Aufgaben und Lösungen der I. bis IV. Runde der Klassenstufe 7 der Mathematik-Olympiaden von 1960 bis 1994

OJM

Zentrales Komitee für die Olympiaden Junger Mathematiker

unter Nutzung von Manuela Kugels
`https://www.olympiade-mathematik.de/`

zusammengestellt von Steffen Polster
`https://mathematikalpha.de`
Chemnitz, 2019/22

bearbeitet von Christian Hercher
Flensburg, 2022

I Algebra

I.I Gleichungen, Gleichungssysteme

I Runde 1

Aufgabe V00701:
Drei Klassen halfen im NAW und putzten im Wettbewerb 9600 Ziegel ab. Die Klasse 7a putzte 840 Ziegel mehr ab als die Klasse 7b, die Klasse 7c jedoch schaffte 360 Stück mehr als die Pioniere der Klasse 7a.

Wer gewann den Wettbewerb, welche Leistungen erzielten die einzelnen Klassen (in Stück- und Prozentzahlen)?

Lösung von Steffen Polster:
Sind a, b, c die Stückzahlen der Klassen 7a, 7b und 7c, so gilt $a = 840 + b$ und $c = 360 + a$, also

$$a + b + c = 840 + b + b + 360 + 840 + b = 2040 + 3b = 9600 \quad \rightarrow \quad b = 2520, \quad a = 3360, \quad c = 3720$$

in Prozenten Klasse 7a: 35%, Klasse 7b: 26,25%, Klasse 7c: 38,75%.

Aufgabe V00703:
Der zehnte Teil einer Zahl wird um 3 vermehrt. Der gleiche Wert ergibt sich, wenn man $\frac{1}{100}$ dieser Zahl um 6 vermindert!
Wie heißt sie?

Lösung von Steffen Polster:
Ist x die gesuchte Zahl, so ergibt sich die Gleichung

$$\frac{x}{10} + 3 = \frac{x}{100} - 6$$

Deren einzige Lösung ist $x = -100$. Die gesuchte Zahl ist -100.

Aufgabe V00705:

$$\frac{169}{30} \quad ? \quad \frac{13}{15} = \frac{13}{2}$$

Welche Rechenzeichen können an Stelle des Fragezeichens stehen?

Lösung von Steffen Polster:
Es ergeben sich mit den Rechenoperationen

$$\frac{169}{30} + \frac{13}{15} = \frac{13}{2} \quad ; \quad \frac{169}{30} - \frac{13}{15} = \frac{143}{30}$$
$$\frac{169}{30} \cdot \frac{13}{15} = \frac{2197}{450} \quad ; \quad \frac{169}{30} : \frac{13}{15} = \frac{13}{2}$$

Als Rechenzeichen können "+" und ":" eingesetzt werden.

Aufgabe V00706:
Für das Gehäuse einer Haushaltwaage wurde im VEB Thüringer Industriewerk Rauenstein ein rechteckiger Blechstreifen von 390 mm Länge und 85 mm Breite verwendet. Die Stärke des Materials betrug 2,5 mm.
Durch einen Verbesserungsvorschlag gelang es, 2 mm starkes Blech zu benutzen.

Berechne die Materialeinsparung in t für eine Auflage von 100000 Stück!
(Dichte des Eisens 7,8 g·cm^{-3})

Lösung von Steffen Polster:
Der quaderförmige Blechstreifen hat ursprünglich ein Volumen $V_1 = a \cdot b \cdot c = 39 \cdot 8{,}5 \cdot 0{,}25 = 82{,}875$ cm^3. Durch die Einsparung sind es noch 66,3 cm^3, d. h. eine Volumeneinsparung von 16,575 cm^3. Mit der Dichte des Eisens sind dies 129,285 g.
Da insgesamt 100000 Bleche erzeugt werden sollen, werden 12,9285 t $\approx$ 13 t Material eingespart.

Aufgabe 020715:
Die Summe von 9 aufeinanderfolgenden natürlichen (positiven ganzen) Zahlen beträgt 396.
Wie lauten die Zahlen?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

$$n + (n+1) + (n+2) + (n+3) + (n+4) + (n+5) + (n+6) + (n+7) + (n+8) = 9n + 36 = 396$$

damit folgt $9n = 360$ und $n = 40$. Die Zahlen sind also 40 bis 48.

Aufgabe 040711:
Nur unter Verwendung der Ziffer 7 sollen Zahlen gebildet werden, die miteinander verknüpft die Zahl 1964 ergeben. Folgende Arten der Verknüpfung dürfen dabei auftreten: Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division. Brüche mit gleichem Zähler und Nenner sind nicht zu verwenden.
Gib eine der möglichen Lösungen an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
z. B.: $(777 + 777 + 777) : 7 + 77 + 777 + 777 = 1964$

Aufgabe 070711:
Bei einer Mathematikarbeit erzielten die 36 Schüler einer Klasse folgende Ergebnisse:

a) $\frac{5}{12}$ der Anzahl aller dieser Schüler erhielten eine Drei,
b) $\frac{2}{5}$ von der unter a) genannten Anzahl erreichte die Note Eins.
c) Die Anzahl der Vieren war ebenso groß wie die der Einsen.
d) Die Anzahl der Vieren betrug $\frac{3}{4}$ von der Anzahl der Zweien.
e) Die Anzahl der Fünfen ergibt sich aus a) bis d).
Gib die Zensurenverteilung bei dieser Mathematikarbeit an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Genau 15 Schüler erhielten eine Drei; denn $\frac{5}{12} \cdot 36 = 15$.
b) Genau 6 Schüler erreichten die Note Eins; denn $\frac{2}{5} \cdot 15 = 6$.
c) Genau 6 Schüler erzielten eine Vier.
d) Genau 8 Schüler bekamen eine Zwei; denn $\frac{3}{4} \cdot 8 = 6$.
e) Genau 1 Schüler erhielt eine Fünf; denn $36 - (15 + 6 + 6 + 8) = 1$.

Aufgabe 090714:
Gegeben sei eine beliebige dreistellige natürliche Zahl (z. B. 357). Schreibt man hinter diese Zahl noch einmal die gleiche Zahl, so erhält man eine sechsstellige Zahl (im Beispiel 357 357).
Beweise, dass für jede sechsstellige Zahl, die auf diese Weise entstehen kann, die folgende Behauptung gilt:
Dividiert man die sechsstellige Zahl zuerst durch 7, dann den gefundenen Quotienten durch 11 und den jetzt gefundenen Quotienten durch 13, so erhält man die dreistellige Ausgangszahl!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Jede sechsstellige Zahl, die in der beschriebenen Weise entstehen kann, ergibt sich aus ihrer dreistelligen Ausgangszahl durch folgende Rechnung:

1. Die Ausgangszahl wird mit 1000 multipliziert,
2. zum Ergebnis wird nochmals die Ausgangszahl addiert.

Daher ist die sechsstellige Zahl das 1001-fache der Ausgangszahl. Aus ihr entsteht folglich bei Division durch 7 wegen $1001 : 7 = 143$ das 143-fache der Ausgangszahl.
Wird dies durch 11 dividiert, so ergibt sich wegen $143 : 11 = 13$ das 13-fache der Ausgangszahl. Dividiert man dies durch 13, so erhält man die Ausgangszahl.
Das war die Behauptung, diese ist damit bewiesen.

Aufgabe 150712:
Zwei Gefäße, A bzw. B genannt, haben zusammen ein Fassungsvermögen von genau 8 Litern. Auf beide Gefäße ist eine bestimmte Wassermenge W so verteilt, dass A zur Hälfte und B ganz gefüllt ist. Gießt man nun soviel Wasser aus B in A, dass A ganz gefüllt ist, so ist B noch zu einem Sechstel gefüllt. Gefragt wird

a) nach dem Fassungsvermögen von jedem der Gefäße A und B, b) nach der Wassermenge W.

Ermittle alle in a) und b) erfragten Angaben, die die genannten Eigenschaften haben!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(I) Wenn die genannten Eigenschaften vorliegen, so folgt:

a) Gefäß A habe ein Fassungsvermögen von x Litern, dann hat B ein solches von $(8-x)$ Litern. Hierfür gilt
$$\frac{x}{2} + 8 - x = x + \frac{8-x}{6} \quad \Rightarrow \quad x = 5$$
Also kann nur die Angabe, dass Gefäß A ein Fassungsvermögen von 5 Litern und Gefäß B deshalb eines von 3 Litern hat, den Bedingungen der Aufgabe entsprechen. Weiter folgt:

b) Wegen $3{,}0\mathrm{l} + 2{,}5\mathrm{l} = 5{,}5$ l beträgt die Wassermenge $W = 5{,}5$ l. Also kann nur diese Angabe die Forderungen erfüllen.

Aufgabe 170711:
Matthias war in den Sommerferien in einem internationalen Pionierzeltlager. Er berichtet seinen Klassenkameraden:

> „Ein Viertel aller Teilnehmer und vier Pioniere kamen aus der Sowjetunion, ein Fünftel aller Teilnehmer und fünf Pioniere aus der DDR, ein Sechstel aller Teilnehmer und sechs Pioniere aus der CSSR, ein Achtel aller Teilnehmer und acht Pioniere aus der VR Polen, ein Neuntel aller Teilnehmer und neun Pioniere aus der VR Bulgarien. Die übrigen 21 Pioniere kamen aus der Ungarischen Volksrepublik. In jedem Zelt des Lagers waren genau acht Pioniere untergebracht.“

Ermittle aus diesen Angaben die Anzahl der Zelte des Lagers!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es sei x die Anzahl aller Teilnehmer. Dann gilt laut Aufgabe:

$$x = \left(\frac{1}{4}x + 4\right) + \left(\frac{1}{5}x + 5\right) + \left(\frac{1}{6}x + 6\right) + \left(\frac{1}{8}x + 8\right) + \left(\frac{1}{9}x + 9\right) = 21$$

woraus man erhält $x = 360$.
Wegen $360 : 8 = 45$ betrug die Anzahl der Zelte mithin 45.

Aufgabe 170714:
Der kleine Uwe hat würfelförmige, weiß gefärbte Bausteine mit einer Kantenlänge von 2 cm und würfelförmige, rot gefärbte Bausteine mit einer Kantenlänge von 3 cm. Er baute einen größeren, zusammengesetzten Würfelkörper auf und verwendete dazu nur Steine dieser beiden Sorten.
Dabei bestanden die vier senkrecht stehenden Außenwände aus roten Bausteinen, der restliche Würfelkörper bestand von unten bis oben durchgehend aus weißen Bausteinen.
Ermittle die Anzahl der hierbei verwendeten weißen und die der verwendeten roten Bausteine, wobei vorausgesetzt wird, dass Uwe nicht mehr als 60 Bausteine von jeder Sorte zur Verfügung hatte!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Höhe des von Uwe gebauten Würfelkörpers lässt sich sowohl aus einer Anzahl r roter Steine als auch aus einer Anzahl w weißer Steine zusammensetzen. Sie ist ferner gleich der Breite des Würfelkörpers, die sich aus der Breite von 2 roten Steinen und der einer Anzahl v (≥ 1) weißer Steine ergibt. Daher ist ihre Maßzahl (in cm) die Zahl

$$3r = 2w = 2v + 2 \cdot 3 \tag{1}$$

Hiermit ist $(2v + 2 \cdot 3)$ und folglich auch v durch 3 teilbar. Also gibt es eine natürliche Zahl $n \geq 1$ und mit $v = 3n$, und aus (1) folgt $w = 3n + 3$ sowie $r = 2n + 2$.
Alle verwendeten weißen Steine bilden einen Quader. Dieser besteht aus w Schichten; jede von ihnen enthält v Reihen zu je v Steinen. Daher wurden genau $W = w \cdot v2$ weiße Steine verwendet.

Wäre nun $n \geq 2$, so folgte $v \geq 6$, $w \geq 9$, also $W \geq 9 \cdot 36 > 60$ im Widerspruch zur Aufgabenstellung. Somit gilt $n = 1, v = 3, w = 6, r = 4$, und damit werden genau $W = 6 \cdot 9 = 54$ weiße Steine verwendet.
Alle verwendeten roten Steine sind in r Schichten angeordnet; jede von ihnen lässt sich aus vier Reihen zu je $(r - 1)$ Steinen zusammensetzen. Daher wurden genau $R = r \cdot 4(r - 1) = 4 \cdot 4 \cdot 3 = 48$ rote Steine verwendet.

Aufgabe 180712:

Berechne

$$\begin{aligned} a &= 1{,}25 : \frac{13}{12} \cdot \frac{91}{60} \\ b &= 2{,}225 - \frac{5}{9} - \frac{5}{6} \\ c &= \frac{32}{15} : \frac{14}{15} + 6 + \left(\frac{45}{56} - 0{,}375\right) \\ d &= c - \frac{b}{a} \end{aligned}$$

ohne Verwendung von Näherungswerten!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es ist

$$a = \frac{5}{4} : \frac{13}{12} \cdot \frac{91}{60} = \frac{5 \cdot 12 \cdot 91}{4 \cdot 13 \cdot 60} = \frac{7}{4}$$

$$b = \frac{89}{40} - \frac{5}{9} - \frac{5}{6} = \frac{801 - 200 - 300}{360} = \frac{301}{360}$$

$$c = \frac{32 \cdot 15}{15 \cdot 14} + 6 + \left(\frac{45}{56} - \frac{3}{8}\right) = \frac{17}{6} + 6 + \frac{45 - 21}{56} = \frac{61}{7}$$

$$d = \frac{61}{7} - \frac{\frac{301}{360}}{\frac{7}{4}} = \frac{61}{7} - \frac{301 \cdot 4}{360 \cdot 7} = \frac{61 \cdot 90}{7 \cdot 90} - \frac{301}{90 \cdot 7} = \frac{5490 - 301}{630} = \frac{5189}{630}$$

Anmerkung: Auch die Angaben $a = 1\frac{3}{4}$, $a = 1{,}75$, $c = 8\frac{5}{7}$ und $d = 8\frac{149}{630}$ genügen der Aufgabenstellung.

Aufgabe 200712:
Aus einem alten ägyptischen Rechenbuch (1700 v. u. Z.) stammt folgende Aufgabe:
Ein Wanderer stellt fest, dass ein Hirte 70 Schafe auf die Weide führt. Er fragt den Hirten: „Sind die Schafe, die du hier führst, deine sämtlichen Schafe?“
„Nein“, antwortet der Hirte, „ich führe nur zwei Drittel von einem Drittel der gesamten Herde, die mir anvertraut ist, auf die Weide.“

Ermittle die Stückzahl der gesamten Herde, die diesem Hirten anvertraut war!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Ist x die gesuchte Stückzahl der gesamten Herde, so ist ein Drittel der Herde $\frac{x}{3}$, und zwei Drittel von diesem Drittel sind $\frac{2}{3} \cdot \frac{x}{3}$. Daher gilt nach dem Aufgabentext:

$$\frac{2}{3} \cdot 13 = 70 \qquad \text{also} \qquad x = 315$$

Die Stückzahl der gesamten Herde beträgt daher 315.

Aufgabe 210712:
Andreas sagt zu seinem Freund:
„Nimm in eine Hand eine gerade, in die andere Hand eine ungerade Anzahl Hölzchen!
Verdopple in Gedanken die Anzahl der Hölzchen in der linken und verdreifache die Anzahl der Hölzchen in der rechten Hand! Addiere die beiden Produkte und nenne mir das Ergebnis! Ich werde dir dann mit Sicherheit sagen, in welcher Hand du die gerade Anzahl von Hölzchen hast.“
Untersuche, ob man wirklich allein aus dem von dem Freund genannten Ergebnis mit Sicherheit die von Andreas angekündigte Aussage erhalten kann!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn der Freund in der linken Hand eine gerade und in der rechten Hand eine ungerade Anzahl von Hölzchen hat, so gilt:
Das erste Produkt ist gerade, weil einer seiner Faktoren gerade ist. Das zweite Produkt ist ungerade, weil beide Faktoren ungerade sind. Die Summe aus diesen beiden Produkten, einer geraden und einer ungeraden Zahl, ist folglich ungerade.

Wenn aber der Freund in der linken Hand eine ungerade Anzahl und in der rechten Hand eine gerade Anzahl von Hölzchen hat, so gilt:
Beide Produkte sind gerade; denn in jedem dieser Produkte kommt ein geradzahliger Faktor vor. Also ist auch ihre Summe eine gerade Zahl.
Daher kann man mit Sicherheit die von Andreas angekündigte Aussage erhalten: Wenn der Freund eine ungerade Zahl als Ergebnis nennt, so hat er die gerade Anzahl von Hölzchen in der linken Hand; wenn er aber eine gerade Zahl als Ergebnis nennt, so hat er die gerade Anzahl von Hölzchen in der rechten Hand.

Aufgabe 220713:
Zwei landwirtschaftliche Produktionsgenossenschaften (LPG) A und B wollen einen Entwässerungsgraben von 2,4 km Länge säubern.
Der LPG A gehören davon 1,5 km, die LPG B besitzt die übrigen 0,9 km.
Damit diese wichtige Arbeit in kurzer Zeit geschafft wird, hilft auch die LPG C mit. Die drei LPG führen die Säuberungsarbeiten so durch, dass jede einen gleichlangen Grabenabschnitt übernimmt. Danach ist an die LPG C für die von ihren Mitgliedern geleistete Arbeit ein Betrag von insgesamt 240 M durch die LPG A und B zu zahlen. Jede dieser beiden LPG zahlt davon soviel, wie es der Länge des Grabenstücks entspricht, dessen Reinigung die LPG C für sie übernommen hat.

Berechne die beiden von den LPG A und B gezahlten Beträge!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Jede LPG säuberte ein Drittel des 2,4 km langen Grabens, also 0,8 km. Diese Länge entspricht daher den 240 M, die die LPG C bekommt. Für je 0,1 km erhält die LPG C somit jeweils 30 M. Von den 0,9 km der LPG B wurden 0,8 km mit eigenen Kräften und folglich 0,1 km durch die LPG C gesäubert.
Die LPG B zahlte daher 30 M, die LPG A die restlichen 210 M an die LPG C.

Aufgabe 240714:
(a) Über die Maßzahlen der in Zentimeter gemessenen Seitenlängen eines Dreiecks wird vorausgesetzt:
(1) Diese Maßzahlen sind drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen.
(2) Der Umfang des Dreiecks ist um 25 cm länger als die kürzeste Dreiecksseite. Ermittle aus diesen Voraussetzungen die drei Seitenlängen!

(b) Löse die Aufgabe, wenn die Voraussetzung (2) durch die folgende Voraussetzung (2') ersetzt wird!
(2') Es sei n eine vorgegebene natürliche Zahl. Der Umfang des Dreiecks ist um n Zentimeter länger als die kürzeste Dreiecksseite. Die gesuchten drei Seitenlängen sind mit Hilfe von n ausgedrückt anzugeben.

(c) Untersuche, welche natürlichen Zahlen n in (2') vorzugeben sind, damit in (b) eine lösbare Aufgabe entsteht!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(a) Da der Umfang die Summe der Längen der kürzesten Dreiecksseite und der beiden anderen Seiten ist, beträgt nach (2) die Summe der Längen der beiden anderen Seiten 25 cm. Also ist 25 nach (1) die Summe zweier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen. Das ist nur möglich, wenn es sich um die Zahlen 12 und 13 handelt. Hiernach (und nochmals wegen (1)) lauten die gesuchten Seitenlängen 11 cm, 12 cm,

13 cm.

(b) Wie in (a) folgt, dass n die Summe zweier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen ist.
Bezeichnet m die Zahl in der Mitte zwischen diesen beiden aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, so lauten sie $m - \frac{1}{2}$ und $m + \frac{1}{2}$; ihre Summe ist also $2m$.
Da sie n beträgt, muss $m = \frac{n}{2}$ sein. Die beiden aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen sind somit $\frac{n}{2} - \frac{1}{2}$ und $\frac{n}{2} + \frac{1}{2}$, die Maßzahlen der drei gesuchten Seitenlängen können folglich nur $\frac{n}{2} - \frac{3}{2}$, $\frac{n}{2} - \frac{1}{2}$, $\frac{n}{2} + \frac{1}{2}$ lauten.
(c) Die Aufgabe (b) ist hiernach genau dann lösbar, wenn die zuletzt gefundenen Zahlen natürliche Zahlen größer als 0 sind, die auch die in der Dreiecksungleichung geforderte Bedingung erfüllen, dass die größte der drei Maßzahlen kleiner als die Summe der beiden anderen Maßzahlen ist.

(I) Natürliche Zahlen sind die drei Zahlen genau dann, wenn die (vorzugebende natürliche) Zahl n ungerade ist und $n \geq 3$ gilt.
(II) Größer als 0 sind sie genau dann, wenn $n > 3$ ist.
(III) Für $n = 5$ lauten die drei Maßzahlen 1, 2, 3; sie erfüllen also nicht die Dreiecksungleichung.
Für $n = 7$ lauten sie 2, 3, 4 und erfüllen somit die Dreiecksungleichung.
Vergrößert man n noch weiter, so vergrößern sich die drei Maßzahlen stets um einen einheitlichen Betrag. Also vergrößert sich die Summe der beiden kürzesten Längen um den doppelten Betrag wie die längste; somit bleibt die Dreiecksungleichung erst recht gültig.
Mit (I), (II), (III) ist bewiesen: In (b) entsteht genau dann eine lösbare Aufgabe, wenn die natürliche Zahl n als ungerade Zahl $n \geq 7$ vorgegeben wird.

Aufgabe 300712:
Fünf Schüler der Klasse 7a sammelten Altpapier. Von der Menge, die sie insgesamt zusammenbrachten, hatte Marco ein Viertel, Frank ein Sechstel, Matthias ein Fünftel und Steffen ein Zehntel beigetragen. Dirk hatte 2 kg mehr als Marco gesammelt.

a) Wie viel Kilogramm Altpapier hatte jeder dieser fünf Schüler beigetragen?
b) Welcher Betrag wurde für die von den fünf Schülern insgesamt abgelieferte Papiermenge bezahlt, wenn für jedes Kilogramm 30 Pfennig bezahlt wurden?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn die fünf Schüler insgesamt x Kilogramm Altpapier zusammenbrachten, so hatten jeweils Marco $\frac{x}{4}$, Falk $\frac{x}{6}$, Matthias $\frac{x}{5}$, Steffen $\frac{x}{10}$ und Dirk $\frac{x}{4} + 2$ Kilogramm beigetragen. Also gilt

$$x = \frac{x}{4} + \frac{x}{6} + \frac{x}{5} + \frac{x}{10} + \frac{x}{4} + 2 = \frac{58x}{60} + 2 \qquad \Rightarrow \qquad x = 60$$

a) Daher hatten Marco 15 kg, Falk 10 kg, Matthias 12 kg, Steffen 6 kg und Dirk 17 kg beigetragen.
b) Wegen $60 \cdot 30 = 1800$ wurden für das gesammelte Altpapier 18 M bezahlt.

Aufgabe 320713:
Ein Wasserbehälter soll durch zwei Röhren gefüllt werden. Zum Füllen nur durch die erste Röhre wären 3 Stunden erforderlich, zum Füllen nur durch die zweite Röhre 2 Stunden.
In wie viel Minuten ist der Behälter voll, wenn durch beide Röhren gleichzeitig gefüllt wird?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
In einer Minute wird wegen 3 h = 180 min von der ersten Röhre $\frac{1}{180}$ des Behälters gefüllt, ebenso wegen 2 h = 120 min von der zweiten Röhre $\frac{1}{120}$ des Behälters. Also füllen beide Röhren zusammen in einer Minute

$$\frac{1}{180} + \frac{1}{120} = \frac{1}{72}$$

des Behälters. Daher ist der Behälter durch beide Röhren in 72 Minuten gefüllt.

Aufgabe 330713:
Anke berichtet, dass sie ein gleichschenkliges Dreieck mit dem Umfang 14 cm gezeichnet hat, in dem eine der drei Seiten genau dreimal so lang ist wie eine zweite der drei Seiten.
Beate meint, durch diese Angaben seien die Längen aller drei Seiten eindeutig bestimmt.
Christin meint dagegen, die Angaben könnten bei mehr als einer Möglichkeit für die drei Seitenlängen zutreffen.
Untersuche, ob Beate oder Christin recht hat! Ermittle alle vorhandenen Möglichkeiten für die drei Längen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Ist c die Länge der Basis und $a = b$ die Länge der Schenkel des genannten Dreiecks, so gilt nach Anjas Angaben entweder $a = 3 \cdot c$ oder $c = 3 \cdot a$.
Da nach der Dreiecksungleichung $a + a > c$ gilt, scheidet jedoch der Fall $c = 3 \cdot a$ aus; also verbleibt nur die Möglichkeit $a = 3 \cdot c$. (1) Nach den Angaben gilt ferner $2 \cdot a + c = 14$ cm. (2)
Aus (1) und (2) folgt $6 \cdot c + c = 14$ cm, also $c = 2$ cm und damit $a = b = 6$ cm.
Diese Längen erfüllen nicht nur die Forderung $a + a > c$, sondern auch die Forderung $a + c > a$ der Dreiecksungleichung. Also hat Beate recht; für die Längen gibt es genau die genannte Möglichkeit.

II Runde 2

Aufgabe 050721:
Bei den Nahverkehrsbetrieben Rostock kann man Straßenbahnfahrscheine für Erwachsene zu folgenden Preisen kaufen:

(1) Einen Fahrschein an der Zahlbox für 0,20 MDN
(2) Eine Karte mit 6 Fahrabschnitten für 1,00 MDN
(3) Einen Block mit 50 Fahrscheinen für 7,50 MDN (Die Gültigkeitsdauer ist unbegrenzt)
(4) Eine Monatskarte für beliebig viele Fahrten für 10,00 MDN

Welches ist die kleinste Anzahl von Fahrten (monatlich), bei der für eine Person die Monatskarte am billigsten ist?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Eine Straßenbahnfahrt kostet im Falle (1) 20 Pfennig, im Falle (2) $16\frac{2}{3}$ Pfennig, im Falle (3) 15 Pfennig.
Im Falle (3) kosten x Fahrten im Monat genau $15 \cdot x$ Pfennig, während sie im Falle (4) gerade 1000 Pfennig kosten.
Daher ist die Monatskarte bei x Fahrten genau dann am billigsten, wenn $15 \cdot x \geq 1000$ ist; d. h. bei 67 und mehr Fahrten monatlich ist die Monatskarte am billigsten, bei weniger Fahrten nicht.
Die gesuchte Zahl ist daher 67.

Aufgabe 080722:
Es seien a und b beliebige natürliche Zahlen mit $a > b$.
a) Man berechne alle Zahlen x, für die die Summe aus x und dem Produkt von a und b das Quadrat der Zahl a ergibt!
b) Man berechne alle Zahlen y, für die die Differenz aus dem Produkt von a und b und der Zahl y das Quadrat der Zahl b ergibt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

(a) Angenommen, es gibt eine Zahl x mit der geforderten Eigenschaft, dann gilt: $ab + x = a^2$, woraus man $x = a^2 - ab$ erhält.

Also kann höchstens die Zahl $x = a^2 - ab = a(a-b)$ Lösung sein. Tatsächlich ist

$$a \cdot b + a(a-b) = ab + a^2 - ab = a^2$$

(b) Angenommen, es gibt eine Zahl y mit der geforderten Eigenschaft, dann gilt: $ab - y = b^2$, woraus man $y = ab - b^2$ erhält.

Also kann höchstens die Zahl $y = ab - b^2 = b(a-b)$ Lösung sein. Tatsächlich ist

$$a \cdot b - b(a-b) = ab - ab + b^2 = b^2$$

Aufgabe 140724:
Fritz hat von seinem Freund Max für 6 Tage ein Buch geliehen. Zu seinem Freund Paul, der das Buch nach ihm leihen möchte, sagt er am Morgen des 6. Tages:

„Am ersten Tag las ich den 12. Teil des Buches, an den folgenden 4 Tagen jeweils ein Achtel, und heute muss ich noch, wenn ich das ganze Buch lesen will, 20 Seiten weniger lesen, als ich in den vergangenen Tagen zusammen gelesen habe.
Wie viel Seiten hat das Buch insgesamt?“

Untersuche, welche Möglichkeiten es für Paul gibt, auf diese Frage so zu antworten, dass alle Angaben von Fritz zutreffen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, die Angaben treffen zu, wenn das Buch x Seiten hat. Von ihnen las Fritz am ersten Tag $\frac{x}{12}$ Seiten, an den folgenden 4 Tagen zusammen $4 \cdot \frac{x}{8}$ Seiten, das sind zusammen $\frac{7}{12}x$ Seiten. Für den letzten Tag verblieben daher noch $\frac{5}{12}x$ Seiten. Das waren laut Aufgabe 20 Seiten weniger als $\frac{7}{12}x$ Seiten. Daraus folgt $\frac{2}{12}x = 20$ und somit $x = 6 \cdot 20 = 120$.

Somit können nur für die Antwort, das Buch habe 120 Seiten, die Angaben von Pritz zutreffen. In der Tat treffen sie hierfür zu; denn hat das Buch 120 Seiten, so las Fritz am ersten Tag 10 Seiten, an den folgenden 4 Tagen je 15 Seiten, bis dahin also zusammen 70 Seiten; und liest er noch (20 Seiten weniger, d. h.) 50 Seiten, so ergibt sich genau die Seitenzahl des Buches, 120 Seiten.

Aufgabe 160721:
Nach der Jugendweihefeier ließen sich alle Schüler einer Klasse einzeln fotografieren. Jeder ließ von seinem Foto genügend viele Abzüge herstellen, und dann tauschte jeder Schüler dieser Klasse mit jedem seiner Klassenkameraden sein Foto aus.
Wie viel Schüler tauschten insgesamt in dieser Klasse miteinander die Fotos aus, wenn dabei genau 812 Fotografien ihren Besitzer wechselten?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Bezeichnet man die gesuchte Anzahl der Schüler dieser Klasse mit x, dann erhielt jeder Schüler $(x-1)$ Fotografien. Eine natürliche Zahl $x > 1$ entspricht mithin genau dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn für sie $x(x-1) = 812$ gilt.

Nun sind x und $x - 1$ benachbarte natürliche Zahlen. Da $812 = 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 29$ ist, lässt sich 812 nur auf die folgenden Weisen in ein Produkt aus zwei natürlichen Zahlen zerlegen:

$$812 = 1 \cdot 812 = 2 \cdot 406 = 4 \cdot 203 = 7 \cdot 116 = 14 \cdot 58 = 28 \cdot 29$$

Dabei sind nur im Falle $28 \cdot 29$ die beiden Faktoren benachbarte natürliche Zahlen. Daher ist $x = 29$.
Es tauschten also 29 Schüler in der genannten Klasse ihre Fotos aus.

Aufgabe 180722:
Von einem Bruch wird gefordert, dass er die beiden folgenden Eigenschaften (1), (2) hat. Ermittle alle Brüche, die diese Forderung erfüllen!

(1) Der Bruch stellt die gleiche gebrochene Zahl dar wie 0,4.
(2) Die Summe aus dem Zähler und dem Nenner dieses Bruches ist eine zweistellige Quadratzahl.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, es gibt einen solchen Bruch $\frac{p}{q}$ mit natürlichen Zahlen p, q und $q \neq 0$. Wegen (1) gilt dann $\frac{p}{q} = \frac{2}{5}$.
Daraus folgt $p = 2n$ und $q = 5n$ (mit $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$), also $p + q = 7n$, was mit $7|p + q$ gleichbedeutend ist.

Da die Zahl 49 die einzige durch 7 teilbare zweistellige Quadratzahl ist, kann wegen (2) nur $p + q = 49$ und somit $n = 7$, $p = 14$, $q = 35$ gelten. Wenn es also einen Bruch mit den geforderten Eigenschaften gibt, dann kann dies nur der Bruch $\frac{14}{35}$ sein. Tatsächlich erfüllt der Bruch beide Bedingungen.

Aufgabe 260721:
Anne, Bernd und Peter helfen im Garten bei der Apfelernte. Alle drei benutzen Körbe gleicher Größe. Anne benötigt 10 Minuten, um einen Korb zu füllen, Bernd braucht dafür 15 Minuten und der kleine Peter sogar 30 Minuten.
Wie lange würde es dauern, bis die drei Kinder gemeinsam einen Korb gefüllt hätten?
Wir setzen voraus, dass sich für keinen der drei Helfer die Pflückgeschwindigkeit ändert.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Anne hat in einer Minute $\frac{1}{10}$ ihres Korbes gefüllt, Bernd $\frac{1}{15}$ und Peter $\frac{1}{30}$. Alle zusammen haben nach einer Minute also

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{30} = \frac{1}{5}$$

eines Korbes gefüllt. Sie brauchen somit zusammen 5 Minuten, um einen Korb gemeinsam zu füllen.

Aufgabe 270721:
Jörg unternahm in den Ferien mit seinem Fahrrad eine Dreitagewanderung. Er legte dabei am ersten Tag die Hälfte und am zweiten Tag ein Drittel der Länge der für alle drei Tage geplanten Wanderstrecke zurück.
Am zweiten Tag war Jörg 24 km weniger gefahren als am ersten Tag.
Ermittle die Länge der Wegstrecke, die Jörg noch für den dritten Tag verblieb!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Aus $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ folgt, dass Jörg am ersten Tag $\frac{1}{6}$ des für alle drei Tage geplanten Weges mehr zurücklegte als am zweiten Tag. Da $6 \cdot 24 = 144$ ist, betrug die gesamte Wanderstrecke 144 km.
Am ersten Tag legte Jörg somit $144km : 2 = 72$ km, am zweiten Tag $144km : 3 = 48$ km zurück. Damit verblieben Jörg für den dritten Tag wegen $144 - 72 - 48 = 24$ noch 24 km.

Aufgabe 320724:
In einem Hallenbad befindet sich auch ein Planschbecken für Kinder. Es kann durch eine Warmwasserleitung und eine Kaltwasserleitung bis zu einer markierten Höhe gefüllt werden. Würde man nur die Warmwasserleitung betreiben, so würde es $12\frac{1}{2}$ Minuten dauern, bis der Wasserspiegel diese Höhe erreicht. Nur mit der Kaltwasserleitung würde man 10 Minuten dazu brauchen.
Um eine vorgesehene Wassertemperatur zu erreichen, wurde zunächst $2\frac{1}{2}$ Minuten lang aus beiden Leitungen Wasser eingelassen; dann wurde die Warmwasserleitung geschlossen.
Berechne die Zeit, die danach noch gebraucht wurde, um allein mit der Kaltwasserleitung den Rest des Beckens bis zur markierten Höhe zu füllen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Warmwasserleitung füllt das Becken in $12\frac{1}{2}$ Minuten, d. h. in $\frac{25}{2}$ Minuten, also füllt sie in einer Minute $\frac{2}{25}$ des Beckens.
Ebenso füllt die Kaltwasserleitung in einer Minute $\frac{1}{10}$ des Beckens. Somit wurden zunächst von beiden Leitungen zusammen in je einer Minute $\frac{2}{25} + \frac{1}{10} = \frac{9}{50}$ des Beckens gefüllt; in $2\frac{1}{2}$ Minuten $\frac{5}{2} \cdot \frac{9}{50} = \frac{9}{20}$ des Beckens.
Danach blieben somit als Rest noch $1 - \frac{9}{20} = \frac{11}{20}$ des Beckens zu füllen. Wegen $\frac{11}{20} : \frac{1}{10} = \frac{11}{2}$ war dieser Rest $\frac{11}{2}$ mal so groß wie $\frac{1}{10}$ 10 des Beckens, d. h. wie derjenige Teil des Beckens, der in einer Minute allein durch die Kaltwasserleitung gefüllt werden kann.
Also wurden für das Füllen des Restes noch $\frac{11}{2} = 5\frac{1}{2}$ Minuten gebraucht.

Aufgabe 330723:
Über ihre viertägige Radtour berichten Teilnehmer:

Michael: „Am zweiten Tag haben wir genau 7 km mehr als am dritten Tag zurückgelegt.“
Martin: „Am zweiten und am dritten Tag sind wir insgesamt 105 km gefahren.“
Matthias: „Am ersten Tag wurden genau 5 16 und am vierten Tag genau 1 4 der gesamten Weglänge aller vier Tage geschafft.“

Weise nach, dass durch diese Angaben eindeutig bestimmt ist, wie viele Kilometer an jedem der vier Tage zurückgelegt wurden, und gib diese vier Weglängen an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Am zweiten und am dritten Tag zusammen wurden nach Michaels Aussage 7 km und die zweifache Weglänge des dritten Tages gefahren. Da dies nach Martins Aussage 105 km waren, betrug die zweifache Weglänge des dritten Tages $(105 - 7)$ km $= 98$ km. Also wurden am dritten Tag 98 km : 2 = 49 km, am zweiten Tag $(49 + 7)$ km $= 56$ km gefahren.

Am ersten und am vierten Tag zusammen wurden nach Matthias' Aussage $\frac{5}{16} + \frac{1}{4} = \frac{9}{16}$ der gesamten Weglänge gefahren. Die 105 km des zweiten und dritten Tages waren folglich die restlichen $\frac{7}{16}$ der gesamten Weglänge; diese betrug daher $\frac{7}{16} \cdot 105$ km $= 240$ km.

Also wurden am ersten Tag $\frac{5}{16} \cdot 240$ km $= 75$ km, am vierten Tag $\frac{1}{4} \cdot 240$ km $= 60$ km gefahren. Damit ist der geforderte Nachweis geführt, und die vier Weglängen der einzelnen Tage sind angegeben.

Aufgabe 340721:
Großvater hatte seinen drei Enkeln einen Korb mit Nüssen mitgebracht, die sich diese ehrlich teilen sollten. Lars, der allein im Haus war, nahm sich als erster seinen Anteil: Er entnahm dem Korb ein Drittel der Nüsse.
Katja, die beim Nachhausekommen nicht wusste, dass sich Lars bereits bedient hatte, nahm von den im Korb verbliebenen Nüssen ein Drittel.
Schließlich nahm ebenfalls Markus ein Drittel der im Korb verbliebenen Nüsse. Es waren noch 16 Nüsse im Korb.
Wie viele Nüsse hatte jedes der drei Kinder genommen?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Waren zu Beginn n Nüsse im Korb, so folgt:
Lars nahm $\frac{n}{3}$ Nüsse, danach blieben $n - \frac{n}{3} = \frac{2n}{3}$ Nüsse im Korb.
Davon nahm Katja $\frac{1}{3}\frac{2n}{3} = \frac{2n}{9}$ Nüsse, danach blieben $\frac{2n}{3} - \frac{2n}{9} = \frac{4n}{9}$ Nüsse im Korb.
Davon nahm Markus $\frac{1}{3}\frac{4n}{9} = \frac{4n}{27}$ Nüsse, danach blieben $\frac{4n}{29} - \frac{4n}{27} = \frac{8n}{27}$ Nüsse im Korb. Da dies 16 Nüsse waren, folgt $\frac{8n}{27} = 16$ und daraus $n = 54$.

Also waren zu Beginn 54 Nüsse im Korb.
Von ihnen nahm Lars 18 Nüsse, von den verbleibenden 36 Nüssen nahm Katja 12 Nüsse, von den verbleibenden 24 Nüssen nahm Markus 8 Nüsse.

III Runde 3

Aufgabe 010735:
Rolf behauptet, er kenne eine Rechenaufgabe, in der nur die Zahl 7 verwendet wird und deren Ergebnis die Jahreszahl 1962 ist.
a) Versuche, eine derartige Rechenaufgabe aufzustellen!
b) Lässt sich auch eine Rechenaufgabe aufstellen, in der nur die Zahl 1962 verwendet wird und deren Ergebnis 7 lautet? Wenn ja, gib diese Rechenaufgabe an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Zu dieser Aufgabenstellung gibt es mehrere Lösungen, z. B.

$$a_1)\quad \left(7+7+7+7+7+7-\frac{7}{7}-\frac{7}{7}\right)7)\cdot 7\cdot 7+\frac{7}{7}+\frac{7}{7}=1962$$

$$a_2)\quad 7\cdot(7+7)\cdot(7+7)+(7+7+7+7+7)\cdot 7+7\cdot 7\cdot 7\cdot 7+(7+7):7=1962$$

$$b)\quad \frac{1962+1962+1962+1962+1962+1962+1962}{1962}=7$$

Aufgabe 020733:
Hans hat eine Eins geschrieben und ist in bester Stimmung. Als er heimkommt, läuft er daher frohgemut die 20 Stufen bis zu seiner Wohnung im 1. Stock so hinauf, dass er immer 3 Stufen hinauf- und 2 wieder hinuntersteigt, ohne eine Stufe auszulassen.
Klaus, der im gleichen Haus im 4. Stock wohnt, meint: „Wenn du so weitergehst, bin ich eher vor meiner Tür als du vor deiner.“
Sie vereinbaren, dass sie beide im gleichen Rhythmus steigen, und dass der gewinnt, der zuerst auf dem Treppenabsatz vor seiner Wohnung steht. (Bis zum 4. Stock sind es 4 mal 20 Stufen.)
a) Wer gewinnt?
b) Wer würde gewinnen, wenn es bis zum 1. Stock nur 10 Stufen wären und die 3 anderen Treppen aber je 20 Stufen haben?
c) Wie viel Stufen müsste die unterste Treppe haben, damit beide Jungen gleichzeitig ankommen? (Auch hier sollen die 3 übrigen Treppen 20 Stufen haben.)
Begründe deine Antworten!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

a) Die Anzahl der Schritte, die Klaus braucht, ist gleich der Anzahl der Stufen, also 80. Hans schafft in $3+2=5$ Schritten nur $3-2=1$ Stufe. Zu beachten ist aber, dass Hans von der 17. Stufe aus direkt auf seinen Stock kommt (mit drei Schritten), ohne die zwei Schritte wieder zurückzugehen.
Also braucht Hans $17\cdot 5+3=88$ Schritte, womit Klaus gewinnt.

b) Klaus braucht $10+60=70$ Schritte; Hans nur $7\cdot 5+3=38$ und gewinnt in diesem Fall.

c) Gleichheit der Anzahl der Schritte bei s Stufen: $(s-3)\cdot 5+3=s+60$, damit $5s-s=60-3+15$ und weiter $s=18$.

Aufgabe 040731:
Wie viel Seiten eines Buches werden von Seite 1 an fortlaufend nummeriert, wenn dabei insgesamt 1260 Ziffern gedruckt werden?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Zunächst hat man die Seiten 1-9 welche je 1 Ziffern haben $\Rightarrow$ 9 Ziffern.
Dann die Zahlen von 10-99 mit je 2 Ziffern $\Rightarrow$ 180 Ziffern.
Die nun folgenden Zahlen sind alle dreistellig. Bis zur Seite 99 wurden 189 Ziffern benötigt, zieht man das von den 1260 Gesamtziffern ab so sind noch 1071 Ziffern übrig. Teilt man das durch drei so erhält man die Anzahl der dreistelligen Zahlen. Diese ist 357.
Das heißt, dass nach Seite 99 noch 357 andere Seiten kommen. Rechnet man nun $99 + 357$ so erhält man die Gesamtseitenzahl. Also hat das Buch 456 Seiten.

Aufgabe 060734:
Die Zahl $\frac{16}{15}$ soll in der Form $\frac{16}{15} = \frac{a}{m} + \frac{b}{n}$ dargestellt werden. Dabei sollen a, b, m, n natürliche Zahlen sein, für die die Brüche $\frac{a}{m}$ und $\frac{b}{n}$ nicht kürzbar und keine ganzen Zahlen sind.

Gib drei Beispiele einer solchen Darstellung an, wobei
im ersten Beispiel $m = n$ und $a \neq b$ gilt,
im zweiten Beispiel $a = b$ und $m \neq n$ gilt,
im dritten Beispiel $a = b$ und $m = n$ gilt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. $\frac{16}{15} = \frac{a}{m} + \frac{b}{m}$ kann z. B. mit $m = 15$, $a = 2$, $b = 14$ erreicht werden, wobei auch alle anderen Bedingungen der Aufgabe erfüllt sind: $\frac{16}{15} = \frac{2}{15} + \frac{14}{16}$.

II. $\frac{16}{15} = \frac{a}{m} + \frac{a}{n}$ kann z. B. mit $m = 3$, $n = 5$, $a = 2$ erreicht werden, wobei auch alle anderen Bedingungen der Aufgabe erfüllt sind: $\frac{16}{15} = \frac{2}{3} + \frac{2}{5}$.

III. $\frac{16}{15} = \frac{a}{m} + \frac{a}{m}$ kann (zugleich mit den Bedingungen der Aufgabe nur) durch $m = 15, a = 8$ erreicht werden: $\frac{16}{15} = \frac{8}{15} + \frac{8}{15}$.

Aufgabe 070734:
Gegeben sei die Gleichung

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + 7 = x - \frac{3}{4}$$

In dieser Gleichung soll der Summand 7 so durch eine andere Zahl ersetzt werden, dass $x = 11$ die Gleichung erfüllt.
Wie lautet diese Zahl?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(I) Angenommen, a sei eine Zahl, wie sie in der Aufgabenstellung gesucht ist. Dann erfüllt $x = 11$ die Gleichung $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + a = x - \frac{3}{4}$, das heißt: Dann gilt die Gleichung $\frac{11}{2} + \frac{11}{3} + a = 11 - \frac{3}{4}$. Hieraus folgt

$$a = 11 - \frac{3}{4} - \frac{11}{2} - \frac{11}{3} = \frac{13}{12}$$

Also hat höchstens die Zahl $a = \frac{13}{12}$ die verlangte Eigenschaft.

(II) Ist $x = 11$ und $a = \frac{13}{12}$, so ist

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + a = \frac{11}{2} + \frac{11}{3} + \frac{13}{12} = \frac{41}{4} \Rightarrow x - \frac{3}{4} = \frac{41}{4}$$

so dass im Fall $a = \frac{13}{12}$ die Zahl $x = 11$ der Gleichung (1) genügt.

Aufgabe 090732:
Die Maßzahlen a, b, c der Seitenlängen eines Dreiecks sollen die Bedingungen

$$\begin{aligned} (I) \qquad & a+b=38, \\ (II) \qquad & b+c=46, \\ (III) \qquad & a+c=42 \end{aligned}$$

erfüllen. Ermittle unter Berücksichtigung dieser Bedingungen
a) die Maßzahl jeder Seitenlänge!
b) Weise nach, dass ein Dreieck existiert, das den Bedingungen (I), (II), (III) genügt!
(Gleiche Maßeinheiten seien wie üblich vorausgesetzt.)

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

a) Wenn die Bedingungen (I), (II), (III) erfüllt sind, so folgt durch eine Eliminationsmethode, z. B. durch Addition von (I), (II), (III), Division durch 2 und anschließende Subtraktion je einer der Gleichungen (I), (II), (III):

$$a=17, \quad b=21, \quad c=25$$

b) Ein Dreieck mit diesen Maßzahlen existiert; denn die Dreiecksungleichungen sind erfüllt. Es ist nämlich

$$17+21>25, \quad \text{also} \quad a+b>c \qquad ; \qquad 21+25>17, \quad \text{also} \quad b+c>a$$

$$17+25>21, \quad \text{also} \quad a+c>b$$

Jedes Dreieck mit diesen Maßzahlen seiner Seitenlängen erfüllt auch die Bedingungen (I), (II), (III). Es ist nämlich

$$a+b=17+21=38 \qquad , \qquad b+c=21+25=46 \qquad , \qquad a+c=17+25=42$$

Aufgabe 100733:
Von den Schülern einer 8. Klasse gehören genau $\frac{3}{5}$ dem Schulchor und genau $\frac{7}{10}$ der Schulsportgemeinschaft an. Genau $\frac{2}{5}$ der Anzahl aller Schüler dieser Klasse sind sowohl Mitglied des Chores als auch Mitglied der Schulsportgemeinschaft (SSG).

Berechne, der wievielte Teil der Anzahl aller Schüler dieser Klasse weder im Chor noch in der SSG ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Laut Aufgabe sind $\frac{3}{5} - \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$ der Anzahl aller Schüler der Klasse Mitglieder des Chores, aber nicht Mitglieder der SSG; und $\frac{7}{10} - \frac{2}{5} = \frac{3}{10}$ der Anzahl der Schüler sind Mitglieder der SSG, aber nicht Mitglieder des Chores.

Berücksichtigt man noch die $\frac{2}{5}$ der Anzahl der Schüler dieser Klasse, die beiden angehören, so verbleibt wegen $\frac{1}{5} + \frac{3}{10} + \frac{2}{5} = \frac{9}{10}$ genau $\frac{1}{10}$ der Anzahl aller Schüler dieser Klasse, und genau soviel sind weder im Chor noch in der SSG.

Aufgabe 100734:
Nach der Sage machte die böhmische Königin Libussa die Gewährung ihrer Hand von der Lösung eines Rätsels abhängig, das sie ihren drei Freiern aufgab:

„Wenn ich aus diesem Korb mit Pflaumen dem ersten Freier die Hälfte des Inhalts und noch eine Pflaume, dem zweiten die Hälfte des Restes und noch eine Pflaume, dem dritten die Hälfte des nunmehrigen Restes und noch drei Pflaumen geben würde, dann wäre der Korb geleert. Nenne die Anzahl der Pflaumen, die der Korb enthält!“

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Ist x die Anzahl der Pflaumen, die der Korb enthält, dann bekommt der erste Freier $(\frac{x}{2}+1)$ Pflaumen. Als Rest verbleiben Pflaumen in der Anzahl $x-(\frac{x}{2}+1)=\frac{x}{2}-1$.
Die Anzahl der Pflaumen, die der zweite Freier bekommt, ist hiernach

$$\frac{\frac{x}{2}-1}{2}+1=\frac{x}{4}+\frac{1}{2}$$

und als nunmehriger Rest verbleiben Pflaumen in der Anzahl

$$\left(\frac{x}{2}-1\right)-\left(\frac{x}{4}+\frac{1}{2}\right)=\frac{x}{4}-\frac{3}{2}$$

Die Anzahl der Pflaumen, die der dritte Freier bekommt, ist dann

$$\frac{\frac{x}{4}-\frac{3}{2}}{2}+3=\frac{x}{8}+\frac{9}{4}$$

Danach ist der Korb geleert, woraus die Gleichung

$$\left(\frac{x}{4}-\frac{3}{2}\right)-\left(\frac{x}{8}+\frac{9}{4}\right)=0$$

folgt. Aus dieser ergibt sich $x=30$. Daher kann die gesuchte Anzahl nur 30 betragen.

Aufgabe 110734:
Fritz erzählt:
„In unserer Klasse gibt es genau doppelt soviel Mädchen wie Jungen. Wären es je 5 Jungen und Mädchen weniger, dann hätten wir genau dreimal soviel Mädchen wie Jungen.“
Ermittle die Anzahl aller Mädchen und die aller Jungen dieser Klasse!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Bezeichnet man die Anzahl der Jungen dieser Klasse mit x, dann ist die der Mädchen $2x$. Die Klasse hat mithin wegen $x+2x=3x$ insgesamt $3x$ Schüler (Mädchen und Jungen).
Wären es je 5 Jungen und Mädchen weniger, so würde die Anzahl aller Schüler $3x-10$ betragen. Daher gilt dann laut Aufgabe

$$3x-10=(x-5)+3(x-5)$$

woraus man $x=10$ erhält. Die Klasse hat also genau 30 Schüler, und zwar 20 Mädchen und 10 Jungen.

Aufgabe 120731:
An einer Oberschule mit genau 500 Schülern bestehen mathematisch-naturwissenschaftliche, künstlerische und Sport-Arbeitsgemeinschaften. Über die Teilnahme von Schülern an diesen Arbeitsgemeinschaften ist folgendes bekannt:

(1) Genau 250 Schüler sind Mitglied mindestens einer Sport-Arbeitsgemeinschaft.
(2) Genau 125 Schüler gehören mindestens einer künstlerischen Arbeitsgemeinschaft an.
(3) Genau 225 Schüler nehmen mindestens an einer mathematisch-naturwissenschaftlichen Arbeitsgemeinschaft teil.
(4) Genau 25 Schüler besuchen mindestens sowohl eine künstlerische als auch eine Sport-Arbeitsgemeinschaft.
(5) Genau 75 Schüler sind mindestens sowohl Mitglied einer mathematisch-naturwissenschaftlichen als auch einer Sport-Arbeitsgemeinschaft.
(6) Genau 25 Schüler nehmen mindestens sowohl an einer mathematisch-naturwissenschaftlichen als auch an einer künstlerischen Arbeitsgemeinschaft teil.
(7) Genau 5 Schüler gehören allen drei genannten Arbeitsgemeinschaftsarten an.

Ermittle die Anzahl aller Schüler dieser Schule, die
a) an genau einer Art dieser Arbeitsgemeinschaften,
b) an keiner dieser Arbeitsgemeinschaften teilnehmen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Mit den Buchstaben M, S, K und den Buchstabengruppen MS, MK, SK, MSK seien die Anzahlen derjenigen Schüler bezeichnet, die an den entsprechenden Arbeitsgemeinschaften (M: mathematisch- naturwissenschaftlich, S: Sport-AG, K: künstlerische AG) teilnehmen, aber nicht an den übrigen. Mit N sei die Anzahl derjenigen Schüler bezeichnet, die an keiner der Arbeitsgemeinschaften teilnehmen. Dann folgt:

$$\begin{array}{ll}
(0) & N + M + S + K + MS + MK + SK + MSK = 500, \\
(1) & S + MS + SK + MSK = 250, \\
(2) & MK + SK + MSK = 125, \\
(3) & M + MS + MK + MSK = 225, \\
(4) & SK + MSK = 25, \\
(5) & MS + MSK = 75, \\
(6) & MK + MSK = 25, \\
(7) & MSK = 5.
\end{array}$$

Wegen (7) und (4) bzw (5) bzw. (6) ist

$$(8) \quad SK = 20 \quad , \quad (9) \quad MS = 70 \quad , \quad (10) \quad MK = 20$$

Wegen (7) und (1), (8), (9) bzw. (2), (8), (10) bzw. (3), (9), (10) ist

$$(11) \quad S = 155 \quad , \quad (12) \quad K = 80 \quad , \quad (13) \quad M = 130$$

Wegen (0), (7), (8), (9), (10), (11), (12), (13) ist $N = 20$.
Die in a) gesuchte Anzahl ist $S+K+M$; wegen (11), (12), (13) beträgt sie 365. Die in b) gesuchte Anzahl ist $N = 20$.

Aufgabe 120735:
Ermittle alle nichtnegativen rationalen Zahlen x, die die Gleichung $x + |x - 1| = 1$ erfüllen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es sei x eine beliebige rationale Zahl, für die $0 \leq x \leq 1$ gilt. Dann gilt $x + |x-1| = x+1-x = 1$, also ist die gegebene Gleichung erfüllt. Daher erfüllen alle rationalen Zahlen x, für die $x + |x-1| = x+1-x = 1$ gilt, diese Gleichung.

Angenommen, es gäbe eine rationale Zahl $x > 1$, die die Gleichung $x + |x - 1| = 1$ erfüllt. Dann wäre $1 = x + |x - 1| = x + x - 1$ und somit $2x = 2$, also $x = 1$, im Widerspruch zu $x > 1$.

Also gibt es keine rationale Zahl $x > 1$, die die gegebene Gleichung erfüllt. Daher erfüllen genau alle diejenigen nicht negativen rationalen Zahlen x, für die $(0 \leq x \leq 1)$ gilt, die gegebene Gleichung.

Aufgabe 140735:
Der Umfang eines Dreiecks mit den Seitenlängen a, b, c beträgt 34 cm. Weiterhin gilt $a : b = 3 : 8$ und $b : c = 4 : 3$.
Ermittle die Seitenlängen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es gilt $a : b = 3 : 8, b : c = 8 : 6$ (Erweiterung von $4 : 3$ mit 2), daraus folgt $a : b : c = 3 : 8 : 6$, d. h., a, b

und c sind der Reihe nach das 3-, 8-, bzw. 6fache ein und derselben Länge.

Wegen $3 + 8 + 6 = 17$ und wegen des gegebenen Umfange von 34 cm beträgt diese Länge 2 cm. Die gesuchten Seitenlängen betragen daher $a = 6$ cm, $b = 16$ cm, $c = 12$ cm.

Aufgabe 180736:
Ermittle alle rationalen Zahlen a mit folgender Eigenschaft:
Das Produkt aus der Zahl a und ihrem absoluten Betrag ist gleich der Summe der Zahl a und ihrem absoluten Betrag.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, eine rationale Zahl a habe die genannte Eigenschaft. Dann gilt

$$a \cdot |a| = a + |a| \tag{1}$$

Für die Zahl a trifft nun genau einer der folgenden zwei Fälle zu:

1. Fall: $a \geq 0$.
Dann gilt $|a| = a$, also folgt aus (1) (2) $a^2 = 2a$. Hiernach verbleiben im 1. Fall nur die Möglichkeiten, dass entweder $a = 0$ gilt oder, falls $a \neq 0$ ist, aus (2) weiter $a = 2$ folgt.

2. Fall: $a < 0$.
Dann gilt $|a| = -a$, und es folgt einerseits $a \cdot |a| \neq 0$, andererseits $a + |a| = 0$. Die Annahme, dass a die Eigenschaft (1) hat, führt somit im 2. Fall auf einen Widerspruch.
Folglich können nur die beiden Zahlen 0 und 2 die genannte Eigenschaft haben. Tatsächlich gilt $0 \cdot |0| = 0 = 0 + |0|$ sowie $2 \cdot |2| = 4 = 2 + |2|$. Also sind genau die Zahlen 0 und 2 die gesuchten Zahlen.

Aufgabe 190731:
Ermittle alle geordneten Paare $(x; y)$ natürlicher Zahlen, die folgende Bedingungen erfüllen:

(1) Die zweite Zahl y ist um 1 kleiner als das Dreifache der ersten Zahl x.
(2) Das Produkt aus dem Sechsfachen der ersten und dem Vierfachen der zweiten Zahl beträgt 1680.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, für ein Paar $(x; y)$ natürlicher Zahlen seien die Bedingungen (1), (2) erfüllt. Dann gilt $y = 3x - 1$ (1) und $6x \cdot 4y = 1680$, also $xy = 70$ (2).
Wie man (bei Beachtung von $70 = 1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7$) durch systematisches Erfassen aller möglichen Fälle erkennt, wird (2) nur von folgenden Zahlenpaaren erfüllt: (1;70), (2;35), (5;14), (7;10), (10;7), (14;5), (35;2), (70;1).

Von diesen Zahlenpaaren erfüllt aber nur (5;14) auch die Bedingung (1). Daher kann nur das geordnete Paar (5;14) alle gestellten Bedingungen erfüllen.
Es erfüllt diese Bedingungen tatsächlich; denn es gilt $14 = 3 \cdot 5 - 1$ und $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 14 = 30 \cdot 56 = 1680$.
Alternativ-Lösung von cyrix:
Aus den beiden Angaben erhält man das Gleichungssystem $y = 3x - 1$ und $6x \cdot 4y = 1680$, wobei die zweite Gleichung äquivalent ist zu $xy = 70$. Setzt man die erste Gleichung hier ein, so erhält man die quadratische Gleichung $3x^2 - x - 70 = 0$, welche im Bereich der reellen Zahlen die Lösungen

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{1}{6} \pm \sqrt{\frac{1}{36} + \frac{70}{3}} \\ &= \frac{1}{6} \cdot (1 \pm \sqrt{1 + 840}) \\ &= \frac{1 \pm 29}{6}, \end{aligned}$$

also $x = 5$ bzw. $x = -\frac{14}{3}$ besitzt.
Davon ist aber offenbar nur $x = 5$ eine natürliche Zahl. Man erhält dazu $y = 14$ und die Probe bestätigt, dass dieses Paar $(x; y) = (5; 14)$ die einzige Lösung in den natürlichen Zahlen ist.

Aufgabe 190735:
Cathrin geht einkaufen. Sie hat genau 18 Geldstücke, und zwar nur Zweimark- und Fünfzigpfennigstücke, bei sich. Von dem Gesamtbetrag dieses Geldes gibt sie genau die Hälfte aus.
Nach dem Einkauf stellt sie fest, dass sie jetzt wieder ausschließlich Zweimark- und Fünfzigpfennigstücke bei sich hat, und zwar soviel Zweimarkstücke wie sie vor dem Einkauf Fünfzigpfennigstücke besaß, und soviel Fünfzigpfennigstücke, wie sie vorher Zweimarkstücke hatte.
Welchen Geldbetrag besaß Cathrin noch nach dem Einkauf?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Bezeichnet man die Anzahl der Zweimarkstücke, die Cathrin vor dem Einkauf besaß, mit x, so hatte sie zur gleichen Zeit $(18 - x)$ Fünfzigpfennigstücke. Der Geldbetrag, den sie vor dem Einkauf besaß, betrug somit

$$(2x + (18 - x) \cdot 0{,}5) \text{ Mark } = (1,5x + 9) \text{ Mark}$$

Da sie davon genau die Hälfte ausgab, hatte sie nach dem Einkauf noch $(0{,}75x + 4{,}5)$ Mark. Laut Aufgabe setzte sich dieser Betrag aus $(18 - x)$ Zweimarkstücken und x Fünfzigpfennigstücken zusammen. Daher gilt

$$0{,}75x + 4,5 = 2(18 - x) + 0{,}5x = 36 - 1{,}5x$$

woraus man $2,25x = 31,5$, also $x = 14$ erhält.

Folglich hatte Cathrin vor dem Einkauf genau 14 Zweimarkstücke und genau 4 Fünfzigpfennigstücke, das sind zusammen 30 Mark, bei sich. Nach dem Einkauf besaß sie genau 4 Zweimarkstücke und genau 14 Fünfzigpfennigstücke, das sind zusammen 15 Mark.

2. Lösungsweg:
Hatte Cathrin nach dem Einkauf noch genau p Mark, so hatte sie vorher genau 2p Mark. Würde man ebenso viele Geldstücke (jeweils der gleichen Werte), wie sie vorher hatte, und dazu noch ebenso viele, wie sie nachher hatte, nebeneinanderlegen, so wären das einerseits genau 18 Zweimarkstücke und 18 Fünfzigpfennigstücke, also $(36 + 9)$ Mark $= 45$ Mark; andererseits wären es $(2p + p)$ Mark $= 3p$Mark. Daher gilt $3p = 45$, also $p = 15$.
Folglich hatte Cathrin nach dem Einkauf noch genau 15 Mark.

Aufgabe 200731:
Von einer natürlichen Zahl z wird gefordert, dass sie sich in vier Summanden zerlegen lässt, die die folgenden Bedingungen erfüllen:

Der erste Summand beträgt zwei Drittel der Zahl z,
der zweite Summand beträgt ein Viertel des ersten Summanden,
der dritte Summand beträgt ein vier Fünftel es zweiten Summanden,
der vierte Summand beträgt ein Viertel des dritten Summanden,
der dritte Summand beträgt 48.

Untersuche, ob diese Bedingungen erfüllbar sind!
Ist dies der Fall, so ermittle alle natürlichen Zahlen z und ihre Zerlegungen in vier Summanden, die diese Bedingungen erfüllen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn eine natürliche Zahl z so in vier Summanden s_1, s_2, s_3, s_4 zerlegt ist, dass die angegebenen

Bedingungen erfüllt sind, so gilt

$$z = s_1 + s_2 + s_3 + s_4 \quad (1) \qquad s_1 = \frac{2}{3}z \quad (2) \qquad s_2 = \frac{1}{4}s_1 \quad (3)$$
$$s_3 = \frac{4}{5}s_2 \quad (4) \qquad s_4 = \frac{1}{4}s_3 \quad (5) \qquad s_3 = 48 \quad (6)$$

Aus (5) und (6) folgt (7) $s_4 = \frac{1}{4} \cdot 48 = 12$.
Aus (6) und (4) folgt (8) $48 = \frac{4}{5} \cdot s_2$, also $s_2 = \frac{5}{4}5 \cdot 48 = 60$.
Aus (8) und (3) folgt (9) $60 = \frac{1}{4} \cdot s_1$, also $s_1 = 4 \cdot 60 = 240$.
Aus (1) und (6) bis (9) folgt $z = 240 + 60 + 48 + 12 = 360$.
Daher kann nur die Zahl $z = 360$ und ihre Zerlegung in $s_1 = 240$, $s_2 = 60$, $s_3 = 48$, $s_4 = 12$ die Bedingungen der Aufgabenstellung erfüllen.

Aufgabe 200734:
Horst, der aktiv Sport treibt, erzählt seinem Freund:
„In vier Jahren habe ich insgesamt an 21 Wettkämpfen teilgenommen, in jedem Jahr an mindestens einem Wettkampf. Dabei war die Anzahl der Wettkämpfe von Jahr zu Jahr größer; im vierten Jahr war sie genau dreimal so groß wie im ersten Jahr.“
Untersuche, ob es für die Wettkämpfe in den einzelnen Jahren Anzahlen gibt, die Horsts Angaben entsprechen, und ob aus den Angaben diese Anzahlen eindeutig hervorgehen! Ist das der Fall, so ermittle diese vier Anzahlen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Sind a, b, c, d Horsts Angaben entsprechende Anzahlen der Wettkämpfe im 1., 2., 3. bzw. 4. Jahr, so gilt

$$0 < a < b < c < d \qquad (1)$$
$$d = 3a \qquad (2)$$
$$a + b + c + d = 21 \qquad (3)$$

Wäre $a \geq 4$, so folgte aus (1), dass $b \geq 5$, $c \geq 6$, $d \geq 7$, also $a + b + c + d \geq 22$ wäre, im Widerspruch zu (3).
Wäre $a \leq 2$, so folgte aus (2), dass $d \leq 6$ wäre; aus (1) folgte dann $c \leq 5$, $b \leq 4$, also $a + b + c + d \leq 17$, in Widerspruch zu (3). Also muss $a = 3$ (4) sein.
Nach (2) folgt $d = 9$ (5), nach (1) folgt $b \geq 4$ (6).
Wäre $b > 4$, so folgte aus (2), dass $c > 5$, also $a + b + c + d > 21$ wäre, im Widerspruch zu (3). Daher muss $b = 4$ (6) sein, und aus (3), (4), (S), (6) folgt $c = 5$.

Also können nur die Anzahlen 3 Wettkämpfe im ersten Jahr, 4 Wettkämpfe im zweiten Jahr, 5 Wettkämpfe im dritten Jahr, 9 Wettkämpfe im vierten Jahr Horsts Angaben entsprechen (7).

Sie entsprechen ihnen; denn es gilt $0 < 3 < 4 < 5 < 9$; $9 = 3 \cdot 3$; $3 + 4 + 5 + 9 = 21$. Daher gibt es Anzahlen, die Horsts Angaben entsprechen, sie gehen eindeutig aus den Angaben hervor und lauten wie in (7) angegeben.

Aufgabe 200736:
In eine Leihbibliothek kamen während eines Tages Schüler aus jeder der Klassenstufen 6, 7 und 8; dies waren insgesamt 85 Schüler. Genau ein Drittel der Schüler der Klassenstufe 6, genau ein Drittel der Schüler der Klassenstufe 7 und genau ein Viertel der Schüler der Klassenstufe 8, das waren insgesamt 26 Schüler, entliehen Bücher aus der Bibliotheksreihe „Mathematische Schülerbücherei“.
Außerdem ergab sich aus Gesprächen, dass genau ein Zehntel der Schüler der Klassenstufe 7 an der Mathematikolympiade des Kreises teilgenommen hatte.
Untersuche, ob aus diesen Angaben die Anzahlen der Schüler der Klassenstufe 6, der Klassenstufe 7 und der Klassenstufe 8 eindeutig hervorgehen! Ist das der Fall, so ermittle diese drei Anzahlen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Sind a, b, c die Anzahlen der Schüler der Klassenstufe 6, 7, 8 in dieser Reihenfolge, so folgt aus den Angaben:
Es sind a und b durch 3 teilbar, c ist durch 4 teilbar, außerdem ist b durch 10 teilbar. Da 3 und 10 teilerfremd sind, ist folglich b durch 30 teilbar. Also gibt es natürliche Zahlen p, q, r mit $a = 3p$, $b = 30q$, $c = 4r$ (1); dabei sind p, q, r ebenso wie a, b, c von 0 verschieden.

Aus (1) und der Angabe über die Gesamtzahl der Schüler folgt $3p + 30q + 4r = 85$ (2); aus (1) und der Angabe über die Anzahl derjenigen Schüler, die Bücher aus der „Mathematischen Schülerbücherei“ entliehen hatten, folgt $p + 10q + r = 26$ (3).

Wegen (2) kann nur $q = 1$ oder $q = 2$ sein. Wäre $q = 2$, dann folgte aus (3): $p + r = 6$ und aus (2) weiterhin $3p + 4r = 3p + 3r + r = 3(p + r) + r = 25$. Wegen $p + r = 6$ gilt $1 \leq p \leq 5$ und $1 \leq r \leq 5$. Aus $3(p + r) + r = 3 \cdot 6 + r = 25$ folgte aber $r = 7$, im Widerspruch zu $r \leq 5$.
Also ist $q = 1$ und mithin $p + r = 16$ sowie $3p + 4r = 3(p + r) + r = 55$. Daraus folgt $3 \cdot 16 + r = 55$ und schließlich $r = 7$ sowie $p = 9$. Damit ist gezeigt, dass aus den Angaben der Aufgabe eindeutig hervorgeht:

Die Anzahlen der Schüler der Klassenstufen 6, 7 bzw. 8 betragen 27, 30 bzw. 28.

Aufgabe 210732:
Ermittle alle Paare $(x; y)$ rationaler Zahlen mit der Eigenschaft, dass die Summe $x + y$ dieselbe Zahl wie das Produkt $x \cdot y$ und auch dieselbe Zahl wie der Quotient $x : y$ ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn ein Paar $(x; y)$ rationaler Zahlen den Bedingungen der Aufgabe genügt, dann gilt

(1) $x + y = x \cdot y$ und
(2) $x + y = x : y$.

Aus (1) und (2) folgt (3) $x \cdot y = x : y$.
Wäre $x = 0$, so wäre nach (1) auch $y = 0$ im Widerspruch zur Existenz von $x : y$. Also kann man (3) durch x dividieren und erhält $y = \frac{1}{y}$.
Die einzigen rationalen Zahlen, die gleich ihrem Kehrwert sind, sind die Zahlen +1 und -1. Wäre $y = +1$, so ergäbe (1) den Widerspruch $x + 1 = x$. Also ist $y = -1$ und damit nach (1) $x - 1 = x$, also $x = \frac{1}{2}$
Daher kann nur das Paar $(\frac{1}{2}; -1)$ den Bedingungen der Aufgabe genügen.

Aufgabe 210736:
Eine Flüssigkeit wird in kleinen, mittleren und großen Flaschen verkauft. In jede kleine Flasche passen genau 200 g, in jede mittlere genau 500 g und in jede große genau 1000 g der Flüssigkeit. Jede gefüllte 200 g-Flasche kostet 1,20 M, jede gefüllte 500 g-Flasche kostet 2,80 M. Der Preis der leeren 500 g-Flasche ist um 50% höher als der der leeren 200 g-Flasche. Die leere 1000 g- Flasche wiederum ist um 50% teurer als die leere 500 g-Flasche.
Welcher Betrag wird eingespart, wenn anstelle von fünf gefüllten 200 g-Flaschen eine gefüllte 1000 g-Flasche gekauft wird?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die leere 200 g-Flasche koste x Mark. Daraus folgt: Die leere 500 g-Flasche kostet 50% mehr, also $\frac{3}{2} \cdot x$ Mark.
Ferner folgt:
Je 200 g der Flüssigkeit kosten $(1{,}20 - x)$ Mark,
je 500 g der Flüssigkeit kosten $(2{,}80 - \frac{3}{2} \cdot x)$ Mark.

Da der Preis für 500 g aber andererseits $\frac{5}{2}$ des Preises für 200 g betragen muss, ergibt sich

$$2{,}80 - \frac{3}{2} \cdot x = \frac{5}{2}(1{,}20 - x) = 3 - \frac{5}{2}x$$

woraus man $x = 0{,}20$ erhält.
Also kostet die leere 200 g-Flasche 0,20 M, die leere 500 g-Flasche mithin 0,30 M und schließlich die leere 1000 g-Flasche $\frac{3}{2} \cdot 0{,}30$ M $= 0{,}45$ M.
Folglich kosten fünf leere 200 g-Flaschen $5 \cdot 0{,}20$ M $= 1$ M. Kauft man daher die 1000 g Flüssigkeit nicht in diesen fünf Flaschen, sondern statt dessen in einer Flasche zu 1000 g, so spart man $(1 - 0{,}45)$ M $=$ 0,55 M ein.

Aufgabe 220731:
Die Konsumgenossenschaft erstattet in jedem Jahr 1,6% desjenigen Betrages zurück, für den Konsummarken abgerechnet wurden. Von vier Familien A, B, C und D ist aus einem Jahr bekannt:

A hatte für einen doppelt so großen Betrag abgerechnet wie B oder, was dasselbe war, für einen dreimal so großen wie C bzw. für einen viermal so großen wie D;
die vier Familien A, B, C, D erhielten zusammen 336 DM zurückerstattet.

Für jede der vier Familien A, B, C, D soll aus diesen Angaben ermittelt werden:

a) Für welchen Betrag hatte diese Familie in diesem Jahr Konsummarken abgerechnet?
b) Welchen Betrag erhielt daher diese Familie zurückerstattet?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Der Betrag, für den die Familie A, B, C bzw. D Konsummarken abgerechnet hatte, sei a, b, c bzw. d. Dann gilt

$$b = \frac{1}{2}a; \qquad c = \frac{1}{3}a; \qquad d = \frac{1}{4}a$$

Die vier Familien hatten also zusammen für den Betrag $a + \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}a + \frac{1}{4}a$. Da 1,6% hiervon 336 M sind, gilt

$$a + \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}a + \frac{1}{4}a = \frac{336 \cdot 100}{1{,}6}M \quad \Rightarrow \quad a = 10080M$$

und damit

$$b = \frac{1}{2} \cdot 10080M = 5040M \qquad ; \qquad c = \frac{1}{3} \cdot 10080M = 3360M \qquad ; \qquad d = \frac{1}{4} \cdot 10080M = 2520M$$

b) Familie A erhielt $\frac{10080 \cdot 1{,}6}{100}M = 161{,}28M$, Familie B erhielt $\frac{5040 \cdot 1{,}6}{100}M = 80{,}64M$, Familie C erhielt $\frac{3360 \cdot 1{,}6}{100}M = 53{,}76M$, Familie D erhielt $\frac{2520 \cdot 1{,}6}{100}M = 40{,}32M$.

Aufgabe 230734:
Von einer Zahl wird folgendes gefordert:

Wenn man die Zahl halbiert,
vom Ergebnis dann 1 subtrahiert,
vom dabei erhaltenen Ergebnis ein Drittel bildet,
von diesem Drittel wieder 1 subtrahiert,
vom nun entstandenen Ergebnis ein Viertel bildet
und von diesem Viertel nochmals 1 subtrahiert,
so erhält man 1.

Gib jede Zahl an, die diese Forderung erfüllt! Beweise dazu, dass jede Zahl, die die Forderung erfüllt, von dir angegeben wurde und dass jede von dir angegebene Zahl die Forderung erfüllt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Eine Zahl x hat genau dann die geforderte Eigenschaft, wenn sie die Gleichung

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\left(\frac{x}{2}-1\right)-1\right)-1=1$$

erfüllt. Diese Gleichung ist der Reihe nach äquivalent mit

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\left(\frac{x}{2}-1\right)-1\right)-1&=1\\ \frac{1}{3}\left(\frac{x}{2}-1\right)-1&=8\\ \frac{x}{2}-1&=27\\ x&=56 \end{aligned}$$

Damit ist bewiesen, dass die Zahl 56 die geforderte Eigenschaft hat und dass sie die einzige Zahl mit der geforderten Eigenschaft ist.

Aufgabe 260732:
Über die Feriengäste in einem Ferienheim ist folgendes bekannt:

Die Anzahl der Mädchen ist gleich der Hälfte der Anzahl derjenigen Feriengäste, die keine Mädchen sind.
Die Anzahl der Jungen ist gleich einem Drittel der Anzahl derjenigen Feriengäste, die keine Jungen sind.
Die Anzahl der Frauen ist gleich einem Viertel der Anzahl derjenigen Feriengäste, die keine Frauen sind.
Außer diesen Mädchen, Jungen und Frauen sind in diesem Ferienheim als Feriengäste noch genau 26 Männer.

Untersuche, ob sich aus diesen Angaben eindeutig die Anzahlen der Mädchen, Jungen und Frauen ergeben!
Wenn dies der Fall ist, gib diese Anzahlen an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es sei m die Anzahl der Mädchen, j die Anzahl der Jungen und f die Anzahl der Frauen. Die Anzahl aller Feriengäste in dem Ferienheim sei x. Dann gilt nach Aufgabenstellung

$$m=\frac{1}{2}(x-m) \qquad \text{also} \qquad m=\frac{x}{3} \tag{1}$$

Entsprechend folgt aus $j=\frac{1}{3}(x-j)$, also $3j=x-j$, die Beziehung $j=\frac{x}{4}$ (2) und aus $f=\frac{1}{4}(x-f)$ die Beziehung $f=\frac{x}{5}$ (3).
Nach Aufgabenstellung gilt weiterhin $x=m+j+f+26$. Hieraus folgt wegen (1), (2), (3)

$$x=\frac{x}{3}+\frac{x}{4}+\frac{x}{5}+26 \Rightarrow x=120$$

Nochmals nach (1), (2), (3) folgt hieraus $m=40$, $j=30$, $f=24$.
Damit ist gezeigt, dass sich aus den Angaben eindeutig diese Anzahlen der Mädchen, Jungen und Frauen ergeben.

Aufgabe 280732:
In einer Fabrik zur Herstellung von alkoholhaltigen Essenzen soll aus einem Restbestand von 300 kg 32prozentigem Alkohol durch Zugabe von 90prozentigem Alkohol ein neuer Bestand von 40prozentigem Alkohol hergestellt werden.
Ermittle diejenige Menge 90prozentigen Alkohols, mit der das erreicht wird!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Der Restbestand enthält $\frac{32}{100} \cdot 300$ kg $= 96$ kg Alkohol. Fügt man (x kg 90prozentigen Alkohol und damit) $\frac{9}{10}x$ kg Alkohol hinzu, so enthält der neue Bestand $(96 + \frac{9}{10}x)$ kg Alkohol.
Damit dies 40 Prozent der Menge $(300 + x)$ kg des neuen Bestandes sind, muss

$$96 + \frac{9}{10}x = \frac{4}{10}(300 + x)$$

gelten. Daraus folgt

$$96 + \frac{9}{10}x = 120 + \frac{4}{10}x \qquad \Rightarrow \qquad x = 48$$

Die gesuchte Menge 90prozentigen Alkohols beträgt 48 kg.

Aufgabe 310731:
Bei einer Geburtstagsfeier wurden an die Kinder Bonbons verteilt:
Das erste Kind bekam 1 Bonbon und ein Zehntel vom verbleibenden Rest,
Das zweite Kind bekam 2 Bonbons und ein Zehntel vom nun verbleibenden Rest,
Das dritte Kind bekam 3 Bonbons und ein Zehntel vom nun verbleibenden Rest, usw.

Schließlich waren, als dies konsequent fortgesetzt worden war, alle Bonbons verteilt, und es stellte sich heraus, dass jedes Kind dieselbe Anzahl Bonbons erhalten hatte wie jedes andere Kind.

Ermittle aus diesen Angaben die Anzahl a aller verteilten Bonbons, die Anzahl k aller beteiligten Kinder und die Anzahl b derjenigen Bonbons, die jedes dieser Kinder erhielt!
Überprüfe, dass für die von dir ermittelten Anzahlen a, k, b alle obengenannten Angaben zutreffen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Aus den Angaben folgt: Das 1. Kind bekam $1+\frac{1}{10}(a-1) = \frac{a}{10}+\frac{9}{10}$ Bonbons, danach waren $a-\left(\frac{a}{10} - \frac{9}{10}\right) = \frac{9a}{10} - \frac{9}{10}$ Bonbons vorhanden.
Das 2. Kind bekam $2 + \frac{1}{10}\left(\frac{9a}{10} - \frac{9}{10} - 2\right) = \frac{9a}{100} + \frac{171}{100}$ Bonbons.
Da auch das 1. Kind diese Anzahl erhalten hatte, folgt

$$\frac{9a}{10} - \frac{9}{10} = \frac{9a}{100} + \frac{171}{100} \qquad \Rightarrow \qquad a = 81$$

und damit weiter

$$b = \frac{a}{10} + \frac{9}{10} = 9$$

Da jedes der k Kinder b Bonbons bekam, ist die Anzahl aller verteilten Bonbons $a = k \cdot b$; damit folgt $k = 81 : 9 = 9$.
Probe:

Nummer des Kindes	Anzahl der an dieses Kind ausgegebenen Bonbons	danach verbleibender Rest
1	1 + 80 : 10 = 9	81 - 9 = 72
2	2 + 70 : 10 = 9	72 - 9 = 63
...	...	...
8	8 + 10 : 10 = 9	18 - 9 = 9
9	9 + 0 : 10 = 9	9 - 9 = 0

Aufgabe 320736:
Über ein Schwimmbecken wurden folgende Angaben gemacht:
Das Becken kann durch zwei getrennte Wasserleitungen gefüllt werden. Aus der zweiten Leitung strömen in jeder Minute 50 Kubikmeter mehr heraus als aus der ersten. Um das Becken vollständig zu füllen, werden 48 Minuten gebraucht, wenn beide Leitungen gleichzeitig geöffnet sind; dagegen 2 Stunden, wenn nur die erste Leitung geöffnet ist.
Untersuche, ob das Volumen des Beckens durch diese Angaben eindeutig bestimmt ist! Wenn das der Fall ist, so ermittle dieses Volumen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn das Volumen des Beckens x Kubikmeter beträgt, so folgt aus den Angaben: In jeder Minute strömen aus der geöffneten ersten Leitung $\frac{x}{120}$ Kubikmeter, aus der zweiten $(\frac{x}{120}+50)$ Kubikmeter. Das Volumen des Beckens, das durch beide Leitungen in 48 Minuten gefüllt wird, beträgt daher

$$48\cdot\left(\frac{x}{120}+\left(\frac{x}{120}+50\right)\right)$$

Kubikmeter. Also muss die Gleichung

$$48\cdot\left(\frac{x}{120}+\left(\frac{x}{120}+50\right)\right)=x$$

gelten. Durch Umformen wird $x=12000$.
Somit ist durch die Angaben eindeutig bestimmt: Das Volumen des Beckens beträgt 12 000 Kubikmeter.

I.II Bewegungsaufgaben

I Runde 1

Aufgabe V00707:
Herr A fährt mit seinem PKW auf der Autobahn mit 100 km·h^{-1} an einer Tankstelle (T_1) vorbei. 35 km hinter T_1 muss Herr A den Benzinhahn auf Reserve stellen.
Da die nächste Tankstelle (T_2) auf der Autobahn noch weitere 35 km entfernt ist, geht Herr A auf 60 km·h^{-1} herunter, um weniger Benzin zu verbrauchen.
Mit welcher Durchschnittsgeschwindigkeit wird Herr A die Strecke zwischen T_1 und T_2 unter diesen Bedingungen zurücklegen?

Lösung von Steffen Polster:
Für die Strecke 35 km von T_1 bis zum Umschalten auf Reserve werden $t_1=\frac{s}{v}=\frac{35km}{100\frac{km}{h}}=21$ min benötigt.
Für die zweite Strecke von 35 km entsprechend $t_2=\frac{s}{v}=\frac{35km}{60\frac{km}{h}}=35$ min.
Aus der damit benötigten Gesamtfahrzeit von 56 Minuten zwischen T_1 und T_2 ergibt sich eine Durchschnittsgeschwindigkeit von $v=\frac{70km}{56min}=75\frac{km}{h}$.

Aufgabe 030712:
Bei der Friedensfahrt 1963 wurde zwischen Bautzen und Dresden (57 km) ein Einzelzeitfahren ausgetragen.
Die Fahrer starteten dabei in Abständen von 1 Minute. Unmittelbar vor dem späteren Gesamtsieger Klaus Ampler (DDR) startete sein härtester Gegner Vyncke (Belgien). Während Ampler je Stunde durchschnittlich 42 km zurücklegte, erreichte Vyncke einen „Schnitt“ von 40 km je Stunde.
In welcher Zeit und nach wie viel Kilometern hätte Ampler den belgischen Fahrer eingeholt, wenn beide mit konstanter Geschwindigkeit gefahren wären? Begründe deine Antwort!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Ampler legt in jeder Stunde durchschnittlich 2 km mehr zurück als Vyncke. Dieser hatte $\frac{2}{3}$ km Vorsprung, also wäre er nach 20 min von Ampler eingeholt worden. In dieser Zeit hätte Ampler 14 km zurückgelegt.

Aufgabe 040712:
Ein Güterzug legte in der ersten Stunde $35\frac{3}{4}$ km und in den nachfolgenden $2\frac{1}{2}$ Stunden weitere 92,7 km zurück. Für die Rückfahrt auf derselben Strecke benötigte er drei Stunden und 12 Minuten.
Berechne die Durchschnittsgeschwindigkeit für die ganze Fahrt! Runde auf eine Dezimale!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Der Gesamtweg beträgt: $(35\frac{3}{4} + 92{,}7)$ km $\cdot\, 2 = 256{,}9$ km.
Die gesamte Fahrtzeit beträgt: $(1 + 2{,}5 + 3{,}2)$ h $= 6{,}7$ h.
Die Durchschnittsgeschwindigkeit beträgt somit $v = \frac{s}{t} = \frac{256{,}9 \text{ km}}{6{,}7 \text{ h}} \approx 38{,}3 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Aufgabe 160714:
Bei einem Radrennen auf einem Rundkurs von 1 km Länge hatte zu einem bestimmten Zeitpunkt der Radsportler A genau 500 m Vorsprung vor dem Radsportler B. B fuhr mit einer Geschwindigkeit von 50 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, A mit einer Geschwindigkeit von 45 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

a) Nach wie viel Minuten von dem angegebenen Zeitpunkt an gerechnet holte B den Fahrer A das erste Mal ein, wenn angenommen wird, dass beide mit gleichbleibender Geschwindigkeit fuhren?
b) Nach wie viel weiteren Minuten würde B den Fahrer A zum zweiten Mal einholen („überrunden“), wenn beide Fahrer auch weiterhin mit jeweils gleichbleibender Geschwindigkeit weiterfahren würden? Wie viele Runden hätte A und wie viele B zwischen dem ersten und dem zweiten Mal des Überholens zurückgelegt?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) B muss innerhalb der gesuchten Zeit einen Vorsprung von 500 m aufholen. Innerhalb einer Stunde hätte B eine um 5 km = 5000 m längere Strecke zurückgelegt als A, d. h. einen zehnmal so großen Vorsprung aufgeholt wie erforderlich. Also holte er den Vorsprung von A in $\frac{1}{10}$ Stunde, d. h. in 6 Minuten auf.

b) Bis zum zweiten Mal des Überholens hätte B einen Vorsprung von 1 km aufzuholen. Die dazu benötigte Zeit wäre demnach doppelt so lang wie bei a), also 12 Minuten. In dieser Zeit legte A eine Strecke von $\frac{1}{5} \cdot 45\text{km} = 9$ km, also 9 Runden, zurück und B daher eine Runde mehr, d. h. 10 Runden.

Aufgabe 230712:
Ein Kraftwagen fährt auf einer Autobahn mit einer konstanten Geschwindigkeit von 80 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Ein zweiter Kraftwagen befindet sich 2 km hinter dem ersten und fährt in derselben Richtung mit einer konstanten Geschwindigkeit von 85 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

a) Wie viel Minuten benötigt der zweite Kraftwagen, bis er den ersten einholt?
b) Wie viel Kilometer legt der zweite Kraftwagen zurück, bis er den ersten einholt?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Da die Geschwindigkeit des zweiten Kraftwagens um 5 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ größer ist als die des ersten Kraftwagens, legt der zweite Kraftwagen 5 km mehr in der Stunde zurück als der erste. In $\frac{1}{5}$ h, d. h. in 12 Minuten, kommt er dem ersten Kraftwagen um 1 km näher, also hat er den ersten Kraftwagen in $2 \cdot 12$ Minuten = 24 Minuten eingeholt.

b) In dieser Zeit hat er eine Entfernung von $85 \cdot \frac{2}{5}$ km = 34 km zurückgelegt.

II Runde 2

Aufgabe V10722:
Die Strecke von Berlin nach Karl-Marx-Stadt wird von der Deutschen Lufthansa mit Flugzeugen vom Typ AN 2 beflogen. Um 09.45 Uhr startet die Maschine in Berlin und landet nach 220 Flugkilometern um 11.00 Uhr in Karl-Marx-Stadt.
Ein Flugzeug vom Typ IL 14 P startet um 12.30 Uhr in Leipzig und landet um 14.05 Uhr in Barth nach 443 Flugkilometern.

Im Schnellverkehr der Deutschen Reichsbahn fährt der D-Zug nach Magdeburg um 6.42 Uhr in Berlin ab und trifft nach einer Fahrtstrecke von 169 km um 8.59 Uhr in Magdeburg ein.

In welchem Verhältnis stehen die Durchschnittsgeschwindigkeiten der drei Verkehrsmittel zueinander?

Lösung von Steffen Polster:
Die Durchschnittsgeschwindigkeit wird mittel $v = \frac{s}{t}$ berechnet.
Flugzeug AN 2: $s_1 = 220$ km; $t_1 = 85$ min, d. h. $v_1 = \frac{220}{85} = 2{,}59\,\frac{\text{km}}{\text{min}} \approx 155\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$
Flugzeug IL 14: $s_2 = 443$ km; $t_1 = 95$ min, d. h. $v_2 = \frac{443}{95} = 4{,}66\,\frac{\text{km}}{\text{min}} \approx 280\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$
D-Zug: $s_3 = 169$ km; $t_1 = 137$ min, d. h. $v_1 = \frac{169}{137} = 1{,}23\,\frac{\text{km}}{\text{min}} \approx 74\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$

Aufstellen der gesuchten Proportionen: $155 : 74 = 2{,}1$ und $280 : 74 = 3{,}8$ und somit lautet die gesuchte Proportion $v_1 : v_2 : v_3 = 2{,}1 : 3{,}8 : 1$.

Aufgabe 010722:
Die Eisenbahnstrecke Leipzig - Halle - Köthen - Magdeburg ist 123,6 km lang. Ein Personenzug fährt um 12.32 Uhr in Leipzig ab. Er hat eine Durchschnittsgeschwindigkeit von 32,7 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Ein D-Zug fährt um 13.11 Uhr in Leipzig ab. Seine Durchschnittsgeschwindigkeit beträgt 75,2 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.
a) Um wie viel Uhr holt der D-Zug den Personenzug ein?
b) Wie viel Kilometer haben beide Züge bis dahin zurückgelegt?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Gesucht ist diejenige Wegstrecke ist, die beide Züge bis zum Einholen zurücklegen. Diese Wegstrecke ist das Produkt aus mittlerer Geschwindigkeit und jeweils benötigter Zeit. Die Fahrzeiten, die die beiden Züge bis dahin benötigen, unterscheiden sich um 39 min $= \frac{13}{20}$ h (nämlich der Unterschied zwischen den Abfahrtszeiten).
Die Gleichung ist also, wenn t die Fahrzeit des D-Zuges bezeichnet:

$$t \cdot 75{,}2\frac{\text{km}}{\text{h}} = \left(t + \frac{13}{20}\text{h}\right) \cdot 32{,}7\frac{\text{km}}{\text{h}} = t \cdot 32{,}7\frac{\text{km}}{\text{h}} + 21{,}255 \text{ km}$$

a) Daraus errechnet sich $t = 0{,}5$ h $= 30$ min. Der D-Zug holt den Personenzug eine halbe Stunde nach 13.11 Uhr, also um 13.41 Uhr ein.
b) Zu diesem Zeitpunkt haben beide Züge 37,6 km zurückgelegt.

Aufgabe 090723:
Ein Tourist war an drei aufeinanderfolgenden Tagen jeweils genau die gleiche Zeit unterwegs.
Am ersten Tag ging er zu Fuß mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 6 km/h. Am zweiten Tag benutzte er ein Moped mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 30 km/h. Am dritten Tag benutzte er ein Auto mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 60 km/h. Der an den drei Tagen zurückgelegte Gesamtweg betrug 520 km.
Ermittle die Zeit, die er an jedem einzelnen der Tage unterwegs war, und die Anzahl der am ersten, zweiten bzw. dritten Tage zurückgelegten Kilometer!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die an den einzelnen Tagen zurückgelegten Wege sind proportional den jeweiligen Durchschnittsgeschwindigkeiten. Der am zweiten bzw. dritten Tag zurückgelegte Weg ist also das 5- bzw. 10fache des am ersten Tag zurückgelegten Weges.

Wegen $1 + 5 + 10 = 16$ ist somit der Gesamtweg, nach Aufgabenstellung 520 km, das 16fache des am ersten Tage zurückgelegten Weges.

Dies ist nur möglich, wenn der am ersten Tage zurückgelegte Weg $520km : 16 = 32{,}5$ km und folglich der am zweiten bzw. dritten Tage zurückgelegte Weg $5 \cdot 32{,}5km = 162{,}5$ km bzw. $10 \cdot 32{,}5km = 325$ km betrugen.

Daraus ergibt sich wegen $\frac{32{,}5}{6} = \frac{65}{12} = 5\frac{25}{60}$ die am ersten Tage (und nach Aufgabenstellung an jedem der drei Tage) aufgewendete Zeit als $\frac{65}{12}$ h (= 5 h 25 min).

Aufgabe 190724:
Ein Kraftfahrer fuhr mit seinem PKW von A nach B. Nach einer Fahrzeit von 20 Minuten hatte er eine Panne, die in 30 Minuten behoben werden konnte. Nach weiteren 12 Minuten Fahrzeit musste er an einer geschlossenen Bahnschranke 4 Minuten warten. Bis dahin hatte er 40 km zurückgelegt.
Die Fahrt von der Bahnschranke nach B begann um 11.06 Uhr und verlief ohne Aufenthalt. In B angekommen, stellt der Kraftfahrer fest, dass er von der Abfahrt an der Bahnschranke bis zur Ankunft in B genau die Hälfte derjenigen Zeit benötigt hat, die insgesamt von der Abfahrt von A bis zur Ankunft in B vergangen war.
Es sei angenommen, dass der Kraftfahrer auf jedem Teilstück dieses Weges mit der gleichen Durchschnittsgeschwindigkeit fuhr.

a) Zu welcher Uhrzeit traf der Kraftfahrer in B ein?
b) Wie groß war die Durchschnittsgeschwindigkeit, in km h ausgedrückt?
c) Wie viel Kilometer hatte er insgesamt von A nach B zurückgelegt?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Der Kraftfahrer benötigte wegen $20 + 30 + 12 + 4 = 66$ bis zur Abfahrt von der Bahnschranke genau 66 Minuten. Da diese Zeit ebenso lang war wie die Fahrzeit von der Bahnschranke bis nach B, war er ab 11.06 Uhr noch einmal 66 Minuten bis B unterwegs, traf daher dort um 12.12 Uhr ein.

b) Für die ersten 40 km betrug die reine Fahrzeit wegen $66 - 30 - 4 = 32$ genau 32 Minuten, das sind $\frac{8}{15}$ Stunden. Wegen $40 : \frac{8}{15}$ betrug seine Durchschnittsgeschwindigkeit mithin 75 $\frac{km}{h}$.

c) Da er den Rest des Weges mit der gleichen Durchschnittsgeschwindigkeit zurücklegte und dafür 66 Minuten, also $\frac{11}{10}$ Stunden benötigte, legte er dabei wegen $75 \cdot \frac{11}{10} = 82{,}5$ noch weitere 82,5 km zurück.
Mithin hatte er von A nach B insgesamt 40 km + 82,5 km = 122,5 km zurückgelegt.

III Runde 3

Aufgabe V10734:
Eine Gruppe Junger Pioniere wandert von dem im Tal gelegenen Orte A auf den 9 km entfernten Berg B. Sie bricht in A um 8.00 Uhr auf und ist in B um 12.00 Uhr angelangt.
Am nächsten Tage wandert die Gruppe denselben Weg zurück. Sie geht um 8.30 Uhr los und kommt um 11.00 Uhr in A an.
Gibt es auf dem Wege von A nach B einen Punkt, an dem sich die Gruppe an beiden Tagen zu der gleichen Zeit befindet? Begründe die Antwort!

Lösung von Steffen Polster:
Einen solchen Zeitpunkt gibt es.
Auf dem Weg von A nach B hat die Gruppe eine Geschwindigkeit von $v_1 = \frac{9\text{ km}}{4\text{ h}}$, auf dem Weg von B nach A von $v_2 = \frac{9\text{ km}}{2{,}5\text{ h}} = \frac{18\text{ km}}{5\text{ h}}$.
Von A nach B ist die Gruppe von A nach einer Laufzeit t_1 genau $s = t_1 \cdot v_1 = \frac{9}{4}t_1$ km entfernt. Von B nach A ist der Abstand nach t_2 von B genau $s_2 = t_2 \cdot v_2 = \frac{18}{5}t_2$ km. Da die Gesamtstrecke 9 km lang ist,

gilt $s_1 = 9km - s_2$. Da die Gruppe am zweiten Tag eine halbe Stunden losläuft, ist außerdem $t_2 = t_1 - 0{,}5$ h. Damit ergibt sich für den Punkt mit gleichem Abstand zu A und der gleichen Uhrzeit die Gleichung

$$\frac{9}{4}t_1 = 9 - (t_1 - 0{,}5)\frac{18}{5}$$

Als Lösung der Gleichung ergibt sich $t_1 = \frac{24}{13}$ h, d. h. der Zeitpunkt 9 Uhr 51 min. In diesem Moment sind die Pioniere an jedem Tag 4,15 km von A entfernt. Die Probe bestätigt das Ergebnis.

Aufgabe 010732:
Im Sommer 1961 stellte der Dresdener Meister des Sports Gerhard Wissmann einen neuen Segelflug-Rekord im Dreieck-Streckenflug auf. Er legte die Strecke Zossen - Storkow - Golßen - Zossen in 1 h 1 min 30 s zurück.
Auf einer Karte im Maßstab 1 : 750000 stellen wir die folgenden Strecken fest: Zossen–Storkow 4,5 cm, Storkow–Golßen 5,2 cm, Golßen–Zossen 3,9 cm. Zu der errechneten Entfernung müssen wir noch 4 km für Umwege bei der Kursänderung hinzuzählen.

a) Welche Durchschnittsgeschwindigkeit erreichte Gerhard Wissmann?
b) Um wie viel Prozent war seine Geschwindigkeit höher als die des westdeutschen Rekordinhabers Ernst-Günter Haase, der eine Strecke von 100 km in 1 h 12 min zurücklegte?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die geflogene Entfernung betrug $750000 \cdot (4{,}5 + 5{,}2 + 3{,}9)$ cm + 4 km = 106 km.

1. Als Durchschnittsgeschwindigkeit erreichte Gerhard Wissmann $\frac{106 \text{ km}}{1\frac{1}{40}\text{h}} = 103\frac{17}{41}\frac{\text{km}}{\text{h}}$.
2. Sein Konkurrent Ernst-Günter Haase erreichte nur $\frac{100 \text{ km}}{1\frac{1}{5}\text{h}} = 83\frac{1}{3}\frac{\text{km}}{\text{h}}$, so dass der neue Rekordinhaber den alten um 24 % übertraf.

Aufgabe 130736:
Ein mit konstanter Geschwindigkeit fahrender Zug fuhr über eine 225 m lange Brücke in genau 27 s (gerechnet von der Auffahrt der Lok auf die Brücke bis zur Abfahrt des letzten Wagens von der Brücke).
An einem Fußgänger, der entgegen der Fahrtrichtung des genannten Zuges ging, fuhr dieser in genau 9 s vorüber. In dieser Zeit hatte der Fußgänger genau 9 m zurückgelegt.
Ermittle die Länge des Zuges (in Meter) und seine Geschwindigkeit (in Kilometer je Stunde)!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Man könnte sich vorstellen, dass der Fußgänger im selben Augenblick die Brücke (entgegengesetzt zur Fahrtrichtung des Zuges) verlässt, in dem die Lok auf die Brücke fährt. Wenn der Fußgänger nach 9 s 9 m zurückgelegt hat, fährt der letzte Wagen des Zuges an ihm vorbei. Bis zum Verlassen der Brücke benötigt dieser Wagen wegen $27 - 9 = 18$ noch 18 s. In dieser Zeit legt er wegen $225 + 9 = 234$ genau 234 m zurück.

Folglich betrug wegen $234 : 18 = 13$ die Durchschnittsgeschwindigkeit des Zuges 13 m/s das sind wegen $13 \cdot \frac{3600}{1000} = 46{,}8$ genau 46,8 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.
Da der Zug zur Brückenfahrt 27 s benötigte, legte die Lok wegen $13 \cdot 27 = 351$ in dieser Zeit 351 m zurück. Diese Strecke setzt sich aus den 225 m Länge der Brücke und der Länge des Zuges zusammen. Wegen $352 - 225 = 126$ hat der Zug mithin eine Länge von 126 m.

Aufgabe 250734:
Ein Jagdflugzeug flog in einer halben Stunde 200 km weiter als ein Sportflugzeug in einer Stunde. Wie groß war die Geschwindigkeit jedes dieser beiden Flugzeuge, wenn die des Jagdflugzeuges dreimal so groß war wie die des Sportflugzeugs?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Geschwindigkeit des Sportflugzeugs sei $x\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$, die des Jagdflugzeugs ist dann $3x\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Da das Sportflugzeug in einer Stunde x km flog, flog das Jagdflugzeug in einer halben Stunde $(x+200)$ km und daher in einer Stunde $2\cdot(x+200)$ km. Also gilt

$$3x = 2\cdot(x+200) \qquad \Rightarrow \qquad x = 400$$

Das Sportflugzeug hatte somit die Geschwindigkeit $400\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$, das Jagdflugzeug hatte die Geschwindigkeit $1200\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Aufgabe 260731:
Herr Anders fuhr mit seinem Pkw auf der Autobahn mit einer Geschwindigkeit von $100\ \frac{km}{h}$ an einer Tankstelle (A) vorbei. Nach einer weiteren Fahrstrecke von 175 km musste Herr Anders den Benzinhahn auf Reserve stellen.
Da die nächste Tankstelle (B) von dieser Stelle aus auf der Autobahn noch 45 km entfernt liegt, verringerte Herr Anders seine Geschwindigkeit auf $60\ \frac{km}{h}$, um weniger Benzin zu verbrauchen.
Mit welcher Durchschnittsgeschwindigkeit legte Herr Anders die Strecke zwischen A und B zurück?
(Der kurze Bremsweg, auf dem die Geschwindigkeit von $100\ \frac{km}{h}$ auf $60\ \frac{km}{h}$ h herabgesetzt wurde, soll in der Rechnung nicht berücksichtigt werden, da er die gesuchte Durchschnittsgeschwindigkeit nur unwesentlich beeinflusst.)

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Fahrstrecke von A bis zu der Stelle, an der die Geschwindigkeit herabgesetzt wurde, beträgt $s_1 = 175$ km, die Fahrstrecke von dieser Stelle bis B beträgt $s_2 = 45$ km, die Gesamtstrecke von A bis B also $s = s_1 + s_2 = 220$ km. (1)
Die Geschwindigkeit, mit der die erste Teilstrecke zurückgelegt wurde, beträgt $v_1 = 100\frac{km}{h}$. Da diese Geschwindigkeit konstant war, ergibt sich als Fahrzeit für diese Strecke

$$t_1 = \frac{s_1}{v_1} = \frac{175}{170}\text{h} = \frac{7}{4}\text{h}$$

Die Geschwindigkeit, mit der die zweite Teilstrecke zurückgelegt wurde, beträgt $v_2 = 60\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Da auch diese Geschwindigkeit konstant war, ergibt sich als Fahrzeit für diese Strecke

$$t_2 = \frac{s_2}{v_2} = \frac{45}{60}\text{h} = \frac{3}{4}\text{h}$$

Also ist die gesamte Fahrzeit von A nach B $t = t_1 + t_2 = \frac{5}{2}$ h (2). Aus (1) und (2) ergibt sich als gesuchte Durchschnittsgeschwindigkeit

$$v = \frac{s}{t} = \frac{200\text{ km}}{\frac{5}{2}\text{h}} = 88\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Aufgabe 330734:
Ulrike sitzt am Fenster eines Zuges, der mit der Geschwindigkeit $60\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ fährt. Sie beobachtet, dass an ihrem Fenster ein Gegenzug innerhalb von 4 Sekunden vorüberfährt. Außerdem weiß sie, dass dieser Gegenzug 120 m lang ist.
Untersuche, ob die Geschwindigkeit des Gegenzuges durch diese Angaben eindeutig bestimmt ist! Wenn das der Fall ist, gib diese Geschwindigkeit in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Strecke, die der Gegenzug in 4 Sekunden durchfährt, ergibt sich, wenn man seine Länge 120 m um die Länge derjenigen Strecke vermindert, die Ulrikes Zug selbst in diesen 4 Sekunden zurücklegt. Die letztgenannte Strecke beträgt wegen der Geschwindigkeit 60 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ von Ulrikes Zug

$$4s \cdot \frac{60 \cdot 1000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = \frac{200}{3} m$$

Also durchfährt der Gegenzug in 4 Sekunden die Strecke 120 m $- \frac{200}{3}$ m $= \frac{160}{3}$ m; somit ist seine Geschwindigkeit eindeutig durch die Angaben bestimmt, sie beträgt $48 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

I.III Prozentrechnung, Proportionalität

I Runde 1

Aufgabe V10712:
Einer der größten von Menschenhand geschaffenen Seen ist der Zimljansker Stausee in der Sowjetunion. Er hat eine Oberfläche von rund 2600 km^2. Die Fläche des Müggelsees beträgt dagegen rund 750 ha.
Wie viel mal so groß ist die Fläche des Zimljansker Stausees?

Lösung von Steffen Polster:
2600 km^2 sind gleich 260000 ha. Damit wird $\frac{260000}{750} = 346{,}\overline{6} \approx 347$.
Der Stausee ist 347 mal größer als der Müggelsee.

Aufgabe V10713:
Für eine elektrische Leitung von 7 km Länge benötigt man 259 kg Kupferdraht.
Wie viel Kilogramm Kupferdraht der gleichen Stärke benötigt man für eine Leitung von 22 km Länge?

Lösung von Steffen Polster:
Mit direkter Proportionalität wird $\frac{259}{7} = \frac{x}{22}$ und $x = 814$ kg. Es werden 814 kg Kupferdraht benötigt.

Aufgabe 010712:
Beim freiwilligen Kartoffeleinsatz trugen drei Gruppen von Schülern einer 7. Klasse einen kleinen Wettbewerb aus. Sie sammelten gemeinsam insgesamt 52 dt Kartoffeln. Dabei sammelte die zweite Gruppe $1\frac{1}{2}$ mal soviel wie die erste, die dritte 3 dt Kartoffeln mehr als die erste.
Wie viel Dezitonnen Kartoffeln sammelte jede Gruppe?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Zusammen sammelten die drei Gruppen also 1 mal + $1\frac{1}{2}$ mal + 1 mal soviel wie die erste allein plus 3 dt zusätzlich. $3\frac{1}{2}$mal der Ertrag der ersten ist also gleich (52 - 3) dt = 49 dt. Das bedeutet, dass die erste Gruppe 14 dt Kartoffeln aufgesammelt hat, für die zweite folgt daraus 21 dt und für die dritte 17 dt.

Aufgabe 010713:
Im Unterrichtstag in der sozialistischen Produktion sägt ein Schüler ein Stück Vierkantstahl ab, das 475 p schwer ist. Am nächsten Tag wird ein Stück Vierkantstahl, dessen Abmessungen viermal so groß sind wie bei dem abgesägten Stück und das aus gleichem Material besteht, bearbeitet.
Wie schwer ist das Stück? Begründe die Antwort!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Das Volumen steigt proportional mit jeder Abmessung; da es drei mögliche Abmessungen gibt, hat das neue Stück ein $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$mal so großes Volumen. Das Gewicht verhält sich (bei gleichem Material) wie das Volumen, daher ist das neue Gewicht 30400 p.

Aufgabe 050711:
Zwei Jungen vergleichen ihre Ersparnisse. Sie stellen fest: $\frac{2}{3}$ von Peters Sparbetrag ist genau soviel wie $\frac{3}{4}$ von Rainers Sparbetrag.
Wer hat mehr Geld gespart?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Peters Geldbetrag sei p, Rainers r. Dann gilt $\frac{2}{3}p = \frac{3}{4}r$ und folglich $p = \frac{8}{9}r > r$, also hat Peter mehr Geld gespart als Rainer.

Aufgabe 060711:
Ein Vater geht mit seinem Sohn spazieren. Dabei stellen sie fest: Jede Strecke, die der Sohn mit drei Schritten zurücklegt, schafft der Vater mit zwei Schritten.
Nach wie viel Schritten des Vaters setzen beide gleichzeitig den rechten Fuß auf, wenn beide den ersten Schritt gleichzeitig beginnen und mit dem rechten Bein ausführen?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Nur nach jedem zweiten Schritt des Vaters setzen Vater und Sohn gleichzeitig einen Fuß auf. Das ist beim Vater stets der linke Fuß, da er laut Aufgabe den ersten Schritt mit den rechten Bein ausgeführt hat. Also können beide niemals unter den Bedingungen der Aufgabe gleichzeitig den rechten Fuß aufsetzen.

Aufgabe 120711:
Klaus hatte an einem Sonnabend um 12.00 Uhr seine Armbanduhr nach dem Zeitzeichen von Radio DDR eingestellt. Er bemerkte am folgenden Sonntag um 12.00 Uhr beim Zeitzeichen, dass seine Uhr um genau 6 Minuten nachging, vergaß aber, sie richtig zu stellen.
Er wollte am folgenden Montag früh genau um 8.00 Uhr fortgehen.

Welche Zeit zeigte seine Uhr zu dieser Uhrzeit an, wenn angenommen wird, dass seine Uhr während der ganzen Zeit gleichmäßig lief?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Armbanduhr ging in 24 Stunden genau 6 Minuten nach, d. h., in jeder Stunde ging sie den 24. Teil von 6 Minuten, das ist $\frac{1}{4}$ 4 Minute, nach.
Da von Sonnabend 12.00 Uhr bis Montag 8.00 Uhr genau 44 Stunden vergangen waren, ging die Uhr wegen $44 \cdot \frac{1}{4} = 11$ mithin 11 Minuten nach, zeigte also 7.49 Uhr, als es genau 8.00 Uhr war.

Aufgabe 190711:
Eine Gruppe von 8 Schülern hebt bei der Produktionsarbeit im Patenbetrieb einen Graben von 30 cm Breite, 60 cm Tiefe und 20 m Länge aus. Eine zweite Gruppe von 6 Schülern hebt einen Graben von 25 cm Breite, 50 cm Tiefe und 22 m Länge aus.

Es werde vorausgesetzt, dass von jedem der 14 Schüler für das Ausheben gleich großer Volumina gleiche Zeiten benötigt werden (wobei die für das Ausheben eines bestimmten Volumens benötigte Zeit bei allen Schülern dieselbe sei).

Welche der beiden Gruppen benötigt für das Ausheben ihres Grabens unter diesen Voraussetzungen weniger Zeit als die andere?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Das Volumen des Grabens der ersten Gruppe beträgt $(3 \cdot 6 \cdot 200)$ dm^3 = 3600 dm^3; für jeden der 8 Schüler dieser Gruppe ist daher ein Volumen von (3600 : 8) dm^3 = 450 dm^3 auszuheben.
Das Volumen des Grabens der zweiten Gruppe beträgt $(2{,}5 \cdot 5 \cdot 220)$ dm^3 = 2750 dm^3; für jeden der 6 Schüler dieser Gruppe ist daher ein Volumen von (2750 : 6) dm^3 = $458\frac{1}{3}$ dm^3 auszuheben.
Hat jeder der Schüler so lange gearbeitet, bis er 458 dm^3 ausgehoben hat, so ist die erste Gruppe fertig, die zweite noch nicht. Daher benötigt die erste Gruppe weniger Zeit als die zweite.

Aufgabe 260713:
Für die Klassen 2, 3 und 4 einer Schule steht ein Schulgarten mit einem Flächeninhalt von genau 800 Quadratmetern zur Verfügung. Ein Viertel dieser Fläche wird für einen Spielplatz und für das Anlegen von Wegen vorgesehen, die übrige Fläche soll zur Bearbeitung auf die drei Klassen aufgeteilt worden.
Da den einzelnen Klassen unterschiedlich viele Schüler angehören, nämlich der 2. Klasse 25 Schüler, der 3. Klasse 20 Schüler und der 4. Klasse 30 Schüler, wird vereinbart, dass jedem Schüler der genannten Klassen eine gleich große Fläche zur Bearbeitung zugewiesen wird.
Wie viel Quadratmeter Gartenland hat demnach jede der drei Klassen zu bearbeiten?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Fläche für Wege und Spielplatz beträgt $\frac{1}{4}$ von 800 m^2, das sind 200 m^2. Zur Bearbeitung verbleiben somit 800 m^2 - 200 m^2 = 600 m^2.
Die Gesamtschülerzahl der drei Klassen beträgt $25 + 20 + 30 = 75$. Somit hat
Klasse 2 $\frac{25}{75}$ von 600 m^2, das sind 200 m^2,
Klasse 3 $\frac{20}{75}$ von 600 m^2, das sind 160 m^2 und
Klasse 4 $\frac{30}{75}$ von 600 m^2, das sind 240 m^2
zu bearbeiten.

Aufgabe 310711:
Ein Warenhaus erhielt eine Lieferung von roten, blauen und grünen Bällen, zusammen 675 Stück.
Während einer gewissen Zeit wurden davon verkauft:
die Hälfte der roten Bälle, zwei Drittel der blauen Bälle und ein Viertel der grünen Bälle.

Es stellte sich heraus, dass danach von jeder der drei Farben noch gleich viele Bälle übriggeblieben waren.
Ermittle aus diesen Angaben,
a) wie viele Bälle von jeder der drei Farben in der genannten Zeit verkauft worden waren.
b) wie viele Bälle danach insgesamt noch vorhanden waren!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Anzahl der Bälle, die von jeder Farbe am Ende noch vorhanden waren, sei x. Nach den Angaben im Aufgabentext kam dies so zustande, dass

x rote Bälle verkauft wurden, also $2x$ geliefert worden waren,
$2x$ blaue Bälle verkauft wurden, also $3x$ geliefert worden waren, und
$3x$ grüne Bälle verkauft wurden, also $4x$ geliefert worden waren.

Mithin hatte die gesamte Lieferung aus $2x + 3x + 4x = 9x$ Bällen bestanden; daher gilt $9x = 675$, $x = 75$.
Es wurden somit genau 75 rote, 150 blaue und 225 grüne Bälle verkauft, und danach waren noch insgesamt $3 \cdot 75 = 225$ Bälle vorhanden.

Aufgabe 330711:
In einer Hühnerfarm wurden 2500 Hühner gehalten. Am ersten Tag eines Monats war Futter vorhanden, das für genau 30 Tage ausreichend war. Nach genau 14 Tagen wurden 500 Hühner geschlachtet. Um wie viele Tage länger wurde dadurch die Zeit, für die das Futter ausreichend war?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Das nach 14 Tagen vorhandene Futter hätte für 2500 Hühner noch 16 Tage gereicht. Für 500 Hühner würde es 5 mal so lange reichen, d. h. $5 \cdot 16$ Tage.
Für 2000 Hühner reicht es $\frac{1}{4}$ dieser $5 \cdot 16$ Tage, d.s. $5 \cdot 4 = 20$ Tage. Verglichen mit 16 Tagen reicht es also um 4 Tage länger.

II Runde 2

Aufgabe V10721:
Alle Länder des sozialistischen Lagers zusammen erzeugten:

Erzeugnis	Vorkriegsjahr	1959
Elektroenergie	84,7 Mrd. kWh	418,2 Mrd. kWh
Stahl	25,4 Mill. t	92,7 Mill. t
Zement	14,5 Mill. t	73,3 Mill. t

Um wie viel Prozent stieg die Erzeugung?

Lösung von Steffen Polster:
Mit der Beziehung $W : G = p : 100$ (Prozentwert W, Grundwert G, Prozentsatz p) wird für jedes Erzeugnis:
Elektroenergie $p = 493{,}7$, d. h. Anstieg um 393,7 %; Stahl $p = 365{,}0$, d. h. Anstieg um 265 % und Zement $p = 505{,}5$, d. h. Anstieg um 405,5 %.

Aufgabe 010721:
Der Kapitalismus hat zur Folge, dass einer Handvoll industriell hochentwickelter Länder eine große Anzahl sehr schwach entwickelter Länder gegenüberstehen, die durch die imperialistischen Mächte ausgebeutet und ausgeplündert werden.
So erzeugten die hoch entwickelten Länder bei einer Bevölkerungszahl von 603000000 Menschen im Jahre 1959 insgesamt 204000000 t Stahl und 1604 Milliarden Kilowattstunden Elektroenergie. Die schwach entwickelten Länder erzeugten im gleichen Jahr bei einer Bevölkerungszahl von 1283000000 Menschen nur 6000000 t Stahl und 120 Milliarden Kilowattstunden Elektroenergie.
Wie viel Stahl und wie viel Kilowattstunden hätten die schwach entwickelten Länder erzeugen müssen, wenn sie im Verhältnis zu ihrer Bevölkerungszahl genau so viel produziert hätten wie die imperialistischen Mächte?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Zuerst rechnet man die Pro-Kopf-Produktion in den hoch entwickelten Ländern aus.

Stahl: $204\,000\,000 \text{ t} : 603\,000\,000 = 0{,}338 \,\frac{\text{t}}{\text{Person}}$,
Energie: $1\,604\,000\,000\,000 \text{ kWh} : 603\,000\,000 = 2\,660$ kWh/Person.

Diese Werte multipliziert man mit der Anzahl der Menschen in den schwach entwickelten Ländern und stellt fest, dass sie etwa 434000000 t Stahl und 3413 Mrd. kWh Energie hätten produzieren müssen.

Aufgabe 020721:
An der Berliner Mathematik-Olympiade des Jahres 1962 nahmen im Stadtbezirk Köpenick 3808 von 5828 Schülern und im Stadtbezirk Lichtenberg 5097 von 7387 Schülern teil.
Welcher Stadtbezirk wies die bessere relative Beteiligung auf? Die Antwort ist zu begründen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die relative Beteiligung ist der Quotient aus der Anzahl der Schüler, die teilgenommen haben, und denen, die hätten teilnehmen können. Es müssen also die Zahlen $\frac{3808}{5828}$ und $\frac{5097}{7387}$ verglichen werden.
Zur Vereinfachung kann man beide Zahlen auf einen Nenner bringen und die Zähler vergleichen; dann stellt man fest, dass

$$3808 \cdot 7387 \approx 28100000 < 5097 \cdot 5828 \approx 29700000$$

gilt. Das bedeutet, dass die relative Beteiligung in Lichtenberg höher ist.

Aufgabe 060724:
In einem zylindrischen Gefäß (gerader Kreiszylinder mit waagerechter Bodenfläche) befindet sich Wasser. Der Wasserspiegel steht bei $\frac{3}{4}$ der Höhe des Gefäßes. Nachdem genau $2\frac{1}{2}$ Liter Wasser aus diesem Gefäß ausgegossen wurden, steht der Wasserspiegel bei $\frac{2}{5}$ der Gefäßhöhe.
Welches Fassungsvermögen hat das Gefäß?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Das Volumen (in Litern gemessen) ist der Höhe des Gefäßes direkt proportional. $\frac{3}{4}$ des Volumens verringern sich auf $\frac{2}{4}$ des Volumens dadurch, dass $2\frac{1}{2}$ Liter ausgegossen werden.
Wegen $\frac{3}{4} - \frac{2}{5} = \frac{7}{20}$ folgt daraus: $\frac{7}{20}$ des Volumens sind gleich $2\frac{1}{2}$ Liter. Das Gefäß hat demnach ein Fassungsvermögen von $\frac{50}{7}$ Liter.

Aufgabe 090721:
Vater und Sohn gehen nebeneinander. In der gleichen Zeit, in der der Vater 4 Schritte macht, macht der Sohn jedesmal 5 Schritte, und in dieser Zeit legen beide jedesmal genau den gleichen Weg zurück. Die durchschnittliche Schrittlänge des Vaters beträgt 80 cm.

a) Wie groß ist die durchschnittliche Schrittlänge des Sohnes?
b) Wir nehmen an, dass beide gleichzeitig mit dem rechten Fuß beginnen. Nach dem wievielten Schritt des Vaters treten beide erstmalig gleichzeitig mit dem linken Fuß auf?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

a) Mit 4 Schritten legt der Vater 320 cm zurück; denn $4 \cdot 80cm = 320$ cm. Da der Sohn für die gleiche Strecke 5 Schritte braucht, beträgt wegen $320 : 5 = 64$ seine durchschnittliche Schrittlänge 64 cm.

b) Genau dann, wenn der Vater ein (positives ganzzahliges) Vielfaches von 4 als Schrittzahl beendet hat, hat der Sohn gleichzeitig mit dem Vater eine ganzzahlige Schrittzahl beendet, treten also Vater und Sohn gleichzeitig auf.

   Dies geschieht genau dann mit dem linken Fuß, wenn sie eine gerade Anzahl von Schritten beendet haben. Bei dem Vater ist dies für jedes Vielfache von 4 der Fall, bei dem Sohn genau für alle geradzahligen Vielfachen von 5. Das kleinste (positive) geradzahlige Vielfache von 5 ist aber das Zweifache.

   Daher treten Vater und Sohn erstmalig nach dem 8. Schritt des Vaters gleichzeitig mit dem linken Fuß auf.

Aufgabe 160722:
Eine Gärtnerische Produktionsgenossenschaft verkaufte in den Monaten August bis November Äpfel. Der Preis für 1 kg Äpfel war im September um 20% niedriger als im August, im November hingegen um 20% höher als im September.
Waren die Äpfel im November billiger, im Preis gleich oder teurer als im August?
Falls der Preis im November von dem im August abwich, ist anzugeben, um wie viel Prozent des Augustpreises der Novemberpreis von diesem abwich.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Der Preis für 1 kg Äpfel betrage im August x Mark, dann beträgt er im September $(x - \frac{1}{5})$ Mark $= \frac{4}{5}x$ Mark. Im November betrug der Preis

$$\frac{4}{5}x \text{ Mark } + \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5}x \text{ Mark } = \frac{24}{25} \text{ Mark}$$

Da $\frac{24}{25}x < x$ ist, waren die Äpfel im November billiger als im August. Aus $x - \frac{24}{25}x = \frac{1}{25}x = \frac{4}{100}x$ folgt, dass der Preis für die Äpfel im November um 4% ihres Preises im August von diesem abwich.

Aufgabe 200722:
Von einem Dreieck wird gefordert:
Die Maßzahlen der in cm gemessenen Seitenlängen a, b, c sollen natürliche Zahlen sein, die Seitenlänge a soll genau 36% des Umfangs u betragen, die Seitenlänge b genau 48% des Umfangs.

a) Untersuche, ob es unter diesen Bedingungen ein Dreieck gibt, dessen Umfang $u = 25$ cm ist! Wenn dies der Fall ist, so gib seine Seitenlängen an!
b) Untersuche, ob es unter den genannten Bedingungen auch ein Dreieck gibt, dessen Umfang $u > 25$ cm ist! Wenn dies der Fall ist, so gib seine Seitenlängen an!
c) Ermittle alle diejenigen Längen u, die kleiner als 100 cm sind und als Umfang eines Dreiecks auftreten können, dessen Seitenlängen die gestellten Forderungen erfüllen! Ermittle zu jedem dieser Werte u jeweils die Seitenlängen eines solchen Dreiecks!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) 36% von 25 cm sind $36 \cdot \frac{25}{100}$ cm = 9 cm, 48% von 25 cm sind 12 cm.
Ferner gilt 25 cm - 9 cm - 12 cm = 4 cm. Da nun die Dreiecksungleichungen

$$12 \text{ cm} + 4 \text{ cm} > 9 \text{ cm}, \qquad 4 \text{ cm} + 9 \text{ cm} > 12 \text{ cm}, \qquad 9 \text{ cm} + 12 \text{ cm} > 4 \text{ cm}$$

erfüllt sind, gibt es ein Dreieck mit den Seitenlängen $a = 9$ cm, $b = 12$ cm, $c = 4$ cm. Dieses erfüllt die gestellten Forderungen.

b), c) Wenn eine Länge $u = z$ cm als Umfang eines Dreiecks auftritt, das die Forderungen der Aufgabe erfüllt, so folgt: Die Zahl z ist eine natürliche Zahl, ferner ist auch $\frac{36}{100}z = \frac{9}{25}z$ eine natürliche Zahl, nämlich die Maßzahl von a.
Also ist $9z$ durch 25 teilbar. Da 9 zu 25 teilerfremd ist, ist mithin z durch 25 teilbar. Somit kann nur für $z = 25n$ mit natürlichem n die Länge $u = z$ cm als Umfang eines Dreiecks auftreten, das die gestellten Forderungen erfüllt.
Wegen der Forderung $z < 100$ kommen dabei nur Werte $n < 4$ in Betracht, d. h. die Längenangaben $u = 25$ cm, $u = 50$ cm, $u = 75$ cm.

Für jede solche Umfangsangabe gilt: 36% von $25n$ sind $9n$; 48% von $25n$ sind $12n$; ferner gilt $25n - 9n - 12n = 4n$. Wieder sind damit die Dreiecksungleiohungen erfüllt, also gibt es zu diesen Umfangsangaben auch Dreiecke, die die Forderungen der Aufgabe erfüllen.

Indem man für n die Werte 1, 2, 3 einsetzt, erhält man die gesuchten Seitenlangen, nämlich für $n = 1$ die Werte aus dem Aufgabenteil a) und für $n = 2$ zum Umfang $u = 50$ cm die Seitenlängen $a = 18$ cm,

$b = 24$ cm, $c = 8$ cm bzw. für n = 3 zum Umfang $u = 75$ cm die Seitenlängen $a = 27$ cm, $b = 36$ cm, $c = 12$ cm.

Aufgabe 230721:
Uwes Schulweg führt am Rathaus und am Bahnhof vorbei. Am Rathaus hat Uwe ein Viertel des Weges geschafft; die Rathausuhr zeigt 7.30 Uhr an. Am Bahnhof hat Uwe ein Drittel des Weges hinter sich; die Bahnhofsuhr zeigt 7.32 Uhr an.
Um wie viel Uhr trifft Uwe in der Schule ein, wenn er während den gesamten Weges mit gleichbleibender Geschwindigkeit geht?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn der Weg bis zum Rathaus genau $\frac{1}{4}$ des Gesamtweges und der Weg bis zum Bahnhof genau $\frac{1}{3}$ des Gesamtweges ist, dann ist der Weg vom Rathaus bis zum Bahnhof (wegen $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$) genau $\frac{1}{12}$ des Gesamtweges.

Wenn der Weg bis zum Bahnhof genau $\frac{1}{3}$ des Gesamtweges ist, dann ist der Weg vom Bahnhof bis zur Schule genau $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$ des Gesamtweges.
Da Uwe für $\frac{1}{12}$ des Gesamtweges genau 2 Minuten benötigte, benötigte er für $\frac{8}{12}$ des Gesamtweges genau 16 Minuten. Da Uwe um 7.32 Uhr am Bahnhof war, trifft er folglich um 7.48 Uhr in der Schule ein.

Aufgabe 290721:
Susi geht einkaufen. Von dem Geld, das ihr die Mutter gegeben hat, gibt sie 30% im Fleischerladen aus; im Milchladen bezahlt sie mit einem Viertel desjenigen Betrages, den ihr die Mutter gegeben hatte. Im Gemüseladen braucht sie genau vier Fünftel desjenigen Betrages, den sie im Fleischerladen bezahlt hatte.
Beim Bäcker schließlich gibt sie doppelt so viel Geld aus, wie sie danach als Restbetrag wieder mit nach Hause bringt. Von diesem Restbetrag gibt ihr die Mutter die Hälfte, nämlich genau 1,05 M, damit sie sich ein Softeis kaufen kann.

Ermittle den Geldbetrag, den Susi zu Anfang von der Mutter bekommen hatte!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Da von dem Restbetrag, den Susi wieder mit nach Hause brachte, die Hälfte genau 1,05 M war, ergibt sich, dass dieser Restbetrag selbst 2,10 M betragen hat. Doppelt so viel, also 4,20 M, gab Susi beim Bäcker aus.
Nach dem Einkauf im Fleischer-, Milch- und Gemüseladen hatte sie also noch 4,20 M + 2,10 M = 6,30 M. Im Fleischerladen gab sie 30% des Betrages aus, den ihr die Mutter ursprünglich mitgegeben hatte; im Gemüseladen vier Fünftel von diesen 30%, das sind also 24% des ursprünglichen Betrages.
Im Milchladen gab sie ein Viertel, d. h. 25% des ursprünglichen Betrages aus. Daher gab Susi in diesen drei Läden zusammen $30\% + 25\% + 24\% = 79\%$ des ursprünglichen Betrages aus; folglich waren die 6,30 M, die ihr nach diesen drei Einkäufen verblieben waren, 21% des ursprünglichen Betrages. War G dieser Betrag, so gilt also $G = 6{,}30 \cdot \frac{100}{21}$ M $= 30$ M.

Aufgabe 340722:
a) Ein Wettspielgewinn von 1485 DM soll auf drei Teilnehmer im Verhältnis 2 : 3 : 4 aufgeteilt werden.
Wie viel bekommt jeder?

b) Bei einem anderen Spiel erhält ein Teilnehmer ein Fünftel der Gewinnsumme, das sind 150 DM. Der Rest soll auf die beiden anderen Teilnehmer im Verhältnis 5 : 7 aufgeteilt werden.
Wie viel bekommt jeder von ihnen?

c) Bei einem dritten Spiel wurde vereinbart, den Gewinn im Verhältnis der Einsätze aufzuteilen, mit denen sich die Teilnehmer an dem Wettspiel beteiligt hatten. Die Summe dieser Einsätze der drei Teilnehmer Anke, Bertram und Claus hatte 44 DM betragen, ferner gilt: Hätte Anke 6 DM mehr eingesetzt und hätte Claus das Doppelte seines Einsatzes eingesetzt, so hätten alle drei den gleichen Gewinnanspruch erreicht.
Wie groß waren die drei Einsätze?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Die Teilnehmer sollen der Reihe nach 2 Teile, 3 Teile und 4 Teile des Gewinns erhalten, wobei alle diese Teile gleichgroß sein sollen und zusammen den gesamten Gewinn ausmachen sollen. Da es also $2 + 3 + 4 = 9$ Teile sein sollen, muss jedes Teil 1485 DM : 9 = 165 DM betragen. Also erhalten die Teilnehmer der Reihe nach

$$2 \cdot 165 \text{ DM} = 330 \text{ DM}, \qquad 3 \cdot 165 \text{ DM} = 495 \text{ DM}, \qquad 4 \cdot 165 \text{ DM} = 660 \text{ DM}$$

b) Da ein Fünftel des Gewinns 150 DM sind, beträgt der gesamte Gewinn $5 \cdot 150$ DM = 750 DM.
Die im Aufgabentext genannten beiden anderen Teilnehmer bekommen zusammen 750 DM - 150 DM = 600 DM. Zur Aufteilung dieses Betrages im Verhältnis 5 : 7 ergibt sich entsprechend wie in a) wegen 5+7 = 12 und 600 : 12 = 50: Die beiden anderen Teilnehmer erhalten der Reihe nach $5 \cdot 50$ DM = 250 DM; $7 \cdot 50$ DM = 350 DM.

c) Waren a, b, c die in DM gerechneten Einsätze von Anke, Bertram bzw. Claus, so gilt $a + b + c = 44$ und $a + 6 = 2c = b$.
Setzt man hieraus $a = 2c - 6$ und $b = 2c$ in die erste Gleichung ein, so folgt $2c - 6 + 2c + c = 44$, d. h. $c = 10$ und damit weiter $b = 20$, $a = 14$.
Also wurden folgende Beträge gesetzt: Anke: 14 DM, Bertram: 20 DM, Claus: 10 DM.

III Runde 3

Aufgabe V10731:
In der DDR stieg die Zahl der hergestellten Fotoapparate von 1959 um 10% gegenüber 1958 und betrug rund 558000 Stück. Wie viel Stück wurden 1958 hergestellt?
Fritz rechnet: „558000 minus 10% davon, das sind 55800. Also wurden 1958: $558000 - 55800 = 502200$ Stück hergestellt.“
a) Welchen Fehler hat Fritz gemacht?
b) Wie muss man richtig rechnen, und wie lautet das Ergebnis?
c) Die Zahl der hergestellten Fernsehempfänger stieg von 1958 bis 1959 um 61% und betrug 1959 290000 Stück. Wie viel Stück wurden 1958 hergestellt?
d) Wie groß ist in diesem Falle die Abweichung gegenüber dem Ergebnis, das Fritz mit seiner falschen Rechnung erhält?

Lösung von Steffen Polster:
a) Der Fehler besteht darin, dass die 10 % auf den Prozentwert von 1959 bezogen wurde und nicht auf den Grundwert von 1958.
b) Eine Steigerung von 10 % bedeutet, dass der Prozentwert P von 1959 110 % des Grundwertes G von 1958 entspricht, d. h.

$$\frac{P}{G} = \frac{110}{100} \rightarrow \frac{558000}{G} = 1{,}1 \qquad \rightarrow \qquad G = \frac{558000}{1{,}1} = 507272$$

1958 wurden 507272 Fotoapparate hergestellt.
c) Analog zur Aufgabe b) wird

$$\frac{P}{G} = \frac{161}{100} \rightarrow \frac{290000}{G} = 1{,}61 \qquad \rightarrow \qquad G = \frac{290000}{1{,}61} = 180124$$

1958 wurden 180124 Fernsehgeräte produziert.
d) Mit der fehlerhaften Berechnung würde sich ergeben: $290000 - 0.61 \cdot 290000 = 113100$. Die Abweichung wäre folglich 67024 Fernsehgeräte.

Aufgabe V10732:
Im Grundlehrgang Metallbearbeitung wurden von 5 Schülern Spannstücke für Parallelschraubzwingen angefertigt. Beim Nachmessen stellen die Schüler folgende Längen fest:
Spannstück 1 Länge 119,5 mm,
Spannstück 2 Länge 119,7 mm,
Spannstück 3 Länge 120,2 mm,
Spannstück 4 Länge 120,1 mm,
Spannstück 5 Länge 120,6 mm.
a) Welche durchschnittliche Länge hatten die Spannstücke?
b) Wie groß ist die Abweichung der Maßzahlen vom Sollmaß (120,0 mm) bei den einzelnen Spannstücken? (absoluter Fehler).
c) Wie viel Prozent des Sollmaßes betragen die Abweichungen? (prozentualer Fehler).
d) Welche Spannstücke sind brauchbar, wenn der prozentuale Fehler höchstens 1/2 Prozent betragen darf?

Lösung von Steffen Polster:
a) $(119{,}5 + 119{,}7 + 120{,}2 + 120{,}1 + 120{,}6) : 5 = 120{,}02$ Der Mittelwert ist 120,2 mm.
b-d)

Spannstück	absoluter Fehler	prozentualer Fehler
1	0,5 mm	0,417 %
2	0,3 mm	0,25 %
3	0,2 mm	0,167 %
4	0,1 mm	0,083 %
5	0,6 mm	0,5 %

Alle Spannstücke entsprechen dem maximalen Fehler und sind damit brauchbar.

Aufgabe 010731:
Ein guter Melker kann in einer Stunde höchstens 8 Kühe melken. Durch den Einsatz einer sowjetischen Melkmaschine kann er in 8 Stunden 96 Kühe melken. Die 150 Milchkühe, die das VEG Biesdorf im Jahre 1958 besaß, konnten mit Hilfe eines Melkstandes bereits in 3 Stunden gemolken werden.
Um wie viel Prozent wächst die Arbeitsproduktivität
a) beim Einsatz der sowjetischen Melkmaschine,
b) beim Einsatz eines Melkstandes?
Anmerkung: Unter der Arbeitsproduktivität verstehen wir in diesem Falle den Quotienten aus der Anzahl der Kühe und der zu ihrem Melken benötigten Zeit.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Ausgangsgröße ist der Melker, der 8 Kühe pro Stunde melkt.
a) Mit der sowjetischen Melkmaschine schafft er 96 Kühe/8 h = 12 Kühe/h, also 50% mehr.
b) Am Melkstand können 150 Kühe/3 h = 50 Kühe/h gemolken werden, das ist eine Steigerung auf 625 % oder um 525 % gegenüber der Ausgangsgröße.

Aufgabe 020731:
Bei einem Preisausschreiben galt es, die Bilder von 4 verschiedenen Bauwerken 4 genannten Städten richtig zuzuordnen. 12 Prozent der Einsender hatten alles richtig gemacht, doppelt so viele hatten zwei Bauwerke und viermal so viele hatten ein Bauwerk richtig zugeordnet. 240 eingesandte Lösungen waren gänzlich falsch.

a) Wie viel Lösungen waren eingesandt worden?
b) Wie viel Einsender hatten 0, 1, 2, 3 und 4 Paare richtig zusammengestellt?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Zuerst stellt man fest, dass es nicht möglich ist, drei Bauwerke richtig und eines falsch zuzuordnen. 12%+24%+48% = 84% hatten wenigstens ein Bauwerk richtig. Daher entsprechen die verbleibenden 16% den 240 vollkommen falschen Einsendungen. Damit waren insgesamt 1500 Lösungen eingesandt worden, davon hatten 240, 720, 360, 0 bzw. 180 genau 0, 1, 2, 3 bzw. 4 Paare richtig.

Aufgabe 020732:
In einen Flachstab von 2,5 m Länge sollen 15 Löcher in gleichem Abstand mit dem Durchmesser d = 20 mm gebohrt werden.
In welchem Abstand muss angekörnt werden, wenn an beiden Enden der Abstand bis zum Lochrand das 2,5fache des Lochdurchmessers betragen soll?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Zwischen den 15 Löchern gibt es 14 Abstände. Also muss der Abstand zwischen den Mittelpunkten der äußersten Löcher in 14 gleiche Teile geteilt werden. An beiden Enden geht das 2,5fache eines Lochdurchmessers ab, also 100 mm. Dazu kommen noch zweimal der Radius, da die Angabe vorher sich auf den Lochrand bezog.
Es müssen also 2380 mm in 14 Abschnitte zerlegt werden. Jeder muss also 170 mm lang sein.

Aufgabe 030731:
Peter stellt um 7.00 Uhr seine Armbanduhr nach der Zeitansage im Radio. Um 15.00 Uhr stellt er fest, dass seine Uhr in diesen 8 Stunden insgesamt 12 Minuten nachgegangen ist. Er möchte um Punkt 18.00 Uhr seinen Freund treffen.
Wie muss er seine Uhr um 15.00 Uhr stellen, damit sie um 18.00 Uhr die genaue Zeit anzeigt?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Auf 8 Stunden geht Peters Uhr 12 Minuten nach. Damit geht seine Uhr in einer Stunde 1,5 Minuten nach, und in 3 Stunden 4,5 Minuten. Also muss Peter um 15.00 Uhr seine Uhr auf 15.04 Uhr und 30 Sekunden stellen.

Aufgabe 050736:
Ein Betrieb sollte in 20 Arbeitstagen p Werkstücke der gleichen Art herstellen. Durch Anwendung besserer Arbeitsmethoden gelang es den Arbeitern, diesen Auftrag bereits in 5 Arbeitstagen früher zu erfüllen und dabei noch k Werkstücke mehr als gefordert herzustellen.
Wie viel Werkstücke wurden durchschnittlich an jedem Arbeitstag über den Plan hinaus produziert?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Anzahl der durchschnittlich an jedem Arbeitstag laut Plan anzufertigenden Werkstücke beträgt $\frac{p}{20}$. In Wahrheit wurden aber $(p+k)$ Werkstücke in $(20-5)$ Tagen produziert, an jedem Arbeitstag also durchschnittlich $\frac{p+k}{15}$ Werkstücke.
Daher betrug die Anzahl der durchschnittlich an jedem Arbeitstag über den Plan hinaus angefertigten Werkstücke

$$\frac{p+k}{15} - \frac{p}{20} = \frac{p+4k}{60}$$

Aufgabe 060732:
In einer alten Aufgabensammlung steht folgende Aufgabe:
Ein Jagdhund verfolgt einen Fuchs, der ihm 54 Fuchsschritte voraus ist. Die Länge von 2 Hundeschritten ist genau gleich der Länge von 3 Fuchsschritten. Der Hund braucht zu 4 Schritten genauso lange Zeit wie der Fuchs zu 5 Schritten.
Mit wie viel Schritten holt der Hund den Fuchs ein, wenn beide gleichzeitig in ein und derselben Richtung starten?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Der Hund braucht zu 4 Schritten genau soviel Zeit wie der Fuchs zu 5 Schritten. Da 4 Hundeschritte so lang wie 6 Fuchsschritte sind, kommt der Hund mit je 4 Schritten dem Fuchs um 1 Fuchsschritt näher. Die 54 Fuchsschritte holt der Hund folglich mit $54 \cdot 4$ Hundeschritten = 216 Hundeschritten auf.

Aufgabe 070733:
Drei Angler fuhren zum Fischfang. Der erste fing 3 Fische, der zweite 4 und der dritte keinen. Die Fischer brieten alle 7 Fische, verteilten sie gleichmäßig unter sich und frühstückten. Zum Spaß gab der dritte Fischer seinen beiden Kameraden 7 Pfennige, um die von ihm verzehrten Fische zu „bezahlen“. Wie müssten die 7 Pfennige unter diesen Umständen verteilt werden?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Jeder Angler aß $\frac{7}{3}$ Fische.
Daher gab der erste $\frac{2}{3}$ Fische, der zweite $\frac{5}{3}$ Fische an den dritten. Falls die vom dritten Angler verzehrten Fische also „bezahlt“ werden sollen, müsste der erste 2 und der zweite 5 Pfennige bekommen.

Aufgabe 090734:
Bei einer Subtraktionsaufgabe betrage der Subtrahend $\frac{2}{5}$ des (von Null verschiedenen) Minuenden.
a) Wie viel Prozent des Minuenden beträgt die Differenz?
b) Wie viel Prozent des Minuenden beträgt die Summe aus Minuend und Subtrahend?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Bezeichnet man den Minuenden mit m ($m \neq 0$), dann ist der Subtrahend $\frac{2}{5}m$. Die Differenz ist $m - \frac{2}{5}m = \frac{3}{5}m$. Wegen $\frac{3}{5}m = \frac{60}{100}m$ beträgt die Differenz 60% des Minuenden.

b) Die Summe aus Minuend und Subtrahend ist $m + \frac{2}{5}m = \frac{7}{5}m$. Wegen $\frac{7}{5}m = \frac{140}{100}m$ beträgt diese Summe 140% des Minuenden.

Aufgabe 140734:
In einem VEB wurde eine bestimmte Art von Werkstücken zuerst in der Abteilung A1 und danach in der Abteilung A2 bearbeitet. Dabei konnte zunächst in der einen Abteilung täglich dieselbe Anzahl von Werkstücken bearbeitet werden wie in der anderen.

Mit Hilfe von Rationalisierungsmaßnahmen in beiden Abteilungen konnten die 53 Arbeiter der Abteilung A1 ihre Produktion auf 159 % und die 62 Arbeiter der Abteilung A2 ihre Produktion auf 124 % erhöhen. Da aber aus den angegebenen Gründen der Produktionsausstoß in beiden Abteilungen gleich groß sein musste, entschlossen sich hinreichend viele Arbeiter der einen Abteilung dazu, in der anderen Abteilung zu arbeiten.

Welche Anzahl von Arbeitern aus welcher der beiden Abteilungen nahm ihre Arbeit in der anderen Abteilung auf, wenn erreicht wurde, dass der Produktionsausstoß in beiden Abteilungen danach wieder gleich groß war?
Auf wie viel Prozent der Produktionsmenge vor den Rationalisierungsmaßnahmen war damit insgesamt der Produktionsausstoß gestiegen?
Bemerkungen: Es sei angenommen, dass der Produktionsausstoß beider Abteilungen jeweils der Zahl der Arbeiter proportional ist.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
In A1, produzierte nach Durchführung der Rationalisierung jeder der 53 Arbeiter $\frac{1{,}59}{53}$ und in A2 jeder der 62 Arbeiter $\frac{1{,}64}{62}$ des Produktionsausstoßes seiner Abteilung vor den Rationalisierungsmaßnahmen.

Da in A1 die Produktion auf eine größere Menge gewachsen war als in A2 mussten Arbeiter von A1 nach A2 überwechseln. Ihre Anzahl sei x. Danach betrug in A1 die Produktion $\frac{1{,}59}{53}(53-x)$ der früheren Produktion, in A2 aber $\frac{1{,}24}{62}(62+x)$. Da diese beiden Produktionsausstöße gleich waren, gilt

$$\frac{159}{53}(53-x) = \frac{124}{62}(62+x) \Rightarrow x = 7$$

Es wechselten somit 7 Arbeiter von A1 nach A2 über. Der neue Produktionsausstoß in jeder Abteilung betrug dann $\frac{1{,}59}{53} \cdot 46 = 1{,}38$, d. h., er stieg auf 138 % des früheren Produktionsausstoßes.

Aufgabe 150734:
Ein Zug fährt genau 15 Minuten später von einem Bahnhof B ab, als es der Fahrplan vorsieht. Deshalb fährt er mit 120 % der auf dieser Strecke üblichen Durchschnittsgeschwindigkeit so lange, bis der Rückstand aufgeholt ist.
Nach wie viel Minuten (gerechnet von der tatsächlichen Abfahrtszeit des Zuges an) ist das der Fall?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Ist v die auf der Strecke übliche Durchschnittsgeschwindigkeit, so fährt der Zug mit der Geschwindigkeit $\frac{120}{100}v = \frac{6}{5}v$.
Ist s die Länge der Strecke von B bis zu der Stelle, an der der Rückstand aufgeholt ist, und ist t die Fahrzeit des Zuges von B bis zu dieser Stelle, so ist einerseits $s = \frac{6}{5}v \cdot t$, andererseits die für die genannte Strecke übliche Fahrzeit (in Minuten) $t + 15$, also $s = v \cdot (t + 15)$.

Daraus folgt $\frac{6}{5}vt = vt + 15v$, also $\frac{1}{5}vt = 15v$, also $t = 5 \cdot 15 = 75$. Der Rückstand ist mithin in 75 min aufgeholt.

Aufgabe 160734:
Im Rahmen der Hans-Beimler-Wettkämpfe an der Schule beteiligte sich Fritz am Entfernungsschätzen.

a) Bei seinem Schätzwert von 350 Metern erfährt er, dass dieser zu klein war, und zwar um genau 12,5% der wahren Entfernung. Ermittle die wahre Entfernung!
b) Wie groß wäre die wahre Entfernung, wenn der Schätzwert von Fritz zu groß gewesen wäre, und zwar um genau 12,5% der wahren Entfernung?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Die wahre Entfernung sei x Meter. Der Schätzwert war um 12,5% von x Metern, d. h. um $\frac{1}{8}x$ Meter zu klein. Das bedeutet, dass der Schätzwert genau $\frac{7}{8}x$ Meter betrug. Mithin gilt: $\frac{7}{8} = 350$, also $x = 400$. Die wahre Entfernung beträgt also 400 m.

b) In diesem Falle sei die wahre Entfernung y Meter. Der Schätzwert wäre um $\frac{1}{8}y$ Meter zu groß gewesen, d. h., er hätte $\frac{9}{8}y$ Meter betragen. Folglich gilt: $\frac{9}{8}y = 350$, also $y = 311\frac{1}{9}$. In diesem Falle würde die wahre Entfernung $311\frac{1}{9}$ m betragen.

Aufgabe 180734:
In einem Behälter befinden sich genau 25 kg einer 4%igen wässrigen Lösung, d. h., 4% dieser Lösung bestehen aus der gelösten Substanz, der Rest besteht aus Wasser.
Wie viel Prozent des Wassers sind dieser Lösung zu entziehen, damit eine neue Lösung entsteht, deren Wasseranteil nur noch 90% beträgt?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
In der Ausgangslösung befinden sich genau 4% der gelösten Substanz, das ist bei 25 kg Lösung genau

1 kg. Diese Menge stellt nach dem Entzug einer Wassermenge genau dann 10% der neuen Lösung dar, wenn die neue Lösung insgesamt 10 kg umfasst.

Somit beträgt genau dann, wenn man der Ausgangslösung 15 kg Wasser entzogen hat, sein Anteil 90%, wie es gefordert war. Zu ermitteln ist demnach, wie viel Prozent von 24 kg Wasser 15 kg Wasser sind. Für diesen gesuchten Prozentsatz x gilt die Beziehung

$$x : 100\% = 15 : 24 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{1500}{24}\% = 62{,}5\%$$

Demzufolge sind 62,5% des in der Ausgangslösung enthaltenen Wassers dieser Lösung zu entziehen, um eine neue Lösung mit 90% Wasseranteil zu erhalten.

Aufgabe 190734:
Birgit und Frank erhalten folgende Informationen über die Schüler einer Schulklasse:

Die Anzahl aller Schüler dieser Klasse ist kleiner als 40.
Genau 60% dieser Schüler nehmen an der AG „Bildende Kunst“ teil,
genau 66% aller Schüler der Klasse gehen regelmäßig zum Schwimmen,
genau 50% aller Schüler der Klasse sind Leser der Kinderbibliothek.

Birgit nennt eine natürliche Zahl x und meint:
Aus den Informationen folgt, dass mindestens x Schüler dieser Klasse sowohl an der AG „Bildende Kunst“ teilnehmen als auch regelmäßig zum Schwimmen gehen; dagegen folgt nicht, dass mehr als x Schüler der Klasse diese beiden Freizeitbeschäftigungen ausüben.

Frank nennt eine natürliche Zahl y und meint:
Aus den Informationen folgt, dass mindestens y Schüler dieser Klasse an allen drei Formen der Freizeitbeschäftigung (AG „Bildende Kunst“, Schwimmen, Kinderbibliothek) teilnehmen.

a) Zeige, dass aus den gegebenen Informationen die Anzahl der Schüler der Klasse eindeutig ermittelt werden kann, und gib diese Anzahl an!
b) Ermittle eine natürliche Zahl x so, dass Birgits Aussagen wahr sind!
c) Beweise, dass Franks Aussagen für jede natürliche Zahl $y > 0$ falsch sind!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Da $60\% = \frac{3}{5}, 66\frac{2}{3}\% = \frac{2}{3}$ und $50\% = \frac{1}{2}$ gilt, muss die gesuchte Anzahl z durch 2, 3 und 5, wegen der paarweisen Teilerfremdheit dieser Zahlen also durch $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ teilbar sein. Wegen $0 < z < 40$ folgt somit $z = 30$.

b) Daher und wegen $35 \cdot 30 = 18, 23 \cdot 30 = 20, 12 \cdot 30 = 15$nehmen genau 18 Schüler an der AG „Bildende Kunst“ teil, genau 20 der Schüler gehen regelmäßig zum Schwimmen und genau 15 der Schüler sind Leser der Kinderbibliothek.

Hiernach folgt, dass mindestens 8 Schüler dieser Klasse sowohl an der AG „Bildende Kunst“ teilnehmen als auch regelmäßig zum Schwimmen gehen. Wären es nämlich weniger als 8, so gäbe es unter den 20 regelmäßig zum Schwimmen gehenden Schülern mehr als 12, die nicht an der AG „Bildende Kunst“ teilnehmen. Diese Schüler und die 18 Teilnehmer der AG wären zusammen bereits mehr als 30 Schüler.

Dagegen folgt nicht, dass mindestens 9 Schüler der Klasse diese beiden Freizeitbeschäftigungen ausüben. Denn nach den Informationen ist z. B. folgende Verteilung möglich:

Von den 18 Teilnehmern der AG „Bildende Kunst“ gehen genau 8 zum Schwimmen, genau die anderen 10 sind Leser der Kinderbibliothek; die übrigen 12 Schüler der Klasse gehen sämtlich zum Schwimmen, genau 5 von ihnen sind außerdem Leser der Kinderbibliothek.

Damit ist bewiesen, dass Birgits Aussagen für die Zahl $x = 8$ wahr sind.

c) Wie das ebengenannte Beispiel zeigt, besteht nach den Informationen auch die Möglichkeit, dass kein Schüler der Klasse alle drei Freizeitbeschäftigungen ausübt. Für keine natürliche Zahl $y > 0$ kann daher Franks Aussage wahr sein.

Aufgabe 230735:
Roland rechnet eine Divisionsaufgabe. Er stellt fest:

Der Dividend beträgt 60% des Quotienten, der Divisor beträgt 75% des Quotienten.
Beweise, dass man aus Rolands Feststellungen eindeutig ermitteln kann, wie der Quotient der Divisionsaufgabe lautet! Gib diesen Quotienten an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Ist Q der Quotient, so ist nach Rolands Feststellungen der Dividend $\frac{3}{5}Q$ und der Divisor $\frac{3}{4}Q$. Die Divisionsaufgabe lautet somit

$$\frac{3}{5}Q : \left(\frac{3}{4}Q\right)$$

Ihr Ergebnis ist $\frac{3}{5} \cdot \frac{4}{3} = \frac{4}{5}$.
Damit ist bewiesen, dass man den Quotienten aus Rolands Feststellungen eindeutig ermitteln kann. Er lautet $\frac{4}{5}$.

Aufgabe 240731:
Bei der Friedensfahrt ergab sich auf einer Etappe folgende Rennsituation:
Genau 14 Fahrer, darunter jedoch kein DDR-Fahrer, waren hinter das Hauptfeld zurückgefallen. Genau 90% der nicht zurückgefallenen Fahrer bildeten das Hauptfeld; darin fuhren einige, aber nicht alle DDR-Fahrer.
Die Fahrer vor dem Hauptfeld bildeten eine Spitzengruppe; sie umfasste genau ein Zwölftel aller Fahrer der Etappe. In der Spitzengruppe war die tschechoslowakische Mannschaft als einzige am schwächsten vertreten, die sowjetische Mannschaft als einzige am stärksten.

Untersuche, ob sich aus diesen Angaben eindeutig ermitteln lässt, welche Mannschaften insgesamt in der Spitzengruppe fuhren und mit wie viel Fahrern sie dort vertreten waren!
Wenn dies zutrifft, gib diese Anzahlen an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn genau x Fahrer an der Etappe teilnahmen, so waren genau $x - 14$ Fahrer nicht zurückgefallen, und genau 10% hiervon, also $\frac{1}{10}(x - 14)$ Fahrer, bildeten die Spitzengruppe. Da dies auch $\frac{x}{12}$ Fahrer waren, folgt

$$\frac{1}{10}(x - 14) = \frac{x}{12} \qquad \Rightarrow \qquad x = 84$$

Somit bestand wegen $84 : 12 = 7$ die Spitzengruppe aus genau 7 Fahrern.
Darunter waren auch DDR- Fahrer, und zwar mindestens 2, da sich auch CSSR-Fahrer in der Spitzengruppe befanden, aber mindestens einer weniger als DDR-Fahrer.
Wären es mindestens 3 DDR-Fahrer gewesen, so mindestens 4 sowjetische Fahrer, im Widerspruch dazu, dass unter den 7 Fahrern der Spitzengruppe nicht nur die DDR- und die UdSSR-Mannschaft vertreten waren.
Also lässt sich eindeutig ermitteln: In der Spitzengruppe waren genau 2 DDR-Fahrer, (1) ferner genau 1 CSSR-Fahrer. (2)

Ferner folgt, dass die sowjetische Mannschaft mit 3 oder 4 Fahrern vertreten war. Wären es genau 3 gewesen, so folgte der Widerspruch, dass eine weitere Mannschaft genau einen Fahrer in der Spitzengruppe gehabt hätte, also die CSSR-Mannschaft nicht als einzige am schwächsten dort vertreten gewesen wäre.
Damit ergibt sich eindeutig: In der Spitzengruppe waren genau die Mannschaften der UdSSR, DDR und CSSR vertreten, darunter (außer den in (1),(2) genannten Fahrern) genau 4 sowjetische Fahrer.

Aufgabe 300731:
In einem Lehrbuch aus dem Jahre 1525 wird sinngemäß folgende Aufgabe gestellt:

Ein Hund jagt einen Fuchs. Jeweils in der Zeit, in der der Fuchs 9 Sprünge macht, macht der Hund 6 Sprünge, aber mit 3 Sprüngen legt der Hund einen ebenso langen Weg zurück, wie der Fuchs mit 7 Sprüngen.
Mit wie viel seiner Sprünge holt der Hund den Fuchs ein, wenn der Fuchs zu Beginn 60 Fuchssprünge Vorsprung hat?

Bemerkung: Es wird vorausgesetzt, dass der Hund der Spur des Fuchses folgt und dass beide ihren ersten Sprung gleichzeitig beginnen.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Damit der Fuchs jeweils in der Zeit, in der der Hund $6 = 2 \cdot 3$ Sprünge macht, einen ebenso langen Weg wie der Hund zurücklegen könnte, müsste er $2 \cdot 7 = 14$ Sprünge machen. Da er aber in dieser Zeit nur 9 seiner Sprünge macht, verringert sich dabei sein Vorsprung jedesmal um 5 Fuchssprünge.
Wegen $60 : 5 = 12$ ist folglich genau dann, wenn das 12mal geschehen ist, der Vorsprung aufgebraucht, also nach $12 \cdot 6 = 72$ Sprüngen des Hundes.

Aufgabe 330732:
In einem Kaufhaus waren $\frac{4}{5}$ aller Beschäftigten Frauen. Zu Anfang eines Monats waren 12,5% dieser Frauen nicht verheiratet. Von den in diesem Kaufhaus beschäftigten Männern waren 18,75% nicht verheiratet.
Während des Monats heirateten vier Paare, von denen jeweils sowohl der Mann als auch die Frau zu den eben genannten unverheirateten Beschäftigten des Kaufhauses gehörten. Weitere Änderungen gab es nicht.
Danach waren noch genau 36 Beschäftigte des Kaufhauses unverheiratet.
Wie viele Beschäftigte hatte das Kaufhaus insgesamt?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn das Kaufhaus insgesamt x Beschäftigte hatte, so waren darunter $\frac{4}{5}x$ Frauen und $\frac{1}{5}x$ Männer.
Zu Beginn des Monats waren $\frac{12{,}5}{100} \cdot \frac{4}{5}x = \frac{1}{10}x$ Frauen und $\frac{18{,}75}{100} \cdot \frac{1}{5}x = \frac{3}{80}x$ Männer unverheiratet, das waren zusammen $\frac{1}{10}x + \frac{3}{80}x = \frac{11}{80}x$ unverheiratete Beschäftigte.

Nach der Heirat der 4 Paare waren noch $\frac{11}{80}x - 8$ Beschäftigte unverheiratet. Daher gilt

$$\frac{11}{80}x - 8 = 36 \qquad \Rightarrow \qquad x = 320$$

Das Kaufhaus hatte insgesamt 320 Beschäftigte.

I.IV Ungleichungen

I Runde 1

Aufgabe V00704:
Welche der beiden Zahlen ist die größere?

$$\frac{35}{47} \qquad \text{oder} \qquad \frac{23}{31}$$

Welcher vierstellige Dezimalbruch kommt beiden Zahlen möglichst nahe?

Lösung von Steffen Polster:
Durch "Überkreuzmultiplizieren" von $\frac{35}{47} \gtreqless \frac{23}{31}$ wird $35 \cdot 31 = 1085 \gtreqless 1081 = 23 \cdot 47$, d. h. der linke Bruch ist der größere, also $\frac{35}{47} > \frac{23}{31}$.

Das arithmetische Mittel beider Brüche ist $\frac{1083}{1457} \approx 0{,}74331$, womit der gesuchte Dezimalbruch 0,7433 ist.

Aufgabe V10711:
Ordne folgende Zahlen der Größe nach:

$$\frac{29}{8}; \quad -0{,}66; \quad -\frac{3}{2}; \quad \frac{2}{3}; \quad 3{,}52; \quad -0{,}67; \quad 3{,}5\overline{2}$$

Lösung von Steffen Polster:
Beginnend mit der kleinsten Zahl ergibt sich die Ordnung

$$-\frac{3}{2}; \quad -0{,}67; \quad -0{,}66; \quad \frac{2}{3}; \quad 3{,}52; \quad 3{,}5\overline{2}; \quad \frac{29}{8}$$

Aufgabe 010711:

$$a) \quad \left(-\frac{5}{6}\right)^2 \qquad b) \quad \left(\frac{3}{4}\right)^2 \qquad c) \quad \left(-\frac{2}{3}\right)^5 \qquad d) \quad \left(-\frac{4}{5}\right)^4$$

Ordne die Ergebnisse der Größe nach!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Ergebnisse sind in absteigender Reihenfolge

$$a) \quad \frac{25}{36} \qquad b) \quad \frac{9}{16} \qquad d) \quad \frac{256}{625} \qquad c) \quad -\frac{32}{243}$$

Aufgabe 030713:
Wie kann man ohne Ausführung der angegebenen Rechenoperationen feststellen, ob die Zahl

$$\frac{378 \cdot 436 - 56}{378 + 436 \cdot 377}$$

größer oder kleiner als 1 ist?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es gilt

$$\frac{378 \cdot 436 - 56}{378 + 436 \cdot 377} = \frac{377 \cdot 436 + 436 - 56}{436 \cdot 377 + 378} = \frac{377 \cdot 436 + 380}{377 \cdot 436 + 378}$$

Da der Zähler größer als der Nenner ist, ist die Zahl größer als 1.

Aufgabe 160712:
Man denke sich die Zahlen 1, 2, 3, 4, ... usw. bis 100 derart hintereinander aufgeschrieben, dass eine Zahl z der Form

$$z = 12345678910111213...9899100$$

entsteht.
a) Wie viel Stellen hat z?
b) Es sollen 100 Ziffern der Zahl z so gestrichen werden, dass die mit den restlichen Ziffern dargestellte Zahl z' möglichst groß ist. Dabei soll an der Reihenfolge der (in z') verbleibenden Ziffern von z nichts geändert werden.
Ermittle, welche Ziffern zu streichen sind, und gib die ersten zehn Ziffern der neuen Zahl z' an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Die vorgegebene Zahl z entstand aus 9 einstelligen Zahlen, $9 \cdot 10$ zweistelligen Zahlen und der dreistelligen Zahl 100. Sie enthält mithin $9 \cdot 1 + 90 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 192$ Stellen.

b) Von den insgesamt 192 Ziffern von z sollen in der zu bildenden Zahl z' genau 92 Ziffern erhalten bleiben. Von zwei 92stelligen Zahlen, die mit verschiedener Anzahl von Neunen beginnen, ist diejenige die größere, die mit der größeren Anzahl von Neunen beginnt.
Vor der ersten in der Zahl auftretenden Neun stehen 8 von Neun verschiedene Ziffern, vor der zweiten weitere 19, vor der dritten, vierten und fünften wiederum je weitere 19 von Neun verschiedene Ziffern.

Streichen wir diese, so sind insgesamt 84 Ziffern ($8 + 4 \cdot 19 = 84$) entfernt. Es sind noch 16 Ziffern zu streichen.

Die Zahl beginnt dann so: 99999505152535455565750596O...........

Es ist nun nicht mehr möglich, die 19 Ziffern vor der nächsten (ursprünglich sechsten) Neun zu streichen, da dann mehr als 100 Ziffern entfielen.
Von zwei 92stelligen Zahlen, die mit 5 Neunen beginnen und in der sechsten Stelle verschiedene Ziffern haben, ist diejenige größer, die an der sechsten Stelle die größere Zahl enthält. In unserem Fall kommt die Acht dafür nicht in Frage, da dann noch 17 Ziffern zu streichen wären. An der sechsten Stelle kann also höchstens eine Sieben stehen. Das ist auch erreichbar, wenn man die nächsten 15 Ziffern streicht.

Entsprechend zeigt man, dass als letzte Ziffer die auf die Sieben folgende Fünf entfernt werden muss. Die ersten zehn Ziffern der gesuchten Zahl z' lauten mithin 9999978596.

II Runde 3

Aufgabe 270732:
In einem Betrieb werden Erzeugnisse hergestellt, bei denen die Herstellungskosten für jedes Stück 19,2 0M betragen. Der Betrieb hat die Möglichkeit, für 13500 M eine neue Werkzeugmaschine anzuschaffen; mit dieser Maschine würden die Herstellungskosten für jedes Stück nur noch 13,15 M betragen.
Ein Planziel lautet: Die Summe aus den Anschaffungskosten der neuen Maschine und aus den Herstellungskosten der damit in 3 Jahren hergestellten Erzeugnisse soll weniger als 80% derjenigen Herstellungskosten betragen, die (für ebenso viele Erzeugnisse) ohne Nutzung der neuen Maschine entstehen würden.
Ermittle die kleinste Stückzahl pro Jahr, mit der dieses Planziel zu erreichen ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Werden pro Jahr x Stück hergestellt, so würden die Herstellungskosten für die in 3 Jahren ohne Nutzung der neuen Maschine hergestellten Erzeugnisse $3x \cdot 19{,}20$ M betragen. 80% hiervon sind $0{,}8 \cdot 3x \cdot 19{,}20$ M $= 3x \cdot 15{,}36$ M.

Die Herstellungskosten für die in 3 Jahren mit der neuen Maschine hergestellten Erzeugnisse betragen $3x \cdot 13{,}15$ M. Also wird das Planziel genau dann erreicht, wenn $13500 + 3x \cdot 13{,}15 < 3x \cdot 15{,}36$, also $x \cdot 2{,}21 > 4500$ gilt.
Wegen $2036 \cdot 2{,}21 = 4499{,}56$ und $2037 \cdot 2{,}21 = 4501{,}77$ ist somit die kleinste Stückzahl pro Jahr, mit der das Planziel erreicht wird, $x = 2037$.

Aufgabe 340732:
Man denke sich die Zahlen 1, 2, 3, 4, ... usw. bis 100 derart hintereinander aufgeschrieben, dass eine Zahl z der Form $z = 12345678910111213....9899100$ entsteht.
a) Wie viel Stellen hat z?
b) Es sollen 100 Ziffern der Zahl z so gestrichen werden, dass die mit den restlichen Ziffern dargestellt Zahl z' möglichst groß ist. Dabei soll die Reihenfolge der in z' verbleibenden Ziffern von z nicht geändert werden.
Ermittle, welche Ziffern zu streichen sind, und gib die ersten 10 Ziffern der neuen Zahl z' an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Die Zahl z hat ihre Ziffern aus den 9 einstelligen Zahlen 1, ..., 9, den 90 zweistelligen Zahlen 10, ..., 99 und der dreistelligen Zahl 100. Also hat sie $9 + 90 \cdot 2 + 3 = 192$ Stellen.

b) Von den 192 Ziffern der Zahl z sollen in z' genau 92 Ziffern erhalten bleiben. Von zwei 92-stelligen Zahlen, die mit verschiedener Anzahl von Neunen beginnen, ist diejenige die größere, die mit der größeren Anzahl von Neunen beginnt.
Vor der ersten in z auftretenden Neun stehen 8 von Neun verschiedene Ziffern, vor der zweiten weitere 19, vor der dritten, vierten und fünften wiederum je weitere 19 von Neun verschiedene Ziffern. Streicht man diese, so sind insgesamt bereits $8 + 4 \cdot 19 = 84$ Ziffern entfernt; aus der danach verbleibenden Zahl

$$9999950515253545556575859 60...9899100$$

sind noch genau 16 Ziffern zu streichen.
Das können nicht die 19 Ziffern bis zur ersten auf den Anfang 99999 folgenden Neun und auch nicht die 17 Ziffern bis zur ersten auf 99999 folgenden Acht sein. Von je zwei 92-stelligen Zahlen, die mit 99999 beginnen und an der sechsten Stelle verschiedene Ziffern haben, ist stets diejenige die größere, die an der sechsten Stelle die größere Ziffer hat.
Die größte Möglichkeit hierfür ist somit, durch Streichen der ersten auf 99999 folgenden 15 Ziffern den Anfang 999997 zu erreichen. Danach ist noch genau eine Ziffer zu streichen.

Von den beiden Möglichkeiten, die auf den Anfang 999997 folgende Fünf zu streichen oder stehenzulassen (und eine später stehende Ziffer zu streichen), liefert das Streichen der Fünf die größere Zahl.
Damit ist gefunden, welche 100 Ziffern aus z zu streichen sind, um eine möglichst große Zahl z' zu erhalten. Die ersten zehn Ziffern dieser Zahl lauten 9999978596.

II Geometrie

II.I Dreiecke

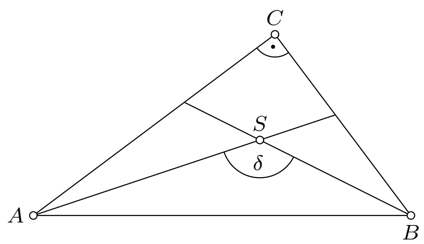
I Runde 1

Aufgabe 020713:
Es ist zu beweisen, dass ein Dreieck, in dem zwei Höhen gleich lang sind, stets gleichschenklig ist.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
In einem Dreieck berechnet sich der Flächeninhalt zu $A = \frac{g \cdot h}{2}$, wobei g eine Grundseite und h die zugehörige Höhe sind.
Für zwei verschiedene Höhen h_1 und h_2 mit $h = h_1 = h_2$ ist dann $A = \frac{g_1 \cdot h}{2} = \frac{g_2 \cdot h}{2}$, womit sofort $g_1 = g_2$ folgt. Das Dreieck ist gleichschenklig.

Aufgabe 060712:
In dem rechtwinkligen Dreieck $\triangle ABC$ mit dem rechten Winkel bei C sei S der Schnittpunkt der beiden Halbierenden der spitzen Winkel.
Ermittle das Gradmaß δ des Winkels $\angle ASB$, den diese Winkelhalbierenden miteinander bilden!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



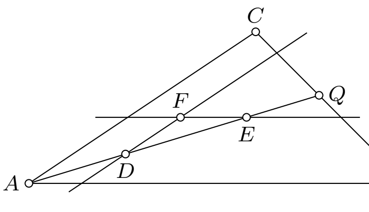
Das Gradmaß des Schnittwinkels $\angle ASB$ sei δ. Die Gradmaße der spitzen Winkel $\angle CAB$ und $\angle ABC$ seien α bzw. β. Nach dem Winkelsummensatz gilt im Dreieck $\triangle ABS$:

$$\delta = 180° - \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right)$$

Da im rechtwinkligen Dreieck $\triangle ABC$ $\alpha + \beta = 90°$ ist, folgt $\delta = 135°$.

Aufgabe 090712:
Gegeben sei ein Dreieck $\triangle ABC$. Darin sei die Halbierende des Innenwinkels bei A enthaltende Gerade eingezeichnet. Außerdem seien eine parallele Gerade zur Seite AB und eine parallele Gerade zur Seite AC derart eingezeichnet, dass diese sich im Innern des Dreiecks $\triangle ABC$, aber nicht auf der Winkelhalbierenden schneiden.
Beweise, dass die Schnittpunkte der drei eingezeichneten Geraden die Ecken eines gleichschenkligen Dreiecks bilden!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



In der Abbildung sei p_1 die Halbierende des Innenwinkels bei A, p_2 eine Parallele zu AB und p_3 eine Parallele zu AC. Der Schnittpunkt von p_1, mit BC sei Q, der von p_1 mit p_2 sei E, der von p_1 mit p_3 sei D und der von p_2 mit p_3 sei F.

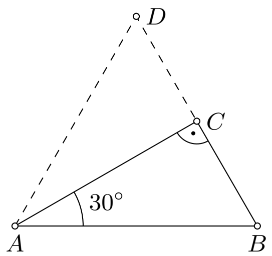
Da p_2, p_3 als Parallelen zu zwei Dreieckseiten nicht zueinander parallel sind und da p_1 als Halbierende eines Innenwinkels zu keiner Seite des Dreiecks parallel ist, existieren diese Schnittpunkte.
Nun liegt nach Voraussetzung F entweder (1. Fall) im Innern des Dreiecks $\triangle AQC$ oder (2. Fall) im Innern des Dreiecks $\triangle ABQ$.

Im 1. Fall gilt $\angle CAD = \angle FDE$ (als Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen) und $\angle DAB = \angle FED$ (als Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen).

Im 2. Fall gilt entsprechend $\angle DAB = \angle FED$ und $\angle CAD = \angle FDE$.
(Anmerkung: Man kann auch den 2. Fall, statt ihn gesondert zu diskutieren, durch Umbenennung auf den 1. Fall zurückführen.)
Da laut Aufgabe $\angle CAD = \angle DAB$ gilt, ist mithin in jedem Fall auch $\angle FDE = \angle FED$. Das Dreieck $\triangle FED$ ist also gleichschenklig.

Aufgabe 110712:
Beweise folgenden Satz:
Enthält ein rechtwinkliges Dreieck einen Winkel von 30°, so ist seine Hypotenuse (längste Seite) doppelt so lang wie seine kürzeste Kathete (kürzeste Seite)!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Es sei $\triangle ABC$ ein Dreieck der geforderten Art, wobei C Scheitel des rechten Winkels und A Scheitel des Winkels von 30° sei.
Dann ist AB die Hypotenuse und BC kürzeste Kathete, da der Winkel $\angle BAC$ kleiner ist als $\angle ABC$, wie aus dem Winkelsummensatz hervorgeht.
Wegen des Winkelsummensatzes hat der Innenwinkel bei B eine Größe von 60°.

Verlängert man die Strecke BC über C hinaus um BC bis zum Punkt D, dann gilt $\triangle ACD = \triangle ACB$ (sws). Daher hat der Winkel $\angle DAC$ eine Größe von 30°. Das Dreieck $\triangle ABD$ ist mithin gleichseitig, und es gilt $AB = 2 \cdot BC$.

Aufgabe 110713:
Günther zeichnet ein Dreieck $\triangle ABC$ und stellt fest:
Die Maßzahl des in Zentimetern gemessenen Umfangs u seines Dreiecks $\triangle ABC$ ist eine Primzahl.
Ferner gilt $BC = a = 6$ cm, $AC = b = 2$ cm.
Ermittle $AB = c$ und u!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Aus der Dreiecksungleichung folgt für das Dreieck $\triangle ABC$: $c < a + b$ und $c > a - b$. Daraus folgt laut Aufgabe 4 cm $< c <$ 8 cm.
Da die Maßzahl des Umfangs u eine Primzahl sein soll und die Maßzahlen von a und b ganze Zahlen sind, muss auch die Maßzahl von c eine ganze Zahl z sein, für die $4 < z < 8$ gilt. Also kann z nur 5, 6 oder 7

sein.

Es sei $z = 5$. Dann ist $u = a + b + c = 13$ cm, und 13 ist eine Primzahl.
Es sei $z = 6$. Dann ist $u = 14$ cm.
Es sei $z = 7$. Dann ist $u = 15$ cm.
In den letzten beiden Fällen ist die Maßzahl von u keine Primzahl. Also ist $c = 5$ cm, $u = 13$ cm die einzige Lösung der Aufgabe.

Aufgabe 130713:
Der Umfang u eines gleichschenkligen Dreiecks soll 24 cm betragen; eine der Seiten dieses Dreiecks soll $2\frac{1}{2}$ mal so lang sein wie eine andere seiner Seiten.
Untersuche, ob es eine Möglichkeit gibt, die Seitenlängen eines Dreiecks so anzugeben, dass diese Bedingungen erfüllt sind! Untersuche, ob es genau eine solche Möglichkeit gibt! Wenn dies der Fall ist, so ermittle die zugehörigen Seitenlängen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn die Länge c der Basis und die Länge a eines Schenkels eines gleichschenkligen Dreiecks die Bedingungen der Aufgabe erfüllen, so ist $c = \frac{5}{2}a$ oder $a = \frac{5}{2}c$. Wäre $c = \frac{5}{2}a$, so wäre $a + a < \frac{5}{2}a - c$, im Widerspruch zur Dreiecksungleichung
Wenn $a = \frac{5}{2}c$ ist, so folgt $\frac{5}{2}c + \frac{5}{2} + c = 24$ cm, also $6c = 24$ cm, woraus man $c = 4$ cm und $a = 10$ cm erhält.

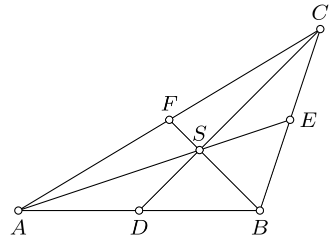
Daher können nur $a = 10$ cm und $c = 4$ cm die Bedingungen der Aufgabe erfüllen. Sie genügen ihnen tatsächlich, da sie die Dreiecksungleichungen sowie die übrigen Bedingungen erfüllen.

Aufgabe 140714:
Beweise folgende Sätze:
a) Wenn S der Schnittpunkt der drei Seitenhalbierenden eines Dreiecks ABC ist, dann haben die Dreiecke ABS, BCS und CAS den gleichen Flächeninhalt.
b) Wenn S ein Punkt im Innern eines Dreiecks ABC ist, für den die Dreiecke ABS, BCS und CAS den gleichen Flächeninhalt haben, dann ist S der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden des Dreiecks ABC.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Es sei D der Mittelpunkt der Seite AB eines Dreiecks ABC. Dann sind die Dreiecke ADC und DBC inhaltsgleich, da sie in der Länge der Seiten AD, DB und in der zugehörigen Höhe übereinstimmen.

Diese Dreiecke haben die Seite CD gemeinsam; folglich stimmen sie auch in den Längen der (dieser Seite) zugehörigen Höhen überein, d. h., A hat denselben Abstand von der Geraden durch C und D wie B. Also stimmen die Dreiecke CAS, BCS in der Seite CS und in den Längen der zugehörigen Höhen überein und sind mithin inhaltsgleich.

Analog beweist man, dass die Dreiecke ABS und BCS inhaltsgleich sind. Daher haben die Dreiecke ABS, BCS und CAS den gleichen Flächeninhalt.



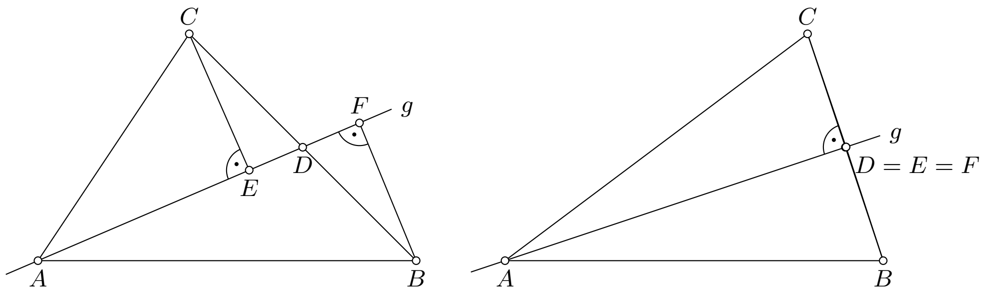
b) Es sei D der Schnittpunkt des Strahles aus C durch S mit AB. Da die inhaltsgleichen Dreiecke CAS und BCS die Seite CS gemeinsam haben, stimmen sie in den Längen der (dieser Seite) zugehörigen Höhen überein, d. h., A hat denselben Abstand von der Geraden durch C und S wie B. Also stimmen die Dreiecke ADC und DBC in der Seite CD und in den Längen der zugehörigen Höhen überein und sind mithin inhaltsgleich.

Da sie dieselbe Höhe auf den Seiten AD bzw. DB haben, sind folglich diese Seiten gleich lang. Somit ist CD die Seitenhalbierende durch C im Dreieck ABC.

Analog beweist man, dass, wenn F der Schnittpunkt des Strahls aus B durch S mit AC ist, BF die Seitenhalbierende durch B im Dreieck ABC ist. Daher ist S der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden im Dreieck ABC.

Aufgabe 170712:
Gegeben sei ein Dreieck ABC. Es sei g die Gerade durch den Punkt A und den Mittelpunkt D der Seite BC.
Beweise, dass dann die Punkte B und C den gleichen Abstand von der Geraden g haben!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

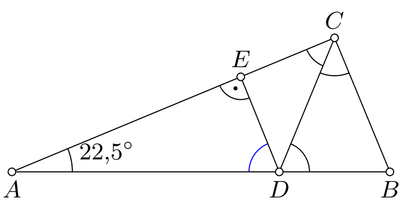


Das Lot von C bzw. von B auf g sei CE bzw. BF (siehe Abbildung). Ist BC nicht senkrecht auf g, so sind E und F von D verschieden, und es entstehen zwei Dreiecke CDE und BDF. Diese stimmen in den Seitenlängen CD, BD, den Größen der anliegenden Winkel $\angle CDE$ und $\angle BDF$ (Scheitelwinkel) und denen der gegenüberliegenden (rechten) Winkel $\angle CED$, $\angle BFD$ überein. Also gilt $\triangle CDE = \triangle BFD$, und daraus folgt $CE = BF$.

Ist BC senkrecht auf g, so fallen E und F mit D zusammen, woraus $CE = CD = BD = BF$ folgt. Somit sind in jedem Falle die Abstände BF und CE der Punkte B und C von g einander gleich.

Aufgabe 190713:
Es sei $\triangle ABC$ ein rechtwinkliges Dreieck; C sei der Scheitel des rechten Winkels. Die Halbierende dieses Winkels schneide die Seite AB in D. Der Fußpunkt des Lotes von D auf AC sei E.
Beweise hierfür die folgende Aussage:
Wenn $\angle CAB = 22{,}5°$ ist, dann gilt $\angle ADE = \angle CDB$!

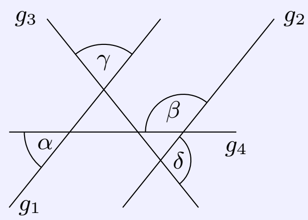
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



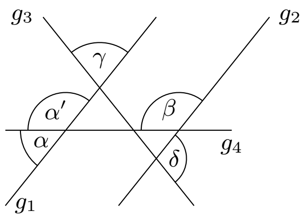
Aus $\angle EAD = \angle CAB = 22{,}5°$ und $\angle AED = 90°$ folgt nach dem Satz über die Summe der Innenwinkel im Dreieck $\angle ADE = 180° - 90° - 22{,}5° = 67{,}5°$.
Aus $\angle CAB = 22,5°$ und $\angle ACB = 90°$ folgt ebenso $\angle ABC = 67,5°$. Ferner ist nach Voraussetzung $\angle BCD = 90°2 = 45°$; hieraus und aus $\angle DBC = \angle ABC = 67,5°$ folgt wiederum nach dem Satz über die Summe der Innenwinkel im Dreieck: $\angle CDB = 180° - 67,5° - 45° = 67,5°$.
Damit ist der geforderte Beweis geführt.

Aufgabe 200713:

Vier Geraden g_1, g_2, g_3, g_4 mögen sich so schneiden, wie es aus dem Bild ersichtlich ist. Für die Größen α, β, γ der dort angegebenen Winkel gelte $\alpha = 50°$, $\beta = 130°$, $\gamma = 70°$.
Ermittle aus diesen gegebenen Größen die Winkelgröße δ!



Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

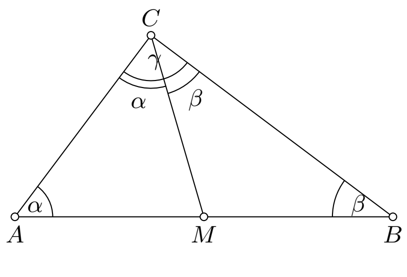


Mit der aus der Abbildung ersichtlichen Bezeichnung der Winkelgrößen gilt $\alpha' = 180° - \alpha$ als Nebenwinkel, also $\alpha' = 180° - 50° = 130° = \beta$.
Da α' und β die Größen von Stufenwinkeln an den geschnittenen Geraden g_1, und g_2 sind, gilt laut Umkehrung des Stufenwinkelsatzes $g_1 \parallel g_2$. Ferner sind δ und γ die Größen von entgegengesetzt liegenden Winkeln an den geschnittenen Geraden g_1 und g_2. Da diese Geraden parallel sind, gilt

$$\delta + \gamma = 180° \Rightarrow \delta = 180° - \gamma = 180° - 70° = 110°$$

Aufgabe 200714:
Beweise folgenden Satz:
Ist M der Mittelpunkt der Seite AB eines Dreiecks ABC und gilt $AM = BM = CM$, so ist das Dreieck ABC rechtwinklig.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Es sei $\alpha = \angle CAB$, $\beta = \angle ABC$, $\gamma = \angle ACB$. Nach Voraussetzung ist M der Mittelpunkt von AB, daher ist auch $\angle CAM = \alpha$ und $\angle MBC = \beta$.

Wegen $MA = MC$ ist das Dreieck ACM gleichschenklig mit $\angle ACM = \alpha$, wegen $MB = MC$ ist auch das Dreieck BCM gleichschenklig mit $\angle BCM = \beta$. Daher ist $\alpha + \beta = \gamma$.
Andererseits ist nach dem Winkelsummensatz $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. Daraus folgt $2\gamma = 180°$, also $\gamma = 90°$.

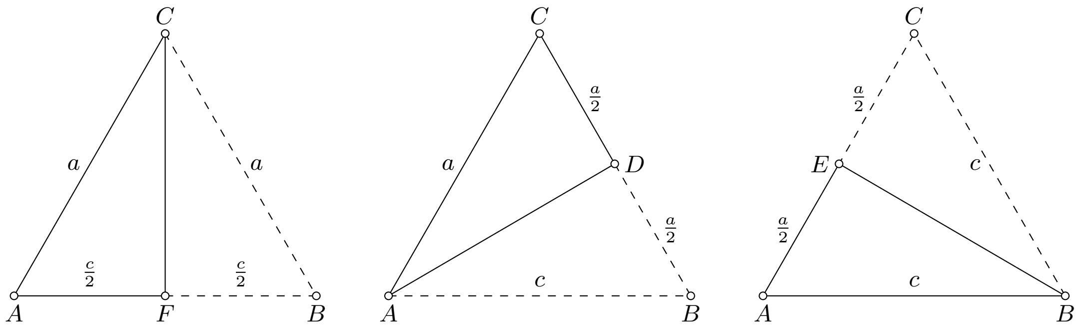
Aufgabe 280714:
Im Mathematikunterricht stellt der Lehrer die Aufgabe, die Seitenlängen eines gleichschenkligen Dreiecks ABC mit $AC = BC$ zu ermitteln, wenn vorausgesetzt wird, dass eine der Seitenhalbierenden dieses Dreiecks den Dreiecksumfang derart teilt, dass der eine Teil 12 cm und der andere 9 cm beträgt.
Dazu äußern sich einzelne Schüler folgendermaßen:

Achim: „Die Aufgabe hat keine Lösung, denn die Seitenhalbierende eines gleichschenkligen Dreiecks ist Symmetrieachse und kann somit den Umfang nur in zwei gleich große Teile zerlegen.“
Birgit: „Es gibt bis auf Kongruenz genau ein Dreieck, das die Forderungen der Aufgabenstellung erfüllt.“
Claudia: „Die Aufgabe hat bis auf Kongruenz genau zwei (zueinander nicht kongruente) Lösungen.“
Dorit: „Da man in ein Dreieck drei Seitenhalbierende einzeichnen kann, hat die Aufgabe mindestens drei zueinander nicht kongruente Lösungen.“

Untersuche, wer von den vier Schülern recht hat, und begründe deine Feststellungen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn AD, BE und CF die Seitenhalbierenden eines gleichseitigen Dreiecks ABC mit $AC = BC = a$; $AB = c$ sind, so gilt:
Die Teile, in die CF den Umfang teilt, haben die Längen $a + \frac{c}{2}$ und $a + \frac{c}{2}$. (1) (Siehe Abbildung a)

Ferner haben sowohl die Teile, in die AD den Umfang teilt, als auch die Teile, in die BE den Umfang teilt, die Längen $c + \frac{a}{2}$ und $a + \frac{a}{2} = \frac{3}{2}a$. (2) (Siehe Abbildungen b und c)
Die Längen (1) sind einander gleich, können also nicht 12 cm und 9 cm betragen; daher kann die Forderung der Aufgabe nicht mit der Seitenhalbierenden CF erfüllt werden!



Dafür, dass die Längen (2), wie gefordert, 12 cm und 9 cm betragen, gibt es nur die beiden folgenden Möglichkeiten:

I. Es ist $\frac{3}{2}a = 12$ cm und $c + \frac{a}{2} = 9$ cm. Dann folgt $a = 8$ cm und $c = 5$ cm.

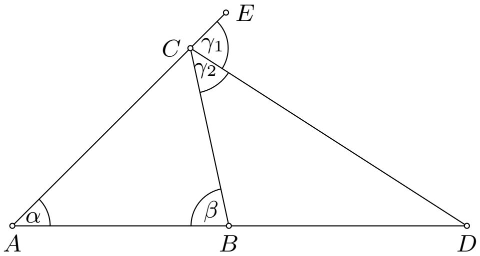
II. Es ist $\frac{3}{2}a = 9$ cm und $c + \frac{a}{2} = 12$ cm. Dann folgt $a = 6$ cm und $c = 9$ cm.

Ein Dreieck ABC mit den in I. genannten Längen $AC = BC = 8$ cm, $AB = 5$ cm gibt es, da die Summe je zweier Seiten größer ist als jeweils die dritte Seite. Ein Dreieck ABC mit den in II. genannten Längen $AC = BC = 6$ cm, $AB = 9$ cm gibt es (aus demselben Grund) ebenfalls.

Wegen der Verschiedenheit ihrer Seitenlängen sind die beiden genannten Dreiecke auch nicht zueinander kongruent. Damit ist bewiesen: Achim, Birgit und Dorit haben nicht recht; Claudia hat recht.

Aufgabe 300713:
Von drei Geraden wird vorausgesetzt, dass sie durch einen Punkt C gehen. Von einer vierten Geraden wird vorausgesetzt, dass sie nicht durch C geht und die drei anderen Geraden in Punkten A, B, D schneidet, wobei B zwischen A und D liegt. Auf der Geraden durch A und C liege ein Punkt E so, dass C zwischen A und E liegt. Weiter wird vorausgesetzt, dass die Winkel $\angle ECD$ und $\angle ABC$ einander gleich groß sind.
a) Zeichne vier Geraden und dazu Punkte A, B, C, D, E so, dass diese Voraussetzungen erfüllt sind!
b) Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen stets die Winkel $\angle BCD$ und $\angle BAC$ einander gleich groß sein müssen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

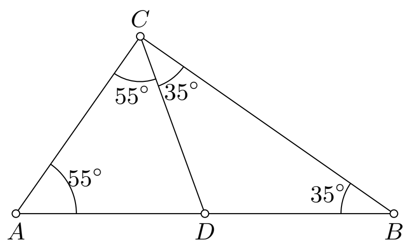


a) Die Abbildung zeigt vier Geraden und dazu Punkte A, B, C, D, E der geforderten Art.

b) Mit den Bezeichnungen $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle ECD = \gamma_1$, $\angle BCD = \gamma_2$ gilt nach Voraussetzung $\gamma_1 = \beta$ (1).
Nach dem Außenwinkelsatz für das Dreieck ABC gilt ferner $\angle BCE = \alpha + \beta$, d. h. $\gamma_1 + \gamma_2 = \alpha + \beta$ (2)
Aus den Gleichungen (2) und (1) folgt durch Subtraktion $\gamma_2 = \alpha$.

Aufgabe 320714:
In einem Dreieck ABC sei D der Mittelpunkt der Seite AB. Die Strecken AD und CD seien einander gleichlang, die Größe des Innenwinkels $\angle BCD$ im Teildreieck BCD betrage 35°.
Ermittle aus diesen Angaben die Größen der Innenwinkel des Dreiecks ABC!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Nach Voraussetzung ist $AD = BD = CD$ und (1) $\angle BCD = 35°$. (2) Da das Dreieck BCD wegen (1) gleichschenklig ist, folgt nach dem Basiswinkelsatz und (2) auch $\angle DBC = 35°$, d. h. (3) $\angle ABC = 35°$. (4)



Aus (2) und (3) folgt nach dem Außenwinkelsatz $\angle ADC = 70°$. (5) Wegen (1) ist auch das Dreieck ACD gleichschenklig; nach dem Basiswinkelsatz gilt also $\angle CAD = \angle ACD$.
Hiermit und mit (5) folgt aus dem Innenwinkelsatz

$$\angle CAD = \angle ACD = \frac{1}{2}(180° - 70°) = 55° \tag{6}$$

d. h., es gilt einerseits $\angle CAB = 55°$, (7) andererseits folgt aus (6) und (2)

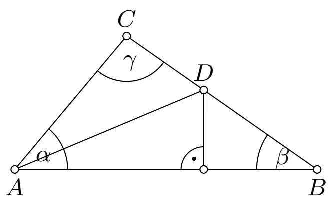
$$\angle ACB = \angle ACD + \angle BCD = 55° + 35° = 90° \tag{8}$$

Mit (4), (7), (8) sind die gesuchten Innenwinkelgrößen ermittelt.

Aufgabe 340712:
Von einem Dreieck ABC wird gefordert: Die Winkelhalbierende durch A und die Mittelsenkrechte von AB schneiden sich in einem Punkt D, der auf der Seite BC liegt.

a) Welche Größe muss der Winkel $\angle ACB$ in einem Dreieck haben, das diese Forderung erfüllt und in dem der Winkel $\angle ABC$ die Größe 35° hat? Zeichne ein solches Dreieck!
b) Zeichne ein Dreieck, das ebenfalls die obengenannte Forderung erfüllt und in dem der Winkel $\angle ABC$ die Größe 50° hat!
c) Gibt es ein Dreieck, das ebenfalls die obengenannte Forderung erfüllt und in dem der Winkel $\angle ABC$ die Größe 60° hat?

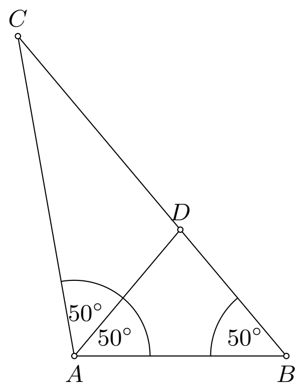
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



a) Für die Innenwinkelgrößen $\alpha = \angle BAC$, $\beta = \angle ABC$, $\gamma = \angle ACB$ gilt: Da D ein Punkt der Mittelsenkrechten von AB ist, gilt $DA = DB$. Nach dem Basiswinkelsatz für Dreieck ABD folgt $\angle BAD = \angle ABD = \beta = 35°$.

Da AD den Innenwinkel bei A halbiert, folgt $\alpha = 2 \cdot \angle BAD = 2\beta = 70°$. Damit ergibt sich aus dem Innenwinkelsatz für Dreieck ABC $\gamma = 180° - (\alpha + \beta) = 75°$.

b) Die rechte Abbildung zeigt ein gesuchtes Dreieck.



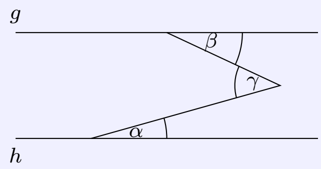
c) Wenn es ein Dreieck der genannten Art gäbe, so würde wie in a) folgen, dass $\alpha = 2\beta = 120°$ wäre.
Damit wäre $\alpha + \beta + \gamma > \alpha + \beta = 120° + 60° = 180°$ im Widerspruch zum Innenwinkelsatz.

II Runde 2

Aufgabe 020724:
Wie viel verschiedene spitze Außenwinkel kann ein Dreieck höchstens haben?
Begründe deine Antwort!

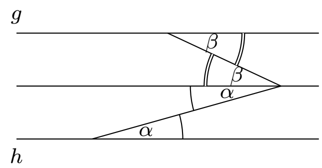
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Ein Außenwinkel ist so groß wie die Summe der nicht anliegenden Innenwinkel.
Nehmen wir an, ein Außenwinkel sei spitz. Dann müssen die beiden entsprechenden Innenwinkel zusammen kleiner als 90° sein. Das bedeutet, dass der dritte Innenwinkel größer als 90° ist (Innenwinkelsumme). Dieser geht als Summand in die beiden anderen Außenwinkel ein, so dass diese beiden größer als 90° sind. Demzufolge besitzt ein Dreieck höchstens einen spitzen Außenwinkel.

Aufgabe 030724:



Gegeben sei die in der Abbildung dargestellte Figur ($g \parallel h$). Die Winkel α und β seien bekannt.
Wie groß ist der Winkel γ? Beweise deine Behauptung!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Behauptung: $\gamma = \alpha + \beta$



Beweis: (siehe Abbildung) Man zeichne eine Parallele zu g und h durch den Scheitelpunkt von γ. Diese teilt γ in zwei Teilwinkel. Nach dem Wechselwinkelsatz ist der obere genauso groß wie β, der untere wie α. Zusammen gilt also: $\gamma = \alpha + \beta$.

Aufgabe 040723:
In einem Dreieck seien die Maßzahlen der Längen aller Seiten ganzzahlig, gerade und untereinander verschieden. Bekannt ist $a = 6$ cm und $b = 4$ cm.
Berechne den Umfang des Dreiecks!

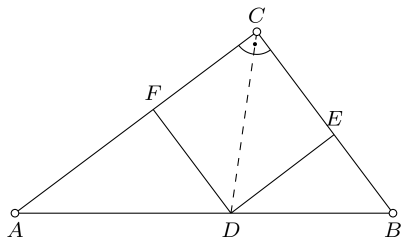
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Nach den genannten Bedingungen und wegen $c < a + b$ und $c > a - b$ (Dreiecksungleichungen) kann c nur 8 cm lang sein.
Damit wird für den Umfang $u = a + b + c = 4 + 6 + 8 = 18$ cm.

Aufgabe 050722:
Untersuche, ob in einem Dreieck zwei Winkelhalbierende aufeinander senkrecht stehen können!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, es gäbe ein Dreieck $\triangle ABC$, in dem sich die Winkelhalbierenden w_α und w_β im Punkte S unter einem rechten Winkel schneiden.
Dann ergäbe sich aus dem Dreieck $\triangle ASB$, dass die Winkel $\frac{\alpha}{2}$ und $\frac{\beta}{2}$ zusammen 90° und damit α und β zusammen 180° betragen müssten, d. h., zwei Seiten des Dreiecks $\triangle ABC$ würden parallel verlaufen, was unmöglich ist. Es gibt also kein Dreieck dieser Art.

Aufgabe 070721:
Einem gegebenen rechtwinkligen Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei C ist ein Quadrat so einzuschreiben, dass der rechte Winkel des Dreiecks zum Quadratwinkel wird und der ihm gegenüberliegende Eckpunkt des Quadrates auf der Hypotenuse AB des Dreiecks liegt.
Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die gegebenen Bedingungen ein Quadrat eindeutig bestimmt ist!

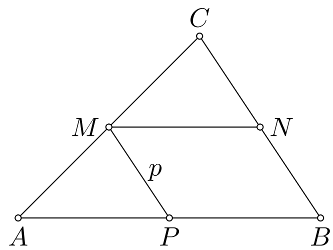
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Jede Diagonale eines Quadrates halbiert zwei gegenüberliegende Winkel des Quadrats. Deshalb konstruiert man die Winkelhalbierende des rechten Winkels $\angle ACB$. Sie schneidet die Seite AB im Punkt D. Dann ist die Strecke CD eine Diagonale des gesuchten Quadrats. Die Parallelen durch D zu AC und CB schneiden CB in E und AC in F. $DECF$ ist das gesuchte Quadrat.

Aufgabe 070723:
Gegeben ist ein Dreieck $\triangle ABC$. M sei der Mittelpunkt der Seite AC. Die Parallele zu der Seite AB durch den Punkt M schneide die Seite BC im Punkt N.
Beweise, dass N der Mittelpunkt der Seite BC ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Parallele p zu BC durch M schneide AB in P. Dass diese Parallele p die Strecke AB tatsächlich schneidet, folgt so:
Durch p wird die Ebene, in der $\triangle ABC$ liegt, in zwei Halbebenen zerlegt, in deren einer die Gerade durch B und C verläuft und in deren anderer A liegt, weil sonst AC nicht von p geschnitten würde. Daher schneidet p auch die Strecke AB.



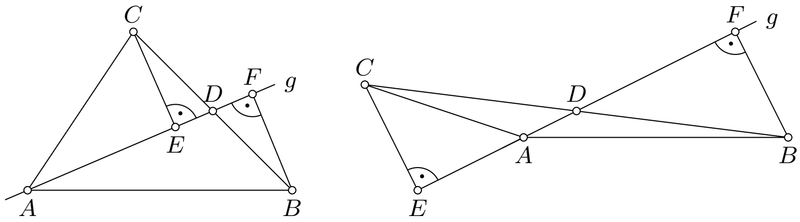
Dann gilt:
(1) $\angle ABC = \angle MNC = \angle APM$, $\angle CAB = \angle CMN$ (als Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen)
(2) $\triangle APM = \triangle MNC$ (nach dem Kongruenzsatz sww). Daraus folgt: $MP = CN$.
(3) Viereck $BNMP$ ist ein Parallelogramm (nach Konstruktion). Aus (2) und (3) folgt die Behauptung.

Aufgabe 090722:
Wir wollen eine Ecke eines Dreiecks „ausgezeichnet“ nennen, wenn bei dieser Ecke Innen- und Außenwinkel einander gleich sind.
Ermittle die größtmögliche Anzahl „ausgezeichneter“ Ecken, die in einem Dreieck auftreten können!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Da die Summe je eines Innenwinkels und eines zugehörigen Außenwinkels $180°$ beträgt, ist eine Ecke genau dann „ausgezeichnet“, wenn der Innenwinkel bei dieser Ecke $90°$ beträgt.
Nun gibt es Dreiecke mit genau einem rechten Innenwinkel, aber es gibt keine Dreiecke mit mehr als einem solchen. Daher ist die einzige und mithin auch größte mögliche Anzahl 1.

Aufgabe 090724:
Gegeben sei ein Dreieck $\triangle ABC$. Es sei g die Gerade durch den Punkt A und den Mittelpunkt der Seite BC.
Beweise, dass dann die Punkte B und C von der Geraden g den gleichen Abstand haben!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Der Mittelpunkt der Seite BC sei D, das Lot von C bzw. von B auf g sei CE bzw. BF. Fällt E mit D zusammen, dann fällt auch F mit D zusammen, und es gilt $AD \perp CB$ und damit wegen $CE = CD$ und $BF = BD$ auch $CE = BF$. Fällt E nicht mit D zusammen, so fällt auch F nicht mit D zusammen.

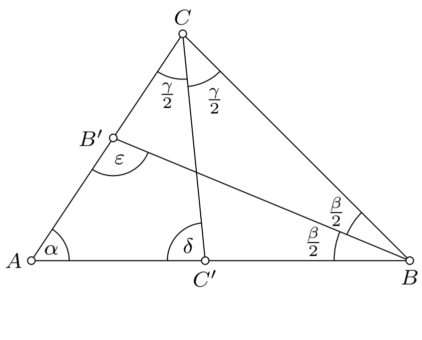


Dann stimmen die Dreiecke $\triangle CDE$ und $\triangle BDF$ in den Seitenlängen CD, BD, den Größen der anliegenden Winkel $\angle CDE$, $\angle BDF$ (Scheitelwinkel) und denen der gegenüberliegenden (rechten) Winkel $\angle CED$, $\angle BFD$ überein.
Also gilt $\triangle CDE = \triangle BFD$, und daraus folgt $CE = BF$.

Aufgabe 100722:
In einem Dreieck $\triangle ABC$ seien die Größe der Innenwinkel wie üblich mit α, β, γ bezeichnet, wobei $\alpha = 60°$ sei. BB' sei die Halbierende des Winkels $\angle ABC$ und CC' die des Winkels $\angle ACB$; jede von ihnen schneidet die ihrem Winkel gegenüberliegende Dreieckseite in einem inneren Punkt (B' bzw. C').

Ferner seien die Größen der Winkel $\angle AB'B$ bzw. $\angle AC'C$ mit ε bzw. δ bezeichnet.
Beweise, dass für jedes derartige Dreieck $\varepsilon + \delta = 180°$ gilt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Laut Voraussetzung gilt $\alpha = 60°$. Dann gilt unter Benutzung des Winkelsummensatzes ($\triangle ABC$)

$$\beta + \gamma = 180° - 60° = 120°$$

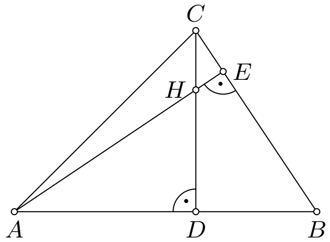
Nach dem Außenwinkelsatz gilt ferner:

$$\varepsilon = \gamma + \frac{\beta}{2} \qquad (\triangle B'BC) \qquad ; \qquad \delta = \beta + \frac{\gamma}{2} \qquad (\triangle C'BC)$$

Daraus folgt $\quad \varepsilon + \delta = \frac{3}{2}(\beta + \gamma) = \frac{3}{2}120° = 180°$

Aufgabe 110723:
Beweise folgenden Satz:
In jedem spitzwinkligen Dreieck $\triangle ABC$ hat jeweils einer der Schnittwinkel je zweier Höhen die gleiche Größe wie der Innenwinkel an derjenigen Ecke, von der keine der beiden Höhen ausgeht!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



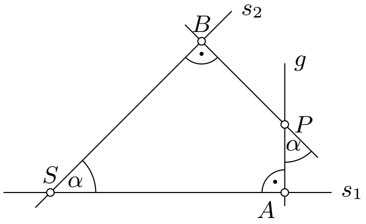
Weil $\triangle ABC$ ein spitzwinkliges Dreieck ist, liegt der Höhenschnittpunkt im Innern des Dreiecks. Er sei mit H bezeichnet.

Es seien ferner zwei Höhen des Dreiecks ausgewählt; die Bezeichnung lässt sich dann so wählen, dass dies die von C bzw. A ausgehenden Höhen sind. Ihre Fußpunkte auf AB bzw. BC seien D bzw. E genannt.

Dann gilt: $\angle ADC = \angle AEB$ als rechte Winkel und $\angle HAD = \angle EAD$ (H liegt auf AE). Folglich gilt wegen des Winkelsummensatzes (in $\triangle ADH$ bzw. $\triangle BEA$) $\angle AHD = \angle ABE$.

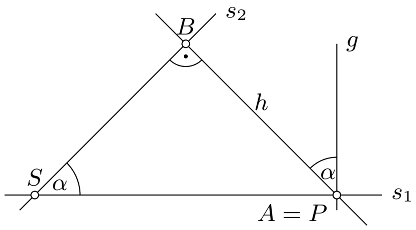
Aufgabe 130723:
Gegeben sei ein Winkel mit dem Scheitelpunkt S und der Größe α ($0° < \alpha < 180°$). Beweise folgenden Satz:
Schneidet eine Gerade g den einen und eine andere Gerade h den anderen Schenkel des gegebenen Winkels jeweils unter einem Winkel von $90°$, jedoch nicht in S, so hat einer der von g und h gebildeten Schnittwinkel die Größe α. (Fallunterscheidung)

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es sei A der Schnittpunkt von g mit dem einen Schenkel s_1 des gegebenen Winkels, und es sei B der Schnittpunkt von h mit dem anderen Schenkel s_2 des gegebenen Winkels, derart, dass sich g, s_1 in A und ebenso h, s_2 in B jeweils unter $90°$ schneiden. Dann ist $g \nparallel h$. Folglich existiert ein Schnittpunkt P von g und h. Nun unterscheiden wir folgende Fälle:



Fall 1: P liegt innerhalb des gegebenen Winkels.

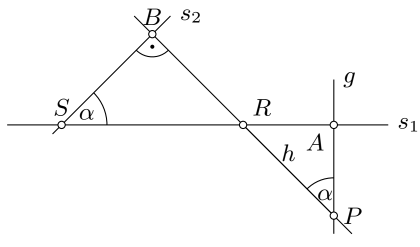
Dann ist $SAPB$ ein konvexes Viereck. Folglich gilt nach dem Satz über die Winkelsumme im Viereck sowie wegen $\angle SBP = \angle SAP = 90°$; $\angle BPA = 180° - \angle ASB = 180° - \alpha$, und demnach hat jeder seiner Nebenwinkel, also einer der Schnittwinkel von g und h, die Größe α.



Fall 2: P fällt mit einem der Punkte A, B zusammen, etwa mit A.

Dann wird der rechte Winkel, den g mit s_1, bildet, durch h in zwei Winkel zerlegt, deren einer die Größe $\angle SAB = 180° - \alpha$ hat (nach dem Winkelsummensatz im Dreieck). Folglich hat der andere, der einer der Schnittwinkel von g mit h ist, die Größe α.

Fall 3: P liegt außerhalb des gegebenen Winkels.

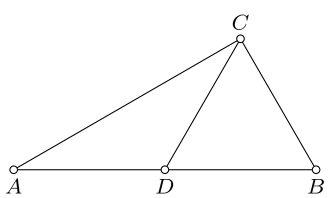


O. B. d. A. liege P nicht auf derselben Seite von s_1 wie B. Der Schnittpunkt von h mit s_1 sei R.

Dann gilt: $\angle SRB = 180° - \alpha$ (Winkelsummensatz im Dreieck) sowie $\angle SRB = \angle PRA$ (Scheitelwinkel) und damit $\angle RPA = 180° - (180° - \alpha) = \alpha$. Da es keine weiteren Fälle gibt, ist der Satz damit bewiesen.

Aufgabe 140722:
Beweise folgende Aussage:
Wenn ein Dreieck ABC die Eigenschaft hat, dass für den Mittelpunkt D der Seite AB die Gleichung (1) $DB = BC = CD$ gilt, so ist das Dreieck rechtwinklig!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



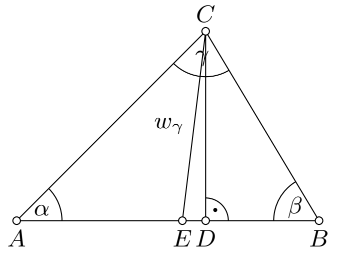
Wegen (1) ist das Dreieck DBC gleichseitig. Jeder seiner Innenwinkel ist mithin $60°$ groß.
Aus (1) folgt ferner, da D der Mittelpunkt von AB ist, $AD(= DB) = CD$. Also ist $\triangle ADC$ gleichschenklig.

Als Nebenwinkel des Winkels $\angle BDC$ hat der Winkel $\angle ADC$ eine Größe von $120°$.

Folglich hat der Winkel $\angle ACD$ als einer der Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck ADC eine Größe von $30°$.
Da die Größe des Winkels $\angle ACB$ gleich der Summe der Größen der Winkel $\angle BCD$ und $\angle ACD$ ist, beträgt diese $60° + 30° = 90°$; das Dreieck ABC ist also rechtwinklig.

Aufgabe 150723:
In einem spitzwinkligen Dreieck ABC sei CD die Höhe auf AB und CE die Winkelhalbierende von $\angle ACB$.
Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen stets $\angle DCE = \frac{1}{2}|\angle ABC - \angle CAB|$ gilt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



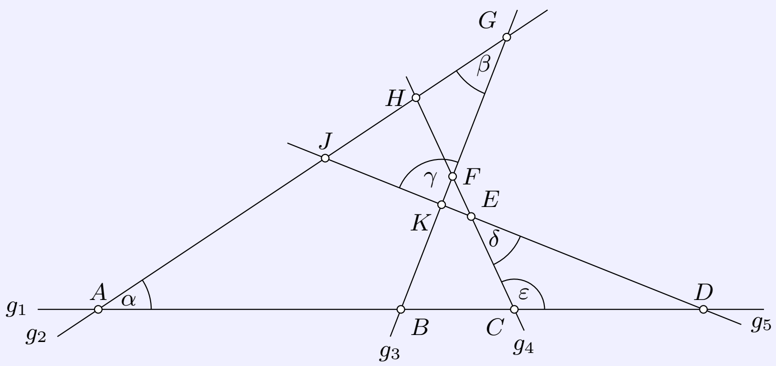
Die Größen der Innenwinkel des Dreiecks ABC bei A, B, C seien α, β, γ. Da $\triangle ABC$ bei A spitzwinklig ist, bilden A, D, C ein bei D rechtwinkliges Dreieck mit α als Größe des Innenwinkels bei A. Daher gilt $\angle ACD = 90° - \alpha$.

Da D und E auf derselben Seite der Geraden durch A und C liegen, gilt folglich

$$\angle DCE = |\angle ACD - \angle ACE| = |90° - \alpha - \frac{\gamma}{2}| = \frac{1}{2}|\beta - \alpha|$$

Bemerkung: Wie vorstehende Lösung zeigt, braucht man nur die Voraussetzung, dass $\angle CAB$ spitz ist. Da sich dies eventuell durch Vertauschung der Bezeichnung von A mit B (die an Voraussetzungen und Behauptung sonst nichts ändert) stets erreichen lässt, gilt der Satz sogar für beliebige Dreiecke.

Aufgabe 160724:



Es seien g_1, g_2, g_3, g_4 und g_5 fünf Geraden, die einander wie im Bild angegeben paarweise in den voneinander verschiedenen Punkten A, B, C, D, E, F, G, H, J und K schneiden. Gegeben seien die Größen der Winkel $\angle BAJ, \angle HGF, \angle FKJ$ und $\angle DEC$ in dieser Reihenfolge α, β, γ und δ genannt.
Ermittle die Größe ε des Winkels $\angle DCE$!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Der Winkel $\angle DBG$ hat als Außenwinkel des Dreiecks ABG die Größe $\alpha + \beta$. Als Scheitelwinkel von $\angle FKJ$ hat $\angle BKD$ die Größe γ. Mit Hilfe des Satzes über die Summe der Innenwinkel im Dreieck ergibt sich die Größe des Winkels $\angle CDE$ im Dreieck BDK zu $180° - \alpha - \beta - \gamma$. Mit Hilfe des gleichen Satzes, angewandt auf das Dreieck CDE erhält man für die Größe ε des Winkels $\angle DCE$:

$$\varepsilon = 180° - (180° - \alpha - \beta - \gamma + \delta) = 180° - 180° + \alpha + \beta + \gamma - \delta = \alpha + \beta + \gamma - \delta$$

Aufgabe 170723:
Von einem gleichschenkligen Dreieck sei nur bekannt, dass die Summe der Größen zweier Innenwinkel und eines Außenwinkels genau 300° beträgt. Dagegen sei nicht vorgeschrieben, welche der genannten Innenwinkel Basiswinkel sind und ob der genannte Außenwinkel zu einem dieser Innenwinkel gehört oder nicht.
Ermittle alle Möglichkeiten für die Größen der drei Innenwinkel dieses Dreiecks!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn ein gleichschenkliges Dreieck die geforderte Eigenschaft hat und darin x die Größe eines Basiswinkels, y die Größe des Winkels an der Spitze sowie x' und y' die Größen der zu x bzw. y gehörenden Außenwinkel (Nebenwinkel) sind, so gilt eine der Gleichungen

$$x + x + x' = 300^\circ \quad (1) \qquad x + x + y' = 300^\circ \quad (2)$$
$$x + y + x' = 300^\circ \quad (3) \qquad x + y + y' = 300^\circ \quad (4)$$

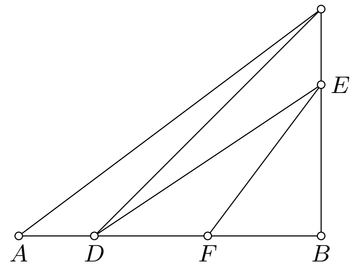
Wegen $x' + x = 180^\circ$ bzw. $y' + y = 180^\circ$ folgt sowohl aus (1) als auch aus (4) jeweils $x = 120^\circ > 90^\circ$ im Widerspruch dazu, dass x die Größe eines Basiswinkels ist.

Aus (2) erhält man, da nach dem Außenwinkelsatz $y' = 2x$ gilt, $4x = 300^\circ$ und damit $x = 75^\circ$, $y = 30^\circ$.
Wegen $x + x' = 180^\circ$ folgt aus (3) $y = 120^\circ$ und $x = 30^\circ$.
Als Möglichkeiten für die Größen der Innenwinkel dieses Dreiecks verbleiben mithin nur 75°; 75°; 30° oder 30°; 30°; 120°.

Diese Größen erfüllen die Forderungen der Aufgabe; denn wegen $75^\circ + 75^\circ + 30^\circ = 180^\circ$ bzw. $30^\circ + 30^\circ + 120^\circ = 180^\circ$ sind sie Innenwinkelgrößen von Dreiecken, und im ersten Fall beträgt die Summe der Größen der beiden Innenwinkel und des Außenwinkels $75^\circ 75^\circ + (180^\circ - 30^\circ) = 75^\circ + 75^\circ + 150^\circ = 300^\circ$, im zweiten Falle $30^\circ + 120^\circ + (180^\circ - 30^\circ) = 30^\circ + 120^\circ + 150^\circ = 300^\circ$.

Aufgabe 180724:
Über sechs Punkte A, B, C, D, E, F wird folgendes vorausgesetzt:
$\triangle ABC$ ist ein rechtwinkliges Dreieck mit B als Scheitel des rechten Winkels. D ist ein (innerer) Punkt der Strecke AB, E ist ein (innerer) Punkt der Strecke BC, F ist ein (innerer) Punkt der Strecke DB.
Die Dreiecke ADC, DEC, DFE und FBE sind sämtlich einander flächeninhaltsgleich. Ferner gilt $FB = 15$ cm und $BE = 20$ cm.
Ermittle unter diesen Voraussetzungen die Länge der Strecke AD!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Für den Flächeninhalt A_1 des Dreiecks FBE gilt laut Voraussetzung und nach der Inhaltsformel für Dreiecke

$$A_1 = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 20 \text{ cm}^2 = 150 \text{ cm}^2$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks DBE beträgt laut Voraussetzung $2 \cdot A_1$, so dass für BD folgt:

$$\frac{1}{2} BD \cdot BE = 300 \text{ cm}^2, \text{ d. h. } BD = 30 \text{ cm}$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks DBC beträgt laut Voraussetzung

$$\frac{1}{2} BC \cdot BD = 450 \text{ cm}^2, \text{ d. h. } BC = 30 \text{ cm.}$$

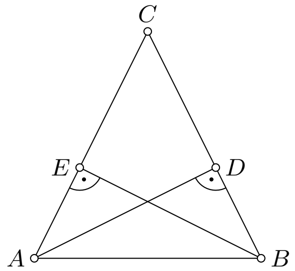
Analog folgt für AB:

$$\frac{1}{2} AB \cdot BC = 600 \text{ cm}^2, \text{ d. h. } AB = 40 \text{ cm.}$$

und somit $AD = AB - BD = 40$ cm - 30 cm = 10 cm. Die Länge der Strecke AD beträgt 10 cm.

Aufgabe 200724:
a) Beweise den folgenden Satz:
Wenn ein spitzwinkliges Dreieck ABC gleichschenklig mit $AC = BC$ ist, dann haben die von A und B ausgehenden Höhen gleiche Länge.
b) Beweise die folgende Umkehrung dieses Satzes: Wenn in einem spitzwinkligen Dreieck ABC die von A und B ausgehenden Höhen gleiche Länge haben, dann ist das Dreieck ABC gleichschenklig mit $AC = BC$.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

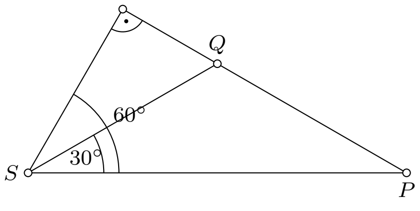


a) Wenn ein spitzwinkliges Dreieck ABC gleichschenklig mit $AC = BC$ ist, so folgt für die Höhen AD und BE, dass $\angle BAE = \angle ABD$ gilt, da diese Winkel mit den einander gleichgroßen Basiswinkeln $\angle BAC$ bzw. $\angle ABC$ übereinstimmen; denn wegen der Spitzwinkligkeit des Dreiecks ABC liegt der Höhenfußpunkt D zwischen B und C und der Höhenfußpunkt E zwischen A und C.
Ferner gilt $\angle AEB = \angle BDA = 90°$ und $AB = BA$. Daher sind die Dreiecke ABE und BAD nach dem Kongruenzsatz (sww) kongruent, woraus $BE = AD$ folgt.

b) Wenn für die Höhen AD und BE eines spitzwinkligen Dreiecks ABC $BE = AD$ gilt, so folgt:
Es gilt $\angle AEB = \angle BDA = 90°$ und $AB = BA$.
Ferner liegen die Winkel $\angle AEB$ bzw. $\angle BDA$ als rechte Winkel jeweils den größten Seiten in den Dreiecken ABE bzw. BAD gegenüber. Daher sind die Dreiecke ABE und ABD nach dem Kongruenzsatz (ssw) kongruent, woraus $\angle BAE = \angle ABD$ folgt.
Diese Winkel stimmen wiederum mit den Winkeln $\angle BAC$ bzw. $\angle ABC$ überein, also ist das Dreieck ABC wegen der gleichgroßen Innenwinkel bei A und B gleichschenklig mit $AB = BC$ ist.

Aufgabe 210722:
Gegeben sei ein Winkel mit dem Scheitelpunkt S und der Größe 60°. Auf einem seiner Schenkel liege ein Punkt P. Von P sei das Lot auf den anderen Schenkel gefällt. Der Schnittpunkt dieses Lotes mit der Halbierenden des gegebenen Winkels heiße Q.
Beweise, dass Q auf der Mittelsenkrechten der Strecke SP liegt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Der Fußpunkt des Lotes von P auf den anderen Schenkel sei F.
Nach Voraussetzung ist $\angle FSP = 60°$ und $\angle PFS = 90°$; wegen des Winkelsummensatzes, angewandt auf das Dreieck SPF, folgt $\angle SPF = 30°$. Außerdem ist nach Voraussetzung $\angle QSP = 30°$; also ist das Dreieck SPQ gleichschenklig mit $SQ = PQ$.
Folglich ist Q ein Punkt der Mittelsenkrechten von SP.

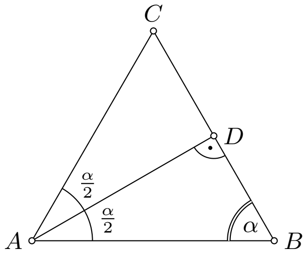
Aufgabe 220722:
In einer Diskussion über Dreiecke ABC wird für diese vorausgesetzt:

(1) Es gilt $AC = BC$
(2) Die Halbierende des Winkels $\angle BAC$ steht senkrecht auf BC.

In dieser Diskussion behauptet Ursel: „Dann muss das Dreieck ABC rechtwinklig sein.“
Vera behauptet: „Nein, dann muss es gleichseitig sein.“
Werner behauptet: „Nein, dann braucht das Dreieck ABC weder rechtwinklig noch gleichseitig zu sein.“

Untersuche für jede dieser drei Behauptungen, ob sie wahr oder falsch ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Ist $\angle BAC = \alpha$, so folgt aus (1), dass auch (3) $\angle ABC = \alpha$ gilt (Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck).
Ist ferner D der Schnittpunkt von BC mit der Winkelhalbierenden von $\angle BAC$, so folgt aus (2) und (3), dass $\frac{\alpha}{2} + \alpha + 90° = 180°$ gilt (Winkelsumme im Dreieck ABD).

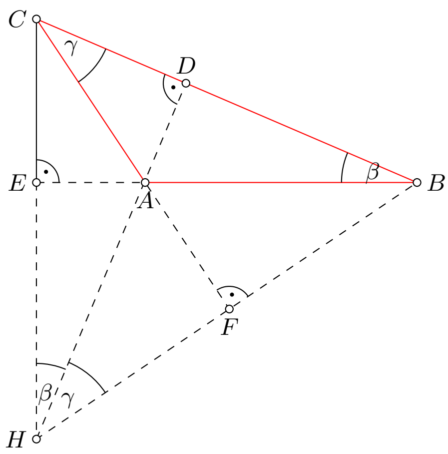
Daher ist $\frac{3}{2} \cdot \alpha = 90°$, also $\angle BAC = \alpha = 60°$, nach (3) daher auch $\angle ABC = 60°$.

Mithin ist das Dreieck ABC gleichseitig und somit nicht rechtwinklig. Folglich ist Veras Behauptung wahr, Ursels und Werners Behauptungen sind falsch.

Andere Beweismöglichkeit:
Aus (2) folgt $\angle BAD = \angle CAD$, $\angle ADB = \angle ADC = 90°$. Hiernach und wegen $AD = AD$ gilt $\triangle ABD = \triangle ACD$ (wsw), also $AB = AC$. Daher und nach (1) ist das Dreieck ABC gleichseitig.

Aufgabe 250723:
Es sei ABC ein Dreieck mit $\angle BAC = \alpha > 90°$. Ferner sei H der Schnittpunkt der Geraden, auf denen die Höhen dieses Dreiecks liegen.
Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen stets $\angle BHC = \angle ABC + \angle ACB$ gilt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es seien D, E bzw. F die Fußpunkte der zu A, B bzw. C gehörenden Höhen, ferner sei $\angle ABC = \beta$, $\angle ACB = \gamma$.
Da das Dreieck ABC bei A stumpfwinklig ist, also bei B und C spitze Innenwinkel hat, liegt D auf der Seite BC, während E, F und H außerhalb des Dreiecks liegen (siehe Abbildung).

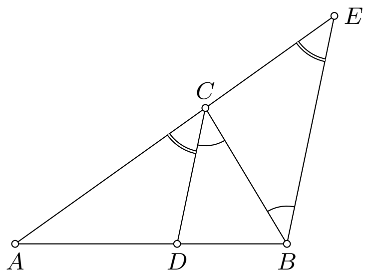


Hiernach gilt in den Dreiecken $\triangle BDH$ und $\triangle CFB$ $\angle HBD = \angle FBC$. Ferner ist, da D und F Höhenfußpunkte sind, $\angle CDH = \angle CFB = 90°$.
Folglich stimmen die Dreiecke CDH und CFB in zwei Innenwinkeln überein; nach dem Innenwinkelsatz gilt daher auch $\angle DHB = \angle FCB = \gamma$. (1)

Analog beweist man durch Betrachtung der Dreiecke CDH und BEC $\angle DHC = \angle EBC = \beta$ (2)
Schließlich gilt wegen der Lage von D zwischen B und C die Gleichung $\angle BHC = \angle DHC + \angle DHB = \beta + \gamma$.

Aufgabe 280722:
Es sei ABC ein Dreieck, darin sei CD die Winkelhalbierende von $\angle ACB$. Die Parallele durch B zu CD schneide die Verlängerung von AC über C hinaus in einem Punkt E.
Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen stets das Dreieck BEC gleichschenklig ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

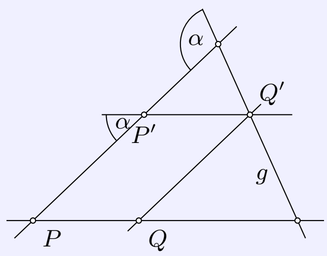


$\angle CBE = \angle BCD$ ($CD \parallel BE$ und Wechselwinkelsatz). (1)
$\angle BCD = \angle ACD$ (Halbierung $\angle ACB$ durch CD) (2)
$\angle ACD = \angle CEB$ ($CD \parallel BE$ und Stufenwinkelsatz). (3)
$\angle CBE = \angle CEB$ (aus (1), (2) und (3)). (4)

Nach der Umkehrung des Basiswinkelsatzes ist somit das Dreieck BEC (mit $BC = EC$) gleichseitig.

Aufgabe 290723:

Das Bild zeigt zwei Punkte P, Q und ihre Bildpunkte P', Q' bei einer Verschiebung. Durch Q' ist eine Gerade g gelegt. Ferner seien α und β die Größen der im Bild gekennzeichneten Winkel.
Ermittle eine Größenangabe für γ, ausgedrückt durch α und β!

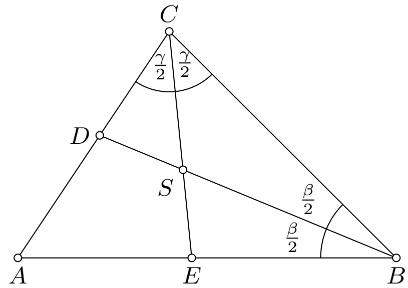


Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Ist S der Scheitel des gekennzeichneten Winkels der Größe β, so $\angle SP'Q'$ ist der Scheitelwinkel des gekennzeichneten Winkels der Größe α. Daher ist auch $\angle SP'Q' = \alpha$.
Nach den Eigenschaften jeder Verschiebung ist die Gerade durch P', Q' parallel zur Geraden durch P, Q. Daher gilt nach dem Stufenwinkelsatz $\angle P'Q'S = \gamma$. Aus dem Außenwinkelsatz, angewandt auf Dreieck $P'Q'S$, folgt daher $\alpha + \gamma = \beta$ und somit $\gamma = \beta - \alpha$.

Aufgabe 300724:
In einem Dreieck ABC seien BD bzw. CE die Winkelhalbierenden der Innenwinkel $\angle ABC$ bzw. $\angle ACB$, und S sei der Schnittpunkt von BD mit CE.

a) Beweise: Wird ferner vorausgesetzt, dass der Innenwinkel $\angle BAC$ die Größe $\alpha = 60°$ hat, so folgt, dass dann auch stets der Winkel $\angle BSE$ die Größe $60°$ hat!
b) Ermittle eine Formel, mit der sich zu beliebig vorgegebener Größe α des Innenwinkels $\angle BAC$ die Größe des Winkels $\angle BSE$ ergibt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



a) Für $\beta = \angle ABC$, $\gamma = \angle ACB$ gilt nach Voraussetzung $\angle CBS = \angle CBD = \frac{\beta}{2}$, $\angle BCS = \angle BCE = \frac{\gamma}{2}$. Nach den Außenwinkelsatz für $\triangle BCS$ folgt hieraus

$$\angle BSE = \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2}(\beta + \gamma)$$

Nach dem Innenwinkelsatz für $\triangle ABC$ ist $\beta + \gamma = 180° - \alpha = 120°$; damit ergibt sich $\angle BSE = 60°$.

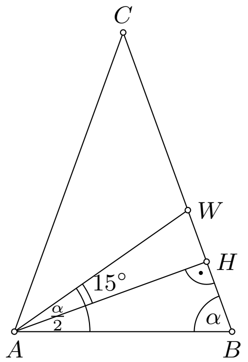
b) Diese Herleitung bleibt bis einschließlich zur Formel $\beta + \gamma = 180° - \alpha$ für beliebig vorgegebenes α gültig; damit erhält man als gesuchte Formel

$$\angle BSE = \frac{1}{2}(180° - \alpha) = 90° - \frac{\alpha}{2}$$

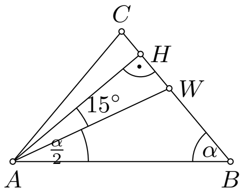
Aufgabe 330724:
Für jedes Dreieck ABC bezeichne H den Fußpunkt der auf BC senkrechten Höhe und W den Schnittpunkt von BC mit der Winkelhalbierenden durch A.

a) Welche Größe muss der Basiswinkel $\angle BAC$ eines gleichschenkligen Dreiecks ABC mit $AC = BC$ haben, bei dem die Punkte H und W miteinander zusammenfallen?
b) Welche Größe muss der Winkel $\angle WAH$ in einem gleichschenkligen Dreieck ABC mit $AC = BC$ haben, in dem ein Basiswinkel $\angle BAC$ die Größe $70°$ hat?
c) Ermittle alle diejenigen Werte, die als Größe des Basiswinkels $\angle BAC$ in einem gleichschenkligen Dreieck ABC mit $AC = BC$ möglich sind, bei dem der Winkel $\angle WAH$ die Größe $15°$ hat!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Aus der Voraussetzung $H = W$ folgt, dass das Dreieck ABC auch mit $AB = AC$ gleichschenklig, wegen der Voraussetzung $AC = BC$ also sogar gleichseitig ist. Daher gilt $\angle BAC = 60°$.



a)



b)

b) Siehe Abbildung a): Da AW den Winkel $\angle BAC$ halbiert, folgt $\angle BAW = 35°$. (1)

Nach dem Basiswinkelsatz ist auch $\angle ABC = 70°$; nach dem Innenwinkelsatz für Dreieck ABH ist ferner $\angle BAH = 90° - \angle ABH = 20°$. (2)
Der Winkel $\angle ABC$ ist kleiner als $90°$, also liegt H auf derselben Seite von AB wie W. Daher folgt aus (1) und (2) $\angle WAH = 35° - 20° = 15°$.

c) Wenn ABC ein gleichschenkliges Dreieck mit $AC = BC$ und $\angle WAH = 15°$ ist, so folgt: Da der Basiswinkel $\angle ABC$ kleiner als $90°$ ist, liegt H auf derselben Seite von AB wie W, also entweder auf der Strecke BW oder auf ihrer Verlängerung über W hinaus (siehe Abbildungen a bzw. b).
In diesen beiden Fällen folgt mit dem oberen bzw. unteren Vorzeichen $\angle BAH = \angle BAW \mp \angle WAH$, mit $\alpha = \angle BAC$ also

$$\angle BAH = \frac{\alpha}{2} \mp 15° \qquad (3)$$

Somit besagt der Innenwinkelsatz für Dreieck ABH

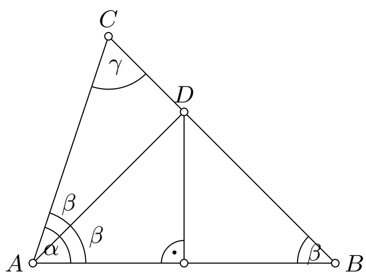
$$\left(\frac{\alpha}{2} \mp 15°\right) + \alpha = 90° \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = 60° \pm 10° \qquad (4{,}5)$$

In der Tat gibt es sowohl für $\alpha = 70°$ als auch für $\alpha = 50°$ gleichschenklige Dreiecke mit α als Basiswinkelgröße (da in beiden Fällen $\alpha < 90°$ ist); für diese Dreiecke gilt (4), also (3) und damit $\angle WAH = 15°$. Damit ist gezeigt, dass genau die beiden Werte $70°$ und $50°$ als Basiswinkelgröße in einem Dreieck der in c) genannten Art möglich sind.

Aufgabe 340723:
In den Dreiecken ABC seien wie üblich die Größen der Innenwinkel bei A, B und C mit α, β bzw. γ bezeichnet. Ferner werde vorausgesetzt, dass die Mittelsenkrechte der Seite AB und die durch A gehende Winkelhalbierende sich in einem Punkt D schneiden, der auf der Seite BC liegt.

a) Leite eine Formel her, nach der in jedem Dreieck, das diese Voraussetzung erfüllt, γ von β abhängt!
Für welche Werte von β gibt es ein Dreieck, das die genannten Voraussetzung erfüllt; für welche Werte von β gibt es kein solches Dreieck?
b) Ermittle alle diejenigen Werte von β, für die ein Dreieck, das die genannte Voraussetzung erfüllt, rechtwinklig ist!
c) Ermittle alle diejenigen Werte von β, für die ein Dreieck, das die genannte Voraussetzung erfüllt, gleichschenklig ist!

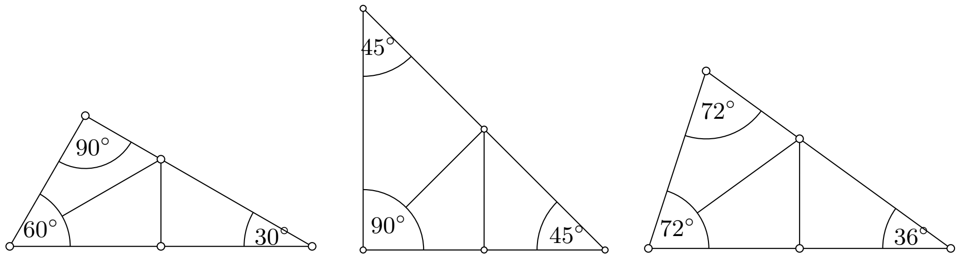
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



a) (siehe Abbildung) Da D auf der Mittelsenkrechten von AB liegt, gilt $AD = BD$. Nach dem Basiswinkelsatz für Dreieck ABD folgt daraus $\angle BAD = \angle ABD = \beta$.
Da AD Winkelhalbierende ist, folgt weiter $a = 2\beta$ (1) und damit nach dem Innenwinkelsatz die gesuchte Formel $\gamma = 180° - 3\beta$. (2)

Weiterhin folgt
I. Für alle $\beta \geq 60°$ gibt es kein Dreieck der geforderten Art; denn gäbe es ein solches, so müsste, wie eben gezeigt wurde, (2) gelten. Das ist nicht möglich, da sich ein Wert $\gamma \leq 0$ ergäbe.

II. Für alle positiven $\beta < 60°$ gibt es dagegen ein Dreieck der geforderten Art.
Denn wählt man zu einem solchen β die Werte α und γ aus (1) und (2), so hat man drei positive Winkelgrößen α, β, γ mit $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.
Es gibt daher ein Dreieck ABC mit diesen Innenwinkelgrößen. Ist darin AD Winkelhalbierende, so ist das Dreieck ABD nach der Umkehrung des Basiswinkelsatzes gleichschenklig, also liegt D auch auf der Mittelsenkrechten von AB.



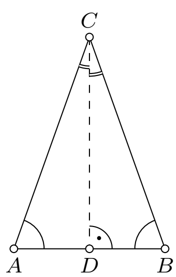
b) Mit $\beta = 90°$ kann ein Dreieck, das die in der Aufgabe genannte Voraussetzung erfüllt, nicht rechtwinklig sein; denn für diesen Wert β gibt es nach a) I. kein solches Dreieck.
Dagegen gibt es ein solches Dreieck, das mit $\alpha = 90°$ rechtwinklig ist; denn gemäß (1) kann man $\beta = 45°$ wählen und dann wie in a) II. vorgehen. Ebenso ist $\gamma = 90°$ gemäß (2) mit $\beta = 30°$ erreichbar.
Die in (b) gesuchten Werte sind also genau $\beta = 30°$ und $\beta = 45°$.

c) Mit $\alpha = \beta$ kann ein Dreieck, das die in der Aufgabe genannte Voraussetzung erfüllt, nicht gleichschenklig sein; denn nach (1) ergäbe sich $2\beta = \beta$, also $\beta = 0$ und damit kein Dreieck.
Dagegen ist $\beta = \gamma$ gemäß (2) mit $\beta = 180° - 3\beta$, also $\beta = 45°$ erreichbar, ebenso $\alpha = \gamma$ gemäß (1) und (2) mit $2\beta = 180° - 3\beta$, also $\beta = 36°$. Die in (c) gesuchten Werte sind folglich genau $\beta = 45°$ und $\beta = 36°$.

III Runde 3

Aufgabe 010734:
Es ist zu beweisen, dass die von der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks auf dessen Grundseite gefällte Höhe gleichzeitig Winkel- und Seitenhalbierende ist.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



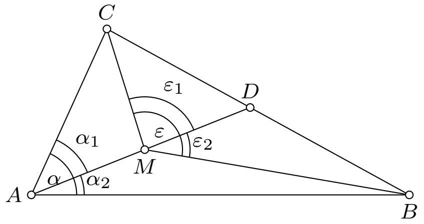
Beweis:
Die Höhe CD bildet mit der Grundseite AB einen rechten Winkel, die Schenkel $AC = BC$ und die Basiswinkel $\angle BAC = \angle ABC$ sind nach Voraussetzung gleich. Daher sind die beiden Teildreiecke ADC und BDC, die durch die Höhe entstehen, nach dem Kongruenzsatz SWW deckungsgleich.
Daraus folgt, dass die beiden Winkel $\angle ACD$ und $\angle BCD$ bzw. Strecken AD und BD gleich groß sind; was genau bei einer Halbierung der Fall ist. CD ist damit zugleich Winkel- und Seitenhalbierende.

Aufgabe 020734:
Gegeben sei ein Dreieck ABC mit dem Inhalt F_1. Verbinde den Punkt A mit dem Mittelpunkt E der Seite a und verlängere die Strecke über E hinaus um sich selbst. Der Endpunkt sei D; der Inhalt des Dreiecks ADC sei F_2.
Berechne das Verhältnis $F_1 : F_2$!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn man die Konstruktion durchführt, stellt man fest, dass die Dreiecke ACE und BDE kongruent sind.
Es gilt nämlich $BE = CE$ (E ist der Mittelpunkt von a), $AE = ED$ (Verlängerung von AE um sich selbst) und $\angle AEC = \angle DEB$ (Scheitelwinkel). Damit sind die beiden Dreiecke flächengleich; durch das Hinzunehmen der Fläche des Dreiecks ABE folgt $F_1 : F_2 = 1$.

Aufgabe 050733:
Der Punkt M liege im Innern des Dreiecks $\triangle ABC$.
Beweise, dass für jeden solchen Punkt M $\varepsilon > \alpha$ gilt, wenn ε ($< 180°$) das Maß des Winkels $\angle BMC$ und α das Maß des Winkels $\angle BAC$ ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Die Gerade durch A und M schneide die Seite CB im Punkt D. D liegt zwischen C und B. Das Maß des Winkels $\angle CMD$ sei ε_1, das des Winkels $\angle CAM$ sei α_1, das des Winkels $\angle DMB$ sei ε_2 und das des Winkels $\angle MAB$ sei α_2. Dann gilt

(1) $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha; \quad \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon$

(2) $\varepsilon_1 > \alpha_1$ (nach dem Außenwinkelsatz)

(3) $\varepsilon_2 > \alpha_2$ (nach dem Außenwinkelsatz)

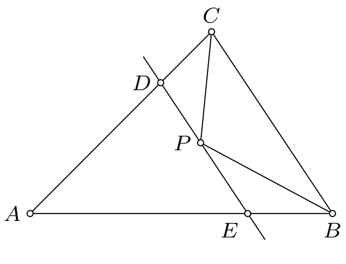
und folglich wegen (2) und (3)

(4) $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 > \alpha_1 + \alpha_2$ und wegen (1) und (4)

(5) $\varepsilon > \alpha$

Aufgabe 060733:
Gegeben ist ein Dreieck $\triangle ABC$. Gesucht ist eine Parallele p zu BC, die folgende Eigenschaften hat:
(1) Sie schneidet die Strecken AB und AC.
(2) Sind D und E die Schnittpunkte von p mit AB bzw. mit AC, so ist $BD + CE = DE$.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



I. Angenommen, p sei eine gesuchte Parallele.
Dann gibt es auf der Strecke DE einen Punkt P, so dass $BD = DP$ und $CE = EP$ gilt. Daraus folgt

$\angle ABP = \angle DPB$ (Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck) und $\angle DPB = \angle CBP$ (Wechsel-Kinkel an geschnittenen Parallelen), also ist BP die Winkelhalbierende von $\angle ABC$. Entsprechend folgt, dass CP die Winkelhalbierende von $\angle ACB$ ist. Daher kann eine Gerade p höchstens dann eine der gesuchten Parallelen sei wenn sie durch folgende Konstruktion erhalten wird:

II. Man konstruiere die Winkelhalbierenden von $\angle ABC$ und $\angle ACB$ und ziehe durch ihren Schnittpunkt P die Parallele p zu BC.

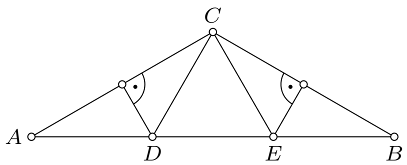
III. Ist eine Gerade p wie in II konstruiert, so ist sie eine gesuchte Parallele.
Beweis: Nach Konstruktion ist
$\angle DBP = \angle CBP$ (da $\angle ABC$ durch BP halbiert wird) und
$\angle CBP = \angle DPB$ (Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen),
also ist $\triangle BPD$ gleichschenklig, und zwar ist $BD = DP$. Ebenso folgt $CE = EP$ und daher $BD + CE = DE$.

Außerdem liegt P im Innern des Dreiecks $\triangle ABC$, also schneidet p die Strecken AB und AC.

IV. Die Konstruktion II ist stets eindeutig durchführbar; denn die Winkelhalbierenden, ihr Schnittpunkt P und die Parallele durch P zu BC existieren stets eindeutig. Nach III gibt es daher stets eine gesuchte Parallele p und nach I auch nur eine solche.

Aufgabe 060736:
In einem gleichschenkligen Dreieck $\triangle ABC$ habe der Winkel $\angle ACB$ ein Gradmaß von 120°.
Beweise, dass die Mittelsenkrechten der Seiten AC und BC die Seite AB in drei gleiche Teile teilen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Die Basis des gleichschenkligen Dreiecks $\triangle ABC$ muss AB sein, da das Dreieck sonst zwei Winkel von 120° hätte. Also ist $\angle BAC = \angle ABC$ (Gradmaß 30°).
Die Schnittpunkte der Mittelsenkrechten der Seiten AC und BC mit der Seite AB seien D bzw. E. Dann ist

(1) $AD = CD$ (da D auf der Mittelsenkrechten von AC liegt), also $\angle ACD = \angle BAC$ (Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck ACD) (Gradmaß 30°). Daher hat der Winkel $\angle CDE$ ein Gradmaß von 60° (Außenwinkel im Dreieck $\triangle ACD$). Ebenso zeigt man

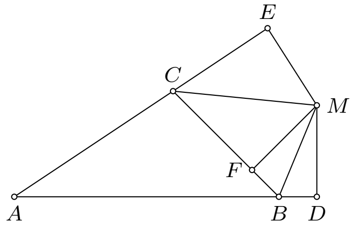
(2) $BE = CE$ und $\angle CED = 60°$. Also ist $\triangle CDE$ gleichseitig, und es folgt

(3) $CD = DE = CE$.

Aus (1), (2), (3) folgt die Behauptung $AD = DE = BE$.

Aufgabe 070732:
Beweise folgende Behauptung!
Halbiert man die beiden der Seite BC anliegenden Außenwinkel des Dreiecks $\triangle ABC$ und fällt vom Schnittpunkt M der Halbierenden auf die Seiten des Dreiecks oder ihre Verlängerungen die Lote MD, ME und MF, so gilt $MD = ME = MF$.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Die Dreiecke $\triangle CFM$ und $\triangle CME$ sind kongruent; denn sie stimmen in der Seite CM und in 2 Winkeln laut Konstruktion überein.
Daher gilt $ME = MF$.
Ebenso sind die Dreiecke $\triangle MFB$ und $\triangle MDB$ kongruent, woraus $MF = MD$ folgt. Mithin gilt $MD = ME = MF$.

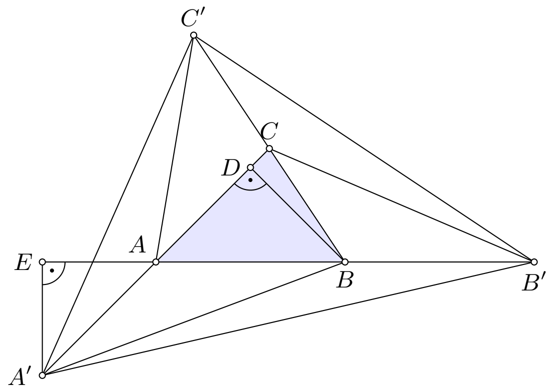
Aufgabe 070736:
Auf den Verlängerungen der Seiten AB, BC und CA des Dreiecks $\triangle ABC$ werden über die Punkte B bzw. C bzw. A hinaus Strecken mit den Längen $BB' = AB$, $CC' = BC$ und $AA' = CA$, abgetragen.
Es ist zu beweisen, dass der Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle A'B'C'$ siebenmal so groß ist wie der Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle ABC$.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Zum Beweis verwendet man den Satz, dass Dreiecke flächengleich sind, wenn sie in einer Seite und der zugehörigen Höhe übereinstimmen.

Behauptung: Es ist $I_{\triangle A'B'C'} = 7 \cdot I_{ABC}$, wenn $I_{\triangle A'B'C'}$ den Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle A'B'C'$ und I_{ABC} den des Dreiecks $\triangle ABC$ bezeichnet.

Beweis: Es seien D der Fußpunkt des Lotes von B auf $A'C$ (bzw. die Verlängerung dieser Strecke) und E der Fußpunkt des Lotes von A' auf AB' (bzw. die Verlängerung). Dann gilt:
$\triangle ABC$ ist flächengleich $\triangle AA'B$; denn es gilt $AC = AA'$ und $BD = BD$ (als gemeinsame Höhe).
$\triangle BAA'$ ist flächengleich $\triangle B'BA'$; denn BA' ist Seitenhalbierende im Dreieck $\triangle B'AA'$, und es gilt:

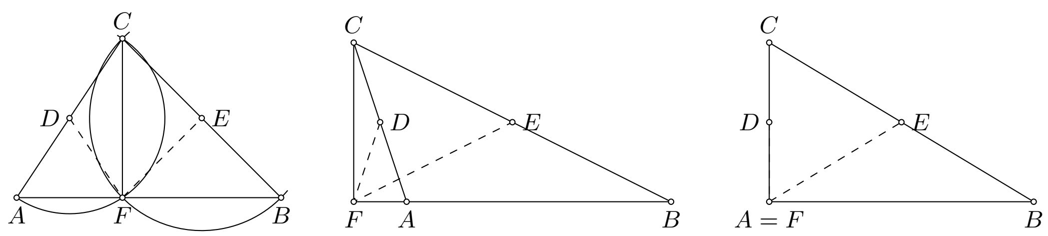
$BA = B'B$ sowie $A'E = A'E$. Daraus folgt, dass $\triangle B'BA'$ auch flächengleich $\triangle ABC$ ist. Entsprechend beweist man, dass die Dreiecke $\triangle A'AC'$, $\triangle ACC'$, $\triangle C'CB'$ und $\triangle CBB'$ alle flächengleich dem Dreieck $\triangle ABC$ sind.



Das Dreieck $\triangle ABC$ liegt ganz im Innern des Dreiecks $\triangle A'B'C'$ (die Winkel $\angle A'CC'$, $\angle B'BC'$ und $\angle B'AA'$ sind als Außenwinkel des Dreiecks $\triangle ABC$ sämtlich kleiner 180°).
Daher erhält man den Flächeninhalt $I_{\triangle A'B'C'}$, indem man den Flächeninhalt der sieben zu $\triangle ABC$ flächengleichen Dreiecke $\triangle ABC$, $\triangle AA'B$, $\triangle B'BA'$, $\triangle A'AC'$, $\triangle ACC'$, $\triangle C'CB'$ und $\triangle CBB'$ addiert.
Mithin gilt: $I_{\triangle A'B'C'} = 7 \cdot I_{ABC}$.

Aufgabe 080733:
Beweise folgenden Satz!
Fällt man von einem Eckpunkt eines Dreiecks $\triangle ABC$ das Lot auf die gegenüberliegende Seite oder ihre Verlängerung und verbindet den Fußpunkt des Lotes mit den Seitenmitten der anderen beiden Seiten, so ist die Summe der Längen dieser Verbindungsstrecken gleich der halben Summe der Längen der beiden Seiten.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Es sei o. B. d. A. der Punkt C der Eckpunkt, von dem aus das Lot auf die Gerade durch A und B gefällt wird. Der Fußpunkt des Lotes sei F, der Mittelpunkt von AC sei D, der von BC sei E.

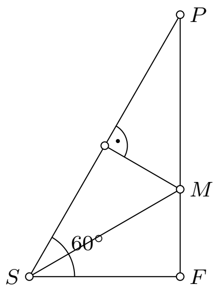
Dann sind die Dreiecke $\triangle AFC$ und $\triangle CFB$ rechtwinklig mit dem rechten Winkel bei F (eventuell ist eines dieser Dreiecke ausgeartet, falls nämlich bei A bzw. B ein rechter Winkel liegt. Die Betrachtungen gelten aber auch in diesem Falle, da dann $A = F$ bzw. $B = F$ ist) und die Punkte A, F, C bzw. C, F, B liegen nach Umkehrung des Lehrsatzes des Thales auf dem Kreis mit dem Durchmesser AC bzw. BC.

Da D Mittelpunkt von AC bzw. E Mittelpunkt von BC ist, ist $AD = DC = DF$ bzw. $CE = BE = EF$ als Radien in den Thaleskreisen. Mithin gilt

$$DF + EF = AD + EB = \frac{1}{2}(AC + BC)$$

Aufgabe 100732:
Gegeben sei ein Winkel der Größe 60° mit dem Scheitelpunkt S. Ferner sei $P \neq S$ ein beliebiger, auf einem der Schenkel des Winkels gelegener Punkt. Der Fußpunkt des Lotes von P auf den anderen Schenkel des Winkels sei F.
Beweise, dass sich die Halbierende des Winkels $\angle PSF$ und die Strecke PF in einem Punkte schneiden, der auf der Mittelsenkrechten von PS liegt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Da F eindeutig bestimmt ist, ist F auf Grund der Voraussetzungen von P und S verschieden. Daher sind P, S, F die Ecken eines rechtwinkligen Dreiecks mit dem rechten Winkel bei F.

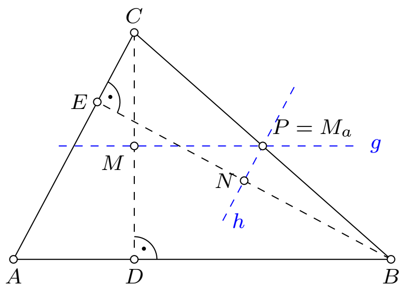
Dann schneidet bekanntlich die Halbierende des Winkels $\angle PSF$ die Strecke PF in einem Punkt, der mit M bezeichnet werde. Dabei hat der Winkel $\angle MSP$ eine Größe von 30°.

Außerdem hat der Winkel $\angle SPF$ als Komplementwinkel des Winkels $\angle PSF$ eine Größe von 30° (Winkelsumme im Dreieck $\triangle PSF$).

Daher ist $\triangle PSM$ gleichschenklig mit $PM = MS$. Infolgedessen liegt M auf der Mittelsenkrechten von PS.

Aufgabe 120736:
Beweise den folgenden Satz:
Für jedes Dreieck $\triangle ABC$ gilt: Zieht man bei zwei beliebigen Höhen dieses Dreiecks jeweils durch deren Mittelpunkt die Parallele zu der zur Höhe gehörenden Dreieckseite, so schneiden sich diese Parallelen in einem Punkt, der auf der dritten Dreieckseite liegt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Die zwei im Satz genannten Höhen seien o. B. d. A. die zu AB und AC gehörenden. Ihre Fußpunkte seien D bzw. E, ihre Mittelpunkte M bzw. N.

Die genannten Parallelen, g parallel zu AB durch M bzw. h parallel zu AC durch N, sind nicht parallel zueinander (da AB nicht zu AC parallel ist), sie schneiden sich daher in genau einem Punkte.
Nun schneidet g den Strahl aus B durch C (da M und C auf derselben Seite der Geraden durch A und B liegen) in einem Punkt P.

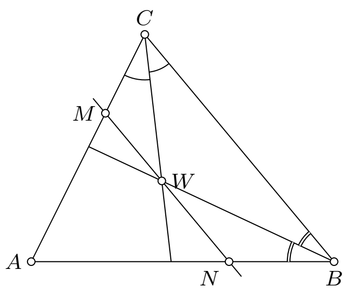
Ist F der Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle ABC$, so haben die Dreiecke $\triangle ABM$ und $\triangle ABP$ jeweils den Flächeninhalt $\frac{1}{2}F$; denn diese drei Dreiecke stimmen in der Seite AB überein, und die zugehörige Höhe hat im ersten Dreieck die Länge CD, in den beiden anderen Dreiecken jeweils die Länge $MD = \frac{1}{2}CD$.

Da nun die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle ABP$ in der zur Seite BC bzw. zur Seite BP gehörenden Höhe übereinstimmen, folgt unter Berücksichtigung der Aussagen über ihren Flächeninhalt $BP = \frac{1}{2}BC$. Also schneidet g die Strecke BC in ihrem Mittelpunkt M_a.

Analog beweist man, dass auch h die Strecke BC in M_a schneidet. Daher ist M_a ein gemeinsamer Punkt von g und h, folglich ihr Schnittpunkt, und da M_a auf BC liegt, ist hiermit die Behauptung bewiesen.

Aufgabe 130735:
Gegeben sei ein Dreieck ABC; der Schnittpunkt seiner Winkelhalbierenden sei W. Die Parallele durch W zu BC schneide AC in M und AB in N.
Beweise: $CM + BN = MN$.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

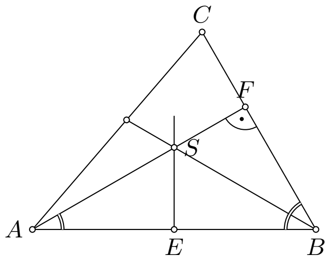


Aus $\angle CBW = \angle WBN$ (laut Voraussetzung) und $\angle CBW = \angle NBW$ (Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen) folgt $\angle WBN = \angle NWB$. Deshalb ist das Dreieck BNW gleichschenklig mit der Spitze N, und es gilt $BN = NW$. (1) Analog beweist man $CM = MW$. (2)

Aus (1) und (2) folgt $CM + BN = MW + NW$, also $CM + BN = MN$.

Aufgabe 140736:
Claudia erzählt ihrer Freundin Sabine, sie habe ein Dreieck ABC gezeichnet, in dem die Höhe auf BC genau durch den Schnittpunkt der Mittelsenkrechten von AB und der Winkelhalbierenden von $\angle ABC$ geht.
Sabine behauptet, allein aus diesen Angaben könne man, ohne die Zeichnung zu sehen, eindeutig die Größe des Winkels $\angle ABC$ ermitteln.
Untersuche, ob Sabines Behauptung richtig ist! Wenn dies der Fall ist, ermittle die Größe von $\angle ABC$!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

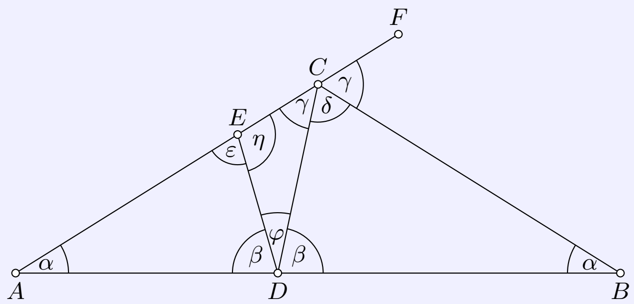


Sei S der genannte Schnittpunkt, E der Mittelpunkt der Seite AB und F Fußpunkt der Höhe auf BC.
Weil die Gerade durch B und S den Winkel $\angle ABC$ halbiert, gilt dann $\angle FBS = \angle SBA$. (1)
Da S außerdem auf der Mittelsenkrechten von AB liegt, sind A, B, S die Ecken eines gleichschenkligen Dreiecks mit $AS = BS$, und deshalb ist $\angle SAB = \angle SBA$. (2)
Aus (1) und (2) folgt: $\angle FBS = \angle SAB = \angle SBA$. (3)

Weiter sind A, B, F die Ecken eines rechtwinkligen Dreiecks. Die Summe der Größe der in (3) genannten untereinander gleich großen Winkel beträgt somit nach dem Winkelsummensatz 90°. Jeder von ihnen hat daher die Größe 30°. Sabines Behauptung ist also richtig. Die Größe des Winkels $\angle ABC$ beträgt 60°.

Aufgabe 150732:

In der abgebildeten Figur gelte:
$\angle ABC = \angle BAC = \alpha$,
$\angle ADE = \angle BDC = \beta$,
$\angle ACD = \angle BCF = \gamma$,
$\angle BCD = \delta$, $\angle AED = \varepsilon$,
$\angle CED = \eta$, $\angle EDC = \psi$.
Es sei $\delta = 70°$.
Ermittle $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon, \eta$, und ψ!



Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die drei Winkel mit dem Scheitelpunkt C bilden zusammen einen gestreckten Winkel. Folglich gilt

$$2\gamma + 70° = 180° \Rightarrow \gamma = 55°$$

Der Winkel $\angle BCF$ ist Außenwinkel des gleichschenkligen Dreiecks ABC. Also gilt nach dem Außenwinkelsatz

$$\gamma = 2\alpha \qquad ; \qquad \alpha = \frac{\gamma}{2} = 27{,}5°$$

Nun gilt nach dem Satz über die Winkelsumme im Dreieck, angewandt auf $\triangle BDC$:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180° \Rightarrow \beta = 180° - \alpha - \gamma = 180° - 27,5° - 70° = 82{,}5°$$

Die drei Winkel mit dem Scheitelpunkt D bilden ebenfalls einen gestreckten Winkel. Also gilt

$$2\beta + \psi = 180° \Rightarrow \psi = 180° - 2\beta = 180° - 2 \cdot 82,5° = 15°$$

Nach dem Satz über die Winkelsumme im Dreieck, angewandt auf $\triangle ECD$ gilt:

$$\eta + \gamma + \psi = 180° \Rightarrow \eta = 180° - \gamma - \psi = 180° - 55° - 15° = 110°$$

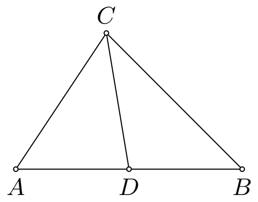
und damit nach dem Satz über Nebenwinkel

$$\varepsilon = 180° - 110° = 70°$$

Damit sind die Winkelgrößen $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon, \eta$ und ψ ermittelt.

Aufgabe 160732:
Beweise den folgenden Satz:
In jedem Dreieck ist die Länge jeder Seitenhalbierenden kleiner als der halbe Umfang des Dreiecks!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



O. B. d. A. werde in dem beliebigen Dreieck ABC die Seitenhalbierende CD der Seite AB betrachtet (siehe Abbildung). Es ist zu beweisen, dass

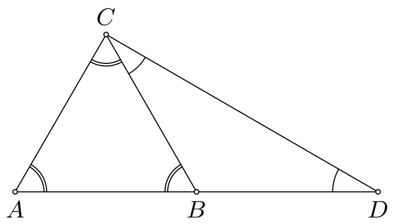
$$DC < \frac{1}{2}(AB + BC + AC)$$

gilt. Nach der Dreiecksungleichung gilt im Dreieck ADC: $DC < AD + AC$ und im Dreieck DBC: $DC < DB + BC$. Durch Addition beider Ungleichungen erhält man mit $AD + DB = AB$:

$$2 \cdot DC < AD + AC + DB + BC \Rightarrow DC < \frac{1}{2}(AB + BC + AC)$$

Aufgabe 170734:
Gegeben sei ein gleichseitiges Dreieck ABC. Auf der Verlängerung von AB über B hinaus liege der Punkt D so, dass $BD = AB$ ist.
Beweise, dass dann $\angle DCA = 90°$ ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Nach Voraussetzung gilt $AB = BC = AC$ und damit $\angle ABC = \angle BCA = \angle CAB = 60°$.
Der Außenwinkel $\angle CBD$ des Dreiecks ABC beträgt somit nach dem Außenwinkelsatz 120°.
Wegen $BC = BD$ ist $\triangle BDC$ gleichschenklig mit der Spitze in B. Daher sowie wegen des Satzes über die Winkelsumme im Dreieck ist

$$\angle DCB = \angle BDC = \frac{1}{2}(180° - 120°) = 30°$$

Daraus folgt, dass

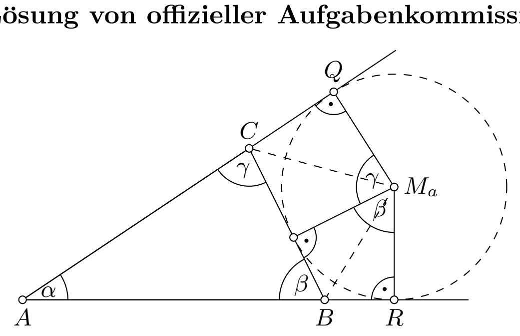
$$\angle DCA = \angle BCA + \angle DCB = 60° + 30° = 90°$$

Aufgabe 180732:
Definition: Berührt ein Kreis k eine Seite s eines Dreiecks D und Verlängerungen der beiden anderen Seiten von D, so heißt k „Ankreis des Dreiecks D (an die Seite s)“.

Aufgabe: Beweise folgenden Satz:
„Ist k Ankreis eines Dreiecks ABC an die Seite BC und ist M_a der Mittelpunkt von k, so hängt die Größe des Winkels $\angle BM_aC$ nur von der Größe α des Winkels $\angle CAB$ ab.“

Zum Beweis ermittle eine Formel für die Größe des Winkels $\angle BM_aC$ in Abhängigkeit von α!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Es seien β, γ die Größen von $\angle ABC$ bzw. $\angle BCA$. Die Berührungspunkte von k mit den Verlängerungen von AC bzw. AB seien Q bzw. R.
Dann gilt für die Nebenwinkel von $\angle ABC$ bzw. $\angle ACB$: $\angle CBR = 180° - \beta$ und $\angle BCQ = 180° - \gamma$.
Da M_a als Mittelpunkt eines Kreises, der beide Schenkel des Winkels $\angle CBR$ berührt, auf der Halbierenden dieses Winkels liegt, gilt: $\angle CBM_a = 90° - \frac{\beta}{2}$. Entsprechend gilt $\angle BCM_a = 90° - \frac{\gamma}{2}$.

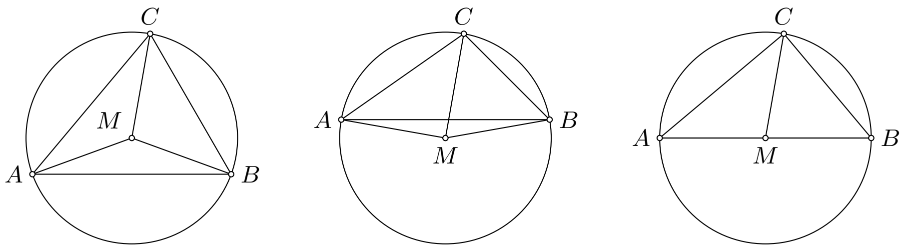
Daraus folgt nach dem Satz über die Summe der Innenwinkel, angewandt auf das Dreieck BM_aC:

$$\angle BM_aC = 180° - \left(90° - \frac{\beta}{2}\right) - \left(90° - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}$$

Nach dem gleichen Satz, angewandt auf das Dreieck ABC, gilt: $\beta + \gamma = 180° - \alpha$, also $\frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = 90° - \frac{\alpha}{2}$, woraus dann $\angle BM_aC = 90° - \frac{\alpha}{2}$ folgt.

Aufgabe 180735:
In einem Dreieck ABC sei u die Länge des Umfangs, und r sei die Länge des Umkreisradius.
Beweise, dass dann die Ungleichung $r > \frac{u}{6}$ gilt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Es sei M der Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks ABC. Wir unterscheiden nun die folgenden beiden Fälle:

(a) M liegt im Innern oder außerhalb des Dreiecks ABC;
(b) M liegt auf einer der drei Seiten des Dreiecks ABC.

Im Falle (a) sind ABM, BCM und ACM nichtentartete Dreiecke. Wegen $MA = MB = MC = r$ gilt daher nach der Dreiecksungleichung stets

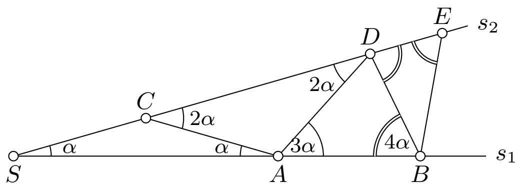
$$2r = MA + MB > AB \qquad (1)$$
$$2r = MA + MC > AC \qquad (2)$$
$$2r = MB + MC > BC \qquad (3)$$

Durch Addition erhält man daraus (4) $6r > AB + AC + BC = u$, also $r > \frac{u}{6}$ Im Falle (b) entartet genau eines der drei betrachteten Dreiecke zu einer Strecke; an die Stelle genau einer der drei Ungleichungen tritt daher die entsprechende Gleichung. Auch in diesem Falle erhält man aus dieser Gleichung und den beiden restlichen Ungleichungen durch Addition die Ungleichung (4). Da mit (a), (b) eine vollständige Fallunterscheidung getroffen wurde, ist damit der geforderte Beweis erbracht.

Aufgabe 200733:
Es sei S der Scheitel eines spitzen Winkels, dessen Schenkel mit s_1 und s_2 bezeichnet seien. Es werde vorausgesetzt, dass auf dem Strahl s_1 zwei voneinander und von S verschiedene Punkte A, B liegen und dass auf dem Strahl s_2 drei voneinander und von S verschiedene Punkte C, D, E liegen, wobei folgendes gilt:

Die Punkte S, A, B sind auf s_1 in dieser Reihenfolge angeordnet; die Punkte S, C, D, E sind auf s_2 in dieser Reihenfolge angeordnet; es ist $SC = CA = AD = DB = BE$ und $SB = SE$.
Ermittle aus diesen Voraussetzungen die Größe α des Winkels $\angle BSE$!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



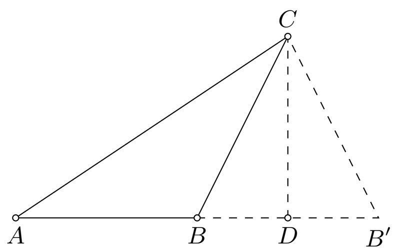
Aus den Voraussetzungen folgt
$\angle CAS = \angle ASC = \alpha$ da $\triangle ACS$ gleichschenklig mit $AC = CS$ ist,
$\angle ACD = \angle CAS + \angle ASC = 2\alpha$ Außenwinkel des Dreiecks ACS,
$\angle ADC = \angle ACD = 2\alpha$ da $\triangle ACD$ gleichschenklig mit $AC = AD$ ist,
$\angle BAD = \angle ADC + \angle ASC = 3\alpha$ Außenwinkel des Dreiecks ADS,
$\angle ABD = \angle DAB = 3\alpha$ da $\triangle ABD$ gleichschenklig mit $AD = BD$ ist,
$\angle BDE = \angle ABD + \angle ASC = 4\alpha$ Außenwinkel des Dreiecks BDS,
$\angle BED = \angle BDE = 4\alpha$ da $\triangle BDE$ gleichschenklig mit $BD = BE$ ist,
$\angle EBS = \angle BED = 4\alpha$ da $\triangle BES$ gleichschenklig mit $BS = ES$ ist,
sowie aus der Winkelsumme im Dreieck BES:

$$\alpha + 4\alpha + 4\alpha = \angle BSE + \angle BED + \angle EBS = 180° \qquad \text{und damit} \quad \alpha = 20°$$

Aufgabe 230736:
Von einem Dreieck ABC wird folgendes vorausgesetzt:
Der Innenwinkel $\angle ABC$ ist größer als 90°.
Ist D der Fußpunkt des von C auf die Gerade durch A und B gefällten Lotes, so gilt $2 \cdot BD = AB = BC$.

Beweise, dass durch diese Voraussetzungen die Größen der Innenwinkel des Dreiecks ABC eindeutig bestimmt sind! Ermittle diese Winkelgrößen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Die Größe des Winkels $\angle BAC$ sei mit α bezeichnet. Wegen $AB = BC$ gilt $\angle ACB = \angle BAC = \alpha$, nach dem Außenwinkelsatz hat also der Nebenwinkel des Winkels $\angle ABC$ die Größe 2α.
Da $\angle ABC > 90°$ ist, also der Lotfußpunkt D auf der Verlängerung von AB liegt, ist somit $\angle DBC = 2\alpha$ gezeigt.

Wenn nun B bei der Spiegelung an der Geraden durch C und D den Bildpunkt B' hat, so ist $BB' = 2BD = BC = B'C$, also ist das Dreieck $BB'C$ gleichseitig und daher $2\alpha = \angle DBC = \angle B'BC = 60°$.
Damit ist der verlangte Beweis geführt, und die gesuchten Winkelgrößen sind ermittelt.

Aufgabe 240734:
Beweise folgenden Satz!
Wenn in einem Dreieck a und b die Längen zweier Seiten sowie h_a und h_b die Längen der zugehörigen Höhen sind, dann gilt $a : b = h_b : h_a$.

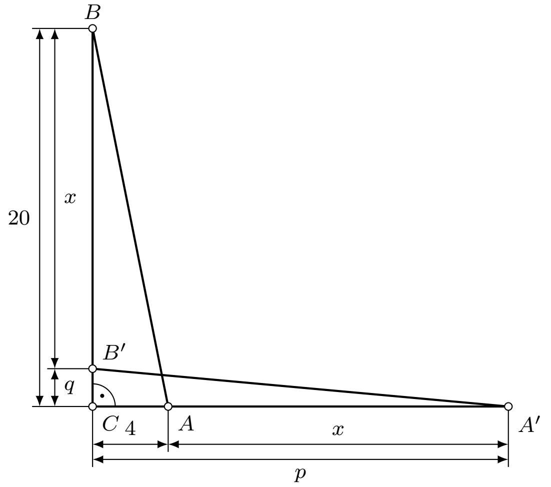
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Für jedes Dreieck gilt mit den genannten Bezeichnungen, dass der Flächeninhalt F des Dreiecks sowohl die Gleichung $F = \frac{1}{2}a \cdot h_a$ als auch die Gleichung $F = \frac{1}{2}b \cdot h_b$ erfüllt. Daher gilt $a \cdot h_a = b \cdot h_b$, also $a : b = h_b : h_a$.

Aufgabe 250732:
Es sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck mit C als Scheitel des rechten Winkels und mit $CA = 4$ cm, $CB = 20$ cm.
Von einer natürlichen Zahl x wird gefordert, dass sie die folgenden Bedingungen (1) und (2) erfüllt:

a) Die Strecke CB kann um x cm verkürzt werden; d. h. zwischen C und B liegt ein Punkt B' mit $CB' = CB - x$ cm.
b) Wenn zugleich die Strecke CA über A hinaus um x cm bis zu einem Punkt A' verlängert wird, dann beträgt der Flächeninhalt des Dreiecks $A'B'C$ genau 55% des Flächeninhalts des Dreiecks ABC.

Untersuche, ob es genau eine natürliche Zahl x gibt, die die Bedingungen (1) und (2) erfüllt! Wenn das der Fall ist, so ermittle diese Zahl!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Im Dreieck ABC ist wegen $CA \perp CB$ die eine dieser beiden Seiten gleichzeitig die zur anderen zugehörige Höhe. Also hat das Dreieck ABC den Flächeninhalt

$$J = \frac{1}{2} \cdot CA \cdot CB = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 20cm^2 = 40cm^2 \qquad (3)$$

Ist $A'B'C$ ein Dreieck wie in (1), (2) beschrieben, so ist es ebenfalls bei C rechtwinklig und hat daher den Flächeninhalt

$$J' = \frac{1}{2} \cdot CA' \cdot CB' \qquad (4)$$

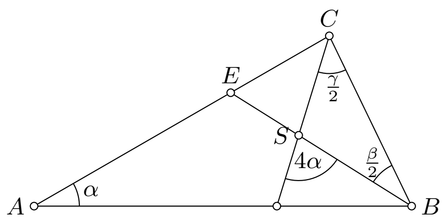
weiterhin gilt für $CA' = p$ cm und $CB' = q$ cm, dass p und q natürliche Zahlen mit $p = 4 + x$, $q = 20 - x$ (5) sind.
Dabei ist aus (3), (4) ersichtlich, dass die Bedingungen (1) und (2) genau dann erfüllt werden, wenn außer (5) auch

$$J' = \frac{55}{100}J \qquad \text{d. h.} \qquad p \cdot q = 44$$

gilt. Die einzigen Zerlegungen von 44 in ein Produkt zweier natürlicher Zahlen sind aber $44 = 1 \cdot 44 = 2 \cdot 22 = 4 \cdot 11$.
Aus (5) folgt nun $p + q = 24$ und $p > 4$, so dass für (5) nur die Möglichkeit $p = 22$, $q = 2$ und damit, nochmals nach (5), $x = 18$ verbleibt.
Da hiermit in der Tat (5) und (6) gelten, ist bewiesen:
Es gibt genau eine natürliche Zahl x, die (1) und (2) erfüllt, nämlich $x = 18$.

Aufgabe 270735:
In einem Dreieck ABC seien CD und BE die Winkelhalbierenden von $\angle ACB$ bzw. $\angle ABC$. Der Schnittpunkt dieser Strecken CD, BE sei S. Wie üblich bezeichne α die Größe des Winkels $\angle BAC$.
Vorausgesetzt werde nun, dass der Winkel $\angle BSD$ die Größe 4α hat.
Weise nach, dass durch diese Voraussetzung die Winkelgröße α eindeutig bestimmt ist, und ermittle α!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



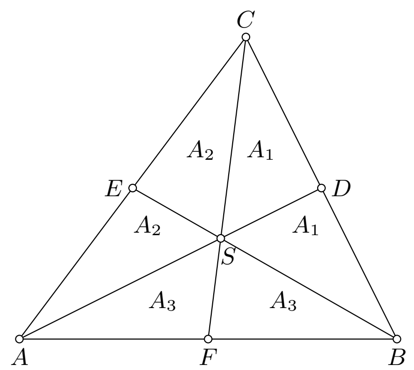
Mit den Bezeichnungen $\angle ABC = \beta$, $\angle ACB = \gamma$ folgt aus dem Außenwinkelsatz für Dreieck BCS und aus der Voraussetzung

$$4\alpha = \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} \qquad , \qquad 8\alpha = \beta + \gamma$$

Ferner ist nach dem Innenwinkelsatz für Dreieck ABC $\beta + \gamma = 180° - \alpha$. Somit folgt $8\alpha = 180° - \alpha$, $9\alpha = 180°$; damit ergibt sich, dass durch die Voraussetzung eindeutig bestimmt ist: $\alpha = 20°$.

Aufgabe 270736:
In einem Dreieck ABC seien AD, BE und CF die drei Seitenhalbierenden. Sie gehen bekanntlich durch einen gemeinsamen Punkt S.
Beweise, dass für jedes Dreieck mit diesen Bezeichnungen die Aussage gilt:
Alle sechs Dreiecke BDS, DCS, CES, EAS, AFS, FBS haben denselben Flächeninhalt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



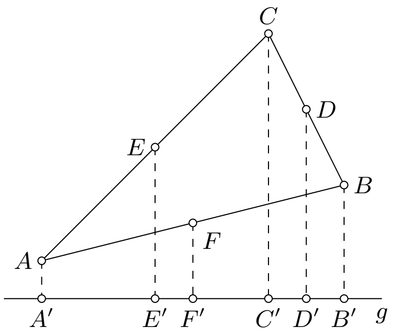
Wegen $BD = DC$ und der gemeinsamen zu diesen Seiten gehörenden Höhe haben die Dreiecke BDS und DCS einander gleichen Flächeninhalt; dieser sei mit A_1 bezeichnet.
Ebenso haben CES und EAS einander gleichen Flächeninhalt A_2 sowie AFS und FBS einander gleichen Flächeninhalt A_3.

Wegen $AF = FB$ und der gemeinsamen zu diesen Seiten gehörenden Höhe haben die Dreiecke AFC und FBC einander gleichen Flächeninhalt, also gilt $A_3 + 2A_2 = A_3 + 2A_1$. Daraus folgt $A_1 = A_2$. Ebenso ergibt sich $A_1 = A_3$.
Damit ist der verlangte Beweis geführt.

Aufgabe 280735:
Beweise, dass für jedes Dreieck ABC folgende Aussage gilt:
Wenn D, E, F in dieser Reihenfolge die Mittelpunkte der Seiten BC, CA, AB sind und wenn A', B', C', D', E', F' die Fußpunkte der Lote von A, B, C, D, E, F auf eine Gerade g sind, die ganz außerhalb des Dreiecks ABC verläuft und auf keiner der verlängerten Seiten BC, CA, AB senkrecht steht, dann gilt stets

$$AA' + BB' + CC' = DD' + EE' + FF'$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

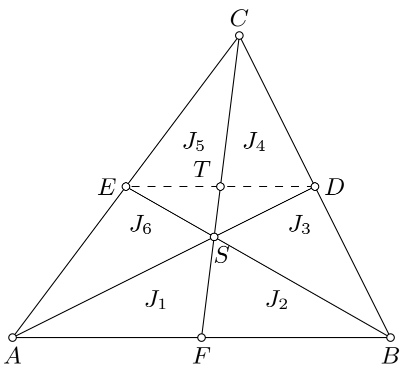


Nach Voraussetzung sind BB', CC' und DD' senkrecht zu g, also zueinander parallel, und D ist der Mittelpunkt von BC. Da die Gerade durch B und C auf g nicht senkrecht steht, ist die Gerade, in der das Lot BB' liegt, auch verschieden von der Geraden, in der CC' liegt.
Also ist $B'BCC'$ ein Trapez, und DD' ist seine Mittellinie.
Nach dem Satz über die Länge der Mittellinie gilt folglich $DD' = \frac{1}{2}(BB' + CC')$. Entsprechend erhält man auch
$EE' = \frac{1}{2}(CC' + AA')$, $FF' = \frac{1}{2}(AA' + BB')$.
Durch (Ausmultiplizieren der Klammern und) Addieren dieser drei Gleichungen erhält man die Behauptung

$$DD' + EE' + FF' = AA' + BB' + CC'$$

Aufgabe 310735:
Ist ABC ein beliebiges Dreieck, so sei S der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden AD und BE, ferner bezeichne F_1 den Flächeninhalt des Dreiecks ABC und F_2 den Flächeninhalt des (nicht konvexen) Fünfecks $ABDSE$.
Ermittle für jedes Dreieck ABC das Verhältnis $F_1 : F_2$ dieser beiden Flächeninhalte!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



In jedem Dreieck ABC haben die drei Seitenhalbierenden AD, BE und CF einen gemeinsamen Schnittpunkt S. Die Flächeninhalte der Dreiecke AFS, FBS, BDS, DCS, CES und EAS seien J_1, J_2, J_3, J_4, J_5 bzw. J_6.
Wegen $AF = FB$ und der gemeinsamen Ecke S von AFS, FBS gilt $J_1 = J_2$. Entsprechend folgt, dass $J_3 = J_4$ und $J_5 = J_6$ gelten.

Wegen $AF = FB$ und der gemeinsamen Ecke C von AFC, FBC gilt

$$J_1 + J_6 + J_5 = J_2 + J_3 + J_4$$

Hieraus und aus den vorangehenden Gleichungen folgt

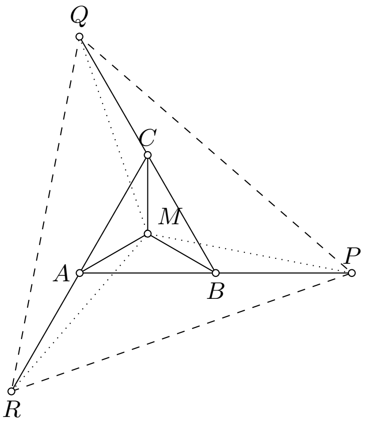
$$J1 + 2 \cdot J_6 = J_1 + 2 \cdot J_3$$

und daraus $J_6 = J_3$. Entsprechend folgt (z. B.) $J_2 = J_5$. Also gilt insgesamt $J1 = J2 = J3 = J4 = J5 = J6$, d. h.

$$F_1 : F_2 = (6J_1) : (4J_1) = 3 : 2$$

Aufgabe 320733:
Es sei ABC ein gleichseitiges Dreieck, sein Umkreismittelpunkt sei M. Auf der Verlängerung von AB über B hinaus liege ein Punkt P derart, dass $BP = 2$ cm gilt. Auf der Verlängerung von BC über C hinaus liege ein Punkt Q mit $CQ = 2$ cm, und auf der Verlängerung von CA über A hinaus liege ein Punkt R mit $AR = 2$ cm.
Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen, unabhängig von der Seitenlänge des Dreiecks ABC, stets die beiden folgenden Aussagen a) und b) gelten!
a) Das Dreieck PQR ist gleichseitig.
b) Es ist $MP = MQ = MR$.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



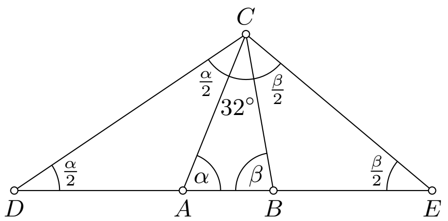
a) Aus der Lage von P, Q, R auf den genannten Verlängerungen und aus den Voraussetzungen $AB = BC = CA$, (1) $BP = CQ = AR$ (2) folgt auch $AP = BQ = CR$. (3)
Die Innenwinkel im gleichseitigen Dreieck ABC betragen 60°, für ihre Nebenwinkel gilt daher $\angle PAR = \angle QBP = \angle RCQ = 120°$. (4)
Aus (2), (3), (4) folgt nach dem Kongruenzsatz sws $\triangle APR = \triangle BQP = \triangle CRQ$ und damit $RP = PQ = QR$.

b) Im gleichseitigen Dreieck ABC ist der Umkreismittelpunkt M zugleich Inkreismittelpunkt, d. h., AM, BM und CM halbieren die Innenwinkel des Dreiecks, also gilt $\angle MAP = \angle MBQ = \angle MCR = 30°$.

Daraus und aus (4) ergibt sich $\angle MAR = \angle MBP = \angle MCQ = 150°$. (5)
Aus (2),(5) und $MA = MB = MC$ (Radien des Umkreises) folgt nach dem Kongruenzsatz sws $\triangle MAR = \triangle MBP = \triangle MCQ$ und damit die Behauptung $MR = MP = MQ$.

Aufgabe 320735:
Es sei ABC ein Dreieck, in dem der Innenwinkel $\angle ACB$ die Größe 32° hat. Auf der Verlängerung von BA über A hinaus liege ein Punkt D derart, dass $AD = AC$ gilt; auf der Verlängerung von AB über B hinaus liege ein Punkt E derart, dass $BE = BC$ gilt.
Beweise, dass durch diese Voraussetzungen, unabhängig von den sonstigen Eigenschaften des Dreiecks ABC, die Größe des Winkels $\angle DCE$ eindeutig bestimmt ist; ermittle diese Winkelgröße!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



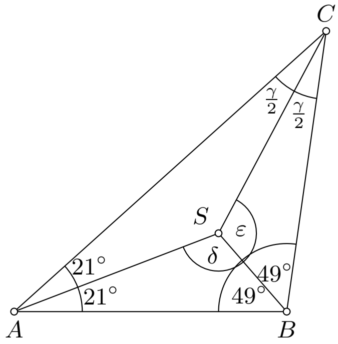
Im Dreieck ABC seien α bzw. β die Größen der Innenwinkel bei A bzw. B. Das Dreieck ACD ist mit $AD = AC$ gleichschenklig, nach dem Basiswinkelsatz und dem Außenwinkelsatz gilt daher $\angle ACD = \angle ADC = \frac{\alpha}{2}$. Ebenso folgt $\angle BCE = \angle BEC = \frac{\beta}{2}$. Folglich ist

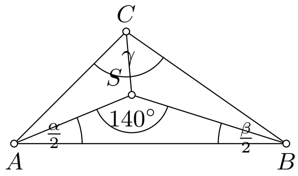
$$\angle DCE = \angle ACB + \angle ACD + \angle BCE = 32° + \frac{\alpha + \beta}{2}$$

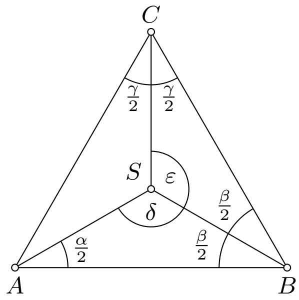
Nach dem Innenwinkelsatz für Dreieck ABC ist aber $\alpha + \beta = 180° - 32° = 148°$. Damit ist gezeigt, dass durch die Voraussetzungen die Winkelgröße $\angle DCE = 32° + \frac{148°}{2} = 32° + 74° = 106°$ eindeutig bestimmt ist.

Aufgabe 330733:
Für jedes Dreieck ABC bezeichne S den Schnittpunkt der Winkelhalbierenden. Ferner seien wie üblich mit α, β bzw. γ die Größen der Innenwinkel $\angle BAC$, $\angle CBA$ bzw. $\angle ACB$ bezeichnet.
a) Wie groß sind die Winkel $\angle ASB$ und $\angle BSC$ in einem Dreieck ABC, in dem $\alpha = 42°$ und $\beta = 98°$ gilt?
b) Ermittle γ in jedem Dreieck ABC, in dem $\angle ASB$ die Größe 140° hat!
c) Beweise, dass jedes Dreieck ABC, in dem $\angle ASB$ und $\angle BSC$ einander gleich groß sind, gleichschenklig ist! Gib auch an, welche zwei Dreiecksseiten in jedem solchen Dreieck einander gleich lang sind!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

a) 

b) 

c) 

Mit den Bezeichnungen $\delta = \angle ASB$, $\rho = \angle BSC$ gilt:

a) Wegen $\frac{\alpha}{2} = 21°$, $\frac{\beta}{2} = 49°$ und nach dem Innenwinkelsatz für das Dreieck ABS ist $21° + 49° + \delta = 180°$, also $\delta = 110°$.
Nach dem Innenwinkelsatz für Dreieck ABC ist $42° + 98° + \gamma = 180°$, also $\gamma = 40°$; wegen $\frac{\beta}{2} = 49°$, $\frac{\gamma}{2} = 20°$ und nach dem Innenwinkelsatz für das Dreieck BCS ist $49° + 20° + \varepsilon = 180°$, also $\varepsilon = 111°$.

b) Nach dem Innenwinkelsatz für Dreieck ABS ist

$$\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + 140° = 180°$$

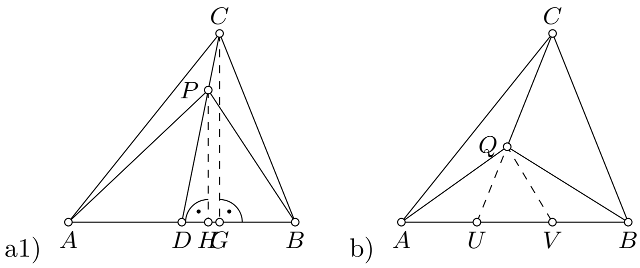
also $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 40°$, $\alpha + \beta = 80°$.
Nach dem Innenwinkelsatz für Dreieck ABC folgt damit weiter $\gamma = 180° - (\alpha + \beta) = 100°$.

c) Nach dem Innenwinkelsatz für die Dreiecke ABS und BCS gilt $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \delta = 180°$ und $\frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} + \varepsilon = 180°$.
Wegen der Voraussetzung $\delta = \varepsilon$ folgt daher $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}$, also $\alpha = \gamma$.
Nach der Umkehrung des Basiswinkelsatzes ist folglich das Dreieck ABC gleichschenklig mit $AB = BC$.

Aufgabe 330736:
a) Zeichne ein Dreieck ABC und den Mittelpunkt D der Seite AB! Wähle auf der Strecke DC einen Punkt P zwischen D und C! Zeichne dann die Strecken AP und BP!
Untersuche für jedes Dreieck ABC (mit D als Mittelpunkt der Seite AB) und für jeden (auf DC gelegenen) Punkt P, ob eines der beiden Dreiecke ACP, BCP größeren Flächeninhalt hat als das andere oder ob sie einander gleichgroßen Flächeninhalt haben!

b) Für jedes Dreieck ABC gibt es in seinem Inneren genau einen Punkt Q, mit dem die Bedingung erfüllt wird, dass die Flächeninhalte der Dreiecke ACQ, BCQ und ABQ sich wie $1 : 2 : 3$ verhalten. (Dies darf im folgenden ohne Beweis verwendet werden.)
Beschreibe, wie zu jedem Dreieck ABC ein Punkt Q gefunden werden kann, und beweise, dass die genannte Bedingung stets mit diesem - nach deiner Beschreibung gefundenen - Punkt Q erfüllt wird!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Für jedes Dreieck ABC mit D als Mittelpunkt der Seite AB und für jeden auf DC gelegenen Punkt P gilt:
Die Dreiecke ACD und BCD haben senkrecht zu AD bzw. BD dieselbe Höhe, nämlich das Lot CG von C auf AB. Wegen $AD = BD$ haben sie also einander gleichgroßen Flächeninhalt. Ebenso haben ADP und BDP wegen gleicher Höhe PH und $AD = BD$ einander gleichgroßen Flächeninhalt.
Durch Subtraktion ergibt sich somit: Die beiden Dreiecke ACP, BCP haben einander gleichgroßen Flächeninhalt.



b) Man teilt die Strecke AB durch zwei Punkte U, V in drei gleichlange Strecken AU, UV, VB. Dann wählt man Q als den Mittelpunkt der Strecke CU.
Hiernach haben die drei Dreiecke AUQ, UVQ, VBQ das Lot von Q auf AB als gemeinsame Höhe auf AU, UV bzw. VB und daher wegen $AU = UV = VB$ einander gleichgroßen Flächeninhalt.
Wird dieser mit J bezeichnet, so hat also das Dreieck ABQ den Flächeninhalt $3J$.

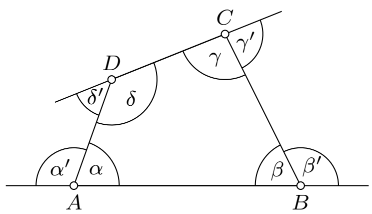
Ferner haben die Dreiecke AUQ und ACQ das Lot von A auf CU als gemeinsame Höhe auf UQ bzw. CQ und daher wegen $UQ = CQ$ einander gleichgroßen Flächeninhalt; d. h., das Dreieck ACQ hat ebenfalls den Flächeninhalt J.
Entsprechend haben die Dreiecke BUQ und BCQ einander gleichgroßen Flächeninhalt; d. h., das Dreieck BCQ hat den Flächeninhalt $2J$. Wird also der Punkt Q nach der gegebenen Beschreibung gefunden, so erfüllt er die Bedingung, dass die Flächeninhalte der Dreiecke ACQ, BCQ, ABQ sich wie $1 : 2 : 3$ verhalten.

II.II Vier-, Vielecke

I Runde 1

Aufgabe V10716:
Zeichne ein beliebiges Viereck und an jeder seiner Ecken einen Außenwinkel. Weise - ohne zu messen - nach, wie groß die Summe dieser 4 Außenwinkel stets ist!

Lösung von Steffen Polster:



Die Summe der vier Innenwinkel $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ und der vier Außenwinkel $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ beträgt 720°, da vier gestreckte Winkel addiert werden.

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \alpha' + \beta' + \gamma' + \delta' = 720°$$

Da die Innenwinkelsumme im Viereck gleich 360° beträgt, ergibt sich

$$\alpha' + \beta' + \gamma' + \delta' = 720° - \alpha - \beta - \gamma - \delta = 720° - 360° = 360°$$

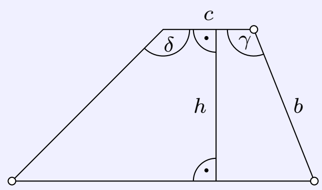
Die Summe der vier Außenwinkel des Vierecks beträgt 360°.

Aufgabe 020711:
In Berlin werden beim Aufbau des Stadtzentrums die neuen Wohnhäuser in der Karl-Marx-Allee mit Fliesen verkleidet. Eine Fliese hat folgende Abmessungen: Länge l = 29,5 cm, Breite b = 12,0 cm.

a) Berechne die Fläche einer Fliese!
b) Wie viel Fliesen benötigt man für eine Fläche von 10,62 m Breite und 11,16 m Länge? Die Fliesen dürfen dabei nicht zerteilt werden. Die Fugen bleiben unberücksichtigt.

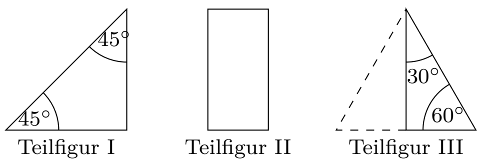
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Die Fläche einer Fliese ist $b \cdot l = 29{,}5 \text{ cm} \cdot 12{,}0 \text{ cm} = 354 \text{ cm}^2$.
b) Damit man die Fliesen nicht zu zerteilen braucht, muss man die Fliesen der Länge nach aneinander legen, um die Breite der Wand aufzufüllen. Dann benötigt man $93 \cdot 36 = 3348$ Fliesen.

Aufgabe 020712:



Gabriele hat im Unterrichtstag in der sozialistischen Produktion das abgebildete Werkstück hergestellt. Rolf will feststellen, ob sie in der Lage ist, mit Hilfe der von ihm ermittelten Maße, die auf der Abbildung sichtbare Fläche zu berechnen.
Wie groß ist die Fläche?
b = 60 mm , c = 34 mm , h = 52 mm , $\gamma = 120°$, $\delta = 135°$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



$$F_I = \frac{52 \text{ mm} \cdot 52 \text{ mm}}{2} = 1352 \text{ mm}^2$$
$$F_{II} = 34 \text{ mm} \cdot 52 \text{ mm} = 1768 \text{ mm}^2$$
$$F_{III} = \frac{30 \text{ mm} \cdot 52 \text{ mm}}{2} = 780 \text{ mm}^2$$
$$F = F_I + F_{II} + F_{III} = 3900 \text{ mm}^2$$

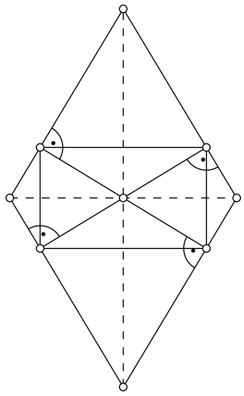
Aufgabe 030711:
Ein rechteckiges Kartoffelfeld ist 250 m breit und 315 m lang. Der Reihenabstand in der Breite beträgt 62,5 cm. Auf beiden Seiten bleibt ein halber Reihenabstand frei. Der Staudenabstand in der Länge ist 35 cm.
Auch hier bleibt beiderseits ein halber Staudenabstand frei. Um den Gesamtertrag des Feldes annähernd zu ermitteln, wird eine Diagonalprobe entnommen, d. h., es werden 100 von den auf einer Diagonalen liegenden Stauden gerodet. Dabei erbrachten diese Stauden 65,4 kg Kartoffeln.
Wie hoch ist voraussichtlich der Gesamtertrag?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es gibt 400 Reihen zu je 900 Stauden. Die 360000 Stauden ergeben einen voraussichtlichen Gesamtertrag von 235 t Kartoffeln.

Aufgabe 030714:
Von dem Mittelpunkt eines Rhombus werden die Lote auf die Seiten gefällt.
a) Beweise, dass die Fußpunkte der Lote auf den Ecken eines Rechtecks liegen!
b) In welchem Fall liegen sie auf den Ecken eines Quadrats? (Begründung!)

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Beweis:

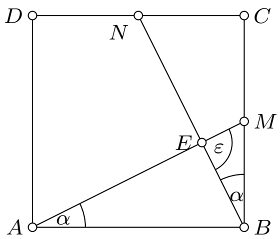
Im Rhombus stehen die Diagonalen senkrecht aufeinander und halbieren einander. Außerdem sind alle Seiten gleich lang. Demzufolge sind die vier Dreiecke, in die ein Rhombus durch seine Diagonalen geteilt wird, kongruent. Daraus folgt, dass die vier Lote, die gleichzeitig die Höhe je eines der vier Dreiecke sind, gleich lang sind.
Weiterhin liegen je zwei Lote auf einer Geraden. Damit sind die Diagonalen des Lotfußpunktvierecks gleich lang und halbieren einander; es ist also ein Rechteck.



b) Wenn der Rhombus selbst ein Quadrat ist, bilden je zwei benachbarte Lote rechte Winkel. Ein Rechteck, in dem die Diagonalen senkrecht aufeinander stehen, ist ein Quadrat.

Aufgabe 040715:
In einem Quadrat $ABCD$ sind M und N die Mitten der Seiten BC bzw. CD.
Es ist zu beweisen, dass die Strecken AM und BN aufeinander senkrecht stehen.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

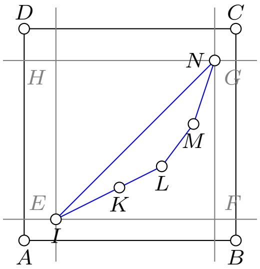


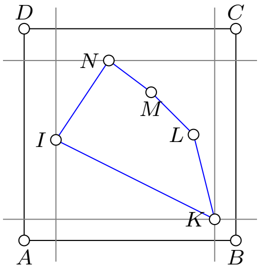
Die Dreiecke ABM und BNC sind kongruent (SWS). Daraus folgt:

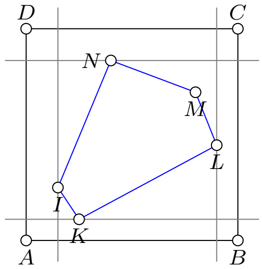
$$\varepsilon = 180° - \alpha - (90° - \alpha) = 90°$$

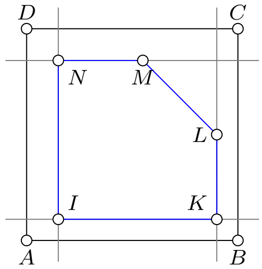
Aufgabe 050712:
Innerhalb eines Quadrats liegt ein konvexes Fünfeck.
Es ist zu beweisen, dass der Umfang eines derartigen Fünfecks stets kleiner ist als der Umfang des Quadrats.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:









$ABCD$ sei das gegebene Quadrat, $IKLMN$ das gegebene Fünfeck (siehe Abbildungen).
Man verschiebt die Gerade durch AB parallel, bis sie zum ersten Mal durch einen Punkt des Fünfecks verläuft, aber nicht ins Innere des Fünfecks eintritt. Entsprechend verfährt man mit den Geraden durch BC, CD und AD.
Die vier so erhaltenen Geraden schneiden einander in den Punkten E, F, G und H, die Eckpunkte eines Rechtecks sind, das ganz im Innern von $ABCD$ liegt und daher einen kleineren Umfang als das Quadrat hat (jede Rechteckseite ist kürzer als die Quadratseite).
Von den Eckpunkten des Fünfecks liegen nun mindestens zwei auf dem Rande des Rechtecks. Man errichtet über jeder Fünfeckseite, die nicht auf dem Rande des Rechtecks liegt, je ein rechtwinkliges Dreieck mit folgenden Eigenschaften:

a) Die Fünfeckseite ist Hypotenuse,
b) die Katheten liegen parallel zu den Rechteckseiten (bzw. liegen auf den Rechteckseiten),
c) die Dreiecksfläche liegt außerhalb des Fünfecks.

Da das Fünfeck konvex ist, ist die Konstruktion derartiger Dreiecke stets möglich. Je zwei so konstruierte rechtwinklige Dreiecke haben dabei höchstens einen Eckpunkt gemeinsam. Die Summe der Längen aller Katheten dieser Dreiecke und der auf dem Rande des Rechtecks liegenden Fünfeckseiten ist, wie man leicht einsieht, gleich dem Umfang des Rechtecks $EFGH$ (siehe Abbildung).

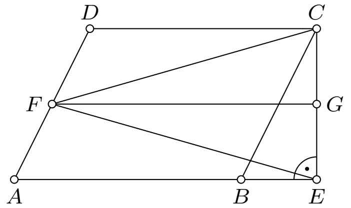
Da höchstens vier Seiten des Fünfecks $IKLMN$ auf dem Rande des Rechtecks $EFGH$ liegen können, lässt sich stets mindestens ein solches rechtwinkliges Dreieck konstruieren. Nach der Dreiecksungleichung ist aber die Länge seiner Hypotenuse kleiner als die Summe der Längen seiner Katheten.
Mithin ist der Umfang des Fünfecks $IKLMN$ kleiner als der des Rechtecks $EFGH$, und damit erst recht kleiner als der Umfang des Quadrats $ABCD$.

Aufgabe 070712:
Untersuche, ob man ein konvexes Sechseck zeichnen kann, bei dem genau vier Innenwinkel spitz sind!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Das ist nicht möglich.
Beweis: Angenommen, vier Innenwinkel wären spitz, dann wäre deren Summe kleiner als 360° und - da die Winkelsumme im Sechseck 720° beträgt - die Summe der beiden übrigen größer als 360°. Das ist aber unmöglich, weil in jedem konvexen Vieleck jeder Innenwinkel kleiner als 180° ist.

Aufgabe 070714:
In einem Parallelogramm $ABCD$ sei $\angle DAB$ ein spitzer Winkel. Vom Punkt C wird das Lot auf die Gerade g_{AB} gefällt, sein Fußpunkt sei E. Man verbinde E mit dem Mittelpunkt F der Seite AD. Beweise: Der Winkel $\angle EFD$ ist doppelt so groß wie der Winkel $\angle BEF$!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Voraussetzung: Es gilt $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$, $\angle BEC$ ist ein rechter Winkel; $AF = FD$.

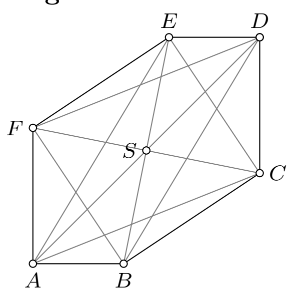
Behauptung: Der Winkel $\angle EFC$ ist doppelt so groß wie $\angle BEF$.

Beweis: Da der Winkel $\angle DAB$ spitz ist, fällt Punkt E weder mit A noch mit B zusammen. Die Parallele zu AB durch F halbiert das Lot CE im Punkt G und steht senkrecht auf CE, d. h. F liegt auf der Mittelsenkrechten der Punkte C und E.
Dann ist das Dreieck $\triangle EFC$ gleichschenklig mit $EF = FC$, und FG ist Winkelhalbierende in diesem Dreieck. Es ist also $\angle EFC$ doppelt so groß wie $\angle EFG$.

Nun gilt $\angle BEF = \angle EFG$ als Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen. Daraus folgt, dass $\angle EFC$ auch doppelt so groß wie $\angle BEF$ ist.

Aufgabe 080713:
Gegeben sei ein konvexes Sechseck, bei dem je zwei gegenüberliegende Seiten parallel verlaufen und gleich lang sind.
Zeichne alle Diagonalen ein, und beweise, dass es einen von den Eckpunkten des Sechsecks verschiedenen Punkt gibt, in dem sich genau drei Diagonalen schneiden!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

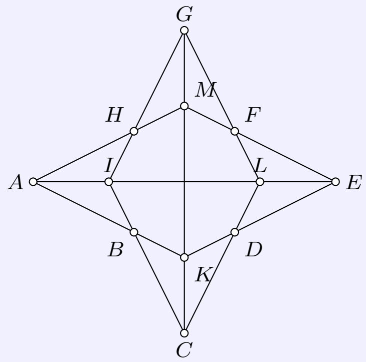


Wir verwenden den Satz: Die Diagonalen im Parallelogramm halbieren einander.

Die Strecken BE und AD sind Diagonalen im Parallelogramm $ABDE$ und schneiden sich in S. Punkt S ist Mittelpunkt der Diagonalen BE und AD.
Im Parallelogramm $ACDF$ ist AD ebenfalls Diagonale, und S ist ebenfalls Mittelpunkt der Diagonalen AD und CF. Also ist Punkt S Mittelpunkt der drei Diagonalen AD, BE und CF und damit gemeinsamer Punkt dieser Diagonalen.

Die übrigen Diagonalen gehen nicht durch S, da jede von ihnen in einem der Parallelogramme $ABDE$, $ACDF$, $BCEF$ Seite ist, während S in jedem dieser Parallelogramme Mittelpunkt ist. Also gehen genau drei Diagonalen durch S.

Aufgabe 080714:



Die in der Abbildung dargestellte Sternfigur wird durch zwei kongruente Rhomben mit ihren Diagonalen gebildet. Die Diagonalenlängen sollen im Verhältnis 2 : 1 stehen, so dass die Strecken AE und CG durch die Punkte I, S, L bzw. M, S, K in je vier gleiche Abschnitte geteilt werden.
Vergleiche den Flächeninhalt des Achtecks $ABCDEFGH$ mit dem des Achtecks $IBKDLFMH$!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Dreiecke $\triangle SMF$ und $\triangle MGF$ sind flächengleich (gleich lange Grundlinie und gleich lange Höhe). Das gilt auch für die Dreiecke $\triangle SLF$ und $\triangle LEF$, für $\triangle SLD$ und $\triangle LED$ usw.
Daraus folgt, dass der Flächeninhalt des Achtecks $ABCDEFGH$ doppelt so groß ist wie der des Achtecks $IBKDLFMH$.

Aufgabe 100714:
$ABCD$ sei in der üblichen Bezeichnungsweise ein Rechteck, und es gelte $AB \geq BC$. A_1 sei der Fußpunkt des Lotes von A auf die Diagonale DB. A_2 sei der Schnittpunkt der Halbierenden des Winkels $\angle DAB$ mit DB, C_2 sei der Schnittpunkt der Halbierenden des Winkels $\angle BCD$ mit DB, und C_1 sei der Fußpunkt des Lotes von C auf DB.

Man beweise, dass unter diesen Bedingungen $\angle A_1AA_2 \cong \angle A_2AC \cong \angle ACC_2 \cong \angle C_2CC_1$ gilt.
Dabei sind folgende Fälle zu betrachten: a) $AB = BC$, b) $AB > BC$.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es sei M der Diagonalenschnittpunkt des Rechtecks $ABCD$. Ferner sei $\angle ABD = \alpha$, $\angle ADB = \beta$ gesetzt.

a) Im Fall $AB = BC$ ist $ABCD$ ein Quadrat. Also stehen die Diagonalen AC und BD aufeinander senkrecht; ferner halbiert die Diagonale AC den Winkel $\angle DAB$ und den Winkel $\angle BCD$. Daraus folgt $A_1 = A_2 = M = C_2 = C_1$, also haben alle vier in der Behauptung genannten Winkel die Größe 0°.

b) Im Fall $AB > BC$ erhält man zunächst aus
(1) $\triangle BAD = \triangle ABC = \triangle DCB = \triangle CDA$ (s,w,s) die Gleichungen
(2) $\alpha = \angle ABD = \angle BAC = \angle CDB = \angle DCA$
(3) $\beta = \angle ADB = \angle BCA = \angle CBD = \angle DAC$.
Weiter gilt
(4) $\alpha + \beta = 90°$, da die in (1) genannten Dreiecke (bei A bzw. B bzw. C bzw. D) rechtwinklig sind.

Ferner ist in jedem dieser Dreiecke diejenige Seite, die einem der in (2) auftretenden Winkel gegenüberliegt, kleiner als diejenige Seite, die einem der in (3) auftretenden Winkel gegenüberliegt; also gilt
(5) $\alpha < \beta$.
Aus (4) und (5) folgt $2\alpha < \alpha + \beta = 90°$, also
(6) $\alpha < 45°$.

Da auch die Dreiecke $\triangle AA_1D$ und $\triangle CC_1B$ bei A_1 bzw. C_1 rechtwinklig sind, folgt aus (3) und (4)
(7) $\angle DAA_1 = \angle BCC_1 = \alpha$
Nach (7), (2) und der Definition von A_2 und C_2 folgt nun $\angle A_1AA_2 = 45° - \alpha$ und $\angle A_2AC = 45° - \alpha$.

Analog gilt $\angle ACC_2 = 45° - \alpha$ und $\angle C_2CC_1 = 45° - \alpha$ und demzufolge

$$\angle A_1AA_2 \cong \angle A_2AC \cong \angle ACC_2 \cong \angle C_2CC_1$$

Aufgabe 120713:
Beweise den folgenden Satz:
Stehen in einem gleichschenkligen Trapez $ABCD$ ($AB \parallel CD$) ($AD = BC$) die Diagonalen AC und BD senkrecht aufeinander, dann ist die Länge der Mittellinie dieses Trapezes gleich der Länge seiner Höhe!

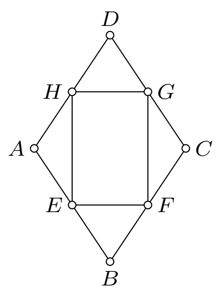
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
In dem Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ sei E der Schnittpunkt von AC mit BD. Ferner sei F der Fußpunkt des von E auf AB und G der Fußpunkt des von E auf CD gefällten Lotes. Dann ist FG eine Höhe des Trapezes.

Wegen $AB = AB$, $\angle BAD = \angle ABC$, $AD = BC$ gilt $\triangle ABD = \triangle ABC$ (sws) also $\angle BAC = \angle ABD$.
Folglich ist $\triangle AEB$ gleichschenklig mit $AE = EB$ und daher EF Seitenhalbierende in diesem Dreieck.
Da sich AC und BD in E rechtwinklig schneiden, hat der Basiswinkel $\angle EAB$ in diesem Dreieck eine Größe von 45°. Daher ist auch $\triangle AEF$ gleichschenklig-rechtwinklig mit $EF = AF = \frac{1}{2}AB$.
Analog gilt im Dreieck $\triangle EGD$ $EG = DG = \frac{1}{2}DC$. Daher beträgt die Länge der Mittellinie des Trapezes $ABCD$

$$\frac{1}{2}(AB + DC) = EF + EG = FG$$

Aufgabe 130712:
Beweise den folgenden Satz:
Ist $ABCD$ ein Rhombus und sind E, F, G, H in dieser Reihenfolge die Mittelpunkte der Seiten AB, BC, CD, DA, so ist das Viereck $EFGH$ ein Rechteck!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



In dem Rhombus $ABCD$ gilt, da E, F, G, H die Mittelpunkte seiner Seiten sind:

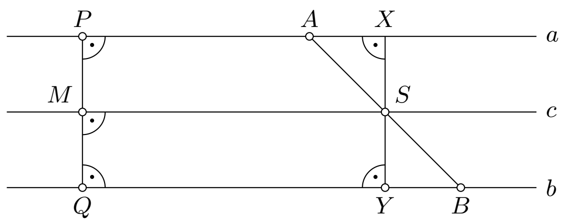
$$AE = EB = BF = FC = CG = GD = DH = HA \qquad (1)$$

Ferner gilt: $\angle HAE = \angle FCG$ sowie $\angle EBF = \angle GDH$ (2)
Aus (1) und (2) folgt $\triangle HAE = \triangle FCG$ sowie $\triangle EBF = \triangle GDH$ (sws) (3)
Aus (3) folgt $EH = FG$ sowie $EF = HG$, daher ist $EFGH$ ein Parallelogramm.

Nun gilt $\angle EAH + \angle HDG = 180°$ sowie $\angle AEH = \angle AHE = \frac{1}{2}(180° - \angle EAH)$ und $\angle DGH = \angle DHG = \frac{1}{2}(180° - \angle HDG)$.
Folglich gilt $\angle AHE + \angle DGH = \frac{1}{2}(360° - 180°) = 90°$ und somit $\angle EHG = 180° - 90° = 90°$; daher ist $EFGH$ ein Rechteck.

Aufgabe 160713:
Es seien a und b zwei zueinander parallele Geraden. A und P seien Punkte auf a, ferner seien B und Q Punkte auf b. Dabei gelte $PQ \perp a$. Der Mittelpunkt von PQ sei M, und es sei c die Parallele zu a durch M.
Beweise folgenden Satz: Ist S der Schnittpunkt von c mit AB, so gilt $AS = BS$.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



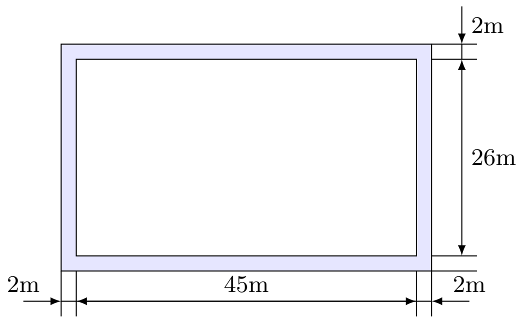
Der Schnittpunkt von AB mit c sei S. Die Senkrechte zu c durch S schneide a in X und b in Y.
Ist $S = M$, so gilt $X = P$, $Y = Q$, also $XS = YS$. Ist $S \neq M$, so sind $MSXP$ und $MSYQ$ Rechtecke, also gilt ebenfalls $XS = PM = QM = YS$.

Ist $A = X$, so gilt $B = Y$, also die Behauptung $AS = BS$. Ist $A \neq X$, so sind die Dreiecke AXS und BYS nach (sww) kongruent; denn es gilt: $XS = YS$; $\angle XSA = \angle YSB$ (Scheitelwinkel); $\angle AXS = \angle BYS = 90°$. Also gilt auch in diesem Fall $AS = BS$.

Aufgabe 210711:
Die FDJler einer Schule haben sich vorgenommen, das Gelände ihrer Schule umzugestalten. Dabei soll eine rechteckige Rasenfläche von 45 m Länge und 26 m Breite mit einem Weg von 2 m Breite umgeben werden.
Der Weg soll außerhalb der Rasenfläche verlaufen und ringsum an sie angrenzen. Die Fläche, die von dem Rasen und dem Weg zusammen eingenommen wird, soll insgesamt wieder die Gestalt eines Rechtecks haben.

a) Berechne den Flächeninhalt des vorgesehenen Weges!
b) Wie viel Gehwegplatten müssen auf diesem Weg insgesamt ausgelegt werden, wenn er vollständig von Gehwegplatten bedeckt werden soll und wenn man für jeden Quadratmeter des Weges genau 16 Platten benötigt?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



a) Der Flächeninhalt des Weges ergibt sich, wenn man den Flächeninhalt des Rasens von dem Flächeninhalt des Rechtecks subtrahiert, den Weg und Rasen zusammen einnehmen. Dessen Seitenlängen sind jeweils um 4 m länger als die Seitenlängen 45 m bzw. 26 m des Rasens; sie betragen also 49 m bzw. 30 m.

Daher beträgt der gesuchte Flächeninhalt 49 m $\cdot$ 30 m - 45 m $\cdot$ 26 m = 1470 m^2 - 1170 m^2 = 300 m^2.

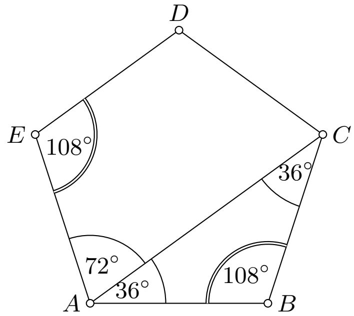
Andere Lösungsmöglichkeiten ergeben sich, wenn man die Fläche des Weges aus Teilflächen zusammensetzt. Die in der Abbildung dargestellte Zusammensetzung z. B. führt auf $2 \cdot 49\text{ m} \cdot 2\text{ m} + 2 \cdot 26\text{ m} \cdot 2\text{ m} = 196\text{ m}^2 + 104\text{ m}^2 = 300\text{ m}^2$.

b) Wegen $300 \cdot 16 = 4800$ sind insgesamt 4800 Platten erforderlich.

Aufgabe 210714:
In einem regelmäßigen Fünfeck $ABCDE$ wird eine beliebige Diagonale gezeichnet. Beweise, dass diese Diagonale zu einer der Seiten des Fünfecks parallel ist!
Hinweis: Ein Fünfeck heißt genau dann regelmäßig, wenn alle seine Seiten zueinander gleichlang und alle seine Innenwinkel zueinander gleichgroß sind.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
1. Lösungsweg:
Die Bezeichnung der Ecken des Fünfecks kann so gewählt werden, dass AC die zu betrachtende Diagonale ist. Da die Winkelsumme im n-Eck stets $(n-2)\cdot 180°$ beträgt, hat jeder der Innenwinkel des Fünfecks $ABCDE$ (siehe Abbildung) die Größe

$$\frac{1}{5}\cdot(5-2)\cdot 180° = 108°$$



Das Dreieck ABC ist gleichschenklig mit $AB = BC$. Daher gilt $\angle BAC = \angle BCA$, nach dem Innenwinkelsatz also $\angle BAC = \angle BCA = 12(180° - 108°) = 36°$.
Daraus folgt $\angle CAE = 108° - 36° = 72°$.
Also ergänzen sich $\angle CAE$ und $\angle AED$ zu 180°. Da sie (für die Gerade durch A, E, die von AC und ED geschnitten wird) entgegengesetzt liegende Winkel sind, folgt hieraus $AC \parallel ED$.

2. Lösungsweg:
Die Innenwinkel des Fünfecks bei E und D sind einander gleichgroß, d. h. es gilt (1) $\angle AED = \angle CDE$. Ebenso ist $\angle BAE = \angle BCD$. Wegen $AB = BC$ gilt ferner $\angle BAC = \angle BCA$. Daraus folgt durch Subtraktion (2) $\angle CAE = \angle ACD$.
Ferner beträgt im Viereck $ACDE$ die Innenwinkelsumme 360°. Hieraus und aus (1), (2) folgt

$$360° = \angle CAE + \angle ACD + \angle CDE + \angle AED = 2\angle CAE + 2\angle AED$$

Daher gilt $\angle CAE + \angle AED = 180°$. Wie im 1. Lösungsweg folgt hieraus $AC \parallel ED$.

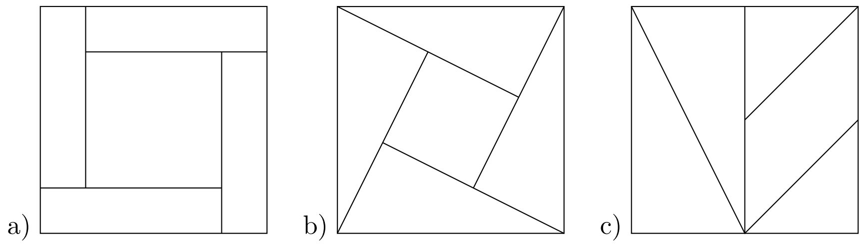
Aufgabe 220711:
Gegeben seien

a) ein Quadrat mit der Seitenlänge 3 cm und vier Rechtecke mit jeweils einer Länge von 4 cm und einer Breite von 1 cm,
b) ein Quadrat mit der Seitenlänge 3 cm und vier rechtwinklige Dreiecke mit $a_1 = 6$ cm und $b_1 = 3$ cm,
c) zwei rechtwinklige Dreiecke mit $a_1 = 6$ cm und $b_1 = 3$ cm, zwei rechtwinklige Dreiecke mit $a_2 = b_2 = 3$ cm sowie ein Parallelogramm mit $g = h_g = 3$ cm und $\alpha = 45°$.

Dabei seien a_1 und b_1 bzw. a_2 und b_2 die Längen derjenigen Dreiecksseiten, die den rechten Winkel einschließen; g sei die Länge einer Seite des Parallelogramms und h_g die Länge der auf dieser Seite senkrecht stehenden Höhe sowie α die Größe eines Innenwinkels des Parallelogramms.

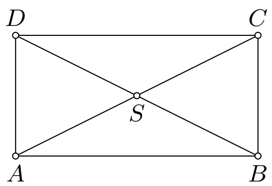
Lege die bei a), b) und c) genannten fünf geometrischen Figuren jeweils so, dass sie eine Quadratfläche vollständig bedecken, ohne sich gegenseitig ganz oder teilweise zu überlagern und ohne über die bedeckte Quadratfläche irgendwo hinauszuragen!
Als Lösung genügt für jede der Aufgaben a), b), c) eine Zeichnung.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Aufgabe 230713:
Es sei $ABCD$ ein Rechteck, dessen Diagonalen einander im Punkt S schneiden. Der Winkel $\angle ASB$ habe die Größe $120°$.
Ermittle die Diagonalenlängen AC und BD in Abhängigkeit von der Seitenlänge BC!

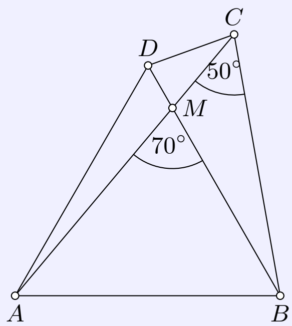
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Da im Rechteck die Diagonalen gleichlang sind und einander halbieren, gilt
(1) $AS = BS = CS = DS$



Das Dreieck BCS ist somit gleichschenklig, demnach gilt
(2) $\angle CBS = \angle BCS$
Nach dem Innenwinkelsatz gilt daher
(3) $\angle CBS + \angle BCS + 60° = 180°$
Aus (2) und (3) folgt $\angle CBS = \angle BCS = 60°$, also ist das Dreieck BCS gleichseitig, und es gilt
(4) $BC = BS$.
Wegen $2BS = BD$ ist $BD = 2BC$. Aus (1) und (4) folgt $AC = BD = 2BC$.

Aufgabe 250713:

Die Schüler Gerd und Uwe diskutieren über folgende Forderungen, die an ein konvexes Viereck $ABCD$ gestellt werden (siehe Abbildung).
Es soll $AB = BC = AD$ gelten, und wenn M der Schnittpunkt der beiden Diagonalen AC und BD ist, so soll der Winkel $\angle BMA$ die Größe $70°$ und der Winkel $\angle BCM$ die Größe $50°$ haben.
Gerd behauptet, dass durch diese Forderungen die Größe des Winkels $\angle DAM$ eindeutig bestimmt ist.



Uwe vertritt die Meinung, dass es konvexe Vierecke gibt, die diese Forderungen erfüllen, aber unterschiedliche Größen des Winkels $\angle DAM$ aufweisen. Wer hat recht?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
In jedem konvexen Viereck $ABCD$, das die Forderungen erfüllt, gelten für die Winkelgrößen

$$\angle BAC = \angle BAM = \alpha, \quad \angle ABD = \angle ABM = \beta, \quad \angle ADB = \angle ADM = \gamma, \quad \angle DAM = \angle DAC = \phi$$

folgende Aussagen:
Da $\angle BAC$ und $\angle BCA$ ($= \angle BCM$) Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck ABC sind, ist $\alpha = 50°$. Nach dem Innenwinkelsatz, angewandt auf das Dreieck ABM, folgt daher $\beta = 180° - 70° - \alpha = 60°$. Da $\angle ADB$ und $\angle ABD$ Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck ABD sind, ist $\gamma = \beta = 60°$.

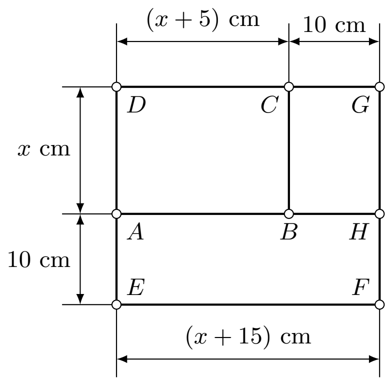
Nach dem Außenwinkelsatz, angewandt auf das Dreieck ADM, folgt $\gamma + \phi = 70°$, also $\phi = 70° - \gamma = 10°$. Diese Winkelgröße ist somit durch die Forderungen eindeutig bestimmt; Gerd hat recht, Uwe nicht.

Aufgabe 250714:
Von einem Rechteck ist bekannt:

(1) Die beiden längeren Seiten des Rechtecks sind jeweils 5 cm länger als die kürzeren.
(2) Wenn man jede Seite des Rechtecke um 10 cm verlängert, wird der Flächeninhalt des Rechtecks um 430 cm^2 größer.

Ermittle die Seitenlängen des ursprünglichen Rechtecks!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



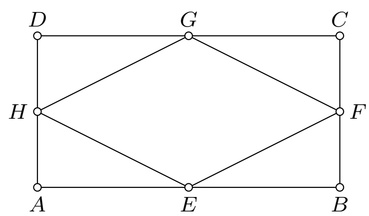
$ABCD$ sei ein Rechteck, das (1) erfüllt, und es gelte $AD = BC = x$ cm sowie $AB = DC = (x + 5)$ cm. $EFGD$ sei ein Rechteck, dessen Seiten jeweils 10 cm länger als die des Rechtecks $ABCD$ sind (siehe Abbildung). Dann gilt

$$ED = FG = (x + 10)cm \qquad \text{und} \qquad EF = DG = AH = (x + 15)cm$$

Der Flächeninhaltszuwachs lässt sich als Summe der Flächeninhalte der Rechtecke $AEFH$ und $BHGC$ darstellen, und es gilt wegen (2): $10 \cdot (x + 15) + 10 \cdot x = 430$.
Formt man die linke Seite der Gleichung mit Hilfe des Distributivgesetzes um, so folgt $10x+150+10x = 430$. Wegen $10x + 10x = 20x$ folgt weiter $x = 14$. Die gesuchten Seitenlängen betragen daher 14 cm und 19 cm.

Aufgabe 260714:
Ein Junger Mathematiker zeichnet ein Rechteck und halbiert die Seiten. Er vermutet, dass die vier Seitenmittelpunkte Eckpunkte eines Rhombus sind.
Untersuche, ob diese Vermutung für jedes Rechteck wahr ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



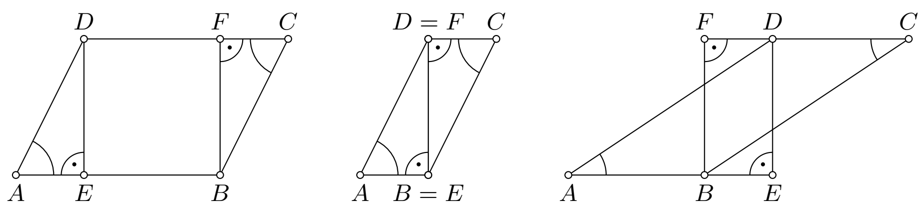
Die Eckpunkte des Rechtecks seien A, B, C, D, die Mittelpunkte der Seiten E, F, G, H (siehe Abbildung).

Da gegenüberliegende Seiten des Rechtecks einander gleichlang sind und da alle Seiten des Rechtecks halbiert werden, gilt: $AE = EB = DG = GCundAH = HD = BF = FC$
Außerdem sind alle Innenwinkel des Rechtecks $ABCD$ gleich groß. Demzufolge sind die Dreiecke HAE, EBT, FCG und GDH nach (sws) kongruent.

Nach den Eigenschaften kongruenter Dreiecke folgt: $HE = EF = FG = GH$, also sind alle Seiten des Vierecks $EFGH$ gleichlang, somit ist es ein Rhombus.

Aufgabe 280713:
a) Zeichne ein Parallelogramm $ABCD$, in dem der Winkel $\angle DAB$ ein spitzer Winkel ist!
Konstruiere das Lot von D auf die Gerade durch A und B; den Fußpunkt dieses Lotes bezeichne mit E! Konstruiere das Lot von B auf die Gerade durch C und D; den Fußpunkt dieses Lotes bezeichne mit F!
b) Beweise, dass in jedem solchen Parallelogramm $ABCD$ für die so konstruierten Punkte E, F $\triangle AED \cong \triangle CFB$ gilt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) In den Abbildungen sind drei Beispiele einer geforderten Zeichnung angegeben.

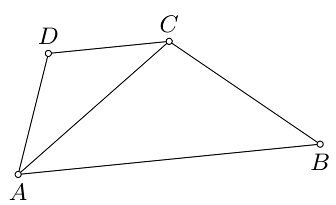


b) Für jedes solche Parallelogramm $ABCD$ und die konstruierten Punkte E, F gilt
$AD = CB$ (Gegenseiten im Parallelogramm) (1)
$\angle AED = \angle CFB$ (Lote, nach Konstruktion) (2)
$\angle DAE = \angle BCF$ (gegenüberliegende Winkel im Parallelogramm) (3)

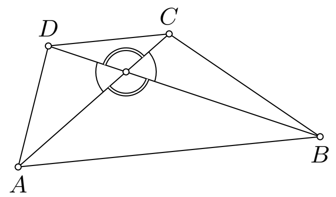
Aus (1), (2), (3) folgt: Die Dreiecke AED und CFB stimmen in einer Seite und zwei Winkeln überein, nach dem Innenwinkelsatz also auch im dritten Winkel. Daher folgt aus den Kongruenzsatz (wsw): $\triangle AED \cong \triangle CFB$.

Aufgabe 290714:
Bei der Wiederholung des Innenwinkelsatzes für konvexe Vierecke geraten Anja und Klaus in einen Streit: Klaus behauptet:
„Zerlegt man ein beliebiges konvexes Viereck $ABCD$ durch Einzeichnen der Diagonalen AC in die beiden Teildreiecke ABC und ADC, dann beträgt die Innenwinkelsumme jedes dieser Teildreiecke 180°. Folglich muss im Viereck $ABCD$ die Innenwinkelsumme $2 \cdot 180° = 360°$ betragen.“
Anja entgegnet: „Zeichnet man aber noch die zweite Diagonale BD ein, dann erhält man vier Teildreiecke. Die Innenwinkelsumme von $ABCD$ muss folglich $4 \cdot 180° = 720°$ betragen.“
Untersuche, welcher der beiden Schüler recht hat! Begründe deine Entscheidung!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Klaus hat recht. Wie die erste Abbildung zeigt, sind sämtliche Innenwinkel der Dreiecke ABC und ADC auch Innenwinkel bzw. Teile von Innenwinkeln des Vierecks $ABCD$.
Außerdem gibt es keine Innenwinkel bzw. Teile von Innenwinkeln dieses Vierecks, die nicht Innenwinkel der genannten Dreiecke sind.

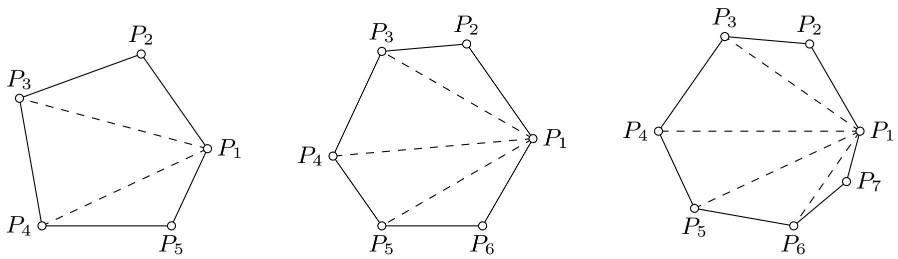


Anja hat dagegen nicht recht, wie die zweite Abbildung zeigt, liegen nämlich vier der Innenwinkel der durch die beiden Diagonalen entstandenen Dreiecke innerhalb des Vierecks $ABCD$ und bilden zusammen einen Vollwinkel. Folglich hätte Anja von den erhaltenen 720° noch 360° subtrahieren müssen, was als Innenwinkelsumme dann die von Klaus ermittelten 360° ergeben hätte.

Aufgabe 300714:
In jedem Dreieck beträgt bekanntlich die Innenwinkelsumme 180° in jedem Viereck 360°.
a) Zeichne je ein Fünfeck, ein Sechseck und ein Siebeneck! Miss die Innenwinkel und berechne jeweils die Innenwinkelsumme! Was vermutest du?
b) Beweise deine Vermutung für jedes Fünfeck, Sechseck und Siebeneck!
c) Versuche eine Formel zu finden und zu beweisen, die für jede natürliche Zahl $n > 3$ die Innenwinkelsumme in jedem n-Eck angibt!

Hinweis: In dieser Aufgabe werden alle n-Ecke als konvex vorausgesetzt, d. h. als n-Ecke, in denen kein Innenwinkel größer als 180° ist. Außerdem wird in dieser Aufgabe vorausgesetzt, dass kein Innenwinkel gleich 180° ist.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



a) Die erste Abbildung soll ein Fünfeck mit den Innenwinkelgrößen 120°, 130°, 80°, 120°, 90°, ein Sechseck mit den Innenwinkelgrößen 110°, 120°, 140°, 130°, 110°, 110° und ein Siebeneck mit den Innenwinkelgrößen 130°, 120°, 140°, 120°, 140°, 120°, 130° zeigen.

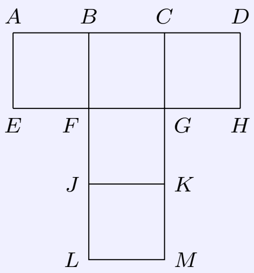
Vermutung: In jedem Fünfeck, Sechseck bzw. Siebeneck beträgt die Innenwinkelsumme 540°, 720° bzw. 900°.

b) Jedes Fünfeck, Sechseck bzw. Siebeneck lässt sich wie in Abbildung in drei, vier bzw. fünf Teildreiecke zerlegen, wobei durch Addition der Innenwinkelsummen dieser Teildreiecke die Innenwinkelsumme des betreffenden Fünf-, Sechs- bzw. Siebenecks entsteht. Daher beträgt diese Innenwinkelsumme $3 \cdot 180° = 540°$ bzw. $4 \cdot 180° = 720°$ bzw. $5 \cdot 180° = 900°$.

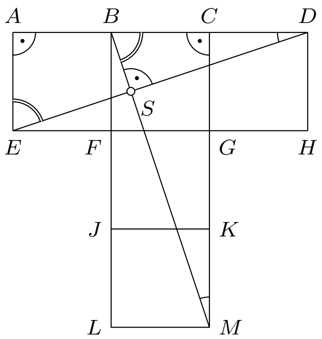
c) Jedes n-Eck $P_1P_2P_3...P_{n-1}P_n$ wird durch die Diagonalen P_1P_3, ..., P_1P_{n-1} in die $n-2$ Teildreiecke $P_1P_2P_3$, $P_1P_3P_4$, ..., $P_1P_{n-1}P_n$ zerlegt. Durch Addition der Innenwinkelsumme dieser Teildreiecke entsteht die Innenwinkelsumme des n-Ecks. Diese beträgt daher $(n-2)\cdot 180°$.

Aufgabe 310713:
Aus fünf einander kongruenten Quadraten werde eine T-förmige Figur zusammengesetzt. Die Eckpunkte der Quadrate seien wie in der Abbildung bezeichnet.

a) Zeichne eine solche Figur mit $AB = 2$ cm und darin die Strecken BM und DE; ihren Schnittpunkt bezeichne mit S und stelle eine Vermutung über die Größe des Winkels $\angle BSD$ auf!
b) Beweise diese Vermutung!



Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



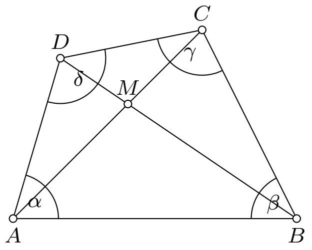
a) Zeichnung: siehe Abbildung; Vermutung: $\angle BSD = 90°$.

b) Beweis:
Es gilt: $EA = BC$ Seitenlänge kongruenter Quadrate, $AD = CM$ Dreifaches dieser Seitenlänge, $\angle EAD = \angle BCM = 90°$.
Nach dem Kongruenzsatz (sws) gilt also $\triangle EAD = \triangle BCM$ und daher $\angle AED = \angle CBM$. (1)
Wegen $\angle EAD = 90°$ gilt ferner $\angle EAD + \angle EDA = 90°$ (Winkelsumme im Dreieck AED). (2)
Aus (1) und (2) folgt wegen $\angle CBM = \angle DBS$ und $\angle EDA = \angle SDB$ auch $\angle DBS + \angle SDB = 90°$. Wegen der Winkelsumme im Dreieck BSD folgt hieraus $\angle BSD = 90°$.

II Runde 2

Aufgabe V10724:
Beweise folgende Behauptung!
Wenn in einem Viereck die Diagonalen gleich lang sind und einander halbieren, dann sind alle Winkel des Vierecks gleich groß.

Lösung von Steffen Polster:



Voraussetzung: $AC = BD$, $AM = MC$, $BM = MD$

Behauptung: $\alpha = \beta = \gamma = \delta$

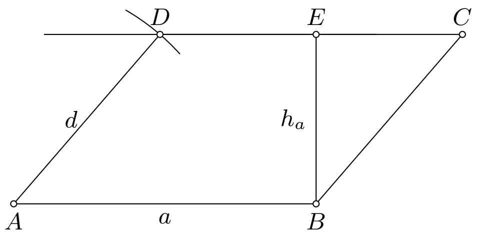
Beweis: Die Dreiecke ABM und DMC sind gleichschenklig und einander kongruent nach SWS, daher $\angle MAB = \angle ABM = \angle MCD = \angle CDM$.
Dasselbe trifft für die Dreiecke DAM und MBC zu. Daher $\angle DAM = \angle MDA = \angle MBC = \angle BCM$. Da

$$\alpha = \angle DAM + \angle MAB \qquad \beta = \angle ABM + \angle MBC$$
$$\gamma = \angle MCD + \angle BCM \qquad \delta = \angle CDM + \angle MDA$$

gilt, folgt daraus $\alpha = \beta = \gamma = \delta$.
Da die Winkelsumme im Viereck 360° beträgt und laut Aufgabe die Diagonalen einander halbieren, ist jeder der vier Winkel ein Rechter, das Viereck also ein Rechteck.

Aufgabe V10725:
Konstruiere ein Parallelogramm $ABCD$, von dem du weißt: $AB = a = 5{,}0$ cm, $AD = d = 3{,}7$ cm, $F = 14$ cm^2.
Wie viel
a) Parallelogramme
b) Rechtecke
c) Quadrate
gibt es insgesamt, die mit $ABCD$ in a und F übereinstimmen?

Lösung von Steffen Polster:



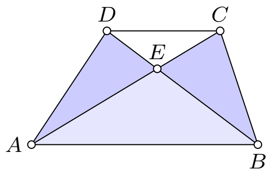
Gegeben sind $AB = a = 5$ cm, $AD = d = 3{,}7$ cm und $F = 14$ cm^2. Für die Konstruktion wird h_a über $\frac{F}{a} = h_a = 2{,}8$ cm ermittelt.

Konstruktion: Man zeichne die Seite AB. Im Abstand von h_a konstruiere man eine Parallele zu AB durch einen Punkt E mit $BE = h_a$.
Ein Kreisbogen um A mit dem Radius $AD = d$ schneidet die Parallele in einem Punkt D. Der Punkt C ergibt sich durch Parallelverschiebung von AD durch B.
$ABCD$ ist ein Parallelogramm, dass der Aufgabenstellung entspricht.

Durch Nachdenken über die Bestimmungsstücke von Parallelogramm, Rechteck und Quadrat kommt man zu dem Schluss:
a) Es gibt beliebig viele Parallelogramme, die mit $ABCD$ in a und F übereinstimmen.
b) Es gibt genau ein Rechteck, dass mit $ABCD$ in a und F übereinstimmt.
c) Es gibt kein Quadrat, dass mit $ABCD$ in a und F übereinstimmt.

Aufgabe 010723:
Es ist zu beweisen, dass in einem beliebigen Trapez die Dreiecke, die aus den Diagonalenabschnitten und den Schenkeln des Trapezes gebildet werden, flächengleich sind.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Beweis:
Seien die Eckpunkte des Trapezes A, B, C und D, wobei $AB \parallel CD$ gelte. Dann sind die Dreiecke ABC und ABD flächengleich, da sie die Grundseite AB und die Höhe (d. h. den Abstand der parallelen Seiten) gemeinsam haben. Beide Dreiecke enthalten das Dreieck ABE, wobei E der Diagonalenschnittpunkt sei.

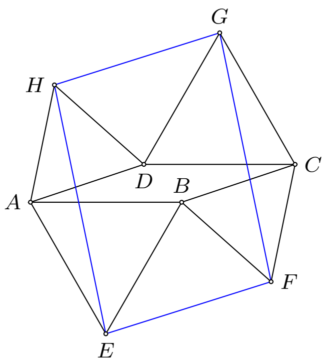
Wenn man von den Flächen von ABC bzw. ABD jeweils die Fläche von ABE wegnimmt, müssen die übrig bleibenden Flächen von AED und BEC auch gleich groß sein. Diese sind aber genau die beiden Dreiecke, deren Flächengleichheit zu zeigen ist.

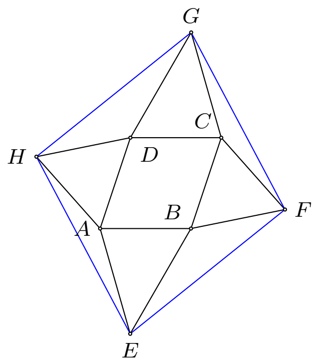
Aufgabe 040724:
Über den Seiten eines Parallelogramms $ABCD$ werden die gleichseitigen Dreiecke ABE, BCF, CDG und ADH so errichtet, dass die Dreiecksflächen außerhalb des Parallelogramms liegen.
Es ist zu beweisen, dass E, F, G und H die Eckpunkte eines Parallelogramms sind.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Ein Viereck ist ein Parallelogramm, wenn seine gegenüberliegenden Seiten gleiche Längen besitzen.

1. Möglichkeit
Man kann die Längengleichheit gegenüberliegender Seiten des Vierecks $EFGH$ dadurch beweisen, dass die gesamte Figur bei einer Drehung um den Schnittpunkt der Diagonalen AC und BD um 180° mit sich zur Deckung kommt.

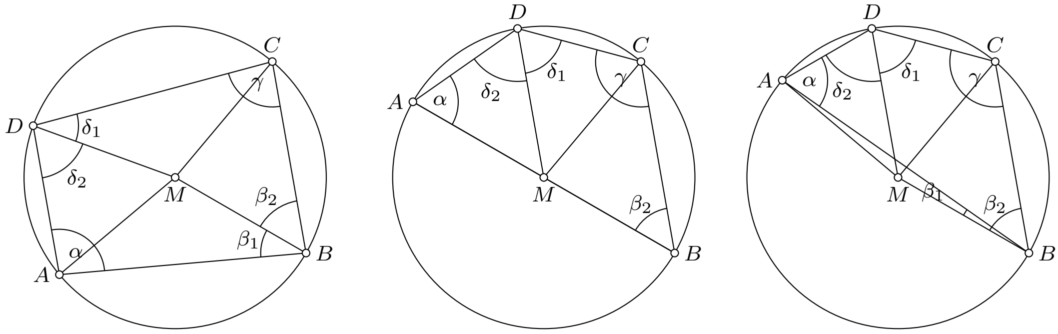
2. Möglichkeit
Man zeigt die Längengleichheit gegenüberliegender Seiten im Viereck $EFGH$ etwa nach dem Kongruenzsatz SWS, angewendet auf die Dreieckspaare EFB, GHD und CGF, AEH. (Fallunterscheidung nötig!) Die Punkte A und C können auch auf den Seiten HE bzw. GF liegen.





Aufgabe 060722:
In den Kreis k mit dem Mittelpunkt M sei das nicht überschlagene Viereck $ABCD$ so eingezeichnet, dass alle seine Seiten Sehnen des Kreises sind (Sehnenviereck).
Beweise, dass in jedem Sehnenviereck die Summe der Gradmaße je zweier gegenüberliegender Winkel 180° beträgt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wir betrachten irgend zwei gegenüberliegende Winkel und bezeichnen ihre Gradmaße mit α und γ und ihre Scheitelpunkte mit A und C, so dass also α und γ die Gradmaße der Winkel $\angle DAB$ und $\angle BCD$ sind.
Ferner seien β_1, β_2, δ_1, bzw. δ_2 die Gradmaße der Winkel $\angle ABM$, $\angle MBC$, $\angle CDM$ und $\angle MDA$.



Behauptung: $\alpha + \gamma = 180°$
Beweis: Wir unterscheiden 3 Fälle.
Fall 1: Punkt M liegt im Innern des Sehnenvierecks:
In den Dreiecken $\triangle ABM, \triangle BCM, \triangle CDM$ und $\triangle DAM$ sind die von M ausgehenden Seiten Radien des Kreises k. Diese Dreiecke sind daher gleichschenklig mit der Spitze M. Daraus folgt:

$$(1) \quad \beta_1 + \delta_2 = \alpha$$
$$(2) \quad \beta_2 + \delta_1 = \gamma$$

Weiterhin gilt:

$$(3) \quad \alpha + \beta_1 + \beta_2 + \gamma + \delta_1 + \delta_2 = 360°$$

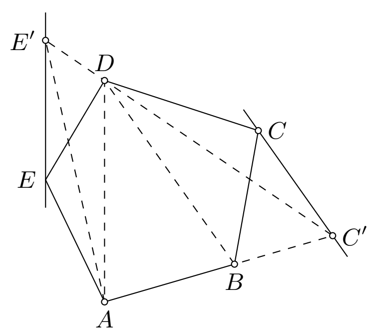
als Winkelsumme im Viereck $ABCD$.
Aus (1), (2) und (3) folgt $\alpha + \gamma + \alpha + \gamma = 360°$ und damit $\alpha + \gamma = 180°$.

Fall 2: Punkt M liegt auf dem Rande des Sehnenvierecks:
In diesem Fall ist entweder $\beta_1 = 0$ oder $\beta_2 = 0$ oder $\delta_1 = 0$ oder $\delta_2 = 0$. Der Beweis verläuft analog.

Fall 3: Punkt M liegt außerhalb des Sehnenvierecks:
In diese Falle ist entweder β_1 durch $-\beta_1$ oder β_2 durch $-\beta_2$ oder δ_1 durch $-\delta_1$ oder δ_2 durch $-\delta_2$ oder zu ersetzen.
Der Beweis verläuft analog Fall 1.

Aufgabe 080724:
Ein beliebig vorgegebenes konvexes Fünfeck $ABCDE$ ist unter Beibehaltung des Eckpunktes A zeichnerisch in ein flächengleiches Dreieck zu verwandeln.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Das Fünfeck $ABCDE$ lässt sich in die Teildreiecke $\triangle ADE$, $\triangle ABD$ und $\triangle BCD$ zerlegen. Man zieht durch C zu DB die Parallele und verlängert AB über B hinaus bis zum Schnitt mit dieser Parallelen. Der Schnittpunkt sei C'.

Dann ist das Dreieck $\triangle BC'D$ flächeninhaltsgleich dem Dreieck $\triangle BCD$; denn es stimmt in den Längen der Grundseite und der zugehörigen Höhe mit diesem überein.
Nun zieht man durch E die Parallele zu AD und verlängert $C'D$ über D hinaus bis zum Schnittpunkt E' mit dieser. Das Dreieck $\triangle ADE'$ ist dann aus dem gleichen Grunde wie oben flächeninhaltsgleich dem Dreieck $\triangle ADE$.
Daher ist das aus den Teildreiecken $\triangle ADE'$, $\triangle ABD$ und $\triangle BC'D$ bestehende Dreieck $\triangle AC'E'$ flächeninhaltsgleich dem Fünfeck $ABCDE$.

Aufgabe 120722:
Beweise den folgenden Satz:
Wenn in einem konvexen Viereck $ABCD$ die Mittelpunkte beider Diagonalen zusammenfallen, d. h. die Diagonalen einander halbieren, so ist $ABCD$ ein Parallelogramm.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
In dem Viereck $ABCD$ sei E der gemeinsame Mittelpunkt der beiden Diagonalen AC und BD. Dann gilt nach Voraussetzung: $AE = EC$ sowie $BE = ED$.

Nun gilt weiter: $\angle AEB = \angle DEC$ und $\angle AED = \angle BEC$ als Scheitelwinkel. Daraus folgt: $\triangle AEB = \triangle DEC$ und $\triangle AED = \triangle BEC$ (je sws).

Folglich gilt: $\angle EAB = \angle ECD$ (1) sowie $\angle EAD = \angle ECB$ (2).
Aus (1) folgt: $AB \parallel DC$
aus (2) folgt: $AD \parallel BC$, Umkehrung des Satzes über Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen. d. h., $ABCD$ ist ein Parallelogramm.

Aufgabe 150721:
a) Ein Stück Land habe die Form eines Rechtecks, dessen eine Seitenlänge die andere um 75 m übertrifft und dessen Umfang insgesamt 650 m beträgt.
Ermittle die Seitenlängen und den Flächeninhalt (in Hektar) dieses Landstücks!

b) Auf der ganzen Fläche des genannten Landstücks sollen Obstbäume derart gepflanzt werden, dass die Bäume in jeweils zu den Rechteckseiten parallelen Reihen stehen, also nicht etwa „auf Lücke“ gesetzt sind, und der Abstand von Baum zu nächststehendem Baum und der von einer Randseite zum nächststehenden Baum jeweils 5 m beträgt.
Ermittle die genaue Anzahl von Bäumen, die unter den angegebenen Bedingungen gepflanzt werden können!

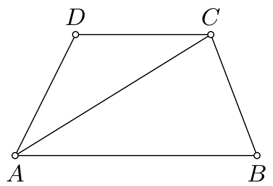
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Wenn die Angaben für ein Rechteck zutreffen, dann ergibt sich der Umfang als Summe aus dem Vierfachen der kleineren Seitenlänge und dem Doppelten von 75 m. Das Vierfache der kleineren Seitenlänge beträgt somit 650 m - 150 m = 500 m, die kleinere Seitenlänge also 125 m, die größere 200 m.
Der Flächeninhalt eines derartigen Rechtecks beträgt $125 \cdot 200$ m^2 = 25000 m^2 = 2,5 ha.

b) Parallel zur größeren Rechteckseite können nach den Bedingungen der Aufgabe $\frac{125}{5} - 1 = 24$ und parallel zur kleineren $\frac{200}{5} - 1 = 39$ Bäume gepflanzt werden. Die gesuchte Anzahl der Bäume beträgt somit $24 \cdot 39 = 936$.

Aufgabe 190722:
a) Beweise folgenden Satz!
Wenn in einem Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ die Gleichung $CD = AD$ (1) gilt, dann gilt die folgende Aussage (2): Die Diagonale AC halbiert den Innenwinkel $\angle BAD$. (2)

b) Beweise auch die folgende Umkehrung!
Wenn in einem Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ die Aussage (2) gilt, dann gilt die Gleichung (1).

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



a) Wegen $AB \parallel CD$ sind $\angle ACD$ und $\angle CAB$ Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen, folglich gilt: $\angle ACD = \angle CAB$ (3).

Wegen (1) ist das Dreieck ACD gleichschenklig mit AC als Basis; seine Basiswinkel sind gleichgroß, also gilt: $\angle ACD = \angle CAD$ (4). Aus (3) und (4) folgt $\angle CAB = \angle CAD$.

b) Aus $AB \parallel CD$ folgt wie eben (3). Wegen (2) gilt $\angle CAB = \angle CAD$ (5). Aus (3) und (5) folgt (4), also ist das Dreieck ACD gleichschenklig mit AC als Basis; d. h., es gilt (1).

Aufgabe 210721:
a) Ein rechteckiges Flurstück ist durch einen Weg in zwei rechteckige Felder geteilt. Die Länge des Flurstücks, parallel zu diesem Weg gemessen, beträgt 105 m. Die Breite des ersten Teilfeldes beträgt 270 m, die des zweiten Teilfeldes 180 m. Der Weg ist 3 m breit.
Ermittle den Flächeninhalt des ersten Teilfeldes und den des zweiten Teilfeldes!

b) Das gesamte Flurstück wird nun zu einem großen Feld zusammengelegt, indem der Weg mit umgepflügt wird.
Ermittle den Flächeninhalt des so entstehenden großen Feldes!

c) Ermittle, wie viel Meter Draht für einen elektrischen Weidezaun gebraucht werden, wenn dieses Gesamtfeld vollständig mit zwei Drähten umspannt werden soll! Dabei sollen Durchhang und Befestigung des Drahtes dadurch berücksichtigt werden, dass der doppelte Umfang um ein Hundertstel erhöht wird.
(Es ist auf volle Meter zu runden.)

Hinweis zu a) und b): Die Flächeninhalte sind in Hektar anzugeben, auf zwei Dezimalstellen gerundet.

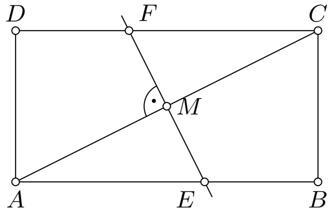
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Das erste Teilfeld hat die Länge 105 m und die Breite 270 m, wegen $105 \cdot 270 = 28350$ also den Flächeninhalt 28350 m^2, d. h. in der angegebenen Weise gerundet 2,84 ha.
Das zweite Teilfeld hat die Länge 105 m und die Breite 180 m, wegen $105 \cdot 180 = 18900$ also den Flächeninhalt 18900 m^2, d. h. 1,89 ha.

b) Das gesamte Flurstück hat die Länge 105 m und wegen $270 + 3 + 180 = 453$ die Breite 453 m, wegen $105 \cdot 453 = 47565$ also den Flächeninhalt 47565 m^2, d. h. gerundet 4,76 ha.

c) Das gesamte Flurstück hat wegen $2 \cdot (105 + 453) = 2 \cdot 558 = 1116$ den Umfang 1116 m. Für den Zaun werden wegen $2 \cdot 1116 = 2232$ und wegen $2232 : 100 = 22{,}32$ sowie $2232 + 22{,}32 = 2254{,}32$ daher gerundet 2254 m Draht gebraucht.

Aufgabe 230722:
Es sei $ABCD$ ein Rechteck; der Mittelpunkt der Diagonale AC sei M. Die Mittelsenkrechte auf AC schneide die Gerade durch A und B in E und die Gerade durch C und D in F.
Beweise, dass dann die Dreiecke AEM und CFM kongruent sind!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

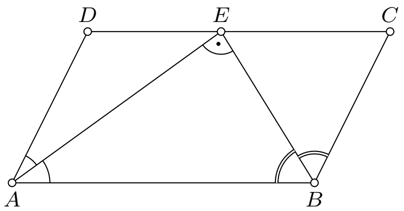


Es gilt:
(1) $AM = MC$; denn M ist laut Voraussetzung der Mittelpunkt der Strecke AC.
(2) $\angle FMC = \angle AME = 90°$; denn die Gerade durch F und E ist laut Voraussetzung die Mittelsenkrechte der Strecke AC und steht somit senkrecht auf AC.
(3) $AB \parallel CD$; da $ABCD$ laut Voraussetzung ein Rechteck ist.
(4) $\angle MAE = \angle MCF$; da diese Winkel Wechselwinkel sind, die wegen (3) an geschnittenen Parallelen liegen.

Aus (1), (2) und (4) folgt nach dem Kongruenzsatz wsw, dass die Dreiecke AEM und CEM kongruent sind.

Aufgabe 230724:
Von einem Parallelogramm $ABCD$ wird vorausgesetzt, dass die Halbierenden der Winkel $\angle DAB$ und $\angle ABC$ einander in einem Punkt E schneiden, der auf der Strecke CD zwischen C und D liegt.
Ferner wird vorausgesetzt, dass die Strecken AE und BE die Längen 7 cm bzw. 5 cm haben.
Ermittle aus diesen Voraussetzungen den Flächeninhalt des Parallelogramms $ABCD$!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Das Dreieck ABE und das Parallelogramm $ABCD$ stimmen in der Seite AB und in der zugehörigen Höhe überein.
Deshalb ist der Flächeninhalt des Parallelogramms $ABCD$ doppelt so groß wie der des Dreiecks ABE.

Da im Parallelogramm die Summe der Größen benachbarter Winkel 180° beträgt, ist die Summe der Winkel $\angle EAB$ und $\angle ABE$ gleich 90°, das Dreieck ABE ist also rechtwinklig mit E als Scheitel des rechten Winkels.
Folglich beträgt der Flächeninhalt des Dreiecks ABE wegen $\frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 5 = 17{,}5$ mithin 17,5 cm^2 und der des Parallelogramms $ABCD$ daher 35 cm^2.

Aufgabe 240722:
Ein Garten von rechteckiger Gestalt ist genau 13 m länger als breit. Um ihn vollständig zu umzäunen, benötigt man genau 92 m Zaun.

a) Berechne den Flächeninhalt des Gartens!

b) Der Garten soll vollständig in Beete und Wege aufgeteilt werden, wobei folgende Bedingungen zu erfüllen sind:
Jedes Beet hat die Gestalt eines Rechtecks mit den Seitenlängen 3 m und 1 m. Zwischen je zwei benachbarten Beeten und zwischen dem Zaun und den Beeten ist überall ein 25 cm breiter Weg angelegt.
Untersuche, ob es eine Aufteilung des Gartens gibt, bei der diese Bedingungen erfüllt sind! Wenn das der Fall ist, so ermittle für eine solche Aufteilung die Anzahl der Beete!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Sind a und b die in Metern angegebene Länge bzw. Breite des Gartens, so gilt $a = 13 + b$ (1) sowie, weil der halbe Umfang 92 m : 2 = 46 m beträgt, $a + b = 46$. (2)

Setzt man a aus (1) in (2) ein, so folgt $13 + 2b = 46$, d. h. $b = 16{,}5$ und damit aus (1) $a = 29{,}5$.
Der Flächeninhalt des Gartens beträgt folglich 16,5 m · 29,5 m = 486,75 m^2.

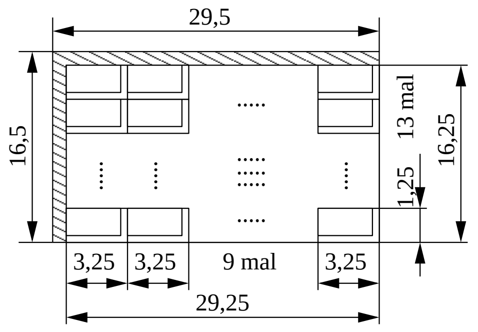
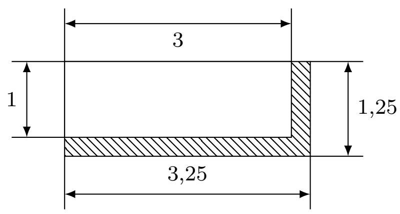


Abbildung a (nicht maßstabsgetreu)

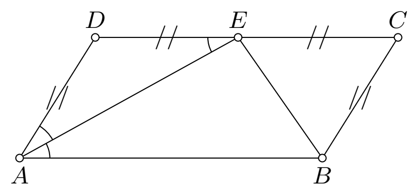
b) Legt man zunächst längs zweier benachbarter Seiten des Gartens einen Weg von 25 cm Breite an (in Abbildung a schraffiert), so verbleibt ein Rechteck von 29,25 m Länge und 16,25 m Breite.



Wenn man dieses Rechteck in Teilrechtecke mit den Seitenlängen 3,25 m und 1,25 m aufteilen kann (Abbildung b), so erhält man eine Anordnung von Beeten, die den geforderten Bedingungen genügt.
Eine Möglichkeit hierzu zeigt Abbildung a, wie sich wegen $29{,}25 : 3{,}25 = 9$ und $16{,}25 : 1{,}25 > 13$ bestätigen lässt. Bei dieser Aufteilung ist die Anzahl der Beete $9 \cdot 13 = 117$.

Aufgabe 240723:
Von einem Parallelogramm $ABCD$ wird vorausgesetzt, dass der Schnittpunkt E der beiden Winkelhalbierenden von $\angle BAD$ und $\angle CBA$ auf der Seite CD liegt.
Beweise, dass unter dieser Voraussetzung E stets der Mittelpunkt der Seite CD ist!

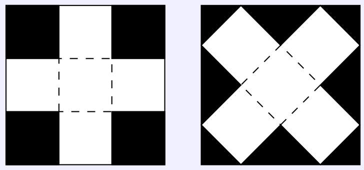
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Da im Parallelogramm $ABCD$ die gegenüberliegenden Seiten AB und CD zueinander parallel sind und da E auf CD liegt, gilt nach dem Satz über Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen $\angle BAE = \angle DEA$.

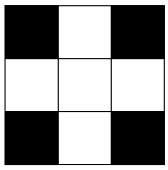
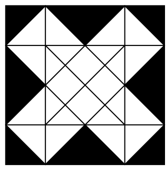
Da AE nach Voraussetzung den Winkel $\angle BAD$ halbiert, gilt $\angle BAE = \angle EAD$. Daher folgt $\angle DEA = \angle EAD$.
Nach der Umkehrung des Satzes über die Basiswinkel in gleichschenkligen Dreiecken folgt hieraus $AD = ED$. Analog erhält man $BC = EC$.
Da nach Voraussetzung AD und BC gegenüberliegende Seiten eines Parallelogramms sind, gilt $AD = BC$. Also ist $ED = EC$.
Da E nach Voraussetzung auch auf der Seite CD liegt, ist damit E als Mittelpunkt von CD nachgewiesen.

Aufgabe 240724:
Aus einem quadratischen Stück Blech der Seitenlänge a soll ein oben offener würfelförmiger Kasten hergestellt werden. Für das Netz zum Herstellen eines solchen Kastens werden die beiden Varianten in dem Bild zur Diskussion gestellt.
Beide Netze sind so angeordnet, dass die Diagonalen des gegebenen Quadrates jeweils Symmetrieachsen des Netzes sind.



Ermittle in Abhängigkeit von a die Größe des Abfalls (im Bild schwarz) bei beiden Varianten! Wenn bei einer Variante ein kleinerer Abfall entsteht, so gib diese Variante an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

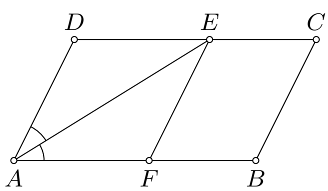
a)  b) 

Variante 1:
Die Quadratfläche kann in genau 9 kongruente Quadrate mit der Seitenlänge $\frac{a}{3}$ aufgeteilt werden (Abbildung a); davon sind 4 Quadrate Abfall, die restlichen 5 bilden das Netz zum Herstellen des Kastens. Folglich beträgt hier der Abfall $\frac{4}{9}a^2$.

Variante 2:
Die Quadratfläche kann in genau 32 kongruente gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke mit der Schenkellänge $\frac{a}{4}$ aufgeteilt werden (z. B. wie in Abbildung b); davon sind 12 Dreiecke Abfall, die restlichen 20 bilden das Netz zum Herstellen des Kastens. Der Abfall beträgt $\frac{3}{8}a^2$.
Vergleich: Wegen $4 \cdot 8 > 3 \cdot 9$ gilt $\frac{4}{9} > \frac{3}{8}$. Folglich ist der Abfall bei Variante 2 kleiner als bei Variante 1.

Aufgabe 260723:
Es sei $ABCD$ ein Parallelogramm mit $AB \parallel CD$ und $AD \parallel BC$. Die Halbierende des Winkels $\angle DAB$ schneide die Seite CD in einem inneren Punkt E. Die Parallele durch E zu AD schneide AB in F.
Beweise, dass das Viereck $AFED$ ein Rhombus ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Nach Voraussetzung ist $AB \parallel CD$ und $FE \parallel AD$, somit ist das Viereck $AFED$ ein Parallelogramm mit $AF = DE$ und $AD = EF$.
Da der Winkel $\angle DAF$ durch AE halbiert wird, gilt $\angle DAE = \angle EAF$. Außerdem sind die Winkel $\angle EAF$ und $\angle AED$ Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen und somit gleichgroß.
Damit gilt $\angle DAE = \angle EAF = \angle AED$, und das Dreieck AED ist nach der Umkehrung des Basiswinkelsatzes gleichschenklig mit $AD = DE$. Also ist $AF = DE = AD = EF$, d. h., das Parallelogramm $AFED$ hat vier gleichlange Seiten und ist damit ein Rhombus.

Aufgabe 280723:
Es sei $ABCD$ ein Trapez mit $AB \parallel CD$, das folgende Bedingungen erfüllt:
(1) Die Längen der Seiten AB und CD verhalten sich wie 5 : 4.
(2) Die Mittellinie des Trapezes hat eine Länge von 5,4 cm.
(3) Die Höhe des Trapezes ist halb so groß wie die Länge der Seite AB.
Untersuche, ob durch diese Angaben der Flächeninhalt des Trapezes $ABCD$ eindeutig bestimmt ist. Ist dies der Fall, dann gib den Flächeninhalt des Trapezes in Quadratzentimetern an!

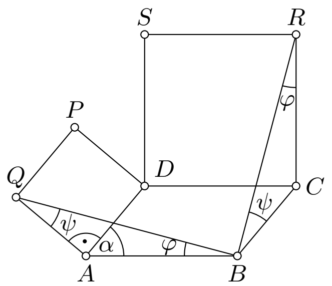
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wegen (1) gilt $AB : CD = 5 : 4$, also $CD = \frac{4}{5}AB$. (4)
Da die Länge der Mittellinie im Trapez gleich der Hälfte der Summe der Längen der beiden parallelen Seiten ist, gilt wegen (2) $\frac{1}{2}(AB + CD) = 5{,}4$ cm. Hieraus und aus (4) folgt

$$\frac{1}{2}(AB + \frac{4}{5}AB) = 5{,}4 \text{ cm} \Rightarrow AB = 6 \text{ cm}$$

Nach (3) folgt hieraus: Die Höhenlänge des Trapezes beträgt 3 cm. Daraus und aus (2) ergibt sich nach der Formel für den Flächeninhalt des Trapezes, dass dieser (wegen $5{,}4 \cdot 3 = 16{,}2$) durch die Angaben (1) bis (3) eindeutig bestimmt ist; er beträgt 16,2 cm^2.

Aufgabe 310723:
a) Zeichne ein Parallelogramm $ABCD$, in dem die Seitenlängen $AB = 5$ cm, $BC = 3$ cm betragen und der Winkel $\angle BAD$ die Größe $\alpha = 50°$ hat!
Errichte über den Seiten AD und DC die Quadrate $ADPQ$ und $DCRS$ so, dass diese Quadratflächen vollständig außerhalb der Parallelogrammfläche liegen!
b) Beweise, dass für jedes Parallelogramm $ABCD$, bei dem $\angle BAD$ kleiner als 90° ist, nach dem Konstruieren solcher Quadrate die Strecken BQ und BR einander gleichlang sind und aufeinander senkrecht stehen!

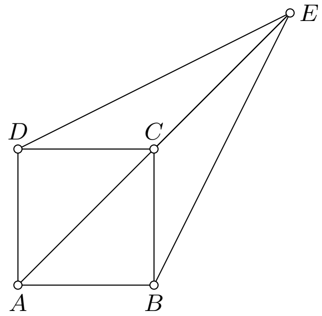
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Die Abbildung zeigt eine geforderte Zeichnung.



b) Nach Voraussetzung gilt $AB = DC$ (Gegenseiten im Parallelogramm $ABCD$) $= CR$ (Seiten im Quadrat $DCRS$) (1) und $AQ = DA$ (Seiten im Quadrat $ADPQ$) $= CB$ (Gegenseiten im Parallelogramm $ABCD$). (2)
Für $\angle BAD = \alpha < 90°$ gelten die Gleichungen $\angle ABC = 180° - \alpha$ (3) und $\angle BCD = \alpha$ (Winkel im Parallelogramm), wegen $\angle QAD = \angle DCR = 90°$ (Winkel in Quadraten) also $\angle QAB = \angle BCR = 90° + \alpha$. (4)
Aus (1), (2), (4) folgt nach dem Kongruenzsatz sws $\angle ABQ = \angle CRB$, also $BQ = RB$, (5) $\angle ABQ = \angle CRB = \varphi$, (6) $\angle AQB = \angle CBR = \psi$. (7)
Nach (4), (6), (7) folgt aus dem Innenwinkelsatz $\alpha + \varphi + \psi = 90°$; (8) aus (3), (6), (7) und (8) folgt $\angle QBR = 180° - \alpha - \varphi - \psi = 90$. (9) Mit dem Nachweis von (5) und (9) ist der verlangte Beweis geführt.

Aufgabe 320722:
$ABCD$ sei ein Quadrat, sein Flächeninhalt betrage 25 cm^2. Ein Punkt E liege so auf der Verlängerung der Diagonalen AC über C hinaus, dass die Strecke AE doppelt so lang wie die Strecke AC ist.
Ermittle unter diesen Voraussetzungen den Flächeninhalt des Vierecks $ABED$!

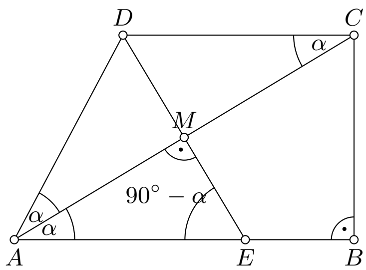
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Die Dreiecke AED und ACD haben D als gemeinsame Ecke, die der Seite AE bzw. der (in AE enthaltenen) Seite AC gegenüberliegt; sie haben also dieselbe zu diesen Seiten senkrechte Höhe.
Daher und wegen $AE = 2 \cdot AC$ hat AED doppelt so großen Flächeninhalt wie ACD. Ebenso (mit B statt D) folgt: AEB hat doppelt so großen Flächeninhalt wie ACB.
Damit erhält man: Der Flächeninhalt von $ABED$ ist das Zweifache des Flächeninhaltes von $ABCD$; somit beträgt er 50 cm^2.

Aufgabe 320723:
Es sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel bei B und mit $AB = 5$ cm, $BC = 3$ cm. Die Mittelsenkrechte von AC schneide AC in M und AB in E.
a) Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen die Winkel $\angle MEA$ und $\angle MCB$ einander gleichgroß sind!
b) Ein Punkt D liege so auf der Geraden durch E und M, dass AC den Winkel $\angle DAB$ halbiert. Beweise, dass das Viereck $ABCD$ dann ein Trapez sein muss!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



a) Mit $\angle BAC = \alpha$ gilt wegen $AM \perp ME$ bzw. $AB \perp BC$ nach dem Innenwinkelsatz, auf die Dreiecke AME bzw. ABC angewandt, $\angle MEA = \angle MCB = 90° - \alpha$.

b) Da AC den Winkel $\angle DAB$ halbiert, ist $\angle DAC = \angle BAC$.
Da ferner D auf der Mittelsenkrechten von AC liegt, gilt $AD = CD$. Nach dem Basiswinkelsatz ist also $\angle DCA = \angle DAC$.
Somit gilt $\angle BAC = \angle DCA$, und nach der Umkehrung des Wechselwinkelsatzes folgt $AB \parallel DC$. Damit ist $ABCD$ als ein Trapez nachgewiesen.

III Runde 3

Aufgabe 020735:
Gegeben ist ein Trapez $ABCD$ und innerhalb des Trapezes ein Kreis, der alle 4 Seiten berührt. Sein Mittelpunkt ist M.
Beweise, dass der Winkel AMD und der Winkel BMC rechte Winkel sind!

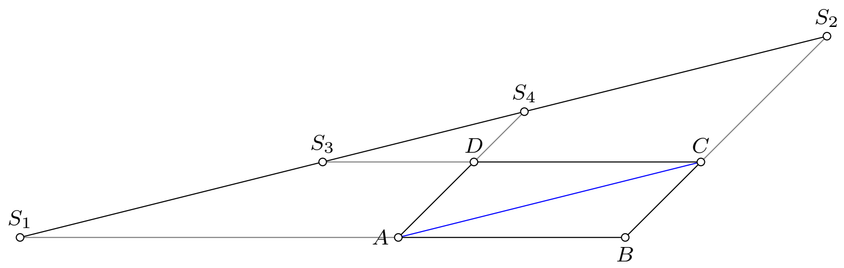
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Trapezinnenwinkel am gleichen Schenkel sind zusammen je 180°. Die Strecken von M zu den Eckpunkten sind die Winkelhalbierenden der Innenwinkel. Daher gilt

$$\angle MDA + \angle DAM = \frac{\alpha + \delta}{2} = 90^\circ$$

Nach dem Innenwinkelsatz für das Dreieck AMD folgt, dass der gesuchte Winkel ebenfalls 90° groß ist. Ebenso gilt das Gesagte am anderen Schenkel des Trapezes.

Aufgabe 030735:
Zeichne ein Parallelogramm und eine außerhalb des Parallelogramms liegende Gerade, die zu einer der Diagonalen des Parallelogramms parallel ist! Verlängere die Seiten des Parallelogramms so, dass sie die Gerade schneiden!
Beweise, dass die beiden von den Verlängerungen je zweier Parallelseiten auf der Geraden begrenzten Abschnitte gleich groß sind!

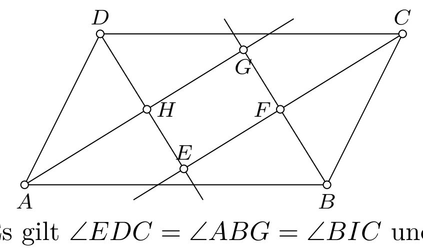
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Die beiden Abschnitte sind zur selben Diagonalen parallel und als Parallelogrammseiten auch genau so lang wie diese Diagonalen, also sind sie auch untereinander gleich lang.
In der Darstellung gilt z. B. $S_1S_3 = AC = S_4S_2$.

Aufgabe 040732:
Zeichne ein nicht gleichseitiges Parallelogramm, und beweise, dass die Schnittpunkte der Winkelhalbierenden dieses Parallelogramms die Eckpunkte eines Rechteckes sind!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Entsprechend der Aufgabenstellung muss der Beweis nur für das gezeichnete Parallelogramm geführt werden. Wir betrachten als Beispiel den abgebildeten Fall und wählen von den verschiedenen Beweismöglichkeiten, bei denen auch Drehungen und Parallelverschiebungen verwendet werden können, die folgende:

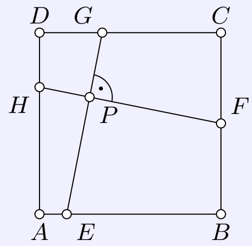
Es gilt $\angle EDC = \angle ABG = \angle BIC$ und damit $EH \parallel FG$. Entsprechend beweist man $HG \parallel EF$. Also ist $EFGH$ ein Parallelogramm.
Bezeichnet R einen rechten Winkel, so gilt

$$\angle AGB = 2R - \frac{1}{2}\angle DAB - \frac{1}{2}(2R - \angle DAB) = R$$

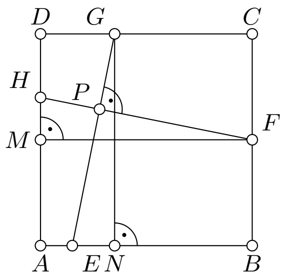
Das Parallelogramm $EFGH$ ist daher ein Rechteck.

Aufgabe 040734:

Durch einen Punkt P im Inneren eines Quadrates $ABCD$ werden zwei aufeinander senkrecht stehende Geraden so gelegt, dass jede Gerade zwei gegenüberliegende Seiten des Quadrates schneidet (siehe Abbildung).
Beweise, dass die beiden Strecken EG und HF gleich lang sind!



Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Wir legen durch F die Parallele zu AB und durch G die Parallele zu BC.
Es entstehen die Punkte M und N (siehe Abbildung). Dann gilt $NG = MF$; $\angle MFH = \angle NGE$ wegen $MF \perp NG$, $HF \perp EG$. Daraus folgt die Kongruenz der Dreiecke $\triangle ENG$ und $\triangle HMF$.
Also gilt: $EG = HF$.

Aufgabe 050735:
In dem Trapez $ABCD$ sei $AB \parallel DC$. Ferner gelte $AD = DC = CB$.
Beweise, dass die Diagonale AC den Winkel $\angle DAB$ halbiert!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Sei $\angle BAD := \alpha$. Dann ist auch $\angle ABC = \alpha$, da $AD = BC$ und damit das Trapez gleichschenklig ist. Daraus ergibt sich analog: $\angle ADC = \angle BCD = 180° - \alpha$.
Nun gilt, dass das Dreieck $\triangle ACD$ gleichschenklig ist, da $AD = CD$. Mit $\angle CAD = \angle ACD := \beta$ gilt in diesem Dreieck:

$$\angle CAD + \angle ACD + \angle ADC = 180° \qquad \text{Innenwinkelsummensatz im Dreieck}$$

also $\beta = \frac{\alpha}{2}$. Damit halbiert β den Winkel α oder anders: die Diagonale AC halbiert den Winkel $\angle DAB$.

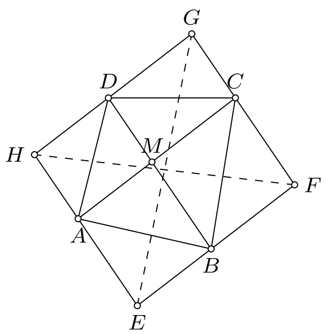
Aufgabe 070731:
Die Seiten eines Sechsecks, bei dem keine Seite zu einer anderen parallel verläuft, werden über die Eckpunkte hinaus verlängert.
Wie viel neue Schnittpunkte können dabei höchstens entstehen?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Lösung läuft auf die Frage hinaus: „Wie viel Schnittpunkte können 6 Geraden maximal haben, wenn keine von ihnen zu einer anderen parallel verläuft?“ Dabei ist am Schluss die Anzahl der Eckpunkte des Sechsecks zu subtrahieren.

Jede Gerade kann mit den übrigen 5 Geraden höchstens 5 Schnittpunkte haben. Bei 6 Geraden erhält man also höchstens $6 \cdot \frac{5}{2} = 15$ Schnittpunkte, da zu jedem Schnittpunkt in diesem Falle genau 2 Geraden gehören. Da die Ecken des Sechsecks 6 dieser Schnittpunkte darstellen, können also höchstens 9 neue Schnittpunkte entstehen.

Aufgabe 090733:
Beweise folgenden Satz!
Ist $ABCD$ ein konvexes Viereck, so ist seine Fläche inhaltsgleich der Fläche jedes Dreiecks, bei dem zwei Seiten gleichlang den Diagonalen des Vierecks sind und als Winkel einen der Schnittwinkel der Diagonalen einschließen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



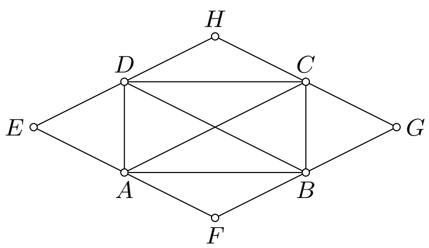
Es sei M der Schnittpunkt der Diagonalen. Man zieht die Parallelen zu den Diagonalen durch die Punkte A, B, C und D. Sie mögen sich in den Punkten E, F, G, H schneiden.
Dann ist $EFGH$ laut Konstruktion ein Parallelogramm, dessen Fläche bei geeigneter Wahl der Bezeichnungen E, F, G, H aus den Flächen der vier Parallelogramme $AMDH$, $BMAE$, $CMBF$ und $DMCG$ zusammengesetzt ist.

Da diese Teilparallelogramme durch die Strecken AB, BC, CD und DA halbiert werden, ist der Flächeninhalt des Parallelogramms $EFGH$ doppelt so groß wie der des Vierecks $ABCD$.

Daher ist der Flächeninhalt jedes Dreiecks, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht und folglich einem der Dreiecke $\triangle EFG$, $\triangle EFH$ kongruent ist, jeweils gleich dem des Vierecks $ABCD$.

Aufgabe 090735:
Beweise folgenden Satz!
Zieht man durch jeden Eckpunkt eines Rechtecks die Parallele zu derjenigen Diagonale, auf der der betreffende Eckpunkt nicht liegt, so bilden die Schnittpunkte dieser vier Parallelen die Ecken eines Rhombus.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Voraussetzung: $ABCD$ ist ein Rechteck, E, F, G, H sind so gelegen, dass A auf EF, B auf FG, C auf GH, D auf HE liegt und $FG \parallel AC \parallel EH$ sowie $EF \parallel DB \parallel HG$ gilt.

Behauptung: $EFGH$ ist ein Rhombus.

Beweis: Nach Voraussetzung ist $EFBD$ ein Parallelogramm, also gilt $EF = DB$. Ebenso erhält man: $HG = DB$, $FG = AC$, $EH = AC$.

Da im Rechteck $ABCD$ ferner $AC = DB$ gilt, folgt aus den vorigen Gleichungen $EH = FG = HG = EH$ und damit die Behauptung.

Aufgabe 110733:
Gegeben sei ein Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge a. Auf BC liege ein Punkt P_1 derart, dass $BP_1 = P_1C$ gilt, auf CD liege ein Punkt P_2 mit $P_2D = 3CP_2$ und auf DA liege ein Punkt P_3 mit $P_3A = 3DP_3$.

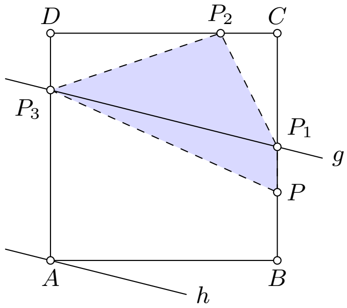
Ein Punkt P wandere auf Seiten des Quadrates von P_1 über B und A nach P_3.

Es sei nun A_Q der Flächeninhalt des Quadrates $ABCD$ und A_V der des Vielecks $PP_1P_2P_3$.
Ermittle sämtliche Lagen von P, für die das Verhältnis $A_Q : A_V$

a) am größten,
b) am kleinsten ist!

Berechne das Verhältnis für jeden der beiden Fälle!
Dabei sei auch zugelassen, dass P mit P_1 bzw. P_3 zusammenfällt, falls hierbei eines der gesuchten Verhältnisse auftritt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Laut Aufgabe gilt:

$$AB = BC = CD = DA = a \quad ; \quad BP_1 = P_1C = \frac{a}{2}$$

$$CP_2 = DP_3 = \frac{a}{4} \quad ; \quad AP_3 = P_2D = \frac{3a}{4}$$

Das Vieleck $PP_1P_2P_3$ hat genau dann den kleinsten Flächeninhalt, wenn das Dreieck $\triangle P_1PP_3$ (zur Strecke P_1P_3 entartet ist und damit) den kleinsten möglichen Flächeninhalt 0 hat.
Dies tritt genau dann ein, wenn $P = P_1$ oder $P = P_3$ gilt. In diesem Falle ist der Flächeninhalt des Vielecks $PP_1P_2P_3$ gleich dem des Dreiecks $\triangle P_1P_2P_3$.

Der Flächeninhalt des Vielecks $PP_1P_2P_3$ ist genau dann am größten, wenn der des Dreiecks $\triangle PP_1P_3$ am größten ist, weil die Dreiecke auf verschiedenen Seiten der Geraden g liegen. Dies ist genau dann der Fall, wenn der Punkt P den größten Abstand von P_1P_3 hat.
Zieht man durch A die Parallele h zu der Geraden g durch P_1 und P_3, dann erkennt man, dass unter allen möglichen Lagen des Punktes P dieser genau im Falle $P = A$ den größten Abstand von der fest vorgegebenen Seite P_1P_3 hat; denn für alle anderen Lagen des Punktes P liegt dieser im Innern des von g und h begrenzten Parallelenstreifens oder auf g, weil P_3A nach Voraussetzung größer als P_1B ist.

a) Den Flächeninhalt AD des Dreiecks $\triangle P_1P_2P_3$ erhält man, wenn man vom Flächeninhalt A_Q des Quadrates $ABCD$ die Flächeninhalte der Dreiecke $\triangle P_2P_1C$ und $\triangle P_3P_2D$ sowie den Flächeninhalt des Trapezes P_1P_3AB subtrahiert. Es gilt daher

$$A_D = a^2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{4} - \frac{1}{2}\cdot\frac{3a}{4}\cdot\frac{a}{4} - \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}+\frac{3a}{4}\right)\cdot a = a^2 - \frac{a^2}{16} - \frac{3a^2}{32} - \frac{5a^2}{8} = \frac{7a^2}{32}$$

Das gesuchte Verhältnis der Flächeninhalte beträgt in diesem Falle, wegen $A_Q = a^2$ und $A_V = A_D$

$$A_D : A_Q = \frac{7a^2}{32} : a^2 = 7 : 32$$

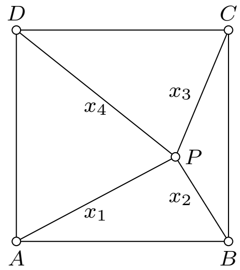
b) Entsprechend kann der Flächeninhalt A_V des Vierecks $P_1P_2P_3A$ ermittelt werden:

$$A_v = a^2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{4} - \frac{1}{2}\cdot\frac{3a}{4}\cdot\frac{a}{4} - \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot a = a^2 - \frac{a^2}{16} - \frac{3a^2}{32} - \frac{a^2}{4} = \frac{19a^2}{32}$$

Das gesuchte größte Verhältnis der Flächeninhalte beträgt also $A_V : A_Q = 19 : 32$.

Aufgabe 110735:
Beweise den folgenden Satz:
Ist P ein Punkt, der im Innern oder auf dem Rande eines Quadrates $ABCD$ liegt, so ist die Summe der Längen der Verbindungsstrecken von P mit den vier Eckpunkten A, B, C, D größer als die doppelte Länge einer Quadratseite!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Es sei $AB = BC = CD = DA = a$. Ferner sei P ein Punkt der Quadratfläche, und es gelte: $AP = x_1, BP = x_2, CP = x_3, DP = x_4$.
Dann gilt unter Benutzung der Dreiecksungleichung:

$$(1) \quad x_1 + x_2 \geq a \quad , \quad (2) \quad x_2 + x_3 \geq a,$$
$$(3) \quad x_3 + x_4 \geq a \quad , \quad (4) \quad x_4 + x_1 \geq a.$$

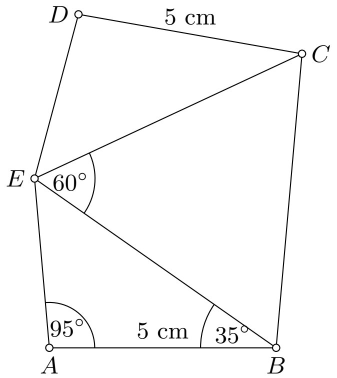
Dabei gilt in (1), in (2), in (3) bzw. in (4) das Gleichheitszeichen nur dann, wenn P auf AB, auf BC, auf CD bzw. auf DA liegt. Da dies bei keiner Lage von P für alle vier Seiten AB, BC, CD, DA gleichzeitig zutrifft, gilt bei keiner Lage von P in allen vier Beziehungen (1), (2), (3), (4) das Gleichheitszeichen.
Somit ergibt sich stets $2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 > 4a$ und daher $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 > 2a$

Aufgabe 120733:
Konstruiere ein konvexes Fünfeck $ABCDE$, das folgende Eigenschaften hat:

(1) $AB = CD = 5$ cm,
(2) $\angle EAB = \angle ABC = 95°$,
(3) $BC = CE = BE$,
(4) $AE = ED$.

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die Bedingungen (1) bis (4) ein konvexes Fünfeck $ABCDE$ bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



(I) Angenommen, $ABCDE$ sei ein Fünfeck, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht.
Dann ist $\triangle BCE$ gleichseitig, also gilt $\angle CBE = 60°$. Ferner liegen A und C nicht auf derselben Seite der Geraden durch die Punkte B und E, da $ABCDE$ konvex ist. Daher gilt:

$$\angle ABE = \angle ABC - \angle CBE = 95° - 60° = 35°$$

(II) Daher erfüllt ein Fünfeck $ABCDE$ nur dann die Bedingungen der Aufgabe, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(a) Wir konstruieren ein Dreieck $\triangle ABE$ aus $AB = 5$ cm, $\angle EAB = 95°$ und $\angle ABE = 35°$.
(b) Wir schlagen die Kreise um B und E mit dem Radius BE. Schneiden sie sich in einem Punkt, der nicht auf derselben Seite der Geraden durch B und E wie A liegt, so sei dieser C genannt.
(c) Wir schlagen den Kreis um C mit dem Radius 5 cm und den Kreis um E mit dem Radius AE. Schneiden sie sich in einem nicht auf derselben Seite der Geraden durch C und E wie B liegenden Punkt, so sei dieser D genannt.

(III) Beweis, dass jedes so konstruierte Fünfeck $ABCDE$ den Bedingungen der Aufgabe entspricht:

Nach Konstruktion ist $AB = CD = 5$ cm, $BC = CE = BE$, $AB = DE$, also sind (1), (3), (4) erfüllt. Ferner ist $\angle EAB = 95°$, $\angle ABE = 35°$, und, da $\triangle BCE$ gleichseitig ist, $\angle CBE = \angle BCE = \angle BEC = 60°$. Da A und C auf verschiedenen Seiten der Geraden durch B und E liegen, gilt

$$\angle ABC = \angle ABE + \angle CBE = 35° + 60° = 95°$$

also ist auch (2) erfüllt, und es gilt

$$\angle AEB = 180° - 95° - 35° = 50°$$

Weiterhin ist $\triangle DCE = \triangle ABE$ (sss), also $\angle EDC = 95°$, $\angle DCE = 35°$ und $\angle DEC = 50°$.
Da ferner B und D auf verschiedenen Seiten der Geraden durch C und E liegen, gilt

$$\angle BCD = \angle BCE + \angle DCE = 60° + 35° = 95°$$

Schließlich gilt:

$$\angle AED = \angle AEB + \angle BEC + \angle DEC = 50° + 60° + 50° = 160°$$

Also hat $ABCDE$ an allen fünf Ecken Innenwinkel, deren jeder kleiner als 180° ist, ist somit konvex.

(IV) Konstruktionsschritt (a) ist wegen $95° + 35° < 180°$ nach dem Kriterium wsw bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar.
Ebenso ist Konstruktionsschritt (b) aus bekannten Gründen eindeutig ausführbar, d. h., es existiert genau ein solcher Schnittpunkt C.
Schließlich ist auch Konstruktionsschritt (c) aus bekannten Gründen eindeutig ausführbar. Das Fünfeck $ABCDE$ ist somit durch die Bedingungen (1) bis (4) bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.

Aufgabe 150733:
Untersuche, ob sich in der Ebene fünf (paarweise) verschiedene Geraden so zeichnen lassen, dass sie genau drei Schnittpunkte miteinander haben, d. h., ob es in einer Ebene 5 (paarweise) verschiedene Geraden p, q, r, s, t und 3 (paarweise) verschiedene Punkte A, B, C so gibt, dass jeder der Punkte A, B, C der Schnittpunkt (mindestens) zweier der Geraden p, q, r, s, t ist und dass jeder Schnittpunkt (mindestens) zweier dieser Geraden einer der Punkte A, B, C ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Behauptung: Es gibt keine 5 Geraden und 3 Punkte, die die Bedingungen der Aufgabe erfüllen.

Beweis: Angenommen, es gäbe 5 derartige Geraden p, q, r, s, t und 3 derartige Punkte A, B, C. Dann lassen sich 2 Fälle unterscheiden:

a) Die Punkte A, B, C liegen auf einer und derselben Geraden (etwa p).
b) Die Punkte A, B, C liegen nicht auf einer und derselben Geraden.

Fall a) Es geht laut Aufgabe noch (mindestens) je eine weitere der genannten Geraden durch A bzw. B bzw. C. Da kein weiterer Schnittpunkt auftreten soll, müssen diese 3 Geraden (etwa q, r, s) zueinander parallel sein. Jede weitere (fünfte) Gerade durch einen der Punkte A, B, C ist nun zu q, r und s nicht parallel und erzeugt daher (mindestens) einen weiteren (vierten) Schnittpunkt, entgegen der Annahme.

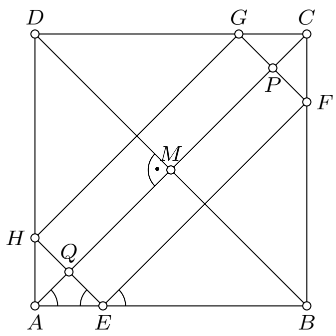
Fall b) Es können entweder die A, B, C enthaltenden Geraden (etwa p, q, r) jede genau einen dieser Punkte enthalten und zueinander parallel sein, dann liefert bereits jede vierte Gerade, die durch einen der Punkte A, B, C verläuft, (mindestens) einen weiteren Schnittpunkt, da sie zu p, q, r nicht parallel ist, oder (mindestens) eine der Geraden (etwa p) enthält zwei der Punkte A, B, C (etwa A, B).

Dann kann von den (mindestens) zwei Geraden, die sich im dritten der Punkte (C) schneiden, nur die eine (q) außer durch C auch noch durch einen der Punkte A, B (etwa A) verlaufen und die andere (r) entweder zu p parallel sein oder durch C und B verlaufen, da andernfalls ein weiterer Schnittpunkt entstünde.

Das heißt, es lassen sich durch C höchstens drei Geraden (q, r, s) unter den Bedingungen der Aufgabe legen, wenn p durch A und B verläuft. Jede weitere Gerade (t) durch einen der Punkte A, B ist stets zu (mindestens) drei der Geraden p, q, r, s nicht parallel und liefert daher (mindestens) einen weiteren Schnittpunkt, entgegen der Annahme. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Aufgabe 170736:
In einem Quadrat $ABCD$ habe die Diagonale AC eine Länge von 10,0 cm.
a) Konstruiere ein solches Quadrat! Beschreibe und begründe deine Konstruktion!
b) Ein Rechteck $EFGH$ heißt dann dem Quadrat $ABCD$ einbeschrieben, wenn bei geeigneter Bezeichnung E auf AB, F auf BC, G auf CD und H auf DA liegt. Dabei gilt $EF \parallel AC$.
Ermittle für jedes derartige Rechteck $EFGH$ seinen Umfang!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



a) Da in jedem Quadrat die Diagonalen aufeinander senkrecht stehen, einander gleich lang sind und einander halbieren, liegen die Eckpunkte B und D erstens auf der Mittelsenkrechten von AC und zweitens auf dem Kreis mit dem Radius $\frac{AC}{2}$ um den Mittelpunkt von AC.
Daher entspricht ein Quadrat $ABCD$ nur dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

1. Wir zeichnen eine Strecke AC der Länge $AC = 10{,}0$ cm und konstruieren ihre Mittelsenkrechte.
2. Wir beschreiben um den Mittelpunkt M der Strecke AC den Kreis mit dem Radius $\frac{1}{2}AC$.
3. Schneidet der Kreis die Mittelsenkrechte in zwei Punkten, so seien diese B bzw. D genannt. $ABCD$ ist das gesuchte Quadrat.

Beweis: Laut Konstruktion gilt $BD \perp AC$. Ferner gilt laut Konstruktion $AM = CM = BM = DM$. Folglich sind nach dem Kongruenzsatz (sws) die Dreiecke AMB, BMC, CMD und DMA zueinander kongruent. Also gilt: $AB = BC = CD = DA$.
Da die erwähnten Dreiecke ferner rechtwinklig-gleichschenklig mit der Spitze in M sind, sind ihre Basiswinkel je 45° groß. Da schließlich jeder der Winkel $\angle ABC, \angle BCD, \angle CDA, \angle DAB$ gleich der Summe zweier dieser Basiswinkel ist, hat jeder von ihnen die Größe 90°. Folglich ist $ABCD$ ein Quadrat, und es hat die vorgeschriebene Diagonalenlänge.

b) Dem Quadrat $ABCD$ sei ein Rechteck $EFGH$ so einbeschrieben, wie es in der Aufgabenstellung angegeben ist. FG schneide die Diagonale AC in P und HE die Diagonale AC in Q. Da die Diagonale eines Quadrates als Symmetrieachse die Innenwinkel halbiert, gilt $\angle CAB = 45°$.
Wegen $EF \parallel AC$ folgt $\angle CAB = \angle FEB = 45°$ als Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen und wegen $\angle FEH = 90°$ folgt $\angle HEA = 45°$. Somit ist das Dreieck AEQ wegen der gleichgroßen Basiswinkel gleichschenklig, und es gilt $AQ = QE$.
Analog gilt $AQ = HQ$, also $EH = 2AQ$. Entsprechend folgt $FG = 2CP$. Wegen $EH = FG$ folgt hieraus $AQ = CP$. Schließlich gilt wegen $EF \parallel QP$ und $EQ \parallel FP$ auch $EF = QP$.

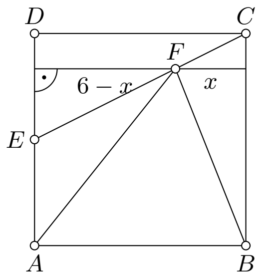
Für den Umfang u des Rechtecks $EFGH$ gilt folglich:

$$u = 2(EF + EH) = 2(QP + AQ + CP) = 2AC$$

Der Umfang jedes derartigen Rechtecks $EFGH$ beträgt somit 20,0 cm.

Aufgabe 190736:
Es sei $ABCD$ ein Quadrat mit der Seitenlänge 6 cm und E der Mittelpunkt der Seite AD. Auf CE sei ein Punkt F so gelegen, dass die Flächen der Dreiecke AFE und BCF inhaltsgleich sind.
Ermittle den Flächeninhalt des Dreiecks ABF!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Das Lot von F auf CB habe die Länge x cm, das Lot von F auf AD hat dann die Länge $(6-x)$ cm. Da die Flächeninhalte der Dreiecke AFE und BCF gleich sind und E Mittelpunkt von AD ist, gilt

$$\frac{1}{2}\cdot 3\cdot(6-x)=\frac{1}{2}\cdot 6x \qquad \text{also} \qquad x=2$$

folgt.
Für die Flächeninhalte A_{ABF}, A_{ECD}, A_{BCF}, A_{ABCD} der Dreiecke ABF, ECD, BCF bzw. des Quadrates $ABCD$ gilt

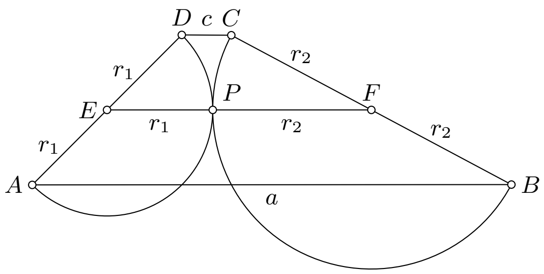
$$A_{ABF}=A_{ABCD}-A_{ECD}-2A_{BCF} \qquad A_{ABCD}=36\text{ cm}^2$$

$$A_{ECD}=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 3\text{ cm}^2=9\text{ cm}^2 \qquad A_{BCF}=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 6\text{ cm}^2=6\text{ cm}^2$$

Folglich ist $A_{ABF}=15\text{ cm}^2$.

Aufgabe 200735:
Von einem Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ wird vorausgesetzt, dass sich die beiden Kreise, die die Seiten AD bzw. BC des Trapezes als Durchmesser haben, von außen berühren.
Beweise aus dieser Voraussetzung, dass die Summe der Längen der Seiten AB und CD gleich der Summe der Längen der Seiten AD und BC ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Die Mittelpunkte der genannten Kreise seien E bzw. F, ihre Radien r_1 bzw. r_2. Da EF die Mittellinie des Trapezes ist, gilt $EF=\frac{1}{2}(AB+CD)$.
Ferner ist EF die Verbindungsstrecke der Mittelpunkte zweier sich von außen berührender Kreise mit den Radien r_1, r_2, also gilt $EF=r_1+r_2$. Daraus folgt $AB+CD=2\cdot EF=2(r1+r2)$.
Andererseits haben die Durchmesser AD bzw. BC der genannten Kreise die Längen $AD=2r_1$, $BC=2r_2$.

Somit gilt $AD+BC=2r_1+2r_2=2(r_1+r_2)=AB+CD$.

Aufgabe 210731:
In einer Mathematikstunde zeichnet der Lehrer genau zehn Vierecke an die Wandtafel und fordert die Schüler auf, Aussagen über diese zu treffen. Er erhält folgende Antworten:

Axel: „An der Tafel befinden sich mindestens zwei Quadrate."
Beate: „An der Tafel sind genau doppelt so viele Rechtecke wie Quadrate."
Christa: „An der Tafel ist genau ein Parallelogramm."
Detlev: „An der Tafel sind genau doppelt so viele Trapeze wie Rechtecke."

Der Lehrer teilt danach der Klasse mit, dass genau eine dieser vier Aussagen falsch war.

a) Von wem kam die falsche Aussage?
b) Ermittle für die einzelnen Arten von Vierecken jeweils die Anzahl der Vierecke dieser Art an der Tafel, soweit diese Anzahl aus den vorliegenden Angaben hervorgeht!
c) Skizziere, wie nach diesen Angaben das Tafelbild ausgesehen haben könnte!

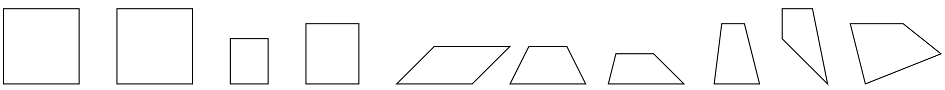
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Angenommen, die Aussage von Axel wäre falsch.
Dann befände sich an der Wandtafel entweder kein oder genau ein Quadrat; ferner wären dann die anderen drei Aussagen wahr. In dem Fall, dass kein Quadrat an der Tafel wäre, folgte: Nach den wahren Aussagen von Beate und Detlev wäre kein Trapez an der Tafel, nach der Aussage von Christa aber ein Parallelogramm. Das ist ein Widerspruch, da jedes Parallelogramm ein Trapez ist.

In dem Fall, dass genau ein Quadrat an der Tafel wäre, folgte:
Nach der Aussage von Beate wären zwei Rechtecke an der Tafel, nach der Aussage von Christa aber nur ein Parallelogramm. Das ist ein Widerspruch, da jedes Rechteck ein Parallelogramm ist.

Also ist Axels Aussage wahr; es befinden sich mindestens zwei Quadrate an der Tafel.
Daher und weil jedes Quadrat ein Parallelogramm ist, ist Christas Aussage falsch. Die Aussagen von Beate und Detlev sind somit wahr.

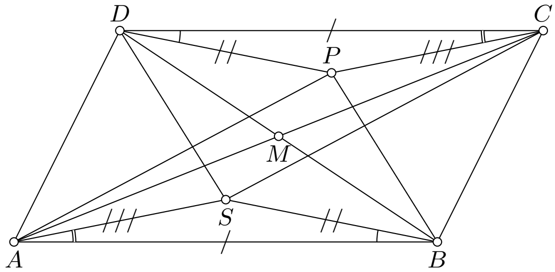
b) Wären mindestens drei Quadrate an der Tafel, so wären folglich mindestens zwölf Trapeze an der Tafel. Das ist ein Widerspruch, da nur zehn Vierecke gezeichnet wurden.
Daher waren genau zwei Quadrate an der Tafel. Hiernach waren genau vier Rechtecke an der Tafel. Da jedes Quadrat ein Rechteck ist, waren es also außer den zwei Quadraten noch genau zwei Rechtecke, die nicht Quadrate waren. Ferner waren genau acht Trapeze an der Tafel. Da jedes Rechteck ein Trapez ist, waren es also außer den vier Rechtecken noch genau vier Trapeze, die nicht Rechtecke waren. Schließlich waren somit von den zehn Vierecken außer den acht Trapezen genau zwei Vierecke, die nicht Trapeze waren.

c) Ein mögliches Tafelbild für diese Mathematikstunde ist:



Aufgabe 210735:
Es sei $ABCD$ ein beliebiges Parallelogramm, und es sei P ein beliebiger Punkt im Innern dieses Parallelogramms, der nicht auf einer seiner Diagonalen liegt. Ferner sei S der Schnittpunkt der Parallelen durch B zu PD und durch D zu PB.
Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen das Viereck $ASCP$ stets ein Parallelogramm ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Das Viereck $DSBP$ ist auf Grund der Voraussetzungen ein Parallelogramm, und es gilt deshalb $SB = DP$, $SB \parallel DP$.
Aus $AB \parallel CD$ und $SB \parallel DP$ folgt $\angle SBA = \angle PDC$. Wegen $AB = CD$ und $SB = DP$ und $\angle SBA = \angle PDC$ gilt (nach wsw) $\triangle ABS = \triangle CDP$. Aus der Kongruenz dieser Dreiecke folgt $AS = CP$.

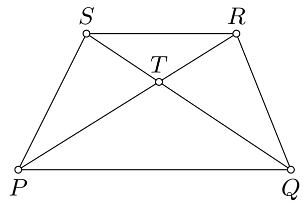
In analoger Weise lässt sich $AP = CS$ nachweisen. Folglich ist das Viereck $ASCP$ ein Parallelogramm.

2. Lösungsweg:

M sei Diagonalenschnittpunkt im Parallelogramm $ABCD$. Dann ist, da die Diagonalen im Parallelogramm einander halbieren, M auch Diagonalenschnittpunkt im Parallelogramm $DSBP$. Mithin ist M gemeinsamer Halbierungspunkt von AC und SP, und $ASCP$ ist daher ein Viereck, in dem die Diagonalen einander halbieren, also ein Parallelogramm.

Aufgabe 220735:
Beweise folgenden Satz!
Wenn $PQRS$ ein Trapez mit $PQ \parallel SR$ ist und wenn T der Schnittpunkt der Diagonalen PR und QS ist, dann haben die Dreiecke PST und QRT einander gleichen Flächeninhalt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Wegen $PQ \parallel SR$ haben die Dreiecke PQS und PQR zu ihrer gemeinsamen Seite PQ als Grundlinie gleichlange Höhen. Also haben sie einander gleichen Flächeninhalt.
Subtrahiert man von ihm den Flächeninhalt des Dreiecks PQT, so ergibt sich, dass die Dreiecke PST und QRT einander gleichen Flächeninhalt haben.

Aufgabe 230732:
Beweise, dass jedes Viereck $ABCD$, in dem die Innenwinkel $\angle ABC$, $\angle BCD$ und $\angle CDA$ die Größen 2α, 3α bzw. 4α haben (wo α die Größe des Innenwinkels $\angle DAB$ bezeichnet), ein Trapez ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Nach dem Satz über die Innenwinkelsumme im Viereck gilt für jedes Viereck mit den genannten Innenwinkelgrößen

$$\alpha + 2\alpha + 3\alpha + 4\alpha = 360^\circ$$

Daraus folgt

$$\angle DAB + \angle CDA = \alpha + 4\alpha = 180^\circ$$

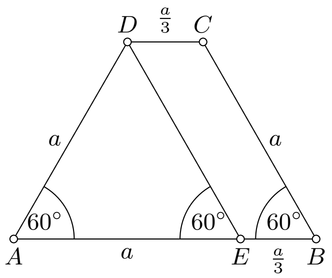
Nach der Umkehrung des Satzes über entgegengesetzt liegende Winkel an geschnittenen Parallelen gilt somit $AB \parallel DC$, also ist $ABCD$ ein Trapez.

Aufgabe 240736:
Ein Viereck $ABCD$ habe folgende Eigenschaften:

(1) $AB \parallel DC$ und $AD \nparallel BC$,
(2) $AD = BC = 3 \cdot DC = a$, wobei a eine gegebene Länge ist,
(3) $\angle BAD = 60^\circ$.

Ermittle den Umfang u dieses Vierecks in Abhängigkeit von a!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Wegen (1) und (2) ist $ABCD$ ein gleichschenkliges Trapez. Wegen (3) gilt daher
(4) $\angle CBA = 60°$.
Die Parallele zu BC durch D schneide AB in E. Da Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen gleichgroß sind, folgt hieraus und aus (4)
(5) $\angle DEA = 60°$.
Hieraus und aus (3) (sowie dem Winkelsummensatz) folgt dann, dass das Dreieck AED gleichseitig ist. Wegen (2) gilt daher
(6) AE = AD = a.
Da $BC \parallel ED$ und wegen (1) auch $EB \parallel DC$ gilt, ist $EBCD$ ein Parallelogramm. Hieraus und aus (2) folgt dann
(7) $EB = DC = \frac{a}{3}$.
Für den Umfang u des Vierecks $ABCD$ gilt daher

$$u = AE + EB + BC + CD + DA = a + \frac{a}{3} + a + \frac{a}{3} + a = \frac{11}{3}a$$

Aufgabe 250733:
Für ein Viereck $ABCD$ werden die folgenden Bedingungen (1), (2), (3) gefordert:

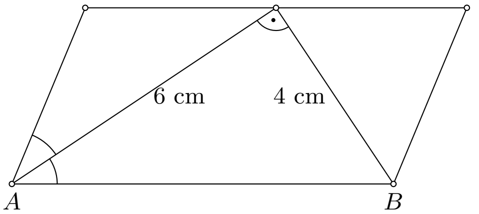
(1) $ABCD$ ist ein Parallelogramm.
(2) Die Winkelhalbierenden von $\angle BAD$ und $\angle ABC$ schneiden sich in einem Punkt E, der auf der Geraden durch C und D liegt.
(3) Es gilt $AE = 6{,}0$ cm und $BE = 4{,}0$ cm.

a) Beweise, dass jedes Viereck $ABCD$, das diese Bedingungen erfüllt, aus den gegebenen Längen 6,0 cm und 4,0 cm konstruiert werden kann!
b) Beschreibe eine solche Konstruktion!
c) Beweise, dass jedes Viereck $ABCD$, das nach deiner Beschreibung konstruiert wird, die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Für jedes Viereck $ABCD$, das (zusammen mit einem Punkt E) die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt, gilt:

Nach (1), also $BC \parallel AD$, ist $\angle BAD + \angle ABC = 180°$. Nach (2) ergibt sich durch Halbieren $\angle BAE + \angle ABE = 90°$; hieraus folgt nach dem Innenwinkelsatz, dass $\angle AEB$ ein rechter Winkel ist.
Nach (3) liegen A und B so auf seinen Schenkeln, dass $EA = 6{,}0$ cm und $EB = 4{,}0$ cm gilt. Nach (1) ist die Gerade p durch C und D eine Parallele zu AB; nach (2) geht sie durch E.
Auf dieser Geraden p liegt D; ferner liegt D nach (2) auf dem Schenkel AD des Winkels $\angle BAD$, der doppelt so groß ist wie $\angle BAE$.
Auch C liegt auf der Geraden p; ferner liegt C nach (1) auch auf der Parallelen q durch B zu AD.

Damit ist bewiesen, dass jedes Viereck $ABCD$, das (1), (2), (3) erfüllt, nach der folgenden Beschreibung konstruiert werden kann:



b) (I) Man konstruiert einen rechten Winkel mit dem Scheitel E.
(II) Von E aus trägt man auf einem Schenkel dieses Winkels die Strecke EA der Länge 6,0 cm und auf dem anderen Schenkel die Strecke EB der Länge 4,0 cm ab.
(III) Man konstruiert die Parallele p durch E zu AB.
(IV) In A trägt man an AE nach derjenigen Seite, auf der B nicht liegt, den Winkel der Größe $\angle BAE$ ab und bezeichnet den Schnittpunkt von seinem freien Schenkel und von p mit D.

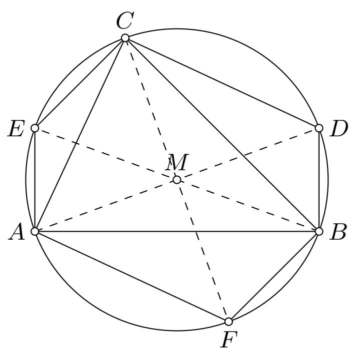
(V) Man konstruiert die Parallele q durch B zu AD und bezeichnet den Schnittpunkt von p und von q mit C.

c) Für jedes Viereck $ABCD$, das nach dieser Beschreibung konstruiert wird, gilt:

Nach (III) und (V) ist $DC \parallel AB$ und $BC \parallel AD$, also (1) erfüllt. Nach (V) und (IV) ist p die Gerade durch C und D, auf ihr liegt E; durch E geht nach (IV) die Winkelhalbierende von $\angle BAD$.
Nach (I) und dem Innenwinkelsatz ist ferner $\angle BAE + \angle ABE = 90°$; nach (IV) folgt hieraus durch Verdoppeln $\angle BAD + 2 \cdot \angle ABE = 180°$.
Andererseits folgt aus $BC \parallel AD$: $\angle BAD + \angle ABC = 180°$. Also ist $2 \cdot \angle ABE = \angle ABC$; somit geht auch die Winkelhalbierende von $\angle ABC$ durch E, folglich ist (2) erfüllt. Nach (II) ist auch (3) erfüllt.

Aufgabe 260733:
Es sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck; sein Umkreis k habe den Mittelpunkt M. Der Strahl aus A durch M schneide k in D, der Strahl aus B durch M schneide k in E, der Strahl aus C durch M schneide k in F.
Ermittle das Verhältnis der Flächeninhalte des Sechsecks $AFBDCE$ und des Dreiecks ABC!

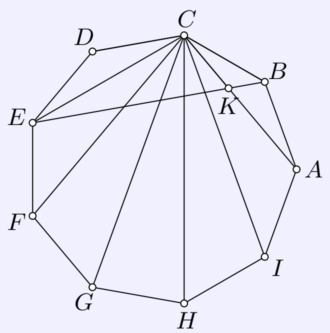
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Da die Dreiecke MFA und MCA in den Seitenlängen MF, MC (Radien von k) und in der Länge der zugehörigen Höhe (Lot von A auf den Durchmesser FC) übereinstimmen, gilt mit der Bezeichnung: Ist PQR ein Vieleck, so bezeichnet $J(PQR)$ seinen Flächeninhalt: $J(MFA) = J(MCA)$.

Entsprechend erhält man $J(MCD) = J(MCA)$, $J(MFB) = J(MCB)$, $J(MCE) = J(MCB)$, $J(MDB) = J(MAB)$, $J(MAE) = J(MAB)$.
Durch Addition dieser Gleichungen ergibt sich $J(AFBDCE) = 2 \cdot J(ABC)$. Das gesuchte Verhältnis beträgt folglich 2:1.

Aufgabe 290732:



Gegeben sei ein regelmäßiges Neuneck $ABCDEFGHI$.

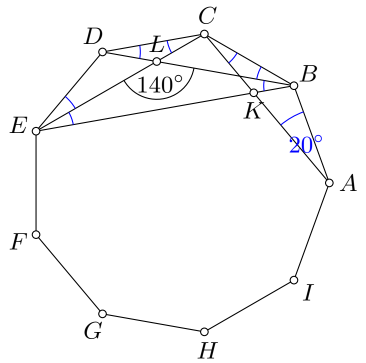
a) Ermittle die Anzahl aller Diagonalen dieses Neunecks!
b) Ermittle die Größe eines Innenwinkels dieses Neunecks!
c) Es sei K der Schnittpunkt der Diagonalen AC und BE. Ermittle die Größe des Winkels $\angle CKE$!

Hinweis: Ein Neuneck heißt genau dann regelmäßig, wenn alle seine Seiten dieselbe Länge und alle seine Innenwinkel dieselbe Größe haben.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Von jeder Ecke des Neunecks gehen genau sechs Diagonalen aus. Addiert man diese (für jede der neun Ecken gebildeten) Anzahlen 6, so hat man in dem entstehenden Ergebnis $9 \cdot 6 = 54$ jede Diagonale genau zweimal erfasst. Also beträgt die Anzahl aller Diagonalen des Neunecks 27.

b) Durch die sechs von einer Ecke ausgehenden Diagonalen wird das Neuneck in genau sieben Dreiecke zerlegt. In jedem dieser Dreiecke beträgt die Summe seiner Innenwinkel 180°.
Addiert man alle Innenwinkel in diesen Dreiecken, so ergibt sich die Summe aller Innenwinkel des Neunecks; diese Summe beträgt folglich $7 \cdot 180°$. Da alle neun Innenwinkel des Neunecks dieselbe Größe haben,

hat jeder dieser Innenwinkel die Größe $\frac{7\cdot 180°}{9} = 140°$.



c) Aus $\angle ABC = \angle BCD = \angle CDE = 140°$ (1) und $AB = BC = CD = DE$ folgt nach dem Basiswinkelsatz und dem Innenwinkelsatz

$$\angle CAB = \angle ACB = \angle DBC = \angle BDC = \angle ECD = \angle CED = 20° \quad (2)$$

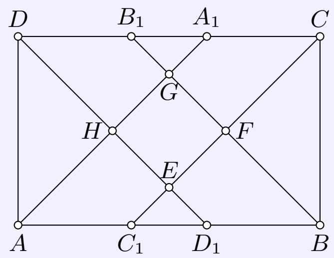
sowie nach dem Kongruenzsatz sws $\triangle BCD = \triangle CDE$, also $BD = CE$. (3)

Ist L der Schnittpunkt von BD mit CE, so folgt ferner aus (2) nach der Umkehrung des Basiswinkelsatzes $CL = DL$. Hieraus und aus (3) ergibt sich $BL = EL$. (4)

Nach dem Scheitelwinkelsatz und dem Innenwinkelsatz sowie wegen (2) ist $\angle BLE = \angle CLD = 180° - 2\cdot 20° = 140°$ Hieraus und aus (4) folgt nach dem Basiswinkelsatz und dem Innenwinkelsatz $\angle BEL = \angle EBL = 20°$. (5)

Aus (1) und (2) folgt ferner $\angle KCE = 140° - 2\cdot 20° = 100°$; daraus und aus (5) ergibt sich nach dem Innenwinkelsatz die gesuchte Winkelgröße $\angle CKE = 180° - 100° - 20° = 60°$.

Aufgabe 300735:
Es sei $ABCD$ ein Rechteck mit den Seitenlinien $AB = a$ und $BC = b$, und es sei $a > b$. Auf AB seien Punkte C_1 und D_1 sowie auf CD die Punkte A_1 und B_1 derart eingezeichnet, dass die Strecken AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 jeweils Winkelhalbierende eines Innenwinkels von $ABCD$ sind.
Die Schnittpunkte E, F, G, H dieser Winkelhalbierenden miteinander seien wie in der Abbildung bezeichnet.
Ermittle den Flächeninhalt I des Vierecks $EFGH$, wenn außerdem vorausgesetzt wird, dass $a = 8$ cm und $b = 5$ cm gilt!



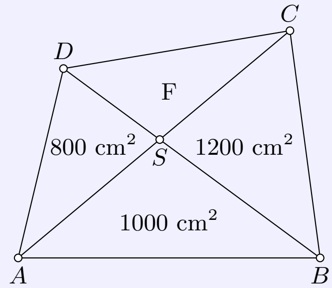
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Da AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, die rechten Winkel bei A, B, C bzw. D halbieren, folgt:
Die Dreiecke $AA_1D, BB_1C, CC_1B, ADD_1$ haben jeweils zwei Innenwinkel der Größen 90°, 45°. Also hat auch jeweils der dritte Innenwinkel die Größe 45°; die Dreiecke sind gleichschenklig-rechtwinklig mit der Kathetenlänge b.
Somit sind AD_1A_1D und C_1BCB_1 Quadrate der Seitenlänge b. Da ihre Diagonalen einander gleichlang sind und sich gegenseitig halbieren, folgt $AH = A1H = BF = B1F = CF = C1F = DH = D1H$.

Ferner sind ADH, BCF sowie C_1D_1E und A_1B_1G Dreiecke mit zwei Innenwinkeln von je 45°, also ebenfalls gleichschenklig-rechtwinklig.
Dabei ist $C_1D_1 = AB - BD_1 = a - 2(a-b) = 2b - a$, und die gleiche Länge hat A_1B_1; folglich ist $C_1E = D_1E = A_1G = B_1G$. Also ist $EFGH$ ein Viereck mit vier Innenwinkeln von 90° und mit $HE = HG = FE = FG$. d. h. ein Quadrat.
Seine Diagonalenlänge beträgt $d = HF = AC_1 = a - b = 3$ cm, da AH und C_1F einander gleichlang und parallel sind, also AC_1FH ein Parallelogramm ist. Da im Quadrat $EFGH$ die Diagonalen gleichlang und senkrecht zueinander sind und einander halbieren, hat in jedem der beiden Dreiecke HFE, HFG die zu HF senkrechte Höhe die Länge $\frac{d}{2}$. Die Summe der Flächeninhalte dieser beiden Dreiecke, d. h. der gesuchte Flächeninhalt von $EFGH$, beträgt folglich

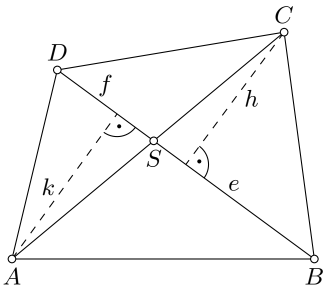
$$I = \frac{1}{2}d^2 = 4{,}5cm^2$$

Aufgabe 320732:

Es sei $ABCD$ ein Viereck, dessen Diagonalen AC und BD sich in einem Punkt S schneiden. Ferner sei vorausgesetzt, dass die Dreiecke ABS, DAS und BCS die Flächeninhalte 1000 cm^2, 800 cm^2 bzw. 1200 cm^2 haben, so wie dies in der Abbildung angegeben ist.
Weise nach, dass durch diese Voraussetzung der Flächeninhalt F des Dreiecks CDS eindeutig bestimmt ist, und ermittle diesen Flächeninhalt!



Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



In den Dreiecken BCS bzw. DAS seien e bzw. f die Längen der Seiten BS bzw. DS, und h bzw. k seien die Längen der auf diesen Seiten senkrechten Höhen.
Dann sind k und h auch in den Dreiecken ABS bzw. CDS die Längen der zu den Seiten BS bzw. DS senkrechten Höhen. Also sind die vorausgesetzten Flächeninhalte bzw. der gesuchte Flächeninhalt

$$\frac{e\cdot k}{2} = 1000cm^2, \quad \frac{f\cdot k}{2} = 800cm^2, \quad \frac{e\cdot h}{2} = 1200cm^2, \quad \frac{f\cdot h}{2} = F$$

Daraus folgt

$$f : e = 800 : 1000 = 4 : 5, \qquad f = \frac{4e}{5}$$

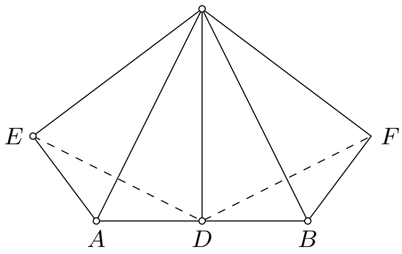
d. h., durch die Voraussetzungen ist eindeutig bestimmt

$$F = \frac{4e\cdot h}{5\cdot 2} = \frac{4}{5}\cdot 1200cm^2 = 960cm^2$$

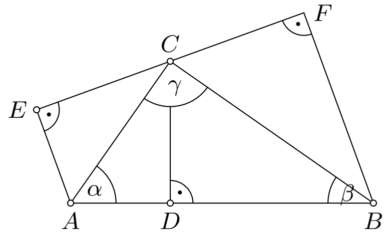
Aufgabe 340733:
Ist ABC ein Dreieck, das nicht stumpfwinklig ist, so bezeichne D den Fußpunkt der auf AB senkrechten Höhe; E sei der Bildpunkt von D bei der Spiegelung an AC, und F sei der Bildpunkt von D bei der Spiegelung an BC.

a) Wie groß ist der Flächeninhalt und der Umfang des Fünfecks $ABFCE$, wenn $AB = 7$ cm und $CD = 4$ cm vorausgesetzt wird.
b) Wie groß ist der Winkel $\angle ACB$, wenn -anders als in a)- vorausgesetzt wird, dass es eine Gerade gibt, auf der die drei Punkte E, C und F liegen?
Beweise auch, dass aus dieser Voraussetzung folgt, dass das Viereck $ABFE$ ein Trapez ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



a)



b)

(a) Da bei Spiegelung jeder Punkt der Geraden, an der gespiegelt wird, fest bleibt und jedes Dreieck in ein kongruentes Dreieck übergeht, gilt $\triangle ACE = \triangle ACD$ und $\triangle BCF = \triangle BCD$ (siehe Abbildung a).

Daher ist der Flächeninhalt von $ABFCE$ doppelt so groß wie der von ABC. Dieser beträgt nach Voraussetzung 1 $2AB \cdot CD = 14$ cm^2, also hat $ABFCE$ den Flächeninhalt 28 cm^2.
Ferner folgt $AE = AD$ und $BF = BD$, also $AE + BF = AB$, sowie $CE = CF = CD$. Damit ergibt sich für den Umfang von $ABFCE$ der Wert $2 \cdot AB + 2CD = 22$ cm.

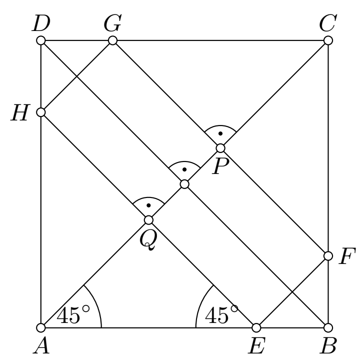
(b) Mit den Bezeichnungen $\angle BAC = \alpha$ und $\angle ABC = \beta$ gilt nach dem Innenwinkelsatz für die Dreiecke ADC und BDC sowie wegen der Spiegelungen $\angle ACE = \angle ACD = 90° - \alpha$ und $\angle BCF = \angle BCD = 90° - \beta$.
Für $\angle ACB = \gamma$ gilt wegen der Voraussetzung $\angle ECF = 180°$ (siehe Abbildung b) daher $90° - \alpha + \gamma + 90° - \beta = 180°$.
Wegen $180° - \alpha - \beta = \gamma$ (Innenwinkelsatz für das Dreieck ABC) folgt $2\gamma = 180°$, also $\gamma = 90°$. Ferner sind wegen $\triangle ACE = \triangle ACD$ und $\triangle BCF = \triangle BCD$, also $\angle AEC = \angle BFC = 90°$ die Strecken AE und BF beide auf EF senkrecht und somit zueinander parallel. Damit ist $ABFE$ als Trapez nachgewiesen.

Aufgabe 340736:
Jemand konstruiert ein Quadrat $ABCD$ mit der Diagonalenlänge $AC = 10$ cm. Dann wählt er auf der Seite AB einen beliebigen Punkt E und konstruiert den Schnittpunkt F von BC mit der Parallelen durch E zu AC, den Schnittpunkt G von CD mit der Parallelen durch F zu BD sowie den Schnittpunkt H von AD mit der Parallelen durch G zu AC.

a) Beweise, dass jedes so zu konstruierende Viereck $EFGH$ ein Rechteck ist!
b) Ermittle für jedes so zu konstruierende Viereck den Umfang!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Da die Diagonalen des Quadrates aufeinander senkrecht stehen, gilt wegen $FG \parallel BD$ auch $FG \perp AC$ (siehe Abbildung).
Da die Diagonalen die Innenwinkel des Quadrates halbieren, gilt für den Schnittpunkt P von FG mit AC ferner $\angle FCP = \angle GCP$. Damit folgt nach dem Kongruenzsatz sww, dass $\triangle FCP = \triangle GCP$, also $FC = GC$ gilt.
Wegen $BC = DC$ folgt dann auch $BF = DG$. Damit und mit entsprechenden Schlussfolgerungen aus $EF \parallel AC$ und $HG \parallel AC$ erhält man $EB = BF = HD = DG$; hiernach und wegen $\angle EBF = \angle HDG = 90°$ ist $\triangle EBF = \triangle HDG$, also $EF = HG$.

Also sind im Viereck $EFGH$ die Seiten EF und HG einander gleichlang und parallel, daher ist es ein Parallelogramm. Da außerdem FG auf AC und damit auch auf EF senkrecht steht, ist $EFGH$ als Rechteck nachgewiesen.



b) Für den Schnittpunkt Q von EH mit AC ist wegen $EF \parallel AC$ auch $EFPQ$ ein Rechteck, also gilt $EF = QP$ und $EQ = FP$. Damit und mit $\angle AQE = \angle CPF = \angle CPG = 90°$ sowie $\angle AEQ = \angle CFP = \angle CGP = 45°$ erweisen sich AEQ, CFP und CGP als zueinander kongruente gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke, und es ergibt sich $AQ = CP = FP = GP$.

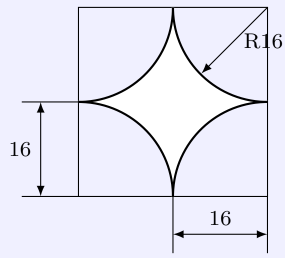
Insgesamt hat man nun $EF + FP + GP = QP + AQ + CP = AC$; d. h., der halbe Umfang des Rechtecks $EFGH$ ist gleich der Länge von AC, der Umfang beträgt also für jedes derartige Rechteck 20 cm.

II.III Kreise

I Runde 1

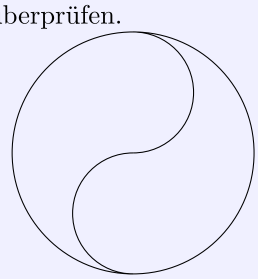
Aufgabe V00710:

Berechne die Fläche des in der Abbildung dargestellten Stanzteiles in Quadratzentimetern.

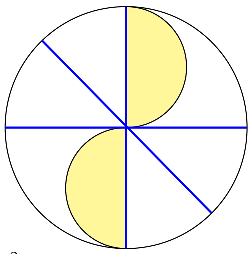


Lösung von Steffen Polster:
Von einem Quadrat der Kantenlänge 32 mm wird ein Vollkreis des Radius 16 mm angezogen, d. h. $A = 32^2 - \pi \cdot 16^2 \approx 220$ mm^2.

Aufgabe V00713:
Wie kann man die nachstehende, nur aus Kreisbögen bestehende Figur durch 3 Geraden in 8 flächengleiche Teile zerlegen?
Die Richtigkeit der Konstruktion ist durch Berechnung der Teilflächen zu überprüfen.



Lösung von Steffen Polster:
Die 3 Geraden müssen wie in der nachfolgenden Abbildung eingezeichnet werden:



Es ist noch zu zeigen, dass die zwei kleinen Halbkreise den Viertelkreis des großen Kreises halbieren. Hat der große Kreis den Radius r, so hat jeder Viertelkreis einen Flächeninhalt $\frac{\pi}{4}r^2$.

Ein gelber Halbkreis hat dann den Radius $\frac{r}{2}$ und somit den Flächeninhalt $\frac{1}{2}\pi\frac{r^2}{4}$, d. h. er halbiert den Viertelkreis. Alle 8 Teilflächen haben somit den gleichen Flächeninhalt.

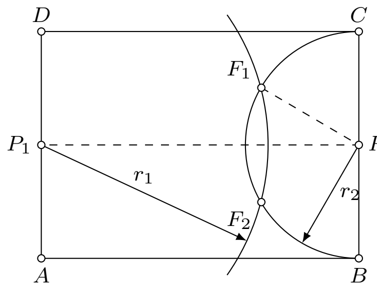
Aufgabe 100711:
Bei einem Sportfest soll zwischen jungen Pionieren und FDJlern ein Wettlauf nach folgenden Regeln ausgetragen werden:

Auf den Mittelpunkt einer der kürzeren Seiten eines rechteckigen Spielfeldes (50 m × 70 m) stellt sich ein FDJler, auf den Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite ein Pionier. Beide sollen auf ein Kommando auf dem kürzesten Wege von ihren Startplätzen zu der gleichen, auf dem Spielfeld aufgestellten Fahne laufen.

Zu diesem Zweck soll die Fahne, wenn die beiden Läufer auf ihren Startplätzen stehen, so aufgestellt werden, dass sie von dem FDJler 50 m, von dem Pionier 25 m entfernt ist.

Gib die Anzahl aller Möglichkeiten an, die Fahne gemäß den Bedingungen auf dem Spielfeld aufzustellen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



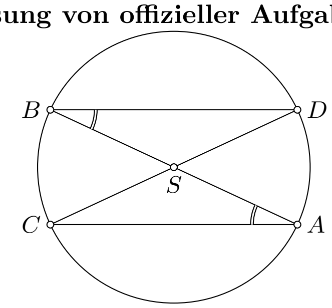
Die Eckpunkte des Spielfeldes seien so mit A, B, C, D und die Standorte der Läufer so mit P_1 (für den FDJ-ler) und P_2 (für den Pionier) bezeichnet, wie es die Abbildung angibt. Dann gilt:
$AB = CD = P_1P_2 = 70$ m ; $AD = BC = 50$ m ; $AP_1 = P_1D = BP_2 = P_2C = 25$ m.

Nach den Bedingungen der Aufgabe ist ein Punkt genau dann einer der gesuchten Standorte der Fahne, wenn er
1. auf dem Kreis mit dem Radius $r_1 = 50$ m um P_1,
2. auf dem Kreis mit dem Radius $r_2 = 25$ m um P_2 und
3. innerhalb des Rechtecks $ABCD$ liegt.

Wegen $r_1 > r_2$ und $r_1 - r_2 < P_1P_2 < r_1 + r_2$ gibt es genau 2 Punkte, die beide Kreise gemeinsam haben. Diese Punkte seien F_1 und F_2 genannt.
Wegen $r_1 < P_1P_2$ liegen F_1 und F_2 auf derselben Seite der Geraden durch B und C wie P_1. Der auf derselben Seite liegende Halbkreis um P_2 mit dem Radius r_2 liegt wegen $BP_2 = P_2C = r_2$ ganz auf dem Spielfeld. Infolgedessen liegen auch F_1 und F_2 auf dem Spielfeld.
Es gibt mithin genau diese 2 Punkte als Möglichkeiten, die Fahne gemäß den Bedingungen der Aufgabe aufzustellen.

Aufgabe 150713:
Gegeben seien zwei Geraden g_1 und g_2, die einander in genau einem Punkt S schneiden. Um S als Mittelpunkt sei ein Kreis geschlagen, er schneide g_1 in A und B sowie g_2 in C und D.
Beweise, dass die Strecken AC und BD gleich lang und parallel sind, dass also $AC = BD$ und $AC \parallel BD$ gilt!

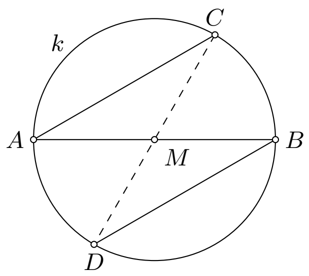
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Die Dreiecke ASC und BSD sind kongruent nach *sws*; denn es gilt:
(1) $AS = BS = CS = DS$
(2) $\angle ASC = \angle BSD$ als Scheitelwinkel.
Folglich gilt $AC = BD$ sowie $\angle CAS = \angle DBS$. Nach der Umkehrung des Satzes über Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen folgt daraus $AC \parallel BD$.

Aufgabe 220714:
Es sei k ein Kreis, sein Mittelpunkt sei M. Ferner sei AB ein Durchmesser von k. Durch A sei eine von AB verschiedene Sehne AC, durch B die zu AC parallele Sehne BD gezogen.
Beweise, dass aus diesen Voraussetzungen die Kongruenz der Dreiecke ACM und BDM folgt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Da M der Mittelpunkt von k und damit auch der Mittelpunkt des Durchmessers AB ist, gilt (1) $AM = BM$.
Wegen $AC \parallel BD$ (und da M auf AB liegt) gilt nach dem Satz über Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen (2) $\angle CAM = \angle DBM$.

Da Radien eines Kreises stets gleich lang sind, sind die Dreiecke AMC, BMD gleichschenklig mit AC bzw. BD als Basis. Nach dem Satz über die Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck folgt daher $\angle CAM = \angle ACM$ und $\angle DBM = \angle BDM$. Zusammen mit (2) ergibt sich somit (3) $\angle ACM = \angle BDM$.

Aus (1), (2), (3) folgt nach dem Kongruenzsatz (sww), dass die Dreiecke ACM und BDM kongruent sind.

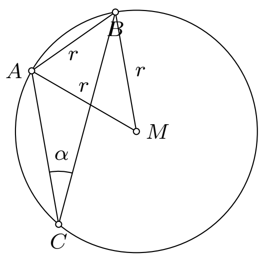
Hinweis: Der Kongruenzsatz (sws) führt nicht ohne weiteres zum Ziel, weil man $\angle AMC = \angle BMD$ als Gleichheit von Scheitelwinkeln erst erhalten kann, wenn man zur Verfügung hat, dass M auf CD liegt. Das müsste aber erst aus den Voraussetzungen hergeleitet werden.

Der Kongruenzsatz (ssw) führt ebenfalls nicht ohne weiteres zum Ziel, weil er nur anwendbar ist, wenn $\angle CAM$ der größeren Seite gegenüberliegt, was nicht der Fall sein muss.

II Runde 2

Aufgabe 050724:
In einen Kreis vom Radius r sind zwei Sehnen mit einem gemeinsamen Endpunkt so eingezeichnet, dass sie einen Winkel mit dem Winkelmaß $\alpha = 30°$ bilden.
Wie groß ist die Entfernung der beiden anderen Sehnenendpunkte voneinander?

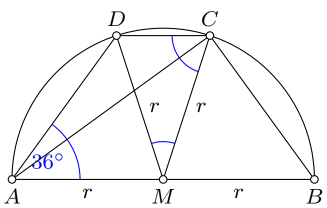
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Der gemeinsame Endpunkt der Sehnen sei C, die anderen beiden Endpunkte seien A bzw. B. M sei der Mittelpunkt des Kreises (siehe Abbildung)
Dann sind $\angle BCA$ und $\angle BMA$ Peripherie- bzw. Zentriwinkel über dem gleichen Bogen oder über zueinander komplementären Bogen. Da nach Voraussetzung $\angle BCA$ das Winkelmaß $\alpha = 30°$ hat, hat $\angle BMA$ ein Winkelmaß von $60°$.
Folglich ist das gleichschenklige Dreieck $\triangle BMA$ gleichwinklig und damit gleichseitig; also ist $AB = r$.

Aufgabe 180723:
In einem Kreis k mit dem Mittelpunkt M sei ein Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ so gelegen, dass die Eckpunkte A, B, C, D auf der Peripherie des Kreises k liegen und AB Durchmesser von k ist.
Außerdem sei $\angle MAC = 36°$.
Beweise, dass dann $\angle CMD = 36°$ ist!

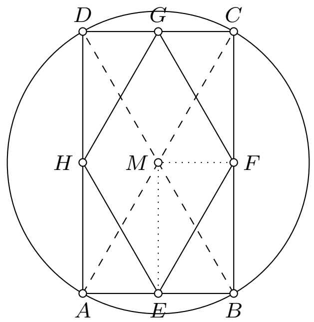
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Nach Voraussetzung ist das Dreieck AMC gleichschenklig mit $AM = MC = r$, also gilt $\angle MAC = \angle ACM = 36°$. (1)
Da $\angle DCA$ und $\angle MAC$ Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen sind, gilt $\angle DCA = \angle MAC = 36°$. (2)
Aus (1) und (2) folgt $\angle DCA + \angle ACM = \angle DCM = 72°$. (3)
Weiterhin ist nach Voraussetzung das Dreieck MCD gleichschenklig mit $MD = MC = r$; hiernach und wegen (3) gilt $\angle MDC = \angle DCM = 72°$. Daraus folgt $\angle CMD = 36°$.

Aufgabe 220723:
Auf einer Kreislinie k seien vier Punkte A, B, C, D so gelegen, dass $ABCD$ ein Rechteck ist. Der Radius des Kreises k sei r genannt, die Mittelpunkte der Strecken AB, BC, CD und DA seien in dieser Reihenfolge mit E, F, G bzw. H bezeichnet.
Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen der Umfang des Vierecks $EFGH$ stets $4r$ betragen muss!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

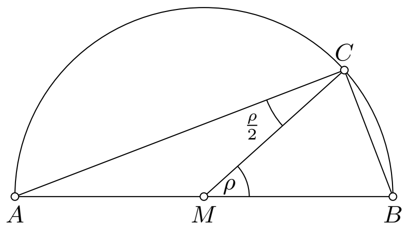


Der Mittelpunkt von k sei M. Im gleichschenkligen Dreieck ABM (mit $AM = BM = r$) ist die Seitenhalbierende ME zugleich Höhe, also gilt $\angle MEB = 90°$. Entsprechend folgt $\angle MFB = 90°$.
Da ferner nach Voraussetzung auch $\angle EBF = \angle ABC = 90°$ ist, ist $EBFM$ ein Rechteck. In ihm sind die Diagonalen gleichlang, also gilt $EF = MB = r$. Entsprechend ergibt sich $FG = r$, $GH = r$ und $HE = r$.
Damit ist die Behauptung $EF + FG + GH + HE = 4r$ bewiesen.

Aufgabe 270724:
Es sei AB der Durchmesser eines Kreises, der Mittelpunkt des Kreises sei M, ferner sei C ein Punkt, der so auf dem Kreis liegt, dass der Winkel $\angle BMC$

(a) die Größe 42°,
(b) eine beliebig vorgegebene Größe ρ mit $0° < \rho < 180°$ hat.
Ermittle jeweils aus diesen Voraussetzungen die Größe des Winkels $\angle ACM$ und die des Winkels $\angle ACB$!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



(b) Aus den Voraussetzungen folgt: $MA = MC$ (Radien des Kreises), also $\angle ACM = \angle CAM$ (Basiswinkel im Dreieck ACM).
Hieraus und aus $\angle ACM + \angle CAM = \rho$ (Außenwinkelsatz für Dreieck ACM) folgt $\angle ACM = \frac{\rho}{2}$. (1)
Aus den Voraussetzungen folgt ferner $MB = MC$ (Radien des Kreises), also $\angle BCM = \angle CBM$ (Basiswinkel im Dreieck BCM). Hieraus und aus $\angle BCM + \angle CBM = 180° - \rho$ (Innenwinkelsatz für Dreieck BCM) folgt $\angle BCM = 90° - \frac{\rho}{2}$.
Daraus und aus (1) ergibt sich durch Addition $\angle ACB = 90°$. (2) Mit (1) und (2) sind die gesuchten Winkelgrößen ermittelt.

(a) Die Lösung zu (a) kann (mit der ebenso ausgeführten Herleitung oder) durch Einsatz von $\rho = 42°$ gefunden werden. Es ergibt sich $\angle ACM = 21°$ und $\angle ACB = 90°$.

Andere Lösungsmöglichkeiten:
Statt des Außenwinkelsatzes für Dreieck ACM kann der Innenwinkelsatz unter Verwendung von $\angle ACM = 180° - \rho$ (Nebenwinkel) herangezogen werden, ebenso statt des Innenwinkelsatzes für Dreieck BCM der Außenwinkelsatz.

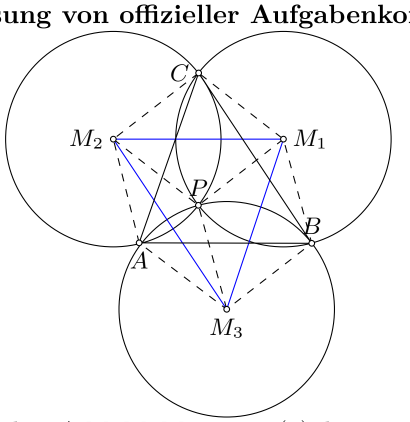
III Runde 3

Aufgabe 190732:
Von drei Kreisen k_1, k_2, k_3 mit dem gleichen Radius r, aber verschiedenen Mittelpunkten M_1, M_2, M_3 werde vorausgesetzt:

k_2 und k_3 schneiden einander in einem Punkt P und einem Punkt $A \neq P$.
k_3 und k_1 schneiden einander in P und einem Punkt $B \neq P$.
k_1 und k_2 schneiden einander in P und einem Punkt $C \neq P$.

Beweise, dass aus diesen Voraussetzungen stets folgt: Der Umkreis des Dreiecks ABC hat r als Radius!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Nach Voraussetzung gilt

$$PM_1 = PM_2 = PM_3 = AM_2 = AM_3 = BM_3 = \\ = BM_1 = CM_1 = CM_2 = r \qquad (1)$$

Daher sind PM_2AM_3, PM_3BM_1, PM_1CM_2 Rhomben. Also gilt $BM_3 \parallel M_1P \parallel CM_2$, $CM_1 \parallel M_2P \parallel AM_3$, $AM_2 \parallel M_3P \parallel BM_1$.
Hiernach und wegen (1) sind BCM_2M_3, CAM_3M_1, ABM_1M_2 Parallelogramme, also gilt $BC = M_2M_3$, $CA = M_3M_1$, $AB = M_1M_2$. Folglich ist $\triangle ABC = \triangle M_1M_2M_3$ (Kongruenzsatz sss).

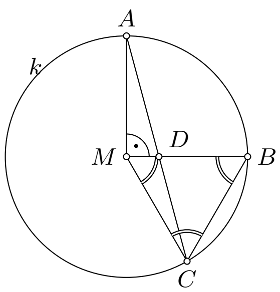
Nun hat $\triangle M_1M_2M_3$ wegen (1) den Kreis um P mit r als Umkreis. Also hat das zu $\triangle M_1M_2M_3$ kongruente Dreieck ABC ebenfalls r als Umkreisradius.

Aufgabe 210734:
Gegeben sei ein Kreis k mit dem Mittelpunkt M. Auf k liegen die Punkte A und B derart, dass der Winkel $\angle BMA$ ein rechter ist. Weiterhin sei ein Punkt C durch folgende Bedingungen festgelegt:

(1) C liegt auf k.
(2) Es gilt $MB = BC$.
(3) Die Gerade durch A und C schneidet die Strecke MB in einem Punkt D.

Ermittle aus diesen Angaben die Größe des Winkels $\angle CDB$!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Da B und C auf k liegen, gilt $MB = MC$; nach Voraussetzung ist aber auch $MB = BC$. Somit ist das Dreieck MCB gleichseitig, jeder seiner Innenwinkel beträgt mithin 60°.
Läge C auf dem von A nach B führenden Viertelkreisbogen von k, so würde die Gerade durch A und C die Strecke MB nicht schneiden. Also liegt C außerhalb dieses Viertelkreisbogens, und es gilt $\angle AMC = 90° + 60° = 150°$.

Da A und C auf k liegen, das Dreieck AMC also mit $MA = MC$ gleichschenklig ist, gilt $\angle MAC = \angle MCA$. Hieraus folgt nach dem Innenwinkelsatz $\angle MAC = \angle MCA = 12(180° - 150°) = 15°$.

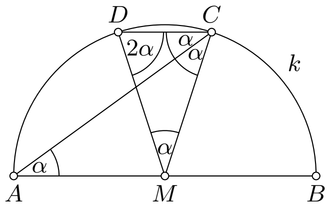
Somit ergibt sich nach dem Außenwinkelsatz, angewandt auf das Dreieck MCD

$$\angle CDB = \angle CMD + \angle MCD = 60° + 15° = 75°$$

Andere Lösungsmöglichkeiten: Man kann auch $\angle CDB = \angle MDA$ (Scheitelwinkel), $\angle MDA = 90° - 15°$ (Innenwinkel im Dreieck ADM) verwenden.

Aufgabe 220736:
Von fünf Punkten A, B, C, D, M wird folgendes vorausgesetzt:
M ist der Mittelpunkt der Stecke AB; die vier Punkte B, C, D, A liegen in dieser Reihenfolge auf einem Halbkreis über AB; es gilt $AB \parallel DC$; die Winkel $\angle BAC$ und $\angle CMD$ sind einander gleich groß.
Zeige, dass durch diese Voraussetzungen die Größe α des Winkels $\angle BAC$ eindeutig bestimmt ist, und ermittle diese Winkelgröße!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

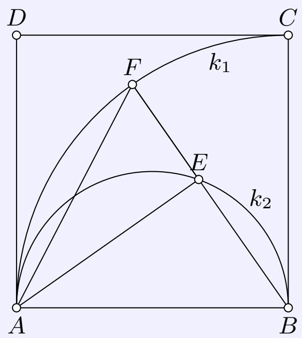


Aus den Voraussetzungen folgt $\angle ACD = \angle BAC = \alpha$ (Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen) und $\angle ACM = \angle BAC = \alpha$ (Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck ACM),
also $\angle DCM = 2\alpha$ und daher auch $\angle CDM = 2\alpha$ (Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck CDM).

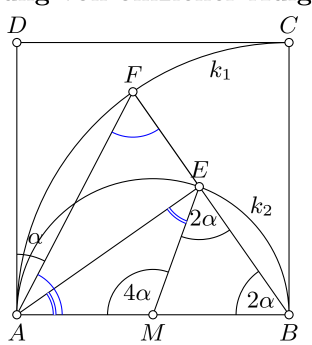
Hieraus und aus $\angle CMD = \alpha$ ergibt sich nach dem Winkelsummensatz, angewandt auf das Dreieck CDM, $5\alpha = 180°$, also $\alpha = 36°$.

Aufgabe 250736:

Es sei $ABCD$ ein Quadrat. Der im Innern von $ABCD$ gelegene Viertelkreisbogen um B mit dem Radius AB sei k_1, der im Innern von $ABCD$ gelegene Halbkreis mit AB als Durchmesser sei k_2.
Ein von B ausgehender Strahl schneide k_2 in einem Punkt E und k_1 in einem Punkt F.
Beweise, dass aus diesen Voraussetzungen stets $\angle DAF = \angle EAF$ folgt!



Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



a)

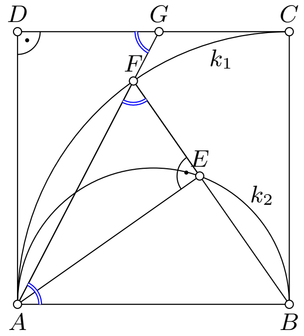
Es sei M der Mittelpunkt von AB, ferner sei $\angle DAF = \alpha$ (Abbildung a).
Da $ABCD$ ein Quadrat ist, gilt $\angle BAD = 90°$, also $\angle BAF = 90° - \alpha$. (1)
Da A und F auf k_1 liegen, gilt $AB = FB$. Nach dem Basiswinkelsatz folgt somit $\angle AFB = \angle BAF = 90° - \alpha$. (2)
Aus (1), (2) und dem Innenwinkelsatz (angewendet auf das Dreieck ABF) folgt $\angle FBA = 2\alpha$. (3)
Da B und E auf k_2 liegen, gilt $BM = EM$ und somit nach dem Basiswinkelsatz $\angle MEB = \angle EBM = \angle FBA = 2\alpha$. (4)

Aus (3), (4) und dem Außenwinkelsatz (angewendet auf das Dreieck BEM) folgt $\angle EMA = 4\alpha$. (5)
Da A und E auf k_2 liegen, gilt $AM = EM$ und somit $\angle MAE = \angle AEM$.
Aus (5) und dem Innenwinkelsatz (angewendet auf das Dreieck AME) folgt daher

$$\angle MAE = \angle AEM = \frac{1}{2}(180° - \angle EMA) = 90° - 2\alpha \tag{6}$$

Somit ergibt sich aus (1) und (6)

$$\angle EAF = \angle BAF - \angle MAE = 90° - \alpha - (90° - 2\alpha) = \alpha$$



b)

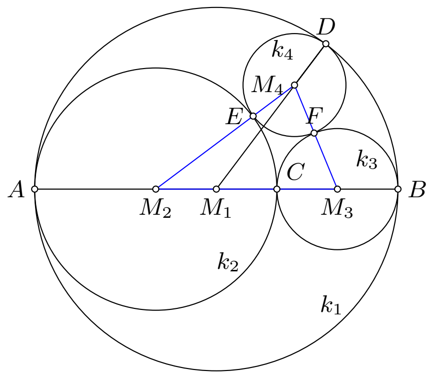
2. Lösungsweg:
Die Verlängerung von AF schneide CD in G (Abbildung b). Dann folgt (Wechselwinkel):
$\angle AGD = \angle BAG = \angle BAF = \angle BFA$ (7) (Basiswinkel im Dreieck ABF mit BA = BF.) Ferner folgt $\angle GDA = 90° = \angle AEB$ (Thalesatz) $= \angle AEF$ (Nebenwinkel) (8)
Aus (7) und (8) folgt nach dem Innenwinkelsatz, angewendet auf die Dreiecke AGD und AFE, $\angle EAF = \angle DAG = \angle DAF$.

Aufgabe 310736:
Von vier Kreisen k_1, k_2, k_3, k_4 und ihren Mittelpunkten M_1, M_2, M_3, M_4 seien folgende Voraussetzungen erfüllt:

(1) Es gibt eine Gerade, auf der die drei Punkte M_1, M_2 und M_3 liegen.
(2) Jeder der drei Kreise k_2, k_3 und k_4 berührt den Kreis k_1 von innen.
(3) Je zwei der Kreise k_2, k_3 und k_4 berühren sich gegenseitig von außen.

a) Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen stets das Dreieck $M_1M_2M_4$ einen ebenso großen Umfang u wie das Dreieck $M_1M_3M_4$ hat!
b) Die Radien von k_1, k_2, k_3, k_4 seien r_1, r_2, r_3, r_4.
Zeige, dass eine Vorgabe solcher Radien stets ausreicht, um daraus u zu ermitteln! Drücke u durch möglichst wenig vorzugebende Radien aus!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Die in (1) genannte Gerade schneidet, da sie durch M_1 geht, den Kreis k_1 in einem Durchmesser.
Nach (2) liegen die Berührungspunkte A bzw. B, die k_1 mit k_2, bzw. mit k_3 hat, auf den Verlängerungen von M_1M_2, bzw. M_1M_3 über M_2 bzw. M_3 hinaus, sind also die Endpunkte dieses Durchmessers. Sie sind voneinander verschieden, da andernfalls einer der Kreise k_2, k_3 den anderen von innen berühren müsste.
Nach (2) und (3) gilt: Der Berührungspunkt D von k_4 mit k_1 liegt auf der Verlängerung von M_1M_4 über M_4 hinaus, die Berührungspunkte E, F von k_2 bzw. k_3 liegen zwischen M_2 und M_4 bzw. zwischen M_3

und M_4.

a) Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} u &= M_1M_4 + M_4M_2 + M_2M_1 && (4)\\ &= M_1M_4 + M_4E + M_2E + M_2M_1 = M_1M_4 + M_4E + M_2A + M_2M_1 = M_1M_4 + M_4E + M_1A && (5)\\ &= M_1M_4 + M_4F + M_1B = M_1M_4 + M_4F + M_3B + M_3M_1 = M_1M_4 + M_4F + M_3F + M_3M_1\\ &= M_1M_4 + M_4M_3 + M_3M_1 \end{aligned}$$

b) Mit (5) gilt

$$u = M_1M_4 + M_4E + M_1A = M_1M_4 + M_4D + M_1A = M_1D + M_1A = 2 \cdot r_1$$

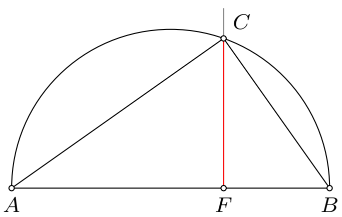
II.IV Konstruktionen

I Runde 1

Aufgabe V00711:
Zeichne ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Hypotenuse (längste Seite) $c = 6$ cm beträgt und in dem der Fußpunkt der Höhe h_c vom Punkt B aus einen Abstand von 2 cm hat! Miss die Höhe h_c!

Lösung von Steffen Polster:

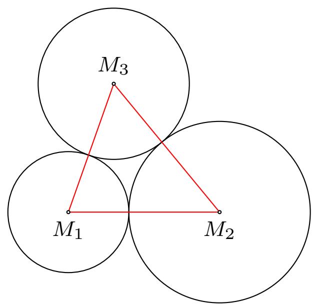
Höhe $h_c \approx 2{,}8$ cm



Aufgabe V00712:
Zwei Kreise mit dem Durchmesser $d_1 = 4$ cm und $d_2 = 6$ cm berühren einander von außen.
Konstruiere einen dritten Kreis mit $d_3 = 5$ cm so, dass er die beiden ersten Kreise von außen berührt! Begründe kurz die Konstruktion! Führe die Konstruktion auf unliniertem Papier aus!

Lösung von Steffen Polster:

Berühren sich die drei Kreise paarweise, so bilden deren Mittelpunkte M_1, M_2 und M_3 ein Dreieck mit den Seitenlängen $r_1 + r_2$, $r_1 + r_3$ und $r_2 + r_3$, wobei die r_i die Radien der Kreise sind.
Dieses Dreieck wird entsprechend des Kongruenzsatzes SSS konstruiert.

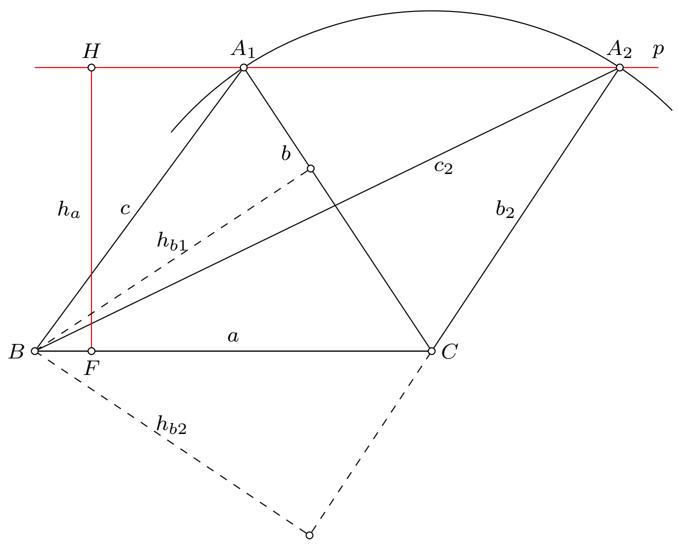


Aufgabe V10715:
Konstruiere ein Dreieck aus: $a = 7$ cm, $b = 6$ cm, $h_a = 5$ cm!
Wie groß ist h_b? (Messung und Berechnung!)
Wie viel verschiedene Dreiecke kann man mit den gegebenen Stücken konstruieren? (Konstruktion ausführen!)

Lösung von Steffen Polster:
Konstruktion:
1. Man zeichne die Strecke BC der Länge a.
2. In einem beliebigen Punkt F auf BC errichte man eine Senkrechte. Auf dieser Senkrechten sei H ein Punkt im Abstand h_a von F.
3. Durch H konstruiere man die Parallele p zu BC.
4. Ein Kreis um C mit dem Radius b schneidet dann die Parallele p in zwei Punkten. Diese Punkte sind A und A_2.
5. Die zueinander nicht kongruenten Dreiecke ABC und A_2BC sind dann die gesuchten Lösungen der Aufgabenstellung.

Messung der zwei Höhen h_{b1} und h_{b2} ergibt jeweils ≈ 6 cm. Die Berechnung ergibt

$$A = \frac{1}{2}a \cdot h_a = \frac{1}{2}b \cdot h_b \qquad \rightarrow \qquad h_b = \frac{a \cdot h_a}{b} = \frac{35}{6} \text{ cm}$$



Aufgabe 010715:
Kann man ein Parallelogramm eindeutig konstruieren, wenn gegeben sind:
a) zwei benachbarte Seiten,
b) eine Seite und zwei anliegende Winkel,
c) beide Diagonalen,
d) eine Diagonale und die von den Diagonalen eingeschlossenen Winkel,
e) eine Diagonale und die zwei Winkel, in die der entsprechende Winkel des Parallelogramms von der Diagonalen geteilt wird?
Durch wie viel Stücke wird ein Parallelogramm eindeutig bestimmt? Nenne 3 Beispiele!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Nein, da man z. B. sowohl ein Rechteck daraus konstruieren kann wie auch ein Parallelogramm mit beliebigem Winkel zwischen den gegebenen Seiten.

b) Nein, da die Länge der anderen Seite noch frei wählbar ist.

c) Nein, da der Winkel zwischen den beiden Diagonalen noch frei wählbar ist.

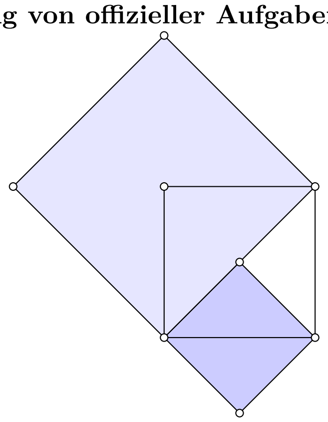
d) Nein, da die Länge der zweiten Diagonale noch frei wählbar ist.

e) Ja. Konstruktion: Länge der Diagonalen auf einer Geraden abtragen, an beiden Endpunkten die gegebenen Winkel antragen (Wechselwinkel). Die Seiten des Parallelogramms liegen auf den so entstandenen Schenkeln.

Ein Parallelogramm wird durch drei Stücke eindeutig bestimmt, wenn diese nicht durch Beziehungen wie z. B. dem Stufen- oder Wechselwinkelsatz in Verbindung stehen.
Man kann sich ein Parallelogramm als zwei aneinander gelegte kongruente Dreiecke vorstellen. Jede Angabe von Stücken, die ein Dreieck eindeutig festlegt, erzeugt damit auch ein Parallelogramm.

Aufgabe 010716:
Konstruiere ein beliebiges Quadrat! Konstruiere dann
a) ein Quadrat mit der doppelten Fläche,
b) ein Quadrat mit der halben Fläche
des Ausgangsquadrates! Begründe die Konstruktion!

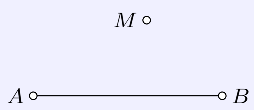
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Für das neue Quadrat in a) nehme man die Diagonale des ersten als Kantenlänge (im Bild das hellere Quadrat), in b) nehme man die Hälfte der Diagonale (das dunklere Quadrat).

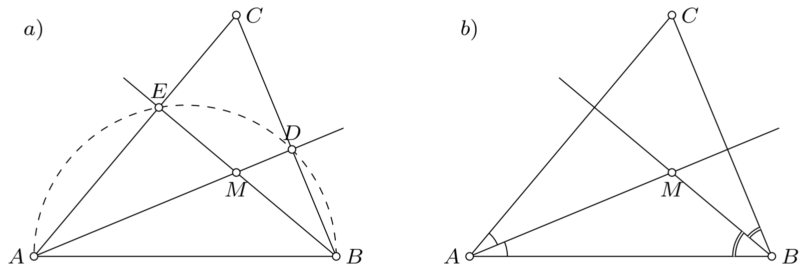
Beweis zu a):
Wenn man das neue Quadrat direkt an die Diagonale des alten konstruiert, sieht man, dass die überdeckte Hälfte des alten Quadrates genau einem Viertel des neuen entspricht.
Bei b) tauschen das alte und das neue Quadrat die Rollen.

Aufgabe 020714:



Gegeben ist eine Strecke AB und außerhalb von ihr ein Punkt M.
a) Konstruiere ein Dreieck ABC, in dem AB eine Seite und M der Schnittpunkt der Höhen ist!
b) Konstruiere ein Dreieck ABC, in dem AB eine Seite und M der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden ist! Beschreibe die Konstruktionen und begründe sie!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Zuerst zeichnet man die Geraden AM und BM ein. Auf diesen liegen die Höhen h_a und h_b des Dreiecks. Dann fällt man von A und B aus das Lot auf die jeweils andere Gerade. Da die Lote senkrecht zu den Höhen stehen und je ein Eckpunkt des Dreiecks auf ihnen liegt, sind sie die beiden anderen Seiten.
Ihr Schnittpunkt ist der Punkt C.



b) Man beginnt mit denselben Geraden. Dann trägt man aber die Winkel $\angle MAB$ und $\angle MBA$ nochmals in A und B an, so dass man die vollen Winkel des Dreiecks an diesen Eckpunkten erhält.
Damit hat man die zwei fehlenden Seiten und deren Schnittpunkt als dritten Eckpunkt C.

Aufgabe 040713:
Bei geometrischen Übungen im Freien hat Brigitte die Aufgabe, einen im Gelände gegebenen Winkel von 80° auf ein anderes Geländestück zu übertragen. Als Hilfsmittel stehen ihr einige Fluchtstäbe und eine 20 m lange Schnur zur Verfügung.
Brigitte findet zwei Lösungswege.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

a) Man verknüpft die Seilenden miteinander, legt diesen Knoten auf den Scheitelpunkt des vorgegebenen Winkels und spannt mit dem Seil mit Hilfe der Fluchtstäbe ein Dreieck auf, so dass zwei seiner Seiten auf den Schenkeln des Winkels liegen. Die beiden restlichen Eckpunkte des Dreiecks werden durch Knoten markiert.
   An der gewünschten Stelle lässt sich dann mit drei Fluchtstäben und dem Seil ein kongruentes Dreieck aufspannen und damit der Winkel übertragen.

b) Man schlägt mit einem Teil des Seiles (etwa der Hälfte, da der Winkel größer als 60° ist) um den Scheitelpunkt des vorgegebenen Winkels einen Kreisbogen, der die Schenkel des Winkels in zwei Punkten schneidet, und überträgt einen Kreisbogen, der einen gleichgroßen Radius hat, an die gewünschte Stelle.
   Dann markiert man auf dem Seil die Länge der zwischen den Schenkeln des Winkels liegenden Sehne und überträgt diese analog der bekannten geometrischen Grundkonstruktionen ebenfalls an die gewünschte Stelle.

Anmerkung: In beiden Fällen wird folglich ein Dreieck aus drei Seiten konstruiert.

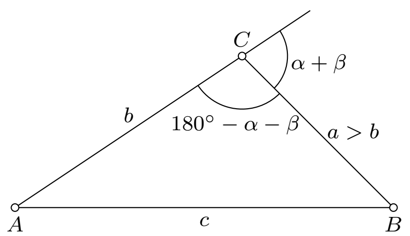
Aufgabe 060714:
Zwischen den Schenkeln s_1 und s_2 eines spitzen Winkels liegt der Punkt P. Der Scheitelpunkt des Winkels sei S.
Man konstruiere auf s_1 und s_2 die Punkte X, für die die Länge der Strecke XS gleich der Länge der Strecke XP ist, für die also $XS = XP$ gilt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Man verbindet den Scheitelpunkt S des gegebenen Winkels mit dem Punkt P und konstruiert zur Strecke PS die Symmetrieachse s.
Die Schnittpunkte X_1 und X_2 von s mit s_1 und s_2 sind die gesuchten Punkte; denn weil sie Punkte von s sind, gilt für sie $X_1S = X_1P$ bzw. $X_2S = X_2P$.

Da alle übrigen Punkte von s_1 und s_2 nicht auf s liegen, kann für sie die oben genannte Beziehung nicht gelten. Die Punkte X_1 und X_2 sind also die einzigen, die den Bedingungen der Aufgabe genügen. Sie existieren für jeden spitzen Winkel und sind stets eindeutig bestimmt.

Aufgabe 110714:
Konstruiere ein Dreieck $\triangle ABC$ aus b, c (mit $c > b$) und $\alpha + \beta$! Dabei sind b die Länge der Seite AC, c die der Seite AB, α die Größe des Winkels $\angle BAC$ und β die des Winkels $\angle ABC$.
Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke stets ein Dreieck eindeutig bestimmt ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(I) Angenommen, $\triangle ABC$ sei ein Dreieck, wie es laut Aufgabenstellung konstruiert werden soll. Dann hat der Winkel $\angle BCA$ wegen des Winkelsummensatzes im Dreieck eine Größe von $180° - (\alpha + \beta)$.
Mithin lässt sich die Aufgabe auf eine Konstruktion eines Dreiecks aus zwei Seiten und einem einer der beiden Seiten gegenüberliegenden Winkel zurückführen.



(II) Infolgedessen kann ein Dreieck nur dann den Bedingungen der Aufgabe entsprechen, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(1) Wir zeichnen eine Strecke AC der Länge b.
(2) Wir zeichnen einen Winkel der Größe $\alpha+\beta$ und zu ihm einen Nebenwinkel, dessen Größe somit $180° - (\alpha + \beta)$ beträgt.
(3) Wir tragen in C an AC einen Winkel der Größe $180° - (\alpha+\beta)$ an.

(4) Wir schlagen den Kreis k um A mit c. Schneidet er den freien Schenkel s (zu dem C nicht mit hinzugerechnet werde) des beim Konstruktionsschritt (3) angetragenen Winkels, so sei einer der entstehenden Schnittpunkte B genannt.

(III) Der Beweis, dass je drei so gewonnene Punkte A, B, C die Ecken eines Dreiecks $\triangle ABC$ bilden, das allen Bedingungen der Aufgabe entspricht, folgt unmittelbar aus dem Satz von der Winkelsumme im Dreieck und aus (II).

(IV) Es sei angenommen, dass die gegebenen Größen die (trivialen) Bedingungen $b > 0$; $c > 0$; $0° < (\alpha + \beta) < 180°$ erfüllen. Dann sind die Konstruktionsschritte (II) (1), (2), (3) stets (bis auf Kongruenz) eindeutig ausführbar.
Wegen $c > b$ schneidet der Kreis k (siehe (II) (4)) den freien Schenkel s in genau einem Punkt. Daher existiert (bis auf Kongruenz) genau ein Dreieck, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht.

Aufgabe 120714:
Gegeben sei ein Dreieck $\triangle ABC$. Ein Punkt C_1 soll folgende Eigenschaften haben:

(1) Das Dreieck $\triangle ABC_1$ ist flächengleich zu dem Dreieck $\triangle ABC$,
(2) $AC = AC_1$.
(3) $C \neq C_1$.

a) Gib eine Konstruktion an, durch die man alle Punkte C_1 erhalten kann, die die Eigenschaften (1), (2), (3) besitzen!
b) Untersuche, wie die Anzahl der Punkte C_1 mit den Eigenschaften (1), (2), (3) von Eigenschaften des gegebenen Dreiecks $\triangle ABC$ abhängt! (Fallunterscheidung)

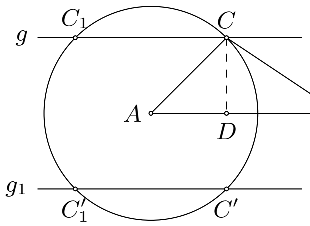
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(I) Angenommen, ein Punkt C_1 habe die Eigenschaften (1), (2), (3). Dann gilt:
Die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle ABC_1$ haben die Seite AB gemeinsam. Wegen (1) stimmen sie daher auch in der zu dieser Seite gehörenden Höhenlänge überein. Folglich liegt der Punkt C_1 auf einer der Parallelen

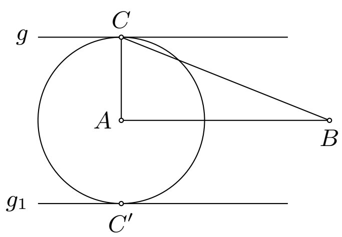
zu AB, die denselben Abstand von AB haben wie Punkt C. Wegen (2) liegt C_1 ferner auf dem Kreis mit dem Radius AC um A.

(II) Daraus ergibt sich, dass ein Punkt C_1 nur dann die Eigenschaften (1), (2), (3) hat, wenn er durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

Wir zeichnen die Parallele g zu AB durch C und die von g verschiedene Parallele g_1 zu AB, die denselben Abstand von AB hat wie g. Wir schlagen um A mit dem Radius AC den Kreis k. Schneidet oder berührt er g oder g_1 noch in einem von C verschiedenen Punkt, so sei dieser C_1 genannt.

(III) Der Beweis, dass jeder so konstruierte Punkt C_1 den Bedingungen (1) bis (3) entspricht, folgt aus (II) sowie daraus, dass die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle ABC_1$ in der zur (gemeinsamen) Seite gehörenden Höhenlänge übereinstimmen.





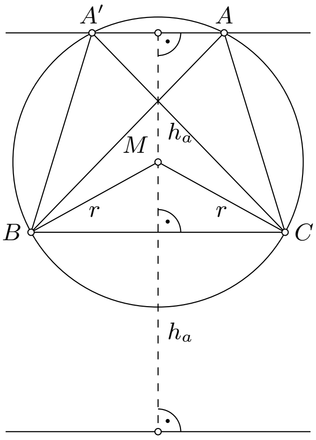
(IV) Es sei D der Fußpunkt des von C auf die Gerade durch A und B gefällten Lotes. Nun unterscheiden wir folgende zwei Fälle:

1. Fall: Ist $\triangle ABC$ bei A nicht rechtwinklig, so ist $D \neq A$, also $\triangle ADC$ ein bei D rechtwinkliges Dreieck und darin AC die längste Seite (Hypotenuse), DC eine der anderen Seiten (Kathete), also $DC < AC$. Der Abstand, den g und g_1 von AB und folglich von A haben, ist also kleiner als der Radius von k. Daher schneidet k jede der Parallelen g, g_1 in genau zwei Punkten. Von den so entstehenden vier Schnittpunkten ist genau einer C. Die gesuchte Anzahl der Punkte C_1, die (1), (2), (3) erfüllen, beträgt daher 3.

2. Fall: Ist $\triangle ABC$ bei A rechtwinklig, so ist $D = A$, also $DC = AC$. Der Abstand, den g und g_1 von AB und folglich von A haben, ist also gleich dem Radius von k. Daher berührt k jede der Parallelen g, g_1 in genau einem Punkt. Von den so entstehenden zwei Berührungspunkten ist genau einer C.
Die gesuchte Zahl der Punkte C_1, die (1), (2), (3) erfüllen, beträgt daher 1.

Aufgabe 140713:
Konstruiere ein Dreieck ABC aus $r = 3{,}2$ cm, $a = 5{,}6$ cm und $h_a = 4{,}4$ cm!
Dabei sei r die Länge des Umkreisradius, a die Länge der Seite BC und h_a die Länge der zur Seite BC gehörenden Höhe des Dreiecks.
Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke ein Dreieck bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist, wobei die anzufertigende Zeichnung mit verwendet werden darf!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(I) Angenommen, $\triangle ABC$ sei ein Dreieck, wie es nach Aufgabenstellung konstruiert werden soll. M sei der Umkreismittelpunkt des Dreiecks.



Dann haben die Seiten BC, BM, CM des Teildreiecks BCM die Längen a, r, r. Der Punkt A liegt erstens auf dem Kreis um M mit r und zweitens auf einer Parallelen zu BC im Abstand h_a.

(II) Daraus ergibt sich, dass ein Dreieck ABC nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(1) Man konstruiert ein Dreieck BCM, in dem die Seiten BC, BM, CM die Längen a, r, r haben.
(2) Man schlägt den Kreis um M mit dem Radius r.
(3) Man konstruiert die beiden Parallelen zu BC im Abstand h_a. Schneidet eine von ihnen den in (2) konstruierten Kreis, so sei A einer der Schnittpunkte.

(III) Beweis, dass jedes so konstruierte Dreieck ABC den Bedingungen der Aufgabe entspricht:

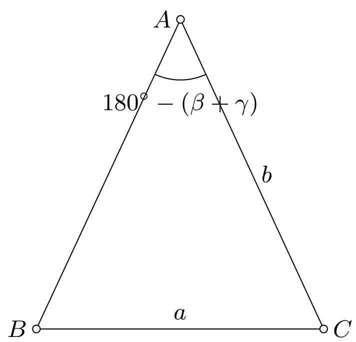
Laut Konstruktion hat die Seite BC des Dreiecks ABC die Länge a. Ferner haben BM, CM und AM die Länge r, also ist r die Länge des Umkreisradius von $\triangle ABC$. Schließlich hat A von der Geraden durch B und C den Abstand h_a, wie es verlangt war.

(IV) Konstruktionsschritt (1) ist wegen $2r > a$ bis auf Kongruenz eindeutig. Konstruktionsschritt (2) ist eindeutig.
(3) liefert zunächst eindeutig die beiden Parallelen zu BC im Abstand h_a. Bei den gegebenen Werten von r, a und h hat - wie man sieht - von diesen Parallelen genau die auf der gleichen Seite der Geraden durch B und C wie M liegende Parallele Schnittpunkte mit dem Kreis um M mit r, und zwar genau zwei.

Diese beiden Punkte liegen symmetrisch zu der Mittelsenkrechten von BC. Daher sind die beiden hiermit erhaltenen Dreiecke zueinander kongruent. Das Dreieck ABC ist mithin durch die gegebenen Stücke bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.

Aufgabe 170713:
Konstruiere ein Dreieck ABC aus $a = 9{,}7$ cm, $b = 7{,}6$ cm und $\beta + \gamma = 115°$!
Dabei sei a die Länge der Seite BC, b die der Seite AC, β die Größe des Winkels $\angle ABC$ und γ die des Winkels $\angle ACB$.
Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke ein Dreieck bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(I) Angenommen, $\triangle ABC$ sei ein Dreieck, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht.
Da die Winkelsumme im Dreieck 180° beträgt, hat der $\angle BAC$ die Größe $180° - (\beta + \gamma)$. Daher sind im Dreieck ABC die Längen zweier Seiten und die Größe eines Winkels bekannt, der einer der beiden Seiten gegenüberliegt. Daraus folgt, dass ein Dreieck nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:



(II) (1) Wir zeichnen eine Strecke AC der Länge b.
(2) Wir tragen in A an AC einen Winkel der Größe $180° - (\beta + \gamma)$ an.
(3) Wir zeichnen den Kreis um C mit a. Schneidet er den freien Schenkel des nach (2) angetragenen Winkels, so sei ein Schnittpunkt B genannt.

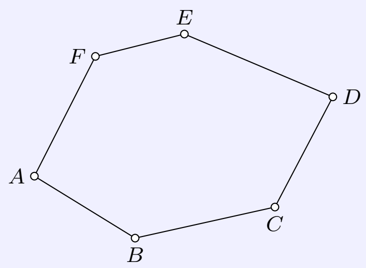
(III) Jedes so erhaltene Dreieck ABC entspricht den Bedingungen der Aufgabe.

Beweis: Nach Konstruktion ist $BC = a$, $AC = b$ und nach dem Satz über die Winkelsumme im Dreieck $\angle ABC + \angle BCA = \beta + \gamma$.

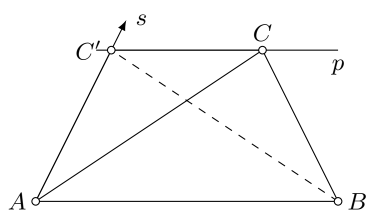
(IV) Wegen $a > b$ ist die Konstruktion nach dem Kriterium ssw bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar.

Aufgabe 310714:
a) Konstruiere ein beliebiges Dreieck ABC und einen beliebigen von A ausgehenden Strahl s, der die Gerade durch A, B nach derjenigen Seite hin verlässt, auf der auch C liegt!
Konstruiere nun denjenigen auf dem Strahl s liegenden Punkt C', für den das Dreieck ABC' denselben Flächeninhalt wie das Dreieck ABC hat!

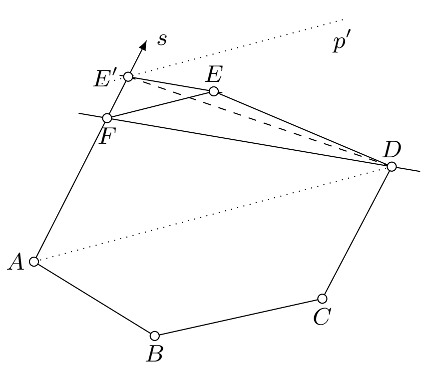
b) Konstruiere zu einem beliebigen Sechseck $ABCDEF$, wie die Abbildung zeigt, einen Punkt E', für den $ABCDE'$ ein Fünfeck ist, das denselben Flächeninhalt wie das Sechseck $ABCDEF$ hat!
Beschreibe Deine Konstruktion und weise nach, dass ein nach Deiner Beschreibung konstruierter Punkt E' diese Bedingungen erfüllt!



Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



a) Die Abbildung zeigt eine geforderte Konstruktion.



b) Konstruktion:
Beschreibung: Man konstruiert die Parallele p durch E zu FD und ihren Schnittpunkt E' mit der Verlängerung s von AF über F hinaus.a) Die Abbildung zeigt eine geforderte Konstruktion.

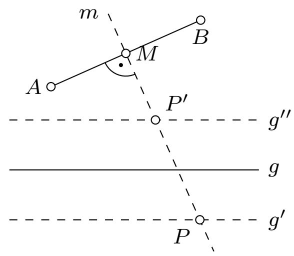
Beweis:
Es wird bewiesen, dass $ABCDE'$ ein zu $ABCDEF$ flächengleiches Fünfeck ist.
Da E' auf der Verlängerung von AF liegt, ist $ABCDE'$ ein Fünfeck. Da nach Konstruktion ferner $E'E \parallel FD$ gilt, haben in den Dreiecken FDE' und FDE die zu FD senkrechten Höhen einander gleiche Länge. Also haben die Dreiecke FDE' und FDE einander gleichen Flächeninhalt.

Addiert man hierzu den Flächeninhalt des Fünfecks $ABCDF$, so folgt die behauptete Flächengleichheit von $ABCDE'$ mit $ABCDEF$.

II Runde 2

Aufgabe 010724:
In einer Ebene sind eine Gerade g und zwei Punkte A und B gegeben, die nicht auf g liegen. Konstruiere alle Punkte P, die von g jeweils 3 cm Abstand haben und für die $AP = BP$ ist! Begründe die Konstruktion!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

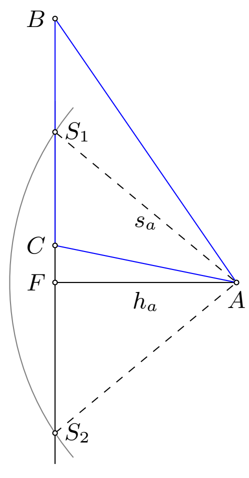


Konstruktion:
Man errichte die Mittelsenkrechte m zur Strecke AB, um alle Punkte mit $AP = BP$ zu erhalten. Dann konstruiere man die Parallelen g' und g'' auf beiden Seiten zu g im Abstand von 3 cm.
Die Schnittpunkte von m mit g' bzw. g'' sind die beiden gesuchten Punkte P bzw. P'.

Beweis:
Sei M der Mittelpunkt der Strecke AB. Dann gilt $AMP \cong BMP$ nach Kongruenzsatz SWS. Außerdem haben alle Punkte auf g' und g'' denselben geforderten Abstand zur Geraden g. Die Schnittpunkte P und P' erfüllen somit beide Forderungen der Aufgabenstellung.

Aufgabe 020725:
Konstruiere ein Dreieck aus $a = 5$ cm, $h_a = 4$ cm und der Seitenhalbierenden (Mittellinie) $s_a = 6$ cm!
Beschreibe die Konstruktion!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

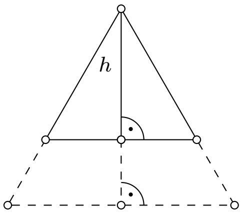


Man beginne mit einer Geraden, auf der man h_a abtrage und einen Endpunkt mit A bezeichne. Um diesen Punkt A zeichne man einen Kreis mit s_a als Radius, im anderen Endpunkt errichte man die Senkrechte. Auf dieser Senkrechten wird die Seite a liegen, ihr Schnittpunkt mit dem Kreis (einen auswählen, da es zwei gibt!) ist der Mittelpunkt der Seite a.

Von diesem Punkt aus kann man zu beiden Seiten je die Hälfte von a abtragen und erhält so die Punkte B und C und damit das Dreieck.

Aufgabe 030722:
Konstruiere nur mit Zirkel und Lineal ein gleichseitiges Dreieck mit der Höhe $h = 4$ cm!
Beschreibe und begründe die Konstruktion!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

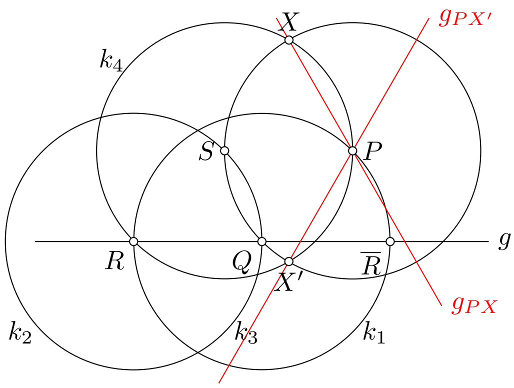


Konstruktion: (siehe Abbildung) Man konstruiere zuerst ein beliebiges gleichseitiges Dreieck (gestrichelt dargestellt).
In diesem errichte man eine der Höhen. Auf der (ggf. verlängerten) Höhe trägt man 4 cm vom Eckpunkt des Dreiecks aus ab; dies ist eine der Höhen h des gesuchten Dreiecks.
Im erhaltenen Endpunkt von h errichtet man die Senkrechte zu h; so erhält man die dritte Seite des gesuchten Dreiecks (durchgezogen dargestellt).

Diese Konstruktion erfüllt die Aufgabenstellung, da alle gleichseitigen Dreiecke zueinander ähnlich sind.

Aufgabe 060721:
Gegeben sind eine Gerade g und ein nicht auf g liegender Punkt P.
Konstruiere unter alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal alle Geraden durch P, die mit g einen Winkel vom Gradmaß $60°$ bilden!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Man wählt auf g einen beliebigen Punkt Q und schlägt um ihn mit PQ den Kreis k_1. Dieser schneidet g in zwei Punkten: R und $\overline{R}$.
Nun schlägt man um R und um P mit PQ die Kreise k_2 und k_3. Diese schneiden einander in Q und in einem Punkt $S \neq Q$ (andernfalls würden sie sich in Q berühren, also lägen R, P und Q auf derselben Geraden, d. h., P läge auf g, im Widerspruch zur Voraussetzung).

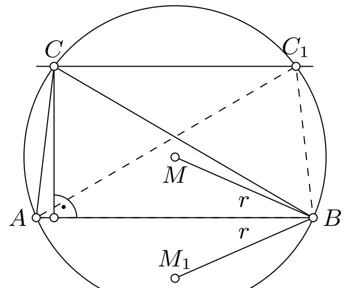
Schlägt man nun mit PQ um S den Kreis k_4, so schneidet dieser k_3 in zwei Punkten: X und X', $X \neq X'$. Die Geraden g_{PX} und $g_{PX'}$ und nur diese genügen der Aufgabenstellung. (Der zweite Schnittpunkt $\overline{R}$ von k_1 und g führt zwar zu anderen Punkten X und X', aber zu denselben Geraden).

Beweis: Laut Konstruktion ist das Dreieck $\triangle SXP$ gleichseitig. Außerdem ist $SP \parallel RQ$ (als Seiten in dem Rhombus $RQPS$). Die Gerade g_{XP} schneide g im Punkte P_1.
Dann gilt (Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen) $\angle SPP_1 = \angle PP_1\overline{R}$ d. h. $\angle PP_1\overline{R}$ hat ein Gradmaß von $60°$. Ebenso ist laut Konstruktion $X'P \parallel SX$.

Die Gerade $g_{PX'}$ schneidet mithin g ebenfalls unter einem Winkel von 60°. Da es nur zwei Geraden durch P gibt, die mit g einen Winkel vom Gradmaß 60° bilden, sind damit alle derartigen Geraden gefunden.

Aufgabe 080723:
Konstruiere ein Dreieck ABC aus $r = 3$ cm, $c = 5{,}5$ cm und $h_c = 3$ cm!
Dabei sei r die Länge des Umkreisradius, c die Länge der Seite AB und h_c die Länge der zur Seite AB gehörenden Höhe des Dreiecks.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(I) Angenommen, $\triangle ABC$ sei ein Dreieck, wie es nach Aufgabenstellung konstruiert werden soll; M sei der Umkreismittelpunkt des Dreiecks. Dann liegt der Punkt C auf dem Umkreis des Dreiecks $\triangle ABC$ im Abstand h_c von AB.



(II) Daraus ergibt sich, dass ein Dreieck $\triangle ABC$ nur dann den Bedingungen der Aufgabe entsprechen kann, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

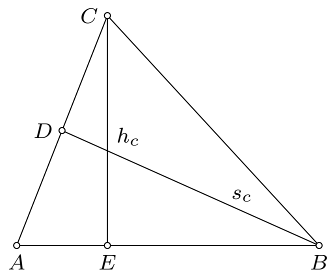
Man zeichnet AB und schlägt um A und B die Kreise mit dem Radius der Länge r. Einer ihrer Schnittpunkte sei M, der andere M_1 genannt.

Nun schlägt man den Kreis um M mit r. Dann konstruiert man die beiden Parallelen zu AB im Abstand h_c. Wegen $h_c = r$ und $c < 2r$ schneidet diejenige Parallele, die mit M_1 auf der gleichen Seite der durch A und B gehenden Geraden liegt, den Kreis um M durch A nicht. Die andere Parallele schneidet diesen Kreis in zwei Punkten, C und C_1.
Die Dreiecke $\triangle ABC$ bzw. $\triangle ABC_1$ entsprechen den Bedingungen.

(III) Der Beweis, dass jedes so konstruierte Dreieck $\triangle ABC$ tatsächlich den Bedingungen der Aufgabe entspricht, ergibt sich leicht aus (II).

Aufgabe 100724:
Konstruiere ein Dreieck $\triangle ABC$ aus $\alpha = 70°$, $s_b = 7$ cm, $h_c = 5$ cm!
Dabei sei α die Größe des Winkels $\angle BAC$, s_b sei die Länge der Seitenhalbierenden der Seite AC und h_c die Länge der Höhe des Dreiecks, die auf der Geraden durch A und B senkrecht steht.
Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob sich aus den gegebenen Stücken ein Dreieck eindeutig konstruieren lässt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



I. Analyse:
Angenommen, $\triangle ABC$ sei ein Dreieck, wie es nach Aufgabenstellung konstruiert werden soll.
Der Mittelpunkt von AC sei D, der Fußpunkt der auf der Geraden durch A und B senkrechten Höhe sei E. Dann liegt E wegen $\alpha < 90°$ auf dem von A ausgehenden Strahl durch B, und es lässt sich das Teildreieck $\triangle AEC$ aus h_c, α und dem rechten Winkel $\angle AEC$ konstruieren. Punkt B liegt erstens auf dem von A ausgehenden Strahl durch E und zweitens auf dem Kreis mit s_b um D.

II. Konstruktionsbeschreibung:
Daraus folgt, dass ein Dreieck nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:
(1) Wir konstruieren das Dreieck $\triangle AEC$ aus h_c, α und dem rechten Winkel $\angle AEC$.
(2) Wir konstruieren den Mittelpunkt D der Strecke AC.

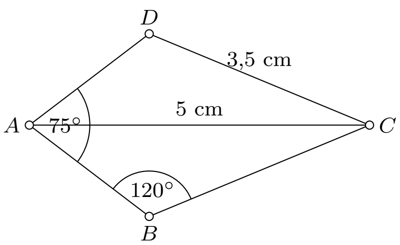
(3) Wir konstruieren den von A ausgehenden Strahl durch E.
(4) Wir schlagen um D mit s_b den Kreis. Schneidet er den Strahl AE, so sei B einer der Schnittpunkte.

III. Beweis, dass jedes auf diese Weise konstruierbare Dreieck $\triangle ABC$ tatsächlich den Bedingungen der Aufgabe entspricht:
Nach Konstruktion ist $DB = s_b$, $CE = h_c$, und der Winkel $\angle CAB$ hat die Größe α. Ferner ist D der Mittelpunkt, also BD die Seitenhalbierende von AC. Schließlich ist nach Konstruktion $CE \perp AB$, also CE auf AB und damit die auf der Geraden durch A und B senkrechte Höhe.

IV. Eindeutigkeitsnachweis:
Wegen $\alpha < 90°$ ist der Konstruktionsschritt (1) nach dem Kriterium sww eindeutig. Ferner ist (2) stets eindeutig möglich, ebenso (3), da wegen (1) $A \neq E$ ist.
Schließlich ist auch (4) nach sww eindeutig möglich, da für die gegebenen Größen α und h_c die Strecke DA kleiner als s_b ausfällt.
Folglich ist die gesamte Konstruktion mit den gegebenen Stücken eindeutig.

Aufgabe 110724:
Konstruiere ein konvexes Viereck $ABCD$ aus $BC = 3{,}5$ cm; $CD = 3{,}5$ cm; $AC = 5$ cm; $\angle DAB = 75°$ und $\angle ABC = 120°$!
Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke ein konvexes Viereck eindeutig bestimmt ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(I) Angenommen, $ABCD$ sei ein Viereck, das den Bedingungen der Aufgabe genügt. Dann ist das Dreieck $\triangle ABC$ aus den Seiten AC, BC und dem der größeren Seite AC gegenüberliegenden Winkel $\angle ABC$ zu konstruieren.
Punkt D muss nun erstens auf dem freien Schenkel eines Winkels der Größe $\angle BAD$ und zweitens auf dem Kreis um C mit dem Radius CD liegen. Ferner liegen, da das Viereck konvex ist, B und D auf verschiedenen Seiten der Geraden durch A und C.



(II) Daraus ergibt sich, dass ein Viereck $ABCD$ nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(1) Man konstruiert ein Dreieck $\triangle ABC$ aus $AC = 5$ cm, $BC = 3{,}5$ cm und $\angle ABC = 120°$.
(2) Man trägt in A an AB einen Winkel der Größe 75° so an, dass sein freier Schenkel nicht auf derselben Seite der Geraden durch A und C liegt wie B.

(3) Man schlägt den Kreis um C mit $CD = 3{,}5$ cm. Schneidet er den freien Schenkel des in (2) konstruierten Winkels, so sei einer der Schnittpunkte D genannt.

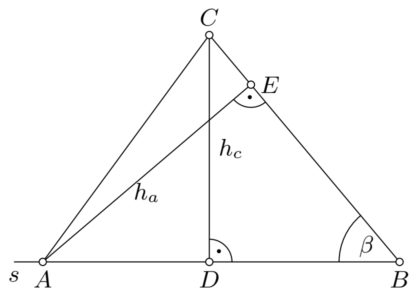
(III) Der Beweis, dass bei je 4 so konstruierten Punkten A, B, C, Ddie vorgeschriebenen Streckenlängen und Winkelgrößen auftreten, ergibt sich unmittelbar aus (II) und der Umkehrung der Schlüsse in (I).
Ferner folgt aus (II), dass $\angle DAB + \angle ABC = 195° > 180°$ ist, so dass keiner der Winkel $\angle BCD$, $\angle CDA$ die Größe 180° erreichen oder überschreiten kann.
Daher bilden A, B, C, D die Ecken eines konvexen Vierecks.

(IV) Die Konstruktion des Dreiecks $\triangle ABC$ ist wegen $AC > BC$ und, weil $\angle ABC$ der Seite AC gegenüberliegt, nach dem Kriterium (ssw) stets bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar.
Der Kreis um C mit CD schneidet den freien Schenkel des nach (2) konstruierten Winkels von 75° bei den vorgegebenen Werten in genau zwei Punkten D_1 und D_2. Man erhält also (bis auf Kongruenz) zwei Vierecke $ABCD_1$ und $ABCD_2$, die beide den Bedingungen der Aufgabe genügen.

Die beiden Vierecke sind nicht kongruent, da sie verschiedenen Flächeninhalt haben.

Aufgabe 120724:
Konstruiere ein Dreieck $\triangle ABC$ aus $h_a = 6$ cm, $h_c = 5$ cm und $\beta = 50°$!
Dabei seien h_a die Länge der Dreieckshöhe, die auf BC senkrecht steht, h_c die Länge der auf AB senkrecht stehenden Dreieckshöhe und β die Größe des gegebenen Winkels $\angle ABC$.
Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke ein Dreieck bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



(I) Angenommen, $\triangle ABC$ sei ein Dreieck, wie es nach der Aufgabenstellung konstruiert werden soll. Der Fußpunkt der von C auf die Gerade durch A und B gefällten Höhe sei D. Dann gilt für das Dreieck $\triangle BCD$ wegen $\beta < 90°$: $\angle DBC = \beta$, $\angle BDC = 90°$ und $CD = h_c$.

Punkt A liegt
1. auf dem Strahl s aus B durch D und
2. auf einer Parallelen zu BC im Abstand h_a, und zwar auf derselben Seite von BC wie D, weil A auf dem Strahl s liegt.

(II) Daraus folgt, dass ein Dreieck nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(1) Wir konstruieren das Dreieck $\triangle BCD$ aus den Winkeln $\angle DBC$, $\angle BDC$ und der Seite CD, deren Größen β, 90° bzw. h_c sind.
(2) Wir zeichnen den Strahl s aus B durch D.
(3) Wir ziehen im Abstand h_a die Parallele zu BC, die auf der gleichen Seite von BC liegt wie D. Schneidet sie den Strahl s, so sei dieser Schnittpunkt A genannt.

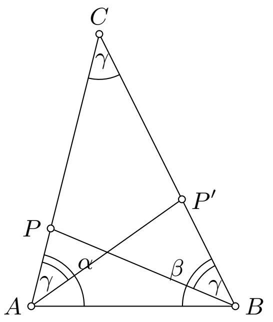
(III) Beweis, dass jedes auf diese Weise konstruierte Dreieck $\triangle ABC$ tatsächlich allen Bedingungen der Aufgabe entspricht:

Nach Konstruktion hat der Winkel $\angle ABC$ dieselbe Größe wie der Winkel $\angle DBC$, und dieser hat die Größe β, ferner ist $CD = h_c$, und die Strecke CD steht senkrecht auf AB. Schließlich hat nach Konstruktion der Punkt A von BC den Abstand h_a.

(IV) Wegen $\beta < 90°$ ist der Konstruktionsschritt (1) nach dem Kriterium (sww) bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar. Ferner sind nach Ausführung von (1) die Schritte (2) und (3) eindeutig ausführbar, und da BC nicht parallel BD ist, existiert dann auch eindeutig der Schnittpunkt A, wobei man bei verschiedenen Ausführungen von (1) zu kongruenten Dreiecken $\triangle ABC$ gelangt.
Das Dreieck $\triangle ABC$ ist mithin durch die gegebenen Stücke bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.

Aufgabe 130724:
Es sei $\triangle ABC$ ein Dreieck, in dem die Größe γ des Innenwinkels BCA kleiner ist als jede der Größen der beiden anderen Innenwinkel.
Konstruiere alle Punkte P auf den Seiten AC und BC, so dass $\angle BPA = 2\gamma$ gilt!
Beschreibe und begründe deine Konstruktion; ermittle die Anzahl der Punkte P mit der verlangten Eigenschaft!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



(I) Angenommen, ein Punkt P auf AC habe die verlangte Eigenschaft. Nach dem Außenwinkelsatz für $\triangle BCP$ folgt dann $\angle CBP = \angle BPA - \angle BCP = \gamma$.

(II) Daher entspricht ein Punkt P auf AC nur dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn er durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

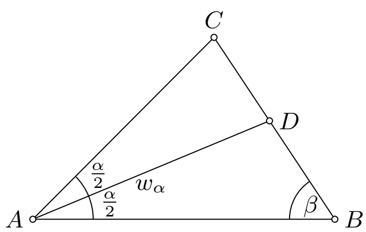
(1) Man trägt in B an BC nach der Seite der Geraden durch B und C, auf der A liegt, den Winkel der Größe γ an.
(2) Schneidet sein freier Schenkel die Seite AC, so sei P der Schnittpunkt.

(III) Beweis, dass jeder so konstruierte Punkt P den Bedingungen der Aufgabe entspricht: Nach Konstruktion (2) liegt P auf AC. Ferner ist nach dem Außenwinkelsatz und nach Konstruktion (1) auch $\angle BPA = \angle BCP + \angle CBP = 2\gamma$.

(IV) Konstruktionsschritt (1) ist stets eindeutig ausführbar. Wegen $\gamma < \beta$ hat der freie Schenkel des in (1) konstruierten Winkels gemeinsame Punkte mit dem Innern des Dreiecks ABC und schneidet die Seite AC zwischen A und C;
Konstruktionsschritt (2) ergibt folglich genau einen Punkt P auf AC, der die verlangte Eigenschaft hat.
Vertauscht man in den Überlegungen (I) bis (IV) überall A mit B, so erhält man: Es gibt genau einen (weiteren) Punkt P' auf BC, der die verlangte Eigenschaft hat. Somit gibt es stets genau 2 derartige Punkte.

Aufgabe 140723:
Konstruiere ein Dreieck ABC aus $\alpha = 60°$, $\beta = 35°$ und $w_\alpha = 5{,}5$ cm!
Dabei seien α bzw. β die Größen der Winkel $\angle BAC$ bzw. $\angle ABC$ und w_α die Länge der Winkelhalbierenden des Winkels $\angle BAC$.
Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke ein Dreieck eindeutig bestimmt ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(I) Angenommen, $\triangle ABC$ sei ein Dreieck, wie es laut Aufgabenstellung konstruiert werden soll.
AD sei die Winkelhalbierende von $\angle BAC$, wobei D auf BC liegt. Dann sind von dem Teildreieck ABD die Stücke $AD = w_\alpha$, $\angle BAD = \frac{\alpha}{2}$ und $\angle ABD = \beta$ bekannt.
Punkt C liegt erstens auf dem freien Schenkel des in A an AB nach derselben Seite der Geraden durch A und B wie D angetragenen Winkels der Größe α und zweitens auf dem Strahl aus B durch D.
Daraus folgt, dass ein Dreieck nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:



(II) (1) Wir konstruieren das DreieckABD aus $AD = 5{,}5$ cm, $\angle BAD = 30°$ und $\angle ABD = 35°$.
(2) Wir tragen in A an AB einen Winkel der Größe $60°$ nach derselben Seite der Geraden durch A und B an, auf der D liegt.
(3) Wir zeichnen den Strahl aus B durch D. Schneidet er den freien Schenkel des in (2) konstruierten Winkels, so sei dieser Schnittpunkt C genannt.

(III) Jedes so konstruierte Dreieck ABC entspricht den Bedingungen der Aufgabe.

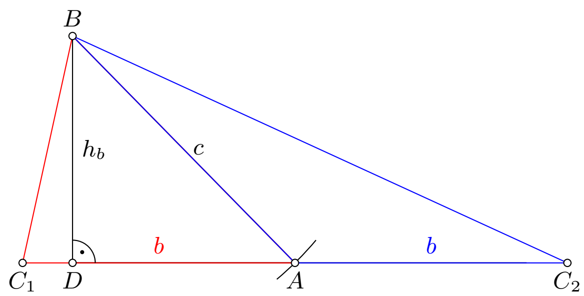
Beweis: Nach Konstruktion hat der Winkel $\angle BAC$ die Größe 60°. Ebenso hat nach Konstruktion der Winkel $\angle ABC$ die Größe 35°. Schließlich ist nach Konstruktion AD Halbierende des Winkels $\angle BAC$ und hat die Länge 5,5 cm.

(IV) Konstruktionsschritt (1) ist bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar. Ebenso sind die Konstruktionsschritte (2) und (3) eindeutig ausführbar.
Da sowohl $\angle BAC$ als auch $\angle ABD$ spitze Winkel sind, gibt es genau einen Schnittpunkt C. Mithin ist $\triangle ABC$ durch die gegebenen Stücke bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.

Aufgabe 150724:
Konstruiere ein Dreieck ABC aus $b = 6$ cm, $h_b = 5$ cm, $c = 7$ cm!
Dabei sei b die Länge der Seite AC, c die der Seite AB und h_b die der auf der Geraden durch A und C senkrechten Höhe.
Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke ein Dreieck bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(I) Angenommen, $\triangle ABC$ sei ein Dreieck, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht. Der Fußpunkt des von B auf die Gerade durch A und C gefällten Lotes sei D. Dann gilt $BA = c$, $h_b = BD$, und es ist $A \neq D$, wegen $c \neq h_b$ ist folglich ABD ein Dreieck.

In ihm sind c, h_b Seitenlängen, und es enthält den rechten Winkel $\angle BDA$. Punkt C liegt erstens auf der Geraden durch A und D und zweitens auf dem Kreis um A mit b. Daraus folgt, dass ein Dreieck nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:



(II) (1) Wir konstruieren das Teildreieck ABD aus $AB = c$, $BD = h_b$, und dem rechten Winkel $\angle BDA$.
(2) Wir zeichnen die Gerade durch D und A.
(3) Wir zeichnen den Kreis um A mit b. Schneidet er die Gerade durch D und A, so sei C einer der Schnittpunkte.

(III) Jedes so erhaltene Dreieck ABC entspricht den Bedingungen der Aufgabe.

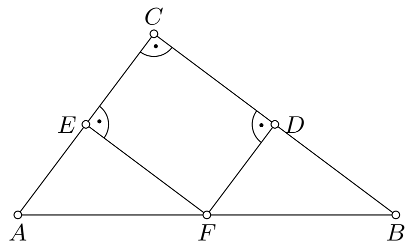
Beweis: Nach Konstruktion ist $AC = b$, $AB = c$, $BD = h_b$, und BD die auf der Geraden durch A und C senkrechte Höhe.

(IV) Wegen $h_b < c$ ist der Konstruktionsschritt (1) nach (ssw) bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar, da der gegebene rechte Winkel der größeren Seite gegenüberliegt.
Konstruktionsschritt (2) ist stets eindeutig ausführbar, da sich wegen $h_b < c$ bei (1) $D \neq A$ ergeben hatte.
Schließlich ergibt (3) stets zwei verschiedene Punkte C_1 und C_2. Da nun der wegen $h_b < c$ spitze Winkel $\angle DAB$ in dem einen der beiden Dreiecke ABC_1, ABC_2 als Innenwinkel, in dem anderen als Außenwinkel bei A auftritt, so ist das eine dieser Dreiecke bei A spitzwinklig, das andere bei A stumpfwinklig; folglich

sind diese beiden Dreiecke nicht kongruent. Durch die gegebenen Stücke ist ein Dreieck mithin nicht, auch nicht bis auf Kongruenz, eindeutig bestimmt.

Aufgabe 160723:
Konstruiere aus $a = 5{,}0$ cm und $b = 7{,}0$ cm ein Dreieck ABC, bei dem die Mittelsenkrechten der Seiten BC und AC aufeinander senkrecht stehen! Dabei seien a bzw. b die Längen der Seiten BC bzw. AC.
Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die Aufgabenstellung ein Dreieck bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



I. Angenommen, es gäbe ein Dreieck ABC, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht.
Der Mittelpunkt der Seite BC sei D, der von AC sei E. Der Schnittpunkt der senkrecht aufeinanderstehenden Mittelsenkrechten miteinander sei mit F bezeichnet.
Wegen des Winkelsummensatzes, angewandt auf das Viereck $DCEF$, folgt mithin, dass $\angle ECD (= \angle ACB)$ ein rechter Winkel ist. Daher entspricht ein Dreieck ABC nur dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

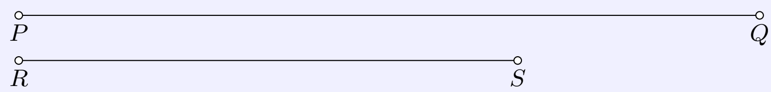
II. (1) Man konstruiert einen rechten Winkel, dessen Scheitel C genannt sei.
(2) Auf dem einen seiner Schenkel trägt man von C aus eine Strecke der Länge 5,0 cm ab, deren zweiter Endpunkt B genannt sei, auf dem anderen Schenkel trägt man von C aus eine Strecke der Länge 7,0 cm ab, deren zweiter Endpunkt A genannt sei.

III. Jedes so konstruierte Dreieck ABC entspricht den Bedingungen der Aufgabe.

Beweis: Nach Konstruktion haben BC bzw. AC die Länge 5,0 cm bzw. 7,0 cm. Die Mittelsenkrechte von BC ist, da auch AC senkrecht auf BC steht, parallel zu AC. Also ist sie senkrecht zur Mittelsenkrechten von AC.

IV. Die Konstruktionsschritte (1) und (2) sind stets bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar. Also gibt es bis auf Kongruenz genau ein Dreieck ABC der geforderten Art.

Aufgabe 260724:



Zu zwei gegebenen Streckenlängen PQ und RS (siehe Abbildung) gibt es zwei weitere Streckenlängen a und b, die die Bedingungen

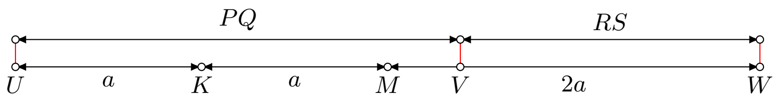
(1) $PQ = 2a + b$,
(2) $RS = 2a - b$

erfüllen und durch diese Bedingungen eindeutig festgelegt sind.
Sie sollen auf zwei verschiedene Weisen ermittelt werden:
(a) Übertrage PQ und RS auf ein Zeichenblatt und konstruiere (ohne Verwendung einer Längenskala) aus diesen gegebenen Längen die gesuchten a und b! Beschreibe deine Konstruktion! Begründe, warum

die Aufgabe (1) und (2) zu erfüllen, durch deine Konstruktion gelöst wird!

(b) Ermittle a und b rechnerisch, wenn die gegebenen Längen $PQ = 9{,}8$ cm und $RS = 6{,}6$ cm betragen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(a) I. Konstruktion:



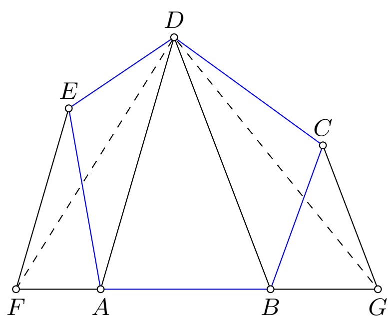
II. Beschreibung:
1. Man konstruiert eine Strecke UV der Länge $UV = PQ$.
2. Man verlängert UV über V hinaus um RS bis zum Punkt W.
3. Man konstruiert den Mittelpunkt M der Strecke UW.
4. Man konstruiert den Mittelpunkt K der Strecke UM.
Dann sind $UK = a$ und $MV = b$ die gesuchten Längen.

III. Begründung:
Für die so konstruierten Längen gilt: Nach 4. ist $UM = 2 \cdot UK = 2a$; hieraus und aus 1. folgt $PQ = UV = UM + MV = 2a + b$, d. h., (1) ist erfüllt.
Nach 3. ist ferner $MW = UM = 2a$; hieraus und aus 2. folgt $RS = VW = MW - MV = 2a - b$, d. h., (2) ist erfüllt.

(b) Aus (1) und (2), d. h. $2a + b = 9{,}8$ cm (3) und $2a - b = 6{,}6$ cm, (4) folgt durch Addition $4a = 16{,}4$ cm, also $a = 4{,}1$ cm. Hieraus und aus (3) folgt $b = 9{,}8$ cm$-8{,}2$ cm $= 1{,}6$ cm.

Aufgabe 310724:
a) Konstruiere ein Fünfeck $ABCDE$, in dem die Seitenlängen $AB = 50$ mm, $BC = 45$ mm, $AE = 54$ mm betragen und die Innenwinkel $\angle BAE$, $\angle ABC$, $\angle BCD$, $\angle AED$ in dieser Reihenfolge die Größen $\alpha = 100°$, $\beta = 110°$, $\gamma = 106°$, $\rho = 114°$ haben!
b) Konstruiere nun zwei Punkte F und G, die so auf der Geraden durch A und B liegen, dass das Dreieck FGD denselben Flächeninhalt wie das Fünfeck $ABCDE$ hat!
Beschreibe deine Konstruktion der Punkte F und G! Beweise, dass von den nach deiner Beschreibung konstruierten Punkten die geforderten Bedingungen erfüllt werden!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Die Abbildung enthält ein zu konstruierendes Fünfeck $ABCDE$.

b) Die Abbildung enthält auch eine Konstruktion zweier Punkte F, G.
Beschreibung dieser Konstruktion:
(1) Man konstruiert die Parallele durch E zu AD; sie schneidet die Gerade durch A und B in F. (2) Man konstruiert die Parallele durch C zu BD; sie schneidet die Gerade durch A und B in G.

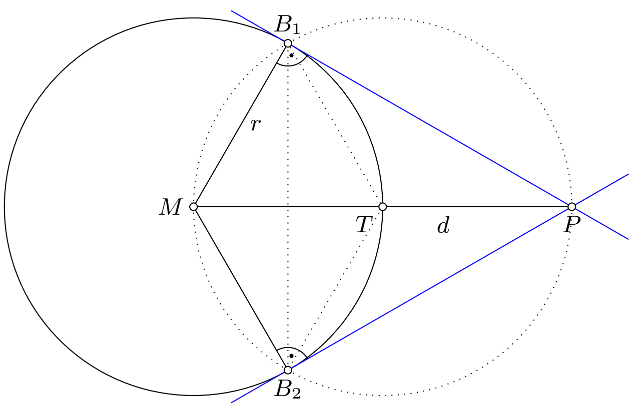
Beweis, dass für die so auf der Geraden durch A und B konstruierten Punkte F, G das Dreieck FGD denselben Flächeninhalt wie das Fünfeck $ABCDE$ hat:
Nach (1) gilt $EF \parallel AD$. Daher haben in den Dreiecken ADE und ADF die zu AD senkrechten Höhen dieselbe Länge. Also haben diese Dreiecke einander gleichen Flächeninhalt. Ebenso folgt aus (2), dass die Dreiecke BDC und BDG einander gleichen Flächeninhalt haben. Damit ergibt sich

$$A(FGD) = A(ABD) + A(ADF) + A(BDG) = A(ABD) + A(ADE) + A(BDC) = A(ABCDE)$$

III Runde 3

Aufgabe V10735:
Zeichne einen Kreis um M mit dem Durchmesser $d = 5$ cm. Konstruiere von einem Punkt P aus, dessen Abstand von M ebenfalls 5 cm beträgt, die Tangenten an den Kreis!
Bestimme die Größe des Winkels, den die beiden Tangenten miteinander bilden! Beweise, dass dieser Winkel stets so groß ist, wenn $MP = d$ ist!

Lösung von Steffen Polster:



O. B. d. A. liege P wie in der Zeichnung gezeigt.
Die Berührungspunkte der Tangenten liegen dann auf dem Thaleskreis um den Mittelpunkt T der Strecke MP, da die Winkel zwischen den Berührradien und den Tangenten rechte Winkel sein müssen.

Konstruktion:
1. Man zeichnet den Kreis um M und die Strecke MP, die man in T halbiert.
2. Der Kreis um T mit dem Radius TP ist dann der Thaleskreis über MP und schneidet den Kreis um M in den zwei Berührungspunkten B_1 und B_2.
3. Die Geraden durch P und B_1 bzw. P und B_2 sind die gesuchten Tangenten von P an den Kreis.

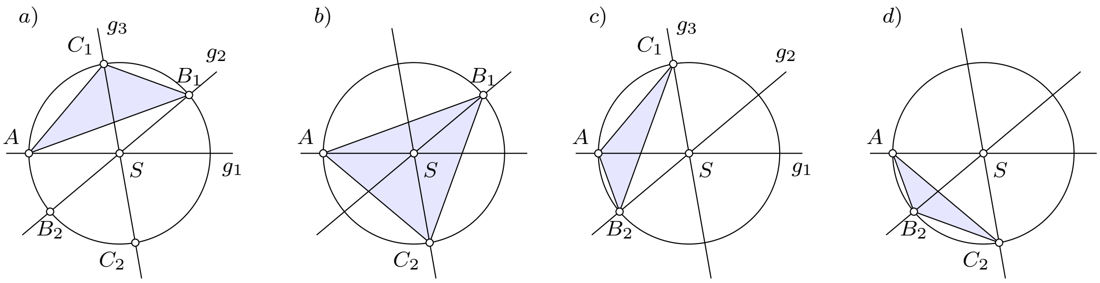
Da die zwei Kreise um M und T gleiche Radien haben, sind sie spiegelsymmetrisch zur Gerade durch ihre zwei Schnittpunkte B_1 und B_2. Damit ist das Dreieck MTB_1 gleichseitig und der Winkel $\angle B_1TM = 60°$. $\angle B_1TM$ ist aber Außenwinkel des Dreiecks PTB_1, das auf Grund von $TB_1 = TP = \frac{d}{2}$ gleichschenklig ist. Der Innenwinkel $\angle B_1PM$ ist somit als Basiswinkel halb so groß, wie der Außenwinkel $\angle B_1TM$, d. h. es gilt $\angle B_1PM = 30°$.

Die zwei Dreiecke $\triangle MPB_1$ und $\triangle MPB_2$ sind nach Kongruenzsatz SSW zueinander kongruent. Zum einen sind die Seiten $MB_1 = MB = 2$ und $MP = MP$ gleich groß, zum anderen liegt der größere Winkel (der rechte Winkel) der größeren Seite gegenüber.
Damit ist auch $\angle B_2PM = 30°$ und der Schnittwinkel der Tangenten gleich 60°.

Da in dieser Herleitung die relative Lage von P zu M nicht benötigt wird, ist dieser Winkel für alle P mit $MP = d$ gleich groß.

Aufgabe 010733:
In einer Ebene sind drei einander in einem Punkte S schneidende Geraden g_1, g_2 und g_3 sowie auf g_1 der Punkt A gegeben.
Konstruiere ein Dreieck, das A als Eckpunkt und den Schnittpunkt S als Umkreismittelpunkt hat und bei dem B auf g_2 und C auf g_3 oder umgekehrt liegen! Wie viel verschiedene Dreiecke lassen sich so konstruieren?

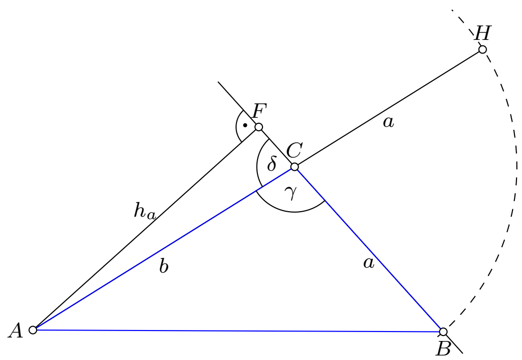
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Konstruktion:
Es wird ein Kreis mit dem Mittelpunkt S und dem Radius SA gezogen, der die beiden anderen Geraden g_2 und g_3 in den Punkten B_1, B_2 bzw. C_1, C_2 trifft (Bild a).
Damit gilt jeweils $SA = SB_i = SC_j$, $(i, j = 1, 2)$ und S ist tatsächlich der Umkreismittelpunkt aller möglichen Dreiecke AB_iC_j.
Da die Geraden den Kreis jeweils zweimal schneiden, gibt es für B und C jeweils zwei Möglichkeiten, insgesamt kann man sie zu vier $(= 2 \cdot 2)$ Dreiecken AB_1C_1, AB_1C_2 (Bild b), AB_2C_1 (Bild c) und AB_2C_2 (Bild d) kombinieren.

Aufgabe 020736:
Es ist ein Dreieck zu konstruieren, von dem die Summe s der Seiten a und b (mit $BC = a$ und $AC = b$), die Größe des Winkels $\angle ACB$ und die Länge h_a der von A auf die Gerade durch B und C gefällten Höhe gegeben sind: $s = 7$ cm, $h_a = 4$ cm, $\gamma = 100°$.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

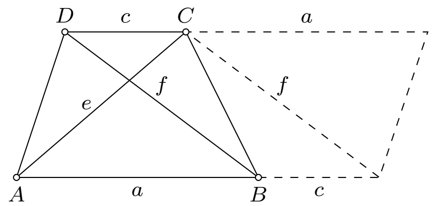


Zuerst überlege man sich, dass die Höhe h_a außerhalb des gesuchten Dreiecks liegen muss, weil es stumpfwinklig ist. Dann legt man eine Gerade (auf der später die Seite a liegt) und auf ihr den Punkt F beliebig fest. In F errichtet man eine Senkrechte, auf der man h_a abträgt; ihr Endpunkt wird A.

Nun kann man nutzen, dass man den Winkel γ kennt: Man kennt gleichzeitig δ (gestreckter Winkel: $\gamma + \delta = 180°$) und $\angle FAC$ (nach Innenwinkelsatz).
In A konstruiert man an AF einen Winkel von 10°, auf dem erhaltenen Schenkel trägt man $s = a + b$ ab; der Endpunkt sei H und der Schnittpunkt mit der ersten Geraden sei C.
Damit hat man aus den gegeben Stücken das Hilfsdreieck ACF erhalten, dessen Eckpunkt C die Seitensumme s in $b = AC$ und $a = CH$ teilt. Die Strecke CH überträgt man dann auf die Gerade, auf der die Seite a liegen muss; es entsteht der Punkt B. Damit kennt man das gesuchte Dreieck.

Aufgabe 030736:
Gegeben seien die parallelen Seiten $a = 8$ cm und $c = 4$ cm eines Trapezes sowie seine Diagonalen $e = 8$ cm und $f = 6$ cm.
a) Konstruiere dieses Trapez!
b) Begründe die Konstruktion!

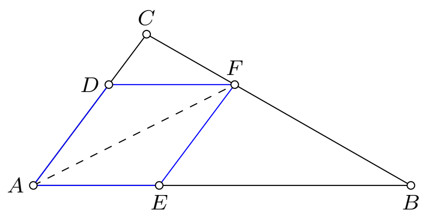
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



b) Man denke sich an das Trapez ein kongruentes Trapez so angefügt, dass beide zusammen ein Parallelogramm mit $(a + c)$ als Parallelseiten bilden. Es lässt sich dann aus $(a + c)$, e und f ein Teildreieck konstruieren.
Die Konstruktion des vierten Trapezpunktes lässt sich nun mit Hilfe einer Diagonalen und auf einer Trapezseite durchführen.

Aufgabe 040736:
Gegeben ist das Dreieck ABC. Es soll ein Rhombus so konstruiert werden, dass einer seiner Eckpunkte mit A zusammenfällt und die drei übrigen Eckpunkte jeweils auf einer Dreiecksseite liegen.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

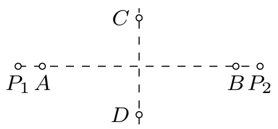


Wir denken uns die Aufgabe gelöst und betrachten den Rhombus $AEFD$. Die Diagonale AF halbiert den Winkel $\angle DAE$ und damit auch den Winkel $\angle CAB$.
Weiterhin gilt $AE = EF = FD = DA$ sowie $AE \parallel DF$ und $AD \parallel EF$.

Konstruktionsbeschreibung:
Wir zeichnen die Winkelhalbierenden des Winkels $\angle CAB$, ihren Schnittpunkt mit BC nennen wir F. Durch F konstruieren wir Parallelen zu den Dreiecksseiten AB bzw. AC.
Die Schnittpunkte mit den Dreiecksseiten AB und AC werden E bzw. D genannt. Das Viereck $AEFD$ ist somit ein Parallelogramm und wegen $\angle DAF = \angle FAE$ ein Rhombus.

Aufgabe 050732:
Gegeben sind die voneinander verschiedenen Punkte A und B.
a) Konstruiere unter alleiniger Verwendung des Zirkels einen Punkt P, der auf der gleichen Geraden wie A und B liegt!
b) Beschreibe und begründe die Konstruktion!
Anmerkung: Die Konstruktionsbeschreibung soll kurz gehalten sein. Bei der Konstruktion von Dreiecken genügt die Angabe von Seiten und Winkeln, aus denen sich das Dreieck konstruieren lässt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

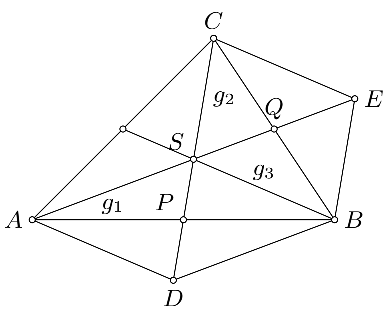


b) Für die Beschreibung und Begründung:
Die Länge der Strecke AB sei a. Man schlägt um A und B Kreisbögen mit dem gleichen Radius von der Länge $r > \frac{a}{2}$. Die beiden Schnittpunkte dieser Kreisbögen seien C und D, die Länge der Strecke CD sei b. Nun schlägt man um C und D Kreisbögen mit dem gleichen Radius $r_1 > \frac{b}{2}$.
Die entstehenden Schnittpunkte P_1 und P_2 liegen auf der Geraden durch A und B und sind, falls $r_1 \neq r$ ist, von A und B verschieden.

Beweis: Die Gerade durch C und D ist auf Grund der Konstruktion Symmetrieachse zu der Strecke AB. Aus demselben Grund ist die Gerade durch A und B Symmetrieachse zu der Strecke CD.
Da laut Konstruktion $CP_1 = DP_1$ und $CP_2 = DP_2$ gilt, liegen P_1 und P_2 auf der die Punkte A und B enthaltenden Symmetrieachse der Strecke CD.

Aufgabe 080735:
Gegeben seien in einer Ebene drei Geraden g_1, g_2 und g_3, die sich in einem Punkt S schneiden mögen, sowie ein Punkt $A \neq S$ auf der Geraden g_1.
Konstruiere ein Dreieck $\triangle ABC$, in dem die Seitenhalbierenden s_a, s_b und s_c auf g_1, g_2 bzw. g_3 liegen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



I. Angenommen, es gibt ein Dreieck $\triangle ABC$ (siehe Abbildung), das den Bedingungen der Aufgabe entspricht.
Der Mittelpunkt von AB sei P, der Mittelpunkt von BC sei Q. Dann liegt P auf der Seitenhalbierenden s_c und damit auf g_2 und Q auf s_a und damit auf g_1.

Verlängert man nun SP bzw. SQ über P bzw. Q hinaus um sich selbst (die so entstehenden Punkte seien D und E), so sind die Vierecke $ADBS$ bzw. $BECS$ Parallelogramme, da sich ihre Diagonalen halbieren.

II. Ein Dreieck $\triangle ABC$ kann daher nur dann den Bedingungen der Aufgabe genügen, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

Man zieht durch A die Parallele zu g_3. Sie schneide g_2 im Punkt D. Dann halbiert man SD (Halbierungspunkt sei P) und zieht die Gerade durch A und P. Sie schneide g_3 im Punkt B.
Nun zieht man durch B die Parallele zu g_2, die g_1 in E schneide. Man halbiert SE (Halbierungspunkt sei Q) und zieht die Gerade durch P und Q, die g_2 in C schneide.

III. Wenn sich das Dreieck $\triangle ABC$ so konstruieren lässt, dann entspricht es den Bedingungen.

Beweis: Laut Konstruktion sind die Dreiecke $\triangle ADP$ und $\triangle BSP$ sowie $\triangle BEQ$ und $\triangle CSQ$ kongruent, denn sie stimmen in einer Seite und den Winkeln überein.
Also sind die Vierecke $ADBS$ und $BECS$ Parallelogramme, und es gilt $AP = PB$ sowie $BQ = QC$. Daher sind CP und AQ Seitenhalbierende im Dreieck $\triangle ABC$. Ihr Schnittpunkt S muss auch auf der dritten Seitenhalbierenden liegen, die damit auf g_3 liegt.

IV. Die Konstruktion ist stets ausführbar und eindeutig. Denn von den Geraden g_1, g_2, g_3 sind keine zwei parallel, so dass also die Schnittpunkte D, B, E und C stets existieren und eindeutig bestimmt sind.
Da weder B noch C mit S zusammenfällt, kann weder B (als Punkt von g_3) noch C (als Punkt von g_2) mit dem Punkt A von g_1 zusammenfallen.

Aufgabe 090736:
Konstruiere einen Rhombus $ABCD$ aus $\angle BAD = 110°$ und $AC + BD = 15$ cm!
Anmerkung: $\angle BAD$ bezeichnet die Größe des Winkels $\angle BAD$.

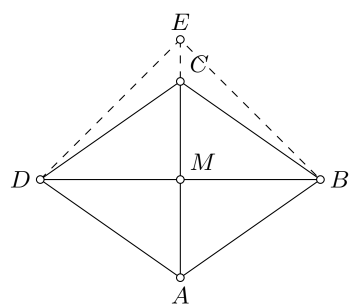
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Angenommen, $ABCD$ sei ein Rhombus, der den Bedingungen der Aufgabe entspricht. M sei sein Mittelpunkt. Dann ist AM die Winkelhalbierende von $\angle BAD$, ferner gilt $AM \perp BD$ sowie $MB = MD$. Schließlich ist

$$AM + MB = \frac{1}{2}(AC + BD)$$

Der Punkt E sei so auf der Verlängerung von AM über M hinaus gelegen, dass $ME = MB$ ist. Dann ist $\triangle MBE$ gleichschenklig-rechtwinklig, also, $\angle MEB = 45°$. Ebenso ist auch $\angle MED = 45°$.

II. Daraus folgt, dass ein Rhombus nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn er durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(1) Man zeichnet einen Winkel von 110°, dessen Scheitel A genannt sei, und seine Winkelhalbierende.



(2) Auf ihr trägt man von A aus eine Strecke von 7,5 cm Länge ab. Der zweite Endpunkt dieser Strecke sei E genannt.
(3) An den von E durch A gehenden Strahl trägt man in E nach beiden Seiten Winkel von 45° an. Schneiden ihre freien Schenkel die Schenkel der unter (1) genannten Winkel, so seien die Schnittpunkte B und D.

(4) Schneidet der Kreis um D mit dem Radius AD den von A durch E gehenden Strahl außer in A in einem weiteren Punkt, so sei dieser C genannt.

III. Beweis, dass diese Konstruktion zu einem Rhombus der gesuchten Art führt:
Nach Konstruktion wird $\triangle AEB = \triangle AED$ (wsw), also $AB = AD$. Hieraus folgt, wenn M der Schnittpunkt von AE und BD ist, $\triangle AMB = \triangle AMD$ (sws), also $\angle BMA = \angle DMA = 90°$.
Demnach gilt $\triangle DMA = \triangle DMC$ (ssw; $AD > MD$), also $AD = CD$, $AM = CM$ und somit schließlich $\triangle AMB = \triangle CMB$ (sws), $AB = CB$. Daher ist ABCD ein Rhombus.
In diesem gilt nach Konstruktion $\angle BAD = 110°$. Ferner ist $\angle BME = 90°$ und nach Konstruktion $\angle BEM = 45°$, also $\triangle MBE$ gleichschenklig-rechtwinklig mit $BM = EM$. Somit auch

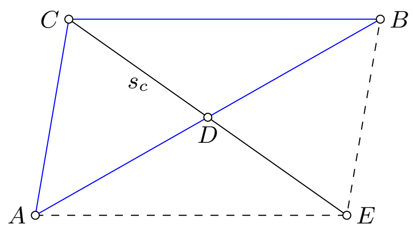
$$AC + BD = 2(AM + BM) = 2(AM + EM) = 2 \cdot AE = 15 \text{ cm}$$

wie verlangt.

IV. Die Konstruktionsschritte (1), (2) sind (bis auf Kongruenz) eindeutig durchführbar. Dasselbe gilt für (3), da $\frac{110°}{2} < 90°$ ist.

Aufgabe 100736:
Konstruiere ein Dreieck ABC aus $a = 5{,}5$ cm; $b = 3{,}5$ cm; $s_c = 3$ cm!
Dabei bedeuten a, b die Längen der Seiten BC bzw. AC und $CD = s_c$ die Länge der Seitenhalbierenden der Seite AB.
Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob sich mit den gegebenen Stücken ein Dreieck eindeutig konstruieren lässt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Analyse:
Angenommen, $\triangle ABC$ sei ein Dreieck, wie es nach Aufgabenstellung konstruiert werden soll.
Der Mittelpunkt von AB sei D; der Punkt E sei derjenige auf dem Strahl CD gelegene von C verschiedene Punkt, für den $CD = DE$ gilt. Dann ist $AEBC$ ein Parallelogramm, da sich AB und CE gegenseitig halbieren. Also ist $AE = CB = a$.



II. Konstruktionsbeschreibung:
Daher kann ein Dreieck $\triangle ABC$ nur dann der Aufgabenstellung entsprechen, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(1) Wir zeichnen die Strecke CD der Länge s_c,
(2) Wir zeichnen den Strahl CD.
(3) Wir schlagen den Kreis um D mit $CD = s_c$; der von C verschiedene Schnittpunkt dieses Kreises mit dem Strahl CD sei E.
(4) Wir schlagen um C und E die Kreise mit den Radien b bzw. a. Ist A einer ihrer Schnittpunkte, so zeichnen wir den Strahl AD.
(5) Wir schlagen den Kreis um D mit AD; der von A verschiedene Schnittpunkt dieses Kreises mit dem Strahl AD sei B.

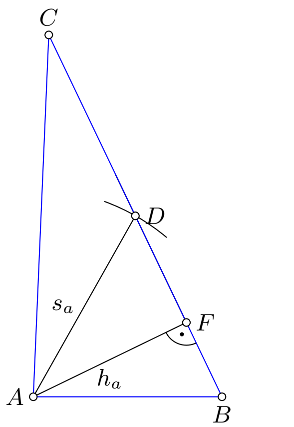
III. Beweis, dass ein so konstruiertes Dreieck der Aufgabenstellung entspricht:

Nach Konstruktion ist $AC = b$. Ferner ist $AD = DB$, also CD Seitenhalbierende, und ihre Länge ist nach Konstruktion $CD = s_c$.
Schließlich ist $AEBC$ ein Parallelogramm, da sich die Diagonalen AB und CE gegenseitig halbieren. Also ist $CB = AE = a$.

IV. Konstruktion:
Wegen $a - b < 2s_c < a + b$ sind alle Konstruktionsschritte durchführbar, also gibt es ein Dreieck, das der Aufgabenstellung entspricht. Dieses ist bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt, da der einzige möglicherweise mehrdeutige Konstruktionsschritt (4) dann zu zwei zu der Geraden durch C und E symmetrischen und damit kongruenten Figuren führt.

Aufgabe 110736:
Konstruiere ein Dreieck $\triangle ABC$ aus $c = 5$ cm, $h_a = 4{,}5$ cm, $s_a = 5{,}5$ cm!
Dabei sei c die Länge der Seite AB, h_a die Länge der Höhe des Dreiecks, die auf der Geraden durch B und C senkrecht steht, und s_a die Länge der Seitenhalbierenden der Seite BC.
Beschreibe und begründe deine Konstruktion!
Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke ein Dreieck eindeutig bestimmt ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(I) Angenommen, $\triangle ABC$ sei ein Dreieck, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht.
Der Fußpunkt der Höhe durch A auf die Gerade durch B und C sei F, der Mittelpunkt von BC sei D.
Dann werde das Teildreieck $\triangle ABF$ aus h_a, c und dem rechten Winkel $\angle AFB$ konstruiert.
Punkt D liegt erstens auf dem Kreis mit s_a um A und zweitens auf der Geraden durch F und B.



(II) Daraus ergibt sich, dass ein Dreieck $\triangle ABC$ nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(1) Wir konstruieren ein Dreieck $\triangle ABF$ mit einem rechten Winkel $\angle AFB$ und Seiten AB, AF der Länge c bzw. h_a.
(2) Wir ziehen die Gerade durch F und B.
(3) Wir schlagen einen Kreis um A mit s_a. Schneidet er die Gerade durch F und B, so sei D einer der Schnittpunkte.
(4) Wir schlagen den Kreis um D mit BD. Schneidet er die Gerade durch B und F außer in B noch in einem zweiten Punkt, so sei dieser C genannt.

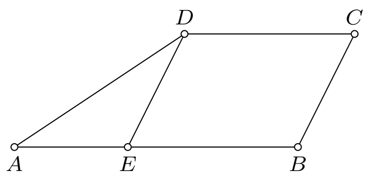
(III) Beweis, dass jedes so konstruierte Dreieck $\triangle ABC$ den Bedingungen der Aufgabe entspricht:
Nach Konstruktion ist $AB = c$, AF die auf der Geraden durch B und C senkrechte Höhe mit $AF = h_a$ und D der Mittelpunkt von BC; ferner gilt $AD = s_a$.

(IV) Konstruktionsschritt (1) ist im (hier vorliegenden) Falle $h_a < c$ bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar, Konstruktionsschritt (2) ebenfalls.
Wegen $s_a > h_a$ ergibt (3) genau zwei Schnittpunkte, die D_1 und D_2 genannt seien. Da nicht B, sondern F Mittelpunkt der Strecke D_1D_2 ist, ist $BD_1 \neq BD_2$.

Somit ergibt (4) genau zwei verschiedene Schnittpunkte, die C_1 und C_2 genannt seien. Wegen $BD_1 \neq BD_2$ ist auch $BC_1 \neq BC_2$. Es existieren folglich zwei Dreiecke $\triangle ABC_1$ und $\triangle ABC_2$, die beide die gleiche entsprechende Höhenlänge, aber verschiedene Längen der zugehörigen Grundseiten haben. Daher haben sie verschiedenen Flächeninhalt, sind also zueinander nicht kongruent. Infolgedessen existieren bis auf Kongruenz genau zwei verschiedene Dreiecke, die beide allen Bedingungen der Aufgabe genügen.

Aufgabe 130733:
Konstruiere ein Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ aus $a - c = 3$ cm, $b = 4$ cm, $d = 6$ cm, $e = 9$ cm!
Dabei bedeuten a, b, c und d in dieser Reihenfolge die Längen der Seiten AB, BC, CD, DA und e die Länge der Diagonalen AC.
Beschreibe und begründe deine Konstruktion!
Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke ein Trapez bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



(I) Angenommen, $ABCD$ sei ein Trapez, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht.
Punkt E liege zwischen A und B auf AB, und es gelte $AE = a - c$. Dann ist $AB - CD = c$ und $EBCD$ ist ein Parallelogramm. Nun lässt sich $\triangle AED$ aus AE, ED $(= BC)$ und DA konstruieren. Punkt C liegt erstens auf der Parallelen durch D zu AE und zweitens auf dem Kreis um A mit dem Radius e.

Ferner liegt C auf derselben Seite der Geraden durch A und D wie E. Punkt P liegt erstens auf dem Strahl aus A durch E und zweitens auf der Parallelen durch C zu ED.

(II) Daher entspricht ein Trapez $ABCD$ nur dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(1) Wir konstruieren ein Dreieck AED aus $AE = 3$ cm, $ED = 4$ cm und $AD = 6$ cm.
(2) Wir ziehen durch D die Parallele zu AE.
(3) Wir schlagen um A mit dem Radius e einen Kreis. Schneidet er die in (2) gezogene Parallele in einem Punkte, der auf derselben Seite der Geraden durch A und D liegt wie E, so sei dieser C genannt.
(4) Wir zeichnen den Strahl aus A durch E.
(5) Wir ziehen durch C die Parallele zu ED. Schneidet sie den in (4) gezeichneten Strahl, so sei dieser Schnittpunkt B genannt.

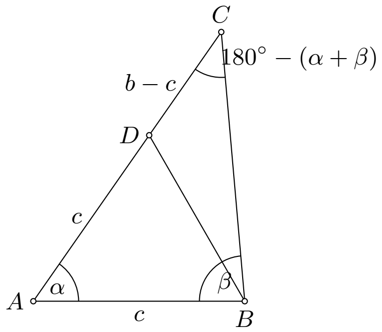
(III) Beweis, dass jedes so konstruierte Trapez $ABCD$ den Bedingungen der Aufgabe genügt:

Nach Konstruktion ist $AD = d$. Weiter ist nach Konstruktion $AC = e$. Da $EBCD$ nach Konstruktion ein Parallelogramm ist, gilt schließlich $BC(= ED) = b$ und, da E zwischen A und B liegt, auch $AB - DC(= AB - EB = AE) = a - c$.

(IV) Mit den gegebenen Größen ist Konstruktionsschritt (1) bis auf Kongruenz nach dem Kriterium (s,s,s) eindeutig ausführbar.
Ebenso ist (2) eindeutig ausführbar. Konstruktionsschritt (3) liefert wegen $AC > AD$ zwei Schnittpunkte, von denen genau einer auf derselben Seite von AD liegt wie E. Schließlich sind auch (4) und (5) eindeutig ausführbar.
Daher ist ein Trapez $ABCD$ durch die gegebenen Stücke bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.

Aufgabe 140733:
Konstruiere ein Dreieck ABC aus $b - c = 3$ cm, $\alpha = 55°$ und $\beta = 85°$!
Dabei seien b bzw. c die Längen der Seiten AC bzw. AB, α die Größe des Winkels $\angle BAC$ und β die des Winkels $\angle ABC$.
Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke ein Dreieck bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



(I) Angenommen, $\triangle ABC$ sei ein Dreieck, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht.
Dann ist $b > c$. Daher gibt es einen Punkt D auf AC, für den $AD = c$, also $DC = b - c$ gilt. Sodann ist nach dem Winkelsummensatz

$$\angle ACB = 180° - (\alpha + \beta)$$

Ferner ist $\triangle ABD$ gleichschenklig mit $AB = AD = c$, also gilt $\angle ABD = \angle ADB$.

Wegen $\angle ABD + \angle ADB + \alpha = 180°$ folgt hieraus

$$\angle ABD = \angle ADB = \frac{1}{2}(180° - \alpha)$$

Daher gilt

$$\angle CDB = 180° - 180° - \frac{1}{2}(180° - \alpha) = 90° + \frac{\alpha}{2}$$

Punkt A liegt erstens auf dem Strahl aus C durch D und zweitens auf dem freien Schenkel des in B an CB nach der Seite der Geraden durch B und C, auf der D liegt, angetragenen Winkels der Größe β.
Daraus folgt, dass ein Dreieck ABC nur dann den Bedingungen der Aufgabe genügt, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(II) (1) Man konstruiert ein Dreieck BDC, in dem die Seite DC die Länge $b - c$, der Winkel $\angle CDB$ die Größe $90° + \frac{\alpha}{2}$ und der Winkel $\angle DCB$ die Größe $180° - (\alpha + \beta)$ haben.
(2) Man zeichnet den Strahl aus C durch D.
(3) Man trägt in B an BC nach der Seite der Geraden durch B und C, auf der D liegt, einen Winkel der Größe β an.
(4) Schneidet sein freier Schenkel den in (2) gezeichneten Strahl in einem Punkt außerhalb von CD, so sei dieser A genannt.

(III) Beweis, dass jedes so konstruierte Dreieck ABC den Bedingungen der Aufgabe entspricht:

Nach Konstruktion hat $\angle ABC$ die verlangte Größe β. Ferner hat $\angle BAC$ nach dem Winkelsummensatz und nach Konstruktion die Größe

$$180° - \angle ABC - \angle DCB = 180° - \beta - (180° - \alpha - \beta) = \alpha$$

Weiterhin ist nach Konstruktion $\angle ADB = 180° - \angle CDB = 180° - (90° + \frac{\alpha}{2}) = 90° - \frac{\alpha}{2}$ und somit

$$\angle ABD = 180° - \angle BAD - \angle ADB = 180° - \alpha - (90° - \frac{\alpha}{2}) = 90° - \frac{\alpha}{2} = \angle ADB$$

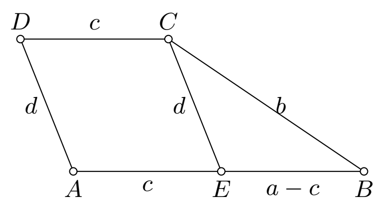
Also ist $\triangle ABD$ gleichschenklig mit $AB = AD$, und somit gilt auch, wie verlangt, $AC - AB = AC - AD = CD = b - c$.

(IV) Konstruktionsschritt (1) ist bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar, da für die gegebenen Größen α, β die Beziehung $180° - \alpha - \beta > 0$ und $(90° + \frac{\alpha}{2}) + (180° - \alpha - \beta) < 180°$ gelten.
Danach sind die Konstruktionsschritte (2) und (3) eindeutig ausführbar, und wegen $(180° - \alpha - \beta) + \beta < 180°$ und $90° + \frac{\alpha}{2} > \alpha$ auch Konstruktionsschritt (4). Durch die gegebenen Stücke ist ein Dreieck mithin bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.

Aufgabe 160736:
Konstruiere ein Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel DC$ aus $a = 9{,}1$ cm, $b = 6{,}3$ cm, $c = 6{,}7$ cm und $d = 5{,}0$ cm!
Dabei sei a die Länge der Seite AB, b die der Seite BC, c die der Seite CD und d die der Seite AD.
Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke ein Trapez bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Angenommen, $ABCD$ sei ein Trapez, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht (siehe Abbildung).

Dann ist $a > c$. Daher schneidet die Parallele zu AD durch C die Seite AB in einem inneren Punkte E, für den $AE = c$, also $EB = a - c$ gilt.
Daraus folgt, dass ein Trapez $ABCD$ nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:



II. (1) Wir konstruieren das Teildreieck EBC aus $EB = a - c$, $BC = b$ und $EC = d$.
(2) Wir verlängern BE über E um c und erhalten A,
(3) Wir zeichnen die Parallele zu AB durch C.
(4) Wir zeichnen die Parallele zu CE durch A.

Der Schnittpunkt der beiden Parallelen aus (3) und (4) sei D genannt.

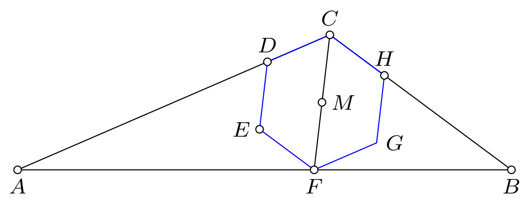
III. Jedes so erhaltene Viereck $ABCD$ entspricht den Bedingungen der Aufgabe.

Beweis: Das Viereck $AECD$ ist ein Parallelogramm, also gilt $CD = AE = c$ und $AD = EC = d$, und $ABCD$ ist ein Trapez mit $AB \parallel CD$. Nach Konstruktion ist $AB = BE + EA = a - c + c = a = 9{,}1$ cm, $BC = b = 6{,}3$ cm, $CD = AE = c = 6{,}7$ cm und $AD = EC = d = 5{,}0$ cm.

IV. Konstruktionsschritt (1) ist nach dem Kriterium (sss) bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar, weil jede der drei Seitenlängen $a - c = 2{,}4$ cm, $b = 6{,}3$ cm und $d = 5{,}0$ cm kleiner als die Summe der beiden anderen ist.
Die Konstruktionsschritte (2), (3) und (4) sind danach stets eindeutig ausführbar. Mithin existiert bis auf Kongruenz genau ein Trapez $ABCD$ der geforderten Art.

Aufgabe 170733:
Gegeben sei ein Dreieck ABC mit $AC = 9{,}0$ cm, $BC = 6{,}0$ cm und $\angle BCA = 120°$.
Konstruiere ein regelmäßiges Sechseck $CDEFGH$ derart, dass D auf AC, F auf AB und H auf BC liegen!
Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob es genau ein Sechseck $CDEFGH$ gibt, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



(I) Angenommen, ein Sechseck $CDEFGH$ erfülle die Bedingungen der Aufgabe.
Dann halbiert der Mittelpunkt M des Umkreises des Sechsecks $CDEFGH$ die Halbierende des Winkels $\angle BCA$, und die Dreiecke MCD, MDE, MEF, MFG, MGH und MHC sind sämtlich gleichseitig mit der Seitenlänge CM.

(II) Daher entspricht ein Sechseck $CDEFGH$ nur dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(1) Man konstruiert die Halbierende des Winkels $\angle BCA$, ihr Schnittpunkt mit AB sei Punkt F.
(2) Man halbiert CF, der Halbierungspunkt sei M.
(3) Man beschreibt um C den Kreis mit dem Radius MC, seine Schnittpunkte mit AC bzw. BC seien D bzw. H genannt.

(4) Man beschreibt um M und F Kreise mit dem Radius MC, ihre Schnittpunkte miteinander seien E und G genannt.

(III) Beweis, dass jedes so konstruierte Sechseck $CDEFGH$ den Bedingungen der Aufgabe entspricht:

Nach Konstruktion liegen die Punkte D, F, H in dieser Reihenfolge auf den Seiten AC, AB, BC.
Ebenfalls nach Konstruktion ist $CD = EF = FG = HC = CM$.
Da ferner nach Konstruktion M auf der Halbierenden des Winkels $\angle DCH$ der Größe 120° liegt, $\triangle CDM$ also gleichseitig ist, und da nach Konstruktion $\triangle EFM$ ebenfalls gleichseitig ist, gilt $\angle CMD = \angle FME = 60°$.

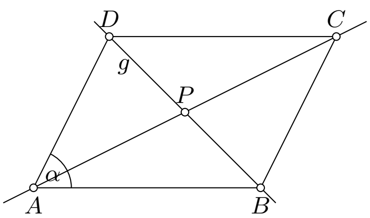
Hiernach und wegen $\angle FMC = 180°$ ist $\angle EMD = 60°$. Da das Dreieck EMD wegen $MD = ME$ gleichschenklig ist, gilt $\angle MED = \angle MDE$, diese Winkelgröße beträgt somit jeweils 60°, also ist $DE = CM$.
Entsprechend ist $GH = CM$. Wegen $CD = DE = EF = FG = GH = HC = CM$ sind die Dreiecke MCD, MDE, MEF, MFG, MGH und MHC sämtlich gleichseitig, und die Winkel $\angle CDE$, $\angle DEF$, $\angle EFG$, $\angle FGH$ und $\angle GHC$ haben sämtlich die Größe 120°.

(IV) Sämtliche Konstruktionsschritte sind eindeutig ausführbar, deshalb gibt es stets genau ein Sechseck $CDEFGH$, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht.

Aufgabe 180733:
Gegeben seien ein Winkel, dessen Größe kleiner als 180° ist, und ein Punkt P im Innern dieses Winkels. Der Scheitel des Winkels sei A.
Konstruiere eine Gerade g, die durch den Punkt P geht und die die Schenkel des Winkels so in Punkten $B \neq A$ bzw. $D \neq A$ schneidet, dass P der Mittelpunkt von BD ist!
Beschreibe und begründe deine Konstruktion!
Stelle fest, ob es genau eine Gerade gibt, die die Bedingungen der Aufgabe erfüllt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Angenommen, es gibt eine Gerade g, die die Bedingungen der Aufgabe erfüllt.
Dann schneidet sie die Schenkel des gegebenen Winkels in Punkten, die mit B bzw. D bezeichnet sind, und es ist ferner P Mittelpunkt von BD. Der Scheitelpunkt des Winkels sei A.

Dann gibt es genau einen Punkt C auf dem Strahl von A durch P, so dass P Mittelpunkt der Strecke AC ist. Daher halbieren sich die Strecken BD und AC, d. h., das Viereck $ABCD$ ist ein Parallelogramm. Folglich kann eine Gerade g nur dann alle Bedingungen der Aufgabe erfüllen, wenn sie durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:



II. (1) Man zeichnet vom Scheitelpunkt A des gegebenen Winkels einen Strahl durch P, auf dem man von A aus eine Strecke der Länge $2AP$ abträgt. Ihr anderer Endpunkt sei C genannt.
(2) Durch C zieht man die Parallelen zu den Schenkeln des gegebenen Winkels. Ihre Schnittpunkte mit den jeweils anderen Schenkeln seien B bzw. D.
(3) Man zeichnet die Gerade g durch B und D.

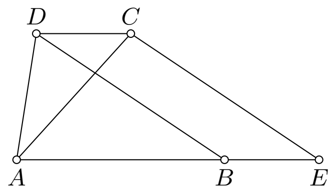
III. Jede so konstruierte Gerade g erfüllt alle Bedingungen der Aufgabe.

Beweis: Nach Konstruktion gilt $AD \parallel BC$ und $AB \parallel CD$ sowie $AP = PC$. Folglich ist das Viereck $ABCD$ ein Parallelogramm und P der Mittelpunkt seiner Diagonalen AC. Daher geht auch die andere Diagonale BD durch P und wird von P halbiert.

IV. Da die Konstruktionsschritte (1) bis (3) stets eindeutig ausführbar sind, gibt es genau eine Gerade der geforderten Art.

Aufgabe 190733:
Konstruiere ein Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ aus $a = 5{,}5$ cm, $c = 2{,}5$ cm, $e = 4{,}5$ cm, $f = 6{,}0$ cm! Dabei seien a bzw. c die Längen der Seiten AB bzw. CD; e bzw. f die Längen der Diagonalen AC bzw. BD.
Beschreibe und begründe deine Konstruktion!
Untersuche, ob $ABCD$ durch die gegebenen Längen bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Angenommen, $ABCD$ habe die verlangten Eigenschaften.
Dann schneidet die Parallele durch C zu BD die Verlängerung von AB über B hinaus in einem Punkt E, für den $BE \parallel DC$ und $BD \parallel EC$ gilt. Also ist $BECD$ ein Parallelogramm; daher gilt $EC = BD$ und $BE = DC$.
Somit hat $\triangle AEC$ die Seitenlängen $AC = e$, $EC = f$ und $AE = AB + BE = a + c$.



II. Daher entspricht $ABCD$ nur dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

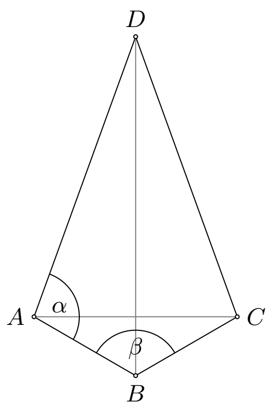
(1) Man konstruiert eine Strecke AB der Länge a.
(2) Man verlängert AB über B hinaus um c; der erhaltene Endpunkt sei E.
(3) Man konstruiert den Kreis um A mit e und den Kreis um E mit f. Schneiden sie sich, so sei C einer ihrer Schnittpunkte.
(4) Man konstruiert die Parallele durch C zu AB und die Parallele durch B auf EC. Schneiden sie sich, so sei D ihr Schnittpunkt.

III. Beweis, dass jedes so konstruierte Viereck $ABCD$ den Bedingungen der Aufgabe entspricht: Nach (4) ist $ABCD$ ein Trapez mit $AB \parallel CD$. Nach (1) und (3) ist $AB = a$ und $AC = e$. Nach (2) und (3) ist ferner $BE = c$, $BC = f$, und da $BECD$ nach (4) ein Parallelogramm ist, folgt auch $DC = BE = c$ und $BD = EC = f$.

IV. Da für die gegebenen a, c, e, f je zwei der Längen $e, f, a + c$ eine größere Summe als die dritte dieser Längen haben, ergibt sich bei den Konstruktionsschritten (1) bis (3) ein bis auf Kongruenz eindeutig bestimmtes Dreieck AEC; insbesondere wird $AB \nparallel EC$. Hiernach ist auch Konstruktionsschritt (4) eindeutig ausführbar. Daher ist $ABCD$ durch die gegebenen Längen bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.

Aufgabe 210733:
Konstruiere ein Drachenviereck $ABCD$ aus $a = 3{,}1$ cm, $\alpha = 100°$ und $\beta = 120°$! Dabei bezeichne a die Länge $AB = BC$; ferner bezeichne α die Größe des Winkels $\angle BAD$ und β die Größe des Winkels $\angle ABC$. Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Untersuche, ob durch die gegebenen Stücke ein Drachenviereck bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



I. Angenommen, $ABCD$ sei ein Drachenviereck, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht (siehe Abbildung). Im Teildreieck ABC sind dann die Seitenlängen AB, BC und die Größe des eingeschlossenen Winkels $\angle ABC$ gegeben. Ferner ist BD Spiegelachse des Drachenvierecks $ABCD$, und es gilt $\angle BAD = \angle BCD = \alpha$.
(Wegen $\alpha < 180°$, $\beta < 180°$ hat $ABCD$ weder bei B noch bei C eine einspringende Ecke. Also liegt D auf derselben Seite der Geraden durch A, B wie C und auf derselben Seite der Geraden durch B, C wie A.)

Daraus folgt, dass ein Drachenviereck $ABCD$ nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

II. (1) Man konstruiere ein Dreieck ABC aus den Seitenlängen $AB = BC = a$ und der Winkelgröße $\angle ABC = \beta$.
(2) In A bzw. C trage man an AB bzw. BC jeweils einen Winkel der Größe α an (jeweils nach derjenigen Seite von AB bzw. BC, auf der der Punkt C bzw. A liegt). Ist D Schnittpunkt der freien Schenkel dieser beiden Winkel, so ist damit ein Viereck $ABCD$ konstruiert.

III. Beweis, dass jedes so konstruierte Viereck $ABCD$ den Bedingungen der Aufgabe entspricht:

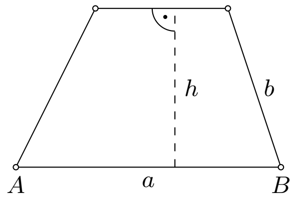
Nach (1) gilt $AB = BC$. Nach (2) ist $\angle BAD = \angle BCD = 120°$ jeweils in den Dreiecken BAD bzw. BCD der größte Innenwinkel, liegt also der größten Seite gegenüber. Hiernach und wegen $BD = BD$ sind die Dreiecke BAD und BCD nach (ssw) kongruent, also ist $AD = CD$. Daher ist $ABCD$ ein Drachenviereck.

In ihm haben AB, BC und $\angle ABC$ nach (1) sowie $\angle BAD$ nach (2) die verlangten Größen.

IV. Konstruktionsschritt (1) ist bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar. Danach ist Konstruktionsschritt (2) eindeutig ausführbar und ergibt auch wegen $\beta + 2\alpha < 360°$ einen eindeutig bestimmten Schnittpunkt D.
Daher ist durch die gegebenen Stücke ein Drachenviereck $ABCD$ bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.

Aufgabe 220733:
Konstruiere ein Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel DC$ aus $a = 5{,}0$ cm, $b = 3{,}5$ cm, $c = 2{,}5$ cm und $h = 3{,}0$ cm!
Dabei seien a die Länge der Seite AB, b die der Seite BC, c die der Seite CD und h der Abstand der beiden parallelen Seiten AB und DC voneinander.
Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Untersuche, ob durch die gegebenen Längen ein Trapez $ABCD$ bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



I. Wenn $ABCD$ ein Trapez mit den geforderten Eigenschaften ist, so folgt:

Es gilt $AB = a$. Ferner ist die Gerade durch C, D parallel zur Geraden durch A, B und hat von ihr den Abstand h. Weiterhin gilt $BC = b$. Schließlich ist $CD = c$, und D liegt auf derselben Seite der Geraden durch B, C wie A.

II. Daher ist $ABCD$ nur dann ein Trapez mit den geforderten Eigenschaften, wenn A, B, C und D durch folgende Konstruktion erhalten werden können:

(1) Man konstruiert eine Strecke AB der Länge a.

(2) Man konstruiert eine Parallele p zu AB im Abstand h.
(3) Man konstruiert den Kreis k um B mit dem Radius b und bezeichnet einen Schnittpunkt von p und k mit C.
(4) Man konstruiert den Kreis k' um C mit dem Radius c und bezeichnet denjenigen Schnittpunkt von p und k', der auf derselben Seite der Geraden durch B, C wie A liegt, mit D.

III. Beweis, dass für so konstruierte A, B, C, D stets $ABCD$ ein Trapez mit den geforderten Eigenschaften ist:

Nach (2), (3), (4) ist $ABCD$ ein Trapez mit $AB \parallel DC$, in dem AB und DC den Abstand h voneinander haben; nach (1) ist $AB = a$, nach (3) ist $BC = b$, und nach (4) ist $CD = c$.

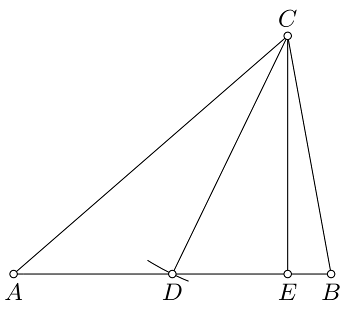
IV. Die Konstruktionsschritte (1) und (2) sind bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar.
Wegen $b > h$ ist Konstruktionsschritt (3) ausführbar und ergibt zwei verschiedene Schnittpunkte C_1, C_2 von p und k (siehe Abbildung). Danach ist Konstruktionsschritt (4) jeweils eindeutig ausführbar, ergibt also zu C_1, genau einen Punkt D_1 und zu C_2 genau einen Punkt D_2.

Bei (3) entsteht wegen $b > h$ ein gleichschenkliges Dreieck BC_1C_2, dessen Basiswinkel bei C_1 und C_2 folglich spitze Winkel sind. Wählt man die Bezeichnungen wie in der Abbildung (C_1 auf derselben Seite der Geraden durch B, C_2 wie A), so gilt also $\angle BC_1D_1 > \angle BC_1C_2 = \angle BC_2C_1 = \angle BC_2D_2$; daher sind die Trapeze ABC_1D_1 und ABC_2D_2 nicht kongruent.
Also ist ein Trapez $ABCD$ durch die gegebenen Längen nicht bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.

Aufgabe 230733:
Konstruiere ein Dreieck ABC aus $c = 6$ cm, $h_c = 4{,}5$ cm und $s_c = 5$ cm!
Dabei sei c die Länge der Seite AB, h_c die Länge der auf AB senkrechten Höhe und s_c die Länge der Seitenhalbierenden von AB.
Beschreibe deine Konstruktion! Leite deine Konstruktionsbeschreibung aus den Bedingungen der Aufgabenstellung her!
Beweise, dass ein Dreieck ABC, wenn es nach deiner Beschreibung konstruiert wird, die verlangten Eigenschaften hat! (Eine Diskussion der Ausführbarkeit und Eindeutigkeit der Konstruktionsschritte wird nicht gefordert.)

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn ein Dreieck ABC die Bedingungen der Aufgabenstellung erfüllt, so folgt:
Die auf AB senkrechte Höhe CE hat die Länge $h_c = 4{,}5$ cm, und die Punkte A und B liegen auf der in E auf CE errichteten Senkrechten g. Der Mittelpunkt D der Seite AB liegt auch auf dieser Geraden g, und A und B haben von D den Abstand $\frac{c}{2}$. Außerdem hat D von C den Abstand $s_c = 5$ cm.

II. Damit ist hergeleitet, dass ein Dreieck ABC, wenn es die Bedingungen der Aufgabenstellung erfüllt, nach folgender Konstruktionsbeschreibung erhalten werden kann:



(1) Man konstruiert eine Strecke CE der Länge h_c.
(2) Man errichtet die Senkrechte g in E auf CE.
(3) Man konstruiert den Kreis k um C mit s_c und bezeichnet einen Schnittpunkt von k und g mit D.
(4) Man konstruiert den Kreis k' um D mit $\frac{c}{2}$ und bezeichnet die Schnittpunkte von k' und g mit A und B.

Beweis, dass ein Dreieck ABC, wenn es nach dieser Beschreibung konstruiert wird, die verlangten Eigenschaften hat:

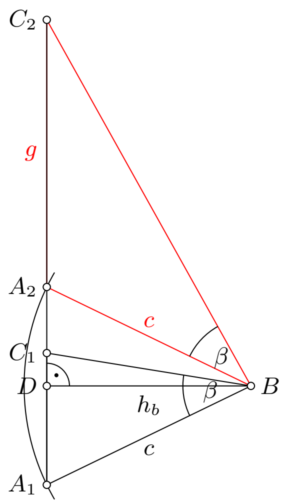
Nach Konstruktionsschritt (4) ist $AD = DB = \frac{c}{2}$, also einerseits $AB = c$, andererseits CD die Seitenhalbierende von AB. Nach Konstruktionsschritt (3) gilt für sie $CD = s_c$.

Ferner ist CE nach Konstruktionsschritt (2) die auf AB senkrechte Höhe, und nach Konstruktionsschritt (1) gilt für sie $CE = h_c$.

Aufgabe 240733:
Konstruiere zwei zueinander nicht kongruente Dreiecke ABC, die folgende Bedingungen erfüllen:

Die Seite AB hat die Länge $c = 5$ cm, die auf der Geraden durch A und C senkrechte Höhe des Dreiecks ABC hat die Länge $h_b = 4{,}5$ cm, der Winkel $\angle ABC$ hat die Größe $\beta = 35°$.
Gefordert wird eine Zeichnung (Konstruktion der beiden Dreiecke) und eine Konstruktionsbeschreibung hierzu. (Eine Begründung wird nicht verlangt.)

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

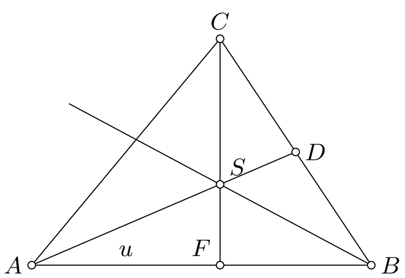


Konstruktionsbeschreibung:
(1) Konstruktion einer Strecke DB der Länge h_b.
(2) Konstruktion der Senkrechten g in D auf DB.
(3) Konstruktion des Kreises k um B mit c; er schneidet g in zwei Punkten A_1, A_2.
(4) Antragen eines Winkels der Größe β in B an BA_1; sein zweiter Schenkel schneidet g in C_1.
(5) Antragen des Winkels der Größe β in B an BA_2 in gleichem Drehsinn wie der in (4) konstruierte Winkel. Der zweite Schenkel des in (5) konstruierten Winkels schneidet g in C_2.
A_1BC_1 und A_2BC_2 sind zwei Dreiecke der geforderten Art.

Bemerkung: In Konstruktionsschritt (4) hat man zwei Möglichkeiten des Antragens. Eine ist in der Abbildung dargestellt; die andere entsteht (bis auf die Bezeichnung) durch Spiegelung beider Dreiecke A_1BC_1, A_2BC_2 an der Geraden durch B und D.

Aufgabe 260735:
Bekanntlich haben in jedem gleichseitigen Dreieck die drei Seitenhalbierenden, die zugleich auch die drei Winkelhalbierenden und die drei Höhen sind, einen gemeinsamen Schnittpunkt.
Gibt es Dreiecke ABC, die nicht gleichseitig sind und bei denen wenigstens die Seitenhalbierende von BC, die Winkelhalbierende von $\angle ABC$ und die zur Seite AB senkrechte Höhe einen gemeinsamen Schnittpunkt haben?
Wenn es solche Dreiecke gibt, so konstruiere ein derartiges Dreieck und beschreibe deine Konstruktion! Eine Begründung wird nicht verlangt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Es gibt derartige Dreiecke. Eine Konstruktion eines solchen Dreiecks ist z. B. die folgende:

(1) Man konstruiert eine beliebige Strecke BC und ihren Mittelpunkt D.
(2) In B trägt man an BC einen beliebigen spitzen Winkel an, dessen Größe von 60° verschieden ist; der zweite Schenkel dieses Winkels sei u.
(3) Man fällt das Lot von C auf u; der Lotfußpunkt sei F.
(4) Man konstruiert die Winkelhalbierende von $\angle CBF$; sie schneidet CF in einem Punkt S.
(5) Man konstruiert die Gerade durch D und S; sie schneidet u in A.

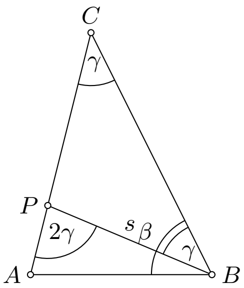
1) Der genannte Schnittpunkt A existiert (bei jeder Wahlmöglichkeit in (1) und (2)); denn der in (4) konstruierte Punkt S liegt zwischen u und der Parallelen durch D zu u, weil die Konstruktion auf $BD = DC$, aber $FS < SC$ führt.

Aufgabe 270733:
Gegeben sei ein Dreieck ABC, in dem die Größe γ des Winkels $\angle ACB$ kleiner ist als die Größe β des Winkels $\angle ABC$. Gefordert seien die folgenden von einem Punkt P zu erfüllenden Bedingungen (1) und (2):

(1) P liegt auf der Strecke AC.
(2) Der Winkel $\angle APB$ hat die Größe 2γ.

a) Beschreibe hierzu eine Konstruktion; zeige, dass sie zu jedem Dreieck ABC mit $\gamma < \beta$ genau einen Punkt P liefert und dass die beiden folgenden Aussagen b) und c) gelten!
b) Wenn ein Punkt P die Bedingungen (1) und (2) erfüllt, dann wird er durch die beschriebene Konstruktion erhalten.
c) Wenn ein Punkt P durch die beschriebene Konstruktion erhalten wird, dann erfüllt er die Bedingungen (1) und (2).

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



(a) Man trägt in B an BC denjenigen Winkel der Größe γ an, dessen zweiter Schenkel s auf derselben Seite der Geraden durch B und C liegt wie A.
Für jedes Dreieck ABC mit $\gamma < \beta$ gilt: Da der Strahl s von B aus in das Innere des Dreiecks geht, schneidet er die Strecke AC in genau einem Punkt P.

(b) Wenn ein Punkt P die Bedingungen (1) und (2) erfüllt, so folgt: Nach (1) liegt P auf AC, also auf derselben Seite der Geraden durch B und C wie A, es gilt $\angle PCB = \angle ACB = \gamma$, und BCP ist ein Dreieck, für das nach den Außenwinkelsatz und nach (2)

$$\angle CBP = \angle APB - \angle PCB = 2\gamma - \gamma = \gamma$$

gilt. Also liegt P auf AC und auf dem zweiten Schenkel s des nach der Konstruktionsbeschreibung an BC angetragenen Winkels der Größe γ.

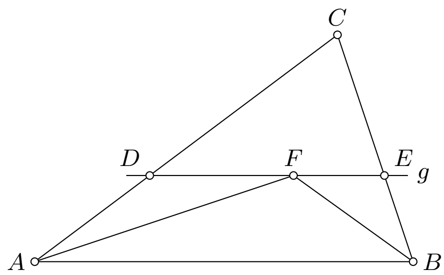
(c) Wenn ein Punkt P durch die beschriebene Konstruktion erhalten wird, so folgt: P liegt auf AC, erfüllt also (1), und es gilt $\angle PCB = \angle ACB = \gamma$. Ferner folgt nach dem Außenwinkelsatz und nach Konstruktion $\angle APB = \angle PCB + \angle CBP = \gamma + \gamma = 2\gamma$, also ist auch (2) erfüllt.

Aufgabe 280733:
Gegeben sei ein beliebiges spitzwinkliges Dreieck ABC. Gesucht ist eine Gerade g, die die folgenden Bedingungen erfüllt:

(1) Die Gerade g ist parallel zu AB, sie schneidet die Seite AC in einem Punkt D und die Seite BC in einem Punkt E.
(2) Für diese Punkte gilt $AD + BE = DE$.

I. Zeige, dass eine Gerade g, wenn sie die Bedingungen (1) und (2) erfüllt, zu dem Dreieck konstruiert werden kann!
II. Beschreibe eine solche Konstruktion!
III. Zeige, dass eine Gerade g, wenn sie nach dieser Beschreibung konstruiert wird, die Bedingungen (1) und (2) erfüllt!
IV. Konstruiere ein beliebiges spitzwinkliges, nicht gleichschenkliges Dreieck ABC und zu diesem nach deiner Beschreibung auch g!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Analyse:
Wenn eine Gerade g die Bedingungen (1) und (2) erfüllt, so folgt:
Nach (2) gibt es auf der Strecke DE einen Punkt F, für den $DF = AD$ und $EF = BE$ (3) gilt. Aus (3) folgt nach dem Basiswinkelsatz
$\angle DAF = \angle DFA$ und $\angle EBF = \angle EFB$; (4)
wegen (1) gilt nach dem Wechselwinkelsatz
$\angle DFA = \angle FAB$ und $\angle EFB = \angle ABF$; (5)
Aus (4) und (5) folgt: AF halbiert den Winkel $\angle BAC$, und BF halbiert den Winkel $\angle ABC$. Damit und wegen (1) ist gezeigt, dass eine Gerade g, wenn sie (1) und (2) erfüllt, nach folgender Beschreibung konstruiert werden kann:



II. Konstruktionsbeschreibung:
1. Man konstruiert die Winkelhalbierenden von $\angle BAC$ und $\angle ABC$ und ihren Schnittpunkt F.
2. Man konstruiert die Parallele g durch F zu AB.

III. Beweis:
Wenn eine Gerade g nach dieser Beschreibung konstruiert wird, so folgt:
Nach Konstruktionsschritt 2. erfüllt die Gerade g die Bedingung (1).

Nach Konstruktionsschritt 1. gilt für ihre Schnittpunkte D, E mit AC bzw. BC ferner $\angle DAF = \angle FAB$ und $\angle EBF = \angle ABF$; (6) nach Konstruktionsschritt 2. und dem Wechselwinkelsatz gilt $\angle FAB = \angle DFA$ und $\angle ABF = \angle EFB$. (7)

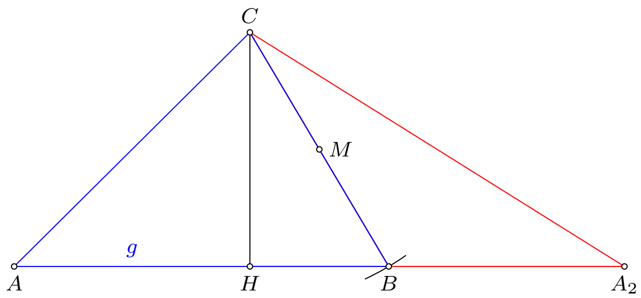
Aus (6) und (7) folgt nach der Umkehrung des Basiswinkelsatzes $AD = DF$ und $BE = EF$, also ist mit $AD + BE = DF + EF = DE$auch die Bedingung (2) erfüllt.

IV. Konstruktion: siehe Abbildung

Aufgabe 290733:
Von einem Dreieck ABC wird gefordert, dass $a = 5{,}0$ cm, $s_a = 6{,}0$ cm und $h_c = 4{,}3$ cm gilt, wobei a die Länge der Seite BC, s_a die Länge der Seitenhalbierenden der Seite BC und h_c die Länge der auf AB senkrechten Höhe des Dreiecks ist.

a) Beweise: Wenn ein Dreieck diese Forderungen erfüllt, dann kann es aus den gegebenen Längen 5,0 cm, 6,0 cm und 4,3 cm konstruiert werden!
b) Beschreibe eine solche Konstruktion und fertige eine Konstruktionszeichnung an!
c) Beweise: Wenn ein Dreieck nach der Beschreibung konstruiert wird, dann erfüllt es die gestellten Forderungen!
d) Stelle fest, ob durch diese Forderungen ein Dreieck ABC bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Analyse:
Wenn ein Dreieck die Forderungen erfüllt, so folgt:
Ist H der Fußpunkt der auf AB senkrechten Höhe, so ist $CH = h_c = 4{,}3$ cm, und die Gerade durch A und B steht auf CH senkrecht und geht durch H. Ferner ist $BC = a = 5{,}0$ cm, also liegt B auf dem Kreis um C mit dem Radius 5,0 cm.
Ist M der Mittelpunkt der Strecke BC, so ist $AM = s_a = 6{,}0$ cm, also liegt A auf dem Kreis um M mit dem Radius 6,0 cm; ferner liegt A auf der Geraden durch A und B.
Damit ist bewiesen, dass das Dreieck durch folgende Konstruktion aus den gegebenen Längen erhalten werden kann:



b) Konstruktionsbeschreibung:
(1) Man konstruiert eine Strecke CH der Länge 4,3 cm.
(2) Man errichtet die Senkrechte g in H auf CH.
(3) Man konstruiert den Kreis k_1 um C mit dem Radius 5,0 cm. Er schneidet die Gerade g in zwei Punkten; man wählt einen beliebigen von ihnen aus und bezeichnet ihn mit B.
(4) Man konstruiert den Mittelpunkt M der Strecke BC.
(5) Man konstruiert den Kreis k_2 um M mit dem Radius 6,0 cm. Er schneidet die Gerade g in zwei Punkten A_1, A_2; einen von ihnen wählt man als A.

c) Beweis:
Wenn ein Dreieck ABC nach dieser Beschreibung konstruiert wird, dann folgt:

Nach (3) ist $CB = a = 5{,}0$ cm. Nach (2) und (5) stehen CH und die Gerade durch A und B senkrecht aufeinander, also ist CH die auf AB senkrechte Höhe; nach (1) hat sie die Länge $CH = hc = 4{,}3$ cm. Nach (4) und (5) ist (für jede Wahlmöglichkeit von A_1 oder A_2 als A) AM die Seitenhalbierende der Seite BC; nach (5) hat sie die Länge $AM = s_a = 6{,}0$ cm. Also erfüllt jedes so konstruierte Dreieck ABC die gestellten Forderungen.

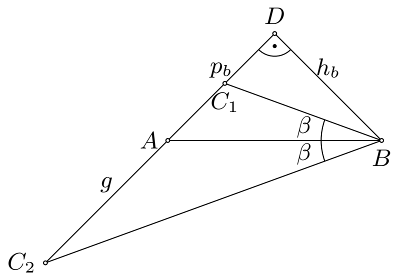
d) Konstruktion:
Für die in (1), (3), (5) erhaltenen Punkte B, A_1, A_2, H gilt:
B liegt zwischen A_1 und A_2, und es ist $B \neq H$. Daher haben die beiden Dreiecke A_1BC, A_2BC bei B Innenwinkel, die Nebenwinkel voneinander und verschieden von 90° sind. Also ist $\angle A1BC \neq \angle A2BC$. Daher sind die Dreiecke A_1BC und A_2BC nicht zueinander kongruent. Damit ist bewiesen: Durch die Forderungen ist ein Dreieck ABC nicht bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.

Aufgabe 300733:
Aus zwei gegebenen Längen $h_b = 4{,}0$ cm und $p_b = 4{,}0$ cm sowie einer gegebenen Winkelgröße $\beta = 20°$ soll ein Dreieck ABC konstruiert werden. Wenn dabei D den Fußpunkt der auf AC senkrechten Höhe D bezeichnet, so wird gefordert:

(1) Es gilt $BD = h_b$.
(2) Es gilt $AD = p_b$.
(3) Der Winkel $\angle ABC$ hat die Größe β.

a) Beweise: Wenn ein Dreieck ABC die Bedingungen (1), (2) und (3) erfüllt, dann kann es aus den gegebenen Stücken h_b, p_b, β konstruiert werden;
b) Beschreibe eine solche Konstruktion!
c) Beweise: Wenn ein Dreieck ABC nach deiner Beschreibung konstruiert wird, dann erfüllt es die Bedingungen (1), (2) und (3).
d) Stelle fest, ob ein Dreieck durch die Bedingungen (1), (2) und (3) bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



a) Wenn ein Dreieck ABC mit der auf AC senkrechten Höhe BD die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt, dann ist ABD ein bei D rechtwinkliges Dreieck mit gegebenen Kathetenlängen BD, AD. Der Punkt C liegt so auf der Geraden durch A und D, dass BC mit BA einen Winkel der Größe β bildet.
Also kann ABC nach folgender Beschreibung konstruiert werden (siehe Abbildung):

b) 1. Man konstruiert einen rechten Winkel und trägt von seinem Scheitel D aus auf seinen Schenkeln die Strecken DB bzw. DA der Längen $h_b = 4{,}0$ cm bzw. $p_b = 4{,}0$ cm ab.
2. Man trägt in B an BA einen Winkel der Größe $\beta = 20°$ an und bringt seinen zweiten Schenkel zum Schnitt C mit der Geraden g durch A und D.

c) Wenn ein Dreieck ABC nach dieser Beschreibung konstruiert wird, dann ist BD nach 1. (und 2.) die auf g (also auf AC) senkrechte Höhe, und es gilt (1) sowie (2). Nach 2. wird auch (3) erfüllt.

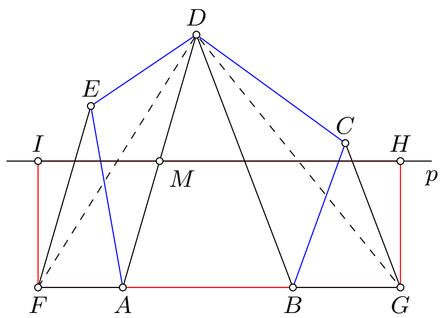
d) Der nach 2. zu konstruierende Winkel kann nach beiden Seiten von BA angetragen werden. Je nachdem, ob sein zweiter Schenkel auf derselben Seite von BA wie D liegt oder nicht, erhält man als C einen Punkt C_1 bzw. $C2$.
Wegen $\angle BAC1 < 90°$ und $\angle BAC2 > 90°$ sind die Dreiecke ABC_1, und ABC_2, nicht zueinander kongruent. Also ist ABC durch die Bedingungen (1), (2), (3) nicht bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.

Aufgabe 310733:
Zu einem gegebenen konvexen Fünfeck $ABCDE$ soll ein Rechteck $FGHJ$ konstruiert werden, das denselben Flächeninhalt wie das Fünfeck $ABCDE$ hat.

a) Beschreibe eine Konstruktion, die mit jedem konvexen Fünfeck $ABCDE$ durchführbar ist und vier Punkte F, G, H, J ergibt!
b) Beweise, dass für jedes konvexe Fünfeck $ABCDE$ die nach deiner Beschreibung konstruierten Punkte die Ecken eines Rechtecks $FGHJ$ sind, das denselben Flächeninhalt wie $ABCDE$ hat!
c) Führe an einem von dir gewählten Fünfeck $ABCDE$ die von dir beschriebene Konstruktion durch!

Hinweis: Ein Fünfeck ist genau dann konvex, wenn es nicht überschlagen ist (d. h. außer den Ecken keine gemeinsamen Punkte zweier Seiten aufweist) und wenn kein Innenwinkel des Fünfecks größer als 180° ist.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



a) Konstruktionsbeschreibung:
(1) Man konstruiert die Parallele durch E zu AD, sie schneidet die Gerade durch A, B in einem Punkt F.
(2) Man konstruiert die Parallele durch C zu BD, sie schneidet die Gerade durch A, B in einem Punkt G.
(3) Man konstruiert den Mittelpunkt M von AD und die Parallele P durch M zu FG.
(4) Man konstruiert die Senkrechten zu FG durch F und durch G, sie schneiden p in je einem Punkt J bzw. H.

b) Werden F, G, H, J nach dieser Beschreibung konstruiert, so folgt: Nach den Konstruktionsschritten (3), (4) ist $FGHJ$ ein Rechteck.
Ferner hat nach (1), (2) das Dreieck FGD denselben Flächeninhalt wie das Fünfeck $ABCDE$. Dies kann folgendermaßen bewiesen werden:

Nach (1) haben F und E gleichen Abstand von AD, also ist das Dreieck ADF flächeninhaltsgleich zum Dreieck ADE.

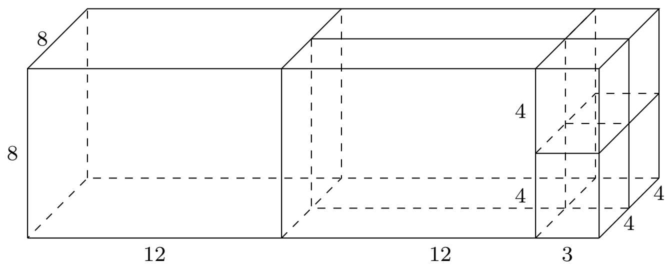
Nach (2) ist ebenso BDG flächeninhaltsgleich zu BDC. Addiert man noch den Flächeninhalt von ABD, so folgt die behauptete Flächeninhaltsgleichheit von FGD mit $ABCDE$.
Nach (3) und dem Strahlensatz hat M halb so großen Abstand von FG wie D; daher hat das Rechteck $FGHJ$ denselben Flächeninhalt wie das Dreieck FGD und folglich auch wie $ABCDE$.

II.V Raumgeometrie

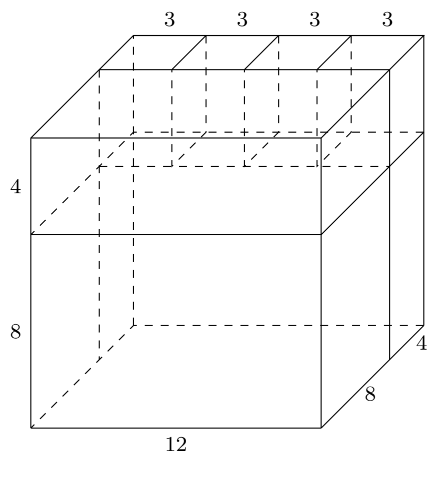
I Runde 1

Aufgabe 040716:
Gegeben ist ein quaderförmiger Holzklotz mit den Kanten von der Länge $a = 8$ cm, $b = 8$ cm und $c = 27$ cm.
Durch möglichst wenig ebene Schnitte mit einer Säge sind Teilkörper herzustellen, so dass sich diese zu einem Würfel zusammensetzen lassen.
Fertige eine Skizze des Quaders an, aus der der Verlauf der Schnitte ersichtlich ist, und eine Skizze des Würfels, die die Lage der Teilkörper zeigt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Der Quader hat ein Volumen von $V = 8 \cdot 8 \cdot 27\ \text{cm}^3 = 1728\ \text{cm}^3$. Damit muss der Würfel bei gleichem Volumen eine Kantenlänge von 12 cm haben, da gilt: $1728\ \text{cm}^3 = (12\ \text{cm})^3$.



Aufgabe 140712:
Auf einer horizontalen Ebene steht ein oben offener quaderförmiger Kasten mit den inneren Grundkantenlängen 5 cm und 4 cm, der bis zu einer Höhe von 7 cm mit einer Flüssigkeit gefüllt ist. Über dem Flüssigkeitsspiegel befindet sich ein Würfel mit 2 cm Kantenlänge derart, dass seine untere Fläche den Flüssigkeitsspiegel berührt.

Dabei werde der Flüssigkeitsspiegel stets als horizontale Ebene angenommen, und es werde vorausgesetzt, dass eine Würfelfläche stets parallel zum Flüssigkeitsspiegel ist. Ferner soll die Adhäsion nicht berücksichtigt werden. Der Würfel wird nun soweit gesenkt, bis seine Deckfläche mit dem Flüssigkeitsspiegel in derselben Ebene liegt.

Ermittle, um wie viel Zentimeter er zu diesem Zweck insgesamt gesenkt werden muss!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Der Würfel hat ein Volumen von 8 cm^3. Diese 8 cm^3 sind, wenn er gemäß den Bedingungen der Aufgabe gesenkt ist, gleich dem Inhalt eines Quaders Q oberhalb des ursprünglichen Flüssigkeitsquaders und mit gleicher Grundfläche wie dieser.

Da die Grundfläche einen Inhalt von 20 cm^2 hat, hat Q die Höhenlänge $\frac{8}{20}$ cm $=$ 0,4 cm. Nach den Bedingungen der Aufgabe ist der Würfel so weit gesenkt worden, dass seine Deckfläche mit der obersten Fläche von Q in derselben Ebene liegt, d. h. um insgesamt $(2 - 0{,}4)$ cm $=$ 1,6 cm.

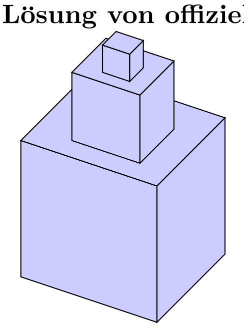
Aufgabe 320712:
Kathrins Aquarium hat die Form eines oben offenen Quaders. Es ist 80 cm lang, 40 cm breit und 42 cm hoch. Der Wasserspiegel befindet sich 7 cm vom oberen Rand entfernt.
Untersuche, ob man zusätzlich noch 10 Liter Wasser in dieses Aquarium gießen kann, ohne dass es überläuft!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
In das Aquarium passt oberhalb des Wasserspiegels noch ein Quader von 80 cm Länge, 40 cm Breite und 7 cm Höhe, also vom Volumen $80 \cdot 40 \cdot 7 cm^3 = 22400 cm^3 = 22{,}4$ l.
Da dies mehr als 10 Liter sind, kann man 10 Liter in das Aquarium gießen, ohne dass es überläuft.

II Runde 2

Aufgabe 010725:
Wenn man einen Würfel auf den Tisch stellt, dann sind von seinen 6 Flächen nur noch 5 Flächen sichtbar. Nun sollen drei Würfel mit den Kantenlängen $a_1 = 20$ cm, $a_2 = 10$ cm und $a_3 = 4$ cm der Größe nach übereinandergestellt werden. Der größte Würfel steht zuunterst auf der Tischplatte. Die Mittelpunkte der Würfel stehen genau übereinander.
Wie groß ist die gesamte sichtbare Fläche aller drei Würfel?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



(siehe Abbildung) Von jedem Würfel sind fünf Seitenflächen zu sehen (alle außer der Unterseite), abzüglich der überdeckten Oberseiten der beiden unteren Würfel (die ihrerseits so groß sind wie die Unterseiten der darauf gestellten Würfel).
Die sichtbare Fläche beträgt also

$$5a_1^2 + 5a_2^2 + 5a_3^2 - a_2^2 - a_3^2 = 5a_1^2 + 4a_2^2 + 4a_3^2 = 2464 \text{ cm}^2$$

Aufgabe 250722:
Ein Quader habe das Volumen $V_1 = 0{,}216$ dm^3, die Kanten seiner Grundfläche seien 12 cm bzw. 60 mm lang.

Von einem zweiten Quader sei bekannt, dass er die gleiche Höhe wie der erste Quader hat und dass die längere Kante seiner Grundfläche noch um 2 cm länger ist als die längere Kante der Grundfläche des ersten Quaders und die kürzere noch um 10 mm kürzer ist als die kürzere des ersten Quaders. Berechne die Differenz der Oberflächeninhalte der beiden Quader und gib sie in Quadratzentimetern an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Für den ersten Quader gilt:
Seine längere Grundkante beträgt $a_1 = 12$ cm, seine kürzere Grundkante $b_1 = 6$ cm. Sein Volumen ist $V_1 = 216$ cm^3; wegen $216 : (12 \cdot 6) = 3$ beträgt seine Höhe daher $h_1 = 3$ cm.

Für den zweiten Quader gilt:
Seine längere Grundkante beträgt $a_2 = 14$ cm, seine kürzere Grundkante $b_2 = 5$ cm und seine Höhe $h_2 = h_1 = 3$ cm.

Der Oberflächeninhalt des ersten Quaders beträgt somit

$$A_1 = 2 \cdot (12 \cdot 6cm^2 + 12 \cdot 3cm^2 + 3 \cdot 6cm^2) = 252cm^2$$

Der Oberflächeninhalt des zweiten Quaders beträgt

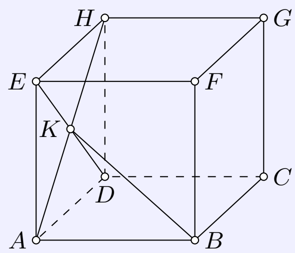
$$A_2 = 2 \cdot (14 \cdot 5cm^2 + 14 \cdot 3cm^2 + 5 \cdot 3cm^2) = 254cm^2$$

Die Differenz der Oberflächeninhalte der beiden Quader beträgt somit 2 cm^2.

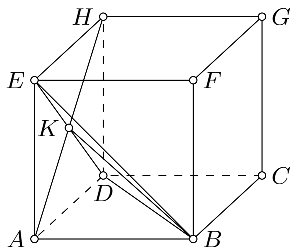
III Runde 3

Aufgabe 150735:

Gegeben sei ein Würfel mit den Eckpunkten A, B, C, D, E, F, G und H. K sei der Schnittpunkt der Flächendiagonalen AH und DE.
Beweise: Es gilt $DE \perp BK$!



Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

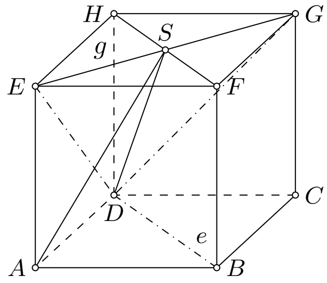


Das Dreieck EBD ist gleichseitig; denn seine Seiten sind Diagonalen kongruenter Quadrate. Da in jedem Quadrat die Diagonalen einander halbieren, ist K Mittelpunkt der Seite ED und folglich BK Seitenhalbierende im Dreieck EBD.
Im gleichseitigen Dreieck fallen Höhe und Seitenhalbierende, die von ein und derselben Ecke ausgehen, zusammen.
Somit gilt tatsächlich $DE \perp BK$.

Aufgabe 260736:
Es sei $ABCDEFGH$ ein Würfel mit $AE \parallel BF \parallel CG \parallel DH$; dabei sei $EFGH$ eine Seitenfläche des Würfels; der Schnittpunkt ihrer Diagonalen EG und FH sei S.

a) Beweise, dass der Winkel $\angle ESA$ kein rechter Winkel ist!
b) Beweise, dass der Winkel $\angle DSE$ ein rechter Winkel ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



(a) Da $ABCDEFGH$ ein Würfel ist, steht die Kante AE auf der Fläche $EFGH$ senkrecht. Da die Strecke SE in dieser Fläche liegt, steht AE auch auf SE senkrecht.
Folglich ist ASE ein Dreieck, das bei E einen rechten Winkel hat. Nach dem Innenwinkelsatz folgt hieraus, dass der Winkel $\angle ESA$ kleiner als ein rechter Winkel ist.

(b) Da $ABCDEFGH$ ein Würfel ist, sind die Flächendiagonalen ED, DG und GE einander gleichlang (als Diagonalen der zueinander kongruenten Quadrate $ADHE$, $DCGH$ bzw. $EFGH$).
Da S der Schnittpunkt der Diagonalen des Quadrates $EFGH$ ist, wird die Diagonale EG von S halbiert. Also ist DEG ein gleichseitiges Dreieck, und darin ist DS eine Seitenhalbierende. Somit ist DS auch Höhe in diesem Dreieck; d. h., DS steht senkrecht auf EG. Damit ist bewiesen, dass $\angle DSE$ ein rechter Winkel ist.

Andere Lösunqsmöglichkeit:
Man wendet die folgenden beiden Sätze an, in denen g eine Gerade durch einen Punkt S bedeutet und e eine Ebene durch S bedeutet:

(1) Wenn g auf e senkrecht steht, so steht g auf allen und nur denjenigen Geraden durch S senkrecht, die in e liegen.
(2) Wenn g auf zwei verschiedenen in e liegenden Geraden durch S senkrecht steht, so steht g auf e senkrecht.

Auf der Ebene durch E, F, G, H stehen die Kanten BF und DH und daher auch die zu ihnen parallele Gerade durch S senkrecht. Nach Satz (1) steht diese Gerade also auch auf der Geraden g durch E, G senkrecht.

Auch die Gerade durch F und H steht auf g senkrecht (Diagonalen im Quadrat $EFGH$).
Nach Satz (2) stehen somit g und die Ebene e durch B, F, H, D aufeinander senkrecht. Daraus folgt nach Satz (1):
(b) Da DS in e liegt, steht DS auf EG senkrecht.
(a) Da AS nicht in e liegt, steht AS nicht auf EG senkrecht.

Aufgabe 280731:
Das Volumen eines Würfels w_1 ist achtmal so groß wie das Volumen eines Würfels w_2.
Wäre das Volumen von w_2 um genau 9 cm^3 kleiner, so wäre es gleich einem Zwölftel des Volumens von w_1.
Ermittle aus diesen Angaben die Kantenlängen a_1 und a_2 der beiden Würfel w_1 und w_2!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Nach den Angaben gilt für die Volumina a_1^3 und a_2^3 von w_1 bzw. w_2

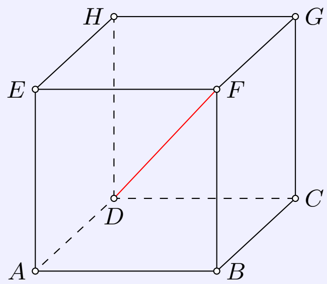
$$a_1^3 = 8a_2^3 \quad (1) \qquad ; \qquad a_2^3 - 9cm^3 = \frac{a_1^3}{12} \quad (2)$$

Aus (2) folgt $12a_2^3 - 108\ \text{cm}^3 = a_1^3$, hieraus und aus (1) folgt

$$12a_2^3 - 108\ \text{cm}^3 = 8a_2^3 \quad \Rightarrow \quad a_2 = 3\ \text{cm} \quad (3)$$

Daraus und aus (1) ergibt sich $a_1^3 = 8 \cdot 27\ \text{cm}^3$, $a_1 = 6$ cm. (4)
Mit (3) und (4) sind die gesuchten Kantenlängen ermittelt.

Aufgabe 300736:



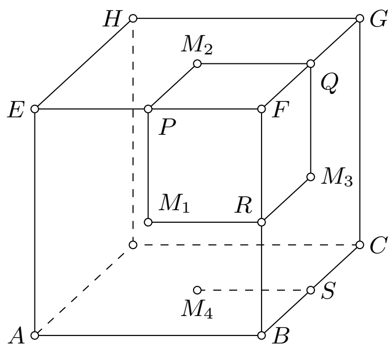
Es sei $ABCDEFGH$ ein Würfel.
Beweise, dass die Abstände der Punkte A, B, C, E, G und H von der Raumdiagonalen DF sämtlich einander gleich sind!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Dreiecke ADF, BFD, CDF, EFD, GFD und HDF werden jeweils durch die Raumdiagonale DF, je eine Körperkante (AD, BF, CD, EF, GF bzw. HD) und je eine Flächendiagonale (AF, BD, CF, ED, GD bzw. HF) des Würfels begrenzt. Sie stimmen also in ihren drei Seitenlängen überein und sind folglich nach (sss) sämtlich zueinander kongruent.
In jedem dieser Dreiecke ist der betreffende Abstand die Länge der Höhe auf der längsten Seite; demzufolge sind diese Abstände sämtlich einander gleich.

Aufgabe 340735:
In einer Arbeitsgemeinschaft sprechen Alexandra und Daniel über Eigenschaften von Würfeln.

Alexandra sagt: „Für je drei Seitenflächen eines Würfels, die eine gemeinsame Ecke haben, gilt: Die Mittelpunkte dieser drei Seitenflächen sind die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks.“
Daniel sagt: „Für je drei Seitenflächen eines Würfels, die keine gemeinsame Ecke haben, gilt: Die Mittelpunkte dieser drei Seitenflächen sind die Ecken eines rechtwinkligen Dreiecks.“
Beweise, dass beide Aussagen wahr sind!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Für jede Seitenfläche eines Würfels der Kantenlänge a gilt (wie etwa mit den Bezeichnungen der Seitenfläche $ABFE$ in der Abbildung ausgedrückt sei): Die Verbindungsstrecke des Quadratmittelpunktes M_1 mit dem Mittelpunkt P der Strecke EF ist parallel zu BF, also senkrecht auf allen Geraden in der Ebene des Quadrates $EFGH$, und es gilt $M_1P = \frac{a}{2}$.

Wendet man auch die entsprechenden Aussagen für M_2P an, so folgt: Das Dreieck M_1PM_2, ist mit $M_1P = M_2P = \frac{a}{2}$ gleichschenklig und bei P rechtwinklig. Entsprechendes gilt für die Dreiecke M_1RM_3 und M_2QM_3.
Daraus folgt Alexandras Aussage $M_1M_2 = M_1M_3 = M_2M_3$.
Ferner folgt $\angle M_2M_3Q = \angle M_4M_3S = 45°$ und damit Daniels Aussage $\angle M_2M_3M_4 = 180° - 2 \cdot 45° = 90°$.

III Kombinatorik

III.I Kryptogramme, Zahlen in Figuren

I Runde 1

Aufgabe V00702:

Auf das Heft von Fritz ist Wasser gespritzt. Viele Ziffern sind nicht mehr leserlich. Wie muss die wiederhergestellte Aufgabe lauten:

$$\begin{array}{l}
1\ 1\ 7\ \square\ \square\ \square : \square\ \square\ 3 = \square\ \square\ \square \\
\ \ \square\ \square\ 6 \\
-\ -\ -\ - \\
\ \ 1\ 8\ \square\ \square \\
\ \ \square\ \square\ \square\ \square \\
\ \ -\ -\ -\ - \\
\ \ \ \ \square\ \square\ \square\ \square \\
\ \ \ \ \square\ \square\ \square\ \square \\
\ \ \ \ -\ -\ -\ - \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 0
\end{array}$$

Lösung von Steffen Polster:

Aus der ersten Subtraktion $117x - yz6 = 187$ ergibt sich schrittweise rückwärts $x = 3$, aus $1173 - yz6 = 187$ folgt $z = 8$ und abschließend $y = 9$.
Damit ist 986 das größte Vielfaches des Divisors kleiner 1173, der dreistellig und auf 3 endet. 986 : □□3 kann nur 2 ergeben, andernfalls würde bei Multiplikation der Einerstelle „3“ keine „6“ entstehen. Damit ist die Divisionsaufgabe 117334 : 493 zu lösen, d. h.

$$\begin{array}{l}
1\ 1\ 7\ 3\ 3\ 4 : 4\ 9\ 3 = 2\ 3\ 8 \\
\ \ 9\ 8\ 6 \\
-\ -\ -\ - \\
\ \ 1\ 8\ 7\ 3 \\
\ \ 1\ 4\ 7\ 9 \\
\ \ -\ -\ -\ - \\
\ \ \ \ 3\ 9\ 4\ 4 \\
\ \ \ \ 3\ 9\ 4\ 4 \\
\ \ \ \ -\ -\ -\ - \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 0
\end{array}$$

Aufgabe V00708:
In die 9 Felder des abgebildeten Quadrats sind die Zahlen 1 bis 9 so einzutragen, dass du waagerecht, senkrecht und diagonal die Summe 15 erhältst.

Lösung von Steffen Polster:

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Aufgabe V00709:

Löse folgendes Zahlenrätsel, in dem gleiche Buchstaben gleiche Ziffern bedeuten:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
a & b & b & - & c & d & b & = & e & b & d \\
 & : & & & & + & & & & - & \\
 & f & g & \cdot & & c & h & = & g & i & c \\
\hline
 & f & k & + & c & f & c & = & c & b & i
\end{array}$$

Lösung von Steffen Polster:

Aus der obersten Subtraktionsaufgabe ergibt sich sofort $d = 1$. Angenommen es wäre $f = 1$, so kann a nur 2 oder 3 sein. Beides ist nicht möglich, da c und e kleiner als a sein müssen und $f = 1$ wäre. Angenommen $f = 3$ gelte, so wäre $a = 9$ und g und k 1 bzw. 2 oder umgekehrt. $fg = 31$ und $fg = 32$ sind beide nicht möglich, da dann $ch > 45$ wäre und deren Produkt vierstellig. D. h., $f = 2$.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
a & b & b & - & c & 0 & b & = & e & b & 0 \\
 & : & & & & + & & & & - & \\
 & 2 & g & \cdot & & c & h & = & g & i & c \\
\hline
 & 2 & k & + & c & 2 & c & = & c & b & i
\end{array}$$

g und k können nicht 1 sein, da dann b mit g oder k identisch wäre. Damit ist a 5, 6, 7 oder 8. Von allen Produkt der Faktoren 23 bis 29 miteinander enden 4 auf 00 und nur $23 * 28 = 644$ auf zwei gleiche Ziffern, die 4. Also sind $a = 6$ und $b = 4$. g und k sind 3 bzw. 8.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
6 & 4 & 4 & - & c & 0 & 4 & = & e & 4 & 0 \\
 & : & & & & + & & & & - & \\
 & 2 & g & \cdot & & c & h & = & g & i & c \\
\hline
 & 2 & k & + & c & 2 & c & = & c & 4 & i
\end{array}$$

Angenommen $g = 8$, dann ergibt sich ein Widerspruch, da $g < e < a = 6$ gilt. g ist damit 3 und $k = 8$. Für c verbleibt dann nur 1, da sonst die mittlere Multiplikationsaufgabe nicht lösbar wäre.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
6 & 4 & 4 & - & 1 & 0 & 4 & = & e & 4 & 0 \\
 & : & & & & + & & & & - & \\
 & 2 & 3 & \cdot & & 1 & h & = & 3 & i & 1 \\
\hline
 & 2 & 8 & + & 1 & 2 & 1 & = & 1 & 4 & i
\end{array}$$

Die restlichen Ziffern sind dann $e = 5$, $h = 7$ und $i = 9$.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
6 & 4 & 4 & - & 1 & 0 & 4 & = & 5 & 4 & 0 \\
 & : & & & & + & & & & - & \\
 & 2 & 3 & \cdot & & 1 & 7 & = & 3 & 9 & 1 \\
\hline
 & 2 & 8 & + & 1 & 2 & 1 & = & 1 & 4 & 9
\end{array}$$

Die Aufgabe ist eindeutig lösbar.

Aufgabe 090711:

Schneide ein rechteckiges Stück Papier aus, teile es durch gerade Linien in acht kongruente Rechtecke und schreibe jeweils auf Vorder- und Rückseite einer jeden Rechtecksfläche denselben Buchstaben, wie es in der Abbildung angedeutet ist!

O	N	G	A
W	G	F	L

Falte das Stück Papier so, dass die Buchstaben in der Reihenfolge W O L F G A N G übereinander liegen!

Als Lösung gilt das entsprechend gefaltete Papier oder eine Beschreibung des Vorgehens.

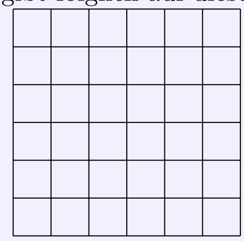
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

In der 3. und 4. Spalte liegt im Uhrzeigersinn die verlangte Buchstabenfolge L F G A vor. Damit L und F sowie A und G jeweils übereinander liegen, beginnt man, indem man $\frac{A}{L}$ unter $\frac{G}{F}$ faltet.

Um zu erreichen, dass G und F aufeinander liegen, faltet man O N G (wobei A mitgeführt wird) auf W G F (worunter L liegt). Nun liegen O W daneben N G sowie daneben A G F L jeweils in dieser Reihenfolge untereinander.

Die letztgenannten vier Buchstaben legt man um auf N (worunter G liegt), um L F G A N G zu erhalten. Schließlich faltet man O (wobei W mitgeführt wird) auf L (worunter F G A N G liegt) und erhält dadurch W O L F G A N G.

Aufgabe 290711:
Auf ein 6×6 - Felderbrett (siehe Bild) sollen 18 Steine so verteilt werden, dass jeder Stein in genau einem Feld liegt, in jedem Feld nicht mehr als ein Stein liegt sowie in jeder Zeile, in jeder Spalte und in jeder Diagonalen nicht mehr als drei Steine liegen.
Gib eine derartige Verteilung an!
Hinweis: Unter einer Diagonale wollen wir in dieser Aufgabe jede Gerade verstehen, die in einer Diagonalrichtung des Quadrates durch die Mittelpunkte von mehreren (mindestens 2, höchstens 6) Feldern verläuft.
Es gibt folglich auf diesem Brett genau 18 verschiedene Diagonalen.

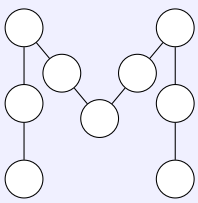


Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

	●	●	●		
●	●				●
●			●	●	
	●	●			●
●				●	●
		●	●	●	

Eine mögliche Verteilung zeigt die Abbildung.

Aufgabe 340714:

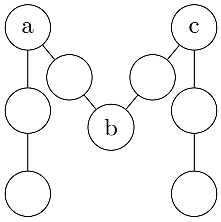


In die Kreise der Zeichnung sollen die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 eingetragen werden. Dabei soll folgende Bedingung erfüllt werden:
Auf jeder der vier Dreiergruppen, die mit geradliniger Verbindung gezeichnet sind, ergibt sich dieselbe Summe s.

a) Welches ist der kleinste Wert von s, mit dem diese Bedingung erfüllbar ist? Gib eine Eintragung an, bei der diese Summe s vorliegt! Beweise, dass keine kleinere Summe möglich ist!

b) Welches ist der größte Wert s, mit dem die genannte Bedingung erfüllbar ist? Gib auch hierzu eine Eintragung an!
c) Ist die Bedingung auch mit allen denjenigen natürlichen Zahlen s erfüllbar, die zwischen dem kleinsten und dem größten Wert aus a) bzw. b) liegen?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Für jede geforderte Eintragung der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 gilt:
Addiert man die vier im Aufgabentext genannten (einander gleichen) Summen, so werden dabei die Zahlen a, b, c (siehe Abbildung) je zweimal, die anderen Zahlen je einmal als Summanden herangezogen. Also gilt

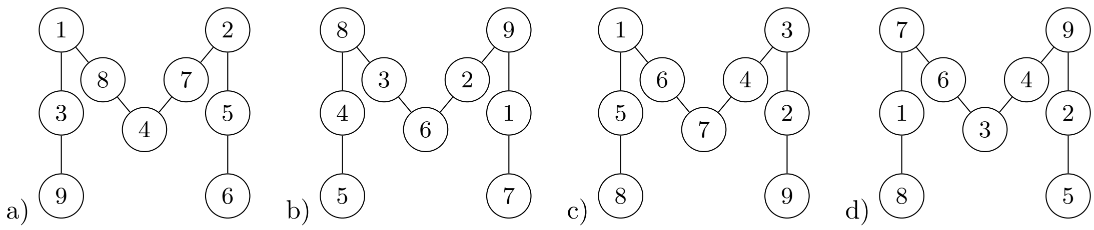
$$4s = 1 + 2 + ... + 9 + a + b + c \tag{1}$$

Die Summe s ist folglich für diejenigen Eintragungen am kleinsten bzw. am größten, für die $a + b + c$ am kleinsten bzw. am größten ist.

a) Die kleinstmögliche Summe aus drei verschiedenen der Zahlen 1, 2, ..., 9 ist $1 + 2 + 3 = 6$. Wäre eine Eintragung mit diesen Zahlen als a, b, c möglich, so folgte aus (1) die Gleichung $4s = 45 + 6$, die mit ganzzahligem s nicht erfüllbar ist.
Die nächstgrößere Möglichkeit $1 + 2 + 4 = 7$ führt auf $4s = 45 + 7 = 52$, also $s = 13$. Wie Abbildung a zeigt, ist dieser Wert s durch eine Eintragung erreichbar. Damit ist also 13 als kleinster Wert s bewiesen, und eine zugehörige Eintragung ist angegeben.

b) Die größtmögliche Summe aus drei verschiedenen der Zahlen 1, 2, ..., 9 ist $7 + 8 + 9 = 24$. Wieder ist eine Eintragung mit diesen a, b, c nicht möglich, da (1) auf $4s = 45 + 24$ führen würde. Die nächstkleinere Möglichkeit $6 + 8 + 9 = 23$ mit $45 = 45 + 23 = 68$, $s = 17$ ist durch eine Eintragung erreichbar; siehe z. B. Abbildung b.

c) Auch mit $s = 14$ und mit $s = 16$ sind Eintragungen möglich, wie Abbildungen c und d zeigen. Dagegen gibt es keine Eintragung mit $s = 15$.
Für eine solche müsste nach (1) nämlich $60 = 45 + a + b + c$, also auch $a + b + c = 5$ sein. In das Feld zwischen a und b müsste folglich wegen $s = 15$ wieder die Zahl c kommen, was der Verschiedenheit der einzutragenden Zahlen widerspricht.



II Runde 2

Aufgabe 210724:
Albrecht Dürer bringt auf seinem Stich „Melancholie“ ein „magisches Quadrat“ aus den Zahlen 1 bis 16, d. h. ein Quadrat, in dem jede Zeile, jede Spalte und jede Diagonale denselben Summenwert hat.
In den beiden Mittelfeldern der untersten Zeile ist das Entstehungsjahr des Stiches abzulesen.
In der Abbildung ist dieses Quadrat mit unvollständiger Eintragung wiedergegeben. Begründe, wie das magische Quadrat auszufüllen ist, und gib das Entstehungsjahr an!

16	3	2	13
			9
9			12
4			

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wegen $16 + 3 + 2 + 13 = 34$ ist die Zeilen-, Spalten- und Diagonalensumme 34.
Daraus folgt, dass die fehlende Zahl in der ersten Spalte 5 und die fehlende Zahl in der vierten Spalte 1 beträgt. Die Summe der beiden fehlenden Zahlen der vierten Zeile beträgt 29, sie lässt sich nur mit den Zahlen 15 und 14 bilden; die Summe der fehlenden Zahlen der dritten Zeile, beträgt 13, sie lässt sich nur mit den Zahlen 6 und 7 bilden. Die Summe der restlichen Zahlen 10 und 11 beträgt 21. Sie ergibt zusammen mit den bereits in der zweiten Zeile stehenden Zahlen die verlangte Summe 34.

Die Anordnung der beiden mittleren Zahlen der zweiten bzw. dritten Zeile muss nun so erfolgen, dass auch in beiden Diagonalen die Summe 34 erreicht wird. Da jeder der beiden Diagonalen zu dieser Summe noch 17 fehlt, kann die Anordnung nur oder

11	10
7	6

oder

10	11
6	7

lauten. In der zweiten Spalte fehlt an der Summe 34 noch 16 oder 17, je nachdem, ob die zweite Zahl der vierten Zelle 14 oder 15 lautet. Daher erfüllt nur die zweite der oben angeführten Anordnungen die gestellten Bedingungen. Somit ergibt sich als einzige Möglichkeit die folgende Eintragung:

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Sie erfüllt alle Bedingungen eines magischen Quadrates. Das Entstehungsjahr des Stiches lautet mithin 1514.

III Runde 3

Aufgabe V10733:

Setze für $\square$ die entsprechenden Ziffern ein:

$$\begin{array}{l}
3\ \square\ 7\ \cdot\ 8\ \square \\ \hline
2\ \square\ 7\ \square \\
\quad \square\ \square\ \square\ 2 \\ \hline
\square\ \square\ \square\ \square\ \square
\end{array}$$

Versuche, deinen Lösungsweg zu erläutern.

Lösung von Steffen Polster:
Die letzte Ziffer des Produktes muss 2 sein. Da die 7 nur bei Multiplikation mit der 6 eine Endziffer 2 liefert, ist der 2. Faktor folglich 86. Weiterhin ist $8 \cdot 7 = 56$, so dass das 1. Zwischenergebnis auf 6 endet.

$$\begin{array}{l}
3\ \square\ 7\ \cdot\ 8\ 6 \\ \hline
2\ \square\ 7\ 6 \\
\quad \square\ \square\ \square\ 2 \\ \hline
\square\ \square\ \square\ \square\ 2
\end{array}$$

Es ist $307 \cdot 8 = 2456$. Die fehlenden zwei Zehner zu 2?76 sind nur möglich, wenn die 2. Ziffer des ersten Faktors eine 4 ist. Die noch fehlenden Ziffern ergeben sich durch Ausmultiplizieren von $347 \cdot 86$.

$$\begin{array}{l}
3\ 4\ 7\ \cdot\ 8\ 6 \\ \hline
2\ 7\ 7\ 6 \\
\quad 2\ 0\ 8\ 2 \\ \hline
2\ 9\ 8\ 4\ 2
\end{array}$$

Aufgabe 040735:
Ein Zirkel Junger Mathematiker beschäftigt sich damit, Aufgaben für die Knobelecke zusammenzustellen. Folgende Aufgabe wurde vorgeschlagen:

$$\begin{array}{cccccc} & D & R & E & I \\ + & E & I & N & S \\ \hline & V & I & E & R \end{array}$$

Die Buchstaben sollen durch Ziffern ersetzt werden. Gleiche Buchstaben bedeuten gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern. Es stellt sich aber heraus, dass es keine Lösung dieser Aufgabe geben kann. Begründe das!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Betrachte man zunächst die zweite Spalte von rechts: $E + N = E$. So gibt es nur 2 Möglichkeiten für N:

(1) $N = 0, E + 0 = E$ wahr, kein Übertrag

Nun betrachten wir die 3. Spalte von rechts. $R + I = I \Rightarrow R = 0$ nicht möglich, da $R = N = 0$ und es dürfen keine zwei Buchstaben den gleichen Wert annehmen.

(2) Von der Aufgabe $I + S = R$ bleibt ein Übertrag zurück, dieser kann maximal 1 sein da I und S maximal 8 und 9 (I und S müssen ja einstellig sein) sein können und demnach maximal 17 für $I + S$ infrage kommt.

$N = 9, E + 9 + 1 = E + 10$ es bleibt wieder eins als Übertrag, wahr.

Nun betrachten wir die 3. Spalte von rechts.

$R + I + 1 = I + 10$ (hier muss ein Übertrag entstehen denn würde $R + I + 1 = I$ so wäre $R = -1$, die Buchstaben können aber nur positive Zahlen annehmen damit eine Additionsaufgabe entsteht.)

$R = 9$ nicht möglich, da $R = N = 9$ und es dürfen keine zwei Buchstaben den gleichen Wert annehmen.

Also gibt es keine Lösung für die Aufgabe.

Aufgabe 120734:
Als die Klasse 7a den Fachunterrichtsraum für Mathematik betrat, war an der Wandtafel eine Multiplikationsaufgabe angeschrieben. Jemand hatte jedoch die Ziffern derart verwischt, dass nur noch vier „Einsen“ leserlich geblieben waren und von den unleserlichen Ziffern lediglich noch zu erkennen war, an welcher Stelle sie gestanden hatten.

Das Bild an der Wandtafel hatte folgendes Aussehen: (Die unleserlichen Ziffern sind hier durch die Buchstaben $a, b, c, \dots$ angegeben. Dabei können also verschiedene Buchstaben auch die gleiche Ziffer, möglicherweise auch nochmals die Ziffer 1, bezeichnen.)

$$\begin{array}{ccccccc} & & 1 & a & b & \cdot & c & d \\ \hline & e & f & g & 1 & & & \\ h & i & j & 1 & & & & \\ \hline k & m & n & 1 & p & & & \end{array}$$

Einige Schüler versuchten sofort, die fehlenden Ziffern zu ermitteln, und schon nach kurzer Zeit rief Bernd:
„Ich weiß genau, wie die beiden Faktoren hießen!“
Doch Gerd entgegnete ihm:
„Es lässt sich nicht eindeutig feststellen, wie die beiden Faktoren lauteten.“

Stelle fest, ob Bernd oder Gerd recht hatte! Gib in jedem Falle alle Lösungen (Realisierungen) des Multiplikationsschemas an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Offensichtlich gilt $p = 1$ und $g = 0$. Da in der zweiten und in der dritten Zeile je eine vierstellige Zahl steht, gilt $d \neq 1$ und $c \neq 1$. Das Produkt $b \cdot d$ endet ebenso wie das Produkt $b \cdot c$ mit 1. Es sind nun genau

die folgenden drei Fälle möglich:

1. Fall: Es sei $b = 9$, $c = d = 9$.
Daraus folgt $b \cdot d = 81$. Wegen $g = 0$ muss das Produkt $a \cdot d$, also $a \cdot 9$, mit der Ziffer 2 enden, (denn $2 + 8 = 10$). Das ist aber genau für $a = 8$ der Fall. Der erste Faktor heißt somit 189, der zweite 99.
Tatsächlich führt die Rechnung $189 \cdot 99$ zu einem Tafelbild, das der Aufgabenstellung entspricht.

2. Fall: Es sei $b = 7$, $c = d = 3$.
Da der erste Faktor kleiner als 200 ist, ist sein Dreifaches kleiner als 600, also eine dreistellige Zahl, was im Widerspruch zur zweiten Zeile steht. Dieser Fall führt somit zu keiner Lösung.

3. Fall: Es sei $b = 3$, $c = d = 7$.
Daraus folgt $b \cdot d = 21$. Das Produkt $a \cdot d$, also $a \cdot 7$, muss dann mit der Ziffer 8 enden (denn $2 + 8 = 10$). Das ist genau für $a = 4$ der Fall. Als erster Faktor ergibt sich damit 143, der zweite lautet 77.
Tatsächlich führt die Rechnung $143 \cdot 77$ zu einem Tafelbild, das der Aufgabenstellung entspricht.

Das Multiplikationsschema hat somit genau zwei, und zwar die beiden folgenden Realisierungen:

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & 1 & 8 & 9 & \cdot & 9 & 9 \\ \hline
 & 1 & 7 & 0 & 1 & & & \\
1 & 7 & 0 & 1 & & & & \\ \hline
1 & 8 & 7 & 1 & 1 & & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccccccc}
 & & 1 & 4 & 3 & \cdot & 7 & 7 \\ \hline
 & 1 & 0 & 0 & 1 & & & \\
1 & 0 & 0 & 1 & & & & \\ \hline
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & & &
\end{array}$$

Gerd hatte also recht, Bernd dagegen nicht.

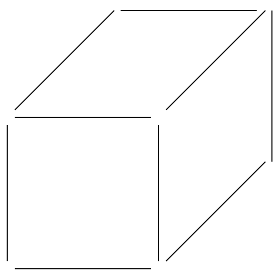
III.II Logik, Mengenlehre

I Runde 1

Aufgabe V10714:
Neun Streichhölzer sind so zu legen, dass sie drei Vierecke bilden. Jede Viereckseite soll die Länge eines Streichholzes haben. Zeichne die Figur auf.

Lösung von Steffen Polster:

Die Streichhölzer können so gelegt werden, dass sie ein Schrägbild eines Quaders darstellen. Die drei Vierecke sind ein Quadrat und zwei Rhomben.



Aufgabe 010714:
Im vorigen Schuljahr meldete die „Berliner Zeitung“ folgende Ergebnisse des Berliner Schülerfußballturniers nach dem 2. Spieltag:
Ergebnisse:

12. Oberschule Treptow – Max-Kreuziger-Oberschule	1:0
4. Oberschule Köpenick – 8. Oberschule Lichtenberg	2:0

Tabellenstand:

Platz	Mannschaft	Punkte	Tore
1.	4. Oberschule Köpenick	2:2	2:1
2.	12. Oberschule Treptow	2:2	2:2
3.	Max-Kreuziger-Oberschule	2:2	1:1
4.	8. Oberschule Lichtenberg	2:2	2:3

Welche Ergebnisse gab es am ersten Spieltag?
Anmerkung: Für jeden Sieg gibt es 2 : 0 Punkte, für jedes unentschiedene Spiel 1 : 1 Punkte, für jede Niederlage 0:2 Punkte.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Da die 12. Oberschule und die 4. Oberschule am 2. Spieltag gewonnen und damit 2 : 0 Punkte bekommen haben, müssen die Max-Kreuziger-OS und die 8. Oberschule gemäß der Tabelle am 1. Spieltag je 2:0 Punkte geholt, d. h. gewonnen haben.
Diese beiden haben also nicht gegeneinander gespielt. Die Max-Kreuziger-OS muss also die 4. Oberschule Köpenick mit 1 : 0 geschlagen haben beim gegebenen Torverhältnis, während die 8. Oberschule Lichtenberg die 12. Oberschule Treptow mit 2:1 besiegt hat.

Aufgabe 020716:
In einem Haus mit 28 Fenstern sollen einige fehlende Fensterläden beschafft werden, so dass an jedem Fenster 2 Läden vorhanden sind. Einige Fenster haben noch 2 Läden, bei der gleichen Anzahl von Fenstern fehlen beide, der Rest hat je einen Laden.
Wie viel neue Fensterläden braucht man? Begründe die Antwort!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Man kann (in Gedanken) von jedem Fenster, das noch zwei Läden hat, einen an einem Fenster anbringen, das keinen Laden mehr hat (schließlich ist die Anzahl dieser beiden „Arten“ von Fenstern gleich!).
Dann hätte jedes Fenster einen Fensterladen, überall würde einer fehlen. Also braucht man 28 neue Fensterläden.

Aufgabe 090713:
Eine Touristengruppe aus der DDR von genau 100 Personen fuhr ins Ausland. Über diese Gruppe sind folgende Angaben bekannt:

(1) Genau 10 Touristen beherrschen weder Russisch noch Englisch.
(2) Genau 75 Touristen beherrschen Russisch.
(3) Genau 83 Touristen beherrschen Englisch.

Ermittle die Anzahl aller Touristen dieser Gruppe, die beide Sprachen beherrschen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Aus (1) folgt: Genau 90 Touristen beherrschen mindestens eine der beiden Sprachen. Somit beherrschen nach (2) genau $(90 - 75)$ Personen der Gruppe Englisch, aber nicht Russisch, das sind 15 Personen.
Nach (3) beherrschen genau $(90 - 83)$ Personen der Gruppe Russisch, aber nicht Englisch, das sind 7 Personen.
Wegen $90 - 7 - 15 = 68$ folgt: Genau 68 Personen beherrschen beide Sprachen.

Aufgabe 130714:
An einer Kreisolympiade Junger Mathematiker nahmen in der Olympiadeklasse 7 Anneliese, Bertram,

Christiane, Detlev, Erich und Franziska teil. Genau zwei von ihnen erhielten Preise. Auf die Frage, welche beiden Teilnehmer das waren, wurden folgende fünf Antworten gegeben:

(1) Anneliese und Christiane
(2) Bertram und Franziska
(3) Anneliese und Franziska
(4) Bertram und Erich
(5) Anneliese und Detlev.

Wie sich später herausstellte, waren in genau einer Antwort beide Namen falsch angegeben, während in jeder der übrigen vier Antworten genau ein Name richtig angegeben war.
Wie heißen die beiden Preisträger?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, Anneliese hätte keinen Preis erhalten. Dann wären, da laut Aufgabe in zwei der Antworten (1), (3), (5) je ein Name richtig wäre, zwei der Teilnehmer Christiane, Franziska, Detlev die Preisträger. Hiernach waren aber in der Aussage (4) und außerdem noch in einer der Aussagen (1), (3), (5) beide Angaben falsch, im Widerspruch zur Aufgabe.
Folglich ist Anneliese eine Preisträgerin. Dann sind laut Aufgabe Christiane, Franziska und Detlev keine Preisträger.
Da von den Aussagen (2), (4) genau eine zwei falsche Namen enthalten muss und Bertram in beiden Aussagen vorkommt, ist Erich der andere Preisträger.
Also sind Anneliese und Erich die beiden Preisträger.

Aufgabe 160711:
Bei der 3. Stufe der XV. Mathematikolympiade erhielten die sechs Thälmann-Pioniere Anita, Bernd, Christine, Doris, Erich und Fritz je einen Preis. Genau zwei von ihnen erhielten volle Punktzahl.
Auf die Frage, welche beiden Pioniere volle Punktzahl erhielten, wurden folgende fünf Antworten gegeben:

(1) Anita und Christine;
(2) Anita und Fritz;
(3) Bernd und Fritz;
(4) Anita und Doris;
(5) Bernd und Erich.

Anschließend wurde festgestellt, dass in genau einer dieser fünf Antworten beide Angaben falsch sind, während in den übrigen vier jeweils eine Angabe wahr und eine falsch ist.
Wie heißen nach dieser Feststellung die beiden Preisträger, die die volle Punktzahl erhielten? Überprüfe, ob sich diese Frage aus den vorliegenden Antworten eindeutig beantworten lässt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, Anita hätte keine volle Punktzahl erreicht. Dann hätten nach den Feststellungen über die Antworten (1), (2), (4) genau zwei der Schüler Christine, Fritz und Doris volle Punktzahl bekommen, d. h., in genau einer der Aussagen (1), (2), (4) wären beide Angaben falsch.
Im Widerspruch zur Aufgabe müssten dann aber auch in (5) beide Angaben falsch sein. Also hat Anita volle Punktzahl erreicht und Christine, Fritz und Doris demzufolge nicht.

Hätte außerdem Bernd volle Punktzahl erreicht, dann wären in keiner der Antworten (1) bis (5) beide Angaben falsch. Also hat Bernd keine volle Punktzahl bekommen. Daraus folgt, dass außer Anita nur Erich volle Punktzahl erreicht haben kann.

Tatsächlich steht diese Antwort mit allen Bedingungen der Aufgabe in Einklang: denn bei ihr sind in (3) beide Angaben falsch und in (1), (2), (4), (5) je genau eine Angabe falsch.
Die Preisträger mit voller Punktzahl sind also aus den vorliegenden Angaben eindeutig zu ermitteln; sie heißen Anita und Erich.

Aufgabe 180711:
Vier Schüler, Ernst, Franz, Karl und Martin, deren Familiennamen (möglicherweise in anderer Reihenfolge) Altmann, Müller, Neubert und Tauber lauten, trafen sich auf einer Geburtstagsfeier. Jeder von ihnen brachte für das Geburtstagskind genau ein Geschenk mit. Außerdem ist bekannt:

(1) Martin hatte Rosen, Altmann einen Kugelschreiber, Müller ein Buch und Karl eine Schachtel Pralinen mitgebracht.
(2) Als erster verabschiedete sich im Verlaufe des Abends Martin, als zweiter Neubert, danach Ernst und zuletzt Müller.

Wie heißen diese Schüler mit Vor- und Zunamen?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Schüler heißen Ernst Altmann, Franz Müller, Karl Neubert und Martin Tauber.
Begründung: Wegen (1) können sowohl Martin als auch Karl nicht Altmann oder Müller heißen.
Wegen (2) heißt Martin auch nicht Neubert, also muss Martin Tauber heißen.
Daher heißt Karl nicht Tauber, sondern Neubert. Ernst und Franz heißen folglich Altmann oder Müller.
Ernst kann nach (2) nicht Müller heißen.

Aufgabe 190714:
Sechs Schüler halfen bei der Obsternte. Sie erhielten Anerkennungsprämien entsprechend ihren Leistungen. Jeder von ihnen übergab die Hälfte des erhaltenen Geldbetrages dem Solidaritätskonto. Über diese Schüler ist ferner folgendes bekannt:

(1) Keiner von ihnen spendete weniger als 6M und keiner mehr als 12M.
(2) Konrad spendete mehr als Peter.
(3) Helga spendete mehr als Gisela, Gisela mehr als Peter, Peter mehr als Inge.
(4) Frank spendete mehr als Helga und Helga mehr als Konrad.
(5) Helga spendete 2M weniger als Frank, Peter 2M mehr als Inge.
(6) Alle spendeten volle Markbeträge.

Wie viel Geld erhielt jeder der Schüler für das Obstpflücken?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es seien f, g, h, i, k, p die von Frank, Gisela, Helga, Inga, Konrad bzw. Peter gespendeten Geldbeträge in Mark. Aus den Angaben der Aufgabenstellung folgt damit:

(7) $h > g > p$, $f > h > k > p > i$ aus (2), (3), (4)
(8) $f = h + 2$, $p = i + 2$ aus (5)
(9) $f \leq 12$, $i \geq 6$ aus (1)
(10) $h \leq 10$, $p \geq 8$ aus (8)
(11) Wäre in (9) sogar $f < 12$ oder $i > 6$ so folgte aus (8) $h < 10$ oder $p > 8$;

unter der Bedingung (10) kann jedoch $h > g > p$ durch keine ganze Zahl g erfüllt werden. Daher scheidet dieser Fall aus,

(12) d. h. in (9) muss $f = 12, i = 6$ gelten.

(13) Somit folgt aus (8) $h = 10$, $p = 8$;
(14) hiernach können die Ungleichungen $h > g > p$ und $h > k > p$ ganzzahlig nur durch $g = 9$, $k = 9$ erfüllt werden.

Da die somit ermittelten Spenden [(12), (13), (14)] die Hälfte der erhaltenen Beträge waren, folgt: Frank erhielt 24 M, Gisela 18 M, Helga 20 M, Inge 12 M, Konrad 18 M und Peter 16 M.

Aufgabe 210713:
Zur Vorbereitung eines Sportfestes soll für die Schülerinnen Andrea, Beate, Christine, Doris, Eva, Frauke und Gerda eine Reihenfolge festgelegt werden. Dabei soll stets von zwei verschieden großen Schülerinnen die größere vor der kleineren stehen. Sind aber zwei Schülerinnen gleichgroß, so soll stets diejenige, deren Vorname einen im Alphabet vorangehenden Anfangsbuchstaben hat, vor der anderen stehen. Der Organisator, der eine derartige Reihenfolge festlegen soll, kennt die Schülerinnen nicht, aber er meint, sich an folgende Informationen erinnern zu können:

(1) Es ist wahr, dass Doris um genau 2 cm kleiner als Christine ist.
(2) Es ist falsch, dass Andrea nicht dieselbe Größe wie Gerda hat.
(3) Es ist nicht wahr, dass keine der Schülerinnen kleiner als Frauke ist.
(4) Es ist wahr, dass Eva kleiner als Doris, aber größer als Frauke ist.
(5) Es ist unwahr, dass Frauke größer als Christine ist.
(6) Es ist nicht falsch, dass Christine um genau 2 cm größer als Gerda ist und dass Christine größer als Eva ist.

Untersuche, ob es mehr als eine, genau eine oder keine Möglichkeit für die Reihenfolge der Schülerinnen gibt, bei der alle Informationen (1) bis (6) zutreffen!
Falls es sie gibt, ermittle alle möglichen Reihenfolgen, die den genannten Bedingungen entsprechen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Bezeichnet man für jede Schülerin ihre in Zentimeter gemessene Größe mit dem Anfangsbuchstaben ihres Vornamens, so lauten die Informationen:

(1) Es gilt $D = C - 2$.
(2) Es gilt $A = G$.
(3) Es gilt mindestens eine der Ungleichungen $A < F, B < F, C < F, D < F, E < F, G < F$.
(4) Es gilt $E < D$ und $E > F$.
(5) Es gilt $F \leq C$. (6) Es gilt $C = G + 2$ und $C > E$.

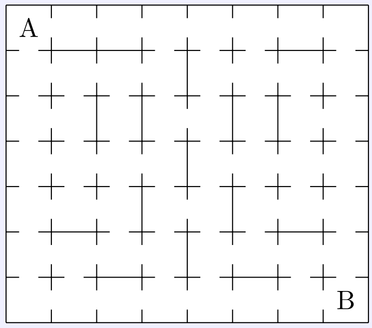
I. Angenommen, bei einer Reihenfolge der Schülerinnen treffen alle Informationen (1) bis (6) zu.
(7) Aus (1) und (6) folgt dann $D = G = C - 2$.
(8) Aus (2) und (7) folgt $A = D = G$.
(9) Aus (1), (4) und (8) folgt $C > A = D = G > E > F$.
(10) Aus (3) und (9) folgt $B < F$.
Daher können nur bei der Reihenfolge $C > A = D = G > E > F > B$ alle Informationen (1) bis (6) zutreffen.

II. Wenn diese Reihenfolge vorliegt und überdies $A = D = G = C - 2$ ist, so gilt:
Es ist $D = C - 2$, also ist (1) erfüllt.
Es ist $A = G$, also ist (2) erfüllt.
Es ist $B < F$, also ist (3) erfüllt.
Es ist $E < D$ und $E > F$, also ist (4) erfüllt.
Es ist $F < C$, also ist (5) erfüllt.
Es ist $C = G + 2$ und $C > E$, also ist (6) erfüllt.

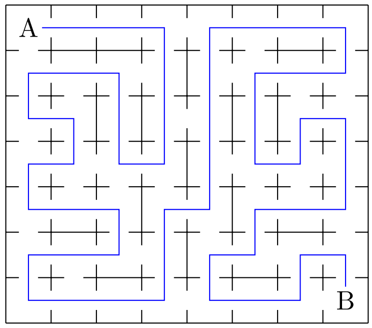
Damit ist bewiesen, dass es genau eine Reihenfolge gibt, bei der alle Informationen (1) bis (6) zutreffen. Sie lautet wie in (10) angegeben.

Aufgabe 230711:

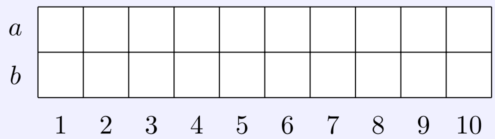
Der Weg von A nach B soll durch alle 56 Felder der untenstehenden Figur führen. Dabei soll jedes Feld nur einmal betreten und jede „Tür“ höchstens einmal benutzt werden.
Gib einen solchen Weg an! Eine Begründung wird nicht verlangt.



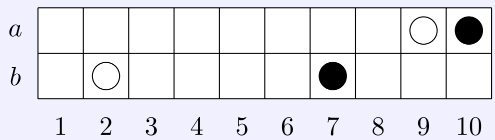
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Aufgabe 230714:
Zwei Spieler A und B spielen auf einem „2×10 - Brett“ folgendes Spiel:



Zu Beginn lost A in jeder der Zeilen a und b ein Feld aus und besetzt es jeweils mit einem weißen Stein.
Danach lost B ebenfalls in jeder der Zeilen a und b ein Feld aus, das aber stets rechts von dem von A ausgelosten Feld liegen muss, und besetzt es jeweils mit einem schwarzen Stein. Beispielsweise ist „Weiß: a9, b2; Schwarz: a10, b7“ (Abbildung unten), eine mögliche Anfangsstellung.



Nun ziehen A und B abwechselnd, wobei A beginnt. Wer am Zug ist, muss (genau) einen seiner beiden Steine in dessen Zeile um mindestens ein Feld, jedoch höchstens bis zum Spielfeldrand bzw. bis zum Feld unmittelbar neben dem gegnerischen Stein beliebig nach links oder nach rechte ziehen.
Sieger ist, wer die Steine des Gegners so blockiert, dass dieser nicht mehr ziehen kann.

a) Gib für folgende Anfangsstellungen an, wie A ziehen und dann auf jede Zugmöglichkeit von B so antworten kann, dass er mit Sicherheit siegt:

(1) Weiß: a9, b2; Schwarz: a10, b7.
(2) Weiß: a3, b5; Schwarz: a8, b6.
(3) Weiß: a8, b4; Schwarz: a10, b7.
(4) Weiß: a4, b2; Schwarz: a8, b9.

b) Entscheide, ob A von den folgenden Anfangsstellungen aus den Sieg erzwingen kann:

(5) Weiß: a2, b4; Schwarz: a7, b9.
(6) Weiß: a6, b2; Schwarz: a8, b5.
(7) Weiß: a5, b3; Schwarz: a8, b6.

c) An welchen Merkmalen einer Anfangsstellung kann man stets erkennen, ob A den Sieg erzwingen kann?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) (1) A zieht b2 nach b6. Dann kann B nur noch den Stein b7 nach rechts ziehen. Jedesmal antwortet A, indem er seinen b-Stein wieder unmittelbar links neben den schwarzen Stein zieht.
Dadurch wird B schließlich auf b10 gezwungen und von A mit b9 blockiert.

(2) A zieht a3 nach a7. Dann kann B jeden seiner Steine nur noch nach rechts ziehen. A rückt wieder nach, unmittelbar links daneben. Dadurch wird einer der schwarzen Steine auf Spalte 10 gezwungen, und es geht entsprechend wie in (1) weiter.

(3) A zieht b4 nach b5. Zieht dann B einen Stein nach links, so ist er unmittelbar rechts neben einem weißen Stein, und A kann wie in (2) den Sieg erzwingen. Will B das aber vermeiden, indem er seinen b-Stein nach rechts zieht, so rückt A stets ebenso viele Felder mit seinem b-Stein nach rechts. Spätestens wenn B so auf b10 gezogen hat, ist er gezwungen, einen Stein nach links zu ziehen, also kann A den Sieg erzwingen.

(4) A zieht b2 nach b5. Zieht dann B nach rechts, so rückt A mit seinem Stein auf derselben Zeile ebenso viele Felder nach. Schließlich muss B nach links ziehen; dann kann A erreichen, dass der Zwischenraum zwischen den Steinen für beide Zeilen dieselbe Länge hat, aber eine kleinere als drei Felder. Das lässt sich wiederholen, so dass A zu Stellungen der Art (2) oder (3) - nämlich auf beiden Zeilen mit Zwischenraum ein Feld bzw. ohne Zwischenraum zwischen den zwei Steinen - gelangt und so den Sieg erzwingt.

b) (5) Hier kann A nicht gewinnen, wenn B das aus (4) ersichtliche Verfahren einschlägt, d. h.:
Falls A nach links zieht, rückt B ebenso viele Felder nach; falls A nach rechts zieht, erzielt B auf beiden Zeilen gleichlange Zwischenräume, aber kürzer als vorher. Schließlich hat B beide Steine unmittelbar rechts neben die weißen Steine gebracht und folgt ihnen unmittelbar, bis sie auf Spalte 1 blockiert sind.

(6),(7) Dasselbe gilt für (7), während (6) wieder wie bei (4) die Möglichkeit für A bietet, den Sieg zu erzwingen.

c) Von einer Anfangsstellung aus kann A genau dann den Sieg erzwingen, wenn die Zwischenräume, die sich in den Zeilen a und b jeweils zwischen dem weißen und dem schwarzen Stein befinden, verschieden lang sind.

Beweis:
I. Wenn die genannten Zwischenräume verschieden lang sind, kann A den Sieg folgendermaßen erzwingen: Im ersten Zug erreicht er, dass die Zwischenräume gleich lang werden. Zieht B dann nach rechts, so rückt A in derselben Zeile um ebenso viele Felder nach. Schließlich muss B nach links rücken, und A kann eine Stellung mit gleichlangen aber kürzeren Zwischenräumen in beiden Zeilen erreichen.

Auf diese Weise erzwingt A nach endlich vielen Zügen stets, dass in beiden Zeilen die Steine unmittelbar benachbart sind, B muss daher nach rechts ziehen, worauf A dichtauf folgen kann, bis B blockiert ist.

II. Wenn die genannten Zwischenräume gleich lang sind, so kann A den Sieg nicht erzwingen. A muss nämlich (falls er nicht schon in der Anfangsstellung blockiert ist) im ersten Zug eine Stellung herbeiführen, in der die genannten Zwischenräume verschieden lang sind. Von dieser Stellung aus kann dann B nach dem in I. geschilderten Verfahren den Sieg erzwingen.

Aufgabe 240711:
Über die Jungen einer Schulklasse ist folgendes bekannt:
Jeder Junge dieser Klasse gehört mindestens einer der drei Arbeitsgemeinschaften „Foto“, „Junge Mathematiker“, „Turnen“ an. Ferner gelten folgende Aussagen:

(1) Genau sechs Jungen der Klasse sind Mitglieder der AG „Foto“.
(2) Genau fünf Jungen der Klasse sind Mitglieder der AG „Junge Mathematiker“.
(3) Genau fünf Jungen der Klasse sind Mitglieder der AG „Turnen“.

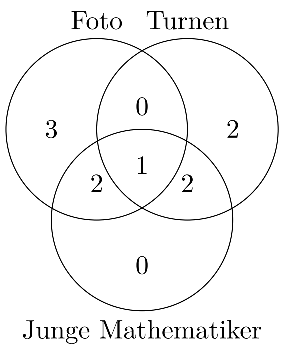
Weiterhin gelten über die Jungen dieser Klasse auch die folgenden Aussagen:

(4) Genau drei der Jungen gehören sowohl zur AG „Foto“ als auch zur AG „Junge Mathematiker“.
(5) Genau ein Junge gehört sowohl zur AG „Foto“ als auch zur AG „Turnen“.
(6) Genau drei der Jungen gehören sowohl zur AG „Junge Mathematiker“ als auch zur AG „Turnen“.

Schließlich gilt auch die Aussage
(7) Genau einer der Jungen dieser Klasse nimmt an allen drei Arbeitsgemeinschaften teil.

(Dagegen ist zu beachten, dass in (1) bis (6) nichts darüber ausgesagt wird, ob die betreffenden Jungen außer den jeweils genannten Arbeitsgemeinschaften noch weiteren Arbeitsgemeinschaften angehören.)
Untersuche, ob durch diese Angaben die Anzahl aller Jungen dieser Klasse eindeutig bestimmt ist! Ist dies der Fall, dann gib die Anzahl an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Außer dem einen Jungen, der nach (7) alle drei Arbeitsgemeinschaften besucht, gibt es nach (4), (5) bzw. (6) (und wegen $3-1=2$, $1-1=0$ bzw. $3-1=2$) genau 2 Jungen, die genau zu den AG „Foto“ und „Junge Mathematiker“ gehören, keinen Jungen, der genau zu den AG „Foto“ und „Turnen“ gehört, genau 2 Jungen, die genau zu den AG „Junge Mathematiker“ und „Turnen“ gehören.

Hiernach und nach (1), (2) bzw. (3) (sowie wegen $6-2-0-1=3$, $5-2-2-1=0$ bzw. $5-0-2-1=2$) gibt es genau 3 Jungen, die genau zur AG „Foto“ gehören, keinen Jungen, der genau zur AG „Junge Mathematiker“ gehört, genau 2 Jungen, die genau zur AG „Turnen“ gehören.

Mit dieser Aufzählung sind alle Möglichkeiten erfasst, mindestens einer der drei Arbeitsgemeinschaften anzugehören, und zwar jede solche Möglichkeit genau einmal.
Daher ist $1+2+0+2+3+0+2=10$ die gesuchte Anzahl aller Jungen dieser Klasse.

Aufgabe 240712:
Peter und Klaus würfeln mit drei Würfeln. Sie notieren nach jedem Wurf die drei erhaltenen Augenzahlen a, b, c in der Darstellung (a, b, c), wobei sie diese drei Zahlen so angeordnet haben, dass

$a \geq b \geq c$ gilt. Sie bezeichnen zwei Würfe genau dann als voneinander „verschieden“, wenn bei dieser Schreibweise mindestens ein Unterschied zwischen den beiden Darstellungen auftritt.

(1) Welches ist die kleinste Summe und welches ist die größte Summe der drei Augenzahlen, die bei einem Wurf auftreten kann?
(2) Beim Spiel fragt Peter: „Wie viel verschiedene Würfe gibt es insgesamt, bei denen als Summe der Augenzahlen der Wert 12 auftritt?“ Beantworte diese Frage!
(3) Klaus überlegt: „Wie viel verschiedene Würfe gibt es insgesamt, bei denen wenigstens einer der Würfel die Augenzahl 6 aufweist?“ Ermittle auch diese Anzahl!
(4) Nach genau 50 Würfen beenden die beiden Schüler ihr Würfelspiel. Sie fragen sich, ob dabei alle möglichen verschiedenen Würfe vorgekommen sein können. Beantworte diese Frage und beweise deine Antwort!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(1) Die kleinste Summe der Augenzahlen wird mit dem Wurf (1, 1, 1) erreicht und beträgt somit 3, die größte Summe tritt beim Wurf (6, 6, 6) auf und beträgt somit 18.

(2) Es gibt genau die folgenden sechs verschiedenen Würfe, bei denen als Summe der Augenzahlen der Wert 12 auftritt: $(6,5,1),(5,5,2),(4,4,4),(6,4,2),(5,4,3),(6,3,3)$.

(3) Es gibt genau die folgenden verschiedenen Würfe, bei denen wenigstens einer der Würfel die Augenzahl 6 aufweist:

$(6,6,6)$, $(6,6,5)$, $(6,5,5)$, $(6,6,4)$, $(6,5,4)$, $(6,4,4)$, $(6,6,3)$, $(6,5,3)$, $(6,4,3)$, $(6,3,3)$, $(6,6,2)$, $(6,5,2)$, $(6,4,2)$, $(6,3,2)$, $(6,2,2)$, $(6,6,1)$, $(6,5,1)$, $(6,4,1)$, $(6,3,1)$, $(6,2,1)$, $(6,1,1)$

Ihre Anzahl beträgt $6+5+4+3+2+1=21$.

(4) In entsprechender Weise gibt es genau die folgenden $5+4+3+2+1=15$ verschiedenen Würfe mit 5 als höchster Augenzahl

$(5,5,5)$, $(5,5,4)$, $(5,4,4)$,..., $(5,5,1)$, $(5,4,1)$, ..., $(5,1,1)$;

analog genau $4+3+2+1=10$ verschiedene Würfe mit 4 als höchster Augenzahl und $3+2+1=6$ verschiedene Würfe mit 3 als höchster Augenzahl.

Wegen $21+15+10+6>50$ sind dies bereits mehr als 50 verschiedene Würfe. Also können in 50 Würfen nicht alle möglichen verschiedenen Würfe vorgekommen sein.

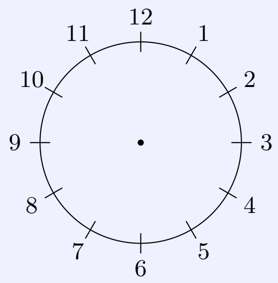
Aufgabe 250711:
In einer Tüte befindet sich 1 kg Zucker. Mit Hilfe einer Balkenwaage mit zwei Waagschalen (jede ausreichend groß für 1 kg losen Zucker) und genau einem 50 g-Wägestück sollen 300 g Zucker abgewogen werden.
Zeige, dass das mit nur drei Wägungen möglich ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Man halbiert zunächst ohne Wägestück das Kilogramm Zucker und erhält zweimal 500 g. Auf die gleiche Art halbiert man die 500 g Zucker und erhält zweimal 250 g. Mit Hilfe des 50 g-Wägestückes ermittelt man 50 g Zucker und gibt sie zu den 250 g dazu. Somit hat man 300 g Zucker.

Anderer Lösungsweg:

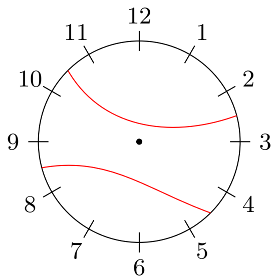
Mit dem 50 g-Wägestück ermittelt man 50 g Zucker. Mit diesen 50 g und dem 50 g-Wägestück ermittelt man (aus dem restlichen Zucker) in einer zweiten Wägung 100 g Zucker, der mit den 50 g Zucker zusammen 150 g Zucker ergibt.
Mit diesen 150 g Zucker ermittelt man nochmals 150 g Zucker, so dass die Inhalte der zwei Waagschalen zusammen 300 g Zucker ergeben.

Aufgabe 270711:
Klaus ließ versehentlich seinen Wecker zu Boden fallen. Dabei zersprang das Zifferblatt in drei Flächenstücke.
Nachdem der erste Schreck über das Missgeschick vorüber war, bemerkte Klaus, dass keine der 12 Zahlen beim Zerspringen des Zifferblattes auseinandergerissen worden war. Er berechnete für jedes der drei Flächenstücke die Summe derjenigen Zahlen, die auf diesem Flächenstück standen.
Dabei stellte er fest, dass sich in allen drei Fällen dieselbe Summe ergab.



Wie könnte das Zifferblatt zersprungen sein?
Gib eine Möglichkeit hierfür an und überprüfe, dass die von Klaus gemachte Feststellung für deine Angabe zutrifft!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Das Zifferblatt könnte so zersprungen sein, wie die Abbildung zeigt. Dies überprüft man, indem man bestätigt, dass

$$11 + 12 + 1 + 2 = 3 + 4 + 9 + 10 = 5 + 6 + 7 + 8 = 26$$

gilt.

Aufgabe 270713:
In einen Dreieck seien die Maßzahlen der in Zentimeter gemessenen Längen aller Seiten ganzzahlig, gerade und untereinander verschieden. Bekannt ist $a = 6$ cm und $b = 4$ cm.
Untersuche, ob aus diesen Angaben der Umfang des Dreiecks eindeutig ermittelt werden kann! Ist dies der Fall, dann gib den Umfang an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
In jedem Dreieck gilt: Eine Seite ist stets kleiner als die Summe und stets größer als die Differenz der beiden anderen Seiten.
Folglich gilt laut Aufgabe 2 cm $< c <$ 10 cm, wobei c die Länge der dritten Seite des betrachteten Dreiecks ist. Da nach Voraussetzung die Maßzahl von c gerade und von 4 und 6 verschieden ist, erfüllt nur $c = 8$ cm alle Bedingungen.
Der Umfang u des Dreiecks lässt sich somit eindeutig ermitteln, und es gilt: $u = 6 + 4 + 8 = 18$ cm.

Aufgabe 280711:
Ein Spiel für zwei Mitspieler hat folgende Regel:
Einer der beiden nennt eine beliebige einstellige Zahl. Der andere nennt eine größere natürliche Zahl, die jedoch höchstens um 10 größer sein darf als die vorhergenannte. So wechselt man ab.
Gewonnen hat derjenige, der unter Beachtung der Spielregeln die Zahl 100 nennen kann.

a) Gibt es für den beginnenden Spieler eine Möglichkeit, das Spiel in jedem Fall zu gewinnen?
b) Gibt es aber auch einen Spielbeginn, der anschließend dem zweiten Spieler eine Möglichkeit gibt, das Spiel in jedem Fall zu gewinnen?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Für den beginnenden Spieler gibt es eine Möglichkeit, das Spiel in jedem Fall zu gewinnen. Man kann dies folgendermaßen zeigen:

Der Spieler kann den Gewinn erzwingen, wenn sich (im Verlauf des Spiels) herausstellt:
Der Spieler kann erreichen, dass sein Gegenspieler eine der Zahlen 90, 91, ..., 99 nennen muss. (1)
Von jeder dieser Zahlen aus ist nämlich die Zahl 100 im nächsten Schritt erreichbar. Wenn nun der Spieler selbst die Zahl 89 nennen kann, so trifft für ihn (1) zu, und er kann den Gewinn erzwingen. Diese Zahl 89 ist um 11 kleiner als 100. Verkleinert man sie nochmals um 11 und wendet entsprechende Überlegungen an, so folgt:
Wenn der Spieler selbst die Zahl 78 nennen kann, so muss sein Gegenspieler eine der Zahlen 79, 80, ..., 88 nennen. Damit hat wiederum der Spieler in jedem Fall die Möglichkeit, 89 zu nennen und kann den Gewinn erzwingen.

Weitere Zahlen, deren Erreichen die Möglichkeit ergibt, den Gewinn zu erzwingen, sind entsprechend durch Subtraktion von 11 zu erhalten. Sie lauten 67, 56, 45, 34, 23, 12 und 1.
Damit ist gezeigt:
Der beginnende Spieler kann das Spiel dadurch in jedem Fall gewinnen, dass er der Reihe nach (stets, wenn er am Spiel ist) die Zahlen 1, 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89 und dann 100 nennt. (2)

b) Es gibt auch einen Spielbeginn, der anschließend dem zweiten Spieler eine Möglichkeit gibt, das Spiel in jedem Fall zu gewinnen.
Ein solcher Spielbeginn liegt vor, wenn der beginnende Spieler als erste Zahl eine der Zahlen 2, 3, ... 9 nennt. Dann nämlich hat der zweite Spieler die Möglichkeit, die Zahl 12 zu nennen, und von da ab kann er der Reihe nach (stets, wenn er am Spiel ist) die weiteren in (2) angeführten Zahlen nennen.
Wie in a) gezeigt ist, erzwingt er damit den Gewinn.

Aufgabe 290712:
Thomas, Uwe und Volker belegten bei einer Mathematikolympiade die ersten drei Plätze, jeder von ihnen einen anderen Platz als die beiden anderen. Über diese Platzierung wurden nun die folgenden drei Aussagen gemacht:

(1) Thomas wurde nicht Erster.
(2) Uwe wurde nicht Zweiter.
(3) Volker wurde Zweiter.

Von diesen drei Aussagen (1), (2), (3) ist genau eine wahr.
Untersuche, ob sich hieraus ermitteln lässt, wer von den drei Schülern den ersten, den zweiten und den dritten Platz belegte! Ist dies der Fall so gib die Platzierung an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wäre (3) die wahre Aussage, dann folgte, da (3) wahr und (2) falsch wäre, dass sowohl Volker als auch Uwe den zweiten Platz belegt hätten; im Widerspruch zum Aufgabentext.
Wäre (2) die wahre Aussage, dann folgte, da (2) wahr und (1), (3) falsch wären, dass keiner der drei Schüler den zweiten Platz belegt hätte; ebenfalls im Widerspruch zum Aufgabentext.
Somit kann nur (1) wahr sein. Da folglich (2) falsch ist, ergibt sich: Uwe wurde Zweiter. Hiernach und da (1) wahr ist, folgt: Thomas wurde Dritter, Volker wurde Erster.
Hiermit ist auch gezeigt, dass sich diese Platzierung aus den Bedingungen des Aufgabentextes ermitteln lässt.

Aufgabe 300711:
Während eines mathematischen Spielnachmittages wurden alle Mitspieler vom Spielleiter aufgefordert, in eine Hand eine gerade Anzahl und in die andere Hand eine ungerade Anzahl von Hölzchen zu nehmen.
Anschließend erhielt jeder Mitspieler die Aufgabe, die Anzahl der Hölzchen in seiner rechten Hand mit 2 zu multiplizieren und das entstandene Produkt zur Anzahl der Hölzchen in seiner Hand zu addieren.
Jedes Mal, wenn ein Spieler die so gebildete Summe dem Spielleiter mitteilte, war dieser in der Lage, zutreffend zu sagen, ob der Mitspieler eine gerade Anzahl von Hölzchen in seiner rechten oder in seiner linken Hand hatte.
Wie war das möglich?

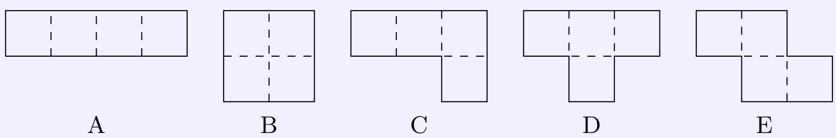
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Der Spielleiter kann folgendermaßen überlegen:
Angenommen, ein Mitspieler hat in seiner rechten Hand eine ungerade Anzahl von Hölzchen. Nach dem Verdoppeln erhält er eine gerade Zahl als Produkt, zu dem die gerade Anzahl der Hölzchen in seiner linken Hand addiert werden muss. Folglich ist die Summe eine gerade Zahl.
Befindet sich in der rechten Band des Mitspielers dagegen eine gerade Anzahl von Hölzchen, so ist das Doppelte davon ebenfalls eine gerade Zahl. Nach Addition mit der ungeraden Anzahl der Hölzchen der linken Hand ergibt sich eine ungerade Zahl als Summe.
Kennt der Mitspieler also eine gerade Zahl als Summe, so hat er die gerade Anzahl von Hölzchen in seiner linken Hand. Nennt er eine ungerade Zahl als Summe, so hat er die gerade Anzahl von Hölzchen in seiner rechten Hand.

Aufgabe 320711:
Karsten, Lutz, Mike und Norbert sammelten Pilze. Anschließend vergleichen sie ihre Sammelergebnisse und stellen fest:

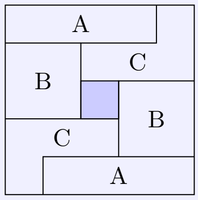
(1) Norbert sammelte mehr als Mike.
(2) Karsten und Lutz sammelten zusammen ebenso viel wie Mike und Lutz zusammen.
(3) Karsten und Norbert sammelten zusammen weniger als Lutz und Mike zusammen.
Untersuche, ob aus diesen Angaben
a) genau einer der vier Jungen als Sammler der meisten Pilze,
b) genau einer der vier Jungen als Sammler der wenigsten Pilze
hervorgeht! Gib jeweils, wenn das der Fall ist, den Namen des betreffenden Jungen an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Für die Sammelergebnisse K, L, M, N von Karsten, Lutz, Mike bzw. Norbert folgt aus den Angaben: Nach (1) gilt $N > M$. (4)
Nach (2) gilt $K + L = M + L$, also $K = M$. (5) Nach (3) gilt $K + N < L + M$; hieraus und aus (5) folgt $N < L$. (6)
Mit (6), (4), (5), also $L > N > M = K$, ist gezeigt:
a) Aus den Angaben geht genau Lutz als Sammler der meisten Pilze hervor.
b) Aus den Angaben geht nicht genau einer der vier Jungen als Sammler der wenigsten Pilze hervor (sondern jeder der beiden Jungen Mike und Karsten).

Aufgabe 330714:
Ein Legespiel besteht aus je vier Legesteinen der in der ersten Abbildung gezeigten Formen A, B, C, D und E. Jeder dieser 20 Legesteine ist aus vier Quadraten der Seitenlänge 1 cm zusammengesetzt.



a) Die Fläche eines Quadrates der Seitenlänge 4 cm soll durch Legesteine einer einheitlichen Form vollständig bedeckt werden, ohne dass Legesteine sich dabei ganz oder teilweise überlappen oder über das Quadrat hinausragen.
Untersuche, mit welchen der Formen A, B, C, D, E dies möglich ist, und mit welchen dieser Formen es sogar verschiedene Möglichkeiten gibt!

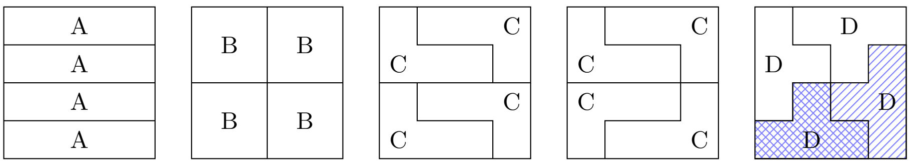


b) In der Abbildung ist gezeigt, wie die Fläche eines Quadrates der Seitenlänge 5 cm mit herausgenommenem schraffiertem Mittelquadrat durch sechs Legesteine bedeckt werden kann. Dabei ist die zusätzliche Forderung erfüllt, dass drei verschiedene Sorten von Steinen verwendet werden, und zwar von jeder dieser Sorten genau zwei Steine.
Gib mindestens vier weitere Möglichkeiten an, diese Forderung zu erfüllen!

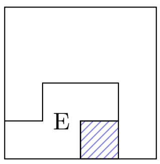
c) Die Fläche einen Rechtecks mit den Seitenlängen 8 cm und 4 cm soll durch acht Legesteine bedeckt werden. Dabei sollen vier verschiedene Sorten von Steinen verwendet werden, und zwar von jeder dieser Sorten genau zwei Steine.
Gib zwei Möglichkeiten an, die sich in den verwendeten Sorten unterscheiden!

Hinweis: Zwei Bedeckungen gelten genau dann als verschieden, wenn es keine Spiegelung oder Drehung gibt, die sie ineinander überführt. Bei den Legesteinen wird nicht zwischen „Oberseite“ und „Unterseite“ unterschieden; jeder Stein darf also auch „gewendet“ werden.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Für die Formen A, B, C, D gibt es z. B. die in der Abbildung gezeigten Möglichkeiten:

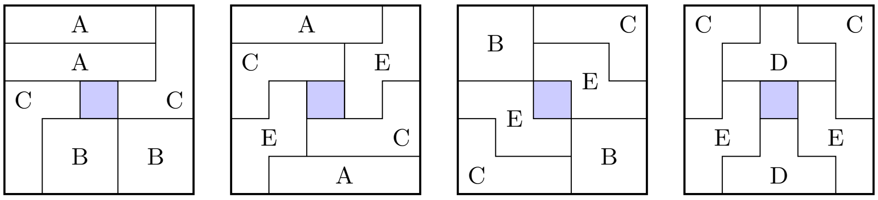


Für A gibt es (im Sinne des „Hinweises“) keine weitere Möglichkeit, da jeder Stein A bereits eine Länge von 4 cm einnimmt.
Für B gibt es ebenfalls keine weitere Möglichkeit, da jeder Stein B Länge und Breite von 2 cm hat, also die Steine nur zu zweien neben- und untereinander gelegt werden können.
Auch für D gibt es keine weitere Möglichkeit; denn an eine Ecke (z. B. links unten) des zu bedeckenden Quadrats kann ein Stein D (bis auf Drehung und Spiegelung) nur so gelegt werden, wie die doppelt schraffierte Fläche angibt; das fehlende Teilfeld rechts unten erfordert die Lage der einfach schraffierten Fläche, worauf für die beiden letzten Steine D ebenso ihre Lage folgt.

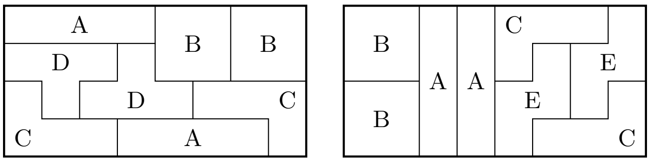


Für die Form E gibt es keine Möglichkeit; denn an eine Ecke könnte ein Stein E nur so gelegt werden, wie die obere Abbildung zeigt, und bei jeder Möglichkeit, das schraffierte Feld mit einem weiteren Stein E zu bedecken (ohne den vorigen zu überlappen), würde dieser über das Quadrat hinausragen.

b) Die Abbildung zeigt vier Beispiele der geforderten Art.



c) Die Abbildung zeigt (mit A, B, C, D bzw. A, B, C, E als verwendeten Sorten) zwei Beispiele der geforderten Art. (Auch andere Anordnungen der Legesteine sind möglich.)



II Runde 2

Aufgabe 020722:
Bei einem Preisschießen der GST gaben Günther und Heidrun je 5 Schuss ab. Auf den Scheiben wurden folgende Treffer ermittelt:

Einmal die 3, zweimal die 5, zweimal die 6, zweimal die 7, einmal die 8, einmal die 9, einmal die 10.

Günther erzielte mit seinen letzten vier Schüssen neunmal so viele Ringe wie mit seinem ersten Schuss. Heidrun dagegen erreichte mit ihren ersten vier Schüssen fünfmal so viele Ringe wie mit ihrem letzten Schuss; ihre beiden ersten Schüsse ergaben zusammen genau so viele Ringe wie ihre beiden letzten zusammen. Günther schoss die 9.
a) Wer gewann den Wettkampf?
b) Wer schoss die 10?
Die Antworten sind zu begründen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Im für ihn günstigsten Fall konnte Günther in den letzten vier Schüssen $10+9+8+7 = 34$ Ringe schießen. Da seine letzten vier Schüsse aber zusammen durch neun teilbar sein müssen, kann er nur 27 Ringe erzielt haben und sein erster Schuss muss die 3 gewesen sein. Da er die 9 geschossen hat, hat er in den übrigen drei Schüssen insgesamt 18 erzielt. Also hat er zusammen 30 Ringe, die 10 ist nicht dabei.

Für Heidrun bleiben 36 von den insgesamt 66 geschossen Ringen übrig, sie hat also gewonnen.

Aufgabe 040722:
In einer 7. Klasse erhielt zum Abschluss des letzten Schuljahres im Fach Mathematik kein Schüler die Zensur „5“, jeder neunte Schüler erhielt die Zensur „1“, jeder dritte die Zensur „“ und jeder sechste die Zensur „4“.
Über die Schülerzahl n ist bekannt: $20 < n < 40$.
Wie viel Schüler erhielten die Zensur „3“?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Anzahl n muss ein Vielfaches von 9, von 6 und von 3, d. h. ein Vielfaches von 18 sein. Wegen $20 < n < 40$ kommt nur $n = 36$ in Frage.

Zensur	1	2	3	4
Schüler	4	12	14	6

$x = 14$ Schüler haben die Zensur „3“.

Aufgabe 080721:
Ulrike geht einkaufen. Sie hat genau 9,27 M bei sich, darunter genau 12 Einpfennigstücke, und kauft im Konsum für insgesamt 2,36 M ein. Beim Bezahlen stellt sie fest, dass sie nicht passend bezahlen kann. Der kleinstmögliche ausreichende Betrag, den sie der Verkäuferin geben kann, beträgt 4 M.
Ermittle, was für Geldstücke oder Geldscheine und wie viel von jeder Sorte Ulrike nach diesen Angaben bei sich haben konnte!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wegen des Gesamtbetrages muss Ulrike wenigstens ein Fünfpfennigstück bei sich gehabt haben.
Da 4M der kleinstmögliche Betrag ist, kann Ulrike kein Einmarkstück, kein Fünfzigpfennigstück und auch nicht mehr als ein Zehnpfennigstück oder mehr als drei Fünfpfennigstücke besessen haben.
Andernfalls hätte sie entweder passend oder mit einem kleineren Betrag (z. B. 3 M; 2, 50 M; 2, 40 M) bezahlen können. Sie konnte daher nur folgende Geldstücke bzw. Geldscheine bei sich haben:
Entweder: 1 Fünfmarkschein, 2 Zweimarkstücke, 1 Zehnpfennigstück, 1 Fünfpfennigstück, 12 Einpfennigstücke
oder: 1 Fünfmarkschein, 2 Zweimarkstücke, 3 Fünfpfennigstücke, 12 Einpfennigstücke.

Aufgabe 100721:
In einem Ferienlager der Thälmann-Pioniere erwarben genau 70% aller Teilnehmer das Sportabzeichen und genau 30% aller Teilnehmer das Touristenabzeichen. Vorher besaß kein Teilnehmer eines dieser Abzeichen.
Bei den folgenden Aussagen (1) bis (4), die sich sämtlich auf dieses Lager beziehen, ist zu untersuchen, ob sie wahr sind oder falsch sind oder ob das allein aufgrund der gemachten Angaben nicht entschieden werden kann:

(1) Weniger als die Hälfte aller Pioniere, die das Sportabzeichen erwarben, erwarben auch das Touristenabzeichen.
(2) Alle Teilnehmer erwarben entweder das Sportabzeichen oder das Touristenabzeichen.
(3) Unter den Trägern des Sportabzeichens gibt es mehr solche, die auch das Touristenabzeichen erwarben, als solche, die dies nicht taten.
(4) Wenn sich die Anzahl der Pioniere, die das Sportabzeichen erwarben, um 10% erhöhen würde, so gäbe es mehr Träger des Sportabzeichens als Träger des Touristenabzeichens.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Aussage (1) ist wahr, weil höchstens 30% aller Teilnehmer beide Abzeichen erworben haben konnten und 30% weniger als die Hälfte von 70% sind.
Bei Aussage (2) kann allein mit den vorliegenden Angaben nicht entschieden werden, ob sie wahr oder falsch ist. Sie ist genau dann wahr, wenn jeder Teilnehmer genau ein Abzeichen erworben hat.
Aussage (3) ist falsch, weil höchstens 30% aller Teilnehmer beide Abzeichen erworben haben konnten, also mindestens 40% aller Teilnehmer nur das Sportabzeichen erhielten.
Aussage (4) ist wahr, weil es (bereits vor, also erst recht) nach einer Erhöhung der Anzahl der Sportabzeichenträger von diesen mehr gibt als Träger des Touristenabzeichens.

Aufgabe 110722:
Andreas, Birgit und Claudia trugen untereinander ein kleines Schachturnier aus. Folgendes ist hierüber bekannt:

(1) Jeder spielte gegen jeden die gleiche Anzahl von Partien.
(2) Keine Partie endete unentschieden (remis).
(3) Andreas gewann genau $\frac{2}{3}$ seiner Spiele.

(4) Birgit gewann genau $\frac{3}{4}4$ ihrer Spiele.
(5) Claudia gewann genau ein Spiel.

Ermittle die Anzahl aller Spiele, die in dem Turnier insgesamt ausgetragen wurden!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(6) Da es genau 3 Möglichkeiten gibt, aus den drei Spielern ein Paar von gegeneinander Spielenden auszuwählen, so ist nach (1) die Anzahl aller Spiele das Dreifache derjenigen Partiezahl, die jeweils ein solches Paar gegeneinander austrug.

(7) Das Doppelte dieser Partienzahl und somit $\frac{2}{3}$ aller Spiele des Turniers beträgt daher die Anzahl derjenigen Spiele, an denen jeweils einer der Spieler überhaupt teilnahm, d. h., jeder der 3 Spieler nahm an genau $\frac{2}{3}$ aller Spiele teil.

Wegen (3) und (7) gewann infolgedessen Andreas genau $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$ aller Spiele und wegen (4) und (7) Birgit genau $\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$ aller Spiele.
Somit gewannen Andreas und Birgit zusammen wegen genau $\frac{17}{18}$ aller Spiele. Daher und weil wegen (2) jedes Spiel von genau einem Spieler gewonnen sein musste, gewann Claudia genau $\frac{1}{18}$ aller Spiele.
Da dies andererseits nach (5) genau ein Spiel war, wurden folglich genau 18 Spiele bei diesem Turnier ausgetragen.

Aufgabe 130721:
Die 36 Schüler einer 7. Klasse nehmen am außerunterrichtlichen Sport teil, und zwar jeder in genau einer der Sektionen Leichtathletik, Tischtennis, Schwimmen, Judo und Schach. Über die Teilnahme der Schüler dieser Klasse an diesen Sektionen ist weiter bekannt:

(1) Mehr als die Hälfte betreibt Leichtathletik.
(2) Es gehören mehr der Sektion Schwimmen als der Sektion Tischtennis an.
(3) Die Summe aus der Anzahl der Mitglieder der Sektion Schach und der Sektion Judo beträgt genau ein Neuntel aller Schüler.
(4) In der Sektion Tischtennis befinden sich doppelt so viele Schüler wie in der Sektion Schach.
(5) Die Anzahl der Sektionsmitglieder Schach ist größer als das Doppelte, jedoch kleiner als das Vierfache der Anzahl der Sektionsmitglieder Judo.

Ermittle für jede der genannten Sektionen die Anzahl der Schüler der erwähnten Klasse, die Mitglieder dieser Sektion sind!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Aus (3) folgt, dass die Summe aus der Anzahl der Schachspieler und der Anzahl der Judosportler 4 beträgt. Von allen möglichen Zerlegungen der Zahl 4 in zwei ganzzahlige Summanden erfüllt nur diejenige (5), nach der die Anzahl der Schachspieler 3 und die der Judosportler 1 ist. Daraus folgt nach (4), dass genau 6 Schüler Mitglied der Sektion Tischtennis sind.

Nach (1) betreiben mindestens 19 Schüler Leichtathletik und nach (2) mindestens 7 Schüler Schwimmen. Da für diese beiden Sportarten nur noch genau 26 Schüler in Betracht kommen, sind 19 und 7 die einzig möglichen Anzahlen.

Von den 36 Schülern betreiben mithin genau 19 Leichtathletik, genau 7 Schwimmen, genau 6 Tischtennis, genau 3 Schach, und genau 1 Schüler betreibt Judo.

Aufgabe 140721:
Drei Schülerinnen mit den Vornamen Angelika, Beate und Christine und den Zunamen Müller, Naumann und Richter beteiligten sich am alpha-Wettbewerb. Folgendes ist über sie bekannt:

(1) Die Schülerin Naumann nahm zum ersten Mal teil.
(2) Die Schülerin Richter erhielt eine schlechtere Bewertung als mindestens eine der anderen Schülerinnen.
(3) Die Schülerin Müller benutzte nur liniertes Papier.
(4) Angelika erzielte das schlechteste Ergebnis.
(5) Beate hatte bereits im Vorjahr das alpha-Abzeichen erhalten.
(6) Die erfolgreichste der drei Schülerinnen verwendete nur unliniertes Papier.

Ermittle den Vor- und Zunamen der erfolgreichsten der drei Schülerinnen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Aus (6), (3) und (2) folgt, dass weder die Schülerin Müller noch die Schülerin Richter am besten abschnitt. Folglich lautet der Zuname der erfolgreichsten Schülerin Naumann. Wegen (4) lautet ihr Vorname nicht Angelika und wegen (1) sowie (5) auch nicht Beate. Folglich heißt sie Christine.
Die erfolgreichste der drei Schülerinnen heißt Christine Naumann.

Aufgabe 170721:
Anja hatte zum Geburtstag ihre beiden Freundinnen Cathrin und Eva eingeladen, mit denen sie nicht verwandt ist. Außerdem waren die Jungen Bernd, Dirk, Frank und Gerold eingeladen, von denen jeder ein Bruder eines der drei Mädchen ist.
Nachdem diese sieben Personen an einem runden Tisch in der alphabetischen Reihenfolge ihrer Vornamen Platz genommen hatten, stellte man fest:

(1) Keiner der Jungen saß neben seiner Schwester.
(2) Frank und Gerold sind Zwillinge.

Untersuche, ob aus den vorstehenden Aussagen die Namen der anwesenden Brüder jedes der drei Mädchen zu ermitteln sind; ist das der Fall, so sind diese Namen anzugeben!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Bernd saß neben Anja und Cathrin. Daher kann er wegen (1) nur Evas Bruder sein.
Dirk saß zwischen Cathrin und Eva, kann also ebenfalls wegen (1) nur Anjas Bruder sein.
Wegen (1) und (2) können Frank und Gerold weder Anjas noch Evas Brüder sein. Sie sind mithin Cathrins Brüder.

Aufgabe 180721:
An einer Schule unterrichteten die drei Lehrer Schulze, Ufer und Krause in den Fächern Deutsch, Russisch, Geschichte, Mathematik, Physik und Biologie. Es sei folgendes bekannt:

(1) Jeder dieser drei Lehrer unterrichtet in genau zwei dieser sechs Fächer, und jedes dieser sechs Fächer wird von genau einem dieser drei Lehrer unterrichtet.
(2) Sowohl der Lehrer für Biologie als auch der Lehrer für Physik sind älter als Herr Schulze.
(3) In ihrer Freizeit spielen der Lehrer für Russisch, der Lehrer für Mathematik und Herr Schulze gern Skat. Dabei gewinnt Herr Krause öfter als der Lehrer für Biologie und der Lehrer für Russisch.

Weise nach, dass man aus diesen Angaben die Verteilung der drei Lehrer auf die Fächer eindeutig ermitteln kann, und gib diese Verteilung an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wir bezeichnen die Namen der Lehrer abkürzend mit S, U bzw. K, die der Fächer mit d, r, g, m, p bzw. b. Dabei bedeute $S = d$, dass Schulze das Fach Deutsch unterrichtet; $S \neq b$ bedeute, dass Schulze nicht im Fach Biologie unterrichtet; usw.

Aus (1) und (2) folgt $S \neq b$ und $S \neq p$; aus dem ersten Teil von (3) folgt analog $S \neq r$ und $S \neq m$. Wegen (1) muss daher $S = d$ und $S = g$ gelten.
Ebenfalls wegen (1) gilt $K \neq d$ und $K \neq g$, und da aus dem zweiten Teil von (3) die Beziehungen $K \neq b$ und $K \neq r$ folgen, gilt wegen (1) mithin $K = m$ und $K = p$.
Ebenfalls wegen (1) folgt schließlich $U = r$ und $U = b$. Damit ist gezeigt, dass auf Grund der Angaben nur folgende Verteilung möglich ist:

Herr Schulze unterrichtet Deutsch und Geschichte,
Herr Ufer unterrichtet Russisch und Biologie,
Herr Krause unterrichtet Mathematik und Physik.

Aufgabe 190721:
Dieter, Hans, Klaus und Peter sowie ihre Ehefrauen Erika, Gabi, Rita und Simone tauschen Erinnerungen aus. Ein Zuhörer entnimmt der Unterhaltung folgendes:

(1) Simone und ihr Mann sowie außer ihnen Erika und Hans waren zur Hochzeit von Dieter eingeladen.
(2) Auf der Hochzeit von Hans waren Gabi und Erika zu Gast.
(3) Zu den Hochzeitsgästen von Peter gehörten Klaus und Simone.

Untersuche, ob für jeden der vier Männer der Name seiner Ehefrau allein aus den Aussagen (1) bis (3) eindeutig zu ermitteln ist; wenn dies der Fall ist, so gib die Namen der Ehepaare an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wegen (2) ist Hans weder mit Gabi noch mit Erika verheiratet, wegen (1) auch nicht mit Simone. Folglich gilt: (4) Hans ist mit Rita verheiratet.

Wegen (1) ist Dieter weder mit Erika noch mit Simone verheiratet, wegen (4) auch nicht mit Rita. Daher gilt: (5) Dieter ist mit Gabi verheiratet.

Wegen (3) ist Peter nicht mit Simone, wegen (4) nicht mit Rita und wegen (5) auch nicht mit Gabi verheiratet. Also gilt: (6) Peter ist mit Erika verheiratet.

Aus (4), (5), (6) folgt schließlich: (7) Klaus ist mit Simone verheiratet.

Damit ist gezeigt, dass für jeden der vier Männer der Name seiner Ehefrau eindeutig ermittelt werden kann. Die Ehepaare sind somit in (4), (5), (6) und (7) angegeben.

Aufgabe 200721:
Auf einer internationalen Mathematikerversammlung werden Vorträge in russischer, englischer, deutscher, französischer und ungarischer Sprache gehalten. Ferner wissen wir:

(1) Diejenigen Tagungsteilnehmer, die sowohl die russische als auch die französische Sprache verstehen, verstehen außerdem auch alle Englisch.
(2) Diejenigen Teilnehmer, die Ungarisch verstehen, verstehen auch Französisch und Deutsch.

Untersuche, ob diejenigen Tagungsteilnehmer, die sowohl Ungarisch als auch Russisch verstehen, zum Verstehen einer der Vortragssprachen einen Dolmetscher brauchen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die genannten Teilnehmer verstehen nach (2), da sie Ungarisch verstehen, auch die französische Sprache. Daher, und weil sie Russisch verstehen, gehören sie zu den in (1) genannten Teilnehmern; sie verstehen also Englisch.
Aus (2) folgt ferner, dass sie auch Deutsch verstehen. Also brauchen sie für keine der fünf Sprachen einen Dolmetscher.

Aufgabe 240721:
Drei Ehepaare sitzen zum Rommméspiel im Kreis um einen Tisch. Die Vornamen der Männer sind Anton, Bernd und Christian, die Vornamen der Frauen sind Ulrike, Vera und Waltraud. Ferner ist bekannt:

(1) Keiner der sechs Teilnehmer sitzt seinem Ehepartner gegenüber.
(2) Vera sitzt zwischen zwei Männern.
(3) Anton sitzt neben seiner Frau.
(4) Rechts von Ulrikes Mann sitzt Waltraud, links von ihm sitzt Christian.

Beweise, dass man aus diesen Angaben sowohl von jedem Teilnehmer den Ehepartner als auch die Sitzordnung eindeutig ermitteln kann, und gib beides an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

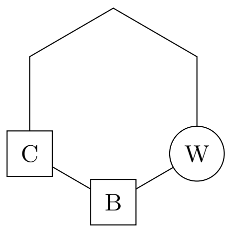


Abbildung a

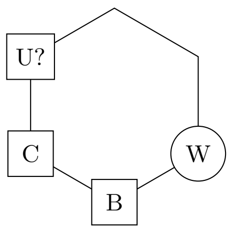


Abbildung b

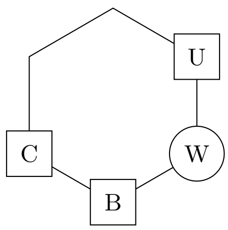


Abbildung c

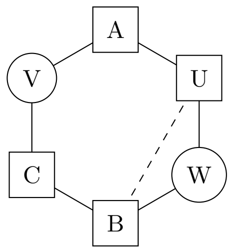


Abbildung c

Nach (4) ist Ulrikes Mann nicht Christian. Aus (4) folgt auch, dass Ulrikes Mann nicht neben seiner Frau sitzt; er ist wegen (3) also auch nicht Anton. Daher gilt: Ulrikes Mann ist Bernd, (*) und man erhält Abbildung a.

Hiernach kann Ulrike wegen (1) nur entweder links von Christian oder rechts von Waltraud sitzen. Säße sie links von Christian (Abbildung b), so blieben für Vera nur solche Plätze übrig, die jeweils einer Frau benachbart wären, im Widerspruch zu (2). Also sitzt Ulrike rechts von Waltraud (Abbildung c).

Nach (2) müssen dann die Plätze von Anton und Vera so angeordnet sein, wie in Abbildung d angegeben. Wegen (*) ist Antons Frau nicht Ulrike; daher folgt aus Abbildung d und (3): Antons Frau ist Vera, (**) und es verbleibt als drittes Ehepaar: Christians Frau ist Waltraud. (***)

Damit ist bewiesen, dass man die Ehepartner und die Sitzordnung eindeutig ermitteln kann. Sie lauten wie in (*), (**), (***) bzw. Abbildung d angegeben.

Aufgabe 250721:
Annett, Birgit und Cornelia haben in der letzten Klassenarbeit unterschiedliche Leistungen gezeigt; denn eine dieser Schülerinnen erhielt die Note 1, eine andere die Note 2 und die dritte die Note 3.
Kerstin, eine Klassenkameradin, erzählt zu Hause: „Annett hat keine 1, Birgit keine 2, aber Cornelia hat eine 2.“

Es stellt sich jedoch heraus, dass sich Kerstin bei genau zwei dieser drei Aussagen geirrt hatte.
Kann man aus diesen Angaben die Noten der einzelnen Schülerinnen eindeutig ermitteln? Ist dies der Fall, so gib die Notenverteilung an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wäre Kerstins erste und zweite Aussage falsch und die dritte wahr, hätten Birgit und Cornelia eine 2, was der Voraussetzung widerspricht, dass die drei Schülerinnen unterschiedliche Noten haben.
Wäre Kerstins erste und dritte Aussage falsch und die zweite wahr, dann hätte Annett eine 1, Birgit und Cornelia keine 2, was der Voraussetzung widerspricht, dass die Note 2 erteilt wurde.
Damit bleibt nur noch die Möglichkeit: Kerstins zweite und dritte Aussagen sind falsch, und die erste Aussage ist wahr.
Das führt auf die Notenverteilung: Birgit 2, Annett (daher keine 2 und auch) keine 1, also Annett 3; und folglich Cornelia 1. Damit sind die Noten eindeutig ermittelt.

Aufgabe 270722:
Angela, Bodo, Constanze und Dietmar sprechen über den Ausgang zweier Fußballspiele der Klasse 7a gegen die Klasse 7b. Zu beiden Spielen machen sie dieselben Aussagen, nämlich:

Angela: Das Spiel endete unentschieden.
Bodo: Die Klasse 7a gewann.
Constanze: Bodos Aussage ist falsch.
Dietmar: Angelas Aussage ist wahr.

(a) Petra, die das erste Spiel gesehen hat, stellt wahrheitsgemäß fest, dass für das erste Spiel genau eine der vier Aussagen falsch ist.
(b) Rolf, der das zweite Spiel gesehen hat, stellt wahrheitsgemäß fest, dass für das zweite Spiel genau eine der vier Aussagen wahr ist.
Untersuche, ob sich (a) aus Petras Feststellung, (b) aus Rolfs Feststellung der Ausgang des betreffenden Spiels (Sieg der 7a, Sieg der 7b oder Unentschieden) eindeutig ermitteln lässt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(a) Wäre Dietmars Aussage falsch, dann wäre auch Angelas Aussage falsch. Da nach Petras Feststellung aber nur genau eine Aussage falsch ist, folgt eindeutig, dass Dietmars und damit auch Angelas Aussage wahr ist.
Daraus folgt eindeutig: Das erste Spiel endete unentschieden.

(b) Wenn Klasse 7a das zweite Spiel gewann, so ist Bodos Aussage wahr und folglich Constanzes Aussage falsch; ferner ist dann Angelas und daher auch Dietmars Aussage falsch.
Wenn Klasse 7b das zweite Spiel gewann, ist Bodos Aussage falsch und folglich Constanzes Aussage wahr; ferner ist dann Angelas und daher auch Dietmars Aussage falsch.
Da es somit zwei verschiedene Ausgänge des zweiten Spiels gibt, bei denen Rolfs Feststellung zutrifft, lässt sich aus dieser Feststellung der Ausgang des zweiten Spiels nicht eindeutig ermitteln.

Aufgabe 270723:
Die Maßzahlen zweier Seitenlängen eines Dreiecks seien $a = 12$ und $b = 8$.
Ermittle alle diejenigen Zahlen, die als Maßzahl c der dritten Dreiecksseite so vorkommen können, dass die Maßzahl des Umfangs eine Primzahl ist. Alle drei Seitenlängen sollen dabei in derselben Maßeinheit, etwa in Zentimetern, gemessen sein.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Eine Zahl ist genau dann als Maßzahl c der dritten Dreiecksseite möglich, wenn sie $c < a+b$ und $c > a-b$, d. h. $4 < c < 20$ erfüllt.

Für den Umfang $u = a + b + c = 20 + c$ (1) ist dies gleichbedeutend mit $24 < u < 40$.
Das ist genau dann eine Primzahl, wenn u eine der Zahlen 29, 31, 37 ist, und dies wegen (1) genau dann, wenn c eine der Zahlen $9, 11, 17$ ist.

Aufgabe 300721:
Über die Schüler einer Schulklasse werden folgende Aussagen gemacht:

(1) Genau 10 Schüler gehören einer Arbeitsgemeinschaft an.
(2) Genau 8 Schüler gehören einer Sportgemeinschaft an.
(3) Genau 5 Schüler gehören weder einer Arbeitsgemeinschaft noch einer Sportgemeinschaft an.
Gib eine
a) möglichst kleine,
b) möglichst große
Schülerzahl der Schulklasse an, bei der die drei Aussagen wahr sein können! Begründe deine Angaben!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Um eine möglichst kleine Anzahl zu erhalten, wählt man die Möglichkeit, dass auf möglichst viele Schüler zwei der drei Aussagen zutreffen.
Das bedeutet: Genau 8 Schüler gehören sowohl einer Arbeitsgemeinschaft als auch einer Sportgemeinschaft an.
Dann folgt: Genau 2 Schüler gehören einer Arbeitsgemeinschaft, aber nicht einer Sportgemeinschaft an. Zusammen mit den in (3) genannten 5 Schülern ergibt das 8 + 2 + 5 = 15 Schüler.

b) Um eine möglichst große Anzahl zu erhalten, wählt man die Möglichkeit, dass auf (möglichst wenige, also) keinen der Schüler zwei der drei Aussagen zutreffen. Das ergibt mit den in (1), (2) und (3) genannten Schülern insgesamt 10 + 8 + 5 = 23 Schüler.

Aufgabe 310721:
Matthias, Thomas, Frank und Sven haben im Hof bei den Wohnhäusern Fußball gespielt. Eine Fensterscheibe ging zu Bruch; genau einer der vier Jungen hat sie mit seinem missglückten Torschuss zerschlagen. Sie machen nun folgende Aussagen:

Matthias: Es war Thomas oder Frank, der die Scheibe zerschlug.
Thomas: Ich war es nicht.
Frank: Ich auch nicht.
Sven: Frank hat es getan.

Rolf, der alles beobachtet hat, stellt fest, dass mindestens drei dieser vier Aussagen wahr sind.
Untersuche, ob durch Rolfs Feststellung, wenn sie wahr ist, eindeutig bestimmt ist, wer die Scheibe zerschlug! Wenn das der Fall ist, ermittle diesen Täter!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
In der folgenden Tabelle wird für jede der vier Möglichkeiten des Täters angegeben, welche der vier Aussagen wahr (w) und welche falsch (f) sind:

Täter	Matthias	Thomas	Frank	Sven
Matthias	f	w	w	f
Thomas	w	f	w	f
Frank	w	w	f	w
Sven	f	w	w	f

Nur dann, wenn Frank der Täter war, sind mindestens drei der Aussagen wahr. Also ist durch diese Voraussetzung eindeutig bestimmt, dass nur Frank die Scheibe zerschlagen haben kann.

Aufgabe 330721:
An einer Schule gibt es für die Fächer Biologie, Mathematik, Geographie, Geschichte, Deutsch und Englisch drei Lehrer. Ihre Familiennamen sind Schröter, Berger und Müller. Jeder dieser drei Lehrer unterrichtet genau zwei der genannten Fächer, jedes dieser Fächer wird von genau einem Lehrer unterrichtet. Ferner wird über diese Lehrer erzählt:

(1) Zwei der Lehrer, nämlich Herr Berger und der Geschichtslehrer, sind miteinander verwandt.
(2) Drei der Lehrer, nämlich Herr Schröter, der Deutschlehrer und der Englischlehrer, treffen sich oft auf ihrem Weg zur Schule.
(3) Herr Schröter hat neulich den erkrankten Geschichtslehrer vertreten.
(4) Herr Schröter und der Mathematiklehrer sind Gartennachbarn voneinander.
(5) Herr Berger ist älter als der Deutschlehrer.

Untersuche, ob es eine Verteilung der Fächer auf die Lehrer gibt, bei der alle diese Aussagen zutreffen können, und ob die Verteilung der Fächer durch die Aussagen eindeutig bestimmt ist! Wenn das der Fall ist, gib diese Verteilung an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn die Aussagen zutreffen, so folgt:
Nach (2) ist Herr Schröter weder der Deutsch- noch der Englischlehrer, nach (3) auch nicht der Geschichtslehrer und nach (4) auch nicht der Mathematiklehrer. Da er zwei der sechs Fächer unterrichtet, verbleibt nur:

Herr Schröter unterrichtet Biologie und Geographie. (6)
Nach (1) ist Herr Berger nicht der Geschichtslehrer, nach (5) nicht der Deutschlehrer und nach (6) weder der Biologie- noch der Geographielehrer. Somit gilt:
Herr Berger unterrichtet Mathematik und Englisch. (7)
Schließlich verbleibt nach (6) und (7) nur: Herr Müller unterrichtet Deutsch und Geschichte. (8)

II. Bei der in (6), (7), (8) angegebenen Verteilung können die Aussagen (1) bis (5) zutreffen; denn bei dieser Verteilung ist Herr Berger weder der Geschichts- noch der Deutschlehrer (daher sind (1) und (5) möglich); und Herr Schröter ist keiner der Lehrer für Deutsch, Englisch, Geschichte oder Mathematik, außerdem sind der Deutsch- und der Englischlehrer voneinander verschieden (daher sind (2), (3) und (4) möglich).

Mit II. ist gezeigt, dass es eine Verteilung gibt, bei der die Aussagen (1) bis (5) zutreffen können, nach I. ist sie durch diese Aussagen eindeutig bestimmt. Sie lautet wie in (6), (7), (8) angegeben.

III Runde 3

Aufgabe 040733:
Hans, Jürgen, Paul und Wolfgang haben bei einem 100-Meterlauf die ersten vier Plätze belegt. Auf die Frage, wer den ersten, zweiten, dritten bzw. vierten Platz belegte, erhalten wir folgende Antworten:
1. Paul erster, Jürgen zweiter;
2. Paul zweiter, Wolfgang dritter;
3. Hans zweiter, Wolfgang vierter.
In den drei Antworten war jeweils eine Angabe wahr und eine Angabe falsch.
Wer belegte den ersten, zweiten, dritten und vierten Platz?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Man betrachte zunächst die Aussagen 1 und 2. Es gibt nun 3 Möglichkeiten. Entweder ist Paul erster oder Paul ist zweiter oder Paul ist weder zweiter noch erster.

Möglichkeit 1: Paul ist weder erster noch zweiter.
Dann würde folgen, dass Jürgen zweiter und Wolfgang dritter ist. Jetzt kann aber keine der Aussagen bei 3. wahr sein, weil Hans nicht zweiter sein kann, weil das schon Jürgen ist und Wolfgang nicht vierter sein kann, weil er schon dritter ist, d. h. nicht möglich.

Möglichkeit 2: Paul ist zweiter.
Wäre Paul zweiter, so wäre die Aussage „Paul ist erster“ falsch, dann müsste aber die Aussage „Jürgen ist zweiter“ gelten. Das geht aber nicht, weil Paul schon zweiter, d. h. nicht möglich.

Möglichkeit 3: Paul ist erster.
Also ist die Aussage „Paul ist zweiter“ falsch. Daraus folgt, dass Wolfgang dritter ist. (Aussage 2) Also ist die Aussage
glqqWolfgang ist vierter“ falsch, also ist Hans zweiter. (Aussage 3) Jürgen bleibt übrig und ist demnach vierter.

Paul belegte den ersten Platz, Hans den zweiten, Wolfgang den dritten und Jürgen den vierten. Aufgrund des aufgezeigten Lösungsweges kann es auch keine andere Lösung geben.

Aufgabe 080734:
Ein Kultursaal wird bei der Erneuerung mit 21 Wandleuchten ausgestattet, deren jede für 4 Glühlampen vorgesehen ist. Die zunächst vorhandenen Glühlampen werden wahllos eingeschraubt. Danach stellt man fest, dass einige Wandleuchten mit allen 4 Glühlampen versehen sind, während doppelt so viele nur eine einzige enthalten. Ein Teil der Wandleuchten hat genau 3 Glühlampen, während bei halb so vielen noch sämtliche Glühlampen fehlen. In den restlichen Leuchten befinden sich genau 2 Glühlampen.
Es ist die genaue Anzahl der fehlenden Glühlampen zu ermitteln.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Man denke sich aus den Wandleuchten mit je 4 Glühlampen je 2 herausgeschraubt. Das ergibt genau so viel Glühlampen, wie es Leuchten mit je 1 Glühlampe gibt. Man könnte daher in jede dieser Leuchten je eine Glühlampe einschrauben.
Ebenso denke man sich aus den Leuchten mit 3 Glühlampen je 1 Glühlampe herausgeschraubt. Das sind genau doppelt so viele Glühlampen, wie es Leuchten ohne Glühlampen gibt. Man könnte daher in jede dieser Leuchten je 2 Glühlampen einschrauben. Dann hätte man insgesamt genau 21 Leuchten mit genau je 2 Glühlampen.
Man benötigt also noch genau 42 Glühlampen, um alle Leuchten voll auszustatten.

Aufgabe 100731:
Während der Friedensfahrt fuhr an 6 Thälmannpionieren eine Spitzengruppe von Radrennfahrern so vorbei, dass man eine Reihenfolge eindeutig feststellen konnte. Um diese Reihenfolge zu ermitteln, gab jeder der 6 Pioniere seine Beobachtungen wieder, wobei sämtliche Aussagen wahr sind:

(1) In der Spitzengruppe waren genau 8 Fahrer, darunter genau ein Belgier und genau zwei Polen.
(2) Von den Fahrern, die vor dem Belgier fuhren, waren mindestens zwei DDR-Fahrer.
(3) Von den Fahrern, die vor den beiden Polen fuhren, war mindestens einer ein sowjetischer Fahrer.
(4) Von den Fahrern, die hinter dem Belgier fuhren, war mindestens einer ein sowjetischer Fahrer.
(5) Zwei sowjetische Fahrer fuhren unmittelbar hintereinander.
(6) Am Anfang und am Schluss der Spitzengruppe fuhr jeweils ein DDR-Fahrer.

Ermittle die genaue Reihenfolge der Fahrer der Spitzengruppe!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die belgischen Fahrer, DDR-Fahrer, polnischen und sowjetischen Fahrer seien der Reihe nach mit B, D_1, D_2, ..., P_1, P_2, ..., S_1, S_2, ... bezeichnet.

Nach (5) waren mindestens zwei sowjetische Fahrer in der Spitzengruppe. Nach (2) fuhr mindestens ein DDR-Fahrer weder am Anfang noch am Ende, wegen (6) waren also mindestens drei DDR-Fahrer in der Spitzengruppe. Wegen (1) müssen diese Mindestzahlen, 2 sowjetische, 3 DDR-Fahrer, auch bereits die genauen Anzahlen der sowjetischen bzw. DDR-Fahrer sein.

Sind X, Y Bezeichnungen von Fahrern, so bedeute $X < Y$, dass X vor Y fuhr. Dann gilt (2) $D_1 < D_2 < B$, (3) $S_1 < P_1 < P_2$, (4) $B < S_2$.
Da genau ein Belgier in der Spitzengruppe fuhr, folgt aus (2) und (4)
(7) $D_1 < D_2 < B < S_2$.
Da genau zwei sowjetische Fahrer in der Spitzengruppe und nach (5) unmittelbar hintereinander fuhren, folgt daraus sowie aus (3) und (7)
(8) $D_1 < D_2 < B < S_1 < S_2 < P_1 < P_2$.
Aus (6) und (8) folgt
(9) $D_1 < D_2 < B < S_1 < S_2 < P_1 < P_2 < D_3$.
Damit sind bereits 8 Fahrer erfasst, also ist (9) die einzige Möglichkeit für die gesuchte Reihenfolge.

Aufgabe 110732:
In einer Klasse mit 28 Schülern beteiligen sich alle Schüler am außerunterrichtlichen Sport, und zwar jeder an mindestens einer der folgenden vier Sportarten: Fußball, Leichtathletik, Schwimmen und Turnen, in jeder dieser Sportarten mindestens 1 Schüler. Kein Schüler beteiligt sich an einer Sportart, die hier nicht aufgezählt ist.
Bekannt ist von den Schülern dieser Klasse:

(1) Jeder Schüler betreibt höchstens zwei Sportarten.
(2) Genau 18 Schüler beteiligen sich an genau einer Sportart.
(3) Von den Schülern, die Leichtathletik betreiben, nimmt genau die Hälfte auch noch am Turnen teil.
(4) Jeder Schwimmer betreibt zwei Sportarten, wobei alle anderen Sportarten in gleicher Anzahl vertreten sind.
(5) Die Anzahl der Schüler, die nur Turnen, ist gleich der Anzahl der Schüler, die nur Fußball spielen.
(6) Die Menge der Schüler, die sowohl turnen als auch Fußball spielen, ist leer.
(7) Die Anzahl der Schüler, die sowohl Turnen als auch Leichtathletik betreiben, ist gleich der Anzahl derjenigen unter den restlichen Schülern, die sich ebenfalls an zwei Sportarten beteiligen.

Ermittle die Anzahlen aller Schüler dieser Klasse, die sich an

a) Fußball b) Leichtathletik c) Schwimmen d) Turnen beteiligen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Zur Abkürzung bezeichnen wir die Schüler, die sich nur an einer Sportart beteiligen, mit F, L, S, T, und die Schüler, die sich an zwei Sportarten beteiligen, mit FL, FS, FT, LS, LT, ST, jeweils nach den Anfangsbuchstaben der Sportarten. Dann gilt:

(8) Wegen (2) betreiben genau 18 Schüler je genau eine Sportart.
(9) Wegen (1) und (8) und weil die Klasse 28 Schüler hat, betreiben genau 10 Schüler je genau zwei Sportarten.
(10) Wegen (9) und (7) gibt es genau 5 LT.
(11) Wegen (9), (10), (4) und da es laut Aufgabenstellung mindestens 1 Schwimmer gibt, gibt es genau 1 FS, 1 LS, 1 ST. Gäbe es nämlich je 2 davon, wäre wegen $5 + 6 = 11 > 10$ die mögliche Anzahl bereits überschritten.
(12) Wegen (9), (10), (11) und (6) gibt es genau 2 FL.
(13) Wegen (10) und (3) gibt es genau 10 Leichtathleten, also wegen (10), (11) und (12) genau 2 L.
(14) Wegen (8), (13), (4) und (5) gibt es genau 8 P und 8 T. Folglich gibt es in dieser Klasse genau 11 Fußballer (nämlich 8 F, 2 FL, 1 FS), 10 Leichtathleten (nämlich 2 L, 2 FL, 1 LS, 5 LT), 3 Schwimmer (nämlich 1 FS, 1 LS, 1 ST), 14 Turner (nämlich 8 T, 5 LT, 1 ST).

Aufgabe 120732:
Beweise, dass es unter 51 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, deren kleinste nicht kleiner als 1 und deren größte nicht größer als 100 ist, stets mindestens zwei Zahlen gibt, von denen die eine gleich dem Doppelten der anderen ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die kleinste der 51 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen sei j. Dann gilt $1 \leq j$, und die aufeinanderfolgenden Zahlen lauten (1) $j, j+1, j+2, ..., j+49, j+50$.
Nun gilt laut Aufgabe $j + 50 \leq 100$, also $1 \leq j \leq 50$. Folglich gehört $j + j = 2j$ auch zu den in (1) aufgezählten 51 aufeinanderfolgenden Zahlen.

Aufgabe 140731:
Fritz, Hans, Ulrich und Werner sind Schüler verschiedener Klassenstufen, und zwar der Klassen 5, 6, 7, 8. Sie gingen Pilze sammeln. Folgendes ist bekannt:

(1) Der Schüler der Klasse 5 und außer ihm noch Ulrich fanden je 8 Steinpilze; der Schüler der Klasse 7 fand keinen einzigen Steinpilz.
(2) Fritz, Hans und außer ihnen der Schüler der 6. Klasse fanden viele Rotkappen.
(3) Drei Schüler, nämlich der Schüler der Klasse 8, der Schüler der Klasse 7 und Hans, lachten über den vierten Schüler, nämlich Werner, der einen Fliegenpilz mitgebracht hatte.

Wer von den vier Schülern ist Schüler der Klasse 5, wer der 6, wer der 7 und wer der 8?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wegen (1) ist Ulrich nicht Schüler der Klasse 7, wegen (3) sind Hans und Werner nicht Schüler der Klasse 7. Also ist Fritz der Schüler der Klasse 7.
Von den restlichen Schülern gehören wegen (3) Hans und Werner nicht der Klasse 8 an. Also ist Ulrich Schüler der Klasse 8.
Von den nun noch verbleibenden zwei Schülern ist Hans wegen (2) nicht Schüler der Klasse 6. Also gehört Werner der Klasse 6 an, und folglich ist Hans der Schüler der Klasse 5.

Aufgabe 150731:
Die Fußballmannschaften der Klassen 7a, 7b, 8a und 8b belegten beim Schulsportfest die ersten vier Plätze.
Auf die Frage, welchen Platz jede der vier Mannschaften belegte, gaben die Pioniere Antje, Benno und Chris jeder zwei Antworten, von denen jeweils eine wahr und eine falsch ist.

Antje: (1) Die Mannschaft der Klasse 8a belegte den zweiten Platz.
(2) Die Mannschaft der Klasse 8b belegte den dritten Platz.

Benno: (1) Die Mannschaft der Klasse 8a belegte den ersten Platz.
(2) Die Mannschaft der Klasse 7b belegte den zweiten Platz.

Chris: (1) Die Mannschaft der Klasse 7a belegte den zweiten Platz.
(2) Die Mannschaft der Klasse 8b belegte den vierten Platz.

Untersuche, welche Verteilungen der vier Mannschaften 7a, 7b, 8a und 8b auf die vier Plätze den wahren Antworten der Pioniere entsprechen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, (1) wäre wahr. Dann hätte die Mannschaft der Klasse 8a den zweiten Platz belegt, also

wäre (3) falsch und somit (4) wahr. Das steht im Widerspruch zur Annahme. Deshalb ist (1) falsch und somit (2) wahr, d. h., die Mannschaft der Klasse 8b belegte den dritten Platz.

Daraus folgt, dass (6) falsch und somit (5) wahr ist. Den zweiten Platz belegte mithin die Mannschaft der Klasse 7a.

Daraus folgt, dass die Aussage (4) falsch und somit (3) wahr ist, d. h., den ersten Platz belegte die Mannschaft der Klasse 8a.
Für den vierten Platz verbleibt dann nur noch die Mannschaft der Klasse 7b. Daher kann nur die folgende Verteilung den Bedingungen der Aufgabe entsprechen:

Den ersten Platz belegte die Mannschaft der Klasse 8a, den zweiten die Mannschaft der Klasse 7a, den dritten die Mannschaft der Klasse 8b und den vierten die Mannschaft der Klasse 7b. Diese Verteilung entspricht in der Tat den Bedingungen; denn bei ihr sind die Aussagen (2), (3), (5) wahr und (1), (4), (6) falsch.

Aufgabe 170732:
Uli hat vier verschiedene, mit A, B, C und D bezeichnete Sorten Stahlkugeln. Dabei haben Kugeln gleicher Sorte auch stets gleiches Gewicht. Mit Hilfe einer Balkenwaage stellte er fest, dass zwei Kugeln der Sorte B genau so schwer sind wie eine Kugel der Sorte A. Weiter fand er, dass drei Kugeln der Sorte C ebenso viel wiegen wie eine Kugel der Sorte B und dass fünf Kugeln der Sorte D das gleiche Gewicht haben wie eine Kugel der Sorte C.

a) Wie viel Kugeln der Sorte D muss Uli in die (leere) eine Waagschale legen, wenn sie einer Kugel der Sorte A in der anderen Waagschale das Gleichgewicht halten sollen?
b) In der einen Waagschale liegen 20 Kugeln der Sorte D und 5 Kugeln der Sorte C. Wie viel Kugeln der Sorte B muss Uli in die andere (leere) Waagschale legen, um Gleichgewicht zu erhalten?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Das Gewicht einer Kugel der Sorte A ist gleich dem doppelten Gewicht einer Kugel der Sorte B. Eine Kugel der Sorte B hat das dreifache Gewicht einer Kugel der Sorte C, folglich hat eine Kugel der Sorte A das gleiche Gewicht wie 6 Kugeln der Sorte C.
Eine Kugel der Sorte C hat das fünffache Gewicht einer Kugel der Sorte D; das Gewicht von 6 Kugeln der Sorte C ist daher gleich dem Gewicht von 30 Kugeln der Sorte D. Daraus ergibt sich, dass Uli 30 Kugeln der Sorte D in die eine Waagschale legen muss, wenn Gleichgewicht erreicht werden soll.

b) Das Gewicht von 5 Kugeln der Sorte D ist gleich dem Gewicht einer Kugel der Sorte C, daher haben 20 Kugeln der Sorte D das gleiche Gewicht wie 4 Kugeln der Sorte C. Das Gewicht von 20 Kugeln der Sorte D und 5 Kugeln der Sorte C ist mithin gleich dem Gewicht von 9 Kugeln der Sorte C.
Da drei Kugeln der Sorte C soviel wiegen wie eine Kugel der Sorte B, wiegen folglich 9 Kugeln der Sorte C soviel wie 3 Kugeln der Sorte B. Uli muss also 3 Kugeln der Sorte B in die andere Waagschale legen, wenn sie 20 Kugeln der Sorte D und 5 Kugeln der Sorte C das Gleichgewicht halten sollen.

Aufgabe 180731:
In einem Spezialistenlager für Junge Mathematiker führt Dirk eine Knobelaufgabe vor. Er stellt auf einen Tisch in eine Reihe - für die Zuschauer von links nach rechts - fünf Gefäße auf: eine Flasche, einen Krug, eine Tasse, einen Becher und eine Kanne. Sie sind, nicht notwendig in dieser Reihenfolge, mit je einem der Getränke Tee, Kaffee, Milch, Limonade und Most gefüllt. Den Zuschauern ist nicht bekannt, welches Gefäß welche Flüssigkeit enthält.

Dirk sagt:

„Stelle ich die Kanne - wobei ich die anderen Gefäße unverändert stehen lasse - so zwischen zwei der anderen Gefäße, dass unmittelbar links neben ihr das Gefäß mit Tee und unmittelbar rechts neben ihr das Gefäß mit Milch steht, so stehen Milchgefäß und Limonadengefäß unmittelbar nebeneinander, und außerdem steht dann das Gefäß mit Kaffee als mittleres in der Reihe der fünf Gefäße.

Findet nun heraus, womit die einzelnen Gefäße gefüllt sind!“

Untersuche, ob allein aus diesen Angaben ermittelt werden kann, welche Getränke sich in jedem der fünf Gefäße befinden.
Gib alle mit Dirks Angaben übereinstimmenden Möglichkeiten einer Verteilung der Getränke auf die Gefäße an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, es gibt eine Dirks Angaben entsprechende Verteilung der Getränke auf die Gefäße. Dann gibt es - da die Kanne nach dem Umstellen zwischen zwei anderen Gefäßen steht, wobei das Teegefäß jeweils unmittelbar links, das Milchgefäß unmittelbar rechts neben der Kanne steht, - genau die nachfolgend angegebenen drei Möglichkeiten für die Reihenfolge der Gefäße:

(1)	Flasche	Tee	Kanne	Krug	Milch	Tasse	Becher
(2)	Flasche	Krug	Tee	Kanne	Tasse	Milch	Becher
(3)	Flasche	Krug	Tasse	Tee	Kanne	Becher	Milch

Die Möglichkeiten (1) und (3) scheiden aus, da sie der Angabe widersprechen, dass sich in dem in der Mitte stehenden Gefäß Kaffee befindet.
Somit verbleibt nur die Möglichkeit (2), und dabei ist nach der eben genannten Angabe die Kanne mit Kaffee gefüllt. Hiernach und da außerdem das Limonadengefäß unmittelbar neben dem Milchgefäß steht, verbleibt als einzig mögliche mit Dirks Angaben übereinstimmende Verteilung die folgende:

Die Flasche enthält Most, der Krug Tee, die Kanne Kaffee, die Tasse Milch und der Becher Limonade.
Für diese Verteilung treffen alle von Dirk gemachten Angaben zu. Sie ist daher die einzige Verteilung der gesuchten Art.

Aufgabe 250735:
In einer Arbeitsgemeinschaft stellt Rainer seinen Klassenkameraden folgendermaßen eine Aufgabe:
Er nimmt drei Karten, auf denen zweiziffrige Zahlen stehen, so in die Hand, dass niemand anders als er die Zahlen sehen kann und dass sich die dreimal zwei Ziffern nebeneinander gehalten als eine sechsstellige Zahl lesen lassen.
Dies macht er (mit denselben Karten) mehrere Male, bis er jede mögliche Reihenfolge der drei Karten genau einmal berücksichtigt hat. Die abgelesene sechsstellige Zahl notiert er jedesmal (ebenfalls so, dass nur er seine Notizen sehen kann). Anschließend bildet er die Summe aller notierten Zahlen. Nun teilt er den Klassenkameraden mit:

„Auf einer Karte steht die Zahl 15, auf einer die Zahl 23. Auf der dritten Karte steht eine zweistellige Zahl, die ich nicht verrate. Die Summe aller notierten Zahlen beträgt 1373736.“

Untersuche, ob es genau eine zweistellige Zahl gibt, die unter den genannten Bedingungen nach Rainers Aussagen auf der dritten Karte stehen kann! Wenn das der Fall ist, so ermittle diese zweistellige Zahl!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Bezeichnet man die gesuchte zweistellige Zahl zunächst mit einem Kästchen $\square$, so gibt es genau die folgenden Möglichkeiten für die Reihenfolge der drei Karten:

$$\begin{array}{ccc} 15 & 23 & \square \\ 15 & \square & 23 \\ 23 & 15 & \square \\ 23 & \square & 15 \\ \square & 15 & 23 \\ \square & 23 & 15 \end{array}$$

Ohne Berücksichtigung aller Ziffern, die in den Kästchen stehen, ergibt sich durch Addition

$$76 \quad 76 \quad 76$$

Nach Rainers Angabe ergibt sich mit Berücksichtigung der Ziffern in den Kästchen als Summe die Zahl

$$137 \quad 37 \quad 76$$

Daher sind Rainers Aussagen genau dann erfüllt, wenn eine Addition der folgenden Art

$$\begin{array}{cccc} & \square & \square & \square \\ + & \square & \square & \square \end{array}$$

auf ein Ergebnis führt, das seinerseits zu 767676 addiert die Summe 1373736 ergibt. Wegen $1373736 - 767676 = 606060$ gilt dies genau dann, wenn die Addition das Ergebnis 606060 hat. Das trifft zu, wenn die Addition $\square + \square$ auf die Summe 60 führt, also genau dann, wenn auf der dritten Karte die Zahl 30 steht.

2. Lösungsweg:
Sind a und b (in dieser Reihenfolge) die gesuchten zwei Ziffern, so addiert Rainer die Zahlen

$$\begin{array}{rcl} 152300 + 10a + b & ; & 150023 + 100 \cdot (10a + b) \\ 231500 + 10a + b & ; & 230015 + 100 \cdot (10a + b) \\ 1523 + 10000 \cdot (10a + b) & ; & 2315 + 10000 \cdot (10a + b) \end{array}$$

Ihre Summe ist $767676 + 20202 \cdot (10a + b)$. Daher sind Rainers Aussagen genau dann erfüllt, wenn $767676 + 20202 \cdot (10a + b) = 1373736$ gilt. Dies ist der Reihe nach äquivalent mit $20202 \cdot (10a + b) = 606060$, $(10a + b) = 30$.
Also treffen Rainers Aussagen genau dann zu, wenn auf der dritten Karte die Zahl 30 steht.

Aufgabe 270731:
Vier Mannschaften, A, B, C und D, trugen ein Fußballturnier aus. Jede Mannschaft spielte genau einmal gegen jede andere Mannschaft. Jedes gewonnene Spiel wurde mit 2 Punkten für die Siegermannschaft und mit 0 Punkten für die Verlierermannschaft gewertet, jedes unentschiedene Spiel für beide Mannschaften mit je 1 Punkt. Weiterhin ist folgendes bekannt:

(1) Keine Mannschaft blieb ohne Punkte.
(2) Mannschaft A konnte ihren Turniersieg aus dem vorigen Jahr nicht wiederholen, erreichte aber eine höhere Gesamtpunktzahl als Mannschaft B.
(3) Mannschaft C gewann kein Spiel, erreichte jedoch eine geradzahlige Gesamtpunktzahl.
(4) Mannschaft D spielte in keinem ihrer Spiele unentschieden und gewann gegen B sowie gegen den Turniersieger des vorigen Jahres.

Untersuche, ob aus diesen Angaben eindeutig folgt, welche Punktzahlen jedes Spiel des Turniers den einzelnen Mannschaften erbrachte und welche Gesamtpunktzahlen sie erreichten! Ist das der Fall, so trage die Punktzahlen in die folgende Tabelle ein!

Mannschaft	Erreichte Punktzahl gegen				Gesamtpunktzahl
	A	B	C	D	
A					
B					
C					
D					

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Aus den Angaben folgt:
Nach (4) gewann D gegen B und gegen den Vorjahressieger, d. h. nach (2) gegen A. Da ferner C nach (3) nicht gegen D gewann und nach (4) auch nicht gegen D unentschieden spielte, folgt:
(5) D gewann alle Spiele.
Da C hiernach aus dem Spiel gegen D keinen Punkt erhielt, folgt aus (3), dass die Summe der Punktzahlen, die C aus seinen Spielen gegen A und B erreichte, gerade ist. Ferner sind diese beiden Punktzahlen nach (3) kleiner als 2. Da C aber nach (1) nicht ohne Punkte blieb, verbleibt als einzige Möglichkeit:
(6) C spielte gegen A und B unentschieden.
Nach (5) und (6) erreichte A in den Spielen gegen C und D ebenso viele Punkte wie B gegen C und D. Also kann die nach (2) höhere Gesamtpunktzahl für A als für B nur dadurch entstanden sein, dass gilt:
(7) A gewann gegen B.
Damit ist bewiesen, dass aus den Angaben eindeutig die nachstehenden Punktzahlen folgen:

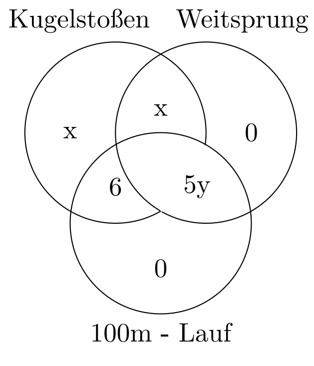
Mannschaft	Erreichte Punktzahl gegen				Gesamtpunktzahl
	A	B	C	D	
A	–	2	1	0	3
B	0	–	1	0	1
C	1	1	–	0	2
D	2	2	2	–	0

Aufgabe 290731:
28 Schüler einer Klasse beteiligen sich an einem Sportfest; dabei nahm jeder dieser Schüler an mindestens einer der Disziplinen Kugelstoßen, Weitsprung und 100 m-Lauf teil. Außerdem ist über die Schüler dieser Klasse bekannt:

(1) Die Anzahl derjenigen, die sowohl am Kugelstoßen als auch am Weitsprung, aber nicht am 100 m-Lauf teilnahmen, ist größer als 1, und sie ist gleich der Anzahl derer, die sich nur am Kugelstoßen beteiligten.
(2) Mindestens einer der Schüler nahm an allen drei Disziplinen teil; fünfmal so groß wie die Anzahl dieser Schüler ist insgesamt die Anzahl derjenigen, die sowohl beim Weitsprung als auch beim 100 m-Lauf starteten.
(3) Genau 6 der Schüler starteten in den Disziplinen Kugelstoßen und 100 m-Lauf und nahmen nicht am Weitsprung teil.
(4) Kein Teilnehmer trat nur im Weitsprung oder nur im 100 m-Lauf an.

Untersuche, ob aus diesen Angaben für jede der drei Disziplinen die Anzahl derjenigen in diese Klasse gehenden Schüler eindeutig ermittelt werden kann, die an der betreffenden Disziplin teilnahmen! Ist das der Fall, dann gib diese drei Anzahlen an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



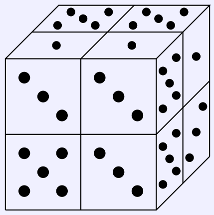
Die Anzahl der Schüler, die nur am Kugelstoßen beteiligt waren, sei x; nach (1) gilt $x \geq 2$. (5)
Die Anzahl der Schüler, die an allen drei Disziplinen teilnahmen, sei y, nach (2) gilt $y \geq 1$. (6)
Nach (1) ist x auch die Anzahl der Schüler, die sowohl am Kugelstoßen als auch am Weitsprung, aber nicht am 100 m-Lauf teilnahmen. Nach (2) ist $5y$ die Anzahl der Schüler, die sowohl beim Weitsprung als auch beim 100 m-Lauf starteten.
Hiernach und nach (3), (4) ist $2x + 5y + 6$ die Anzahl aller aus der Klasse am Sportfest teilnehmenden Schüler (siehe auch das Mengendiagramm); d. h., es gilt

$$2x + 5y + 6 = 28 \qquad (7)$$

Aus (5) und (7) folgt $5y \leq 28 - 4 - 6$, d. h. $y \leq 3$. (8)
Nach (7) ist y eine gerade Zahl; hieraus und aus (6), (8) folgt $y = 2$. Damit ergibt sich aus (7) $x = 6$, und es ist gezeigt, dass aus den Angaben eindeutig die nachstehenden Anzahlen ermittelt werden können:

Am Kugelstoßen beteiligten sich genau $2x + y + 6 = 20$ Schüler, am Weitsprung beteiligten sich genau $x + 0 + 5y = 16$ Schüler, am 100 m-Lauf beteiligten sich genau $6 + 5y + 0 = 16$ Schüler.

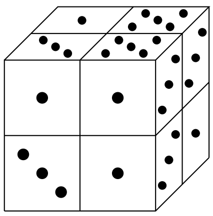
Aufgabe 290736:



Ein Würfel wurde aus acht gleichgroßen Spielwürfeln zusammengesetzt.
Jeder Spielwürfel hat auf seinen sechs Seitenflächen die Augenzahlen 1 bis 6, jede genau auf einer Seitenfläche; dabei haben die drei Seitenflächen mit den geraden Augenzahlen 2, 4, 6 eine Ecke gemeinsam, und dasselbe gilt für die drei Seitenflächen mit den ungeraden Seitenzahlen 1, 3, 5.
Von dem zusammengesetzten Würfel sind drei Seitenflächen sichtbar, wie die Abbildung zeigt. Alle sichtbaren Augenzahlen sind ungerade, ihre Summe beträgt 40.

(a) Zeichne von einem Würfel, der ebenso aus acht Spielwürfeln zusammengesetzt ist, bei dem aber andere sichtbare Augenzahlen vorkommen, ein Schrägbild (Kantenlänge eines Spielwürfels 2 cm, $\alpha = 45°$, $q = 0{,}5$)! Trage sichtbare Augenzahlen so ein, dass alle sichtbaren Augenzahlen ungerade sind und ihre Summe 30 beträgt!
(b) Beweise, dass in jeder Eintragung, die die in a) gestellten Forderungen erfüllt, mindestens vier der sichtbaren Augenzahlen 1 lauten müssen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



a) Schrägbild und ein Beispiel für eine Eintragung der geforderten Art: siehe Abbildung.

b) Wenn in einer Eintragung alle zwölf sichtbaren Augenzahlen ungerade sind, dann sind auf demjenigen Spielwürfel, von dem drei Augenzahlen sichtbar sind, dies die Augenzahlen 1, 3 und 5.
Haben ferner von den übrigen sichtbaren Augenzahlen höchstens zwei den Wert 1, so haben mindestens sieben von ihnen einen Wert größer oder gleich 3; also beträgt die Summe der sichtbaren Augenzahlen dann mindestens $1 + 3 + 5 + 2 \cdot 1 + 7 \cdot 3 = 32$.

Wenn in einer Eintragung alle sichtbaren Augenzahlen ungerade sind und die Summe 30 haben, so müssen folglich außer der 1 auf dem Spielwürfel mit drei sichtbaren Augenzahlen noch mindestens drei weitere sichtbare Augenzahlen 1 lauten.

Aufgabe 300732:
200 Schüler seien in Form eines Rechtecks, nämlich in Längsreihen zu je 20 und in Querreihen zu je 10 Schülern, aufgestellt.
Nun werde aus jeder Querreihe ein möglichst kleiner Schüler herausgerufen. Unter den so ermittelten 20 Schülern werde ein möglichst großer mit A bezeichnet. Die 20 Schüler stellen sich dann wieder auf ihre ursprünglichen Plätze.
Sodann werde aus jeder Längsreihe ein möglichst großer Schüler herausgerufen und unter den so ermittelten 10 Schülern ein möglichst kleiner mit B bezeichnet. Dabei stelle sich heraus, dass B eine andere Größe als A hat.
Untersuche, welcher von den beiden Schülern A und B unter diesen Voraussetzungen der größere sein muss!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es gibt genau die folgenden drei Möglichkeiten:

(1) A und B stehen in derselben Längsreihe.
In diesem Fall ist B größer als A, da B in der genannten Längsreihe möglichst groß und von anderer Größe als A ist.

(2) A und B stehen in derselben Querreihe.
Auch in diesem Fall ist B größer als A, da A in der genannten Querreihe möglichst klein und von anderer Größe als B ist.

(3) A und B stehen weder in derselben Längsreihe noch in derselben Querreihe.
Es sei dann C derjenige Schüler, der in derselben Querreihe wie A und in derselben Längsreihe wie B steht. Für diesen Schüler gilt: B ist größer als C oder ebenso groß wie C, und C ist größer als A oder ebenso groß wie A. Da B nicht ebenso groß wie A ist, folgt wieder: B ist größer als A.
Somit ergibt sich in jedem Fall: Der größere von den beiden Schülern A und B muss B sein.

Aufgabe 330735:
Die Klassen 7a, 7b, 7c trugen ein Fußballturnier aus. Jede Klasse spielte genau einmal gegen jede andere Klasse. Am Ende ergab sich folgender Tabellenstand:

Klasse	Torverhältnis	Punktverhältnis
7b	3:2	3:1
7a	3:1	2:2
7c	2:5	1:3

Untersuche, ob durch diese Angaben eindeutig für jedes Spiel bestimmt ist, wie viele Tore jede Mannschaft in dem betreffenden Spiel erzielt hat!
Wenn das der Fall ist, so gib alle diese Ergebnisse an!

Hinweis: Wie üblich bedeutet das Torverhältnis $a : b$ für eine Mannschaft, dass sie in allen Spielen zusammen a Tore erzielt hat und b Tore hinnehmen musste.
Ferner erhält die Mannschaft für jedes gewonnene Spiel 2 Pluspunkte, für jedes verlorene Spiel 2 Minuspunkte und für jedes unentschiedene Spiel 1 Plus- und 1 Minuspunkt. Diese Punkte werden addiert, und dann bedeutet das Punktverhältnis $c : d$, dass die Mannschaft die Summe c der Pluspunkte und die Summe d der Minuspunkte erhalten hat.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Klasse 7a hat wegen des Punktverhältnisses 2 : 2 entweder beide oder keines ihrer zwei Spiele unentschieden gespielt. Da ihr Torverhältnis 3 : 1 aber zwei unterschiedliche Zahlen aufweist, kann sie nicht beide Spiele unentschieden gespielt haben. Daher folgt:
Klasse 7a hat kein Spiel unentschieden gespielt. (1)

Da die Klassen 7b und 7c in ihren Punktverhältnissen ungerade Zahlen haben, aber gegen 7a nach (1) nicht unentschieden gespielt haben, folgt:
Das Spiel 7b gegen 7c ging unentschieden aus. (2)
Hätte dieses Spiel 0:0 oder 1:1 geendet, so müsste die Klasse 7b ihr Torverhältnis 3:2 so erreicht haben, dass ihr Spiel gegen 7a das Ergebnis 3:2 bzw. 2:1 gehabt hätte. Das ist aber nicht möglich, denn die Klasse 7a hat, wie aus ihrem Torverhältnis 3:1 ersichtlich ist, insgesamt nur ein Gegentor hinnehmen müssen.

Daher und weil Klasse 7c wegen des Torverhältnisses 2:5 insgesamt nur 2 Tore erzielt hat, verbleibt für (2) nur die Möglichkeit:
Das Spiel 7b gegen 7c endete 2:2. (3)
Damit folgt aus den Torverhältnissen von 7b und 7c weiter:
Das Spiel 7b gegen 7a endete 1:0, (4)

Das Spiel 7a gegen 7c endete 3:0. (5)
Durch die Angaben sind also für jedes Spiel die Anzahlen der erreichten Tore eindeutig bestimmt; sie lauten wie in (3), (4), (5).

III.III Abzählaufgaben

I Runde 1

Aufgabe 050713:
Der Fahrer eines in der DDR zugelassenen Pkw beging nach einem Verkehrsunfall Fahrerflucht. Nach der Befragung einiger Zeugen erfuhr man über das polizeiliche Kennzeichen des Pkw folgendes:
a) Die beiden Buchstaben des Kennzeichens lauteten AB oder AD.
b) Die beiden vorderen Ziffern waren gleich und außerdem anders als die beiden letzten Ziffern.
c) Die aus den beiden letzten Ziffern gebildete Zahl war 69 oder 96.
Welches ist die größtmögliche Anzahl von Pkw, die diesen Bedingungen genügen können?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Für die beiden vorderen Ziffern gibt es unter den Bedingungen der Aufgabe 8 Möglichkeiten (alle außer 6 und 9). Jedes dieser 8 Ziffernpaare kann mit einer der 4 Kombinationen AB 69, AB 96, AD 69, AD 96 gekoppelt sein. Daher ist die größtmögliche Anzahl der den Bedingungen der Aufgabe genügenden PKW $4 \cdot 8 = 32$.

Aufgabe 050714:
Rolf stellt seinem Freund folgende Aufgabe:
Auf einem Schachturnier spielte jeder genau einmal gegen jeden. Insgesamt wurden 28 Partien gespielt.
Wie viel Teilnehmer gab es bei diesem Turnier?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Weil jeder genau einmal gegen jeden spielt, gilt, wenn n die Anzahl der Teilnehmer ist: $n(n - 1)\ 2 = 28$, also $n(n - 1) = 56$. Diese Gleichung wird von der natürlichen Zahl 8 erfüllt. Da für beliebige natürliche Zahlen n zu größeren Werten n stets größere Werte von $n(n - 1)$ gehören, gibt es außer 8 keine natürliche Zahl, die diese Gleichung befriedigt. Also nahmen 8 Personen am Schachturnier teil.

Aufgabe 150714:
In der Ebene ε seien 50 verschiedene Punkte so gelegen, dass keine Gerade existiert, die drei dieser 50 Punkte enthält. Jeder dieser 50 Punkte soll nun mit jedem anderen durch eine Strecke verbunden werden.
a) Ermittle die Anzahl der Verbindungsstrecken!
b) Angenommen, die 50 Punkte seien die Eckpunkte eines konvexen 50-Ecks. Ermittle die Anzahl der Diagonalen des 50-Ecks!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Zur Wahl eines ersten Endpunktes einer der Verbindungsstrecken hat man genau 50 Möglichkeiten. In jeder von dieser, hat man dann genau 49 Möglichkeiten, einen der übrigen Endpunkte als zweiten Endpunkt einer der Verbindungsstrecken zu wählen. Durch diese insgesamt $50 \cdot 49 = 2450$ Wahlmöglichkeiten erhält man alle gesuchten Verbindungsstrecken, und zwar (da nach Voraussetzung keine dieser Strecken außer den Endpunkten einen anderen gegebenen Punkt enthält) jede Strecke genau doppelt (da jeder der Endpunkte einmal als erster und einmal als zweiter Endpunkt auftritt).
Daher ist $2450 : 2 = 1225$ die Anzahl aller gesuchten Verbindungsstrecken.

b) Von diesen 1225 Verbindungsstrecken bilden genau 50 die Seiten des konvexen 50-Ecks, die übrigen sind die gesuchten Diagonalen. Ihre Anzahl ist also $1225 - 50 = 1175$.

Aufgabe 200711:
Anlässlich der Siegerehrung eines Mathematikwettbewerbs beglückwünschte jeder Preisträger jeden anderen mit einem Händedruck. Insgesamt wurden dabei 91 Händedrücke ausgeführt, und zwar bei jedem der Glückwünsche genau einer.
Ermittle aus dieser Angabe die Anzahl der Preisträger des Wettbewerbs!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es sei n die Anzahl der Preisträger. Zählt man für jeden Preisträger die Händedrücke, die er mit den anderen Preisträgern ausführte, und addiert die erhaltenen Zahlen, so ergibt sich die Summe von n Summanden $n - 1$, also die Zahl $n \cdot (n - 1)$.
In dieser Zahl ist jeder der insgesamt auftretenden Händedrücke genau zweimal erfasst (nämlich in den Abzählungen für jeden der beiden Partner des betreffenden Händedrucks). Folglich ist die Anzahl aller Händedrücke gleich $\frac{1}{2}n(n - 1)$.
Daher gilt $\frac{1}{2}n(n - 1) = 91$, also $(n - 1)n = 182$.

Erste Fortsetzungsmöglichkeit: Wegen der Primzerlegung $182 = 2 \cdot 7 \cdot 13$ hat 182 in natürlichen Zahlen bis auf die Reihenfolge nur die Faktorzerlegungen $182 = 1 \cdot 182 = 2 \cdot 91 = 7 \cdot 26 = 13 \cdot 14$. Davon ist nur $13 \cdot 14$ eine Zerlegung in zwei Faktoren der Form $n - 1$ und n. Also ist die gesuchte Anzahl $n = 14$.

Zweite Fortsetzungsmöglichkeit: Wäre $n < 14$, so wäre $(n - 1)n < 13 \cdot 14 = 182$; wäre $n > 14$, so wäre $(n - 1)n > 13 \cdot 14 = 182$. Also verbleibt nur die Möglichkeit $n = 14$.

Aufgabe 240713:
In einem Ferienlager wird ein Tischtennisturnier geplant, das folgendermaßen ablaufen soll:

Die 36 Teilnehmer tragen zunächst Vorrundenspiele in sechs Gruppen zu je sechs Spielern aus, und zwar spielt von solchen sechs Spielern jeder gegen jeden genau einmal. Die jeweils beiden Erstplazierten einer jeden Gruppe gelangen in die Zwischenrunde. Diese 12 Teilnehmer der Zwischenrunde werden neu in zwei Gruppen zu ja sechs Spielern eingeteilt, und dann spielt in der Zwischenrunde wieder von solchen sechs Spielern jeder gegen jeden.

Die jeweils beiden Erstplazierten jeder dieser zwei Gruppen gelangen in die Endrunde. Diese vier Teilnehmer der Endrunde ermitteln durch Spiele jeder gegen jeden die Medaillengewinner.

Das Turnier soll um 8.30 Uhr beginnen. Zwischen Vor- und Zwischenrunde soll ein Pause von einer Stunde eingeplant werden; nach Abschluss der Zwischenrunde wird nochmals eine Pause von 15 Minuten eingeplant, und zwischen dem Abschluss der Endrunde und der Siegerehrung ist wiederum eine Pause von 15 Minuten vorgesehen.

Wann kann man unter diesen Bedingungen die Siegerehrung frühestens ansetzen, wenn für jedes Spiel (einschließlich der notwendigen Spielerwechsel) 15 Minuten geplant werden und wenn genau sechs Tischtennisplatten zur Verfügung stehen?
Zeige durch eine Aufstellung der Spiele, die jeweils gleichzeitig stattfinden sollen, dass der von dir angegebene Zeitpunkt der Siegerehrung eingehalten werden kann.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Vorrunde:

In jeder der sechs Gruppen sind $6 \cdot \frac{5}{2}$ Spiele, d.s. 15 Spiele, auszutragen. Da sechs Platten vorhanden sind, steht für jede Gruppe stets eine Platte zur Verfügung, an der sie ihre 15 Spiele austragen kann (und da hierbei auch alle sechs Platten ständig belegt sind, ist eine weitere Verkürzung der Spielzeit durch gleichzeitiges Austragen von noch mehr Spielen nicht möglich). Also braucht man für die Vorrunde 15 Viertelstunden, an die sich eine Pause von 4 Viertelstunden anschließt.

Zwischenrunde:
Wieder sind in jeder der beiden Gruppen 15 Spiele auszutragen. Da man jeder Gruppe drei Platten zur Verfügung stellen kann, sind wegen $15 : 3 = 5$ mindestens 5 Viertelstunden hierfür erforderlich.
Sie sind auch ausreichend; denn man kann es so einrichten, dass stets drei der 15 Spiele gleichzeitig ausgetragen werden, z. B. für sechs Spieler A, B, C, D, E, F durch folgende Verteilung:

erste Viertelstunde: (A,B), (C,D), (E,F), zweite Viertelstunde: (A,C), (B,E), (D,F),
dritte Viertelstunde: (A,D), (B,F), $(C.E)$, vierte Viertelstunde: (A,E), (B,D), (C,F),
fünfte Viertelstunde: (A,F), (B,C), (D,E).

(Wieder ist eine weitere Verkürzung nicht möglich, da alle Platten ständig belegt sind.)
Nach der somit ermittelten Spielzeit von 5 Viertelstunden schließt sich eine Pause von 1 Viertelstunde an.

Endrunde:
Diesmal sind $4 \cdot \frac{3}{2}$ Spiele, d.s. sechs Spiele, auszutragen. Es können gleichzeitig stets nur zwei Spiele ausgetragen werden, da insgesamt nur vier Spieler in der Endrunde sind. Also sind wegen $6 : 2 = 3$ mindestens 3 Viertelstunden erforderlich.
Sie sind auch ausreichend; denn man kann es so einrichten, dass stets zwei Spiele gleichzeitig stattfinden, z. B. für vier Spieler A, B, C, D durch folgende Verteilung:

erste Viertelstunde: (A,B), (C,D), zweite Viertelstunde: (A,C), (B,D),
dritte Viertelstunde: (A,D), (B,C).

Zu den so ermittelten 3 Viertelstunden Spielzeit kommt noch eine Viertelstunde Pause hinzu. Damit sind insgesamt $15 + 4 + 5 + 1 + 3 + 1 = 29$ Viertelstunden bis zur Siegerehrung vorzusehen; diese ist hiernach um 15.45 Uhr anzusetzen.

Aufgabe 260712:
In der Materialausgabe eines Betriebes sind durch ein Missgeschick die Schlüssel von zwölf Vorhängeschlössern durcheinandergekommen.
Da zu jedem Vorhängeschloss von den insgesamt zwölf Schlüsseln nur einer passt und zu jedem Schlüssel nur eines der Vorhängeschlösser, die sich äußerlich nicht voneinander unterscheiden, muss herausgefunden worden, welcher Schlüssel zu welchem Schloss gehört.

Lehrling Bernd, der mit dieser Aufgabe betreut wurde, dachte: „Jetzt muss ich zwölf Schlüssel an zwölf Schlössern ausprobieren, muss also, wenn ich Pech habe, $12 \cdot 12 = 144$ Proben ausführen.“
Sein Freund Uwe meinte jedoch, dass man mit viel weniger Proben auskommt.

Ermittle die kleinste Anzahl von Proben, mit der man mit Sicherheit (d. h. auch noch im ungünstigsten Fall) zu jedem Vorhängeschloss den passenden Schlüssel findet!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Von den insgesamt zwölf Vorhängeschlössern passt zu jedem Schlüssel genau eines. Nehmen wir einen der zwölf Schlüssel und probieren, zu welchem von den zwölf Vorhängeschlössern er passt, so kann es im ungünstigsten Fall vorkommen, dass bei elfmaligen Probieren noch nicht das Schloss probiert wurde, zu

dem der Schlüssel passt.

Da der Schlüssel aber zu einem der Schlösser gehört, muss er zu den Schloss passen, das beim Probieren noch nicht berücksichtigt wurde, und er kann ohne eine weitere Probe zu diesem Schloss gelegt werden. Bei zwölf Vorhängeschlössern finden wir also mit Sicherheit nach höchstens elfmaligem Probieren den Schlüssel, der zu einem der Schlösser passt.

Ein weniger als elfmaliges Probieren dieses Schlüssels kann aber in ungünstigen Fällen die Frage nach dem passenden Schloss noch offen lassen. Für die noch verbleibenden elf Vorhängeschlösser und ihre Schlüssel gelten die entsprechenden Überlegungen, so dass wir nach höchstens zehnmaligem weiteren Probieren mit Sicherheit den Schlüssel zu einem dieser elf Vorhängeschlösser angeben können, während weniger als zehn Proben in ungünstigen Fällen nicht ausreichen.

Setzt man diese Überlegungen analog fort, dann folgt, dass nach höchstens $10+9+8+7+6+5+4+3+2+1 = 66$.
Versuchen zu jedem der zwölf Vorhängeschlösser der passende Schlüssel gefunden werden kann und dass dies auch die gesuchte kleinste Anzahl von Proben ist.

Aufgabe 270712:
In einer Kiste befinden sich genau 100 Kugeln, und zwar 30 rote, 30 blaue, 30 grüne sowie 10 Kugeln, von denen nur bekannt ist, dass sie schwarz oder weiß sind und dass mindestens eine schwarze Kugel dabei ist.
Durch das Tastgefühl lassen sich verschiedenfarbige Kugeln nicht voneinander unterscheiden.
Untersuche, ob es trotzdem möglich ist, mit geschlossenen Augen eine jeweils geeignete Anzahl von Kugeln, aber nicht alle, so herauszugreifen, dass man mit Sicherheit vorhersagen kann:

a) Unter den herausgegriffenen Kugeln befinden sich mindestens 12 Kugeln von gleicher Farbe.
b) Unter den herausgegriffenen Kugeln befindet sich mindestens eine schwarze Kugel.
c) Unter den herausgegriffenen Kugeln befinden sich mindestens 5 weiße Kugeln.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Ein solches Herausgreifen ist möglich.
Die größtmögliche Anzahl herausgegriffener Kugeln, unter denen sich keine 12 von gleicher Farbe befinden, ergibt sich nämlich, indem man 11 rote, 11 blaue, 11 grüne und alle 10 schwarzen oder weißen Kugeln herausgreift, das sind 43 Kugeln. Greift man also (mindestens) 44 Kugeln heraus, so kann man folglich mit Sicherheit vorhersagen, dass sich darunter mindestens 12 von gleicher Farbe befinden müssen.

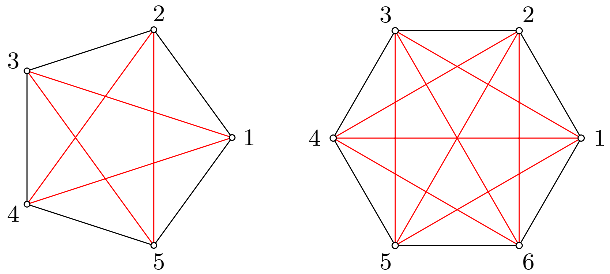
b) Ein solches Herausgreifen ist nicht möglich.
Denn greift man, wie verlangt, nicht alle Kugeln heraus, so ist (unter den angegebenen Voraussetzungen) auch der Fall möglich, dass sich von Anfang an überhaupt nur eine schwarze Kugel in der Kiste befand und dass (mindestens) gerade diese Kugel nicht mit herausgegriffen wird.

c) Auch ein solches Herausgreifen ist nicht möglich.
Denn es ist (unter den angegebenen Voraussetzungen) auch der Fall möglich, dass sich von Anfang an weniger als 5 weiße Kugeln in der Kiste befanden und folglich bei keinem Herausgreifen 5 weiße genommen werden.

Aufgabe 270714:
Bekanntlich hat jedes Viereck genau zwei Diagonalen.
a) Ermittle die Anzahl der Diagonalen eines Fünfecks und eines Sechsecks!
b) Finde eine Formel für die Anzahl der Diagonalen eines Vielecks in Abhängigkeit von der Eckenzahl n des Vielecks! Die Formel soll für alle natürlichen Zahlen $n \geq 4$ gelten. Begründe diese Formel!

c) Welchen Wert gibt diese Formel, wenn man sie für $n = 3$ anwendet? Lässt sich auch dieser Wert in eine geometrisch anschauliche Aussage fassen?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



a) Das Fünfeck hat genau fünf und das Sechseck genau neun Diagonalen, wie man z. B. der Abbildung entnehmen kann.

b) Um in einem n-Eck alle Diagonalen zu erfassen, kann man für jeden der n Eckpunkte die Verbindungsstrecke zu jedem anderen Eckpunkt außer den beiden benachbarten Eckpunkten betrachten. Damit hat man insgesamt $n \cdot (n-3)$mal eine Strecke betrachtet, und zwar jede Diagonale des n-Ecks genau 2mal. Bezeichnet man die Anzahl der Diagonalen mit x, so gilt demzufolge $x = \frac{1}{2}n \cdot (n-3)$.

c) Für $n = 3$ gibt diese Formel den Wert $x = 0$. Er lässt sich in die Aussage fassen, dass bei jedem Dreieck die Anzahl der Diagonalen gleich Null ist.

Aufgabe 280712:
Aus den Ziffern 1, 3, 4, 5, 7 und 9 sollen sechsstellige natürliche Zahlen gebildet werden, in denen jede dieser Ziffern genau einmal vorkommt.
a) Ermittle die Anzahl aller verschiedenen Zahlen, die auf diese Weise gebildet werden können.
b) Untersuche, welche von den auf diese Weise gebildeten Zahlen durch 18 teilbar sind!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Mit zwei Ziffern kann man genau zwei verschiedene zweistellige Zahlen bilden (z. B. 13 und 31). (1)
Nimmt man eine dritte Ziffer hinzu, so kann diese vor, zwischen oder hinter die beiden Ziffern der zweistelligen Zahl gesetzt werden; das sind somit drei Möglichkeiten. Aus (1) folgt demnach wegen $2 \cdot 3 = 6$, dass aus drei verschiedenen Ziffern genau sechs verschiedene dreistellige Zahlen gebildet werden können. (2)
Bildet man nun unter Hinzunahme einer vierten Ziffer vierstellige Zahlen, kann diese vierte Ziffer an erster, zweiter, dritter oder vierter Stelle stehen (vier Möglichkeiten), und aus (2) folgt wegen $6 \cdot 4 = 24$, dass auf diese Weise 24 vierstellige Zahlen gebildet werden können. (3)
Durch analoge Überlegungen erkennt man, dass es hinsichtlich der Stellung einer fünften Ziffer in einer vierstelligen Zahl genau fünf Möglichkeiten gibt und somit wegen (3) und $5 \cdot 24 = 120$ insgesamt 120 fünfstellige Zahlen gebildet werden können. (4)
Die Anzahl der sechsstelligen Zahlen ergibt sich analog aus (4) und wegen $6 \cdot 120 = 720$. Somit können aus den genannten Ziffern genau 720 verschiedene sechsstellige Zahlen gebildet werden.

b) Eine natürliche Zahl ist nur dann durch 18 teilbar, wenn sie durch 9 teilbar ist. Dies ist nur dann der Fall, wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist.
Alle 720 auf die geforderte Weise gebildeten Zahlen haben jedoch die Quersumme $1+3+4+5+7+9 = 29$, folglich ist keine dieser Zahlen durch 18 teilbar.

II Runde 2

Aufgabe 030723:
Ein Holzwürfel mit einer Kantenlänge von 30 cm soll in Würfel von 10 cm Kantenlänge zersägt werden.
a) Wie viel Schnitte muss man dabei ausführen? (Das Sägen im Paket soll nicht gestattet sein.)
b) Wie viel Würfel erhält man?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Man braucht 26 Schnitte $(2 + 6 + 18)$.
b) Man erhält 27 Würfel $(3 \cdot 3 \cdot 3)$.

Aufgabe 030725:
In einem Kasten befinden sich 70 Kugeln, nämlich 20 rote, 20 grüne, 20 gelbe, und der Rest ist schwarz oder weiß. Brigitte soll im Dunkeln aus diesem Kasten so viele Kugeln herausnehmen, dass unter ihnen mit Sicherheit mindestens 10 Kugeln die gleiche Farbe haben.
Wie viel Kugeln muss sie mindestens herausnehmen? Begründe deine Antwort!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Sie muss 38 Kugeln nehmen.
Im ungünstigsten Falle kann Brigitte zunächst die 10 schwarzen bzw. weißen Kugeln und von jeder Farbe 9 Kugeln, insgesamt also 37 Kugeln, herausnehmen. Nimmt sie jetzt noch eine weitere Kugel heraus, dann hat sie stets mindestens 10 Kugeln gleicher Farbe unter diesen 38 Kugeln.

Aufgabe 060723:
Jemand schreibt alle natürlichen Zahlen von 1 bis 5555 auf, jede genau einmal. Berechne die Anzahl aller dabei geschriebenen Ziffern 9!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Anzahl der Ziffern 9 beträgt an der Tausenderstelle 0, an der Hunderterstelle (von 1 bis 999, von 1000 bis 1999, von 2000 bis 2999, von 3000 bis 3999, von 4000 bis 4999 je 100mal die Ziffer 9)

$$5 \cdot 100 = 500$$

an der Zehnerstelle (in jedem Hunderterbereich 10mal, in 55 Hunderterbereichen also)

$$10 \cdot 55 = 550$$

an der Einerstelle (in jedem Zehnerbereich eine Ziffer 9, in 555 Zehnerbereichen also)

$$1 \cdot 555 = 555$$

Insgesamt wird die Ziffer 9 dabei 1605 mal aufgeschrieben.

Aufgabe 230723:
Blaue, gelbe und rote Würfel sollen in eine Reihe gelegt werden. Der erste Würfel der Reihe soll blau, der zweite soll gelb sein. In der Reihe sollen niemals zwei gleichfarbige Würfel nebeneinander liegen, und es soll sich auch die Farbfolge von zwei nebeneinanderliegenden Würfeln niemals wiederholen.
Ermittle die größtmögliche Anzahl der Würfel in einer Reihe, die alle diese Bedingungen erfüllt!
Gib mindestens ein Beispiel für eine solche Reihe mit der größtmöglichen Anzahl von Würfeln an und weise nach, dass es keine solche Reihe mit mehr Würfeln geben kann!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I) Bezeichnet man mit b, g bzw. r einen blauen, gelben bzw. roten Würfel, dann zeigen folgende Beispiele, dass es Reihen mit 7 Würfeln gibt, die alle gestellten Bedingungen erfüllen:

$$b,g,b,r,g,r,b; \qquad b,g,r,b,r,g,b; \qquad b,g,r,g,b,r,b;$$

II) Ist w_1, w_2, w_3, ..., w_8, ... eine Reihe von 8 oder mehr Würfeln, so kommen darin die 7 Farbfolgen (w_1,w_2), (w_2,w_3), ..., (w_7,w_8) vor.
Zu den drei verschiedenen Farben b, g, r gibt es aber nur die folgenden 6 verschiedenen Farbfolgen (b, g), (b, r), (g, b), (g, r), (r, b), (r, g). Daraus folgt, dass bei einer Reihe von 8 oder mehr Würfeln (ohne benachbarte gleichfarbige Würfel) mindestens eine Farbfolge doppelt auftreten müsste, was der gestellten Bedingung widerspricht.
Aus I) und II) folgt, dass 7 die größtmögliche Anzahl der Würfel in einer Reihe der verlangten Art ist.

Aufgabe 290722:
An einem Fußballturnier nehmen genau 14 Mannschaften teil. Jede Mannschaft trägt gegen jede andere genau ein Spiel aus. Gewinnt eine Mannschaft, so erhält sie 2 Gewinnpunkte und ihre Gegnermannschaft 2 Verlustpunkte. Geht ein Spiel unentschieden aus, so erhält jede der beiden Mannschaften je einen Gewinnpunkt und einen Verlustpunkt.

a) Nach Abschluss aller Spiele kann man für jede Mannschaft die Summe aller derjenigen Punkte bilden, die sie erhalten hat, gleichgültig, ob es Gewinn- oder Verlustpunkte waren.
Weise nach, dass dabei jede der 14 Mannschaften dieselbe Summe erhält, und gib diese Summe an!

b) Nach Abschluss aller Spiele kann man auch die Summe aller Gewinnpunkte bilden, gleichgültig, welche Mannschaften sie erhalten haben.
Weise nach, dass bei jeder Möglichkeit für die Ergebnisse der einzelnen Spiele des Turniers dieselbe Summe aller Gewinnpunkte entsteht, und gib diese Summe an!

c) An einem anderen Turnier mit denselben Regeln der Punktvergabe nahm eine andere Anzahl von Mannschaften teil. Wieder trug jede Mannschaft gegen jede andere genau ein Spiel aus.
Kann als Summe aller Gewinnpunkte, wie in b) gebildet, dabei 432 entstehen? Begründe deine Antwort?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Jede Mannschaft erhält in jedem Spiel 2 Punkte. Sie spielt im Turnier insgesamt 13 Spiele. Die Summe aller Punkte, die sie im Turnier erhält, beträgt daher $2 \cdot 13 = 26$.

b) Da nach a) jede der 14 Mannschaften 26 Punkte erhält, werden im Turnier insgesamt $14 \cdot 26$ Punkte vergeben. Von diesen sind genau die Hälfte Gewinnpunkte, da dies für jedes einzelne Spiel zutrifft, gleichgültig welches Ergebnis es hatte. Bei jeder Möglichkeit für die Ergebnisse beträgt die Summe aller Gewinnpunkte daher $\frac{14 \cdot 26}{2} = 14 \cdot 13 = 182$.

c) War x die Anzahl der Mannschaften, so erhält analog zu a) jede Mannschaft $2 \cdot (x-1)$ Punkte. Die Summe aller Gewinnpunkte beträgt analog zu b) daher $\frac{x \cdot 2 \cdot (x-1)}{2} = x \cdot (x-1)$. Sie kann also nur dann 432 betragen, wenn es eine natürliche Zahl x gibt, für die $x \cdot (x-1) = 432$ gilt.

Alle Zerlegungen von 432 in zwei Faktoren, die natürliche Zahlen sind, lauten

$$432 = 1 \cdot 432 = 2 \cdot 216 = 3 \cdot 144 = 4 \cdot 108 = 6 \cdot 72 = 8 \cdot 54 = 9 \cdot 48 = 12 \cdot 36 = 16 \cdot 27 = 18 \cdot 24$$

In keiner dieser Zerlegungen haben die Faktoren die Differenz 1. Als Summe aller Gewinnpunkte kann 432 nicht auftreten.

Aufgabe 300723:
a) Ein an der gesamten Oberfläche gefärbter Holzwürfel soll in gleich große Teilwürfel zersägt werden. Dabei wird gefordert, dass mindestens 40 dieser Teilwürfel völlig ungefärbt sind.
Ermittle die kleinstmögliche Anzahl der Teilwürfel, in die der gesamte Holzwürfel zu zerlegen ist, damit diese Forderung erfüllt wird!

b) Aus 40 so erhaltenen ungefärbten Teilwürfeln soll ein Quader (ohne freibleibende Hohlräume im Innern) zusammengesetzt werden; dabei soll jeder dieser 40 Teilwürfel verwendet werden.
Ermittle das Volumen dieses Quaders, wenn bekannt ist, dass der ursprüngliche Holzwürfel ein Volumen von 27 dm^3 hatte!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Einen Würfel kann man in gleichgroße Teilwürfel zerlegen, indem man eine natürliche Zahl $n > 1$ wählt, drei von einer Ecke ausgehende Kanten in je n gleiche Teile teilt und durch die Teilpunkte Ebenen legt, die zu den Begrenzungsflächen des Würfels parallel verlaufen.

Der Würfel wird dadurch in n Schichten zerlegt, jede Schicht in $n \cdot n$ Teilwürfel. Die Anzahl A der entstehenden Teilwürfel beträgt also $A = n^3$.

Die völlig ungefärbten Teilwürfel bilden einen im Innern des gesamten Holzwürfels enthaltenen kleineren Würfel. Damit die Anzahl seiner Teilwürfel $A = 40$ ist, muss für ihn $n \geq 4$ sein. Für den gesamten Holzwürfel ist dieses n durch $n + 2$ zu ersetzen.
Die kleinstmögliche Anzahl von Teilwürfeln, mit der die gestellte Forderung erfüllt wird, ist also die zu $n = 6$ gehörende Anzahl $A = 216$.

b) Wegen $3^3 = 27$ beträgt die Kantenlänge des ursprünglichen Holzwürfels 3 dm. Aus a) folgt nun, dass die Kantenlänge eines der 216 Teilwürfel 3 dm : 6 = 0,5 dm beträgt. Der Quader besteht aus 40 Würfeln dieser Kantenlänge.

Sein Volumen beträgt (unabhängig davon, wie dieser Quader aus den Würfeln zusammengesetzt wurde) daher $40 \cdot (0{,}5dm)^3 = 5dm^3$.

III Runde 3

Aufgabe 030734:
Zeichne ein beliebiges konvexes Fünfeck und seine sämtlichen Diagonalen!
Wie viel konvexe Vierecke sind in der Figur enthalten? Gib genau an, wie du diese Anzahl ermittelt hast!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es gibt
- 5 Vierecke, die aus je 3 Fünfeckseiten und einer Diagonalen,
- 5 Vierecke, die aus je 2 Fünfeckseiten und 2 Diagonalen und
- 5 Vierecke, die aus je einer Fünfeckseite und 3 Diagonalen
gebildet werden, insgesamt also 15 Vierecke.

Aufgabe 050734:
Berechne die Anzahl aller (untereinander verschiedener) vierstelligen Zahlen, die sich unter alleiniger Verwendung der Ziffern 1, 3 und 8 schreiben lassen! Dabei braucht nicht jede der Zahlen sämtliche der drei zugelassenen Ziffern zu enthalten.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die erwähnten Zahlen können entweder

(1) 4 gleiche Ziffern oder
(2) genau 3 gleiche Ziffern oder
(3) 2 untereinander verschiedene Paare von gleichen Ziffern oder
(4) genau 2 gleiche Ziffern enthalten.

Da nur 3 verschiedene Ziffern zugelassen sind, erhält man im Falle (1) 3 verschiedene derartige Zahlen. Im Falle (2) gibt es für jeweils 3 gleiche Ziffern 4 verschiedene Möglichkeiten der Anordnung, wobei die 4. Ziffer jeweils eine der beiden anderen vorgegebenen Ziffern ist. Da 3 Ziffern vorgegeben wurden, beträgt im Falle (2) die Anzahl der derartigen vierstelligen Zahlen $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$.

Im Falle (3) lassen sich die Ziffern der beiden Paare jeweils auf 6 verschiedene Weisen anordnen (nämlich aabb, bbaa, abba, baab, abab, baba). Da es 3 verschiedene Möglichkeiten der Zusammenstellung solcher Paare gibt, beträgt im Falle (3) die Anzahl der erwähnten vierstelligen Zahlen $6 \cdot 3 = 18$.

Im Falle (4) lassen sich die beiden gleichen Ziffern, wenn man die Reihenfolge der beiden übrigen, von ihnen verschiedenen Ziffern beibehält, auf 6 verschiedene Weisen anordnen (nämlich aabc, bcaa, abca, baac, abac, baca). Für die Reihenfolge der beiden übrigen Ziffern gibt es genau 2 Möglichkeiten (nämlich bc und cb). Da 3 verschiedene Paare gleicher Ziffern möglich sind, beträgt im Falle (4) die Anzahl der gesuchten vierstelligen Zahlen $6 \cdot 2 \cdot 3 = 36$.

Die Anzahl aller derartigen Zahlen beträgt mithin $3 + 24 + 18 + 36 = 81$.

Aufgabe 080732:
Gegeben sei eine positive ganze Zahl n. Man denke sich alle Darstellungen von n als Summe von genau zwei voneinander verschiedenen positiven ganzzahligen Summanden gebildet. Dabei sollen Darstellungen, die sich nur durch die Reihenfolge der Summanden unterscheiden, wie z. B. $9 = 4 + 5$ und $9 = 5 + 4$, als nicht verschieden angesehen werden. Ermittle

a) für $n = 7$,
b) für $n = 10$,
c) für beliebiges (positives ganzzahliges) n
die Anzahl aller dieser Darstellungen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

a) Die sämtlichen genannten Darstellungen sind:

$$7 = 1 + 6, \quad 7 = 2 + 5, \quad 7 = 3 + 4, \quad 10 = 1 + 9, \quad 10 = 2 + 8, \quad 10 = 3 + 7, \quad 10 = 4 + 6$$

ihre Anzahl beträgt 3 bzw. 4.

b) Ist n ungerade, so treten in den sämtlichen genannten Darstellungen genau die Zahlen $1, ..., n - 1$ als Summanden auf, und zwar jede genau einmal. Da hierbei in jeder Darstellung genau zwei dieser Summanden vorkommen, ist die Anzahl der Darstellungen folglich $\frac{n-1}{2}$.

Ist n gerade, so treten dagegen nur die Zahlen $1, ..., n-1$ mit Ausnahme der Zahl $\frac{n}{2}$ auf. Diese Ausnahme rührt daher, dass in einer Darstellung von n mit einem Summanden $\frac{n}{2}$ der zweite Summand ebenfalls $\frac{n}{2}$ lauten müsste, also nicht von dem ersten verschieden wäre. Daher beträgt nun die gesuchte Anzahl $\frac{n-2}{2} = \frac{n}{2} - 1$.

Aufgabe 090731:
Man denke sich alle natürlichen Zahlen von 1 bis 2555, jede genau einmal, aufgeschrieben.
Ermittle die Anzahl der Ziffer 9, die dabei insgesamt geschrieben werden müssten!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. In der Tausenderstelle der aufgeschriebenen Zahlen kommt die Ziffer 9 nicht vor.

II. Die Anzahl der Ziffern 9, die in der Hunderterstelle der aufgeschriebenen Zahlen vorkommen, beträgt für die Zahlen von 1 bis 1000 ; für die Zahlen von 1001 bis 2000 (2 Gruppen) je genau 100 (da bei der ersten Gruppe die 9 in der Hunderterstelle genau der Zahlen 900, ..., 999 vorkommt und bei der zweiten Gruppe genau der Zahlen 1900, ..., 1999). Bei den Zahlen von 2001 bis 2555 kommt in der Hunderterstelle die Ziffer 9 nicht vor.

III. Die Anzahl der Ziffern 9, die in der Zehnerstelle der aufgeschriebenen Zahlen vorkommen, beträgt für die Zahlen von 1 bis 100 ; für die Zahlen von 101 bis 200 ; usw. ; für die Zahlen von 2401 bis 2500 (25 Gruppen) je genau 10 (bei der ersten Gruppe genau in 90, ..., 99, bei der zweiten Gruppe genau in 190, ..., 199 usw.). Bei den Zahlen von 2500 bis 2555 kommt in der Zehnerstelle die 9 nicht vor.

IV. Die Anzahl der Ziffern 9 in der Einerstelle der Zahlen beträgt für die Zahlen von 1 bis 10 ; für die Zahlen von 11 bis 20 ; usw. ; für die Zahlen von 2541 bis 2550 (255 Gruppen)je genau 1. Bei den Zahlen von 2551 bis 2555 kommt in der Einersteile die 9 nicht vor.

Daher beträgt die gesuchte Zahl $2 \cdot 100 + 25 \cdot 10 + 255 = 705$.

Aufgabe 170731:
Es sei A die Menge aller derjenigen natürlichen Zahlen a, für die $1500 \leq a \leq 2650$ gilt.
Untersuche, ob es in der Menge A fünfundsechzig verschiedene Zahlen gibt, die gerade und durch 9 teilbar sind!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Alle Zahlen, die durch 2 und durch 9 teilbar sind, sind auch durch $2 \cdot 9 = 18$ teilbar, da 2 und 9 teilerfremd sind. Die kleinste durch 18 teilbare Zahl in der Menge A ist 1512, die nächstgrößere erhält man durch Addition von 18, da es unter 18 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen nur eine durch 18 teilbare gibt.

Dieses Verfahren lässt sich fortsetzen. Die vierundsechzigste dabei erhaltene Zahl (einschließlich der Zahl 1512 also insgesamt die fünfundsechzigste gewonnene Zahl) lautet $1512 + 64 \cdot 18 = 1512 + 1152 = 2664$. Da sie größer als 2650 ist, gibt es folglich in der Menge A nicht fünfundsechzig verschiedene durch 9 teilbare gerade Zahlen.

Aufgabe 200732:
Gegeben seien sieben Strecken mit den Längen 1 cm, 3 cm, 5 cm, 7 cm, 9 cm, 11 cm und 15 cm.

a) Gib die Anzahl aller verschiedenen Möglichkeiten an, drei von diesen sieben Strecken auszuwählen! Dabei sollen solche Möglichkeiten, die sich nur in der Reihenfolge der ausgewählten Strecken unterscheiden, nicht als verschieden gewertet werden.
b) Gib unter den in a) gefundenen Möglichkeiten alle diejenigen an, bei denen aus den Längen der drei ausgewählten Strecken als Seitenlänge ein Dreieck konstruiert werden kann!
c) Berechne, wie viel Prozent der in a) gefundenen Möglichkeiten die in b) gefundenen Möglichkeiten sind!
(Der Prozentsatz ist auf eine Dezimale nach dem Komma gerundet anzugeben.)

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Maßzahlen der in cm gemessenen Längen der drei ausgewählten Strecken seien jedesmal a, b, c genannt. Wegen der Unabhängigkeit von ihrer Reihenfolge kann dabei $a < b < c$ angenommen werden. Mit diesen Bezeichnungen gibt es genau die in der folgenden Tabelle in den Spalten a, b, c angegebenen Auswahlmöglichkeiten. Aus den Längen der drei ausgewählten Strecken als Seitenlängen kann genau dann ein Dreieck konstruiert werden, wenn die drei Dreiecksungleichungen

$$a + b > c \quad (1) \qquad b + c > a \quad (2) \qquad c + a > b \quad (3)$$

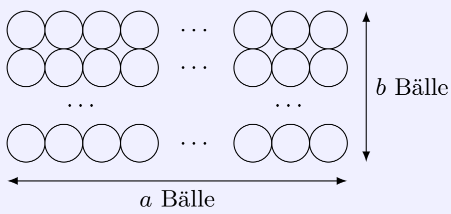
gelten. Wegen $a < b < c$ sind (2) und (3) stets erfüllt. In der letzten Spalte der folgenden Tabelle ist jeweils angegeben, ob auch (1) erfüllt ist.

a	b	c	Gilt $a+b>c$?	a	b	c	Gilt $a+b>c$?	a	b	c	Gilt $a+b>c$?
1	3	5	Nein	1	3	7	Nein	1	3	9	Nein
1	3	11	Nein	1	3	15	Nein	1	5	7	Nein
1	5	9	Nein	1	5	11	Nein	1	5	15	Nein
1	7	9	Nein	1	7	11	Nein	1	7	15	Nein
1	9	11	Nein	1	9	15	Nein	1	11	15	Nein
3	5	7	Ja	3	5	9	Nein	3	5	11	Nein

a	b	c	Gilt $a+b>c$?	a	b	c	Gilt $a+b>c$?	a	b	c	Gilt $a+b>c$?
3	5	15	Nein	3	7	9	Ja	3	7	11	Nein
3	7	15	Nein	3	9	11	Ja	3	9	15	Nein
3	11	15	Nein	5	7	9	Ja	5	7	11	Ja
5	7	15	Nein	5	9	11	Ja	5	9	15	Nein
5	11	15	Ja	7	9	11	Ja	7	9	15	Ja
7	11	15	Ja	9	11	15	Ja				

Daraus folgt:
Die in a) gesuchte Anzahl beträgt 35, die in b) gesuchte Anzahl beträgt 11, der in c) gesuchte Prozentsatz beträgt $11 \cdot 10035\% \approx 31{,}4\%$.

Aufgabe 220734:
Im Schaufenster eines Sportgeschäftes befindet sich ein Stapel aus 550 gleichgroßen Bällen. Der Stapel besteht aus waagerechten Schichten. Jede Schicht enthält Bälle in einer rechteckigen Anordnung, wie sie die Abbildung zeigt.



Die Anzahlen a und b sind in jeder Schicht genau um 1 kleiner als die entsprechenden Anzahlen in der darunterliegenden Schicht.
In der untersten Schicht ist 10 die kleinere der beiden Anzahlen a, b. In der obersten Schicht ist 1 die kleinere der beiden Anzahlen a, b.

Ermittle aus diesen Angaben die Anzahl der Bälle in der untersten Schicht!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
O. B. d. A. sei in der untersten Schicht $b = 10$ die kleinere der beiden Anzahlen a, b und $a = x$ die größere. Dann ist in den folgenden Schichten jeweils $b = 9$, $b = 8$, ..., $b = 1$ die kleinere und $a = x - 1$, $a = x - 2$, ..., $a = x - 9$ die größere der beiden Anzahlen a, b. Daraus folgt

$$550 = 10x + 9(x-1) + 8(x-2) + 7(x-3) + 6(x-4) + 5(x-5) + 4(x-6) + 3(x-7) + 2(x-8) + (x-9)$$

$$= 10x + 9x + 8x + 7x + 6x + 5x + 4x + 3x + 2x + x - 9 - 16 - 21 - 24 - 25 - 24 - 21 - 16 - 9$$

$$= 55x - 165 = 13$$

In der untersten Schicht liegen folglich $10 \cdot 13 = 130$ Bälle.

Aufgabe 300734:
Jemand möchte nach folgenden Regeln möglichst viele verschiedene der natürlichen Zahlen von 1 bis 1000 auswählen:

Als erste Zahl ist eine zufällig gewählte der Zahlen 1 bis 6 zu nehmen, indem gewürfelt und die von dem Würfel gezeigte Zahl gewählt wird. Die weiteren Zahlen sollen so gewählt werden, dass folgendes gilt:
Wenn die Auswahl von Zahlen beendet ist, so haben je zwei der insgesamt ausgewählten Zahlen stets eine durch 3 teilbare Summe.
Ermittle (in Abhängigkeit von allen Möglichkeiten der ersten Zahl) die größtmögliche Anzahl von Zahlen, die man nach diesen Regeln auswählen kann!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
1. War die erste Zahl eine 3 oder eine 6, so gilt:
Als weitere Zahlen kann man genau solche auswählen, die ebenfalls durch 3 teilbar sind; denn genau dann haben auch je zwei der insgesamt ausgewählten Zahlen eine durch 3 teilbare Summe. Da unter den Zahlen von 1 bis 1000 genau die Zahlen $1 \cdot 3 = 3$, $2 \cdot 3 = 6$, ..., $333 \cdot 3 = 999$ durch 3 teilbar sind, beträgt im Fall der Anfangszahlen 3, 6 die gesuchte größtmögliche Anzahl auszuwählender Zahlen 333.

2. War die erste Zahl eine der Zahlen 1, 4; 2, 5, so gilt:
Diese Zahlen lassen bei Division durch 3 den Rest 1 oder 2; d. h., sie sind mit einer natürlichen Zahl n von der Form $3n + 1$ bzw. $3n + 2$. Für die zweite Zahl gibt es dann jeweils genau die Möglichkeit, eine Zahl der Form $3m + 2$ bzw. $3m + 1$ zu wählen, da genau hierbei die Summe $3(m + n) + 3$ durch 3 teilbar wird.
Jede weitere Zahl würde diese Regel aber verletzen; sie wäre nämlich von einer der Formen $3k$, $3k + 1$, $3k + 2$, und dann wäre mit $h = n$ oder mit $h = m$ die betreffende der Summen

$$3h + 1 + 3k = 3(h + k) + 1, \qquad 3h + 1 + 3k + 1 = 3(h + k) + 2, \qquad 3h + 2 + 3k + 2 = 3(h + k + 1) + 1$$

nicht durch 3 teilbar.
Also beträgt im Fall der Anfangszahlen 1, 4; 2, 5 die gesuchte größtmögliche Anzahl auszuwählender Zahlen 2.

Aufgabe 320731:
a) Vier rote Kugeln, zwei gelbe Kugeln und eine blaue Kugel sollen so auf zwei Kästen A und B verteilt werden, dass sich in A drei und in B vier Kugeln befinden.
Wie viele derartige Verteilungen gibt es insgesamt?

b) Jetzt werden gleichfarbige Kugeln durch eine zusätzliche Nummerierung voneinander unterschieden. Die Verteilungen unterscheiden sich dann nicht nur darin, wie viele Kugeln der einzelnen Farben in den Kästen A und B sind, sondern auch, welche Nummern sie tragen.
Wie viele solcher Verteilungen gibt es insgesamt?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Jede mögliche Verteilung ist bereits durch die Anzahlen der in A befindlichen Kugeln eindeutig festgelegt.
a) Für diese Anzahlen gibt es genau die Möglichkeiten der folgenden Tabelle

Verteilung Nr.	1	2	3	4	5	6
rot	0	1	1	2	2	3
gelb	2	1	2	0	1	0
blau	1	1	0	1	0	0

Das sind insgesamt 6 Verteilungen.

b) Jede nun zu ermittelnde Verteilung kann erhalten werden, indem man jeweils bei einer Verteilung aus a) feststellt, welche Nummern die Kugeln tragen können:
Verteilung Nr.1 führt so zu genau 1 Verteilung, da in A bereits die einzige blaue Kugel und alle gelben Kugeln liegen müssen.
Bei Verteilung Nr.2 kann jede der vier roten und jede der zwei gelben Kugeln in A liegen. Das führt zu genau $4 \cdot 2 = 8$ Verteilungen.
Bei Verteilung Nr.3 müssen in A alle gelben Kugeln sein, jede der vier roten Kugeln kann in A liegen, das ergibt genau 4 Verteilungen.
Bei Verteilung Nr.4 liegt in A die einzige blaue Kugel, für die Nummern der roten Kugeln gibt es genau die Möglichkeiten (1; 2), (1; 3), (1; 4), (2; 3), (2; 4), (3; 4) 6 Verteilungen.
Verteilung Nr.5: In A kann jede dieser sechs Zusammenstellungen roter Kugeln und jede der zwei gelben Kugeln liegen, das führt auf genau $6 \cdot 2 = 12$ Verteilungen.
Verteilung Nr.6: Für die Kugeln in A ist genau eine der vier roten Kugeln wegzulassen, somit gibt es hierfür genau 4 Verteilungen.
Das sind insgesamt $1 + 8 + 4 + 6 + 12 + 4 = 35$ Verteilungen.

Aufgabe 320734:
Ermittle die Anzahl aller derjenigen sechsstelligen natürlichen Zahlen, die durch 5 teilbar sind und deren Quersumme durch 9 teilbar ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Eine natürliche Zahl n hat genau dann eine durch 9 teilbare Quersumme, wenn n selbst durch 9 teilbar ist.
Ferner ist n wegen der Teilerfremdheit von 5 und 9 genau dann durch 5 und 9 teilbar, wenn n durch 45 teilbar, d. h. mit einer natürlichen Zahl k von der Form $n = 45 \cdot k$ ist.
Wegen $45 \cdot 2222 = 99990, 45 \cdot 2223 = 100035$ sowie $45 \cdot 22222 = 999990$, $45 \cdot 22223 = 1000035$ sind die Zahlen $45 \cdot k$ mit natürlichen k genau für $k = 2223, ..., 22222$ sechsstellig.
Da dies $22222 - 2222 = 20000$ Werte k sind, ist damit die gesuchte Anzahl 20000 ermittelt.

Aufgabe 340734:
Ein Viereck heißt genau dann konvex, wenn alle seine Diagonalen ganz der Fläche des Vielecks angehören.
Wie viele Diagonalen hat ein konvexes 1995-Eck insgesamt? Begründe die von dir angegebene Anzahl!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Man kann für jeden der 1995 Eckpunkte des 1995-Ecks die Verbindungsstrecke zu jedem der 1994 anderen Eckpunkte betrachten. Damit hat man jede der insgesamt vorhandenen Verbindungsstrecken zwischen je zwei Eckpunkten genau zweimal betrachtet.
Also gibt es genau $1995 \cdot 1994 : 2 = 1995 \cdot 997$ solche Verbindungsstrecken. Von ihnen sind genau 1995 keine Diagonalen, sondern Seiten des 1995-Ecks.
Die Anzahl der Diagonalen beträgt folglich $1995 \cdot 997 - 1995 = 1995 \cdot 996 = 1987020$.

III.IV Altersaufgaben

I Runde 1

Aufgabe 180713:
Wie alt ist Margit jetzt, wenn ihre Mutter jetzt 30 Jahre, ihre Großmutter jetzt 62 Jahre alt ist und nach einigen Jahren die Mutter viermal sowie gleichzeitig die Großmutter achtmal so alt wie Margit sein werden?
(Es werden jeweils nur volle Lebensjahre berücksichtigt.)

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn nach einigen Jahren die Mutter viermal so alt wie Margit sein wird, wird die Großmutter doppelt so alt wie die Mutter sein.
Der Altersunterschied von 32 Jahren zwischen der Großmutter und der Mutter ändert sich nicht. Er wird also auch zu dem in der Aufgabe genannten späteren Zeitpunkt 32 betragen. Dann ist er aber, da laut Aufgabe die Großmutter das doppelte Alter der Mutter haben wird, gleich dem Alter der Mutter zu diesem Zeitpunkt. Sie wird demnach dann 32 Jahre alt sein, was in zwei Jahren eintreten wird. Wegen $32 : 4 = 8$ ist Margit zu diesem Zeitpunkt 8 Jahre alt; folglich ist sie jetzt 6 Jahre alt.

Aufgabe 290713:
Rolf sagt an seinem Geburtstag, dem 1. September 1989:
„Die Quersumme der Jahreszahl meines Geburtsjahres ist zugleich auch das in Jahren gerechnete Alter, das ich heute erreiche."
Untersuche, ob es genau ein Jahr als Rolfs Geburtsjahr gibt, für das seine Aussage zutrifft! Ist das der Fall, so gib dieses Geburtsjahr an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn Rolfs Aussage zutrifft, dann folgt:
Wäre Rolf vor dem Jahr 1900 geboren, dann müsste die Quersumme seines Geburtsjahres, da sie gleich seinem Alter ist, größer als 89 sein, was für keine Jahreszahl vor 1900 zutrifft. Also wurde Rolf in einem Jahr mit einer Zifferndarstellung $19xy$ geboren. Die Quersumme $1 + 9 + x + y$ ist zugleich Rolfs Alter im Jahr 1989; d. h., es gilt

$$1 + 9 + x + y = 1989 - (1900 + 10x + y) \quad \Rightarrow \quad x = \frac{79 - 2y}{11}$$

Da x eine natürliche Zahl ist, muss $79 - 2y$ durch 11 teilbar sein. Wie z. B. ein Durchprobieren aller natürlichen Zahlen y mit $0 \leq y \leq 9$ zeigt, ist das nur für $y = 1$ der Fall. Damit ergibt sich $x = 7$.
Also kann Rolfs Aussage nur dann zutreffen, wenn er im Jahr 1971 geboren wurde.

II. Bei diesem Geburtsjahr trifft die Aussage in der Tat zu; denn im Jahr 1989 ist Rolf dann 18 Jahre alt, und $1 + 9 + 7 + 1 = 18$ ist auch die Quersumme der Jahreszahl 1971. Mit I. und II. ist bewiesen: Es gibt genau ein Jahr als Rolfs Geburtsjahr, für das seine Aussage zutrifft, nämlich das Jahr 1971.

II Runde 2

Aufgabe V10723:
Zum Gruppenrat der Klasse 7 gehören Karl, Herbert und Richard, Ilse und Lore. Richard ist jünger als Herbert, aber Lore älter als Karl. Ilse ist jünger als Richard, während Herbert etwas eher geboren wurde als Lore. Karl ist jünger als Richard, ebenso ist Ilse wesentlich jünger als Herbert. Lore lebt schon einige Monate länger als Richard. Karl ist älter als Ilse, die jünger als Lore ist. Herbert ist älter als Karl.
Stelle die richtige Altersreihenfolge unserer Freunde fest!

Lösung von Steffen Polster:
Es gilt, mit den ersten Buchstaben als Abkürzung und $<$ für „jünger als":

1. R < H, K < L, also derjenige muss der Älteste sein, der auf der linken Seite nicht auftritt: H
2. I < R, L < H, also ist Zweitältester derjenige, der links nur erscheint mit H als rechter Seite: L
3. K < R, I < H, der Nachfolgende ist der, der links auftritt mit H und L als rechter Seite: R
4. R < L, I < K, der Nächste kann nur der sein, der links auftritt und jeweils H, L und R auf der rechten Seite hat: K
5. I < L, K < H, der Jüngste muss dann der sein, der links erscheint mit H, L, R und K auf der rechten Seite: I

So ergibt sich die Reihenfolge (der Älteste zuerst): Herbert, Lore, Richard, Karl, Ilse.

Aufgabe 020723:
Emil erzählt: „Mein Bruder Heinz ist nur halb so alt wie ich. Wenn man die Anzahl seiner Lebensjahre mit sich selbst multipliziert, erhält man das Alter meines Vaters. Meine Mutter ist 5 Jahre jünger als mein Vater. Alle zusammen sind wir 85 Jahre alt.“
Wie alt ist Emil? Beschreibe, wie du die Lösung gefunden hast!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Man bezeichne Emils Alter in Jahren mit a. Dann ist sein Bruder Heinz $\frac{a}{2}$, sein Vater $\frac{a^2}{4}$ und seine Mutter $\frac{a^2}{4} - 5$ Jahre alt. Zusammen sind sie

$$a + \frac{a}{2} + \frac{a^2}{4} + \frac{a^4}{4} - 5 = 85$$

Die Gleichung kann man umformen zu $a^2+3a = 180$. Mit der Lösungsformel für quadratische Gleichungen oder durch systematisches Probieren (a muss ein Teiler von 180 sein) kommt man auf $a = 12$, Emil ist also 12 Jahre alt.

Aufgabe 120723:
Über das Alter von vier Tennisspielern Arnold, Bruno, Christoph und Detlef ist folgendes bekannt:

(1) Alle vier Spieler sind zusammen 100 Jahre alt.
(2) Arnold und Bruno sind zusammen genau so alt wie Christoph und Detlef zusammen.
(3) Christoph ist älter als Detlef.
(4) Bildet man alle möglichen „Doppel“ (Gruppen aus zwei Spielern), die sich aus den vier Spielern bilden lassen, dann besteht genau eines dieser „Doppel“ aus zwei gleichaltrigen Spielern.
(5) Der älteste der vier Spieler ist vier Jahre älter als der jüngste.

Wie alt ist jeder der vier Spieler? (Sämtliche Angaben in vollen Lebensjahren)

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Das in Jahren angegebene Alter der vier Spieler sei der Reihe nach mit a, b, c, d bezeichnet. Nun gilt laut Aufgabe:

$$(1) \quad a + b + c + d = 100 \qquad , \qquad (2) \quad a + b = c + d \qquad , \qquad (3) \quad c > d$$

Aus (1) und (2) folgt (6) $a + b = c + d = 50$.
Wäre nun $a = c$ oder $a = d$ oder $b = c$ oder $b = d$, so folgte daraus wegen (2) $b = d$ bzw. $b = c$ bzw. $a = d$ bzw. $a = c$ im Widerspruch zu (4). Hiernach und wegen (3) folgt aus (4) und (6), dass $a = b = 25$ sein muss.

Wegen (6) und (3) gilt ferner $c > 50 - c$, also $c > 25$, und daher $d = 50 - c < 25$.
Somit ist Christoph der älteste und Detlef der jüngste der vier Spieler. Wegen (5) gilt daher $c - d = 4$, woraus zusammen mit (6) dann $c = 27$ und $d = 23$ folgt.
Also ist Christoph 27 Jahre alt, Arnold und Bruno sind je 25 Jahre alt, und Detlef ist 23 Jahre alt.

Aufgabe 150722:
Das Ehepaar Winkler hat genau drei Kinder.
Am 1. Januar 1975 war das älteste Kind doppelt so alt wie das zweite und dieses wiederum doppelt so alt wie das jüngste Kind. Die Mutter war doppelt so alt wie ihre drei Kinder zusammen. Der Vater war so alt wie die Mutter und das jüngste Kind zusammen. Alle fünf Familienmitglieder waren

zusammen so alt wie der eine Großvater, und dieser war 64 Jahre alt, als das älteste Kind geboren wurde.
Wie alt war jede der genannten Personen am 1. Januar 1975?
Anmerkung: Alle Altersangaben sind in vollen Lebensjahren zu verstehen.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Ist am 1. Januar 1975 das jüngste Kind x Jahre alt, so ist das zweite $2x$ Jahre, das älteste $4x$ Jahre, die Mutter $14x$ Jahre, der Vater $15x$ Jahre und der Großvater $(64+4x)$ Jahre alt. Es gilt nun laut Aufgabe

$$x + 2x + 4x + 14x + 15x = 4x + 64$$

daraus folgt $32x = 64$, also $x = 2$.
Das jüngste Kind war am 1. Januar 1975 somit 2 Jahre alt, das zweite 4 Jahre, das älteste 8 Jahre, die Mutter 28 Jahre, der Vater 30 Jahre und der Großvater 72 Jahre alt.

Aufgabe 260722:
Klaus lernte im Mathematik-Spezialistenlager Dorit kennen und fragte sie nach ihrem Alter. Sie antwortete:

„Ich wurde im Mai desjenigen Jahres 10 Jahre alt, dessen Jahreszahl die kleinste durch 7 teilbare Zahl ist, die bei Division durch 2, 3, 5 und 11 jeweils den Rest 1 lässt.“

Untersuche, ob Klaus aus dieser Antwort Dorits Alter eindeutig ermitteln konnte. Ist dies der Fall, dann gib an, wie alt (in vollen Lebensjahren gerechnet) Dorit im Juni 1986 ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Dorit sei im Jahre x zehn Jahre alt geworden. Dann ist $x-1$ eine natürliche Zahl, die durch 2, 3, 5 und 11 teilbar ist. Diese vier Teilbarkeitsaussagen gelten genau dann, wenn $x-1$ ein Vielfaches des kgV dieser vier Zahlen ist. Das ist gleichbedeutend damit, dass mit einer natürlichen Zahl n

$$x - 1 = 330 \cdot n \qquad \text{d. h.} \qquad x = 330 \cdot n + 1$$

gilt. Da 330 bei Division durch 7 den Rest 1, also $330 \cdot 2$ den Rest 2, $330 \cdot 3$ den Rest 3 usw. lässt, führt $n = 6$ auf die kleinste Zahl x, die (außer den genannten Teilbarkeitsaussagen für $x-1$) auch die Bedingung erfüllt, durch 7 teilbar zu sein.
Daraus folgt $x = 330 \cdot 6 + 1 = 1981$; d. h., aus Dorits Antwort lässt sich eindeutig ermitteln:
Dorit wurde im Mai des Jahres 1981 zehn Jahre alt; im Juni 1986 ist sie mithin 15 Jahre alt.

III Runde 3

Aufgabe 130731:
Über die Altersangaben (in vollen Lebensjahren) einer Familie (Vater, Mutter und zwei Kinder) ist folgendes bekannt:

(1) Die Summe aller vier Lebensalter beträgt 124.
(2) Vater und Mutter sind zusammen dreimal so alt wie ihre beiden Kinder zusammen.
(3) Die Mutter ist mehr als doppelt so alt wie das älteste der beiden Kinder.
(4) Die Differenz, die sich ergibt, wenn man das Lebensalter der Mutter von dem des Vaters subtrahiert, ist neunmal so groß wie die Differenz, die sich ergibt, wenn man das Lebensalter des jüngeren Kindes von dem des älteren Kindes subtrahiert.

Wie alt ist jedes der vier Familienmitglieder?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wegen (1) und (2) ist die vierfache Alterssumme beider Kinder gleich 124; die Kinder sind deshalb zusammen 31 Jahre, die Eltern zusammen 93 Jahre alt.
Da die Lebensalter der vier Personen in ganzen Jahren angegeben werden und da 31 eine ungerade Zahl ist, so ist von den Altersangaben der Kinder die eine gerade, die andere ungerade. Daher ist die Differenz der Lebensalter der beiden Kinder eine ungerade Zahl.
Betrüge sie 3 oder mehr Jahre, so wäre sie bei den Eltern 27 oder mehr Jahre. Dann wäre das eine Kind 17 Jahre oder älter, das andere Kind 14 Jahre oder jünger, die Mutter 33 Jahre oder jünger und der Vater 60 Jahre oder älter.
Wegen $2 \cdot 17 > 33$ und (3) entfällt diese Möglichkeit. Somit beträgt die Differenz bei den Kindern 1 Jahr, bei den Eltern also 9 Jahre. Daraus folgt:

Der Vater ist 51 Jahre, die Mutter 42 Jahre, das älteste Kind 16 und das andere 15 Jahre alt.

Aufgabe 160731:
Von 12 Mädchen einer Klasse ist bekannt, dass alle im selben Jahr, aber keine zwei im gleichen Monat geboren sind. Multipliziert man jeweils die Zahl, die den Tag des Geburtsdatums angibt, mit der Zahl, die den Monat des Geburtsdatums angibt, so erhält man für die zwölf Mädchen die folgenden Produkte:
Astrid 49, Beate 3, Christina 52, Doris 130, Evelyn 187, Friederike 300, Gudrun 14, Heike 42, Ines 81, Kerstin 135, Liane 128 und Martina 153.
Ermittle aus diesen Angaben den Geburtstag von jeder der zwölf Schülerinnen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Lösung lässt sich z. B. mit Hilfe folgender Tabelle ermitteln, wobei für jedes der Mädchen der Anfangsbuchstabe seines Vornamens gesetzt wurde:

Name	Produkt	Primfaktorzerlegung	mögliche Geburtsdaten	tatsächliches Datum
A	49	$7 \cdot 7$	7.7.	7.7.
B	3	3	3.1. oder 1.3.	3.1.
C	52	$2 \cdot 2 \cdot 13$	26.2. oder 13.4.	13.4.
D	130	$2 \cdot 5 \cdot 13$	26.5. oder 13.10.	13.10.
E	187	$11 \cdot 17$	17.11.	17.11.
F	300	$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$	30.10. oder 25.12.	25.12.
G	14	$2 \cdot 7$	14.1. oder 7.2. oder 2.7.	7.2.
H	42	$2 \cdot 3 \cdot 7$	21.2. oder 14.3. oder 7.6. oder 6.7.	7.6.
I	81	$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$	27.3. oder 9.9.	27.3.
K	135	$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$	27.5. oder 15.9.	27.5.
L	128	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$	16.8.	16.8.
M	153	$3 \cdot 3 \cdot 17$	17.9.	17.9.

Die tatsächlichen Daten ermittelt man folgendermaßen:

1) Gibt es jeweils nur eine Möglichkeit für das Geburtsdatum, so ist für dieses Mädchen das Geburtsdatum dann festgelegt (gilt für A, E, L, M).

2) Nun streicht man bei den verbleibenden Mädchen die Daten, deren Monatsnummer bereits bei den unter 1) genannten Daten auftritt, da laut Aufgabe in jedem Monat genau eines der gesuchten Geburtsdaten liegt (gilt für G, H, I, K). Bleibt dabei bei einem Mädchen nur ein Datum übrig, ist damit sein Geburtsdatum ermittelt (I, K).

3) Indem man analog fortfährt, werden die restlichen Daten ermittelt.
Reihenfolge: Streichung bei B, D, H; Ermittlung des endgültigen Datums bei B, D; Streichung und damit endgültige Datenermittlung bei F, G und dann bei C, H.

Aufgabe 230731:
Fünf Mädchen, die alle älter als 10 Jahre sind und am gleichen Tag Geburtstag haben, von denen aber keine zwei gleichaltrig sind, werden an ihrem Geburtstag nach ihrem Alter gefragt. Jedes Mädchen antwortet wahrheitsgemäß:

(1) Anja: „Ich bin 5 Jahre jünger als Elke.“
(2) Birgit: „Ich bin jünger als Carmen, aber älter als Dorit.“
(3) Carmen: „Ich bin 14 Jahre alt.“
(4) Dorit: „Ich bin weder das jüngste noch das älteste von uns fünf Mädchen.“
(5) Elke: „Birgit und Carmen sind beide jünger als ich.”

Untersuche, ob aus diesen Angaben eindeutig ermittelt werden kann, wie alt jedes dieser Mädchen ist! Ist dies der Fall, dann gib für jedes der Mädchen das Alter an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Bezeichnet man das Lebensalter jedes Mädchens entsprechend dem Anfangsbuchstaben ihres Vornamens mit A, B, C, D und E, so folgt aus (2) $D < B < C$ und weiter aus (5) $D < B < C < E$.
Also ist D die kleinste der vier Zahlen B, C, D, E. Da aber D nach (4) nicht die kleinste der fünf Zahlen A, B, C, D, E sein kann, folgt $A < D < B < C < E$.
Nach (3) ist $C = 14$. Somit sind A, D und B drei natürliche Zahlen, für die $10 < A < D < B < 14$ gilt. Das ist nur möglich mit $A = 11$, $D = 12$, $B = 13$. Nach (1) gilt daher $E = 16$.

Somit lässt sich aus den Angaben der Aufgabenstellung eindeutig ermitteln, wie alt jedes der fünf Mädchen ist, und zwar gilt: Anja ist 11, Birgit 13, Carmen 14, Dorit 12 und Elke 16 Jahre alt.

Aufgabe 310732:
Ein Mensch antwortet auf die Frage nach seinem Geburtstag:

„Im Jahre 1989 wurde ich a Jahre alt. Geboren wurde ich am t-ten Tag des m-ten Monats des Jahres $(1900 + j)$. Die Zahlen a, j, m, t sind natürliche Zahlen; für sie gilt $a \cdot j \cdot m \cdot t = 105792$.“
Stelle fest, ob die Zahlen a, j, m, t durch diese Angaben eindeutig bestimmt sind! Ist das der Fall, so gib diese Zahlen an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Aus der Bedeutung der Zahlen folgt $0 < m \leq 12$, $0 < t \leq 31$; (1) auch die Zahlen a und j, für die $a \cdot j \cdot m \cdot t = 105792$ (2) gilt, sind folglich beide größer als Null.
Sie erfüllen ferner $a + j = 89$ (3) und sind daher beide kleiner als 89.
Wegen der Primfaktorzerlegung $105792 = 26 \cdot 3 \cdot 19 \cdot 29$ hat 105792 unter den natürlichen Zahlen kleiner als 89 genau die folgenden Teiler: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 19, 24, 29, 32, 38, 48, 57, 58, 64, 76, 87.

Die einzigen Möglichkeiten, hieraus zwei Zahlen a, j mit (3) auszuwählen, sind

$$(a; j) = (2; 87), (87; 2), (32; 57), (57, 32). (4)$$

Von ihnen scheiden (2;87) und (87,2) aus; denn wegen (1) wäre für sie $a \cdot j \cdot m \cdot t \leq 2 \cdot 87 \cdot 12 \cdot 31 < 105792$, was (2) widerspricht.
Daher folgt nun aus (2), dass m und t die Bedingung

$$m \cdot t = \frac{105792}{32 \cdot 57} = 2 \cdot 29$$

erfüllen. Da 2 und 29 Primzahlen sind, ist das wegen (1) nur mit $m = 2$, $t = 29$ (5) möglich; d. h., der Geburtstag kann nur ein 29. Februar gewesen sein. Diese Datumsangabe ist mit $j = 57$, d. h. für das Jahr 1957, nicht möglich, da es kein Schaltjahr war.

Also verbleibt von (4) nur die Möglichkeit $a = 57$, $j = 32$. (6)
Damit ist gezeigt: Die Zahlen a, j, m, t sind durch die Angaben eindeutig bestimmt; sie lauten wie in (5), (6) angegeben.

IV Zahlentheorie

IV.I Primzahlen, Teilbarkeit

I Runde 1

Aufgabe 030715:
Mit wie viel Nullen endet das Produkt aller natürlichen Zahlen von 1 bis 40? (Begründung!)

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Das Produkt enthält die Faktoren 5, 10, 15, 20, 30, 35 und 40, sowie den Faktor 25, in denen insgesamt neunmal der Faktor 5 vorkommt.
In allen übrigen Faktoren tritt der Faktor 5 nicht auf. Da die Anzahl der Endnullen von der Anzahl der Faktoren 2 und 5 abhängt und im vorliegenden Fall der Faktor mindestens neunmal auftritt, hat das Produkt genau 9 Endnullen.

Aufgabe 030716:
a) Es ist die kleinste natürliche Zahl zu finden, die bei der Division durch 2, 3, 4, 5, und 6 jeweils den Rest 1 lässt, aber durch 7 teilbar ist.

b) Nenne zwei weitere Zahlen mit dieser Eigenschaft und gib an, wie man beliebig viele solche Zahlen bekommen kann!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Das kleinste gemeinsame Vielfache von 2, 3, 4, 5, und 6 ist 60. Die Zahlen 1, 61, 121, 181, ... lassen also bei der Division durch 2, 3, 4, 5, und 6 jeweils den Rest 1. Durch Probieren findet man, dass 301 die kleinste dieser Zahlen ist, die sich durch 7 teilen lässt.

b) Weitere Zahlen sind z. B. 721 und 1141. Durch Addition von 420 zu einer derartigen Zahl erhält man stets eine weitere Zahl mit der gewünschten Eigenschaft.

Aufgabe 040714:
Jede natürliche Zahl heißt vollkommene Zahl, wenn sie gleich der Summe ihrer echten Teiler ist. Die Zahl 12 hat zum Beispiel die echten Teiler 1, 2, 3, 4, 6 und ist; wie man sieht; keine vollkommene Zahl.
Welche vollkommenen Zahlen gibt es unter den natürlichen Zahlen von 1 bis 30?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Man schreibt die echten Teiler der natürlichen Zahlen von 2 bis 30 für jede dieser Zahlen auf und bildet jeweils die Summe. Dabei findet man

$$6 = 1 + 2 + 3 \qquad \text{und} \qquad 28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$$

Aufgabe 080711:
Der größte gemeinsame Teiler zweier natürlicher Zahlen ist 6, ihr kleinstes gemeinsames Vielfaches ist 210.
Ermittle alle Zahlenpaare mit den genannten Eigenschaften!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Beide gesuchten Zahlen sind 1. Teiler von 210 und 2. Vielfache von 6. Wegen $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ sind sowohl Teiler von 210 als auch Vielfache von 6 die folgenden Zahlen: 6, 30, 42 und 210 und nur diese. Folgende Zahlenpaare müssen untersucht werden:

(1) 6 und 30
(2) 6 und 42
(3) 6 und 210
(4) 30 und 42
(5) 30 und 210
(6) 42 und 210.

Bei den ersten beiden Paaren ist das kleinste gemeinsame Vielfache 30 bzw. 42, aber nicht 210; die Paare 5 und 6 haben als größten gemeinsamen Teiler 30 bzw. 42, aber nicht 6. Für die Paare 3 und 4 treffen die gestellten Bedingungen zu.
Die Zahlenpaare 6 und 210 sowie 30 und 42 erfüllen als einzige die gestellten Bedingungen.

Aufgabe 100713:
a) Beweise folgenden Satz: Wenn vier natürliche Zahlen eine ungerade Zahl als Summe haben, so haben sie als Produkt eine gerade Zahl.

b) Untersuche, ob für jede gerade Anzahl von natürlichen Zahlen der folgende Satz gilt:
Wenn diese natürlichen Zahlen eine ungerade Zahl als Summe haben, so haben sie als Produkt eine gerade Zahl.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

1. Wenn die Summe s 4 natürlicher Zahlen a, b, c, d ungerade ist, muss mindestens eine der Zahlen gerade sein, denn wenn alle ungerade wären, wäre die Summe gerade:
$$s = a + b + c + d = (2k + 1) + (2i + 1) + (2j + 1) + (2l + 1) = 2(k + i + j + l + 2)$$
Damit wäre s ein Vielfaches von 2 und somit gerade (Widerspruch zur Voraussetzung), also muss mindestens eine der Zahlen a, b, c, d gerade sein. Also gilt mit o. B. d. A. $a = 2k$ für das Produkt p:
$$p = a \cdot b \cdot c \cdot d = 2k \cdot b \cdot c \cdot d$$
und das ist eine gerade Zahl.

2. Wenn die Summe s von einer geraden Anzahl natürlicher Zahlen ungerade ist, muss mindestens eine der Zahlen gerade sein, denn wenn alle $2x$ Zahlen ungerade wären, wäre die Summe gerade:
$$s = (2k + 1) + (2i + 1) + (2j + 1) + (2l + 1) + ... = 2(k + i + j + l + ... + x)$$
wäre ein Vielfaches von 2 und somit gerade, also muss mindestens eine Zahl gerade sein. Also gilt mit o. B. d. A. $a = 2k$ für das Produkt p:
$$p = a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot ... = 2k \cdot b \cdot c \cdot d \cdot ...$$
und das ist wieder eine gerade Zahl.

Aufgabe 130711:
Gib sämtliche Teiler der Zahl 111111 an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wegen $111111 = 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37$ hat 111111 genau die 32 Teiler 1, 3, 7, 11, 13, 37 und

$$\begin{array}{ccc}
3 \cdot 7 = 21 & 3 \cdot 11 = 33 & 3 \cdot 13 = 39 \\
3 \cdot 37 = 111 & 7 \cdot 11 = 77 & 7 \cdot 13 = 91 \\
7 \cdot 37 = 259 & 11 \cdot 13 = 143 & 11 \cdot 37 = 407 \\
13 \cdot 37 = 481 & 3 \cdot 7 \cdot 11 = 231 & 3 \cdot 7 \cdot 13 = 273 \\
3 \cdot 7 \cdot 37 = 777 & 3 \cdot 11 \cdot 13 = 429 & 3 \cdot 11 \cdot 37 = 1221 \\
3 \cdot 13 \cdot 37 = 1443 & 7 \cdot 11 \cdot 13 = 1001 & 7 \cdot 11 \cdot 37 = 2849 \\
7 \cdot 13 \cdot 37 = 3367 & 11 \cdot 13 \cdot 37 = 5291 & 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = 3003 \\
3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 37 = 8547 & 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37 = 10101 & 3 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37 = 15873 \\
7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37 = 37037 & 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37 = 111111 &
\end{array}$$

Aufgabe 180714:
Ermittle die kleinste Primzahl, die bei Division durch 5, 7 und 11 jeweils den Rest 1 lässt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Ist p die gesuchte Primzahl, so ist $p-1$ durch 5, 7 und 11 teilbar. Außerdem ist, da die einzige gerade Primzahl $p = 2$ die geforderten Eigenschaften nicht aufweist, p ungerade, also $p-1$ auch durch 2 teilbar. Deshalb, und weil 2, 5, 7 und 11 paarweise teilerfremd sind, kommen für p nur um 1 vermehrte Vielfache von $2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 770$ in Frage.

Die Zahl 771 ist durch 3, die Zahl $2 \cdot 770 + 1 = 1541$ durch 23 teilbar. Die nächste derartige Zahl lautet $3 \cdot 770 + 1 = 2311$. Da sie weder durch 2 noch durch 3, 5, 7, 11, 13, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43 und 47 teilbar ist und da $532 = 2809 > 2311$ ist, ist 2311 eine Primzahl.
2311 lässt bei Division durch 5, 7 und 11 jeweils den Rest 1, daher ist sie die gesuchte Zahl.

Aufgabe 190712:
Ermittle alle diejenigen vierstelligen natürlichen Zahlen, die die Eigenschaft haben, durch jede der Zahlen 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 15 teilbar zu sein!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Eine natürliche Zahl ist genau dann durch die angegebenen Zahlen teilbar, wenn sie durch deren kgV teilbar ist. Wegen der Primfaktorzerlegung

$$\begin{array}{cccc}
2 = 2 & 5 = 5 & 8 = 2^3 & 12 = 2^2 \cdot 3 \\
3 = 3 & 6 = 2 \cdot 3 & 9 = 3^2 & 14 = 2 \cdot 7 \\
4 = 2^2 & 7 = 7 & 10 = 2 \cdot 5 & 15 = 3 \cdot 5
\end{array}$$

ist dieses kgV die Zahl $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 2520$. Alle (von 0 verschiedenen) natürlichen Vielfachen dieser Zahl sind: Die Zahlen $1 \cdot 2520 = 2520$, $2 \cdot 2520 = 5040$, $3 \cdot 2520 = 7560$ sowie alle Zahlen $n \cdot 2520$ mit natürlichem $n \geq 4$.
Für jedes $n \geq 4$ gilt aber: Wegen $n \cdot 2520 \geq 4 \cdot 2520 = 10080$ ist die Zahl $n \cdot 2520$ nicht vierstellig.
Daher erfüllen genau die Zahlen 2520, 5040 und 7560 die Bedingungen der Aufgabe.

Aufgabe 220712:
Die (untereinander nicht verwandten) Ehepaare Meier und Schmidt machen gemeinsam mit ihren Kindern eine kurze Urlaubsfahrt und nehmen dazu einen größeren Vorrat an Papierservietten mit.
Jeder Teilnehmer erhält zu jeder Mahlzeit eine Serviette. Von jedem Teilnehmer wurde dieselbe Anzahl Mahlzeiten eingenommen, und zwar mehr als eine.
Nach Abschluss der Fahrt stellte man fest, dass genau 121 Servietten verbraucht wurden.
Wie viel Kinder dieser Familie nahmen insgesamt an der Reise teil?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Anzahl der verbrauchten Papierservietten ist gleich dem Produkt aus der Anzahl der Teilnehmer und der Anzahl der von jedem Teilnehmer eingenommenen Mahlzeiten.
Nun ist $121 = 11 \cdot 11$ die einzige Faktorzerlegung, die hier in Frage kommt; denn $121 = 1 \cdot 121$ scheidet aus, da sowohl die Anzahl der Teilnehmer als auch die Anzahl der Mahlzeiten jedes Teilnehmers größer als 1 war. Folglich haben insgesamt 11 Familienmitglieder, mithin also genau 7 Kinder an der Urlaubsfahrt teilgenommen.

Aufgabe 260711:
Ermittle für jede der nachfolgenden Teilaufgaben a) bis e) jeweils alle diejenigen natürlichen Zahlen n, die die angegebene Forderung erfüllen!

a) Die Summe $\left(\frac{7}{12}+\frac{n}{12}\right)$ ist ein echter Bruch.
b) Die Summe $\left(\frac{7}{12}+\frac{n}{12}\right)$ ist ein echter Bruch, der sich nicht mehr durch Kürzen vereinfachen lässt.
c) Die Aufgabe, die Differenz $\left(\frac{7}{12}-\frac{n}{12}\right)$ zu berechnen, ist im Bereich der gebrochenen Zahlen nicht lösbar.
d) Die Differenz $\left(\frac{7}{12}-\frac{n}{12}\right)$ ist ein echter Bruch.
e) Die Summe $\left(\frac{7}{12}+\frac{n}{12}\right)$ ist eine natürliche Zahl.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Für jede natürliche Zahl n gilt $\frac{7}{12}+\frac{n}{12}=\frac{7+n}{12}$; diese Summe ist genau dann ein echter Bruch, wenn $7+n<12$ gilt. Das trifft genau für $n=0;1;2;3;4$ zu.

b) Aus den unter a) ermittelten n erfüllen genau diejenigen auch die Forderung b), die nach Addition von 7 eine zu 12 teilerfremde Zahl ergeben. Dies trifft genau für $n=0;4$ zu.

c) Die Aufgabe, die Differenz $\frac{7}{12}-\frac{n}{12}$ zu berechnen, ist genau dann in Bereich der gebrochenen Zahlen lösbar, wenn $n \leq 7$ gilt. Daher wird die Forderung c) genau von allen natürlichen Zahlen $n>7$ erfüllt.

d) Für alle natürlichen Zahlen $n \leq 7$ gilt $\frac{7}{12}-\frac{n}{12}=\frac{7-n}{12}$. Diese Differenz ist genau dann ein echter Bruch, wenn $7-n<12$ gilt. Dies trifft genau für alle natürlichen Zahlen $n \leq 7$ (d. h. $n=0;1;2;3;4;5;6;7$) zu.

e) Die Summe $\frac{7+n}{12}$ ist genau dann eine natürliche Zahl, wenn $(7+n)$ ein ganzzahliges Vielfaches von 12 ist; d. h. genau dann, wenn n eine der Zahlen $n=5;17;29;\ldots$ ist. Diese Zahlen lassen sich in der Form $n=12k+5$ $(k=0,1,2,\ldots)$ darstellen.

II Runde 2

Aufgabe 030721:
Durch welche höchste Potenz von 2 ist das Produkt von vier aufeinanderfolgenden geraden natürlichen Zahlen mindestens teilbar?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Von vier aufeinander folgenden natürlichen Zahlen ist stets genau eine mindestens durch 4 und genau eine andere durch 2, aber nicht durch 4 teilbar.
Demnach ist von den vier aufeinander folgenden geraden natürlichen Zahlen stets genau eine mindestens durch 8 und genau eine weitere durch 4, aber nicht durch 8 teilbar.
Die beiden anderen geraden Zahlen sind in jedem Fall durch 2, aber nicht durch 4 teilbar. Damit ist das betrachtete Produkt durch $8 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2 = 2^7$ teilbar.

Da unter den vier aufeinander folgenden geraden Zahlen keine durch 16 teilbar sein muss, ist das Produkt im allgemeinen nicht durch 2^8 teilbar. Die gesuchte höchste Potenz ist demnach 2^7.

Aufgabe 040721:
Beweise, dass die Summe von 7 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, von denen die kleinste durch 3 teilbar ist, durch 21 teilbar ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
$3n$ sei die kleinste der Zahlen, welche durch 3 teilbar ist. Dabei ist n eine natürliche Zahl. Für die Summe gilt dann:

$$3n + 3n + 1 + 3n + 2 + 3n + 3 + 3n + 4 + 3n + 5 + 3n + 6 = 21n + 21 = 21 \cdot (n + 1)$$

Da die Summe als $21 \cdot (n + 1)$ dargestellt werden kann, ist sie folglich durch 21 teilbar.

Aufgabe 070724:
Auf einer Exkursion fuhren mit Autobussen genau 319 Schüler, auf einer anderen Exkursion genau 232. In jedem der Autobusse, die insgesamt dabei fuhren, saß genau die gleiche Anzahl Schüler. Ermittle diese Anzahl! (Wir setzten dabei voraus, dass in jedem Autobus mehr als ein Schüler saß.)

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Anzahl der Schüler pro Autobus muss ein gemeinsamer Teiler > 1 von 319 und 232 sein. Wegen $319 = 11 \cdot 29$ und $232 = 8 \cdot 29$ ist die Primzahl 29 der einzige gemeinsame Teiler > 1 von 319 und 232; denn 11 und 8 sind teilerfremd.
Daher fuhren in jedem Bus genau 29 Schüler.

Aufgabe 110721:
Ermittle alle dreistelligen natürlichen Zahlen, die gleichzeitig durch 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 12 und 14 teilbar sind!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Eine Zahl ist genau dann gleichzeitig durch 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 12 und 14 teilbar, wenn sie das kgV dieser Zahlen ist oder ein Vielfaches davon. Wegen

$$2 = 2 \qquad 3 = 3 \qquad 4 = 2 \cdot 2 \qquad 6 = 2 \cdot 3 \qquad 7 = 7 \qquad 8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$$

$$9 = 3 \cdot 3 \qquad 12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \qquad 14 = 2 \cdot 7$$

ist das kgV gleich $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 504$.
Die einzige dreistellige natürliche Zahl, die durch 504 teilbar ist, ist 504. Daher ist 504 die einzige Zahl, die allen Bedingungen der Aufgabe entspricht.

Aufgabe 130722:
Karl sucht drei von Null verschiedene natürliche Zahlen a, b, c, für die folgendes gilt:

ggT$(a, b) = 4$ (lies: Der ggT der Zahlen a und b ist 4),
ggT$(a, c) = 6$,
ggT$(b, c) = 14$.

Er behauptet nach einigem Probieren, dass es sogar mehr als eine Möglichkeit gibt, drei solche Zahlen anzugeben.
Ist diese Behauptung richtig?
Gibt es eine Möglichkeit der Wahl dreier solcher Zahlen a, b, c, bei der, verglichen mit allen übrigen Möglichkeiten, a am kleinsten und zugleich b am kleinsten und zugleich c am kleinsten ist? Wenn ja, dann gib für diesen Fall die Zahlen a, b, c an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Erfüllen a, b, c die drei genannten Bedingungen über den ggT, so ist a durch 4 und durch 6, also durch das kgV dieser Zahlen, d. h. durch 12, teilbar.
Ferner ist dann b durch 4 und durch 14, also durch das kgV dieser Zahlen, d. h. durch 28, teilbar.
Ebenso ist c durch 6 und 14, also durch 42 teilbar.

Andererseits erfüllt die Wahl von (1) $a = 12$, $b = 28$, $c = 42$ alle drei ggT-Bedingungen. Daher ist die zweite Frage der Aufgabe mit Ja und der Angabe (1) zu beantworten.

Multipliziert man a in (1) mit einer zu b und c teilerfremden Zahl $z > 1$ (z. B. mit $z = 5$), so erhält man eine andere Wahl dreier Zahlen (im Beispiel 60, 28, 42), die ebenfalls alle drei ggT-Bedingungen erfüllt. Daher ist auch die erste Frage der Aufgabe mit Ja zu beantworten.

Aufgabe 170722:
a) Beweise: Die Summe von fünf aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist stets durch 5 teilbar!

b) Untersuche, ob auch die Summe von sechs aufeinanderfolgenden Zahlen immer durch 6 teilbar ist!

c) Ermittle eine weitere natürliche Zahl n ($n > 6$), für die gilt: Die Summe von n aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist stets durch n teilbar!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Es sei a eine beliebige natürliche Zahl. Dann gilt:

$$a + (a + 1) + (a + 2) + (a + 3) + (a + 4) = 5a + 10$$

Es gilt der Satz: Wenn z ein Teiler sowohl von x als auch von y ist, so ist z auch ein Teiler der Summe $x + y$. Nun ist 5 ein Teiler von $5a$, und 5 ist auch ein Teiler von 10. Folglich gilt: $5|5a + 10$.

b) Ein Gegenbeispiel zeigt, dass die Summe von sechs aufeinanderfolgenden Zahlen nicht immer durch 6 teilbar ist:
Es gilt z. B. $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$; $6 \nmid 21$.

c) Für n = 7 z. B. gilt: $a + (a + 1) + (a + 2) + (a + 3) + (a + 4) + (a + 5) + (a + 6) = 7a + 21$
Nun gilt $7|7a$ und $7|21$, daraus folgt: $7|7a + 21$. Eine natürliche Zahl, für die die Aussage wahr ist, ist somit z. B. $n = 7$.

Aufgabe 200723:
Jens sagt: „Ich denke mir zwei natürliche Zahlen. Ihr kleinstes gemeinsames Vielfache (kgV) beträgt 51975, ihr größter gemeinsamer Teiler (ggT) ist 45. Eine der beiden Zahlen lautet 4725.“

Stelle fest, ob es genau eine natürliche Zahl gibt, die nach diesen Angaben die zweite von Jens gedachte Zahl sein kann! Trifft das zu, so ermittle diese zweite Zahl!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Primzerlegungen der genannten Zahlen sind:
kgV: $51975 = 33 \cdot 52 \cdot 7 \cdot 11$,
ggT: $45 = 32 \cdot 5$,
erste Zahl: $4725 = 33 \cdot 52 \cdot 7$.
Wenn eine natürliche Zahl z die zweite gedachte Zahl sein kann, so gilt für sie:
In ihrer Primzerlegung enthält sie höchstens solche Primzahlen, die im kgV vorkommen, also höchstens die Primzahlen 3, 5, 7, 11. Die Primzahl 3 kommt in 4725 in größerer Anzahl vor als im ggT, wo sie in der Anzahl 2 auftritt. Daher muss sie in z in dieser Anzahl 2 als Faktor vorkommen.

Die Primzahl 5 kommt in 4725 in größerer Anzahl vor als im ggT, wo sie in der Anzahl 1 auftritt. Daher muss sie in z in dieser Anzahl 1 als Faktor vorkommen.
Die Primzahl 7 kommt in 4725 vor, aber nicht im ggT. Daher kann sie in z nicht auftreten. Die Primzahl 11 kommt nicht in 4725 vor, aber im kgV, wo sie in der Anzahl 1 auftritt. Daher muss sie in z in dieser Anzahl 1 als Faktor vorkommen.
Also kann höchstens die Zahl $z = 32 \cdot 5 \cdot 11 = 495$ die zweite gedachte Zahl sein. Sie kann dies tatsächlich; denn $4725 = 33 \cdot 52 \cdot 7$ und $z = 32 \cdot 5 \cdot 11$ haben das kgV $33 \cdot 52 \cdot 7 \cdot 11 = 51975$ und den ggT $32 \cdot 5 = 45$.
Es gibt folglich genau eine natürliche Zahl, die die zweite gedachte Zahl sein kann: sie lautet 495.

Aufgabe 210723:
Ermittle alle Paare $(a; b)$ natürlicher Zahlen a und b mit $0 < a < b$, deren größter gemeinsamer Teiler 15 und deren Produkt 7875 ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn ein Paar $(a; b)$ natürlicher Zahlen a und b den Bedingungen der Aufgabe entspricht, so folgt:

(1) Es gibt natürliche Zahlen m, n mit $a = 15m$, $b = 15n$.
(2) Wegen $0 < a < b$ folgt $0 < m < n$,
(3) wegen $ab = 7875$ folgt $15m \cdot 15n = 7875$, also $225mn = 7875$, $mn = 35$. (3)

Da 35 die Primfaktorzerlegung $35 = 5 \cdot 7$ hat, gibt es für (2), (3) nur die Möglichkeiten, dass entweder $m = 1$, $n = 35$ oder $m = 5$, $n = 7$ gilt. Aus (1) folgt daher, dass nur die Paare $(15; 525)$, $(75; 105)$ die Bedingungen der Aufgabe erfüllen können.

II. Sie erfüllen diese Bedingungen; denn es gilt $0 < 15 < 525$, $0 < 75 < 105$; wegen der Primfaktorzerlegungen $15 = 3 \cdot 5$, $525 = 3 \cdot 52 \cdot 7$, $75 = 3 \cdot 52$, $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$ ist $3 \cdot 5 = 15$ der ggT von 15 und 525 sowie auch der ggT von 75 und 105; schließlich gilt $15 \cdot 525 = 7875$ und $75 \cdot 105 = 7875$.
Daher erfüllen genau die Paare $(15; 525)$ und $(75; 105)$ die Bedingungen der Aufgabe.

Aufgabe 280721:
Im Mathematikunterricht einer Klasse wurden über eine natürliche Zahl, die zwischen 100 und 200 liegt, durch Schüler folgende Aussagen getroffen.

(1) André: „Die Zahl ist durch 11 teilbar.“

(2) Birgit: „Die Zahl ist eine Primzahl."
(3) Christian: „Die Zahl ist eine zusammengesetzte Zahl."
(4) Doris: „Die Zahl ist eine Quadratzahl."

Der Mathematiklehrer stellt fest, dass genau eine dieser vier Aussagen falsch ist.
Untersuche, ob die Zahl durch diese Feststellungen eindeutig bestimmt ist! Ist dies der Fall, dann gib die Zahl an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Da eine Primzahl weder zusammengesetzte Zahl noch Quadratzahl sein kann, muss die Aussage (2) falsch sein, denn sonst wären (3) und (4) falsch, was der Feststellung des Mathematiklehrers widersprechen würde.
Nochmals wegen dieser Feststellung ist (2) die einzige falsche der Aussagen (1) bis (4), also sind (1) und (4) wahr.
Die gesuchte Zahl ist somit eine durch 11 teilbare Quadratzahl. Da 11 eine Primzahl ist, muss diese durch 11 teilbare Quadratzahl sogar durch $11^2 = 121$ teilbar sein. Die einzige durch 121 teilbare Zahl zwischen 100 und 200 ist aber die Zahl 121 selbst.
Damit ist gezeigt, dass die gesuchte Zahl eindeutig bestimmt ist; sie lautet 121.

Aufgabe 320721:
In einer Diskussion werden drei verschiedene Aufgabenstellungen betrachtet:

a) Die Zahl 231 soll als Produkt dargestellt werden. Jeder Faktor soll eine Primzahl sein.
b) Die Zahl 231 soll als Produkt aus genau drei Faktoren dargestellt werden. Jeder Faktor soll eine natürliche Zahl sein. Je zwei der Faktoren sollen voneinander verschieden sein.
c) Dieselbe Aufgabe wie b) wird mit 462 statt 231 gestellt.

Gib zu a), b) und c) jeweils alle verschiedenen Darstellungen an! Dabei gelten Darstellungen, die sich nur durch die Reihenfolge der Faktoren unterscheiden, nicht als verschieden. Begründe, dass du alle gesuchten Darstellungen angegeben hast!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Es gilt $231 = 3 \cdot 7 \cdot 11$. (1)
3, 7 und 11 sind Primzahlen. Die Darstellung einer natürlichen Zahl als Produkt von Primzahlen ist bis auf die Reihenfolge der Faktoren eindeutig. Also ist (1) die einzige in a) gesuchte Darstellung.

b) Jeder Faktor soll eine natürliche Zahl $\neq 0$ sein, also entweder die Zahl 1 oder eine Primzahl oder ein Produkt mehrerer Primzahlen. Da je zwei der Faktoren voneinander verschieden sein sollen, darf die Zahl 1 höchstens einmal als Faktor vorkommen.
Also kommen für b) außer der Darstellung (1) mit ihren drei Faktoren noch genau diejenigen Darstellungen hinzu, in denen ein Faktor 1 lautet, ein Faktor eine Primzahl ist und der dritte das Produkt der beiden anderen Primzahlen:

$$231 = 1 \cdot 3 \cdot 77, \qquad 231 = 1 \cdot 7 \cdot 33, \qquad 231 = 1 \cdot 11 \cdot 21$$

c) Wegen der Zerlegung von 462 in die vier Primfaktoren 2, 3, 7 und 11 gibt es genau folgende in c) gesuchte Darstellungen: Wenn kein Faktor 1 lautet, sind zwei Faktoren Primzahlen, der dritte ist das Produkt der beiden anderen Primzahlen:

$$462 = 2 \cdot 3 \cdot 77, \quad 462 = 2 \cdot 7 \cdot 33, \quad 462 = 2 \cdot 11 \cdot 21, \quad 462 = 3 \cdot 7 \cdot 22, \quad 462 = 3 \cdot 11 \cdot 14, \quad 462 = 7 \cdot 11 \cdot 6$$

Wenn ein Faktor 1 lautet, so gilt: Entweder ist ein weiterer Faktor eine Primzahl und der dritte das Produkt der drei anderen Primzahlen; oder jeder der Faktoren außer der 1 ist das Produkt aus zwei Primzahlen:

$$462 = 1 \cdot 2 \cdot 231, \qquad 462 = 1 \cdot 3 \cdot 154, \qquad 462 = 1 \cdot 7 \cdot 66, \qquad 462 = 1 \cdot 11 \cdot 42$$

$$462 = 1 \cdot 6 \cdot 77, \qquad 462 = 1 \cdot 14 \cdot 33, \qquad 462 = 1 \cdot 22 \cdot 21$$

Aufgabe 340724:
a) Für fünf unmittelbar aufeinanderfolgende natürliche Zahlen wird gefordert, dass ihre Summe 230 beträgt.
Zeige, dass es genau eine Möglichkeit gibt, diese Forderung durch fünf unmittelbar aufeinanderfolgende natürliche Zahlen zu erfüllen! Welches ist die erste dieser fünf Zahlen?

b) Jetzt wird gefordert, dass die Summe durch 23 teilbar sein und dabei einen möglichst kleinen Wert haben soll.
Welches ist die erste von fünf unmittelbar aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, mit denen diese Forderungen erfüllt werden?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Fünf Zahlen der Form $n, n+1, ..., n+4$ erfüllen genau dann die Forderung $n+n+1+...+n+4 = 230$, wenn $5n + 10 = 230$ gilt. Das trifft genau dann zu, wenn die erste dieser Zahlen $n = 44$ ist.
b) Für jede natürliche Zahl n ist die betrachtete Summe $5n+10$ durch 5 teilbar. Sie ist genau dann auch, wie gefordert, durch 23 teilbar, wenn sie durch $5 \cdot 23 = 115$ teilbar ist; denn 5 und 23 sind zueinander teilerfremd.
Den kleinsten durch 115 teilbaren Wert erreicht $5n + 10$, wenn $5n + 10 = 115$ gilt. Das trifft genau dann zu, wenn die erste der fünf Zahlen $n = 21$ ist.

III Runde 3

Aufgabe 030732:
a) Nenne alle Primfaktoren der Zahl 111111.
b) Gib noch 10 weitere Teiler dieser Zahl an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Es gilt:

$$111111 : 3 = 37037; \qquad 37037 : 7 = 5291; \qquad 5291 : 11 = 481; \qquad 481 : 13 = 37$$

Die Primfaktoren der Zahl 111111 lauten 3, 7, 11, 13 und 37.
b) Weitere Teiler sind

$$21(3 \cdot 7) \qquad 33(3 \cdot 11) \qquad 39(3 \cdot 13) \qquad 111(3 \cdot 37) \qquad 77(7 \cdot 11)$$

$$91(7 \cdot 13) \qquad 259(7 \cdot 37) \qquad 143(11 \cdot 13) \qquad 407(11 \cdot 37) \qquad 231(13 \cdot 37).$$

Aufgabe 060731:
Es seien a, b, c natürliche Zahlen, wobei a durch b und b durch c teilbar ist.
Ermittle das kleinste gemeinschaftliche Vielfache und den größten gemeinsamen Teiler der Zahlen a, b und c für $a \geq 1, b \geq 1, c \geq 1$!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(1) Sind p, q natürliche Zahlen ≥ 1, wobei p durch q teilbar ist, so ist p das kgV von p, q.

(2) Bei gleichen Voraussetzungen ist q der ggT von p, q.

(3) Das kgV von a, b, c ist das kgV von a und dem kgV von b, c. Also ist es nach (1) das kgV von a und b. Nochmals nach (1) folgt, dass es a ist.

(4) Der ggT von a, b, c ist der ggT von c und dem ggT von a, b. Also ist er nach (2) der ggT von c und b. Nochmals nach (2) folgt, dass er c ist.

Aufgabe 130732:
Zeige, dass für jede Primzahl $p \geq 3$ das Produkt $(p+1)p(p-1)$ durch 24 teilbar ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Von den drei aufeinanderfolgenden Zahlen $p-1, p, p+1$ ist stets eine durch 3 teilbar.
Wegen $p \geq 3$ ist die Primzahl p ungerade. Folglich sind $p-1$ und $p+1$ unmittelbar aufeinanderfolgende gerade Zahlen. Da von zwei unmittelbar aufeinanderfolgenden geraden Zahlen stets eine durch 4 teilbar ist, ist von den Zahlen $p-1$ und $p+1$ eine durch 2 und die andere durch 4 teilbar.
Somit ist $(p-1)p(p+1)$ durch 3 und durch 8, also, da 3 und 8 teilerfremd sind, auch durch 24 teilbar.

Aufgabe 140732:
Beweise: Unter je vier beliebigen natürlichen Zahlen gibt es mindestens zwei, deren Differenz durch 3 teilbar ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Für jede natürliche Zahl gilt:
Bei ihrer Division durch 3 tritt als Rest einer der Werte 0, 1, 2 auf. Unter diesen Werten befinden sich keine vier verschiedenen. Daher gibt es unter je vier beliebigen natürlichen Zahlen zwei, die bei Division durch 3 denselben Rest lassen.
Ist r dieser Rest, so sind diese beiden Zahlen von der Form $3p+r$ und $3q+r$ mit natürlichen Zahlen p, q.
Ihre Differenz ist demnach $(3p+r)-(3q+r) = 3(p-q)$ also durch 3 teilbar.

Aufgabe 160733:
Unter „Primzahldrillingen“ wollen wir drei Primzahlen verstehen, die sich in der Form p, $p+2$, $p+4$ darstellen lassen.
Beweise, dass es genau eine Zahl p gibt, für die $p, p+2, p+4$ „Primzahldrillinge“ sind, und ermittle diese!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, für eine Primzahl p seien $p, p+2, p+4$ Primzahldrillinge. Wenn p bei Division durch 3 den Rest 1 ließe, so wäre $p+2$ durch 3 teilbar und gleichzeitig (wegen $p > 1$) größer als 3, also nicht Primzahl.
Wenn p bei Division durch 3 den Rest 2 ließe, so wäre $p+4$ durch 3 teilbar und gleichzeitig größer als 3, also nicht Primzahl.
Also muss p durch 3 teilbar und folglich selbst die Primzahl 3 sein. In der Tat sind für $p = 3$ auch $p+2 = 5$ und $p+4 = 7$ Primzahlen. Somit gibt es, wie behauptet, genau eine Zahl p, für die $p, p+2, p+4$ Primzahldrillinge sind; dies ist die Zahl 3 (bzw. diese Primzahldrillinge sind 3, 5 und 7).

Aufgabe 220732:
Petra schreibt nacheinander sechs natürliche Zahlen auf. Die erste Zahl wählt sie beliebig, jede weitere genau um 7 größer als das Doppelte der jeweils vorangehenden Zahl. Sie stellt fest, dass die Summe der sechs aufgeschriebenen Zahlen durch 21 teilbar ist.

a) Bilde ein Beispiel, und bestätige in diesem Beispiel Petras Feststellung!
b) Beweise, dass bei jeder beliebigen Wahl der ersten Zahl die beschriebene Rechnung zu einer Summe führt, die durch 21 teilbar ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Wählt man als erste Zahl z. B. 0, so ergibt sich
als zweite Zahl $2 \cdot 0 + 7 = 7$,
als dritte Zahl $2 \cdot 7 + 7 = 3 \cdot 7 = 21$,
als vierte Zahl $2 \cdot 21 + 7 = 7 \cdot 7 = 49$,
als fünfte Zahl $2 \cdot 49 + 7 = 15 \cdot 7 = 105$,
als sechste Zahl $2 \cdot 105 + 7 = 31 \cdot 7 = 217$

und damit als Summe $57 \cdot 7 = 399$. Wegen $399 : 21 = 19$ ist diese Summe durch 21 teilbar.

b) Wählt man als erste Zahl n, so ergibt sich
als zweite Zahl $2n + 7$,
als dritte Zahl $2 \cdot (2n + 7) = 4n + 21$,
als vierte Zahl $2 \cdot (4n + 21) = 8n + 49$,
als fünfte Zahl $2 \cdot (8n + 49) = 16n + 105$,
als sechste Zahl $2 \cdot (16n + 105) = 32n + 217$

und damit als Summe $(1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32)n + 399 = 63n + 399$. Wegen $(63n + 399) : 21 = 3n + 19$ ist diese Summe durch 21 teilbar.

Aufgabe 250731:
Ermittle zu jeder natürlichen Zahl $n > 0$ die Anzahl derjenigen natürlichen Zahlen, die Teiler der Zahl 2^n sind!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Für jede natürliche Zahl $n > 0$ gilt:
Eine natürliche Zahl, die größer als 1 ist, ist genau dann Teiler von 2^n, wenn ihre Primfaktorzerlegung keine anderen Primfaktoren als die Primzahl 2 aufweist, und zwar nicht mehr als n solche Faktoren. Das trifft genau auf die n natürlichen Zahlen

$$2^1, 2^2, \dots, 2^{n-1}, 2^n \tag{1}$$

zu. Ferner gilt: $1 = 2^0$ ist Teiler der Zahl 2^n. (2)
Die gesuchte Anzahl der in (1) und (2) aufgezählten sämtlichen natürlichen Zahlen, die Teiler von 2^n sind, ist folglich $n + 1$.

Aufgabe 290735:
Wir betrachten das Produkt aller natürlicher Zahlen von 1 bis einschließlich 1 000.
Ermittle die Anzahl der Nullen, mit denen dieses Produkt endet!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Anzahl der Nullen am Ende einer Zahl gibt an, wie oft in ihr der Faktor $10 = 2 \cdot 5$ enthalten ist. In dem betrachteten Produkt

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot ... \cdot 997 \cdot 998 \cdot 999 \cdot 1000$$

ist der Faktor 2 in einer höheren Potenz enthalten als der Faktor 5. Deshalb endet dieses Produkt auf so viele Nullen wie die Anzahl der in diesem Produkt vorkommenden Faktoren 5.
Unter den Zahlen von 1 bis 1000 gibt es genau $1000 : 5 = 200$ Vielfache von 5. Von diesen sind genau $1000 : 25 = 40$ durch 25 teilbar, enthalten also je zwei Faktoren 5. Ferner enthalten genau $1000 : 125 =$

8 davon je drei Faktoren 5. Und genau eine Zahl (nämlich 625) enthält sogar vier Faktoren 5.

Deshalb enthält das genannte Produkt genau $200 + 40 + 8 + 1 = 249$ Faktoren 5 und endet daher auf genau 249 Nullen.

Aufgabe 310734:
Wenn für ein Paar von Primzahlen gilt, dass eine Primzahl des Paares um zwei größer ist als die andere, so bezeichnet man dieses Paar als ein Paar von Primzahlzwillingen.
Beweise, dass für jedes Paar von Primzahlzwillingen, die größer als 3 sind, die Summe der beiden Primzahlen dieses Paares stets durch 12 teilbar ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Ist (p, q) ein Paar von Primzahlzwillingen mit $q > p > 3$, so folgt:
Da 2 die einzige gerade Primzahl ist, ist p ungerade, also gilt $p = 2n + 1$ mit einer natürlichen Zahl n und daher $q = p + 2 = 2n + 3$. Also ist $p + q = (2n + 1) + (2n + 3) = 4(n + 1)$ durch 4 teilbar.

Da 3 die einzige durch 3 teilbare Primzahl ist, sind p und q nicht durch 3 teilbar. Wenn ferner p bei Division durch 3 den Rest 1 lassen würde, d. h., wenn p $= 3n + 1$ mit einer natürlichen Zahl n wäre, so ergäbe sich der Widerspruch, dass $q = p + 2 = 3n + 3 = 3(n + 1)$ durch 3 teilbar wäre. Also muss p bei Division durch 3 den Rest 2 lassen; d. h., es muss $p = 3n + 2$ mit einer natürlichen Zahl n gelten. Damit folgt $q = p + 2 = 3n + 4$; demnach ist $p + q = (3n + 2) + (3n + 4) = 3 \cdot (2n + 2)$ durch 3 teilbar.

Aus der Teilbarkeit von $p + q$ durch die zueinander teilerfremden Zahlen 4 und 3 folgt: $p + q$ ist durch $4 \cdot 3 = 12$ teilbar.

Aufgabe 340731:
Albrecht soll eine natürliche Zahl zwischen 1 und 1000000 ermitteln. Dirk, Evelyn und Franziska machen dazu jeweils genau eine wahre und eine falsche Aussage (in welcher Reihenfolge, wird nicht dazu gesagt):

Dirk: (1) Die gesuchte Zahl hat weniger als drei Dezimalstellen.
(2) Zerlegt man die gesuchte Zahl in Primfaktoren, so kommen in dieser Zerlegung genau zwei voneinander verschiedene Primzahlen vor, jede (mindestens einmal, aber) möglicherweise auch mehrmals.
Evelyn: (1) Die gesuchte Zahl ist durch 9 teilbar.
(2) Die gesuchte Zahl ist nicht durch 27 teilbar.
Franziska: (1) Die gesuchte Zahl lautet 91809.
(2) Die gesuchte Zahl ist durch 101 teilbar.

Zeige, dass die gesuchte Zahl auf diese Weise eindeutig bestimmt ist, und ermittle diese Zahl!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn die Bedingungen der Aufgabe von einer natürlichen Zahl n erfüllt werden, so folgt:
Wäre Evelyns Aussage (2) falsch, also n durch 27 teilbar, so wäre n auch durch 9 teilbar, d. h. auch Evelyns Aussage (1) falsch. Das widerspricht den Bedingungen der Aufgabe. Also ist Evelyns Aussage (2) wahr und (nochmals nach den Bedingungen der Aufgabe) ihre Aussage (1) falsch.
Das besagt: n ist durch 9, aber nicht durch 27 teilbar.

Wäre Franziskas Aussage (1) wahr, so wäre wegen $91809 : 101 = 909$ auch Franziskas Aussage (2) wahr. Wieder kann dies nach den Bedingungen der Aufgabe nicht sein, sondern es folgt: Aussage (1) ist falsch, Aussage (2) wahr, also lautet n nicht 91809, ist aber durch 101 teilbar.
Damit ist gezeigt: Zerlegt man n in Primfaktoren, so kommt in dieser Zerlegung die Primzahl 3 genau zweimal und die Primzahl 101 mindestens einmal vor. Also ist n mindestens dreistellig und daher Dirks

Aussage (1) falsch. Somit ist Dirks Aussage (2) wahr.

Außer den Primzahlen 3 und 101 kommt bei der Zerlegung von n in Primfaktoren daher keine weitere Primzahl vor. Käme 101 genau zweimal vor, so wäre $n = 3^2 \cdot 1012 = 91809$, was bereits widerlegt ist; käme 101 mehr als zweimal vor, so wäre $n \geq 3^2 \cdot 1013 > 1003$, also läge n nicht zwischen 1 und 1000000.
Also kommt 101 genau einmal vor; es gilt $n = 3^2 \cdot 101 = 909$.
Somit ist die gesuchte Zahl durch die Bedingungen der Aufgabe eindeutig bestimmt, sie lautet 909.

IV.II (Dezimal-)Zahldarstellung, Reste

I Runde 1

Aufgabe 060713:
In Rumänien gibt es Geldscheine zu 3 und 5 Lei.
Beweise: Jeder beliebige Geldbetrag in Lei, der größer als 7 Lei ist, kann unter alleiniger Verwendung von 3- und 5-Lei- Scheinen zusammengestellt werden, falls genügend viele dieser Geldscheine vorhanden sind!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wegen $3 + 5 = 8$, $3 + 3 + 3 = 9$ und $5 + 5 = 10$ lassen sich die Geldbeträge 8 Lei, 9 Lei und 10 Lei in der geforderten Weise zusammenstellen.
Die Zahlen 8, 9 und 10 sind drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen, die bei der Division durch 3 der Reihe nach den Rest 2 bzw. 0 bzw. 1 lassen. Jede natürliche Zahl, die bei der Division durch 3 den Rest 2 lässt, kann als Summe aus 2 und einem Vielfachen von 3 dargestellt werden (z. B. $17 = 2 + 5 \cdot 3$).
Entsprechendes gilt für diejenigen natürlichen Zahlen, die bei der Division durch 3 den Rest 0 bzw. 1 lassen.
Da bei der Division einer beliebigen natürlichen Zahl durch 3 nur diese drei Reste auftreten können, lassen sich die übrigen in der Aufgabe geforderten Geldbeträge, da sie größer sind als 8 Lei bzw. 9 Lei bzw. 10 Lei, durch Addition einer entsprechenden Anzahl von 3-Lei-Scheinen zu den „Grundbeträgen“ 8 Lei, 9 Lei bzw. 10 Lei zusammenstellen.

Aufgabe 080712:
Gegeben seien drei Gefäße, die genau 3 Liter, 8 Liter bzw. 18 Liter fassen können. Weiterhin ist die Möglichkeit gegeben, die Gefäße hinreichend oft mit Wasser zu füllen, zu leeren und ineinander umzufüllen.
Zeige, dass es möglich ist, alle ganzzahligen Litermengen von 1 bis 18 unter ausschließlicher Verwendung der drei Gefäße abzumessen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Mit dem 3-l-Gefäß kann man durch (z.T. wiederholtes) Einschütten in das 18-l-Gefäß 3 l, 6 l, 9 l, 12 l, 15 l und 18 l, mit dem 8-l-Gefäß 8 l und 16 l abmessen.
Durch das Ausgießen aus einem Gefäß in ein kleineres Gefäß erhält man 5 l und 10 l.
Gießt man das Wasser aus dem 18-l-Gefäß in beide kleineren Gefäße, bleiben 7 l als Rest zurück, und 11 l bekommt man dadurch, dass beide kleineren Gefäße in das große entleert werden. Füllt man die 7 l in das 3-l-Gefäß und in das 8-l-Gefäß, hat man in letzterem 4 l; gießt man diese wiederum in das wieder entleerte 3-l-Gefäß, verbleibt 1 l.
Entleert man das 18-l-Gefäß zweimal in das 8-l-Gefäß, bleiben 2 l zurück, und füllt man aus den beiden anderen Gefäßen 11 l nach, erhält man 13 l.
Wie gezeigt wurde, kann man 1 l im 8-l-Gefäß erhalten. Gießt man nun 1 l in das 18-l-Gefäß und zweimal 8 l dazu, befinden sich 17 l darin. Um 14 l abzumessen, gießt man 3 l und 8 l aus dem 18-l-Gefäß in die kleineren Gefäße, und es verbleiben 7 l, davon gibt man 3 l in das kleinste und 4 l in das mittlere Gefäß. Nun füllt man das größte aufs neue vollständig und füllt das 8-l-Gefäß auf. So verbleiben 14 l.

Aufgabe 100712:
Die Zahl 17 soll als Summe von Quadraten natürlicher, von 0 verschiedener Zahlen dargestellt werden. Gib alle voneinander verschiedenen Möglichkeiten an!
Anmerkung: Zwei Darstellungen dieser Art gelten genau dann als verschieden voneinander, wenn wenigstens ein Summand in der einen Darstellung nicht ebenso oft auftritt wie in der anderen Darstellung.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Unter den Quadraten natürlicher, von 0 verschiedener Zahlen gibt es genau 4, die nicht größer als 17 sind, nämlich 1; 4; 9; 16.
Sämtliche Möglichkeiten, 17 als Summe aus diesen Quadratzahlen darzustellen, sind die folgenden:

$$17 = 1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1$$
$$17 = 4+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1$$
$$17 = 4+4+1+1+1+1+1+1+1+1+1 = 4+4+4+1+1+1+1+1$$
$$17 = 4+4+4+4+1 = 9+1+1+1+1+1+1+1+1$$
$$17 = 9+4+1+1+1+1 = 9+4+4 = 16+1$$

Beweis: Es gibt genau folgende Fälle
1) Der größte auftretende Summand ist 1 (Möglichkeit 1).
2) Der größte auftretende Summand ist 4
2.1. Er tritt genau 1mal auf (Möglichkeit 2).
2.2. Er tritt genau 2mal auf (Möglichkeit 3).
2.3. Er tritt genau 3mal auf (Möglichkeit 4).
2.4. Er tritt genau 4mal auf (Möglichkeit 5).

3) Der größte auftretende Summand ist 9. Dieser kann höchstens 1mal auftreten.
3.1. Unter den übrigen Summanden ist 1 der größte (Möglichkeit 6).
3.2. Unter den übrigen Summanden ist 4 der größte. Er kann höchstens 2mal auftreten.
3.2.1. Er tritt genau 1mal auf (Möglichkeit 7).
3.2.2. Er tritt genau 2mal auf (Möglichkeit 8).

4) Der größte auftretende Summand ist 16. Dieser kann höchstens 1mal auftreten (Möglichkeit 9).

Aufgabe 110711:
Ermittle alle vierstelligen natürlichen Zahlen Z mit folgenden Eigenschaften:

(1) Die Zahl Z ist durch 8 teilbar.
(2) Die Ziffern von Z sind paarweise voneinander verschieden, d. h. in jeder dieser Zahlen darf jede Ziffer höchstens einmal auftreten.
(3) Alle verwendeten Ziffern bezeichnen, einzeln für sich betrachtet, jeweils Primzahlen.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wegen (3) kommen nur die Ziffern 2, 3, 5 und 7 in Frage. Wegen (2) müssen sie bei jeder der gesuchten Zahlen auch sämtlich verwendet werden. Daher und wegen (1) muss die Ziffer 2 die Einerstelle der gesuchten Zahlen besetzen.

Mithin können höchstens die Zahlen 3572; 3752; 5372; 5732; 7352; 7532 den Bedingungen der Aufgabe entsprechen.

Die Zahlen 3752 und 7352 sind durch 8 teilbar, die anderen dagegen nicht. Also erfüllen 3752 und 7352 als einzige alle Bedingungen der Aufgabe.

Aufgabe 120712:
Ermittle alle dreistelligen natürlichen Zahlen z, von denen jede die folgenden Bedingungen gleichzeitig erfüllt:

(1) Die Zahl z ist sowohl durch 9 als auch durch 11 teilbar.
(2) Vertauscht man bei der Zahl z die an der Hunderterstelle stehende Ziffer mit der an der Einerstelle stehenden, so erhält man eine neue dreistellige Zahl z', die $\frac{2}{9}$ der Zahl z beträgt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, eine dreistellige natürliche Zahl z habe die Eigenschaften (1) und (2).
Wegen (1) und weil 9 und 11 teilerfremd sind, ist z ein Vielfaches von 99. Da z dreistellig ist, können höchstens die Zahlen

$$198, 297, 396, 495, 594, 693, 792, 891, 990$$

die Bedingungen (1) und (2) erfüllen.
Von ihnen scheidet die Zahl 990 aus, da aus ihr durch Vertauschen der Einer- mit der Hunderterziffer keine dreistellige Zahl entsteht. Da ferner z' kleiner als z sein soll, scheiden auch die Zahlen 198, 297, 396 und 495 aus. Schließlich muss, da $z' = \frac{2}{9}z$ eine gerade Zahl ist, die Hunderterziffer von z eine gerade Zahl sein, also scheiden auch die Zahlen 594 und 792 aus. Für die restlichen beiden Zahlen erhält man:

z	$\frac{2}{9}z$	z'
693	154	396
891	198	198

Somit kann nur die Zahl $z = 891$ die Bedingungen (1) und (2) erfüllen. Eine Probe zeigt, dass sie die Eigenschaften (1), (2) tatsächlich hat.

Aufgabe 150711:
Zwei Mathematiker unterhalten sich über ihre unterschiedlichen Telefonnummern. Dabei stellte sich folgendes heraus:

(1) Jede der beiden Telefonnummern ist eine dreistellige Primzahl.
(2) Jede einzelne Ziffer in den beiden Telefonnummern stellt, als einstellige Zahl aufgefasst, ebenfalls eine Primzahl dar.
(3) Die Ziffern, die in den beiden Telefonnummern jeweils an der Zehnerstelle stehen, stimmen miteinander überein. Die Ziffer der Hunderterstelle der einen Telefonnummer ist die Ziffer der Einerstelle der anderen und umgekehrt.

Ermittle die Telefonnummern, und begründe das Ergebnis, ohne dabei eine Primzahlentabelle als Beweismittel zu verwenden!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die einstelligen Primzahlen sind 2, 3, 5, 7.

Wegen (1) können die Nummern weder durch 2 noch durch 5 teilbar sein, folglich enden sie wegen (2) auf 3 oder 7. Da die Nummern verschieden sind und wegen (3) und (1), haben die Nummern die Form $3x7$ bzw. $7x3$, wobei x eine einstellige Primzahl, also eine der Zahlen 2, 3, 5, 7 ist.
Es ist $x \neq 2$; denn $3|327$.
Es ist $x \neq 5$; denn $3|357$.
Es ist $x \neq 7$; denn $13|377$.
Für $x = 3$ erhält man die Zahlen 337 bzw. 737. Da die erste weder durch 2 noch durch 3, 5, 7, 11, 13, 17 teilbar ist und $192 = 361 > 337$ ausfällt, ist 337 eine Primzahl. Ebenso ist 733 weder durch 2 noch durch 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 teilbar und wegen $292 = 841 > 733$ mithin Primzahl.
Die beiden Mathematiker haben also die Telefonnummern 337 und 733.

Aufgabe 250712:
Ermittle alle zweistelligen natürlichen Zahlen, die folgenden Bedingungen genügen:

(1) Die Differenz der beiden Ziffern beträgt 5.
(2) Vertauscht man Zehnerziffer und Einerziffer miteinander, so entsteht eine zweistellige Zahl, deren Doppeltes um 4 größer ist als die ursprüngliche Zahl.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Bedingung (1) wird genau von den in der 1. Spalte der folgenden Tabelle genannten zweistelligen Zahlen erfüllt, wobei jedoch die Zahl 50 sogleich weggelassen wurde, da aus ihr durch Vertauschen der Ziffern keine zweistellige Zahl entsteht.
In der 2. Spalte steht jeweils die durch Vertauschen der Ziffern entstehende Zahl, in der 3. Spalte das Doppelte der Zahl in der 2. Spalte. In der 4. Spalte steht die um 4 vergrößerte ursprüngliche (d. h. in der 1. Spalte stehende) Zahl.

16	61	122	20		61	16	32	65
27	72	144	31		72	27	54	76
38	83	166	42		83	38	76	87
49	94	188	53		94	49	98	98

Genau für die Zahl 94 der 1. Spalte ergibt sich Gleichheit in der 3. und 4. Spalte. Daher erfüllt genau die Zahl 94 beide Bedingungen (1), (2).

Anderer Lösungsweg:
Wenn a und b die Zehner- bzw. Einerziffer einer Zahl sind, die den Bedingungen der Aufgabe genügt, so folgt:
Die Zahl lautet $10a + b$, die durch Vertauschen der Ziffern entstehende Zahl lautet $10b + a$, und nach (2) gilt:

$$2 \cdot (10b + a) = 10a + b + 4 \qquad \Rightarrow \qquad 19b = 4 \cdot (2a + 1)$$

Da $19b$ das Produkt aus 4 und der ungeraden Zahl $2a+1$ ist und da 19 und 4 teilerfremd sind, ist folglich b durch 4, aber nicht durch 8 teilbar. Die einzige Zahl mit diesen Eigenschaften ist $b = 4$, und es folgt weiter $2a + 1 = 19$, d. h. $a = 9$.

Daher kann nur die Zahl 94 die Bedingungen der Aufgabe erfüllen. Sie erfüllt diese Bedingungen; denn es gilt $9 - 4 = 5$ und $2 \cdot 49 = 98 = 94 + 4$. Also genügt die Zahl 94 den Bedingungen der Aufgabe.

Aufgabe 310712:
Ermittle alle diejenigen vierstelligen natürlichen Zahlen, die folgende Bedingungen (1) und (2) erfüllen!

(1) Die Zahl enthält keine anderen Ziffern als 0, 1 und 4, aber jede dieser drei Ziffern mindestens einmal.
(2) Die Zahl ist durch 18 teilbar.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn eine vierstellige natürliche Zahl die Bedingungen (1) und (2) erfüllt, so folgt:
Nach (2) ist die Zahl durch 18, also auch durch 9 teilbar; daher ist ihre Quersumme durch 9 teilbar. Unter ihren Ziffern kommen nach (1) die Ziffern 0 und 1 mindestens je einmal vor, die Ziffer 4 also höchstens zweimal. Also ist die Quersumme größer als Null, aber nicht größer als $0 + 1 + 4 + 4 = 9$; somit muss sie gleich 9 sein.
Damit kann die Bedingung (1) nur so erfüllt werden, dass unter den Ziffern genau einmal die 0, einmal die 1 und zweimal die 4 ist.

Ferner ist die Zahl, da sie durch 18 teilbar ist, eine gerade Zahl. Also muss ihre Einerziffer gerade sein, d. h. eine 0 oder 4. Weiterhin muss (wie für jede vierstellige Zahl) die Tausenderziffer von 0 verschieden sein.
Nach den nun noch vorhandenen Möglichkeiten für die Reihenfolge der Ziffern muss die Zahl somit eine der Zahlen $1044, 4014, 1404, 4104, 1440, 4140, 4410$ (3) sein.
In der Tat erfüllen die Zahlen (3) die Bedingung (1), und sie erfüllen auch (2), da sie die Quersumme 9 und eine gerade Einerziffer haben, also durch 9 und durch 2 teilbar sind.

Aufgabe 330712:
Eine sechsstellige natürliche Zahl soll, in der Reihenfolge von links nach rechts gelesen, Ziffern $3, a, 3, b, 2, c$ haben.
Ermittle alle Möglichkeiten, die Ziffern a, b, c so zu wählen, dass die genannte Zahl durch 90 teilbar ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Da 9 und 10 zueinander teilerfremd sind, ist die genannte Zahl genau dann durch 90 teilbar, wenn sie durch 9 und durch 10 teilbar ist. Sie ist genau dann durch 10 teilbar, wenn $c = 0$ (1) ist. Sie ist, wenn (1) gilt, außerdem genau dann durch 9 teilbar, wenn die Quersumme $3 + a + 3 + b + 2 + c = 8 + a + b$ durch 9 teilbar ist, d. h. genau dann, wenn $a + b$ bei Division durch 9 den Rest 1 lässt.

Wegen $0 \leq a \leq 9$ und $0 \leq b \leq 9$ ist das genau für $a + b = 1$ und $a + b = 10$ der Fall. Hierfür gibt es genau die folgenden Möglichkeiten (2):

a	0	1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
b	1	0	9	8	7	6	5	4	3	2	1

In (1) und (2) sind somit alle Möglichkeiten für die genannte Wahl von a, b, c angegeben.

Aufgabe 340713:
Franziska sucht eine vierstellige natürliche Zahl z, für die die folgenden Aussagen (1), (2) und (3) gelten:

(1) Die Einerziffer von z ist um 1 größer als die Zehnerziffer von z.
(2) Die Hunderterziffer von z ist doppelt so groß wie die Zehnerziffer von z.
(3) Die Zahl z ist doppelt so groß wie eine Primzahl.

Weise nach, dass es genau eine solche Zahl gibt; ermittle diese Zahl!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn die Aussagen (1), (2) und (3) für eine natürliche Zahl z gelten, so folgt:
Nach (3) ist z gerade, hat also eine gerade Einerziffer.
Nach (1) ist folglich die Zehnerziffer ungerade. Durch Verdoppeln entsteht aus ihr nach (2) die Hunderterziffer, also eine Zahl kleiner als 10. Daher ist die Zehnerziffer kleiner als 5 und folglich eine der Zahlen 1; 3.
Wegen (1) und (2) folgt damit: Die letzten drei Ziffern von z können nur entweder 212 oder 634 sein.

Wären sie 212, so wäre die mit den letzten zwei Ziffern von z gebildete Zahl durch 4 teilbar; also wäre z durch 4 teilbar und daher (sowie wegen $z > 4$) nicht das Doppelte einer Primzahl. Somit können die letzten drei Ziffern von z nur 634 sein.

Die erste Ziffer von z kann keine der Ziffern 2, 5, 8 sein; denn hierfür hätte z eine durch 3 teilbare Quersumme und wäre folglich durch 3 teilbar, könnte also (wegen $z > 6$) nicht das Doppelte einer Primzahl sein. Wäre die erste Ziffer von z eine der Zahlen 1, 3, 4, 6, 7, so würde ebenfalls die Aussage (3) nicht gelten, wie die folgenden Rechnungen zeigen:

z	Zerlegung von $z:2$
1634	$817 = 19 \cdot 43$
3634	$1817 = 23 \cdot 79$
4634	$2317 = 7 \cdot 331$
6634	$3317 = 31 \cdot 107$
7634	$3817 = 11 \cdot 347$

Damit verbleibt nur die Möglichkeit $z = 9634$.

II. Für $z = 9634$ sind (1) und (2) erfüllt, ferner gilt auch (3), da $z : 2 = 4817$ eine Primzahl ist, wie man folgendermaßen zeigen kann:
Wegen $4817 < 4900 = 70^2$ müsste die Zahl 4817, wenn sie zerlegbar wäre, einen Primfaktor kleiner als 70 enthalten. Man kann jedoch feststellen, dass 4817 durch keine der Primzahlen 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67 teilbar ist.

Mit I. und II. ist nachgewiesen, dass es genau eine vierstellige natürliche Zahl gibt, für die (1), (2) und (3) gelten, und diese Zahl ist als $z = 9634$ ermittelt.

II Runde 2

Aufgabe 050723:
Vergleiche die Summe aller dreistelligen durch 4 teilbaren natürlichen Zahlen mit der Summe aller dreistelligen nicht durch 4 teilbaren geraden natürlichen Zahlen!
a) Welche der beiden Summen ist größer?
b) Wie groß ist die Differenz der beiden Summen dem Betrage nach?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Man vergleicht die beiden ersten Summanden (100 und 102), die beiden zweiten Summanden (104 und 106) usw. bis zu den beiden letzten Summanden (996 und 998). In jedem dieser Paare ist die erste Zahl um 2 kleiner als die zweite.

a) Die Summe der nicht durch 4 teilbaren dreistelligen geraden Zahlen ist daher größer als die Summe der durch 4 teilbaren dreistelligen Zahlen.
b) Es gibt 225 solcher Paare; die Differenz der betrachteten Summen ist also dem Betrage nach 450.

Aufgabe 070722:
Horst sagt zu Klaus: Nenne mir eine dreistellige natürliche Zahl, von deren Ziffern keine Null ist und keine zwei einander gleich sind! Notiere sie und schreibe darunter sämtliche dreistelligen Zahlen, die durch Umstellen der Ziffern der genannten Zahl entstehen können! Addiere alle diese Zahlen!

Ehe Klaus fertig war, hatte Horst schon längst das Ergebnis im Kopf gefunden. Er rechnete: $2Q \cdot 111$, wobei Q die Quersumme der erstgenannten Zahl bedeutet.
Begründe sein Verfahren allgemein und gib dann ein Zahlenbeispiel!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a, b, c seien natürliche Zahlen, die alle größer Null und kleiner oder gleich 9 sind. Dann heißen die dreistellige Zahl und die sich durch Umstellung Ihrer Ziffern ergebenden Zahlen:

$$\begin{array}{ll} 100a + 10b + c & 100a + 10c + b \\ 100b + 10a + c & 100b + 10c + a \\ 100c + 10a + b & 100c + 10b + a \end{array}$$

Die Summe s ist dann:

$$s = 100(2a+2b+2c)+10(2a+2b+2c)+(2a+2b+2c) = (100+10+1)\cdot(2a+2b+2c) =$$

$$= 111\cdot 2\cdot(a+b+c) = 111\cdot 2Q$$

Beispiel: Die Zahl sei 534. Dann ist $2Q = 24$ und $2Q \cdot 111 = 24 \cdot 111 = 2664$ bzw. $534+543+354+345+453+435 = 2664$.

Aufgabe 170724:
Ermittle alle vierstelligen natürlichen Zahlen, die durch 24 teilbar sind und deren Zifferndarstellung die Form $9x7y$ hat!
Hierbei sind x und y durch je eine der zehn Ziffern (0,...,9) zu ersetzen.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn eine vierstellige Zahl die geforderten Eigenschaften hat, so folgt zunächst, dass sie durch 4 teilbar ist, also (nach der Teilbarkeitsregel für 4) auch die zweistellige Zahl mit der Zifferndarstellung $7y$.
Von den Zahlen 70, ..., 79 sind nur 72 und 76 durch 4 teilbar, also verbleiben nur die Möglichkeiten y = 2, y = 6.

Nun folgt weiter: Ist $y = 2$, so kommen für x auf Grund der Teilbarkeitsregel für 3 nur die Ziffern 0, 3, 6, 9 in Frage. Hiervon entfallen auf Grund der Teilbarkeitsregeln für 8 jedoch 3 und 9, da 372 und 972 nicht durch 8 teilbar sind.
Ist $y = 6$, so kommen für x auf Grund der Teilbarkeitsregeln für 3 nur die Ziffern 2, 5 und 8 in Frage. Hiervon entfallen jedoch 2 und 8, da 276 und 876 nicht durch 8 teilbar sind.

Also können nur die Zahlen 9072, 9672 und 9576 die geforderten Eigenschaften haben.
Sie haben diese Eigenschaften; denn ihre Zifferndarstellung ist von der vorgeschriebenen Form, und sie sind durch 24 teilbar.

Aufgabe 190723:
Ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen z, die die folgenden Bedingungen (1) bis (4) erfüllen!

(1) z ist eine dreistellige Zahl.
(2) Die Zehnerziffer (d. h. die an der Zehnerstelle stehende Ziffer) von z ist um 1 größer als die Hunderterziffer von z.
(3) Die Einerziffer von z ist doppelt so groß wie die Hunderterziffer von z.
(4) z ist das Doppelte einer Primzahl.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I) Wenn eine natürliche Zahl z die Bedingungen (1) bis (4) erfüllt und a ihre Hunderterziffer ist, so folgt: Wegen (1) gilt $a \neq 0$, wegen (3) ist $2a < 10$, also $a < 5$. Die folgende Tabelle enthält für die verbleibenden Möglichkeiten $a = 1, 2, 3, 4$ die nach (2) und (3) sich ergebenden Zehner- und Einerziffern und damit z.

Hunderterziffer a	Zehnerziffer	Einerziffer	z
1	2	2	122
2	3	4	234
3	4	6	346
4	5	8	458

Von diesen scheidet die Zahl $z = 234$ aus, da sie das Doppelte von 117 ist und dies wegen $117 = 3 \cdot 39$ keine Primzahl ist. Also können nur die Zahlen 122, 346 und 458 die Bedingungen (1) bis (4) erfüllen.

II) Sie sind dreistellig, erfüllen also (1). Ferner zeigt die Tabelle, dass sie (2) und (3) erfüllen. Schließlich erfüllen sie auch (4), da sie jeweils das Doppelte von 61, 173 bzw. 229 sind und diese Zahlen Primzahlen sind.
Somit lauten die gesuchten Zahlen: 122, 346, 458.

Aufgabe 220721:
Ermittle alle geraden natürlichen Zahlen z mit folgenden Eigenschaften:

(1) Die Zahl z ist fünfstellig, keine ihrer fünf Ziffern ist eine 0.
(2) Die aus den ersten drei Ziffern von z in dieser Reihenfolge gebildete dreistellige Zahl ist eine Quadratzahl.
(3) Die aus den letzten drei Ziffern von z in dieser Reihenfolge gebildete dreistellige Zahl ist eine Kubikzahl.

Hinweis: Ist a eine natürliche Zahl, so heißt a^2 ihre Quadratzahl und a^3 ihre Kubikzahl.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn eine Zahl z die geforderten Eigenschaften hat, so folgt:
Die aus den letzten drei Ziffern von z gebildete Zahl ist eine der Zahlen $5^3 = 125$, $6^3 = 216$, $7^3 = 343$, $8^3 = 512$, $9^3 = 729$; denn wegen $4^3 < 100$ und $10^3 > 999$ sind dies die einzigen dreistelligen Kubikzahlen.

Da z und somit die letzte Ziffer von z gerade ist, verbleiben nur die Möglichkeiten 216 und 512 für die letzten drei Ziffern von z. Also endet die aus den ersten drei Ziffern von z gebildete Zahl auf 2 oder 5.

Es gibt aber keine Quadratzahl, die auf 2 endet; denn endet eine natürliche Zahl a auf 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 bzw. 9, so endet ihre Quadratzahl auf 0, 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4 bzw. 1.

Daher verbleibt nur die Möglichkeit 512 für die letzten drei Ziffern von z, und die ersten drei Ziffern bilden eine auf 5 endende Quadratzahl, also eine der Zahlen $5^2, 15^2, 25^2, 35^2$, ...
Von diesen sind wegen $5^2 < 100$ und $35^2 > 999$ nur $15^2 = 225$ und $25^2 = 625$ dreistellig.

Damit ist gezeigt, dass nur 22512 und 62512 die geforderten Eigenschaften haben können.

Aufgabe 250724:
a) Gegeben seien die drei Ziffern 2, 7 und 9. Aus ihnen sollen alle diejenigen dreistelligen Zahlen gebildet werden, die jede dieser drei Ziffern genau einmal enthalten.
Zeige, dass die Summe aus allen diesen dreistelligen Zahlen durch 111 teilbar ist!

b) Gegeben sind drei paarweise verschiedene Ziffern, von denen keine die Ziffer 0 ist.
Beweise, dass die Summe aus allen denjenigen dreistelligen Zahlen, die jede dieser Ziffern genau einmal enthalten, stets durch 111 teilbar ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Aus den Ziffern 2, 7, 9 lassen sich genau die folgenden sechs dreistelligen Zahlen bilden, die jede dieser Ziffern genau einmal enthalten: 279, 297, 729, 792, 927, 972.

Die Summe dieser sechs Zahlen beträgt 3996. Wegen $3996 = 36 \cdot 111$ ist diese Summe durch 111 teilbar.

b) Es seien a, b, c drei paarweise verschiedene Ziffern, unter denen sich nicht die Ziffer 0 befindet. Dann lassen sich genau die folgenden sechs dreistelligen Zahlen bilden, die jede dieser Ziffern genau einmal enthalten:

$$100a + 10b + c, \qquad 100a + 10c + b, \qquad 100b + 10a + c$$

$$100b + 10c + a, \qquad 100c + 10a + b, \qquad 100c + 10b + a$$

Die Summe dieser sechs Zahlen beträgt $222a + 222b + 222c$. (1)
Wegen $222 = 2 \cdot 111$ ist jede der drei Zahlen $222a$, $222b$, $222c$ durch 111 teilbar, mithin auch ihre in (1) genannte Summe.

Aufgabe 280724:
a) Ermittle die Summe der Quersummen aller zweistelligen, durch 5 teilbaren Zahlen!
b) Ermittle die Summe der Quersummen aller natürlichen Zahlen von 0 bis 1000!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Für jede mögliche Zehnerziffer gibt es genau zwei durch 5 teilbare Zahlen, nämlich eine, die auf 0, und eine, die auf 5 endet.
Die Summe der Zehnerziffern aller zweistelligen durch 5 teilbaren Zahlen ist somit $2 \cdot (1+2+3+...+9) = 90$, und die Summe ihrer Einerziffern erhält man mit $9 \cdot 5 + 9 \cdot 0 = 45$. Also beträgt die gesuchte Summe der genannten Quersummen $90 + 45 = 135$.

b) Betrachtet man alle natürlichen Zahlen von 0 bis 999, so erkennt man, dass jede der Ziffern von 0 bis 9 in der Hunderterstelle genau 100mal auftritt.
Lassen wir die Hunderterstelle unverändert, so tritt in der Zehnerstelle jede der Ziffern genau zehnmal auf, beim Durchlaufen aller zehn Ziffern der Hunderterstelle insgesamt also $10 \cdot 10 = 100$ mal. Lässt man die Zehnerstelle und die Hunderterstelle unverändert, so tritt in der Einerstelle jede der Ziffern genau einmal auf, insgesamt $1 \cdot 10 \cdot 10 = 100$ mal. Die Zahl 1000 hat die Quersumme 1.

Aus den vorgenannten Feststellungen folgt: Die gesuchte Summe der genannten Quersummen beträgt

$$300 \cdot 1 + 300 \cdot 2 + ... + 300 \cdot 9 + 1 = 300 \cdot 45 + 1 = 13501$$

Aufgabe 290724:
a) Ermittle alle Möglichkeiten, an die Zahl 331 eine vierte Ziffer so anzufügen, dass die entstehende vierstellige Zahl durch 3 teilbar ist!
b) Stelle fest, ob man an die Zahl 331 eine Ziffer 6 oder mehrere Ziffern 6 so anfügen kann, dass die entstehende Zahl durch 3 teilbar ist!
c) Untersuche, ob es mehr als 250 dreistellige Zahlen gibt, aus denen durch Anfügen von vier Ziffern 7 jeweils eine durch 3 teilbare Zahl entsteht!
d) Beweise, dass man aus jeder dreistelligen Zahl durch Anfügen von einer Ziffer 7 oder von mehreren Ziffern 7 jeweils eine durch 3 teilbare Zahl erhalten kann!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Die Quersumme von 331 beträgt $3 + 3 + 1 = 7$. Durch Anfügen einer vierten Ziffer entsteht genau dann eine Zahl, deren Quersumme durch 3 teilbar ist, wenn diese Ziffer 2 beträgt oder sich von 2 um ein Vielfaches von 3 unterscheidet.
Nach der Teilbarkeitsregel, dass eine Zahl genau dann durch 3 teilbar ist, wenn ihre Quersumme durch 3 teilbar ist, ist damit bewiesen: alle gesuchten Möglichkeiten für die anzufügende vierte Ziffer sind 2, 5, 8.

b) Da 6 durch 3 teilbar ist, entsteht aus der Quersumme 7 durch ein- oder mehrmaliges Addieren von 6 stets wieder eine Summe, die ebenso wie 7 nicht durch 3 teilbar ist. Also kann man durch Anfügen von einer Ziffer 6 oder von mehreren Ziffern 6 an die Zahl 331 keine durch 3 teilbare Zahl erhalten.

c) Wegen $7 + 7 + 7 + 7 = 28$ entsteht aus einer Zahl durch Anfügen von vier Ziffern 7 dann eine durch 3 teilbare Zahl, wenn die Quersumme der Zahl, an die die vier Ziffern 7 angefügt wurden, 2 beträgt oder sich von 2 um ein Vielfaches von 3 unterscheidet. Eine solche Zahl ist zum Beispiel 101, also ist 1017777 durch 3 teilbar.

Hat man eine derartige Zahl, wie 101 es war, so kann man eine weitere finden, indem man 3 addiert; denn für die Zahl mit den vier angehängten Ziffern 7 bedeutet das ein Addieren von 30 000, und dabei entsteht aus der bereits durch 3 teilbaren vorigen Zahl wieder eine solche. Addiert man zu 101 (mindestens) 250 mal 3, so erhält man (mindestens) $101 + 3 = 104$, $101 + 2 \cdot 3 = 107$, ..., $101 + 250 \cdot 3 = 851$.
Es gibt folglich mehr als 250 dreistellige Zahlen mit der in c) genannten Eigenschaft.

d) Für jede dreistellige Zahl liegt einer der folgenden Fälle vor:

1. Fall: Die Quersumme der Zahl ist durch 3 teilbar.
In diesen Fall entsteht durch Anfügen von drei Ziffern 7 wieder eine durch 3 teilbare Zahl.

2. Fall: Die Quersumme der Zahl ist von der Form $3n + 1$ mit einer natürlichen Zahl n.
In diesem Fall entsteht durch Anfügen von zwei Ziffern 7 eine Zahl, deren Quersumme $3n + 1 + 7 + 7 = 3n + 15$ durch 3 teilbar ist.

3. Fall: Die Quersumme der Zahl ist von der Form $3n + 2$.
In diesem Fall entsteht durch Anfügen einer Ziffer 7 eine Zahl, deren Quersumme $3n + 2 + 7 = 3n + 9$ durch 3 teilbar ist. Damit ist für jeden möglichen Fall der verlangte Beweis geführt.

Aufgabe 300722:
a) Ermittle unter den natürlichen Zahlen a, die größer als 100 und kleiner als 1000 sind, alle diejenigen, die die folgenden Bedingungen (1), (2), (3) erfüllen!

(1) a hat genau zwei voneinander verschiedene natürliche Zahlen als Teiler.
(2) a lässt sowohl bei Division durch 11 den Rest 2 als auch bei Division durch 13 den Rest 2.
(3) a ist eine ungerade Zahl.

b) Stelle für jede der drei Bedingungen (1), (2), (3) fest, ob sich am Ergebnis der Aufgabe (a) etwas ändert, wenn man diese Bedingung weglässt und nur jeweils die beiden anderen Bedingungen fordert!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Für jede natürliche Zahl a, die die erste Teilaussage in (2) erfüllt, ist $a - 2$ ein Vielfaches von 11, also eine der Zahlen 0, 11, $2 \cdot 11$, $3 \cdot 11$, ...
Erfüllt a auch die zweite Teilaussage in (2), so ist $a - 2$ auch ein Vielfaches von 13, also verbleiben für $a - 2$ nur die Zahlen $0, 13 \cdot 11, 2 \cdot 13 \cdot 11, 3 \cdot 13 \cdot 11, ...$
Erfüllt a auch (3), so ist $a - 2$ eine ungerade Zahl, also verbleiben für $a - 2$ nur die Zahlen 143, $3 \cdot 143 = 429, 5 \cdot 153 = 715, 7 \cdot 143 = 1001, ...$
Von den natürlichen Zahlen a mit $100 < a < 1000$ erfüllen also nur die Zahlen $143+2 = 145$, $429+2 = 431$, $715 + 2 = 717$ die Bedingungen (2) und (3).

Wegen $145 = 5 \cdot 29$ hat 145 mehr als zwei voneinander verschiedene natürliche Zahlen als Teiler, nämlich 1, 5, 29, 145. Entsprechendes gilt wegen $717 = 3 \cdot 239$ auch für 717. Dagegen ist 431 eine Primzahl. Also hat 431 genau die zwei natürlichen Zahlen 1 und 431 als Teiler.
Somit werden unter den natürlichen Zahlen a mit $100 < a < 1000$ die Bedingungen (1), (2), (3) genau von der Zahl $a = 431$ erfüllt.

b) Wie eben gezeigt, werden (2) und (3) außer von 431 beispielsweise auch von 145 erfüllt. Ferner werden (1) und (3) beispielsweise auch von der ungeraden Primzahl 101 erfüllt.

Lässt man also eine der Bedingungen (1) oder (2) weg, so ändert sich das Ergebnis von a).
Dagegen kann man (3) weglassen, ohne am Ergebnis etwas zu ändern; denn jede natürliche Zahl, die (1) erfüllt, ist eine Primzahl, und wenn sie größer als 100 ist, scheidet die einzige gerade Primzahl 2 aus, d. h.: Für Zahlen a, die größer als 100 (und kleiner als 1000) sind, folgt (3) bereits aus (1).

Aufgabe 310722:
Susann will die Summe s aller derjenigen vierstelligen natürlich Zahlen berechnen, die durch 4 teilbar sind.
Tamara ermittelt die Summe t aller derjenigen vierstelligen natürlichen Zahlen, die durch 2, aber nicht durch 4 teilbar sind.
a) Sind s und t einander gleich oder, wenn nicht, welche der beiden Zahlen ist die größere?
b) Welchen Betrag hat die Differenz zwischen s und t? Begründe deine Antworten!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
s ist die Summe der Zahlen 1000, 1004, ..., 9996; t ist die Summe der Zahlen 1002, 1006, ..., 9998.
a) Aus jedem Summanden in s entsteht durch Vergrößerung um 2 ein Summand in t, und dabei entsteht jeder Summand in t genau einmal. Also enthalten beide Summen gleich viele Summanden.
Ferner ist jeder Summand in t größer als der entsprechende Summand in s. Daher ist t größer als s.

b) Der Unterschied zwischen dem ersten und letzten Summanden beträgt in beiden Summen 8996, die Summanden folgen im Abstand 4 aufeinander. Die Anzahl der Summanden beträgt (in jeder der beiden Summen) daher $8996 : 4 + 1 = 2250$.
Hieraus und weil jeder Summand in t um 2 größer als der entsprechende Summand in s ist, folgt:
Die Differenz zwischen s und t hat den Betrag $2250 \cdot 2 = 4500$.

Aufgabe 330722:
Ermittle alle diejenigen vierstelligen natürlichen Zahlen z, die folgende Bedingungen (1) und 2) erfüllen!

(1) Die Zahl z ist durch 24 teilbar.
(2) Die zweite Ziffer der Zahl z ist eine 1, die dritte Ziffer von z ist eine 3.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Bedingung (1) ist genau dann erfüllt, wenn die Zahl z durch 3 und durch 8 teilbar ist; denn 3 und 8 sind zueinander teilerfremd, und es gilt $3 \cdot 8 = 24$.
Die Zahl z ist genau dann durch 8 teilbar, wenn die durch ihre letzten drei Ziffern dargestellte Zahl durch 8 teilbar ist. Zusammen mit Bedingung (2) ist das genau dann der Fall, wenn die vierte Ziffer von z eine 6 ist; denn unter den Zahlen von 130 bis 139 ist genau die Zahl 136 durch 8 teilbar.
Die Zahl z ist genau dann durch 3 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 3 teilbar ist.

Zusammen mit den bereits genannten Bedingungen ist das genau dann der Fall, wenn die erste Ziffer von z eine der drei Ziffern 2, 5, 8 ist; denn die Summe der letzten drei Ziffern 1, 3, 6 beträgt 10, und unter den (durch Addition einer weiteren Ziffer $1, \ldots, 9$ entstehenden) Summen von 11 bis 19 sind genau 12, 15 und 18 durch 3 teilbar.
Somit erfüllen genau die Zahlen 2136, 5136, 8136 die Bedingungen (1) und (2).

III Runde 3

Aufgabe 030733:
Eine Zahl $30 \star 0 \star 03$ soll durch 13 teilbar sein. Dabei sind die $\star$ jeweils durch eine der Ziffern 0 bis 9 zu ersetzen. (Für beide Sterne muss nicht unbedingt die gleiche Ziffer gesetzt werden.)
Gib sämtliche Zahlen an, die die geforderte Eigenschaft haben!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Zahl
$$30 \star 0 \star 03 = 3000003 + 10000 \cdot x + 100 \cdot y$$
ist genau durch 13 teilbar mit den Ziffern x und y, wenn $6 + 3 \cdot x + 9 \cdot y$ durch 13 teilbar ist, denn es gilt
$$3000003 + 10000 \cdot x + 100 \cdot y = 13 \cdot (230769 + 769 \cdot x + 7 \cdot y) + 6 + 3 \cdot x + 9 \cdot y$$
Durch systematisches Testen von $3 \cdot (2 + 3 \cdot y + x)$ auf Teilbarkeit durch 13 findet man für (x, y) schnell die Lösungen (8, 1), (5, 2), (2, 3), (9, 5), (6, 6), (3, 7) und (0, 8).
Somit erfüllen die folgenden Zahlen die geforderten Eigenschaften:
$$3000803; \quad 3020303; \quad 3030703; \quad 3050203; \quad 3060603; \quad 3080103; \quad 3090503$$

Aufgabe 050731:
Auf welche Ziffern endet das Produkt?
$$z = 345926476^3 \cdot 125399676^2 \cdot 2100933776^3$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Sämtliche Faktoren von z sind von der Form $100a + 76$. Wegen
$$(100a + 76)(100b + 76) = 10000ab + 100(76a + 76b) + 76^2$$
wobei a und b natürliche Zahlen sind, sind allein die beiden letzten Stellen von 76^2 für die beiden letzten Stellen von z entscheidend. Da $76^2 = 5776$ ist, endet z auf 76.

Aufgabe 060735:
Für jede zweistellige natürliche Zahl gilt der Satz:
Addiert man zu der zweistelligen Zahl die Differenz aus der Anzahl ihrer Zehner und der Anzahl ihrer Einer, so erhält man eine durch 11 teilbare Zahl.
Beweise diesen Satz!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die zweistellige Zahl ist darstellbar als $10a+b$ mit ganzen Zahlen a und b, für die $0 < a \leq 9$ und $0 \leq b \leq 9$ gilt. Die Differenz aus der Anzahl ihrer Zehner und der Anzahl ihrer Einer ist daher $a - b$.
Addiert man sie laut Aufgabe zu der zweistelligen Zahl, so erhält man: $10a+b+a-b = 11a$; die erhaltene Zahl ist also durch 11 teilbar.

Aufgabe 070735:
Gegeben seien zwei natürliche Zahlen n und m, die bei Division durch 5 beide den Rest 3 lassen.
Beweise, dass das Produkt der beiden Zahlen bei Division durch 5 den Rest 4 lässt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Nach Voraussetzung haben die beiden gegebenen Zahlen n, m die Form $n = 5n' + 3$ und $m = 5m' + 3$ (n', m' ganz). Daher gilt:
$$n \cdot m = (5n' + 3) \cdot (5m' + 3) = 25n'm' + 15n' + 15m' + 9 = 5[5n'm' + 3(n' + m') + 1] + 4$$
d. h. $n \cdot m$ lässt bei Division durch 5 den Rest 4.

Aufgabe 080731:
Gesucht sind natürliche Zahlen, die beim Teilen durch 7 den Rest 4, beim Teilen durch 4 den Rest 3 und beim Teilen durch 3 den Rest 1 lassen.
a) Ermittle die kleinste derartige natürliche Zahl!
b) Wie kann man aus der in a) gesuchten Zahl weitere natürliche Zahlen erhalten, die den gleichen Bedingungen genügen?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

a) Die Folge der natürlichen Zahlen, die bei Division durch 7 den Rest 4 lassen, beginnt: 4; 11; 18; 25; 32; 39; 46; 53; 60; 67; 74; 81; 88; 95; ...

   Von diesen Zahlen lassen bei der Division durch 4 den Rest 3 genau die Zahlen: 11; 39; 67; 95; ... (ab 11 jede vierte Zahl der vorigen Folge).

   Die kleinste unter diesen Zahlen, die auch noch bei Division durch 3 den Rest 1 lässt, ist die Zahl 67.

b) Weitere, den Bedingungen entsprechende natürliche Zahlen erhält man, indem man zu 67 gemeinsame Vielfache von 3, 4 und 7 addiert.

   Insbesondere erhält man die nächstgrößeren derartigen Zahlen, wenn man wiederholt das kgV von 3, 4 und 7 (d. i., da 3, 4, 7 paarweise teilerfremd sind, die Zahl $3 \cdot 4 \cdot 7 = 84$) zu 67 addiert. Die nächsten so entstehenden Zahlen sind: 151; 235; 319; ...

Aufgabe 080736:
Der große deutsche Mathematiker Carl Friedrich Gauß wurde am 30. April 1777 in Braunschweig geboren.
Auf welchen Wochentag fiel sein Geburtstag?
(Der 30.04.1967 war ein Sonntag; die Jahre 1800 und 1900 waren keine Schaltjahre).

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Von einem Tag des Jahres 1777 bis zum gleichen Tag des Jahres 1967 sind es 190 Jahre, und zwar 45 Jahre zu 366 Tagen und 145 Jahre zu 365 Tagen.
In den 45 Jahren rückte der Wochentag um 90 Wochentage vor, in den 145 Jahren um 145 Wochentage. Das sind zusammen 235 Wochentage, d. h. 33 mal eine Woche und 4 Wochentage. Daher war der 30.4.1777 ein Mittwoch.

Aufgabe 100735:
Aus den zweistelligen Primzahlen 13, 17, 37, 79 erhält man wieder Primzahlen, wenn man ihre Ziffern jeweils vertauscht, also die Zahlen 31, 71, 73, 97 bildet. Ebenso kann man bei der Primzahl 131 die Ziffern beliebig vertauschen, also die Zahlen 113, 311 bilden, ohne dass dabei die Primzahleigenschaft verloren geht.

Untersuche, ob es dreistellige Primzahlen mit paarweise voneinander verschiedenen Ziffern gibt, bei denen man bei sämtlichen möglichen Ziffernvertauschungen stets wieder dreistellige Primzahlen erhält!
(Ohne Benutzung der Zahlentafel)

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, es gäbe eine derartige dreistellige Primzahl. Dann könnte sie nur aus drei verschiedenen der Ziffern 1, 3, 7, 9 bestehen, da bei den Vertauschungen jede ihrer Ziffern auch einmal an letzter Stelle stünde und daher, wie man mit Hilfe der Teilbarkeitsregeln erkennt, die Ziffern 0, 2, 4, 5, 6, 8 entfielen.

Also müsste die Primzahl entweder aus den Ziffern 1, 3, 7 oder aus den Ziffern 1, 3, 9 oder aus den Ziffern 1, 7, 9 oder aus den Ziffern 3, 7, 9 bestehen.

Nun ist aber z. B. $371 = 7 \cdot 53$, $319 = 11 \cdot 29$, $791 = 7 \cdot 113$, $793 = 13 \cdot 61$, d. h., es gibt in jedem Falle unter den durch Vertauschungen der Ziffern entstehenden Zahlen wenigstens eine, die nicht Primzahl ist. Daher gibt es keine dreistellige Primzahl mit der geforderten Eigenschaft.

Aufgabe 110731:
Ermittle alle Primzahlen p, die gleichzeitig den folgenden Bedingungen genügen:

(1) p< 100.
(2) p lässt sowohl bei Division durch 3 als auch bei Division durch 5 jeweils den Rest 2.
(3) p lässt bei Division durch 4 den Rest 1!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, p sei eine Primzahl, die den Bedingungen (1), (2), (3) genügt.
Wegen (2) ist dann $p-2$ sowohl durch 3 als auch durch 5 teilbar. Da 3 und 5 teilerfremd sind, ist folglich $p-2$ durch $3 \cdot 5 = 15$ teilbar, d. h., p ist von der Form $n \cdot 15 + 2$ (n eine natürliche Zahl). Wegen (3) ist p und damit auch n ungerade.

Also können wegen (1) höchstens die Zahlen 17; 47; 77 den Bedingungen der Aufgabe genügen. Von ihnen ist 77 keine Primzahl, und 47 genügt nicht der Bedingung (3). Also kann nur 17 Lösung der Aufgabe sein.
In der Tat erfüllt 17 die Bedingungen (1), (2), (3) und ist damit die einzige derartige Primzahl.

Aufgabe 130734:
Ermittle alle dreistelligen natürlichen Zahlen a, die gleich der Hälfte der Summe derjenigen beiden Zahlen sind, die durch zyklische Vertauschung der Ziffern von a entstehen!

Hinweis: Wird die Zahl a durch die Ziffernfolge uvw dargestellt, so entstehen durch zyklische Vertauschung die Zahlen vwu und wuv. Dabei sollen auch Möglichkeiten mit $v = 0$ oder $w = 0$ zugelassen werden; die durch zyklische Vertauschung entstehenden Zahlen brauchen also nicht dreistellig zu sein.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, eine Zahl mit der Ziffernfolge xyz entspreche den Bedingungen der Aufgabe. Dann ist $a = 100x+10y+z$ gleich der Hälfte der Summe von $b = 100y+10z+x$ und $c = 100z+10x+y$. Demnach gilt:

$$200x + 20y + 2z = 2a = b + c = 101y + 110z + 11x$$

also $189x = 81y + 108z$ und daher

$$7x = 3y + 4z \tag{1}$$

Folglich ist 7 ein Teiler von $3y + 4z$ und daher auch von $3y + 4z - 7z = 3(y - z)$, also von $y - z$.

Wegen $0 \leq y \leq 9$, $0 \leq z \leq 9$ folgt hieraus, dass entweder $y = z$ und nach (1) dann $y = z = x \geq 1$ gilt oder z um 7 größer ist als y.
Daher verbleiben für y und z nur die in der folgenden Tabelle genannten Möglichkeiten, zu denen jedesmal wegen (1) nur das angegebene x gehört:

x	y	z	x	y	z	x	y	z
1	1	1	2	2	2	...	...	...
9	9	9	8	1	4	7	0	3
0	7	4	1	8	5	2	9	6
9	2	5						

Daher können höchstens die Zahlen 111, 222, 333, 444, 555, 666, 777, 888, 999, 592, 481, 370, 407, 518, 629 Lösungen sein. Für 111, ..., 999 ist dies unmittelbar klar; ferner gilt

$$\frac{1}{2}\cdot(925+259)=1184:2=529 \qquad \frac{1}{2}\cdot(814+148)=962:2=481$$
$$\frac{1}{2}\cdot(703+37)=740:2=370 \qquad \frac{1}{2}\cdot(74+740)=814:2=407$$
$$\frac{1}{2}\cdot(185+851)=1036:2=518 \qquad \frac{1}{2}\cdot(296+962)=1258:2=629$$

Also erfüllt jede dieser 15 Zahlen die Bedingungen der Aufgabe.

Aufgabe 150736:
Ist z eine natürliche Zahl, so sei a die Quersumme von z, b die Quersumme von a und c die Quersumme von b.
Ermittle c für jede 1 000 000 000-stellige durch 9 teilbare Zahl z.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wegen $z > 0$ gilt auch $a > 0, b > 0, c > 0$.
Wenn eine Zahl durch 9 teilbar ist, so ist ihre Quersumme durch 9 teilbar. Daher sind alle Zahlen a, b und c dieser Aufgabe durch 9 teilbar.
Da jede der 1 000 000 000 Ziffern von z höchstens 9 beträgt, ist

$$a \leq 9 \cdot 1000000000 = 9000000000$$

also ist a höchstens zehnstellig.
Deshalb ist $b < 9 \cdot 10 = 90$, also ist b eine der Zahlen 81, 72, 63, 54, 45, 36, 27, 18, 9. Die Quersumme jeder dieser 9 Zahlen ist 9.
Daher gilt $c = 9$ für alle zu betrachtenden Zahlen z.

Aufgabe 170735:
Ermittle alle zweistelligen Zahlen, für die sowohl die folgende Aussage (1) als auch die folgende Aussage (2) zutrifft:

(1) Setzt man zwischen Einerziffer und Zehnerziffer der zweistelligen Zahl die Ziffer 5, so erhält man eine Zahl, die um genau 230 größer ist als die ursprüngliche Zahl.
(2) Setzt man die Ziffer 5 vor die zweistellige Zahl, so erhält man ein ganzzahliges Vielfaches der ursprünglichen Zahl.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, eine zweistellige Zahl erfüllt die Bedingungen der Aufgabe. Dann ist sie mindestens 10 und höchstens 99: folglich entsteht nach Vergrößerung um 230 eine Zahl, die mindestens 240 und höchstens 329 ist. Von diesen Zahlen haben nur 250, 251, 252, 253, 254, 255, 256, 257, 258 und 259 eine 5 als Zehnerziffer.

Folglich können höchstens die Zahlen 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29 die Bedingung (1) erfüllen. Sie erfüllen diese Bedingung, da durch das in (1) genannte Einfügen der Ziffer 5 die Zehnerziffer 2 durch die Ziffernfolge 25 ersetzt wird, wobei sich die Zahlen jeweils um 230 vergrößern.

Setzt man vor jede von ihnen die Ziffer 5, so erhält man die Zahlen 520, 521, 522, 523, 524, 525, 526, 527, 528 und 529. Diese sind jeweils um 500 größer als die ursprüngliche Zahl. Daher ist eine so gebildete Zahl genau dann ein ganzzahliges Vielfaches der ursprünglichen Zahl, wenn auch 500 ein ganzzahliges Vielfaches von ihr ist. Das trifft unter den Zahlen, die (1) erfüllen, genau für die Zahlen 20 und 25 zu. Daher sind dies alle zweistelligen Zahlen, die beide Bedingungen erfüllen.

Aufgabe 240732:
a) Es sei M die Menge aller derjenigen Zahlen x, die die folgenden Eigenschaften (1), (2), (3) haben:

(1) x ist eine sechsstellige natürliche Zahl.
(2) x hat die Quersumme 29.
(3) x ist durch 11 teilbar.

Ermittle das größte Element der Menge M!

b) Es sei M' die Menge aller derjenigen Zahlen x, die außer den Eigenschaften (1), (2), (3) auch noch die folgende Eigenschaft (4) haben:

(4) Keine zwei Ziffern von x sind einander gleich.

Ermittle das größte Element der Menge M'!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Unter allen Zahlen, die (1) und (2) erfüllen, findet man die größte, indem man mit so vielen Ziffern 9 beginnt, wie dies möglich ist, ohne die Summe 29 zu überschreiten (d.s. genau 3 Ziffern 9), sodann eine möglichst große Ziffer anschließt, ohne 29 zu überschreiten (d.i. die Ziffer 2), wonach nur noch die Möglichkeit verbleibt, zwei Ziffern 0 anzuschließen.
Die größte Zahl x, die (1) und (2) erfüllt, ist also 999200.

Die nächstkleinere Zahl, die (1) und (2) erfüllt, ergibt sich, indem man die Ziffer 2 durch 1 ersetzt, dann wieder eine möglichst große Ziffer anschließt, ohne 29 zu überschreiten (d.i. die Ziffer 1), wonach nur noch eine Ziffer 0 verbleibt. So ergibt sich als zweitgrößte Zahl, die (1) und (2) erfüllt, 999110.

Entsprechend ergibt sich die nächstkleinere Zahl mit (1) und (2), indem man die zweite Ziffer 1 durch 0 ersetzt, wonach 999101 verbleibt. Die nächstkleinere Zahl mit (1) und (2) ist entsprechend 999020.

Die Forderung (3) wird von 999200, 999110 und 999102 nicht erfüllt, wohl aber von 999020.
Damit ist bewiesen: Das größte Element der Menge M ist 999020.

b) Unter allen Zahlen, die (1),(2) und (4) erfüllen, findet man die größte, indem man mit 9 beginnt, die größte von 9 verschiedene Ziffer (d.i. die Ziffer 8) anschließt, sodann die größte von 9 und 8 verschiedene Ziffer (d.i. 7) und dann die größte von 9, 8 und 7 verschiedene Ziffer, ohne 29 zu überschreiten (d.i. die Ziffer 5), wonach 987500 verbleibt. Die nächstkleineren Zahlen mit (1),(2) und (4) ergeben sich, indem man die Ziffer 5 durch 4 ersetzt, wonach (der Größe nach geordnet) 987410 und 987401 verbleiben.
Sodann hat man 4 durch 3 zu ersetzen. Um hiernach für die letzten beiden Ziffern die Summe 2 unter Einhaltung von (4) zu erreichen, verbleiben 987320 und 987302.
Wird weiter 3 durch 2 ersetzt, so verbleiben entsprechend 987230 und 987203; wird 2 durch 1 ersetzt, so ergibt sich als größtmöglich: 987140.

Die Forderung (3) wird von 987500, 987410, 987401, 987320, 987302, 987230 und 987203 nicht erfüllt, wohl aber von 987140.
Damit ist bewiesen: Das größte Element der Menge M' ist 987140.

Aufgabe 240735:
In dem Schema 43_1_5_ ist jede der Leerstellen _ so mit einer Ziffer auszufüllen, dass die entstehende siebenstellige Zahl durch 75 teilbar ist.
Gib an, wie viel siebenstellige Zahlen es insgesamt gibt, die auf diese Weise entstehen können!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die in die Leerstellen einzutragenden Ziffern seien so mit a, b und c bezeichnet, dass die entstehenden Zahlen die Zifferndarstellung $43a1b5c$ haben.

Eine solche Zahl ist genau dann durch 75 teilbar, wenn sie sowohl durch 3 als auch durch 25 teilbar ist, da 3 und 25 teilerfremd sind. Durch 25 ist sie genau dann teilbar, wenn $c = 0$ ist.
Durch 3 ist sie genau dann teilbar, wenn ihre Quersumme $(4+3+a+1+b+5+c=)13+a+b$ durch 3 teilbar ist.

Wegen $0 \leq a \leq 9$ und $0 \leq b \leq 9$ gilt $0 \leq a+b \leq 18$. Für die genannte Quersumme gilt daher $13 \leq 13+a+b \leq 31$. Sie ist folglich genau dann durch 3 teilbar, wenn sie eine der Zahlen 15, 18, 21, 24, 27, 30 ist, d. h. genau dann, wenn die Summe s aus den beiden Ziffern a und b eine der Zahlen 2, 5, 8, 11, 14, 17 ist.
Die folgende Tabelle enthält alle Ziffernpaare $(a; b)$, die eine dieser Summen $s = a + b$ besitzen:

Ziffernsumme s	Alle Ziffernpaare $(a; b)$ mit $a + b = s$	Anzahl der Ziffernpaare
2	(0;2), (1;1), (2;0)	3
5	(0;5), (1;4), (2;3), (3;2), (4;1), (5;0)	6
8	(0;8), (1;7), (2;6), (3;5), (4;4), (5;3), (6;2), (7;1), (8;0)	9
11	(2;9), (3;8), (4;7), (5;6), (6;5), (7;4), (8;3), (9;2)	8
14	(5;9), (6;8), (7;7), (8;6), (9;5)	5
17	(8;9), (9;8)	2

Daher ist mit $3 + 6 + 9 + 8 + 5 = 33$ die gesuchte Anzahl gefunden.

Aufgabe 260734:
Ermittle alle diejenigen Paare $(m; n)$ natürlicher Zahlen, die folgende Bedingungen erfüllen!

(1) m und n sind dreistellige Zahlen.
(2) Es gilt $m - n = 889$.
(3) Für die Quersumme $Q(m)$ und $Q(n)$ von m und n gilt $Q(m) - Q(n) = 25$.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn ein Paar $(m; n)$ natürlicher Zahlen die Bedingungen erfüllt, so folgt:
Wegen (1) gilt $1 \leq Q(m) \leq 27$, $1 \leq Q(n) \leq 27$. Daher kann (3) nur so erfüllt werden, dass entweder $Q(m) = 27$, $Q(n) = 2$ oder $Q(m) = 26$, $Q(n) = 1$ gilt.

Die einzige dreistellige Zahl m mit der Quersumme $Q(m) = 27$ ist aber $m = 999$; nach (2) ergibt sich hierfür weiter $n = m - 889 = 110$.
Die einzige dreistellige Zahl n mit der Quersumme $Q(n) = 1$ ist $n = 100$; nach (2) ergibt sich hierfür weiter $m = 889 + n = 989$.
Also können nur die Paare $(999; 110)$ und $(989; 100)$ (4) die Bedingungen der Aufgabe erfüllen.

Aufgabe 280736:
Auf einer Kreislinie seien die natürlichen Zahlen von 1 bis 1000 der Reihe nach angeordnet. Dann wird, beginnend mit der Zahl 1, jede fünfzehnte Zahl mit einer Markierung versehen, d. h., die Zahlen 1, 16, 31, 46, ... usw. werden markiert.
Dieses Weiterzählen und Markieren jeder fünfzehnten Zahl wird umlaufend fortgesetzt, d. h., beim Weiterzählen lässt man auf die Zahl 1000 wieder die Zahl 1 folgen. Auch Zahlen, die bereits markiert sind, werden beim Weiterzählen stets mit berücksichtigt. Erst wenn zum weiteren Markieren nur noch Zahlen erreicht würden, die bereits markiert sind, wird der Vorgang beendet.

Ermittle die Anzahl aller derjenigen Zahlen auf dem Kreis, die dann ohne Markierung geblieben sind!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
In ersten Umlauf werden genau diejenigen der Zahlen markiert, die bei Division durch 15 den Rest 1 lassen. Die letzte dieser Zahlen ist 991.
Der zweite Umlauf erbringt als erste markierte Zahl die Zahl $991 + 15 - 1000 = 6$; anschließend werden folglich im zweiten Umlauf genau diejenigen der Zahlen markiert, die bei Division durch 15 den Rest 6 lassen. Die letzte dieser Zahlen ist 996.
Entsprechend werden im dritten Umlauf markiert: zuerst die Zahl $996+15-1000 = 11$, dann alle Zahlen, die bei Division durch 15 den Rest 11 lassen, und als letzte die Zahl 986.
Eine weitere Fortsetzung würde die Zahl $986+15-1000 = 1$ und daher nur noch bereits markierte Zahlen erreichen, so dass der Vorgang beendet, ist.

Also werden genau diejenigen der Zahlen markiert, die bei Division durch 15 einen der Reste 1, 6, 11 lassen. Das sind genau diejenigen der Zahlen, die bei Division durch 5 den Rest 1 lassen, d. h. genau die Zahlen $1, 1 \cdot 5 + 1 = 6$, $2 \cdot 5 + 1 = 11$, $3 \cdot 5 + 1 = 16$, ..., $199 \cdot 5 + 1 = 996$.

Ihre Anzahl (wie diese Aufzählung zeigt, zu erhalten als die Anzahl der Zahlen 0, 1, 2, 3, ... 199) beträgt 200. Also sind genau $1000 - 200 = 800$ Zahlen ohne Markierung geblieben.

Aufgabe 290734:
Ermittle alle diejenigen Paare $(z_1; z_2)$ aus zweistelligen natürlichen Zahlen z_1 und z_2, die die folgenden Bedingungen (1), (2) und (3) erfüllen!
(1) Es gilt $z_1 > z_2$.
(2) Die Differenz der Zahlen z_1 und z_2 beträgt 59.
(3) Die Differenz, die entsteht, wenn man von der Quersumme der Zahl z_1 die Quersumme der Zahl z_2 subtrahiert, beträgt 14.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn ein Paar $(z_1; z_2)$ zweistelliger natürlicher Zahlen die Bedingungen (1) , (2) und (3) erfüllt, dann folgt:
Sind a, b in dieser Reihenfolge die Ziffern von z_1 und c, d die von z_2, so ist $z_1 = 10a + b$, $z_2 = 10c + d$, $1 \leq a \leq 9$, $1 \leq c \leq 9$, $0 \leq b \leq 9$, $0 \leq d \leq 9$,
und aus (1), (2) und (3) folgt $10a + b - 10c - d = 59$, (4) $a + b - c - d = 14$ (5)
Subtrahiert man (5) von (4), so folgt $a - c = 5$; (6) hieraus und aus (5) folgt $b - d = 9$. (7)
Wegen $b \leq 9$, $d \geq 0$ ist (7) nur mit $b = 9$, $d = 0$ (8) möglich. Wegen $c \geq 1$ und (6) ist $a \geq 6$; hiernach und wegen (6) verbleiben für a und c nur die Möglichkeiten

$$a = 6, c = 1; a = 7, c = 2; a = 8, c = 3; a = 9, c = 4. \tag{9}$$

Mit (8) und (9) ist gezeigt, dass nur die Paare $(z_1; z_2) = (69; 10), (79; 20), (89; 30), (99; 40)$ die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllen können.

II. Sie erfüllen diese Bedingungen, wie aus $69 > 10$, $79 > 20$, $89 > 30$, $99 > 40$, $69 - 10 = 79 - 20 = 89 - 30 = 99 - 40 = 59$, $(6 + 9) - (1 + 0) = (7 + 9) - (2 + 0) = (8 + 9) - (3 + 0) = (9 + 9) - (4 + 0) = 14$ ersichtlich ist.

Aufgabe 330731:
Ermittle alle diejenigen vierstelligen natürlichen Zahlen z, die folgende Bedingungen (1) und (2) erfüllen!

(1) Die Zahl z ist durch 48 teilbar.
(2) Die zweite Ziffer der Zahl z ist eine 3, die dritte Ziffer von z ist eine 4.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn eine vierstellige natürliche Zahl z die Bedingungen (1) und (2) erfüllt, so folgt:
Nach (1) und wegen $48 = 2 \cdot 8 \cdot 3$ ist z auch durch 8 und durch 3 teilbar. Eine Zahl ist nur dann durch 8 teilbar, wenn die durch ihre letzten drei Ziffern dargestellte Zahl durch 8 teilbar ist. Unter den Zahlen von 340 bis 349 ist nur die Zahl 344 durch 8 teilbar. Hiernach und wegen (2) können die letzten drei Ziffern von z nur 3, 4, 4 in dieser Reihenfolge lauten.

Eine Zahl ist nur dann durch 3 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 3 teilbar ist. Da die Summe der letzten drei Ziffern $3 + 4 + 4 = 11$ beträgt, kann hiermit und mit der ersten Ziffer nur dann eine durch 3 teilbare Quersumme entstehen, wenn die erste Ziffer 1 oder 4 oder 7 lautet.
Die Zahl 4344 ist (da die Division 4344 : 48 auf 90, Rest 24 führt) nicht durch 48 teilbar, also scheidet die 4 als erste Ziffer aus.

Somit können unter den vierstelligen natürlichen Zahlen nur die beiden Zahlen 1344 und 7344 die Bedingungen (1) und (2) erfüllen.

II. Diese beiden Zahlen erfüllen offensichtlich (2) und (wegen $1344 : 48 = 28$ sowie $7344 : 48 = 153$) auch (1).
Damit sind alle Zahlen der geforderten Art ermittelt: Es sind genau die beiden Zahlen 1344 und 7344.

IV.III Diophantische Gleichungen

I Runde 1

Aufgabe 070713:
Gib sämtliche Geldbeträge bis zu 1 MDN an, die sich unter alleiniger Verwendung von Einpfennig-, Fünfpfennig- und Zehnpfennigstücken (wobei von jeder Sorte stets mindestens ein Stück zu nehmen ist) auszahlen lassen und bei denen der in Pfennig angegebene Geldbetrag genau doppelt so groß ist wie die benötigte Anzahl der Münzen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Bezeichnet man die Anzahl der Pfennigstücke mit x, die der Fünfpfennigstücke mit y und die der Zehnpfennigstücke mit z, dann gilt:

$$x + 5y + 10z = 2(x + y + z)$$

woraus man $8z + 3y = x$ erhält.

z	$x = 3y + 8z$	y	Geldbetrag (in Pfennig)
1	11	1	26
	14	2	34
	17	3	42
	20	4	50
	23	5	58
	26	6	66
	29	7	74
	32	8	82
	35	9	90
	38	10	98
2	19	1	44
	22	2	52
	25	3	60
	28	4	68
	31	5	76
	34	6	84
	37	7	92
	40	8	100

z	$x = 3y + 8z$	y	Geldbetrag (in Pfennig)
3	27	1	62
	30	2	70
	33	3	78
	36	4	86
	39	5	94
4	35	1	80
	38	2	88
	41	3	96
5	43	1	98

Da für alle $z \geq 6$ keine Lösungen unter den Bedingungen der Aufgabe existieren, gibt es also genau 26 derartige Geldbeträge, von denen genau 25 auf eine einzige Art und genau ein Geldbetrag (98 Pf) auf genau zwei Arten gemäß den erwähnten Bedingungen ausgezahlt werden kann.

Aufgabe 140711:
Klaus behauptet, er habe in seiner Geldtasche genau 17 Münzen mit einem Gesamtwert von 34 Pfennig.
Ermittle alle Möglichkeiten dafür, welche Anzahlen der Münzen einer jeden Sorte Klaus hiernach besitzen kann! Es sei dabei vorausgesetzt, dass nur Münzen der zur Zeit gültigen Währung der DDR (also 1; 5; 10 bzw. 20-Pfennig-Münzen) in Betracht kommen.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Der genannte Betrag kann sich höchstens aus 1-Pfennigstücken, 5-Pfennigstücken, 10-Pfennigstücken und 20-Pfennigstücken zusammensetzen, da es in der zur Zeit gültigen Währung der DDR keine anderen Münzen bis zu einem Wert von 34 Pfennig gibt.

Angenommen, Klaus hätte ein 20-Pfennigstück, dann hätten die restlichen 16 Münzen einen Gesamtwert von 14 Pfennig. Das ist nicht möglich. Infolgedessen kann Klaus kein 20-Pfennigstück in seiner Geldtasche haben.

Angenommen, Klaus hätte mehr als ein 10-Pfennigstück, dann hätte er höchstens noch 15 weitere Münzen, deren Gesamtwert höchstens 14 Pfennig betragen könnte; das ist wiederum nicht möglich. Somit kann Klaus in seiner Geldtasche an 10-Pfennigstücken höchstens eines haben.

Angenommen, Klaus hätte kein 10-Pfennigstück. Hätte er dann 5-Pfennigstücke in der Anzahl x, so hätte er 1-Pfennigstücke in der Anzahl $17-x$, und es wäre $5x+17-x = 34$, also $4x = 17$. Das ist nicht möglich, da 17 nicht durch 4 teilbar ist.
Daher verbleibt nur die Möglichkeit, dass Klaus in seiner Geldtasche genau ein 10-Pfennigstück und den Restbetrag in anderen Münzen hat. Hat er nun 5-Pfennigstücke in der Anzahl x, so hat er dann 1-Pfennigstücke in der Anzahl $16 - x$. Daraus folgt $5x + 16 - x = 24$, also $4x = 8$ und somit $x = 2$. Falls die von Klaus gemachte Behauptung richtig ist, muss er in seiner Geldtasche genau ein 10-Pfennigstück, genau zwei 5-Pfennigstücke und genau vierzehn 1-Pfennigstücke haben.

Aufgabe 340711:
Armin hat 100 Stäbchen von je 7 cm Länge und 100 Stäbchen von je 12 cm Länge. Er möchte mit solchen Stäbchen eine Strecke von 1 m Länge auslegen. Die Stäbchen sollen dabei stets lückenlos aneinander anschließen, und keine Teilstrecke darf mehrfach belegt sein.
Finde alle Möglichkeiten dafür, wie viele Stäbchen von 7 cm und wie viele von 12 cm sich zu einer solchen Belegung zusammenstellen lassen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Mit x Stäbchen der Länge 7 cm und y Stäbchen der Länge 12 cm lässt sich genau dann eine Strecke von

1 m Länge auslegen, wenn $7x + 12y = 100$ gilt.

I. Wenn x und y zwei Anzahlen sind, die diese Bedingung erfüllen, so folgt:
Da 12 und 100 durch 4 teilbar sind, aber 7 zu 4 teilerfremd ist, muss x durch 4 teilbar sein. Wäre $x \geq 16$, so wäre $7x + 12y \geq 7 \cdot 16 > 100$. Also kann x nur eine der Zahlen 0, 4, 8, 12 sein.

Wäre $x = 0$, so folgte $12y = 100$; wäre $x = 8$, so folgte $12y = 100 - 7 \cdot 8 = 44$; wäre $x = 12$, so folgte $12y = 100 - 7 \cdot 16$. In allen drei Fällen erhielte man für y keine ganze Zahl.
Also kann nur $x = 4$ und damit $12y = 100 - 7 \cdot 4 = 72$, also $y = 6$ sein.

II. Für $x = 4$ und $y = 6$ wird die Bedingung wegen $7 \cdot 4 + 12 \cdot 6 = 28 + 72 = 100$ erfüllt.
Daher gibt es zum Auslegen der Strecke genau die Möglichkeit, 4 Stäbchen von 7 cm und 6 Stäbchen von 12 cm zusammenzustellen.

II Runde 2

Aufgabe 100723:
Ermittle alle Möglichkeiten, eine natürliche Zahl t und eine Ziffer $\star$ so anzugeben dass die folgende Gleichung gilt: $9(230 + t)^2 = 492 \star 04$.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, die Gleichung hat eine Lösung. Dann müssen beide Seiten durch 9 teilbar sein. Wegen $4 + 9 + 2 + 0 + 4 = 19$ folgt daraus $\star = 8$. Die Zahl auf der rechten Seite der gegebenen Gleichung kann also nur 492804 lauten.

Dann folgt aus der Gleichung weiter $(230 + t)^2 = 492804 : 9 = 54756$, und daher erhält man: $230 + t$ ist eine natürliche Zahl, nicht kleiner als 230 und so beschaffen, dass ihr Quadrat 54756 beträgt.
Daraus folgt, dass für t nur der Wert 4 möglich ist. Weil nämlich 54756 auf 6 endet, kann t nur auf 4 oder 6 enden.
Wäre $t > 4$, so wäre $(230 + t)^2 > 234^2 = 54756$. Also ist nur $t = 4$ möglich.
Wie die Probe zeigt, ist $t = 4; \star = 8$ Lösung der gegebenen Gleichung, und zwar die einzige.

Aufgabe 120721:
Man ermittle die Paare (x, y) natürlicher Zahlen x und y, für die folgendes gilt:

(1) Die Summe der beiden Zahlen x und y beträgt 15390.
(2) Setzt man die einstellige Zahl x vor die Zahl y, so erhält man eine Zahl z, die viermal so groß ist wie die Zahl u, die man erhält, indem man die Zahl x hinter die Zahl y setzt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, zwei Zahlen x und y haben die geforderten Eigenschaften. Dann gilt:

$$(1) \quad x + y = 15390 \qquad , \qquad (2) \quad z = 4u$$

Nach (1) und weil x einstellig ist, hat y als vorletzte Ziffer eine 8 und als letzte Ziffer nicht 0.
Wegen (2) ist z durch 4 teilbar. Nach den Teilbarkeitsregeln für die Zahl 4 stellen daher die letzten beiden Ziffern von z, das sind auch die von y, eine durch 4 teilbare Zahl dar. Somit endet y auf 84 oder 88. Daher kann nur $x = 6$ oder $x = 2$ sein.

Wäre $x = 2$, so wäre $y = 15388$, und man erhielte $z = 215388$ sowie $u = 153882$ im Widerspruch zu $4 \cdot 153882 = 615528 \neq 215388$. Daher können nur $x = 6$ und $y = 15384$ die geforderten Eigenschaften haben.

In der Tat erfüllen diese beiden Zahlen (1), und man erhält mit ihnen ferner $z = 615384$ sowie $u = 153846$, so dass wegen $4 \cdot 153846 = 615384$ auch (2) erfüllt ist. Somit gibt es genau die Möglichkeit $x = 6$, $y = 15384$, die Bedingungen (1) und (2) zu erfüllen.

Aufgabe 220724:
Für drei natürliche Zahlen a, b, c werden die folgenden Eigenschaften (1) und (2) gefordert:

(1) Es gilt $a < b < c$.
(2) Wenn a, b, c die Maßzahlen der in Zentimeter gemessenen Kantenlängen eines Quaders sind, so hat der Quader das Volumen 270 cm^3, und die Summe der Längen aller zwölf Kanten des Quaders beträgt 80 cm.

Untersuche, ob es natürliche Zahlen gibt, die diese Forderungen erfüllen, und ob diese Zahlen durch die Forderungen (1) und (2) eindeutig bestimmt sind! Ist dies der Fall, so nenne diese Zahlen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Natürliche Zahlen a, b, c erfüllen genau dann die Forderung (2), wenn für sie die Gleichungen

(3) $abc = 270$,
(4) $a + b + c = 20$ gelten.

I. Wenn natürliche Zahlen a, b, c die Bedingungen (1),(3),(4) erfüllen, so folgt:

Nach (3) sind a, b, c von 0 verschieden; hiernach und wegen (1), (4) gilt (5) $0 < a < b < c < 20$.

Die einzigen Teiler von 270 zwischen 0 und 20 sind (6) 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15 und 18.

Die einzigen Möglichkeiten, aus diesen Zahlen zwei als a und b mit $a < b$ so auszuwählen, dass die, nach (4) erhaltene, Zahl $c = 20 - a - b$ auch $b < c$ erfüllt, sind in der folgenden Tabelle angegeben.
Für diejenigen a, b, für die auch diese Zahl $c = 20 - a - b$ eine der Zahlen (6) ist, wird dann geprüft, ob auch $abc = 270$ gilt:

a	1	1	1	1	1	2	2	2	3	3	5
b	2	3	5	6	9	3	5	6	5	6	6
c	17	16	14	13	10	15	13	12	12	11	9
c in (6)?	nein	nein	nein	nein	ja	ja	nein	nein	nein	nein	ja
abc					90	90					270

Es ergibt sich, dass nur $a = 5$, $b = 6$, $c = 9$ die Bedingungen (1), (3), (4) erfüllen können.

II. Sie erfüllen diese Bedingungen; denn es gilt $5 < 6 < 9$, $5 \cdot 6 \cdot 9 = 270$, $5 + 6 + 9 = 20$.
Damit ist gezeigt: Es gibt Zahlen, die die Forderungen (1), (2) erfüllen, sie sind durch diese Forderungen eindeutig bestimmt und lauten $a = 5$, $b = 6$, $c = 9$.

III Runde 3

Aufgabe 160735:
Ermittle alle Paare $(x; y)$ natürlicher Zahlen, für die die Gleichung $2x + 3y = 27$ erfüllt ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, $(x;y)$ sei ein Paar natürlicher Zahlen, das die Gleichung $2x+3y=27$ erfüllt. Dann folgt $3y=27-2x$, also ist insbesondere x ein Vielfaches von 3. Weiter folgt

$$y=9-\frac{2}{3}x \tag{1}$$

Da y eine natürliche Zahl ist, gilt $\frac{2}{3}x \leq 9$, also $x \leq \frac{27}{2}$; daher kommen nur folgende Werte für x in Frage: $x=0, x=3, x=6, x=9$ und $x=12$.

Nach (1) ergibt eich hierzu jeweils $y=9, y=7, y=5, y=3$ bzw. $y=1$. Also haben höchstens die Zahlenpaare (0;9), (3;7), (6;5), (9;3) und (12;1) die verlangten Eigenschaften.

Sie haben tatsächlich diese Eigenschaften, denn sie bestehen aus natürlichen Zahlen, und es gilt

$$2\cdot 0+3\cdot 9=27 \quad ; \quad 2\cdot 3+3\cdot 7=27 \quad ; \quad 2\cdot 6+3\cdot 5=27$$
$$2\cdot 9+3\cdot 3=27 \quad ; \quad 2\cdot 12+3\cdot 1=27$$

Aufgabe 270734:
Ermittle alle diejenigen geordneten Paare $(x;y)$ natürlicher Zahlen x,y, für die $x^2+xy+y^2=49$ gilt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Man kann zunächst diejenigen Paare ermitteln, die außer der geforderten Gleichung noch $x \leq y$ erfüllen.

I. Wenn ein Paar $(x;y)$ diese Bedingungen erfüllt, so folgt

$$3x^2 \leq x^2+xy+y^2=49<51 \Rightarrow x^2<17$$

x ist eine der Zahlen 0, 1, 2, 3, 4.
Für $x=0$ folgt $y^2=49$, also $y=7$.
Für $x=1$ folgt $y+y^2=48$. Dies wird von keiner natürlichen Zahl y erfüllt; denn wenn $y\leq 6$ ist, so gilt $y+y^2\leq 6+36<48$, und wenn $y\geq 7$ ist, so gilt $y+y^2\geq 7+49>48$.

Für $x=2$ folgt $2y+y^2=45$. Dies wird von keiner natürlichen Zahl y erfüllt; denn wenn $y\leq 5$ ist, so gilt $2y+y^2\leq 10+25<45$, und wenn $y\geq 6$ ist, so gilt $2y+y^2\geq 12+36>45$.

Für $x=3$ folgt $3y+y^2=40$. Dies wird nur von $y=5$ erfüllt; denn wenn $y<5$ ist, so gilt $3y+y^2<15+25=40$, und wenn $y>5$ ist, so gilt $3y+y^2>40$.

Für $x=4$ folgt $4y+y^2=33$. Dies wird von keiner natürlichen Zahl y erfüllt; denn wenn $y\leq 4$ ist, so gilt $4y+y^2\leq 16+16<33$, und wenn $y\geq 5$ ist, so gilt $4y+y^2\geq 20+25>33$.

Also können nur die Paare $(x;y)=(0;7)$ und $(x;y)=(3;5)$ (1)
die geforderte Gleichung und die Bedingung $x\leq y$ erfüllen.
Nach Weglassen der Bedingung $x\leq y$ kommen zu (1) noch genau die Paare $(x;y)=(7;0)$ und $(x;y)=(5;3)$ (2) hinzu. Also sind genau die in (1) und (2) genannten Paare alle gesuchten.

Aufgabe 280734:
Ermittle alle diejenigen Paare (p,q) aus zwei Primzahlen, die die folgenden Bedingungen erfüllen!

(1) Es gilt $q>p+1$.
(2) Die Zahl $s=p+q$ ist ebenfalls eine Primzahl.
(3) Die Zahl $p\cdot q\cdot s$ ist durch 10 teilbar.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn ein Paar $(p;q)$ von Primzahlen die Bedingungen erfüllt, so folgt:
Nach (1) und (2) sind q und s Primzahlen größer als 2, also ungerade. Da nach (3) aber $p \cdot q \cdot s$ gerade ist, muss p gerade sein, also $p = 2$ (4) gelten. Aus (3) und (4) folgt:
$q \cdot s$ ist durch 5 teilbar. Da q und s Primzahlen sind, ist das nur möglich, wenn $q = 5$ oder $s = 5$ gilt. Wegen (2) und (4) folgt hieraus $s = 7$ oder $q = 3$.

Da nach (1) und (4) aber $q > 3$ gilt, verbleibt nur die Möglichkeit $s = 7$ und damit $q = 5$. Also kann nur das Paar (2; 5) die Bedingungen der Aufgabe erfüllen.