $abb$.
Infolgedessen ist, da hier $a$ die fünf Werte 5, 6, 7, 8, 9 und nur diese annehmen kann: $y = 5 \cdot 4$ und die gesuchte Anzahl $x = 2y = 40$.
Es gibt also genau 40 Kilometersteine, bei deren Beschriftung höchstens zwei voneinander verschiedene Ziffern verwendet wurden.

**Aufgabe 140614:**
Jemand schreibt $3\square6\square5$ und möchte dann die Kästchen $\square$ so durch Ziffern ersetzen, dass eine fünfstellige durch 75 teilbare Zahl entsteht.
Ermittle alle fünfstelligen, durch 75 teilbaren Zahlen, die unter diesen Bedingungen entstehen können!

**Lösung von Steffen Polster:**
Eine durch 75 teilbare Zahl endet auf 0, 25, 50 oder 75, d. h. die vorletzte Ziffer ist eine 2 oder 7.
75 ist aber auch durch 3 teilbar, so dass die gesuchte Zahl ebenfalls durch 3 teilbar sein muss. Ihre Quersumme ist $q = 3 + a + 6 + b + 5 = 14 + a + b$ mit $b = 2$ oder $b = 7$.

Ist $b = 2$ ist die Quersumme $q = 16 + a$, d. h., $a$ kann 2, 5 oder 8 sein.
Ist $b = 7$ ist die Quersumme $q = 21 + a$, d. h., $a$ kann 0, 3, 6 oder 9 sein.
Die fünfstellige Zahl kann somit sein

$$32625, \quad 35625, \quad 38625, \quad 30675, \quad 33675, \quad 36675, \quad 39675$$

**Aufgabe 180612:**
Eine Zahl $z$ soll in der Gestalt $z = \star 3 \star 60$ geschrieben werden, wobei jeder Stern ($\star$) so durch eine der Ziffern 0 bis 9 zu ersetzen ist, dass $z$ die beiden folgenden Eigenschaften hat:

(1) $60000 < z < 100000$,
(2) $z$ ist durch 9 teilbar.

Ermittle alle Zahlen $z$, die diesen Bedingungen genügen!

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Wenn $z$ den Bedingungen genügt, so ist die Zehntausenderziffer von $z$ wegen (1) eine der Zahlen 6, 7, 8, 9.

Weiterhin ist $z$ wegen (2) durch 9 teilbar, und daher ist auch die Quersumme von $z$ durch 9 teilbar. Da die Summe der Tausender-, Zehner- und Einerziffer 9 ist, muss die Hunderterziffer die obengenannte Zehntausenderziffer 6, 7, 8 bzw. 9 zu einer durch 9 teilbaren Zahl ergänzen.

Das ist nur bei den Zahlen 63360, 73260, 83160, 93060, 93960 der Fall.
Jede der hiermit angegebenen Zahlen erfüllt (1) und, da sie durch 9 teilbar ist, auch (2). Daher sind die angegebenen Zahlen alle gesuchten.

**Aufgabe 200613:**
Ermittle aus der Menge aller natürlichen Zahlen von 20 bis 39 alle diejenigen, die durch das Produkt ihrer beiden Ziffern teilbar sind!

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Wie die folgende Tabelle zeigt, haben genau die Zahlen 24 und 36 die verlangte Eigenschaft.

| Zahl | Produkt der Ziffern | teilbar? | Zahl | Produkt der Ziffern | teilbar? |
|---|---|---|---|---|---|
| 20 | 0 | nein | 21 | 2 | nein |
| 22 | 4 | nein | 23 | 6 | nein |
| 24 | 8 | ja | 25 | 10 | nein |
| 26 | 12 | nein | 27 | 14 | nein |
| 28 | 16 | nein | 29 | 18 | nein |
| 30 | 0 | nein | 31 | 3 | nein |
| 32 | 6 | nein | 33 | 9 | nein |
| 34 | 12 | nein | 35 | 15 | nein |
| 36 | 18 | ja | 37 | 21 | nein |
| 38 | 24 | nein | 39 | 27 | nein |

**Aufgabe 240614:**
Rita multipliziert eine Zahl $z$ mit 9 und erhält als Ergebnis 111111111.

(a) Um welche Zahl $z$ handelt es sich?
(b) Ermittle eine Zahl $x$, die folgende Eigenschaft besitzt!
Wenn man $x$ mit der in (a) ermittelten Zahl $z$ multipliziert, dann erhält man als Produkt eine Zahl, die mit lauter Ziffern 8 (in normaler Schreibweise des Zehnersystems) geschrieben wird.
(c) Gibt es außer der in (b) ermittelten Zahl $x$ noch weitere Zahlen, die ebenfalls diese Eigenschaft besitzen?
Wenn dies der Fall ist, so ermittle eine weitere solche Zahl!

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
(a) Wegen $111111111 : 9 = 12345679$ ist $z = 12345679$ die Zahl, die mit 9 multipliziert 111111111 ergibt.

(b) Aus $12345679 \cdot 9 = 111111111$ folgt $12345679 \cdot 72 = 888888888$ (1)
Daher hat beispielsweise die Zahl $x = 72$ die verlangte Eigenschaft, dass die Zahl $z \cdot x$ mit lauter Ziffern 8 geschrieben wird.

(c) Aus (1) folgt $12345679 \cdot 72 \cdot 1000000001 = 888888888 \cdot 1000000001$, (2)
d. h. $12345679 \cdot 72000000072 = 888888888888888888$. (3)
Also hat (beispielsweise) auch die Zahl 72 000 000 072 die verlangte Eigenschaft.

**Aufgabe 300612:**
a) Gib alle diejenigen zweistelligen natürlichen Zahlen an, bei denen eine der beiden Ziffern um 4 kleiner ist als die andere!
b) Ermittle unter diesen Zahlen alle diejenigen, die durch ihre Quersumme teilbar sind!

Hinweis: Die Quersumme einer natürlichen Zahl ist die Summe ihrer Ziffern. So hat z. B. die Zahl 24801 wegen $2 + 4 + 8 + 0 + 1 = 15$ die Quersumme 15.

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Die folgende Tabelle enthält in der ersten Zeile genau alle in (a) gesuchten Zahlen. In der zweiten Zeile steht zu jeder dieser Zahlen ihre Quersumme. In der dritten Zeile steht jeweils die Antwort auf die Frage, ob die betreffende Zahl durch ihre Quersumme teilbar ist (j für ja, n für nein). Hiernach sind genau die Zahlen 40, 84 und 48 die in (b) gesuchten.

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Zahl | 40 | 51 | 15 | 62 | 26 | 73 | 37 | 84 | 48 | 95 | 59 |
| Quersumme | 4 | 6 | 6 | 8 | 8 | 10 | 10 | 12 | 12 | 14 | 14 |
| teilbar? | j | n | n | n | n | n | n | j | j | n | n |

**Aufgabe 330612:**
Zwei Zahlen sollen die Summe 2028 haben. Dividiert man die erste Zahl durch 28, so soll sich dasselbe ergeben wie bei Division der zweiten Zahl durch 128.
Zeige, dass die beiden Zahlen durch diese Forderungen eindeutig bestimmt sind; finde sie und bestätige, dass sie die Forderungen erfüllen!

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Ist $d$ das Ergebnis der Division der ersten Zahl durch 28, so lautet die erste Zahl $28 \cdot d$. Da $d$ auch das Ergebnis der Division der zweiten Zahl durch 128 ist, lautet die zweite Zahl $128 \cdot d$. Als Summe der beiden Zahlen $28 \cdot d$ und $128 \cdot d$ ergibt sich folglich $156 \cdot d$; somit muss $156 \cdot d = 2028$ sein.

Daraus ergibt sich $d = 2028 : 156 = 13$. Also sind durch die Forderungen eindeutig $28 \cdot 13 = 364$ und $128 \cdot 13 = 1664$ als erste bzw. zweite Zahl bestimmt.
Für sie bestätigt man: $364 : 28$ und $1664 : 128$ haben dasselbe Ergebnis 13, und es gilt $364 + 1664 = 2028$.

**Aufgabe 330614:**
Ist $n$ eine natürliche Zahl, so bezeichnet man das Produkt aller natürlichen Zahlen von 1 bis $n$ mit dem Zeichen $n!$ (gelesen: „$n$ – Fakultät“ ). Beispielsweise ist $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.
Wie lauten die letzten drei Ziffern der Zahl, die sich beim Ausrechnen von

$$1! + 2! + 3! + 4! + \cdots + 99! + 100!$$

ergeben würde?

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Indem man, beginnend mit $1! = 1$, jeweils das zuletzt erhaltene Ergebnis der Reihe nach mit 2, 3, 4, ... usw. multipliziert und jedes Mal nur die letzten drei Ziffern berücksichtigt, findet man: Es ist

$$1! = 1, \quad 2! = 2, \quad 3! = 6, \quad 4! = 24, \quad 5! = 120, \quad 6! = 720;$$

die letzten drei Ziffern von 7! sind ... 040
die letzten drei Ziffern von 8! sind ... 320
die letzten drei Ziffern von 9! sind ... 880
die letzten drei Ziffern von 10! sind ... 800

die letzten drei Ziffern von 11! sind ... 800
die letzten drei Ziffern von 12! sind ... 600
die letzten drei Ziffern von 13! sind ... 800
die letzten drei Ziffern von 14! sind ... 200

Von 15! an lauten die letzten drei Ziffern stets ... 000, bei der verlangten Addition ändern sie also das Ergebnis nicht mehr. Durch Addition der hier verzeichneten Ergebnisse folgt daher bereits:
Die letzten drei Ziffern von $1! + 2! + \cdots + 100!$ lauten ... 313.

## II Runde 2

**Aufgabe 020623:**
Vertauscht man bei einer zweistelligen Zahl den Einer mit dem Zehner, so erhält man eine neue Zahl, die $4\frac{1}{2}$ so groß wie die ursprüngliche Zahl ist.

a) Wie lautet die Zahl?
b) Wie hast du sie gefunden?
Zeige, dass es nur eine solche Zahl gibt!

**Lösung von Steffen Polster:**
Die gesuchte Zahl sei $10a + b$, wobei $a$ eine Ziffer von 1 bis 9 und $b$ eine Ziffer von 0 bis 9 sind. Es ergibt sich die Gleichung

$$10b + a = 4\frac{1}{2} \cdot (10a + b) = 45a + 4\frac{1}{2}b = 45a + 4{,}5b \quad \to \quad 44a = \frac{11}{2}b$$

und somit $8a = b$.
Da $b$ kleiner 10 ist und $a$ mindestens 1 sein muss, folgt eindeutig $a = 1$ und $b = 8$. Die gesuchte Zahl ist 18.

**Aufgabe 100623:**
In der fünfstelligen Zahl $52{*}2{*}$ sind an den mit * bezeichneten Stellen zwei (gleiche oder verschiedene) Ziffern so einzusetzen, dass die dadurch entstehende Zahl durch 36 teilbar ist.

Gib alle Möglichkeiten hierfür an!
(Beachte: Eine Zahl ist genau dann durch 36 teilbar, wenn sie durch 4 und durch 9 teilbar ist.)

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
(1) Ist nach Ergänzung der beiden fehlenden Ziffern eine durch 36 teilbare Zahl entstanden, so ist diese sowohl durch 4 als auch durch 9 teilbar.

(2) Ist eine mehrstellige Zahl durch 4 teilbar, so stellen ihre letzten beiden Ziffern (in gleicher Reihenfolge) ebenfalls eine durch 4 teilbare Zahl dar. Daher kam als Einerziffer nur 0; 4 oder 8 eingesetzt werden.

(3) Ist eine Zahl durch 9 teilbar, so ist es auch ihre Quersumme. Nun beträgt die Summe der drei gegebenen Ziffern 9. Lautet daher die Einerziffer $\left\{\begin{array}{c} 0 \\ 4 \\ 8 \end{array}\right\}$ so kann die Hunderterziffer nur $\left\{\begin{array}{l} 0 \text{ oder } 9 \\ 5 \\ 1 \end{array}\right\}$ sein.
Also können nur die Zahlen 52020; 52920; 52524; 52128 die Bedingungen der Aufgabe erfüllen. Die Probe zeigt, dass sie dies auch sämtlich tun.

**Aufgabe 130624:**
Werner schreibt 50*0*05 an die Tafel und will danach für jedes der Zeichen * eine der Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 so eintragen, dass eine durch 9 teilbare Zahl entsteht.
Gib sämtliche Möglichkeiten einer derartigen Eintragung (also alle so erhältlichen durch 9 teilbaren Zahlen) an!

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Die Summe der für die Zeichen * einzutragenden Ziffern ist mindestens 0 und höchstens 18.
Die Quersumme der Zahl ohne diese Ziffern beträgt 10. Die Quersumme der gesuchten Zahl ist daher mindestens 10 und höchstens 28.

Andererseits gilt: Eine Zahl ist genau dann durch 9 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist.
Daher entspricht eine Eintragung genau dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn die Quersumme der entstehenden Zahl entweder 18 oder 27 beträgt, also genau dann, wenn die Summe der beiden einzutragenden Ziffern gleich 8 oder gleich 17 ist.
Folglich gibt es genau die folgenden den Bedingungen der Aufgabe entsprechenden durch 9 teilbaren Zahlen:

$$5000805, 5010705, 5020605, 5030505, 5040405, 5050305,$$

$$5060205, 5070105, 5080005, 5080905, 5090805.$$

**Aufgabe 140622:**
Klaus behauptet, eine von ihm aufgeschriebene natürliche Zahl $z$ habe folgende Eigenschaften:

(1) Vertauscht man zwei geeignete Ziffern von $z$ miteinander, so ist die auf diese Weise entstehende Zahl $z'$ um 198 größer als $z$.
(2) Die Summe aus $z$ und $z'$ beträgt 13776.

Stelle fest, ob es genau eine Zahl $z$ mit den von Klaus genannten Eigenschaften gibt! Wenn dies der Fall ist, so ermittle diese Zahl!

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Wenn es eine Zahl $z$ der genannten Art gibt, so gilt für sie und die Zahl $z'$:

(1) $z' = 198 + z$ sowie
(2) $z + z' = 13776$.

Aus (1) und (2) folgt: $z + 198 + z = 13776$, woraus man $2z = 13776 - 198 = 13578$, also $z = 6789$ erhält.
Also kann nur diese Zahl die genannten Eigenschaften haben.
In der Tat treffen nun Klaus' Aussagen für diese Zahl und $z' = 6789+198 = 6987$ zu, da $z'$ aus $z$ dadurch gewonnen werden kann, dass in $z$ die Ziffern 7 und 9 miteinander vertauscht werden.
Daher hat genau die Zahl z = 6789 die von Klaus genannten Eigenschaften.

**Aufgabe 180622:**
Ermittle alle zweistelligen Zahlen $z$, die die folgenden Bedingungen (1), (2) gleichzeitig erfüllen:

(1) Die Einerziffer von $z$ ist um 1 kleiner als die Zehnerziffer von $z$.
(2) Vertauscht man die Ziffern von $z$ miteinander, so erhält man eine zweistellige Primzahl.

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Wenn $z$ eine Zahl mit den geforderten Eigenschaften ist, so hat $z$ nach (2) nicht 0 als Einerziffer, also ist die Einerziffer eine der Ziffern 1, ..., 9.
Da nach (1) die Zehnerziffer um 1 größer ist, entfällt 9 als Einerziffer und es verbleiben wegen (1) für die zweistelligen Zahlen z nur die Möglichkeiten 21, 32, 43, 54, 65, 76, 87, 98.

Von ihnen entfallen 21, 43, 65 und 87, da aus ihnen bei Ziffernvertauschung je eine gerade zweistellige Zahl, also keine Primzahl, entsteht. Ferner entfällt die Zahl 54, aus der die durch 5 teilbare zweistellige Zahl 45 entsteht.

Daher können nur die Zahlen 32, 76 und 98 alle Bedingungen der Aufgabe erfüllen. Tatsächlich sind sie zweistellig und erfüllen (1), und sie erfüllen auch (2), da 23, 67 und 89 zweistellige Primzahlen sind. Die gesuchten Zahlen lauten folglich 32, 76 und 98.

**Aufgabe 210622:**
Fritz findet in einem alten Lehrbuch in einer Aufgabe fünfstellige natürliche Zahlen abgedruckt. Bei einer dieser Zahlen sind die an der Einer- und die an der Zehnerstelle stehenden Ziffern nicht mehr lesbar.
Wenn man für diese beiden unlesbaren Ziffern jeweils ein Sternchen (*) setzt, dann hat die Zahl die Form

$$418 * *$$

Außerdem meint Fritz, aus dem Aufgabentext entnehmen zu können, dass sich die fünfstellige Zahl ohne Rest sowohl durch 6 als auch durch 7 und durch 9 teilen lässt.
Untersuche, ob es eine fünfstellige Zahl gibt, die als die betreffende Zahl in dem Lehrbuch gestanden haben könnte und alle genannten Teilbarkeitseigenschaften hat!
Nenne diese Zahl! Gibt es außer ihr noch andere derartige Zahlen?

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Angenommen, es gibt eine solche Zahl. Dann folgt: Die Zahl ist durch 6 teilbar, also gerade; ihre Einerziffer lautet mithin 0, 2, 4, 6 oder 8.
Die Zahl ist ferner durch 9 teilbar; dasselbe gilt folglich für ihre Quersumme. Diese ist um $4 + 1 + 8$, d. h. um 13 größer als die Summe aus ihrer Zehner- und ihrer Einerziffer.
Setzt man der Reihe nach für die Einerziffer 0, 2, 4, 6, 8, dann ergibt sich für die Zehnerziffer jeweils der in der folgenden Tabelle angegebene Wert:

| Einerziffer | Summe aus 13 und der Einerziffer | Zehnerziffer |
|---|---|---|
| 0 | 13 | 5 |
| 2 | 15 | 3 |
| 4 | 17 | 1 |
| 6 | 19 | 8 |
| 8 | 21 | 6 |

Also kann die gesuchte Zahl nur eine der Zahlen 41850, 41832, 41814, 41886, 41868 sein. Von diesen ist nur 41832 durch 7 teilbar.
Daher kann nur diese Zahl an der angegebenen Stelle im Lehrbuch gestanden haben; denn sie hat als einzige alle verlangten Teilbarkeitseigenschaften und ist von der Form 418**, wie in der Aufgabe angegeben.

**Aufgabe 260621:**
Bei der folgenden fünfstelligen Zahl sind zwei Ziffern unleserlich geworden und durch Sternchen ersetzt.

$$27 * * 7$$

Anstelle der Sternchen sind zwei Ziffern so einzufügen, dass die Zahl durch 9 teilbar ist.
Gib alle fünfstelligen Zahlen an, die durch derartiges Einfügen entstehen können! Weise nach, dass alle gesuchten Zahlen von dir angegeben wurden!

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Durch Einfügen zweier Ziffern anstelle der Sternchen entsteht genau dann eine durch 9 teilbare Zahl, wenn deren Quersumme durch 9 teilbar ist. Letzteres ist genau dann der Fall, wenn die Summe der zwei eingefügten Ziffern 2 oder 11 beträgt.
Folglich ergibt sich genau dann eine durch 9 teilbare Zahl, wenn die beiden Sternchen in dieser Reihenfolge durch die Ziffern 0,2 bzw. 2,9 bzw. 1,1 bzw. 3,8 bzw. 2,0 bzw. 4,7 bzw. 5,6 bzw. 7,4 bzw. 8,3 bzw. 9,2 ersetzt werden.
Die gesuchten Zahlen lauten mithin
27027, 27117, 27207, 27297, 27387, 27477, 27567, 27657, 27747, 27837 und 27927.

**Aufgabe 300623:**
Eine Buchdruckerei habe zum Druck der Ziffern 0, 1, ..., 9 Lettern in folgenden Stückzahlen zur Verfügung:

| Ziffer | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Stückzahl | 350 | 340 | 320 | 340 | 360 | 310 | 300 | 320 | 320 | 340 |

Unter Verwendung nur dieser Lettern sollen die Seitenzahlen von 1 bis 1020 eines Buches gedruckt werden. Dabei soll keine Letter mehr als einmal benutzt werden.
Reichen die Lettern hierfür aus? Begründe deine Antwort!

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Die Lettern reichen nicht aus.
An der Einerstelle wird die Ziffer 6 jeweils einmal für die Zahlen 1 bis 10, 11 bis 20, ..., 1011 bis 1020 gebraucht, d. h. 102 mal.
An der Zehnerstelle wird die Ziffer 6 jeweils 10 mal für die Zahlen 60 bis 69, 160 bis 169, ..., 960 bis 969 gebraucht, d. h. 100 mal.
An der Hunderterstelle wird die Ziffer 6 für die Zahlen 600, ..., 699 gebraucht, d. h. 100 mal.
Es werden also 302 Lettern mit der Ziffer 6 gebraucht, während nur 300 zur Verfügung stehen.

**Aufgabe 320621:**
Bei der folgenden sechsstelligen Zahl sind zwei Ziffern unleserlich geworden und durch Sternchen ersetzt:

$$38\star\star 42$$

Anstelle der Sternchen sind zwei Ziffern so einzufügen, dass die Zahl durch 9 teilbar ist.
Gib alle sechsstelligen Zahlen an, die durch derartiges Einfügen entstehen können!
Weise nach, dass alle gesuchten Zahlen von dir angegeben wurden!

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Durch Einfügen zweier Ziffern entsteht genau dann eine durch 9 teilbare Zahl, wenn deren Quersumme durch 9 teilbar ist. Das ist wegen $3 + 8 + 4 + 2 = 17$ genau dann der Fall, wenn die Summe der zwei eingefügten Ziffern sich von 1 nur um ein Vielfaches der Zahl 9 unterscheidet.
Da eine Summe von zwei Ziffern höchstens $9 + 9 = 18$ betragen kann, ist folglich für die Summe der einzutragenden Ziffern nur entweder 1 oder 10 möglich. Alle Möglichkeiten, aus zwei Ziffern eine dieser Summen zu bilden, sind

$$1 = 0 + 1 = 1 + 0$$
$$10 = 1 + 9 = 2 + 8 = 3 + 7 = 4 + 6 = 5 + 5 = 6 + 4 = 7 + 3 = 8 + 2 = 9 + 1$$

Alle gesuchten Zahlen sind daher

$$380142, 381042, 381942, 382842, 383742, 384642, 385542, 386442, 387342, 388242, 389142$$

**Aufgabe 330622:**
Man denke sich aus den fünf Ziffern 1, 2, 3, 4, 5 alle verschiedenen Zahlen gebildet, die durch die Anordnung dieser Ziffern in jeder möglichen Reihenfolge entstehen können.
Welches ist die Summe aller dieser fünfziffrigen Zahlen?

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Für jede Möglichkeit, als Einerziffer eine der Ziffern 1, 2, 3, 4, 5 zu wählen, gibt es so viele Zahlen, wie es Reihenfolge-Möglichkeiten der übrigen vier Ziffern gibt. Die Anzahl dieser Möglichkeiten beträgt 24. Als Summe der Einerziffern erhält man folglich

$$24 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 24 \cdot 15 = 360$$

Dasselbe gilt für die Summe der Zehner-, Hunderter-, Tausender- und Zehntausenderziffern. Daher ergibt sich dasselbe Ergebnis wie bei der folgenden Rechnung:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 3 & 6 & 0 \\ & & & 3 & 6 & 0 & \\ & & 3 & 6 & 0 & & \\ & 3 & 6 & 0 & & & \\ 3 & 6 & 0 & & & & \\ \hline 3 & 9 & 9 & 9 & 9 & 6 & 0 \end{array}$$

# V.III Diophantische Gleichungen

## I Runde 1

**Aufgabe 240611:**
Zum Pioniergeburtstag sollen die tüchtigsten Altstoffsammler ausgezeichnet werden. Hierzu will die Pionierleiterin Bücher zu je 6 M und zu je 4 M kaufen, von jeder Sorte mindestens eins, andere Sorten aber nicht. Insgesamt will sie 30 M für diese Bücher ausgeben.

Gib alle Möglichkeiten an, welche Anzahlen von Büchern der beiden Sorten gewählt werden können, um diesen Bedingungen zu entsprechen!

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Werden $x$ Bücher zu je 6 M und $y$ Bücher zu je 4 M gekauft, so gilt $6x + 4y = 30$. (1)
Wegen $y \geq 1$ folgt hieraus $6x \leq 26$, also muss $x < 5$ sein. Daher und wegen $x \geq 1$ gibt es für $x$ nur die Möglichkeiten der folgenden Tabelle. Von diesen scheiden diejenigen aus, bei denen die Zahl $30 - 6x$ nicht durch 4 teilbar ist, da aus (1) folgt, dass $4y = 30 - 6x$ gelten muss.
Bei den übrigen Werten von $x$ ergeben sich aus dieser Gleichung die angegebenen Werte für $y$.

| $x$ | $6x$ | $30 - 6x = 4y$ | $y$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 6 | 24 | 6 |
| 2 | 12 | 18 | - |
| 3 | 18 | 12 | 3 |
| 4 | 24 | 6 | - |

Daher können nur die folgenden Anzahlen den Bedingungen der Aufgabe entsprechen:
Es werden entweder 1 Buch zu 6 M und 6 Bücher zu 4 M oder 3 Bücher zu 6 M und 3 Bücher zu 4 M gekauft.
Beide Anzahlangaben erfüllen die Bedingungen (1) und $x \geq 1$, $y \geq 1$. Daher sind hiermit alle gesuchten Möglichkeiten genannt.

## II Runden 2 & 3

**Aufgabe 300624:**
Ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen $n$, die sich in der Form $n = 5a + 7b$ darstellen lassen, wobei $a$ und $b$ natürliche Zahlen sind!

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Die folgende Tabelle zeigt alle Werte n = 5a + 7b mit a = 0, 1, 2, 3, 4, 5 und b = 0, 1, 2, 3, 4

| b\|a | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 |
| 1 | 7 | 12 | 17 | 22 | 27 | 32 |
| 2 | 14 | 19 | 24 | 29 | 34 | 39 |
| 3 | 21 | 26 | 31 | 36 | 41 | 46 |
| 4 | 28 | 33 | 38 | 43 | 48 | 53 |

Da bei weiterem Vergrößern von $a$ oder $b$ (oder beiden) stets jeweils auch $n$ größer wird, ergibt sich:
(1) Unter allen natürlichen Zahlen $n \leq 24$ lassen sich genau die Zahlen 0, 5, 7, 10, 12, 14, 15, 17, 19, 20, 21, 22, 24 in der genannten Form darstellen. Ferner ist aus der Tabelle ersichtlich:

(2) Die Zahlen 24, 25, 26, 27, 28 lassen sich in der genannten Form darstellen. Indem man nun zu den in (2) genannten Zahlen der Reihe nach $1 \cdot 5$, $2 \cdot 5$, $3 \cdot 5$, ... usw. addiert, erhält man:

(3) Auch die Zahlen 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, lassen sich in der genannten Form darstellen.
Mit (2) und (3) ist gezeigt, dass jede natürliche Zahl $n \geq 24$ sich in dieser Form darstellen lässt. Die insgesamt gesuchten Zahlen sind also genau die in (1) genannten Zahlen und alle natürlichen Zahlen $n > 24$.

**Aufgabe 330621:**
Von einem „Fest der Tiere“ wird erzählt:

Dort waren ebenso viele Storchenbeine wie Käfer, 90 Käferbeine mehr als Hasen, aber dreimal so viele Hasenbeine wie Störche.

Nenne Anzahlen der Störche, Hasen und Käfer, so dass die Erzählung stimmt!
Überprüfe dies bei deinen Anzahlangaben!
Bemerkung: Die Tiere sollen alle nach dem Biologielehrbuch gebaut sein: Jeder Storch mit 2 Beinen, jeder Hase mit 4 Beinen, jeder Käfer mit 6 Beinen.

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Anzahlangabe: Es waren 8 Störche, 6 Hasen und 16 Käfer.

Überprüfen der Erzählung: Die 8 Störche haben 16 Beine, also ebenso viele, wie es Käfer gibt. Die 16 Käfer haben 96 Beine, also 90 mehr, als es Hasen gibt. Die 6 Hasen haben 24 Beine, das sind dreimal so viele, wie es Störche gibt.

**Aufgabe 330631:**
Finde alle Möglichkeiten, drei natürliche Zahlen $a$, $b$, $c$ so zusammenstellen, dass $a + b + c = 12$ und $c - b = 3$ gilt!
Hinweis:
1. Die Null soll auch als natürliche Zahl bezeichnet werden.
2. Es wird auch zugelassen, dass sich unter den Zahlen $a$, $b$, $c$ solche befinden, die einander gleich sind.

**Lösung von offizieller Aufgabenkommission:**
Es muss $b \leq 4$ sein; denn wäre $b \geq 5$, so folgte wegen $c - b = 3$, dass $c \geq 8$ wäre.
Damit wäre bereits $b + c \geq 13$, also erst recht $a + b + c \geq 13$, im Widerspruch zu $a + b + c = 12$.

Für $b = 0$ folgt $c = 3$ und wegen $a + b + c = 12$ dann $a = 9$.
Für $b = 1$ folgt $c = 4$ und wegen $a + b + c = 12$ dann $a = 7$.
Für $b = 2$ folgt $c = 5$ und wegen $a + b + c = 12$ dann $a = 5$.
Für $b = 3$ folgt $c = 6$ und wegen $a + b + c = 12$ dann $a = 3$.
Für $b = 4$ folgt $c = 7$ und wegen $a + b + c = 12$ dann $a = 1$.
Damit sind alle gesuchten Zusammenstellungen gefunden.