Aufgaben und Lösungen der I. bis IV. Runde der Klassenstufe 8 der Mathematik-Olympiaden von 1960 bis 1994

OJM

Zentrales Komitee für die Olympiaden Junger Mathematiker

unter Nutzung von Manuela Kugels
https://www.olympiade-mathematik.de/

zusammengestellt von Steffen Polster
https://mathematikalpha.de
Chemnitz, 2019/22

bearbeitet von Christian Hercher
Flensburg, 2022

I. Algebra

I.I. Gleichungen

I. Runde 1

Aufgabe V00803:
Ich lasse einen Ball fallen. Er springt bis zu $\frac{2}{3}$ seiner Fallhöhe. Er fällt von neuem und springt das zweite Mal $\frac{5}{8}$ der ersten Sprunghöhe.
Berechne, von welcher Höhe ich den Ball fallen ließ, wenn er das zweite Mal 45 cm weniger hoch sprang als das erste Mal!

Lösung von Steffen Polster:
Wenn x die Fallhöhe ist, ergibt sich die lineare Gleichung

$$\frac{5}{8} \cdot \frac{2}{3}x + 45 = \frac{2}{3}x$$

mit der Lösung $x = 180$. Der Ball fiel aus einer Höhe von 180 cm.

Aufgabe V00806:
Fritz hat seinen Fuß auf ein 0,1 mm starkes Blatt Papier gestellt und überlegt, wie hoch er wohl stehen würde, faltete er es fünfzigmal.
Könnt ihr es ihm sagen?

Lösung von Steffen Polster:
Faltet er 50 mal, so würde das gefaltete Stapel theoretisch $2^{50} \cdot 0{,}1$ mm ≈ 112000000 km hoch sein.
Dies ist aber nicht möglich. Im Allgemeinen kann man ein Blatt maximal 8 Mal falten. Der Weltrekord mit Spezialfolie liegt bei 11 Mal.

Aufgabe V10813:

$$(7{,}3a - 9{,}8c) - (2{,}1b + 7{,}2c) - (3{,}9a - 4{,}7b)$$

a) Fasse zusammen!
b) Welcher Wert ergibt sich für $a = 2; b = 1{,}5; c = 7$?

Lösung von Steffen Polster:

$$\begin{aligned}(7{,}3a - 9{,}8c) - (2{,}1b + 7{,}2c) - (3{,}9a - 4{,}7b) &= 7{,}3a - 9{,}8c - 2{,}1b - 7{,}2c - 3{,}9a + 4{,}7b \\ &= 7{,}3a - 3{,}9a - 2{,}1b + 4{,}7b - 7{,}2c - 9{,}8c \\ &= 3{,}4a + 2{,}6b - 17c\end{aligned}$$

b) Einsetzen ergibt -108,3.

Aufgabe 010811:
Berechne:

$$\left(1\frac{2}{3}cd + \frac{25}{4}dg - 2\frac{1}{2}d\right) : 5d - \left(\frac{7}{2}mn - 1\frac{1}{4}ng + \frac{3}{4}n\right) : \left(-\frac{3}{8}n\right).$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

$$\begin{aligned}
&\left(1\frac{2}{3}cd+\frac{25}{4}dg-2\frac{1}{2}d\right):5d-\left(\frac{7}{2}mn-1\frac{1}{4}ng+\frac{3}{4}n\right):\left(-\frac{3}{8}n\right)\\
&=\frac{1}{5}\left(1\frac{2}{3}c+\frac{25}{4}g-2\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{8}{3}\right)\left(\frac{7}{2}m-1\frac{1}{4}g+\frac{3}{4}\right)\\
&=\left(\frac{5}{5\cdot 3}c+\frac{25}{5\cdot 4}g-\frac{5}{5\cdot 2}\right)+\left(\frac{8\cdot 7}{3\cdot 2}m-\frac{8\cdot 5}{3\cdot 4}g+\frac{8\cdot 3}{3\cdot 4}\right)\\
&=\left(\frac{1}{3}c+1\frac{1}{4}g-\frac{1}{2}\right)+\left(9\frac{1}{3}m-3\frac{1}{3}g+2\right)=\frac{1}{3}c+9\frac{1}{3}m-2\frac{1}{12}g+1\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 030812:
Klaus wird von seinen Eltern nach dem Ergebnis der letzten Mathematikarbeit gefragt. Er weiß, dass 5 Schüler die Note 1, 8 Schüler die Note 2, 4 Schüler die Note 4 und die übrigen Schüler die Note 3 erhielten. Außerdem erinnert er sich noch, dass die Durchschnittsnote genau 2,5 betrug.

Wie viel Schüler haben die Arbeit mitgeschrieben?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Anzahl der Schüler, die eine 3 geschrieben haben: x

Anzahl der Schüler: $n=5+8+4+x=17+x$

Durchschnittsnote: $d=2{,}5=(5\cdot 1+8\cdot 2+x\cdot 3+4\cdot 4)/n$

$$\begin{aligned}
2{,}5 &= (5\cdot 1+8\cdot 2+x\cdot 3+4\cdot 4)/(17+x)\\
2{,}5 &= (5+16+x\cdot 3+16)/(17+x)\\
42{,}5+2{,}5\cdot x &= 37+x\cdot 3\\
5{,}5 &= 0{,}5\cdot x\\
11 &= x
\end{aligned}$$

$n=17+x=17+11=28$. 28 Schüler haben die Arbeit mitgeschrieben.

Aufgabe 050812:
Für welche reellen Zahlen a und b ist die Gleichung

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{(a+b)\cdot(a-b)}{ab}\quad \text{erfüllt?}$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Weder a noch b dürfen Null sein. Dann ergibt sich

$$\frac{a+b}{ab}=\frac{(a+b)\cdot(a-b)}{ab}\Rightarrow 0=(a+b)\cdot(a-b)-(a+b)\Rightarrow(a+b)(a-b-1)=0$$

Ein Produkt ist Null, wenn mindestens ein Faktor Null ist. Damit muss $a+b=0$ oder $a-b=1$ gelten. Umgekehrt ist offensichtlich, dass die Gleichung erfüllt ist, wenn entweder $a=-b$ oder $a=b+1$ gilt.

Aufgabe 100812:
Ermittle alle rationalen Zahlen x mit $x\neq 2$, die die folgende Gleichung erfüllen:

$$\frac{3x}{x-2}+1+\frac{4}{x-2}\quad=\quad 2+\frac{3(x+1)}{x-2}+\frac{1}{x-2}$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, die Gleichung hätte eine rationale Lösung x mit $x \neq 2$. Dann folgt aus der gegebenen Gleichung

$$3x + x - 2 + 4 = 2x - 4 + 3x + 3 + 1$$

Daraus folgt $x = 2$ im Widerspruch zur Voraussetzung $x \neq 2$. Daher war die Annahme falsch, d. h., es gibt keine rationale Zahl x mit $x \neq 2$, die die gegebene Gleichung erfüllt.

Aufgabe 110811:
a) Berechne die Zahl
$$x = -\left\{-[-(-2)]^2\right\}^3 \cdot \left\{-\left[-\left(-\frac{1}{2}\right)^3\right]^2\right\}$$

b) Stelle fest, ob sich x als Potenz einer natürlichen Zahl darstellen lässt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

$$x = -\left\{-[-(-2)]^2\right\}^3 \cdot \left\{-\left[-\left(-\frac{1}{2}\right)^3\right]^2\right\} = -\left\{-[2]^2\right\}^3 \cdot \left\{-\left[\frac{1}{8}\right]^2\right\} = -\{-4\}^3 \cdot \left\{-\frac{1}{64}\right\} = -1$$

b) Da als Potenz einer natürlichen Zahl niemals eine negative Zahl auftritt, kann x nicht Potenz einer natürlichen Zahl sein.

Aufgabe 110812:
Ermittle alle rationalen Zahlen x, die folgende Eigenschaft haben:

Addiert man 33 zu x und halbiert die entstandene Summe, so erhält man das Doppelte der zu x entgegengesetzten Zahl.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Addiert man 33 zu einer Zahl x und halbiert die entstandene Summe, so erhält man $\frac{x+33}{2}$. Das Doppelte der zu x entgegengesetzten Zahl ist $2 \cdot (-x)$. Daher hat eine Zahl x genau dann die genannte Eigenschaft, wenn sie die Gleichung

$$\frac{x+33}{2} = -2x$$

erfüllt.
Diese Gleichung ist genau dann erfüllt, wenn $x + 33 = -4x$ gilt. Das ist äquivalent mit $5x = -33$ und dies mit $x = -\frac{33}{5}$. Daher hat genau diese Zahl die verlangte Eigenschaft.

Aufgabe 120813:
Man denke sich alle natürlichen Zahlen von 1 bis 1000000 fortlaufend nebeneinander geschrieben. Es entsteht die Zahl mit der Ziffernfolge 123456789101112...

welche Ziffer steht in dieser Zahl an der 300001. Stelle?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es gibt 9 einstellige, $99 - 9 = 90$ zweistellige, $999 - 99 = 900$ dreistellige, $9999 - 999 = 9000$ vierstellige und $99999 - 9999 = 90000$ fünfstellige Zahlen.

Die ersten neun Stellen der Ziffernfolge nehmen die einstelligen Zahlen, die nächsten 180 Stellen ($2 \cdot 90 = 180$) die zweistelligen, die nächsten 2700 Stellen ($3 \cdot 900 = 2700$) die dreistelligen ein. 36000 Stellen benötigen die vier- und 450000 Stellen die fünfstelligen Zahlen.

Da die ein- bis vierstelligen Zahlen zusammen also 38889 Stellen einnehmen, ist die uns interessierende Ziffer eine solche einer mindestens fünfstelligen Zahl.
Wegen $300001 - 38889 = 261112 < 450000$ und $261112 : 5 = 52222$ Rest 2 ist die zu ermittelnde Ziffer die zweite Ziffer der 52223. fünfstelligen Zahl. Da die fünfstelligen Zahlen mit 10000 beginnen, ist es die zweite Ziffer der Zahl 62222.
An der 300001. Stelle steht mithin die Ziffer 2.

Aufgabe 220812:
Von einer 22stelligen Zahl z werden folgende Eigenschaften gefordert:

z hat die Einerziffer 7; streicht man diese Endziffer und setzt sie vor die übrigen 21 Ziffern, so entsteht dasselbe Ergebnis wie bei der Multiplikation $7 \cdot z$.

Beweise, dass es genau eine solche Zahl z gibt! Ermittle diese Zahl!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn eine Zahl uz die verlangten Eigenschaften hat, so folgt:
Es gibt eine 21stellige Zahl x mit $z = 10x + 7$, und für sie gilt

$$7 \cdot 10^{21} + x = 7 \cdot (10x + 7)$$

Daraus folgt

$$69x = 7 \cdot 10^{21} - 49$$
$$x = \frac{7 \cdot 10^{21} - 49}{69} = \frac{6999999999999999999951}{69} = 101449275362318840579 7$$

Die Probe bestätigt die Lösung.

Aufgabe 270811:
Steffen stellt den Mitgliedern der AG Mathematik folgende Aufgabe:

„Jeder denke sich eine Zahl, multipliziere diese mit 2, addiere zum Produkt 30, dividiere die Summe durch 2, subtrahiere von dem erhaltenen Ergebnis die anfangs gedachte Zahl!
Schreibe des Ergebnis auf!“

Es stellte sich heraus, dass alle Schüler der Arbeitsgemeinschaft das gleiche Ergebnis hatten. Müssen sich Steffens Mitschüler unbedingt auch die gleiche Zahl gedacht haben?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Schüler müssen sich nicht unbedingt die gleiche Zahl gedacht haben. Man stellt fest, dass aus zwei verschiedenen Anfangszahlen dasselbe Ergebnis entsteht. So genügen zum Beweis z. B. folgende Feststellungen:

Die Anfangszahl 1 führt der Reihe nach auf die Zahlen $1 \cdot 2 = 2, 2 + 30 = 32, 32 : 2 = 16, 16 - 1 = 15$.
Die Anfangszahl 2 führt der Reihe nach auf die Zahlen $2 \cdot 2 = 4, 4 + 30 = 34, 34 : 2 = 17, 17 - 2 = 15$.

Andere Beweismöglichkeit: Man beweist, dass aus jeder Anfangszahl a dasselbe Ergebnis entsteht, nämlich vermittels der Zahlen

$$a \cdot 2; \quad a \cdot 2 + 30; \quad (a \cdot 2 + 30) : 2 = a + 15; \quad a + 15 - a = 15$$

Aufgabe 310812:
Rudolf macht folgende Aussage:

„Für je drei unmittelbar aufeinanderfolgende natürliche Zahlen gilt stets: Multipliziert man die kleinste dieser drei Zahlen mit der mittleren und addiert zum Ergebnis das Produkt aus der mittleren und der größten der drei Zahlen, so ist die entstandene Summe gleich dem doppelten Quadrat der mittleren Zahl.“

a) Überprüfe, ob diese Gleichheit in einigen selbstgewählten Beispielen zutrifft!

b) Beweise oder widerlege Rudolfs Aussage!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Beispiele einer Überprüfung der geforderten Art sind etwa:

3 aufeinanderfolgende Zahlen	$a \cdot b + b \cdot c$	$2 \cdot b^2$
3, 4, 5	$12 + 20 = 32$	$2 \cdot 16 = 32$
5, 6, 7	$30 + 42 = 72$	$2 \cdot 36 = 72$
...	...	...

b) Je drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen lauten, wenn man die mittlere mit b bezeichnet, $b-1$, b, $b+1$. Die Summe der zu bildenden Produkte beträgt $(b-1) \cdot b + b \cdot (b+1)$, das doppelte Quadrat der mittleren Zahl beträgt $2 \cdot b^2$. Da durch Umformen die Gleichung

$$(b-1) \cdot b + b \cdot (b+1) = b^2 - b + b^2 + b = 2 \cdot b^2$$

folgt, ist Rudolfs Aussage bewiesen.

Aufgabe 320814:
Alexander beobachtete zwei Kerzen, eine weiße und eine halb so lange rote. Beide wurden gleichzeitig angezündet; nach 2 Stunden war die weiße Kerze heruntergebrannt, die rote (da sie breiter war) erst nach 5 Stunden.

Wie lange nach dem Anzünden hatte es bis zu dem Zeitpunkt gedauert, an dem beide Kerzen einander genau gleichlang gewesen waren?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
In jeder Stunde verringerte sich die Länge L der weißen Kerze, solange sie brannte, um $\frac{1}{2}L$, die Länge $\frac{L}{2}$ der roten Kerze dagegen um $\frac{1}{5} \cdot \frac{L}{2} = \frac{1}{10}L$.
Jeweils nach x Stunden hat sich demnach die Länge der weißen Kerze um $\frac{x}{2}L$ auf $L - \frac{x}{2}L = (1 - \frac{x}{2})L$ verringert, die der roten Kerze um $\frac{x}{10}L$ auf $\frac{L}{2} - \frac{x}{10}L = (\frac{1}{2} - \frac{x}{10})L$.

Sind die Kerzen nach x Stunden einander gleichlang, so gilt folglich

$$1 - \frac{x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{x}{10} \qquad ; \qquad x = \frac{5}{4}$$

Also hatte es $\frac{5}{4}$ Stunden (= 75 Minuten) gedauert, bis die Kerzen einander gleichlang gewesen waren.

II. Runde 2

Aufgabe V10824:
Fritz rechnet $32 \cdot 38 = 30 \cdot 40 + 2 \cdot 8$ bzw. $73 \cdot 77 = 70 \cdot 80 + 3 \cdot 7$.
Leite daraus eine Rechenregel ab und beweise sie allgemein!

Lösung von Steffen Polster:
a) $32 \cdot 38 = 30 \cdot 40 + 2 \cdot 8$

$$\begin{aligned}(30+2)(40-2) &= 30 \cdot 40 + 2 \cdot 40 - 2 \cdot 30 - 2 \cdot 2 \\ &= 30 \cdot 40 + 2(40-30-2) = 30 \cdot 40 + 2 \cdot 8\end{aligned}$$

b) $73 \cdot 77 = 70 \cdot 80 + 3 \cdot 7$

$$\begin{aligned}(70+3)(80-3) &= 70 \cdot 80 + 3 \cdot 80 - 3 \cdot 70 - 3 \cdot 3 \\ &= 70 \cdot 80 + 3(80-70-3) = 70 \cdot 80 + 3 \cdot 7\end{aligned}$$

c) Verallgemeinerung:

$$\begin{aligned}(10a+b)(10a+10-b) &= 10a \cdot 10a + 10a \cdot 10 - 10ab + 10ab + 10b - b \cdot b \\ &= 100a^2 + 100a + 10b - b^2 \\ &= 10a(10a+10) + b(10-b)\end{aligned}$$

Weitere Verallgemeinerung:
Man erhält das Produkt zweier zweistelliger (ganzer) Zahlen mit gleichen Zehnern und einander zu 10 ergänzenden Einem, indem man zuerst die Zehner mit dem nächsthöheren Zehner, dann die Einer miteinander multipliziert und die beiden Zwischenprodukte addiert.

$$(a+b)(a+10-b) = a(a+10) + b(10-b)$$

Aufgabe 020823:
Berechne:

$$\frac{m^2-n^2}{m-n} + \frac{m^2+2mn+n^2}{m+n}.$$

Lösung von Carsten Balleier:

$$\frac{m^2-n^2}{m-n} + \frac{m^2+2mn+n^2}{m+n} = \frac{(m+n)(m-n)}{m-n} + \frac{(m+n)^2}{m+n} = m+n+m+n = 2(m+n)$$

Aufgabe 020824:
Welche x erfüllen die folgende Gleichung:

$$\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{3}\right) : \left(\frac{x}{3}-\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{3x}{4}-\frac{1}{6}\right) : \left(\frac{x}{2}-\frac{2}{3}\right)?$$

Lösung von Carsten Balleier:

$$\begin{aligned}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{x}{2}-\frac{2}{3}\right) &= \left(\frac{3x}{4}-\frac{1}{6}\right) \cdot \left(\frac{x}{3}-\frac{1}{2}\right) \\ \frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} + \frac{2}{9} &= \frac{x^2}{4} - \frac{31x}{72} + \frac{1}{12} \\ \frac{5}{72}x &= \frac{5}{36}\end{aligned}$$

Also ist $x = 2$, wovon man sich in der Probe noch einmal überzeugt.

Aufgabe 040824:
Peter ist im Ferienlager. Er will für seine Gruppe Brause zu 21 Pf je Flasche einkaufen und nimmt dazu leere Flaschen mit.
Für das eingelöste Pfandgeld (30 Pf für jede der leeren Flaschen) möchte er möglichst viele Flaschen Brause kaufen. Für jede Flasche müssen erneut 30 Pf Pfand hinterlegt werden.
Es stellt sich heraus, dass er 6 Flaschen weniger erhält, als er abgegeben hat. Außerdem bekommt er noch Geld zurück.

Wie viel leere Flaschen hatte Peter mitgenommen? (Es gibt nicht nur eine Lösung.)

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Peter muss den Inhalt der gekauften Flaschen von dem Erlös der 6 nicht zurückerhaltenen Flaschen bezahlen. Wegen $180 : 21 = 8\frac{12}{21}$ kann er höchstens 8 Flaschen gekauft haben.

1. Lösung: Peter hatte 14 Flaschen mit und erhält 12 Pf zurück.

2. Lösung: Peter hatte 13 Flaschen mit und erhält 33 Pf zurück.

Hätte Peter 12 Flaschen mitgehabt, so hätte er 7 Flaschen kaufen können, also $(n-5)$ statt nur $(n-6)$, was der Aufgabe widerspricht.

Aufgabe 100823:
Bei einem 216 kp schweren Stück einer Kupfer-Zink-Legierung wurde in Wasser ein Auftrieb (Gewichtsverlust) von 26 kp gemessen.
Bekannt ist, dass Kupfer beim Eintauchen in (destilliertes) Wasser $\frac{1}{9}$ seines ursprünglichen Gewichtes und Zink $\frac{1}{7}$ seines ursprünglichen Gewichtes verliert.

Ermittle den prozentualen Gewichtsanteil des Kupfers und den des Zinks in der angegebenen Legierung! (Die zu ermittelnden Größen sind auf volle Prozent zu runden).

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Das Gewicht des Kupferanteils in der Legierung sei x kp. Dann beträgt das Gewicht des Zinkanteils $(216-x)$ kp.
Beim Eintauchen in Wasser beträgt der Gewichtsverlust des Kupferanteils $\frac{1}{9}x$ kp und der des Zinkanteils $\frac{1}{7}(216-x)$ kp. Daher gilt:

$$\frac{1}{9}x + \frac{1}{7}(216-x) = 26$$

woraus man $7x + 9\cdot(216-x) = 63\cdot 26$, also $x = 153$ erhält.
Der Kupferanteil kann daher nur 153 kp, der Zinkanteil nur 216 kp - 153 kp = 63 kp betragen haben.
Wegen $153 : 216 \approx 0{,}708$ betrug der prozentuale Anteil des Kupfers rund 71 %, der des Zinks rund 29 %.

Aufgabe 130823:
Man ermittle alle rationalen Zahlen r mit folgender Eigenschaft:

Subtrahiert man r vom Zähler des Bruches $\frac{3}{4}$ und addiert r zu dessen Nenner, so erhält man einen Bruch, der halb so groß wie $\frac{3}{4}$ ist.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, es gibt eine rationale Zahl r, die die Bedingungen der Aufgabe erfüllt. Dann gilt:

$$\frac{3-r}{4+r} = \frac{3}{8}$$

Daraus folgt $24 - 8r = 12 + 3r$. Also kann höchstens $r = \frac{12}{11}$ die Bedingungen der Aufgabe erfüllen. Tatsächlich ist

$$\frac{3-\frac{12}{11}}{4+\frac{12}{11}} = \frac{\frac{21}{11}}{\frac{56}{11}} = \frac{3}{8}$$

d. h., $r = \frac{12}{11}$ erfüllt die Bedingungen.

Aufgabe 170824:
Dieter erzählt seinen Klassenkameraden:

> „Mein Bruder Fritz ist nur halb so alt wie ich. Wenn man die Anzahl seiner Lebensjahre mit sich selbst multipliziert, erhält man das Alter meines Vaters. Meine Mutter ist drei Jahre jünger als mein Vater. Alle zusammen sind wir 87 Jahre alt.“

Ermittle das Alter aller 4 Personen! (Es sind jeweils nur die vollendeten Lebensjahre zu berücksichtigen.)

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Das Alter des Vaters ist eine Quadratzahl kleiner 45, da das Alter von Vater und Mutter zusammen nicht 87 Jahre oder mehr betragen kann. Da der Vater die älteste der vier Personen ist, beträgt sein Alter mindestens ein Viertel von 87 Jahren, also ist es größer als 21. Zwischen 21 und 45 liegen genau die Quadratzahlen 25 und 36.

Fall 1: Angenommen, das Alter des Vaters wäre 25 Jahre. Dann wären Fritz 5 Jahre, Dieter 10 Jahre und die Mutter 22 Jahre. Das Alter aller Familienangehörigen zusammen betrüge in diesem Fall nicht 87 Jahre. Also ist der Vater nicht 25 Jahre alt.

Fall 2: Angenommen, das Alter des Vaters beträgt 36 Jahre. Dann ist Fritz 6 Jahre, Dieter 12 Jahre und die Mutter 33 Jahre alt. Alle zusammen sind wegen $36+6+12+33 = 87$ mithin 87 Jahre, wie es verlangt war.
Folglich treffen diese Altersangaben als einzige zu.

Aufgabe 210824:
Über den Mitgliederstand einer Betriebssportgemeinschaft (BSG), in der genau fünf Sektionen bestehen, wurden folgende Angaben gemacht:

- Genau 22 Mitglieder der BSG gehören zur Sektion Schach.
- Genau ein Drittel aller Mitglieder der BSG gehören zur Sektion Fußball.
- Genau ein Fünftel aller Mitglieder der BSG gehören zur Sektion Leichtathletik.
- Genau drei Siebentel aller Mitglieder der BSG gehören zur Sektion Tischtennis.
- Genau zwei Neuntel aller Mitglieder der BSG gehören zur Sektion Turnen.
- Genau 8 Mitglieder der BSG gehören zu je genau drei verschiedenen Sektionen.
- Genau 72 Mitglieder der BSG gehören zu mindestens zwei verschiedenen Sektionen.
- Kein Mitglied der BSG gehört mehr als drei Sektionen an, aber jedes Mitglied mindestens einer Sektion.

Untersuche, ob es eine Zusammenstellung von Mitgliederzahlen sowohl der gesamten BSG als auch der fünf einzelnen Sektionen gibt, so dass alle diese Aussagen zutreffen! Untersuche, ob diese Mitgliederzahlen durch die Aussagen eindeutig bestimmt sind! Ist das der Fall, so gib die Mitgliederzahlen an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn für eine Zusammenstellung von Mitgliederzahlen alle genannten Aussagen zutreffen, so folgt: Ist x die Mitgliederzahl der BSG, so sind die Mitgliederzahlen der genannten Sektionen

$$22, \quad \frac{x}{3}, \quad \frac{x}{5}, \quad \frac{3}{7}x, \quad \frac{2}{9}x \tag{1}$$

Addiert man diese Zahlen, so hat man damit jedes Mitglied der BSG so oft erfasst, wie die Anzahl der Sektionen angibt, denen das betreffende Mitglied angehört. Dieselbe Art der Erfassung kann man folgendermaßen erreichen:

Man erfasse jedes der x Mitglieder zunächst einmal, dann die im Aufgabentext genannten 72 Mitglieder noch ein zweites Mal und schließlich die zuvor genannten 8 Mitglieder noch ein drittes Mal. Daher gilt

$$22 + \frac{x}{3} + \frac{x}{5} + \frac{3}{7}x + \frac{2}{9}x = x + 80$$

Durch Subtraktion von $22 + x$ und Multiplikation mit 315 folgt

$$105x + 63x + 135x + 70x - 315x = 18270 \qquad \Rightarrow \qquad x = 315$$

Nach (1) können daher die genannten Aussagen nur dann zutreffen, wenn 315 die Mitgliederzahl der BSG ist und 22, 105, 63, 135, 70 die Mitgliederzahlen der Sektionen sind.

II. Werden umgekehrt diese Mitgliederzahlen für die Sektionen erreicht und wird zusätzlich erreicht, dass genau 72 Mitglieder zu je mindestens zwei Sektionen gehören und von diesen genau 8 zu je genau drei Sektionen, so beträgt die Mitgliederzahl der BSG wegen $22 + 105 + 63 + 135 + 70 - 72 - 8 = 315$ dann 315.
Also treffen damit auch die Aussagen zu, dass die Mitgliederzahlen 105, 63, 135, 70 dasselbe sind wie $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{3}{7}$ bzw. $\frac{2}{9}$ der Mitgliederzahl der BSG.

Aus I. und II. folgt: Es gibt eine Zusammenstellung von Mitgliederzahlen der BSG und der Sektionen so, dass alle genannten Aussagen zutreffen. Sie ist durch die Aussagen eindeutig bestimmt und lautet:

BSG: 315; Sektionen: 22, 105, 63, 135, 70.

Aufgabe 230822:
Eine Schulklasse wird so in Lernbrigaden aufgeteilt, dass die Anzahl der Mitglieder jeder Brigade um 2 größer ist als die Anzahl der Brigaden. Hätte man eine Brigade weniger gebildet, so hätte jede Brigade 2 Mitglieder mehr haben können.

Weise nach, dass man aus diesen Angaben die Anzahl der Schüler dieser Klasse eindeutig ermitteln kann, und gib diese Anzahl an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Bezeichnet man die Anzahl der Brigaden mit x, so sind in jeder Brigade $(x + 2)$ Schüler, und der Klasse gehören $x(x + 2)$ Schüler an.

Hätte man eine Brigade weniger gebildet, wären es $(x-1)$ Brigaden mit je $(x+4)$ Schülern gewesen. Daraus ergibt sich die Schülerzahl zu $(x-1)(x+4)$. Folglich gilt

$$x(x+2) = (x-1)(x+4) \qquad \Rightarrow \qquad x = 4$$

Es wurden mithin 4 Brigaden zu je 6 Schülern gebildet. Daher befinden sich insgesamt 24 Schüler in dieser Klasse.

Aufgabe 250821:
Ermittle diejenigen zwölf aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen, die die Eigenschaft haben, dass die Summe der beiden größten dieser Zahlen gleich der Summe der zehn übrigen ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es sei x die kleinste der zwölf Zahlen. Dann gilt laut Aufgabenstellung

$$x + x + 1 + x + 2 + x + 3 + x + 4 + x + 5 + x + 6 + x + 7 + x + 8 + x + 9 = x + 10 + x + 11$$

$$10x + 45 = 2x + 21 \qquad \Rightarrow \qquad x = -3$$

Tatsächlich ist die Summe der zehn aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen von -3 bis 6 gleich der Summe der beiden darauffolgenden Zahlen 7 und 8.
Die Bedingungen der Aufgabe werden also genau von den Zahlen -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 und 8 erfüllt.

Aufgabe 270821:
Ein AG-Leiter behauptet, er könne jede von seinen Zirkelteilnehmern gedachte Zahl erraten, wenn ihm nur das Ergebnis der folgenden Rechnung genannt wird:

> „Denke dir eine Zahl. Addiere dazu die Zahl 5, multipliziere die Summe mit 16, subtrahiere davon das Sechsfache der gedachten Zahl und dividiere diese Differenz durch 10!“

Lässt sich tatsächlich aus dem nun zu nennenden Ergebnis dieser Rechnung die gedachte Zahl ermitteln? Wenn das der Fall ist, so beschreibe und begründe, auf welche Weise das geschehen kann!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Bezeichnet man die gedachte Zahl mit x, dann werden durch die genannte Rechnung der Reihe nach die Zahlen

$$\begin{array}{rcl} x+5 & ; & (x+5)\cdot 16 = 16x + 80 \\ 16x + 80 - 6x = 10x + 80 & ; & (10x+80) : 10 = x + 8 \end{array}$$

gebildet. Subtrahiert man hiervon die Zahl 8, so erhält man die Zahl x.
Damit wird bewiesen: Die gedachte Zahl lässt sich aus dem zu nennenden Ergebnis ermitteln, indem man von diesem Ergebnis 8 subtrahiert.

Aufgabe 290822:
a) Untersuche, ob die Gleichung

$$\left(\frac{x}{2} + 2\right)(4x - 7) = 2x^2 + \frac{x}{3} + 1$$

eine natürliche Zahl x als eine Lösung besitzt!
b) In der genannten Gleichung soll die Zahl 7 so durch eine rationale Zahl r ersetzt werden, dass die entstehende Gleichung die Zahl $x = 1$ als eine Lösung besitzt.
Ermittle alle diejenigen rationalen Zahlen r, die diese Forderung erfüllen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Wenn x eine Lösung der genannten Gleichung ist, dann folgt

$$\begin{aligned} 2x^2 - \frac{7}{2}x + 8x - 14 &= 2x^2 + \frac{x}{3} + 1 \\ 48x - 21x - 2x &= 90 \\ 5x &= 18 \end{aligned}$$

Da dies von keiner natürlichen Zahl x erfüllt wird, hat die genannte Gleichung keine natürliche Zahl x als Lösung.

b) Die entstehende Gleichung

$$\left(\frac{x}{2} + 2\right)(4x - r) = 2x^2 + \frac{x}{3} + 1$$

hat genau dann $x = 1$ als eine Lösung, wenn $\left(\frac{1}{2} + 2\right)(4 - r) = 2 + \frac{1}{3} + 1$ (1) gilt. Das ist genau dann der Fall, wenn

$$\frac{5}{2} \cdot (4 - r) = \frac{10}{3} \qquad \Rightarrow \qquad r = \frac{8}{3}$$

gilt. Die genannte Forderung wird also genau von der rationalen Zahl $r = \frac{8}{3}$ erfüllt.

Aufgabe 300821:
In einem Garten stehen zwei Fässer mit Wasser. Jörg gießt aus dem ersten Fass so viele Liter Wasser in das zweite Fass, wie dort bereits enthalten sind. Anschließend gießt er aus dem zweiten Fass so viele Liter Wasser in das erste, wie sich dort nach dem vorigen Umgießen befinden. Nach diesen beiden Umfüllvorgängen befinden sich in jedem der beiden Fässer genau je 24 Liter Wasser.

Untersuche, ob aus diesen Angaben eindeutig folgt, wie viele Liter Wasser sich anfangs in jedem der beiden Fässer befanden! Ist dies der Fall, so gib diese beiden Literzahlen an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn sich am Schluss in jedem der beiden Fässer 24 Liter befinden und mit dem zweiten Umfüllen die Wassermenge des ersten Fasses verdoppelt wurde, dann müssen sich wegen $24 : 2 = 12$ vor dem zweiten Umfüllen in diesem Fass 12 Liter Wasser befunden haben.
Da die gesamte in den Fässern vorhandene Wassermenge 48 Liter beträgt, waren wegen $48 - 12 = 36$ in dem zweiten Fass zu diesem Zeitpunkt 36 Liter. Ferner war mit dem ersten Umfüllen die Wassermenge im zweiten Fass verdoppelt worden.
Daraus ergibt sich, dass für die Wassermengen, die anfangs in den Fässern waren, eindeutig folgt: Wegen $36 : 2 = 18$ waren im zweiten Fass 18 Liter und wegen $48 - 18 = 30$ im ersten Fass 30 Liter.

Aufgabe 300824:
Man denke sich die Zahlen 1, 2, 3, 4, ..., 9999 derart hintereinander aufgeschrieben, dass die Zifferndarstellung einer Zahl z entsteht.

Der Beginn dieser Darstellung lautet $z = 123456789101112131415...$; beispielsweise an der elften Stelle steht die Ziffer 0, die Ziffer 2 tritt z. B. an der zweiten Stelle, an der 15ten Stelle und noch an weiteren Stellen von z auf.

Welche Ziffer steht an der 206788sten Stelle von z?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Unter den aufgeschriebenen Zahlen gibt es genau 9 einstellige, genau $99 - 9 = 90$ zweistellige, genau $999 - 99 = 900$ dreistellige, genau $9999 - 999 = 9000$ vierstellige und genau $99999 - 9999 = 90000$ fünfstellige Zahlen.

In der damit aufgeschriebenen Ziffernfolge für z nehmen die einstelligen Zahlen die ersten 9 Stellen ein, die zweistelligen Zahlen die nächsten $2 \cdot 90 = 180$ Stellen, die dreistelligen Zahlen die nächsten $3 \cdot 900 = 2700$ Stellen, die vierstelligen Zahlen die nächsten $4 \cdot 9000 = 36000$ Stellen und die fünfstelligen Zahlen die nächsten $5 \cdot 90000 = 450000$ Stellen.

Da somit die ein- bis vierstelligen Zahlen wegen $9 + 180 + 2700 + 36000 = 38889$ die ersten 38889 Stellen einnehmen, die ein- bis fünfstelligen Zahlen jedoch wegen $38889 + 450000 = 488889$ die Stellen bis zur 488889sten einnehmen, kommt die Ziffer an der 206788sten Stelle von z wegen $38889 < 206788 < 488889$ in einer der aufgeschriebenen fünfstelligen Zahlen vor.

Um festzustellen, in welcher, bilden wir die Differenz $206788 - 38889 = 167899$ und führen die Division von 167899 durch 5 mit Rest aus. Damit erhalten wir, dass $167899 = 5 \cdot 33579 + 4$ gilt, und es folgt:

Der gesuchten Ziffer gehen 33579 fünfstellige Zahlen voran, und sie ist in der dann folgenden, also 33580sten fünfstelligen Zahl die vierte Ziffer. Da die fünfstelligen Zahlen mit der Zahl 1000 beginnen, lautet die 33580ste von ihnen 43579. Ihre vierte Ziffer ist 7.
Somit steht an der 206788sten Stelle von z die Ziffer 7.

Aufgabe 320824:
In der linken Waagschale einer gleicharmigen Waage stehen drei Kerzen, in der rechten steht eine Kerze. Die vier Kerzen sind so beschaffen, dass jede von ihnen während je einer Stunde Brenndauer die gleiche Masse verliert wie jede andere von Ihnen. Jede der drei linken Kerzen würde zum vollständigen Herunterbrennen 9 Stunden brauchen, die rechte Kerze 12 Stunden.

Die vier Kerzen werden gleichzeitig angezündet. Wie lange danach ist die Waage erstmals Im Gleichgewicht?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es sei m die Masse, die jede der vier Kerzen während einer Stunde Brenndauer verliert.
Dann hat jede der drei linken Kerzen die Masse $9m$, und die rechte Kerze hat die Masse $12m$. Nach x Stunden Brenndauer befindet sich folglich, solange $x \leq 9$ bleibt, auf der linken bzw. auf der rechten Waagschale die Masse $3 \cdot (9 - x)m$ bzw. die Masse $(12 - x)m$.
Hiermit ergibt sich genau dann Gleichgewicht, wenn

$$3 \cdot (9 - x) = 12 - x$$

gilt. Die Lösung der Gleichung ist $x = 7\frac{1}{2}$.
Also ist die Waage erstmals $7\frac{1}{2}$ Stunden nach dem Anzünden der vier Kerzen im Gleichgewicht.

Aufgabe 330821:
Zu Beginn einer Feier waren insgesamt anwesend: Genau viermal so viele Frauen wie Männer. Nachdem vier Ehepaare die Feier verlassen hatten, waren genau fünfmal so viele Frauen wie Männer auf der Feier.

Wie viele Personen waren insgesamt zu Beginn auf der Feier gewesen?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Waren zu Beginn genau x Männer auf der Feier, so waren genau $4x$ Frauen auf der Feier. Nachdem vier Ehepaare die Feier verlassen hatten, blieben genau $x - 4$ Männer und $4x - 4$ Frauen. Für diese Anzahlen gilt folglich

$$5 \cdot (x - 4) = 4x - 4 \qquad \text{also} \qquad x = 16$$

Somit waren zu Beginn insgesamt 16 Männer und 64 Frauen, also 80 Personen auf der Feier gewesen.

Aufgabe 330822:
Susann lässt sich je eine natürliche Zahl von Xaver, Yvonne und Zacharias sagen. Sie teilt ihnen dann die Summe dieser drei Zahlen mit. Jeder multipliziert die mitgeteilte Summe mit der ursprünglich von ihm genannten Zahl. So erhält Xaver das Ergebnis 240, Yvonne 270 und Zacharias 390.

Untersuche, ob hierdurch die drei ursprünglich genannten Zahlen eindeutig bestimmt sind! Ist dies der Fall, so gib diese Zahlen an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Sind x, y, z die drei ursprünglich genannten Zahlen und ist $s = x + y + z$ (1) ihre Summe, so gilt

$$x \cdot s = 240 \qquad , \qquad y \cdot s = 270 \qquad , \qquad z \cdot s = 390 \tag{2}$$

Indem man (1) mit s multipliziert und dann (2) anwendet, folgt

$$s^2 = x \cdot s + y \cdot s + z \cdot s \qquad ; \qquad 240 + 270 + 390 = 900$$

Da s als Summe dreier natürlicher Zahlen selbst eine natürliche Zahl ist, ist hierdurch eindeutig bestimmt: Es gilt $s = 30$ und damit nach (2) $x = 8, y = 9, z = 13$.

III. Runde 3

Aufgabe 020832:
Rechenvorteile erleichtern das Kopfrechnen. Zwei Zahlen von 11 bis 19 kann man z. B. folgendermaßen multiplizieren:

$18 \cdot 17 = ?$	$18 + 7$	25
	Null anhängen	250
	$7 \cdot 8$ addieren	306

Weise die Richtigkeit dieses Rechenvorteils nach!

Lösung von Carsten Balleier:
Man kann das Produkt darstellen als $(10 + a)(10 + b)$ mit $1 \leq a,b \leq 9$. Es ist daher gleich

$$100 + 10a + 10b + ab = 10(10 + a + b) + ab.$$

Die Summe aus 10 und den beiden Einerstellen entspricht im Beispiel $18 + 7$, die Multiplikation mit 10 der angehängten Null und das Produkt der Einer der $7 \cdot 8$.

Aufgabe 100832:
Eine Pumpe P_1 füllt ein Becken in genau 4 h 30 min. Eine zweite Pumpe P_2 füllt dasselbe Becken in genau 6 h 45 min. Beim Füllen dieses Beckens wurde eines Tages zunächst die Pumpe P_1 genau 30 min lang allein eingesetzt. Anschließend wurden beide Pumpen zusammen so lange eingesetzt, bis das Becken gefüllt war.

Berechne, wie lange es insgesamt dauerte, bis das Becken unter diesen Umständen gefüllt wurde! (Es sei angenommen, dass beide Pumpen während ihres Einsatzes mit konstanter Leistung arbeiteten.)

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Da P_1 das gesamte Becken in genau 4 h 30 min füllt, wurde durch diese Pumpe in 30 min genau $\frac{1}{9}$ des Beckens gefüllt. In jeder Minute füllte P_1 mithin genau $\frac{1}{270}$ des Beckens.

Da P_2 das gesamte Becken in genau 6 h 45 min, also in 405 min füllt, füllte diese Pumpe in jeder Minute $\frac{1}{405}$ des Beckens.
In der Zeit, in der beide Pumpen zusammen arbeiteten, füllten sie mithin in jeder Minute wegen

$$\frac{1}{270} + \frac{1}{405} = \frac{15}{2430} = \frac{1}{162}$$

genau $\frac{1}{162}$ des Beckens. Insgesamt wurden von beiden Pumpen gemeinsam $\frac{8}{9}$ des Beckens gefüllt.
Wegen $\frac{8}{9} = \frac{144}{162}$ geschah das in genau 144 min. Infolgedessen wurde das Becken in der in der Aufgabe angegebenen Weise in genau 174 min, das sind 2 h 54 min, gefüllt.

Aufgabe 110831:
In ein leeres Gefäß (ohne Abfluss) mit einem Fassungsvermögen von 1000 Liter flossen mit gleichmäßiger Strömungsgeschwindigkeit zunächst in jeder Sekunde genau 30 Liter Wasser und von einem späteren Zeitpunkt t ab in jeder Sekunde genau 15 Liter Wasser. Nach genau 40 s, gemessen vom Anfang an, war das Gefäß gefüllt.

Ermittle, welcher Bruchteil des Gefäßinhalts zum Zeitpunkt t gefüllt war!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die vom Anfang bis zum Zeitpunkt t vergangene Zeit, während der also genau 30 Liter je Sekunde in das Gefäß flossen, betrage x, dann sind in der Zeit, während der genau 15 Liter je Sekunde in das Gefäß flossen, genau $(40 - x)$ Sekunden vergangen, und es gilt:

$$30x + (40 - x) \cdot 15 = 1000$$

also $15x = 400$, woraus man $x = \frac{80}{3}$ erhält.
Während dieser $\frac{80}{3}$ s flossen genau $\frac{80}{3} \cdot 30$ l, das sind 800 1 Wasser, in das Gefäß. Wegen $\frac{800}{1000} = \frac{4}{5}$ waren daher zum Zeitpunkt t genau $\frac{4}{5}$ des Gefäßes gefüllt.

Aufgabe 110835:
Gisela stellt auf einem Pioniernachmittag folgende Aufgabe:

> „Wenn ich aus diesem Gefäß mit Nüssen an fünf von euch dem ersten die Hälfte und eine halbe Nuss und dann dem zweiten, dem dritten usw. nacheinander jeweils die Hälfte der noch vorhandenen Nüsse und eine halbe dazu gebe, dann habe ich alle verbraucht.
>
> Wie groß ist die Anzahl der Nüsse, die das Gefäß enthielt?
>
> Wie groß ist für jeden der fünf Pioniere die Anzahl der Nüsse, die er erhalten würde?“

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Anzahl der Nüsse in dem Gefäß sei x. Dann würde der erste Pionier $\frac{x}{2} + \frac{1}{2}$ erhalten, als Rest blieben

$$\frac{x}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(x - 1)$$

Davon würde der zweite Pionier $\frac{1}{4}(x - 1) + \frac{1}{2}$ erhalten, als Rest blieben $\frac{1}{4}(x - 1) - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}(x - 3)$.

Davon würde der dritte Pionier $\frac{1}{8}(x - 3) + \frac{1}{2}$ erhalten, als Rest blieben $\frac{1}{8}(x - 3) - \frac{1}{2} = \frac{1}{8}(x - 7)$.

Davon würde der vierte Pionier $\frac{1}{16}(x - 7) + \frac{1}{2}$ erhalten, als Rest blieben

$$\frac{1}{16}(x - 7) - \frac{1}{2} = \frac{1}{16}(x - 15)$$

Davon würde der fünfte Pionier $\frac{1}{32}(x-15)+\frac{1}{2}$ erhalten, als Rest blieben

$$\frac{1}{32}(x-15)-\frac{1}{2}=\frac{1}{32}(x-31)$$

Dieser Rest betrug laut Aufgabe Null. Daraus folgt $x = 31$. Also enthielt das Gefäß genau 31 Nüsse. Von diesen würden bekommen:
Der 1. Pionier 16 Nüsse, der 2. Pionier 8 Nüsse, der 3. Pionier 4 Nüsse, der 4. Pionier 2 Nüsse und der 5.Pionier 1 Nuss.

Aufgabe 160834:
Fritz behauptet: Zwei zweistellige Zahlen, die durch Vertauschen der Ziffern auseinander hervorgehen (z. B. 72 und 27), kann man nach der folgenden Vorschrift miteinander multiplizieren, die am Beispiel der beiden genannten Zahlen dargelegt werden soll:

(1)	Man berechnet das Produkt der beiden Ziffern	$7 \cdot 2 = 14$
(2)	Man schreibt die erhaltene Zahl zweimal hintereinander auf (Hinweis: War die in (1) erhaltene Zahl einstellig, so schreibt man zwischen die beiden Zahlen noch eine Ziffer Null.)	1414
(3)	Man addiert die Quadratzahlen der beiden Ziffern	$49 + 4 = 53$
(4)	Man hängt an das Ergebnis eine Null an	530
(5)	Man addiert die Ergebnisse der Rechenschritte (2) und (4) und erhält damit das gesuchte Produkt	$1414 + 530 = 1944$

Beweise die Richtigkeit dieser Behauptung!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Sind a und b die beiden Ziffern, so sind die zu multiplizierenden Zahlen $10a + b$ und $10b + a$. Ihr Produkt ist

$$(10a + b)(10b + a) = 100ab + 10a^2 + 10b^2 + ab$$

In Rechenschritt (1) ergibt sich nun ab, in Rechenschritt (2) demnach $100ab + ab$. In Rechenschritt (3) ergibt sich $a^2 + b^2$, in (4) also $10(a^2 + b^2)$.
Somit führt Rechenschritt (5) auf $100ab + ab + 10(a^2 + b^2)$, also, wie behauptet, auf das zu berechnende Produkt.

Aufgabe 170833:
Die gebrochene Zahl $\frac{9}{91}$ soll als Differenz zweier positiver echter Brüche mit den Nennern 7 und 13 dargestellt werden.

Untersuche, ob es eine solche Darstellung gibt, ob es mehr als eine gibt, und ermittle alle derartigen Darstellungen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, es gibt eine solche Darstellung; dann lautet sie

$$\frac{9}{91}=\frac{x}{7}-\frac{y}{13}$$

wobei x und y natürliche Zahlen mit $0 < x < 7$ und $0 < y < 13$ sind. Wegen $91 = 7 \cdot 13$ gilt daher $13x - 7y = 9$ uns somit $y = \frac{13x-9}{7}$.

Wir erhalten für $x = 1, ..., 6$:

x	$13x$	$13x-9$	x	$13x$	$13x-9$
1	13	4	2	26	17
3	39	30	4	42	43
5	65	56	6	78	69

Von den in der dritten Spalte angegebenen Zahlen ist nur die Zahl 56 durch 7 teilbar. Wir erhalten also nur für $x = 5$ einen ganzzahligen Wert für y, und zwar $y = 8$.
Somit kann nur die Darstellung

$$\frac{9}{91} = \frac{5}{7} - \frac{8}{13} \tag{1}$$

den Bedingungen der Aufgabenstellung genügen. Sie erfüllt diese Bedingungen; denn $\frac{5}{7}$ und $\frac{8}{13}$ sind positive echte Brüche, und es gilt (1).

Aufgabe 180833:
Jürgen ist im Ferienlager und will für seine Gruppe Brause zu 0,21 M je Flasche einkaufen. Er nimmt kein Bargeld, sondern nur leere Flaschen mit. Für das eingelöste Pfandgeld (0,30 M für jede der leere Flaschen) kauft er möglichst viele Flaschen Brause, wobei er für jede volle Flasche außer dem Preis von 0,21 M auch 0,30 M Pfand zu zahlen hat. Es stellt sich heraus, dass er sieben Flaschen weniger erhält, als er abgegeben hat. Außerdem bekommt er noch Geld zurück.

Ermittle alle Möglichkeiten, wie viele leere Flaschen Jürgen mitgenommen haben könnte und wie viel Geld er dann zurückerhielt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Jürgen habe x leere Flaschen mitgenommen, er habe y Pfennig zurückerhalten. Somit bezahlte Jürgen einen Betrag von $30x - y$, und er erhielt dafür $x - 7$ volle Flaschen zu 0,51 M. Es gilt folglich:

$$(1) \quad 30x - y = 51(x - 7) \qquad \text{mit } 0 < y < 51$$

da Jürgen im Falle $y = 51$ noch weitere Flaschen erhalten könnte und im Falle $y = 0$ kein Geld herausbekäme.
Aus (1) erhält man:

$$y = 357 - 21y = 7(51 - 3x)$$

also $0 < 51 - 3x < \frac{51}{7}$. Aus $0 < 51 - 3x$ folgt $x < 17$. Aus $51 - 3x < \frac{51}{7}$ folgt $3x > \frac{6 \cdot 51}{7}$, also $x > \frac{102}{7} > 14$.

Daher verbleiben nur die Möglichkeiten $x = 15$ und $x = 16$. Für $x = 15$ gilt $y = 42$, und für $x = 16$ folgt $y = 21$.

1. Möglichkeit: Jürgen hatte 15 leere Flaschen mitgenommen, das entspricht 4,50 M Pfandgeld. Er kaufte $15 - 7 = 8$ Flaschen Brause und musste dafür 4,08 M bezahlen. Er erhielt 0,42 M zurück, wofür er keine weitere Flasche Brause kaufen konnte.

2. Möglichkeit: Jürgen hatte 16 leere Flaschen mitgenommen, das entspricht 4,80 M Pfandgeld. Er kaufte $16 - 7 = 9$ Flaschen Brause und musste dafür 4,59 M bezahlen. Er erhielt 0,21 M zurück, wofür er ebenfalls keine weitere Flasche Brause kaufen konnte.

Aufgabe 190831:
Klaus erzählt:

„Als ich kürzlich einkaufte, hatte ich genau drei Münzen bei mir. Beim Bezahlen stellte ich folgendes fest. Wenn ich zwei meiner Münzen hingebe, so fehlen noch 3,50 M bis zum vollen Preis der gekauften Ware, lege ich aber nur die übrige Münze hin, so erhalte ich 3,50 M zurück“

Ermittle aus diesen Angaben alle Möglichkeiten dafür, wie viel Münzen welcher Sorte Klaus bei sich gehabt hat! Dabei sind nur 1, 5, 10, 20, und 50 Pf. sowie 1, 2, 5, 10 und 20 Mark zu berücksichtigen.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Differenz zwischen der Summe der Werte der ersten beiden Münzen und dem Wert der dritten Münze beträgt genau 7,00 M. Deshalb ist der Wert der dritten Münze größer als 7 M, also 10 M oder 20 M.
Wäre die dritte Münze eine Münze zu 20 M gewesen, dann müsste die Summe der Werte der beiden anderen Münzen genau 13 Mark betragen haben, das ist mit den angegebenen Münzwerten jedoch nicht möglich.
Also war die dritte Münze eine Münze zu 10 M, und die Summe der Werte der beiden anderen Münzen betrug genau 3 M. Das ist bei den angegebenen Münzsorten nur möglich, wenn Klaus eine 2-Mark-Münze und eine 1-Mark-Münze bei sich hatte.
Klaus hatte also bei diesem Einkauf eine 10-Mark-Münze, eine 2-Mark-Münze und eine 1-Mark-Münze bei sich.

Aufgabe 190834:
Beweise, dass das Produkt dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen, vermehrt um die mittlere Zahl, stets die dritte Potenz der mittleren Zahl ergibt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Ist x die mittlere der drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, so lauten sie $x-1$, x und $x+1$. Bildet man daher ihr Produkt und vermehrt es um die mittlere Zahl, so erhält man

$$(x-1)\cdot x\cdot(x+1)+x=x^3-x+x=x^3$$

Aufgabe 220832:

a) Beweise, dass für $n=2,3,4$ und 5 der folgende Satz gilt:

   Wenn q das arithmetische Mittel von n unmittelbar aufeinanderfolgenden ungeraden natürlichen Zahlen ist, dann ist q stets eine natürliche Zahl.

b) Ermittle unter den Zahlen $n=2,3,4,5$ alle diejenigen, für die das in a) genannte Mittel q stets eine gerade Zahl ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Man kann n unmittelbar aufeinanderfolgende ungerade natürliche Zahlen stets mit jeweils einer geeigneten natürlichen Zahl m

für $n=2$ in der Form $2m-1, 2m+1$,
für $n=3$ in der Form $2m-1, 2m+1, 2m+3$,
für $n=4$ in der Form $2m-3, 2m-1, 2m+1, 2m+3$,
für $n=5$ in der Form $2m-3, 2m-1, .2m+1, 2m+3, 2m+5$

darstellen. Das arithmetische Mittel q dieser Zahlen ist

für $n=2$ die Zahl $q=\frac{1}{2}\cdot 4m=2m$,
für $n=3$ die Zahl $q=\frac{1}{3}\cdot(6m+3)=2m+1$,
für $n=4$ die Zahl $q=\frac{1}{4}\cdot 8m=2m$,
für $n=5$ die Zahl $q=\frac{1}{5}\cdot(10m+5)=2m+1$,

Wie m sind auch $2m$ und $2m+1$ natürliche Zahlen; damit ist der in a) geforderte Beweis erbracht.
Ferner ist q genau in den Fällen mit $q=2m$ gerade; also sind genau $n=2$ und $n=4$ die in b) zu ermittelnden Zahlen.

Aufgabe 230831:
Ein vollständig gefülltes Wasserbecken besitzt einen großen und einen kleinen Abflusshahn. Öffnet man nur den großen Hahn, so läuft das Becken in genau einer Stunde aus; öffnet man nur den kleinen Hahn, so ist das Becken in genau drei Stunden leer.

Nach welcher Zeit ist das Becken leer, wenn beide Hähne gleichzeitig geöffnet sind? Vorausgesetzt wird für jeden der beiden Hähne, dass aus ihm jeweils in gleich langen Zeiten gleich große Wassermengen entströmen.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Ist nur der große Hahn geöffnet, so läuft in jeder Minute $\frac{1}{60}$ des Beckeninhalts aus; ist nur der kleine Hahn geöffnet, so läuft in jeder Minute $\frac{1}{180}$ des Beckeninhalts aus.
Sind nun beide Hähne gleichzeitig geöffnet, so läuft in jeder Minute $\frac{1}{60} + \frac{1}{180} = \frac{4}{180} = \frac{1}{45}$ des Beckeninhalts aus. Somit ist das Becken nach genau 45 Minuten leer, wenn beide Hähne gleichzeitig geöffnet sind.

Aufgabe 250835:
Von Lew Nikolajewitsch Tolstoi (1828 - 1910), einem bedeutenden russischen Schriftsteller, stammt folgende Aufgabe:

> Schnitter sollen zwei Wiesen mähen. Am Morgen begannen alle, die größere Wiese zu mähen. Vom Mittag dieses Tages an teilten sie jedoch die Arbeit anders ein: Die Hälfte der Schnitter verblieb beim Mähen der ersten Wiese, die sie bis zum Abend fertig mähen. Die anderen Schnitter gingen zum Mähen der zweiten Wiese über, deren Flächeninhalt gleich dem der Hälfte der ersten war, und arbeiteten bis zum Abend. Nun blieb auf der zweiten Wiese ein Rest, für den ein Schnitter allein einen ganzen Tag benötigte.
>
> Wie viel Schnitter waren am ersten Tag bei der Arbeit?

Anmerkung: Es sei vorausgesetzt, dass jeder Schnitter an jedem Vormittag eine gleichgroße Fläche wie an jedem Nachmittag mäht und dass diese Arbeitsleistung aller Schnitter die gleiche ist.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn am ersten Tag x Schnitter bei der Arbeit waren, so gilt:
Das Mähen der zweiten Wiese ist die halbe Tagesleistung von $\frac{x}{2}$ Schnittern, vermehrt um die Tagesleistung von einem Schnitter. Das Mähen der ersten Wiese ist eine doppelt so große Leistung; es ist also die Tagesleistung von $\frac{x}{2}$ Schnittern, vermehrt um die Tagesleistung von zwei Schnittern.

Andererseits war das Mähen der ersten Wiese die halbe Tagesleistung von x Schnittern, vermehrt um die halbe Tagesleistung von $\frac{x}{2}$ Schnittern.

$$\frac{x}{2} + 2 = \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{2} \qquad \Rightarrow \qquad x = 8$$

Folglich waren am ersten Tag acht Schnitter bei der Arbeit.

Aufgabe 260831:
Gegen Ende eines Kinderfestes kommen fünf Mädchen zur Solidaritätstombola und wollen Lose kaufen. Der Pionierleiter zählt die vorrätigen Lose und sagt dann: „Der Vorrat reicht dafür, dass jede von euch, eine nach der anderen, jeweils genau die Hälfte der gerade noch vorhandenen Lose und ein halbes Los dazu kauft. Dann bleibt kein Los übrig.“

(I) Weise nach, dass es als Vorrat an Losen höchstens eine Anzahl geben kann, bei der die Aussagen des Pionierleiters zutreffen!

(II) Weise nach, dass für diese Anzahl die Aussagen des Pionierleiters zutreffen! Wie viele Lose kann jedes der fünf Mädchen nach diesen Angaben kaufen?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

(I) Wenn die Aussagen des Pionierleiters bei einem Vorrat von x Losen zutreffen, so kann jedes der Mädchen so viele Lose kaufen, wie die folgende Tabelle angibt. Ferner ist dort angegeben, wie viele Lose dann jeweils noch vorhanden sind.

	Anzahl der Lose, die das Mädchen kaufen kann	Anzahl der Lose, die danach noch vorhanden sind
1. Mädchen	$\frac{x}{2}+\frac{1}{2}$	$x-(\frac{x}{2}+\frac{1}{2})=\frac{x}{2}-\frac{1}{2}$
2. Mädchen	$\frac{1}{2}(\frac{x}{2}-\frac{1}{2})+\frac{1}{2}=\frac{x}{4}+\frac{1}{4}$	$(\frac{x}{2}-\frac{1}{2})-(\frac{x}{4}+\frac{1}{4})=\frac{x}{4}-\frac{3}{4}$
3. Mädchen	$\frac{1}{2}(\frac{x}{4}-\frac{3}{4})+\frac{1}{2}=\frac{x}{8}+\frac{1}{8}$	$(\frac{x}{4}-\frac{3}{4})-(\frac{x}{8}+\frac{1}{8})=\frac{x}{8}-\frac{7}{8}$
4. Mädchen	$\frac{1}{2}(\frac{x}{8}-\frac{7}{8})+\frac{1}{2}=\frac{x}{16}+\frac{1}{16}$	$(\frac{x}{8}-\frac{7}{8})-(\frac{x}{16}+\frac{1}{16})=\frac{x}{16}-\frac{15}{16}$
5. Mädchen	$\frac{1}{2}(\frac{x}{16}-\frac{15}{16})+\frac{1}{2}=\frac{x}{32}+\frac{1}{32}$	

Da das 5. Mädchen alle noch vorhandenen Lose gekauft hat, gilt

$$\frac{x}{32}+\frac{1}{32}=\frac{x}{16}-\frac{15}{16} \qquad \text{also} \qquad x=31$$

Als Vorrat an Losen kann daher höchstens die Zahl $x=31$ die Eigenschaft haben, dass die Aussagen des Pionierleiters zutreffen.

(II) Für diese Anzahl als Vorrat gilt in der Tat:

Das 1. Mädchen kann $\frac{31}{2}+\frac{1}{2}=16$ Lose kaufen. Von den dann vorhandenen 15 Losen kann das 2. Mädchen $\frac{15}{2}+\frac{1}{2}=8$ Lose kaufen.

Von den dann vorhandenen 7 Losen kann das 3. Mädchen $\frac{7}{2}+\frac{1}{2}=4$ Lose kaufen. Von den dann vorhandenen 3 Losen kann das 4. Mädchen $\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2$ Lose kaufen.

Von dem dann vorhandenen 1 Los kann das 5. Mädchen $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$ Los kaufen, und danach bleibt kein Los übrig.

Für den Vorrat von 31 Losen treffen somit die Aussagen des Pionierleiters zu; die einzelnen Mädchen können nach diesen Aussagen der Reihe nach 16, 8, 4, 2, 1 Lose kaufen.

Alternativ-Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn die Aussagen des Pionierleiters zutreffen, so folgt:
Nachdem die ersten vier Mädchen gekauft haben, wie angegeben, kann das 5. Mädchen die Hälfte der noch vorhandenen Lose und ein halbes Los dazu kaufen, und danach bleibt kein Los übrig.
Also war das eben genannte halbe Los die andere Hälfte der noch vorhandenen Lose; d. h. die Anzahl der noch vorhandenen Lose hatte 1 betragen.

Also bleibt, wenn das 4. Mädchen die Hälfte der noch vorhandenen Lose und ein halbes Los dazu kauft, danach noch genau dieses eine Los übrig. Somit war dieses Los und das halbe Los zusammen die andere Hälfte der zuvor noch vorhandenen Lose; d. h. die Anzahl der noch vorhandenen Lose hatte 3 betragen.

Entsprechend schließt man:
Für das 3. Mädchen hatte die Hälfte der Anzahl der zuvor noch vorhandenen Lose $3\frac{1}{2}$, diese Anzahl selbst also 7 betragen; für das 2. Mädchen hatte die Hälfte der Anzahl der zuvor noch vorhandenen Lose $7\frac{1}{2}$, diese Anzahl selbst also 15 betragen; die Hälfte der Anzahl der ganz zu Beginn vorhandenen Lose hatte $15\frac{1}{2}$, diese Anzahl selbst also 31 betragen.

(II) wie im 1. Lösungsweg.

Aufgabe 270831:
Während einer Kindergeburtstagsfeier spielt man „Geburtstagsdatum erraten“. Katrin, das Geburtstagskind, erklärt ihrem jeweiligen Spielpartner:

> „Teile dein Geburtsdatum auf in eine Tageszahl und eine Monatszahl! (Mein heutiger Geburtstag, der 24. Mai, wäre z. B. aufzuteilen in die Tageszahl 24 und die Monatszahl 5.) Verdopple nun die Tageszahl deines Geburtsdatums, addiere zum Ergebnis 7, multipliziere die Summe mit 50 und vermehre das Produkt um die Monatszahl deines Geburtsdatums!“

Nachdem das Ergebnis genannt wurde, war Katrin in der Lage, das betreffende Geburtsdatum zu nennen. Erkläre, durch welche Überlegung man das Geburtsdatum in jedem Fall aus dem Ergebnis der von Katrin geforderten Rechnung finden kann!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Für jedes Geburtsdatum mit Tageszahl x und Monatszahl y gilt:
Die geforderte Rechnung führt der Reihe nach auf die Zahlen

$$2x, \qquad 2x+7, \qquad (2x+7)\cdot 50 = 100x+350$$

also auf das Ergebnis $100x+350+y$.
Aus diesem Ergebnis kann man die gesuchten Zahlen x und y folgendermaßen finden:

Man subtrahiert 350 und erhält die Zahl $100x+y$. Da y als Monatszahl kleiner als 100 ist, muss y die aus der Zehner- und Einerziffer von $100x+y$ gebildete Zahl sein (wobei, falls die Zehnerziffer 0 lautet, diese wegzulassen ist); und lässt man umgekehrt aus $100x+y$ die Zehner- und Einerziffer weg, so bleibt die (Zifferndarstellung der) Zahl x übrig.

Aufgabe 290831:
Eine Aufgabe des bedeutenden englischen Naturwissenschaftlers Isaac Newton (1643 bis 1727) lautet:

Ein Kaufmann besaß eine gewisse Geldsumme.
Im ersten Jahr verbrauchte er davon 100 Pfund; zum Rest gewann er durch seine Arbeit ein Drittel desselben dazu.
Im zweiten Jahr verbrauchte er wiederum 100 Pfund und gewann zum Rest ein Drittel dazu.
Im dritten Jahr verbrauchte er erneut 100 Pfund und gewann zum Rest ein Drittel dazu.
Dabei stellte er fest, dass sich sein Geld gegenüber dem Anfang des ersten Jahres verdoppelt hatte.

Ermittle aus diesen Angaben, welche Geldsumme anfangs des ersten Jahres vorhanden gewesen sein muss! Weise nach, dass bei dieser Anfangssumme die Angaben des Aufgabentextes zutreffen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn die Angaben mit der Anfangssumme x Pfund zutreffen, so folgt:
Da durch Hinzugewinn eines Drittels einer Summe stets vier Drittel dieser Summe entstehen, ergibt sich am Ende des dritten Jahres die Summe von

$$\left(\left((x-100)\cdot\frac{4}{3}-100\right)\cdot\frac{4}{3}-100\right)\cdot\frac{4}{3} \text{ Pfund}$$

Also gilt nach der letzten Angabe des Aufgabentextes

$$\left(\left((x-100)\cdot\frac{4}{3}-100\right)\cdot\frac{4}{3}-100\right)\cdot\frac{4}{3} = 2x$$

Daraus folgt durch Ausmultiplizieren aller Klammern und anschließendes Multiplizieren mit dem Hauptnenner

$$\begin{aligned}((\frac{4}{3}x - \frac{400}{3} - 100) \cdot \frac{4}{3} - 100) \cdot \frac{4}{3} &= 2x \\ (\frac{16}{9}x - \frac{1600}{9} - \frac{400}{3} - 100) \cdot \frac{4}{3} &= 2x \\ \frac{64}{27}x - \frac{6400}{27} - \frac{1600}{9} - \frac{400}{3} &= 2x \\ 64x - 6400 - 4800 - 3600 &= 54x \\ x &= 1480\end{aligned}$$

Die Anfangssumme muss folglich 1480 Pfund betragen haben.

Aus dieser Anfangssumme entsteht, im ersten Jahr durch Verbrauchen von 100 Pfund die Summe 1380 Pfund, durch Hinzugewinnen eines Drittels (460 Pfund) die Summe 1840 Pfund; im zweiten Jahr entsprechend 1740 Pfund + 580 Pfund = 2320 Pfund; im dritten Jahr 2220 Pfund + 740 Pfund = 2960 Pfund.
Da 2960 das Doppelte von 1480 ist, treffen bei der genannten Anfangssumme somit die Angaben des Aufgabentextes zu.

I.II. Bewegungsgleichungen

I. Runde 1

Aufgabe 040813:
Auf einer zweigleisigen Strecke zum Vorort einer Großstadt fährt alle 10 Minuten von der Anfangsstation und von der Endstation gleichzeitig je eine Straßenbahn ab und benötigt je 50 Minuten Fahrtzeit. Die Aufenthaltszeit an diesen beiden Stationen beträgt je 10 Minuten.

Wie viel Straßenbahnen sind insgesamt auf dieser Strecke eingesetzt?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Zur Abfahrtszeit befinden sich an der Anfangs- und an der Endstation je 2 Bahnen. Außerdem sind je 2 Bahnen 10 min, 20 min, 30 min und 40 min unterwegs. Also sind insgesamt 12 Straßenbahnen eingesetzt.

Aufgabe 060813:
Auf einer 1 km langen kreisförmigen Bahn wird ein Radrennen ausgetragen. Zu einer gewissen Zeit hat der Radsportler B genau 500 m Vorsprung vor dem Radsportler A. A fährt mit einer Geschwindigkeit von 50 km/h, B mit einer Geschwindigkeit von 45 km/h.

Nach wie viel Minuten würde A den Fahrer B ein ersten Mal einholen, wenn beide mit gleichbleibender Geschwindigkeit weiterfahren würden?

Lösung von Manuela Kugel:
B hat zunächst einen Vorsprung von 500 m. In der gleichen Zeit, in der A 500 m zurücklegt, legt B nur 450 m zurück. A holt bei also 50 m auf. Insgesamt muss er 500 m aufholen. Das schafft er unter den Bedingungen der Aufgabe in genau 5 Runden.

Die Gesamtlänge des Weges beträgt bei 5 Runden 5 km. Daher wird B von A in 6 Minuten eingeholt.

Aufgabe 070813:
Drei Sportler starteten gleichzeitig und liefen 100 m. Als der erste am Ziel war, hatte der zweite noch genau 10 m zu laufen. Als der zweite am Ziel war, blieben für den dritten noch genau 10 m.

Wie weit war der dritte noch vom Ziel entfernt, als der erste dieses erreicht hatte? (Es sei angenommen, dass jeder der drei Sportler die gesamte Strecke mit konstanter Geschwindigkeit durchlief.)

Lösung von Manuela Kugel:
Es kann die Formel der konstanten Geschwindigkeit angewandt werden: $v = s : t$ bzw. umgestellt: $t = s : v$.

Betrachtet man den Zeitpunkt 1, an dem der 1. Läufer (a) ins Ziel kommt, dann gilt für den Zweiten (b) und Dritten (c): $t_1 = s_{b_1} : v_{b_1} = s_{c_1} : v_{c_1}$,
wobei $s_{b_1} = 100m - 10m = 90m$ und s_{c_1} die gesuchte Wegstrecke ist, die c zum Zeitpunkt 1 des Zieleinlaufes hinter sich gebracht hatte.

Zum Zeitpunkt 2, an dem der Zweite Läufer (b) das Ziel erreicht gilt analog: $t_2 = s_{b_2} : v_{b_2} = s_{c_2} : v_{c_2}$, wobei $s_{b_2} = 100$ m und $s_{c_2} = 100m - 10m = 90m$ sowie $v_b := v_{b_1} = v_{b_2}$ und $v_c := v_{c_1} = v_{c_2}$ gilt.

Nun werden die Gleichungen des 1. und 2. Zeitpunktes zusammengeführt:

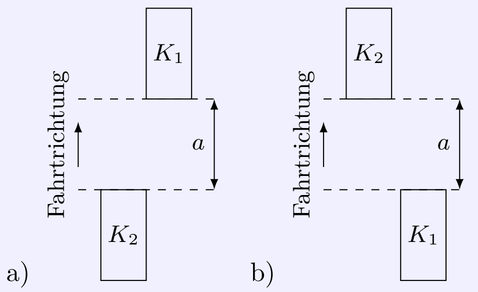
$$s_{c_1} = s_{b_1} \cdot \frac{v_c}{v_b} = 90m \cdot \frac{v_c}{v_b} = 90m \cdot \frac{s_{c2}}{s_{b_2}} = 90m \cdot \frac{90m}{100m} = 81m.$$

Demzufolge war der Dritte noch $100m - 81m = 19m$ vom Ziel entfernt als der Erste das Ziel erreicht hatte.

Aufgabe 090814:
Auf zwei nebeneinanderliegenden Fahrbahnen sind zwei 4 m lange Kraftwagen in gleicher Fahrtrichtung gefahren. Der erste hatte eine Geschwindigkeit von 60 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, der zweite eine Geschwindigkeit von 70 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Der zweite Kraftwagen fuhr an dem ersten vorbei.

Zu Beginn des betrachteten Vorganges befand sich die Hinterkante des ersten Wagens $a = 20$ m vor der Vorderkante des zweiten (siehe Abbildung a); am Ende des Vorganges die Vorderkante des ersten $a = 20$ m hinter der Hinterkante des zweiten (siehe Abbildung b).

Wie lange dauerte dieser Vorgang, und welche Fahrtstrecke wurde von der Vorderkante des zweiten Wagens dabei zurückgelegt?



Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Da der Vorgang laut Aufgabe stattgefunden hat, existiert eine Lösung. Es seien folgende Bezeichnungen eingeführt:
Geschwindigkeit von K_1 bzw. K_2: $v_1 = 60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, $v_2 = 70 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

Weg der Vorderkante von K_1 bzw. K_2 während des Vorgangs: s_1, s_2
Zeitdauer des Vorgangs: t
Abstand der Vorderkanten voneinander zu Anfang bzw. am Ende des Vorgangs: $d_A = d_E = 24$ m
Summe dieser Abstände: $D = d_A + d_E = 48$ m
Angenommen nun, diese Größen seien die bei dem Vorgang der Aufgabenstellung auftretenden. Dann folgt $s_1 = v_1 t, \qquad s_2 = v_2 t, \qquad s_1 + D = s_2$. Daraus folgt weiter $v_1 t + D = v_2 t$, also

$$t = \frac{D}{v_2 - v_1} = \frac{0{,}048}{10}\text{h} = 17{,}28\text{s} \approx 17{,}3\text{s}$$

sowie

$$s_2 = v_2 t \left(= \frac{v_2 D}{v_2 - v_1} \right) = 336\text{m}$$

Aufgabe 220813:
Eine NVA-Marschkolonne ist 3,2 km lang. Ein Regulierungsposten fährt mit dem Krad vom Ende der Marschkolonne ab, holt die Spitze der Marschkolonne nach 5,6 km Fahrt ein, fährt sofort mit gleichbleibender Geschwindigkeit genau 6 min lang weiter und hat dann seinen Genossen erreicht, der an der nächsten Straßenkreuzung steht, um den Gegenverkehr zu sperren. Hier wartet er auf die Marschkolonne, die während der gesamten Zeit ihre Durchschnittsgeschwindigkeit beibehalten hat.

a) Wie verhalten sich die Durchschnittsgeschwindigkeiten des Regulierungspostens und der Marschkolonne zueinander?

b) Wie viel Minuten muss der Regulierungsposten an der Kreuzung insgesamt auf die Spitze der Marschkolonne warten?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Die Durchschnittsgeschwindigkeiten des Regulierungepostens und der Marschkolonne seien mit v_R bzw. v_M bezeichnet.
Sie verhalten sich wie die in gleicher Zeit zurückgelegten Wege. Der vom Regulierungsposten zunächst zurückgelegte Weg $s_0 = 5{,}6$ km setzt sich zusammen aus der Länge $s_1 = 3{,}2$ km der Marschkolorine und demjenigen Weg s_2, den die Marschkolonne während der Vorbeifahrt des Regulierungspostens zurücklegte. Dieser Weg hat folglich eine Länge von $s_2 = s_0 - s_1 = 2{,}4$ km. Somit gilt

$$v_R : v_M = s_0 : s_2 = 5{,}6 : 2{,}4 = 7 : 3$$

b) Der Zeitpunkt, an dem der Regulierungsposten die Spitze der Marschkolonne verlässt, sei T_0 genannt. Von diesem Zeitpunkt an legt der Regulierungsposten noch den Weg $s = v_R \cdot 6$ min zurück.
Denselben Weg hat die Spitze der Marschkolonne in der Zeit t vom Zeitpunkt T_0 an bis zum Eintreffen an der Kreuzung zurückzulegen. Also gilt $s = v_M \cdot t$. Daraus folgt

$$t = \frac{v_R}{v_M} \cdot 6 \text{ min}$$

nach a) also $t = \frac{7}{3} \cdot 6$ min $= 14$ min. Diese Zeit $t = 14$ min,setzt sich zusammen aus der vom Zeitpunkt T_0 an benötigten Fahrzeit 6 min und der gesuchten Wartezeit des Regulierungspostens an der Kreuzung. Diese Wartezeit beträgt daher 8 min.

Aufgabe 230813:
Auf einer 22,5 km langen Straßenbahnstrecke sollen Wagenzüge während der Zeit von 8.00 Uhr bis 16.00 Uhr in beiden Richtungen in zehnminütigem Abstand verkehren, beginnend mit der Abfahrtzeit genau 8.00 Uhr an beiden Endhaltestellen. Die Durchschnittsgeschwindigkeit der Wagenzüge betrage 18 $\frac{km}{h}$. Jeder Wagenzug, der an einer Endhaltestelle angekommen ist, soll bis zu seiner Abfahrt eine Pause einlegen, die mehr als 10 Minuten, aber weniger als 20 Minuten beträgt.

a) Wann hat der Wagenzug, der um 8.00 Uhr an einer Endhaltestelle abfuhr, dieselbe Endhaltestelle zum zweiten Mal zu verlassen?

b) Wie viel Wagenzüge sind ausreichend, um den geschilderten Verkehrsablauf einzuhalten?

c) Wie viel Zeit vergeht für einen Wagenzug, der sich auf der Fahrt von einer Endhaltestelle zur anderen befindet, durchschnittlich von einer Begegnung mit einem entgegenkommenden Wagenzug bis zur Begegnung mit dem nächsten entgegenkommenden Wagenzug?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Da die Strecke zwischen den beiden Endhaltestellen $s = 22{,}5$ km beträgt und mit der Geschwindigkeit $v = 18\frac{km}{h}$ durchfahren wird, benötigt ein Wagenzug hierfür die Zeit

$$t = \frac{s}{v} = \frac{22{,}5}{18}h = 1{,}25h = 1h14min$$

Der Wagenzug, der um 8.00 Uhr von einer Endhaltestelle abfuhr, erreicht die andere Endhaltestelle folglich um 9.15 Uhr.

Von dort hat er planmäßig zu einer Uhrzeit abzufahren, die ein ganzzahliges Vielfaches von 10 Minuten ist, wegen der Pausenregelung also um 9.30 Uhr. Entsprechend hat er von der ersten Endhaltestelle nochmals 1 Stunden später, also um 11.00 Uhr abzufahren.

b) Von der zweiten Endhaltestelle müssen zu den Abfahrtszeiten 8.00, 8.10, 8.20, 8.30, 8.40, 8.50, 9.00, 9.10, 9.20 Uhr Wagenzüge zur Verfügung stehen, das sind 9 Wagenzüge.
Ebenso viele werden zur Abfahrt an der ersten Endhaltestelle zu denselben Zeiten benötigt. Von 9.30 Uhr ab ist die Fortsetzung des geplanten Ablaufs mit den bereits aufgezählten Wagenzügen möglich. Daher reichen insgesamt 18 Wagenzüge aus.

c) Der erstgenannte Wagenzug sei Z_0; der erste bzw. der zweite ihm begegnende Wagenzug sei Z_1 bzw. Z_2.
Während der Fahrt haben Z_1 und Z_2 einen gleichbleibenden Abstand so voneinander; dies ist auch zum Zeitpunkt von Z_0 und Z_1 der Abstand zwischen Z_0 und Z_2. Da der Wagenzug Z_2 an einer Stelle jeweils 10 Minuten später als Z_1 eintrifft, benötigt er zum Durchfahren von so genau 10 Minuten.

Durch die Bewegung der Wagenzüge Z_0 und Z_2 gegeneinander verringert sich ihr Abstand mit einer doppelt so großen Geschwindigkeit wie die Fahrgeschwindigkeit jedes einzelnen Wagenzuges. Also wird dieser Abstand in der halben Zeit, die ein einzelner Wagenzug zum Durchfahren von so benötigen würde, auf 0 verringert. Das besagt:
Bis zum Zeitpunkt der Begegnung von Z_0 mit Z_2 vergeht die Hälfte von 10 Minuten, das sind 5 Minuten.

II. Runde 2

Aufgabe 020826:
Klaus fährt mit seinem Moped mit gleichbleibender Geschwindigkeit eine Straße entlang und passiert dabei zu Anfang einen Kilometerstein mit einer zweistelligen Zahl vor dem Komma. Nach genau $1\frac{1}{2}$ Stunden kommt er wiederum an einem Kilometerstein vorbei, auf dem vor dem Komma die gleichen Ziffern, jedoch in umgekehrter Reihenfolge stehen.
Nach weiteren $1\frac{1}{2}$ Stunden ist er am Ziel und erblickt einen Kilometerstein, dessen dreistellige Zahl vor dem Komma aus den beiden Ziffern des ersten Steines, zwischen denen sich eine Null befindet, besteht. Hinter dem Komma stand in allen drei Fällen die gleiche Ziffer.

a) Welche Strecke legte Klaus zurück?

b) Mit welcher Durchschnittsgeschwindigkeit fuhr er?

Lösung von Carsten Balleier:
Die Abschnitte zwischen dem ersten und zweiten bzw. zweiten und dritten Kilometerstein müssen gleich sein. Sei die Zahl auf dem ersten $10a + b$, auf dem zweiten $10b + a$ und auf dem dritten $100a + b$ mit $1 \leq a,b \leq 9$. Dann gilt $(10b + a) - (10a + b) = (100a + b) - (10b + a)$ oder umgeformt $108a = 18b$ oder $6a = b$.

Im vorgegebenen Bereich wird das bloß von $a = 1,\ b = 6$ erfüllt. Also stand auf den Kilometersteinen 16, 61 und 106 – Klaus legte also 90 km zurück. Da er 3 h gebraucht hat, war seine durchschnittliche Geschwindigkeit 30 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Aufgabe 080824:
Ein mit konstanter Geschwindigkeit v_1 fahrender Lastkraftwagen wird 1 h 25 min nach Fahrtbeginn von einem ebenfalls mit konstanter Geschwindigkeit v_2 fahrenden Personenkraftwagen eingeholt, der 30 min später vom gleichen Ort abfuhr, aber eine um 25 $\frac{km}{h}$ größere Geschwindigkeit als der LKW hatte.

a) Berechne v_1 und v_2!

b) Welche Länge s hat die von beiden Fahrzeugen bis zum Überholungspunkt durchfahrene Wegstrecke?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
In der Zeit $t_i = 85$ min legt der LKW die gleiche Strecke zurück, für die der PKW die Zeit $t_2 = 55$ min brauchte.
Bezeichnet man die Geschwindigkeit des LKW mit $v_1 = x\frac{km}{h}$, dann beträgt die des PKW $v_2 = (x{+}25)\frac{km}{h}$.
Wegen $s = t_1 \cdot v_1 = t_2 \cdot v_2$ gilt dann: $x \cdot \frac{85}{60} = (x + 25) \cdot \frac{55}{60}$.
Daraus erhält man $x = \frac{5 \cdot 55}{60} = 45\frac{5}{6}$.

a) Die Geschwindigkeit des LKW betrug $45\frac{5}{6}\frac{km}{h}$, die des PKW $70\frac{5}{6}\frac{km}{h}$.

b) Wegen
$$\frac{5 \cdot 55}{60} \cdot \frac{85}{60} = 64\frac{67}{72} \approx 64{,}9$$
beträgt die durchgefahrene Wegstrecke $s \approx 64{,}9$ km.

Umgekehrt werden durch diese Werte in der Tat alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt, wie eine Probe zeigt.

Aufgabe 140822:
Vier Lastkraftwagen A, B, C und D befahren dieselbe Strecke. Fährt A mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 56 $\frac{km}{h}$ und B mit 40 $\frac{km}{h}$, so benötigt A genau 2 Stunden weniger als B für diese Strecke.

Mit welcher Durchschnittsgeschwindigkeit müsste C fahren, wenn D genau 4 Stunden eher als C abfahren, durchschnittlich mit 35 $\frac{km}{h}$ fahren und gleichzeitig mit C am gemeinsamen Ziel ankommen soll?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, A habe die in der Aufgabe genannte Strecke in t Stunden zurückgelegt. Dann benötigte B für dieselbe Strecke $(t + 2)$ Stunden. Daher gilt $56t = 40(t + 2)$, woraus man $t = 5$ erhält.
A legte mithin die Strecke mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 56 $km \cdot h^{-1}$ in 5 Stunden zurück. Die Strecke war daher 280 km lang.

Wegen $280 : 35 = 8$ würde D für diese Strecke bei einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 35 $km \cdot h^{-1}$ genau 8 Stunden brauchen. Da C erst 4 Stunden später als D abfahren soll, müsste er die gesamte Strecke in genau 4 Stunden zurücklegen, wenn er gleichzeitig mit D am Ziel eintreffen will. Wegen $280 : 4 = 70$ müsste er dabei eine Durchschnittsgeschwindigkeit von 70 $km \cdot h^{-1}$ einhalten.

Aufgabe 280821:
Ein Frachtschiff benötigt für eine Schiffsroute vom Hafen A zum Hafen B genau 12 Tage. Ein Tanker fährt diese Route in entgegengesetzter Richtung und braucht dafür 15 Tage.
Der Frachter fährt 6 Tage später vom Hafen A ab als der Tanker vom Hafen B.

a) Wie viel Tage nach Abfahrt des Frachters treffen sich die beiden Schiffe, wenn sie mit gleichbleibender Geschwindigkeit fahren?
b) Welchen Teil der Route hat dann jedes Schiff zurückgelegt?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Der Tanker legt an jedem Tage $\frac{1}{15}$ der Route zurück. Am Tage des Auslaufens des Frachters hat der Tanker bereits $\frac{6}{15} = \frac{2}{5}$ des Weges zurückgelegt, der Abstand der beiden Schiffe beträgt zu diesem Zeitpunkt daher $\frac{3}{5}$ der Route.

Wegen $\frac{1}{12} + \frac{1}{15} = \frac{3}{20}$ nähern sich beide Schiffe täglich um $\frac{3}{20}$ der Route. Da $\frac{3}{5} : \frac{3}{20} = 4$ ist, treffen sich beide Schiffe 4 Tage nach Abfahrt des Frachters.

b) Der Frachter legt in 4 Tagen $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ der Route zurück und der Tanker wegen $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ (oder wegen seiner Fahrzeit von 10 Tagen und $\frac{10}{15} = \frac{2}{3}$) die restlichen $\frac{2}{3}$ der Route.

III. Runde 3

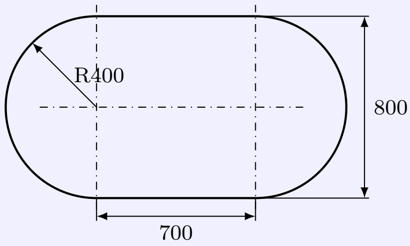
Aufgabe V10831:
Ein Radfahrer fährt an einem windstillen Tage auf einer geradlinig verlaufenden Landstraße nach einem 32 km entfernt liegenden Orte und sofort wieder zurück. Er benötigt für Hin- und Rückfahrt genau 4 Stunden, hat also eine Geschwindigkeit $v = 16\frac{\text{km}}{\text{h}}$.
Am nächsten Tage ist es windig. Es sei angenommen, dass die Geschwindigkeit des Radfahrers sich um 4 km je Stunde verringert, wenn er gegen den Wind fährt, und sich um 4 km je Stunde erhöht, wenn er mit dem Wind fährt.
Der Radfahrer nimmt an, dass er ebenfalls 4 Stunden für Hin- und Rückfahrt benötige, da ja die Verzögerung auf der Hinfahrt durch die Beschleunigung auf der Rückfahrt ausgeglichen wird.
Trifft das zu? Begründe deine Antwort!

Lösung von Steffen Polster:
Hinfahrt: In diesem Fall verringert sich die Geschwindigkeit auf $12\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Für die 32 km benötigt er dann $t = \frac{s}{t} = \frac{32}{12}$ h.

Rückfahrt: In diesem Fall erhöht sich die Geschwindigkeit auf $20\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Für die 32 km benötigt er dann $t = \frac{s}{t} = \frac{32}{20}$ h.

In der Summe benötigt der Radfahrer $\frac{32}{12} + \frac{32}{20} = \frac{64}{15}$ h, das sind 4 Stunden und 16 Minuten. Es tritt kein Ausgleich der Verzögerung und Beschleunigung auf.

Aufgabe 010832:
Peter hat für seine Modelleisenbahn ein „Schienenoval“ auf einem Brett aufgebaut (siehe dazu die Skizze; die Kreisbögen sind Halbkreise).



Hans, den er eingeladen hat, fragt plötzlich: „Was meinst du, fährt der Zug so schnell wie in Wirklichkeit?“ Peter antwortet: „Bestimmt nicht, stell dir doch einmal einen richtigen Zug daneben vor! Unser Zug schafft doch höchstens einen Kilometer in der Stunde!“
„Ja“, sagt Peter, „das schon, aber 1 km bedeutet ja für die Anlage etwas ganz anderes. Man müsste es umrechnen.“ Sie überlegen und ermitteln dann folgende Werte:

Zeit für eine Umkreisung:	11 s
Spurweite der Modellbahn:	18,5 mm
Spurweite in Wirklichkeit:	1435 mm

a) Wie groß ist die Geschwindigkeit des Zuges tatsächlich?
b) Wie groß wäre die Geschwindigkeit vom Standpunkt der Modelleisenbahn?

Lösung von Carsten Balleier:

a) Für die tatsächliche Geschwindigkeit des Zuges benötigt man die Länge, die er auf dem Schienenoval zurücklegt. Das sind zwei Strecken und zwei Halbkreisbögen: $2 \cdot 700\text{mm} + 2\pi \cdot 400\text{mm} = 3{,}91\text{m}$.

   Das ergibt eine Geschwindigkeit des Modelleisenbahnzuges von $35{,}6\frac{\text{cm}}{\text{s}} = 1{,}28\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$

b) 18,5 mm Spurweite auf der Modellbahn entsprechen 1435 mm Spurweite in der Wirklichkeit. Der Geschwindigkeit des Zuges entsprechen also in Realität

$$\frac{35{,}6\frac{\text{cm}}{\text{s}} \cdot 1435\text{mm}}{18{,}5\text{mm}} = 27{,}6\frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 100\frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

Aufgabe 150834:
Eine Pioniergruppe wandert von der Touristenstation A zum Bahnhof B. Sie legte in der ersten Stunde 3 km zurück. Danach rechnete sie sich aus, dass sie bei gleichbleibender Geschwindigkeit 40 Minuten zu spät zum Zug kommen würde. Deshalb erhöhte sie ihre durchschnittliche Marschgeschwindigkeit auf 4 km in der Stunde und kam damit 45 Minuten vor Abfahrt des Zuges in B an.

Berechne die Länge des Weges von A nach B!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Entfernung von A nach B betrage s km. Die Pioniergruppe hat beim Anstellen ihrer Überlegung bereits 3 km zurückgelegt, muss also noch $(s-3)$ km bewältigen. Bei gleichförmiger Bewegung ist die Zeit der Quotient aus Weg und Geschwindigkeit.

Bei beiden Geschwindigkeiten $v_1 = 3\frac{\text{km}}{\text{h}} >$ bzw. $v_2 = 4\frac{\text{km}}{\text{h}} >$ ist die Zeit t vom Beginn der Geschwindigkeitserhöhung bis zur Abfahrt des Zuges gleich. Diese Zeit in Stunden beträgt somit

$$t = \frac{s-3}{v_1} - \frac{2}{3} \qquad \text{bzw.} \qquad t = \frac{s-3}{v_2} - \frac{3}{4}$$

Nach Einsetzen der Werte für v_1 bzw. $v_2$4 erhält man daraus $4s - 12 - 8 = 3s - 9 + 9$, also $s = 20$. Die Länge des Weges von A nach B beträgt somit 20 km.

Aufgabe 190836:
Ein Taxifahrer hatte den Auftrag, um 15.00 Uhr einen Gast vom Bahnhof abzuholen. Bei einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 50 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ hätte er sein Ziel pünktlich erreicht. Auf Grund ungünstiger Verkehrsverhältnisse konnte er jedoch nur mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 30 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ fahren und kam deshalb erst um 15.10 Uhr am Bahnhof an.

a) Berechne die Länge des Weges, den der Fahrer bis zum Bahnhof zurückgelegt hat!

b) Berechne die Zeit, die der Fahrer bis zum Bahnhof benötigte!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Bei einer Geschwindigkeit von 30 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ legte der Taxifahrer in 10 Minuten einen Weg von $30 \cdot \frac{1}{6}$ km = 5 km zurück. Für diese Strecke hätte er mit einer Geschwindigkeit von 50 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ eine Zeit von $\frac{5}{50}$ h = $\frac{1}{10}$ h = 6 min benötigt.

Für je 5 km benötigte der Taxifahrer daher 4 min mehr, als er bei einer Geschwindigkeit von 50 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ gebraucht hätte. Da er genau 10 min zu spät kam, hatte er wegen $\frac{5}{4} \cdot 10 = 12{,}5$ insgesamt eine Strecke von 12,5 km zurückgelegt.

b) Für die Weglänge 12,5 km wird bei einer Geschwindigkeit von 30 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ eine Zeit von $\frac{12{,}5}{30}$ h = $\frac{5}{12}$ h = 25 min benötigt.

Aufgabe 220834:
Ein Hubschrauber startete um 4.30 Uhr in einer Stadt A und flog mit der Geschwindigkeit 250 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ zu einer Stadt B. Dort blieb er 30 Minuten und flog dann auf demselben Weg mit der Geschwindigkeit 200 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ nach A zurück, wo er an demselben Tag um 11.45 Uhr ankam.

Ermittle die Länge des Weges von A nach B!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die gesuchte Länge betrage x Kilometer, die Zeiten für den Hin- bzw. Rückflug seien t_1 Stunden bzw. t_2 Stunden. Dann gilt $x = 250t_1$ und $x = 200t_2$, also

$$t_1 = \frac{x}{250} \qquad ; \qquad t_2 = \frac{x}{200} \tag{1}$$

Vom Start in A bis zur Ankunft in A vergingen $7\frac{1}{4}$ Stunden; nach Abzug der Wartezeit verbleibt somit eine Flugzeit von

$$(t_1 + t_2) \text{ Stunden } = 6\frac{3}{4} \text{ Stunden} \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt

$$\frac{x}{250} + \frac{x}{200} = \frac{27}{4} \qquad \Rightarrow \qquad x = 750$$

Also beträgt die gesuchte Länge 750 km.

Aufgabe 240832:
Um die Haltbarkeit eines Motorradreifentyps zu ermitteln, wurden zwei Reifen getestet. Dabei wurde festgestellt, dass der Reifen auf dem Hinterrad nach 15000 gefahrenen Kilometern und der Reifen auf dem Vorderrad nach 25000 gefahrenen Kilometern nicht mehr die erforderliche Profiltiefe hatte und damit abgenutzt war.

a) Es soll nun erreicht werden, dass zwei solche Reifen gleichzeitig abgenutzt sind, indem man sie nach einer bestimmten Anzahl gefahrener Kilometer gegeneinander austauscht. Ermittle diese Kilometerzahl!
b) Nach wie viel Kilometern sind unter den Voraussetzungen der Teilaufgabe a) beide Reifen abgenutzt?

Es werde angenommen, dass sowohl auf dem Vorderrad als auch auf dem Hinterrad die Abnutzung jeweils proportional zur Fahrstrecke ist.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Würde man sowohl auf dem Vorderrad als auch auf dem Hinterrad jeden Reifen erst nach seiner vollständigen Abnutzung durch einen neuen Reifen ersetzen, so müsste ein solcher Reifenwechsel auf dem Vorderrad nach 25000 km, 50000 km, 75000 km, ... usw. und auf dem Hinterrad nach 15000 km, 30000 km, 45000 km, 60000 km, 75000 km, ... usw. erfolgen.

Daher würden bei diesem Vorgehen erstmals nach 75000 km Vorderradreifen und Hinterradreifen gleichzeitig gewechselt, und bis dahin wären drei Vorderradreifen und fünf Hinterradreifen, also insgesamt acht Reifen verbraucht.

Wenn man mit acht Reifen insgesamt 75000 km fahren kann, dann kann man mit zwei Reifen insgesamt $\frac{75000}{4}$ km = 18750 km zurücklegen.
Dabei muss jeder der beiden Reifen die gleiche Strecke als Vorder- wie als Hinterradreifen zurücklegen, damit beide Reifen denselben Abnutzungsbedingungen unterworfen sind. D. h., die Reifen müssen nach $\frac{18750}{2}$ km = 9375 km ausgetauscht werden.

Die in a) bzw. b) gesuchten Kilometerangaben lauten also 9375 km bzw. 18750 km.

Aufgabe 240836:
Zwei Motorradfahrer unternehmen eine Fahrt, auf der beide die gleiche Entfernung zurücklegen. Sie starten gleichzeitig und kommen gleichzeitig am Ziel an. Dabei benötigt A doppelt so viel Zeit zum Fahren wie B zum Rasten. B dagegen fuhr dreimal so lange, wie A rastete.

Welcher der beiden Fahrer hatte die längere Rastzeit?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Bezeichnet man die Rastzeit von A mit a und die von B mit b, so ist bei A die (reine) Fahrzeit $2b$ und bei B entsprechend $3a$. Da die Summen von Fahrzeit und Rastzeit für jeden der beiden Fahrer gleich sind, gilt

$$a + 2b = b + 3a \qquad \text{also} \qquad b = 2a > a$$

Der Fahrer B hatte mithin die längere Rastzeit.

Aufgabe 280831:
Zwei wanderlustige Freunde A und B beschließen, auf einer Wanderstrecke von 30 km einander entgegenzugehen. Zu Beginn befindet sich A an einem Endpunkt, B an dem anderen Endpunkt dieser Strecke. Sie verständigen sich telefonisch über ihr Vorhaben und nehmen dabei an, dass jeder von ihnen seine persönliche Marschgeschwindigkeit während des ganzen Weges gleichbleibend beibehält. Damit erhalten sie die folgenden Aussagen:

(1) Wenn A 2 Stunden eher startet als B, so treffen sie sich $2\frac{1}{2}$ Stunden nach dem Start von B.

(2) Wenn aber B 2 Stunden eher startet als A, so treffen sie sich 3 Stunden nach dem Start von A.

Zeige, dass unter diesen Voraussetzungen, wenn die Aussagen (1) und (2) zutreffen, die Marschgeschwindigkeiten von A und B eindeutig bestimmt sind; ermittle diese Geschwindigkeiten!

Überprüfe, dass auch umgekehrt gilt: Wenn A und B die ermittelten Geschwindigkeiten haben, dann treffen die Aussagen (1) und (2) zu.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Wenn die Aussagen (1) und (2) zutreffen, so gilt für die Maßzahlen v_A, v_B der in $\frac{km}{h}$ gemessenen Geschwindigkeiten von A bzw. B:
Gehen A und B gemäß (1) jeweils von ihrem Start bis zum Treffen $4\frac{1}{2}$ Stunden bzw. $2\frac{1}{2}$ Stunden, so legen sie dabei Strecken zurück, deren in km gemessene Länge $4\frac{1}{2} \cdot v_A$ bzw. $2\frac{1}{2} \cdot v_B$ beträgt. Daraus folgt

$$4\frac{1}{2} \cdot v_A + 2\frac{1}{2} \cdot V_B = 30 \tag{3}$$

Gehen A und B aber gemäß (2) jeweils von ihrem Start bis zum Treffen 3 Stunden bzw. 5 Stunden, so folgt entsprechend

$$3 \cdot v_A + 5 \cdot v_B = 30 \tag{4}$$

Aus (3) folgt $9 \cdot v_A + 5 \cdot v_B = 60$; hieraus und aus (4) folgt $6 \cdot vA = 30$, $v_A = 5$. Damit ergibt sich aus (4) $5 \cdot vB = 15$, $v_B = 3$.

Also sind die Marschgeschwindigkeiten, wenn (1) und (2) zutreffen, eindeutig bestimmt; sie betragen 5 $\frac{km}{h}$ bzw. 3 $\frac{km}{h}$.

II. Wenn A und B diese Geschwindigkeiten haben, so folgt:
In $4\frac{1}{2}$ Stunden legt A die Teilstrecke $22\frac{1}{2}$ km zurück und B in $2\frac{1}{2}$ Stunden die Teilstrecke $7\frac{1}{2}$ km. Wegen $22\frac{1}{2} + 7\frac{1}{2} = 30$ treffen sie sich dann, also gilt (1).
In 3 Stunden legt A die Teilstrecke 15 km zurück und B in 5 Stunden die Teilstrecke 15 km. Wegen $15 + 15 = 30$ treffen sie sich dann, also gilt auch (2).

Aufgabe 320834:
Ein Radfahrer fuhr mit konstanter Geschwindigkeit über eine 100 m lange Brücke. Als er auf dieser Brücke 40 m zurückgelegt hatte, traf er einen zweiten Radfahrer, der ihm mit gleicher Geschwindigkeit entgegenkam. Ein Auto, das auf derselben Strecke mit der Geschwindigkeit 70 $\frac{km}{h}$ fuhr, begegnete dem zweiten Radfahrer in dem Augenblick, als dieser die Brücke verließ, und es überholte den ersten Radfahrer genau am Ende der Brücke.

Ermittle aus diesen Angaben die Geschwindigkeit der Radfahrer!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die gesuchte Geschwindigkeit der Radfahrer sei v. Die Zeit t_1, in der der erste Radfahrer auf der Brücke fuhr, bis er dem zweiten Radfahrer begegnete, ist genau so lang wie die anschließende Zeit t_2, bis der zweite Radfahrer die Brücke verließ (und dabei dem Auto begegnete); denn in beiden Zeiten t_1, t_2 war dieselbe Strecke mit der gleichen Geschwindigkeit v zu durchfahren.

Daher hat der erste Radfahrer in der Zeit t_2 weitere 40 m zurückgelegt und musste folglich in einer anschließenden Zeit t_3 noch $(100 - 2 \cdot 40)$ m = 20 m bis zum Ende der Brücke zurücklegen.
In dieser Zeit t_3 durchfuhr das Auto die Strecke 100 m, also eine 5 mal so lange Strecke wie der Radfahrer Daher war die Geschwindigkeit des Autos 5 mal so groß wie die des Radfahrers; d. h., es gilt

$$v = \frac{70}{5} \frac{\text{km}}{\text{h}} = 14 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Also beträgt die gesuchte Geschwindigkeit 14 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$.

Aufgabe 330834:
Auf einer Strecke AB fährt ein Radfahrer X von A nach B, ein zweiter Radfahrer Y von B nach A. Beide sind zur gleichen Zeit gestartet. In B bzw. A angekommen, kehren sie sofort um, fahren dieselbe Strecke bis A bzw. B zurück und beenden dann ihre Fahrt. Es werde angenommen, dass jeder der beiden Fahrer seine Geschwindigkeit konstant beibehält und dass die zum Wenden gebrauchte Zeit vernachlässigt werden kann.

Auf der Hinfahrt begegneten sie sich 30 Minuten nach dem Start an einer Stelle, die 7,5 km von A entfernt ist. Nochmals 30 Minuten später waren die Radfahrer wieder beide zusammen an einer Stelle zwischen A und B.

Ermittle alle Möglichkeiten dafür, wie groß nach dieser Beschreibung

a) die Länge der Strecke AB,

b) die Geschwindigkeiten der Radfahrer X und Y sein können!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Da X in der Zeit $\frac{1}{2}$h bis zum ersten Treffen den Weg 11 km zurücklegte, fuhr X mit der Geschwindigkeit 15 $\frac{km}{h}$. Wären X und Y beim zweiten Treffen einander entgegengefahren, so hätte X zwischen dem ersten und zweiten Treffen B erreichen und dort die Richtung wechseln müssen, also wäre die Strecke vom ersten Treffpunkt bis B kürzer als 12 km.
Daher hätte Y eine kleinere Geschwindigkeit als X und hätte somit in der zweiten halben Stunde noch nicht einmal A erreichen, also erst recht nicht wenden und X begegnen können.
Daher gibt es nur zwei Möglichkeiten:

I. In der Zeit $\frac{1}{2}$ h vom ersten bis zum zweiten Treffen war X nochmals $\frac{15}{2}$ km in gleicher Richtung weitergefahren und wurde am Ende dieser Zeit von Y eingeholt (der zuvor A erreicht und dort die Richtung gewechselt hatte).
Das besagt: Y musste in dieser Zeit eine 3 mal so lange Strecke durchfahren und hat somit die Geschwindigkeit $45\frac{km}{h}$.

Ferner folgt: Y hatte vom Start an bis zum ersten Treffen einen 3 mal so langen Weg wie X zurückgelegt. Also hat die Strecke AB insgesamt die Länge $4 \cdot \frac{15}{2}$ km = 30 km.

II. Zwischen dem ersten und zweiten Treffen ist X in B angekommen, hat dort die Richtung gewechselt und dann beim zweiten Treffen Y eingeholt.
Der Ablauf der Begegnungen ist wie im Fall I., nur mit vertauschten Rollen von X und Y. Also hat nun X eine 3 mal so große Geschwindigkeit wie Y, d. h.: Y hat die Geschwindigkeit 5 $\frac{km}{h}$. Dementsprechend ergibt sich auch, dass die Länge von AB im Fall I. einen 3 mal so großen Wert hatte wie im Fall II.; d. h., im Fall II. hat AB die Länge 10 km.

I.III. Prozentrechnung; Proportionalitäten; Misch-Aufgaben

I. Runde 1

Aufgabe V10811:
Der neue Doppelstock-Gliederzug unserer Reichsbahn wiegt insgesamt 129 Mp (Leergewicht) und hat für 640 Reisende Sitzplätze. Ein D-Zug-Wagen alter Bauart wiegt 40 Mp und bietet 64 Reisenden Sitzplätze.

Um wie viel Prozent ist das „Sitzplatzgewicht“ (Leergewicht je Sitzplatz) bei dem neuen Doppelstock-Gliederzug geringer als bei einem D-Zug alter Bauart?

Lösung von Steffen Polster:
Doppelstock-Gliederzug: Leergewicht je Sitzplatz $L_1 = \frac{129}{640} \approx 0{,}2016$
D-Zug-Wagen: Leergewicht je Sitzplatz $L_2 = \frac{40}{64} \approx 0{,}625$
L_1 ist gleich 33,22 % von L_2. Beim Doppelstockgliederzug ist das Sitzplatzgewicht somit um 67,75 Prozent niedriger als bei einem D-Zug alter Bauart.

Aufgabe 010812:
In diesem Jahr werden in der UdSSR 8,3 Milliarden Meter Stoffe gewebt. Jemand behauptet, dass man damit die ganze Bahnlänge des Mondes um die Erde auslegen könnte.
Hat er recht? (Die Mondbahn sei als Kreisbahn angenommen. Der mittlere Abstand des Mondes von der Erde beträgt 384000 km.)

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Länge der Mondbahn ist der Kreisumfang mit dem Radius 384000 km, d. h. $2\pi \cdot 384000$ km $\approx$ 2413000000 m.
Er hat recht, die Länge der Mondbahn ist weniger als ein Drittel der Stoffbahn.

Aufgabe 020812:
Für den Zusammenbau von 1000 kompletten Schalterteilen für elektrische Geräte benötigte im VEB Elektro-Apparate-Werk Berlin-Treptow ein Arbeiter bisher $27\,\frac{1}{2}$ Stunden. In einem Schülerwettbewerb unterbreitete ein Schüler einen Verbesserungsvorschlag, durch den diese Zeit auf $16\,\frac{1}{2}$ Stunden verringert werden konnte.
a) Um wieviel Prozent verringerte sich die Arbeitszeit?
b) Um wieviel Prozent erhöhte sich dabei die Arbeitsproduktivität?

Anmerkung: Unter der Arbeitsproduktivität versteht man in diesem Falle den Quotienten aus der Anzahl der Schalterteile und der für ihre Herstellung benötigten Arbeitszeit.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Arbeitszeit verringerte sich um $11 : 27\frac{1}{2} \cdot 100\% = 40\%$.
Die Produktivität betrug vorher $36\frac{4}{11}\mathrm{h}^{-1}$, jetzt liegt sie bei $60\frac{20}{33}\mathrm{h}^{-1}$. Sie ist also um $66\frac{2}{3}\%$ gestiegen.

Aufgabe 030811:
Im Jahre 1962 landeten die Fangfahrzeuge der Hochseefischerei 117291 t Fisch an. Die Fangmenge im ersten Halbjahr 1963 betrug 74445 t Fisch; das waren um 44 Prozent mehr als im ersten Halbjahr 1962.

a) Wie groß war die Fangmenge im ersten Halbjahr 1962?

b) Wie groß wäre die gesamte Fangmenge im Jahre 1963, wenn man für das zweite Halbjahr 1963 die gleiche prozentuale Steigerung gegenüber dem ersten Halbjahr annimmt wie im Jahre 1962?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Die Fangmenge im ersten Halbjahr 1962 betrug rund 74445 t/1,44 $\approx$ 51700 t.

b) Die voraussichtliche Fangmenge beträgt $1{,}44 \cdot 117291$ t $\approx$ 168900 t.

Aufgabe 040811:
Für ein Experiment werden 50 cm^3 10-prozentige Salzsäure benötigt. Es steht aber nur 36-prozentige Salzsäure zur Verfügung.

Wie viel Kubikzentimeter 36-prozentige Salzsäure müssen mit destilliertem Wasser verdünnt werden?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
x sei die gesuchte Menge an 36%-iger Salzsäure

50 cm^3 an 10%-iger Salzsäure enthalten 5 cm^3 reiner Salzsäure (S). Somit lässt sich folgende Gleichung aufstellen:

$$S = \frac{36}{100} \cdot x \qquad \Rightarrow \qquad x = S \cdot \frac{100}{36} = \frac{5\text{ cm}^3 \cdot 100}{36} = 13\frac{8}{9}\text{ cm}^3 \approx 13{,}9\text{ cm}^3$$

Man benötigt also $\approx 13{,}9$ cm^3 36%-iger Salzsäure und dementsprechend $50 - 13{,}9$ cm^3 $\approx 36{,}1$ cm^3 destilliertes Wasser.

Aufgabe 050811:
Über die Beteiligung an der 1. Stufe der IV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR hatte ein Schüler folgende Übersicht an die Wandzeitung geheftet:

Klasse 8a: Von 33 Schülern beteiligten sich 20, das sind etwa 60,6 Prozent.

Klasse 8b: Von 32 Schülern beteiligten sich 21, das sind etwa 65,6 Prozent.

Klasse 8c: Von 27 Schülern beteiligten sich 19, das sind etwa 70,4 Prozent.

Die Schüler dieser Klassen erhalten die Aufgabe, die prozentuale Gesamtbeteiligung der Schüler der 8. Klassen zu ermitteln. Ein Teil der Schüler bildet das arithmetische Mittel der Prozentzahlen, die anderen bilden den mit 100 multiplizierten Quotienten aus der Anzahl aller Teilnehmer und der Anzahl aller Schüler dieser Klassen.

a) Wie groß ist die Differenz, die sich bei den beiden Rechnungen ergibt?

b) Welche Schüler haben die Prozentzahl in der richtigen Weise berechnet?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Schüler der zweiten Gruppe haben die Prozentzahl korrekt berechnet und erhalten $\frac{60}{92} \cdot 100\% \approx 65{,}22\%$, während die anderen Schüler mit einem fehlerhaften Verfahren 65,53% erhalten. Die Differenz zwischen beiden Ergebnissen beträgt 0,31%.

Aufgabe 060812:
Aus Kuhmilch kann man 21% der Masse an Rahm gewinnen. Aus Rahm gewinnt man Butter, und zwar beträgt die Buttermasse 23% der Rahmmasse.

Ermittle die kleinste Menge Kuhmilch, die ausreicht, um genau 1 kg Butter unter den angegebenen Bedingungen zu gewinnen!

Die Milchmenge ist in kg anzugeben und als Dezimalbruch zu schreiben, der auf eine Stelle nach dem Komma so zu runden ist, dass die Menge ausreicht, um 1 kg Butter zu gewinnen.

Lösung von Manuela Kugel:
Aus x kg Milch erhält man $\frac{21}{100}x$ kg Rahm und daraus $\frac{23}{100} \cdot \frac{21}{100}x$ kg Butter.

Aus der Gleichung $\frac{23\cdot 21}{100\cdot 100}x = 1$ folgt $x = \frac{10000}{21\cdot 23} = \frac{10000}{483}$.

Wegen $20{,}7 < \frac{10000}{483} < 20{,}8$ ist bei Berücksichtigung von genau einer Stelle nach dem Komma 20,8 kg Milch die kleinste Menge, die ausreicht, um mit dem angegebenen Verfahren 1 kg Butter zu gewinnen.

Aufgabe 070812:
Bei welchem Massenverhältnis von 10 prozentiger und 30 prozentiger Salzlösung erhält man nach Mischung 25 prozentige Salzlösung? (Die Prozentangaben sind auf die Masse bezogen.)

Lösung von Manuela Kugel:
Eine 10-, 30- und 25-%ige Salzlösung a, b und c der Menge 1 (Einheitsmenge) kann man wie folgt darstellen, wenn s der Anteil Salz und w der Anteil Wasser ist:

$$a = 0{,}1s + 0{,}9w \qquad ; \qquad b = 0{,}3s + 0{,}7w \qquad ; \qquad c = 0{,}25s + 0{,}75w$$

Wenn in der 25%igen Lösung c das Mischungsverhältnis aus k Teilen 10%iger und l Teilen 30%iger Salzlösung besteht, kann dies als Gleichung wie folgt ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} c &= k\cdot a + l\cdot b \\ 0{,}25s + 0{,}75w &= k\cdot(0{,}1s + 0{,}9w) + l\cdot(0{,}3s + 0{,}7w) \\ 0{,}25s + 0{,}75w &= (0{,}1k + 0{,}3l)\cdot s + (0{,}9k + 0{,}7l)\cdot w \end{aligned}$$

Der Koeffizientenvergleich bedeutet dann:

$$0{,}25 = 0{,}1k + 0{,}3l \qquad ; \qquad 0{,}75 = 0{,}9k + 0{,}7l$$

Dies ergibt nach Multiplizieren der ersten Gleichung mit 9 und anschließendem Abziehen der 2. Gleichung davon: $1{,}5 = 2l$ bzw. $l = 0{,}75$. Dies ergibt in der ersten Gleichung eingesetzt: $0{,}25 = 0{,}1k + 0{,}225$ bzw. $k = 0{,}25$.
Damit ergibt sich das gesuchte Verhältnis $k : l$ wie folgt: 0,25 : 0,75 bzw. 1 : 3.

Aufgabe 170811:
Der Preis einer Ware (100 M) wurde in drei hintereinander liegenden Jahren um jeweils 5% gesenkt.

a) Wie viel Prozent des Anfangspreises müsste eine einmalige Preissenkung betragen, wenn derselbe Endpreis erreicht werden sollte?

b) Wie viel Prozent des Endpreises beträgt der Anfangspreis der Ware?

Die Prozentangaben sind auf 2 Dezimalen genau zu runden.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Eine Ware, die anfangs 100 M kostete, kostete nach der

1. Preissenkung um $\frac{5\cdot 100}{100}$ M = 5 M weniger, also 95,- M,
2. Preissenkung um $\frac{5\cdot 95}{100}$ M = 4,75 M weniger, also 90,25 M,
3. Preissenkung um $\frac{5\cdot 90{,}25}{100}$ M = 4,5125 M $\approx$ 4,51 M weniger, also 85,74 M

d. h., bei einer einmaligen Preissenkung auf diesen Endpreis wäre die Ware 100 M - 85,74 M = 14,26 M billiger geworden. Daher müsste die einmalige Preissenkung 14,26 % des Anfangspreises betragen, um denselben Endpreis zu erreichen.

b) Vom Endpreis (85,74 M) als Grundwert ist bei dem gesuchten Prozentsatz x der Anfangspreis (100 M) der Prozentwert. Folglich gilt:

$$\frac{x}{100\%} = \frac{100}{85{,}74} \qquad ; \qquad x = \frac{10000}{85{,}74}\% \approx 116{,}63\%$$

Der Anfangspreis beträgt somit 116,63 % des Endpreises.

Aufgabe 200813:
Ein Vater, der von seinen Söhnen Fritz und Heinz begleitet wurde, kaufte sich im Warenhaus einen Anzug, der mit einem Schild folgenden Inhalts versehen war: „Im Preis um 20% herabgesetzt.“

Auf dem Heimweg sagte Heinz: „Vati, da hast du 25% des von dir gezahlten Preises eingespart.“ Fritz, der diese Bemerkung bezweifelte, fragte den Vater: „Stimmt das?“.

Dieser erklärte ihm darauf: „Das stimmt. Wäre der Preis des Anzugs nur um 10% herabgesetzt worden, dann hätte ich allerdings nur $11\frac{1}{9}\%$ des von mir gezahlten Preises eingespart.“

Beweise, dass diese Aussagen unabhängig von dem speziellen Wert des Preises vor der Preisherabsetzung wahr sind!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
War P der Preis vor der Preisherabsetzung, so sind 20% hiervon $\frac{1}{5}P$. Daher beträgt der vom Vater gezahlte Preis $G = \frac{4}{5}P$.

Die eingesparte Summe ist somit $\frac{1}{5}P = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{5}P = \frac{1}{4}G$, also 25% von G, wie behauptet.

Wäre der Preis nur um 10% , also um $\frac{1}{10}P$ herabgesetzt worden, hätte der vom Vater gezahlte Preis $G' = \frac{9}{10}P$ betragen, und die eingesparte Summe wäre $\frac{1}{10}P = \frac{1}{9} \cdot \frac{9}{10}P = \frac{1}{9}G'$, also $11\frac{1}{9}\%$ von G' gewesen, w. z. b. w.

Aufgabe 210814:
Einer Brigade der ausgezeichneten Qualität war der Auftrag erteilt worden, in möglichst kurzer Zeit eine gewisse Anzahl Messgeräte fertigzustellen. Die Brigade bestand aus einem erfahrenen Arbeiter als Brigadier und neun jungen Arbeitern, die eben erst ihre Ausbildung beendet hatten.

Im Laufe eines Tages stellte jeder von den neun jungen Arbeiter 15 Geräte fertig, der Brigadier aber 9 Geräte mehr als jedes der zehn Brigademitglieder im Durchschnitt.

Wie viel Messgeräte wurden insgesamt von der Brigade an diesem Arbeitstag fertiggestellt?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn man alle diejenigen Geräte, die die neun jungen Arbeiter fertigstellten, und dazu 9 von den Geräten, die der Brigadier fertigstellte, gleichmäßig auf die neun jungen Arbeiter verteilt, so entfällt auf jedes der zehn Brigademitglieder der genannte Durchschnitt, das sind also für jedes Mitglied gleich viele Geräte. Da hierbei auf jeden der neun jungen Arbeiter genau 16 Geräte entfallen, so folgt wegen $10 \cdot 16 = 160$. Es wurden an diesem Tag insgesamt 160 Geräte fertiggestellt.

Aufgabe 230811:
Ein quaderförmiger Holzblock hat eine Masse von 25 g.

Welche Masse hat ein quaderförmiger Holzblock gleicher Holzart mit den vierfachen Kantenlängen?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Der Quader habe die Kantenlängen a, b, c; sein Volumen beträgt mithin $V = abc$.
Ein Quader mit den vierfachen Kantenlängen $4a, 4b, 4c$ hat dann das Volumen

$$V' = 4a \cdot 4b \cdot 4c \cdot = 64abc = 64V$$

Da bei gleichem Material die Masse dem Volumen proportional ist, beträgt die Masse des zweiten Holzblockes $64 \cdot 25$ g $= 1600$ g.

Aufgabe 240811:
An einer Schule wird in den Klassen 5 bis 10 eine Altstoffsammlung durchgeführt. Bei der anschließenden Auswertung für einen Wettbewerb zwischen den Klassenstufen wird folgendes festgestellt:

Die Schüler der Klassenstufe 9 sammelten Altstoffe im Wert von 42 M; ebensoviel sammelten die Schüler der Klassenstufe 10. Die Klassenstufe 8 erbrachte doppelt so viel wie die Klassen 9 und 10 zusammengenommen. Die Schüler der Klassenstufe 5 erreichten 21% des Gesamtergebnisses der Schule; die Klassenstufe 6 lieferte 30% des Gesamtergebnisses der Schule, und die Klassenstufe 7 erreichte 2% des Gesamtergebnisses der Schule weniger als die Klassenstufe 6.

Welchen Betrag hat nach diesen Feststellungen das Gesamtergebnis der Schule?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Nach den genannten Feststellungen heben die Klassenstufen 8, 9 und 10 zusammen

$$100\% - 21\% - 30\% - 28\% = 21$$

des Gesamtergebnisses geliefert. Das waren andererseits Altstoffe im Wert von

$$42M + 42M + 2 \cdot (42M + 42M) = 252M$$

Wegen $252 : 21 = 12$ sind 12 M somit 1% des Gesamtergebnisses; dieses beträgt daher 1200 M.

Aufgabe 250811:

a) Es sei b diejenige Zahl, die man erhält, wenn man die Zahl 30 um 50% vergrößert.

   Um wie viel Prozent muss diese Zahl b verkleinert werden, um wieder die Zahl 30 zu erhalten?

b) Überprüfe, ob die für die Zahl 30 gefundene Aussage bei gleicher Aufgabenstellung auch für jede beliebige positive Zahl a zutrifft!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Vergrößert man die Zahl 30 um 50%, so erhält $b = 30 + 15 = 45$.
Die Zahl b muss um 15 verkleinert werden, um erneut 30 zu erhalten. Dieser Wert 15 ist $\frac{1}{3}$ von 45, also lautet die gesuchte Prozentangabe $33\frac{1}{3}\%$.

b) Für jede positive Zahl a gilt: Vergrößert man a um 50%, so erhält man

$$b = a + \frac{a}{2} = \frac{3}{2}a$$

Diese Zahl muss um $\frac{a}{2}$ verkleinert werden, um erneut a zu erhalten; $\frac{a}{2}$ ist aber ein Drittel von $\frac{3}{2}a$.
Also lautet auch für jede beliebige positive Zahl a die - bei gleicher Aufgabenstellung wie in Aufgabe a) gesuchte Prozentangabe $33\frac{1}{3}\%$.

Aufgabe 290811:
Auf einer Flasche mit handelsüblicher 40 prozentiger Essigessenz stehe die folgende Gebrauchsanweisung: „Der Inhalt dieser Flasche (200 ml), mit 800 ml Wasser vermischt, ergibt einen zehnprozentigen Speiseessig.“

Stimmt das?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Der Inhalt dieser Flasche Essigessenz besteht aus $\frac{40}{100} \cdot 200$ ml = 80 ml Essigsäure und 200 ml - 80 ml = 120 ml Wasser.
Nach dem Vermischen mit den angegebenen 800 ml Wasser sind folglich insgesamt 920 ml Wasser und 80 ml Essigsäure vorhanden. Das sind 920 ml + 80 ml = 1000 ml Flüssigkeit und davon 80 ml Essigsäure. In 100 m1 dieser Flüssigkeit sind folglich 8 ml Essigsäure; d. h., es liegt ein 8 prozentiger Speiseessig vor.

Aufgabe 330811:
Nach dem Kauf eines neuen Autos muss man bekanntlich im Lauf der Zeit mit einem Wertverlust rechnen. Für diesen Wertverlust seien im Lauf des ersten Jahres 20%, im zweiten Jahr weitere 15% und im dritten Jahr nochmals weitere 15% gerechnet, wobei alle diese Prozentangaben vom ursprünglichen Kaufpreis verstanden werden. Der jeweils entstehende verminderte Wert wird als Zeitwert bezeichnet.

a) Frau Grübler bezahlte für ihren Neuwagen 23800 DM. Berechne den Zeitwert nach zwei Jahren!

b) Herr Bauer will sein Auto nach drei Jahren verkaufen. Zu diesem Zeitpunkt würde der Zeitwert des Wagens 16200 DM betragen. Um 10% dieses Wertes verringert sich jedoch aufgrund eines Unfalls der Zeitwert nochmals.
Wie viel Prozent des ursprünglichen Kaufpreises beträgt nun der so entstandene verringerte Zeitwert?

c) Herr Neumann kauft ein neues Auto für 43000 DM. Er möchte den Wagen nach vier Jahren zum Zeitwert verkaufen, den er als 18275 DM annimmt.
Welchen Prozentsatz (vom ursprünglichen Kaufpreis) hat er dabei für den Wertverlust im vierten Jahr zugrunde gelegt?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) 20 % von 23800 DM sind 4760 DM, 15 % von 23800 DM sind 3570 DM.
Damit entsteht der Wertverlust 4760 DM + 3570 DM = 8330 DM.
Also beträgt der Zeitwert 23800 DM - 8330 DM = 15470 DM.
(Mit gleicher Begründung wie in b) kann man auch 100 % - (20 % + 15 %) = 65 % von 23800 DM berechnen.)

b) Da die Prozentangaben für die Wertverluste einheitlich vom Kaufpreis verstanden werden, beträgt die Summe der Wertverluste 20 % + 15 % + 15 % = 50 % des Kaufpreises. Daher sind 16200 DM die übrigen 50 % des Kaufpreises; dieser hatte somit 32400 DM betragen.

Die weitere Verringerung des Zeitwertes beträgt 10 % von 16200 DM , das sind 1620 DM. Als verringerter Zeitwert verbleiben 16200 DM - 1620 DM = 14580 DM. Wegen 14580 : 32400 · 100 = 45 sind das 45 % vom Kaufpreis.

c) 18275 DM sind 42,5 % von 43000 DM. Wieder wegen der einheitlichen Bezugnahme auf den Kaufpreis wurde somit für den Wertverlust im vierten Jahr ein Prozentsatz von 50 % - 42,5 % = 7,5 % zugrundegelegt.

II. Runde 2

Aufgabe V10821:
In einer LPG werden Kartoffeln mit einer vierreihigen Legemaschine ausgelegt. In 10 Stunden können mit dieser modernen Maschine 3 Genossenschaftsbauern 5 ha Kartoffeln auslegen.
Früher, als die Bauern die Kartoffeln ohne Maschine auslegen mussten, konnte ein Bauer in 8 Stunden 0,5 ha schaffen. Außerdem benötigte er noch 2 Stunden für das Lockern des Ackers und das Zudecken der Kartoffeln.
Wie viel Stunden Arbeit (Arbeitskraftstunden) sind für 1 ha erforderlich
a) mit der Kartoffellegemaschine,
b) bei der Handarbeit?
c) Vergleiche die Zahlen durch Berechnung von Prozentwerten.

Lösung von Steffen Polster:
a) Die Verhältnisgleichung $3 \cdot 10 : 5 = x : 1$ hat die Lösung $x = 6$. Mit der Kartoffellegemaschine sind für 1 ha 6 Arbeitskräfte eine Stunde erforderlich.

b) Analog wird aus $10 : 0{,}5 = x : 1$ die Lösung $x = 20$. Bei Handarbeit sind für 1 ha 20 Arbeitskraftstunden notwendig.

c) Aus den Werten von a) und b) wird $6 : x = 20 : 100$, $x = 30$. Der Aufwand an Arbeitskräften beträgt mit der Legemaschine nur noch 30 Prozent.

Aufgabe V10822:
Im VEB Glaswerk Stralau wurde die Wanne II mit folgenden Rohstoffen beschickt:
250 kg Scherben, 134 kg Pechstein, 7 kg Flussspat, 228 kg Sand, 82,5 kg Kalk, 17 kg Sulfat und 103 kg Soda.
Wie viel Kilogramm der anderen Rohstoffe benötigt man bei gleicher Zusammensetzung für 1 t Sand?

Lösung von Steffen Polster:
Das Verhältnis $1000\text{ kg} : 228\text{ kg} = x : 250$ ergibt für die Menge an Scherben $x = 1096{,}5$ kg. Für die anderen Rohstoffe wird die Gleichung entsprechend verändert und gelöst.
Es ergibt sich: Beim Verbrauch von 1 t Sand benötigt man 1096 kg Scherben, 590 kg Pechstein, 31 kg Flussspat, 362 kg Kalk, 75 kg Sulfat und 452 kg Soda.

Aufgabe 010821:
Die Stahlerzeugung ist in der UdSSR bis 1960 gegenüber 1913 (zaristisches Russland) auf etwa 1640 Prozent gesteigert worden.

In wieviel Tagen wurde 1960 in der UdSSR genau soviel Stahl erzeugt wie im gesamten Jahr 1913?

Lösung von Carsten Balleier:
Die Stahlerzeugung der UdSSR im Jahr 1960 entspricht 1640 Prozent der Jahresproduktion von 1913, d. h. der Produktion innerhalb von 365 Tagen. Die gesamte Jahresproduktion von 1913, also 100 Prozent, werden dann an $100 : 1640 \cdot 365$ Tagen ≈ 22 Tagen im Jahr 1960 erzeugt.

Aufgabe 020822:
Nach den Plänen, die auf dem XXII. Parteitag der KPdSU ausgearbeitet wurden, soll die Kohleförderung 1980 um 687 Millionen t höher liegen als im Jahre 1960. Die Kohleförderung im Jahre 1980 beträgt 234 Prozent im Vergleich zum Jahre 1960.

Berechne die geplante Kohleförderung des Jahres 1960! Runde auf volle Millionen t!

Lösung von Carsten Balleier:
Es gilt, den Grundwert x zum Prozentwert 687 Millionen t, der 134 Prozent (mehr als 1960, wo es 100 Prozent waren) entspricht, zu berechnen. Also lautet die Beziehung $x : 687$ Millionen t $= 100 : 134$.

Daraus erhält man 513 Millionen t geförderte Kohle im Jahr 1960.

Aufgabe 030821:
Ein rechteckiges Maisfeld von 360 m Länge und 220 m Breite soll von zwei Mähhäckslern abgeerntet werden. Proben haben einen durchschnittlichen Bestand von 58 kg je 10 m^2 ergeben. Jeder Mähhäcksler kann stündlich 105 dt ernten.

a) In welcher Zeit wird das Maisfeld (bei ununterbrochenem Einsatz beider Maschinen) abgeerntet?

b) Für den Transport des Erntegutes stehen Hänger mit einem Fassungsvermögen von 3,5 t zur Verfügung. Jeder Hänger benötigt für das Be- und Entladen sowie für Hin- und Rückfahrt insgesamt 40 min (Umlaufzeit).
Wie viel Hänger braucht man mindestens, wenn die Arbeit ununterbrochen vonstatten gehen soll?

Die Antworten sind zu begründen!

Lösung von Steffen Polster:
a) Das Feld hat einen Flächeninhalt von $360 \text{ m} \cdot 220 \text{ m} = 79200 \text{ m}^2$. Der Bestand hat also eine Masse von $\frac{58\text{kg}}{10\text{m}^2} \cdot 79200 \text{ m}^2 = 459360 \text{ kg} = 4594 \text{ dt}$.
Da beide Mähhäcksler 210 dt jede Stunden ernten, benötigen sie damit $\frac{4594}{210} = 21{,}88 \approx 22$ Stunden.

Ein jeder Mähhäcksler erntet 3,5 t in 20 Minuten. Nimmt man an das Beladen und Hinfahrt genauso lange dauert wie Entladen und Rückfahrt, so benötigt jeder Häcksler zwei Hänger, insgesamt also 4.

Aufgabe 050821:
Eine Gruppe von Schülern einer Klasse hat Kastanien gesammelt. Als ein Mitschüler fragt, wie viel Schüler die Klasse hat und wie viel beim Sammeln teilgenommen haben, erhält er folgende Antworten:

(1) Wären 12 Schüler mehr dabei gewesen, dann hätten wir 75% mehr sammeln können.

(2) Wenn 75% der Schüler unserer Klasse teilgenommen hätten, dann hätten wir das Eineinhalbfache sammeln können.

(3) Es soll vorausgesetzt werden, dass jeder Schüler die gleiche Anzahl von Kastanien sammelt.

a) Wie viel Schüler haben teilgenommen?
b) Wie viel Schüler hat die Klasse?

Lösung von Manuela Kugel:

a) Die Anzahl der Schüler, die gesammelt haben, sei x. Wegen (1) und (3) gilt dann $(x + 12) : x = 175 : 100$, woraus sich $75x = 1200$ und $x = 16$ ergibt.

b) Wegen (2) und (3) gilt für die Anzahl a der Schüler in der Klasse

$$\frac{75}{100}a : x = 3 : 2 \qquad \Rightarrow \qquad a : x = 2 : 1 \qquad \Rightarrow \qquad a = 2$$

Folglich ist $a = 32$, und die Klasse hat genau 32 Schüler.

Aufgabe 060823:
18% einer Zahl sind gleich 15% einer anderen Zahl.

Ermittle das Verhältnis der ersten zur zweiten dieser beiden Zahlen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Ist x die erste Zahl und y die zweite, so gilt nach den Angaben die folgende Gleichung:

$$\frac{18 \cdot x}{100} = \frac{15 \cdot y}{100}$$

also $6x = 5y$. Daraus gewinnt man die Proportion $x : y = 5 : 6$.
Durch Rückschluss erkennt man, dass unter dieser Bedingung auch tatsächlich die Forderung erfüllt ist.

Aufgabe 150821:
Die Wägung eines mit Wasser gefüllten Gefäßes ergab eine Gesamtmasse (Gefäß- und Wassermasse) von 2000 g. Gießt man 20% des Wassers ab, so verringert sich diese gewogene Gesamtmasse auf 88%.

Berechne die Masse des leeren Gefäßes!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die von der Gesamtmasse 2000 g genommenen 12 %, das sind $\frac{12}{100} \cdot 2000$ g $= 240$ g, sind laut Aufgabe genau 20 %, d. h. ein Fünftel der Masse des Wassers. Wegen 240 g $\cdot 5 = 1200$ g enthielt das Gefäß also 1200 g Wasser. Mithin beträgt die Masse des leeren Gefäßes 800 g.

Aufgabe 160822:
Ein Rechteck habe die Seitenlängen a_1 und b_1.

Um wie viel Prozent verändert sich der Flächeninhalt dieses Rechtecks, wenn die Seite a_1 um 25% verkleinert und die Seite b_1 um 20% vergrößert wird?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Der Flächeninhalt A_1 des gegebenen Rechtecks beträgt $A_1 = a_1 \cdot b_1$. Er entspricht 100 %.
Die um 25 % verkleinerte Seite habe die Länge a_2, dann gilt

$$a_2 = a_1 - \frac{1}{4}a_1 = \frac{3}{4}a_1$$

Die um 20 % verlängerte Seite habe die Länge b_2, dann gilt entsprechend $b_2 = \frac{6}{5}b_1$.
Demnach beträgt der Flächeninhalt des so veränderten zweiten Rechtecks

$$A_2 = a_2 \cdot b_2 = \frac{3}{4}a_1 \cdot \frac{6}{5}b_1 = \frac{9}{10}A_1$$

Daher wurde der Flächeninhalt des ersten Rechtecks um 10 % verkleinert.

Aufgabe 200821:
Herr Schäfer hatte sich zwei Hunde gekauft. Er musste sie aber bald wieder verkaufen. Dabei erhielt er für jeden Hund 180 Mark.

Wie Herr Schäfer feststellte, hatte er damit an dem einen Hund 20% von dessen früherem Kaufpreis dazugewonnen, während er den anderen Hund mit 20% Verlust von dessen früherem Kaufpreis weiterverkauft hatte.

Untersuche, ob sich hiernach für Herrn Schäfer insgesamt beim Verkauf beider Hunde ein Gewinn oder ein Verlust gegenüber dem gesamten früheren Kaufpreis ergeben hat! Wenn dies der Fall ist, so ermittle, wie viel der Gewinn bzw. Verlust beträgt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
War der frühere Kaufpreis des ersten Hundes x Mark, so erhielt Herr Schäfer beim Verkauf dieses Hundes $\frac{120}{100}x$ Mark $= \frac{6}{5}$ Mark. Daher gilt

$$\frac{6}{5}x = 180 \qquad \text{also} \qquad x = 150$$

War der frühere Kaufpreis des zweiten Hundes y Mark, so erhielt Herr Schäfer beim Verkauf dieses Hundes $\frac{80}{100}y$ Mark $= \frac{4}{5}y$ 57 Mark. Daher gilt $y = 225$.
Somit hatte der frühere Kaufpreis 150 M + 225 M = 375 M betragen. Da Herr Schäfer die Hunde für insgesamt 360 Mark weiterverkaufte, erlitt er insgesamt einen Verlust von 15 Mark.

III. Runde 3

Aufgabe 010831:
In einem Kreis wurde in einem Quartal der Plan für die Produktion von Mauersteinen (Plan: 1350000 Stück) insgesamt mit 100,1 Prozent erfüllt. Eine Überprüfung der Betriebe zeigte, dass dabei zwei Betriebe, die laut Plan 150000 bzw. 290000 Stück Mauersteine zu produzieren hatten, den Plan nur mit 80,0 Prozent bzw. 86,2 Prozent erfüllt hatten.

a) Wie viel Mauersteine hätten in diesem Kreis produziert werden können, wenn diese beiden Betriebe ihren Plan mit 100 Prozent erfüllt hätten?
b) Wie viel Prozent hätte in diesem Falle die Planerfüllung für den Kreis betragen?

Lösung von Carsten Balleier:

a) Der erste Betrieb hätte 20 % von 150000 Steinen mehr produzieren können, also 30000 Stück.

   Der zweite Betrieb dagegen 13,8 % von 290000, also 40020 Stück.

   Zusammen mit den $1350000 \cdot 1{,}001 = 1351350$ tatsächlich produzierten Mauersteinen wären es also 1421370 Mauersteine gewesen.

b) Die Planerfüllung hätte dann bei $\frac{1421370}{1350000} = 1{,}053 = 105{,}3$ Prozent gelegen.

Aufgabe 020831:
Zinkblende ist ein Erz und enthält 65 Prozent Zink. Von dieser Zinkmenge gehen bei der Gewinnung noch 15 Prozent verloren.

Wie viel kg Zinkblende sind erforderlich, um 1000 kg Zink zu gewinnen?

Lösung von Carsten Balleier:
Die 1000 kg Zink, die gewonnen werden sollen, sind 85% des Zinks, das in der Zinkblende enthalten ist, also sind 100% 1176,5 kg. Dies wiederum ist 65% der Gesamtmenge an Zinkblende, die demzufolge 1810 kg betragen muss.

Aufgabe 050835:
Jemand gießt 9 kg Wasser mit einer Temperatur von 30°C und 6 kg Wasser mit einer Temperatur von 85°C zusammen und rührt das Gemisch gut um.

Welche Temperatur würde das Gemisch annehmen, wenn man den Wärmeaustausch mit der Umgebung unberücksichtigt lässt?

Lösung von Eckart Keller:
Bezeichnet man die Masse der ersten Komponente mit m_1, die der zweiten mit m_2, die Temperatur der ersten Komponente mit t_1, die der zweiten mit t_2, so gilt für die Mischungstemperatur t_x unter den angegebenen Bedingungen:

$$t_x = \frac{m_1}{m_1+m_2}t_1 + \frac{m_2}{m_1+m_2}t_2.$$

Unter Verwendung der gegebenen Maßzahlen erhält man also, wenn x die Maßzahl von t_x bezeichnet,

$$\begin{aligned} x &= \frac{9}{15}\cdot 30 + \frac{6}{15}\cdot 85, \qquad \text{also} \\ x &= 52. \end{aligned}$$

Das Gemisch hat eine Temperatur von $t_x = 52$°C.

Aufgabe 060833:
Gegeben seien 3000 g einer 7,2-prozentigen Lösung von Kochsalz in Wasser (d. h. in je 100 g der Lösung sind genau 7,2 g Kochsalz enthalten). Durch Sieden dieser Lösung verdampft soviel Wasser, dass genau 2400 g der eingedampften Lösung verbleibt.

Wie viel prozentig ist die so erhaltene Lösung?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
In je 100 g der Lösung sind genau 7,2 g Kochsalz enthalten. Folglich beträgt die Kochsalzmenge in 3000 g Lösung

$$30 \cdot 7{,}2 \text{ g} = 216 \text{ g}$$

Da beim Verdampfen die Kochsalzmenge konstant bleibt, sind also auch in der neuen Lösung von 2400 g genau 216 g Kochsalz enthalten. Mithin enthält die neue Lösung in je 100 g eine Kochsalzmenge von genau 216 g : 24 = 9 g, d. h., die Lösung ist 9-prozentig.

Aufgabe 090835:
Aus 77prozentigem und 87prozentigem Spiritus und nur daraus soll durch Mischen genau 1000 g 80prozentiger Spiritus hergestellt werden.

Ermittle die dafür genau benötigten Massen!

Die Prozentangaben beziehen sich auf die Massen.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn es eine Lösung der Aufgabe gibt, dann sei für diese x die Maßzahl der Masse des 77prozentigen Spiritus. Dann ist $(1000 - x)$ die Maßzahl der Masse des 87prozentigen Spiritus, und es gilt:

$$\frac{77}{100}x + \frac{87}{100}(1000 - x) = \frac{80}{100} \cdot 1000$$

also $77x + 87000 - 87x = 80000$, woraus man $x = 700$ erhält.

Folglich kommen als Lösung der Aufgabe nur die Massen 700 g 77-prozentiger und 300 g 87prozentiger Spiritus in Frage.
Diese Massen haben tatsächlich die geforderte Eigenschaft; denn 700 g von 77prozentigem Spiritus enthalten genau 539 g reinen Spiritus; 300 g von 87prozentigem Spiritus enthalten genau 261 g reinen Spiritus. Das sind zusammen 800 g reiner Spiritus.

Laut Definition bezeichnet man 1000 g einer Mischung, die 800 g Spiritus und 200 g Wasser enthält, als 80prozentigen Spiritus, der laut Aufgabe herzustellen war.

Aufgabe 140836:
Gegeben seien drei Zahlen p, p_1, p_2 mit $0 < p_1 < p < p_2 < 100$.

Aus einer geeigneten Menge x kg einer p_1-prozentigen Lösung eines Stoffes (d. h. einer Lösung, die p_1 % dieses Stoffes und den Rest Wasser enthält) und einer geeigneten Menge y kg einer p_2-prozentigen Lösung des gleichen Stoffes soll durch Zusammengießen eine p-prozentige Lösung hergestellt werden.

a) Ermittle das hierzu erforderliche Mischungsverhältnis, d. h. die Zahl $x : y$, zunächst speziell für die Werte $p_1 = 25$, $p_2 = 60$ und $p = 35$!

b) Stelle dann eine für beliebige Werte von p_1, p_2 und p gültige Formel für das Mischungsverhältnis auf!

Anmerkung: Die angegebenen Prozentsätze beziehen sich auf die Masse, sind also nicht als Volumenprozent anzusehen.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) In x kg der 25prozentigen Lösung befinden sich $\frac{25x}{100}$ kg des gelösten Stoffes, in y kg der 60prozentigen Lösung entsprechend $\frac{60y}{100}$ kg. Somit hat $x : y$ genau dann den gesuchten Wert, wenn sich in den durch Zusammengießen erhaltenen $(x + y)$ kg genau $\frac{35(x+y)}{100}$ kg des gelösten Stoffes befinden, d. h. genau dann, wenn

$$\frac{25x}{100} + \frac{60y}{100} = \frac{35(x + y)}{100}$$

gilt. Dies ist der Reihe nach äquivalent mit $25x + 60y = 35x + 35y$, $25y = 10x$, $\frac{5}{2} = \frac{x}{y}$.
Das gesuchte Mischungsverhältnis beträgt somit 5 : 2.

b) Mit analoger Begründung wie in a) hat $x : y$ genau dann den gesuchten Wort, wenn

$$\frac{p_1}{100}x + \frac{p_2}{100}y = \frac{p}{100}(x + y) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{x}{y} = \frac{p_2 - p}{p - p_1}$$

Das gesuchte Mischungsverhältnis lautet: $\frac{p_2 - p}{p - p_1}$

Aufgabe 170836:
Zwei Platten von gleicher Dicke bestehen aus Eichenholz bzw. Stahl. Der Flächeninhalt der Grundfläche der Eichenplatte ist um 20% größer als der Flächeninhalt der Grundfläche der Stahlplatte. Die Dichte des Eichenholzes verhält sich zur Dichte des Stahls wie 1 : 10.

Ermittle, um wie viel Prozent die Masse der Stahlplatte größer als die Masse der Eichenplatte ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es seien folgende Bezeichnungen verwendet:

	Eichenplatte	Stahlplatte
Masse	m_E	m_S
Dichte	ρ_E	ρ_S
Volumen	V_E	V_S
Inhalt der Dreiecksfläche	A_E	A_S
Dicke	h	h

Dann ist

$$(1) \quad m_E = A_E \cdot h \cdot \rho_E \qquad , \qquad (2) \quad m_S = A_S \cdot h \cdot \rho_S$$

sowie nach Voraussetzung (3) $\rho_E = \frac{1}{10}\rho_S$ und (4) $A_E = \frac{120}{100}A_S$. Die Masse der Stahlplatte sei x % der Masse der Eichenplatte. Dann gilt $M_s = \frac{x}{100} = m_E$.

Folglich ist wegen (1), ..., (4):

$$x = \frac{m_s}{m_E}100 = \frac{A_S \cdot h \cdot \rho_S \cdot 100}{A_E \cdot h \cdot \rho_E} = \frac{A_S \cdot h \cdot \rho_S \cdot 100}{\frac{120}{100}A_S \cdot h \cdot \frac{1}{10}\rho_S} = 833\frac{1}{3}$$

Die Masse der Stahlplatte ist um $(833\frac{1}{3} - 100)\% = 733\frac{1}{3}\%$ größer als die der Eichenplatte.

Aufgabe 180835:
Zum Experimentieren wird eine 30%ige Salzlösung benötigt. Vorhanden sind aber lediglich 2 Liter 10%iger Salzlösung sowie eine Flasche mit 42%iger Salzlösung.

Ermittle, wie viel Liter 42%iger Salzlösung den 2 Litern 10%iger Salzlösung zuzusetzen sind, damit eine 30%ige Salzlösung entsteht!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, beim Zusetzen von x Litern 42%iger Salzlösung zu den 2 Litern 10%iger Salzlösung bilden die entstehenden $(x + 2)$ 1 eine 30%ige Salzlösung. Es gilt dann:

2 Liter 10%ige Salzlösung enthalten 0,20 l Salz,
x Liter 42%ige Salzlösung enthalten $0{,}42x$ l Salz,
$(x + 2)$ Liter 30%ige Salzlösung enthalten $0{,}30(x + 2)$ l Salz.

Da die Salzmenge im Lösungsgemisch stets gleich der Summe der Salzmengen in den gemischten Lösungen ist, muss gelten:

$$0{,}20 + 0{,}42x = 0{,}30(x + 2) \Rightarrow 20 + 42x = 30x + 60 \Rightarrow x = \frac{10}{3}$$

Man muss also $\frac{10}{3}$ Liter 42%ige Salzlösung zusetzen, um die geforderte 30%ige Salzlösung zu erhalten.

Probe: Man erhält als Mischung 2 Liter + $\frac{10}{3}$ Liter = $\frac{16}{3}$ Liter einer Lösung mit folgendem Salzgehalt:

2 Liter 10%ige Salzlösung enthalten 0,20 Liter Salz, $\frac{10}{3}$ Liter 42%ige Salzlösung enthalten 1,40 Liter Salz. Das sind zusammen 1,60 Liter Salz.
Von $\frac{16}{3}$ Litern Gesamtflüssigkeit sind diese 1,60 Liter Salz aber $1{,}60 : \frac{16}{3} \cdot 100\% = 30\%$, wie es verlangt war.

I.IV. Ungleichungen

I. Runde 1

Aufgabe 150811:
Peter kam vom Einkaufen zurück. Er kaufte in genau 4 Geschäften ein und hatte dafür genau 35 M zur Verfügung. Davon bringt er der Mutter genau 2 M wieder und berichtet:

> „Im Gemüseladen habe ich 4 M und noch etwas, jedenfalls mehr als 10 Pf bezahlt. Im Schreibwarengeschäft habe ich mehr als im Gemüseladen bezahlen müssen, es war eine gerade Zahl von Pfennigen und kein 5-Pfennig-Stück dabei. Beim Bäcker war es dann mehr als im Gemüseladen und Schreibwarengeschäft zusammen, aber diese Geldsumme war ungerade, und im Konsum schließlich bezahlte ich mehr als in den drei anderen Geschäften zusammen.“

Welche Geldbeträge bezahlte Peter in den vier genannten Geschäften?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Peter muss im Gemüseladen mindestens 4,11 M bezahlt haben. Hätte er 4,12 M oder mehr entrichtet, so hätte er im Schreibwarengeschäft 4,13 M oder mehr, beim Bäcker 8,26 M oder mehr, beim Konsum 16,52 M oder mehr, insgesamt also 33,03 M oder mehr bezahlt, hätte daher höchstens 1,97 M wiederbringen können. Daher hat er im Gemüseladen genau 4,11 M bezahlt.

Im Schreibwarengeschäft musste er folglich mindestens 4,12 M bezahlen. Er kann aber auch nicht 4,14 M oder mehr bezahlt haben; denn sonst hätte er beim Bäcker 8,26 M oder mehr und beim Konsum 16,52 M oder mehr, insgesamt also 33,03 M oder mehr bezahlt, was nicht möglich ist.

Folglich hat er im Schreibwarengeschäft genau 4,12 M bezahlt. Beim Bäcker musste er dann laut Aufgabe mindestens 8,25 M bezahlt haben. Er kann aber auch nicht 8,27 M oder mehr bezahlt haben; denn in diesem Falle hätte er beim Konsum 16,51 M oder mehr, insgesamt also 33,01 M oder mehr zu zahlen gehabt, was ebenfalls nicht möglich ist.

Folglich hat er beim Bäcker genau 8,25 M bezahlt. Wegen 4,11 M + 4,12 M + 8,25 M = 16,48 M und da Peter genau 2,00 M zurückbrachte, hat er beim Konsum genau 16,52 M bezahlt.

Aufgabe 150812:

a) Ermittle alle geordneten Paare $(a,\, b)$ natürlicher Zahlen, für die die folgenden Bedingungen erfüllt sind:
$$a < 4 \quad (1) \qquad ; \qquad a - b > 0 \quad (2) \qquad ; \qquad a + b > 2 \quad (3)$$

b) Beweise, dass es keine geordneten Paare $(a,\, b)$ ganzer Zahlen mit den Eigenschaften (1), (2), (3) gibt, bei denen $a < 0$ oder $b < 0$ ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) I. Wenn ein Paar $(a{,}b)$ natürlicher Zahlen die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt,so ist a wegen(1) eine der Zahlen 0, 1, 2, 3.

Wäre $a = 0$, so folgte aus (2) der Widerspruch $b < 0$ gegen die Eigenschaft von b, natürliche Zahl zu sein.
Wäre $a = 1$, so folgte aus (2) zunächst $b = 0$ und damit $a + b = 1$ im Widerspruch gegen (3).
Für $a = 2$ folgt aus (2), (3) einerseits $b < 2$, andererseits $b > 0$, also $b = 1$.
Für $a = 3$ folgt aus (2) die Ungleichung $b < 3$.

Daher können nur die Paare $(2{,}1), (3{,}0), (3{,}1), (3{,}2)$ (4) natürlicher Zahlen die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllen.

II. Für alle diese Paare ist in der Tat $a < 4$; ferner hat $a - b$ für sie die Werte 1, 3, 2, 1, die alle größer als 0 sind; schließlich hat $a + b$ die Werte 3, 3, 4, 5, die alle größer als 2 sind.
Also sind die Paare (4) alle in Aufgabe a) zu ermittelnden.

b) Gäbe es ein Paar (a,b) ganzer Zahlen mit (1), (2), (3) und $a < 0$, so folgte aus (2) auch $b < 0$ und damit $a + b < 0$ im Widerspruch gegen (3).
Gäbe es ein Paar mit (1), (2), (3) und $b < 0$, so folgte $b \leq -1$, aus (1) aber $a \leq 3$ und damit $a + b \leq 2$ im Widerspruch gegen (3).

II. Runde 2

Aufgabe 190822:
In einer AG Mathematik stellte ein Mitglied der Patenbrigade den Teilnehmern folgende Aufgabe:

„Unsere Brigade hat mehr als 20, aber weniger als 35 Mitglieder. Von ihnen nahmen im letzten Jahr im Juli dreimal soviel, im Februar doppelt soviel ihren Jahresurlaub wie im Mai. Im Januar nahmen drei Personen weniger als im Juli Urlaub, im August dagegen eine Person mehr als im Mai. In den nicht genannten Monaten dieses Jahres nahm kein Mitglied unserer Brigade Urlaub. Unter den genannten Urlaubern ist jedes Mitglied unserer Brigade genau einmal vertreten.

Stellt fest, ob ihr allein aus diesen Angaben die Anzahl unserer Brigademitglieder ermitteln könnt!“

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Anzahl der Mitglieder. dieser Brigade, die im Mai Urlaub nahmen, sei x. Dann nahmen im Juli $3x$, im Februar $2x$, im Januar $3x - 3$ und im August $x + 1$ Brigademitglieder Urlaub. Das sind zusammen $(10x - 2)$ Personen.

Nun gilt $20 < 10x - 2 < 35$, also $22 < 10x < 37$.
Da x eine natürliche Zahl ist, folgt daraus $x = 3$. Mithin hatte die Brigade 28 Mitglieder.

Aufgabe 210821:
Ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen a, für die $\frac{1}{4} < \frac{a}{a+12} < \frac{1}{3}$ gilt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn eine natürliche Zahl a die geforderte Ungleichung erfüllt, so gilt:

$$\frac{1}{4} < \frac{a}{a+12} \qquad \text{und} \qquad \frac{a}{a+12} < \frac{1}{3} \tag{1,2}$$

Aus (1) folgt $a + 12 < 4a$, also $12 < 3a$, folglich $4 < a$. Aus (2) folgt $3a < a + 12$, also $2a < 12$, folglich $a < 6$.
Die einzige natürliche Zahl, die (3) und (4) erfüllt, ist $a = 5$. Daher kann nur diese Zahl die geforderte Ungleichung erfüllen.

Sie erfüllt diese Ungleichung, wie die Probe zeigt.

Alternativ-Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Bildet man $\frac{a}{a+12}$ für zwei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen $a = n$ und $a = n+1$, so erhält man die Zahlen $\frac{n}{n+12}$ und $\frac{n+1}{n+13}$.
Bringt man sie auf den gemeinsamen Nenner $(n+12)(n+13)$, so lauten sie

$$\frac{n(n+13)}{(n+12)(n+13)} = \frac{n^2+13n}{(n+12)(n+13)} \qquad \text{bzw.}$$
$$\frac{(n+1)(n+13)}{(n+12)(n+13)} = \frac{n^2+13+12}{(n+12)(n+13)}.$$

Daher gilt stets $\frac{n}{n+12} < \frac{n+1}{n+13}$, d. h., die für $a = 0, 1, 2, \ldots$ gebildeten Zahlen erfüllen die Ungleichungen

$$0 < \frac{1}{13} < \frac{2}{14} < \frac{3}{15} < \frac{4}{16} < \frac{5}{17} < \frac{6}{18} < \frac{7}{19} < \ldots$$

Wegen $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$ und $\frac{6}{18} = \frac{1}{3}$ erfüllt somit genau die natürliche Zahl $a = 5$ die geforderte Ungleichung.

Aufgabe 240823:
Ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen x, die die Ungleichung

$$\frac{11}{15} < \frac{7}{x} < \frac{15}{11} \qquad \text{erfüllen!}$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die geforderte Ungleichung ist genau dann erfüllt, wenn die zwei Ungleichungen

$$\frac{11}{15} < \frac{7}{x} \quad (1) \qquad ; \qquad \frac{7}{x} < \frac{15}{11} \quad (2)$$

erfüllt sind.
Für natürliche Zahlen x gilt (1) genau dann, wenn ($\frac{7}{x}$, d. h. auch) x positiv ist und die Ungleichung $11x < 105$ erfüllt. Dies gilt genau dann, wenn $0 < x < \frac{105}{11}$, was wegen $\frac{105}{11} = 9\frac{6}{11}$ genau von den natürlichen Zahlen x mit $0 < x \leq 9$ erfüllt wird.

Für natürliche Zahlen x gilt (2) genau dann, wenn ($\frac{7}{x}$ existiert, d. h.) $x > 0$ ist und die Ungleichung $15x > 77$ erfüllt. Dies gilt genau dann, wenn $x > \frac{77}{15}$ ist, was wegen $\frac{77}{15} = 5\frac{2}{15}$ genau von den natürlichen Zahlen x mit $x \geq 6$ erfüllt wird.

Also ist die Gültigkeit von (1) und (2) für natürliche Zahlen x gleichbedeutend mit $6 \leq x \leq 9$ (d. h., die gesuchten Zahlen sind genau die Zahlen 6, 7, 8 und 9).

Aufgabe 310822:

a) Klaus wählt natürliche Zahlen m und n mit $0 < m < n$ und bildet die Zahlen $p = \frac{m}{n}$ und $q = \frac{n}{m}$ Dann ordnet er die drei Zahlen 1, p, q der Größe nach, beginnend mit der kleinsten.

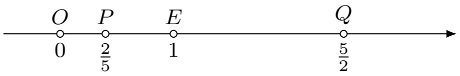
   Beweise, dass sich bei jeder Wahl solcher m, n stets dieselbe Reihenfolge für 1, p, q ergeben muss! Wie lautet sie?

b) Nun zeichnet Klaus auf einer Zahlengeraden die drei Punkte E, P, Q, die den Zahlen 1, p, q zugeordnet sind. Er ordnet dann die beiden Längen $\overline{EP}$ und $\overline{EQ}$ der Größe nach.

Zeichne für das Beispiel $m = 2$, $n = 5$ die Strecken EP, EQ auf einer Zahlengeraden, deren Einheitsstrecke (vom Nullpunkt O bis E) die Länge $\overline{OE} = 4cm$ hat! Beweise, dass sich (bei jeder Wahl obengenannter m, n) auch für $\overline{EP}$ und $\overline{EQ}$ stets dieselbe Reihenfolge ergeben muss! Wie lautet sie?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Für natürliche Zahlen m, n mit $0 < m < n$ (1) folgt stets, indem man (1) durch m bzw. n dividiert, $1 < \frac{n}{m}$ bzw. $\frac{m}{n} < 1$. D. h., es ergibt sich stets die Reihenfolge $p < 1 < q$. (2)

b) Zeichnung:



Aus (2) folgt: Die Strecke EP hat die Länge

$$EP = 1 - p = 1 - \frac{m}{n} = \frac{n-m}{n}$$

die Strecke EQ hat die Länge

$$EQ = q - 1 = \frac{n}{m} - 1 = \frac{n-m}{m}$$

Nach (1) ist $n - m > 0$, hieraus und aus (1) folgt

$$\frac{n-m}{m} > \frac{n-m}{n}$$

d. h., es ergibt sich stets die Reihenfolge $EP < EQ$.

III. Runde 3

Aufgabe 030832:
Beweise folgende Behauptung:

Wenn a und b entweder beide positive reelle oder beide negative reelle Zahlen sind, dann ist stets

$$5a^2 - 6ab + 5b^2 > 0.$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Beweis: Es gilt $5a^2 - 6ab + 5b^2 = 5(a - b)^2 + 4ab$. Der Summand $5(a - b)^2$ ist stets eine nichtnegative reelle Zahl, während $4ab$ unter den angegebenen Bedingungen eine positive reelle Zahl ist.

Also gilt $5a^2 - 6ab + 5b^2 > 0$. $\square$

Aufgabe 040835:
Gegeben sind vier aufeinander folgende natürliche Zahlen, die in ihrer Reihenfolge a, b, c und d genannt sind.

a) Welches Produkt ist größer, ac oder bd ? Bestimme die Differenz der beiden Produkte!
b) Welches Produkt ist größer, bc oder ad ? Bestimme die Differenz der beiden Produkte!

Lösung von Manuela Kugel:
Es seien die vier Zahlen a, b, c, d, dabei gilt $b = a + 1$, $c = a + 2$ und $d = a + 3$

a)
$$ac = a \cdot (a+2) = a^2 + 2a \qquad ; \qquad bd = (a+1) \cdot (a+3) = a^2 + 4a + 3$$

Daraus folgt $a \cdot c < b \cdot d$, die Differenz beträgt $2a + 3$.

b)
$$bc = (a+1)(a+2) = a^2 + 3a + 2 \qquad ; \qquad ad = a \cdot (a+3) = a^2 + 3a$$

Daraus folgt $b \cdot c > a \cdot d$, die Differenz beträgt 2.

Aufgabe 110833:
Ermittle alle reellen Zahlen x, für die ein gleichschenkliges Dreieck $\triangle ABC$ mit den Seitenlängen $a = -5x + 12$; $b = 3x + 20$; $c = 4x + 16$ existiert!

(Überlege, welche Bedingungen a, b und c dabei erfüllen müssen!)

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Ein Dreieck $\triangle ABC$ mit drei reellen Zahlen a, b, c als Seitenlängen existiert genau dann, wenn gleichzeitig die Ungleichungen

$$\begin{array}{cccccc} (1) & a > 0 & (4) & a < b + c & (2) & b > 0 \\ (5) & b < a + c & (3) & c > 0 & (6) & c < a + b \end{array}$$

gelten. Es ist genau dann gleichschenklig, wenn $a = b$ oder $a = c$ oder $b = c$ gilt. Die Bedingung $a = b$ ist gleichbedeutend mit $-5x + 12 = 3x + 20$, also mit $x = -1$.
Daraus ergibt sich $a = b = 17$ und $c = 12$, und (1) bis (6) sind sämtlich erfüllt.

Die Bedingung $a = c$ ist gleichbedeutend mit $-5x + 12 = 4x + 16$, also mit $x = -\frac{4}{9}$. Daraus ergibt sich $a = c = \frac{128}{8}$ und $b = \frac{56}{3}$, und (1) bis (6) sind sämtlich erfüllt.

Die Bedingung $b = c$ ist gleichbedeutend mit $3x + 20 = 4x + 16$, also mit $x = 4$. Daraus ergibt sich $b = c = 32$ und $a - 8$, d. h. (1) ist nicht erfüllt.
Mithin gibt es genau für $x = -1$ und $x = -4$ je ein gleichschenkliges Dreieck.

Aufgabe 110834:
Beweise, dass für je zwei rationale Zahlen $a > 2$ und $b > 2$ das Produkt ab größer als die Summe $a + b$ ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wegen $a > 2$, $b > 2$ ist $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} < 1$, also $\frac{a+b}{ab} < 1$ und folglich wegen $ab > 0$ auch $a + b < ab$.

Aufgabe 130834:
Ermittle alle rationalen Zahlen a, die die Ungleichung erfüllen:

$$\frac{3a - 2}{a + 1} < 0$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Ein Bruch ist genau dann negativ, wenn entweder sein Zähler positiv und sein Nenner negativ oder wenn sein Zähler negativ und sein Nenner positiv ist.

Angenommen, es gäbe eine rationale Zahl a mit $3a - 2 > 0$ und $a + 1 < 0$. Dann folgte aus $3a - 2 > 0$ einerseits $a > \frac{2}{3}$ und aus $a + 1 < 0$ andererseits $a < -1$. Da es keine rationale Zahl gibt, die gleichzeitig größer als 3 und kleiner als -1 ist, war unsere Annahme falsch.

Daher ist die gegebene Ungleichung genau für diejenigen rationalen Zahlen a erfüllt, für die $3a-2<0$ und $a+1>0$ gilt. Nun ist $3a-2<0$ gleichbedeutend mit $a<\frac{2}{3}$ und $a+1>0$ mit $a>-1$.
Diese beiden Bedingungen werden genau von allen rationalen Zahlen a erfüllt, für die $-1<a<1$ gilt.

Folglich sind alle rationalen Zahlen a mit $-1<a<\frac{2}{3}$ und nur diese Lösungen der gegebenen Ungleichungen.

Aufgabe 310834:
Untersuche für alle rationalen Zahlen a, b mit $a\geq 2$, $b\geq 2$, ob bzw. unter welchen Bedingungen das Produkt der Zahlen a, b kleiner als die Summe, gleich der Summe oder größer als die Summe von a und b ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Für alle $a\geq 2$, $b\geq 2$ gilt

$$a-1\geq 1 \qquad , \qquad b-1\geq 1 \tag{1}$$

Da in beiden Beziehungen (1) die auf beiden Seiten stehenden Zahlen positiv sind, folgt durch Multiplikation

$$(a-1)(b-1)\geq 1 \tag{2}$$
$$ab-a-b+1\geq 1$$
$$ab\geq a+b \tag{3}$$

Gleichheit gilt in (3) genau dann, wenn sie in (2) gilt, und das ist genau dann der Fall, wenn in beiden Beziehungen (1) Gleichheit gilt. Damit ist gezeigt:

Es gibt keine Zahlen a,b mit $a\geq 2$, $b\geq 2$, für die das Produkt ab kleiner als die Summe $a+b$ wäre;

im Fall, dass beide Zahlen a,b gleich 2 sind, ist das Produkt ab gleich der Summe $a+b$;

für alle anderen a,b mit $a\geq 2$, $b\geq 2$ ist das Produkt ab größer als die Summe $a+b$.

I.V. Gleichungssysteme

I. Runde 1

Aufgabe V00801:
Zwei Brigaden einer Spulenfabrik fertigen zusammen 8200 Transformatorspulen. Bei der Gütekontrolle müssen von den durch das erste Kollektiv gefertigten Spulen 2%, von denen des zweiten Kollektivs 3% wegen mangelhafter Isolation ausgeschieden werden.
Insgesamt sind 216 Spulen unbrauchbar. Wie viel einwandfreie Spulen werden von jedem Kollektiv hergestellt?

Lösung von Steffen Polster:
x sei die Produktion der ersten Brigade, y der zweiten Brigade. Dann ergibt sich das Gleichungssystem

$$x+y=8200 \qquad ; \qquad 0{,}02\cdot x+0{,}03\cdot y=216$$

Das System hat die Lösung $x=3000, y=5200$. Nach Abzug der mangelhaften Spulen ($0{,}02\cdot x=60$, $0{,}03\cdot y=156$) ergibt sich, dass die erste Brigade 2940 und die zweite Brigade 5044 einwandfreie Spulen hergestellt haben.

Aufgabe V00804:
Wir haben zwei Gefäße. In beide Gefäße gießen wir Wasser, und zwar in das erste $\frac{2}{5}$ seines Fassungsvermögens, in das zweite $\frac{3}{8}$ seines Fassungsvermögens.
Wenn wir die beiden Wassermengen zusammengießen, erhalten wir 8,5 Liter. Wir wissen noch, dass $\frac{4}{5}$ des Fassungsvermögens des ersten Gefäßes um 6,2 Liter größer ist als $\frac{3}{4}$ des Fassungsvermögens des zweiten Gefäßes.
Berechnet die Fassungsvermögen der beiden Gefäße!

Lösung von Steffen Polster:
Das Fassungsvermögen der Gefäße sei x und y. Als Gleichungssystem ergibt sich

$$\frac{2}{5}x + \frac{3}{8}y = 8{,}5 \qquad ; \qquad \frac{4}{5}x - 6{,}2 = \frac{3}{4}y$$

Das System hat die Lösungen $x = 14{,}5$ und $y = 7{,}2$. Das erste Gefäß hat ein Fassungsvermögen von 14,5 l, das zweite von 7,2 l.

Aufgabe V00808:
Knobel Knifflig erzählt: Ich bin dem Riesen aus Prag begegnet. Sein Kopf und Hals sind zusammen 30 cm lang. Seine Beine sind doppelt so lang wie Kopf, Hals und halber Rumpf, und der ganze Kerl ist genau ein Meter länger als Kopf, Hals und Beine zusammen.
Wie groß ist er?

Lösung von Steffen Polster:
Die Länge von Kopf, Hals, Rumpf und Beine seien k, h, r, b. Dann ergibt sich das Gleichungssystem (Längen in cm)

$$k + h = 30 \quad (1) \qquad ; \qquad b = 2\left(k + h + \frac{1}{2}r\right) \quad (2)$$

$$k + h + r + b = 100 + k + h + b \tag{3}$$

Aus (3) folgt sofort $r = 100$. Setzt man (1) und den Wert für r in (2) ein, wird $b = 160$. Damit wird $k + h + r + b = 30 + 100 + 160 = 290$. Der Riese ist 2,90 m groß.

Aufgabe 240812:
Cathrin stellt ihren Mitschülern in der Arbeitsgemeinschaft „Mathematik“ folgende Knobelaufgabe:

Eine Flasche und ein Glas wiegen zusammen so viel wie ein Krug. Die Flasche wiegt allein so viel wie das Glas zusammen mit einem Teller, während drei solcher Teller zusammen so viel wie zwei solcher Krüge wiegen. Wie viel solcher Gläser wiegen zusammen so viel wie die Flasche?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Sind F, G, K, T die Gewichte von Flasche, Glas, Krug bzw. Teller, so gilt

$$F + G = K \tag{1}$$
$$F = G + T \tag{2}$$
$$3T = 2K \tag{3}$$

Aus (2) folgt $3F = 3G + 3T$. Setzt man hierin (3) ein, so ergibt sich

$$3F = 3G + 2K \tag{4}$$

Aus (1) folgt $2K = 2F + 2G$, Setzt man dies in (4) ein, so erhält man $3F = 3G + 2F + 2G$ und daraus $F = 5G$.
Also wiegen fünf Gläser so viel wie die Flasche.

Aufgabe 340811:
Anja, Bernd und Christina haben am gleichen Tag Geburtstag.

An diesem Tag sagt Anja zu Christina: „$\frac{3}{4}$ deines Alters sind ebenso viele Jahre wie $\frac{2}{3}$ meines Alters.“

Bernd sagt zu Christina: „$\frac{3}{4}$ deines Alters sind ebenso viele Jahre wie die Hälfte meines Alters.“

Christina sagt: „Die Summe unserer drei Altersangaben in Jahren ausgedrückt, beträgt 58.“

Zeige, dass durch diese Angaben eindeutig bestimmt ist, wie alt Anja, Bernd und Christina sind! Nenne diese drei Altersangaben!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Aus den Angaben folgt für das Alter a bzw. b bzw. c von Anja bzw. Bernd bzw. Christina:

$$\frac{3}{4}c = \frac{2}{3}a \quad (1) \qquad \frac{3}{4}c = \frac{1}{2}b \quad (2) \qquad a + b + c = 58 \quad (3)$$

Aus (1) folgt $9c = 8a$, also $a = \frac{9}{8}c$ (4), aus (2) folgt $3c = 2b$, also $b = \frac{3}{2}c$. (5)
Damit folgt aus (3)

$$\frac{9}{8}c + \frac{3}{2}c + c = 58 \qquad \Rightarrow \quad c = \frac{58 \cdot 8}{29} = 16$$

und dann nach (4), (5) weiter $a = 18$ und $b = 24$.
Also ist durch die Angaben eindeutig bestimmt: Anja ist 18 Jahre alt, Bernd ist 24 Jahre alt, Christina ist 16 Jahre alt.

II. Runde 2

Aufgabe 140821:
Bei einer Kreisspartakiade wurden für die Teilnehmer insgesamt 61 Goldmedaillen, 63 Silbermedaillen und 60 Bronzemedaillen vergeben. Die Mannschaften der Schulen der Stadt B erkämpften dabei zusammen 42 dieser Medaillen. Sie erhielten genau ein Drittel aller Silbermedaillen, mehr als ein Sechstel, jedoch weniger als ein Fünftel aller Bronzemedaillen und einige Goldmedaillen.

Ermittle die Anzahl aller Gold-, Silber- und Bronzemedaillen, die von den Schülern der Stadt B bei diesem Wettkampf errungen wurden!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Anzahl aller von den Schülern der Stadt B bei dieser Kreisspartakiade errungenen Goldmedaillen sei g, die der Silbermedaillen s und die der Bronzemedaillen b. Dann gilt laut Aufgabe:

$$g + s + b = 42 \quad (1); \qquad s = \frac{63}{3} = 21 \quad (2); \qquad 10 < b < 12 \quad (3)$$

Daraus folgt, da b ganzzahlig ist, $b = 11$ und somit wegen (1) und (2) $g = 42 - 21 - 11 = 10$.
Die Schüler der Stadt B errangen 10 Gold-, 21 Silber- und 11 Bronzemedaillen.

III. Runden 3 & 4

Aufgabe 080836:
Die Zahlen a, b, c und d mögen folgenden Bedingungen genügen:

(1) $d > c$

(2) $a + b = c + d$

(3) $a + d < b + c$

Ordne die Zahlen der Größe nach (beginnend mit der größten)!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wegen (1) gilt $b+d > b+c$, und weil $a+d < b+c$ ist, findet man $a+d < b+d$ und daraus $a < b$. (4)
Durch Subtraktion erhält man aus (2) und (3):

$$d - b < b - d \quad \to \quad 2d < 2b \quad \to \quad d < b \qquad (5)$$

Aus (2) erhält man $b - d = c - a$, woraus sich wegen $b > d$ die Aussage (6) $c > a$ ergibt.
Wegen (4), (5) und (6) ist die gesuchte Reihenfolge $b > d > c > a$.

Aufgabe 160833:
In einem allseitig geschlossenen quaderförmigen Glaskasten befinden sich genau 600 cm^3 Wasser. Legt man den Kasten nacheinander mit seinen verschiedenen Außenflächen auf eine horizontale Ebene, so ergibt sich für die Wasserhöhe im Kasten einmal 2 cm, einmal 3 cm und einmal 4 cm.

Ermittle diejenigen Werte für das Fassungsvermögen des Kastens, die diesen Angaben entsprechen!

Bemerkung: Der Wasserspiegel sei als Teil einer horizontalen Ebene angenommen, die Adhäsion werde vernachlässigt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn die Kantenlängen a, b, c (in cm) des quaderförmigen Innern des Kastens den Angaben der Aufgabenstellung entsprechen, so gilt o. B. d. A.

$$a \cdot b \cdot 2 = 600 \quad (1) \qquad ; \qquad a \cdot c \cdot 3 = 600 \quad (2) \qquad ; \qquad b \cdot c \cdot 4 = 600 \quad (3)$$

Dividiert man (1) durch (3), so erhält man $\frac{a}{2c} = 1$ bzw.(4) $a = 2c$. Setzt man (4) in (2) ein, so folgt $6c^2 = 600$, und daraus wegen $c > 0$ (5) $c = 10$.

Wegen (5) folgt aus (4) $a = 20$ und aus (1) oder (3) $b = 15$.
Also können nur 10 cm, 15 cm, 20 cm als Innenmaße des Kastens und mithin nur der Wert 3000 cm^3 für sein Fassungsvermögen den Angaben der Aufgabenstellung entsprechen.

Aufgabe 170834:
Eine Pioniergruppe sammelte Altpapier; der gesamte Erlös wurde auf das Solidaritätskonto überwiesen. Die Pioniere bildeten zwei Brigaden, jeder Pionier der Gruppe gehörte genau einer dieser Brigaden an. Über das Sammelergebnis ist folgendes bekannt:

(1) Jeder Pionier der Brigade A sammelte genau 13 kg, außer einem, der nur 6 kg mitbrachte.
(2) Jeder Pionier der Brigade B sammelte genau 10 kg, außer einem mit nur genau 5 kg.
(3) Brigade A sammelte insgesamt die gleiche Menge wie Brigade B.
(4) Die gesamte Pioniergruppe sammelte mehr als 100 kg, jedoch weniger als 600 kg Altpapier.

a) Wie viel Pioniere gehörten einer jeden Brigade insgesamt an?
b) Wie viel Mark konnte die Pioniergruppe auf das Solidaritätskonto überweisen, wenn der Altstoffhandel 0,15 Mark pro kg Altpapier bezahlte?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Die Anzahl der Pioniere, die je genau 13 kg sammelten, sei x. Nach (1) gehören dann genau $(x+1)$ Pioniere der Brigade A an, das Sammelergebnis dieser Brigade betrug $(13x+6)$ kg.
Die Anzahl der Pioniere, die je genau 10 kg sammelten, sei y. Nach (2) gehören dann genau $(y+1)$ Pioniere der Brigade B an, und das Sammelergebnis dieser Brigade betrug $(10y+5)$ kg.

Nach (3) gilt somit $13x+6=10y+5$, also $y=\frac{13x+1}{10}$ (*).
$13x+1$ ist durch 10 teilbar, folglich endet die (Zifferndarstellung der) Zahl $13x$ auf die Ziffer 9 und somit x auf die Ziffer 3.

Aus (4) folgt $100<2(13x+6)<600$ und daraus $44<13x<294$.

Dies wird weder von $x=3$ noch von den Zahlen $x=23$ erfüllt, da hierfür $13x=39$ bzw. $13x=299$ gilt. Also ist $x=13$.
Nach (*) ergibt sich daraus $y=17$. Somit gehörten genau 14 Schüler der Brigade A und genau 18 der Brigade B an.

b) Brigade A sammelte $(13\cdot 13+6)$ kg $=175$ kg und Brigade B $(17\cdot 10+5)$ kg $=175$ kg, die gesamte Gruppe somit 350 kg Altpapier.
Wegen $350\cdot 0{,}15$ M $=52{,}50$ M konnte die Pioniergruppe genau 52,50 M auf das Solidaritätskonto überweisen.

Aufgabe 200831:
Uwe erzählt:

> „In den Winterferien machten wir mit einer Reisegesellschaft eine Fahrt in den Harz. Daran nahmen nicht mehr als 80 Personen teil, und zwar waren es genau 3 Männer weniger als Frauen und genau 20 Erwachsene mehr als Kinder. Unterwegs wurden wir in genau 7 Gruppen von gleicher Personenzahl aufgeteilt."

Ermittle alle Möglichkeiten, die Anzahlen der Männer, Frauen und Kinder so anzugeben, dass Uwes Aussagen zutreffen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Treffen Uwes Aussagen für eine Angabe von Anzahlen der Männer, Frauen und Kinder zu und ist dabei m die Anzahl der teilnehmenden Männer, so ergibt sich:
Die Anzahl der teilnehmenden Frauen ist $m+3$, die Anzahl der Erwachsenen also $2m+3$; es gilt $2m+3\geq 20$ (1)
und die Anzahl der Kinder ist $2m+3-20$.

Somit ist $m+m+3+2m+3-20=4m-14$ die Gesamtzahl aller Teilnehmer. Daher gilt einerseits $4m-14\leq 80$ (2)
andererseits ist $4m-14$ durch 7 teilbar. Das gilt folglich auch für $4m$; somit ist wegen der Teilerfremdheit von 4 und 7 m durch 7 teilbar. (3)
Wäre $m\leq 7$, so wäre $2m+3\leq 17$, im Widerspruch zu (1); wäre $m\geq 28$, so wäre $4m-14\geq 98$, im Widerspruch zu (2).
Daher können (1), (2), (3) nur erfüllt sein, wenn $m=14$ oder $m=21$ ist. Somit können nur die in der folgenden Tabelle angegebenen Personenzahlen mit Uwes Angaben übereinstimmen. Aus der Tabelle ist zugleich ersichtlich, dass sie tatsächlich mit diesen Angaben übereinstimmen:

Männer	Frauen	Erwachsene	Kinder	Teilnehmer
m	$m+3$	$2m+3$	$2m-17$	$4m-14$
14	17	31	11	42
21	24	45	25	70

Aufgabe 210835:
Jemand hebt von seinem Sparkonto einen bestimmten Geldbetrag ab. Er erhält diesen in insgesamt 29 Banknoten ausgezahlt, und zwar ausschließlich in Zehnmarkscheinen, Zwanzigmarkscheinen und Fünfzigmarkscheinen. Dabei ist die Anzahl der 10-M-Scheine um 1 kleiner als die Anzahl der 20-M-Scheine. Die Anzahl der 50-M-Scheine ist größer als das Zweifache, aber kleiner als das Dreifache der Anzahl der 20-M-Scheine.

Ermittle die Höhe des abgehobenen Geldbetrages!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, es wurden x Zwanzigmarkscheine und y Fünfzigmarkscheine ausgezahlt. Dann wurden $(x-1)$ Zehnmarkscheine ausgezahlt, und es gilt:

$$(x-1)+x+y=29, \quad \text{also} \quad 2x+y=30 \quad \text{sowie} \quad 2x<y<3x$$

Aus $2x+y=30$ und $2x<y$ folgt $4x<30$, also $x\leq 7$. (1)
Aus $2x+y=30$ und $3x>y$ folgt $5x>30$, also $x>6$. (2)
Aus (1) und (2) folgt $x=7$, also $y=16$.
Somit wurden 6 Zehnmarkscheine, 7 Zwanzigmarkscheine, und 16 Fünfzigmarkscheine, also ein Betrag von 1000 M, ausgezahlt.

Aufgabe 320832:
Um einen Behälter mit Wasser füllen zu können, soll eine Anzahl Röhren angelegt werden. Durch jede Röhre soll das Wasser gleichmäßig strömen (d. h. in gleichen Zeiten gleichviel Wasser). In einer Stunde soll durch jede Röhre die gleiche Wassermenge zuströmen wie durch jede andere Röhre.

Für die Anzahl der Röhren gibt es drei Vorschläge. Nach dem zweiten Vorschlag, zwei Röhren weniger als beim ersten Vorschlag zu nehmen, würde das Füllen des Behälters zwei Stunden länger dauern als beim ersten. Nach dem dritten Vorschlag, vier Röhren mehr als beim ersten Vorschlag zu nehmen, würde das Füllen des Behälters zwei Stunden kürzer dauern als beim ersten.

Ermittle aus diesen Angaben die Anzahl der Röhren und die Zeit zum Füllen des Behälters beim ersten Vorschlag!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Beim ersten Vorschlag seien n Röhren sowie eine Füllzeit von t Stunden vorgesehen. Jede Röhre füllt dann in jeder Stunde $\frac{1}{n\cdot t}$ des Behältervolumens.
Die $n-2$ Röhren des zweiten Vorschlags füllen also in jeder Stunde $\frac{n-2}{n\cdot t}$ des Behältervolumens; der Behälter wird nach diesem Vorschlag somit in $\frac{n\cdot t}{n-2}$ Stunden gefüllt. Da dies 2 Stunden mehr als beim ersten Vorschlag sind, gilt

$$\frac{n\cdot t}{n-2}=t+2 \qquad \text{und daher} \qquad t=n-2 \tag{1}$$

Entsprechend folgt: Nach dem dritten Vorschlag wird der Behälter in $\frac{n\cdot t}{n+4}$ Stunden gefüllt, und es gilt

$$\frac{n\cdot t}{n+4}=t-2 \qquad ; \qquad t=\frac{n}{2}+2 \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt $n-2=\frac{n}{2}+2$ und damit nach (1) $n=8$ und $t=6$.
Also war beim ersten Vorschlag vorgesehen, mit 8 als Anzahl der Röhren eine Füllzeit von 6 Stunden zu erreichen.

Aufgabe 320836:
In der linken Waagschale einer gleicharmigen Waage steht eine Kerze, in der rechten stehen drei Kerzen. Die vier Kerzen sind so beschaffen, dass jede von ihnen während je einer Minute Brenndauer die gleiche Masse verliert wie jede andere von ihnen.

Die linke Kerze würde zum vollständigen Herunterbrennen 84 Minuten brauchen,

von den drei rechten Kerzen die erste 70 Minuten,

die zweite 63 Minuten,

die dritte 35 Minuten.

Die vier Kerzen werden gleichzeitig angezündet. Wie lange danach ist die Waage erstmals im Gleichgewicht?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es sei m die Masse, die jede der vier Kerzen während einer Minute Brenndauer verliert.
Dann hat die linke Kerze die Masse $84m$, und die rechten Kerzen haben die Massen $70m$, $63m$ bzw. $35m$.

Nach x Minuten Brenndauer befindet sich, solange $x \leq 35$ bleibt, auf der linken bzw. auf der rechten Waagschale die Masse $(84 - x)m$ bzw. die Masse $(70 - x + 63 - x + 35 - x)m = (168 - 3x)m$.
Aus $x \leq 35$ folgt aber $2x \leq 70$, also erst recht $2x < 84$ und daraus weiter $84 - x < 168 - 3x$. Daher ist während der Brenndauer bis 35 Minuten die linke Waagschale stets leichter als die rechte.

Von da an, also nach x Minuten Brenndauer mit $x > 35$, befindet sich, solange $x \leq 63$ bleibt, auf der linken bzw. auf der rechten Waagschale die Masse $(84 - x)m$ bzw. die Masse $(70 - x + 63 - x)m = (133 - 2x)m$.
Hiermit ergibt sich genau dann Gleichgewicht, wenn $84 - x = 133 - 2x$ oder, äquivalent hierzu, $x = 49$ gilt.

Also ist die Waage erstmals 49 Minuten nach dem Anzünden der vier Kerzen im Gleichgewicht.

Aufgabe 330841:
Max arbeitet zur Vorbereitung auf die Mathematik-Olympiade eine Anzahl von Aufgaben durch. Sein Freund Moritz, der ihn fragt, wie viele von diesen Aufgaben er schon gelöst habe und wie viele noch nicht, antwortet er:

„Die Anzahl der gelösten Aufgaben ist um 22 größer als die Anzahl der nicht gelösten Aufgaben. Addiert man zur Anzahl der gelösten Aufgaben die dreifache Anzahl der nicht gelösten Aufgaben, so erhält man eine Zahl, die kleiner als 60 ist. Addiert man aber zur Anzahl der gelösten Aufgaben ein Drittel der Anzahl der nicht gelösten Aufgaben, so ergibt sich eine ganze Zahl, die größer als 30 ist.“

Untersuche, ob durch diese Angaben eindeutig bestimmt ist, wie viele Aufgaben Max bearbeitet und wie viele er davon gelöst hat! Ist das der Fall, so gib diese Anzahlen an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Aus den Angaben folgt: Wenn Max x Aufgaben gelöst hat, so hat er $x - 22$ Aufgaben nicht gelöst; es gilt

$$x + 3 \cdot (x - 22) < 60 \quad (1) \qquad x + \frac{1}{3} \cdot (x - 22) > 30 \quad (2)$$

$$x + 7 \cdot (x - 22) \text{ ist eine ganze Zahl} \qquad (3)$$

Aus (1) folgt $x + 3x - 66 < 60$ und $x < 31\frac{1}{2}$. Aus (2) folgt $x + 7x - 7 > 30$ und $x > 28$.
Daher ist x eine der Zahlen 29, 30, 31 und folglich $x - 22$ eine der Zahlen 7, 8, 9.

Die Bedingung (3) erfordert, dass $x - 22$ durch 3 teilbar ist; dies wird unter den genannten Zahlen nur von $x - 22 = 9$ erfüllt.
Also ist durch die Angaben eindeutig bestimmt: Max hat $x = 31$ Aufgaben gelöst von insgesamt 40 bearbeiteten Aufgaben.

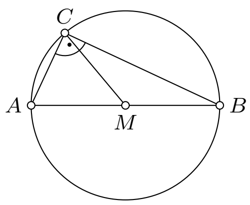
II. Geometrie

II.I. Dreiecke

I. Runde 1

Aufgabe 020815:
Beweise folgenden Satz:
Liegt der Mittelpunkt des Umkreises eines Dreiecks auf einer seiner Seiten, so ist das Dreieck rechtwinklig!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



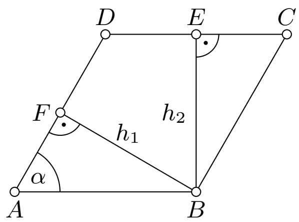
Der Umkreismittelpunkt hat zu den drei Eckpunkten des Dreiecks den gleichen Abstand. Daher ist er – wenn er auf einer der Seiten liegt – Mittelpunkt dieser Seite; umgekehrt ist diese Seite dann Durchmesser des Kreises.

Der Winkel am verbleibenden Eckpunkt ist dann nach dem Satz des Thales ein rechter Winkel.

Aufgabe 040812:
Es ist zu beweisen, dass die Höhen in einem Rhombus gleichlang sind!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Dreiecke ABF und BCE sind kongruent nach WSW:

$$\begin{aligned} \angle BAF &\simeq \angle BCE && \text{(gegenüberliegende Winkel im Rhombus)} \\ \overline{AB} &\simeq \overline{BC} && \text{(Seiten im Rhombus)} \\ \angle ABF &\simeq \angle CBE && \text{(da bereits ein gleicher Winkel und ein rechter Winkel in den Dreiecken vorhanden ist, muss auch der dritte Winkel übereinstimmen)} \end{aligned}$$



Damit sind auch die restlichen Stücke in den beiden Dreiecken kongruent, insbesondere $h_1 = h_2$.

Aufgabe 040815:
Es ist der folgende Satz zu beweisen:

Wenn in einem Dreieck eine Seitenhalbierende halb so lang wie die zugehörige Seite ist, so ist das Dreieck rechtwinklig.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Nach den Voraussetzungen des Satzes liegen die Eckpunkte des Dreiecks auf dem Thaleskreis über $\overline{AB}$, falls a_c die Seitenhalbierende ist.

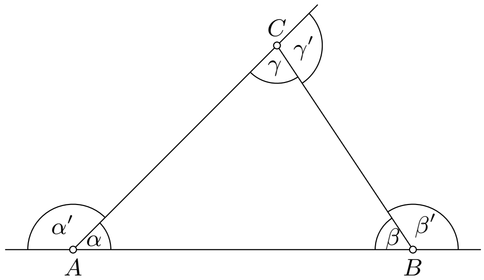
Aufgabe 050814:
Offenbar ist folgender Satz richtig:

Ist das Dreieck ABC gleichseitig, so ist die Summe je zweier seiner Außenwinkel doppelt so groß wie die Summe der ihnen anliegenden Innenwinkel.

Untersuche, ob der Satz umkehrbar ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Umkehrung des Satzes ist: „Ist in einem Dreieck ABC die Summe je zweier seiner Außenwinkel doppelt so groß wie die Summe der ihnen anliegenden Innenwinkel, dann ist das Dreieck ABC gleichseitig.“

Hilfssatz: „Ist die Summe zweier Außenwinkel eines Dreiecks gleich der Summe der ihnen anliegenden Innenwinkel, so beträgt der dritte Innenwinkel 60°.“



Beweis: Die beiden Außenwinkel, auf die die Voraussetzung zutrifft, seien o. B. d. A. α' und β', die zu ihnen anliegenden Innenwinkel des Dreiecks seien α und β, der dritte Innenwinkel sei γ, der dritte Außenwinkel γ' (siehe Abbildung).

Dann gilt nach Voraussetzung:
$$\alpha' + \beta' = 2(\alpha + \beta).$$
Außerdem gilt nach dem Satz, dass jeder Außenwinkel eines Dreiecke gleich der Summe der ihm nicht anliegenden Innenwinkel ist:
$$\alpha' + \beta' + \gamma' = 2(\alpha + \beta + \gamma)$$
Damit folgt: $\gamma' = 2\gamma$, womit, da die Summe zweier Nebenwinkel 180° beträgt, sofort $\gamma = 60°$ folgt.
Wendet man den Hilfssatz auf jeden Innenwinkel des Dreiecks ABC an, ergibt sich die Behauptung.

Aufgabe 060814:
In der Ebene ε liegen zwei voneinander verschiedene Punkte P_1 und P_2 und zwei voneinander verschiedene Geraden g_1 und g_2.

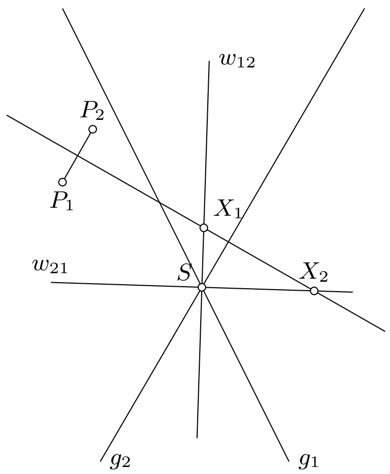
Ermittle alle Punkte X mit den folgenden Eigenschaften:

(1) $\overline{XP_1} = \overline{XP_2}$

(2) Die Abstände des Punktes X von g_1 bzw. g_2 sind einander gleich.

Hinweis: Beachte die verschiedenen Fälle!

Lösung von Manuela Kugel:



1. Fall:
Die Geraden g_1 und g_2 schneiden einander im Punkt S. Dann liegen die gesuchten Punkte X wegen (1) auf der Symmetrieachse s_{12}, zu P_1P_2 und wegen (2) auf einer der beiden Halbierenden w_{12} bzw. w_{21} der Schnittwinkel von g_1 und g_2. Für die Lage von s_{12} sind folgende Fälle zu unterscheiden:

Fall 1.1: Es sei $s_{12} \parallel w_{12}$ oder $s_{12} \parallel w_{21}$.

Dann gibt es für $g_{12} \neq w_{12}$ bzw. für $s_{12} \neq w_{21}$ jeweils genau einen derartigen Punkt X, nämlich den Schnittpunkt von s_{12} mit w_{21} bzw. den Schnittpunkt von s_{12} mit w_{12}.
Für $s_{12} = w_{12}$ bzw. $s_{12} = w_{21}$ erfüllen alle Punkte von w_{12} bzw. von w_{21} und nur diese die Bedingungen (1) und (2).

Fall 1.2: Es sei s_{12} zu keiner der beiden Winkelhalbierenden parallel.

Dann schneidet s_{12} entweder beide Winkelhalbierenden im Punkt S, und genau S erfüllt (1) und (2), oder s_{12} hat mit w_{12} den Punkt X_1 und mit w_{21} den Punkt X_2 gemeinsam ($X_1 \neq X_2$), wobei X_1 und X_2 und nur diese Punkte die Bedingungen (1) und (2) erfüllen.

2. Fall:
Die Geraden g_1 und g_2 sind zueinander parallel. Die gesuchten Punkte X liegen dann wegen (1) auf der Symmetrieachse s_{12} zu P_1P_2 und wegen (2) auf der Mittelparallelen m_{12} zu g_1 und g_2. Verläuft s_{12} nicht parallel zu m_{12}, so gibt es genau einen Punkt X, den Schnittpunkt von s_{12} und m_{12}, der (1) und (2) erfüllt. Für $s_{12} \parallel m_{12}$ erfüllen alle Punkte der Mittelparallelen und nur diese (1) und (2), falls $s_{12} = m_{12}$ gilt. Andernfalls gibt es keinen derartigen Punkt.

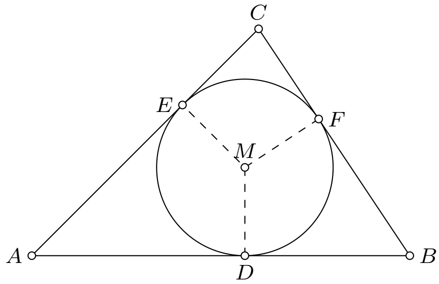
Aufgabe 100813:
Es sei $\triangle ABC$ ein beliebiges Dreieck, und es sei D der Berührungspunkt des Inkreises des Dreiecks $\triangle ABC$ mit der Seite AB.

Beweise: Die Länge der Strecke AD ist gleich der Differenz aus dem halben Umfang des Dreiecks und der Länge der Seite BC.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es sei E der Berührungspunkt des Inkreises mit der Seite AC, F der Berührungspunkt des Inkreises mit der Seite BC.
Dann gilt $AD = AE$, $BD = BF$, $CE = CF$ je als Tangentenabschnitte von einem Punkt außerhalb des Kreises an den Kreis.

Der Umfang des Dreiecks $\triangle ABC$ ist also:

$$AB + BC + AC = 2AD + 2CF + 2BF$$



Daraus folgt:

$$AD = \frac{AB + BC + AC}{2} - (CF + BF)$$

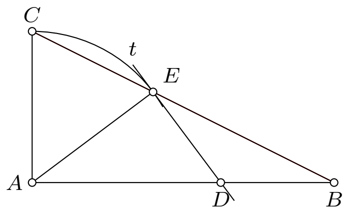
Da $BF + CF = BC$ ist, folgt

$$AD = \frac{AB + BC + AC}{2} - BC$$

Aufgabe 110813:
Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck $\triangle ABC$ mit A als Scheitel des rechten Winkels und mit $\overline{AC} < \overline{AB}$ (1). Der Kreis um A mit $\overline{AC}$ schneidet BC außer in C noch in einem Punkt E, wobei E wegen (1) zwischen C und B liegt. Die im Punkt E an den genannten Kreis gelegte Tangente schneidet AB in einem Punkt D, der zwischen A und B liegt.

Beweise, dass $\overline{ED} = \overline{DB}$ gilt!

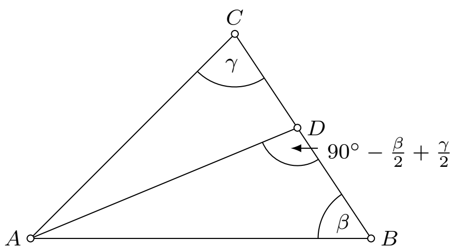
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Das Dreieck $\triangle AEC$ ist laut Konstruktion gleichschenklig mit $AC = AE$. Folglich sind die Winkel $\angle ACE$ und $\angle AEC$ als Basiswinkel gleich groß.



Der Winkel $\angle ACE$ wird vom Winkel $\angle ABC$ und der Winkel $\angle AEC$ vom Winkel $\angle BED$ jeweils zu einem rechten Winkel ergänzt. Daher sind auch $\angle ABC$ und $\angle BED$ gleich groß, also ist $\triangle DBE$ gleichschenklig, und es gilt: $ED = DB$, w. z. b. w.

Aufgabe 150813:
Man beweise: Wenn in einem Dreieck ABC für die Größen β, γ der Winkel $\angle ABC$, $\angle BCA$ und für einen Punkt D auf der Seite BC der Winkel $\angle BDA$ die Größe $90° + \frac{\gamma}{2} - \frac{\beta}{2}$ hat, so liegt D auf der Winkelhalbierenden von $\angle BAC$.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Wegen der Winkelsumme 180° im Dreieck ABD hat $\angle BAD$ die Größe

$$180° - \beta - (90° + \frac{\gamma}{2} - \frac{\beta}{2}) = 90° - \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2}$$

Wegen der Winkelsumme 180° im Dreieck ABC hat $\angle BAC$ die Größe $180° - \beta - \gamma$, er ist also doppelt so groß wie $\angle BAD$, w. z. b. w.

Aufgabe 170814:
Jens behauptet, es sei möglich, jedes beliebige Dreieck ABC in zwei kongruente Dreiecke zu zerlegen. Uwe dagegen meint, dass nur für spezielle Dreiecke eine derartige Zerlegung möglich sei.

Untersuche, wer von den beiden recht hat!

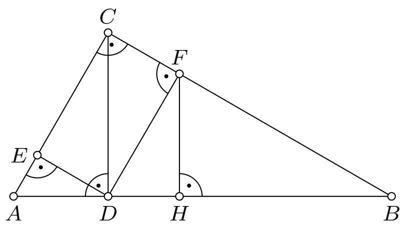
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn es ein Dreieck ABC gibt, das sich in zwei kongruente Dreiecke zerlegen lässt, so geschieht dies durch ein Stück einer Geraden (zerlegende Strecke); denn sonst entstünden Teilstücke, deren Begrenzung entweder nicht nur geradlinig wäre oder mehr als drei Ecken aufwiese. Die zerlegende Strecke muss von einer der Ecken A, B, C ausgehen, da sonst das Dreieck ABC in ein Dreieck und ein Viereck zerlegt würde.

O. B. d. A. gehe die zerlegende Strecke von A aus, ihr anderer auf BC gelegener Endpunkt sei F. Dann ist jeder der Winkel $\angle CAF$ und $\angle ACF$ kleiner als $\angle AFB$, da nach dem Außenwinkelsatz ihre Summe so groß wie $\angle AFB$ ist.
Folglich sind die Dreiecke ABF und ACF höchstens dann kongruent, wenn $\angle AFB$ genau so groß ist wie der dritte Winkel $\angle AFC$ des Dreiecks ACF; d. h. wenn jeder von ihnen $90°$ beträgt, da sie Nebenwinkel sind. Dann sind AB und AC als Hypotenusen in kongruenten rechtwinkligen Dreiecken gleichlang, also ist das Dreieck ABC gleichschenklig.
Somit hat Uwe recht; denn eine Zerlegung in zwei kongruente Dreiecke ist nur bei gleichschenkligen Dreiecken möglich.

Aufgabe 180814:
Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit der Hypotenuse AB, dessen Innenwinkel $\angle CAB$ die Größe $60°$ hat.
Fälle von C aus das Lot CD auf AB, danach von D aus die Lote DE und DF auf AC bzw. BC sowie von F das Lot FH auf AB!

Weise nach, dass $\overline{HB} = \overline{HA} + \overline{AE}$ ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Dreiecke ABC, ACD, ADE, DFH sind rechtwinklig (bei C, D, E bzw. H) und haben je einen Innenwinkel der Größe $60°$ (bei A bzw. D). Daher gilt



$$AC = \frac{1}{2}AB, \quad AD = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{4}AB$$

$$AE = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{8}AB, \quad DH = \frac{1}{2}DF$$

Ferner ist $CDEF$ ein Rechteck, also gilt $DF = CE = AC - AE = \frac{3}{8}AB$ und somit $DH = \frac{3}{16}AB$. Daraus folgt einerseits

$$HB = AB - AD - DH = \left(1 - \frac{1}{4} - \frac{3}{16}\right) AB = \frac{9}{16}AB$$

andererseits

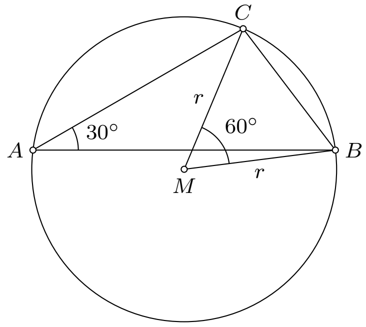
$$HA + AE = AD + DH + AE = \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{16} + \frac{1}{8}\right) AB = \frac{9}{16}AB$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

Aufgabe 270813:
Es sei ABC ein Dreieck, bei dem der Innenwinkel $\angle BAC$ die Größe $30°$ hat.

Beweise, dass unter dieser Voraussetzung die Länge der Seite BC gleich der Länge des Umkreisradius dieses Dreiecks ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Sei M der Mittelpunkt und r der Radius des Umkreises des Dreiecks ABC. Dann gilt nach dem Zentriwinkel-Peripheriewinkel-Satz $\angle BMC = 2 \cdot \angle BAC$.
Wegen $\angle BAC = 30°$ (nach Voraussetzung) folgt hieraus $\angle BMC = 60°$. (1)

Aus $MB = MC = r$ (als Radien eines Kreises) folgt nach dem Basiswinkelsatz $\angle CBM = \angle MCB$. (2)
Wendet man den Innenwinkelsatz auf das Dreieck BCM an, dann folgt aus (1) und (2)

$$\angle CBM + \angle MCB + 60° = 180° \quad ; \quad 2\angle CBM = 120° \quad ; \quad \angle CBM = \angle MCB = 60° \tag{3}$$

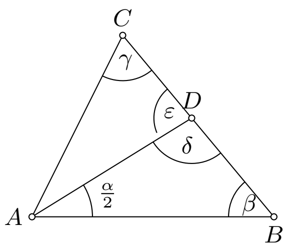
Aus (1) und (3) folgt dann, dass das Dreieck BCM gleichseitig ist. Folglich gilt: $BC = MB = r$. w. z. b. w.

II. Runde 2

Aufgabe 050822:
In dem Dreieck $\triangle ABC$ mit den Winkelmaßen α, β und γ sei die Winkelhalbierende w_α eingezeichnet. Sie schneide die Seite BC in D. Die Winkel $\angle ADB$ und $\angle ADC$ haben die Maße δ bzw. ε.

Beweise, dass $\delta - \varepsilon = \gamma - \beta$ ist!

Lösung von Manuela Kugel:



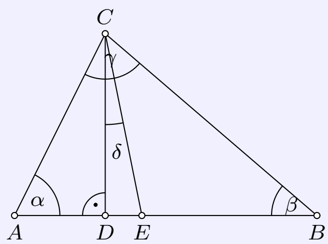
Nach dem Satz vom Außenwinkel gilt (siehe Abbildung):

$$\begin{aligned} \delta &= \gamma + \frac{\alpha}{2} \\ \varepsilon &= \beta + \frac{\alpha}{2} \\ \delta - \varepsilon &= \gamma - \beta \end{aligned}$$

Aufgabe 080823:

Beweise folgenden Satz:

Der Winkel zwischen einer Höhe und der zugehörigen (d. h. vom gleichen Eckpunkt ausgehenden) Winkelhalbierenden eines jeden Dreiecks $\triangle ABC$ ist halb so groß wie der Betrag der Differenz der beiden anderen Innenwinkel des Dreiecks.



Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es sei o. B. d. A. die Höhe CD und die Winkelhalbierende CE des Dreiecks $\triangle ABC$ betrachtet. Der Winkel zwischen beiden habe die Größe δ, die Dreieckswinkel mögen die Größen α, β, γ haben.

Ist $\alpha = \beta$, so fallen CD und CE zusammen, also ist dann $\delta = 0°$ und die Behauptung daher richtig.

Sein nun $\alpha \neq \beta$, etwa $\alpha > \beta$. Dann liegt E zwischen D und B. Da E auch zwischen A und B liegt, folgt $\angle DEC \cong \angle AEC$, d. h. $90° - \delta = 180° - (\alpha + \frac{\gamma}{2}$, also

$$\delta = \alpha + \frac{\gamma}{2} - 90° = \alpha + \frac{1}{2}(180° - \alpha - \beta) - 90° = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

Aufgabe 090824:
Beweise folgenden Satz:

> In jedem Dreieck $\triangle ABC$ teilt jede Halbierende eines Innenwinkels dessen Gegenseite im Verhältnis der beiden anderen Seiten.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Voraussetzung: Dreieck mit Winkelhalbierender
Behauptung: Winkelhalbierende teilt gegenüberliegende Seite im Verhältnis der beiden anderen Seiten

Beweis: O. B. d. A. werde die Winkelhalbierende in C betrachtet, damit gilt $\gamma_1 = \gamma_2$ (1). Zu zeigen bleibt hier $a_1 : a_2 = c_1 : c_2$.
Der Sinus von zwei sich zu 180^o ergänzenden Winkeln (Nebenwinkel) ist gleich groß. Deshalb gilt:

$$\sin\alpha_1 = \sin\alpha_2 \qquad (2)$$

Wegen des Sinussatzes gilt: $\sin\alpha : \sin\gamma = a : c$. Daher gilt nun ebenfalls:

$$\sin\alpha_1 : \sin\gamma_1 = a_1 : c_1 \quad (3) \quad \text{und} \quad \sin\alpha_2 : \sin\gamma_2 = a_2 : c_2 \quad (4)$$

Mit (3), (4), (1) und (2) gilt:

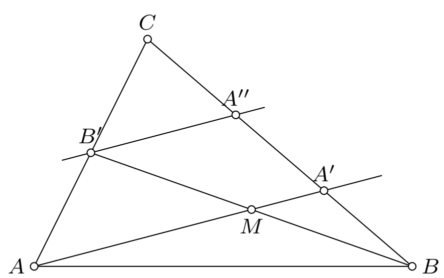
$$a_1 : a_2 = (\sin\alpha_1 \cdot \sin\gamma_2 \cdot c_1) : (\sin\gamma_1 \cdot \sin\alpha_2 \cdot c_2) = c_1 : c_2$$

Aufgabe 100822:
In einem Dreieck $\triangle ABC$ sei B' der Mittelpunkt der Seite AC und M der Mittelpunkt der Strecke BB'. Die Gerade durch A und M schneidet BC in einem Punkt, der A' genannt sei.

Man beweise, dass $\overline{BC} = 3 \cdot \overline{BA'}$ gilt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Laut Aufgabe gilt: $AB' = B'C$ und $MB' = BM$.
Die Parallele durch B' zu AA' ist für das Dreieck $\triangle AA'C$ eine Mittelparallele. Sie schneidet BC in einem Punkt, der zwischen A' und C liegt und A'' genannt sei. Dann gilt nach einem der Strahlensätze

$$BA' : A'A'' = BM : MB' = 1 : 1 \qquad (1)$$
$$A'A'' : A''C = AB' : B'C = 1 : 1 \qquad (2)$$

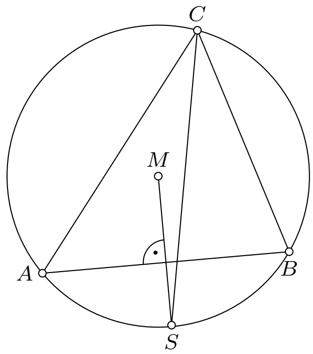


Aus (1) und (2) folgt $BA' = A'A'' = A''C$ und daraus $BC = 3BA'$, w. z. b. w.

Aufgabe 110823:
Beweise, dass für jedes Dreieck $\triangle ABC$ der folgende Satz gilt:

Ist S der von C verschiedene Schnittpunkt der Winkelhalbierenden durch C mit dem Umkreis des Dreiecks $\triangle ABC$, dann liegt S auf der Mittelsenkrechten von AB.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Der Mittelpunkt des Umkreises sei M. Nach dem Satz über Zentriwinkel und Peripheriewinkel folgt: $\angle AMS \cong \angle SMB$ und, da M Mittelpunkt des Umkreises ist, $AM = SM = BM$.
Daher gilt: $\triangle AMS \cong \triangle SMB$ (sws), woraus $AS = SB$ folgt. Infolgedessen liegt S auf der Mittelsenkrechten von AB.

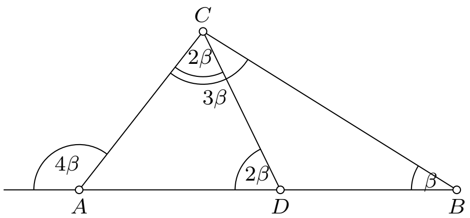
Aufgabe 140823:
Gegeben sei ein Dreieck ABC, das folgender Bedingung genügt:

Die Größe des Winkels $\angle ABC$ beträgt ein Viertel der Größe des Außenwinkels bei A.

a) Stelle fest, ob es auf AB einen Punkt D gibt, für den $\overline{AD} = \overline{AC}$ gilt!

b) Beweise, dass für jeden derartigen Punkt $\overline{DB} = \overline{DC}$ gilt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Es sei $\angle ABC = \beta$, Dann hat der Außenwinkel bei A laut Aufgabe die Größe 4β. Nach dem Satz über den Außenwinkel am Dreieck beträgt die Größe des Winkels $\angle ACB$ somit 3β, also gilt $\angle ACB > \angle ABC$.

Daraus folgt, da im Dreieck dem größeren von zwei Winkeln jeweils die längere Seite gegenüberliegt, $AB > AC$.

Daher gibt es auf AB einen Punkt D, für den $AD = AC$ gilt. Mithin sind A, D, C die Ecken eines gleichschenkligen Dreiecks. Daraus und aus dem Außenwinkelsatz folgt $\angle ADC = \angle ACD = 2\beta$.

Schließlich erhält man für jeden Punkt D der genannten Art

$$\angle DCB = \angle ACB - \angle ACD = 3\beta - 2\beta = \beta = \angle DBC$$

also ist $\triangle CDB$ gleichschenklig mit $DB = DC$, w. z. b. w.

Aufgabe 180822:
Man ermittle die Größen der Innenwinkel eines Dreiecks ABC, auf dessen Außenwinkel folgende Aussage zutrifft:

Einer der Außenwinkel mit dem Scheitel A sei um 16° größer, einer der Außenwinkel mit dem Scheitel B sei um 49° kleiner als einer der Außenwinkel bei C.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Werden die Größen der Innen- bzw. Außenwinkel des Dreiecks ABC bei A mit α bzw. α', bei B mit β bzw. β' und bei C mit γ bzw. γ' bezeichnet, so sind die zwischen ihnen einerseits allgemein gültigen und andererseits vorausgesetzten Beziehungen beschrieben durch

$$\alpha' = 180° - \alpha = \gamma' + 16° = 180° - \gamma + 16°$$
$$\beta' = 180° - \beta = \gamma' - 49° = 180° - \gamma - 49°$$

woraus folgt: $\alpha = \gamma - 16°$ und $\beta = \gamma + 49°$, und mit Hilfe des Satzes über die Innenwinkelsumme im Dreieck: $\alpha + \beta + \gamma = 180° = 3\gamma + 33°$.
Daraus erhält man $\gamma = 49°, \alpha = 49° - 16° = 33°$ und $\beta = 49° + 49° = 98°$.
Tatsächlich existiert wegen $49° + 33° + 98° = 180°$ ein solches Dreieck ABC, und es besitzt außerdem Außenwinkel folgender Größen:

bei C mit $\gamma' = 180° - 49° = 131°$,
bei A mit $\alpha' = 180° - 33° = 147° = 131° + 16° = \gamma' + 216°$ und
bei B mit $\beta' = 180° - 98° = 82° = 131° - 49° = \gamma' - 49°$.

Aufgabe 200824:
Von einem Dreieck ABC und einer Geraden g werde vorausgesetzt:

(1) Es gilt $\overline{AB} = \overline{AC}$.

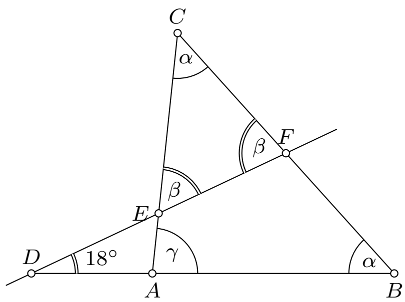
(2) Die Gerade g schneidet die Strecke BC in einem Punkt F, die Strecke AC in einem Punkt E und die Verlängerung der Strecke BA über A hinaus in einem Punkt D.

(3) Es gilt $\overline{CE} = \overline{CF}$.

(4) Der Winkel $\angle EDA$ hat die Größe 18°.

Ermittle aus diesen Voraussetzungen die Größe α des Winkels $\angle ABC$, die Größe β des Winkels $\angle EFC$ sowie die Größe γ des Winkels $\angle CAB$!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



(I) Da der Winkel $\angle DFC$ Außenwinkel des Dreiecks DBF ist, gilt $\beta + \alpha = 18°$.

(II) Im Dreieck EFC gilt, da es gleichschenklig mit $CE = CF$ ist, $\angle CEF = \angle EFC = \beta$, mithin nach dem Satz über die Winkelsumme im Dreieck, angewandt auf das Dreieck EFC, $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, und wegen (I)

$$\alpha + \alpha + 18° + \alpha + 18° = 180°$$

woraus man $\alpha = 48°$ erhält.

(III) Aus $\alpha = 48°$ und $\beta = \alpha + 18°$ folgt $\beta = 66°$.

(IV) Im Dreieck ABC ist nun nach dem Satz über die Winkelsumme $\gamma = 180° - 2\alpha$ mithin $\gamma = 84°$.

Aufgabe 210823:

a) Beweise folgenden Satz:

Wenn ein Dreieck ABC gleichseitig ist, dann ist die Summe irgend zweier zu verschiedenen Ecken gehörender Außenwinkel stets doppelt so groß wie die Summe der zugehörenden Innenwinkel.

b) Untersuche, ob auch die folgende Umkehrung des in a) genannten Satzes gilt: Wenn in einem Dreieck ABC die Summe irgend zweier zu verschiedenen Ecken gehörender Außenwinkel stets doppelt so groß ist wie die Summe der zugehörigen Innenwinkel, dann ist das Dreieck ABC gleichseitig.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

a) Wenn das Dreieck ABC gleichseitig ist, dann beträgt jeder Innenwinkel 60°, jeder Außenwinkel also $180° - 60° = 120°$. Die Summe der zu zwei Ecken gehörenden Außenwinkel beträgt mithin 240°, die Summe der zu diesen Ecken gehörenden Innenwinkel beträgt 120°. Da 240° das Doppelte von 120° ist, ist hiermit der geforderte Beweis geführt.

b) Die zu den Ecken A,B,C gehörenden Innenwinkelgrößen seien α, β bzw. γ; die zugehörigen Außenwinkelgrößen sind dann $180° - \alpha$, $180° - \beta$ bzw. $180° - \gamma$.
In der zu untersuchenden Umkehrung besagt die Voraussetzung daher, dass die drei Gleichungen

$$(180° - \alpha) + (180° - \beta) = 2(\alpha + \beta) \tag{1}$$
$$(180° - \beta) + (180° - \gamma) = 2(\beta + \gamma) \tag{2}$$
$$(180° - \gamma) + (180° - \alpha) = 2(\gamma + \alpha) \tag{3}$$

gelten. Aus (1) folgt $360° - \alpha - \beta = 2\alpha + 2\beta$, also $3\alpha + 3\beta = 360°$ und daher (und aus (2) und (3) ebenso)

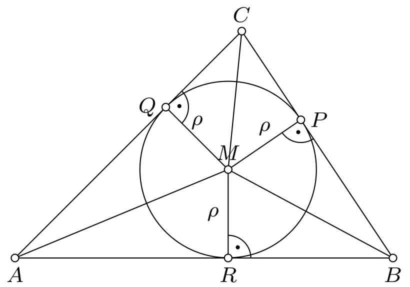
$$\alpha + \beta = 120° \quad ; \quad \beta + \gamma = 120° \quad ; \quad \gamma + \alpha = 120° \tag{4,5,6}$$

Aus (4) und (5) folgt $\alpha = \gamma$ (7), aus (5) und (6) folgt $\alpha = \beta$ (8).
Mit (7) und (8) ist aber die Aussage gewonnen, dass das Dreieck ABC gleichseitig ist. Damit ist bewiesen, dass auch die zu untersuchende Umkehrung gilt.

Aufgabe 220823:
Beweise die folgende Aussage!

Wenn F der Flächeninhalt, u der Umfang und ρ der Inkreisradius eines Dreiecks sind, dann gilt $\rho = \frac{2F}{u}$.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es sei ABC ein beliebiges Dreieck. Sein Inkreis habe den Mittelpunkt M und berühre die Seiten BC, CA bzw. AB in P, Q bzw. R.



Dann ist $BC+CA+AB=u$ und $MP=MQ=MR=\rho$. Ferner gilt nach dem Satz über Tangente und Berührungsradius $MP \perp BC$, $MQ \perp CA$, $MR \perp AB$. Die Dreiecke BCM, CAM bzw. ABM haben folglich die Flächeninhalte

$$\frac{1}{2}BC \cdot MP, \qquad \frac{1}{2}CA \cdot MQ, \qquad \frac{1}{2}AB \cdot MR$$

Andererseits ist die Summe dieser Flächeninhalte gleich F; daher gilt

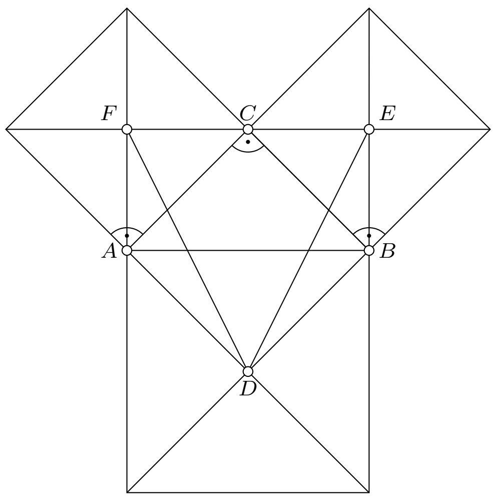
$$F = \frac{1}{2}BC \cdot \rho + \frac{1}{2}CA \cdot \rho + \frac{1}{2}AB \cdot \rho = \frac{1}{2}u \cdot \rho$$

Hieraus folgt die zu beweisende Gleichung $\rho = \frac{2F}{u}$.

Aufgabe 230824:
Es sei ABC ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck mit C als Scheitel des rechten Winkels. Über den Seiten AB, BC und AC seien Quadrate nach außen errichtet. Die Diagonalenschnittpunkte dieser Quadrate seien in dieser Reihenfolge mit D, B und F bezeichnet.

Beweise, dass der Flächeninhalt A_D des Dreiecks DEF gleich dem Flächeninhalt A_Q eines der Quadrate über AC bzw. BC ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wegen $\angle BCE = \angle ACF = 45°$ und $\angle ACB = 90°$ ist $\angle ECF = 180°$, also liegt C auf EF.
Wegen $\angle BAC = \angle CAF = 45°$, also $\angle BAF = 90°$ und da in den Quadraten über AC und BC die Diagonalen aufeinander senkrecht stehen, also $\angle AFC = \angle CEB = 90°$ gilt, ist $ABEF$ ein Rechteck, somit gilt $AB \parallel EF$ und $AB = EF$.



Das Viereck $ADBC$ ist ein Quadrat, da es sich aus den beiden kongruenten rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecken ABC und ABD zusammensetzt. Es ist den Quadraten über AC bzw. BC kongruent. Sein Flächeninhalt ist $A_Q = \frac{1}{2}AB \cdot CD$; denn je eine Hälfte von CD ist in den Dreiecken ABC bzw. ABD die zu AB gehörende Höhe.

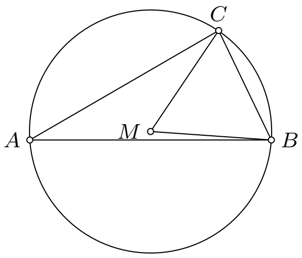
Die Diagonale CD des Quadrats $ADBC$ steht auf AB und folglich auch auf FE senkrecht. Daher hat das Dreieck DEF den Flächeninhalt

$$\frac{1}{2}FE \cdot CD = \frac{1}{2}AB \cdot CD = A_Q$$

Aufgabe 240822:
Es sei ABC ein Dreieck; die Größe des Winkels $\angle BAC$ betrage 30°.

Beweise, dass unter dieser Voraussetzung die Länge der Seite BC gleich dem Umkreisradius r des Dreiecks ABC ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Der Umkreismittelpunkt des Dreiecks ABC sei M, der Umkreisradius sei r. Im Umkreis ist $\angle BAC$ Peripheriewinkel über der Sehne BC und $\angle BMC$ der zugehörige Zentriwinkel. Daher hat $\angle BMC$ nach dem Peripherie-Zentriwinkel-Satz die Größe $2 \cdot 30° = 60°$; nach dem Innenwinkelsatz, angewandt auf $\triangle BCM$, gilt also

$$\angle BMC + \angle MCB = 120° \qquad (1)$$

Ferner ist wegen $CM = BM = r$ das Dreieck BCM gleichschenklig mit

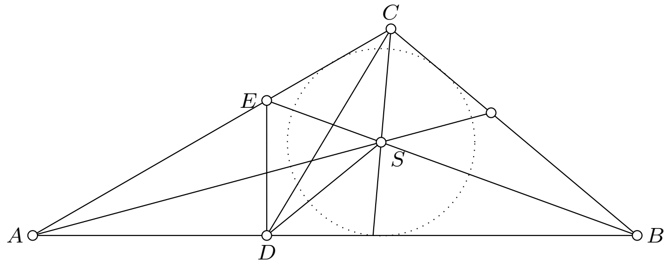
$$\angle MBC = \angle MCB \qquad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt $\angle MBC = \angle MCB = 60°$, also ist $\triangle BCM$ sogar gleichseitig, womit $BC = r$ bewiesen ist.

Aufgabe 310823:
Es sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel bei C. Der Winkel $\angle BAC$ habe die Größe $\alpha = 30°$. Der Mittelpunkt der Seite AB sei D, der Schnittpunkt der drei Winkelhalbierenden des Dreiecks ABC sei S.

Beweise, dass aus diesen Voraussetzungen $\overline{CS} = \overline{DS}$ folgt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Aus $\angle ACB = 90°$ und $\angle BAC = 30°$ folgt nach dem Innenwinkelsatz $\angle ABC = 60°$. (1)

Nach der Umkehrung des Thalessatzes liegt C auf einem Halbkreis über AB, also ist $DB = DC$ und daher nach dem Basiswinkelsatz $\angle DCB = \angle DBC$. (2)

Nach (1),(2) (und $\angle ABC = \angle DBC$) ist BCD ein gleichseitiges Dreieck. Darin ist die Gerade durch B und S, die den Winkel $\angle DBC$ halbiert, zugleich die Mittelsenkrechte der Seite CD. Also erfüllt S, wie jeder Punkt dieser Mittelsenkrechten, die Bedingung $CS = DS$. w. z. b. w.

Aufgabe 330824:
Für jedes Dreieck ABC bezeichne H den Fußpunkt der auf BC senkrechten Höhe und W den Schnittpunkt von BC mit der Winkelhalbierenden durch A.

a) Welche Größe muss der Winkel $\angle WAH$ in einem gleichschenkligen Dreieck ABC mit $\overline{AC} = \overline{BC}$ haben, in dem der Innenwinkel $\angle ACB$ die Größe 48° hat?

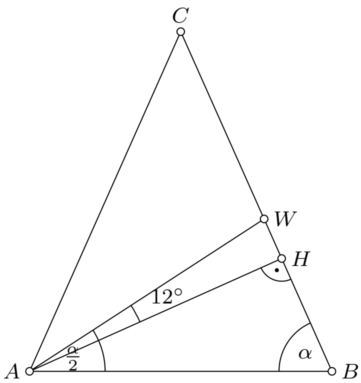
b),c) Gibt es gleichschenklige Dreiecke ABC mit $\overline{AC} = \overline{BC}$, bei denen der Winkel $\angle WAH$

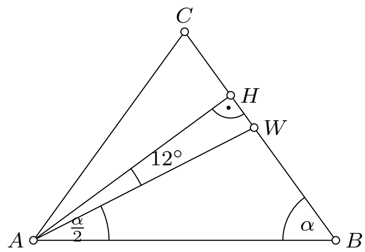
b) die Größe 12°,

c) die Größe 60°

hat? Ermittle jeweils alle diejenigen Werte, die als Größe des Basiswinkels $\angle BAC$ in einem derartigen Dreieck möglich sind!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:





a) Nach dem Basiswinkelsatz und dem Innenwinkelsatz gilt (linke Abbildung)

$$2 \cdot \angle BAC + \angle ACB = 180° \qquad \text{also} \qquad \angle BAC = 90° - \frac{1}{2}\angle ACB = 90° - 24° = 66°$$

Da AW den Winkel $\angle BAC$ halbiert, gilt $\angle BAW = 33°$. (1)
Nach dem Innenwinkelsatz für Dreieck ABH ist

$$\angle BAH = 90° - \angle ABH = 90° - 66° = 24° \tag{2}$$

Der Winkel $\angle ABC$ ist kleiner als 90°, also liegt H auf derselben Seite von AB wie W. Daher folgt aus (1) und (2) $\angle WAH = 33° - 24° = 9°$.

b) Wenn ABC ein gleichschenkliges Dreieck mit $AC = BC$ und $\angle WAH = 12°$ ist, so folgt:
Da der Basiswinkel $\angle ABC$ kleiner als 90° ist, liegt H auf derselben Seite von AB wie W, also entweder auf der Strecke BW (linke Abbildung) oder auf ihrer Verlängerung über W hinaus (rechte Abbildung). In diesen beiden Fällen folgt mit dem oberen bzw. unteren Vorzeichen

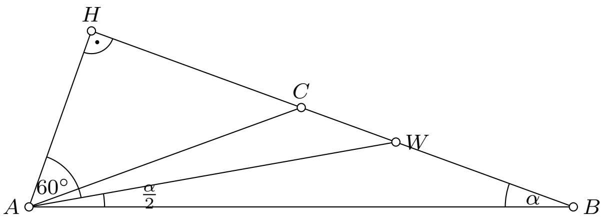
$$\angle BAH = \angle BAW + \angle WAR \quad \text{mit } \alpha = \angle BAC \qquad \text{also } \angle BAH = \frac{\alpha}{2} \mp 12° \tag{3}$$

Somit besagt der Innenwinkelsatz für Dreieck ABH

$$\left(\frac{\alpha}{2} \mp 12^\circ\right) + \alpha = 90^\circ \tag{4}$$
$$\frac{3}{2}\alpha = 90^\circ \pm 12^\circ$$
$$\alpha = 60^\circ \pm 8^\circ$$

In der Tat gibt es sowohl für $\alpha = 68^\circ$ als auch für $\alpha = 52^\circ$ gleichschenklige Dreiecke mit α als Basiswinkelgröße (da in beiden Fällen $\alpha < 90^\circ$ ist); für diese Dreiecke gilt (4), also (3) und damit $\angle WAH = 12^\circ$.

c) Die gleiche Schlussweise wie in b) führt auf $\alpha = 60^\circ \pm 40^\circ$.
Von diesen beiden Werten scheidet $\alpha = 100^\circ$ aus, da ein Basiswinkel nicht größer als 90° sein kann. Dagegen gibt es für $\alpha = 20^\circ$ gleichschenklige Dreiecke mit α als Basiswinkelgröße.
Für diese Dreiecke gilt $\angle HAB = 70^\circ$ und $\angle HAW = 60^\circ$.



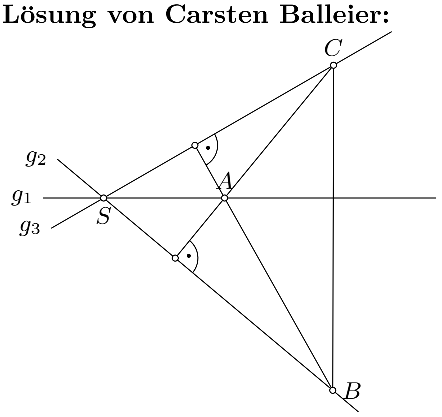
Damit ist gezeigt: Es gibt Dreiecke wie in c) genannt; als Basiswinkelgröße $\alpha = \angle BAC$ solcher Dreiecke ist genau der Wert $\alpha = 20^\circ$ möglich.

III. Runden 3 & 4

Aufgabe 020836:
a) Gegeben sind drei Geraden g_1, g_2 und g_3, von denen keine auf einer anderen senkrecht steht. Sie schneiden einander im Punkt S. Auf g_1 liegt ein weiterer Punkt A. Gesucht ist das Dreieck ABC, in dem die Höhen auf den Geraden liegen.

b) Untersuche sämtliche Fälle, bei denen 2 Geraden aufeinander senkrecht stehen und der Punkt A auf einer dieser Geraden oder auf der dritten liegt!

Lösung von Carsten Balleier:



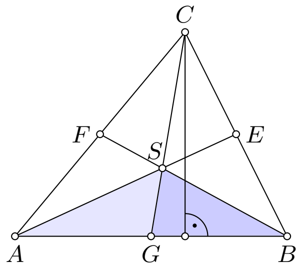
a) Man fällt die Lote von A auf g_2 und g_3. Diese verlängert man, so dass sie g_3 bzw. g_2 schneiden. Diese Schnittpunkte sind die anderen beiden Eckpunkte des Dreiecks.

b) Hier geht man ebenso vor. Falls A auf einer der beiden senkrecht zueinander stehenden Geraden liegt, ergibt sich ein rechtwinkliges Dreieck. Liegt A aber auf der dritten Geraden, entsteht überhaupt kein Dreieck.

Aufgabe 030833:
Zeichne ein beliebiges Dreieck ABC und seine Seitenhalbierenden! Der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden sei S. Er ist gleichzeitig gemeinsamer Eckpunkt für die sechs Dreiecke, in die das Dreieck ABC durch die Seitenhalbierenden zerlegt wird.

Beweise, dass diese sechs Dreiecke sämtlich untereinander flächengleich sind!

Lösung von Carsten Balleier:



Beweis: (Bild) Zuerst wird gezeigt, dass je zwei kleine Dreiecke, die an einer Seite des großen Dreiecks anliegen, den gleichen Flächeninhalt haben.
Dazu betrachte man z. B. AB: Die Dreiecke AGS und GBS (im Bild gekennzeichnet) haben eine Höhe gemeinsam, nämlich das Lot von S auf die Strecke AB. Außerdem gilt $AG = GB$ (nach Konstruktion der Seitenhalbierenden), d. h., dass die zur gemeinsamen Höhe gehörenden Grundseiten gleich lang sind.
Es folgt: $[AGS] = [GBS]$. Gleichermaßen lässt sich $[BES] = [ECS]$ und $[CFS] = [FAS]$ beweisen.
Nun muss gezeigt werden, dass $[GBS] = [BES]$ und die dazu analogen Beziehungen gelten. Dazu kann man wie folgt vorgehen:

Aus der Konstruktion folgt $[ABE] = [AEC]$. Das ist jedoch gleich bedeutend mit

$$[AGS] + [GBS] + [BES] = [FAS] + [CFS] + [ECS]$$

Setzt man das im ersten Teil erhaltene Resultat ein, erhält man $2[AGS] + [BES] = 2[FAS] + [BES]$, womit $[AGS] = [FAS]$ klar wird.

Jetzt kann man aus $[GCA] = [BCG]$ auch $[FAS] = [BES]$ beweisen, so dass tatsächlich alle sechs Dreiecke untereinander flächengleich sind. □

Anmerkung: Der zweite Teil kann auch unter Verwendung der Tatsache, dass S die Seitenhalbierenden im Verhältnis $2 : 1$ teilt, durchgeführt werden.
Dann bekommt man als Zwischenschritt $[ABS] = 2[BES]$. Umgekehrt ist es möglich, die Gültigkeit der $2 : 1$-Teilung aus der Flächengleichheit herzuleiten.

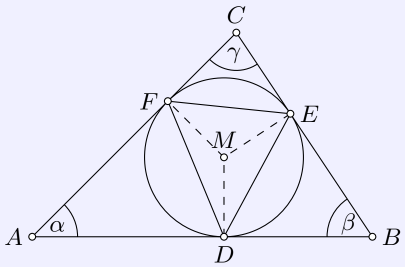
Aufgabe 050832:
Ermittle alle in der Ebene des Dreiecks ABC gelegenen Punkte D, die mit den Eckpunkten A und B des Dreiecks ABC ein Dreieck bilden, dessen Flächeninhalt halb so groß ist wie der des Dreiecks ABC.

Lösung von Eckart Keller:
Die zur Seite AB gehörige Höhe CE des Dreiecks $\triangle ABC$ habe die Länge h_c, die Seite AB habe die Länge c. Dann beträgt der Flächeninhalt F des Dreiecks $\triangle ABC$: $F = \frac{1}{2}c \cdot h_c$.

Da die geforderten Dreiecke in der Seite AB mit dem Dreieck $\triangle ABC$ übereinstimmen, haben sie genau dann einen halb so großen Flächeninhalt, wenn die Länge der zu AB gehörigen Höhe bei diesen Dreiecken $\frac{h_c}{2}$ beträgt.
Das ist offensichtlich für alle Dreiecke $\triangle ABD$ der Fall, bei denen der Punkt D auf einer der beiden zu AB im Abstand $\frac{h_c}{2}$ gezogenen Parallelen liegt, und nur für diese. In jedem anderen Falle ist nämlich der Abstand des Punktes D von der Geraden durch A und B größer oder kleiner als $\frac{h_c}{2}$.

Die gesuchte Menge ist also die Menge aller Punkte der beiden im Abstand $\frac{h_c}{2}$ zu AB gezogenen Parallelen.

Aufgabe 050834:



Der Inkreis k des Dreiecks ABC habe mit den Dreiecksseiten AB, BC und CA die Berührungspunkte D, E und F (siehe Abbildung). Die Winkel des Dreiecks ABC haben die Maße α, β, und γ.

Ermittle die Maße der Winkel $\angle DEF$, $\angle EFD$ und $\angle FDE$ des Dreiecks DEF!

Lösung von Eckart Keller:
Bezeichnet man den Mittelpunkt des Inkreises mit M, dann gilt: $\triangle CFM \cong \triangle CME$, da sie in 2 Seiten und dem rechten Winkel übereinstimmen.

$$\text{Folglich gilt: } \overline{CF} = \overline{CE} \text{ und damit } CM \perp EF, \tag{1}$$

$$\text{und wegen (1) und } ME \perp EG \text{ auch } \angle MEF \cong \angle MFE \cong \angle MCE. \tag{2}$$

$$\text{Entsprechend erhält man } \angle MED \cong \angle MDE \cong \angle MBE \tag{3}$$

$$\text{und } \angle MDF \cong \angle MFD \cong \angle MAF. \tag{4}$$

Das Maß des Winkels $\angle MCE$ ist $\frac{\gamma}{2}$, das des Winkels $\angle MBE$ ist $\frac{\beta}{2}$ und das des Winkels $\angle MAF$ ist $\frac{\alpha}{2}$, da CM bzw. BM bzw. AM die Winkelhalbierenden des Dreiecks $\triangle ABC$ sind. Bezeichnet man das Maß den Winkels $\angle DEF$ mit δ, das des Winkels $\angle EFD$ mit ε und das des Winkels $\angle FDE$ mit η, dann gilt wegen (2) und (3) $\delta = \frac{\gamma+\beta}{2}$, wegen (2) und (4) $\varepsilon = \frac{\gamma+\alpha}{2}$ und wegen (3) und (4) $\eta = \frac{\alpha+\beta}{2}$.

Aufgabe 080831:
Beweise folgenden Satz: Jedes Dreieck $\triangle ABC$ lässt sich in zwei rechtwinklige Teildreiecke zerlegen.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es genügt zu beweisen, dass in jedem Dreieck wenigstens ein Höhenfußpunkt zwischen den beiden Eckpunkten einer Dreiecksseite liegt. Das trifft auf den Fußpunkt der vom Scheitelpunkt eines größten Dreieckswinkels auf die gegenüberliegende Seite gefällten Höhe zu.

Beweis:

(1) Ein größter Winkel des Dreiecks $\triangle ABC$ liege o.B.d.A bei C.

Der Fußpunkt des von diesem Punkt auf die Gerade g durch A und B gefällten Lotes sei D.

(2) Wir nehmen (o.B.d.A) an, D liege auf g außerhalb der Seite AB auf der anderen Seite von B bezüglich A oder in A.

Dann ist der Winkel $\angle BAC$ als Außenwinkel im Dreieck $\triangle DCA$ oder als rechter Winkel $\angle BDC$ nicht spitz.

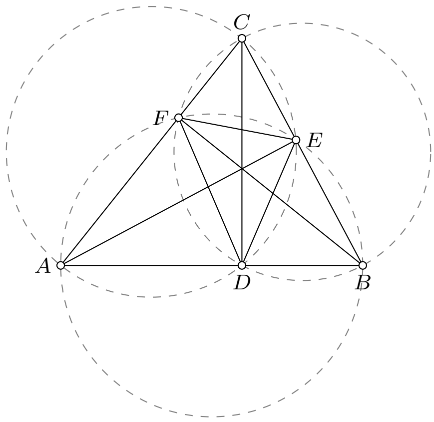
Wegen (1) kann aber keiner dieser Winkel größer als 60° sein. Damit ist ein Widerspruch erreicht. Annahme (2) ist folglich falsch. w. z. b. w.

Aufgabe 100836:
Beweise den folgenden Satz:

Sind D, E, F die Fußpunkte der Höhen eines spitzwinkligen Dreiecks $\triangle ABC$, dann halbieren die Höhen des Dreiecks $\triangle ABC$ die Innenwinkel des Dreiecks $\angle DEF$!

(Da der Beweis für alle drei Winkel analog verläuft, genügt es, ihn für den Winkel $\angle EFD$ zu führen.)

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



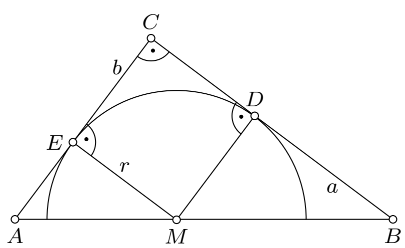
Die Fußpunkte der die Punkte A, B bzw. C enthaltenden Höhen des spitzwinkligen Dreiecks ABC seien mit E, F bzw. D in dieser Reihenfolge bezeichnet.
Jeder der Punkte E, F, D liegt nach der Umkehrung des Lehrsatzes des Thales auf zwei der drei Kreise, die je eine der Dreiecksseiten als Durchmesser haben. Sie sind innere Punkte der Strecken BC, AC bzw. AB, da $\triangle ABC$ spitzwinklig ist. Der Strahl FB verläuft folglich im Innern des Winkels $\angle EFD$.

Nun gilt $\angle AEB \cong \angle BDC$ (rechte Winkel), $\angle ABE \cong \angle DBC$ und mithin wegen des Satzes über die Winkelsumme im Dreieck $\angle BAE \cong \angle BCD$. (1)
Nach dem Peripheriewinkelsatz gilt:
$\angle BAE \cong \angle BFE$ (Bogen $\overparen{BE}$) sowie $\angle BCD \cong \angle BFC$ (Bogen $\overparen{BD}$). Hieraus sowie aus (1) folgt $\angle BFE \cong \angle BFD$, d. h. BF halbiert $\angle EFD$.

Aufgabe 130835:
Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ und $\overline{\angle ACB} = 90°$. Ein Halbkreis über einer Teilstrecke von AB sei so gelegen, dass die Seiten BC und AC auf Tangenten an diesem Halbkreis liegen und dieser BC und AC berührt.

Beweise, dass für seinen Radius r dann $\frac{1}{r} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ gilt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Der Mittelpunkt des Halbkreises sei M, die Seite BC berühre den Halbkreis in D, die Seite AC berühre ihn in E. Dann gilt:

$MD = r$ und $MD \parallel AC$ (rechte Winkel bei D bzw. C) und $ME = r$ und $ME \parallel BC$ (rechte Winkel bei E bzw. C). Folglich ist $MDCE$ ein Quadrat mit der Seitenlänge r. Nach dem Strahlensatz gilt nun:

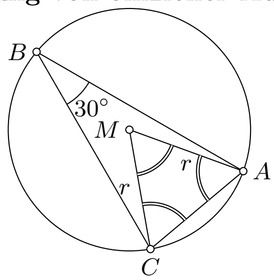
$$\frac{a}{r} = \frac{b}{b-r} \qquad \text{also} \qquad ab = br + ar$$

Daraus erhält man durch Division mit abr: $\frac{1}{r} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$, w. z. b. w.

Aufgabe 170831:
Es ist zu beweisen:

Wenn der Winkel $\angle CBA$ eines Dreiecks ABC die Größe 30° hat, dann hat die Seite AC des Dreiecks ABC die gleiche Länge wie der Radius des Umkreises k dieses Dreiecks!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



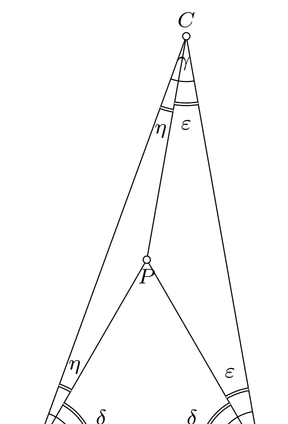
Es sei M der Mittelpunkt und r der Radius von k.
Der Winkel $\angle AMC$ hat nach dem Satz über Zentri- und Peripheriewinkel die Größe 60°. Hieraus, und da das Dreieck AMC wegen $AM = MC = r$ gleichschenklig ist, folgt nach dem Satz über die Summe der Innenwinkel im Dreieck $\angle MCA = \angle MAC = 60°$, d. h., das Dreieck AMC ist gleichseitig, und es ist $AC = CM = MA = r$, w. z. b. w.

Aufgabe 180831:
Im Inneren eines spitzwinkligen Dreiecks ABC, dessen Innenwinkel die Größen α, β, γ haben, sei ein Punkt P so gelegen, dass $\overline{PA} = \overline{PB} = \overline{PC}$ gilt. Die Größen der Winkel $\angle PAB$, $\angle PAB$ bzw. $\angle PAC$ seien mit δ, ε bzw. η bezeichnet.

a) Berechne δ, ε und η für den Fall, dass $\alpha = 70°$ und $\beta = 80°$ gilt!

b) Ermittle eine Formel für δ in Abhängigkeit von α, β und γ, ebenso eine Formel für ε und eine Formel für η!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



a) Nach dem Satz über die Innenwinkelsumme, angewandt auf das Dreieck ABC, gilt $\gamma = 180° - \alpha - \beta = 30°$. Folglich gilt

$$\delta = \frac{1}{2}(70° + 80° - 30°) = 60° \qquad ; \qquad \varepsilon = \frac{1}{2}(80° + 30° - 70°) = 20°$$

$$\eta = \frac{1}{2}(30° + 70° - 80°) = 10°$$

b) Da die Dreiecke ABP, BCP und CAP nach Voraussetzung gleichschenklig sind, gilt laut Basiswinkelsatz

$$\angle PBA = \angle PAB = \delta \qquad , \qquad \angle PCB = \angle PBC = \varepsilon$$

$$\angle PAC = \angle PCA = \eta$$

Da P im Inneren des Dreiecks liegt, folgt hieraus

$$\alpha = \delta + \eta \qquad , \qquad \beta = \delta + \varepsilon \qquad , \qquad \gamma = \varepsilon + \eta$$

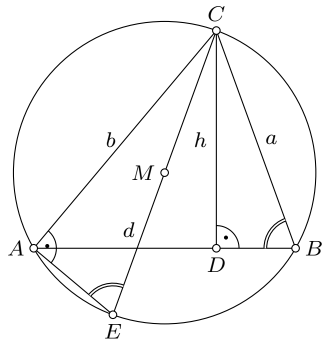
also $\alpha + \beta - \gamma = 2\delta$,

$$\delta = \frac{1}{2}(\alpha + \beta - \gamma) \quad , \quad \varepsilon = \frac{1}{2}(\beta + \gamma - \alpha) \quad , \quad \eta = \frac{1}{2}(\gamma + \alpha - \beta)$$

Aufgabe 180836:
Es sei $\triangle ABC$ ein spitzwinkliges Dreieck, d die Länge des Durchmessers seines Umkreises, a bzw. b die Längen der Seiten BC bzw. AC und schließlich h die Länge der auf AB senkrecht stehenden Höhe.

Beweise, dass dann stets $d = \frac{a \cdot b}{h}$ gilt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es sei M der Mittelpunkt des Umkreises, D der Fußpunkt der auf AB senkrecht stehenden Höhe und E der Schnittpunkt der Verlängerung von CM über M hinaus mit dem Kreis k.



Da $\triangle ABC$ spitzwinklig ist, liegt D zwischen A und B, und E ist von A und B verschieden. Die Dreiecke CBD und CEA sind einander ähnlich, da sie in den rechten Winkeln $\angle CDB$ und $\angle CAE$ (Satz des Thales) sowie in den Winkeln $\angle ABC$ und $\angle CEA$ (Peripheriewinkel über dem gleichen Bogen) übereinstimmen.

Ähnliche Dreiecke stimmen in den Verhältnissen gleichliegender Seiten überein, deshalb ist $d : a = b : h$, also $d = \frac{a \cdot b}{h}$.

Aufgabe 200835:
Zwei Strahlen s_1 und s_2, die von einem Punkt S ausgehen und miteinander einen rechten Winkel bilden, mögen von zwei zueinander parallelen Geraden g und h geschnitten werden. Die Gerade g schneide s_1 in A und s_2 in C, die Gerade h schneide s_1 in B und s_2 in D. Ferner gelte $\overline{SB} = 5$ cm, und der Flächeninhalt des Dreiecks SAC betrage genau 36% des Flächeninhalts des Dreiecks SBD.

Ermittle aus diesen Voraussetzungen die Länge der Strecke SA!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Der Flächeninhalt des Dreiecks SBD beträgt $\frac{SB \cdot SD}{2} = \frac{5\text{cm} \cdot SD}{2}$.
Der Flächeninhalt des Dreiecks SAC beträgt $\frac{SA \cdot SC}{2}$.

Nach Voraussetzung sind das 36 % des Flächeninhalts des Dreiecks SBD. Daher gilt

$$SA \cdot SC = \frac{36}{100} \cdot SD \cdot 5\text{cm} \tag{1}$$

Nun gilt nach einem Teil des Strahlensatzes $SC : SD = SA : 5$ cm, also

$$SC = \frac{SA \cdot SD}{5\text{cm}} \tag{2}$$

Setzt man SC aus (2) in (1) ein, so erhält man

$$\frac{SA^2 \cdot SD}{5\text{cm}} = \frac{36}{100} \cdot SD \cdot 5\text{cm}$$

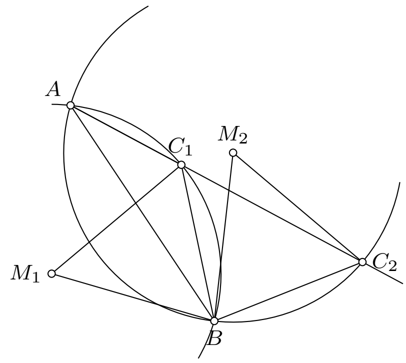
und daraus $SA^2 = 9$ cm^2 und mithin $SA = 3$ cm.

Aufgabe 200836:
Von zwei Dreiecken ABC_1 und ABC_2 werden die folgenden Eigenschaften (1), (2) und (3) vorausgesetzt:

$$(1) \quad \overline{\angle C_1AB} = \overline{\angle C_2AB} \quad ; \quad (2) \quad \overline{BC_1} = \overline{BC_2} \quad ; \quad (3) \quad \overline{AC_1} < \overline{AC_2}$$

Beweise aus dieser Voraussetzung, dass die Umkreise der Dreiecke ABC_1 und ABC_2 gleiche Radien haben!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Der Umkreismittelpunkt des Dreiecks ABC_1 sei M_1, der des Dreiecks ABC_2 sei M_2. Die Winkel $\angle C_1AB$ und $\angle C_2AB$ sind jeweils Peripheriewinkel in den Umkreisen.



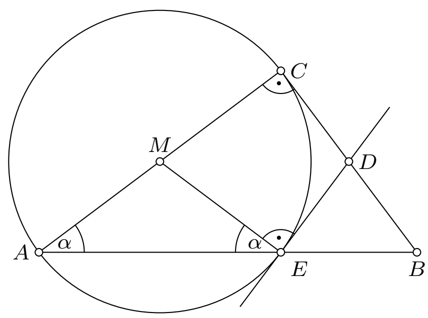
Wegen (1) sind sie gleichgroß; die zugehörigen Zentriwinkel $\angle C_1M_1E$ und $\angle C_2M_2B$ sind daher nach dem Satz über Zentri- und Peripheriewinkel ebenfalls gleichgroß.

Da die Dreiecke C_1M_1D und C_2M_2B beide gleichschenklig sind, in der Größe des Winkels an der Spitze und damit auch in der Größe ihrer Basiswinkel übereinstimmen, sind sie wegen (2) nach dem Kongruenzsatz wsw kongruent.
Folglich gilt $M_1B = M_2B$, d. h. die Radien der beiden Umkreise sind einander gleich, w. z. b. w.

Aufgabe 210832:
Es sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck mit C als Scheitel des rechten Winkels. Der Mittelpunkt der Seite AC sei M. Der Kreis k um M durch A schneide die Seite AB außer in A auch in E. Die Tangente an k in E schneide die Seite BC in D.

Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen das Dreieck BDE gleichschenklig ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Die Größe des Winkels $\angle CAB$ sei mit α bezeichnet. Das Dreieck AEM ist wegen $AM = EM$ gleichschenklig, und es gilt $\angle AEM = \alpha$. Der Winkel $\angle MED$ ist ein rechter Winkel, da die Tangente stets senkrecht auf dem Berührungsradius steht. Mithin ist

$$\angle DEB = 180° - 90° - \alpha = 90° - \alpha$$

Im Dreieck ABC ist wegen des Winkelsummensatzes $\angle ABC = 90° - \alpha$. Da also $\angle ABC = \angle DEB$ ist, und beide Winkel Innenwinkel des Dreiecks EBD sind, ist dieses gleichschenklig, w. z. b. w.

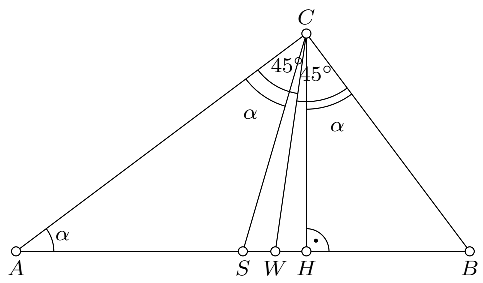
Alternativ-Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

Aus $ME = MC$ und $\angle MCD = \angle MED = 90°$ folgt: $MECD$ ist ein Drachenviereck, also gilt $ED = DC$ sowie $CE \perp MD$.
Da nach dem Satz von Thales, angewandt auf das Dreieck AEC, auch $CE \perp AE$ gilt, folgt $MD \parallel AB$. Hieraus und aus $AM = MC$ erhält man nach dem Strahlensatz $BD = DC$. Damit ist $ED = BD$ gezeigt.

Aufgabe 240834:
Es sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck mit C als Scheitel des rechten Winkels. In diesem Dreieck sei CS die Seitenhalbierende von AB, CW die Winkelhalbierende von $\angle ACB$ und CH die Höhe auf AB.

Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen stets $\overline{\angle SCW} = \overline{\angle WCH}$ gilt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es sei o. B. d. A. $BC \leq AC$, also $\alpha = \angle BAC \leq \angle ABC = 90° - \alpha$ (Winkelsumme im Dreieck ABC) und daher $\alpha \leq 45°$.
Dann ist $\angle BCH = 90° - \angle ABC$ (Winkelsumme im Dreieck BCH), also $\angle BCH = \alpha$.



Ferner liegt C nach der Umkehrung des Thalessatzes auf dem Kreis mit AB als Durchmesser. Der Mittelpunkt dieses Kreises ist S; daher gilt $AS = CS$ und folglich $\angle ACS = \angle CAS = \alpha$ (Basiswinkel im Dreieck ACS).

Weiterhin ist $\angle ACW = \angle BCW = 45°$, da CW Winkelhalbierende von $\angle ACB$ ist. Aus den somit gezeigten Beziehungen

$$\angle ACS = \alpha \leq 45° = \angle ACW$$

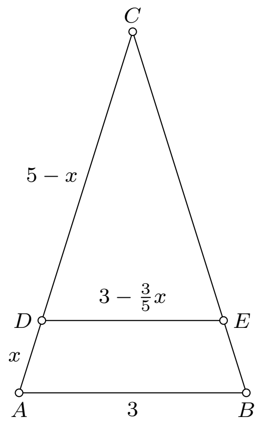
$$\angle BCH = \alpha \leq 45° = \angle BCW$$

folgt $\angle SCW = 45° - \alpha = \angle HCW$, w. z. b. w.

Aufgabe 240835:
Es sei ABC ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basis AB; deren Länge sei 3 cm, der Umfang des Dreiecks betrage 13 cm. Eine Parallele zu AB schneide die Strecke AC in einem Punkt D zwischen A und C sowie die Strecke BC in einem Punkt E. Der Umfang des Vierecks $ABED$ betrage 7,4 cm.

Beweise, dass durch diese Voraussetzungen die Länge der Strecke AD eindeutig bestimmt ist, und ermittle diese Länge!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Nach Voraussetzung gilt $AC = BC$ und $AC + BC + AB = 13$ cm sowie $AB = 3$ cm. Hieraus folgt $2 \cdot AC + 3$ cm $= 13$ cm, also $AC = 5$ cm.

Wegen $AC = BC$ gilt $\angle CAB = \angle CBA$. Da nach Voraussetzung $DE \parallel AB$ gilt (und D auf AC sowie E auf BC liegt), ist $ABED$ ein gleichschenkliges Trapez.
Hieraus folgt: Ist $AD = x$ cm die gesuchte Länge, so ist auch $BE = AD = x$ cm, und es gilt $CD = (5 - x)$ cm.

Wegen $DE \parallel AB$ folgt nach dem Strahlensatz $DE : AB = CD : CA$. Hieraus erhält man

$$DE = \frac{3(5-x)}{5}\text{cm} = \left(3 - \frac{3}{5}x\right)\text{ cm}$$

Nach Voraussetzung gilt ferner $AB + BE + DE + AD = 7{,}4$ cm, also

$$3 + x + \left(3 - \frac{3}{5}x\right) + x = 7{,}4 \qquad \Rightarrow \qquad x = 1$$

Damit ist gezeigt, dass durch die Voraussetzungen die Länge der Strecke AD eindeutig bestimmt ist; sie beträgt $AD = 1$ cm.

Aufgabe 260835:
Beweise folgende Sätze:

I) Wenn ABC ein Dreieck mit $\overline{AC} = \overline{BC}$ ist, dann ist die Seitenhalbierende von AB zugleich auch Winkelhalbierende von $\angle ACB$.

II) Wenn in einem Dreieck ABC die Seitenhalbierende von AB zugleich auch Winkelhalbierende von $\angle ACB$ ist dann gilt $\overline{AC} = \overline{BC}$.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

(I) Wenn $\overline{AC} = \overline{BC}$ (1) gilt und CD die Seitenhalbierende von AB ist, d. h. D (auf AB liegt und) $\overline{AD} = \overline{BD}$ (2) erfüllt, so folgt aus (1), (2) und $\overline{CD} = \overline{DC}$ (3) nach dem Kongruenzsatz sss, dass $\triangle ACD \cong \triangle BCD$ und damit $\overline{\angle ACD} = \overline{\angle BCD}$ gilt. Also ist CD auch die Winkelhalbierende von $\angle ACB$, w. z. b. w.

(Man kann auch CD als Winkelhalbierende voraussetzen und dann aus $\overline{\angle ACD} = \overline{\angle BCD}$, (1), (3) mit dem Kongruenzsatz sws auf (2) schließen.)

(II) In einem Dreieck ABC sei die Strecke CD (mit D auf AB) sowohl Seitenhalbierende als auch Winkelhalbierende; d. h. es werde $\overline{AD} = \overline{BD}$ (4) und $\overline{\angle ACD} = \overline{\angle BCD}$ (5) vorausgesetzt.

Es sei E derjenige Punkt, für den D der Mittelpunkt von CE ist. Dann halbieren in dem Viereck $AEBC$ die Diagonalen einander gegenseitig, also ist es ein Parallelogramm.
Daher gilt $\overline{AC} = \overline{BE}$ (6) und $\overline{\angle ACD} = \overline{\angle BED}$ (7) (Wechselwinkel an den geschnittenen Parallelen AC, BE).

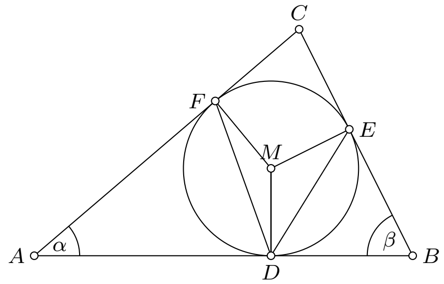
Aus (5) und (7) folgt $\overline{\angle BCD} = \overline{\angle BED}$ und daraus nach der Umkehrung des Basiswinkelsatzes $\overline{BC} = \overline{BE}$ (8). Aus (6) und (8) folgt $\overline{AC} = \overline{BC}$, w. z. b. w.

Aufgabe 280835:
Es sei ABC ein Dreieck, α sei die Größe des Winkels $\angle BAC$ und β die Größe des Winkels $\angle ABC$. Der Inkreis des Dreiecks berühre die Seite AB in D, die Seite BC in E und die Seite AC in F.

Ermittle die Größe des Winkels $\angle FDE$ in Abhängigkeit von α und β!

Hinweis: Der Inkreis eines Dreiecks ist derjenige Kreis, der alle drei Seiten des Dreiecks von innen berührt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Bezeichnet man den Mittelpunkt des Inkreises mit M, so sind DM und FM Radien. Die Geraden durch A und B bzw. durch A und C sind Tangenten an den Inkreis. Da Tangente und Berührungsradius aufeinander senkrecht stehen, gilt

$$\angle ADM = \angle AFM = 90° \qquad (1)$$

Nach dem Satz über die Summe der Innenwinkelgrößen im Viereck gilt für das Viereck $ADMF$:

$$\angle BAC + \angle ADM + \angle DMF + \angle AFM = 360°$$

Unter Verwendung von (1) und nach Definition von α folgt daraus

$$\angle DMF = 180° - \alpha \qquad (2)$$

Durch analoge Oberlegungen im Viereck $DBEM$ erhält man

$$\angle DME = 180° - \beta \qquad (3)$$

Für die Größe des gesuchten Winkels $\angle FED$ gilt

$$\angle FDE = \angle MDF + \angle MDE \qquad (4)$$

Der Winkel $\angle MDF$ ist Basiswinkel des gleichschenkligen Dreiecks DMF; wegen (2) gilt somit

$$\angle MDF = \frac{180° - (180° - \alpha)}{2} = \frac{\alpha}{2}$$

Analog folgt aus (3): $\angle MDE = \frac{\beta}{2}$. Somit erhält man aus (4): $\angle FDE = \frac{\alpha+\beta}{2}$.

Aufgabe 300835:

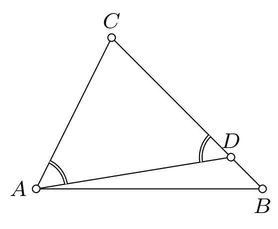
a) Beweise den folgenden Satz:

In jedem Dreieck liegt der größeren von zwei Seiten stets auch der größere Winkel gegenüber.

b) Gib an, ob die Umkehrung dieses Satzes gilt, und beweise die Richtigkeit deiner Angabe!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(a) In einem Dreieck ABC sei $BC > AC$ vorausgesetzt.
Dann gibt es zwischen B und C einen Punkt D mit $AC = DC$ (siehe Abbildung). Für ihn, gilt

$$\angle CAB > \angle CAD \qquad (1)$$



Ferner folgt nach dem Basiswinkelsatz

$$\angle CAD = \angle ADC \qquad (2)$$

und nach dem Außenwinkelsatz

$$\angle ADC = \angle ABC + \angle BAD > \angle ABC \tag{3}$$

Aus (1), (2) und (3) folgt $\angle CAB > \angle ABC$, w. z. b. w.

(b) Die Umkehrung lautet: In jedem Dreieck liegt dem größeren von zwei Winkeln stets auch die größere Seite gegenüber.

Auch diese Umkehrung gilt. Beweis:
In einem Dreieck ABC sei

$$\angle CAB > \angle ABC \tag{4}$$

vorausgesetzt. Wäre dann $BC = AC$, so folgte nach dem Basiswinkelsatz $\angle CAB = \angle ABC$; wäre $BC < AC$, so folgte nach dem unter (a) bewiesenen Satz $\angle CAB < \angle ABC$; beides im Widerspruch zu (4).
Damit ist bewiesen, dass aus (4) stets $BC > AC$ folgt.

Aufgabe 310836:
Von einem Dreieck ABC sind gegeben:

Die Seitenlänge $a = \overline{BC} = 845$ cm die Länge $h_a = \overline{AE} = 840$ cm der auf BC senkrechten Höhe und die Länge $h_c = \overline{CD} = 780$ cm der auf AB senkrechten Höhe.

Berechne für jedes Dreieck ABC, bei dem diese Längen auftreten, die Seitenlängen $c = \overline{AB}$ und $b = \overline{AC}$!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es gilt $a \cdot h_a = c \cdot h_c$; dies folgt aus den Gleichungen des Flächeninhalts von ABC ist (oder auch aus der Ähnlichkeit der Dreiecke BCD, BAE). Somit ergibt sich

$$c = \frac{a \cdot h_a}{h_c} = 910 \text{ cm}$$

Wegen $\angle BDC = 90°$ folgt nach dem Satz des Pythagoras

$$BD = \sqrt{a^2 - h_c^2} = 325 \text{ cm}$$

Je nachdem, ob D zwischen $A = A_1$ und B liegt oder B zwischen $A = A_2$ und D, erhält man weiter

$$A_1D = c - BD = 585 \text{ cm} \qquad \text{bzw.} \qquad A_2D = c + BD = 1235 \text{ cm}$$

Als gesuchte Seitenlänge b erhält man damit im 1.Fall

$$b_1 = A_1C = \sqrt{A_1D^2 + h_c^2} = 975 \text{ cm}$$

und im 2. Fall

$$b_2 = A_2C = \sqrt{A_2D^2 + h_c^2} = 1460{,}69 \text{ cm}$$

Aufgabe 320833:
Beweise die beiden folgenden Aussagen (a) und (b) für jedes spitzwinkliges Dreieck ABC mit einem im Innern des Dreiecks gelegenen Punkt P! Dabei seien folgende Bezeichnungen verwendet:

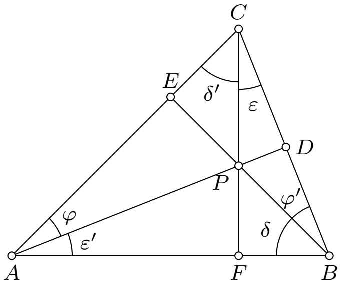
Winkel	Größe
$\angle PBA$	δ
$\angle PCA$	δ'

Winkel	Größe
$\angle PCB$	ε
$\angle PAB$	ε'

Winkel	Größe
$\angle PAC$	φ
$\angle PBC$	φ'

a) Wenn $\delta = \delta$ und $\varepsilon = \varepsilon'$ und $\varphi = \varphi'$ gelten, dann ist P der Höhenschnittpunkt des Dreieck ABC.
b) Wenn P der Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABC ist dann gelten die Gleichungen $\delta = \delta'$ und $\varepsilon = \varepsilon'$ und $\varphi = \varphi'$.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Die Verlängerung von AP schneide BC in D, die Verlängerung von BP schneide CA in E, die Verlängerung von CP schneide AB in F (siehe Abbildung).

(a) Aus dem Außenwinkelsatz, angewandt auf die Dreiecke BFC und AFC, sowie aus den vorausgesetzten Gleichungen folgt

$$\angle AFC = \delta + \varphi' + \varepsilon = \delta' + \varphi + \varepsilon' = \angle BFC$$

Ferner gilt, da $\angle AFC$, $\angle BFC$ Nebenwinkel voneinander sind, $\angle AFC + \angle BFC = 180°$; daher folgt $\angle AFC = \angle BFC = 90°$, also ist CF im Dreieck ABC die zu AB senkrechte Höhe. Entsprechend folgt, dass AD und BE die anderen Höhen sind und damit P der Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABC ist.

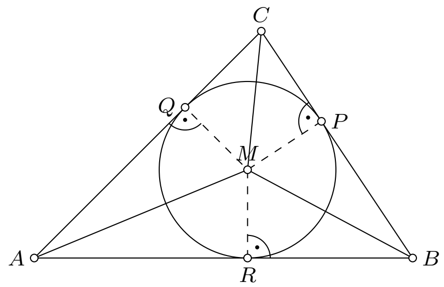
(b) Die Dreiecke ABE und ACF stimmen in ihrem Innenwinkel bei A überein, ferner ist nach Voraussetzung $\angle AEB = \angle AFC = 90°$. Daher folgt nach dem Innenwinkelsatz: Es gilt auch $\delta = \delta'$. Entsprechend folgen die anderen behaupteten Gleichungen.

Aufgabe 320835:
Beweise, dass für jedes Dreieck ABC die folgende Aussage gilt!

Das Verhältnis des Flächeninhalts des Dreiecks ABC zum Flächeninhalt seines Inkreises ist gleich dem Verhältnis des Umfangs des Dreiecks ABC zum Umfang seines Inkreises.

Hinweis: Als Inkreis eines Dreiecks bezeichnet man denjenigen Kreis, der alle drei Seiten dieses Dreiecks von Innen berührt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Die Seitenlängen des Dreiecks seien mit $a = BC$, $b = CA$ und $c = AB$ bezeichnet, der Inkreis habe den Mittelpunkt M, er berühre die Seiten BC, CA, AB in P, Q bzw. R (siehe Abbildung).

Der Radius des Inkreises ist dann $r = MP = MQ = MR$, ferner gilt $MP \perp BC$, $MQ \perp CA$, $MR \perp AB$. Daher haben die Dreiecke BCM, CAM, ABM die Flächeninhalte

$$F_1 = \frac{1}{2}ar, \qquad F_2 = \frac{1}{2}br, \qquad F_3 = \frac{1}{2}cr$$

Da M im Innern des Dreiecks ABC liegt, hat dieses somit den Flächeninhalt

$$F_D = F_1 + F_2 + F_3 = \frac{1}{2}(a+b+c)$$

der Inkreis hat den Flächeninhalt $F_K = \pi r^2$. Diese Flächeninhalte bilden also das Verhältnis

$$F_D : F_K = (a+b+c) : (2\pi r)$$

Damit ist die zu beweisende Aussage gezeigt; denn $a+b+c$ ist der Umfang des Dreiecks, und $2\pi r$ ist der Umfang des Inkreises.

Aufgabe 330833:
Zu jedem Dreieck ABC seien folgende Bezeichnungen eingeführt:

Die Gerade durch A und B sei u,
die Gerade durch B und C sei v,
die Gerade durch C und A sei w,
bei der Spiegelung an v gehe u in die Gerade p über, bei der Spiegelung an w gehe u in die Gerade q über.

Wie üblich seien die Größen der Innenwinkel $\angle BAC$ und $\angle ABC$ mit α bzw. β bezeichnet. Für die folgenden Aufgaben werde stets $\alpha = 55°$ vorausgesetzt.

a) Unter welchem Winkel schneiden die Geraden p und q einander, wenn $\beta = 75°$ ist?

b) Wie groß muss β sein, damit p und q aufeinander senkrecht stehen?

c) Gib einen Wert β so an, dass sich p und q als zueinander parallel nachweisen lassen!

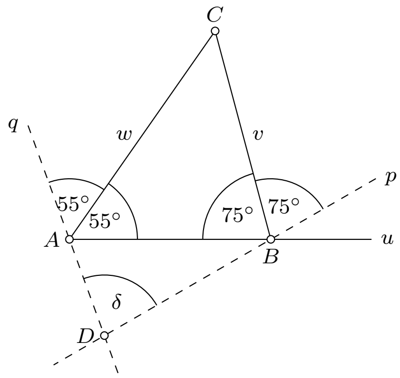
d),e) Stelle eine Zeichnung her, in der p und q einander in einem Punkt schneiden, der auf der selben Seite der Geraden u liegt wie C; wähle dabei das Dreieck ABC

d) mit spitzen Innenwinkel bei B.

e) mit stumpfen Innenwinkel bei B.

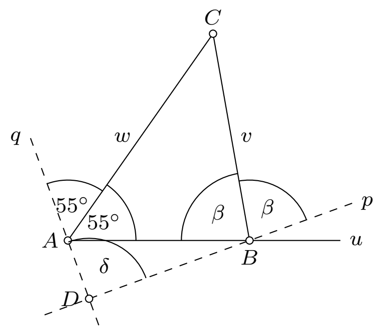
(Zu d) und e) wird keine Begründung verlangt.)

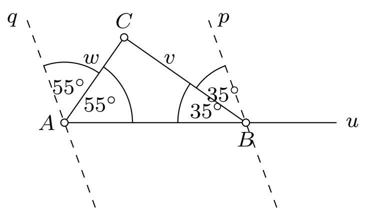
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



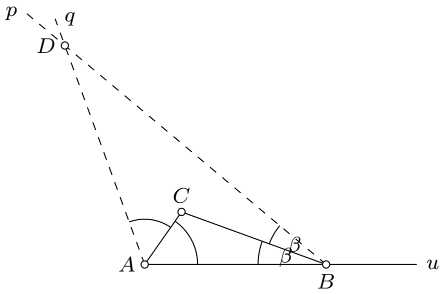
a) Man erhält p, indem man an die Strecke BC im Punkt B nach derjenigen Seite, auf der A nicht liegt, nochmals den Winkel der Größe $\beta = 75°$ anträgt.
Entsprechend erhält man q durch nochmaliges Antragen von 55° an AC (siehe Abbildung).
Für den Schnittpunkt D von p und q gilt damit $\angle ABD = 180° - 2 \cdot 75° = 30°$ und $\angle BAD = 180° - 2 \cdot 55° = 70°$.
Nach dem Innenwinkelsatz für Dreieck ABD folgt: p und q schneiden sich unter einem Winkel der Größe $\delta = \angle ADB = 180° - 30° - 70° = 80°$.

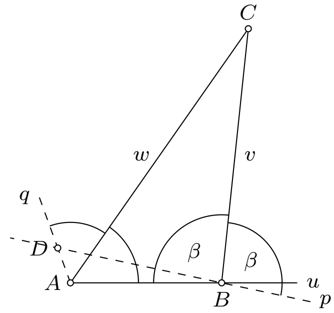
b) Wie in a) ergibt sich $\angle ABD = 180° - 2\beta$, $\angle BAD = 70°$, also $\delta = 180° - (180° - 2\beta) - 70°$ (siehe 2. Abbildung).
Da nun $\delta = 90°$ gefordert wird, folgt $2\beta = 90° + 70°$, also $\beta = 80°$.





c) Für $\beta = 35°$ bilden p und q jeweils nach der Seite hin, auf der C liegt, mit u Winkel der Größe $2 \cdot 35°$ bzw. $2 \cdot 55°$ (siehe 3. Abbildung).
Da diese sich zu 180° ergänzen, sind p und q für den genannten Wert $\beta = 35°$ als zueinander parallel nachgewiesen.
d),e) Die Abbildungen zeigen je eine Zeichnung der verlangten Art.





Aufgabe 330836:

a) Berechne die Seitenlänge $b = \overline{AC}$ eines Dreiecks ABC, von dem die Seitenlänge $c = \overline{AB} = 6$ cm, die Länge $h_c = \overline{CH_c} = 5$ cm der auf AB senkrechten Höhe und die Länge $h_b = \overline{BH_b} = 2$ cm der auf AC senkrechten Höhe gegeben sind!

b) Beweise, dass es kein Dreieck ABC gibt, in dem die drei Höhenlängen $h_a = 4$ cm (Länge der auf BC senkrechten Höhe), $h_b = 2$ cm und $h_c = 5$ cm vorkommen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Für den Flächeninhalt F des Dreiecks ABC gilt

$$F = \frac{1}{2}b \cdot h_b = \frac{1}{2}c \cdot h_c \qquad \text{also} \qquad b = \frac{c \cdot h_c}{h_b} = 15 \text{ cm}$$

b) Angenommen, es gäbe ein solches Dreieck. Für seinen Flächeninhalt F müsste dann

$$F = \frac{1}{2}a \cdot h_a = \frac{1}{2}b \cdot h_b = \frac{1}{2}c \cdot h_c \qquad \text{also}$$

$$a = \frac{2F}{4 \text{ cm}} \qquad ; \qquad b = \frac{2F}{2 \text{ cm}} \qquad ; \qquad c = \frac{2F}{5 \text{ cm}}$$

gelten. Daraus folgte

$$a + c = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) \frac{2F}{1 \text{ cm}} = \frac{9}{20} \cdot \frac{2F}{1 \text{ cm}} < \frac{2F}{2 \text{ cm}} = b$$

im Widerspruch zur Dreiecksungleichung. Damit ist die eingangs gemachte Annahme als falsch nachgewiesen.

Aufgabe 330845:
Für jedes rechtwinklige Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei C bezeichne D den Schnittpunkt von AB mit der Winkelhalbierenden durch C. Der Abstand, den der Punkt D von einer der beiden Katheten hat, werde mit t bezeichnet. Die Längen der Katheten seien a und b.

Beweise, dass für jedes rechtwinklige Dreieck mit diesen Bezeichnungen die Gleichung $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{t}$ gilt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Für jedes rechtwinklige Dreieck gilt mit den eingeführten Bezeichnungen:
Jeder Punkt der Winkelhalbierenden des rechten Winkels, also auch der Punkt D, hat gleichgroße Abstände zu den beiden Katheten. Daher haben die beiden Dreiecke BCD und ACD die Flächeninhalt $\frac{1}{2}a \cdot t$ bzw. $\frac{1}{2}b \cdot t$.

Aus diesen beiden Dreiecken ist das Dreieck ABC zusammengesetzt. Da es rechtwinklig ist, also die Höhe auf einer Kathete die andere Kathete ist, ist sein Flächeninhalt $\frac{1}{2}a \cdot b$. Daher gilt $a \cdot t + b \cdot t = a \cdot b$; Division durch $a \cdot b \cdot t$ ergibt, wie behauptet

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{t}$$

Aufgabe 340836:

a) Beweise, dass für jedes Dreieck die folgende Aussage gilt!

Sind a und b zwei seiner Seitenlängen, so ist sein Flächeninhalt nicht größer als $\frac{a \cdot b}{2}$.

b) Beweise, dass für jedes Viereck $ABCD$ die folgende Aussage gilt!

Sind $a = \overline{AB}$, $b = \overline{BC}$, $c = \overline{CD}$ und $d = \overline{DA}$ seine Seitenlängen, so ist sein Flächeninhalt nicht größer als

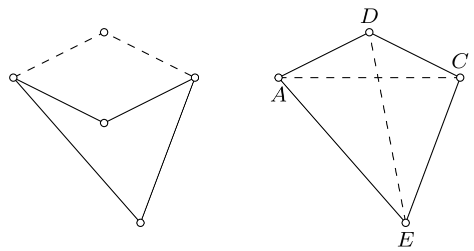
$$\frac{(a+c) \cdot (b+d)}{4}.$$

Hinweis: Beachte, dass die zu beweisenden Aussagen sich auch auf stumpfwinklige Dreiecke und auch auf Vierecke mit einer einspringenden Ecke beziehen! (Sogenannte „überschlagene“ Vierecke, bei denen zwei Gegenseiten einander schneiden, sollen allerdings nicht zugelassen werden.)

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

(a) Es sei ABC ein beliebiges Dreieck; die auf BC senkrechte Höhe habe den Fußpunkt D. Für $a = BC$, $b = AC$, $h = AD$ und den Flächeninhalt F des Dreiecks ABC gilt dann:
Ist $D = C$, so ist $h = b$; ist aber $D \neq C$ so ist ACD ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel bei D, also gilt dann $h < b$ (siehe Abbildung).
Damit folgt in jedem Fall $F = \frac{a \cdot h}{2} \leq \frac{a \cdot b}{2}$, w. z. b. w.

(b) Zu jedem Viereck mit einer einspringenden Ecke gibt es ein Viereck ohne einspringende Ecken, das dieselben Seitenlängen wie das ursprüngliche Viereck hat (siehe Abbildung); es hat größeren Flächeninhalt als das ursprüngliche.



Daher genügt es, zum Beweis ein Viereck $ABCD$ ohne einspringende Ecken vorauszusetzen. Für den Flächeninhalt F des Vierecks $ABCD$ und die Flächeninhalte F_1, F_2, F_3, F_4 der Dreiecke ABC, BCD, CDA, DAB gilt $F = F_1 + F_3 = F_2 + F_4$ sowie nach (a)

$$F_1 \leq \frac{ab}{2} \quad , \quad F_2 \leq \frac{bc}{2} \quad , \quad F_3 \leq \frac{cd}{2} \quad , \quad F_4 \leq \frac{da}{2}$$

Daraus folgt

$$2F = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 \geq \frac{ab}{2} + \frac{bc}{2} + \frac{cd}{2} + \frac{da}{2}$$

also

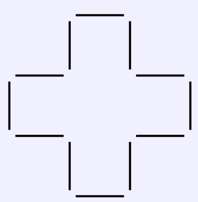
$$F \leq \frac{(a+c)(b+d)}{4}$$

w. z. b. w.

II.II. Vier-, Vielecke

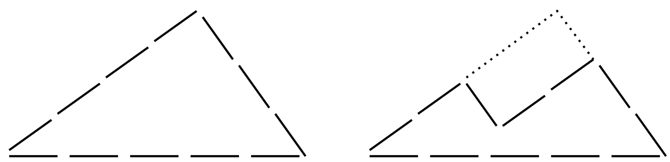
I. Runde 1

Aufgabe V00807:



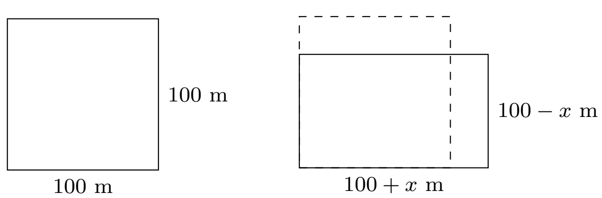
Zwölf Streichhölzchen, in der abgebildeten Form aufgelegt, schließen eine Fläche von fünf Quadraten ein, deren Seitenkante einer Streichholzlänge entspricht.
Die Streichhölzer sind so umzulegen, dass eine Fläche entsteht, die nur vier Quadraten mit gleicher Kantenlänge entspricht!
(Streichhölzer innerhalb der verlangten neuen Figur dürfen nicht gelegt werden!)

Lösung von Steffen Polster:
Legt man die Streichhölzer wie im linken Bild um, so entsteht ein Dreieck mit der Fläche $F = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6$ Einheiten. Verschiebt man 3 Streichhölzer wie im rechten Bild, ergibt sich $F = 6 - 2 = 4$ Einheiten, d. h. die gesuchte Figur.



Aufgabe V00809:
Für die Einzäunung eines Stückes Weideland, das Rechteckform erhalten soll, stehen der LPG Neues Leben 400 m Weidezaun zur Verfügung.
Auf einer Arbeitsbesprechung wird der Vorschlag gemacht, die Seiten des Rechtecks von möglichst gleicher Länge zu wählen, da das Quadrat von allen Rechtecken mit gleichem Umfang den größten Flächeninhalt hat.
Versuche, diese Behauptung zu beweisen! Wie steht es mit dem Flächeninhalt, wenn die Weide kreisförmig angelegt werden würde?

Lösung von Steffen Polster:



Wird mit den 400 m Zaun ein Quadrat abgegrenzt, so hat jede Quadratseite die Länge 100 m und damit das Quadrat den Flächeninhalt $F_Q = 100^2 = 10000$ m^2.

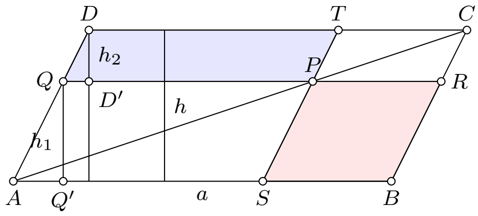
Um ein Rechteck zu umzäunen, das kein Quadrat ist, müssen zwei Seiten des Quadrates um x verlängert und zwei Seiten um x verkürzt werden. (rechte Abbildung)

Der Flächeninhalt des Rechtecks ist damit $F_R = (100 - x) \cdot (100 + x) = 10000 - x^2$ m^2. Für jedes $x > 0$ ist dieser Wert aber kleiner, d. h. $F_R < F_Q$, was zu zeigen war.

Wird ein Kreis umzäunt, so ergibt sich bei 400 m Umfang ein Radius $r = \frac{400m}{2\pi}$ und somit eine Fläche von $F_K = \pi \left(\frac{400m}{2\pi}\right)^2 \approx 12700$ m^2. Damit ist der Inhalt einer Kreisfläche größer als der Inhalt eines Quadrates mit dem gleichen Umfang.

Aufgabe V00811:
Zeichne ein Parallelogramm und in ihm eine Diagonale.
Wähle auf der Diagonalen einen beliebigen Punkt und ziehe durch ihn die Parallelen zu den Parallelogrammseiten. Dadurch entstehen vier kleine Parallelogramme.
Vergleiche die Flächen der beiden Parallelogramme, die nicht von der Diagonale geschnitten werden und beweise das Ergebnis des Vergleichs!

Lösung von Steffen Polster:
Das Parallelogramm $ABCD$ habe die Grundseite a und die Höhe h. Das blaue und das rote Parallelogramm sind zu vergleichen.
Wenn P die Diagonale AB im Verhältnis x teilt, d. h.



$$\frac{\overline{AP}}{\overline{AC}} = x$$

so ist die Strecke nach Strahlensatz $\overline{QP} = x \cdot \overline{AB} = x \cdot a$.
Daraus folgt für $\overline{PR} = \overline{SB} = (1-x) \cdot a$.

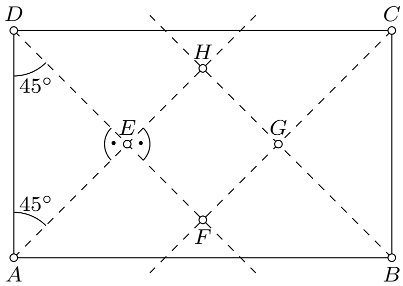
Ebenso nach Strahlensatz folgt für die Höhen $h_1 = x \cdot h$ und $h_2 = (1-x) \cdot h$. Für die Flächen der zwei Teilparallelogramme wird

$$F_{SBRP} = (1-x)a \cdot xh \qquad ; \qquad F_{QPTD} = xa \cdot (1-x)h$$

Die Flächeninhalte beider Parallelogramm sind unabhängig von der Lage von P gleich, ihr Verhältnis ist 1:1.

Aufgabe V00812:
Beweise, dass die vier Winkelhalbierenden eines Rechtecks ein Quadrat begrenzen!

Lösung von Steffen Polster:
Anmerkung: Die Aufgabenstellung ist nicht exakt. Da jedes Quadrat ein Rechteck ist, bei dem sich die Winkelhalbierenden im Quadratmittelpunkt schneiden und kein Viereck bilden, muss vorausgesetzt, dass das Rechteck kein Quadrat ist.



Da die Innenwinkel eines Rechtecks rechte Winkel sind, bilden die Winkelhalbierenden die gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecke AED, ABH, BCG und CDF. Das Viereck $EFGH$ besitzt damit 4 rechte Innenwinkel und ist damit Rechteck.

Außerdem liegen dann E und G auf der waagerechten Mittellinie des Rechtecks sowie F und H auf der senkrechten. (Symmetrie des Rechtecks)

Beide Mittellinien stehen senkrecht zueinander, wodurch die Diagonalen ebenfalls senkrecht zueinander stehen. Ein Viereck mit rechten Innenwinkeln und senkrecht aufeinander stehenden Diagonalen ist ein Quadrat. w. z. b. w.

Aufgabe 020813:
Im Berliner Stadtzentrum wird das neue Hotel Berolina gebaut. Es ist an der Vorderfront mit 286 Außenwandplatten verkleidet. Für jedes der zehn Obergeschosse werden 26 nebeneinanderliegende Platten benötigt.
Die beiden äußeren Platten haben eine Fläche von je 6,73 m^2, alle anderen 24 Platten eines Geschosses eine Fläche von je 6,37 m^2. Die Plattenhöhe beträgt 2,74 m.

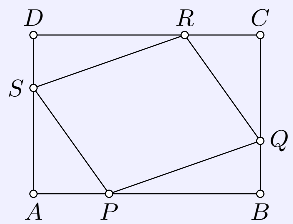
Den oberen Abschluss der Fassade bilden als Verkleidung des Dachgeschosses ebenfalls 26 Platten. Von diesen Platten haben die äußeren eine Fläche von je 3,73 m^2. Die Höhe aller dieser Platten beträgt 1,52 m.

Es sind zu berechnen: a) die Höhe der Fassade, b) die Länge der Fassade!

Anmerkung: Zwischen je zwei Platten verbleibt stets eine Fuge von 5 cm Breite. Zur Höhe ist außerdem noch die der Empfangshalle mit 10 m hinzuzufügen.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Fassade ist $10m + 10 \cdot 2{,}74m + 1{,}52m + 10 \cdot 0{,}05m = 39{,}42m$ hoch.
Ihre Länge beträgt $2 \cdot (6{,}73 : 2{,}74)m + 24 \cdot (6{,}37 : 2{,}74)m + 25 \cdot 0{,}05m \approx 61{,}85m$.

Aufgabe 020816:



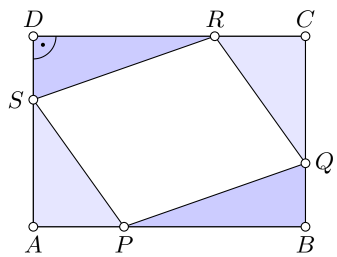
Gegeben sei ein Rechteck $ABCD$, dessen Seiten wie in der Abbildung sämtlich im Verhältnis 1 : 2 geteilt seien. Wir nennen die Teilpunkte P, Q, R, S und verbinden sie fortlaufend miteinander.

a) Führe diese Konstruktion für das Rechteck mit den Seiten $AB =$ 10 cm und $BC = 7$ cm durch!

b) Was für ein Viereck ist das Viereck $PQRS$? (Beweis!)

c) Wie verhält sich der Flächeninhalt des Vierecks $PQRS$ zu dem des Rechtecks $ABCD$? Gilt das Ergebnis auch für andere derartig geteilte Rechtecke? (Begründung!)

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



a) Siehe nebenstehendes Bild (nicht maßstabsgerecht).

b) *Behauptung:* $PQRS$ ist ein Parallelogramm.

Beweis: Wegen $AB = CD$, $BC = DA$ und gleicher Teilungsverhältnisse auf den Seiten gilt $AS = CQ$, $AP = CR$, $BP = DR$ sowie $BQ = DS$. Nach Kongruenzsatz SWS ist $\triangle APS \cong \triangle CRQ$ und $\triangle BQP \cong \triangle DSR$. Also ist $PQ = RS$, $QR = SP$ und somit $PQRS$ ein Parallelogramm. $\square$

c) Mit $a \equiv AB = CD$ und $b \equiv BC = DA$ ist $[APS] = [CRQ] = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{3} \cdot \frac{2b}{3} = \frac{1}{9}ab$ sowie $[BQP] = [DSR] = \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{3} \cdot \frac{2a}{3} = \frac{1}{9}ab$, mithin

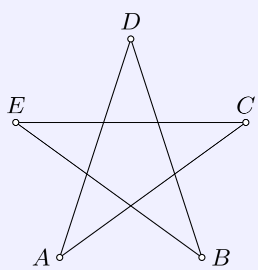
$$[PQRS] = [ABCD] - ([APS] + [CRQ] + [BQP] + [DSR]) = ab - \frac{4}{9}ab = \frac{5}{9}ab.$$

Das Verhältnis der Flächeninhalte beträgt somit stets $\frac{5}{9}$, unabhängig von den konkreten Abmessungen des Rechtecks.

Aufgabe 080811:

Die Abbildung zeigt einen fünfstrahligen Stern, bei dem die Punkte A, B, C, D, E Eckpunkte eines regelmäßigen Fünfecks sind.

Ermittle die Größe des Winkels $\angle ACE$!

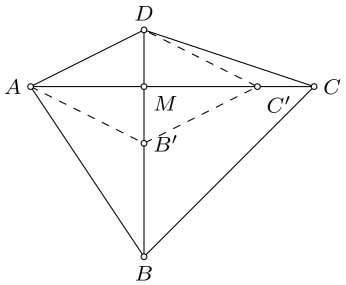


Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es sei M der Umkreismittelpunkt des Fünfecks $ABCDE$. Der Winkel $\angle ACE$ ist ein Peripheriewinkel zum Zentriwinkel $\angle AME$ und deshalb halb so groß wie dieser.
Weil das Fünfeck regelmäßig ist, ist dieser Zentriwinkel 72° groß. Also hat der Winkel $\angle ACE$ eine Größe von 36°.

Aufgabe 090813:
a) Beweise folgenden Satz:
Wenn in einem (nicht überschlagenen) ebenen Viereck alle Seiten gleichlang sind (Rhombus), dann stehen die Diagonalen senkrecht aufeinander.

b) Untersuche, ob der Satz umkehrbar ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Voraussetzung: $ABCD$ sei ein ebenes Viereck mit $AB = BC = CD = DA$.
Behauptung: $AC \perp DB$.
Beweis:
Wegen $AB = CB$ liegt B auf der Mittelsenkrechten von AC, wegen $AD = CD$ ebenso auch D. Daher ist die Gerade durch B und D die Mittelsenkrechte von AC, insbesondere gilt also $BD \perp AC$.

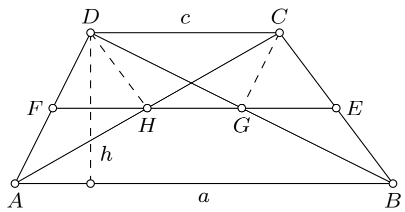


b) Die formale Umkehrung lautet: Wenn in einem Viereck die Diagonalen senkrecht aufeinander stehen, dann sind alle Seiten gleichlang (Rhombus).
Die formale Umkehrung ist kein (wahrer) Lehrsatz, wie z. B. das folgendermaßen gebildete Viereck ABCD zeigt (siehe Abbildung).
Es sei $AB'C'D$ ein Rhombus mit dem Mittelpunkt M. Ferner sei B ein von B' verschiedener Punkt auf dem von M durch B' gehenden Strahl. Schließlich sei C irgendein Punkt auf dem von M durch C' gehenden Strahl.
Dann ist $ABCD$ ein Viereck, in dem die Diagonalen aufeinander senkrecht stehen; aber es gilt $AB \neq AD$. Denn wäre $AB = AD$, so folgte $\triangle ABM \cong \triangle ADM$ (ssw mit rechtem, also der größten Seite gegenüberliegendem Winkel), also $MB = MD = MB'$ im Widerspruch zu $B \neq B'$.

Aufgabe 130814:
In einem Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ und $\overline{AB} > \overline{CD}$ seien $\overline{AB} = a$, $\overline{CD} = c$ und der Abstand h der Parallelseiten gegeben. Die Diagonalen AC bzw. BD schneiden die Mittelparallele FE des Trapezes in H bzw. G.

Ermittle den Flächeninhalt A_T des Trapezes $ABGH$!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Der Flächeninhalt A_T des Trapezes $ABGH$ ist gleich der Differenz aus dem Flächeninhalt des Trapezes $ABEF$ und der Summe der Flächeninhalte der Dreiecke AHF und BEG.

Nun ist der Flächeninhalt des Dreiecks CDA gleich dem des Dreiecks CDB, nämlich gleich $\frac{c \cdot h}{2}$. Der Flächeninhalt des Dreiecks CDH ist gleich dem des Dreiecks CDG, nämlich halb so groß wie der des

Dreiecks CDA, also gleich $\frac{c \cdot h}{4}$.

Genau so groß ist dann aber auch der Flächeninhalt jedes der Dreiecke DAH und BCG.
Schließlich ist der Flächeninhalt des Dreiecks AHF und ebenso der des Dreiecks BEG (wegen $AF = FD$ bzw. $BE = EC$) halb so groß wie der des Dreiecks DAH, also gleich $\frac{c \cdot h}{8}$.
Der Flächeninhalt des Trapezes $ABEF$ beträgt

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a+c}{2}+a\right)\cdot\frac{h}{2}=\frac{h}{8}(3a+c)$$

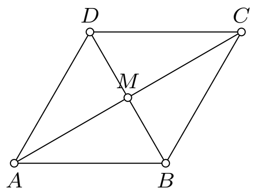
Folglich erhält man für den Flächeninhalt des Trapezes $ABGH$

$$A_T=\frac{h}{8}(3a+c)-2\cdot\frac{c\cdot h}{8}=\frac{h}{8}(3a-c)$$

Aufgabe 210813:
a) Beweise den folgenden Satz:
Wenn alle vier Seiten eines Vierecks dieselbe Länge haben, dann stehen die Diagonalen des Vierecke aufeinander senkrecht.

b) Formuliere die Umkehrung dieses Satzes und untersuche, ob sie auch gilt!

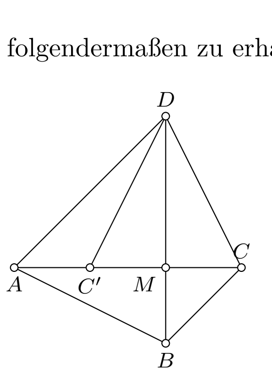
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Zu beweisen ist: Wenn $ABCD$ ein Viereck ist mit $AB = BC = CD = DA$, dann folgt $AC \perp BD$.



Beweis: Es sei M der Mittelpunkt von AC. Dann ist BM Seitenhalbierende in dem gleichschenkligen Dreieck ABC, also auch Höhe, d. h., es gilt $AC \perp BM$. Ebenso folgt $AC \perp DM$. Daher enthält die Senkrechte in M auf AC beide Strecken BM und DM, d. h., es gilt $AC \perp BD$.

b) Die Umkehrung lautet: Wenn die Diagonalen eines Vierecks aufeinander senkrecht stehen, dann haben alle vier Seiten des Vierecks gleiche Länge.

Diese Umkehrung gilt nicht, wie z. B. ein folgendermaßen zu erhaltendes Viereck zeigt:



Auf einer Geraden g wähle man drei Punkte A,M,C in dieser Reihenfolge mit $AM > MC$. Auf der Senkrechten in M auf AC wähle man zwei Punkte B,D (so, dass M zwischen B und D liegt).
Dann ist $ABCD$ ein Viereck mit $AC \perp BD$. Wegen $AM > MC$ gilt aber $DA > DC$.

Aufgabe 230814:

a) Es sei $ABCD$ ein Quadrat mit der Seitenlänge $a = 12$ cm.

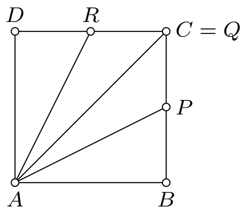
Gesucht sind drei Punkte F, Q, R, die so auf der Berandung dieses Quadrates liegen, dass die Strecken AP, AQ, AR das Quadrat in vier flächengleiche Teile zerlegen.

Gib solche Punkte P, Q, R an und weise nach, dass sie die geforderte Eigenschaft haben!

b) Ermittle entsprechend zwei Punkte S, T auf der Berandung des Quadrats $ABCD$, so dass die Strecken AS, AT dieses Quadrat in drei flächengleiche Teile zerlegen!

c) Untersuche die Möglichkeit einer entsprechenden Zerlegung eines Quadrats (mit der Seitenlänge a) in n flächengleiche Teile!

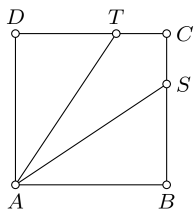
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Sei P der Mittelpunkt der Seite BC, sei Q gleich dem Eckpunkt C und sei R der Mittelpunkt der Seite CD des Quadrats $ABCD$. Dann gilt $BP = PQ = QR = RD$.



Da die Dreiecke BPA und PQA (wegen $\angle ABP = \angle ABQ = 90°$) die Höhe AB gemeinsam haben, da die Dreiecke QRA und RDA die Höhe AD gemeinsam haben und da $AB = AD$ (Seitenlängen eines Quadrats) gilt, stimmen die genannten vier Dreiecke in der Länge einer Grundseite und der Länge der zugehörigen Höhe überein und sind daher inhaltsgleich.

Damit ist nachgewiesen, dass die angegebenen Punkte P, Q, R die geforderte Eigenschaft haben.

b) Sei S derjenige Punkt auf der Strecke BC, für den $BS = 8$ cm gilt. Sei T derjenige Punkt auf der Strecke CD, für den $TD = 8$ cm gilt.



Wegen $AB = AD = 12$ cm haben dann die beiden rechtwinkligen Dreiecke BSA und TDA den gleichen Flächeninhalt von 48 cm^2. Der Inhalt des Quadrate $ABCD$ ist wegen $AB = 12$ cm gleich 144 cm^2.

Wegen $144 - 2 \cdot 48 = 48$ hat daher die Fläche $ASCT$ den gleichen Inhalt wie jedes der beiden Dreiecke ABS und ATD. Damit ist nachgewiesen, dass S und T die geforderte Eigenschaft haben.

c) Wir unterscheiden die beiden Fälle, dass n eine gerade bzw. eine ungerade natürliche Zahl ist.

c1) Sei $n = 2k$ mit $k = 1,2,3,....$

Wir zerlegen die Seite BC und die Seite CD des Quadrats $ABCD$ (mit der Seitenlänge a) durch die Punkte $P_1,P_2,...,P_{k-1}$ bzw. $R_1,R_2,...,R_{k-1}$ jeweils in k kongruente Teilstrecken mit der gemeinsamen Länge $\frac{a}{k}$.

Verbindet man A mit diesen Punkten sowie mit C, dann wird $ABCD$ in $2k$ Teildreiecke zerlegt. Genau k von diesen Teildreiecken haben die Höhe AB gemeinsam, die restlichen k Teildreiecke haben die Höhe AD gemeinsam; ferner gilt $AB = AD$.
Folglich stimmen alle diese $2k$ Teildreiecke in der Länge einer Grundseite sowie in der Länge der zugehörigen Höhe überein und sind somit inhaltsgleich.

Damit ist gezeigt, dass auf diese Weise eine Zerlegung des Quadrate in $2k$ flächengleiche Teile gefunden wurde.

c2) Sei $n = 2k + 1$ mit $k = 1,2,3,...$.
Wir wählen auf der Seite BC die Punkte $S_1,S_2,...,S_k$ so, dass

$$AS_1 = S_1S_2 = ... = S_{k-1}S_k = \frac{2a}{2k+1} \qquad \text{und} \qquad S_kC = \frac{a}{2k+1}$$

gilt. Dies ist wegen $BC = a$ und

$$k \cdot \frac{2a}{2k+1} + \frac{a}{2k+1} = \frac{(2k+1)a}{2k+1} = a$$

möglich. Analog wählen wir auf der Seite DC die Punkte $T_1,T_2,...;T_k$ so, dass $T_kC = \frac{a}{2k+1}$ gilt.

Verbindet man A mit diesen Punkten, dann wird $ABCD$ in $2k$ Teildreiecke und das Viereck AS_kCT_k zerlegt.
Wie oben kann man zeigen, dass diese $2k$ Dreiecke inhaltsgleich sind. Laut Inhaltsformel beträgt dieser gemeinsame Inhalt

$$A_\triangle = \frac{1}{2} \cdot \frac{2a}{2k+1} \cdot a = \frac{a^2}{2k+1}$$

Da die Summe der Inhalte der $2k$ Dreiecke und des Vierecks gleich dem Inhalt des Quadrats sein muss, erhält man für den Inhalt des Vierecks

$$A_\square = a^2 - 2k \cdot \frac{a^2}{2k+1} = \frac{a^2}{2k+1}$$

Damit ist gezeigt, dass auch das Viereck AS_kCT_k den gleichen Inhalt hat wie jedes der $2k$ Dreiecke und dass daher auf diese Weise eine Zerlegung des Quadrats in $2k + 1$ flächengleiche Teile gefunden wurde.

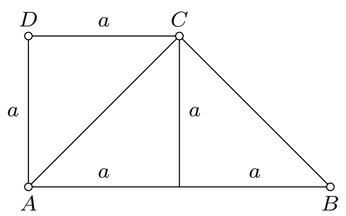
Aufgabe 240814:
Aus drei kongruenten gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecken mit gegebener Schenkellänge a lässt sich ein Trapez zusammensetzen.

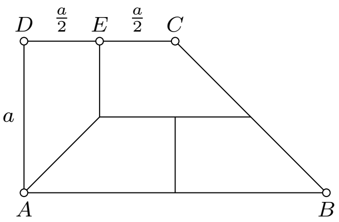
a) Zeichne ein solches Trapez!

b) Ein derartiges Trapez lässt sich in vier untereinander kongruente Trapeze zerlegen. Zeichne eine solche Zerlegung!

c) Ermittle die Länge der Parallelseiten, die Länge der Höhe und den Flächeninhalt eines dieser Teiltrapeze in Abhängigkeit von a!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Mögliche Lösungen zu (a) und (b) zeigt die Abbildung:





(c) Jedes der drei gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecke mit der Schenkellänge a hat den Flächeninhalt $\frac{1}{a}a^2$. Das aus diesen drei Dreiecken zusammengesetzte Trapez hat folglich den Flächeninhalt $\frac{3}{2}a^2$.

Jedes der vier (untereinander kongruenten, also auch flächengleichen) Teiltrapeze hat demnach den Flächeninhalt $\frac{3}{8}a^2$.
Ist $ABCD$ wie in der rechten Abbildung das zusammengesetzte Trapez und E der Mittelpunkt von CD, so sind DA und EC jeweils eine Parallelseite in einem der Teiltrapeze, und DE ist die Höhe in einem Teiltrapez.
Daher sind die gesuchten Längen dar Parallelseiten $DA = a$ und $EC = \frac{a}{2}$ und die gesuchte Länge der Höhe ist $DE = \frac{a}{2}$.

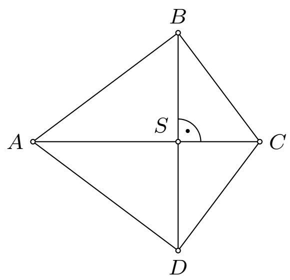
Der gesuchte Flächeninhalt F kann auch aus diesen Längen gefunden werden:

$$F = \frac{1}{2}\left(a + \frac{a}{2}\right) \cdot \frac{a}{2} = \frac{3}{8}a^2$$

Aufgabe 300812:
Im Mathematikunterricht wird zur Berechnung des Flächeninhalts eines Drachenvierecks folgende Formel benutzt: $A = \frac{e \cdot f}{2}$. Dabei bedeuten e bzw. f die Längen der beiden Diagonalen des Drachenvierecks.

Rolf behauptet, dass diese Formel für jedes Viereck gilt, dessen Diagonalen senkrecht aufeinander stehen. Hat er recht?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Für jedes Viereck $ABCD$, dessen Diagonalen AC und BD senkrecht aufeinander stehen und die Längen $AC = e$, $BD = f$ haben, gilt:
Die Diagonale AC wird durch ihren Schnittpunkt S mit BD in zwei Teilstrecken AS und CS zerlegt. Sie sind in den Dreiecken BDA bzw. BDC jeweils die zur Grundlinie BD senkrechten Höhen.
Der Flächeninhalt des Vierecks $ABCD$ ist die Summe der Flächeninhalte der Dreiecke BDA und BDC. Daher beträgt er

$$\frac{1}{2} \cdot BD \cdot AS + \frac{1}{2} \cdot BD \cdot CS = \frac{1}{2}BD(AS + CS) = \frac{1}{2}ef$$

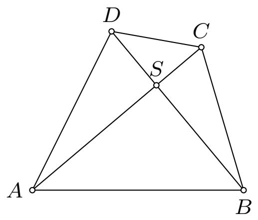
Rolf hat mithin recht.

Aufgabe 320813:
Es sei $ABCD$ ein Viereck, dessen Innenwinkel sämtlich kleiner als 180° sind.

Beweise, dass in jedem solchen Viereck die Summe der Längen der Diagonalen AC und BD stets

a) kleiner als der Umfang des Vierecks $ABCD$, aber
b) größer als der halbe Umfang des Vierecks $ABCD$ ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



a) Nach der Dreiecksungleichung, angewandt auf die Dreiecke ABC, BCD, CDA und DAB (siehe Abbildung), gilt

$$AC < AB + BC \quad , BD < BC + CD \quad , AC < CD + DA \quad , BD < DA + AB$$

Durch Addition dieser vier Ungleichungen folgt

$$2AC + 2BD < 2AB + 2BC + 2CD + 2DA$$

und daraus die zu beweisende Ungleichung

$$AC + BD < AB + BC + CD + DA$$

b) Ist S der Schnittpunkt der Diagonalen des Vierecks, so folgt aus der Dreiecksungleichung, angewandt auf die Dreiecke ABS, BCS, CDS und DAS

$$AS + BS > AB \quad , \quad BS + CS > BC \quad , \quad CS + DS > CD \quad , \quad DS + AS > DA$$

Durch Addition dieser vier Ungleichungen folgt

$$2AS + 2CS + 2BS + 2DS > AB + BC + CD + DA$$

Wegen $AS + CS = AC$ und $BS + DS = BD$ ergibt sich damit die zu beweisende Ungleichung

$$AC + BD > \frac{1}{2}(AB + BC + CD + DA)$$

II. Runde 2

Aufgabe 020829:
Folgende Behauptung ist zu beweisen:

Die Mittelpunkte der Quadrate, die über den Seiten eines beliebigen Parallelogramms so errichtet worden sind, dass die Quadrate außerhalb des Parallelogramms liegen, bilden fortlaufend miteinander verbunden ein Quadrat.

(Hier genügt es nicht, nur die Zeichnung anzufertigen, das ist kein Beweis! Es müssen die Eigenschaften eines Quadrates nachgewiesen werden. Die Eigenschaften sind: alle Seiten sind gleich lang, alle Winkel sind 90° groß.)

Lösung von Carsten Balleier:
Man bezeichne die Mittelpunkte über den Seiten a, b, c und d in dieser Reihenfolge mit M_a, M_b, M_c und M_d. Dann kann man die Kongruenz von z. B. Dreieck AM_aM_d und BM_aM_b zeigen.

Es gilt

$AM_a = BM_a$ (halbe Diagonalen im gleichen Quadrat),

$AM_d = BM_b$ (halbe Diagonalen in kongruenten Quadraten, da gegenüberliegende Parallelogrammseiten gleich lang sind) und

$\angle M_aAM_d = \angle M_aBM_b$.

Letzteres sieht man, indem man diese Winkel durch Teilwinkel ausdrückt, d. h. $\angle M_aAM_d = 2\cdot 45° + \angle DAC$ und $\angle M_aBM_b = 2 \cdot 45° + (90° - \angle ABC)$. Da aber im Parallelogramm benachbarte Winkel zusammen 90° groß sind, sind letztere Ausdrücke gleich.

Aus der bewiesenen Kongruenz folgt $M_aM_d = M_aM_b$ und $\angle AM_aM_d = \angle BM_aM_b$.

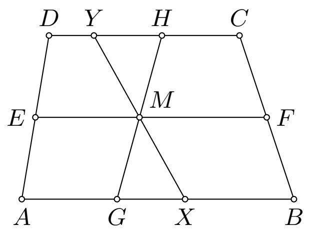
Mit der zweiten Aussage gilt $\angle M_dM_aM_b = \angle AM_aB = 90°$.

Da man diesen Beweis analog für alle anderen Seitenpaare und Winkel des Vierecks $M_aM_bM_cM_d$ durchführen kann, sind alle Seiten gleich und Winkel 90° groß. □

Aufgabe 030824:
Gegeben sei ein Trapez $ABCD$ mit den parallelen Seiten AB und CD. X sei irgend ein Punkt der Strecke $\overline{AB}$ und Y ein Punkt der Strecke $\overline{CD}$.

Beweise, dass die Strecke $\overline{XY}$ stets von der Mittellinie des Trapezes halbiert wird!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Der Schnittpunkt der Strecke XY mit der Mittellinie EF sei M. Man ziehe durch M die Parallele zu AD. Diese schneide AB in G und CD in H.

Nun wird die Kongruenz der Dreiecke $\triangle GMX$ und $\triangle HYM$ nachgewiesen:

$\angle MGX = \angle MHY$; Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen
$\angle GMX = \angle HMY$; Scheitelwinkel, und $\overline{MG} = \overline{MH}$

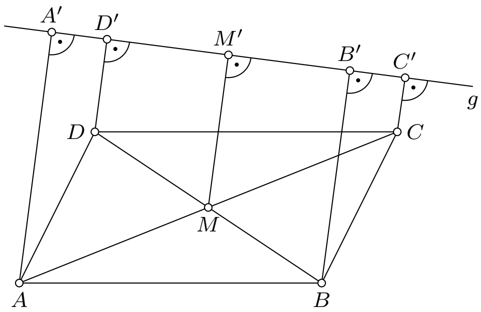
$\overline{MG} = \overline{MH}$ folgt aus der Tatsache, dass die Vierecke $AGME$ und $EMHD$ Parallelogramme sind mit einer gleichen Seite EM und $AE = ED$, da die Mittellinie die Trapezseite halbiert.

Wenn nun die beiden Dreiecke $\triangle GMX$ und $\triangle HYM$ kongruent sind, so sind auch ihre Seiten MX und MY gleich lang.

Aufgabe 060822:
In der Ebene ε liege das Parallelogramm $ABCD$ und die völlig außerhalb des Parallelogramme verlaufende Gerade g.

Beweise, dass die Summe der Entfernungen zweier gegenüberliegender Eckpunkte des Parallelogramms von der Geraden g gleich der Summe der Entfernungen der beiden anderen Eckpunkte von g ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Aus den Voraussetzungen folgt, dass die Vierecke $CC'A'A$ und $BB'D'D$ Trapeze sind, die im Falle $g \perp AC$ oder $g \perp BD$ auch entartet sein können. Beide Trapeze haben die Mittellinie MM' gemeinsam. Die Länge dieser Mittellinie MM' ist nach einem bekannten Satz

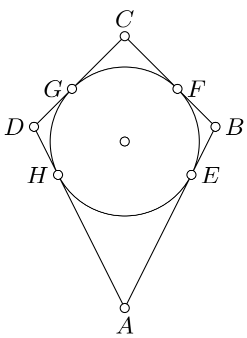
(1) gleich dem arithmetischen Mittel der Längen der Strecken AA' und CC' und nach dem gleichen Satz

(2) gleich dem arithmetischen Mittel der Längen der Strecken BB' und DD'. Daraus folgt die Behauptung.

Aufgabe 060824:
Beweise folgenden Satz:

Im Tangentenviereck ist die Summe der Längen je zweier gegenüberliegender Seiten gleich der Summe der Längen der beiden anderen Seiten.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Behauptung: $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{BC} + \overline{AD}$

Beweis:
Die Berührungspunkte an den Kreis seien E, F, G und H. Weil die beiden Tangentenabschnitte von einem jeden Punkt außerhalb des Kreises an den Kreis gleichlang sind, gilt:

$$\overline{AE} = \overline{AH} \qquad \overline{BE} = \overline{BF} \qquad \overline{CG} = \overline{CF} \qquad \overline{DG} = \overline{DH}.$$

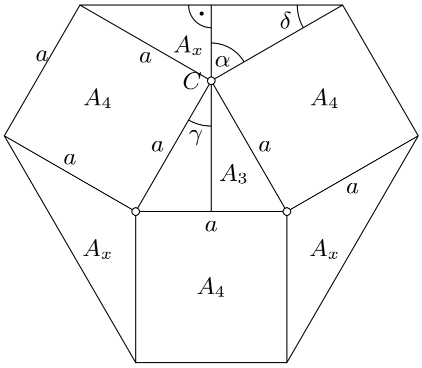
Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \overline{AE} + \overline{BE} + \overline{CG} + \overline{DG} &= \overline{AH} + \overline{BF} + \overline{CF} + \overline{DH}, \qquad \text{d. h.} \\ \overline{AB} + \overline{CD} &= \overline{BC} + \overline{AD}. \end{aligned}$$

Aufgabe 070821:
Errichtet man auf den Seiten eines gleichseitigen Dreiecke die Quadrate nach außen, so bilden die äußeren Eckpunkte der Quadrate die Ecken eines konvexen Sechsecks. Wir bezeichnen den Flächeninhalt des Dreiecke mit A_3; den jedes der Quadrate mit A_4 und den des Sechsecks mit A_6.

Gesucht sind ganze Zahlen n und m so, dass die Gleichung $A_6 = nA_3 + mA_4$ gilt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



In der nebenstehenden Zeichnung sieht man, dass sich der Flächeninhalt des Sechsecks A_6 wie folgt zusammensetzt (der Flächeninhalt A_x bezeichnet dabei die Fläche des Dreiecks zwischen den Quadraten wie in der Zeichnung ersichtlich):

$$A_6 = A_3 + 3 \cdot A_4 + 3 \cdot A_x \tag{1}$$

Die rot eingezeichneten Linien teilen die Dreiecke A_3 und A_x in sämtlich zueinander kongruente Dreiecke mit einem rechten Winkel, einer Hypotenuse der Größe a und einem weiteren gleichgroßen Winkel γ. Letzteres kann wie folgt begründet werden: um den Punkt C setzt sich der Vollwinkel (= 360°) aus zwei Winkeln zu je 90° (in den Quadraten) sowie je zwei Winkel $\gamma = 30°$ und α zusammen, d. h. $\alpha + \gamma = 90°$ bzw. in dem Dreieck mit α gilt demzufolge $\delta = \gamma$.

Damit und mit der Flächeninhaltsformel eines gleichseitigen Dreiecks gilt:

$$A_3 = A_x = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \tag{2}$$

Ferner gilt für das Quadrat:

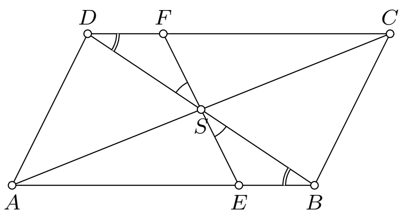
$$A_4 = a^2 \tag{3}$$

Mit (2) und (3) in (1) eingesetzt ergibt sich: $A_6 = 4 \cdot A_3 + 3 \cdot A_4$ woraus sich $n = 4$ und $m = 3$ als mögliche Lösung zeigt.

Aufgabe 170822:
Beweise folgenden Satz:

Jede Strecke, die zwei Punkte paralleler Seiten eines Parallelogramms miteinander verbindet und durch den Schnittpunkt der Diagonalen geht, wird von diesem Schnittpunkt halbiert.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



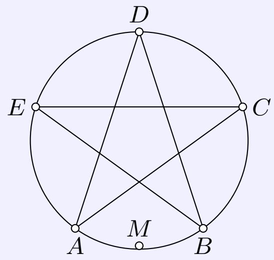
Es seien $ABCD$ ein Parallelogramm, E ein Punkt auf der Seite AB und F ein Punkt auf der Seite CD, und zwar so gelegen, dass die Strecke EF durch den Schnittpunkt S der Diagonalen des Parallelogramms geht.

Fällt F mit D zusammen, dann ist FE gleich der Diagonalen BD des Parallelogramms $ABCD$. Folglich fällt danach auch E mit B zusammen, und es gilt $BS = SD$, da die Diagonalen im Parallelogramm einander halbieren.
Falls $F \neq D$ ist, so ist auch $E \neq B$ (denn aus $E = B$ folgte wie eben auch $F = D$), und es gilt:

$\angle BSE = \angle DSF$ als Scheitelwinkel und $\angle EBS = \angle FDS$ als Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen.
Also gilt: $\triangle SEB \cong \triangle DSF$, da diese Dreiecke in einer Seite und beiden anliegenden Winkeln übereinstimmen.
Daraus folgt $ES = SF$, d. h., die Strecke EF wird durch den Schnittpunkt S der Diagonalen halbiert.

Aufgabe 170823:
Die Abbildung zeigt einen fünfstrahligen Stern, dessen Spitzen A, B, C, D, E Eckpunkte eines regelmäßigen Fünfecks sind.

Ermittle die Größe des Winkels $\angle ADB$!



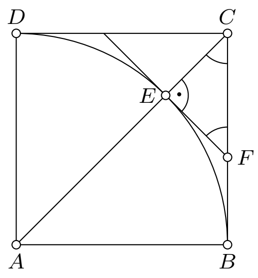
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Da A, B, C, D, E Eckpunkte eines regelmäßigen Fünfecks sind, liegen sie alle auf der Peripherie eines Kreises; dessen Mittelpunkt sei M.
Verbindet man M mit den genannten Eckpunkten, so entstehen 5 kongruente Dreiecke AMB, BMC, CMD, DME, EMA. Die Summe ihrer Winkel mit dem Scheitel M bildet einen Vollwinkel, so dass jeder dieser Winkel $360° : 5 = 72°$ beträgt.
Da im Kreis jeder Peripheriewinkel halb so groß wie der Zentriwinkel über dem gleichen Bogen ist, gilt

$$\angle ADB = \frac{1}{2}\angle AMB = \frac{1}{2} \cdot 72° = 36°$$

Aufgabe 180824:
Gegeben sei ein Quadrat $ABCD$. Mit $\overline{AB}$ als Radius sei um A ein Kreis gezeichnet. Dieser schneide die Diagonale AC in E. Die in E an den Kreis gelegte Tangente schneide die Seite BC in F.

Beweise, dass die Strecken CE, EF und FB gleich lang sind!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



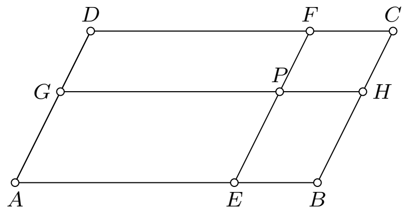
(1) Der Winkel $\angle BCA$ ist 45° groß; denn die Diagonale halbiert den rechten Winkel bei C.
(2) Der Winkel $\angle CEF$ ist 90° groß; denn Berührungsradius und Tangente stehen senkrecht aufeinander.
(3) Aus den Aussagen (1) und (2) ergibt sich: Der Winkel $\angle EFC$ ist 45° groß, und aus den Aussagen (1) und (3) folgt $EF = EC$.

Ferner gilt $\triangle AFE \cong \triangle AFB$ (Übereinstimmung in AF, in $AE = AB$ und in $\angle AEF < \angle ABF$, wobei diese Winkel 90° betragen, also jeweils der längsten Dreiecksseite gegenüberliegen). Daher ist $FB = FE = EC$, w. z. b. w.

Aufgabe 190823:
In einem Parallelogramm $ABCD$ sei P ein beliebiger Punkt auf der Diagonalen AC ($P \neq A$, $P \neq C$). Die Parallele durch P zu AB schneide BC in H und AD in G; die Parallele durch P zu BC schneide AB in E und CD in F.

Beweise, dass die beiden Parallelogramme $EBHP$ und $GPFD$ den gleichen Flächeninhalt haben!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Jede Diagonale eines Parallelogramms zerlegt dieses in zwei kongruente und somit flächeninhaltsgleiche Dreiecke. Wendet man dies auf die Parallelogramme $ABCD$, $AEPG$ und $PHCF$ an, so erhält man:

Die Dreiecke ABC und CDA haben denselben Flächeninhalt; dieser sei A_1 genannt. Die Dreiecke AEP und PGA haben denselben Flächeninhalt; dieser sei A_2 genannt. Die Dreiecke PHC und CFP haben denselben Flächeninhalt; dieser sei A_3 genannt.
Daher ergibt sich, dass sowohl das Parallelogramm $EBHP$ als auch das Parallelogramm $GPFD$ den Flächeninhalt $A_1 - A_2 - A_3$ haben. Damit ist der verlangte Beweis geführt.

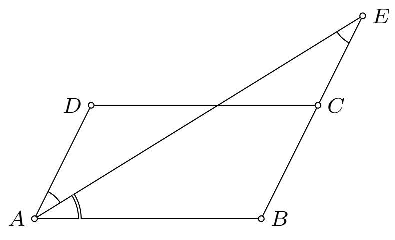
Aufgabe 220824:
Von einem Parallelogramm werden die folgenden Eigenschaften (1) und (2) gefordert:

(1) Der Umfang des Parallelogramms beträgt 36 cm.

(2) Die Halbierende des Winkels $\angle BAD$ schneidet die Verlängerung der Seite BC über C hinaus in einem Punkt E, für den $\overline{CE} = 3$ cm gilt.

Beweise, dass die Seitenlängen $a = \overline{AB}$, $b = \overline{BC}$ des Parallelogramms durch die Forderungen (1), (2) eindeutig bestimmt sind! Ermittle diese Seitenlängen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Wenn ein Parallelogramm $ABCD$ die Eigenschaften (1) und (2) hat, so folgt:
Da AE nach (2) Halbierende des Winkels $\angle BAD$ ist, gilt

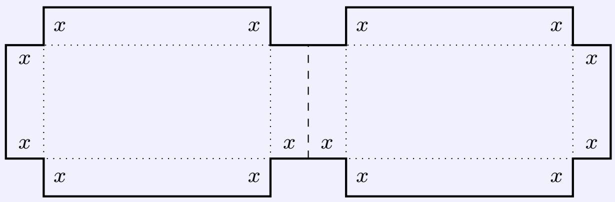
$$\angle BAE = \angle EAD \tag{3}$$

Ferner sind $\angle EAD$ und $\angle BEA$ Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen, also ist

$$\angle EAD = \angle BEA \tag{4}$$

Aus (3) und (4) folgt $\angle BAE = \angle BEA$; also ist das Dreieck ABE gleichschenklig mit $BE = AB = a$.
Aus (2) folgt somit $a = BE = BC + CE = b + 3$ cm, d. h. $a - b = 3$ cm. (5)
Wegen der gleichen Länge der Gegenseiten im Parallelogramm ist nach (1) mithin $a + b = 18$ cm. (6)
Aus (5) und (6) folgt durch Addition $2a = 21$ cm, also $a = 10{,}5$ cm und damit aus (5) $b = (10{,}5 - 3)$ cm $= 7{,}5$ cm.
Somit ist bewiesen, dass durch (1), (2) die Seitenlängen a,b eindeutig bestimmt sind. Sie betragen $a = 10{,}5$ cm, $b = 7{,}5$ cm.

Aufgabe 240824:
Eine Blechtafel hat die in der Abbildung ersichtliche Gestalt, wobei a, b und x gegebene Längen sind. Die Tafel soll längs der gestrichelten Linie in zwei Teile zerlegt werden, und aus jedem Teil soll dann ein oben offener quaderförmiger Kasten der Höhe x hergestellt werden.



1. Berechne das Volumen eines solchen Kastens, wenn $a = 360$ mm, $b = 120$ mm, $x = 25$ mm gegeben sind!
2. Ermittle das Volumen eines solchen Kastens, dargestellt in Abhängigkeit von Variablen a, b und x, die (wegen ihrer Bedeutung als Längen) nur positive Werte annehmen können!

3. Es seien beliebige positive Werte a und b fest vorgegeben.

Ermittle in Abhängigkeit von diesen a, b alle diejenigen Werte für die Variable x, mit denen es möglich wird, Kästen der genannten Art herzustellen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

1. Jedes der beiden Teile hat eine Gestalt, die aus einem Rechteck der Seitenlängen $\frac{a}{2} = 180$ mm, b = 120 mm entsteht, indem an allen vier Ecken Quadrate der Seitenlänge $x = 25$ mm herausgeschnitten sind.

   Ein daraus hergestellter oben offener quaderförmiger Kasten der Höhe $x = 25$ mm hat als Grundfläche ein Rechteck der Seitenlängen $\frac{a}{2} - 2x = 130$ mm, $b - 2x = 70$ mm. Daher ist sein Volumen

$$V = 130\text{mm} \cdot 70\text{mm} \cdot 25\text{mm} = 227500\text{mm}^3$$

2. Mit gleicher Begründung wie in 1. ergibt sich $V = \left(\frac{a}{2} - 2x\right) \cdot (b - 2x) \cdot x$.

3. Als Längenangabe muss x positiv sein. Ferner wird ein Herstellen der genannten Kästen genau dann möglich, wenn auch $\frac{a}{2} - 2x$ und $b - 2x$ als Längenangaben (nämlich für Kantenlängen eines Kastens) positiv sind, d. h. genau dann, wenn außer der Ungleichung $x > 0$ auch die Ungleichungen

$$\frac{a}{2} - 2x > 0 \qquad \text{und} \qquad b - 2x > 0$$

   gelten. Diese sind äquivalent mit $x < \frac{a}{4}$ und $x < \frac{b}{2}$

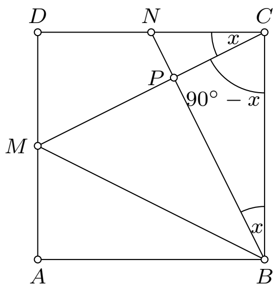
   Die gesuchten Werte sind also alle diejenigen positiven Werte x, die kleiner sind als die kleinere der beiden Längenangaben $\frac{a}{4}, \frac{b}{2}$.

Aufgabe 280823:
In einer Arbeitsgemeinschaft wird über folgende Figur diskutiert: Es sei $ABCD$ ein Quadrat; die Mittelpunkte der Seiten AD bzw. CD seien M bzw. N, der Schnittpunkt der Strecken CM und BN sei P.

a) Simone misst den Winkel $\angle BPM$ und stellt fest, dass die Strecken CM und BN aufeinander senkrecht stehen!
b) Frank misst von den Dreiecken ABM und BPM Seiten- und Höhenlängen und stellt fest, dass diese beiden Dreiecke nicht einander flächeninhaltsgleich sind.

Untersuche, ohne an einer Figur Messungen durchzuführen, für jede der beiden Feststellungen, ob sie für jedes Quadrat wahr ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



a) Für jedes Quadrat $ABCD$ mit den genannten M, N, P gilt $BC = CD$ (Seitenlängen des Quadrates), $CN = DM$ (halbe Seitenlängen des Quadrates), $\angle BCN = \angle CDM$ (Innenwinkel des Quadrates), also $\triangle CBN \cong \triangle DCM$ (Kongruenzsatz sws) und daher $\angle NBC = \angle MCD$.
Die Größe dieser Winkel sei mit x bezeichnet. Somit gilt $\angle BCM = 90° - x$, und aus dem Innenwinkelsatz für $\triangle BCP$ folgt

$$\angle CPB = 180° - x - (90° - x) = 180° - x - 90° + x = 90°$$

Also stehen die Strecken CM und BN senkrecht aufeinander.
b) Analog zu a) kann man $\triangle ABM \cong \triangle DCM$ zeigen. Die Dreiecks ABM, DCM und CBN haben somit den gleichen Flächeninhalt, dieser sei mit F bezeichnet. Ist a die Seitenlänge des Quadrates $ABCD$, so gilt $F = \frac{1}{4}a^2$.

Die Summe der Flächeninhalte der Dreiecke DCM und CBN beträgt $\frac{1}{2}a^2$. Der Flächeninhalt des Fünfecks $DCBPM$ ist jedoch kleiner als $\frac{1}{2}a^2$, da sich die genannten Dreiecke im Dreieck NCP überlappen.

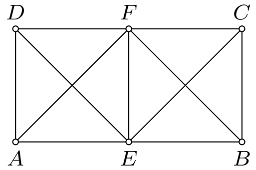
Somit ist die Quadratrestfläche $ABPM$ größer als $\frac{1}{2}a^2$. Hieraus und wegen (1) folgt, dass der Flächeninhalt des Dreiecks BPM größer als $\frac{1}{4}a^2$ sein muss.
Demzufolge sind die beiden Dreiecke ABM und BPM nicht einander flächengleich.

Aufgabe 300822:
Ein Rechteck, dessen Seitenlängen sich wie 1 : 2 zueinander verhalten, soll in acht einander kongruente gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke zerlegt werden.

a) Zeichne und beschreibe eine solche Zerlegung! Begründe, warum die nach deiner Beschreibung entstehenden acht Dreiecke gleichschenklig-rechtwinklig und einander kongruent sind!

b) Ermittle die Länge eines Schenkels dieser Dreiecke in Abhängigkeit von der kleineren der beiden Seitenlängen des Rechtecks!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Die Abbildung zeigt für ein Rechteck $ABCD$ eine mögliche Zerlegung der geforderten Art.



Beschreibung: Sind E, F die Mittelpunkte von AB bzw. CD, so entsteht die Zerlegung, indem die Strecken EF, AF, DE, BF und CE gezeichnet werden.

Begründung: Da $ABCD$ ein Rechteck ist und E, F die Strecken AB bzw. CD halbieren, folgt aus der Voraussetzung $AD : AB = 1 : 2$.
Die Strecken AE und DF sind gleichlang und parallel zueinander, die Strecken AE und AD sind gleichlang und senkrecht zueinander; also ist $AEFD$ ein Quadrat.
Ebenso folgt: $EBCF$ ist ein Quadrat. Jedes dieser Quadrate wird durch die eingezeichneten Diagonalen in vier Dreiecke zerlegt.

Da in jedem Quadrat die Diagonalen gleichlang und senkrecht zueinander sind und einander halbieren, sind alle acht entstandenen Dreiecke gleichschenklig-rechtwinklig mit einander gleichen Kathetenlängen, also auch einander kongruent.

b) In Abhängigkeit von $a = AD$ hat das Quadrat $AEFD$ den Flächeninhalt a^2. Jedes seiner vier einander (kongruenten, also) flächeninhaltsgleichen Teildreiecke hat folglich den Flächeninhalt $\frac{1}{4}a^2$.

Ist x die gesuchte Kathetenlänge dieser Dreiecke. so ist andererseits der Flächeninhalt gleich $\frac{1}{2}x^2$. Daher gilt

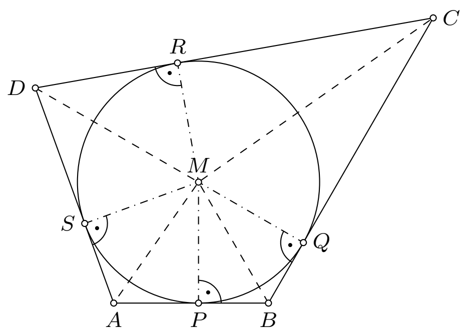
$$\frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{4}a^2 \qquad ; \qquad x\sqrt{\frac{1}{2}a^2} = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$$

Aufgabe 320823:
Es sei $ABCD$ ein Tangentenviereck, sein Umfang sei u, der Radius seines Inkreises sei r.

Zeige, dass bereits durch die alleinige Vorgabe von u und r der Flächeninhalt von $ABCD$ eindeutig bestimmt ist; ermittle diesen Flächeninhalt in Abhängigkeit von u und r!

Hinweis: Ein Viereck $ABCD$ ist genau dann ein Tangentenviereck, wenn es einen Kreis enthält, der jede Seite von $ABCD$ In einem Punkt zwischen den Endpunkten dieser Seite berührt. Dieser Kreis heißt dann der Inkreis von $ABCD$.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Nach Voraussetzung berührt ein Kreis k die Seiten AB,BC,CD,DA in Punkten P,Q,R bzw. S. Ist M der Mittelpunkt von k, so ist jeweils MP, MQ, MR bzw. MS senkrecht auf AB, BC, CD bzw. DA.

Mit $r = MP = MQ = MR = MS$ ist folglich jeweils $\frac{1}{2}AB \cdot r$, $\frac{1}{2}BC \cdot r$, $\frac{1}{2}CD \cdot r$. bzw. $\frac{1}{2}DA \cdot r$ der Flächeninhalt von ABM, BCM, CDM bzw. DAM.

Daraus folgt: Der Flächeninhalt F von $ABCD$ beträgt

$$F = \frac{1}{2}AB \cdot r + \frac{1}{2}BC \cdot r + \frac{1}{2}CD \cdot r + \frac{1}{2}DA \cdot r = \frac{1}{2}(AB + BC + CD + DA) \cdot r = \frac{1}{2}u \cdot r$$

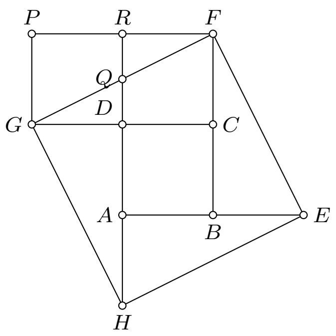
und ist so durch u und r eindeutig bestimmt.

Aufgabe 330823:
Es sei $ABCD$ ein Quadrat, seine Seitenlänge sei a. Die Seite AB werde über B hinaus um die Länge a bis E verlängert, die Seite BC über C hinaus um die Länge a bis F, die Seite CD über D hinaus um a bis G, die Seite DA über A hinaus um a bis H.

a) Beweise aus diesen Voraussetzungen, dass $EFGH$ ein Quadrat ist!

b) Wie oft ist der Flächeninhalt des Quadrates $ABCD$ in dem Flächeninhalt von $EFGH$ enthalten?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



a) Nach den Voraussetzungen ist $BE = a = CF$, $BF = 2a = CG$, ferner (als Nebenwinkel von Innenwinkeln des Quadrates $ABCD$) $\angle EBF = 90° = \angle FCG$. (1)
Damit folgt nach dem Kongruenzsatz sws $\triangle BEF \cong \triangle CFG$, also $EF = FG$ (2) und $\angle EFB = \angle FGC$. (3)
Nach dem Innenwinkelsatz für Dreieck CFG sowie nach (1) ist ferner (siehe Abbildung) $\angle FGC + \angle CFG = 90°$; hieraus und aus (3) folgt $\angle EFB + \angle CFG = 90°$, d. h. $\angle EFG = 90°$. (4)

Entsprechend zu (2) und (4) beweist man, dass im Viereck $EFGH$ alle Seiten einander gleiche Länge und alle Winkel die Größe 90° haben. Also ist es ein Quadrat.

b) Es sei P derjenige Punkt, für den $GCFP$ ein Rechteck ist. Die Verlängerung von AD über D hinaus schneide GF in Q und PF in R.
Dann sind $DCFR$ und $GDRP$ zwei Quadrate mit gleicher Seitenlänge a wie $ABCD$. In den Dreiecken GDQ und FRQ sind gleichgroße Winkel bei D, R (rechte Winkel) und Q (Scheitelwinkel), daher und wegen $GD = FR$ sind sie nach Kongruenzsatz sww einander kongruent.

Fügt man sie an das Viereck $DCFQ$ an, so folgt:
Das Dreieck GCF hat denselben Flächeninhalt wie das Quadrat $DCFR$, also auch wie $ABCD$. Entsprechendes gilt für die Dreiecke HDG, EAH, FBE. Also ist der Flächeninhalt von $ABCD$ genau 5 mal in dem von $EFGH$ enthalten.

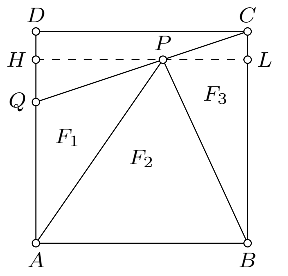
Aufgabe 340824:
Es sei $ABCD$ ein Quadrat mit der Seitenlänge $\overline{AB} = 6$ cm. Auf der Seite AD sei Q derjenige Punkt, für den $\overline{AQ} = 4$ cm gilt. Für jeden Punkt P, der auf der Strecke QC liegt, bezeichne L den Fußpunkt des von P auf BC gefällten Lotes; ferner bezeichnen F_1, F_2 bzw. F_3 in dieser Reihenfolge den Flächeninhalt des Dreiecks APQ, des Dreiecks ABP bzw. des Dreiecks BCP.

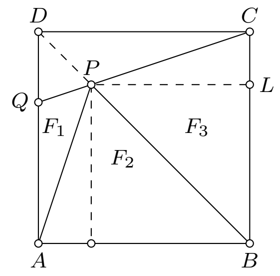
a) Ermittle die Länge der Strecke PL und den Flächeninhalt F_1, wenn vorausgesetzt wird, dass P so auf QC gewählt wurde, dass $F_3 = 7{,}5 cm^2$ gilt!

b) Ermittle die Länge der Strecke PL und den Flächeninhalt F_2, wenn vorausgesetzt wird, dass P so auf QC gewählt wurde, dass $F_1 = F_3$ gilt!

c) Beschreibe und begründe, wie man P so auf QC konstruieren kann, dass $F_2 = F_3$ gilt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:





(a) (Siehe linke Abbildung) Wegen $PL \perp BC$ ist $F_3 = \frac{1}{2}BC \cdot PL$, also $PL = 2F_3 : BC = 2{,}5$ cm.
Verlängert man LP über P hinaus bis zum Schnitt H mit AD, so ist $ABLH$ ein Rechteck, also gilt $LH = 6$ cm , $PH = 3{,}5$ cm; ferner ist PH die auf AQ senkrechte Höhe des Dreiecks APQ, also gilt $F_1 = \frac{1}{2}AQ \cdot PH = 7$ cm^2.

(b) Wegen $F_1 = \frac{1}{2}AQ \cdot PH$, $F_3 = \frac{1}{2}BC \cdot PL$ (1) und $\frac{1}{2}AQ = 2$ cm, $\frac{1}{2}BC = 3$ cm sowie der Voraussetzung $F_1 = F_3$, gilt $2 \cdot PH = 3 \cdot PL$, also $PH = \frac{3}{2}PL$.
Hieraus und aus $PH + PL = 6$ cm folgt $(\frac{3}{2} + 1) \cdot PL = 6$ cm, also $PL = 6 : \frac{5}{3} = 2{,}4$ cm.

Nach (1) und (2) ist dann $F_3 = 7{,}2$ cm^2, also auch $F_1 = 7{,}2$ cm^2. Ferner hat das Dreieck CDQ den Flächeninhalt $\frac{1}{2}CD \cdot DQ = 6$ cm^2. Damit erhält man $F_2 = (36 - 2 \cdot 7{,}2 - 6) = 15{,}6$ cm^2.

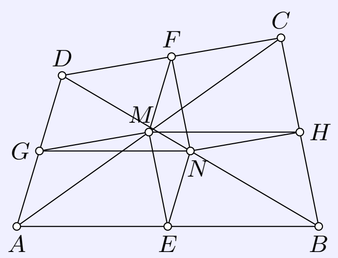
(c) Die Bedingung $F_2 = F_3$ wird wegen $AB = BC$ dann erfüllt, wenn die Dreiecke ABP und BCP in den Längen der auf AB bzw. BC senkrechten Höhen übereinstimmen, d. h. wenn P auf der Winkelhalbierenden des von AB und BC gebildeten Winkels liegt. Das ist die Diagonale BD.
Damit ist begründet: Die geforderte Bedingung wird erfüllt, wenn man P als Schnittpunkt der Strecken CQ und BD konstruiert (siehe rechte Abbildung).

III. Runden 3 & 4

Aufgabe 040836:

Es ist folgender Satz zu beweisen:

In einem konvexen Viereck $ABCD$ seien keine zwei Seiten parallel. Dann sind die Mittelpunkte E, F bzw. G, H zweier Gegenseiten und die Mittelpunkte M, N der Diagonalen die Eckpunkte eines Parallelogrammes.



Lösung von Manuela Kugel:
Der Beweis stützt sich auf den Satz: „In einem Dreieck verläuft die Verbindungsstrecke der Mittelpunkte zweier Seiten parallel zur dritten Dreiecksseite.“

Behauptung: $\overline{GN} \parallel \overline{MH}$ und $\overline{GM} \parallel \overline{NH}$

Voraussetzung: E, F, G und H sind die Mittelpunkte der 4 Seiten des Vierecks. M und N sind die Mittelpunkte der beiden Diagonalen.

Beweis:
$\overline{GN} \parallel \overline{AB}$ im Dreieck ABD; $\overline{MH} \parallel \overline{AB}$ im im Dreieck ABC; folglich: $\overline{GN} \parallel \overline{MH}$

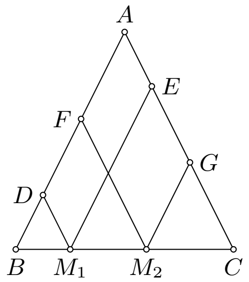
$\overline{GM} \parallel \overline{DC}$ im Dreieck ADC; $\overline{NH} \parallel \overline{DC}$ im im Dreieck BDC; folglich: $\overline{GM} \parallel \overline{NH}$

Da im Viereck $GNHM$ die Gegenseiten zueinander parallel sind, handelt es sich um ein Parallelogramm.

Aufgabe 060832:
Auf der Grundlinie BC eines gleichschenkligen Dreiecks $\triangle ABC$ seien von zwei Punkte M_1 und M_2 gegeben. Durch M_1 und M_2 werden jeweils die Parallelen zu den Dreiecksseiten AB und AC gezogen. Die Parallelen durch M_1 schneiden AB in D und AC in E, die Parallelen durch M_2 die Seite AB in F und AC in G.

Beweise, dass der Umfang des Parallelogramms M_1EAD gleich dem Umfang des Parallelogramms M_2GAF ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Es gilt $\triangle DBM_1 \sim \triangle ABC$ (das folgt aus der Gleichheit von Stufenwinkeln an geschnittenen Parallelen). Also ist das Dreieck $\triangle M_1DB$ gleichschenklig, und es gilt:

$$\overline{BD} = \overline{M_1D} \tag{1}$$

Weiterhin gilt:

$$\overline{M_1E} = \overline{AD}, \tag{2}$$

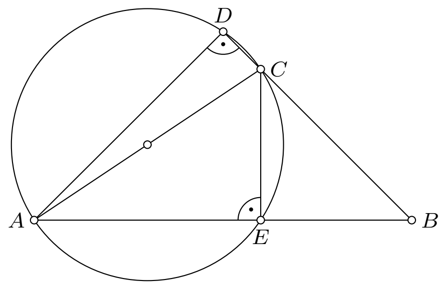
da M_1EAD laut Konstruktion ein Parallelogramm ist.

Aus (1) und (2) folgt, dass der halbe Umfang des Parallelogramms M_1EAD gleich der Länge des Schenkels AB ist.

Entsprechend zeigt man, dass der halbe Umfang des Parallelogramms M_2GAF gleich der Länge des Schenkels AC ist. Da $\overline{AC} = \overline{AB}$ gilt, folgt, dass die Umfänge der betrachteten Parallelogramme gleich sind.

Aufgabe 070835:
Beweise:
Zwei Eckpunkte eines beliebigen Dreiecks $\triangle ABC$ sowie die Fußpunkte der durch diese Ecken gehenden Höhen bestimmen ein Sehnenviereck, d. h. ein Viereck, dessen Eckpunkte auf demselben Kreis liegen, dessen Seiten also Sehnen dieses Kreises sind.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



In dem Dreieck $\triangle ABC$ seien o. B. d. A. A und C die in der Aufgabe genannten Eckpunkte und D und E die zugehörigen Höhenfußpunkte. Da A, E, C nicht auf derselben Geraden liegen, gibt es genau einen Kreis durch diese drei Punkte. Nach der Umkehrung des Satzes des Thales ist wegen des rechten Winkels bei E die Seite AC ein Durchmesser des Kreises, und es liegen auf diesem Kreis die Eckpunkte aller rechtwinkligen Dreiecke, die AC zur Hypotenuse haben, mithin auch der Punkt D. Folglich ist das Viereck AECD ein Sehnenviereck.

Aufgabe 090832:
Über den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks $\triangle ABC$ seien ähnliche Vielecke V_a, V_b, V_c konstruiert, und zwar so, dass die Dreiecksseiten BC, AC, AB jeweils einander entsprechende Seiten von V_a, V_b

bzw. V_c sind.

Beweise: Der Flächeninhalt des Vielecks über der Hypotenuse ist gleich der Summe der Flächeninhalte der beiden Vielecke über den Katheten.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
2. Wie üblich sei $BC = a, AC = b, AB = c$ gesetzt, AB sei die Hypotenuse von $\triangle ABC$.
Die Flächeninhalte von V_a, V_b, V_c seien F_a, F_b bzw. F_c genannt. Da nun BC und AB in den ähnlichen Vielecken V_a, V_c einander entsprechende Seiten sind, gilt

$$F_a : F_c = a^2 : c^2, \qquad \text{also} \qquad F_a = \frac{a^2}{c^2} F_c$$

Ebenso erhält man $F_b = \frac{b^2}{c^2} F_c$.

Nach dem Satz des Pythagoras gilt $a^2 + b^2 = c^2$. Durch Multiplikation mit $\frac{F_c}{c^2}$ folgt hieraus

$$\frac{a^2}{c^2} \cdot F_c + \frac{b^2}{c^2} \cdot F_c = F_c$$

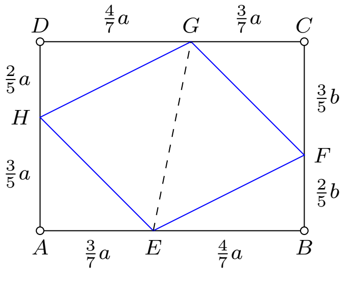
d. h. $F_a + F_b = F_c$, w. z. b. w.

Aufgabe 110836:
Einem Rechteck $ABCD$ mit den Seitenlängen $\overline{AB} = a$ und $\overline{BC} = b$, $a > b$, sei ein Parallelogramm $EFGH$ so einbeschrieben, dass die Seiten DA und BC des Rechtecks von Eckpunkten des Parallelogramms im Verhältnis $2 : 3$ oder $3 : 2$, die Seiten AB und CD im Verhältnis $3 : 4$ oder $4 : 3$ geteilt werden und E auf AB, F auf BC, G auf CD, H auf DA liegen.

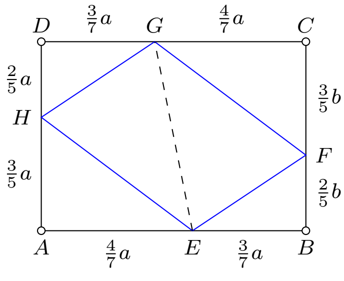
Stelle fest, ob dies auf eine oder mehrere Weisen möglich ist! Ermittle in jedem der möglichen Fälle das Verhältnis der Flächeninhalte von Rechteck und Parallelogramm zueinander!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Laut Aufgabe ist $EFGH$ ein Parallelogramm. Daraus folgt: $HE = GF$, $HG = EF$, $\angle HEG \cong \angle FGE$ und $\angle AEG \cong \angle CGE$ als Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen.
Also gilt: $\angle AEH \cong \angle CGF$. Mithin ist $\triangle AEH \cong \triangle CGF$ (sww). Analog lässt sich zeigen, dass $\triangle BEF \cong \triangle DGH$ gilt.

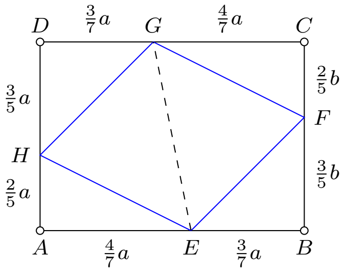
Folglich gilt: $AE = CG$, $BE = DG$, $AH = CF$, $DH = BF$, und es gibt genau die folgenden 4 Möglichkeiten, einem Rechteck $ABCD$ ein Parallelogramm $EFGH$ in der geforderten Weise einzubeschreiben (siehe Abbildungen).
Dabei kann man Figur 3 durch eine Spiegelung der Figur 1 und Figur 4 durch eine Spiegelung der Figur 2 an der Mittelsenkrechten zu AB gewinnen. Es sind daher die folgenden beiden Fälle zu betrachten:



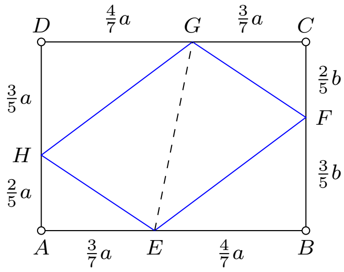
Figur 1



Figur 2



Figur 3



Figur 4

Fall 1:
Es sei $DH : HA = BF : FC = 2 : 3$ und $AE : EB = CG : GD = 3 : 4$.
Dann ist der Flächeninhalt A_P des Parallelogramms $EFGH$ gleich der Differenz aus dem Flächeninhalt A_R des Rechtecks $ABCD$ und der Summe der Flächeninhalte der Dreiecke $\triangle AEH$, $\triangle EBF$, $\triangle FCG$ und $\triangle GDH$. Also gilt

$$\begin{aligned} A_P &= ab - \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{7}a\cdot\frac{3}{5}b + \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7}a\cdot\frac{2}{5}b + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{7}a\cdot\frac{3}{5}b + \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7}a\cdot\frac{2}{5}b\right) \\ &= ab - \left(\frac{9}{35}ab + \frac{8}{35}ab\right) = \frac{18}{35}ab \end{aligned}$$

Daraus folgt $A_R : A_P = 35 : 18$.

Fall 2:
Es sei $DH : HA = BF : FC = 2 : 3$ und $AE : EB = CG : GD = 4 : 3$.
Analog wie im Fall 1 erhält man dann

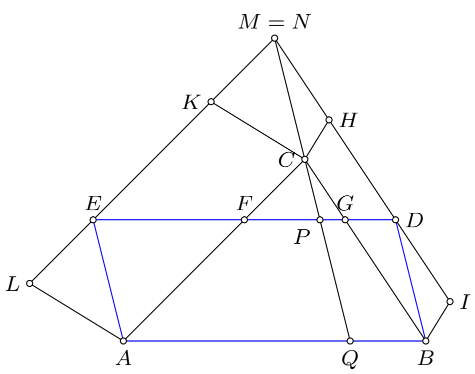
$$A_P = ab - \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7}a\cdot\frac{3}{5}b + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{7}a\cdot\frac{2}{5}b + \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7}a\cdot\frac{3}{5}b + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{7}a\cdot\frac{2}{5}b\right) = ab - \left(\frac{12}{35}ab + \frac{6}{35}ab\right) = \frac{17}{35}ab$$

Daraus folgt $A_R : A_P = 35 : 17$.

Aufgabe 120833:
Gegeben sei ein Dreieck $\triangle ABC$. Über der Seite AB sei ein Parallelogramm $ABDE$ so errichtet, dass dessen Seite DE mit auf derselben Seite der Geraden durch A und B liegt, dass dabei aber die Punkte D und A nicht auf derselben Seite der Geraden durch B und C liegen und dass außerdem die Punkte E und B nicht auf derselben Seite der Geraden durch A und C liegen. Ferner seien über den Seiten BC und AC je ein Parallelogramm $CBIH$ bzw. $ACKL$ derart errichtet, dass D auf der Geraden durch I und H sowie E auf der Geraden durch K und L liegt.

Beweise, dass dann der Flächeninhalt des Parallelogramms $ABDE$ gleich der Summe der Flächeninhalte der Parallelogramme $BIHC$ und $CKLA$ ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

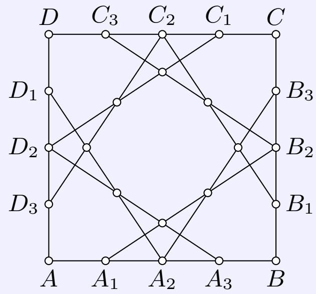


Falls benötigt, werden die Parallelogramme $BIHC$ und $CKLA$ wie folgt in flächeninhaltsgleiche Parallelogramme verwandelt:
Man zieht durch C die Parallele zu den parallelen Parallelogrammseiten BD und EA. Ihre Schnittpunkte mit ED bzw. AB seien P bzw. Q genannt. Die Gerade durch K und L schneide die genannte Parallele durch C in einem Punkt M, die Gerade durch I und H schneide sie in einem Punkt N.

Dann sind $ACME$ und $CBDN$ ebenfalls Parallelogramme, und es gilt $EA = MC$ sowie $BD = NC$, woraus wegen $EA = BD$ folgt, dass $M = N$ ist.

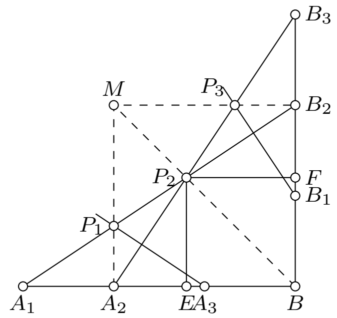
Als Parallelogramme mit gleicher Grundseite und gleicher zugehöriger Höhe sind nun folgende Parallelogramme paarweise inhaltsgleich: einerseits $ACKL$, $ACME$ und $AQPE$, andererseits $BIHC$, $BDMC$ und $BDPQ$.
Da der Flächeninhalt des Parallelogramms $ABDE$ gleich der Summe der Flächeninhalte der Parallelogramme $AQPE$ und $BDPQ$ ist, ist er mithin auch gleich der Summe der Flächeninhalte der Parallelogramme $ACKL$ und $BIHC$, w. z. b. w.

Aufgabe 130833:
In einem Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge a werde die Seite AB durch die Punkte A_1, A_2, A_3, die Seite BC durch die Punkte B_1, B_2, B_3, die Seite CD durch C_1, C_2, C_3 und DA durch die Punkte D_1, D_2, D_3 jeweils in 4 gleichlange Teilstrecken geteilt. Ferner seien die Strecken A_1B_2, A_2B_3, B_1C_2, B_2C_3, C_1D_2, C_2D_3, D_1A_2 und D_2A_3 eingezeichnet. Von den Schnittpunkten dieser Strecken miteinander seien die Punkte P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8 wie in der Abbildung bezeichnet.



Berechne den Flächeninhalt des Achtecks $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7P_8$ in Abhängigkeit von a!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Man kann den Flächeninhalt A_n des Achtecks berechnen, indem man vom Flächeninhalt des Quadrats $ABCD$ den vierfachen Flächeninhalt des Sechsecks $A_2BB_2P_3P_2P_1$ subtrahiert.
Die Fußpunkte der Lote von P_2 auf AB bzw. BC seien E bzw. F. Dann ist $EBFP_2$ ein Quadrat.



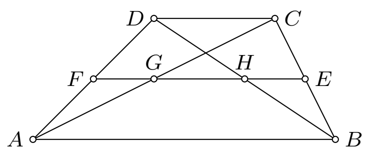
Bezeichnet man seine Seitenlänge mit x, so gilt nach einem Teil des Strahlensatzes
$$\frac{3}{4}a : \frac{a}{2} = \left(\frac{3}{4}a - x\right) : x$$
woraus man $\frac{3}{2}x = \frac{3}{4}a - x$ und mithin $\frac{5}{2}x = \frac{3}{4}a$ bzw. $x = \frac{3}{10}a$ erhält.

Setzt man weiter $P_1A_2 = y$, so gilt nach dem Strahlensatz
$$\frac{3}{4}a : \frac{a}{2} = \frac{1}{4}a : y \qquad \text{also} \qquad \frac{3}{2}y = \frac{1}{4}a \qquad \text{bzw.} \qquad y = \frac{1}{6}a$$
Folglich gilt für den Flächeninhalt A_8 des Achtecks
$$A_8 = a^2 - 4\frac{\frac{1}{6}a + \frac{3}{10}a}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}a - \frac{3}{10}a\right) \cdot 2 + \frac{9}{100}a^2 = a^2 - \frac{28}{75}a^2 - \frac{9}{25}a^2 = \frac{4}{15}a^2$$
Der gesuchte Flächeninhalt des Achtecks beträgt $\frac{4}{15}a^2$.

Aufgabe 140835:
Beweise folgenden Satz:

Verbindet man die Mittelpunkte der Diagonalen eines Trapezes, so erhält man eine (evtl. zu einem Punkt ausgeartete) Strecke, deren Länge halb so groß ist wie die Differenz der Längen der zwei parallelen Seiten.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Es seien A, B, C und D Eckpunkte des Trapezes, und es sei $AB \parallel CD$. Weiterhin seien E der Mittelpunkt der Seite BC, F der Mittelpunkt der Seite AD sowie G der Mittelpunkt der Diagonalen AC und H der Mittelpunkt der Diagonalen BD. Dann liegen nach der Umkehrung eines Teiles des Strahlensatzes und dem Satz über die Mittelparallele im Trapez $ABCD$ die Punkte G und H auf FE. Man wähle die Bezeichnung so, dass $AB \geq CD$ ist.

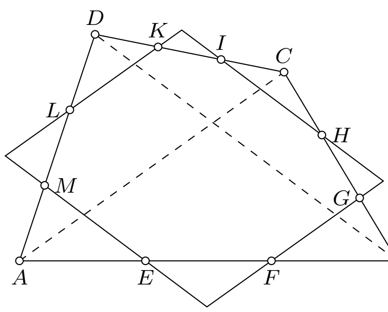
Behauptung: $GH = \frac{1}{2}(AB - CD)$
Beweis:
Aus dem Satz, dass in jedem Dreieck die Verbindungsstrecke der Mittelpunkte zweier Seiten parallel zur dritten verläuft und halb so lang wie diese ist, oder nach der Umkehrung eines Teiles des Strahlensatzes folgt (1) $FH = \frac{1}{2}AB$ sowie (2) $FG = \frac{1}{2}CD$. Aus (1) und (2) folgt $FH - FG = \frac{1}{2}/AB - CD)$.

Aufgabe 150835:
Es ist zu beweisen: Wenn in einem konvexen Viereck $ABCD$

auf der Seite AB Punkte E und F so zwischen A und B liegen, dass $\overline{AE} = \overline{EF} = \overline{FB}$ gilt, und
auf der Seite BC Punkte G und H so zwischen B und C Liegen, dass $\overline{BG} = \overline{GH} = \overline{HC}$ gilt, und
auf der Seite CD Punkte I und K so zwischen C und D liegen, dass $\overline{CI} = \overline{IK} = \overline{KD}$ gilt, und
auf der Seite DA Punkte L und M so zwischen D und A liegen, dass $\overline{DL} = \overline{LM} = \overline{MA}$ gilt,

so sind die Geraden durch M, E und I, H sowie die durch F, G und K, L jeweils parallel zueinander.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Nach Voraussetzung gilt: $AM : AD = 1 : 3 = AE : AB$.
Daraus folgt nach der Umkehrung des 1. Teiles des Strahlensatzes $ME \parallel DB$. Ebenso folgt $IH \parallel DB$, also gilt $ME \parallel IH$.

Da ferner $ABCD$ konvex ist, liegt C und folglich auch IH außerhalb von $\triangle ABD$, während ME innerhalb $\triangle ABD$ liegt. Also sind die Gerade durch M, E und die Gerade durch I, H zwei voneinander verschiedene Parallelen. Die gleiche Aussage ergibt sich für die Gerade durch F, G und die Gerade durch L, K. Daraus folgt die Behauptung.

Aufgabe 150836:
Für ein Viereck $ABCD$ sei gefordert, dass die Summe der Längen der beiden Diagonalen AC und BD 11 cm beträgt, dass die Seite AB die Länge $a = 6$ cm und die Seite AD die Länge $d = 1$ cm haben soll.

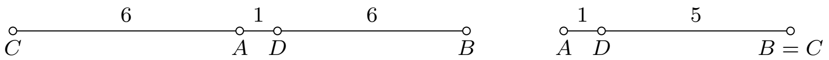
Ermittle eine Länge x und eine Länge y so, dass für den Umfang u jedes Vierecks, das den angegebenen Forderungen genügt, die Ungleichung $x \leq u \leq y$ gilt, wobei das Gleichheitszeichen jeweils genau dann gilt, wenn das Viereck $ABCD$ zu einer Strecke entartet, d. h., wenn die Punkte A, B, C, D auf ein und derselben Geraden liegen!

Hinweis: $ABCD$ kann auch nicht-konvex sein. Ferner können beim Entartungsfall auch Punkte zusammenfallen.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es sei $BC = b$, $CD = c$, $AC = e$, $BD = f$. Nach der Dreiecksungleichung, angewandt auf die Dreiecke ABD, ABC und ACD, gilt (alle Längenangaben in Zentimeter)

$$5 < f < 7 \tag{1}$$
$$6 - e < b < 6 + e \tag{2}$$
$$e - 1 < c < e + 1 \tag{3}$$

Aus (1) und $e + f = 11$ folgt $4 < e < 6$ (4). Aus (2), (3) und (4) folgt $5 < b + c < 2e + 7 < 19$. Hieraus und aus $u = b + c + 7$ folgt $12 < u < 26$. Wie die Abbildung zeigt, treten diese Längen $x = 12$ (cm) und $y = 26$ (cm) im Entartungsfall tatsächlich auf, sind daher die gesuchten Längen. Daher gilt $12 \leq u \leq 26$.



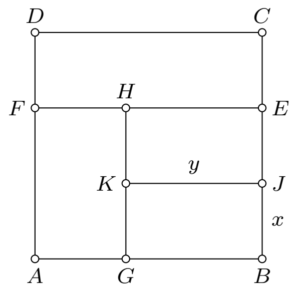
Aufgabe 190833:
Gegeben sei ein Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge a.

Eine Parallele zu AB schneide die Seiten BC und AD in den Punkten E bzw. F, eine Parallele zu BC schneide AB und EF in den Punkten G bzw. H, und eine Parallele zu AB schneide die Strecken BE und GH in den Punkten J bzw. K.

a) Ermittle den Umfang des Rechtecks $KJEH$ in Abhängigkeit von a unter der Bedingung, dass die Rechtecke $AGHF$, $GBJK$, $KJEH$ und $FECD$ untereinander flächeninhaltsgleich sind!

b) Ermittle den Flächeninhalt des Rechtecks $KJEH$ in Abhängigkeit von a unter der Bedingung, dass die Rechtecke $AGHF$, $GBJK$, $KJEH$ und $FECD$ untereinander umfangsgleich sind!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



a) Nach Voraussetzung hat jedes der vier genannten Rechtecke den Flächeninhalt $\frac{a^2}{4}$. Daraus folgt

$$DP = \frac{a^2}{4} : CD = \frac{a}{4} \qquad ; \qquad AF = \frac{3}{4}a$$
$$FH = \frac{a^2}{4} : AF = \frac{a^2}{4} : \frac{3}{4}a = \frac{a}{3} \qquad ; \qquad EH = \frac{2}{3}a$$
$$EJ = \frac{a^2}{4} : EH = \frac{a^2}{4} : \frac{2}{3}a = \frac{3}{8}a$$

Also ist der gesuchte Umfang $2EH = 2EJ = \frac{4a}{3} + \frac{3a}{4} = \frac{3}{8}a$.

b) Wir setzen $BJ = x$, $KJ = y$. Da die Rechtecke $GBJK$ und $KJEH$ umfangsgleich sind, ist $2(x+y) = 2(JE + y)$, also $JE = x$.
Da $AGHF$, $GBJK$ und $FECD$ umfangsgleich sind, ist die Summe der halben Umfänge von $AGHF$ und $GBJK$ gleich dem Umfang von $FECD$, also $FA + AG + GB + BJ = 2(CD + CE)$, d. h.

$$3x + a = 2(a + a - 2x)$$

Daraus folgt $x = \frac{3}{7}a$. Da $AGHF$ und $GBJK$ umfangsgleich sind, gilt $FA + AG = GB + BJ$, d. h.

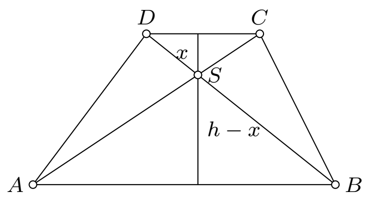
$$\frac{6}{7}a + a - y = y + \frac{3}{7}a$$

Daraus folgt $y = \frac{5}{7}a$. Also ist der gesuchte Flächeninhalt $xy = \frac{15}{49}a^2$.

Aufgabe 210834:
Von einem Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$, dessen Diagonalenschnittpunkt S genannt sei, wird vorausgesetzt, dass $\overline{AB} = 2{,}5$ cm gilt.

Untersuche, ob bereits durch diese Voraussetzung das Verhältnis des Flächeninhaltes des Dreiecks ABS zu dem des Trapezes $ABCD$ eindeutig bestimmt ist! Wenn das der Fall ist, so ermittle dieses Verhältnis!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Es sei $ABCD$ ein Trapez mit $AB \parallel CD$; sein Diagonalenschnittpunkt sei S. Der Abstand zwischen den Parallelen AB und CD betrage h, der Abstand des Punktes S von CD sei x. Dann ist $h-x$ sein Abstand von AB. Nach dem Strahlensatz gilt

$$x : (h-x) = SC : SA = CD : AB = 1 : 2, \qquad \text{also} \qquad 2x = h - x \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{1}{3}h$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks ABS beträgt

$$\frac{1}{2}AB \cdot (h-x) = \frac{1}{2}AB \cdot \frac{2}{3}h = \frac{1}{3}AB \cdot h$$

der Flächeninhalt des Trapezes $ABCD$ beträgt

$$\frac{1}{2}(AB + CD) \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}AB \cdot h = \frac{3}{4}AB \cdot h$$

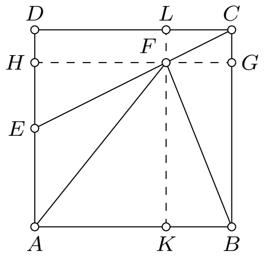
Daher ist das gesuchte Verhältnis eindeutig bestimmt; es beträgt $\frac{1}{3} : \frac{3}{4} = 4 : 9$.

Aufgabe 230832:
Es sei $ABCD$ ein Quadrat mit gegebener Seitenlänge a. Der Mittelpunkt der Seite AD sei E. Auf der Strecke CE sei F derjenige Punkt, für den $\overline{CF} : \overline{FE} = 1 : 2$ gilt.

a) Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen die Flächeninhalte der Dreiecke BCF und AEF einander gleich sind!

b) Ermittle den Flächeninhalt des Dreiecks ABF in Abhängigkeit von a!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



a) Die Parallele durch F zu DC schneide AD in H und BC in G. Da sie auf BC und AD senkrecht steht, ist FG bzw. FH im Dreieck BCF bzw. AEF die zu BC bzw. AE senkrechte Höhe.

Für die Flächeninhalte $J(BCD)$, $J(AEP)$ dieser Dreiecke gilt also

$$J(BCF) = \frac{1}{2}BC \cdot FG \qquad ; \qquad J(AEF) = \frac{1}{2}AE \cdot FH \qquad (1)$$

Wegen $BC \parallel AD$ folgt ferner nach dem Strahlensatz $FG : FH = FC : CE = 1 : 2$, also $FG = \frac{1}{2}FH$ (2).

Da E der Mittelpunkt von AD ist und $BC = AD$ ist, gilt

$$BC = 2 \cdot AE \qquad (3)$$

Aus (1),(2),(3) folgt $J(BCF) = J(AEF)$, w. z. b. w.

b) Aus $FE = 2 \cdot CF$ (und $CF + FE = CE$) folgt $CF = \frac{1}{3}CE$.
Die Parallele durch F zu BC schneide AB in K und DC in L. Nach dem Strahlensatz gilt dann

$$FL : ED = CF : CE = 1 : 3$$

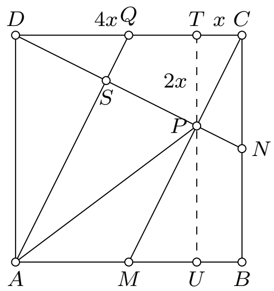
also $FL = \frac{1}{3}ED = \frac{1}{6}a$. Daher hat im Dreieck ABF die auf AB senkrechte Höhe die Länge $KF = KL - FL = \frac{5}{6}a$. Folglich hat das Dreieck ABF den Flächeninhalt

$$J(ABF) = \frac{1}{2}AB \cdot KF = \frac{5}{12}a^2$$

Aufgabe 280832:
Beweise den folgenden Satz!

Wenn $ABCD$ ein Quadrat ist, M der Mittelpunkt von AB, N der Mittelpunkt von BC und P der Schnittpunkt der Strecken CM und DN ist, dann gilt $\overline{AD} = \overline{AP}$.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Nach Voraussetzung gilt $BC = CD$ (Quadratseiten), $BM = BN$ (halbe Quadratseiten), $\angle CBM = \angle DCN =) =°$. Nach dem Kongruenzsatz sws ist folglich $\triangle BCM \cong \triangle CDN$ und somit $\angle BCM = \angle CDN = \angle CDP$. (1)

Wegen $\angle BCM + \angle PCD = 90°$ gilt daher auch $\angle CDP + \angle PCD = 90°$. Daraus folgt nach dem Innenwinkelsatz $\angle CPD = 90°$, d. h. $CM \perp DN$. (2)

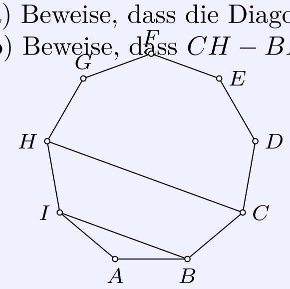
Es sei Q der Mittelpunkt von CD und S der Schnittpunkt der Strecken AQ und DN. Dann gilt: $DA = BC$ (Quadratseiten), $DQ = BM$ (halbe Quadratseiten), $\angle ADQ = \angle CBM = 90°$.
Nach dem Kongruenzsatz sws ist folglich $\triangle DAQ \cong \triangle BCM$ und somit $AQ = CM$. Ferner ist $AM = CQ$ (halbe Quadratseiten); also ist $AMCQ$ ein Parallelogramm. Somit gilt $AQ \parallel CM$. (3)
Wegen (2) ergibt sich daher $AQ \perp DN$, d. h. $\angle ASD = \angle ASP = 90°$ (4)

Aus (3) folgt nach dem Strahlensatz $DS : SP = DQ : QC = 1 : 1$, also $DS = PS$. (5)

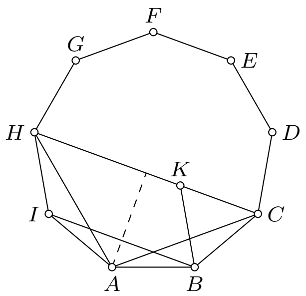
Aus (4), (5) und $AS = AS$ folgt nach dem Kongruenzsatz sws $\triangle ADS \cong \triangle APS$ und damit $AD = AP$, w. z. b. w.

Aufgabe 330832:
Die Abbildung zeigt ein regelmäßiges Neuneck $ABCDEFGHI$, d. h. ein Neuneck, bei dem alle Seiten dieselbe Länge und alle Innenwinkel dieselbe Größe haben.

a) Beweise, dass die Diagonalen BI und CH zueinander parallel sind!
b) Beweise, dass $CH - BI = BC$ gilt!



Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



a) Nach Voraussetzung ist $AB = BC = AI = IH$ (1); ferner gilt für die Innenwinkel im regelmäßigen Neuneck $\angle ABC = \angle AIH = \angle IAB = 14°$. (2)

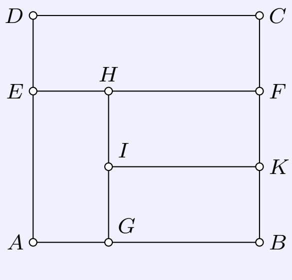
Aus (1) und (2) folgt $\triangle ABC \cong \triangle AIH$ also $\angle BAC = \angle IAH$ (3) und $CA = HA$.
Im somit gleichschenkligen Dreieck CHA ist die Höhe auf CH zugleich Winkelhalbierende von $\angle CAH$. Wegen (3) halbiert sie auch $\angle BAI$ und ist daher auch im gleichschenkligen Dreieck BIA die Höhe auf BI.

Da BI und CH also auf derselben Geraden senkrecht stehen, sind sie zueinander parallel.

b) Für den Schnittpunkt K von CH mit der Parallelen durch B zu IH gilt:
Im Parallelogramm $IBKH$ ist $KH = BI$ (4) und $BK = IH$, nach (1) also auch $BK = BC$. (5)
Nach dem Innenwinkelsatz für das gleichschenklige Dreieck BIA gilt wegen (2) ferner $\angle BIA = \frac{1}{2}(180° - 140°) = 20°$, also nochmals wegen (2) $\angle BIH = 140° - 20° = 120°$.
Als Gegenwinkel im Parallelogramm $IBKH$ hat dann auch $\angle BKH$ die Größe 120°, somit gilt $\angle BKC = 60°$. (6)

Nach (5) und (6) ist das Dreieck BCK gleichseitig. Damit und wegen (4) ergibt sich $BC = CK = CH - KH = CH - BI$, w. z. b. w.

Aufgabe 330842:



Es sei $ABCD$ ein Quadrat mit gegebener Seitenlänge a. Eine Parallele zu AB schneide die Seiten AD und BC in E bzw. F, eine Parallele zu AD schneide die Strecke AB und EF in G bzw. H, eine Parallele zu AB schneide die Strecken GH und BC in I bzw. K (siehe Abbildung).

a) Außer diesen Voraussetzungen soll die Bedingung erfüllt werden, dass die vier Rechtecke $EFCD$, $AGHE$, $GBKI$ und $IKFH$ untereinander flächengleich sind.
Ermittle unter dieser Bedingung den Umfang des Rechtecks $IKFH$ in Abhängigkeit von a!
b) Anstelle der in a) genannten Bedingung soll nun die Bedingung erfüllt werden, dass die vier Rechtecke $EFCD$, $AGHE$, $GBKI$, $IKFH$ untereinander umfangsgleich sind.
Ermittle unter dieser Bedingung den Flächeninhalt des Rechtecks $IKFH$ in Abhängigkeit von a!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Wegen der zu erfüllenden Bedingung hat jedes der vier Rechtecke $EFCD$, $AGHE$, $GBKI$, $IKFH$ den Flächeninhalt $\frac{1}{4}a^2$. Daraus folgt

$$ED = \frac{1}{4}a^2 : a = \frac{1}{4}a \quad ; \quad AE = a - \frac{1}{4}a = \frac{3}{4}a \quad ; \quad AG = \frac{1}{4}a^2 : \frac{3}{4}a = \frac{1}{3}a$$

$$GB = IK = a - \frac{1}{3}a = \frac{2}{3}a \quad ; \quad GI = IH = \frac{1}{4}a^2 : \frac{2}{3}a = \frac{3}{8}a$$

Der Umfang des Rechtecks $IKFH$ beträgt somit $2 \cdot (IK + IH) = \frac{25}{12}a$.

b) Für die Längen $ED = FC = x$ und $AG = y$ folgt aus der Umfangsgleichheit von $EFCD$ mit $AGHI$, dass $2 \cdot (a + x) = 2 \cdot (y + a - x)$, also $y = 2x$ gilt.
Wegen der Umfangsgleichheit von $GBKI$ mit $IKFH$ ist ferner $2 \cdot (IK + BK) = 2 \cdot (IK + KF)$, also $BK = KF = \frac{1}{2}(a - x)$.

Die Umfangsgleichheit von $EFCD$ mit $GBKI$ ergibt daher die Gleichung

$$2 \cdot (a + x) = 2 \cdot \left(a - y + \frac{1}{2}(a - x)\right) \qquad \text{also} \qquad 7x = a$$

Somit erhält man $x = \frac{1}{7}a$, $y = \frac{2}{7}a$, $IK = a - y = \frac{5}{7}a$, $KF = \frac{1}{2}1(a - x) = \frac{3}{7}a$; das Rechteck $IKFH$ hat den Flächeninhalt $IK \cdot KF = \frac{15}{49}a^2$.

Aufgabe 340833:
Für vier Punkte A, B, C, D in einer Ebene werde vorausgesetzt:

$$\overline{AB} = 6 \text{ cm}, \qquad \overline{AD} = 1 \text{ cm und} \qquad \overline{AB} + \overline{BD} = 11 \text{ cm}. \qquad (*)$$

Gesucht werden zwei Längenangaben x und y so, dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

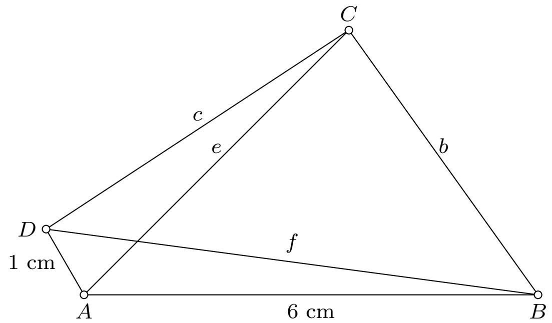
(1) Für je vier Punkte, die die Voraussetzung (*) erfüllen, gilt stets $x \leq \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA} \leq y$.

(2) Wenn außer (*) auch $x = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA}$ gilt, liegen A, B, C, D auf einer gemeinsamen Geraden.

(3) Wenn außer (*) auch $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA} = y$ gilt, liegen A, B, C, D auf einer gemeinsamen Geraden.

Nenne zwei Längen x, y und beweise, dass sie diese Bedingungen (1), (2), (3) erfüllen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Für je vier Punkte A, B, C, D, die die genannten Voraussetzungen erfüllen, gilt mit den Bezeichnungen b, c, e, f für die Maßzahlen der in cm gemessenen Längen BC, CD, AC bzw. BD (siehe Abbildung)



Nach der Dreiecksungleichung für Dreieck ABD ist $5 \leq f \leq 7$ (1,1')
Nach der Dreiecksungleichung für Dreieck ABC ist $6 - e \leq b \leq 6 + e$ (2,2')
Nach der Dreiecksungleichung für Dreieck ACD ist $c - 1 \leq e \leq c + 1$ (3,3')

Nach der Dreiecksungleichung für Dreieck BCD ist $b - c \leq f \leq b + c$ (2,2')

Aus (1',1) und der Voraussetzung $AC + BD = 11$ cm, d. h. $e + f = 11$, (5) folgt $4 < e < 6$. (6,6')
Aus (2) und (3') folgt $5 \leq b + c$, aus (2'), (3) und (6') folgt $b + c \leq 2e + 7 \leq 19$. (7)
Die somit gefundenen Ungleichungen $5 \leq b + c \leq 19$ besagen wegen $AB = 6$ cm, $AD = 1$ cm: Für je vier Punkte A, B, C, D, die die Voraussetzungen (*) erfüllen, gilt

$$12cm \leq AB + BC + CD + DA \leq 26cm$$

Wenn speziell 12 cm $= AB + BC + CD + DA$, also $b + c = 5$ gilt, so folgt nach (4'): Es gilt $f \leq 5$, nach (5) also $e \geq 6$. Zusammen mit (6') und nochmals (5) besagt dies $e = 6$, $f = 5$.
Damit hat man aus $AB = 6$ cm , $AD = 1$ cm, $f = 5$ bzw. aus $b + c = f$ die Schlussfolgerungen, dass D auf der Strecke AB, C auf der Strecke BD liegen muss.

Daraus folgt: A, B, C, D liegen auf einer gemeinsamen Geraden; es folgt sogar $B = C$.

Wenn aber speziell $AB + BC + CD + DA = 26$ cm, also $b + c = 19$ gilt, so folgt aus (7), dass $b + c = 2e + 7 = 19$, also $e = 6$ gilt. Nach (5) folgt $f = 5$.
Aus (4) erhält man damit $2b \leq b + c + f = 19 + 5$, also $b \leq 12$; aus (3) erhält man $b + c \leq b + e + 1$, also $19 \leq b + 7$, $12 < b$. Es folgt $b = 12$ und $c = 7$.

Damit hat man aus $AB = 6$ cm, $b = 12$, $e = 6$ bzw. aus $b = 12$, $c = 7$, $f = 5$ die Schlussfolgerungen, dass A auf der Strecke BC, D auf der Strecke BC liegen muss.
Daraus folgt: A, B, C, D liegen auf einer gemeinsamen Geraden.

Die Bedingungen (1), (2) und (3) werden also von den Längen $x = 12$ cm und $y = 26$ cm erfüllt.

Aufgabe 340835:
Auf dem Rand eines Quadrates $ABCD$ mit gegebener Seitenlänge a seien P_1, P_2, P_3 die folgenden Punkte: Es liege P_1 so auf BC, dass $\overline{BP_1} = \overline{P_1C}$ gilt, P_2 so auf CD, dass $\overline{P_2D} = 3 \cdot \overline{CP_2}$ gilt, P_3 so auf DA, dass $\overline{P_3A} = 3 \cdot \overline{DP_3}$.

Ein Punkt X bewegt sich auf den Strecken P_1B, BA, AP_3 von P_1 nach P_3. Gesucht sind auf diesem Weg (einschließlich seines Anfangs- und Endpunktes) alle diejenigen Punkte X, für die der Flächeninhalt des Vierecks $XP_1P_2P_3$

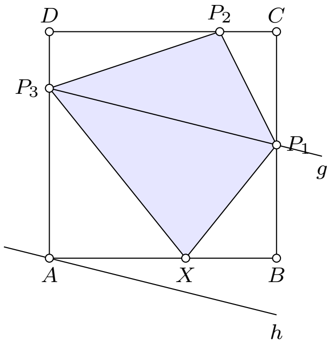
a) möglichst klein,

b) möglichst groß ist.

Finde alle diese Punkte und berechne für jeden von ihnen auch jeweils den Flächeninhalt des Vierecks $XP_1P_2P_3$!

Hinweis: Für ein Viereck wird in dieser Aufgabe auch zugelassen, dass es „zum Dreieck entartet“, wenn nämlich zwei seiner Eckpunkte miteinander zusammenfallen.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Das Viereck $XP_1P_2P_3$ setzt sich zusammen aus dem Dreieck XP_1P_3 und dem Dreieck $P_1P_2P_3$ bzw. es ist in den Fällen $X = P_1, X = P_3$ gleich dem letztgenannten Dreieck.
Daher ist sein Flächeninhalt genau in diesen beiden Fällen möglichst klein; und möglichst groß ist er genau dann, wenn der Flächeninhalt des Dreiecks XP_1P_3 möglichst groß ist.

Das ist genau dann der Fall, wenn der Abstand des Punktes X von der durch P_1 und P_3, gelegten Geraden g möglichst groß ist. Dies gilt genau für $X = A$.

Beweis (siehe Abbildung):
Die Parallele h durch A zu g hat wegen $P_3A > P_1B$ mit dem Quadrat $ABCD$, also auch mit dem gesamten Weg des Punktes X nur den Punkt A gemeinsam. Alle Punkte dieses Weges außer A liegen folglich in dem von g und h eingeschlossenen Parallelstreifen, näher an g als der Punkt A. Damit sind die in (a) und (b) gesuchten Punkte X gefunden.

Wegen $CD = a$ und $P_1C = \frac{1}{2}a$, $P_3D = \frac{1}{4}a$ hat das Trapez P_1CDP_3 den Flächeninhalt

$$F(P_1CDP_3) = a \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{4}a\right) = \frac{3}{8}a^2$$

da außerdem $P_2C = \frac{1}{4}a$ und $P_2D = \frac{3}{4}a$ gilt, ist weiter

$$F(P_1CP_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{4}a = \frac{1}{16}a^2$$
$$F(P_2DP_3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}a \cdot \frac{1}{4}a = \frac{3}{32}a^2$$

für die zu (a) gefundenen Punkte $X = P_1$ und $X = P_3$ ergibt sich damit als Flächeninhalt von $XP_1P_2P_3$

$$F(P_1P_2P_3) = F(P_1CDP_3) - F(P_1CP_2) - F(P_2DP_3) = \frac{7}{32}a^2$$

Mit $AB = a$ und $BP_1 = \frac{1}{2}a$ erhält man $F(ABP_1) = \frac{1}{4}a^2$ und damit für den zu (b) gefundenen Punkt $X = A$ als Flächeninhalt von $XP_1P_2P_3$:

$$F(P_1P_2P_3) = F(ABCD) - F(P_1CP_2) - F(P_2DP_3) - F(ABP_1) = \frac{19}{32}a^2$$

II.III. Kreise

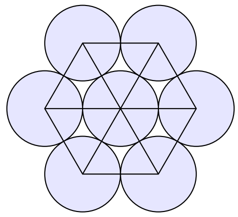
I. Runde 1

Aufgabe 010815:
Bei einem mehradrigen Kabel werden Adern gleichen Durchmessers um eine Mittelader vom gleichen Durchmesser so angeordnet, dass sie einander berühren.

a) Wie viel Adern braucht man?

b) Beweise diese Behauptung!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

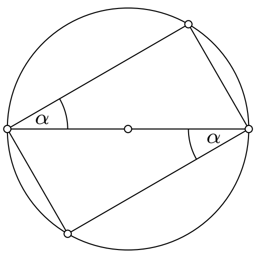


Um einen Kreis können genau sechs Kreise gleichen Durchmessers so angeordnet werden, dass sie sich gegenseitig berühren.
Die Kreismittelpunkte der äußeren Kreise liegen dann auf den Eckpunkten eines regelmäßigen Sechsecks. Man benötigt mit der Mittelader genau 7 Adern.

Aufgabe 030815:
In einem Kreis werden durch die Endpunkte eines Durchmessers parallele Sehnen gezogen.

Beweise, dass diese Sehnen stets gleichlang sind!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

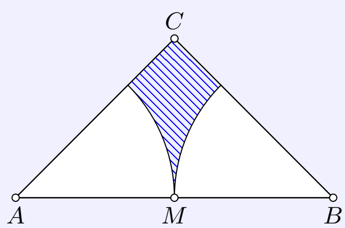


Beweis: Zusätzlich zur beschriebenen Konstruktion kann man noch die beiden Sehnen ziehen, die den Durchmesser und je eine Sehne zu einem Dreieck vervollständigt. Dann reicht es zu beweisen, dass beide Dreiecke kongruent sind.

Die beiden ursprünglichen Sehnen und der Durchmesser bilden Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen (α).

Nach dem Satz des Thales sind die beiden Dreiecke rechtwinklig; und sie haben eine Seite, den Durchmesser, gemeinsam. Aus Kongruenzsatz WSW folgt, dass beide Dreiecke kongruent und damit beide Sehnen gleich lang sind. □

Aufgabe 060811:
In dem gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck $\triangle ABC$ mit $\overline{AB} = c = 7$ cm und $\angle ACB = \gamma = 90°$ seien um die Punkte A und B Kreisbögen mit einem Radius von der Länge $\frac{7}{2}$ cm geschlagen (siehe Abbildung).



Ermittle den Inhalt I_F der in der Abbildung schraffiert gezeichneten Fläche!

Lösung von Manuela Kugel:
Bezeichnet man den Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle ABC$ mit I_{F_1}, die Flächeninhalte der im Innern des Dreiecks gelegenen Kreisausschnitte mit I_{F_2} und I_{F_3}, dann gilt für den gesuchten Flächeninhalt I_F:

$$I_F = I_{F_1} - (I_{F_2} + I_{F_3})$$

Bezeichnet M den Mittelpunkt von AB, so hat das Dreieck $\triangle ABC$ die Höhe MC, ihre Länge beträgt $\frac{7}{2}$ cm. Daher gilt für I_{F_1}:

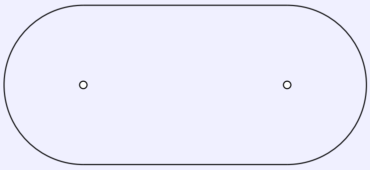
$$I_{F_1} = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot \frac{7}{2}\text{cm}^2 = \frac{49}{4}\text{cm}^2$$

Die beiden Kreisausschnitte mit den Flächeninhalten I_{F_2} und I_{F_3} lassen sich zu einem Viertelkreis zusammenlegen. Also gilt $I_{F_2} + I_{F_3} = \frac{1}{4} \cdot \frac{49}{4}\pi\text{cm}^2$. Mithin gilt für I_F:

$$I_F = I_{F_1} - (I_{F_2} + I_{F_3}) = \frac{49}{4}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)\ \text{cm}^2 \approx 2{,}63\text{cm}^2$$

Der Flächeninhalt der in der Abbildung schraffiert gezeichneten Fläche beträgt also $I_F \approx 2{,}63\text{cm}^2$.

Aufgabe 080812:



Die Abbildung zeigt die 400 m lange Laufstrecke auf der Innenbahn eines Stadions. Die Laufstrecke werde idealisiert dargestellt durch zwei Halbkreise und die je 90 m langen Seiten eines Rechtecks. Bei einem 10000-m-Lauf beobachten wir, dass ein Läufer während einer ganzen Runde nicht innen, sondern weiter außen auf der 2. Bahn, und zwar stets 1 m von der gezeichneten Laufstrecke entfernt, läuft.

Wie viel Meter mehr als 400 m legt er während dieser Runde zurück?

Anmerkung: Setze für π die Zahl $\frac{22}{7}$, und runde die Ergebnisangabe auf volle Meter!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Im Folgenden werden die Maßzahl des Kreisumfanges, die Maßzahl des Kreisdurchmessers und die Maßzahl des zurückgelegten Weges mit u, d bzw. s bezeichnet. Dann gilt

$$u = 400 - 180 = 220 \tag{1}$$

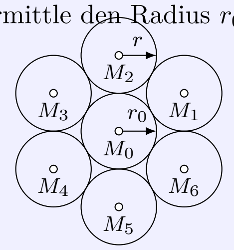
Wegen $d = \frac{u}{\pi}$ ist $d \approx \frac{220 \cdot 7}{22} = 70$.
Ferner besteht die 2. Bahn aus zwei zu den Halbkreisen der 1. Bahn jeweils konzentrischen Halbkreisen von um 1 m größerem Radius sowie aus zwei Strecken von je 90 m Länge. Also gilt

$$s = 72 \cdot \pi + 2 \cdot 90 \qquad ; \qquad s \approx 226 + 180 = 406 \tag{2}$$

Der Läufer legt daher während dieser Runde etwa 6 m mehr zurück.

Aufgabe 090812:
Gegeben seien in der Ebene ein Kreis k_0 und 6 Kreise vom Radius r, deren jeder in der aus der Abbildung ersichtlichen Weise genau zwei von ihnen und außerdem den Kreis k_0 von außen berührt.

Ermittle den Radius r_0 des Kreises k_0!



Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, M_0 sei der Mittelpunkt und r der Radius eines Kreises k_0, zu dem 6 Kreise der gesuchten Art existieren; deren Mittelpunkte seien $M_1, M_2, ..., M_6$. Dann entstehen 6 kongruente gleichschenklige Dreiecke

$$\triangle M_1M_0M_2, \quad \triangle M_2M_0M_3, \quad ... \quad \triangle M_6M_0M_1 \tag{1}$$

also wird $\angle M_1M_0M_2 \cong \angle M_2M_0M_3 \cong ... \cong \angle M_6M_0M_1$, und da die Summe dieser Winkel 360° beträgt, hat jeder von ihnen eine Größe von 60°. Die Dreiecke (1) sind somit gleichseitig, und es folgt $r_0 + r = 2r$, also $r_0 = r$.

Umgekehrt sind für $r_0 = r$ die Bedingungen der Aufgabenstellung erfüllt. Denn wählt man $M_0, M_1, ..., M_6$ so, dass $\triangle M_1M_0M_2, \quad \triangle M_2M_0M_3, \quad ... \quad \triangle M_5M_0M_6$ gleichseitige Dreiecke mit der Seitenlänge $2r$ sind, so wird $\triangle M_6M_0M_1$ gleichschenklig, mit $\angle M_6M_0M_1 = 360° - 5 \cdot 60°$, also ebenfalls gleichseitig.
Daher berühren sich die Kreise um $M_0, M_1, ..., M_6$ mit dem Radius r in der vorgeschriebenen Weise.

Aufgabe 140813:
Gegeben sei ein Kreis k_1 mit dem Radius r_1 und dem Mittelpunkt M. Um M ist ein Kreis k_2 derart zu zeichnen, dass die zwischen k_1 und k_2 gelegene Kreisringfläche einen dreimal so großen Inhalt hat wie die Fläche des Kreises k_1.

Berechne den Radius r_2 des Kreises k_2!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Der Flächeninhalt A_1 der Kreisfläche des Kreises k_1 beträgt $A_1 = \pi r_1^2$, der Inhalt A_R einer Kreisringfläche zwischen k_1 und einem Kreis k_2 mit dem Radius r_2 und dem Mittelpunkt M ist

$$A_R = \pi(r_2^2 - r_1^2)$$

Daher ist die in der Aufgabenstellung geforderte Bedingung genau dann erfüllt, wenn $3\pi r_1^2 = \pi(r_2^2 - r_1^2)$ gilt. Dies ist gleichbedeutend mit $4r_1^2 = r_2^2$ und dies wegen $r_1 > 0, r_2 > 0$ mit $2r_1 = r_2$.

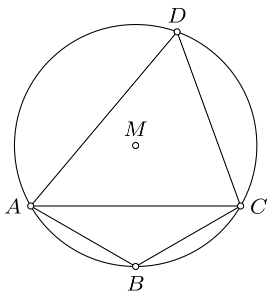
Der Kreis k_2 hat somit genau dann die geforderte Eigenschaft, wenn sein Radius doppelt so groß ist wie der des Kreises k_1.

Aufgabe 140814:
Für zwei Sehnen AB und BC $(A \neq C)$ eines Kreises k gelte $\overline{AB} = \overline{BC}$. D sei ein beliebiger Punkt von k, der auf der anderen Seite der Geraden durch A und C liegt wie B.

Es ist zu beweisen, dass die Gerade durch D und B den Winkel $\angle ADC$ halbiert!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Um den Peripheriewinkelsatz anwenden zu können, beweisen wir zunächst, dass D und C auf demselben von A und B begrenzten Bogen von k liegen.

Würden D und C auf verschiedenen von A und B begrenzten Bögen von k liegen, dann müsste die Sehne AB die Sehne DC schneiden. Nun liegen laut Aufgabe D und B auf verschiedenen Seiten der Geraden durch A und C. Wegen $A \neq C$ liegen daher auch DC und AB auf verschiedenen Seiten dieser Geraden und können sich mithin nicht schneiden.



Nach dem Peripheriewinkelsatz gilt nun

$$(1) \quad \angle ADB = \angle ACB \qquad ; \qquad (2) \quad \angle BDC = \angle BAC$$

Da ABC gleichschenklig mit $AB = BC$ ist, gilt (3) $\angle ACB = \angle BAC$. Aus (1), (2), (3) folgt $\angle ADB = \angle BDC$, w. z. b. w.

Aufgabe 160814:
Peter stellt seinem Freund Fritz folgende Aufgabe:

> „Gegeben sei ein Kreis, dessen Durchmesser gleich dem Erddurchmesser ist, und ein zweiter dazu konzentrischer Kreis, dessen Umfang 1 m länger als der Umfang des ersten Kreises ist. Ermittle den Abstand beider Kreislinien voneinander!“

Nach kurzem Überlegen nennt Fritz diesen Abstand und behauptet:

> „Wenn der erste Kreis nur den Durchmesser einer Stecknadelkuppe (1 mm) besitzt, und der Umfang des zweiten konzentrischen Kreises wiederum 1 m länger als der des ersten Kreises ist, dann ist der Abstand dieser beiden Kreise genau so groß wie in deiner Aufgabe.“

Stimmt diese Behauptung von Fritz?

Wie groß ist der Abstand der konzentrischen Kreislinien in beiden Fällen?

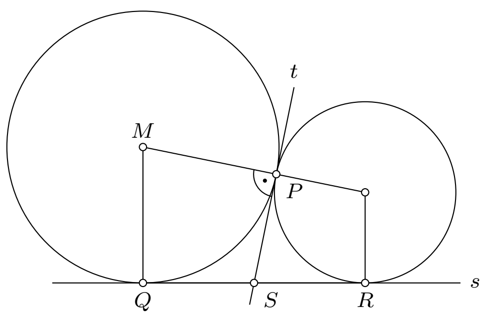
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Ist d der Erddurchmesser und u (in m) der Umfang des gegebenen kleineren Kreises, so gilt $\pi \cdot d = u$. Ist x der in Peters Aufgabe gesuchte Abstand, so ist der Durchmesser des zweiten (größeren) Kreises $d + 2x$. Andererseits ist dessen Umfang $u + 1 = \pi d + 1$; also gilt $\pi(d + 2x) = \pi d + 1$, woraus $2\pi x = 1$, $x = \frac{1}{2\pi}$ folgt.

Analoge Schlüsse gelten aber auch für die Aufgabe von Fritz, wenn d (= 1 mm) = 0,001 m ist, da nämlich der erhaltene Wert $x = \frac{1}{2\pi}$ nicht von d abhängt. Somit stimmt die Behauptung von Fritz. Der gesuchte Abstand beträgt in beiden Fällen $\frac{1}{2\pi}$ (in m), das sind etwa 16 cm.

Aufgabe 190814:
Von zwei Kreisen werde vorausgesetzt, dass sie sich von außen in einem Punkt P berühren. Die Gerade, die beide Kreise in P berührt, sei t. Ferner sei s eine weitere gemeinsame Tangente beider Kreise; sie berühre diese in den Punkten Q bzw. R. Der Schnittpunkt von s mit t sei S.

Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen S der Mittelpunkt der Strecken QR ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

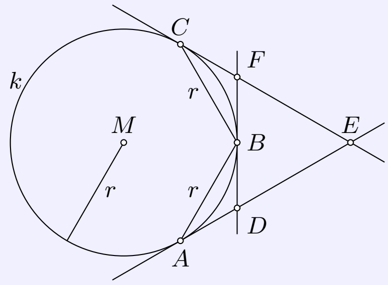


Der Mittelpunkt des von s in Q berührten Kreises sei M. Dann gilt $\triangle SQM \cong \triangle SPM$; denn diese Dreiecke stimmen in den Seitenlängen $SM = SN$, $MQ = MP$ und in der Größe $\angle SQM = \angle SPM$ desjenigen Winkels überein, der in beiden Dreiecken als rechter Winkel jeweils der größten Seite gegenüberliegt. Daher ist $SQ = SP$ (1) (entsprechende Seiten in kongruenten Dreiecken).
Ebenso folgt $SR = SP$. (2)

Aus (1) und (2) folgt die Behauptung $SQ = SR$.

Aufgabe 200814:

Gegeben sei ein Kreis k mit dem Radius r. AB und BC seien zwei Sehnen der Länge r. In A, B und C seien die Tangenten an den Kreis gelegt. Diese ergeben Schnittpunkte D, E und F, wie im Bild angegeben.



Beweise aus diesen Voraussetzungen, dass das Dreieck DEF gleichseitig ist!

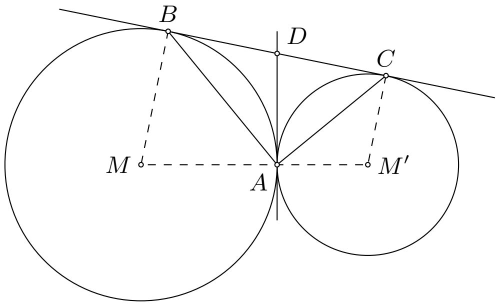
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Ist M der Mittelpunkt von k, so gilt nach Voraussetzung $MB \perp FD$. Ferner sind die Dreiecke ABM und BCM gleichseitig. Daher ist $\angle MBC = \angle MBA = 60°$.
Folglich gilt $\angle CBF = \angle ABD = 30°$.
Da $MC \perp EC$ und $\angle MCB = 60°$ gilt, folgt $\angle BCF = 30°$. Entsprechend erhält man $\angle BAD = 30°$.

Daraus folgt sowohl $\angle DFE = 60°$ (1) als auch $\angle FDE = 60°$ (2) als Außenwinkel der Dreiecke CBF bzw. ADB.
Aus (1) und (2) folgt, dass das Dreieck DEF gleichseitig ist; w. z. b. w.

Aufgabe 220814:
In einer Ebene seien k_1 und k_2 zwei Kreise, die sich in einem Punkt A von außen berühren. Eine der gemeinsamen äußeren Tangenten von k_1 und k_2 berühre den Kreis k_1 in B, den Kreis k_2 in C.

Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen stets $\angle BAC$ ein rechter Winkel ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Die gemeinsame innere (also durch A gehende) Tangente von k_1 und K_2 schneide die durch E und C gehende Tangente in D. Nach dem Satz von der Gleichheit der Tangentenabschnitte gilt dann

$$DB = DA = DC$$

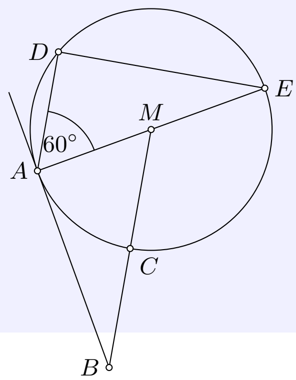
Daher liegt A auf dem Kreis mit BC als Durchmesser. Nach dem Satz des Thales ist somit $\angle BAC$ ein rechter Winkel.

Aufgabe 260813:
Es sei k ein Kreis, sein Mittelpunkt sei M. Vier Punkte A, C, E und D seien in dieser Reihenfolge auf k so gelegen, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind (siehe Bild):

(1) A, M und E liegen auf ein und derselben Geraden.

(2) Es gilt $\angle MAD = 60°$.

(3) Die Gerade durch M und C schneide die in A an k gelegte Tangente in einem Punkt B derart, daß $\overline{MC} = \overline{BC}$ gilt.



Untersuche, ob unter diesen Voraussetzungen die Strecken AB und DE die gleiche Länge haben!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Strecken AB und DE sind Seiten der Dreiecke MAB bzw. ADE. Kann man zeigen, dass diese beiden Dreiecke kongruent sind, so folgt $\overline{AB} = \overline{DE}$.

Der Radius von k sei r. Nach Voraussetzung (1) ist AE ein Durchmesser von k, also gilt $\overline{AE} = 2r$. Als Radius von k ist auch $\overline{MC} = r$. Nach (3) folgt hieraus $\overline{MB} = 2r$. Somit gilt

$$\overline{MB} = \overline{AE}. \tag{4}$$

Nach dem Satz von Thales gilt $\overline{\angle ADE} = 90°$. Da die Tangente senkrecht auf dem Berührungsradius steht, gilt $\overline{\angle MAB} = 90°$, also ist

$$\overline{\angle MAB} = \overline{\angle ADE}. \tag{5}$$

Da A und D auf k liegen, ist das Dreieck MAD gleichschenklig mit $\overline{MA} = \overline{MD}$. Für den Basiswinkel folgt aus (2) daher $\overline{\angle MDA} = \overline{\angle MAD} = 60°$, nach dem Innenwinkelsatz also $\overline{\angle AMD} = 60°$. Also ist das Dreieck MAD sogar gleichseitig, und es gilt

$$\overline{MA} = \overline{AD}. \tag{6}$$

In den Dreiecken MAB bzw. ADE liegt der in (5) genannte Winkel als rechter Winkel der größten Seite gegenüber, die in (4) genannt ist. Nach dem Kongruenzsatz sSW folgt somit $\triangle MAB \cong \triangle ADE$ und damit $\overline{AB} = \overline{DE}$.

Anderer Lösungsweg: Wie oben zeigt man (4) und (5). Nach der Umkehrung des Thalessatzes liegt nun A auf dem Kreis mit dem Durchmesser BM, der nach (3) als Mittelpunkt C hat. Somit ist $\overline{CA} = \overline{CM} = \overline{AM}$, also das Dreieck ACM gleichseitig, und es folgt

$$\overline{\angle BMA} = \overline{\angle CMA} = 60°,$$

nach (2) also weiter

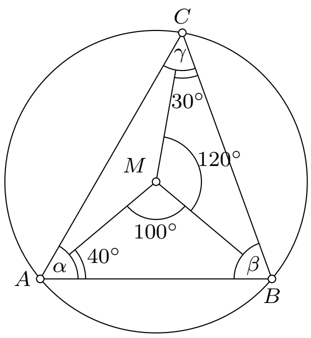
$$\overline{\angle BMA} = \overline{\angle MAD} = \overline{\angle EAD}. \tag{7}$$

Aus (4), (5), (7) folgt nach dem Kongruenzsatz wws, dass $\triangle MAB \cong \triangle ADE$, also $\overline{AB} = \overline{DE}$ gilt.

Aufgabe 280812:
Es sei M der Umkreismittelpunkt eines spitzwinkligen Dreiecks ABC. Die Größe des Winkels $\angle BAM$ betrage $40°$ und die des Winkels $\angle BCM$ sei $30°$.

Ermittle aus diesen Angaben die Größen α, β, γ der drei Innenwinkel des Dreiecks ABC!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Da das Dreieck ABC spitzwinklig ist, liegt M innerhalb des Dreiecks. Da M Umkreismittelpunkt des Dreiecks ist, folgt ferner $AM = BM = CM$.

Somit sind die Dreiecke ABM, BCM und CAM gleichschenklig, und es gilt nach dem Basiswinkelsatz sowie nach dem Innenwinkelsatz

$$\beta = \angle CBA = \angle CBM + \angle ABM = \angle BCM + \angle BAM = 70°$$
$$\angle AMB = 180° - 2 \cdot 40° = 100°$$
$$\angle BMC = 180° - 2 \cdot 30° = 120°$$

Also ist $\angle AMC = 360° - 100° - 120° = 140°$ (Ergänzung zum Vollwinkel), und es folgt weiter nach dem

Basiswinkelsatz und dem Innenwinkelsatz $\angle CAM = \angle ACM = \frac{1}{2}(180° - 140°) = 20°$.

Damit erhalten wir

$$\alpha = \angle BAC = \angle BAM + \angle CAM = 60° \qquad \text{und} \qquad \gamma = \angle ACB = \angle ACM + \angle BCM = 50°$$

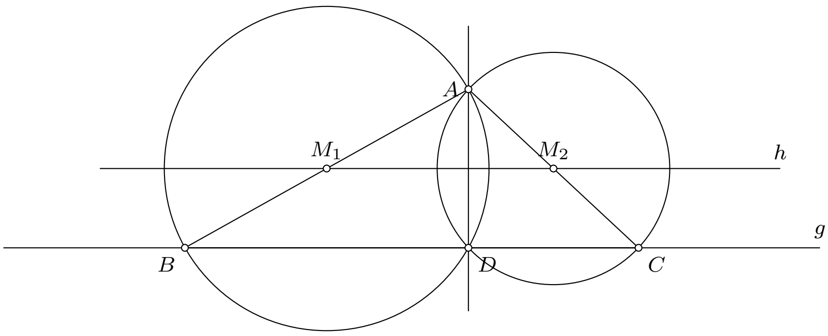
Die Größen der Innenwinkel bei A,B,C sind somit $\alpha = 60°, \beta = 70°$ und $\gamma = 50°$.

Aufgabe 290813:
Zwei Kreise k_1 und k_2 seien so gelegen, dass sie zwei verschiedene Schnittpunkte A und D haben und dass ihre Mittelpunkte M_1, M_2 auf verschiedenen Seiten der Geraden durch A und D liegen. Der von A verschiedene Schnittpunkt, den k_1 mit der Geraden durch A und M_1 hat, sei B. Der von A verschiedene Schnittpunkt, den k_2 mit der Geraden durch A und M_2 hat, sei C.

a) Weise nach, dass unter diesen Voraussetzungen stets der Punkt D auf der Geraden g durch B und C liegen muss!

b) Stelle eine Vermutung über die gegenseitige Lage der Geraden g und der Geraden h durch M_1, M_2 auf! Beweise deine Vermutung!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



a) Da D auf einem Halbkreis über AB als Durchmesser liegt, folgt nach dem Satz des Thales $\angle BDA = 90°$. Ebenso folgt $\angle ADC = 90°$.
Da B und C (ebenso wie M_1 und M_2) auf verschiedenen Seiten der Geraden durch A und D liegen, folgt $\angle BCD = \angle BDA + \angle ADC = 180°$. Also liegen B, D, C auf einer gemeinsamen Geraden.

b) Vermutung: Unter den genannten Voraussetzungen ist stets $g \parallel h$.

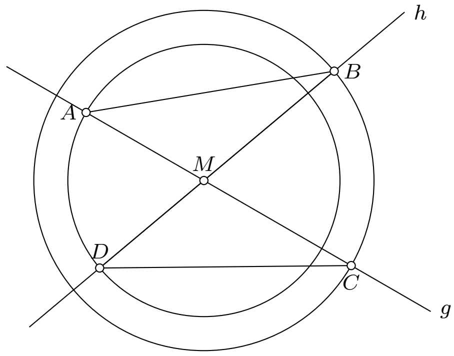
1. Beweismöglichkeit:
Die Verbindungsgerade h der Kreismittelpunkte steht auf der Schnittsehne AD senkrecht. Nach a) steht auch g auf AD senkrecht. Also ist $g \parallel h$.

2. Beweismöglichkeit:
Nach einer Strahlensatz-Umkehrung folgt $g \parallel h$ aus $AM_1 : AB = AM_2 : AC = 1 : 2$.

Aufgabe 340813:
Zeichne zwei Kreise k_1 und k_2 mit gemeinsamem Mittelpunkt M! Zeichne dann zwei Geraden g und h, die durch M gehen! Einen der Schnittpunkte von k_1 mit g bezeichne mit A, einen der Schnittpunkte von k_2 mit h bezeichne mit B! Weiterhin bezeichne mit C denjenigen Schnittpunkt von k_2 mit g, für den M zwischen A und C liegt; und bezeichne mit D denjenigen Schnittpunkt von k_1 mit h, für den M zwischen B und D liegt!

Untersuche, ob für so konstruierte Punkte A, B, C, D stets eine der Aussagen $\overline{AB} < \overline{CD}$, $\overline{AB} = \overline{CD}$, $\overline{AB} > \overline{CD}$ gilt! Wenn das für eine dieser Aussagen der Fall ist, beweise dies!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Die Abbildung zeigt eine Zeichnung der verlangten Art.

Für so konstruierte Punkte A,B,C,D gilt stets $AB = CD$.
Beweis:
Da A und D auf k_1, liegen, gilt $MA = MD$ (1); da B und C auf k_2 liegen, gilt $MB = MC$. (2)
Aus der Lage von M zwischen A und C sowie zwischen B und D folgt, dass $\angle AMB$ und $\angle DMC$ Scheitelwinkel voneinander sind; daher gilt $\angle AMB = \angle DMC$. (3)

Aus (1),(2),(3) folgt $\angle ABC$ nach dem Kongruenzsatz sws $\triangle AMB \cong \triangle DMC$.
In diesen Dreiecken sind AB und DC einander entsprechende Seiten; damit folgt die Behauptung $AB = CD$.

Aufgabe 340814:
An einer Analog-Uhr (einer Uhr mit Minutenzeiger und Stundenzeiger) kann man den Winkel zwischen den Zeigern so messen, dass man die Gradzahl angibt, um die man den Minutenzeiger im Uhrzeigersinn drehen müsste, bis er den (hierbei unbeweglich gedachten) Stundenzeiger erreicht.
Neben einer solchen Uhr, von der wir voraussetzen, dass sie stets genau geht, denken wir eine Digitaluhr betrachtet, die ebenfalls genau geht, d. h.: Wir setzen voraus, dass sich ihre Stunden-, Minuten- und Sekundenanzeige stets zu Beginn jeder Sekunde auf die richtige Zahlenangabe einstellt.

a) Welche Zahlen zeigt die Digitaluhr zu allen denjenigen Zeitpunkten zwischen 9.30 Uhr und 12.30 Uhr, in denen die beiden Zeiger der Analog- Uhr genau aufeinander zu liegen kommen?

b) Wie viele Minuten nach 9.30 Uhr bilden die beiden Zeiger der Analog-Uhr erstmals einen ebenso großen Winkel miteinander wie 9.30 Uhr?

Hinweis: Fällt ein Zusammenhang mit den Ergebnissen der Aufgabe a) auf?

c) Welche Zahlen zeigt die Digitaluhr zu allen denjenigen Zeitpunkten zwischen 3 Uhr und 6 Uhr, in denen die beiden Zeiger der Analog-Uhr einen Winkel von 30° miteinander bilden?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Der Minutenzeiger bewegt sich in jeder Minute um 6 Grad vorwärts, der Stundenzeiger 12 mal so langsam, also in jeder Minute um $\frac{1}{2}$ Grad.

a) Um 9.30 Uhr zeigt der Minutenzeiger auf die „6“, der Stundenzeiger auf die Mitte zwischen „9“ und „10“, also $(3+\frac{1}{2})\cdot 30$ Grad vor dem Minutenzeiger. Liegen die Zeiger nach x Minuten übereinander, so gilt folglich

$$x\cdot 6=(3+\frac{1}{2})\cdot 30+x\cdot\frac{1}{2}\qquad\rightarrow\qquad x=\frac{19}{11}$$

Da $\frac{1}{11}$ Minute wegen $\frac{60}{11}=5\frac{5}{11}$ dasselbe wie $5\frac{5}{11}$ Sekunden sind, zeigt die Digitaluhr zu dieser Zeit 09 : 49 : 05 Uhr. (1)

II. Vergehen bis zum nächsten Übereinanderliegen u Minuten, in denen der Minutenzeiger eine volle Umdrehung (360°) und zusätzlich denselben Winkel wie der Stundenzeiger zurücklegt, so gilt also

$$u\cdot 6=360+u\cdot\frac{1}{2}\qquad\rightarrow\qquad u=65\frac{5}{11}$$

Somit sind die nächsten gesuchten Zeitpunkte:
$65\frac{4}{11}$ Minuten nach $9.49\frac{1}{11}$ Uhr, d.i. $10.54\frac{6}{11}$ Uhr, digital 10 : 54 : 32 Uhr, (2)
$65\frac{4}{11}$ Minuten nach $10.54\frac{6}{11}$ Uhr, d.i. 12.00 Uhr, digital 12 : 00 : 00 Uhr (3)
Damit sind die gesuchten Anzeigen (1), (2), (3) gefunden.

b) Der Zeitraum von einer Zeigerstellung bis zur nächsten mit gleichem Winkel zwischen den Zeigern ist genau so lang wie der Zeitraum von einer Begegnung bis zur nächsten Begegnung, also $65\frac{5}{11}$ Minuten.

c) Bilden die Zeiger erstmals x Minuten nach 3 Uhr einen Winkel von 30°, so hat sich der Winkel, der um 3 Uhr noch 90° betragen hatte, um 60° verringert, indem nämlich der Minutenzeiger $x\cdot 6$ Grad zurücklegte, der Stundenzeiger aber nur $x\cdot\frac{1}{2}$ Grad. Daher gilt

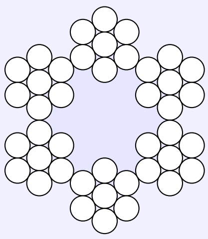
$$x\cdot 6=60+x\cdot\frac{1}{2}\qquad\rightarrow\qquad x=10\frac{10}{11}$$

Der erste gesuchte Zeitpunkt ist also $3.10\frac{10}{11}$ Uhr, wegen $\frac{600}{11}=54\frac{6}{11}$ digital 03 : 10 : 54 Uhr.

II. Die nächsten Zeitpunkte sind nach b) jeweils $65\frac{5}{11}$ Minuten später:
digital 04 : 16 : 21 Uhr bzw. 05 : 21 : 49 Uhr.

II. Runde 2

Aufgabe 020825:



Drahtseile bestehen häufig aus Litzen, die wieder aus einzelnen Stahldrähten bestehen. Die Litzen sind um eine gefettete Hanfseele geschlagen, die das Seil von innen her schmiert. Die Abbildung zeigt den Querschnitt durch ein solches Drahtseil, das aus 42 Drähten und einer (grau gefärbten) Hanfseele besteht. Jeder Draht hat einen Durchmesser von 1 mm.

Wie groß ist der Durchmesser des dem Seilquerschnitt umbeschriebenen Kreises? Begründung!

Lösung von Carsten Balleier:
Eine wesentliche Eigenschaft von Kreisen ist, dass man sie in regelmäßige Sechsecke einbeschreiben kann, bei denen der Abstand gegenüberliegender Seiten gleich dem Kreisdurchmesser ist. Demzufolge kann man den grau gefärbten Innenbereich mit diesen Sechsecken „parkettieren“; der Rest ist dann eine Abzählaufgabe.

Der Durchmesser des Umkreises wird von 9 aneinanderliegenden Kugeln gebildet, er ist also 9 mm.

Aufgabe 080821:

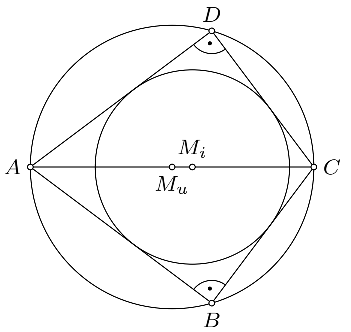
a) Beweise folgende Aussage:

Wenn in einem Drachenviereck $ABCD$ zwei gegenüberliegende Innenwinkel je $90°$ groß sind, dann hat es sowohl einen Inkreis als auch Umkreis.

b) Zeige, dass diese Kreise dann auch jeweils eindeutig bestimmt sind!

c) Untersuche, unter welcher Bedingung die Mittelpunkte dieser beiden Kreise zusammenfallen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



a) Jedes konvexe Drachenviereck besitzt einen Inkreis.

Beweis:
Hat ein Drachenviereck $ABCD$ etwa die Gerade AC als Symmetrieachse, so sind die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle ACD$ kongruent (sss). Die Halbierenden der Winkel bei B und D schneiden sich daher auf AC. Ihr Schnittpunkt sei M_i.
Da AC Halbierende der Winkel bei A und C ist, ist M_i Schnittpunkt aller vier Winkelhalbierenden des Vierecks $ABCD$. Daher hat M_i von allen vier Seiten des Vierecks denselben Abstand.
Wegen der Konvexität von $ABCD$ fallen auch die Fußpunkte der von M_i auf die Geraden durch A, B; durch B, C; durch C, D bzw. D, A gefällten Lote ins Innere der Strecken AB, BC, CD bzw. DA. Daher ist M_i Inkreismittelpunkt des Drachenvierecks $ABCD$.

Für ein Drachenviereck $ABCD$ mit AC als Symmetrieachse sind nun unter der zusätzlichen Voraussetzung der Aufgabenstellung folgende zwei Fälle möglich:

1. Fall: $\angle ABC = \angle ADC = 90°$
In diesem Fall hat das Drachenviereck $ABCD$ als Umkreis den Thaleskreis über dem Durchmesser AC. Der Umkreismittelpunkt M_u liegt auf AC und halbiert AC.

2. Fall: $\angle BAD = \angle BCD = 90°$
In diesem Fall folgt aus

$$\angle ABC + \angle ADC = 360° - (\angle BAD + \angle BCD) = 180°$$

$\angle ABC = \angle ADC$ (dies wegen $\triangle ABC \cong \triangle ADC$), dass $\angle ABC = \angle ADC = 90°$ gilt, also zugleich auch der 1. Fall vorliegt.

b) Der Umkreis ist eindeutig bestimmt bereits dadurch, dass er durch drei der Punkte A, B, C, D geht, etwa durch A, B, C (sein Mittelpunkt ist der Schnittpunkt zweier Mittelsenkrechten des Dreiecks $\triangle ABC$). Entsprechend ist der Mittelpunkt des Inkreises (und damit dieser selbst) eindeutig bestimmt als Schnittpunkt etwa der Halbierenden der Innenwinkel bei A und B.

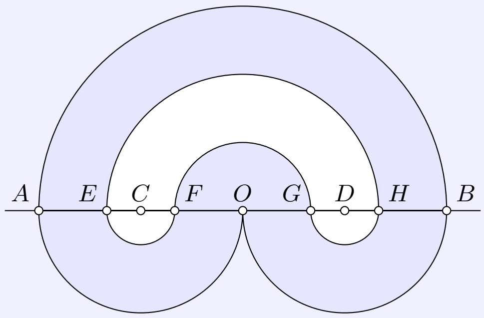
(Bemerkung: Dies gilt auch im Quadratfall, in welchem nicht etwa drei Vierecksseiten, genügend verlängert, ein Dreieck bilden.)

c) M_i und M_u fallen genau dann zusammen, wenn im Dreieck $\triangle ABC$ die Winkelhalbierende des Winkels ABC und die Seitenhalbierende der Seite AC zusammenfallen. Das ist genau im gleichschenkligen Dreieck der Fall, d. h., M_i und M_u fallen genau dann zusammen, wenn das Drachenviereck $ABCD$ ein Quadrat ist.

Aufgabe 090822:
Auf einer Geraden seien die Punkte A, E, C, F, O, G, D, H, B in dieser Reihenfolge so gelegen, dass gilt:

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= 6 \text{ cm} \\ \overline{AE} = \overline{EF} = \overline{FO} = \overline{OG} = \overline{GH} = \overline{HB} &= 1 \text{ cm;} \\ \overline{EC} = \overline{CF} = \overline{GD} = \overline{DH} &= 0{,}5 \text{ cm} \end{aligned}$$

Über den Strecken AB, EH und FG seien Halbkreise in die eine Halbebene und über den Strecken AO, OB, EF und GH Halbkreise in die andere Halbebene bezüglich der Geraden durch A und B gezeichnet.



Berechne den Inhalt der farbigen Fläche!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Der gesuchte Flächeninhalt A ist gleich der Summe der Inhalte der Halbkreisflächen über AB, FG, AO und OB vermindert um die Summe der Inhalte der Halbkreisflächen über EH, EF und GH.

Wegen $AB = 6$ cm, $FG = 2$ cm, $AO = OB = 3$ cm, $EH = 4$ cm, $EF = GH = 1$ cm gilt daher:

$$A = \frac{\pi}{8}(36 + 4 + 9 + 9 - 16 - 1 - 1) \text{ cm}^2 = 5\pi \text{ cm}^2$$

Der Inhalt der schraffierten Fläche beträgt 5π cm^2, das sind angenähert 15,71 cm^2.

Aufgabe 090823:

a) Wie oft insgesamt stehen im Verlaufe von 24 Stunden (von 0.00 Uhr bis 24.00 Uhr) der Stunden- und der Minutenzeiger einer Uhr senkrecht aufeinander?

b) Berechne insbesondere alle derartigen Zeitpunkte zwischen 4.00 Uhr und 5.00 Uhr!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(I) Im Zeitraum von je einem Übereinanderstehen der beiden Zeiger bis zum nächsten nimmt der Winkel zwischen den Zeigern (gemessen im Uhrzeigersinn vom Stundenzeiger bis zum Minutenzeiger) alle Werte von 0° bis 360° an, jeden genau einmal. Unter diesen Zeigerstellungen befinden sich genau zwei der gesuchten, nämlich die mit den Winkeln 90° und 270°.

(II) In der Zeit von 0 Uhr bis 12 Uhr führt der Minutenzeiger genau 12 volle Umdrehungen aus, der Stundenzeiger genau eine in gleicher Richtung.
Daher wird dieser Zeitraum durch die Zeitpunkte des Übereinanderstehens der beiden Zeiger in 11 Teile geteilt (und zwar wegen der Gleichförmigkeit der Bewegungen in gleichlange).

(III) Aus (I) und (II) folgt zunächst: Die Zeit von 0 Uhr bis 24 Uhr wird durch die Zeitpunkte des Übereinanderstehens in 22 Teile geteilt, und in jedem dieser Teilzeiträume befinden sich genau 2 gesuchte Zeitpunkte.
Deren Gesamtzahl beträgt somit 44.

(IV) Aus (I), (II) und der Gleichförmigkeit der Bewegungen folgt ferner: Der Zeitraum von 0 Uhr bis 12 Uhr wird, durch diejenigen Zeitpunkte, die den Winkeln $0°, 90°, 180°, 270°$ entsprechen, in 44 gleichlange Teile geteilt.
Diese Zeitpunkte ergeben sich somit als die ersten 43 positiven ganzzahligen Vielfachen von $\frac{12}{44}$ h $= \frac{3}{11}$ h.

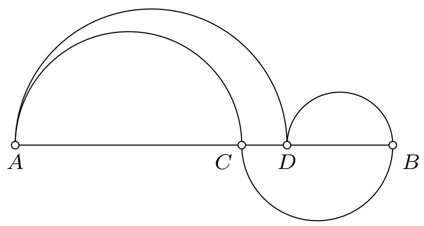
Die Zeitpunkte mit den Winkeln 90° und 270° sind dabei die ungeradzahligen unter diesen Vielfachen. Von diesen liegen zwischen 4.00 Uhr und 5.00 Uhr genau diejenigen $n \cdot \frac{3}{11}$ h (n ungerade), bei denen n die Ungleichung $4 < n \cdot \frac{3}{11} < 5$ oder gleichbedeutend $\frac{44}{3} < n < \frac{55}{3}$ erfüllt, das sind die Zeitpunkte

$$15 \cdot \frac{11}{3}\text{h} = 4\text{h } 5\frac{5}{11} \text{ min} \qquad ; \qquad 17 \cdot \frac{11}{3}\text{h} = 4\text{h } 38\frac{2}{11} \text{ min}$$

Aufgabe 110822:
Es sei AB eine Strecke gegebener Länge a, auf der zwei Punkte C und D liegen. Dabei liege C zwischen A und D und D zwischen C und B. Über AC, AD und DB seien auf derselben Seite der Geraden durch A und B Halbkreise geschlagen, und über CB sei ein Halbkreis auf der anderen Seite der Geraden geschlagen.

Es ist die Summe s der Längen aller dieser Halbkreisbögen in Abhängigkeit von a zu ermitteln.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Die Länge des Halbkreisbogens über AC beträgt $AC \cdot \frac{\pi}{2}$. Die Länge des Halbkreisbogens über AD beträgt $AD \cdot \frac{\pi}{2}$. Die Länge des Halbkreisbogens über DB beträgt $DB \cdot \frac{\pi}{2}$ und die Länge des Halbkreisbogens über CB beträgt $CB \cdot \frac{\pi}{2}$.
Daher beträgt die gesuchte Summe

$$s = (AC + AD + DB + CB) \cdot \frac{\pi}{2} = 2 \cdot AB \cdot \frac{\pi}{2} = a \cdot \pi$$

Aufgabe 110824:
In einer Ebene ε seien zwei voneinander verschiedene Punkte P und Q sowie eine durch Q gehende Gerade g beliebig gegeben.

a) Beweise, dass dann stets der Spiegelpunkt P' von P bezüglich g auf dem Kreis um Q mit dem Radius $\overline{PQ}$ liegt!

b) Beweise, dass es umgekehrt zu jedem Punkt P' des Kreises um Q mit dem Radius $\overline{PQ}$ eine durch Q verlaufende Gerade g gibt, bezüglich der P' der Spiegelpunkt von P ist!

c) Beweise: Ist P^* ein Punkt, der nicht auf dem Kreis um Q mit dem Radius $\overline{PQ}$ liegt, so gibt es keine durch Q verlaufende Gerade, bezüglich der P^* der Spiegelpunkt von P wäre!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Liegt P auf g, so auch P', und es gilt $QP = QP'$ (1).
Liegt P nicht auf g, so ist $P' \neq P$, und die Gerade durch P und P' steht senkrecht auf g. Ist S ihr Schnittpunkt mit g, so gilt ferner $SP = SP'$. Wenn nun $S = Q$ ist, so ist damit (1) gezeigt.
Wenn aber $S \neq Q$ ist, so erhält man $\triangle QSP = \triangle QSP'$ (sws) und hieraus ebenfalls (1). Mit (1) ist bereits die Behauptung bewiesen.

b) Ist $P' = P$, so hat die Gerade g durch P, Q die behauptete Eigenschaft.

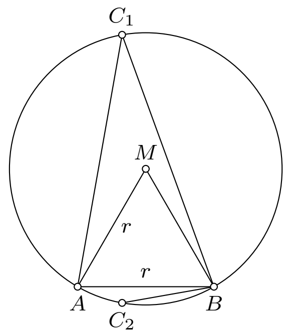
Ist $P' \neq P$ ein Punkt des Kreises um Q mit PQ, so gilt (1), und daher geht die Mittelsenkrechte g von PP' durch Q. Da P' der Spiegelpunkt von P bezüglich g ist, ist somit die Behauptung bewiesen.

c) Gäbe es entgegen der Behauptung doch eine Gerade g mit den genannten Eigenschaften, so läge nach a) der Spiegelpunkt P^* von P bezüglich g auf dem Kreis um Q mit PQ. Das steht im Widerspruch zur Behauptung.
Es gibt für die genannten Punkte P^* mithin keine durch Q verlaufende Gerade, bezüglich der P^* der Spiegelpunkt von P wäre.

Aufgabe 120822:
Es sei k ein Kreis mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r, AB eine Sehne von k der Länge r und C ein von A und B verschiedener Punkt auf k.

Ermittle alle Möglichkeiten für die Größe des Winkels $\angle BCA$!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Laut Aufgabe ist das Dreieck $\triangle ABM$ gleichseitig mit $AB = AM = r$.
Wir unterscheiden nun bezüglich der Lage des Punktes C zwei Fälle:



Fall 1: Der Punkt C_1 liege auf dem größeren der beiden zu $\overset{\frown}{AB}$ gehörenden Kreisbögen. Dann ist $\angle AC_1B$ Peripheriewinkel zum Zentriwinkel $\angle AMB$. Da dieser als Innenwinkel im gleichseitigen Dreieck $\triangle ABM$ eine Größe von 60° hat, hat $\triangle AC1B$ eine Größe von 30°.

Fall 2: Der Punkt C_2 liege auf dem kleineren der beiden zu AB gehörenden Kreisbögen. Dann ist AC_2BC_1 ein Sehnenviereck. Nach einem bekannten Satz ergänzen sich im Sehnenviereck die Größen der gegenüberliegende Winkel zu 180°. Daher hat der Winkel $\angle AC_2B$ eine Größe von $180° - 30° = 150°$.

Aufgabe 130824:
Zwei Kreise k_1 und k_2 mögen einander in zwei verschiedenen Punkten A und B schneiden.
Zwei voneinander verschiedene parallele Geraden g_1 und g_2 durch A bzw. B seien so gelegen, dass g_1 den Kreis k_1 in einem von A verschiedenen Punkte C und den Kreis k_2 in einem von A verschiedenen Punkte D schneidet, dass ferner g_2 den Kreis k_1 in einem von B verschiedenen Punkte E und den Kreis k_2 in einem von B verschiedenen Punkte F schneidet und dass dabei A zwischen C und D sowie B zwischen E und F liegt.

Beweise, dass dann $\overline{CD} = \overline{EF}$ gilt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die zueinander parallelen Geraden g_1 und g_2 schneiden aus den Kreisen k_1 und k_2 je zueinander parallele Sehnen aus. Nun seien s_1 bzw. s_2 die Symmetrieachsen dieser beiden Sehnenpaare.

Dann gilt $s_1 \parallel s_2$ (wegen $s_1 \perp g_1$ und $s_2 \perp g_2$). Durch Spiegelung an s_1 geht CE in AB und durch Spiegelung an s_2 geht AB in DF über, so dass $CE \parallel DF$ folgt.

Somit ist $CEFD$ ein Parallelogramm, und es gilt $CD = EF$, w. z. b. w.

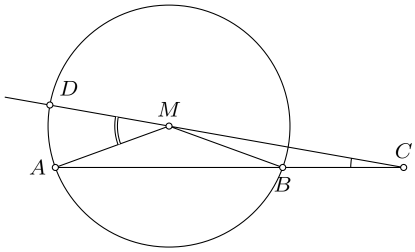
Aufgabe 150823:
Es sei k ein Kreis mit dem Radius r und dem Mittelpunkt M. Ferner sei AB eine Sehne von k, die nicht Durchmesser von k ist. Auf dem Strahl aus A durch B sei C der Punkt außerhalb AB, für den $\overline{BC} = r$ gilt. Der Strahl aus C durch M schneide k in dem außerhalb CM gelegenen Punkt D.

Beweise, dass dann $\overline{\angle AMD} = 3 \cdot \overline{\angle ACM}$ gilt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Der Winkel $\angle AMD$ ist Außenwinkel des Dreiecks ACM. Folglich gilt: $\angle AMD0\angle ACM + \angle MAC$.
Nun gilt: $AM = BM = BC = r$. Folglich sind die Dreiecke ABM und BMC gleichschenklig. Daher gilt:

$$(\angle MAC =)\angle MAB = \angle MBA \quad (1) \qquad \text{und} \qquad \angle BMC = \angle BCM (= \angle ACM) \quad (2)$$

Der Winkel $\angle MBA$ ist Außenwinkel des Dreiecks BMC und wegen (2) daher doppelt so groß wie $\angle ACM$.



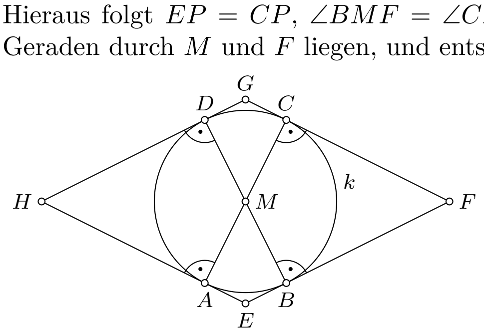
Folglich ist wegen (1) $\angle MAC$ doppelt so groß wie $\angle ACM$ und mithin $\angle AMD$ dreimal so groß wie $\angle ACM$, w. z. b. w.

Aufgabe 160823:
In einem Kreis k seien zwei verschiedene Durchmesser, die nicht aufeinander senkrecht stehen, eingezeichnet. Ferner sei durch jeden der vier Endpunkte beider Durchmesser die Tangente gelegt.

Beweise, dass die Schnittpunkte E, F, G, H dieser Tangenten die Ecken eines nichtquadratischen Rhombus sind!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Werden die in der Aufgabe genannten Durchmesser mit AC und BC sowie die erwähnten Schnittpunkte mit E, F, G, H wie in der Abbildung bezeichnet, dann gilt: $AM = MC = BM = MD$.
Folglich gilt $\triangle MBP \cong \triangle MCF$ und $\triangle MAH \cong \triangle MDH$ (s, s, rechter Winkel).

Hieraus folgt $EP = CP$, $\angle BMF = \angle CMF = \frac{1}{2}\angle BMC$, weil B und C auf verschiedenen Seiten der Geraden durch M und F liegen, und entsprechend $DH = AH$, $\angle DMH = \angle AMH = \frac{1}{2}\angle DMA$.



Da nun als Gleichheit von Scheitelwinkeln $\angle BMC = \angle DMA$ gilt, folgt $\angle BMF = \angle DMH$ und damit $\triangle MBF \cong \triangle MDH$ (sww), also

$$BF = CF = DH = AH \qquad (1)$$

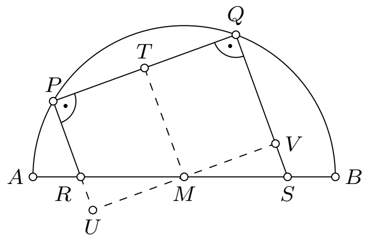
Entsprechend erhält man $BE = AE = DG = GG$. (2)
Aus (1) und (2) folgt: $EH = EF = GF = GH$, d. h., $EFGH$ ist ein Rhombus.

Im Viereck $AMDH$ sind die Winkel bei A und D rechte. Daher ergänzen sich $\angle AMD$ und $\angle AHD$ zu 180°. Laut Voraussetzung ist $\angle AMD$ kein rechter Winkel. Folglich ist auch $\angle AHD$ kein rechter Winkel und $EFGH$ mithin kein Quadrat.

Aufgabe 200823:
Gegeben sei ein Halbkreis mit dem Durchmesser AB und dem Mittelpunkt M. Ferner seien P und Q zwei von A und B und voneinander verschiedene Punkte auf diesem Halbkreis. Die in P und Q auf der Geraden durch P und Q errichteten Senkrechten mögen AB in R bzw. in S schneiden.

Beweise, dass dann $\overline{RM} = \overline{SM}$ gilt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

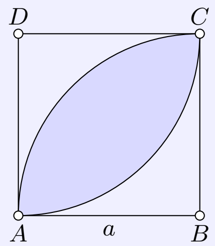


Da die Mittelsenkrechte einer Sehne stets durch den Mittelpunkt des Kreises verläuft, schneidet die Mittelsenkrechte auf PQ den Durchmesser AB in M.
Sie verläuft außerdem parallel zu PR und QS und ist somit Mittellinie des Trapezes $PQSH$. Folglich halbiert sie die Trapezseite RS in M, d. h., es gilt $RM = SM$, w. z. b. w.

Aufgabe 210822:
Gegeben sei die Seitenlänge a eines Quadrates $ABCD$. Um B und D seien mit dem Radius a Kreisbögen gezeichnet, die in dem Quadrat $ABCD$ eine blattartige Figur (im Bild blau) einschließen.

a) Berechne für $a = 3{,}5$ cm den Flächeninhalt der schraffierten Fläche!

b) Ermittle eine allgemeine Formel, die angibt, wie der Flächeninhalt der blattartigen Figur von der gegebenen Seitenlänge a abhängt!



Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Durch die Diagonale AC wird das Quadrat und (wegen der symmetrischen Lage der beiden Kreisbögen) auch die schraffierte Fläche halbiert.
Daher ergibt sich die Hälfte des gesuchten Flächeninhaltes, indem man vom Flächeninhalt des um B gezeichneten Viertelkreises den Flächeninhalt des Dreiecks ABC (d. h. den halben Flächeninhalt des Quadrates) subtrahiert. Also beträgt der gesuchte Flächeninhalt

$$2 \cdot \left(\frac{\pi}{4} \cdot 3{,}5^2 - \frac{1}{2} \cdot 3{,}5^2\right) \text{cm}^2 = \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \cdot 3{,}5^2 \text{ cm}^2 \approx 6{,}98 \text{ cm}^2$$

b) Mit derselben Begründung wie in a) ergibt sich für den gesuchten Flächeninhalt die Formel

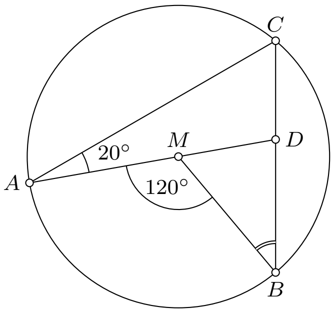
$$2 \cdot \left(\frac{\pi}{4} \cdot a^2 - \frac{1}{2} \cdot a^2\right) = \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) a^2$$

Aufgabe 230823:
Es sei k ein Kreis mit dem Mittelpunkt M. Drei Punkte A, B und C auf k seien so gelegen, dass der Punkt M im Innern des Dreiecke ABC liegt. Ferner sei $\overline{\angle CAM} = 20°$ und $\overline{\angle AMB} = 120°$.

Ermittle aus diesen Voraussetzungen die Größe des Winkels $\angle CBM$!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Nach dem Satz über Peripheriewinkel und Zentriwinkel gilt: $\angle BCA = 120° : 2 = 60°$.
D sei der Schnittpunkt der Geraden durch A und M mit der Sehne BC. Dann gilt aufgrund des Außenwinkelsatzes für das Dreieck ADC:

$$\angle ADB = 20° + 60° = 80° \qquad (1)$$



Ferner ist $\angle BMD$ Nebenwinkel zu $\angle AMB$, und somit gilt:

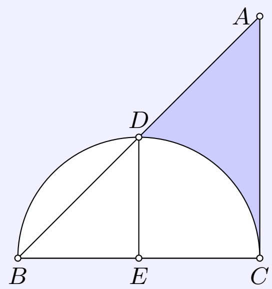
$$\angle BMD = 180° - 120° = 60° \qquad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt nach dem Satz über die Summe der Innenwinkel im Dreieck, angewandt auf das Dreieck DMB:

$$\angle DBM (= \angle CBM) = 180° - (60° + 80°) = 40°$$

Folglich gilt für den gesuchten Winkel $\angle CBM = 40°$.

Aufgabe 250824:
Es sei ABC ein gleichschenklig rechtwinkliges Dreieck mit C als Scheitel des rechten Winkels. Über BC als Durchmesser sei derjenige Halbkreis gezeichnet, der AB in einem Punkt D zwischen A und B schneidet (siehe Abbildung).



a) Beweise, dass die Gerade durch D und den Mittelpunkt E von BC senkrecht auf BC steht!

b) Berechne, wie viel Prozent der Fläche des Dreiecks ABC nicht von dem Halbkreis bedeckt sind! Der gesuchte Prozentsatz ist auf eine Dezimalstelle nach dem Komma anzugeben.

Hinweis: Benutze den Näherungswert $\pi \approx 3{,}142$!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Da BC Durchmesser des Halbkreises ist, ist der Mittelpunkt E von BC auch der Mittelpunkt des Halbkreises. Die Punkte B und D liegen auf dem Halbkreis; also gilt $EB = ED$.
Daraus folgt $\angle DBE = \angle BDE$ (Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck BDE).

Andererseits ist $\angle DBE = \angle ABC = 45°$ (Basiswinkel im gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck ABC). Nach dem Innenwinkelsatz folgt somit

$$\angle BED = 180° - (\angle DBE + \angle BDE) = 90°$$

d. h. die Behauptung $DE \perp BC$.

b) Wegen $\angle BED = \angle BCA = 90°$ gilt nach der Umkehrung des Satzes über Stufenwinkel an geschnittenen Geraden $ED \parallel CA$, das Viereck $ACED$ ist daher ein Trapez.
Seine Höhenlänge ist zugleich der Radius $r = EC$ des Halbkreises; die parallelen Seiten des Trapezes haben die Längen $ED = r$ und $CA = BC = 2r$. Der Inhalt J der vom Halbkreis nicht bedeckten Fläche des Dreiecks ABC lässt sich als Differenz der Flächeninhalte des Trapezes $ACED$ und eines Viertelkreises mit dem Radius r darstellen:

$$J = \frac{r+2r}{2}r - \frac{\pi}{4}r^2 = \frac{r^2}{6}(6-\pi)$$

Das Dreieck ABC hat den Flächeninhalt

$$F = \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot 2r = 2r^2$$

Der gesuchte Prozentsatz beträgt daher

$$p = \frac{100J}{F} = \frac{25r^2(6-\pi)}{2r^2} = 12{,}5(6-\pi)$$

Aus $\pi \approx 3{,}142$ ergibt auf eine Dezimalstelle genau $p \approx 35{,}7$. Also sind 35,7% der Fläche des Dreiecks ABC nicht von dem Halbkreis bedeckt.

Aufgabe 260822:
Es sei k ein Halbkreis über dem Durchmesser AB. Eine Gerade schneide k in zwei von A und B verschiedenen Punkten D und C sowie die Verlängerung von AB über B hinaus in einem Punkt E derart, dass C zwischen D und E liegt. Außerdem gelte

(1) $\overline{BD} = \overline{BE}$ und

(2) $\angle DAC = 27°$.

Ermittle die Größe α des Winkels $\angle ACD$!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Das Dreieck EDB ist wegen (1) gleichschenklig, also ist $\overline{\angle EDB} = \overline{\angle BED}$.
Die Winkel $\angle ABD$ und $\angle ACD$ sind Peripheriewinkel über dem gleichen Bogen $\widehat{AD}$, also ist $\overline{\angle ABD} = \overline{\angle ACD} = \alpha$.
Der Winkel $\angle ABD$ ist Außenwinkel des Dreiecks EDB. Also ist

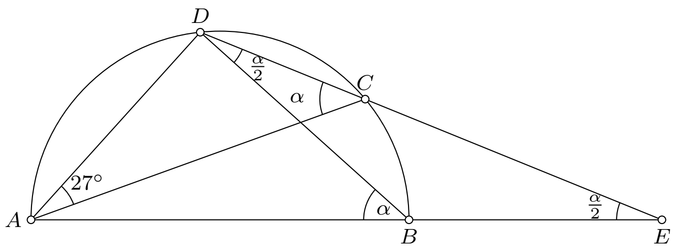
$$\overline{\angle BED} + \overline{\angle EDB} = \overline{\angle ABD}$$

und wegen (3)

$$\overline{\angle BED} = \overline{\angle EDB} = \frac{\alpha}{2}$$

Der Winkel $\angle BDA$ ist als Peripheriewinkel über dem Durchmesser ein rechter Winkel. Im Dreieck ACD gilt nach dem Innenwinkelsatz und wegen (2):

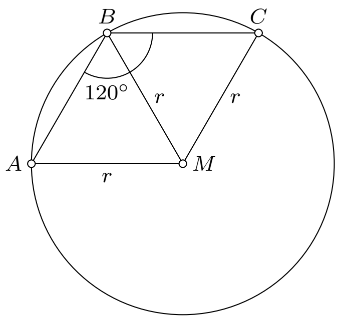
$$27° + \alpha + \frac{\alpha}{2} + 90° = 180° \qquad \text{also} \qquad \alpha = 42°$$



Aufgabe 270822:
Gegeben sei ein Kreis k; sein Mittelpunkt sei M, sein Radius betrage r. Von drei Punkten A, B, C auf k werde vorausgesetzt, dass $\overline{AB} = \overline{BC}$ gilt und dass der Winkel $\angle ABC$ die Größe 120° hat.

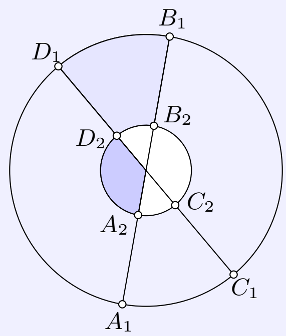
Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen stets $\overline{AB} = r$ gilt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Wegen $MA = MB = MC = r$ und $AB = BC$ sind die Dreiecke ABM und CBM gleichschenklig und zueinander kongruent (Kongruenzsatz sss). Also ist $\angle ABM = \angle CBM$.
Hieraus, und da nach Voraussetzung $\angle ABM + \angle CBM = \angle ABC = 120°$ ist, folgt $\angle ABM = \angle CBM = 60°$.
Daher sind die Dreiecke ABM und CBM sogar gleichseitig; insbesondere gilt $AB = MA = r$, w. z. b. w.

Aufgabe 280824:



Es seien k_1 und k_2 zwei konzentrische Kreise mit dem Mittelpunkt M, deren Radien sich wie 3 : 1 verhalten. Zwei Durchmesser A_1B_1 und C_1D_1 von k_1 schneiden k_2 in Punkten A_2, B_2 bzw. C_2, D_2, die so angeordnet sind, wie die Abbildung zeigt.

a) Ermittle das Verhältnis der Flächeninhalte des Kreisausschnittes A_2MD_2 und des Kreisringausschnittes $D_2B_2B_1D_1$, wenn vorausgesetzt wird, dass $\angle A_1MD_1$ ein rechter Winkel ist!

b) Wie hat man die Größe des Winkels $\angle A_1MD_1$ zu wählen, damit der Flächeninhalt des Kreisausschnittes A_2MD_2 gleich dem Flächeninhalt des Kreisringausschnittes $D_2B_2B_1D_1$ ist?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Es seien $A_1M = r_1$ und $A_2M = r_2$. Dann ist der Flächeninhalt F_1 des Kreisausschnittes A_2MD_2

$$F_1 = \frac{r_2^2\pi \cdot 90°}{360°} = \frac{r_2^2\pi}{4}$$

und der Flächeninhalt F_2 des Kreisringausschnittes $D_2B_2B_1D_1$

$$F_2 = \frac{r_1^2\pi \cdot 90°}{360°} - \frac{r_2^2\pi}{4} = \frac{\pi}{4}(r_1^2 - r_2^2)$$

Wegen $r_1 = 3r_2$ ist $r_1^2 - r_2^2 = 8r_2^2$, und es folgt $F_2 = 2\pi r_2^2$. Das Verhältnis $F_1 : F_2$ beträgt demnach

$$F_1 : F_2 = \frac{r_2^2\pi}{4} : (2\pi r_2^2) = 1 : 8$$

b) Es seien $A_1M = r_1$; $A_2M = r_2$ und $\angle A_1MD_1 = \alpha$. Nun gilt für den Flächeninhalt F_3 des Kreisausschnittes A_2MD_2:

$$F_3 = \frac{r_2^2\pi \cdot \alpha}{360°}$$

Da $\angle B_1MD_1$ Nebenwinkel von $\angle A_1MD_1$ ist, beträgt seine Größe $180° - \alpha$. Für den Flächeninhalt F_4 des Kreisringausschnittes $D_2B_2B_1D_1$ ergibt sich daraus:

$$F_4 = \frac{r_1^2\pi(180° - \alpha)}{360°} - \frac{r_2^2\pi(180° - \alpha)}{360°} = \frac{\pi(180° - \alpha)}{360°}(r_1^2 - r_2^2)$$

Wegen $r_1 = 3r_2$ ist $r_1^2 - r_2^2 = 8r_2^2$, und es folgt

$$F_4 = \frac{\pi(180° - \alpha)}{360°} \cdot 8r_2^2$$

Um die Forderung $F_3 = F_4$ zu erfüllen, hat man folglich zu wählen, dass

$$\frac{r_2^2\pi\alpha}{360°} = \frac{\pi(180° - \alpha)}{360} \cdot 8r_2^2$$

gilt.
Aus dieser Gleichung folgt, nach Multiplikation mit 360° und Division durch $\pi \cdot r_2^2$

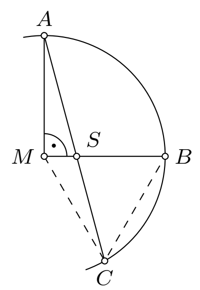
$$\alpha = 8 \cdot (180° - \alpha) \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = 160°$$

Für den Winkel $\angle A_1MD_1$ hat man also die Größe 160° zu wählen.

Aufgabe 320822:
Auf einer Kreislinie k um einen Punkt M seien drei Punkte A, B, C so gelegen, dass $MA \perp MB$ sowie $\overline{BC} = \overline{MB}$ gilt und dass sich die Strecken AC und MB in einem Punkt S schneiden.

Untersuche, ob durch diese Voraussetzungen die Größe den Winkels $\angle BSC$ eindeutig bestimmt ist! Wenn das der Fall ist, dann gib diese Größe an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Als Radien von k haben MB und MC einander gleiche Länge; hiernach und wegen $BC = MB$ ist Dreieck MBC gleichseitig, also gilt $\angle BMC = 60°$.
Daraus und aus $MA \perp MB$ folgt $\angle AMC = 60° + 90° = 150°$.
Daher und weil Dreieck MAC mit $MA = MC$ gleichschenklig ist, folgt aus dem Basis- und dem Innenwinkelsatz

$$\angle MAC = \angle MCA = \frac{1}{2}(180° - \angle AMC) = \frac{1}{2}(180° - 150°) = 15°$$

Aus $MA \perp MB$ und nochmals dem Innenwinkelsatz, auf Dreieck MAS angewandt, folgt damit $\angle MSA = 90° - \angle MAC = 75°$. Schließlich ergibt sich nach dem Scheitelwinkelsatz, dass auch $\angle BSC = 75°$ gilt. Diese Winkelgröße ist damit durch die Voraussetzungen eindeutig bestimmt.

Aufgabe 340823:

a) Wie oft insgesamt stehen im Verlaufe von 24 Stunden (von 0.00 Uhr bis 24.00 Uhr) der Stunden- und Minutenzeiger einer Uhr senkrecht aufeinander?

b) Berechne insbesondere alle derartigen Zeitpunkte zwischen 4.00 Uhr und 5.00 Uhr! Gib diese Zeitpunkte so an, wie sie eine Digitaluhr anzeigen würde, von der wir voraussetzen, dass sie korrekt geht, d. h. zu Beginn jeder Sekunde die richtige Stunden-, Minuten- und Sekundenanzeige bringt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(a) Da beide Zeiger mit gleichbleibenden Geschwindigkeiten gehen, gilt:
Kommen im Verlauf von 24 Stunden (wobei etwa der Anfang dieser Zeitspanne mit dazugerechnet werde, aber nicht das Ende) die Zeiger genau n mal miteinander zur Deckung, so gibt es in dieser Zeitspanne auch genau n Zeitpunkte, in denen der Minutenzeiger um 90° vor dem Stundenzeiger steht, und auch genau n Zeitpunkte, in denen der Minutenzeiger um 90° hinter dem Stundenzeiger steht.

Diese Zahl n kann man folgendermaßen finden:
In 12 Stunden macht der Minutenzeiger genau 12 vollständige Umläufe, der Stundenzeiger genau einen Umlauf. Also muss es in dieser Zeitspanne genau 11 Zeitpunkte geben, in denen der Minutenzeiger den Stundenzeiger überholt. In 24 Stunden sind es doppelt so viele Zeitpunkte; d. h., es gilt $n = 22$.
Also stehen die Zeiger im Verlauf von 24 Stunden insgesamt 44 mal aufeinander senkrecht.

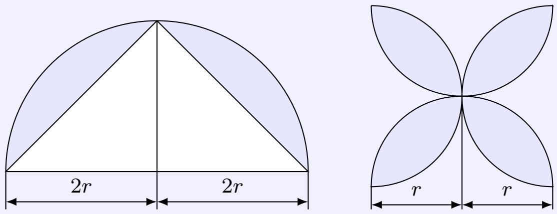
(b) Um 4 Uhr steht der Stundenzeiger 20 Teilstriche vor dem Minutenzeiger. Hat sich nach x Minuten dieser Abstand zum ersten Mal um 5 Teilstriche verringert, so deshalb, weil der Minutenzeiger um x Teilstriche vorgerückt ist, der Stundenzeiger aber nur um $\frac{x}{12}$ Teilstriche. Also gilt $x = 5 + \frac{x}{12}$.

Daraus folgt $12x = 60 + x$, $x = 5\frac{5}{11}$; d. h., der erste gesuchte Zeitpunkt ist $5\frac{5}{11}$ Minuten nach 4 Uhr. Digital wird dieser Zeitpunkt als 04:05:27 angezeigt.

Hat aber y Minuten nach 4 Uhr der Minutenzeiger den Stundenzeiger überholt, also den ursprünglichen Abstand von 20 Teilstrichen aufgebraucht und steht dann erstmals 15 Teilstriche vor dem Stundenzeiger, so gilt $y = 20 + 15 + \frac{y}{12}$ mit $y = 38\frac{2}{11}$. Für einen zweiten gesuchten Zeitpunkt erhält man die digitale Anzeige 04:38:10.

III. Runden 3 & 4

Aufgabe V10834:



Welche Fläche ist größer, die Fläche der Rosette oder die Gesamtfläche der beiden Kreisabschnitte?

Lösung von Steffen Polster:
Dreht man den Kreisabschnitt um die Spitze des Dreiecks, so entsteht eine von zwei Kreisbögen begrenzte Fläche, die die gleiche Form wie ein Viertel der Rosette hat. Da der Kreis der linken Figur einen Radius

$2r$ hat und die Rosette aus vier Kreiszweiecken besteht, sind beide farbigen Flächen gleich groß.

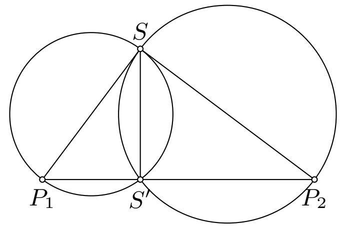
linke Figur: $A = 4\pi r^2 - 4r^2 = 4r^2(\pi - 1)$

eine Viertel der Rosette: $A = r^2 - 2r^2(1 - \frac{\pi}{4}) = r^2(\pi - 1)$

Aufgabe 020835:
Beweise folgenden Satz:

Wenn man durch den einen Schnittpunkt zweier Kreise die beiden Durchmesser zieht, so liegen deren andere Endpunkte mit dem zweiten Schnittpunkt der Kreise in einer Geraden.

Lösung von Carsten Balleier:



Beweis: Sei der erste Schnittpunkt S, der andere S' und heißen die anderen Endpunkte der Durchmesser P_1 und P_2.

Dann ist $\angle P_1S'S$ ein Peripheriewinkel über dem Durchmesser P_1S, nach Satz des Thales also ein rechter Winkel. Ebenso gilt $\angle P_2S'S = 90°$. Damit schließen P_1S' und P_2S' einen Winkel von 180° ein; mit anderen Worten: P_1, S' und P_2 liegen wie behauptet auf einer Geraden. $\square$

Aufgabe 090834:
Es seien K_1, K_2, K_3, K_4 vier konzentrische Kreise, für deren Radien r_1, r_2, r_3 und r_4

$$r_4 - r_3 \quad = \quad r_3 - r_2 = r_2 - r_1 = r_1 \qquad \text{gilt.}$$

Ermittle das Verhältnis des Flächeninhalts von K_1 zu den Flächeninhalten der drei von K_1 und K_2 bzw. K_2 und K_3 bzw. K_3 und K_4 gebildeten Kreisringe!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Aus den Gleichungen für die Radien folgt $r_2 = 2r_1, r_3 = 3r_1, r_4 = 4r_1$.
Der Flächeninhalt A_1 des inneren Kreises K_1 beträgt

$$A_1 = \pi r_1^2$$

Der Flächeninhalt A_2 des ersten Kreisringes beträgt

$$A_2 = \pi \left[(2r_1)^2 - r_1^2\right] = 3\pi r_1^2$$

Der Flächeninhalt A_3 des zweiten Kreisringes beträgt

$$A_3 = \pi \left[(3r_1)^2 - (2r_1)^2\right] = 5\pi r_1^2$$

Der Flächeninhalt A_4 des dritten Kreisringes beträgt

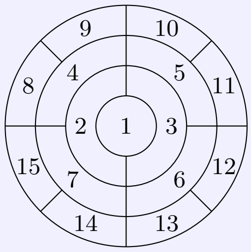
$$A_3 = \pi \left[(4r_1)^2 - (3r_1)^2\right] = 7\pi r_1^2$$

Daraus folgt:

$$A_1 : A_2 : A_3 : A_4 = \pi r_1^2 : 3\pi r_1^2 : 5\pi r_1^2 : 7\pi r_1^2 = 1 : 3 : 5 : 7$$

Die vier Flächeninhalte verhalten sich zueinander wie 1 : 3 : 5 : 7.

Aufgabe 100831:



Die Abbildung zeigt vier konzentrische Kreise. Die innere Kreisfläche ist mit 1 bezeichnet. Die von dem innersten und dem nächstfolgenden Kreis begrenzte Fläche des Kreisringes ist in zwei kongruente Teile, mit 2 und 3 bezeichnet, geteilt. Entsprechend ist die Fläche des nächsten Kreisringes in 4 und die des letzten in 8 jeweils untereinander kongruente Teilflächen zerlegt, die fortlaufend nummeriert wurden.

Wie müssen die Verhältnisse der Radien der vier Kreise gewählt werden, damit alle diese 15 genannten Flächenstücke einander inhaltsgleich sind?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Radien der vier Kreise seien von innen nach außen mit r_1, r_2, r_3, r_4 bezeichnet. Die Kreise enthalten der Reihe nach 1, 3, 7 und 15 der genannten jeweils einander inhaltsgleichen Flächenstücke.
Da die Flächeninhalte der Kreise πr_i^2 $(i = 1,2,3,4)$ betragen, erhält man aus der Aufgabenstellung die Proportion

$$\pi r_1^2 : \pi r_2^2 : \pi r_3^2 : \pi r_4^2 = 1 : 3 : 7 : 15$$

und daraus wegen $r_i > 0$ $(i = 1,2,3,4)$ schließlich, dass

$$r_1 : r_2 : r_3 : r_4 = 1 : \sqrt{3} : \sqrt{7} : \sqrt{15}$$

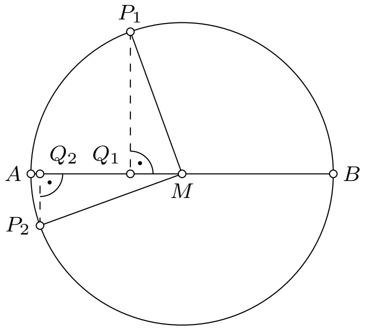
gelten muss, wenn alle 15 Flächenstücke einander inhaltsgleich sein sollen.

Aufgabe 120834:
Gegeben sei ein Kreis mit dem Mittelpunkt M. Ein Durchmesser dieses Kreises sei AB. Zwei Punkte P_1 und P_2 mögen sich vom gleichen Zeitpunkt an gleichförmig auf je einer der beiden Halbkreislinien von A nach B bewegen, wobei die Bewegung des Punktes P_1 viermal so schnell erfolgen soll wie die des Punktes P_2.

Gibt es zwischen dem Start und der Ankunft von P_1 (in B) einen Zeitpunkt, zu dem die Dreiecke $\triangle ABP_1$ und $\triangle ABP_2$ gleichen Flächeninhalt haben?

Wenn ja, dann ermittle für jeden solchen Zeitpunkt die Größe des Winkels $\angle AMP_2$!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Für jede Lage des Punktes P_1, auf dem von ihm durchlaufenen Halbkreisbogen ist P_2 so gelegen, dass $\angle AMP_2 = \frac{1}{4} AMP_1 < \frac{1}{4} \cdot 180° = 45°$ gilt.
Umgekehrt nimmt die Größe des $\angle AMP_2$ während der beschriebene Bewegung alle Werte zwischen 0° und 45° an, jeden zu genau einem Zeitpunkt. Sind Q_1 bzw. Q_2 die Fußpunkte der von P_1 bzw. P_2 auf AB gefällten Lote, so haben die Dreiecke $\triangle ABP_1$ und $\triangle ABP_2$ genau dann gleichen Flächeninhalt, wenn gilt:



$$P_1Q_1 = P_2Q_2 \tag{1}$$

Im Falle $\angle AMP_1 < 90°$ ist

$$\angle Q_2MP_2 = \angle AMP_2 = \frac{1}{4}\angle AMP_1 < \angle AMP_1 = \angle Q_1MP_1$$

und daher $P_2Q_2 < P_1Q_1$.
Im Fall $\angle AMP_1 = 90°$ ist $\angle Q_2MP_2 = \angle AMP_2 = \frac{1}{4}\angle AMP_1 < 90°$ und daher ebenfalls $P_2Q_2 < (MP_2 = MP_1 =)P_1Q_1$. Also kann (1) in den Fällen $\angle AMP_1 \leq 90°$ nicht erfüllt werden.

Im Fall $\angle AMP_1 > 90°$ ist die Bedingung (1) genau dann erfüllt, wenn

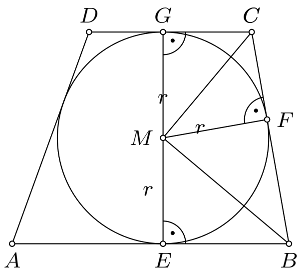
$$\angle BMP_1 = \angle Q_1MP_1 = \angle Q_2MP_2 = \angle AMP_2 \tag{2}$$

gilt; denn aus (1) folgt (2) vermittels des Kongruenzsatzes (ssw), aus (2) folgt (1) vermittels (sww). Nun ist (2) gleichwertig mit $180° - 4 \cdot \angle AMP_2 = AMP_2$ und dies mit $\angle AMP_2 = 36°$.
Daher gibt es genau einen Zeitpunkt mit der geforderten Eigenschaft, nämlich denjenigen, an dem der Winkel $\angle AMP_2$ die Größe 36° hat.

Aufgabe 160832:
Einem Kreis mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r sei ein Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ derart umbeschrieben, dass jede der Trapezseiten den Kreis berührt.

Beweise, dass dann $\overline{\angle BMC} = 90°$ ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Die Berührungspunkte des Inkreises mit den Seiten AB, BC, CD seien in dieser Reihenfolge mit E, F, G bezeichnet.
Wegen $MB = MB, ME = MF = r$ sowie $\angle BEM = \angle BFM = 90°$ (Berührungsradius) gilt $\triangle BME \cong \triangle BMF$ nach dem Kongruenzsatz (ssw). Analog lässt sich $\triangle CMG \cong \triangle CMF$ zeigen. Folglich gilt:

$$\angle GMC = \angle CMF \qquad \text{sowie} \qquad \angle FMB = \angle BME$$

Da ME und MG die Lote auf die Parallelen AB und CD von dem zwischen ihnen liegenden Punkt M aus sind, ist $\angle GME = 180°$. Wegen

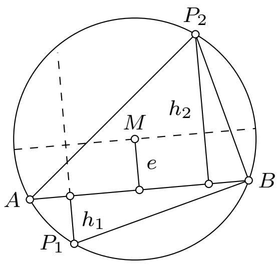
$$\angle BME + \angle FMB + \angle CMF + \angle MGC = \angle GME = 180° \qquad \text{d. h.} \qquad 2 \cdot \angle FMB + 2 \cdot \angle CMF = 180°$$

gilt somit $\angle BMC = \angle FMB + \angle CMF = 90°$, w. z. b. w.

Aufgabe 160836:
Gegeben seien eine Länge r und eine Länge $a \leq 2r$. Auf einem Kreis k mit dem Radius r seien A und B zwei Punkte, deren Abstand a beträgt. Weiterhin seien mit P_1 und P_2 zwei solche Punkte von k bezeichnet, die auf verschiedenen Seiten der Geraden durch A und B liegen.

a) Gesucht sind unter allen diesen Punkten P_1 und P_2 solche, für die der Flächeninhalt des Vierecks AP_1BP_2 am größten ist. Beweise, dass es solche Punkte gibt, und ermittle ihre Lage auf k.
b) Ermittle den entstehenden größtmöglichen Flächeninhalt unter allen Vierecken AP_1BP_2!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



a) Der Flächeninhalt von Viereck AP_1BP_2 ist die Summe der Flächeninhalte der Dreiecke AP_1B und ABP_2. Deren Flächeninhalte sind jeweils am größten, wenn die Längen der Lote von P_1 bzw. P_2 auf die Gerade g durch A und B am größten sind.

Das ist genau dann der Fall, wenn P_1, P_2 die Schnittpunkte von k mit der Mittelsenkrechten von AB sind, d. h. der zu g senkrechten Geraden durch den Mittelpunkt M von k.

Beweis: Bezeichnen nämlich e, h_1, h_2 die Abstände von M, P_1 bzw. P_2 zu g und sind die Bezeichnungen so gewählt, dass M und P_2 in derselben von g begrenzten Halbebene liegen, so kann man zunächst zu allen Punkten P_2, für die $h_2 < e$ ist, auch Punkte P_2 finden für die $h_2 > e$ gilt, und dann ist stets $h_1 + e$ bzw. $h_2 - e$ der Abstand von P_1 bzw. P_2 zu dem zu g parallelen Durchmesser von k; d. h., $h_1 + e$ bzw. $h_2 - e$ ist die halbe Länge der durch P_1 bzw. P_2 gehenden auf AB senkrechten Sehne.

Unter allen zu AB senkrechten Sehnen ist aber diejenige am längsten, die durch M geht. Also nehmen auch h_1 und h_2 für diese Lage von P_1, P_2 ihre größten Werte an.

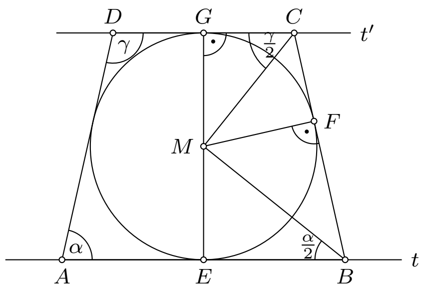
b) Für diese gilt $h_1 + h_2 = 2r$; der größtmögliche Flächeninhalt unter allen Vierecken AP_1BP_2 ist mithin

$$\frac{1}{2}ah_1 + \frac{1}{2}ah_2 = \frac{1}{2}a(h_1 + h_2) = ar.$$

Aufgabe 190835:
Es sei EG ein Durchmesser eines Kreises k. Die in E und G an k gelegten Tangenten seien t bzw. t'. Auf t sei eine Strecke AB so gelegen, dass E ihr Mittelpunkt ist. Die von A und B aus an k gelegten (und von t verschiedenen) Tangenten mögen t' in D bzw. C schneiden. Der Radius von k sei r; die Längen von AB bzw. CD seien a bzw. c.

Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen stets die Gleichung $r^2 = \frac{ac}{4}$ gilt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Der Mittelpunkt von k sei M. Bei Spiegelung an der Geraden durch E,G geht k in sich über. Ebenso t und t', und die Punkte A,B werden miteinander vertauscht. Das gilt folglich ebenfalls für die von A und B an k gelegten Tangenten und somit falls für D und C.

Daher ist G der Mittelpunkt der Strecke CD. Ferner folgt, dass im Trapez $ABCD$ die Innenwinkel bei A und B beide dieselbe Größe α und die Innenwinkel bei C und D beide die Größe $\gamma = 180° - \alpha$ haben (Gegenwinkel an geschnittenen Parallelen).

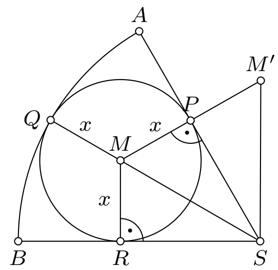
Berührt k die Gerade durch B,C in F, so gilt $\triangle BEM \cong \triangle BFM$ (ssw), also $\angle EBM < \angle FBM = \frac{\alpha}{2}$. Ebenso folgt $\angle GCM = \frac{\gamma}{2} = 90° - \frac{\alpha}{2}$, also $\angle GMC = \frac{\alpha}{2}$ (Winkelsumme im rechtwinkligen Dreieck CGM).

Daher sind die rechtwinkligen Dreiecke BME und MCG einander ähnlich, und es folgt $BE : EM = MG : GC$, also $\frac{a}{2} : r = r : \frac{c}{2}$ und somit $r^2 = \frac{1}{4}ac$, w. z. b. w.

Aufgabe 220835:
Der Zentriwinkel $\angle ASB$ eines Kreissektors s betrage 60°. In diesem Kreissektor sei derjenige Kreis k gezeichnet, der die Strecken AS, BS und den Bogen $\overset{\frown}{AB}$ von innen berührt.

Wie viel Prozent vom Flächeninhalt des Kreissektors s beträgt der Flächeninhalt des Kreises k?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Es sei $r = AS = BS$. Der Mittelpunkt von k sei M, der Radius von k sei x. Die Berührungspunkte von k mit AS, BS bzw. $\overset{\frown}{AB}$ seien P, R bzw. Q. Dann liegt Q auf der Verbindungsgeraden der beiden Kreismittelpunkte S, M, und es gilt

$$SM + x = r. \qquad (1)$$

Ferner sind die Radien MP bzw. MR von k senkrecht auf AS bzw. BS. Wegen $MP = MR = x$ hat also M gleiche Abstände zu AS und BS und liegt folglich auf der Halbierenden des Winkels $\angle ASB$.
Also ist $\angle PSM = 30°$. Daher und wegen $\angle MPS = 90°$ gilt nach dem Winkelsummensatz $\angle PMS = 60°$. Hat M bei der Spiegelung an der Geraden durch A,S das Bild M', so ist folglich SMM' ein gleichseitiges Dreieck. Darin ist die Höhe SP zugleich Seitenhalbierende, also gilt $SM = MM' = 2 \cdot MP$, d. h.

$$SM = 2x \qquad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt $3x = r$, der Flächeninhalt des Kreissektors s beträgt also

$$A_s = \frac{\pi r^2 \cdot 60°}{360°} = \frac{\pi r^2}{6} = \frac{3\pi x^2}{2}$$

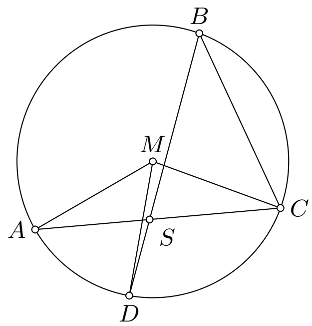
Der Flächeninhalt des Kreises k ist $Ak = \pi x^2 = \frac{2}{3}A_s$, d. h., A_k beträgt $66\frac{2}{3}\%$ von A_s.

Aufgabe 220836:
Es sei k ein Kreis mit dem Mittelpunkt M. Auf k seien Punkte A, B, C, D in dieser Reihenfolge so gelegen, dass folgende Voraussetzungen erfüllt sind:

(1) Die Sehnen AC und BD schneiden einander in einem von M verschiedenen Punkt S.
(2) Derjenige Teilbogen von A nach B, der C und D nicht enthält, ist kleiner als ein Halbkreis.
(3) Derjenige Teilbogen von C nach D, der A und B nicht enthält, ist kleiner als ein Halbkreis.

Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen stets $\overline{\angle ASD} = \frac{1}{2}\left(\overline{\angle AMB} + \overline{\angle CMD}\right)$ gilt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Nach dem Satz über Peripherie- und Zentriwinkel gilt:

$$\angle ACB = \frac{1}{2}\angle AMB \qquad \text{und} \qquad \angle CBD = \frac{1}{2}\angle CMD$$

Durch Addition folgt

$$\angle ACB + \angle CBD = \frac{1}{2}(\angle AMB + \angle CMD) \qquad \text{d. h.}$$

$$\angle SCB + \angle CBD = \frac{1}{2}(\angle AMB + \angle CMD)$$

Nach dem Außenwinkelsatz, angewandt auf das Dreieck BCS, gilt $\angle ASD = \angle SCB + \angle CBS$. Daher folgt

$$\angle ASD = \frac{1}{2}(\angle AMB + \angle CMD)$$

Aufgabe 230835:
a) Zu einem gegebenen Kreis K werde dasjenige Quadrat Q betrachtet, das den gleichen Umfang wie K hat.
Ist der Flächeninhalt von Q größer, gleich oder kleiner als der Flächeninhalt von K? Wie viel Prozent des Flächeninhaltes von K beträgt der Flächeninhalt von Q?

b) Zu einem gegebenen Kreis k werde dasjenige Quadrat q betrachtet, das den gleichen Flächeninhalt wie k hat.
Ist der Umfang von q größer, gleich oder kleiner als der Umfang von k? Wie viel Prozent des Umfanges von k beträgt der Umfang von q?

Für π kann der auf 4 Dezimalen genaue Näherungswert $\pi \approx 3{,}1416$ verwendet werden. Die gesuchten Prozentsätze sind auf eine Dezimale nach dem Komma genau anzugeben.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Hat K den Radius r und Q die Seitenlänge a, so ist nach Voraussetzung $4a = 2\pi r$, also $a = \frac{\pi}{2}r$. Der Flächeninhalt von K ist $J(K) = \pi r^2$.
Der Flächeninhalt von Q ist $J(Q) = a^2 = \frac{\pi}{4}r^2$, er beträgt also das $\frac{\pi}{4}$fache, das sind $25\ pi\% \approx 78{,}5\%$ von $J(K)$.
Der Flächeninhalt von Q ist also kleiner als der von K.

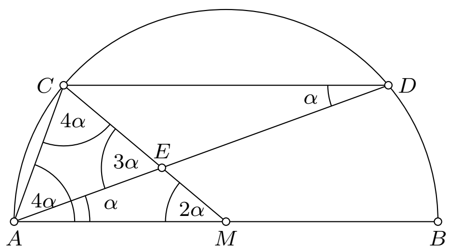
b) Hat k den Radius ρ und q die Seitenlänge s, so ist nach Voraussetzung $s^2 = \pi\rho^2$, also $s = \sqrt{\pi}\rho$.
Der Umfang von k ist $2\pi\rho$. Der Umfang von q ist $4s = 4\sqrt{\pi}\rho$, er beträgt also das $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$fache, das sind $\approx 112{,}8\%$ des Umfangs von k.
Der Umfang von q ist also größer als der von k.

Aufgabe 230836:
Über fünf Punkte A, B, C, D, M wird folgendes vorausgesetzt:

> M ist der Mittelpunkt der Strecke AB;
>
> die Punkte A, C, D, B liegen in dieser Reihenfolge auf einem Halbkreis über AB;
>
> es gilt $AB \parallel CD$;
>
> die Strecke MC schneidet die Strecke AD in einem Punkt E, für den $\overline{AC} = \overline{EC}$ gilt.

Beweise, dass durch diese Voraussetzungen die Größe des Winkels $\angle ACM$ eindeutig bestimmt ist! Ermittle diese Winkelgröße!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Es sei $\alpha = \angle DAB$. Nach dem Satz über Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen gilt $\angle CDA = \angle DAB = \alpha$.
Nach dem Peripherie-Zentriwinkelsatz folgt hieraus: $\angle AMC = 2\angle CDA = 2\alpha$.
Nach dem Außenwinkelsatz gilt (da $\angle AEC$ Außenwinkel des Dreiecks AME ist)

$$\angle AEC = \alpha + 2\alpha = 3\alpha$$

Nach Voraussetzung folgt hieraus

$$\angle EAC = \angle AEC = 3\alpha$$

und somit $\angle MAC = 4\alpha$. Wegen $AM = CM$ ist auch $\triangle AMC$ gleichschenklig, und es folgt

$$\angle ACM = 4\alpha$$

Somit ergibt sich nach dem Innenwinkelsatz (angewandt auf $\triangle AMC$)

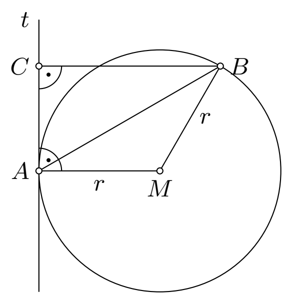
$$4\alpha + 4\alpha + 2\alpha = 180° \qquad \text{also} \qquad \alpha = 18°$$

und somit $\angle ACM = 72°$.
Die gesuchte Winkelgröße ist folglich durch die Voraussetzungen eindeutig bestimmt; sie beträgt 72°.

Aufgabe 250834:
Es sei k ein Kreis, sein Mittelpunkt sei M. Eine Sehne von k, die nicht Durchmesser ist, sei AB. Ferner sei t die in A an k gelegte Tangente, und C sei der Fußpunkt des von B auf t gefällten Lotes.

Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen die Gerade durch A und B stets den Winkel $\angle CBM$ halbiert!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

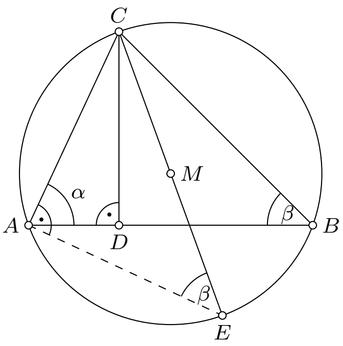


Der Berührungsradius MA steht senkrecht auf t. Deshalb und nach Voraussetzung stehen AM und CB senkrecht auf t und sind nach Umkehrung des Satzes über Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen parallel zueinander.
Da $\angle MAB$ und $\angle ABC$ Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen sind, gilt $\angle ABC = \angle MAB$. (1)

Andererseits ist das Dreieck AMB gleichschenklig mit $AM = MB$ (Radius), und es gilt $\angle MAB = \angle ABM$ (Basiswinkel). (2)
Aus (1) und (2) folgt unmittelbar $\angle ABC = \angle ABM$ und damit ist gezeigt, dass AB den Winkel $\angle CBM$ halbiert.

Aufgabe 270833:
Es sei k ein Kreis, sein Mittelpunkt sei M. Diesem Kreis sei ein spitzwinkliges Dreieck ABC einbeschrieben, bei dem für die Größen α, β der Winkel $\angle BAC$, $\angle ABC$ vorausgesetzt werde, dass $\alpha > \beta$ gilt. Im Dreieck ABC sei D der Fußpunkt der auf AB senkrechten Höhe. Der von C ausgehende Strahl durch M schneide k in E.
Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen der Winkel $\angle DCE$ stets die Größe $\alpha - \beta$ hat!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Nach Voraussetzung ist CE ein Durchmesser des Kreises k, und A liegt auf k. Nach dem Satz des Thales folgt hieraus $\angle EAC = 90°$.
Nach Voraussetzung sind $\angle AEC$ und $\angle ABC$ Peripheriewinkel über gleichem Bogen, also gilt $\angle = \angle ABC = \beta$.
Nach dem Innenwinkelsatz für Dreieck AEC folgt hieraus

$$\angle ACE = 90° - \beta \tag{1}$$

Nach Voraussetzung gilt ferner $\angle DAC = \angle BAC = \alpha$ und $\angle ADC = 90°$. Nach dem Innenwinkelsatz für Dreieck ADC folgt hieraus

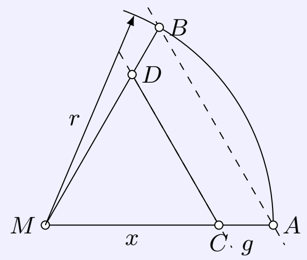
$$\angle ACD = 90° - \alpha \tag{2}$$

Nach Voraussetzung gilt schließlich $\alpha > \beta$; wegen (1) und (2) folgt hieraus $\angle ACE > \angle ACD$ und damit, wie behauptet,

$$\angle DCE = \angle ACE - \angle ACD = (90° - \beta) - (90° - \alpha) = \alpha - \beta$$

Aufgabe 270834:

Es sei $\overset{\frown}{AB}M$ ein Kreissektor, für den die Länge $r = \overline{MA} = \overline{MB}$ gegeben ist und der Zentriwinkel $\angle AMB$ die Größe 60° hat. Von einer Geraden g, die zu AB parallel ist und die Strecken MA bzw. MB in C bzw. D schneidet, sei bekannt, dass der Umfang u_1 des Dreiecks MCD gleich dem Umfang u_2 der Figur $\overset{\frown}{AB}DC$ ist (siehe Abbildung).



a) Ermittle unter dieser Voraussetzung die Länge $x = \overline{MC}$ in Abhängigkeit von r!

b) Die Länge r sei mit einer Genauigkeit gemessen, bei der sich auf eine Dezimale nach dem Komma genau $r = 6{,}7$ cm ergibt. Ferner sei zur Berechnung verwendet, dass auf zwei Dezimalen nach dem Komma genau $\pi = 3{,}14$ gilt.

Beweise, dass man daraus die Länge x (in Zentimetern) auf eine Dezimale nach dem Komma genau durch Berechnung von Schranken ermitteln kann! Wie lautet diese Längenangabe x?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Wegen $\angle AMB = 60° = \frac{360°}{6}$ hat $\overset{\frown}{AB}$ die Bogenlänge

$$b = \frac{2\pi r}{6} = \frac{1}{3}\pi \cdot r \tag{1}$$

Da Dreieck MAB mit $MA = MB$ gleichschenklig ist, gilt für die Basiswinkel $\angle MAB = \angle MBA$ sowie nach dem Innenwinkelsatz $\angle MAB + \angle MBA = 180° - 60°$; daraus folgt $\angle MAB = \angle MBA = 60°$.
Wegen $CD \parallel AB$ gilt daher auch $\angle MCD = \angle MAB = 60°$ (Stufenwinkel) und ebenso $\angle MDC = 60°$. Also ist Dreieck MCD gleichseitig, d. h., es ist

$$MC = MD = CD = x \tag{2}$$

Aus (2) folgt $u_1 = 3x$ und $CA = DB = r - x$; hieraus und aus (1) folgt $u_2 = x + 2(r-x) + \frac{1}{3}\pi r$. Daher besagt die Voraussetzung $u_1 = u_2$

$$\begin{aligned} 3x &= x + 2r - 2x + \frac{1}{3}\pi r \\ 4x &= \left(2 + \frac{\pi}{3}\right) r = \frac{6+\pi}{12} r \\ x &= \frac{6+\pi}{12} r \end{aligned}$$

b) Aus den Genauigkeitsvoraussetzungen ergibt sich nach (3), dass die Maßzahl von x als eine untere Schranke die Zahl

$$\frac{6 + 3{,}135}{12} \cdot 6{,}65 = 5{,}0623125$$

und als eine obere Schranke die Zahl

$$\frac{6 + 3{,}145}{12} \cdot 6{,}75 = 5{,}1440625$$

hat. Damit ist bewiesen, dass auf eine Dezimale nach dem Komma genau $x = 5{,}1$ cm gilt.

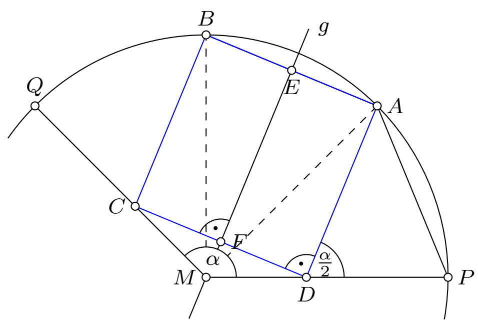
Aufgabe 290832:
Einem Kreisausschnitt soll ein Quadrat so einbeschrieben werden, dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(1) Die - aus zwei Strecken (Radien) und einem Kreisbogen bestehende - Randlinie des Kreisausschnittes enthält die vier Eckpunkte des Quadrates.

(2) Der Kreisbogen wird durch zwei dieser Eckpunkte in drei gleichlange Teilbögen zerlegt.

Untersuche, ob durch diese Bedingungen die Größe α des Zentriwinkels des Kreisausschnittes eindeutig bestimmt ist! Ist dies der Fall, so gib diese Größe an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn die Bedingungen von einem Kreisausschnitt K mit dem Kreismittelpunkt M, den Radien MP, MQ und dem Zentriwinkel der Größe $\alpha = \angle PMQ$ sowie von einem Quadrat $ABCD$ erfüllt werden, wobei o. B. d. A. nach (1) die Punkte A und B so auf PQ liegen, dass PQ nach (2) in die gleichlangen Teilbögen $\overset{\frown}{PA}, \overset{\frown}{AB}, \overset{\frown}{BQ}$ zerlegt wird, so folgt:



Bei der Spiegelung an der Geraden g durch die Mittelpunkte E, F von AB bzw. CD werden A und B miteinander vertauscht, ebenso C und D miteinander. Also muss der Kreisausschnitt K in einen kongruenten Kreisausschnitt K' übergehen, der Bogen $\overset{\frown}{AB}$ in den zu K' gehörenden Teilbogen $\overset{\frown}{BA}$, der folglich wegen der Kongruenz von K und K' mit $\overset{\frown}{AB}$ zusammenfällt; die Bögen $\overset{\frown}{PA}$ und $\overset{\frown}{QB}$ werden miteinander vertauscht, somit fällt K' mit K zusammen, g ist Symmetrieachse des Kreisausschnitts, geht durch M und halbiert den Bogen $\overset{\frown}{PQ}$.

Da zu gleichlangen Bögen eines Kreises auch gleichlange Sehnen und gleichgroße Zentriwinkel gehören, gilt somit einerseits $\angle PME = \frac{\alpha}{2}$, wegen $g \parallel AD$ nach dem Stufenwinkelsatz also $\angle PDA = \frac{\alpha}{2}$ (3), andererseits $\angle PMA = \frac{\alpha}{3}$ und $PA = AB = AD$, nach dem Basiswinkelsatz und dem Innenwinkelsatz also

$$\angle PDA = \angle MPA = \angle MAP = \frac{1}{2}(180° - \frac{\alpha}{3}) = 90° - \frac{\alpha}{6} \qquad (4)$$

Aus (3) und (4) folgt $\frac{\alpha}{2} = 90° - \frac{\alpha}{6}$, $\alpha = 135°$. Daher ist die Größe des Zentriwinkels des Kreisausschnitts durch die Bedingungen eindeutig bestimmt; sie beträgt $\alpha = 135°$.

Aufgabe 340843:
Auf einem Zeichenblatt seien drei Punkte A, B, C mit $A \neq B$, $A \neq C$ und $B \neq C$ gegeben. Gesucht sind zwei einander gleichgroße, voneinander verschiedene Kreise, von denen einer durch A, der andere durch C geht und die sich im Punkt B berühren.

Beschreibe Lagemöglichkeiten der gegebenen Punkte A, B, C, bei denen es

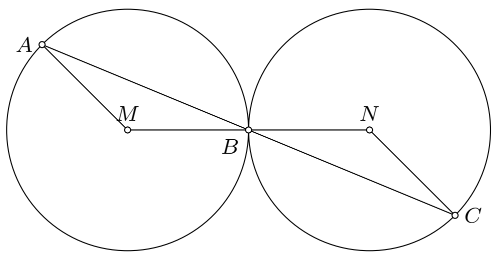
a) keine solchen Kreise,

b) mehr als ein Paar solcher Kreise,

c) genau ein Paar solcher Kreise gibt!

Zu (a) zeige, warum es keine solchen Kreise gibt; zu (b) bzw. (c) beschreibe und begründe je eine Konstruktion, mit der man aus den gegebenen Punkten mehrere derartige Kreispaare bzw. das eine derartige Kreispaar erhalten kann! Führe die von dir beschriebene Konstruktion durch! Wähle hierzu A, B, C jeweils in passender Lage für (b) bzw. (c) und konstruiere aus diesen A, B, C bei (b) zwei Kreispaare, bei (c) das eine Kreispaar!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



(a) Bei den folgenden Lagemöglichkeiten für A, B, C (mit $A \neq B$, $A \neq C$, $B \neq C$) gibt es keine Kreise der genannten Art:

(a1) Der Punkt B liegt auf einer Verlängerung der Strecke AC.
(a2) Der Punkt B liegt auf der Strecke AC, ist aber nicht ihr Mittelpunkt.

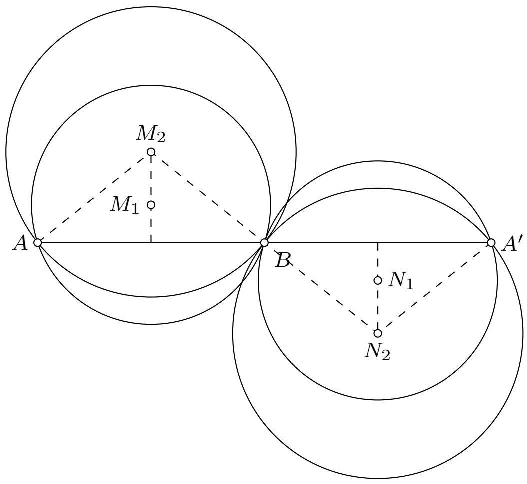
Berühren sich nämlich zwei einander gleichgroße, voneinander verschiedene Kreise, so muss dies eine Berührung von außen sein.
Für jede Gerade durch den Berührungspunkt B, die die Kreise in je einem von B verschiedenen Punkt A bzw. C schneidet (siehe Abbildung), gilt aber:

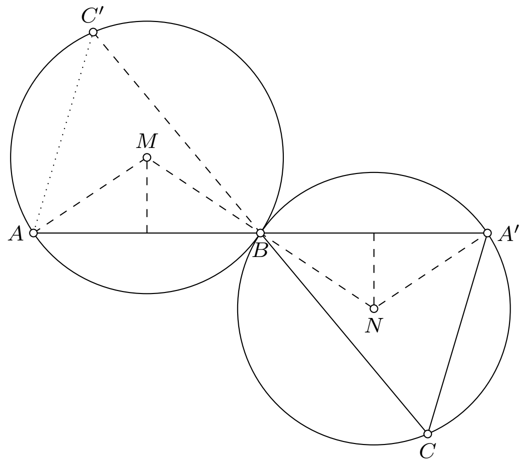
B liegt zwischen A und C; also kann nicht (a1) vorliegen. Ferner gilt für jede solche Gerade: Sind M bzw. N die Mittelpunkte der beiden Kreise, so liegt B auf der Strecke MN, daher gilt $\angle ABM = \angle CBN$ (Scheitelwinkel), wegen $\angle ABM = \angle BAM$, $\angle CBN = \angle BCN$ (Basiswinkel) und $MB = NB$ nach Kongruenzsatz sww also $\triangle ABM \cong \triangle CBN$, $AB = CB$, somit kann auch (a2) nicht vorliegen.

(b) Mehr als ein Paar von Kreisen der genannten Art gibt es, wenn B der Mittelpunkt der Strecke AC ist. Man erhält solche Kreise durch folgende Konstruktion:

Auf der Mittelsenkrechten von AB wählt man einen beliebigen Punkt M und bringt die Gerade durch M und B zum Schnitt N mit der Mittelsenkrechten von BC. Die Kreise um M und um N durch B gehen dann nämlich wegen $MA = MB$ und $NC = NB$ auch durch A bzw. C; sie berühren sich in B, da B auf MN liegt. Schließlich sind diese Kreise auch einander gleichgroß; denn wegen der Voraussetzung $AB = CB$ und wegen $\angle BAM = \angle ABM = \angle CBN = \angle BCN$ gilt $\triangle ABM \cong \triangle CBN$, also $MB = NB$.

Die Abbildung zeigt zwei Kreispaare, die nach dieser Beschreibung bei den Wahlen $M = M_1$ und $M = M_2$ erhalten werden.





(c) Genau ein Kreispaar der genannten Art gibt es, wenn A, B und C nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen.
Man erhält es durch folgende Konstruktion (siehe dritte Abbildung):
Man verlängert die Strecken AB und CB jeweils über B hinaus um ihre eigene Länge bis A' bzw. C' und konstruiert die Umkreise der Dreiecke ABC' und $A'BC$ (die Umkreismittelpunkte M bzw. N sind in bekannter Weise als Schnittpunkte von Mittelsenkrechten zu erhalten).

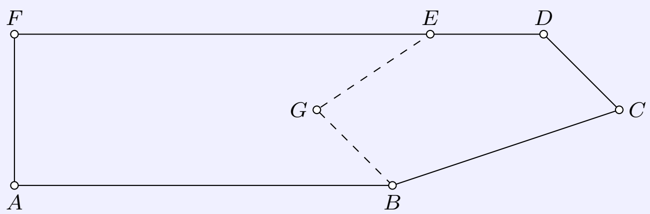
Diese Kreise haben die geforderten Eigenschaften; denn nach Konstruktion wird $\triangle ABC' \cong \triangle A'BC$, also sind die Umkreise einander gleichgroß.
Daher ist auch $\triangle ABM \cong \triangle A'BN$ (Kongruenzsatz sss), also sind die Winkel $\angle ABM$, $\angle A'BN$ einander gleichgroß und folglich Scheitelwinkel; d. h., B liegt auf MN, die Kreise berühren sich in B.

Dass dieses Kreispaar das einzige mit den geforderten Eigenschaften ist, kann so gezeigt werden:
Wenn vorausgesetzt wird, dass zwei Kreise diese Eigenschaften haben, so folgt wie in (a), aber mit A, B, A' und nochmals mit C, B, C' statt der dortigen A, B, C, dass die Kreise auch durch die hier konstruierten Punkte A' bzw. C' gehen.

II.IV. Konstruktionen

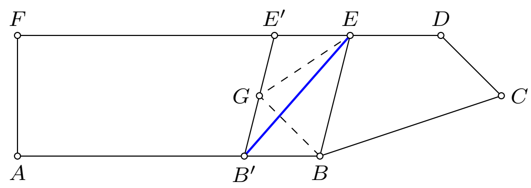
I. Runde 1

Aufgabe V00810:



Die Grenze zweier aneinandergrenzender Felder (siehe Abbildung). einer LPG ist eine gebrochene Linie EGB. Zur Erleichterung der Bestellung soll die Grenzlinie gradlinig führen, ohne die Größe der Einzelfelder zu verändern.
Löse die Aufgabe durch Konstruktion und begründe sie!

Lösung von Steffen Polster:
Verschiebt man die Strecke EB parallel durch G, so entsteht ein Viereck $BEE'B'$. Dieses Viereck ist ein Parallelogramm, da AB und EF parallel sind und eine Parallelverschiebung von EB erfolgte.
Diese Parallelogramm kann durch eine Diagonale, z. B. EB', in zwei flächengleiche Dreiecke zerlegt werden.

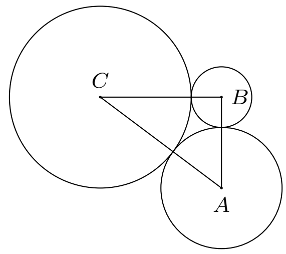


Beide Teilfelder verändern damit nicht ihren Flächeninhalt. Die Strecke EB' ist somit eine Möglichkeit für die neue Grenze zwischen beiden Feldern.

Aufgabe V00813:
Konstruiere ein Dreieck ABC aus $a = 8$ cm, $b = 10$ cm, $c = 6$ cm.
Die Eckpunkte dieses Dreiecks sollen die Mittelpunkte der Kreise sein, die sich gegenseitig berühren.
Bestimme die Größe der Radien!
(Der Lösungsweg kann beliebig gewählt werden!)

Lösung von Steffen Polster:
Für die Radien r_a, r_b, r_c der Kreise um die Punkte A, B und C wird dann

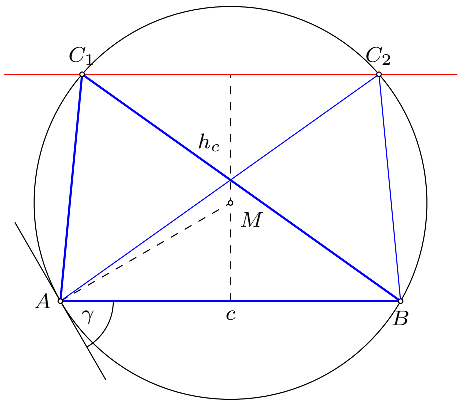
$$r_a + r_c = b = 6$$
$$r_a + r_b = c = 10$$
$$r_b + r_c = a = 8$$



Dieses Gleichungssystem hat die Lösungen $r_a = 4$ cm, $r_b = 2$ cm und $r_c = 6$ cm.

Aufgabe V10815:
Konstruiere ein Dreieck aus: $c = 7$ cm, $h_c = 5$ cm, $\gamma = 60°$.
(Hilfslinien müssen erkennbar sein.)

Lösung von Steffen Polster:

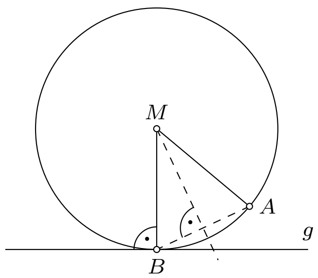


Konstruktion:
Die Konstruktion ergibt sich aus dem Sehnentangentenwinkel - Peripheriewinkelsatz.
1. An die Strecke $\overline{AB} = c$ wird der Winkel γ angetragen.
2. Die Senkrechte zum freien Schenkel von γ und die Mittelsenkrechte von AB schneiden sich im Umkreismittelpunkt M des gesuchten Dreiecks ABC.
3. Die Parallele zu AB im Abstand h_c schneidet den Kreis in 0, 1 oder 2 Punkten, je nachdem, wie viele Lösungen für den Punkt C existieren. Für die gegebenen Größen gibt es zwei Schnittpunkte C_1 und C_2. Die beiden Dreiecke ABC_1 und ABC_2 erfüllen die Anforderungen und sind zueinander kongruent.

Aufgabe 010816:
Es ist ein Kreis zu konstruieren, der eine gegebene Gerade g in dem gegebenen Punkt B berührt und durch einen gegebenen Punkt A geht, der nicht auf g liegt.

Begründe die Konstruktion!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

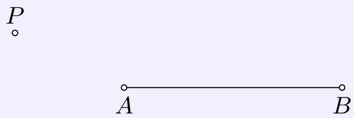


Berührt der Kreis die Gerade g, so muss der Kreismittelpunkt M auf dem Lot (Senkrechte) auf g in B liegen.

M muss aber auch, als Punkt der von A und B den gleichen Abstand hat, auf der Mittelsenkrechten der Strecke AB liegen.

Der Schnittpunkt der Senkrechten in B und der Mittelsenkrechten ist dann der gesuchte Kreismittelpunkt M.

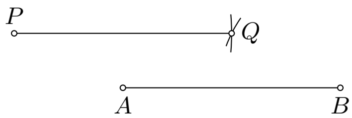
Aufgabe 030816:



Gegeben sei eine Strecke $\overline{AB}$ und ein nicht auf ihr liegender Punkt P (Lage siehe Abbildung).

Es ist mit Zirkel und Lineal eine zu $\overline{AB}$ parallele Strecke gleicher Länge zu konstruieren, deren einer Endpunkt P ist! Fertige eine Konstruktionsbeschreibung an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Konstruktion: (Bild) Es ist ein Punkt Q gesucht mit $PQ \parallel AB$ und $PQ = AB$.

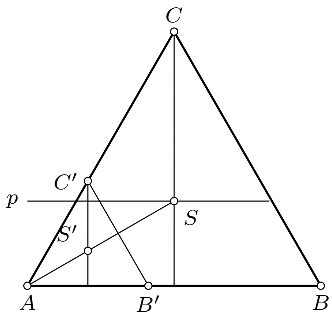
Das bedeutet, dass Q mit A, B und P ein Parallelogramm bilden muss. Der Punkt Q muss also von B den Abstand AP haben. Deshalb zeichnet man um B einen Kreisbogen mit Radius AP und um P einen mit Radius AB.

Man erhält zwei Schnittpunkte, es ist derjenige auszuwählen, für den $\angle BQP = \angle PAB$ gilt.

Aufgabe 070814:
Von einem gleichseitigen Dreieck ist die Länge ρ des Inkreisradius bekannt. Das Dreieck ist unter alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal zu konstruieren!

Lösung von Manuela Kugel:
I. Analyse:
In einem gleichseitigen Dreieck fallen Umkreismittelpunkt, Inkreismittelpunkt und Schwerpunkt zusammen, d. h. der Höhenschnittpunkt ist gleichzeitig der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten und Winkelhalbierenden. Ferner sind im gleichseitigen Dreieck alle Innenwinkel 60° groß.

Wenn man irgendein gleichseitiges Dreieck konstruiert ist dieses zum gesuchten Dreieck ähnlich. Dann kann man auf alle Seiten und den Inkreisradius den Strahlensatz anwenden.



II. Konstruktion:
(1) Man konstruiert ein beliebiges gleichseitiges Dreieck $AB'C'$, indem zwei Punkte A und B' festgelegt werden. Um beide Punkte wird ein Kreis mit dem Abstand AB' gezeichnet. Der Schnittpunkt beider Kreise werde C' genannt.

(2) Es wird ein Punkt S' konstruiert aus dem Schnittpunkt der Mittelsenkrechten für die Dreiecksseiten AB' und $B'C'$. Er sei S' genannt

(3) Eine Parallele zu AB' mit Abstand ρ wird in der Halbebene, in der C' liegt, konstruiert. Sie sei p genannt und schneidet die Gerade durch AS' in S.

(4) Die Senkrechte durch S auf der Geraden durch AB' schneidet die Gerade durch AC' im Punkt C.

(5) Zuletzt wird die Gerade durch $B'C'$ durch den Punkt C parallel verschoben und schneidet die Gerade durch AB' in B. Das Dreieck ABC ist das gesuchte gleichseitige Dreieck mit dem Inkreisradius ρ.

III. Beweis:
Das gesuchte Dreieck erfüllt die Bedingungen, dass es gleichseitig ist und einen Inkreisradius von ρ besitzt, denn:

Nach Konstruktion ist das Dreieck $\triangle ABC$ zum Dreieck $\triangle AB'C'$ ähnlich mit dem gleichen Winkel $\angle BAC$ und nach Strahlensatz, da $B'C' \parallel BC$ und folglich $AC' : AC = AB' : AB = B'C' : BC$ ist. Also ist das Dreieck $\triangle ABC$ gleichseitig.

Da S' der Punkt im gleichseitigen Dreieck ist, der gleichzeitig Umkreis-, Inkreismittelpunkt und Schwerpunkt ist, so ist auch S' als Schnittpunkt der Höhe durch C sowie der Winkelhalbierenden von Winkel $\angle BAC$ derjenige Punkt, der im Dreieck $\triangle ABC$ Umkreis-, Inkreismittelpunkt und Schwerpunkt ist. Folglich ist der Abstand von S zu AB der Inkreisradius, der nach Konstruktion wiederum die Größe ρ hat.

IV. Existenz und Eindeutigkeit:
Die Konstruktionsschritte (1), (2) und (3) sind eindeutig ausführbar. Da AC' nicht senkrecht auf AB' steht, gibt es genau einen Schnittpunkt C, der nach Schritt (4) konstruiert werden kann. Auch der Schritt (5) ist eindeutig durchführbar.

Aufgabe 110814:
Gegeben seien ein beliebiges Parallelogramm $ABCD$ sowie eine beliebige Länge e ($e > 0$).

Konstruiere unter Beibehaltung der Seite AB ein zu $ABCD$ flächengleiches Parallelogramm ABC_1D_1, das auf derselben Seite der Geraden durch A und B wie $ABCD$ liegt und dessen Diagonale AC_1 die gegebene Länge e hat!

Beschreibe und begründe deine Konstruktion!

Stelle fest, ob sich aus den gegebenen Stücken stets eindeutig ein Parallelogramm der geforderten Art konstruieren lässt! (Eine Untersuchung ob zwei eventuell entstehende verschiedene Parallelogramme einander kongruent sind, wird hier nicht verlangt.)

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(I) Angenommen, ABC_1D_1 sei ein Parallelogramm, wie es konstruiert werden soll. Dann stimmt es mit

$ABCD$ im Flächeninhalt und in der Seite AC überein. Daher muss es mit $ABCD$ auch in der zu AB gehörigen Höhe übereinstimmen. Also müssen C_1 und D_1 auf der Geraden durch C und D liegen.

(II) Daher kann ein Parallelogramm ABC_1D_1 nur dann den Bedingungen der Aufgabe entsprechen, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

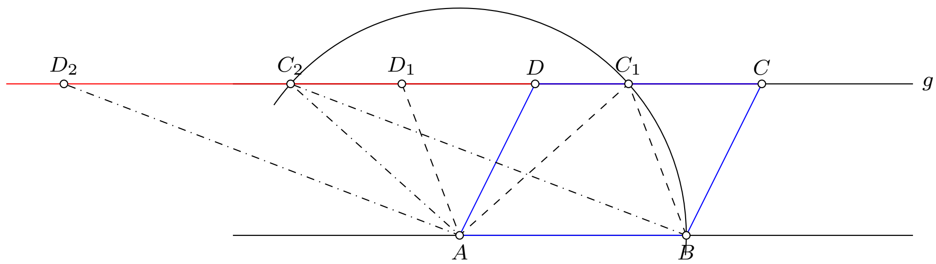
(1) Man zeichnet die Gerade g durch C und D.

(2) Man schlägt den Kreis um A mit e. Schneidet er g, so sei einer der Schnittpunkte C_1 genannt.

(3) Man zieht die Parallele zu BC_1 durch A. Ihr Schnittpunkt mit g sei D_1 genannt.

(III) Der Beweis, dass jedes so erhaltene Parallelogramm ABC_1D_1 den Bedingungen der Aufgabe entspricht, ergibt sich aus (II) und der Umkehrbarkeit der Schlüsse in (I).

(IV) Der Abstand der Seite AB von der Seite CD sei mit h bezeichnet. Dann erhält man für $e < h$ keinen Schnittpunkt C_1. Die Aufgabe hat in diesem Falle keine Lösung.
Im Falle $e = h$ gibt es genau einen Schnittpunkt C_1 (Berührungspunkt) und mithin genau eine Lösung, im Falle $e > h$ dagegen zwei Schnittpunkte C_1 und C_2 und damit zwei verschiedene Parallelogramme ABC_1D_1 und ABC_2D_2 als Lösungen.



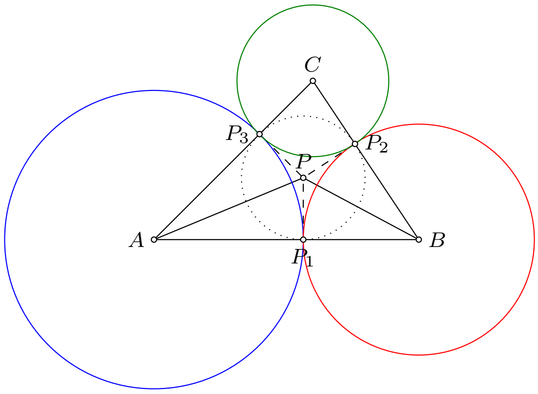
Aufgabe 120814:
Gegeben sei ein beliebiges Dreieck $\triangle ABC$.

Konstruiere um jeden der Punkte A, B, C einen Kreis derart, dass die so entstandenen Kreise einander paarweise von außen berühren!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(I) Angenommen, es gibt drei derartige Kreise. Ihre Berührungspunkte seien P_1, P_2, P_3 genannt. Da der Berührungspunkt je zweier Kreise stets auf der Verbindungsstrecke ihrer Mittelpunkte liegt, liegen die drei genannten Punkte auf den Seiten des Dreiecks $\triangle ABC$. Die Bezeichnung sei nun so gewählt, dass P_1 auf AB, P_2 auf BC und P_3 auf AC liegt. Dann gilt:

$$(1) \quad P_1B = BP_2, \qquad (2) \quad P_2C = CP_3, \qquad (3) \quad P_3A = AP_1$$

Die Senkrechten auf AB bzw. BC im Punkte P_1 bzw. P_2 schneiden einander in einem Punkt, der mit P bezeichnet sei. Dann sind PP_1 und PP_2 Tangentenabschnitte auf den von einem Punkt an denselben Kreis gezogenen Tangenten, und es gilt: (4) $\quad PP_1 = PP_2$.
Analog erhält man $PP_1 = PP_3$. Folglich ist P der Inkreismittelpunkt des Dreiecks $\triangle ABC$.



(II) Daraus ergibt sich, dass drei Kreise nur dann die geforderte Eigenschaft haben, wenn sie durch folgende Konstruktion erhalten werden können:

(1) Man konstruiert den Inkreismittelpunkt P des Dreiecks $\triangle ABC$.
(2) Man fällt von P auf die drei Seiten des Dreiecks die Lote. Ihre Endpunkte seien mit P_1, P_2, P_3 bezeichnet.
(3) Man schlägt um A den Kreis mit dem Radius AP_1, um B den Kreis mit dem Radius BP_1 und um C den Kreis mit dem Radius CP_2.

(III) Da jeder der Schlüsse in (I) umkehrbar ist, ergibt sich ein Beweis, dass die so konstruierten Kreise den Bedingungen der Aufgabe entsprechen, aus der Umkehrung der Schlusskette in (I).

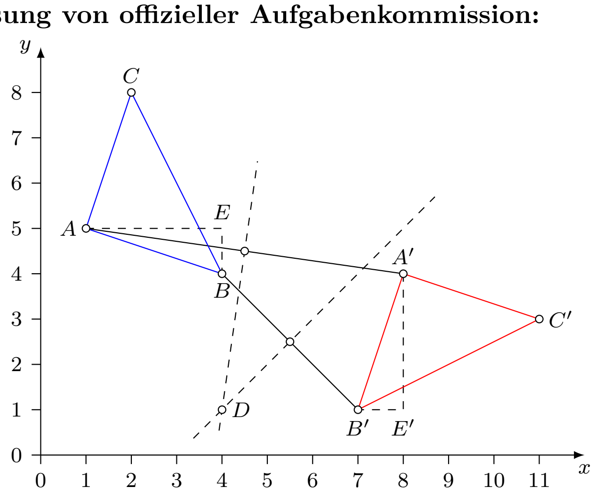
(IV) Der in (II) beschriebene Konstruktionsschritt (1) ist stets eindeutig ausführbar. Da somit stets genau ein Punkt P existiert, sind aus bekannten Gründen auch die Konstruktionsschritte (2) und (3) eindeutig ausführbar.

Aufgabe 270812:
In einen rechtwinkligen Koordinatensystem seien die Punkte $A(1;5)$, $B(4;4)$, $C(2;8)$, $A'(8;4)$, $B'(7;1)$, $C'(11;3)$ gegeben. Sie sind so gelegen, dass es eine Drehung gibt, bei der A, B und C die Bildpunkte A', B' bzw. C' haben.

Konstruiere das Drehzentrum D dieser Drehung! Beschreibe deine Konstruktion!

Beweise folgende Aussage: Wenn D das gesuchte Drehzentrum ist, dann lässt sich D nach deiner Beschreibung konstruieren.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Das Einzeichnen von Punkten wie E,E' oder von Dreiecken wie ABC, ABE, $A'B'C'$, $A'B'E'$, die zur Verdeutlichung der nachstehenden Hinweise dienen, wird nicht gefordert.

Konstruktionsbeschreibung:
(1) Man konstruiert die Mittelsenkrechte g von AA'.
(2) Man konstruiert die Mittelsenkrechte h von BB'.
Der Schnittpunkt D von g und h ist das gesuchte Drehzentrum.

Beweis: Wenn D das gesuchte Drehzentrum ist, so muss $DA = DA'$ gelten. Also muss D auf der Mittelsenkrechten von AA' liegen (denn diese ist die Menge aller derjenigen Punkte, deren Entfernung zu A gleich ihrer Entfernung zu A' ist).
Ebenso folgt, dass D auf der Mittelsenkrechten von BB' liegen muss. Daher kann nur derjenige Punkt D das gesuchte Drehzentrum sein, der durch die Konstruktion (1), (2) erhalten werden kann.

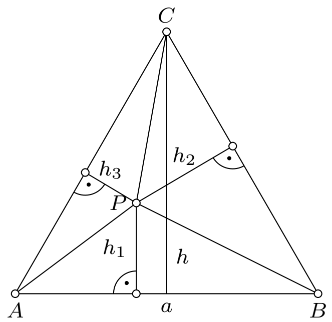
Zur Kontrolle: Es muss sich der Punkt $D(4,1)$ ergeben.

Aufgabe 280814:
Es sei ABC ein gleichseitiges Dreieck. Ferner sei P ein beliebiger im Innern dieses Dreiecks gelegener Punkt.

a) Konstruiere ein derartiges Dreieck!
b) Miss die Länge der von P auf die Seiten gefällten Lote und vergleiche die Summe dieser Längen mit der Länge einer Höhe dieses Dreiecks! Was vermutest du?
c) Beweise deine Vermutung!

Hinweis: Es ist zweckmäßig, den Flächeninhalt geeigneter Teildreiecke zu betrachten.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



a) Konstruktion siehe Abbildung
b) Vermutung: Die Summe der Längen der drei Lote ist gleich der Länge der Höhe des gleichseitigen Dreiecks.

c) Die Seitenlänge des Dreiecks sei mit a bezeichnet, die Längen der Lote von P auf AB, BC und AC in dieser Reihenfolge mit h_1, h_2 und h_3; die Länge einer (also jeder) Höhe des Dreiecks ABC sei mit h bezeichnet.

Benennt man die Flächeninhalte der Teildreiecke ABP, BPC und APC in dieser Reihenfolge mit F_1, F_2 und F_3, sowie den Flächeninhalt des Dreiecke ABC mit F, dann gilt $F = F_l + F_2 + F_3$.

Andererseits gilt nach der Flächenformel für Dreiecke

$$F = \frac{1}{2}ah; \qquad F_1 = \frac{1}{2}ah_1; \qquad F_2 = \frac{1}{2}ah_2; \qquad F_3 = \frac{1}{2}ah_3$$

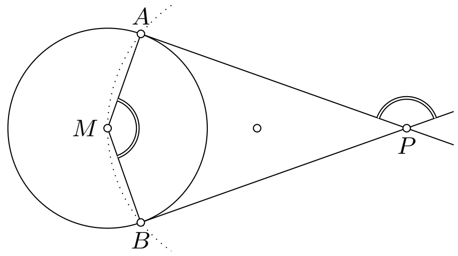
Hieraus folgt

$$\frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}a(h_1 + h_2 + h_3) \qquad \text{und damit} \qquad h = h_1 + h_2 + h_3$$

Aufgabe 310813:
Dirk zeichnet an einen Kreis k zwei Tangenten, die sich in einem Punkt P außerhalb von k schneiden. Den Mittelpunkt des Kreises nennt er M, die Berührungspunkte der Tangenten A bzw. B. Nun stellt er fest, dass der Winkel $\angle AMB$ die gleiche Größe hat wie einer der Schnittwinkel der beiden Tangenten.

a) Konstruiere einen Kreis, dazu zwei Tangenten und die von Dirk betrachteten Winkel!
b) Beweise, dass Dirks Feststellung stets für beliebige (sich schneidende) Tangenten eines Kreises zutrifft!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



a) Die Abbildung zeigt eine geforderte Konstruktion.

b) Für je zwei (sich schneidende) Tangenten gilt mit den angegebenen Bezeichnungen $\angle MAP = \angle MBP = 90°$ (Tangenten und Berührungsradien), also $\angle AMB = 180° - \angle APB$ (Winkelsumme im Viereck).
Folglich hat der Winkel $\angle AMB$ die gleiche Größe wie ein Nebenwinkel von $\angle APB$ und damit wie einer der Schnittwinkel der beiden Tangenten.

Aufgabe 310814:
Gegeben seien ein Kreis k und ein Punkt P, der innerhalb von k liegt, aber verschieden ist vom Mittelpunkt M des Kreises k.

Zu konstruieren sind zwei Sehnen s_1 und s_2 des Kreises k, die folgende Bedingungen erfüllen:

(1) s_1 und s_2 schneiden einander in P.

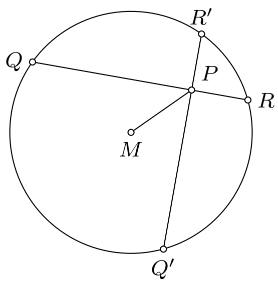
(2) s_1 und s_2 stehen aufeinander senkrecht.

(3) s_1 und s_2 haben einander gleiche Länge.

a) Beschreibe eine Konstruktion, durch die zu gegebenem Kreis k und gegebenem Punkt P zwei Sehnen s_1 und s_2 erhalten werden! Führe die beschriebene Konstruktion durch!

b) Beweise, dass zwei Sehnen, die nach Deiner Beschreibung konstruiert werden, stets die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



a) Konstruktionsbeschreibung (siehe Abbildung):

[1] Man trägt an die Strecke PM in P einen Winkel der Größe 45° an; der freie Schenkel dieses Winkels schneidet den Kreis k in Q; die Gerade g durch Q und P schneidet k außerdem in R.
[2] Man trägt an PM in P nach der anderen Seite von PM als soeben in [1] den Winkel der Größe 45° an; der freie Schenkel dieses Winkels schneidet k in Q'; die Gerade g' durch Q' und P schneidet k außerdem in R'.
Die Strecken QR und $Q'R'$ sind zwei Sehnen, die (1),(2),(3) erfüllen.

b) Beweis: Nach [1] und [2] sind QR und $Q'R'$ zwei durch P gehende Sehnen, d. h., (1) ist erfüllt. Ferner ist mit

$$\angle QPQ' = \angle QPM + \angle Q'PM = 45° + 45° = 90° \tag{4}$$

auch (2) erfüllt. Weiter gilt $MP = MP$ sowie $MQ = MQ'$ und $MR = MR'$ (Radien von k), $r > MP$ (da P innerhalb k ist),

$$\angle MPQ = \angle MPQ' = 45° \quad , \quad \angle MPR = \angle MPR' = 135°$$

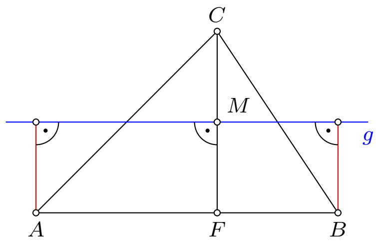
also $\triangle MPQ \cong \triangle MPQ'$ und $\triangle MPR \cong \triangle MPR'$ (Kongruenzsatz Ssw), $PQ = PQ'$ und $PR = PR'$.

Damit folgt $QR = Q'R'$; d. h., auch (3) ist erfüllt.

II. Runde 2

Aufgabe V10825:
Gegeben sind drei nicht auf einer Geraden liegende Punkte.
Konstruiere eine Gerade, von der alle drei Punkte den gleichen (senkrechten) Abstand haben!
Wie viel solcher Geraden gibt es?

Lösung von Steffen Polster:



Konstruktion:
1. Konstruiere die Höhe h_c von C auf die Seite AB. Konstruiere den Mittelpunkt M dieser Höhe.
2. Zeichne eine Senkrechte zu h_c durch M, die somit parallel zu AB ist. Diese Senkrechte g ist eine Gerade, die den Anforderungen der Aufgabe entspricht. Der Abstand der Punkte A und B von g ist $\frac{h_c}{2}$.
Auf Grund der Konstruktion hat auch C den Abstand $\frac{h_c}{2}$ von g.

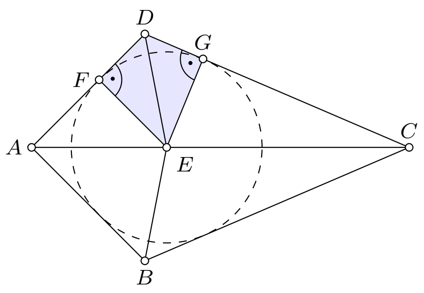
In einem Dreieck existieren stets 3 derartige Geraden, die mittels einer der Höhen h_a, h_b und h_c konstruiert werden können.

Aufgabe 010824:
Können zwei Sehnen eines Kreises, die nicht Durchmesser sind, einander halbieren? Die Antwort ist zu begründen!

Lösung von Carsten Balleier:
Beweis: Zwei Strecken, die sich schneiden, legen eindeutig ein Viereck fest, das diese Strecken als Diagonalen besitzt. Ein Viereck, dessen Diagonalen einander halbieren, ist ein Parallelogramm. Ein in einen Kreis einbeschriebenes Parallelogramm ist stets ein Rechteck. Dessen Diagonalen wiederum sind Durchmesser des Kreises, also ist die Antwort: nein.

Aufgabe 010825:
Gibt es in einem Drachenviereck, das nicht gleichzeitig Rhombus ist, einen Punkt, dessen Abstände von den vier Seiten einander gleich sind?
Wenn ja, dann konstruiere diesen Punkt und beweise, dass er die angegebene Eigenschaft hat!

Lösung von Carsten Balleier:



Analysis und Konstruktion:

(Bild) Aus Symmetriegründen muss der gesuchte Punkt E auf der Diagonalen AC des Drachenvierecks $ABCD$ liegen. Auf dieser ist es genau der Schnittpunkt mit der Winkelhalbierenden von $\angle ADC$ bzw. $\angle ABC$.

Beweis:
Punkte auf einer Winkelhalbierenden haben von beiden Schenkeln des Winkels stets den gleichen senkrechten Abstand. Das zeigt man, indem zwei rechtwinklige Dreiecke DFE und DGE betrachtet werden:

die Winkelhalbierende DE als gemeinsame Seite, die gleichen Winkel $\angle FDE = \angle GDE$ sowie die ebenfalls gleichen rechten Winkel $\angle DFE = \angle DGE = 90°$. Damit sind auch die dritten Winkel gleich und die beiden Dreiecke nach WSW kongruent.

Die Lote $\overline{EF} = \overline{EG}$ (die gleichzeitig die gesuchten Abstände sind) haben demzufolge die gleiche Länge. Somit ist Punkt E der Inkreismittelpunkt des Drachenvierecks. □

Aufgabe 020827:
Von einem Dreieck sind die Summe zweier Seiten und zwei Winkel gegeben:

$$a + b = 10 \text{ cm}, \qquad \beta = 45°, \qquad \gamma = 60°$$

Konstruiere das Dreieck! Beschreibe und begründe die Konstruktion!

Lösung von Carsten Balleier:
Man konstruiere zuerst ein beliebiges Dreieck $A'B'C$ mit den angebenen Winkeln; dieses ist dem gesuchten dann ähnlich.

Dann verlängere man die Seite b' über den Punkt A' hinaus um die Seite a'; man erhält den Punkt D.

Nunmehr kann man eine Gerade durch C zeichnen, auf der man $a+b$ abtrage, der entstandene Endpunkt sei E. Zu beachten ist, dass CD und CE einen spitzen Winkel miteinander bilden. Die Parallele zu DE durch A' teilt (Strahlensatzkonstruktion!) $CE = a + b$ genau in a (Endpunkt E) und b (bei C).

Diese Seiten kann man in C antragen, womit man das Dreieck ABC bekommt.

Aufgabe 020828:
Konstruiere ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse $AB = 10$ cm! Der Fußpunkt der Höhe h_c soll die Hypotenuse in zwei Abschnitte teilen, die sich wie 2 : 3 verhalten.

Bestimme aus der Konstruktion die Länge von h_c! Beschreibe die Konstruktion!

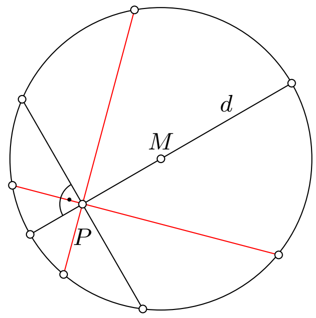
Lösung von Carsten Balleier:
Man zeichne die Strecke AB. Diese teile man, z. B. per Strahlensatzkonstruktion, im Verhältnis 2 : 3. Im Teilungspunkt errichte man die Senkrechte, auf der die Höhe h_c liegt.

Den anderen Endpunkt der Höhe erhält man nach dem Satz des Thales: konstruiert werden muss der Kreis mit AB als Durchmesser. Sein Schnittpunkt mit der errichteten Senkrechten ist der gesuchte Punkt C des Dreiecks. Damit kann man feststellen, dass die Länge von $h_c \approx 4{,}9$ cm beträgt.

Aufgabe 030825:
Gegeben seien ein Kreis und ein Punkt P in seinem Innern.

Konstruiere durch P zwei gleichlange aufeinander senkrecht stehende Sehnen. Beschreibe und begründe die Konstruktion!

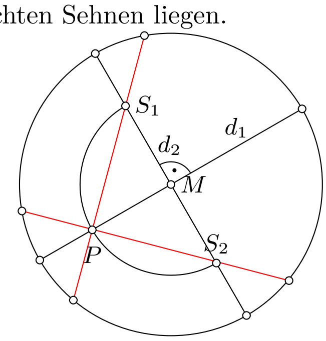
Lösung von Manuela Kugel:



Da gleichlange Sehnen gleichen Abstand vom Mittelpunkt M haben, müssen sie symmetrisch zu dem Durchmesser d durch P liegen.

Errichtet man in P auf PM die Senkrechte und halbiert die rechten Winkel, so erhält man die gesuchten Sehnen.

Alternative: Man errichtet den senkrechten Durchmesser d_2 auf d_1, welcher wiederum der Durchmesser durch P ist. Darauf werden im Abstand PM von M die Schnittpunkte S_1 und S_2 erzeugt, welche jeweils mit P verbunden auf den gesuchten Sehnen liegen.



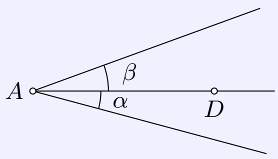
Laut Konstruktion haben die Punkte S_1, P und S_2 den gleichen Abstand von M, liegen folglich auf einem Kreis um M, wobei S_1, M und S_2 auf einem Durchmesser dieses Kreises liegen. Folglich ist der Winkel $\angle S_1PS_2 = 90°$ nach dem Thalessatz.

Ferner gilt $PS_1 = PS_2$, da $PM \perp S_1S_2$. Die gesuchten Sehnen sind eine Vergrößerung der Strecken PS_1 und PS_2 um denselben Faktor (kleiner Kreis zu großem Kreis) und bleiben daher in ihrem Verhältnis zueinander identisch, also gleich groß.

Aufgabe 040821:
Ein beliebiges Trapez $ABCD$ ist in ein flächengleiches Rechteck zu verwandeln (Konstruktion!).

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Man konstruiert das Rechteck aus der Mittellinie und der Höhe des Trapezes.

Aufgabe 040823:
Gegeben sind die beiden anliegenden Winkel α und β mit dem Scheitelpunkt A und Punkt D auf dem gemeinsamen Schenkel (s. Abb.).



a) Konstruiere aus dieser Figur das Dreieck ABC derart, dass $\overline{AD}$ Seitenhalbierende ist!
b) Unter welcher Bedingung wird das Dreieck ABC gleichseitig?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

a) Man verlängert $\overline{AD}$ über D hinaus um sich selbst und erhält dadurch Punkt E. Dann konstruiert man das Parallelogramm $ABEC$

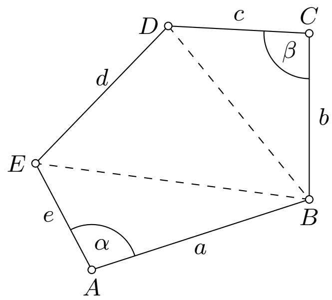
b) Genau dann, wenn $\alpha = \beta$ gilt, ist $ABEC$ ein Rhombus und damit $\triangle ABC$ gleichschenklig. Das Dreieck ABC ist daher genau dann gleichseitig, wenn $\alpha = \beta = 30°$ gilt.

Aufgabe 050823:
Die Seiten eines konvexen Fünfecks seien der Reihe nach a, b, c, d und e. Die Seite a sei 5,5 cm, b sei 4 cm, c sei 3,4 cm, d sei 4,6 cm und e sei 2,9 cm lang. Die Seiten a und e schließen einen Winkel mit dem Maß $\alpha = 100°$, die Seiten b und c einen Winkel mit dem Maß $\beta = 93°$ ein.

a) Konstruiere das Fünfeck aus diesen 7 Stücken!

b) Beschreibe die Konstruktion!

Lösung von Manuela Kugel:



a) Konstruktion (siehe Abbildung)

b) Man konstruiert zunächst ein zu dem Teildreieck $\triangle BCD$ kongruentes Dreieck $\triangle B'C'D'$ aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel. Dann ist $\overline{B'D'} = \overline{BD}$. Nun konstruiert man in gleicher Weise das Teildreieck $\triangle ABE$. Die Punkte D bzw. C erhält man durch Konstruktion der Dreiecke $\triangle EBD$ und $\triangle DBC$ jeweils aus den drei Seiten.

Aufgabe 070822:
Gegeben sind ein Kreis k (Mittelpunkt M, Radius der Länge $r = 6$ cm) und ein Kreis k_1 (Mittelpunkt M_1, Radius der Länge $r_1 = 2$ cm). Beide Kreise berühren einander von außen.

Konstruiere alle Kreise mit dem Radius der Länge 2 cm, die die beiden gegebenen Kreise berühren!

Konstruiere auch die Berührungspunkte der gesuchten Kreise mit den gegebenen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(I) Die Mittelpunkte der gesuchten Kreise liegen entweder (1) auf dem Kreis um M mit dem Radius der Länge $r + r_1$ oder (1') auf dem Kreis um M mit dem Radius der Länge $r - r_1$, da sie k berühren sollen, und (2) auf dem Kreis um M_1 mit dem Radius der Länge $r + r_1$, da sie k_1 berühren sollen und denselben Radius haben wie k_1.

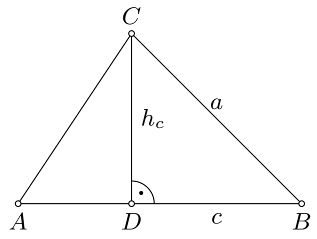
(II) Daher ergeben sich die Mittelpunkte der gesuchten Kreise als Schnittpunkte der Kreise nach (1) und (2) (das sind 2 Schnittpunkte) und als Berührungspunkt der Kreise nach (1') und (2).
Dieser Punkt liegt auf der Verbindungsgeraden durch M und M_1. Die Berührungspunkte der Kreise erhält man, wenn man die Mittelpunkte der sich berührenden Kreise miteinander verbindet. Es gibt genau 3 Kreise, die die Bedingungen der Aufgabe erfüllen. Der Beweis folgt aus (I).

Aufgabe 100824:
Konstruiere ein Dreieck $\triangle ABC$ aus $c = 5$ cm, $h_c = 4$ cm, $a = 6$ cm!

Dabei sei a die Länge der Seite BC, c die der Seite AB und h_c die der auf der Geraden durch A und B senkrechten Höhe.

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob sich aus den gegebenen Stücken ein Dreieck eindeutig konstruieren lässt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



(I) Angenommen, $\triangle ABC$ sei ein Dreieck, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht.
Der Fußpunkt der auf der Geraden durch A und B senkrechten Höhe sei D. Dann enthält das Teildreieck $\triangle CDB$, sofern es nicht mit $D = B$ entartet ist, als bekannte Stücke a, h_c und den rechten Winkel $\angle CDB$.
Der Punkt A liegt erstens auf der Geraden durch B und D und zweitens auf dem Kreis um B mit c.

(II) Daraus folgt, dass ein Dreieck nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(1) Wir konstruieren das Teildreieck $\triangle CDB$ aus $BC = a$, $CD = h_c$ und dem rechten Winkel $\angle CDB$. Der Entartungsfall $D = B$ tritt nicht auf, da für die gegebenen Werte $h_c < a$ gilt.

(2) Wir zeichnen die Gerade durch D und B.

(3) Wir schlagen den Kreis um B mit c. Schneidet er die Gerade durch D und B, so sei A einer der Schnittpunkte.

(III) Beweis, dass jedes so erhaltene Dreieck $\triangle ABC$ den Bedingungen der Aufgabe entspricht:
Nach Konstruktion ist $BC = a$, $AB = c$, $CD = h_c$ und CD die auf der Geraden durch A und B senkrechte Höhe.

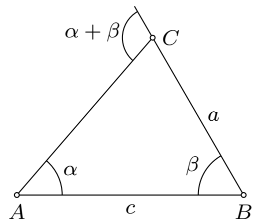
(IV) Wegen $h_c < a$ ist der Konstruktionsschritt (1) nach dem Kriterium ssw eindeutig möglich, da der gegebene rechte Winkel der größeren Seite gegenüberliegt. (Wie sich (1) [und (2)] für $h_c = a$ gestalten würde, braucht bei den gegebenen Werten nicht untersucht zu werden.)

Konstruktionsabschnitt (2) ist stets eindeutig möglich, da sich wegen $h_c < a$ bei (1) $D \neq B$ ergeben hatte. Schließlich ergibt (3) stets zwei verschiedene Punkte A_1 und A_2.
Da nun der wegen $h_c < a$ spitze Winkel $\angle DBC$ in dem einen der beiden Dreiecke $\triangle A_1BC'; \triangle A_2BC$ als Innenwinkel, in dem anderen als Außenwinkel bei B auftritt, so ist das eine dieser Dreiecke bei B spitzwinklig, das andere bei B stumpfwinklig; folglich sind diese beiden Dreiecke nicht kongruent (bei gleicher Reihenfolge A_1,B,C bzw. A_2,B,C homologer Punkte).
Somit besitzt die Aufgabe genau diese beiden Dreiecke als Lösung.

Aufgabe 120824:
Konstruiere ein Dreieck $\triangle ABC$ aus $c = 7{,}5$ cm; $a = 6{,}5$ cm und $\alpha + \beta = 120°$!

Dabei sei c die Länge der Seite AB, a diejenige der Seite BC, α die Größe des Winkels $\angle BAC$ und β die des Winkels $\angle ABC$.
Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke ein Dreieck bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(I) Angenommen, $\triangle ABC$ sei ein Dreieck, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht.
Dann ist durch die Außenwinkel bei C, deren jeder nach dem Außenwinkelsatz die Größe $\alpha + \beta$ hat, auch die Größe des Innenwinkels $\angle ACB$ (als Nebenwinkel des Außenwinkels) bestimmt (es lässt, sich auch der Winkelsummensatz benutzen). Seine Größe beträgt $180° - 120° = 60°$.
Die ihm gegenüberliegende Seite ist länger als die andere gegebene Seite.



(II) Daraus ergibt sich, dass ein Dreieck $\triangle ABC$ nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

Das Dreieck $\triangle ABC$ wird aus $\angle ACB = 60°$, $BC = a = 6{,}5$ cm, $AB = c = 7{,}5$ cm als Dreieck aus zwei Seiten und dem Gegenwinkel der größeren Seite (ssw) konstruiert.

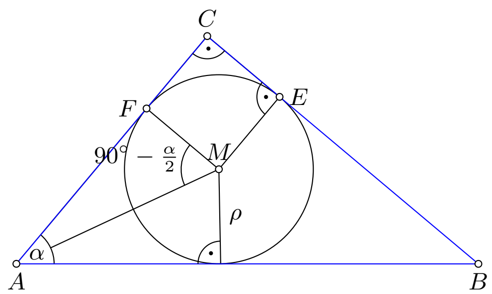
(III) Beweis, dass jedes nach (II) konstruierte Dreieck $\triangle ABC$ den Bedingungen der Aufgabe entspricht: Nach dem Außenwinkelsatz gilt $\alpha + \beta = 180° - \angle ACB = 120°$ und nach Konstruktion $AB = c = 7{,}5$ cm sowie $BC = a = 6{,}5$ cm.

(IV) Die in (II) angegebene Konstruktion ist bekanntlich bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar. Daher ist durch die gegebenen Stücke wegen $c > a$ das Dreieck $\triangle ABC$ bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.

Aufgabe 130822:
Konstruiere ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei C aus $\rho = 2{,}5$ cm und $\alpha = 50°$! Dabei sei ρ der Inkreisradius und α die Größe des Winkels BAC.

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke ein Dreieck eindeutig bestimmt ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



(I) Angenommen, $\triangle ABC$ sei ein Dreieck, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht, M sei der Schnittpunkt seiner Winkelhalbierenden, d. h. der Mittelpunkt seines Inkreises, und E, F seien die Fußpunkte der Lote von M auf die Seiten BC, CD.
Dann hat das Viereck $CFME$ rechte Winkel bei E, C und F und ist daher wegen $ME = MF = \rho$ ein Quadrat mit der Seitenlänge ρ.
Die Halbierende des Winkels BAC geht durch M; es gilt $\angle FMA = 90° - \frac{\alpha}{2}$. Punkt A liegt erstens auf dem Strahl aus C durch F und zweitens auf dem freien Schenkel eines in M an MF nach der Seite der Geraden durch M und E, auf der C nicht liegt, angetragenen Winkels der Größe $90° - \frac{\alpha}{2}$.
Punkt B liegt erstens auf dem Strahl aus C durch E und zweitens auf dem freien Schenkel eines in A an AC nach der Seite der Geraden durch A und C, auf der E liegt, angetragenen Winkels der Größe α.

(II) Daraus folgt, dass ein Dreieck ABC nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

1. Wir konstruieren das Quadrat $CFME$ mit der Seitenlänge ρ.
2. Wir zeichnen den Strahl C durch F.
3. Wir tragen in M an MF einen Winkel der Größe $90° - \frac{\alpha}{2}$ nach der Seite der Geraden durch M und F an, auf der C nicht liegt. Schneidet sein freier Schenkel den Strahl aus C durch F, so sei der Schnittpunkt A genannt.
4. Wir tragen in A an AC nach der Seite der Geraden durch A und C, auf der E liegt, einen Winkel der Größe α an.
5. Wir zeichnen den Strahl aus C durch E. Schneidet er den freien Schenkel des in (4) konstruierten Winkels, so sei der Schnittpunkt B genannt.

(III) Beweis, dass jedes so konstruierte Dreieck ABC den Bedingungen der Aufgabe entspricht:

Laut Konstruktion ist der Winkel bei C ein Rechter. Ebenso hat laut Konstruktion der Winkel BAC die Größe α. M hat laut Konstruktion von AC und BC den Abstand ρ. Da ferner nach Konstruktion

$$\angle CAM = \angle FAM = \frac{\alpha}{2} \qquad \text{und} \qquad \angle MAB = \angle CAB - \angle CAM = \frac{\alpha}{2}$$

ist, ist AB ebenso wie AC Tangente an den Kreis mit ρ um M. Folglich ist M der Mittelpunkt des Inkreises des Dreiecks ABC.

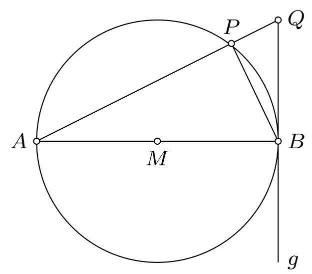
(IV) Konstruktionsschritt (1) ist bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar. Ebenso ist Konstruktionsschritt (2) eindeutig ausführbar. Ferner ist wegen $0° < 90° - \frac{\alpha}{2} < 90°$ auch (3) eindeutig ausführbar. Danach ist dann (4) und wegen $0° < \alpha < 90°$ schließlich auch (5) eindeutig ausführbar.
Das Dreieck ABC ist also durch die gegebenen Stücke bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.

Aufgabe 140824:
Konstruiere einen Kreis k, der folgende Eigenschaft hat:

Ist AB ein Durchmesser von k, g die Tangente an k in B und liegt ein Punkt Q so auf g, dass $\overline{BQ} = 6$ cm gilt, so schneidet k die Strecke AQ in einem Punkt P, für den $\overline{PQ} = 3$ cm gilt.

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke ein derartiger Kreis k bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(I) Angenommen, k sei ein Kreis, wie er laut Aufgabenstellung konstruiert werden soll.
Sein Mittelpunkt sei M. Dann ist nach dem Satz des Thales $\angle APB$ ein rechter Winkel und als sein Nebenwinkel $\angle BPQ$ ebenfalls ein rechter Winkel. Folglich liegt P erstens auf dem Halbkreis über BQ und zweitens auf dem Kreis um Q mit dem Radius PQ.
Punkt A liegt erstens auf dem Strahl aus Q durch P und zweitens auf der Senkrechten zu BQ durch B.
Daraus folgt, dass ein Kreis nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn er durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:



(II)
(1) Wir zeichnen die Strecke BQ der Länge 6 cm.
(2) Wir schlagen über BQ einen Halbkreis.
(3) Wir schlagen um Q mit dem Radius der Länge 3 cm einen Kreis. Schneidet er den in (2) gezeichneten Halbkreis in einem Punkt, so sei dieser P genannt.
(4) Wir errichten in B die Senkrechte zu g.
(5) Wir zeichnen den Strahl aus Q durch P. Schneidet er die in (4) konstruierte Senkrechte, so sei der Schnittpunkt A genannt.
(6) Wir zeichnen den Kreis k mit dem Durchmesser AB.

(III) Jeder so konstruierte Kreis k entspricht den Bedingungen der Aufgabe.
Beweis:
Nach Konstruktion gilt $BQ = 6$ cm und $PQ = 3$ cm. Der Kreis k berührt die Gerade g laut Konstruktion in B, da $AB \perp g$ ist. Ferner liegt laut Konstruktion P auf AQ (und zwar ist $P \neq A$).
Wegen $BP \perp PQ$ (nach dem Satz von Thales) und damit $BP \perp AP$ liegt P nach der Umkehrung des Satzes des Thales auf dem Kreis k mit dem Durchmesser AB sowie laut Konstruktion auf AQ.

(IV) Konstruktionsschritt (1) ist bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar. Ebenso ist (2) bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar.

(3) liefert bei den gegebenen Längen für BQ und PQ genau einen Schnittpunkt P. (4) ist eindeutig ausführbar, ebenso (5), und es gibt, da der in (5) konstruierte Strahl einen spitzen Winkel mit dem Strahl aus Q durch B bildet, genau einen Schnittpunkt A des in (5) konstruierten Strahles mit der in (4) konstruierten Senkrechten.
Schließlich ist auch (6) eindeutig ausführbar.

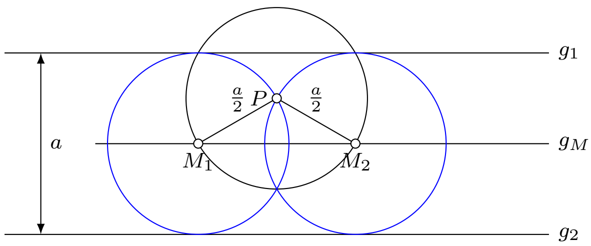
Der Kreis k ist durch die gegebenen Stücke mithin bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.

Aufgabe 150824:
Gegeben seien zwei parallele Geraden g_1 und g_2 mit dem Abstand a und außerdem ein Punkt P in beliebiger Lage zwischen g_1 und g_2.

Konstruiere einen Kreis k, der g_1 und g_2 berührt und durch P geht!

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die Aufgabenstellung ein Kreis eindeutig bestimmt ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



(I) Angenommen, k sei ein Kreis, der den Bedingungen der Aufgabe entspricht. (siehe Abbildung). Sein Mittelpunkt M liegt erstens auf der Mittelparallelen g_M zu g_1 und g_2 und zweitens (da sein Radius folglich $\frac{a}{2}$ beträgt) auf dem Kreis um P mit den Radius $\frac{a}{2}$.
Daher entspricht ein Kreis nur dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn er durch folgende Konstruktion gewonnen werden kann:

(II) (1) Wir konstruieren die Mittelparallele g_M zu g_1 und g_2.
(2) Wir zeichnen um P einen Kreis mit $\frac{a}{2}$, schneidet er g_M, so sei M einer der Schnittpunkte.
(3) Wir zeichnen um M den Kreis k mit $\frac{a}{2}$.

(III) Jeder so konstruierte Kreis k genügt den Bedingungen der Aufgabe.

Beweis: Nach Konstruktion beträgt der Abstand von M zu g_1 und g_2 jeweils $\frac{a}{2}$, g_1 und g_2 sind somit Tangenten an k. Ferner gilt auch nach Konstruktion $MT = \frac{a}{2}$.

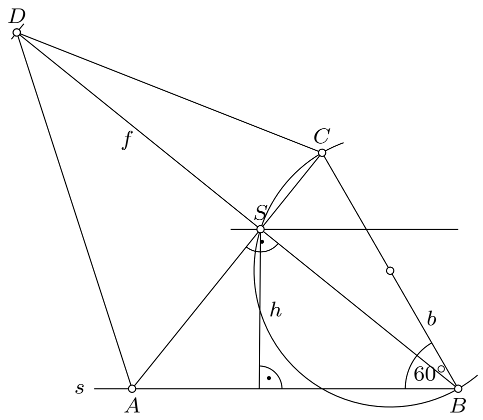
(IV) Konstruktionsschritt (1) ist stets eindeutig ausführbar. Da P zwischen g_1 und g_2 liegt, ist der Abstand von P zu g_M gut kleiner als $\frac{a}{2}$. Also existieren stets genau zwei Schnittpunkte von g_M mit dem Kreis um P mit $\frac{a}{2}$. Es entstehen somit stets genau zwei Kreise, die den geforderten Bedingungen genügen.

Aufgabe 160824:
Konstruiere ein Viereck $ABCD$, das folgende Bedingungen erfüllt:

- Die Größe β des Innenwinkels $\angle CBA$ im Viereck $ABCD$ beträgt 60°.
- Die Länge f der Diagonalen BD beträgt 12,5 cm.
- Die Länge b der Seite BC beträgt 6,0 cm.
- Der Abstand h des Schnittpunktes S der Diagonalen des Vierecks $ABCD$ von der Seite AB beträgt 3,5 cm.
- Die Diagonalen des Vierecks $ABCD$ stehen senkrecht aufeinander.

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die angegebenen Bedingungen ein Viereck bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



I. Angenommen, $ABCD$ sei ein Viereck, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht.
Dann liegt der Schnittpunkt S seiner Diagonalen wegen der Umkehrung des Lehrsatzes des Thales erstens auf dem Kreis mit dem Durchmesser BC und zweitens auf einer Parallelen, die im Abstand h zur Geraden durch A und B verläuft.

Punkt A liegt erstens auf einem Strahl s, der in B an BC unter einem Winkel der Größe β angetragen wurde, und zweitens auf der Geraden durch C und S. Punkt D liegt erstens auf der Geraden durch B und S und zweitens auf dem Kreis um B mit f als Radius.
Daraus folgt, dass ein Viereck nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

II. (1) Wir zeichnen die Seite BC der Länge b.
(2) Wir tragen in B an BC einen Winkel der Größe β an. Sein freier Schenkel sei s.
(3) Wir zeichnen den Kreis k, der BC als Durchmesser hat.
(4) Wir zeichnen die Parallelen zu s im Abstand h.
(5) Für jeden Schnittpunkt von k mit einer dieser Parallelen zeichnen wir, wenn der betreffende Schnittpunkt $S \neq C$ ist, die Gerade durch C und S. Schneidet sie den Strahl s, so sei dieser Schnittpunkt A genannt.
(6) Wir zeichnen die Gerade g durch B und S.
(7) Wir zeichnen um B den Kreis mit dem Radius f. Ein Schnittpunkt von g mit diesem Kreis sei mit D bezeichnet, wenn dabei $ABCD$ ein Viereck wird, das den in (2) konstruierten Winkel als Innenwinkel hat.

III. Jedes so konstruierte Viereck $ABCD$ entspricht den Bedingungen der Aufgabe.

Beweis: Laut Konstruktion hat die Seite BC die Länge $b = 6$ cm. Ebenso hat laut Konstruktion der Innenwinkel $\angle ABC$ die Größe $\beta = 60°$, ferner die Diagonale BD die Länge $f = 12{,}5$ cm.

Weiter hat der Punkt S von AB einen Abstand von $h = 3{,}5$ cm. Da schließlich Punkt S auf dem Kreis mit dem Durchmesser BC liegt, schneiden sich die Diagonalen BD und AC unter einem Winkel von 90°, wie es verlangt war.

IV. Die Konstruktionsschritte (1), (2), (3), (4) sind ausführbar und - bis auf Kongruenz - eindeutig ausführbar.
Bei den gegebenen Werten für β, b, h schneidet genau eine der beiden in (4) konstruierten Parallelen den Kreis k, und zwar in 2 Punkten. Für genau einen von diesen führt (5) zu einem Punkt A.
Sodann ist Konstruktionsschritt (6) eindeutig ausführbar, und in (7) ergeben sich genau 2 Schnittpunkte von g mit dem Kreis um B mit f. Von den beiden entstehenden Vierecken hat genau eines den in (2) konstruierten Winkel als Innenwinkel (das andere hat bei B einen Innenwinkel der Größe 300°).

Das Viereck $ABCD$ ist mithin durch die angegebenen Bedingungen bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.

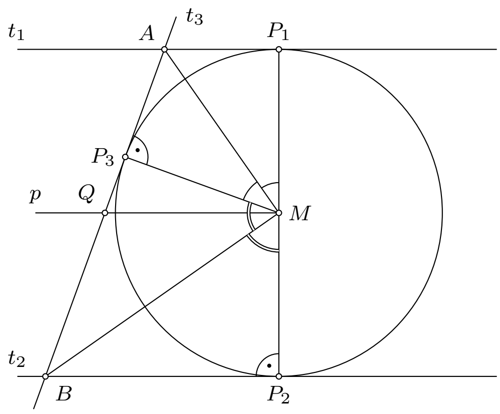
Aufgabe 310824:

a) Konstruiere einen Kreis mit dem Radius 3 cm, zwei zueinander parallele Tangenten t_1, t_2 sowie eine dritte Tangente t_3 an diesen Kreis! Für die Schnittpunkte A, B von t_3 mit t_1 bzw. mit t_2 und für den Mittelpunkt M des Kreises stelle eine Vermutung über die Größe des Winkels $\angle AMB$ auf!

b) Beweise, dass diese Vermutung stets zutrifft, wenn t_1, t_2, t_3 drei Tangenten an einen Kreis sind und $t_1 \parallel t_2$ ist!

c) Beweise, dass dann auch stets für den Schnittpunkt Q, den AB mit der Parallelen p durch M zu t_1 und t_2 hat, $\overline{AQ} = \overline{MQ}$ gilt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Die Abbildung zeigt eine geforderte Konstruktion:



Vermutung: Es gilt $\angle AMB = 90°$.

b) Beweis: Ist P_1 der Berührungspunkt, von t_i ($i = 1{,}2{,}3$) so folgt nach dem Satz über Tangente und Berührungsradius:
Wegen $t_1 \parallel t_2$ sind MP_1 und MP_2 zueinander parallele Radien, was nur möglich ist, wenn sie einen Durchmesser P_1P_2 bilden, d. h. wenn

$$\angle P_1MP_2 = 180° \qquad (1)$$

ist. Aus ($MA = MA$ und) $\angle MP_1A = \angle MP_3A = 90°$, $MP_1 = MP_3$ (Radien des Kreises), $< MA$ (da MA Hypotenuse ist) folgt nun nach dem Kongruenzsatz Ssw $\triangle AMP_1 \cong \triangle AMP_3$, also halbiert MA den Winkel $\angle P_1MP_3$.

Ebenso folgt: MB halbiert $\angle P_2MP_3$. Wegen (1), d. h. $\angle P_1MP_3 + \angle P_2MP_3 = 180°$, ist folglich $\angle AMP_3 + \angle BMP_3 = 90°$, d. h.

$$\angle AMB = 90° \qquad (2)$$

c) Wegen $t_1 \parallel p \parallel t_2$ folgt aus $MP_1 = MP_2$ auch $QA = QB$.
Nach (2) und der Umkehrung des Thalessatzes liegt M auf einem Halbkreis über AB; für dessen Radien gilt somit $AQ = MQ$.

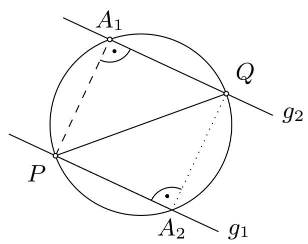
III. Runde 3

Aufgabe 010835:
Gegeben sind die Punkte P und Q mit einem Abstand von 5 cm.

Konstruiere zwei Parallelen, von denen eine durch P, die andere durch Q geht und die voneinander einen Abstand $a = 3$ cm haben!

Begründe die Konstruktion! Wie viel verschiedene Möglichkeiten gibt es dabei in der Ebene?

Lösung von Carsten Balleier:



I. Analyse:
(Bild) Wir betrachten ein rechtwinkliges Dreieck PQA, dessen Hypotenuse $PQ = 5$ cm und dessen Kathete $AP = 3$ cm beträgt. Eine der Parallelen, etwa g_2, geht dann durch A und Q, die andere, $g_1 \parallel g_2$, geht durch Punkt P.

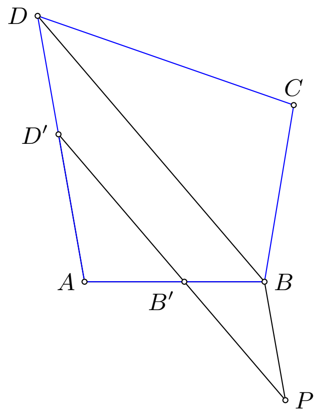
II. Konstruktionsbeschreibung:
Wir zeichnen den Thales-Kreis über dem Durchmesser PQ und schlagen anschließend mit dem Zirkel einen Kreisbogen mit dem Radius a um P. Damit erhalten wir zwei mögliche Punkte A_1 bzw. A_2.

III. Beweis:
Der (stets senkrechte) Abstand beider Parallelen g_1 und g_2 ist durch die Strecke a nach obiger Konstruktion gegeben; P und Q haben ebenfalls den geforderten Abstand.

Beide Paare von Parallelen erfüllen somit die Bedingungen der Aufgabenstellung. $\square$

Aufgabe 020834:
Es soll ein Drachenviereck konstruiert werden, in dem 2 gegenüberliegende Winkel je 100° betragen, das Verhältnis der ungleichen Seiten 2 : 3 ist und eine Diagonale 7 cm misst.

Lösung von Carsten Balleier:



Die Konstruktion führt man in zwei wesentlichen Teilen durch.

(1) Man konstruiert ein Dreieck, welches der einen Hälfte des Drachenvierecks ähnlich ist.
Man zeichnet einen Winkel von 100° (der Scheitel sei A), auf dessen Schenkeln man zwei bzw. drei (beliebig wählbare) Einheiten abträgt. Die beiden Endpunkte (B' und D') verbindet man, die erhaltene Strecke e' entspricht der Diagonalen e von 7 cm. (2) Per Strahlensatzkonstruktion erzeugt man die richtige Größe. Auf der Geraden durch $D'B'$ wird Punkt P konstruiert, indem die Länge e von D' aus in Richtung B' abgetragen wird. Nun wird eine Gerade durch P parallel zu AD' konstruiert, die die Gerade durch AB' in B schneidet. Die Parallelverschiebung von $B'D'$ durch B erzeugt D als Schnittpunkt mit der Geraden durch AD'.

(3) Das Dreieck ABD wird an BD gespiegelt. Der Spiegelpunkt von A sei C. Es entsteht das Drachenviereck $ABCD$, welches den geforderten Bedingungen entspricht.

Aufgabe 030835:
Gegeben sind die Strecken $s-a=3$ cm, $s-b=2$ cm, $s-c=1$ cm, wobei $2s=a+b+c$ der Umfang des Dreiecks ist.
a) Konstruiere das Dreieck!
b) Begründe die Konstruktion!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es gilt:

$$\begin{aligned} a &= a+b+c-(b+c) = 2s-b-c = (s-b)+(s-c) \\ b &= a+b+c-(a+c) = 2s-a-c = (s-a)+(s-c) \\ c &= a+b+c-(a+b) = 2s-a-b = (s-a)+(s-b) \end{aligned}$$

Aus den so beschriebenen drei Seiten konstruiert man nun das Dreieck in der üblichen Weise.

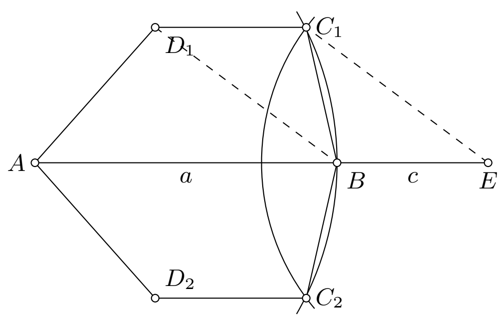
Anmerkung: Es ergeben sich für a, b, c die Seitenlängen 3, 4 und 5 cm, was einem rechtwinkligen Dreieck entspricht.

Aufgabe 030836:
Gegeben seien die parallelen Seiten $a=8$ cm und $c=4$ cm eines Trapezes sowie seine Diagonalen $e=8$ cm und $f=6$ cm.

a) Konstruiere das Trapez!

b) Begründe die Konstruktion!

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:
Konstruktion:



Konstruktionsbeschreibung:

1. Zeichne die Strecke $\overline{AB} = a = 8$ cm.
2. Trage auf der Geraden durch A und B über B hinaus E ab, so dass $\overline{BE} = c = 4$ cm ist.
3. Zeichne einen Kreisbogen um A mit dem Radius $e = 8$ cm.
4. Zeichne einen Kreisbogen um E mit dem Radius $f = 6$ cm. Der Schnittpunkt der Kreisbögen sei C.
5.Konstruiere die Parallele g zu $\overline{BE}$ durch C.
6. Auf der Geraden g ist von C der Abstand $c = 4$ cm derart abzutragen und mit D zu bezeichnen, dass das entstehende Viereck $ABCD$ nicht entartet ist. D ist mit A zu verbinden.

Begründung:
Die Länge der Strecke $\overline{AB}$ beträgt a mit (1). Laut Konstruktion ist $BECD$ ein Parallelogramm: $\overline{BE} \parallel \overline{CD}$ mit (5) und $\overline{BE} = \overline{CD} = c$ mit (2) und (6).

Damit ist die Länge der Strecke $\overline{BD} = \overline{EC} = f$ mit (4).

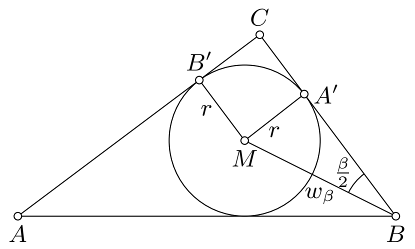
Ferner hat $\overline{AC}$ laut Konstruktion die Länge von e mit (3).

Somit erfüllt jedes derart konstruierte Trapez die Forderungen der Aufgabenstellung.

Aufgabe 040832:
Konstruiere ein rechtwinkliges Dreieck, wenn der Radius r des Inkreises und die Länge a einer Kathete gegeben sind, und beschreibe die Konstruktion!

Unter welchen Bedingungen ist die Konstruktion ausführbar?

Lösung von Manuela Kugel:



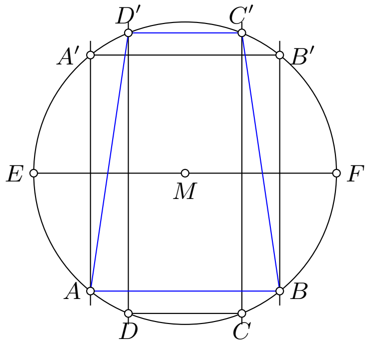
Konstruktionsbeschreibung:

a) Ich zeichne a und erhalte C und B. Um C schlage ich mit r einen Kreisbogen und erhalte A' und auf der Senkrechten zu a in $C\ B'$. Um A' und B' schlage ich mit r die Kreisbögen und erhalte M.
$\overline{MB}$ ist Winkelhalbierende w_β. Ich konstruiere β in B und erhalte A.

b) Die Konstruktion ist nur dann ausführbar, wenn gilt $a > 2r$.

Aufgabe 040834:
Gegeben seien drei Strecken mit den Längen p_1, p_2 und r mit $p_1 < p_2$. Gesucht ist ein gleichschenkliges Trapez, dessen parallele Seiten die Längen p_1 bzw. p_2 haben und dessen Umkreis den Radius r hat!
a) Untersuche, unter welchen Bedingungen es solche Trapeze gibt, und beschreibe die Konstruktion!
b) Führe die Konstruktion für den Fall $p_1 = 3$ cm, $p_2 = 5$ cm und $r = 4$ cm aus!

Lösung von Manuela Kugel:



a) Angenommen, $ABCD$ sei eines der gesuchten Trapeze, wobei $\overline{AB} = p_2$ und $\overline{CD} = p_1$ ist. Dann gilt $p_2 \leq 2r$ als Bedingung für die Konstruktion.

b) *Konstruktionsbeschreibung:*

Wir zeichnen um M einen Kreis mit dem Radius r und dem Durchmesser $\overline{EF}$. Auf $\overline{EF}$ konstruieren wir zwei Strecken p_1 bzw. p_2 so, dass M sie halbiert. Durch die Endpunkte dieser Strecken zeichnen wir die Senkrechten zu $\overline{EF}$ und erhalten A und A' bzw. B und B' bzw. C und C' bzw. D und D'.

Die gesuchten Trapeze sind dann $ABCD$, $ABC'D'$, $A'B'CD$, $A'B'C'D'$, von denen je zwei kongruent sind. Für $p_2 = 2r$ entstehen nur zwei kongruente Trapeze.

Aufgabe 050836:

a) Konstruiere das Dreieck ABC, wenn $a + b$, r und α gegeben sind!

Dabei ist a die Länge der Seite BC, b die Länge der Seite AC, r die Länge des Umkreisradius und α das Maß des Winkels $\angle CAB$.

b) Beschreibe und diskutiere die Konstruktion!

Anmerkung: Die Konstruktionsbeschreibung soll kurz gehalten sein. Bei der Konstruktion von Dreiecken genügt die Angabe von Seiten und Winkeln, aus denen sich das Dreieck konstruieren lässt.

Lösung von Eckart Keller:

a) Für die Konstruktion:

Analyse:

Wie die Figur zeigt, sind von dem Teildreieck $\triangle MBC$ zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel bekannt. Daher lässt es sich konstruieren, wodurch gleichzeitig a bestimmt wird.

Damit ist aber, da $a + b$ gegeben ist, auch b bestimmt (wobei $a < a + b$ gelten muss), so dass die Konstruktion des Dreiecke $\triangle ABC$ auf die Konstruktion eines Dreiecks aus zwei Seiten und einem Gegenwinkel zurückgeführt ist.

b) Für die Beschreibung und Diskussion:

Beschreibung:

Man konstruiert das Teildreieck $\triangle MBC$. Dabei gibt es folgende Fälle:

(1) $\alpha < 90°$. Dann lässt sich das Dreieck aus den Seiten MC (Länge r), MB (Länge r) und dem Winkel $\angle BMC$ (Winkelmaß 2α) konstruieren.

(2) $\alpha > 90°$. Dann gilt $2\alpha > 180°$. Das Teildreieck $\triangle MBC$ lässt sich in diesem Fall aus den Seiten MC (Länge r), MB (Länge r) und dem Winkel $\angle CMB$ (Winkelmaß δ) konstruieren, wobei $\delta = 360° - 2\alpha$ gilt.

(3) Für $\alpha = 90°$ gilt $a = 2r$. In diesem Falle lässt sich das Dreieck $\triangle ABC$ sofort aus den Seiten BC (Länge $2r$), AC (Länge $a + b - a = b$) und dem der größeren Seite gegenüberliegenden Winkel $\angle BAC$ (Winkelmaß $\alpha = 90°$) konstruieren, wobei die Konstruktion für $b < 2r$, also $a+b < 4r$, und nur dann durchführbar ist. Das Dreieck ist in diesem Falle eindeutig bestimmt.

In den Fällen (1) und (2) erhält man mit dem Teildreieck $\triangle MBC$ auch die Seite BC (Länge a) und damit auch die Länge b der Seite AC. Man schlägt den Umkreis um M mit dem Radius r und mit dem Radius b um C einen Kreisbogen, der den Umkreis im Falle $b < 2r$ in den Punkten A und A' schneidet.

Für $b = 2r$ haben beide Kreise genau einen Punkt, den Punkt A, gemeinsam, und für $b > 2r$ gibt es keine gemeinsamen Punkte beider Kreise.

Diskussion:

Im Falle $b = 2r$ gibt es genau ein Dreieck. Dieses wird durch die angegebene Konstruktion erhalten.

Wenn $b < 2r$ gilt, gibt es im Falle $\alpha < 90°$ für $b > a$ zwei zueinander inkongruente Dreiecke, für $b = a$ genau ein Dreieck (das andere artet zu einer Strecke aus) und für $b < a$ ebenfalls genau ein Dreieck, da wegen $2\alpha < 180°$ der Winkel $\angle BAC$ in derselben Halbebene in Bezug auf die Gerade BC wie der Punkt M liegen muss.

Im Falle $90° < \alpha < 180°$ gibt es für $b \geq a$ kein Dreieck, das allen gestellten Bedingungen genügt, und für $b < a$ genau ein Dreieck, da wegen $180° < 2\alpha < 360°$ der Winkel $\angle BAC$ nicht in der gleichen Halbebene in Bezug auf die Gerade BC wie der Punkt M liegen kann. Im Falle $b > 2r$ gibt es kein Dreieck, das allen gestellten Bedingungen genügt.

Die Entscheidung, welcher der drei Fälle eintritt, insbesondere also, ob es überhaupt ein solches Dreieck gibt, kann in den Fällen $\alpha \neq 90°$ auf geometrischem Wege erst nach der Konstruktion des stets konstruierbaren Hilfsdreiecks $\triangle BMC$ gefällt werden.

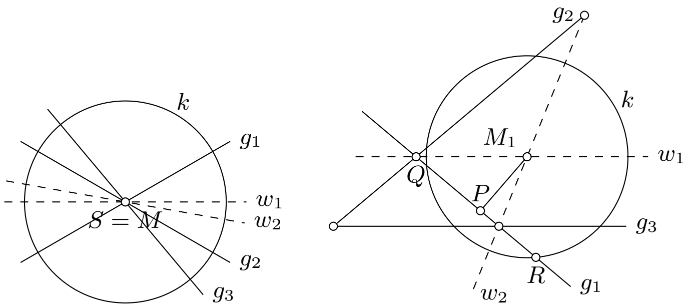
Aufgabe 060835:
In der Ebene seien drei Geraden g_1, g_2, g_3 gegeben, von denen keine zwei einander parallel sind. Außerdem ist eine Länge s gegeben.

Konstruiere einen Kreis, der von jeder der Geraden g_1, g_2, g_3 eine Strecke der Länge s abschneidet!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

I. Angenommen, M sei der Mittelpunkt eines der gesuchten Kreise k. Die Sehnen, die k von g_1, g_2, g_3 abschneidet, sind dann gleich lang, also sind sie gleichweit von M entfernt. Daher liegt M auf einer Winkelhalbierenden w_1 von g_1, g_2 und auf einer Winkelhalbierenden w_2 von g_1, g_3.

a) Haben g_1, g_2, g_3 einen (und wegen ihrer Verschiedenheit dann auch nur einen) Punkt S gemeinsam, so gehen w_1 und w_2 durch S; außerdem ist $w_1 \neq w_2$; denn wäre $w_1 = w_2 = w$, so folgte $\angle(w,g_3) \cong \angle(g_1,w) \cong \angle(w,g_2)$, also $g_3 = g_2$, also $g_3 \parallel g_2$. Somit ergibt sich $M = S$. (erste Abbildung)



b) Haben g_1, g_2, g_3 keinen Punkt gemeinsam, so bilden sie nach Voraussetzung ein Dreieck D, und es folgt: M ist einer der 4 Schnittpunkte M_0, M_1, M_2, M_3 der Innen- und Außenwinkelhalbierenden von D.

Daher kann ein Kreis k höchstens dann die verlangte Eigenschaft haben, wenn er durch folgende Konstruktion erhalten wird:

II. a) Man schlage den Kreis k um S mit dem Radius von der Länge $\frac{s}{2}$.

b) Man wähle als M einen der 4 Punkte M_0, M_1, M_2, M_3. Von M fälle man das Lot MP auf g_1. Um P schlage man den Kreis mit dem Radius von der Länge $\frac{s}{2}$; er schneidet g_1 in zwei Punkten Q, R. Dann schlage man den Kreis k um M durch Q.

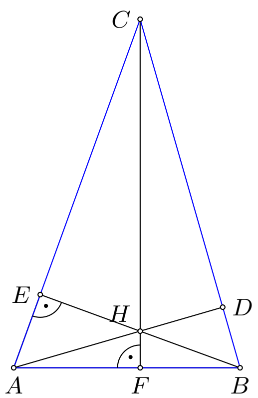
III. Ist ein Kreis k wie in II konstruiert, so hat er die verlangte Eigenschaft.

Beweis: Er schneidet von g_1 nach Konstruktion eine Strecke der Länge s ab und von g_2, g_3 je eine ebenso lange Strecke, da sein Mittelpunkt von g_1, g_2, g_3 gleichweit entfernt ist.

IV. Die Konstruktion II ergibt a) genau einen Kreis, b) genau 4 verschiedene Kreise. Nach III sind dies und nach I auch nur dies alle gesuchten.

Aufgabe 070831:
Konstruiere ein Dreieck $\triangle ABC$ aus $\overline{AB} = 5$ cm, dem Winkel $\angle BAC$ mit der Größe $\alpha = 70°$ und der Bedingung, dass der Schnittpunkt der drei Höhen des Dreiecks die Höhe durch den Eckpunkt B halbiert!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



(I) Angenommen, $\triangle ABC$ sei das verlangte Dreieck, die Punkte D, E und F seien die Fußpunkte der Höhen durch A, B bzw. C; H sei der Höhenschnittpunkt.
Dann ist $\triangle ABE$ ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse AB, dem rechten Winkel $\angle AEB$ und dem Winkel $\angle BAE \cong \angle BAC$.
Die Höhe durch C geht durch den Mittelpunkt H der Seite EB und steht senkrecht auf AB.
(II) Daraus ergibt sich, dass ein Dreieck $\triangle ABC$ nur dann den Bedingungen der Aufgabe entsprechen kann, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:
Man konstruiert zunächst das Teildreieck $\triangle ABE$, halbiert die Seite EB (Halbierungspunkt sei H) und fällt von H auf AB das Lot. Sein Fußpunkt sei F.

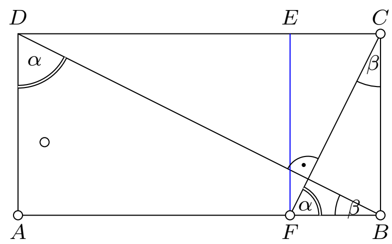
Die Verlängerung dieses Lotes über H hinaus schneidet die Verlängerung der Seite AE über E hinaus im Punkt C. $\triangle ABC$ ist das verlangte Dreieck.

(III) Der Beweis, dass ein so konstruiertes Dreieck ABC tatsächlich den Bedingungen der Aufgabe genügt (also die Umkehrung von (I)), ergibt sich leicht aus (II); die eindeutige Lösbarkeit der Aufgabe aus (I).

Aufgabe 080834:
Von einem Rechteck $ABCD$ mit den Seitenlängen $\overline{AB} = a$ und $\overline{AD} = b$ ($b < a$) ist durch genau eine Parallele zu einer Seite ein dem ursprünglichen Rechteck ähnliches abzuschneiden. Löse die Aufgabe durch Konstruktion!

Bemerkung: Zwei nicht quadratische Rechtecke heißen ähnlich, wenn das Längenverhältnis der größeren zur kleineren Seite bei beiden gleich ist.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Angenommen, es gibt eine solche Parallele. Dann kann sie wegen $b < a$ nur parallel zur Seite AD gezogen werden. Es sei EF diese Parallele. Dann gilt:
$ABCD \sim BCEF$ und damit auch: $\triangle ABD \sim \triangle BCF$. Daraus folgt: $\angle ABD \cong \angle BCF$.



II. Daher kommt man zu folgender Konstruktion:
Man trägt im Punkt C an BC nach der Seite hin, auf der A liegt, einen Winkel von der Größe des Winkels $\angle ABD$ an. Der freie Schenkel dieses Winkels schneide die Seite AB in F.

III. Die Parallele zu AD durch F entspricht den Bedingungen der Aufgabe.
Beweis:
Die Dreiecke $\triangle ABD$ und $\triangle BCF$ sind laut Konstruktion ähnlich; denn sie stimmen in den Winkeln überein. Daher gilt:
$AD : BF = AB : BC$ und mithin $ABCD \sim BCEF$.

IV. Die Konstruktion ist stets auf genau eine Weise ausführbar. Da die Größe des Winkels $\angle ABD$ zwischen 0° und 90° liegt, existiert ein solcher Schnittpunkt F und ist von B verschieden. Daher existiert das Dreieck $\triangle CFB$. Wegen (III) gilt

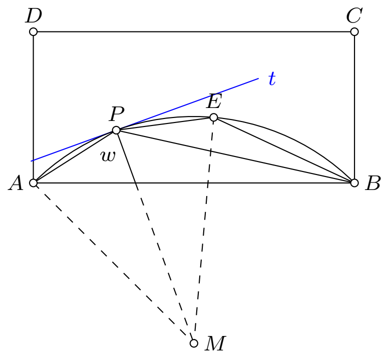
$$\frac{BC}{BF} = \frac{a}{b} > 1$$

also $BC > BF$, und F liegt zwischen A und B.

Aufgabe 090836:
Im ebenen Gelände seien genau alle diejenigen Punkte zugänglich, die auf einem Rechteck $ABCD$ einschließlich seines Inneren gelegen sind. In dieser Rechteckfläche führe ein Kreisbogen von A nach B, dessen zugehöriger Mittelpunkt nicht zugänglich sei. Auf dem Kreisbogen liege der Punkt P (mit $P \neq A$ und $P \neq B$).

Konstruiere die Tangente in P an den Kreisbogen, ohne dass bei Durchführung des Konstruktion das Rechteck $ABCD$ verlassen wird!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es sei o. B. d. A. $AP \leq BP$. Der Kreis um P mit dem Radius PA schneidet den gegebenen Kreis außer in A in E.



Wegen $AP \leq BP$ ist E zugänglich, ebenso ein Stück der Winkelhalbierenden w des Winkels $\angle APE$.

Behauptung: Die Senkrechte t durch P auf w ist die gesuchte Tangente.

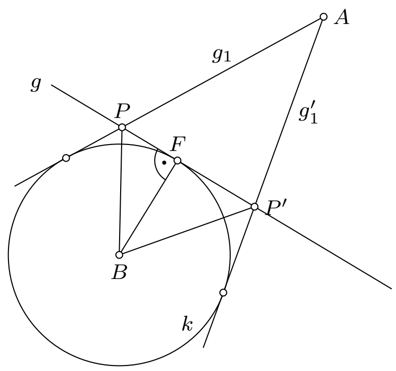
Beweis: Ist M der Mittelpunkt des gegebenen Kreises, so ist $\triangle AMP \cong \triangle UMP$ (sss), also $\angle APM \cong \angle EPM$; daher liegt M auf w. Die gesuchte Tangente steht somit senkrecht auf w; sie fällt also mit der konstruierten Geraden t zusammen.

Aufgabe 100833:
Gegeben seien eine Gerade g und zwei auf verschiedenen Seiten von g gelegene Punkte A und B.

Konstruiere alle diejenigen Punkte P auf g, die die Eigenschaft haben, dass der Strahl PB einen der Winkel halbiert, die von g und der Geraden g_1 durch A und P gebildet werden!

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Untersuche, ob sie stets eindeutig durchführbar ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(I) Angenommen, P sei ein Punkt, der den Bedingungen der Aufgabe entspricht. Dann hat B als Punkt der Winkelhalbierenden gleiche Abstände zu g und der Geraden g_1 durch A und P, also wird derjenige Kreis um B, der g berührt, auch g_1 berühren.



(II) Daher entspricht ein Punkt P nur dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn er durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

Man fällt das Lot BF von B auf g. Dann schlägt man den Kreis k um B durch F und konstruiert die Tangenten von A an k.
Ist g_1 eine dieser Tangenten und schneidet sie g, so sei P ihr Schnittpunkt mit g.

(III) Beweis, dass jeder so konstruierte Punkt P den Bedingungen der Aufgabe genügt:
Die Geraden g und g_1 werden nach Konstruktion beide von k berührt, sie haben also gleiche Abstände von B. Daher liegt B auf einer Winkelhalbierenden dieser beiden Geraden.

(IV) Die Konstruktion von F ist stets eindeutig durchführbar und ergibt $F \neq B$ und $F \neq A$, da A und B nicht auf g liegen. Ferner liegt k mit Ausnahme des Punktes F ganz auf der anderen Seite von g wie A. Also liegt A außerhalb von k.
Somit gibt es genau zwei verschiedene Tangenten g_1 und g_1' von A an k.

Da jede von ihnen A und einen Punkt von k, also einen Punkt auf der anderen Seite von g wie A, enthält, schneidet jede von ihnen g, und diese beiden Schnittpunkte P, P' sind auch voneinander verschieden, da sie andernfalls sowohl auf g_1, als auch auf g_1' lägen, also mit dem Schnittpunkt A von g_1 und g_1' zusammenfielen.
Somit hat die Aufgabe genau diese zwei Lösungen P, P'.

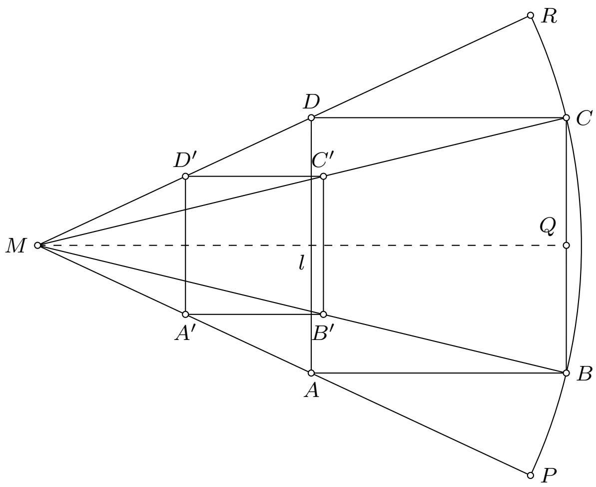
Aufgabe 120835:
Gegeben sei ein Kreissektor mit dem Radius $\overline{MP} = \overline{MR} = 9$ cm und einem Zentriwinkel $\angle PMR$ der Größe 50°.

Konstruiere ein Quadrat $ABCD$ so, dass A auf MP liegt, B und C auf dem Bogen $\overset{\frown}{PR}$ liegen und D auf MR liegt!

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! (Eine Untersuchung, ob es genau ein derartiges Quadrat gibt, wird nicht verlangt.)

Hinweis: Es empfiehlt sich, zur Lösung Eigenschaften von zentrischen Streckungen zu benutzen.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



(I) Angenommen, $ABCD$ sei ein Quadrat, das den Bedingungen der Aufgabe genügt. Ferner sei A' ein Punkt auf MP. Es sei weiter Q der Fußpunkt des Lotes l von M auf BC. Dann ist $\triangle MBQ \cong \triangle MCQ$ (ssw), also ist l die Mittelsenkrechte von BC und daher auch die von AD. Somit gilt $MA = MD$.

Die Parallele durch A' zu AB schneide den Strahl aus M durch R in einem Punkt, der D' genannt sei. Die Parallelen durch B' zu BC und durch D' zu DC mögen sich im Punkt C' schneiden.
Dann ist $A'B'C'D'$ ein Viereck, das aus $ABCD$ durch eine zentrische Streckung mit dem Zentrum M hervorgegangen ist, also ein Quadrat, für das wegen $MA = MD$ auch $MA' = MD'$ gilt. Da das Quadrat $ABCD$ nicht auf derselben Seite von AD liegt wie M, so liegt das Quadrat $A'B'C'D'$ nicht auf derselben Seite von $A'D'$ wie M.

(II) Daraus ergibt sich, dass ein Quadrat $ABCD$ nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(1) Man wählt auf MP einen beliebigen Punkt A'.

(2) Man schlägt den Kreis um M mit MA'. Schneidet er den Strahl aus M durch R in einem Punkt, so sei dieser D' genannt.

(3) Man errichtet über $A'D'$ das Quadrat $A'B'C'D'$, das nicht auf derselben Seite von $A'D'$ liegt wie M.

(4) Man zeichnet die von M ausgehenden Strahlen durch B' bzw. C'. Schneiden sie den Bogen PR, so seien diese Schnittpunkte B bzw. C genannt.

(5) Man zeichnet die Parallele zu $B'A'$ durch B. Schneidet sie PM in einem Punkt, so sei dieser A genannt.

(6) Man zeichnet die Parallele zu $C'A'$ durch C. Schneidet sie RM in einem Punkt, so sei dieser D genannt.

(III) Beweis, dass jedes so konstruierbare Quadrat $ABCD$ den Bedingungen der Aufgabe entspricht:

Laut Konstruktion ist die Mittelsenkrechte l von $A'D'$ auch die von $B'C'$; wegen $MA' = MD'$ geht sie durch M, ist also auch Winkelhalbierende von $\angle B'MC'$.
Schneidet sie BC in Q, so ist daher $\triangle MBQ \cong \triangle MCQ$ (sws), also l auch senkrecht auf BC und folglich $BC \parallel B'C'$. Hiernach und nach der weiteren Konstruktion ist $ABCD$ durch eine zentrische Streckung mit dem Zentrum M aus $A'B'C'D'$ hervorgegangen.
Daher ist $ABCD$ ebenfalls ein Quadrat, und seine Punkte liegen so, wie es in der Aufgabe verlangt wurde.

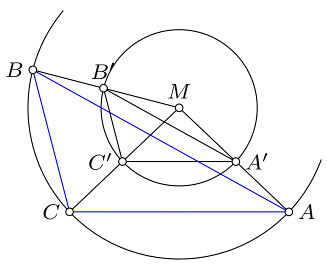
Aufgabe 130836:
Konstruiere ein Dreieck ABC, das den Bedingungen $a : b : c = 2 : 3 : 4$ und $r = 4$ cm genügt!

Dabei seien a, b, c in dieser Reihenfolge die Längen der Seiten BC, AC und AB, und r sei der Umkreisradius.

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Untersuche, ob durch die gegebenen Bedingungen ein Dreieck ABC eindeutig bestimmt ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(I) Angenommen, $\triangle ABC$ sei ein Dreieck, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht, der Mittelpunkt seines Umkreises sei M. Dann gibt es ein Dreieck $A'B'C'$, das aus $\triangle ABC$ durch zentrische Streckung mit dem Streckungszentrum M entsteht (A' Bild von A, B' Bild von B, C' Bild von C) und bei dem $A'B' = 4$ cm beträgt.

Dabei gilt weiter $A'C' = 3$ cm, $B'C' = 2$ cm. Folglich ist $\triangle ABC$ ähnlich einem Dreieck $A'B'C'$ mit den Seitenlängen $a' = 2$ cm, $b' = 3$ cm, $c' = 4$ cm, das aus $\triangle ABC$ durch zentrische Streckung mit dem Streckungszentrum M hervorgeht.



(II) Daher entspricht ein Dreieck ABC nur dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(1) Man konstruiert ein Dreieck $A'B'C'$ mit den Seitenlängen $B'C' = 2$ cm, $C'A' = 3$ cm, $A'B' = 4$ cm sowie dessen Umkreismittelpunkt M.
(2) Man zeichnet die Strahlen aus M durch A' bzw. B' bzw. C'.

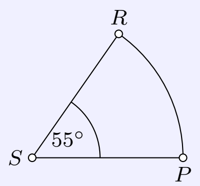
(3) Man schlägt um M den Kreis mit dem Radius r. Schneidet er die in (2) gezeichneten Strahlen, so seien die Schnittpunkte in dieser Reihenfolge mit A, B, C bezeichnet.

(III) Beweis, dass jedes so konstruierbare Dreieck ABC den Bedingungen der Aufgabe entspricht:
Laut Konstruktion ist $\triangle ABC$ durch zentrische Streckung mit dem Zentrum M aus $\triangle A'B'C'$ hervorgegangen. Daher sind beide Dreiecke ähnlich. Das Dreieck ABC hat also ebenfalls das Verhältnis der Seitenlängen 2 : 3 : 4. Ebenso gilt laut Konstruktion $AM = BM = CM = r$, d. h., das Dreieck ABC hat einen Umkreis vom Radius r.

(IV) Da wegen $2+3>4$; $2+4>3$ und $3+4>2$ ein Dreieck $A'B'C'$ mit den angegebenen Seitenlängen existiert, ist Konstruktionsschritt (1) bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar. Die Konstruktionsschritte (2) und (3) sind ebenfalls eindeutig ausführbar. Daher ist durch die gegebenen Bedingungen ein Dreieck ABC bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.

Aufgabe 140833:
Gegeben sei ein Kreissektor mit dem Radius $\overline{SP} = \overline{SR} = 8{,}5$ cm und dem Zentriwinkel $\angle PSR$ der Größe 55° (siehe Abbildung).

Konstruiere einen Kreis k, der dem gegebenen Sektor einbeschrieben ist, d. h., der die Strecken SP, SR und den Bogen PR so berührt, dass k innerhalb der Fläche des PR enthaltenden Kreises liegt! Beschreibe und begründe deine Konstruktion!

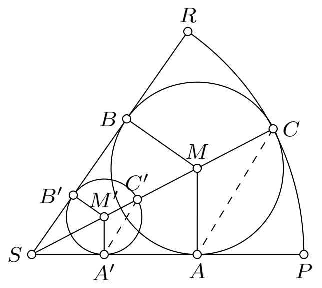


Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(I) Angenommen, k sei ein Kreis, der den Bedingungen der Aufgabe genügt.
A sei sein Berührungspunkt mit SP, B der mit SR und C der mit dem Bogen $\overset{\frown}{PR}$. Der Mittelpunkt M des Kreises k liegt dann auf dem Strahl s aus S durch C; ferner ist $\triangle SAM \cong \triangle MBS$ wegen $SM = SM$, $MA = MB$ (Radius von k) und $\angle MAS = \angle MBS = 90°$.

Daher ist $\angle MSA = \angle MSB$, so dass s den Winkel $\angle PSR$ halbiert. Wegen $MA = MC$ ist weiter $\triangle ACM$ gleichschenklig und somit $\angle ACM = \angle CAM = \frac{1}{2}\angle AMS$, letzteres nach dem Außenwinkelsatz, der hier anwendbar ist, weil wegen der vorausgesetzten Berührung von innen M zwischen S und C liegt.

Sind jetzt M' ein beliebiger von S verschiedener Punkt auf s, A' der Fußpunkt des Lotes von M' auf die Gerade durch S und P und C' der Schnittpunkt von s mit dem Kreis um M' mit dem Radius $M'A'$, so ist $\angle A'M'S = \angle AMS$, weil $\triangle AMS \sim \triangle A'M'S$ ist. Es gilt nämlich $\angle ASM = \angle A'SM'$ und $\angle SAM = \angle SA'M' = 90°$.

Daher genügt ein Kreis k nur dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn er durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:



(II) (1) Man konstruiert die Halbierende des Winkels $\angle PSR$, in dessen Innerem der Bogen $\overset{\frown}{PR}$ verläuft. Ihr Schnittpunkt mit dem Bogen $\overset{\frown}{PR}$ sei C.
(2) Man wählt einen beliebigen Punkt M' auf SC. Von M' fällt man das Lot $M'A'$ auf SP.
(3) Man schlägt um M' den Kreis k' mit dem Radius $M'A'$. Der Schnittpunkt von k' mit der Verlängerung von SM' über M' hinaus sei C'.
(4) Man zeichnet die Parallele zu $A'C'$ durch C. Ihr Schnittpunkt mit SP sei A.
(5) Man errichtet auf SP in A die Senkrechte. Ihr Schnittpunkt mit SC sei M.
(6) Man schlägt den Kreis k um M mit dem Radius MA.

(III) Jeder so konstruierte Kreis k genügt den Bedingungen der Aufgabe.
Beweis: Da gemäß (5) $\angle MAS = 90°$ ist und gemäß (4) A auf SP liegt, berührt k die Strecke SP, und zwar in A. Aus Symmetriegründen berührt daher k auch die Strecke SR.

Wegen $CA \parallel C'A'$ (nach (4)) gilt $\angle SCA = \angle SC'A'$ und wegen $MA \parallel M'A'$ (nach (2) und (5)) und, da M auf SC liegt (nach (5)), $\angle CMA = \angle C'M'A'$.

Daher gilt $\triangle CMA \sim \triangle C'M'A'$, und wegen $M'A' = M'C'$ ist $MA = MC$. Daher berührt k den Bogen $\overset{\frown}{PR}$ in C, dem gemeinsamen Punkt von k, PR und der Zentralen durch M und S.

(IV) Die Konstruktionen in (II) sind alle (eindeutig) ausführbar. Das ist für (1), (3) und (6) bekannt und ergibt sich für (2), (4) und (5) folgendermaßen:

(2) Für den Fußpunkt A' des Lotes von M' auf die Gerade durch S und P gilt $SA' < SM' < SC = SP$, also liegt A' auf SP wegen $\angle CSP < 90°$:
(4) Weil M' auf SC' liegt, gilt $SA' < SC'$ und folglich nach dem Strahlensatz für den Schnittpunkt A mit der Geraden durch S und P $SA < SC = SP$, also liegt wegen $\angle CSP < 90°$ der Punkt A auf SP.
(5) Der Schnittpunkt M mit der Geraden durch S und C gilt nach dem Strahlensatz, und weil M' auf SC' liegt,
$$SM = \frac{SM'}{SC'} \cdot SC < SC$$
woraus, weil A auf SP liegt und $\angle CSP < 90°$ ist, folgt, dass M auf SC liegt.

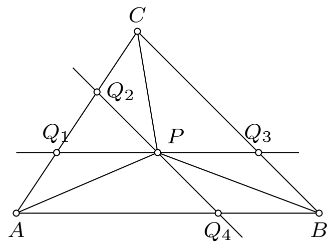
Aufgabe 150833:
Gegeben sei ein beliebiges Dreieck ABC.

Konstruiere in seinem Inneren einen Punkt P, so dass die Dreiecke ABP, BCP, ACP alle einander flächengleich sind!

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob stets genau ein solcher Punkt P existiert!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, P sei ein Punkt, wie er nach Aufgabenstellung konstruiert werden soll. Dann hat das Dreieck ABP ein Drittel des Flächeninhalts von ABC als Flächeninhalt. Sind h_c, h'_c die Längen der Höhen

auf die Gerade durch A und B in den Dreiecken ABC, ABP, so ist folglich $h'_c = \frac{1}{3}h_c$.
Also liegt P auf einer Parallelen zu AB im Abstand $\frac{1}{3}h_c$, und zwar, da P im Innern von $\triangle ABC$ liegt, auf derjenigen Parallelen p_1, die auf derselben Seite der Geraden durch A und B verläuft, auf der auch C liegt.
Diese Parallele p_1 schneidet AC in einem Punkt Q_1, für den $AQ_1 = \frac{1}{3}AC$ gilt.
Ebenso liegt P auf der Parallelen p_2 zu BC durch denjenigen Punkt Q_2 auf AC, für den $CQ_2 = \frac{1}{3}AC$ gilt. Somit entspricht ein Punkt P nur dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn er durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:



II. (1) Man konstruiert die Punkte Q_1 und Q_2 auf AC, für die $AQ_1 = CQ_2 = \frac{1}{3}AC$ gilt.
(2) Man zieht die Parallele p_1 zu AB durch Q_1 und die Parallele p_2 zu BC durch Q_2.
(3) Schneiden sich p_1 und p_2, so sei P ihr Schnittpunkt.

III. Jeder so konstruierte Punkt P entspricht den Bedingungen der Aufgabe.

Beweis:
Nach Konstruktion liegt P ebenso wie Q_1 auf derselben Seite der Geraden durch A und B wie C. Ferner liegt P ebenso wie Q_2 auf derselben Seite der Geraden durch B und C wie A. Weiterhin schneidet p_1 die Strecke BC in einem Punkt Q_3, der folglich auf derselben Seite der Geraden durch A und C liegt wie B.

Da Q_2 zwischen Q_1 und C liegt, liegt der Schnittpunkt P von p_1 mit p_2 zwischen Q_1 und Q_3, und damit ebenfalls auf derselben Seite der Geraden durch A und C wie B.
Damit ist gezeigt, dass P im Innern von $\triangle ABC$ liegt.

Sind ferner h_c, h'_c die Längen der Höhen auf die Gerade durch A und B in den Dreiecken ABC, ABP und sind h_a, h'_a die Längen der Höhen auf die Gerade durch B und C in den Dreiecken ABC, PBC je ein Drittel des Flächeninhalts von $\triangle ABC$ als Flächeninhalt. Dasselbe gilt auch für $\triangle ACP$; denn da P im Innern von $\triangle ABC$ liegt, setzt sich $\triangle ABC$ aus den Dreiecken ABP, PBC, ACP zusammen.

IV. Da die Seiten AB und BC des Dreiecks ABC nicht parallel zueinander und folglich p_1 und p_2 ebenfalls nicht parallel zueinander sind, schneiden sie einander in genau einem Punkt. Somit existiert stets genau ein Punkt P, der die Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

Aufgabe 160835:
Gegeben sei ein spitzer Winkel; sein Scheitel sei der Punkt S, seine Schenkel seien die Strahlen a und b; seine Winkelhalbierende sei der Strahl w. Gegeben sei ferner ein auf w gelegener Punkt $P \neq S$.

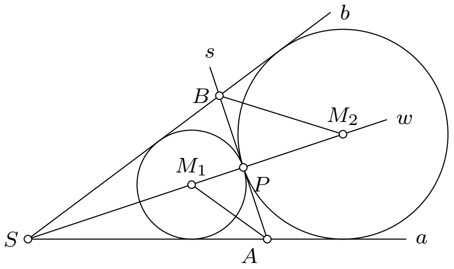
Konstruiere einen Kreis k, der a und b berührt und durch P geht!

Beschreibe und begründe Deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die genannten Bedingungen ein Kreis eindeutig bestimmt ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Angenommen, k sei ein Kreis, der den Bedingungen der Aufgabe entspricht.
Dann liegt dieser Kreis k in dem gegebenen Winkel; sein Mittelpunkt M hat gleiche Abstände zu a und b und liegt folglich auf w. Daher steht die Senkrechte s zu w durch P senkrecht auf einem Durchmesser von k; sie ist also die Tangente in P an k.

Folglich hat M auch gleiche Abstände zu a und s und liegt demnach auf der halbierenden Geraden eines Winkels, den s mit a bildet. Daher entspricht ein Kreis nur dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn er durch folgende Konstruktion gewonnen werden kann:

II. (1) Man konstruiert in P die Senkrechte s auf w. Schneidet sie a, so sei der Schnittpunkt A genannt.



(2) Man konstruiert die halbierende Gerade eines Winkels, den s mit a bildet. Schneidet sie w in einem Punkt, so sei dieser M genannt.
(3) Man zeichnet den Kreis k um M mit dem Radius MP.

III. Jeder so konstruierte Kreis genügt den Bedingungen der Aufgabe.

Beweis: Laut Konstruktion geht k durch P. Ferner berührt k die Gerade s in P, da M auf w liegt und da sich w und s in P rechtwinklig schneiden. Weiterhin liegt M (auf w, also) in dem gegebenen Winkel sowie auf einer winkelhalbierenden Geraden von a und s; hiernach hat M gleiche Abstände zu a und s.

Endlich hat M auch gleiche Abstände zu a und b, da M auf w liegt, also berührt k außer der Geraden s auch die Strahlen a und b.

IV. Die Konstruktion von s nach (1) ist eindeutig ausführbar. Da w mit a einen spitzen Winkel bildet und auf s senkrecht steht, schneiden sich a und s; also ist auch A eindeutig bestimmt.

Die in (2) zu konstruierenden winkelhalbierende Geraden, von denen es genau zwei gibt, schneiden beide w; denn die eine halbiert den Innenwinkel bei A im Dreieck SAP, schneidet also dessen Seite SP zwischen S und P; die andere steht senkrecht auf der ersten, also bildet ein Strahl von ihr mit dem auf s liegenden Strahl aus A durch P einen spitzen Winkel, während w auf s senkrecht steht. Also entstehen in (2) genau zwei verschiedene Schnittpunkte M_1, M_2; es gibt mithin zwei Kreise k_1 und k_2, die den Bedingungen der Aufgabe genügen.

Aufgabe 170832:
Gegeben seien ein Punkt S und zwei von S ausgehende Strahlen a und b, die miteinander einen spitzen Winkel bilden.

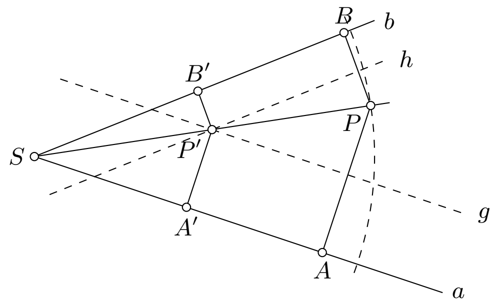
Konstruiere im Innern dieses Winkels einen Punkt P, der folgenden Bedingungen entspricht:

(1) P hat von a den doppelten Abstand wie von b.

(2) Die Länge der Strecke SP beträgt 5,0 cm.

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die Bedingungen der Aufgabe ein Punkt P eindeutig bestimmt ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



I. Es sei P ein Punkt, der den Bedingungen der Aufgabe entspricht.
Die Fußpunkte der Lote von P auf a bzw. b seien A bzw. B. Dann gilt $PA = 2PB$, d. h. $PA : PB = 2 : 1$.

Ist h eine beliebige Parallele zu b auf der Seite von b, auf der a liegt, so schneidet sie den Strahl aus S durch P in einem Punkt P'. Die Fußpunkte der Lote von P' auf a bzw. b seien A' bzw. B'. Nach dem Strahlensatz gilt dann $P'A' : PA = SP' : SP$ und $P'B' : PB = SP' : SP$, also $P'A' : PA = P'B' : PB$.
Hieraus folgt $P'A' : P'B' = PA : PB : 2 : 1$.

Somit hat die Parallele g zu a durch P' doppelt so großen Abstand von a wie h von b. Diese Parallele g liegt auf der Seite von a, auf der b liegt.

II. Deshalb entspricht ein Punkt P nur dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn er durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(1) Man zieht eine beliebige Parallele h zu b auf der Seite von b, auf der a liegt.
(2) Man konstruiert in doppelt so großem Abstand von a, wie ihn h von b hat, die Parallele g zu a auf der Seite von a, auf der b liegt. Schneiden sich g und h im Innern des gegebenen Winkels, so sei der Schnittpunkt P' genannt.
(3) Um S beschreibt man einen Kreis mit einem Radius von 5,0 cm. Der Schnittpunkt dieses Kreises mit dem Strahl aus S durch P' sei P genannt.

III. Beweis, dass jeder so konstruierte Punkt P den Bedingungen der Aufgabe entspricht:

Die Fußpunkte der Lote von P auf a bzw. b seien A bzw. B; die Fußpunkte der Lote von P' auf a bzw. b seien A' bzw. B'. Nach Konstruktion gilt $P'A' : PB = SP' : SP$, also $P'A' : PA = P'B' : PB$.
Hieraus folgt $PA : PB = P'A' : P'B' = 2 : 1$, also ist (1) erfüllt. Nach Konstruktion erfüllt P auch (2). Schließlich liegt P' (nach Konstruktion) und daher auch P im Innern des gegebenen Winkels.

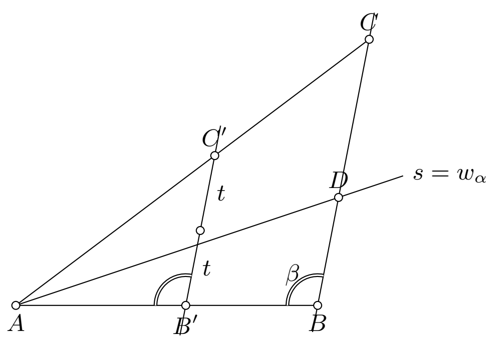
IV. Die Konstruktionsschritte (1), (2) sind eindeutig ausführbar; die Geraden g und h schneiden sich, und zwar im Innern des gegebenen Winkels. Hierauf ist auch Konstruktionsschritt (3) eindeutig ausführbar. Daher gibt es genau einen Punkt P, der alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

Aufgabe 180832:
Von einem Dreieck ABC wird gefordert, dass für die Länge a der Seite BC, die Länge c der Seite AB, die Länge w_α der Halbierenden des Winkels $\angle BAC$ und für die Größe β des Winkels $\angle ABC$ die Beziehungen $a : c = 2 : 3$; $w_\alpha = 6$ cm; $\beta = 35°$ gelten.

a) Konstruiere ein solches Dreieck, und beschreibe deine Konstruktion!

b) Beweise, dass jedes so konstruierte Dreieck die gestellten Forderungen erfüllt! Eine Analysis und eine Determination werden nicht verlangt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



a) (1) Man konstruiert eine Strecke AB', deren Länge das Dreifache einer beliebig gewählten Länge t ist.
(2) In B' trägt man an den Strahl aus B' durch A einen Winkel der Größe 35° an.
(3) Auf seinem freien Schenkel trägt man von B' aus diejenige Strecke $B'C'$ ab, deren Länge das Zweifache von t ist.
(4) Man konstruiert den Strahl s, der den Winkel $\angle B'AC'$ halbiert.
(5) Auf s trägt man von A aus die Strecke AD der Länge 6 cm ab.

(6) Man konstruiert die Parallele durch D zu $B'C'$. Sie schneidet den Strahl aus A durch B' in einem Punkt B und den Strahl aus A durch C' in einem Punkt C.

b) Ist $\triangle ABC$ auf diese Weise konstruiert, so folgt:
Nach (6) ist $BC \parallel B'C'$, also $\angle ABC = \angle AB'C'$ (Stufenwinkel an Parallelen) und $\alpha = 35°$ (nach (2)).
Nach (4) ist AD Halbierende des Winkels $\angle B'AC'$, der wegen (6) mit dem $\angle BAC$ zusammenfällt.

Ferner hat AD nach (5) die Länge 6 cm. Nach einem Teil des Strahlensatzes gilt wegen $BC \parallel B'C'$

$$BC : AB = B'C' : AB' = 2t : 3t = 2 : 3$$

Damit sind alle geforderten Eigenschaften für $\triangle ABC$ nachgewiesen.

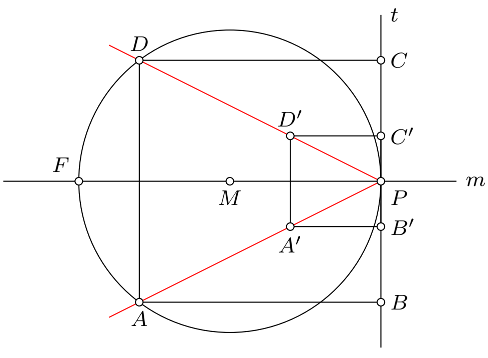
Aufgabe 190832:
Gegeben seien ein Punkt M sowie ein Kreis k mit M als Mittelpunkt. Gesucht ist ein Quadrat $ABCD$, das folgende Eigenschaften hat:

(1) Die Eckpunkte A und D liegen auf der Kreislinie k.

(2) Die Quadratseite BC berührt den Kreis k in einem Punkt P, der zwischen B und C liegt.

Begründe und beschreibe eine Konstruktion, die (ausgehend von dem gegebenen Kreis k) zu einem Quadrat mit diesen Eigenschaften führt! Untersuche, ob es (zu gegebenen k) bis auf Kongruenz genau ein solches Quadrat gibt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Angenommen, ein Quadrat $ABCD$ habe die verlangten Eigenschaften. Dann liegt M wegen $MA = MD$ auf der Mittelsenkrechten m von AD. Ferner berührt die Gerade t durch B, C den Kreis k in P, also ist t senkrecht zur Geraden durch M, P.
Diese steht somit wegen $AD \parallel BC$ auch auf AD senkrecht und ist daher die Gerade m; damit ist gezeigt, dass m durch P geht.
Da m auch Mittelsenkrechte von BC ist, ist folglich P der Mittelpunkt von BC. Wendet man auf $ABCD$ eine beliebige zentrische Streckung mit dem Zentrum P an, so entsteht ein Quadrat $A'B'C'D'$, dessen Ecken B', C' auf t liegen und dessen Seite $B'C'$ den Mittelpunkt P hat.



II. Daher ist $ABCD$ nur dann ein Quadrat mit den Eigenschaften (1), (2), wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(3) Man zieht durch M eine Gerade, die m genannt sei. Einen ihrer Schnittpunkte mit k bezeichne man mit P.
(4) Man konstruiert die Senkrechte t in P auf m.
(5) Auf t wählt man einen beliebigen Punkt $B' \neq P$ und verlängert die Strecke $B'P$ über P hinaus um ihre eigene Länge bis C'.
(6) Auf $B'C'$ errichtet man das Quadrat $A'B'C'D'$ (nach der Seite von t hin, auf der k liegt).
(7) Die Strahlen aus P durch A' bzw. durch D' schneiden k in A bzw. D.
(8) Man fällt die Lote AB bzw. DC von A bzw. D auf t.

III. Beweis, dass jedes so konstruierte Viereck $ABCD$ ein Quadrat mit den Eigenschaften (1) und (2) ist:

Nach Konstruktion liegen A und D auf k, also ist (1) erfüllt. Ferner berührt die Gerade t, auf der B und C liegen, den Kreis k in P. Nach Konstruktion ist m die Mittelsenkrechte von $B'C'$ und damit auch von $A'D'$.

Daher liegen die Geraden durch P, A' bzw. durch P, B' symmetrisch zu m; dasselbe gilt für k und folglich für A und D. Somit ist $AD \perp m$, also $AD \parallel A'D'$. Da nach Konstruktion auch $AB \parallel A'B'$ und $DC \parallel D'C'$ ist, geht $ABCD$ aus $A'B'C'D'$ durch eine zentrische Streckung mit dem Zentrum P hervor.
Folglich ist auch $ABCD$ ein Quadrat, und die Seite BC wird von k in ihrem Mittelpunkt P berührt, so dass (2) insgesamt erfüllt ist.

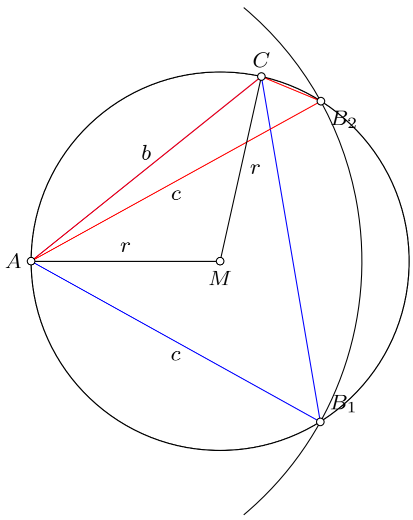
IV. Konstruktionsschritt (3) ist bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar.
Die Schritte (5) und (6) führen zwar nicht zu einem eindeutig bestimmten Quadrat $A'B'C'D'$, aber je zwei der Quadrate, die entstehen können, gehen auseinander durch eine zentrische Streckung mit dem Zentrum P hervor. Daher sind die in (7) konstruierten Strahlen für alle in (5), (6) zu erhaltenden Quadrate dieselben, d. h. durch (k und) P eindeutig bestimmt; dasselbe gilt somit für A, D und nach (8) für B, C.

Also gibt es (zu k) bis auf Kongruenz genau ein Quadrat mit den geforderten Eigenschaften.

Aufgabe 200833:
Konstruiere ein Dreieck ABC aus $r = 4$; $b = 6$ und $c = 7$ cm! Dabei seien r der Umkreisradius des Dreiecks und b, c die Längen der Seiten AC bzw. AB des Dreiecks ABC.

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Untersuche, ob durch die gegebenen Stücke ein Dreieck ABC bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



(I) Angenommen, ein Dreieck ABC erfülle die Bedingungen der Aufgabe.
Sein Umkreis sei mit k, sein Mittelpunkt mit M bezeichnet. Dann ist das Dreieck ACM nach dem Kongruenzsatz sss eindeutig bestimmt. Der Punkt B liegt einerseits auf k und andererseits auf dem Kreis um A mit dem Radius c.

(II) Daher entspricht ein Dreieck ABC nur dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(1) Man konstruiere ein Dreieck ACM aus $AC = b$, $AM = CM = r$.
(2) Um A zeichne man den Kreis k' mit dem Radius c. Man wähle einen der Schnittpunkte von k mit k' und bezeichne ihn mit B.

(III) Beweis, dass jedes so konstruierte Dreieck ABC den Bedingungen der Aufgabe entspricht:
Nach Konstruktion haben b, c und r die geforderten Längen, und k ist der Umkreis des Dreiecks ABC.

(IV) Der Konstruktionsschritt (1) ist bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar. Wegen $b < c < 2r$ entstehen beim Konstruktionsschritt (2) genau zwei Schnittpunkte, die sich so mit B_1 bzw. B_2 bezeichnen lassen, dass M im Innern des Dreiecks AB_1C, aber außerhalb des Dreiecks AB_2C liegt. Daher ist das Dreieck AB_1C spitzwinklig, das Dreieck AB_2C aber stumpfwinklig; somit sind diese beiden Dreiecke nicht zueinander kongruent.
Durch die gegebenen Stücke ist ein Dreieck ABC daher nicht eindeutig bestimmt.

Aufgabe 210833:
Gegeben sei ein Dreieck ABC mit den Seitenlängen $\overline{BC} = 4$ cm, $\overline{AC} = 5$ cm und $\overline{AB} = 6$ cm. Auf der Seite CB sei M_1 derjenige Punkt, für den $\overline{BM_1} = 3$ cm ist. Um M_1 sei der Kreis k_1 mit dem

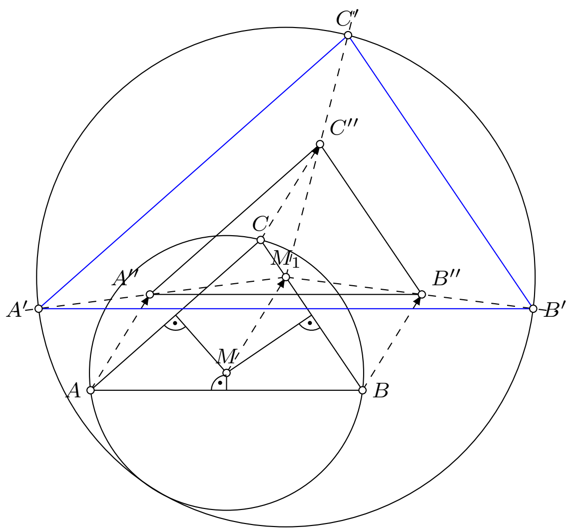
Radius 5,5 cm gezeichnet.

Zu diesen gegebenen Stücken soll ein dem Dreieck ABC ähnliches Dreieck $A'B'C'$ konstruiert werden, dessen Eckpunkte sämtlich auf dem Kreis k_1 liegen.

Beschreibe eine Konstruktion eines solchen Dreiecks $A'B'C'$ und beweise, dass es die geforderten Eigenschaften hat, wenn es nach dieser Konstruktionsbeschreibung konstruiert wird!

Hinweis: Eine „Analyse“ (Schlussfolgerung aus der Annahme, ein Dreieck $A'B'C'$ habe die verlangten Eigenschaften, zur Herleitung der Konstruktionsbeschreibung) und eine „Determination“ (Diskussion auf Existenz und Eindeutigkeit der Konstruktion) werden nicht verlangt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



I. Konstruktionsbeschreibung:
(1) Man konstruiert den Schnittpunkt M zweier Mittelsenkrechten des Dreiecks ABC.
(2) Man wendet auf A, B und C die Verschiebung mit dem Verschiebungspfeil $\overrightarrow{MM_1}$ an. Die erhaltenen Bildpunkte von A, B, C seien A'', B'' bzw. C''.
(3) Man verlängert M_1A'', M_1B'', M_1C'' jeweils über A'', B'' bzw. C'' hinaus bis zum Schnitt mit k_1. Die Schnittpunkte seien A', B' bzw. C'.

II. Beweis, dass jedes so konstruierte Dreieck $A'B'C'$ die geforderten Eigenschaften hat:

Nach Konstruktionsschritt (3) liegen A', B' und C' auf k_1, also gilt:

$$M_1A' = M_1B' = M_1C' \qquad (*)$$

Ferner ist der in (1) konstruierte Punkt M Mittelpunkt des Umkreises k des Dreiecks ABC. Geht k bei der in (2) durchgeführten Verschiebung in k'' über, so ist folglich M_1 der Mittelpunkt von k'' und k'' der Umkreis des Dreiecks $A''B''C''$. Hiernach gilt

$$M_1A'' = M_1B'' = M_1C'' \qquad (**)$$

Wegen (3), (*) und (**) gehen A'', B'', C'' aus A',B',C' durch eine zentrische Streckung mit dem Zentrum M_1 hervor. Also entsteht das Dreieck $A'B'C'$ aus dem Dreieck ABC dadurch, dass erst eine Verschiebung und dann eine Streckung ausgeführt wird; somit sind die Dreiecke $A'B'C'$ und ABC einander ähnlich.

Alternativ-Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. (1) Man wählt einen beliebigen Punkt A' auf k_1.
(2) An M_1A' trägt man in M_1 nach einer Seite den Winkel der Größe $2 \cdot \angle ACB$ und nach der anderen Seite den Winkel der Größe $2 \cdot \angle ABC$ an. Der freie Schenkel des erstgenannten Winkels schneide k_1 in B', der freie Schenkel des anderen Winkels schneide k_1 in C'.

II. Nach (1) und (2) liegen A',B',C' auf k_1. Nach dem Peripheriewinkelsatz und (2) ist ferner $\angle A'C'B' = \frac{1}{2}\angle A'M_1'B' = \angle ACB$ sowie $\angle A'B'C' = \frac{1}{2}\angle A'M_1'C' = \angle ABC$.
Daher sind die Dreiecke $A'B'C'$ und ABC ähnlich nach dem Hauptähnlichkeitssatz.

Aufgabe 220833:
Konstruiere ein Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel DC$ und den folgenden Eigenschaften (1), (2), (3) aus $b = 6$ cm. Dabei sei b die Länge der Seite BC. Die geforderten Eigenschaften sind:

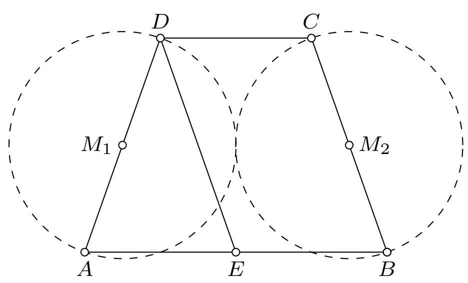
(1) Es gilt $\overline{AD} = \overline{BC}$.
(2) Es gilt $\overline{AB} : \overline{DC} = 2 : 1$.
(3) Die Kreise mit den Durchmessern AD und BC berühren einander.

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Untersuche, ob durch die gegebene Länge b ein Trapez mit den genannten Eigenschaften bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn ein Trapez $ABCD$ die geforderten Eigenschaften hat (siehe Abbildung) und E,M_1 bzw. M_2 die Mittelpunkte von AB, AD bzw. BC sind, so folgt:
Wegen $AB \parallel DC$ ist $EB \parallel DC$; nach (2) ist $AE = EB = DC$. Daher ist $EBCD$ ein Parallelogramm; es gilt $ED = BC$; hiernach und nach (1) ist $AD = ED = b$.

Ferner ist M_1M_2 nach (3) gleich der Summe der Radien der genannten Kreise, also wegen (1) gleich $AD = BC = b$. Andererseits ist M_1M_2 die Mittelparallele des Trapezes $ABCD$; hieraus und aus (2) folgt

$$b = M_1M_2 = \frac{1}{2}(AB + DC) = \frac{3}{2}DC = \frac{3}{2}AE \qquad ; \qquad AE = \frac{2}{3}b$$



II. Daher ist ein Viereck $ABCD$ nur dann ein Trapez mit den geforderten Eigenschaften, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:
(*) Man konstruiert ein Dreieck AED mit $AD = ED = b$ und $AE = 2$
(**) Man verlängert die Strecke AE über E hinaus um ihre eigene Länge bis B.
(***) Man konstruiert die Parallele durch D zu AB und die Parallele durch B zu ED; beide schneiden sich in C.

III. Beweis, dass jedes so konstruierte Viereck $ABCD$ die geforderten Eigenschaften hat:

Nach (***) ist $ABCD$ ein Trapez mit $AB \parallel DC$. Ferner ist $EBCD$ ein Parallelogramm. Hieraus folgt einerseits $ED = BC$, nach (*) also $AD = BC = b$, andererseits $EB = DC$, nach (**) also $AB : DC = 2 : 1$, und zwar nach (*) $DC = EB = AE = 4b$, $AB = 4b$.

Folglich hat die Mittelparallele M_1M_2 des Trapezes $ABCD$ die Länge

$$M_1M_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}b + \frac{4}{3}b\right) = b = AD = BC$$

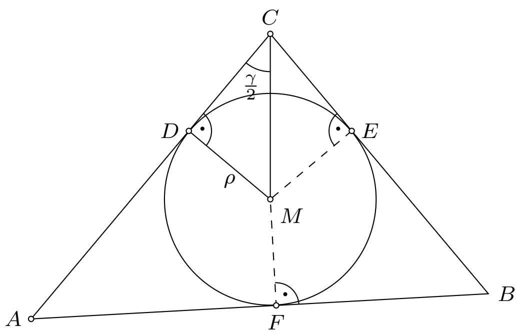
Die Mittelpunkte M_1, M_2 der Kreise mit den Durchmessern AB bzw. BC haben als Abstand voneinander also die Summe der Radien dieser Kreise. Daher berühren sich diese Kreise.

IV. Konstruktionsschritt (*) ist bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar, da die Seitenlängen b, b und $\frac{2}{3}b$ alle Dreiecksungleichungen erfüllen.
Die Konstruktionsschritte (**) und (***) sind dann eindeutig ausführbar. Daher ist durch die gegebene Länge b ein Trapez mit den geforderten Eigenschaften bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.

Aufgabe 230833:
Konstruiere ein Dreieck ABC aus $b = 7cm$, $\rho = 2cm$ und $\gamma = 80°$! Dabei sei b die Länge der Seite AC, ρ der Radius des Inkreises des Dreiecks ABC, und γ sei die Größe des Innenwinkels $\angle ACB$.

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Untersuche, ob durch die gegebenen Stücke ein Dreieck ABC bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



I. Angenommen, ein Dreieck ABC erfüllt die Bedingungen der Aufgabe.
Der Inkreismittelpunkt des Dreiecks ABC sei M; der Inkreis berühre die Seite AC in D. Dann ist $MD = \rho, \angle CDM = 90°$ und, da M auf den Winkelhalbierenden des Dreiecks liegt, $\angle DCM = \frac{\gamma}{2}$.

Ferner liegt A auf der Verlängerung von CD über D hinaus im Abstand $CA = b$ von C. Schließlich ist die Gerade durch A,B die von der Geraden durch A,C verschiedene Tangente von A an den Inkreis, und die Gerade durch C,B ist die von der Geraden durch A,C verschiedene Tangente von C an den Inkreis.

II. Daher entspricht ein Dreieck ABC nur dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(1) Man konstruiere ein Dreieck CDM aus $MD = \rho, \angle CDM = 90°$ und $\angle DCM = \frac{\gamma}{2}$. (2) Man zeichne den Kreis mit dem Mittelpunkt M und dem Radius CM.
(3) Man spiegelt den Punkt D an der Geraden durch C und M und erhält den Berührungspunkte E einer Tangente durch C an den Inkreis.
(4) Die Gerade durch C und D verlängert man auf $b = 7$ cm und erhält den Punkt A.
(5) Von A konstruiere man eine von CA verschiedene Tangente an den Kreis. Der Berührungspunkt sei der Punkt F.
(5) Diese Tangente und die Verlängerung von CE über E hinaus schneiden sich in einem Punkt. Dieser Punkte ist B.

III. Jeder Konstruktionsschritt ist eindeutig ausführbar, womit das Dreieck ABC bis auf Kongruenz eindeutig ist.

Aufgabe 240833:
Konstruiere ein nicht überschlagenes Viereck $ABCD$, das die folgenden Bedingungen (I) bis (V) erfüllt!

(I) Die Seite AB hat die Länge $a = 7{,}0$ cm.
(II) C liegt auf der Mittelsenkrechten p der Strecke AB.
(III) D liegt auf der Mittelsenkrechten q der Strecke AC.
(IV) A liegt auf der Mittelsenkrechten r der Strecke BD.
(V) Die Geraden p und q schneiden sich in einem Punkt S, der auf der Stecke AB liegt.

Beschreibe deine Konstruktion! Beweise, dass jedes Viereck, das die geforderten Eigenschaften hat, nach deiner Beschreibung konstruiert werden kann! Beweise, dass jedes Viereck, das nach deiner Beschreibung konstruiert wird, die geforderten Eigenschaften hat!

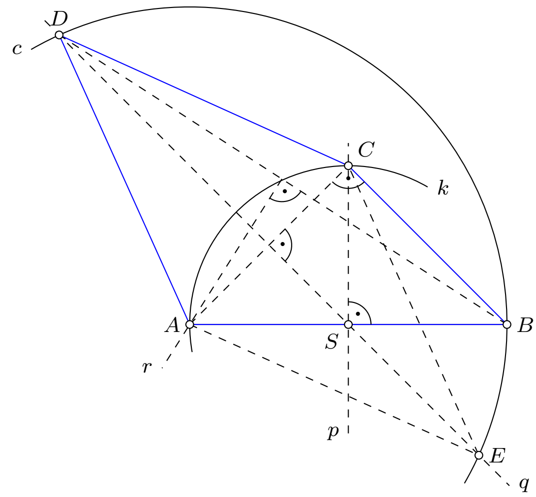
Hinweis: Ein Viereck $ABCD$ heißt genau dann „nicht überschlagen“, wenn die Strecken AB und CD sich nicht schneiden und die Strecken AD und BC sich nicht schneiden.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn ein Viereck $ABCD$ die geforderten Eigenschaften hat, so folgt: Nach (V) und (II) ist S derjenige Punkt der Strecke AB, der auf der Mittelsenkrechten p von AB liegt, also der Mittelpunkt von AB.

Ferner liegt S nach (V) und (III) auf der Mittelsenkrechten von AC, also gilt $CS = AS$.
Außerdem liegt C nach (II) auf der Mittelsenkrechten p von AB.

Nach (IV) und (I) gilt $AD = AB = a$; außerdem liegt D nach (III) auf der Mittelsenkrechten q von AC. Ferner liegt D so, dass die Strecke CD die Strecke AB nicht schneidet.

Daher kann ein Viereck $ABCD$ nur dann die geforderten Eigenschaften haben, wenn es folgendermaßen konstruiert werden kann:



II. (1) Man konstruiert eine Strecke AB der Länge a.
(2) Man konstruiert den Mittelpunkt S und die Mittelsenkrechte p der Strecke AB.
(3) Man konstruiert den Kreis k um S mit AS und bezeichnet einen Schnittpunkt von p und k mit C.
(4) Man konstruiert die Mittelsenkrechte q von AC.
(5) Man konstruiert den Kreis c um A mit AB.
Die Konstruktion ergibt: Für (genau) einen der Schnittpunkte von q und c schneidet seine Verbindungsstrecke mit C die Strecke AB nicht; diesen Schnittpunkt bezeichnet man mit D.

III. Beweis, dass jedes Viereck $ABCD$, das nach dieser Beschreibung konstruiert wird, die geforderten Eigenschaften hat:

Nach (1) gilt $AB = a$. Nach (2) und (3) liegt C auf der Mittelsenkrechten p von AB. Nach (4) und (5) liegt D auf der Mittelsenkrechten q von AC. Nach (5) gilt $AD = AB$, also liegt A auf der Mittelsenkrechten von BD.

Da S nach (2) der Mittelpunkt von AB ist, liegt S auf der Mittelsenkrechten p von AB. Da nach (2) und (3) ferner, $CS = AS$ ist, liegt S auch auf der Mittelsenkrechten q von AC. Also schneiden sich p und q in dem auf AB liegenden Punkt S.

Ferner ergibt die Konstruktion: Für den in (5) konstruierten und ausgewählten Punkt D, für den sich AB und CD nicht schneiden, schneiden sich auch BC und AD nicht. Daher ist $ABCD$ ein nicht überschlagenes Viereck.

Aufgabe 250833:
Es sei g eine gegebene Gerade. Ferner seien zwei Punkte A und B gegeben, die beide nicht auf g

liegen, deren Verbindungsstrecke AB aber g schneidet und nicht auf g senkrecht steht.

Für einen Streckenzug $APQB$ seien folgende Bedingungen (1), (2), (3) gefordert:

(1) Die Punkte P und Q liegen auf g.

(2) Die Gerade durch A und P ist parallel zur Geraden durch B und Q.

(3) Die Strecke PQ hat die Länge $t = 6cm$.

a) Beweise, dass jeder Streckenzug $APQB$, der die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt, durch eine Konstruktion (aus gegebenen g, A, B und der gegebenen Länge $t = 6cm$) erhalten werden kann!

b) Beschreibe eine solche Konstruktion!

c) Beweise, dass jeder Streckenzug $APQB$, der nach dieser Beschreibung konstruiert werden kann, die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt!

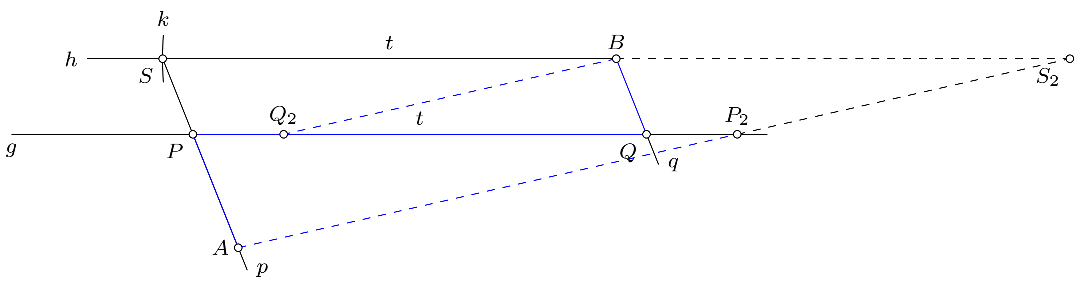
d) Wähle selbst eine Gerade g und Punkte A, B, wie oben beschrieben, und konstruiere dazu *alle* diejenigen Streckenzüge $APQB$, die die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllen! (Ein Beweis, dass alle verlangten Streckenzüge konstruiert wurden, wird nicht gefordert.)

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn ein Streckenzug $APQB$ die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt, so folgt:
Die Gerade p durch A und P ist nach (1) und den Voraussetzungen über g,A nicht parallel zu g; sie schneidet daher die Parallele h durch B zu g in einem Punkt S.
Für diesen gilt $SB \parallel PQ$ und nach (2) auch $PS \parallel QB$. Also ist $PQBS$ ein Parallelogramm; hieraus und aus (3) folgt $SB = PQ = t$.

Somit liegt S auf dem Kreis k um B mit dem Radius $t = 6$ cm.
Ferner folgt, dass P auf g und auf AS liegt und dass Q auf g und der Parallelen q durch B zu AS liegt.

Damit ist bewiesen, dass jeder Streckenzug $APQB$, der (1), (2), (3) erfüllt, durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

b) [1] Man konstruiert die Parallele h durch B zu g.
[2] Man konstruiert den Kreis k um B mit dem Radius $t = 6$ cm und bezeichnet einen Schnittpunkt von h und k mit S,
[3] Man konstruiert die Gerade p durch A und S und bezeichnet den Schnittpunkt von p und g mit P.
[4] Man konstruiert die Parallele q durch B zu p und bezeichnet den Schnittpunkt von q und g mit Q.



c) Für jeden Streckenzug $APQB$, der nach dieser Beschreibung konstruiert wird, gilt:
Nach [3] und [4] liegen P und Q auf g; d. h., (1) ist erfüllt. Nach [3] und [4] gilt ferner $p \parallel q$; A und P liegen auf p; B und Q liegen auf q; also ist (2) erfüllt.

Nach [1], [3] und [4] ist $PQBS$ ein Parallelogramm; hieraus und aus [2] folgt $PQ = BS = 6$ cm; d. h., (3) ist erfüllt.

d) Gefordert wird eine Konstruktion, die (wegen der Möglichkeit, in Konstruktionsschritt [2] jeden der beiden Schnittpunkte S_1, S_2 von h und k mit S zu bezeichnen) genau zwei Streckenzüge ergibt. Die beiden Streckenzüge sind nicht zueinander kongruent. (siehe Abbildung)

Aufgabe 260833:
Gegeben seien ein Kreis k mit dem Mittelpunkt M und dem Radius $r = 5$ cm sowie eine Gerade g, die von M den Abstand $d = 6$ cm hat. Zu konstruieren sind alle diejenigen Punkte P, die die folgenden Bedingungen (a) und (b) erfüllen:

(a) Der Punkt P liegt auf der Geraden g.

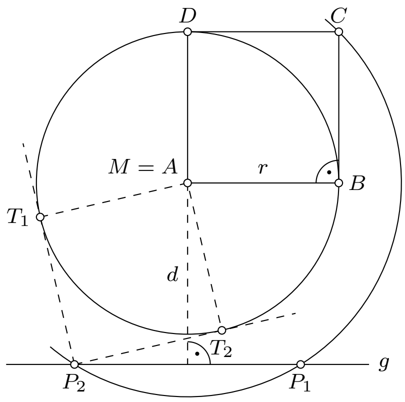
(b) Die von P an k gelegten Tangenten bilden miteinander einen rechten Winkel.

Beschreibe eine Konstruktion! Fertige eine Konstruktionszeichnung an! Beweise die beiden folgenden Sätze (I) und (II)!

(I) Wenn ein Punkt P die Bedingungen (a) und (b) erfüllt, dann lässt er sich nach der angegebenen Beschreibung konstruieren.

(II) Wenn ein Punkt P nach der angegebenen Beschreibung konstruiert wird, dann erfüllt er die Bedingungen (a) und (b).

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Konstruktionsbeschreibung:

(1) Man konstruiert ein Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge r.

(2) Man konstruiert den Kreis c um M mit dem Radius $\overline{AC}$. Die Schnittpunkte P_1, P_2, die c mit g hat, sind dann alle zu konstruierenden Punkte P.

Beweis zu (I): Es sei P ein Punkt, der (a) und (b) erfüllt; die Berührungspunkte der von P an k gelegten Tangenten seien T_1 und T_2 (siehe Abbildung).
Nach dem Satz über Tangente und Berührungsradius gilt dann

$$\overline{\angle MT_1P} = 90^\circ \qquad , \qquad \overline{\angle MT_2P} = 90^\circ$$

nach (b) gilt $\overline{\angle T_1PT_2} = 90^\circ$. Also ist MT_1PT_2 ein Rechteck. Wegen $\overline{MT_1} = \overline{MT_2} = r$ ist dieses Rechteck ein Quadrat mit der Seitenlänge r und folglich kongruent zu dem in (1) konstruierten Quadrat $ABCD$. Daraus folgt $\overline{MP} = \overline{AC}$; also liegt P auf dem in (2) konstruierten Kreis c. Wegen (a) liegt P auch auf g. Also ist P einer der in (2) erhaltenen Schnittpunkte P_1, P_2, w. z. b. w.

Beweis zu (II): Es sei P ein Punkt, der nach der angegebenen Beschreibung konstruiert ist. Nach (2) liegt dann P auf g, erfüllt also die Bedingung (a). Nach (2) gilt ferner $\overline{AC} = \overline{MP}$.

Da g größeren Abstand als r zu M hat und somit k meidet, gibt es zwei von P an k gelegte Tangenten. Sind T_1 und T_2 ihre Berührungspunkte, so folgt: Nach (1) gilt $\overline{AB} = \overline{MT_1}$, nach (1) und dem Satz über Tangente und Berührungsradius gilt $\overline{\angle ABC} = \overline{\angle MT_1P}$, zugleich sind die hier genannten Winkel als rechte Winkel die größten Innenwinkel in $\triangle ABC$ bzw. $\triangle MT_1P$.

Nach dem Kongruenzsatz sSW ergibt sich damit $\triangle ABC \cong \triangle MT_1P$. Ebenso folgt $\triangle ADC \cong \triangle MT_2P$.

Also sind die Vierecke $ABCD$ und MT_1PT_2 zueinander kongruent. Da nach (1) nun $\overline{\angle BCD} = 90°$ ist, gilt auch $\overline{\angle T_1PT_2} = 90°$; d. h., auch (b) ist erfüllt, w. z. b. w.

Hinweis: Hat man im Konstruktionsschritt (1) $A = M$ gewählt, so kann zum Beweis (II) auch ausgeführt werden, dass es nach (2) eine Drehung um M gibt, die C in P überführt. Bei dieser Drehung gehen die tangentialen Strecken CB, CD in tangentiale Strecken PT_1, PT_2 über; und ihr rechter Winkel bleibt erhalten.

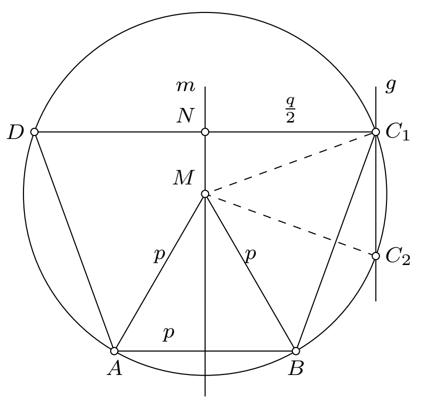
Aufgabe 280836:
Gegeben seien zwei Strecken; für ihre Längen p und q gelte $p < q$. Gesucht ist ein Viereck $ABCD$, das die folgenden Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt.

(1) Das Viereck $ABCD$ ist ein Trapez mit $AB \parallel CD$.
(2) Es gilt $\overline{AB} = p$ und $\overline{CD} = q$.
(3) Es gibt einen Kreis, auf dem die Punkte A, B, C und D liegen und dessen Radius p beträgt.

I. Zeige, dass ein Viereck, wenn es die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt, aus p und q konstruiert werden kann!
II. Beschreibe eine solche Konstruktion!
III. Zeige, dass ein Viereck, wenn es nach dieser Beschreibung konstruiert wird, die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt!
IV. Untersuche, unter welchen Bedingungen für die gegebenen Lösungen p und q ein solches Viereck

a) existiert,
b) bis auf Kongruenz eindeutig durch p und q bestimmt ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn ein Viereck $ABCD$ die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt, so gilt:



Der Mittelpunkt des in (3) genannten Kreises sei M; dann ist ABM nach (2) und (3) ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge p.
Die Mittelsenkrechte m von AB geht folglich durch M. Wegen (1) steht sie auch auf CD senkrecht. Wegen (2), und da das Lot vom Kreismittelpunkt auf eine Sehne diese halbiert, gilt $CN = \frac{q}{2}$ für den Schnittpunkt N von m und CD. Also hat C den Abstand von der Geraden m und liegt folglich auf einer Parallelen zu m im Abstand $\frac{q}{2}$.

Außerdem liegt C auf derselben Seite der Geraden m wie B. Damit ist bewiesen, dass ein Viereck $ABCD$, wenn es (1), (2), (3) erfüllt, nach folgender Beschreibung konstruiert werden kann:

1. Man konstruiert ein gleichseitiges Dreieck ABM mit der Seitenlänge p.
2. Man konstruiert die Mittelsenkrechte m von AB.

3. Man konstruiert auf derselben Seite der Geraden m wie B die Parallele g zu m im Abstand $\frac{q}{2}$. Hat sie einen Punkt mit dem Kreis um M mit p gemeinsam, so sei C einer dieser Punkte.
4. Man fällt das Lot CN von C auf m und verlängert es über N hinaus um seine Länge bis D.

III. Wenn ein Viereck $ABCD$ nach dieser Beschreibung konstruiert wird, so folgt:

Nach den Konstruktionsschritten 2. und 4. sind AB und CD senkrecht auf m, also zueinander parallel; damit ist (1) erfüllt. Nach Konstruktionsschritt 1. ist $AB = p$, nach Konstruktionsschritt 4. ist $CD = q$; damit ist (2) erfüllt.
Nach Konstruktionsschritt 1. und 3. liegen A, B und C auf dem Kreis um M mit p. Bei der Spiegelung an m geht dieser Kreis in sich über, da m durch den Mittelpunkt M des Kreises geht. Bei dieser Spiegelung geht C nach Konstruktionsschritt 4. in D über; also liegt auch D auf dem Kreis; damit ist (3) erfüllt.

IV. Die Konstruktionsschritte 1. und 2. sowie die Konstruktion von g in 3. sind stets bis auf Kongruenz eindeutig durchführbar.
Ein gemeinsamer Punkt C von g mit dem Kreis existiert genau dann, wenn der Abstand zwischen m und g nicht größer als der Radius des Kreises ist, d. h., genau dann, wenn $\frac{q}{2} \leq p$ gilt. Ein solcher Punkt ist genau dann eindeutig bestimmt (nämlich Berührungspunkt von g mit dem Kreis), wenn $\frac{q}{2} = p$ gilt, wenn dagegen $\frac{q}{2} < p$ ist, so gibt es genau zwei Schnittpunkte C_1, C_2, die man in 3. als C wählen kann.

Liegt ein so erhaltener Punkt C vor, so ist jeweils D durch Konstruktionsschritt 4. eindeutig bestimmt. Im Fall $\frac{q}{2} < p$ erhält man so zu C_1 bzw. C_2 jeweils D_1 bzw. D_2. Da hierzu verschieden große (nicht überstumpfe) Zentriwinkel $\angle BMC_1$, $\angle BMC_2$, also auch verschieden lange Sehnen BC_1, BC_2 gehören, sind die Trapeze ABC_1D_1 und ABC_2D_2 zueinander nicht kongruent. Damit ist bewiesen:

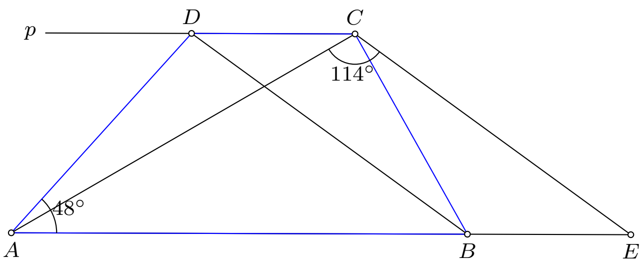
a) Genau dann existiert ein gesuchtes Viereck, wenn $\frac{q}{2} \leq p$ gilt,
b) genau dann ist es bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt, wenn $\frac{q}{2} = p$ gilt.

Aufgabe 290836:
Von einem Viereck $ABCD$ wird gefordert, dass es ein Trapez mit $AB \parallel DC$, $e = 7$ cm, $f = 6$ cm, $\alpha = 48°$, $\varepsilon = 114°$ ist, wobei e die Länge der Diagonale AC, f die Länge der Diagonale BD, α die Größe des Winkels $\angle DAB$ und, wenn S der Schnittpunkt von AC mit BD bezeichnet, ε die Größe des Winkels $\angle ASB$ ist.

a) Beweise: Wenn ein Viereck diese Forderungen erfüllt, dann kann es aus den gegebenen Längen und Winkelgrößen konstruiert werden!
b) Beschreibe eine solche Konstruktion und fertige eine Konstruktionszeichnung an!
c) Beweise: Wenn ein Viereck nach der Beschreibung konstruiert wird, dann erfüllt es die gestellten Forderungen!
d) Beweise, dass durch die Forderungen ein Viereck $ABCD$ auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Wenn ein Viereck $ABCD$ die Forderungen erfüllt, so folgt:
Es gilt $\angle DAB = \alpha = 48°$. Ist ferner E der Schnittpunkt der Geraden durch A, B mit der Parallelen durch C zu BD, so ist das Viereck $BECD$ wegen $BD \parallel EC$, $AB \parallel DC$ ein Parallelogramm.
Daher gilt $EC = BD = f = 6$ cm sowie nach dem Stufenwinkelsatz $\angle ACE = \angle ASB = \varepsilon = 114°$. Ferner ist $AC = e = 7$ cm.
Daher kann das Viereck $ABCD$ durch folgende Konstruktion aus den gegebenen Längen und Winkelgrößen erhalten werden:

b) (1) Man konstruiert ein Dreieck ACE aus $AC = 7$ cm, $\angle ACE = 114°$, $EC = 6$ cm.
(2) Man konstruiert die Parallele p durch C zu AE.
(3) Man trägt in A an AE nach derjenigen Seite, auf der C liegt, den Winkel der Größe 48° an; sein zweiter Schenkel schneidet p in D.
(4) Man konstruiert die Parallele durch D zu EC; sie schneidet AE in B
Konstruktionszeichnung:



c) Wenn ein Viereck $ABCD$ nach dieser Beschreibung konstruiert wird, dann folgt: Nach (2) (und (3), (4)) ist $AB \parallel DC$, nach (1) ist $AC = e = 7$ cm, nach (3) (und (4)) ist $\angle DAB = \alpha = 48°$.
Nach (2) und (4) ist ferner $BECD$ ein Parallelogramm, daher und nach (1) folgt $BD = EC = f = 6$ cm, und nach dem Stufenwinkelsatz sowie (1) folgt, wenn S den Schnittpunkt der in (1) bzw. (4) erhaltenen Strecken AC, BD bezeichnet, auch $\angle ASB = \angle ACE = \varepsilon = 114°$.
Also erfüllt jedes so konstruierte Viereck $ABCD$ die gestellten Forderungen.

d) Konstruktionsschritt (1) ergibt nach dem Kongruenzsatz sws ein bis auf Kongruenz eindeutig bestimmtes Dreieck ACE.
Die Konstruktionsschritte (2), (3), (4) führen dann auf eindeutig bestimmte Punkte D und B. Damit (und wegen (a)) ist bewiesen:
Durch die Forderungen ist ein Viereck $ABCD$ bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.

Aufgabe 300833:
Aus drei gegebenen Längen $c = 8$ cm, $s_a = 6$ cm, $s_b = 7$ cm soll ein Dreieck ABC konstruiert werden. Dabei wird gefordert:

(1) Die Seite AB hat die Länge $\overline{AB} = c$.

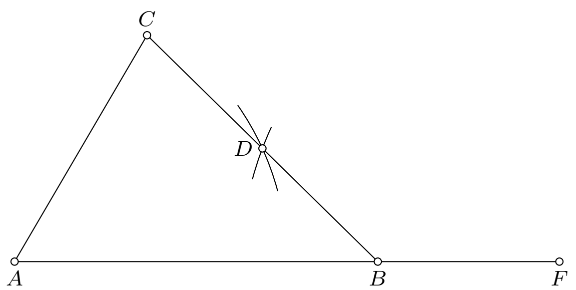
(2) Die Seitenhalbierende AD der Seite BC hat die Länge $\overline{AD} = s_a$.

(3) Die Seitenhalbierende BE der Seite AC hat die Länge $\overline{BE} = s_b$.

a) Konstruiere ein Dreieck und beschreibe deine Konstruktion!

b) Beweise: Wenn ein Dreieck nach deiner Beschreibung konstruiert wird, dann erfüllt es die Bedingungen (1), (2), (3).

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(a) Die Abbildung zeigt ein nach folgender Beschreibung konstruiertes Dreieck:

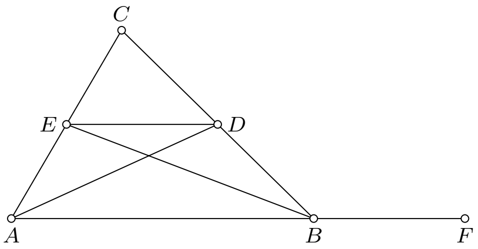


1. Man konstruiert eine Strecke AB der Länge c.
2. Man verlängert die Strecke AB über B hinaus um ihre halbe Länge bis zum Punkt F.
3. Man konstruiert den Kreis um A mit s_a den Kreis um F mit s_b und wählt einen Schnittpunkt dieser Kreise als D.
4. Man verlängert die Strecke BD über D hinaus um ihre eigene Länge bis zum Punkt C.

b) Wenn ein Dreieck ABC nach dieser Beschreibung konstruiert wird, so folgt (siehe Abbildung 2):

Nach Konstruktionsschritt 1. ist $AB = c$, also (1) erfüllt. Nach 4. ist D der Mittelpunkt, also AD die Seitenhalbierende von BC, und nach 3. gilt $AD = s_a$; also ist (2) erfüllt.

Ist ferner E der Mittelpunkt, also BE die Seitenhalbierende von AC, so ist nach der Umkehrung des Strahlensatzes $ED \parallel AB$, und nach dem Strahlensatz sowie nach 2. folgt $ED = \frac{1}{2}AB = BF$. Also ist $BFDE$ ein Parallelogramm; hieraus und aus 3. folgt $BE = FD = s_b$; d. h., auch (3) ist erfüllt.



Aufgabe 310833:
Gegeben sei ein Dreieck ABC. Auf der Seite BC dieses Dreiecks seien ferner ein Punkt D zwischen B und C sowie ein Punkt E zwischen D und C gegeben. Gesucht sind zwei Punkte F, G, mit denen die folgenden Bedingungen erfüllt werden:

(1) F liegt auf AC.
(2) G liegt auf AB.
(3) $DEFG$ ist ein Parallelogramm.

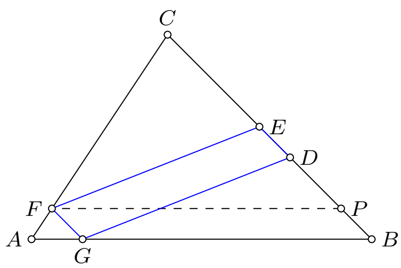
a) Beweise, dass für jedes Dreieck ABC mit den Punkten D, E in beschriebener Lage gilt: Wenn zwei Punkte F, G die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllen, dann können sie (aus den gegebenen A, B, C, E) konstruiert werden;

b) Beschreibe eine solche Konstruktion!

c) Beweise, dass auch umgekehrt F und G, wenn sie nach deiner Beschreibung konstruiert werden, die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllen!

d) Wähle A, B, C, D, E wie genannt und führe die von dir beschriebene Konstruktion durch!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



a) Wenn F und G (bei genannter Vorgabe von A,B,C,D,E) die Bedingungen (1),(2),(3) erfüllen, so folgt: Nach (3) gilt

$$GF = DE \qquad (4)$$

und $GF \parallel DE$, also, da D und E auf BC liegen, auch

$$GF \parallel BC \qquad (5)$$

Weiter folgt: Die Parallele durch F zu AB schneidet BC in einem Punkt P, da F nach (1) auf AC liegt. Für diesen Punkt P gilt

$$FP \parallel AB \quad (6) \qquad \text{als auch} \qquad FP \parallel GB \quad (7)$$

da G nach (2) auf AB liegt. Da ferner P auf BC (8) liegt, besagt (5) auch $GF \parallel BP$; hiernach und nach (7) folgt, dass $GBPF$ ein Parallelogramm ist. Also gilt $GF = BP$ und damit wegen (4) auch $BP = DE$ (9).

Mit (8),(9),(6),(5) ist bewiesen, dass F und G durch folgende Konstruktion erhalten werden können:

b) [1] Man konstruiert denjenigen Punkt P auf BC, für den $BP = DE$ gilt.
[2] Man konstruiert die Parallele durch P zu AB; sie schneidet AC in einem Punkt F.
[3] Man konstruiert die Parallele durch F zu BC; sie schneidet AB in einem Punkt G.

c) Wenn F, G nach dieser Beschreibung konstruiert sind, so folgt:
Nach [2], [3] liegt F auf AC bzw. G auf AB; d. h., (1), (2) sind erfüllt.
Nach [2], [3] gilt ferner $FP \parallel AB$, $GF \parallel BC$. (10)

Da aber G auf AB und P nach [1] auf BC liegt, besagt (10) auch $FP \parallel GB$, $GF \parallel BP$; also ist $GBPF$ ein Parallelogramm. Folglich gilt $GF = BP$ und damit nach [1] auch $GF = DE$. (11)

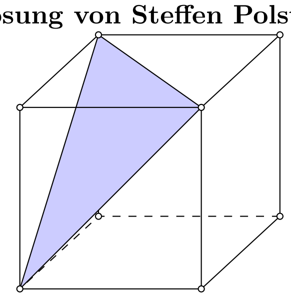
Wegen (10) und weil D, E auf BC liegen, ist $GF \parallel DE$ (12); mit (11),(12) ist gezeigt:
$DEFG$ ist ein Parallelogramm; d. h., auch (3) ist erfüllt.

II.V. Raumgeometrie

I. Runde 1

Aufgabe V00814:
Durch einen Würfel soll ein ebener Schnitt so geführt werden, dass als Schnittfigur ein gleichseitiges Dreieck verläuft.
a) Wie muss der Schnitt geführt werden?
b) Veranschauliche den Schnitt durch ein Schrägbild!

Lösung von Steffen Polster:



Die Diagonalen dreier anliegender Würfelflächen bilden die Seiten des gleichseitigen Dreiecks.

Aufgabe V10812:
Im VEB Kabelwerk Köpenick wird aus einem Draht von 6 mm Durchmesser und 4 m Länge ein Draht von 0,02 mm Durchmesser gezogen.
Wie lang ist dieser Draht?

Lösung von Steffen Polster:
Das Volumen des Drahtes bleibt erhalten, d. h. es ist

$$\pi r_a^2 l_a = \pi r_e^2 l_e \Rightarrow l_e = \frac{r_a^2}{r_e^2} \cdot l_a$$

wobei r_a, l_a Radius und Länge am Anfang und r_e, l_e Radius und Länge des Endproduktes sind.
Einsetzen der Werte ergibt $l_e = 360$ Millionen mm $= 360$ km.

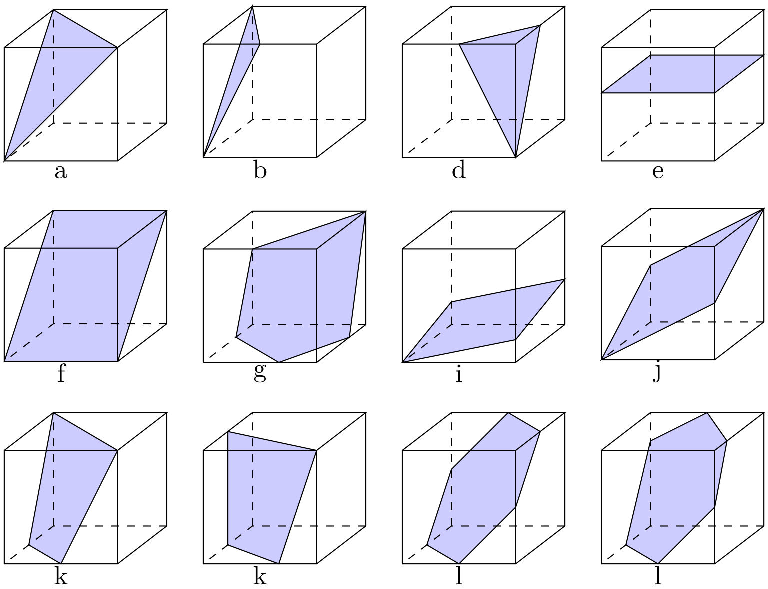
Aufgabe 040816:
Ein Würfel soll auf verschiedene Arten durch einen ebenen Schnitt in zwei Teilkörper zerlegt werden.
Können dabei folgende Schnittfiguren entstehen:

a) gleichseitiges Dreieck b) gleichschenkliges Dreieck (nicht gleichseitig)
c) rechtwinkliges Dreieck d) ungleichschenkliges Dreieck
e) Quadrat f) Rechteck (nicht quadratisch)
g) Fünfeck h) Achteck?

Welche möglichen Schnittfiguren sind in der Aufzählung nicht enthalten?

Fertige zu jeder Schnittfigur eine Skizze an, aus der man sehen kann, wie der ebene Schnitt geführt werden muss, wenn man die betreffende Schnittfigur erhalten will!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Von den angegebenen Schnittfiguren sind folgende möglich (siehe Abbildung):



a, b und d nur für spitzwinklige Dreiecke; e, f, g (unregelmäßig mit 2 Paaren paralleler Seiten). Nicht möglich sind dagegen: c) und h).

In der Aufzählung fehlen:

i) Parallelogramm, die weder Rhombus- noch Rechteckform haben,

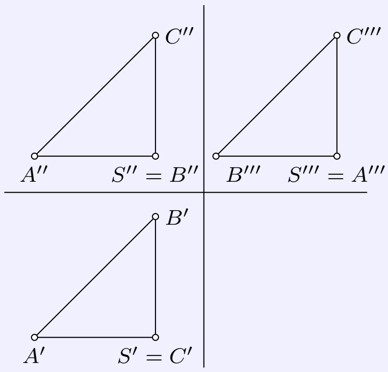
j) Rhombus,

k) Trapeze (gleichschenklig und ungleichschenklig)

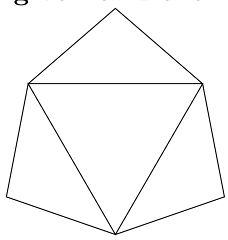
l) Sechsecke (regelmäßige und solche mit 3 Paaren paralleler Seiten).

Aufgabe 050813:

a) Gib einen Körper an, der den abgebildeten Grund-, Auf- und Kreuzriss besitzt (siehe Abbildung)! (Sämtliche Risse sind rechtwinklig-gleichschenklige Dreiecke.)
b) Zeichne ein Netz dieses Körpers, und stelle ein Körpermodell her!



Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



a) Ein Tetraeder, bei dem drei Seitenflächen untereinander kongruente, rechtwinklig-gleichschenklige Dreiecke sind, besitzt einen derartigen Grund-, Auf- und Seitenriss.
b) Körpernetz (siehe Abbildung)

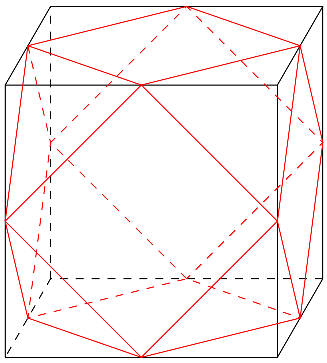
Aufgabe 100814:
Ein Würfel werde von allen denjenigen Ebenen geschnitten, die durch die Mittelpunkte jeweils der drei von einem Eckpunkt ausgehenden Kanten verlaufen. Dabei entsteht ein Restkörper.

a) Stelle diesen Würfel mit der Kantenlänge $a = 6$ cm und den Restkörper in einem Schrägbild ($\alpha = 60°$; $q = \frac{1}{3}$) dar!

b) Ermittle die Anzahl aller Eckpunkte und die Anzahl aller Kanten des Restkörpers!

c) Gib die Form und die Anzahl aller Teilflächen der Oberfläche des Restkörpers an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



b) Die Eckpunkte des Restkörpers sind genau alle Mittelpunkte der Kanten des Würfels. Da der Würfel genau 12 Kanten hat, deren Mittelpunkte sämtlich voneinander verschieden sind, hat der Restkörper folglich genau 12 Eckpunkte.

Die Kanten des Restkörpers sind genau alle diejenigen Strecken, die die Mittelpunkte je zweier von einem Eckpunkt des Würfels ausgehender Kanten miteinander verbinden.
Jede dieser Verbindungsstrecken verläuft innerhalb einer Seitenfläche des Würfels, und zwar liegen in jeder der 6 Seitenflächen genau 4 verschiedene Verbindungsstrecken. Deren Anzahl beträgt folglich genau 24.

c) Die in jeder Seitenfläche des Würfels liegenden 4 Kanten des Restkörpers begrenzen eine der gesuchten Teilflächen, nämlich ein Quadrat (da durch die Verbindungsstrecken von je zwei aufeinanderfolgenden Seitenmitten eines Quadrates wieder ein Quadrat begrenzt wird). Solche quadratischen Teilflächen gibt es folglich genau 6.

Die Verbindungsstrecken der Mittelpunkte je dreier von einem Eckpunkt des Würfels ausgehender Kanten begrenzen eine der gesuchten Teilflächen, nämlich ein gleichseitiges Dreieck (da diese 3 Verbindungsstrecken als Seiten dreier kongruenter vorhin genannter Quadrate gleichlang sind). Solche gleichseitigen Dreiecke gibt es folglich genau 8.

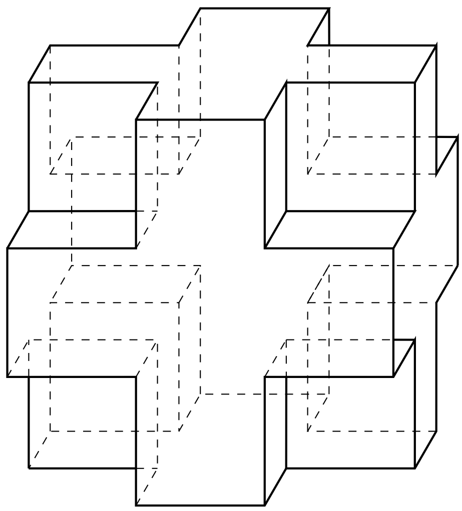
Diese 14 Teilflächen schließen sich bereits zur Oberfläche eines Körpers zusammen (wie man z. B. daran erkennt, dass sich um jeden Eckpunkt des Restkörpers 4 Teilflächen lückenlos zusammenschließen). Daher hat die Oberfläche des Restkörpers keine weiteren Teilflächen.

Aufgabe 120812:
Von einem Würfel mit der Kantenlänge $a = 9$ cm seien an jeder seiner Ecken jeweils ein Würfel mit einer Kantenlänge $b < \frac{a}{2}$ herausgeschnitten. (Die Flächen der herausgeschnittenen Würfel seien parallel zu den entsprechenden Flächen des großen Würfels).

a) Zeichne ein Schrägbild des Restkörpers für $b = 3$ cm! ($\alpha = 60°$, $1:3$)

b) Es gibt genau einen Wert von b, für den das Volumen V_R des Restkörpers 217 cm^3 beträgt. Ermittle diesen Wert!

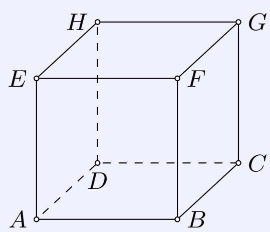
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



b) Das Volumen des großen Würfels sei mit V, das eines der herausgeschnittenen Würfel mit V_A bezeichnet. Dann gilt: $V_R = V_W - 8V_A$.

Also hat b genau dann den gesuchten Wert, wenn $217 \text{ cm}^3 = 729 \text{ cm}^3 - 8b^3$ gilt. Dies ist gleichbedeutend mit $8b^3 = 512 \text{ cm}^3 \to b = 4$ cm, und es gilt $4 \text{ cm} < 3 \text{ cm} = a$.

Aufgabe 150814:
Gegeben sei ein Würfel $ABCDEFGH$ mit der Kantenlänge 5 cm (siehe Abbildung).
Dieser Würfel ist in senkrechter Zweitafelprojektion abzubilden. Dabei wird gefordert, dass die Raumdiagonale AG sowohl parallel zur Grundrisstafel als auch parallel zur Aufrisstafel liegt. Im übrigen kann, wenn diese Forderung erfüllt wird, die Lage des Würfels im Raum beliebig gewählt werden. Alle Eckpunkte sind entsprechend der Abbildung zu benennen.



Beschreibe und begründe die Konstruktion einer derartigen Zweitafelprojektion des Würfels!

Hinweis: Es empfiehlt sich, eine günstige Lage der vier Punkte A, E, G, C zu wählen.

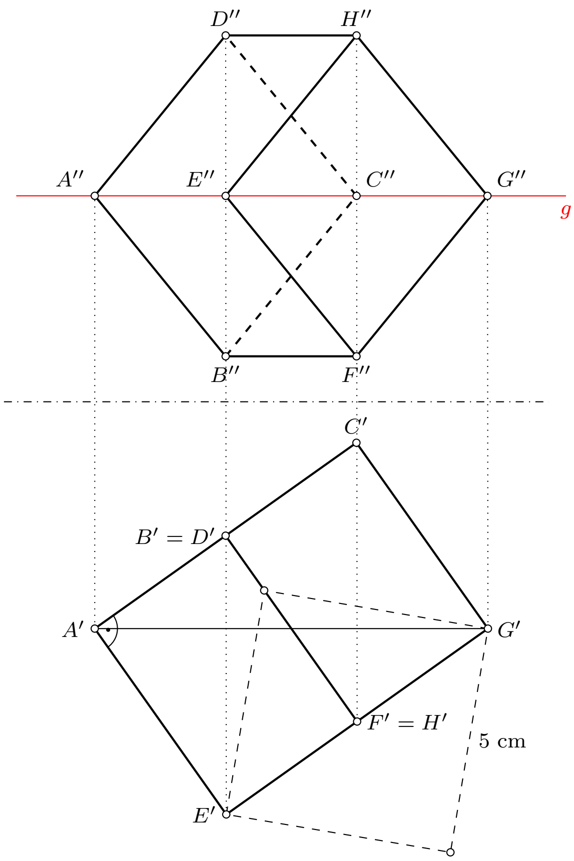
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Eine Möglichkeit, die Forderung der Aufgabe zu erfüllen, ist die folgende:

Man legt die Ebene ε, in der das Rechteck $AEGC$ liegt, parallel zur Grundrisstafel. Als Grundriss $A'E'G'C'$ erscheint $AEGC$ dann in wahrer Größe.
Wählt man seine Lage insbesondere so, dass $A'G'$ parallel zur Achse verläuft, so ist die in der Aufgabe gestellte Forderung erfüllt. Bei dieser Lage lassen sich Grund- und Aufriss durch folgende Konstruktion finden:

Man konstruiert ein Quadrat mit der gegebenen Kantenlänge 5 cm. Ist d seine Diagonalenlänge, so konstruiert man ein Rechteck $A'E'G'C'$ mit der Kantenlänge $A'E' = 5$ cm und $A'C' = d$.

Die Achse der Zweitafelprojektion wählt man parallel zu $A'G'$. Die Strecken BD und FH schneiden die Strecken AC bzw. EG in ihren Mittelpunkten und stehen senkrecht auf der Ebene ε. Also ist der Mittelpunkt von $A'C'$ der gemeinsame Grundriss $B' = D'$ der Punkte B und D.
Ebenso ist der Mittelpunkt von $E'G'$ der gemeinsame Grundriss $F' = H'$ von F und H.
Als von oben sichtbare Kanten zeichnet man die Umrissstrecken $A'E'$, $E'G'$, $G'C'$, $C'A'$ sowie die Strecke $D'H'$, (von der die Strecke $B'H'$ verdeckt wird, wenn angenommen wird, dass $A'E'G'H'$ von oben gesehen entgegen dem Uhrzeigersinn umlaufen ist und folglich DH oberhalb BF liegt).

Die Aufrisse A'', E'', G'', C'' liegen auf einer Parallelen g zur Achse sowie auf den Ordnungslinien durch A', E', G' bzw. C'. Zur Bestimmung von B'' und D'' schneide man zunächst g mit der Ordnungslinie durch $B' = D'$.

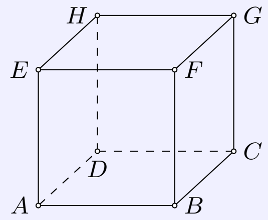


Da die Strecke BD mit ihrem in ε liegenden Mittelpunkt im Aufriss in wahrer Größe erscheint, findet man B'' und D'', indem man nun von dem Schnittpunkt (E'') aus auf der Ordnungslinie nach beiden Seiten die Länge $\frac{d}{2}$ abträgt.
Ebenso findet man F'' und H'' auf der Ordnungslinie durch F' von deren Schnittpunkt (C'') mit g aus im Abstand $\frac{d}{2}$. Dabei sind B'', F'' unterhalb, D'', H'' oberhalb g zu zeichnen.

Als von vorn sichtbare Kanten zeichnet man die Umrissstrecken $A''B''$, $B''F''$, $F''G''$, $G''H''$, $H''D''$, $D''A''$ sowie die vom Aufriss E'' des Punktes E ausgehenden Kanten $E''A''$, $E''F''$, $E''H''$; denn an der Lage des Grundrisses E' ist E als der am weitesten vorn gelegene Punkt zu ersehen.
Entsprechend werden die von C'' ausgehenden Kanten $C''G''$, $C''D''$, $C''B''$ als verdeckte Kanten gezeichnet.

Aufgabe 160811:

Durch einen Würfel $ABCDEFGH$ (siehe Abbildung) soll ein ebener Schnitt so gelegt werden, dass als Schnittfigur ein gleichseitiges Dreieck entsteht, dessen sämtliche Ecken auch Eckpunkte des Würfels sind.

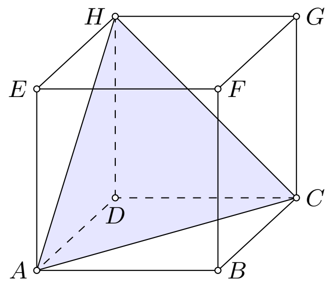


Gib alle Möglichkeiten für einen solchen Schnitt an, und stelle einen Würfel mit einem solchen Schnitt in Kavalierperspektive dar!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, zwei Ecken einer Schnittfigur wären die Endpunkte ein und derselben Körperdiagonalen. Dann müsste die dritte Ecke von jedem dieser beiden Endpunkte den Abstand AG haben, was nicht möglich ist.

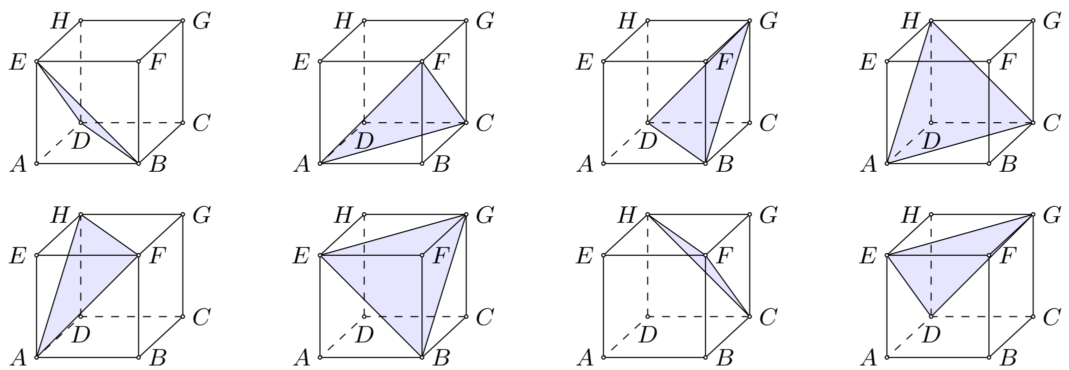
Angenommen, zwei Eckpunkte einer Schnittfigur wären die Endpunkte ein und derselben Würfelkante. Dann müsste die dritte Ecke von jedem dieser beiden Endpunkte den Abstand AB haben, was für keinen Eckpunkt des Würfels zutrifft.

Also kann nur dann ein der Aufgabe entsprechendes Schnittdreieck vorliegen, wenn es drei Flächendiagonalen des Würfels als seine drei Seiten hat. Jedes solche Dreieck ist gleichseitig, da alle Flächendiagonalen des Würfels einander gleich lang sind, also entspricht jede derartige Schnittfigur den Bedingungen.



Die Ecken jedes solchen Dreiecks sind Endpunkte der drei von einer und derselben Würfelecke ausgehenden Würfelkanten. Durch diese Eigenschaft ist jedem Eckpunkt genau ein Dreieck und umgekehrt jedem derartigen Dreieck genau ein Eckpunkt zugeordnet.

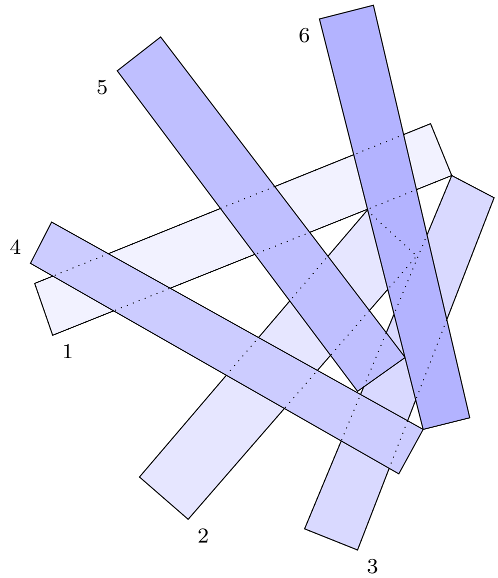
Mithin gibt es genau 8 gleichseitige Dreiecke der geforderten Art, nämlich die Dreiecke BDE, ACF, BDG, ACH, AFH, BEG, CFH, DEG.



Aufgabe 170812:
Sechs quaderförmige Stücke Wandtafelkreide, jedes mit den Kantenlängen 8 cm, 1 cm, 1 cm sollen derart hingelegt oder aufgestellt werden, dass jedes Stück alle fünf anderen berührt.

Gib eine Lösung in Form einer Skizze an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

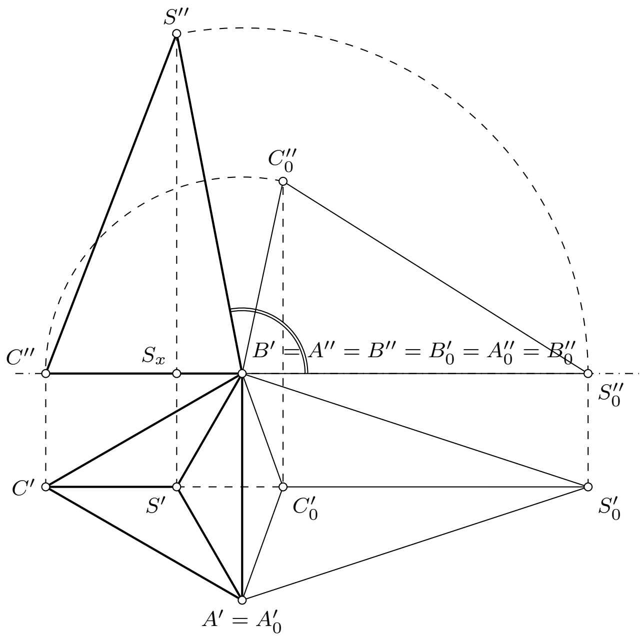


Aufgabe 180813:
Gegeben sei eine dreiseitige Pyramide $ABCS$, deren Grundfläche ABC ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge 4 cm bildet und deren Spitze S so gelegen ist, dass das Lot von S auf die Ebene durch A, B, C den Schwerpunkt F der Grundfläche als Fußpunkt besitzt und dass FS die Länge 6 cm hat.

Diese Pyramide ist in einer Zweitafelprojektion darzustellen. Dabei wird gefordert, dass die Seitenfläche ABS in der Grundrisstafel liegt. Zu konstruieren ist die Abbildung nur mit Hilfe von Zirkel und Lineal aus den gegebenen Streckenlängen 4 cm, 6 cm.

Bemerkung: Beschreibung und Begründung der Konstruktion werden nicht verlangt. Man kann z. B. die geforderte Abbildung aus einer anderen Darstellung gewinnen, in der das gleichseitige Dreieck ABC in der Grundrisstafel liegt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Man wählt zunächst eine solche Lage der Pyramide, dass ihre Grundfläche ABC in der Grundrisstafel liegt, dass dabei die Seite AB senkrecht zur Rissachse verläuft, B auf der Rissachse und S oberhalb der Grundrisstafel liegt.

Dreieck ABC wird dann im Grundriss in wahrer Größe abgebildet als $\triangle A'B'C'$. Der Schwerpunkt dieses Dreiecks ist der Schnittpunkt seiner Symmetrieachsen und gleichzeitig der Grundriss S' der Pyramidenspitze S.

Man zeichnet also ein gleichseitiges Dreieck $A'B'C'$ mit der Seitenlänge 4 cm so, dass $A'B'$ senkrecht zur Rissachse verläuft und B' auf derselben liegt. Dann zeichnet man zwei Symmetrieachsen dieses Dreiecks und erhält als Schnittpunkt S'. Die Ordnungslinien durch A', C' und S' schneiden die Rissachse in $A'' = B'' = B'$, C'' bzw. S:

Da die Körperhöhe im Aufriss in wahrer Größe erscheint, verlängert man $S'S_x$ über S_x hinaus und trägt $S_xS'' = 6$ cm auf ihr ab. Nun werde die Pyramide $ABCS$ um die Seite AB geklappt, bis die Seitenfläche ABS in die Grundrissebene gelangt. Die so entstandene Pyramide $A_0B_0C_0S_0$ erfüllt die Forderung der Aufgabe. Ihr Grund- und Aufriss ergibt sich folgendermaßen:

Als Punkte der Drehachse bleiben A und B fest, also gilt $A' = A_0'$ und $A'' = B' = B'' = A_0'' = B_0' = B_0''$.

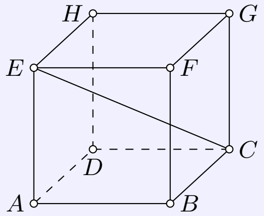
Bei der Umklappung beschreiben S und C Kreisbögen, die sich im Aufriss als solche, im Grundriss als Parallele zur Rissachse abbilden.

Das Bild S_0'' des Punktes S liegt also erstens auf der Rissachse und zweites auf dem Kreisbogen um A'' mit $A''S''$ als Radius. Das Grundrissbild S_0' liegt dann erstens auf der Parallelen zur Rissachse durch S' und zweitens auf der Ordnungslinie von S_0''.
Da bei der Umklappung der Drehwinkel für alle Punkte der Pyramide der gleiche ist, liegt C_0'' erstens auf dem Kreisbogen um A'' mit $A''C''$ als Radius und zweitens auf dem freien Schenkel des in A'' an $A''C''$ angetragenen Winkels der Größe $\angle S''A''S_0''$.

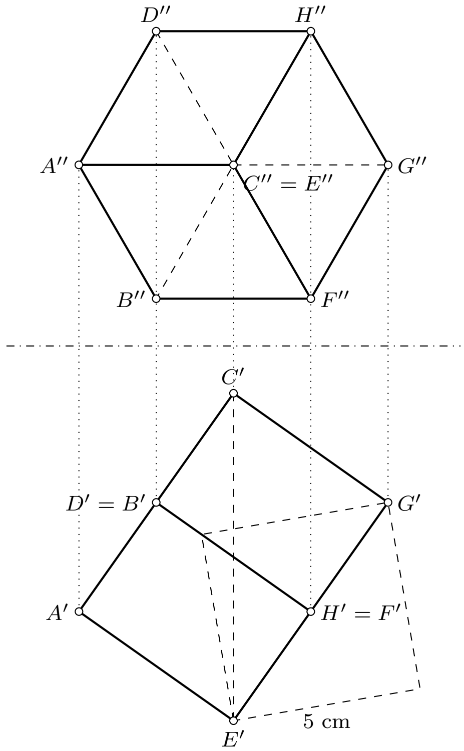
Verbindet man nun C_0'' mit A'' sowie mit S_0'', so erhält man den gesuchten Aufriss der Pyramide.
Im Grundriss liegt C_0' erstens auf der Parallelen zur Rissachse durch C' und zweitens auf der Ordnungslinie durch C_0''. Verbindet man C_0' mit $A_=''$, B_0' und S_0', sowie S_0' mit A_0' und B_0', so erhält man das geforderte Grundrissbild der Pyramide; sämtliche Seitenkanten der Pyramide sind im Grundriss als sichtbare Kanten wiederzugeben.

Aufgabe 190811:
Gegeben sei ein Würfel $ABCDEFGH$ mit der Kantenlänge 5 cm (siehe Bild). Dieser Würfel ist in senkrechter Zweitafelprojektion abzubilden. Dabei wird gefordert, dass die Raumdiagonale EC parallel zur Grundrisstafel und senkrecht zur Aufrisstafel liegt. Unter Beachtung dieser Forderung kann die Lage des Würfels im Raum sonst beliebig gewählt werden. Alle Eckpunkte sind entsprechend dem Bilde zu benennen.

Beschreibung und Begründung der Konstruktion sind nicht erforderlich.



Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



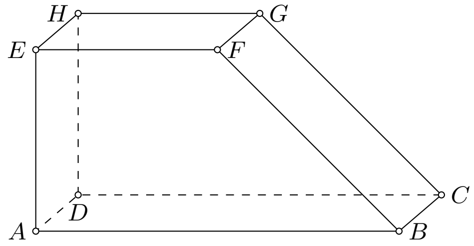
Aufgabe 250814:
Ein Quader habe die Kantenlängen a, $2a$ und $\frac{a}{2}$, wobei a vorgegeben ist. Von diesem Quader werde ein gerades Prisma abgetrennt. Die Höhe dieses Prismas habe die Länge $\frac{a}{2}$, seine Grundfläche sei ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck mit der Schenkellänge a. Der Restkörper sei ein Prisma mit trapezförmiger Grundfläche.

a) Zeichne den Restkörper in Kavalierperspektive und wähle dafür $a = 6$ cm!

b) Ermittle das Volumen des Restkörpers in Abhängigkeit von a!

c) Gib das Verhältnis der Volumina des Restkörpers und des Quaders an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



b) Bezeichnet man den Flächeninhalt der Grundfläche des Restkörpers mit A_G und seine Höhenlänge mit $h = \frac{a}{2}$, dann gilt für das Volumen V_R deS Restkörpers

$$V_R = A_G \cdot h$$

Da die Grundfläche trapezförmig (mit a und $2a$ als Längen der parallelen Seiten und mit a als Höhenlänge) ist, beträgt der Flächeninhalt der Grundfläche

$$A_G = \frac{a+2a}{2} \cdot a = \frac{3}{2}a^2$$

Mithin ist

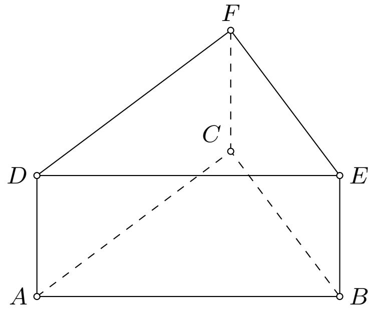
$$V_R = \frac{3}{2}a^2 \cdot \frac{a}{2} = \frac{3}{4}a^2$$

c) Das Volumen V_Q des Quaders ist $V_Q = 2a \cdot a \cdot \frac{a}{2} = a^3$. Damit ist das gesuchte Verhältnis $V_R : V_Q = 3 : 4$.

Aufgabe 260814:
Es sei $ABCDEF$ ein gerades dreiseitiges Prisma. Alle drei Seitenflächen $ABED$, $BCFE$, $CADF$ sowie die Grund- und die Deckfläche ABC bzw. DEF seien sämtlich einander umfangsgleich. Gegeben sei die Länge h der Strecke AD.

Ermittle in Abhängigkeit von h die Längen der Strecken BC, CA und AB!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Die Seitenflächen des Prismas sind Rechtecke, haben also gleichlange Gegenseiten. Mithin gilt

$$\overline{AD} = \overline{BE} = \overline{CF} = h$$

sowie für die gesuchten Längen

$$a = \overline{BC} = \overline{EF}, \qquad b = \overline{CA} = \overline{FD}, \qquad c = \overline{AB} = \overline{DE}.$$

Aus der Umfangsgleichheit der Seitenflächen untereinander folgt somit

$$2a + 2h = 2b + 2h = 2c + 2h \tag{1}$$

und aus der Umfangsgleichheit der Seitenflächen mit der Grund- oder Deckfläche folgt

$$2a + 2h = a + b + c \tag{2}$$

Aus (1) ergibt sich damit $a = b = c$ und daher aus (2) $2a + 2h = 3h$, also $a = 2h$.

Die gesuchten Längen lauten mithin $\overline{BC} = \overline{CA} = \overline{AB} = 2h$.

Aufgabe 290812:
Die Grundfläche eines geraden Prismas ist ein gleichseitiges Dreieck mit gegebener Seitenlänge a. Die Summe aller Kantenlängen dieses Prismas beträgt $15a$.

Berechne den Flächeninhalt der Mantelfläche dieses Prismas!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Ein gerades Prisma ist ein Körper, dessen Grundfläche und Deckfläche parallelliegende kongruente Vielecke und dessen Seitenflächen Rechtecke sind.
Bei dem genannten Prisma ist die Summe der Längen der Deckkanten und der Grundkanten $6a$, also verbleibt $15a - 6a = 9a$ für die Summe der drei Seitenkantenlängen; jede Seitenkante hat daher die Länge $3a$.
Der Flächeninhalt A_M der Mantelfläche beträgt somit $A_M = 9a^2$.

II. Runde 2

Aufgabe 010822:
Für eine große Schmiedepresse wurden als Führungssäulen vier Stahlzylinder mit einem Durchmesser von $d = 512$ mm und einem Gesamtgewicht von $G = 68$ Mp gedreht.

Wie lang ist eine Führungssäule? (Wichte des Stahls $\gamma = 7{,}85\frac{\text{p}}{\text{cm}^3}$.)

Lösung von Carsten Balleier:
Jeder der vier Stahlzylinder hat ein Gewicht $G = \frac{1}{4} \cdot 68$ Mp $= 17$ Mp. Für das Gewicht eines Zylinders gilt $G = \gamma \cdot V = \gamma \cdot \pi r^2 h$, d. h. Wichte mal Zylindervolumen. Umstellen nach der Höhe h, Einsetzen und Ausrechnen ergibt:

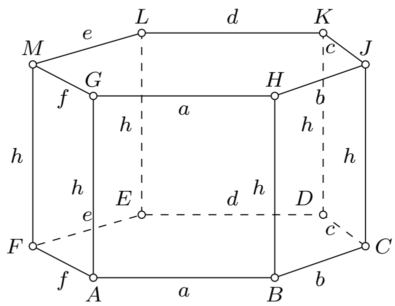
$$h = \frac{G_1}{\gamma \pi r^2} = \frac{1{,}7 \cdot 10^7 \text{ p}}{(7{,}85\frac{\text{p}}{\text{cm}^3}) \cdot \pi \cdot (25{,}6 \text{ cm})^2} = 1051{,}8 \text{ cm} \approx 10{,}5 \text{ m}.$$

Jede Führungssäule ist rund 10,5 m lang.

Aufgabe 260823:
Es sei $ABCDEFGHJKLM$ ein gerades sechsseitiges Prisma, in dem die sechs Seitenflächen $ABHG$, $BCJH$, $CDKJ$, $DELK$, $EFML$, $FAGM$ sowie die Grund- und Deckfläche $ABCDEF$ und $GHJKLM$ sämtlich einander umfangsgleich sind. Gegeben sei die Länge h der Strecke AG.

Ermittle in Abhängigkeit von h die Längen der Strecken AB, BC, CD, DE, EF und FA!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Da die Seitenflächen jedes geraden Prismas Rechtecke sind, also jeweils gleichlange Gegenseiten haben, ist die gegebene Länge

$$h = \overline{AG} = \overline{BH} = \overline{CJ} = \overline{DK} = \overline{EL} = \overline{FM}$$

und für die gesuchten Längen gilt

$$a = \overline{AB} = \overline{GH}, b = \overline{BC} = \overline{HJ}, c = \overline{CD} = \overline{JK}, d = \overline{DE} = \overline{KL}, e = \overline{EF} = \overline{LM}, f = \overline{FA} = \overline{MG}$$

Aus der Umfangsgleichheit aller sechs Seitenflächen folgt

$$2a + 2h = 2b + 2h = 2c + 2h = 2d + 2h = 2e + 2h = 2f + 2h \qquad \text{also} \qquad a = b = c = d = e = f$$

und aus der Umfangsgleichheit der Grundfläche mit jeder Seitenfläche folgt somit $6a = 2a + 2h$, also $a = \frac{h}{2}$.

Daher sind die gesuchten Längen $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FA} = \frac{h}{2}$.

Aufgabe 270824:
Ein Würfel W werde in volumengleiche Teilwürfel zerlegt. Der Oberflächeninhalt des Würfels W sei A, die Summe der Oberflächeninhalte der voneinander getrennten Teilwürfel sei S. Ermittle das Verhältnis $A : S$

(a) wenn der Würfel W die Kantenlänge 14 cm hat und die Anzahl der Teilwürfel 8 beträgt,

(b) bei beliebiger Kantenlänge a des Würfels W und bei der Anzahl 8 der Teilwürfel,

(c) bei beliebiger Kantenlänge a des Würfels W und bei der Anzahl n^3 der Teilwürfel, wobei n eine beliebige natürliche Zahl mit $n \geq 2$ ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(c) Es gilt $A = 6a^2$. Ferner hat W das Volumen a^3; daraus folgt:
Jeder Teilwürfel hat das Volumen $\frac{a^3}{n^3}$, also die Kantenlänge $\frac{a}{n}$ und folglich den Oberflächeninhalt $6\frac{a^2}{n^2}$. Daher ist

$$S = n^3 \cdot 6 \cdot \frac{a^2}{n^2} = 6na^2$$

Somit ergibt sich

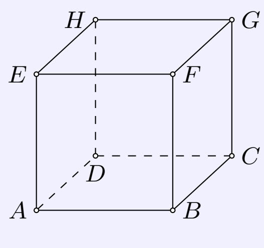
$$A : S = 6a^2 : (6na^2) = 1 : n$$

Wählt man hierin $n = 2$, so erhält man (wegen $2^3 = 8$) als Ergebnis sowohl zu (a) als auch zu (b) das Verhältnis $A : S = 1 : 2$.

Aufgabe 290823:
Es sei $ABCDEFGH$ ein Würfel mit beliebiger Kantenlänge (siehe Abbildung).

a) Ermittle die Größe des Winkels $\angle DEB$!

b) Beweise, dass die Winkel $\angle AHB$ und $\angle BEC$ zueinander gleiche Größen haben!



Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Das Dreieck DBE ist gleichseitig, da DE, BE und BD Flächendiagonalen des Würfels und somit einander gleichlang sind. Der gesuchte Winkel ist Innenwinkel dieses Dreiecks, folglich gilt $\angle DEB = 60°$.

b) Die Dreiecke AHB und BEC sind nach dem Kongruenzsatz (sss) zueinander kongruent, da) $BC = AB$ (Kanten des Würfels), $BE = AH$ (Flächendiagonalen) und $CE = BH$ (Raumdiagonalen) gilt.
In diesen Dreiecken entsprechen die gesuchten Winkel einander, da sie jeweils von einer Flächen- und einer Raumdiagonale eingeschlossen werden. Somit gilt $\angle AHB = \angle BEC$, w. z. b. w.

III. Runden 3 & 4

Aufgabe 060831:
Die Kante eines Würfels habe die Länge $a_1 = 2$ cm, die eines anderen Würfels die Länge $a_2 = 6$ cm.

Berechne das Verhältnis der Kantenlängen dieser zwei Würfel, das Verhältnis ihrer Oberflächeninhalte und das Verhältnis ihrer Rauminhalte!

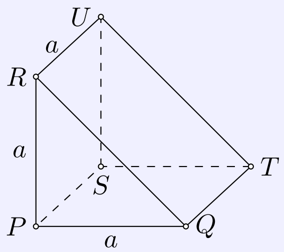
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Oberflächeninhalte der beiden Würfel seien O_1 bzw. O_2, die Rauminhalte V_1 bzw. V_2. Dann gilt:

$$\begin{aligned} a_1 : a_2 &= 2 : 6 = 1 : 3 \\ O_1 : O_2 &= 6a_1^2 : 6a_2^2 = 24 : 216 = 1 : 9 \\ V_1 : V_2 &= a_1^3 : a_2^3 = 8 : 216 = 1 : 27 \end{aligned}$$

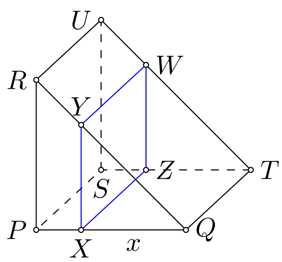
Aufgabe 250836:
Es sei $PQRSTU$ ein gerades dreiseitiges Prisma, dessen Grundfläche ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck PQR ist (siehe Abbildung). Die Höhenlänge des Prismas sei gleich der Kantenlänge a des Dreiecks PQR.

Gesucht ist eine Ebene E, die parallel zu einer der quadratischen Seitenflächen F des Prismas verläuft und die das Prisma in zwei Körper zerlegt, deren Volumina sich in irgendeiner Reihenfolge wie $9 : 16$ verhalten.

Ermittle zu gegebenen a alle diejenigen Werte, die der Abstand zwischen der Seitenfläche F und einer solchen Ebene E betragen kann!



Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Für jede Ebene, die (o. B. d. A.) parallel zur Seitenfläche $F = PSRU$ verläuft und das Prisma in zwei Teilkörper $PXYRSWZU$ und $XQYWTZ$ zerlegt (siehe Abbildung), gilt:
Die Teilkörper sind Prismen der, gleichen Höhenlänge a; ihre Volumina verhalten sich also wie die Flächeninhalte ihrer Grundflächen $PXYR$ und XQY. Dabei ist wegen $XY \parallel PR$, also (Stufenwinkel) $\angle QXY = \angle QPR = 90°$ und $\angle XQY = \angle PQR = 45°$, auch XQY ein gleichschenklig-rechtwinkliges

Dreieck.

Mit $XQ = x$ ist folglich auch $XY = X$, und XQY hat den Flächeninhalt $\frac{1}{2}x^2$. Somit hat $PXYR$ den Flächeninhalt $\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}x^2$.

Daher hat die Ebene E genau dann die geforderte Eigenschaft, wenn entweder

$$(a^2 - x^2) : x^2 = 9 : 16 \qquad \text{oder} \qquad x^2 : (a^2 - x^2) = 9 : 16$$

gilt. Dies ist der Reihe nach äquivalent mit

$$16(a^2 - x^2) = 9x^2 \qquad \text{bzw.} \qquad 16x^2 = 9(a^2 - x^2)$$
$$16a^2 = 25x^2 \qquad \text{bzw.} \qquad 25x^2 = 9a^2$$

und dies wegen $a > 0$, $x > 0$ mit

$$x = \frac{4}{5}a \qquad \text{bzw.} \qquad x = \frac{3}{5}a$$

Somit haben für den gesuchten Abstand PX genau die beiden Werte

$$a - x = \frac{1}{5}a \qquad \text{und} \qquad a - x = \frac{2}{5}a$$

die geforderte Eigenschaft.

Aufgabe 260836:
Es sei $ABCD$ eine dreiseitige Pyramide, die die Bedingung erfüllt, dass die vier Dreiecke ABC, ABD, ACD und BCD sämtlich einander umfangsgleich sind.

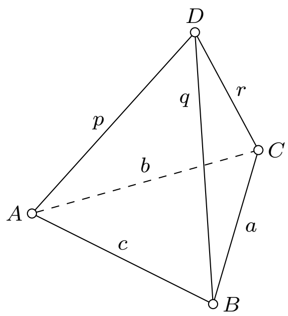
Untersuche, ob durch diese Bedingung und durch die Längen

$$\overline{AD} = p, \qquad \overline{BD} = q, \qquad \overline{CD} = r$$

die Längen $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$ und $\overline{AB} = c$ eindeutig bestimmt sind!

Wenn dies der Fall ist, gib diese Längen a, b, c in Abhängigkeit von p, q, r an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Wegen der Umfangsgleichheit von ABC und ABD gilt $a + b + c = p + q + c$ (1).
Wegen der Umfangsgleichheit von ABC und ACD gilt $a + b + c = p + b + r$ (2).
Wegen der Umfangsgleichheit von ABC und BCD gilt $a + b + c = a + q + r$ (3).
Behauptung: Hieraus folgt: a, b, c sind eindeutig bestimmt und zwar gilt $a = p$, $b = q$, $c = r$.

1. Beweismöglichkeit hierzu:

   Aus (1) folgt $a+b=p+q$ (4), aus (3) und (2) folgt $a+q+r=p+b+r$ und daraus $a+q=p+b$. (5)

   Addiert man (4) und (5), so ergibt sich $2a+b+q=2p+b+q$ und daraus $a=p$.

   Setzt man dies in (1) bzw. in (2) ein, so ergibt sich $b=q$ bzw. $c=r$.

2. Beweismöglichkeit:

   Addition von (1), (2), (3) ergibt

   $$3(a+b+c)=a+b+c+2(p+q+r)$$

   also $a+b+c=p+q+r$ (6).

   Aus (6) zusammen mit (1) bzw. mit (2) bzw. mit (3) folgt $c=r$ bzw. $b=q$ bzw. $a=p$.

Aufgabe 270836:
Es sei $ABCDS$ eine gerade Pyramide mit einem Quadrat $ABCD$ als Grundfläche und S als Spitze. Der Fußpunkt der Höhe dieser Pyramide sei E, ferner sei $a=\overline{AB}$ und $h=\overline{ES}$.

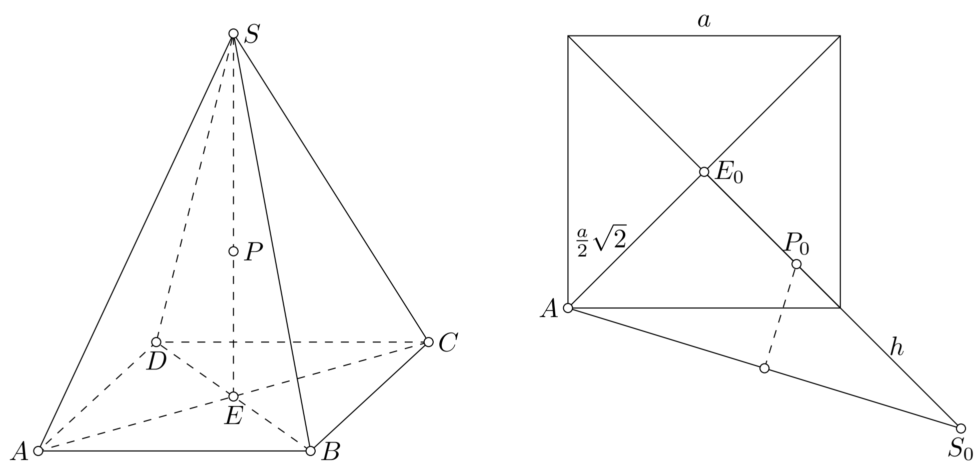
I. Zeichne ein Bild dieser Pyramide mit den Maßen $a=6$ cm, $h=8$ cm in schräger Parallelprojektion ($\alpha=45°$, $q=\frac{1}{2}$), wobei die Strecke ES in wahrer Länge erscheinen soll!

II. Auf der Strecke ES gibt es genau einen Punkt P, für den die (im Raum verlaufenden) Strecken AP und SP einander gleichlang sind.

   Leite eine Möglichkeit her, in dem nach I. hergestellten Bild der Pyramide $ABCDS$ den Bildpunkt dieses Punktes P zu konstruieren; beschreibe diese Konstruktion und führe sie durch!

III. Die Länge a sei beliebig gegeben. Ermittle diejenigen Werte h, für die sich (in der Pyramide mit diesen Maßen a, h) ein Punkt P auf ES finden lässt, der die in II. genannte Bedingung $\overline{AP}=\overline{SP}$ erfüllt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



a) und b) siehe Abbildung
b) Man kann das Dreieck AES in wahrer Größe als Dreieck $A_0E_0S_0$ konstruieren, indem man $E_0S_0=h$, $\angle A_0E_0S_0=90°$ und A_0E_0 als halbe Diagonalenlänge eines Quadrates der Seitenlänge a verwendet.
Dem Punkt P entsprechend ist dann derjenige Punkt P_0 auf E_0S_0 zu ermitteln, für den $A_0P_0=S_0P_0$ gilt. Da (in der Zeichenebene) alle Punkte X mit $A_0X=S_0X$ auf der Mittelsenkrechten von A_0S_0 liegen,

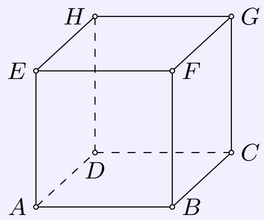
kann man P_0 konstruieren, indem man $E_0S_=$ mit dieser Mittelsenkrechten zum Schnitt bringt.

In der Pyramide $ABCDS$ liegt dann der gesuchte Punkt P so auf ES, dass $EP = E_0P_0$ gilt. Da nun auf dem in a) hergestellten Bild die Strecke ES mit ihren Teilstrecken in wahrer Länge erscheint, kann man den Bildpunkt von P konstruieren, indem man auf der Bildstrecke ES von E aus die Länge E_0P_0 abträgt.

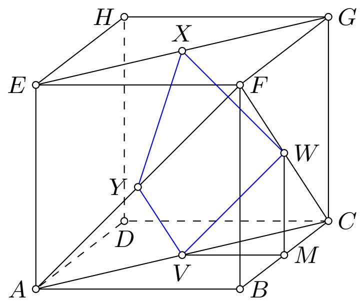
c) In der Pyramide mit den Maßen a, h lässt sich genau dann ein Punkt P auf ES finden, der $AP = SP$ erfüllt, wenn eine nach der Beschreibung in b) durchgeführte Konstruktion zu einem Schnittpunkt P_0 von E_0S_0 mit der Mittelsenkrechten von A_0S_0 führt.
Das ist genau dann der Fall, wenn $E_0S_0 \geq A_0E_0$ gilt, d. h. genau für alle $h \geq \frac{a}{2}\sqrt{2}$.

Aufgabe 290833:
In einem Würfel $ABCDEFGH$ (siehe Abbildung) seien V, W, X, Y in dieser Reihenfolge die Mittelpunkte der Seitenflächen $ABCD$, $BCGF$, $EFGH$ bzw. $ABFE$.

Beweise, dass unter dieser Voraussetzung die Strecken VW, WX, XY und YV sämtlich einander gleichlang sind!



Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Die Kantenlänge des Würfels sei a. Die Punkte V, W sind die Mittelpunkte dar Quadrate $ABCD$, $BCGF$, die die Kante BC gemeinsam haben (siehe Abbildung).
Ist M der Mittelpunkt von BC, so ist $VM \parallel AB$ und $VM = \frac{a}{2}$. Entsprechend folgt $WM \parallel FB$ und $WM = \frac{a}{2}$. Wegen $AB \perp FB$ ist folglich auch $VM \perp WM$; also ist VW die Hypotenuse in dem gleichschenklig- rechtwinkligen Dreieck VWM mit der Kathetenlänge $\frac{a}{2}$.

Für jede der Strecken WX, XY, YV folgt ebenso, dass sie die Hypotenuse in einem gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck mit der Kathetenlänge $\frac{a}{2}$ sind, da ihre Endpunkte ebenfalls die Mittelpunkte jeweils zweier Quadrate sind, die eine Würfelkante gemeinsam haben. Damit ist der verlangte Beweis geführt.

Aufgabe 310835:
Es sei $ABCDEF$ ein gerades dreiseitiges Prisma mit $AD \parallel BE \parallel CF$. Die Deckfläche DEF sei ein rechtwinkliges Dreieck mit E als Scheitel des rechten Winkels. Weiterhin sei S der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden des Dreiecks DEF.

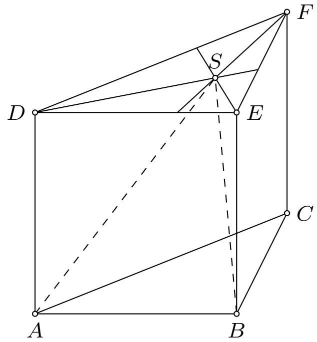
Beweise, dass aus diesen Voraussetzungen stets $\overline{SB} < \overline{SA}$ folgt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
DA ES und DS nach Voraussetzung die Winkel $\angle DEF$ und $\angle EDF$ halbieren und da im rechtwinkligen

Dreieck $\angle EDF < 90° = \angle DEF$ gilt, folgt

$$\angle EDS = \frac{1}{2}\angle EDF < \frac{1}{2}\angle DEF = \angle DES$$

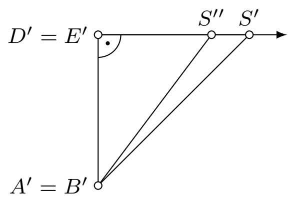
Im Dreieck DES liegt dem größeren Winkel die größere Seite gegenüber, also folgt weiter $ES < DS$. (1)
Da $ABCDEF$ ein gerades Prisma ist, stehen AD und BE auf der Deckfläche DEF senkrecht, daher gilt $\angle ADS = \angle BES = 90°$ (2).
Ferner gilt für die Seitenkanten $AD = BE$. (3)



Aus (1), (2), (3) kann die Behauptung $BS < AS$ z. B. folgendermaßen erhalten werden:
Wegen (2) und (3) kann man in einer Ebene Punkte $A' = B'$, $D' = E'$, S' und S'' so wählen, dass S' und S'' auf demselben von D' ausgehenden Strahl liegen und

$$\triangle A'D'S' \cong \triangle ADS \qquad ; \qquad \triangle B'E'S'' \cong \triangle BES \tag{4}$$

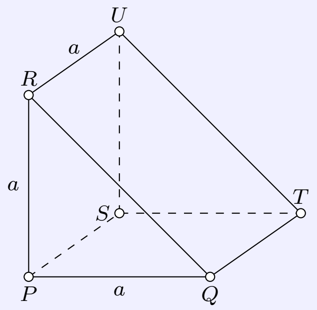
gilt (siehe Abbildung).



Wegen (1) liegt dann S'' zwischen D' und S', ferner ist $\angle A'S''E' < 90°$, also $\angle A'S''S' > 90°$, und im Dreieck $A'S''S'$ daher $\angle A'S''S'$ der größte Winkel. Daraus und aus (4) folgt

$$BS = B'S'' < A'S' = AS$$

Aufgabe 340845:

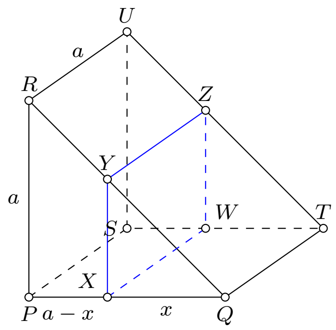


Es sei $PQRSTU$ ein gerades dreiseitiges Prisma, dessen Grundfläche ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck PQR ist (siehe Abbildung). Die Höhenlänge des Prismas sei gleich der Kathetenlänge a des Dreiecks PQR.

Gesucht ist eine Ebene E, die parallel zu einer der quadratförmigen Seitenflächen F des Prismas verläuft und das Prisma in zwei Teilkörper zerlegt, deren Volumina sich in irgend einer Reihenfolge wie 9 : 16 verhalten.

Ermittle zu gegebenen a alle diejenigen Werte, die der Abstand zwischen der Seitenfläche F und einer solchen Ebene E betragen kann!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Für jede Ebene E, die (o. B. d. A.) parallel zur Seitenfläche $F = PSUR$ verläuft und das Prisma in zwei Teilkörper $PXYRSWZU$ und $XQYWJZ$ zerlegt (siehe Abbildung), gilt:
Die Teilkörper sind Prismen, beide mit der Höhenlänge a; ihre Volumina verhalten sich also wie die Flächeninhalte ihrer Grundflächen $PXYR$ und XQY.

Wegen $\angle XQY = \angle PQR = 45°$ und $XY \parallel PR$, also $\angle QXY = \angle QPR = 90°$ (Stufenwinkel) ist auch XQY ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck.
Mit $XQ = x$ ist folglich auch $XY = x$, und XQY hat den Flächeninhalt $\frac{1}{2}x^2$; somit hat $PXYR$ den Flächeninhalt $\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}x^2$.

Daher hat die Ebene E genau dann die geforderte Eigenschaft, wenn entweder

$$(a^2 - x^2) : x^2 = 9 : 16 \qquad \text{oder} \qquad x^2 : (a^2 - x^2) = 9 : 16$$

gilt. Dies ist äquivalent zu $16a12 = 25x^2$ bzw. $25x^2 = 9a^2$ und dies wegen $a > 0$, $x > 0$ mit $x = \frac{4}{5}a$ bzw. $x = \frac{3}{5}a$.
Also haben für den gesuchten Abstand PX genau die beiden Werte

$$a - x = \frac{1}{5}a \qquad \text{und} \qquad a - x = \frac{2}{5}x$$

die geforderte Eigenschaft.

III. Kombinatorik

III.I. Kryptogramme, Zahlen in Figuren

I. Runde 1

Aufgabe V00802:
Auf das Heft von Fritz ist Wasser gespritzt. Viele Ziffern sind nicht mehr leserlich. Wie muss die wiederhergestellte Aufgabe lauten?
(Jeder Punkt in der Waagerechten bedeutet eine Ziffer.)

$$\begin{array}{cccccccccccccc}
1&5&4&.&.&.&:&.&.&7&=&.&.&. \\
.&.&.&4&&&&&&&&&& \\ \cline{1-4}
&2&6&7&.&&&&&&&&& \\
&.&.&.&.&&&&&&&&& \\ \cline{2-5}
&&.&.&.&.&&&&&&&& \\
&&.&.&.&.&&&&&&&& \\ \cline{3-6}
&&&&&-&&&&&&&&
\end{array}$$

Lösung von Steffen Polster:
Die unbekannten Ziffern seien mit Variablen a bis r belegt, die alle im Bereich von 0 bis 9 liegen müssen:

$$\begin{array}{cccccccccccccc}
1&5&4&a&b&c&:&d&e&7&=&f&g&h \\
i&j&k&4&&&&&&&&&& \\ \cline{1-4}
&2&6&7&b&&&&&&&&& \\
&l&m&n&o&&&&&&&&& \\ \cline{2-5}
&&p&q&r&c&&&&&&&& \\
&&p&q&r&c&&&&&&&& \\ \cline{3-6}
&&&&&0&&&&&&&&
\end{array}$$

Dann folgt aus $7 \cdot fgh = ijk4$, dass $f = 2$ gilt. Aus der Subtraktion $154a - ijk4 = 267$ ergeben sich dann von hinten nach vorn $a = 1$, $k = 7$, $j = 2$ und $i = 1$:

$$\begin{array}{cccccccccccccc}
1&5&4&1&b&c&:&d&e&7&=&2&g&h \\
1&2&7&4&&&&&&&&&& \\ \cline{1-4}
&2&6&7&b&&&&&&&&& \\
&l&m&n&o&&&&&&&&& \\ \cline{2-5}
&&p&q&r&c&&&&&&&& \\
&&p&q&r&c&&&&&&&& \\ \cline{3-6}
&&&&&0&&&&&&&&
\end{array}$$

Aus $1274 = de7 \cdot 2$ ergeben sich $d = 6, e = 3$. Ein Vielfaches von 637, dass unmittelbar kleiner oder gleich $267b$ ist, kann nur das Vierfache sein, womit $g = 4$ wird und $lmno = 2548$ ist. p wird somit, da größer als Null, gleich 1. q kann dann nur 2 oder 3 sein, wobei 3 entfällt, da das Vielfache (das Doppelte, $h = 2$) von 637 gleich 1274 ist.
Rückrechnen ergibt dann noch die fehlenden Stellen $b = 5$ und $c = 4$.

$$\begin{array}{cccccccccccccc}
1&5&4&1&5&4&:&6&3&7&=&2&4&2 \\
1&2&7&4&&&&&&&&&& \\ \cline{1-4}
&2&6&7&5&&&&&&&&& \\
&2&5&4&8&&&&&&&&& \\ \cline{2-5}
&&1&2&7&4&&&&&&&& \\
&&1&2&7&4&&&&&&&& \\ \cline{3-6}
&&&&&0&&&&&&&&
\end{array}$$

Aufgabe 010814:
Setze in ein „magisches Quadrat“ mit 9 Feldern die Zahlen von 3 bis 11 so ein, dass die Summe jeder Reihe, jeder Spalte und jeder Diagonalen 21 beträgt! Beginne mit dem Mittelfeld!

Begründe deine Anordnung der Zahlen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Abbildung zeigt eine mögliche Lösung:

6	11	4
5	7	9
10	3	8

Es ist günstig die mittlere Zahl der Zahlen 3 bis 11, d. h. also die 7, in das Mittelfeld zu setzen. Dadurch ist gewährleistet, dass vier Paare gebildet werden können, deren Summe die noch notwendige 14 ergeben.

Die Zahlen 11 und 3 können nicht in den Eckfeldern stehen, da es nur zwei Möglichkeiten gibt, bei denen sie in Kombination mit einer anderen Zahl 21 in der Summe ergeben: $10 + 8 + 3 = 11 + 7 + 3 = 11 + 6 + 4 = 21$.

Aufgabe 020814:
Bei der folgenden Divisionsaufgabe sind die fehlenden Ziffern zu ergänzen! Wie wurden die Ziffern ermittelt? (Begründung!)

```
* * * * * * * * *  : ? = * * * * 8 * *
* * *
----------
    * * *
    * * *
    ----------
      * * *
      * * *
      ----------
          * *
          * *
          -------
            * * *
            * * *
            ------
                0
```

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die einzige Ziffer, über die wir am Anfang verfügen, ist die 8. Man sieht, dass ihr Produkt mit dem Divisor zweistellig ist, also kann der Divisor nicht größer als 12 sein.

Da der Quotient aber zwei Stellen weniger hat als der Dividend, muss der Divisor wenigstens 11 sein. Da aber das Produkt der Einerstelle des Quotienten mit dem Divisor dreistellig ist, bleibt nur die 12 übrig – gleichzeitig muss die Einerstelle selbst 9 und die Zehnerstelle 0 sein. Das ist in der ersten Abbildung zu sehen.

```
* * * * * * * 0 8  : 12 = * * * * 8 0 9
* * *
----------
    * * *
    * * *
    ----------
      * * *
      * * *
      ----------
          * *
          9 6
          -------
            1 0 8
            1 0 8
            ------
                0
```

Dann addiert man nach oben, bekommt eine 97 in der fünften Zeile von unten, die 7 überträgt man in die Hunderterstelle des Dividenden. Die nächsthöhere Zeile ist wieder dreistellig, also 108. Also wieder nach oben addieren, die nächste Zeile ist wieder 108, usw.

Die Aufgabe lautet also $109197708 : 12 = 9099809$.

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
* & * & * & * & * & 7 & 7 & 0 & 8 & : & 12 & = & * & * & * & 9 & 8 & 0 & 9 \\
* & * & * & & & & & & & & & & & & & & & & \\
\cline{1-3}
 & & * & * & * & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & 1 & 0 & 8 & & & & & & & & & & & & & & \\
\cline{3-5}
 & & & 1 & 1 & 7 & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & 1 & 0 & 8 & & & & & & & & & & & & & \\
\cline{4-6}
 & & & & & 9 & 7 & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & 9 & 6 & & & & & & & & & & & & \\
\cline{6-7}
 & & & & & & 1 & 0 & 8 & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & 0 & 8 & & & & & & & & & & \\
\cline{7-9}
 & & & & & & & & 0 & & & & & & & & & &
\end{array}$$

Aufgabe 130812:
In $\square\square \cdot\ 9\ \square = \square\square\square$ ist jedes Kästchen $\square$ so durch eine der Ziffern 0 bis 9 zu ersetzen, dass eine richtige Gleichung entsteht.

Ermittle sämtliche Lösungen dieser Aufgabe!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, es gibt eine Lösung der Aufgabe. Dann muss das erste Kästchen durch 1 ersetzt werden; denn anderenfalls entstünde als Produkt eine vierstellige Zahl.
Ferner ist das zweite Kästchen durch 0 oder durch 1 zu ersetzen; denn sonst entstünde ebenfalls (da bereits $12 \cdot 90 = 1080$ vierstellig ist) eine vierstellige Zahl.

Wird für das zweite Kästnchen 0 eingesetzt, dann kann für das dritte Kästchen jede der Ziffern 0 bis 9 eingesetzt werden. Wird dagegen für das zweite Kästchen 1 eingesetzt, so muss das dritte Sternchen durch 0 ersetzt werden; denn sonst entstünde ein Produkt, das mindestens gleich $11 \cdot 91 = 1001$, also vierstellig, wäre.

Die somit verbliebenen Möglichkeiten für die ersten drei Kästchen führen in der Tat zu je genau einer Lösung, nämlich zu

$$\begin{array}{llll}
10 \cdot 90 = 900, & 10 \cdot 91 = 910, & 10 \cdot 92 = 920, & 10 \cdot 93 = 930, \\
10 \cdot 94 = 940, & 10 \cdot 95 = 950, & 10 \cdot 96 = 960, & 10 \cdot 97 = 970, \\
10 \cdot 98 = 980, & 10 \cdot 99 = 990, & 11 \cdot 90 = 990. &
\end{array}$$

Aufgabe 140811:

$$\begin{array}{cccccccccc}
A & B & C & - & D & E & = & A & F & G \\
 & : & & & & - & & & - & \\
 & & H & \cdot & H & A & = & & C & H \\
\hline
 & B & J & + & A & J & = & A & A & C
\end{array}$$

Ermittle sämtliche Lösungen des Kryptogramms, d. h. sämtliche Möglichkeiten, die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzen, dass alle waagerecht und senkrecht stehenden Gleichungen erfüllt sind! Dabei sollen gleiche Buchstaben gleiche und verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern bedeuten.
Hinweis: Die Aufgabe ist nicht nur durch Raten zu lösen, wie häufig in Rätselzeitschriften; sondern es sind Überlegungen zur Vollständigkeit und Richtigkeit der Lösung anzugeben.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(I) Angenommen, bei einer Angabe von Ziffern für die Buchstaben $A, ..., J$ seien die Bedingungen der Aufgabe erfüllt. Dann folgt:
Da AJ und BJ je zweistellig, also kleiner als 100 sind, ist ihre Summe kleiner als 200. Da sie dreistellig ist, hat sie die erste Ziffer $A = 1$. (1)
Da somit $AJ < 20$ und $AAC \geq 110$ ist, folgt $BJ > 90$, also $B = 9$. (2)
Wegen $A = 1$ ist $ABC < 200$; wegen $ABC : H = BJ$ gilt daher $H < 200 : 90 < 3$. Da andererseits H Anfangsziffer ist, also $H \neq 0$ gilt, und da $H \neq A = 1$ ist, folgt $H = 2$. (3)

Damit ergibt sich $CH = H \cdot HA = 2 \cdot 21 = 42$, also $C = 4$. (4)
Weiter folgt $BJ = ABC : H = 194 : 2 = 97$, also $J = 7$. (5)
Sodann erhält man $DE = HA + AJ = 21 + 17 = 38$, also $D = 3$ (6) und $E = 9$. (7)
Schließlich ergibt sich $AFG = ABC - DE = 194 - 38 = 156$, also $F = 5$ (8) und $G = 6$ (9). Daher kann nur (10):

1	9	4	$-$	3	8	$=$	1	5	6
	:				$-$			$-$	
		2	$\cdot$	2	1	$=$		4	2
	9	7	$+$	1	7	$=$	1	1	4

Lösung des Kryptogramms sein.

(II) Da die Angaben (1) bis (9) den verschiedenen Buchstaben A, ..., J verschiedene Ziffern zuordnen, die, wie aus (10) ersichtlich ist, alle waagerecht und senkrecht stehenden Aufgaben des Kryptogramms richtig lösen, hat dieses somit genau die angegebene Lösung.

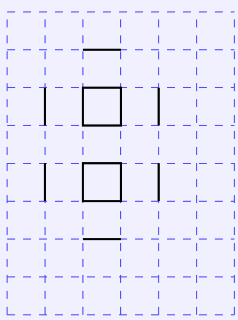
Aufgabe 200811:
Im Bild sind die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzen, dass alle waagerecht und senkrecht zu lesenden Aufgaben richtig gerechnet sind. Dabei sind gleiche Buchstaben durch gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern zu ersetzen. Eine Begründung wird nicht verlangt.

a	a	c	$-$	d	e	$=$	f	f	e
	:				$+$			$-$	
	g	b	$*$	g	f	$=$	d	b	a
	h	e	$+$	i	g	$=$	k	g	f

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

8	4	0	$-$	6	5	$=$	7	7	5
	:				$+$			$-$	
	2	4	$*$	2	5	$=$	6	4	8
	3	5	$+$	9	2	$=$	1	2	7

Aufgabe 200812:



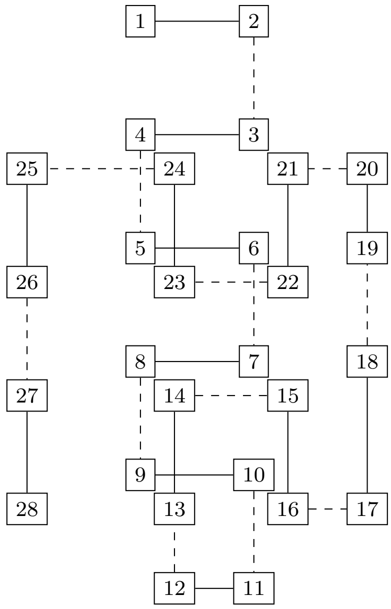
Ulrike fertigt gern Stickarbeiten an.
In der Mitte eines kleinen Deckchens möchte sie ein Muster erhalten, das im Bild zur größeren Deutlichkeit auf quadratisch angeordneten Gitterlinien gezeichnet wurde.

Ulrike will bei der Herstellung dieses Musters den Stoff bei jedem Nadelstich genau in einem Kreuzungspunkt von Gitterlinien durchstechen und dann den Faden so weiterführen, dass der Stoff beim nächsten Mal in einem Kreuzungspunkt durchstochen wird, der von dem vorangehenden mindestens den im Bild angegebenen Abstand a hat. Auf diese Weise soll das Muster mit einem einzigen Faden hergestellt werden, und dieser soll so kurz wie möglich sein.

Zeichne eine Möglichkeit für die zu durchstechenden Kreuzungspunkte und ihre Reihenfolge sowie für den Verlauf des Fadens auf Vorder- und Rückseite des Deckchens! Begründe, dass eine kürzere Fadenführung nicht möglich ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

Eine Möglichkeit für die Wahl der Reihenfolge der Kreuzungspunkte und den Fadenverlauf auf der Vorder- und Rückseite ist in der Abbildung angegeben. (gestrichelte Linie ... Faden auf der Rückseite, durchgezogene Linie ... Faden auf der Vorderseite)



Dabei beträgt die Fadenlänge $27a$. Da das verlangte Muster aus 14 Strecken der Länge a besteht, muss der Fadenverlauf auf der Rückseite mindestens 13 Strecken aufweisen. Jede dieser Strecken soll mindestens die Länge a haben.
Also kann es keine kürzere Fadenlänge als $27a$ geben, wenn die Bedingungen der Aufgabe erfüllt werden sollen.

Aufgabe 210811:

In nebenstehender Figur soll jedes Zeichen X durch eine der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 so ersetzt werden, dass in der zweiten bis neunten Zeile jede Zahl gleich dem absoluten Betrag der Differenz der beiden darüberstehenden Zahlen ist!

Gib eine derartige Ersetzung an!

```
X X X X X X X X X
 X X X X X X X X
  X X X X X X X
   X X X X X X
    X X X X X
     X X X X
      X X X
       X X
        X
```

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Beispiele:

```
3   9   8   1   9   8   1   7   6
  6   1   7   8   1   7   6   1
    5   6   1   7   6   1   5
      1   5   6   1   5   4
        4   1   5   4   1
          3   4   1   3
            1   3   2
              2   1
                1
```

```
6   1   9   8   1   9   8   1   7
  5   8   1   7   8   1   7   6
    3   7   6   1   7   6   1
      4   1   5   6   1   5
        3   4   1   5   4
          1   3   4   1
            2   1   3
              1   2
                1
```

Aufgabe 250812:
In einer Arbeitsgemeinschaft Mathematik stellen sich die Schüler gegenseitig Aufgaben. Rainer stellt folgendes Kryptogramm zur Diskussion:

$$\begin{array}{cccccccc}
* & * & * & 2 & 7 & \cdot & * & * \\
\hline
 & & * & * & * & * & * & 5 \\
 & & * & * & * & * & * & \\
\hline
 & & * & * & * & * & 9 & 5 \\
\hline
\end{array}$$

Für jedes Zeichen * soll eine Ziffer so eingesetzt werden, dass eine richtig gerechnete Aufgabe entsteht. Die eingesetzten Ziffern dürfen einander gleich oder voneinander verschieden sein. Günter ist der Meinung, dass es zu dieser Aufgabe keine Lösung gibt.

Hat er damit recht? Begründe deine Antwort!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, es gäbe eine Lösung der Aufgabe.
Dann folgte: Da das erste Teilprodukt (2. Zeile) auf 5 endet, könnte die letzte Ziffer des zweistelligen Faktors nur 5 sein, da (unter allen Produkten von 7 mit einer einstelligen Zahl) nur das Produkt $7 \cdot 5 = 35$ auf die Ziffer 5 endet.
Die vorletzte Ziffer des ersten Teilproduktes kann wegen $5 \cdot 2 + 3 = 13$ nur 3 sein. Also müsste das Addieren von 3 zur letzten Ziffer des zweiten Teilproduktes (3. Zeile) auf 9 führen; daher müsste das zweite Teilprodukt auf die Ziffer 6 enden.

Demzufolge ist die Zehnerziffer des zweistelligen Faktors gleich 8, da (unter allen Produkten von 7 mit einer einstelligen Zahl) nur das Produkt $7 \cdot 8 = 56$ auf die Ziffer 6 endet.
Damit wäre das Achtfache des fünfstelligen Faktors fünfstellig und das Fünffache (2. Zeile) der gleichen Zahl sechsstellig.

Das ist ein Widerspruch, also hat Günter recht.

Aufgabe 260811:
In das nachstehende Kryptogramm sind für die Buchstaben die Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 so einzutragen, dass für gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und für verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern stehen und dass alle angegebenen Rechenaufgaben richtig gelöst sind.

$$\begin{array}{ccccccccc}
A & B & C & - & D & B & = & E & C & C \\
 & : & & & & - & & & - & \\
 & F & G & \cdot & C & H & = & D & I & H \\
\hline
 & K & C & + & C & K & = & & D & D
\end{array}$$

a) Gib eine Eintragung an und zeige, dass sie den oben angegebenen Bedingungen genügt!

b) Untersuche, ob es außer der von dir gefundenen Eintragung weitere Möglichkeiten gibt. ist dies der Fall, dann ermittle alle Eintragungen, die den Bedingungen genügen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Um eine in (a) geforderte Eintragung (siehe unten) zu finden, kann man mit Überlegungen zu Aufgabe b) beginnen, indem man folgende Schlüsse zieht: Wenn eine Eintragung allen Bedingungen der Aufgabenstellung genügt, so folgt: Nach der Gleichung in der 1. Zeile hat die Summe aus der Einerziffer C der rechten Seite und der Einerziffer B wieder die Einerziffer C. Daher muss $B = 0$ sein.
Danach folgt durch Betrachtung der Zehnerziffern weiter $C + D = 10$.

Aus der 2. Spalte folgt $K + H = 10$ und dann weiter $2C + 1 = D$. Setzt man dies in $C + D = 10$ ein, so ergibt sich $3C + 1 = 10$, also $C = 3$ und damit $D = 7$.

Hiernach ergibt sich aus der 3. Zeile	K	=	4
und damit (wegen $K + H = 10$)	H	=	6.
Aus der 3. Spalte folgt nun	I	=	5, $E = 8$
und damit aus der 1. Zeile	A	=	9
und aus der 1. Spalte	F	=	2, $G = 1$.

Als Eintragung, die zu a) anzugeben ist, wurde so

$$\begin{array}{cccccccccc}
9 & 0 & 3 & - & 7 & 0 & = & 8 & 3 & 3 \\
 & : & & & & - & & & - & \\
 & 2 & 1 & \cdot & 3 & 6 & = & 7 & 5 & 6 \\
\hline
 & 4 & 3 & + & 3 & 4 & = & & 7 & 7
\end{array}$$

gefunden, und als Antwort zu b) hat sich ergeben, dass es keine anderen Möglichkeiten geben kann, die Bedingungen zu erfüllen. Zur vollständigen Bearbeitung der Aufgabe a) ist dann noch festzustellen, dass die gefundene Eintragung für gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und für verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern verwendet und dass bei dieser Eintragung alle angegebenen Rechenaufgaben richtig gelöst sind. Daher erfüllt genau die angegebene Eintragung alle geforderten Bedingungen.

Aufgabe 320811:
In die Felder eines 3×3-Quadrates (siehe Abbildung) sollen die Zahlen

-0,5; 1; -2; 2,5; -3,5;
4; -5; 5,5; -6,5

so eingetragen werden, dass in jedes Feld genau eine dieser Zahlen kommt und dabei in allen drei Zeilen, in allen drei Spalten und in allen beiden Diagonalen die gleiche Summe entsteht.

a) Gib eine Eintragung an, die alle diese Forderungen erfüllt!

b) Untersuche, ob es noch andere solche Eintragungen gibt, die sich nicht nur durch Drehung oder Spiegelung von einer gefundenen unterscheiden!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

-2	5,5	-5
-3,5	-0,5	2,5
4	-6,5	1

a) Die Abbildung zeigt eine Eintragung der geforderten Art.

b) Ein Beweis, dass es bis auf Drehung oder Spiegelung keine weitere gibt (zugleich ein Weg zum Auffinden einer derartigen Eintragung) ist etwa der folgende:
Die Summe aller neun einzutragenden Zahlen beträgt -4,5 . Also muss in jeder der drei Zeilen die Summe -1,5 kommen.

Dies ist dann auch die Summe für jede Spalte und jede Diagonale.
Alle Möglichkeiten, aus den vorgegebenen Zahlen dreigliedrige Summen mit dem Wert -1,5 zusammenzustellen, sind (bis auf die Reihenfolge der Summanden):

-0,5 +1 -2 ; -0,5 +2,5 -3,5 ; -0,5 +4 -5 ; -0,5 +5,5 -6,5 ;
1 +2,5 -5 ; 1 +4 -6,5 ; -2 -3,5 +4 ; -2 -5 +5,5 .

Der einzige Summand, der in vier dieser Summen vorkommt, ist -0,5. Also muss diese Zahl in das Mittelfeld kommen; denn es ist Bestandteil von vier Reihen (eine Zeile, eine Spalte, zwei Diagonalen), in denen der vorgeschriebene Summenwert erreicht werden soll.
Außer -0,5 sind 1 ; -2 ; 4 ; -5 die einzigen Summanden, die jeweils in drei der Summen vorkommen. Diese Zahlen gehören folglich in die Eckfelder; auf eine Diagonale 1 und -2 , auf die andere 4 und -5 . Die Verteilung der übrigen Zahlen folgt dann eindeutig aus der Forderung an die Zeilen- und Spaltensummen.

Aufgabe 330812:

Ermittle alle Möglichkeiten, die leeren Felder im folgenden Rechenschema so durch Ziffern zu ersetzen, dass eine richtig gerechnete Multiplikationsaufgabe entsteht!

$$\begin{array}{ccccccc}
\square & 8 & \square & \cdot & 4 & \square & 2 \\
\hline
 & & & & 7 & \square & \square \\
 & & & 3 & \square & \square & \\
 & \square & \square & \square & \square & & \\
\hline
 & \square & \square & \square & \square & \square & 0
\end{array}$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Da die Einerziffer des Produktes 0 ist und die Einerziffer des zweiten Faktors 2 ist, kann die Einerziffer

des ersten Faktors nur entweder 0 oder 5 sein.

In beiden Fällen gilt für das erste Teilprodukt:
Seine Einerziffer ist 0, beim Berechnen der Zehnerziffer ist als Übertrag aus der Einerstelle nur 0 oder 1 möglich. Diese Berechnung führt also auf $2 \cdot 8 + 0 = 16$ oder auf $2 \cdot 8 + 1 = 17$, in beiden Fällen mit dem Übertrag 1 in die Hunderterstelle.

Also hat sich, als die Hunderterziffer h des ersten Faktors mit 2 multipliziert und dann dieser Übertrag 1 addiert wurde, die angegebene Hunderterziffer 7 des ersten Teilprodukts ergeben. Aus diesem Sachverhalt $2 \cdot h + 1 = 7$ folgt $h = 3$. Damit ist insgesamt gezeigt: Der erste Faktor lautet entweder 380 oder 385.

Das zweite Teilprodukt kann somit nur dann die angegebene Hunderterziffer 3 haben, wenn die Zehnerziffer des zweiten Faktors 1, dieser also insgesamt 412 lautet. Daher können nur die Eintragungen

$$\begin{array}{ccccccc}
3 & 8 & 0 & \cdot & 4 & 2 & 2 \\
\hline
 & & & & 7 & 6 & 0 \\
 & & & 3 & 8 & 0 & \\
 & 1 & 5 & 2 & 0 & & \\
\hline
 & 1 & 5 & 6 & 5 & 6 & 0
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ccccccc}
3 & 8 & 5 & \cdot & 4 & 1 & 2 \\
\hline
 & & & & 7 & 7 & 0 \\
 & & & 3 & 8 & 5 & \\
 & 1 & 5 & 4 & 0 & & \\
\hline
 & 1 & 5 & 8 & 6 & 2 & 0
\end{array}$$

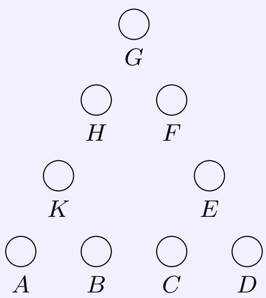
den Forderungen der Aufgabe entsprechen. Beide führen in der Tat zu richtig gerechneten Multiplikationsaufgaben.

II. Runde 2

Aufgabe 100821:
In die neun Felder A, B, C, D, E, F, G, H, K der nebenstehenden Figur sind die natürlichen Zahlen von 1 bis 9, jede genau in eines der Felder, so einzutragen, dass die Summen s_1, s_2 und s_3 der in den Feldern A, B, C, D bzw. D, E, F, G bzw. G, H, K, A stehenden Zahlen einander gleich sind.

a) Welches ist der kleinste und welches ist der größte Wert, den diese (einander gleichen) Summen unter den genannten Bedingungen annehmen können?

b) Gib je eine Möglichkeit an, wie dieser kleinste bzw. dieser größte Wert erreicht werden kann!



Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die in die Felder $A, B, C, D, E, F, G, H, K$ eingetragenen Zahlen seien $a, b, c, d, e, f, g, h, k$ genannt. Dann gilt für

$$s_1 = a + b + c + d, \quad s_2 = d + e + f + g, \quad s_3 = g + h + k + a \tag{1}$$

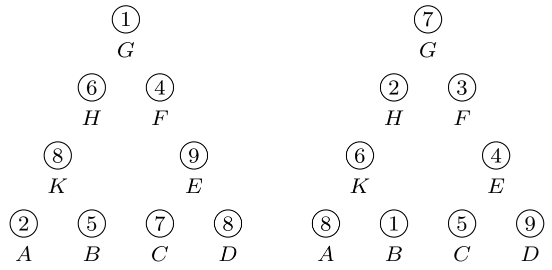
laut Aufgabenstellung $s_1 = s_2 = s_3$ (2) und

$$a + b + c + d + e + f + g + h + k = 45 \tag{3}$$

Aus (1), (2) und (3) folgt $3s_1 = s_1 + s_2 + s_3 = 45 + a + d + g$.

Daher ist $3s_1$ und folglich s_1 dann am kleinsten (bzw. am größten); wenn jeweils dasselbe für die Summe $a+d+g$ gilt. Die kleinste (bzw. größte) Summe, die aus drei verschiedenen der natürlichen Zahlen $1, ..., 9$ gebildet werden kann, ist $1 + 2 + 3 = 6$ (bzw. $7 + 8 + 9 = 24$).
Daher kann der kleinste Wert von s_1 nicht kleiner als $(45 + 6) : 3 = 17$ sein (bzw. der größte nicht größer als $(45 + 24) : 3 = 23$).

Wenn man nun noch je eine der in der Aufgabenstellung beschriebenen Eintragungen finden kann, bei denen $s_1 = 17$ (bzw. $s_1 = 23$) wird, so ist einerseits gezeigt, dass diese beiden Werte schon selbst der kleinste bzw. größte Wert von s_1 sind, und andererseits sind damit auch zwei Möglichkeiten derart gefunden, wie es in b) verlangt war.
Zwei solche Eintragungen sind z. B.:



Aufgabe 130821:
In der folgenden Aufgabe sind die Buchstaben a, b, c und das Zeichen $*$ durch jeweils eine der Ziffern 0 bis 9 so zu ersetzen, dass eine richtig gelöste und in üblicher Weise geschriebene Multiplikationsaufgabe entsteht.

$$\begin{array}{ccccccc}
a & b & c & \cdot & b & a & c \\ \hline
 & * & * & * & b & & \\
 & & & * & * & a & \\
 & & & * & * & * & * \\ \hline
 & * & * & * & * & * & *
\end{array}$$

Dabei bedeuten gleiche Buchstaben gleiche, verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern. An die Ziffern, die für die Zeichen $*$ zu setzen sind, werden keine Gleichheits- oder Verschiedenheitsforderungen gestellt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, es liege eine Eintragung der verlangten Art vor. Dann folgt:
Das Produkt aus abc und a ist dreistellig, das aus abc und b vierstellig. Also gilt $a < b$. Wäre nun $a \geq 3$, so wäre daher $b \geq 4$ und somit das Produkt aus abc und a vierstellig, im Widerspruch zur Aufgabe.
Das Produkt aus abc und a endet auf a. Wäre $a = 1$, so folgte, dass dieses Produkt auf c enden würde, im Widerspruch zu $a \neq c$. Daher und weil a als Anfangsziffer von abc nicht 0 ist, gilt $a = 2$.

Da somit das Doppelte der Zahl abc auf 2 endet, muss auch das Doppelte von c auf 2 enden. Das gilt nur für $c = 1$ oder $c = 6$. Da das Produkt aus abc und c vierstellig ist, ist $c \neq 1$. Also gilt $c = 6$.

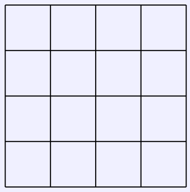
Da $246 \cdot 4 = 984$ dreistellig ist, das Produkt aus abc und b aber vierstellig sein soll, gilt $b \neq 4$. Unter den hiernach für b verbleibenden Möglichkeiten $1, 3, 5, 7, 8, 9$ erfüllt nur die Zahl 8 die Bedingung, dass das Produkt der auf 6 endenden Zahl mit b auf b endet. Daher gilt $b = 8$.

Somit kann nur die Eintragung

$$\begin{array}{ccccccc}
2 & 8 & 6 & \cdot & 2 & 8 & 6 \\ \hline
 & 2 & 2 & 8 & 8 & & \\
 & & & 5 & 7 & 2 & \\
 & & & 1 & 7 & 1 & 6 \\ \hline
 & 2 & 3 & 6 & 2 & 3 & 6
\end{array}$$

den Anforderungen genügen. Da sie eine, richtig gelöste Multiplikationsaufgabe darstellt und da $a = 2$, $b = 8$, $c = 6$ paarweise verschieden sind, erfüllt sie die Bedingungen der Aufgabe.

Aufgabe 290824:
Das 4 × 4-Felder-Quadrat im Bild soll so in vier Teile zerlegt werden, dass folgende Forderungen erfüllt sind:



(1) Jedes Teil besteht aus genau vier Feldern.

(2) Jedes Teil ist derart zusammenhängend, dass sich je zwei Mittelpunkte seiner Felder durch einen Weg miteinander verbinden lassen, der ganz in dem Teil verläuft und nur aus Strecken besteht, von denen jede zu einer Seitenkante des Quadrates parallel ist.

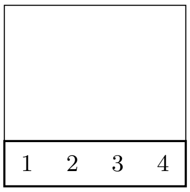
(3) Jedes Teil enthält alle vier Zahlen 1, 2, 3, 4.

Gib alle Zerlegungen an, die diese Forderungen erfüllen! Weise nach, dass es keine weiteren derartigen Zerlegungen gibt!

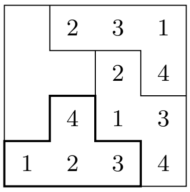
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

a4	b4	c4	d4
a3	b3	c3	d3
a2	b2	c2	d2
a1	b1	c1	d1

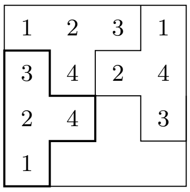
Die Felder seien wie in der Abbildung bezeichnet. Bei jeder Zerlegung der geforderten Art gilt:
Ein Teil muss das Feld a1 enthalten. In diesem Teil muss sich an a1 entweder b1 oder a2 anschließen, da in diesen beiden Feldern dieselbe Zahl 2 steht.
Die einzige Möglichkeit für ein Feld mit 3 ist dann c1 bzw. a3, und für ein Feld mit 4 gibt es nur die Möglichkeiten A, B, C, D in den entsprechenden, nachfolgenden Abbildungen A, B, C, D. Von ihnen scheidet D aus, da hierbei ein Teil die Felder a4, b4, c4 mit den Zahlen 1, 2, 3 enthalten müsste und sich daran kein Feld mit 4 anschließen könnte.



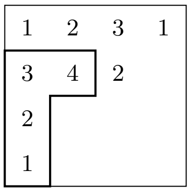
A



B

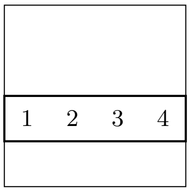


C

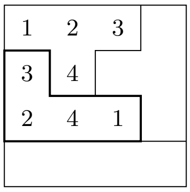


D

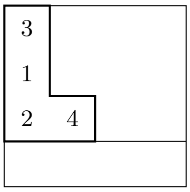
Im Fall C folgt, dass zwei weitere Teile a4, b4, c4, b3 und d4, d3, da, c3 lauten müssen, wonach als viertes Teil b1, c1, d1, c2 verbleibt.
Im Fall B folgt, dass zwei weitere Teile d1, d2, c2, c3 und d3, d4, c4, b4 lauten müssen, wonach als viertes Teil a2, a3, a4, b3 verbleibt.



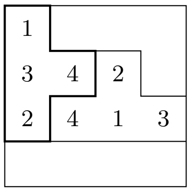
AA



AB

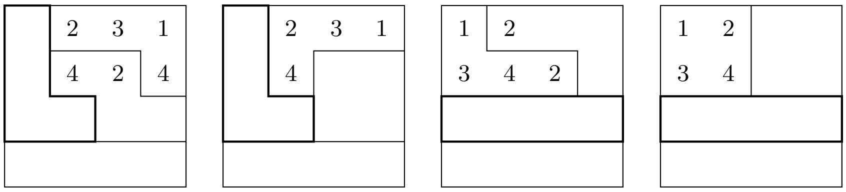


AC



AD

Im Fall A gilt: Ein Teil muss das Feld a2 enthalten. Die einzigen Möglichkeiten für ein Feld mit 1 in diesem Teil sind c2 und a4.
Gehört c2 dazu, so auch b2 mit 4, und für ein Feld mit 3 gibt es nur die Möglichkeiten AA, AB. Gehört aber a4 dazu, so auch a3 mit 3, und für ein Feld mit 4 gibt es nur die Möglichkeiten AC, AD.
Im Fall AD folgt, dass ein Teil b2, c2, d2, c3 lauten muss, wonach b4, c4, d4, d3 verbleibt.
Im Fall AB folgt, dass ein Teil a4, b4, c4, b3 lauten muss, wonach d2, d3, d4, c3 verbleibt.



ACA *ACB* *AAA* *AAB*

Im Fall AC muss ein Teil das Feld b3 enthalten, und daran muss sich entweder c3 oder b4 anschließen, da in beiden 2 steht. Schließt sich c3 an, so muss das vierte Teil b4, c4, d4, d3 lauten: ACA.
Schließt sich dagegen b4 an, so muss dieses Teil b3, b4, c4, d4 lauten: ACB.
Im Fall AA gehören a4 und b4 entweder zu verschiedenen Teilen oder nicht. Gehören sie zu verschiedenen Teilen, so muss ein Teil a4, a3, b3, c3 lauten: AAA.
Gehören sie zum gleichen Teil; so muss als Feld mit 4 darin b3 auftreten, es lautet also a4, b4, b3, a3: AAB.

Damit (und nach Oberprüfen der Forderungen auch zu den jeweils übriggebliebenen Teilen) ist bewiesen, dass die Forderungen genau von den acht Zerlegungen B, C, AB, AD, AAA, AAB, ACA, ACB erfüllt werden.

III. Runde 3

Aufgabe 030834:
In der folgenden Aufgabe sind die Buchstaben durch jeweils eine der Ziffern 0 bis 9 zu ersetzen. Gleiche Buchstaben bedeuten gleiche, verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern.

$$\begin{array}{rccccc} & \mathrm{f} & \mathrm{o} & \mathrm{r} & \mathrm{t} & \mathrm{y} \\ + & & & \mathrm{t} & \mathrm{e} & \mathrm{n} \\ + & & & \mathrm{t} & \mathrm{e} & \mathrm{n} \\ \hline & \mathrm{s} & \mathrm{i} & \mathrm{x} & \mathrm{t} & \mathrm{y} \end{array}$$

Lösung von Korinna Grabski:
Die Lösung lautet:

$$\begin{array}{rccccc} & 2 & 9 & 7 & 8 & 6 \\ + & & & 8 & 5 & 0 \\ + & & & 8 & 5 & 0 \\ \hline & 3 & 1 & 4 & 8 & 6 \end{array}$$

Zuerst erkennt man, dass n=0 ist, da die letzte Spalte addiert y ohne Übertrag ergibt. Dann ist klar, dass e=5 ist, da die vorletzte Spalte addiert t ergibt. In diesem Falle ergibt sich aber ein Übertrag von 1.

In der zweiten Spalte muss es einen Übertrag geben, damit sich die erste Spalte ändert. Die Addition in der zweite Spalte erfolgt nur mit dem Übertrag aus der dritten Spalte, der 1 oder 2 sein kann. Da 0 bereits vergeben ist, muss i damit 1 sein. Somit ist o dann 9, und es gab einen Übertrag von 2.

Jetzt müssen noch die Gleichungen $f + 1 = s$ (aus der 1. Spalte) und $r + 2 \cdot t + 1 = 20 + x$ (aus der 3. Spalte + Überträge) erfüllt werden. Gleicht man alle möglichen Zahlenkombinationen ab, bleibt nur eine mögliche übrig: f=2, s=3, r=7, t=8 und x=4.

Für y bleibt nur noch die 6 übrig.

Aufgabe 210831:

A	B	B	C	$-$	D	C	E	$=$	F	B	E	G
			$:$				$+$					$-$
		C	D	$\cdot$		H	E	$=$	J	D	A	F
	J	F	K	$+$	D	D	A	$=$	J	J	F	C

sollen die Buchstaben so durch Ziffern (0, 1, 2, ... , 9) ersetzt werden, dass alle waagerechten und senkrechten Aufgaben richtig gerechnet sind. Insbesondere soll die Ziffer 0 nicht als Anfangsziffer einer mehrstelligen Zahl auftreten. Gleiche Buchstaben sollen durch gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern ersetzt werden.

Ermittle alle Ersetzungen, die diese Forderungen erfüllen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn eine Ersetzung die gestellten Forderungen erfüllt, so folgt:
Da die Summe zweier dreistelliger Zahlen stets kleiner als 2000 ist, folgt aus der dritten Zeile

$$J = 1 \tag{1}$$

Ferner folgt: Wäre $D \leq 8$, so wäre $JFK + DDA < 200 + 900$ im Widerspruch zu $JFC \geq 1000$. Also ist

$$D = 9 \tag{2}$$

Demnach ist $B < 9$; folglich muss in der dritten Spalte die Anfangsziffer F des Minuenden sowohl um die Anfangsziffer $J = 1$ des Subtrahenden als auch um einen Übertrag 1 vermindert werden, um die Anfangsziffer $J = 1$ der Differenz zu erhalten. Daraus folgt

$$F = 3 \tag{3}$$

Aus Zeile 1 folgt, dass die Anfangsziffer A des vierstelligen Minuenden nur deshalb von der Anfangsziffer $F = 3$ der vierstelligen Differenz verschieden sein kann, weil sie um den Übertrag 1 vermindert wurde; denn der Subtrahend in dieser Zeile ist nur dreistellig. Also ist

$$A = 4 \tag{4}$$

Aus der zweiten Zeile und der Primfaktorzerlegung $1943 = 29 \cdot 67$ folgt unter Berücksichtigung von (2)

$$C = 2, \quad H = 6, \quad E = 7 \tag{5}$$

Damit ergibt die dritte Zeile

$$K = 8 \tag{6}$$

und die dritte Spalte

$$B = 0, \quad G = 5 \tag{7}$$

Folglich kann nur die in (1) bis (7) genannte Ersetzung die Forderungen der Aufgabe erfüllen.

II. Sie erfüllt diese Forderungen; denn die Buchstaben werden dabei so durch Ziffern ersetzt, dass gleiche Buchstaben durch gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern ersetzt sind und dass alle waagerechten und senkrechten Aufgaben des Schemas

4	0	0	2	$-$	9	2	7	$=$	3	0	7	5
			$:$				$+$					$-$
		2	9	$\cdot$		6	7	$=$	1	9	4	3
	1	3	8	$+$	9	9	4	$=$	1	1	3	2

richtig gerechnet sind, insbesondere 0 nicht als Anfangsziffer einer mehrstelligen Zahl auftritt.

Also erfüllt genau die Ersetzung (1) bis (7) alle Forderungen der Aufgabe.

III.II. Logik, Rätsel, Mengenlehre

I. Runde 1

Aufgabe V00805:
Peter ist ein eifriger Lottospieler. Die Gesamtsumme seiner fünf Lottozahlen beträgt 167. Die erste Zahl ergibt mit sich selbst multipliziert die vierte Zahl.
Das Doppelte der ersten Zahl ergibt die zweite Zahl, die verstellt (Einer gegen Zehner vertauscht) gleich der dritten ist. Multipliziert man die zweite mit der dritten Zahl und die zweite mit der vierten Zahl, so ergibt die halbe Differenz beider Produkte die fünfte Zahl.
Wie lauten Peters Lottozahlen?
Hinweis: Beim damals üblichen Lotto wurden 5 Zahlen aus 90 möglichen getippt.

Lösung von Steffen Polster:
Die Lottozahlen seien a, b, c, d und e. Die zweite Zahl habe die Form $b = 10x + y$ mit $1 \leq x,y \leq 9$. Nach der Aufgabenstellung ergeben sich die Gleichungen

$$a + b + c + d + e = 167 \tag{1}$$
$$a^2 = d \tag{2}$$
$$2a = b = 10x + y \tag{3}$$
$$10y + x = c \tag{4}$$
$$|b \cdot c - b \cdot d| = 2e \tag{5}$$

Da d nach (2) Quadratzahl von a ist und 90 Zahlen zur Verfügung stehen, gilt für a: $1 \leq a \leq 9$. Nach (3) muss das Doppelte von a größergleich 10 sein und da nicht nur b sondern auch c echt zweistellig sein soll, sogar $a > 10$.

Damit verbleiben die Möglichkeiten der nachfolgenden Tabelle:

a	b	c	d	e	Summe
6	12	21	36	90	173
7	14	41	49	56	167
8	16	61	64	24	173
9	18	81	81	-	

$a = 9$ entfällt, da dann $c = d$ gelten würde. Von den drei verbleibenden Fällen ergibt nur $a = 7$ als Summe der Zahlen 167. Peters Lottozahlen sind 7, 14, 41, 49 und 56.

Aufgabe V10814:
Denkaufgabe:
Fritz sagt: „Ich habe mich in meinem Leben erst dreimal geirrt."
Franz erwidert:„Dann hast du dich jetzt zum vierten Mal geirrt."
Weise nach, dass Franz mit dieser Behauptung unter allen Umständen unrecht hat!

Lösung von Steffen Polster:
1. Fall:

Fritz hat sich wirklich erst dreimal geirrt. Dann hat er sich jetzt nicht geirrt, weil er ja die Wahrheit gesprochen hat. Franz hat also in diesem Falle unrecht.

2. Fall:

Fritz hat sich bisher nicht dreimal, sondern mehr (oder weniger) als dreimal geirrt. Dann hat er sich eben zwar geirrt, aber bestimmt nicht zum vierten Mal. Infolgedessen hat Franz auch in diesem Fall (und damit in jedem Fall) unrecht.

Aufgabe 030814:
Rolf war doppelt so alt wie Inge, als er so alt war, wie sie jetzt ist. Jetzt sind beide zusammen 45 Jahre alt.
Wie alt ist jeder?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Inge sei früher x Jahre alt gewesen, dann war Rolf damals $2x$ Jahre. Heute ist Inge also $2x$ Jahre und Rolf somit $3x$ Jahre. Beide zusammen sind heute $5x$ Jahre. Daraus erhält man $x = 9$.

Folglich ist Rolf 27 Jahre und Inge 18 Jahre alt.

Aufgabe 070811:
Drei Schüler einer Klasse, Thomas (T), Rainer (R) und Bernd (B), hatten sich bei einem Sportfest für den Endkampf im Hochsprung qualifiziert und eroberten dort die ersten drei Plätze. Klaus, der in einer anderen Disziplin starten musste, erkundigte sich später bei Elke nach dem Ausgang beim Hochsprung. Diese konnte sich nicht mehr genau entsinnen und sagte:

> „Thomas wurde nicht Erster, Rainer nicht Zweiter, aber Bernd wurde Zweiter."

Später stellte sich heraus, dass Elke einmal etwas Richtiges gesagt, sich aber in den beiden anderen Fällen geirrt hatte. Außerdem ist bekannt, dass alle drei Schüler unterschiedliche Höhen übersprangen.

Welcher Schüler wurde Erster, Zweiter, Dritter?

Lösung von Manuela Kugel:
Die drei Aussagen kann man mit der Schreibweise Thomas (T), Rainer (R) und Bernd (B) wie folgt darstellen:

$$T \neq 1 \quad (1) \qquad ; \qquad R \neq 2 \quad (2) \qquad ; \qquad B = 2 \quad (3)$$

Wenn Elke genau eine Aussage korrekt und genau zwei falsch gemacht hat, dann müssen folgende drei Fälle unterschieden werden:

1.Fall: (1) ist richtig und (2), (3) sind falsch: $T \neq 1 \quad (1*) \quad ; \quad R = 2 \quad (2*) \quad ; \quad B \neq 2 \quad (3*)$
Aus (1*) und (2*) folgt (4*) $T = 3$. Daraus folgt (5*) $B = 1$. Alle drei Aussagen (1*), (2*), (3*) sind erfüllt.

2.Fall: (2) ist richtig und (1), (3) sind falsch: $T = 1 \quad (1*) \quad ; \quad R \neq 2 \quad (2*) \quad ; \quad B \neq 2 \quad (3*)$
Aus (1*), (2*) und (3*) folgt, dass niemand Zweiter sein kann. Dies ist ein Widerspruch, daher ist der Fall nicht erfüllbar.

3.Fall: (3) ist richtig und (1), (2) sind falsch: $T = 1 \quad (1*) \quad ; \quad R = 2 \quad (2*) \quad ; \quad B = 2 \quad (3*)$
Aus (2*) und (3*) folgt, dass es zwei Zweite gibt. Dies ist ein Widerspruch, daher ist der Fall nicht erfüllbar.
Demzufolge gibt es exakt eine Lösung: Bernd war Erster, Rainer Zweiter und Thomas Dritter.

Aufgabe 130813:
Beim mathematischen Wettbewerb der Schülerzeitschrift „alpha" erhielten drei Schüler einer Schule Preise. Auf die Frage nach ihren Vornamen wurden folgende sieben Antworten gegeben:

(1) Christian, Uwe, Iris	(2) Eva, Elke, Uwe	(3) Roland, Marion, Bernd
(4) Iris, Heike, Uwe	(5) Roland, Heike, Bernd	(6) Eva, Marion, Christian
(7) Christian, Eva, Elke.		

Es stellte sich heraus, dass in genau einer der Antworten alle drei Vornamen richtig, in genau zwei Antworten genau zwei Vornamen falsch und in genau drei Antworten alle drei Vornamen falsch angegeben wurden.

Ermittle die Vornamen der drei Schüler, die einen Preis erhielten!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Zunächst folgt aus der Aufgabe, dass in der restlichen Antwort genau zwei Namen richtig angegeben waren. Daher sind in einer Antwort genau dann alle drei Vornamen richtig angegeben, wenn in genau zwei weiteren Antworten genau einer dieser Vornamen und in genau einer weiteren Antwort genau zwei dieser Vornamen vorkommen.

Das trifft nicht für
(1) zu; denn in den drei Antworten (2), (6), (7) tritt je genau einer der Namen aus (1) auf,

(2) zu; denn in den drei Antworten (1), (4), (6) tritt je genau einer der Namen aus (2) auf,

(6) zu; denn in den drei Antworten (1), (2), (3) tritt je genau einer der Namen aus (6) auf,

(3) zu; denn nur in der Antwort (6) tritt genau einer der Namen aus (3) auf,

(5) zu; denn nur in der Antwort (4) tritt genau einer der Namen aus (5) auf,

(7) zu; denn nur in der Antwort (1) tritt genau einer der Namen aus (7) auf.

Daher kann nur die Antwort (4) richtig sein; die Vornamen der Preisträger lauten mithin Iris, Heike und Uwe.

Aufgabe 160812:
In einem VEB macht es sich erforderlich, für jeden der Arbeiter Arnold, Bauer, Donath, Funke, Große, Hansen, Krause und Lehmann langfristige Qualifizierungsmaßnahmen zu planen. Innerhalb von vier Wochen, und zwar in der Zeit vom 1.11.1976 (Montag) bis 27.11.1976 (Sonnabend) kann jeweils für drei Tage (entweder von Montag bis Mittwoch oder von Donnerstag bis Sonnabend) je ein Arbeiter zu einem dreitägigen Lehrgang delegiert werden.

Da die laufende Produktion nicht gefährdet werden darf, kann eine Freistellung von der Arbeit nur zu bestimmten Zeiten erfolgen:

(1) Arnold kann nicht in der dritten Woche teilnehmen.
(2) Bauer ist in der ersten Hälfte jeder Woche im Betrieb nicht entbehrlich, aber auch nicht vom 11. bis 13.11. und nicht in der zweiten Hälfte der vierten Woche.
(3) Donath kann nur in der gleichen Woche wie Lehmann gehen.
(4) Funke kann nur in der ersten oder zweiten Woche freigestellt werden.
(5) Große kann nur vom 4. bis 6.11. oder vom 18. bis 20.11.76 oder in der zweiten oder vierten Woche jeweils in der zweiten Hälfte berücksichtigt werden.
(6) Hansen kann nur in der zweiten oder dritten Woche jeweils in der zweiten Hälfte eingesetzt werden, jedoch nicht in der Woche, in der Funke zum Lehrgang geht.
(7) Krause kann nur in der ersten Woche oder vom 22. bis 24.11.76 zum Lehrgang geschickt werden.
(8) Lehmann kann nur in der ersten Hälfte jeder Woche teilnehmen.

Ermittle sämtliche Möglichkeiten, unter diesen Bedingungen die vorgesehenen Qualifizierungsmaßnahmen durchzuführen!
Gib dabei für jeden der Arbeiter die Zeit an, in der er zum Lehrgang delegiert wird!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wir fertigen eine Tabelle an, in der alle Zeiten, in denen eine Teilnahme am Lehrgang nicht erfolgen kann, durch ein x gekennzeichnet werden. Die Kenn-Nr. bezeichnet an erster Stelle die Woche, an zweiter Stelle die Wochenhälfte. Die Namen der Arbeiter werden nur mit dem Anfangsbuchstaben angegeben.

Kenn-Nr.	Zeit vom	A	B	D	F	G	H	K	L	Teilnehmer
1.1.	1.bis 3.11.		x	x	(e)	x	x			Funke
1.2.	4.bis 6.11.		(d)				x		x	Bauer
2.1.	8.bis 10.11.	(h)	x	x		x	x	x		Arnold
2.2.	11.bis 13.11.		x				(c)	x	x	Hansen
3.1.	15.bis 17.11.	x	x	x	x	x	x	x	(a)	Lehmann
3.2.	18.bis 20.11.	x		(b)	x			x	x	Donath
4.1.	22.bis 24.11.		x	x	x	x	x	(f)		Krause
4.2.	25.bis 27.11.		x		x	(g)	x	x	x	Große

Die Spalte D ergibt sich aus (8). Da L nur in der ersten Hälfte jeder Woche teilnehmen kann, kann D zu diesem Zeitpunkt nicht eingesetzt werden.

(a) Aus Zeile 3.1. ergibt sich, dass L nur vom 15. bis 17.11. eingesetzt werden kann. In Spalte L sind somit alle leeren Felder zu streichen.
(b) Damit wird nach (3) D vom 18. bis 20.11. abgeordnet. In Zeile 3.2. und Spalte D werden nun alle leeren Felder gestrichen.

Unter Fortsetzung dieses Verfahrens: Aufsuchen der einzigen Leerstelle in der jeweiligen Spalte bzw. Zeile und anschließendes Streichen der Leerstellen in der dazugehörigen Zeile bzw. Spalte ergibt sich:

(c) H nimmt vom 11. bis 13.11. teil, und für F entfällt nach (6) der 8. bis 10.11.
(d) Bauer nimmt vom 4. bis 6.11.,
(e) Funke vom 1. bis 3.11.,
(f) Krause vom 22. bis 24.11.,
(g) Große vom 25. bis 27.11.,
(h) Arnold nimmt vom 8. bis 10.11.1976 teil.

Es ist also möglich, und zwar genau auf eine Weise, in der vorgegebenen Zeit jeweils einen Arbeiter zu qualifizieren. Die Reihenfolge der Belegung ergibt sich aus der Tabelle.

Aufgabe 170813:
Der Name eines bedeutenden Mathematikers wird mit fünf Buchstaben geschrieben. Den Buchstaben A, B, C, ..., Y, Z des Alphabets seien in dieser Reihenfolge die Zahlen 1, 2, 3, ..., 25, 26 zugeordnet. Setzt man für die Buchstaben des erwähnten Namens die ihnen zugeordneten Zahlen ein, so beträgt die Summe der

(1) dem ersten und zweiten Buchstaben zugeordneten Zahlen 26,

(2) dem ersten und dritten Buchstaben zugeordneten Zahlen 17,

(3) dem ersten und vierten Buchstaben zugeordneten Zahlen 10,

(4) dem ersten und fünften Buchstaben zugeordneten Zahlen 23,

(5) allen fünf Buchstaben zugeordneten Zahlen 61.

Ermittle den Namen dieses Mathematikers!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die dem ersten Buchstaben des gesuchten Namens zugeordnete Zahl sei x. Dann lautet wegen

(1) die dem zweiten Buchstaben zugeordnete Zahl $(26 - x)$,
(2) die dem dritten Buchstaben zugeordnete Zahl $(17 - x)$,
(3) die dem vierten Buchstaben zugeordnete Zahl $(10 - x)$,
(4) die dem fünften Buchstaben zugeordnete Zahl $(23 - x)$.

Wegen (5) erhält man mithin

$$x + (26 - x) + (17 - x) + (10 - x) + (23 - x) = 61$$

woraus sich $x = 5$ ergibt.
Die den fünf Buchstaben des gesuchten Namens zugeordneten Zahlen lauten daher der Reihe nach 5, 21, 12, 5, 18. Ihre Ersetzung durch die ihnen zugeordneten Buchstaben des Alphabets ergibt:
E, U, L, E, R. Der gesuchte Name des Mathematikers ist Euler.

Aufgabe 180811:
Die FDJler Arnim, Bertram, Christian, Dieter, Ernst und Fritz waren Teilnehmer an einem 400-m-Lauf. Keine zwei von ihnen liefen zur gleichen Zeit durchs Ziel.

Vorher waren folgende drei Voraussagen über das Ergebnis des Wettkampfes gemacht worden (jeder Teilnehmer wird mit dem Anfangsbuchstaben seines Vornamens bezeichnet):

Platz	1.	2.	3.	4.	5.	6.
1. Voraussage	A	B	C	D	E	F
2. Voraussage	A	C	B	F	E	D
3. Voraussage	C	E	F	A	D	B

Nach Abschluss des Laufes zeigte sich, dass in der ersten Voraussage für genau drei Läufer die von ihnen erreichten Plätze richtig angegeben waren. Keine zwei dieser drei Plätze waren zueinander benachbart. Bei der 2. Voraussage war für keinen Läufer der erreichte Platz richtig angegeben. Bei der dritten Voraussage war für einen Platz derjenige Läufer richtig angegeben, der diesen Platz erreichte.

Gib alle Möglichkeiten für die von den Läufern unter diesen Bedingungen erreichten Platzreihenfolgen an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn eine Platzreihenfolge den Bedingungen entspricht, dann folgt für sie: A belegte nicht den 1. und E nicht den 5. Platz, da in der 2. Voraussage für keinen Läufer der erreichte Platz richtig angegeben war.

Ferner folgt: Da in der 1. Voraussage für genau drei Läufer die Plätze richtig angegeben und keine zwei dieser Plätze zueinander benachbart waren, belegte B den 2. Platz, D den 4. Platz und F den 6. Platz.
E und A belegten daher weder den 2. noch den 4. noch den 6.Platz. Damit sind für alle in der 3. Voraussage angegebenen Plätze mit Ausnahme des ersten die Läufer falsch angegeben.
Mithin belegte C den 1. Platz, da genau eine Platzangabe der 3. Voraussage richtig war. Da E infolgedessen nicht den 1. Platz belegte, verbleibt für E nur noch der 3. Platz und danach für A der 5. Platz. Daher kann nur die Reihenfolge C, B, E, D, A (*) sämtlichen Bedingungen der Aufgabe entsprechen.

II. Sie entspricht in der Tat diesen Bedingungen; denn in der 1. Voraussage sind genau für B, D, F die erreichten Plätze richtig angegeben; dies sind der 2., 4. und 6. Platz, keine zwei von ihnen sind also zueinander benachbart.
In der 2. Voraussage ist für keinen Läufer der erreichte Platz richtig angegeben; in der 3. Voraussage ist für einen Platz, nämlich den 1., derjenige Läufer (in diesem Falle C) richtig angegeben, der diesen Platz erreichte.

Also entspricht genau die Platzreihenfolge (*) allen Bedingungen der Aufgabe.

Aufgabe 220811:
Vier Männer heißen Bäcker, Fischer, Förster und Müller. Sie üben die Berufe Bäcker, Fischer, Förster und Müller aus, jeder genau einen dieser Berufe. Einer der vier Männer ist Bruder eines fünften Mannes, der Herr X genannt sei. (Er hat natürlich denselben Namen wie sein Bruder.) Über diese fünf Männer werden folgende Angaben gemacht:

(1) Auch Herr X übt genau einen Beruf aus, denselben wie Herr Bäcker.
(2) Herr X übt einen anderen Beruf aus als sein Bruder.
(3) Bei jedem der fünf Männer lautet der Anfangsbuchstabe seines Namens anders als der Anfangsbuchstabe seines Berufes.

a)Beweise, dass Herr X nach diesen Angaben nicht Bäcker heißen kann!
b) Beweise, dass sich aus den Angaben eindeutig ermitteln lässt, wie Herr X heißt und welche zwei Berufe Herr X und sein Bruder haben!
c) Beweise, dass sich aus den Angaben nicht eindeutig ermitteln lässt, welchen Beruf Herr X hat und wie derjenige der vier anderen Männer heißt, der von Beruf Bäcker ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Aus (1) und (2) folgt, dass Herr Bäcker nicht dieselbe Person sein kann wie der Bruder von Herrn X. Also kann Herr X nicht Bäcker heißen.

b) Nach (3) sind die vier Berufe so auf die vier Männer außer Herrn X verteilt, dass die beiden Berufe mit dem Anfangsbuchstaben F von Herrn Bäcker und Herrn Müller ausgeübt werden.
Nach (1) hat daher auch der Beruf von Herrn X den Anfangsbuchstaben F. Also heißt Herr X nach (3) weder Fischer noch Förster. Hieraus und aus a) folgt eindeutig: Herr X heißt Müller.

Ferner ist eindeutig ermittelt:
Herr X und sein Bruder, der somit ebenfalls Müller heißt, haben die zwei Berufe mit dem Anfangsbuchstaben F, also Fischer und Förster.
Wie die folgende Tabelle zeigt, gibt es mehr als eine Möglichkeit, alle Angaben aus der Aufgabenstellung zu erfüllen:
Es gibt noch weitere Möglichkeiten; dies wird hier nicht benötigt. In diesen beiden genannten Verteilungen kommen für Herrn X zwei verschiedene Berufe vor. Ferner ist in den beiden Verteilungen der Beruf Bäcker bei zwei Männern verschiedenen Namens angegeben.

Name	Beruf, 1. Möglichkeit	Beruf, 2. Möglichkeit
Bäcker	Fischer	Förster
Fischer	Müller	Bäcker
Förster	Bäcker	Müller
Müller	Förster	Fischer
Herr X	Fischer	Förster

Daher lässt sich weder der Beruf von Herrn X noch der Name des Bäckers eindeutig aus den Angaben ermitteln.

Aufgabe 280811:
In einem Kasten befinden sich 500 Kugellagerkugeln, die sich äußerlich nicht voneinander unterscheiden; 499 Kugeln haben untereinander die gleiche Größe und das gleiche Gewicht, eine einzige Kugel hat zwar die gleiche Größe wie jede der anderen Kugeln, ist aber leichter als sie.

Es soll nun - mit Hilfe einer Balkenwaage, nur durch wiederholte Feststellung, ob Gleichgewicht zwischen zwei gleich großen Anzahlen dieser Kugeln besteht oder nicht - die leichtere Kugel ermittelt werden.

Zeige, dass sechs Wägungen hierfür in jedem Fall ausreichen, d. h.: Wie auch die Ergebnisse einer 1., 2., ..., 5. Wägung ausfallen mögen, stets soll man die nächste Wägung so durchführen können, dass nach der 6. Wägung die leichtere Kugel eindeutig ermittelt ist.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es gilt $500 = 167 + 167 + 166$.
Legt man in einer 1. Wägung in jede Waagschale 167 Kugeln und ergibt sich Gleichgewicht, so muss die leichtere Kugel unter den restlichen 166 Kugeln sein; anderenfalls muss sie unter den 167 Kugeln auf der leichteren Waagschale sein.

Entsprechend kann man fortsetzen: Wenn man von einer Menge der Kugeln schon weiß, dass die leichtere Kugel in dieser Menge ist, so kann man diese Menge in drei Teilmengen zerlegen, von denen zwei gleich groß sind und die dritte sich von ihnen um höchstens eine Kugel unterscheidet.
Damit hat man für die nächsten Wägungen die durch Unterstreichen gekennzeichneten Möglichkeiten:

2. Wägung: $166 = 55 + 55 + 56$ oder $167 = 56 + 56 + 55$,
3. Wägung: $55 = 18 + 18 + 19$ oder $56 = 19 + 19 + 18$,
4. Wägung: $18 = 6 + 6 + 6$ oder $19 = +6 + 7$,
5. Wägung: $6 = 2 + 2 + 2$ oder $7 = 2 + 2 + 3$,
6. Wägung: $2 = 1 + 1 + 0$ oder $3 = 1 + 1 + 1$

Die 6. Wägung bei diesem Verfahren bringt somit stets das Ergebnis; dass die leichtere Kugel eindeutig feststeht. Damit ist der verlangte Nachweis geführt.

Aufgabe 300811:
Axel lässt Jörg mit einem roten, einem blauen und einem gelben Würfel würfeln. Ohne dass er die geworfenen Augenzahlen sieht, sagt er dann:

„Verdopple die Augenzahl des roten Würfels, addiere dazu die Zahl 8 und multipliziere die Summe mit 50! Merke dir das Resultat! Addiere nun zur Augenzahl des blauen Würfels die Zahl 10 und multipliziere die Summe mit 10! Bilde dann zum Schluss die Summe aus dem gerade erhaltenen Produkt, dem vorher gemerkten Resultat und der Augenzahl des gelben Würfels. Wenn Du mir diese Summe nennst, kann ich Dir von jedem der drei Würfel die geworfene Augenzahl nennen.“

a) Wähle drei mögliche Augenzahlen und führe die angegebenen Berechnungen aus!

b) Beschreibe, wie man von der am Ende der Berechnungen genannten Summe zu den Augenzahlen kommen kann! Erkläre, warum man nach deiner Beschreibung stets die richtigen Augenzahlen findet!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Werden als Augenzahlen des roten, blauen bzw. gelben Würfels etwa 4, 1 bzw. 6 gewählt, so führt die Berechnung auf $(2 - 4 + 8) \cdot 50 = 800$, $(1 + 10) \cdot 10 = 110$ und damit auf die Summe $800 + 110 + 6 = 916$.

b) Die gewählten Augenzahlen des roten, blauen bzw. gelben Wüfels sind:
Die um 5 verkleinerte Hunderterziffer, die Zehnerziffer, die Einerziffer.

Dies erklärt sich folgendermaßen: Sind r, b, g die Augenzahlen, so führt die Berechnung auf $(2 \cdot r + 8) \cdot 50 = 100r + 400$, $(b + 10) \cdot 10 = 10b + 100$ und damit auf die summe

$$100r + 400 + 10b + 100 + g = 100r + 10b + g + 500$$

Verkleinert man in dieser Summe die Hunderterziffer um 5, d. h. subtrahiert man 500, so entsteht die Zahl $100r + 10b + g$, also die Zahl mit den Ziffern r, b, g.

Aufgabe 310811:
Auf einem Tisch liegen drei Schachteln. In einer liegen zwei schwarze Kugeln, in der anderen eine schwarze und eine weiße Kugel, in der dritten zwei weiße Kugeln. Die Schachteln tragen die Aufschriften „Zwei schwarze“, „Schwarz und weiß“, „Zwei weiße“; jedoch trifft keine dieser drei Aufschriften zu.

Untersuche, ob sich bei diesen Voraussetzungen durch Herausnehmen einer einzigen Kugel, ohne dass die anderen Kugeln gesehen werden, eindeutig die Verteilung der Kugeln ermitteln lässt! Ist das der Fall, dann gib an, wie dies geschehen kann!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Da keine der Aufschriften zutrifft, gibt es nur zwei Möglichkeiten der Verteilung (man findet sie z. B., indem man mit dem Aufstellen der einzigen Möglichkeiten beginnt, die Schachtel mit der Aufschrift „Zwei schwarze“ anders als mit zwei schwarzen Kugeln zu füllen):

Aufschrift	Verteilung 1	Verteilung 2
„Zwei schwarze“	s,w	w,w
„Schwarz und weiß“	w,w	s,s
„Zwei weiße“	s,s	s,w

Nimmt man nun eine Kugel aus der Schachtel mit der Aufschrift „Schwarz und weiß“, so lässt sich aus der Farbe dieser Kugel eindeutig ermitteln:
Ist die herausgenommene Kugel schwarz, so liegt die Verteilung 2 vor, ist sie weiß, so die Verteilung 1.

II. Runde 2

Aufgabe 010823:
In der Messe eines Schiffes unserer Fischereiflotte sitzen die Mitglieder der Besatzung und sprechen über ihr Alter.

Der Steuermann sagt: „Ich bin doppelt so alt wie der jüngste Matrose und 6 Jahre älter als der Maschinist.“

Der 1. Matrose sagt: „Ich bin 4 Jahre älter als der 2. Matrose und ebenso viele Jahre älter als der jüngste Matrose, wie ich jünger bin als der Maschinist.“

Der 2. Matrose sagt: „Gestern habe ich meinen 20. Geburtstag gefeiert.“

Die Besatzung besteht aus 6 Mitgliedern, das Durchschnittsalter beträgt genau 28 Jahre.

Wie alt ist der Kapitän?

Lösung von Carsten Balleier:
Es empfiehlt sich, Bezeichnungen für das Alter der Beteiligten einzuführen:
k, s, m, m_1, m_2 und m_j seien das Alter des Kapitäns, des Steuermanns, des Maschinisten sowie des 1., 2. und des jüngsten Matrosen. Die Aussagen ergeben nun folgendes Gleichungssystem:

Steuermann:	$s = 2m_j = m + 6,$	(1)
1. Matrose:	$m_1 = m_2 + 4,$	(2)
1. Matrose:	$m_1 - m_j = m - m_1,$	(3)
2. Matrose:	$m_2 = 20,$	(4)
Durchschnitt:	$k + s + m + m_1 + m_2 + m_j = 6 \cdot 28 = 168.$	(5)

Aus (4) und (2) folgt $m_1 = 24$, daraus und aus (3) folgt $m_j = 2m_1 - m = 48 - m$, letzteres in (1) eingesetzt ergibt $m = 30$ und $s = 36$. Diese Ergebnisse schließlich in (5) eingesetzt, führt auf

$$k + 36 + 30 + 24 + 20 + 18 = 168 \qquad \Longrightarrow \qquad k = 40.$$

Der Kapitän ist somit 40 Jahre alt.

Aufgabe 050824:
Die Fischer Adam, Bauer, Christiansen und Dahse (abgekürzt A, B, C, D) wägen nach dem Fischen ihre Ausbeute und stellen fest:

(1) D fing mehr als C.

(2) A und B fingen zusammen genau so viel wie C und D zusammen.

(3) A und D fingen zusammen weniger als B und C zusammen.

Ordne die Fangergebnisse a, b, c, d der Fischer A, B, C, D der Größe nach! (Beginne mit dem größten Ergebnis!)

Lösung von Manuela Kugel:
Die Aussagen (1), (2) und (3) lassen sich folgendermaßen schreiben:

(1) $d > c$,

(2) $a + b = c + d$,

(3) $a + d < b + c$.

Aus (2) und (3) folgt (4) $b > d$,

aus (2) und (4) folgt (5) $c > a$ und

aus (4), (1) und (5) folgt schließlich $b > d > c > a$.

Aufgabe 120821:
Axel, Bernd, Conrad, Dieter, Erwin, Frank und Gerd sind im Turnunterricht hintereinander der Größe nach angetreten, wobei der Größte von ihnen vorn steht. Es ist außerdem bekannt:

(1) Dieter steht an vierter Stelle.

(2) Gerd steht unmittelbar vor Bernd und unmittelbar hinter Erwin.

(3) Axel steht unmittelbar hinter Frank.

(4) Gerd und Axel sind Zwillinge, während der Zweitgrößte der sieben Jungen keine Geschwister hat.

Schreibe die Namen der sieben in der Reihenfolge auf, in der sie angetreten sind!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Erwin kann nicht an erster Stelle stehen, weil sonst im Widerspruch zu (4) wegen (2) Gerd Zweitgrößter sein müsste.
Wegen (1) und (2) kann Erwin aber auch nicht an zweiter, dritter oder vierter Stelle stehen. Da er wegen (2) auch nicht an sechster oder siebenter Stelle stehen kann, steht er an fünfter Stelle, und wegen (2) ist dann Gerd Sechster und Bernd Siebenter.
Die Plätze 1 bis 3 können somit nur Axel, Frank und Conrad eingenommen haben, und zwar wegen (3) Frank nur an erster oder zweiter Stelle. Würde Frank an erster Stelle stehen, so müsste Axel im

Widerspruch zu (4) Zweitgrößter sein. Also steht Frank an zweiter, Axel an dritter und daher Conrad an erster Stelle.
Die Reihenfolge der sieben Jungen lautet mithin: Conrad, Frank, Axel, Dieter, Erwin, Gerd, Bernd.

Aufgabe 160821:
Für Schülerexperimente wurden genau 29 Einzelteile (Versuchsmaterialien) für genau 29 M eingekauft. Das waren Teile zu 10 M, 3 M oder 0,50 M; von jeder Sorte mindestens ein Teil. Andere Sorten kamen unter den eingekauften Teilen nicht vor.

Wie viel Teile von jeder der drei Sorten waren es insgesamt?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Da 3 oder mehr Teile zu 10 M mehr als 29 M kosten, waren es höchstens 2 Teile zu 10 M.
Angenommen, es wären genau 2 Teile zu 10 M gewesen. Dann wären genau 9 M für die beiden übrigen Sorten verblieben. Von diesen hätten 1 oder 2 Teile zu 3 M gekauft werden können, wonach 6 bzw. 3 M für die Teile zu 0,50 M geblieben wären. Das wären 12 bzw. 6 Teile zu 0,50 M und damit insgesamt 15 oder 10 Einzelteile gewesen, also zu wenig.
Folglich wurde genau 1 Teil zu 10 M gekauft, und es blieben genau 19 M für die 3-Mark-Teile und 0,50-Mark-Teile.

Angenommen, es wäre nur 1 Teil zu 3 M gekauft worden, dann wären noch 16 M geblieben, wofür 32 Teile zu 0,50 M zu kaufen waren, insgesamt also 34 Teile, im Widerspruch zur Aufgabe.
Erhöht man nun die Anzahl der Teile zu 3 M immer um 1, so verringert sich, wenn der Gesamtpreis gleich bleiben soll, die Anzahl der Teile zu 0,50 M dabei jeweils um 6, wobei die Gesamtzahl der Teile um genau 5 abnimmt. Die einzige Möglichkeit, auf diese Weise 29 Teile zu erreichen, besteht folglich darin, dass man die Anzahl der Teile zu 3 M um genau 1 erhöht und damit die Anzahl der Teile zu 0,50 M um genau 6 verringert. Also wurden insgesamt genau 1 Teil zu 10 M, genau 2 Teile zu 3 M und genau 26 Teile zu 0,50 M gekauft.

Aufgabe 170821:
Vier Schüler, Anja, Birgit, Christoph und Dirk, spielten folgendes Spiel, dessen Regeln ihnen allen bekannt sind:

Einer von ihnen, z. B. Dirk, verlässt das Zimmer. Nun nimmt eine der Personen Anja, Birgit oder Christoph einen vereinbarten Gegenstand, etwa einen Fingerhut, an sich, und Dirk wird wieder hereingerufen. Er erhält dann von den Mitspielern Aussagen mitgeteilt, wobei genau derjenige eine falsche Aussage macht, der den Fingerhut bei sich hat.

Bei einer Durchführung dieses Spiels lauteten die Aussagen:

Anja:	Ich habe den Fingerhut nicht, und Christoph hat den Fingerhut.
Birgit:	Anja hat den Fingerhut, und ich habe den Fingerhut nicht.
Christoph:	Ich habe den Fingerhut nicht.

Untersuche, ob mit Hilfe dieser Aussagen eindeutig feststeht, welcher Spieler den Fingerhut genommen hatte! Ist dies der Fall, so ermittle diesen Spieler!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(1) Angenommen, Christoph hätte den Fingerhut, dann wäre Birgits Aussage falsch, im Widerspruch zu den Spielregeln. Deshalb hat Christoph den Fingerhut nicht.

(2) Angenommen, Birgit hätte den Fingerhut, dann wäre Anjas Aussage falsch, im Widerspruch zu den Spielregeln. Deshalb hat Birgit den Fingerhut auch nicht.

(3) Folglich kann höchstens Anja den Fingerhut haben. Tatsächlich ist dann Anjas Aussage falsch, und die Aussagen vor. Birgit und Christoph sind wahr.

Also steht eindeutig fest, dass Anja den Fingerhut an sich genommen hatte.

Aufgabe 180821:
Über vier Schüler mit den Vornamen Alfred, Benno, Detlev, Egon und den Nachnamen Ampler, Baumbach, Dürer, Erbe werden folgende Angaben gemacht:

(1) Egon ist jünger als Benno, aber älter als Alfred.

(2) Detlev ist älter als Alfred, aber jünger als Benno.

(3) Der Schüler Dürer ist älter als der Schüler Erbe, aber jünger als der Schüler Ampler.

(4) Der Schüler Baumbach ist älter als der Schüler Dürer, aber jünger als Benno.

(5) Genau einer dieser vier Schüler hat einen Vornamen, der mit dem gleichen Buchstaben beginnt wie sein Familienname.

Untersuche, ob sich aus diesen Angaben eindeutige Antworten auf die folgenden Fragen (a), (b) beweisen lassen! Wenn dies der Fall ist, ermittle die Antworten!

(a) Wie heißen die vier Schüler mit Vor- und Familiennamen?

(b) Wie lautet die Reihenfolge der Schüler nach ihrem Alter, beginnend mit dem jüngsten Schüler?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Das Alter der vier Schüler Alfred, Benno, Detlev und Egon sei in dieser Reihenfolge mit a, b, d, e bezeichnet; das Alter der Schüler Ampler, Baumbach, Dürer, Erbe sei in dieser Reihenfolge mit A, B, D, E bezeichnet.

Wenn die Angaben (1) bis (5) zutreffen, so folgt:

aus (1): $a < e < b$, aus (2): $a < d < b$ aus (3): $E < D < A$, aus (4): $D < B < b$

Aus (1) und (2) folgt, dass Alfred der jüngste, Benno der älteste Schüler ist. Aus (3) und (4) folgt, dass Erbe der jüngste, Dürer der zweitjüngste Schüler ist.

Der jüngste Schüler heißt folglich Alfred Erbe. Da ferner Benno der älteste Schüler ist und er nicht Erbe oder Dürer und wegen (4) nicht Baumbach heißen kann, muss er Ampler heißen.
Aus (5) folgt nunmehr: Ein Schüler heißt Detlev Dürer. Somit heißt der vierte Schüler Egon Baumbach. Daher können nur die Namen Alfred Erbe, Detlev Dürer, Egon Baumbach und Benno Ampler, in dieser Reihenfolge aufgezählt, die Fragen (a), (b) in Übereinstimmung mit den Angaben (1) bis (5) beantworten.

Umgekehrt zeigt sich: Wenn diese Aufzählung die Namen und die Reihenfolge der Schüler nach ihrem Alter angibt, so treffen die Angaben (1) bis (5) zu. Also sind mit dieser Aufzählung die eindeutigen Antworten auf die Fragen (a), (b) ermittelt.

Aufgabe 220821:
Vor zwei Jahren unterhielten sich Anke, Birgit und Christine über ihre Reiseziele in den Sommerferien 1981 und 1982. In jedem Jahr wollte eine von ihnen an die Ostsee fahren, die andere in die Sächsische Schweiz und die dritte in den Thüringer Wald. Für beide Jahre wurden folgende Aussagen gemacht

(1) Anke fährt an die Ostsee.

(2) Christine fährt in den Thüringer Wald oder Anke fährt in die Sächsische Schweiz.

Später stellte sich heraus: Für das Jahr 1981 ist Aussage (1) wahr und Aussage (2) falsch; für das Jahr 1982 ist Aussage (1) falsch und Aussage (2) wahr.
Untersuche

a) für das Jahr 1981 b) für das Jahr 1982,

für welche der drei Schülerinnen sich damit das Reiseziel eindeutig ermitteln lässt und für welche nicht! Nenne alle dabei eindeutig zu ermittelnden Reiseziele!

Hinweis: Eine Aussage der Form „A oder B“ ist genau dann falsch, wenn sowohl A als auch B falsche Aussagen sind.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Für das Jahr 1981 gilt: Da (1) wahr ist, folgt: Anke fährt an die Ostsee. (3)
Da (2) falsch ist, folgt: Christine fährt nicht in den Thüringer Wald. Daraus und aus (3) ergibt sich: Christine fährt in die Sächsische Schweiz. (4)
Nach (3) und (4) verbleibt nur noch: Birgit fährt in den Thüringer Wald. (5)
Damit ist bewiesen, dass sich für 1981 die Reiseziele aller drei Schülerinnen eindeutig ermitteln lassen. Sie lauten wie in (3), (4),(5) angegeben.

b) Für das Jahr 1982 gilt:
Da (1) falsch ist, fährt Anke nicht an die Ostsee. Würde sie in den Thüringer Wald fahren, so könnte Christine nicht dorthin und Anke nicht in die Sächsische Schweiz fahren, also wäre (2) dann falsch.
Damit ist gezeigt: Anke fährt in die Sächsische Schweiz. (6)

Bereits mit (6) ist erreicht, dass (1) falsch und (2) wahr ist. Dies gilt daher bei jeder der beiden nach (6) noch möglichen Verteilungen der Reiseziele (Birgit an die Ostsee, Christine in den Thüringer Wald oder umgekehrt). Damit ist für 1982 bewiesen:
Die Reiseziele von Birgit und Christine lassen sich nicht eindeutig ermitteln; das Reiseziel von Anke lässt sich dagegen eindeutig ermitteln, es lautet, wie in (6) angegeben.

Aufgabe 220822:
In einer Umfrage beantworteten 50 Pioniere einer Schule die folgenden Fragen auf einer Fragenliste:

		Ja	Nein
(A)	Hast du in diesem Sommer an einem Betriebsferienlager teilgenommen?	o	o
(B)	Hast du in diesem Sommer an der Feriengestaltung der Schule teilgenommen?	o	o
(C)	Warst du in diesem Sommer mit deinen Eltern verreist?	o	o

Anschließend wurden die Antworten mehrfach ausgezählt. In einer ersten Zählung wurde bei allen Fragenlisten nur auf die Frage (A) geachtet. Diese hatten genau 20 Pioniere mit Ja beantwortet. Dann wurde in einer zweiten Zählung bei allen 50 Listen nur auf Frage (B) geachtet, usw., wie in der folgenden Tabelle angegeben:

Zählung Nr.	Gezählte Antworten	Erhaltene Anzahl
1	(A) Ja	20
2	(B) Ja	25
3	(C) Ja	30
4	(A) Ja und (B) Ja	8
5	(B) Ja und (C) Ja	12
6	(A) Ja und (C) Ja	10
7	(a) Ja und (B) Ja und (C) Ja	3

Aus diesen Zählungsergebnissen soll die Anzahl derjenigen Pioniere ermittelt werden, die

a) an keiner der drei Arten der Feriengestaltung teilnahmen,

b) an genau einer dieser Arten teilnahmen,

c) an einem Betriebsferienlager, aber nicht an der Feriengestaltung der Schule teilnahmen,

d) mindestens eine der Möglichkeiten nutzten, an einem Betriebsferienlager teilzunehmen oder mit den Eltern zu verreisen.

Trage die gesuchten Antworten in folgende Tabelle ein! Nenne die Rechnungen oder Überlegungen, mit denen du deine Antworten begründest!

Aufgabe	Gesuchte Antworten	Erhaltene Anzahl
a)	Keinmal Ja	
b)	Genau einmal Ja	
c)	(A) Ja und (B) Nein	
d)	(A) Ja oder (C) Ja oder beides	

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die gesuchten Eintragungen können durch folgende Rechenschritte gefunden werden:

Angabe Nr.	Gesuchte Antworten	Folgerung aus Angaben Nr.	Berechnung der Anzahl
8	(A)Ja, (B)Ja, (C)Nein	4,7	8-3 = 5
9	(A)Ja, (B)Nein, (C)Ja	6,7	10-3 = 7
10	(A)Nein, (B)Ja, (C)Ja	5,7	12-3 = 9
11	(A)Ja, (B)Nein, (C)Nein	1,7,8,9	20-3-5-7 = 5
12	(A)Nein, (B)Ja, (C)Nein	2,7,8,10	25-3-5-9 = 8
13	(A)Nein, (B)Nein, (C)Ja	3,7,9,10	30-3-7-9 = 11
Aufgabe			
a)	Keinmal Ja	7,...,13	50-3-5-7-9-5-8-11=2
b)	Genau einmal Ja	11,12,13	5+8+11 = 24
c)	(A)Ja und (B)Nein	9,11	7+5 = 12
d)	(A)Ja oder (C)Ja oder beides	7,...,11,13	3+5+7+9+5+11 = 40

Aufgabe 260821:
In der Kleinstadt A hat der Fleischer jeden Montag geschlossen, das Haushaltswarengeschäft jeden Dienstag und der Schuhmacher jeden Donnerstag. Der Optiker hat nur montags, mittwochs und freitags geöffnet. Am Sonntag sind alle Geschäfte geschlossen.

Eines Tages gingen die Freundinnen Anja, Ilka, Katrin und Susann, jede in ein anderes dieser vier Geschäfte. Als sie sich unterwegs trafen, sagten sie:

(1) Anja: „Susann und ich wollten eigentlich schon eher in dieser Woche einkaufen gehen, aber da gab es keinen Tag, an dem wir beide hätten unsere Besorgungen machen können.“

(2) Ilka: „Ich wollte heute eigentlich nicht einkaufen, aber morgen hat das Geschäft geschlossen, in dem ich einkaufen will.“

(3) Katrin: „Ich hätte auch schon gestern oder vorgestern alles besorgen können.“

(4) Susann: „Ich hätte ebenso gestern oder auch morgen meinen Einkauf erledigen können.“

Untersuche, ob diese Angaben miteinander vereinbar sind und ob dann aus ihnen eindeutig folgt,

(a) wer von den genannten Mädchen in welchem der angegebenen Geschäfte war.

(b) an welchem Wochentag das Gespräch stattgefunden hat!

Ist dies der Fall, dann gib die entsprechenden Antworten auf die Fragen (a) und (b)!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wie der nachfolgende Öffnungsplan zeigt, muss das Gespräch der Freundinnen entweder am Mittwoch oder am Freitag stattgefunden haben, da nur an diesen beiden Tagen die vier genannten Geschäfte gleichzeitig geöffnet hatten (x bedeutet geschlossen):

	Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa	So
Fleischer	x						x
Haushaltwaren		x					x
Schuhmacher				x			x
Optiker		x		x		x	x

Wegen (1) kann das Gespräch nicht an einem Freitag stattgefunden haben, denn alle Besorgungen, die Anja und Susann am Freitag hätten machen können, wären auch am Mittwoch zu erledigen gewesen. Also fand das Gespräch an einem Mittwoch statt, und es folgt weiter:
Wegen (4) muss Susann zum Fleischer gegangen sein, wegen (3) Katrin zum Schuhmacher. Hiernach und wegen (2) war Ilka beim Optiker und folglich Anja im Haushaltwarengeschäft, und bei dieser Verteilung ist auch (1) erfüllt.

Daher sind die Angaben miteinander vereinbar, und aus ihnen folgt eindeutig:
(a) Anja war im Haushaltwarengeschäft, Ilka beim Optiker, Katrin beim Schuhmacher, Susann beim Fleischer.
(b) Das Gespräch fand am Mittwoch statt.

Aufgabe 290821:
Über die Anzahl x der Schüler einer 8. Klasse ist folgendes bekannt:

(1) Die Zahl x ist eine Primzahl.

(2) Genau 9 Schüler dieser Klasse können Schlittschuh laufen.

(3) Genau 12 Schüler dieser Klasse können Ski laufen.

(4) Genau 4 Schüler dieser Klasse können weder Schlittschuh laufen noch Ski laufen.

Untersuche, ob sich aus diesen Angaben die Schülerzahl x eindeutig ermitteln lässt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Aus diesen Angaben lässt sich die Schülerzahl x nicht eindeutig ermitteln. Es gibt beispielsweise die folgenden beiden Möglichkeiten:

1. Möglichkeit:
- nur Schlittschuhlaufen kann genau 1 Schüler,
- nur Skilaufen können genau 4 Schüler,
- beide Sportarten beherrschen genau 8 Schüler,
- keine der beiden Sportarten beherrschen genau 4 Schüler.

In der Tat erfüllt diese Möglichkeit wegen $1+4+8+4 = 17$ die Aussage (1), wegen $1+8 = 9$ die Aussage (2), wegen $4+8 = 12$ die Aussage (3) sowie wegen der vierten Angabe auch (4).

2. Möglichkeit:
- nur Schlittschuhlaufen können genau 3 Schüler,

- nur Skilaufen können genau 6 Schüler,
- beide Sportarten beherrschen genau 6 Schüler,
- keine der beiden Sportarten beherrschen genau 4 Schüler.

In der Tat erfüllt auch diese Möglichkeit die Bedingungen (1) bis (4).

Aufgabe 340822:
Aus den Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 sollen zwei Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ so gebildet werden, dass jede Ziffer in den Zifferndarstellungen der vier natürlichen Zahlen a, b, c, d insgesamt genau einmal verwendet wird. Für die so gebildeten Brüche soll $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=1$ gelten. In dem ersten der beiden Brüche soll $a=13$ und $b=26$ gewählt werden.

Beweise, dass es genau eine Möglichkeit gibt, den Zähler c und den Nenner d des zweiten Bruches so zu wählen, dass alle genannten Bedingungen erfüllt sind! Gib diesen zweiten Bruch an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn die Bedingungen der Aufgabe von zwei natürlichen Zahlen c und d erfüllt werden, so folgt:
Wegen $a=13$ und $b=26$ folgt aus $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=1$, dass $\frac{c}{d}=\frac{1}{2}$, also $2-c=d$ (1) gilt.

Ferner folgt, dass in den Zifferndarstellungen von c und d nur die Ziffern 0, 4, 5, 7, 8, 9 vorkommen, jede insgesamt genau einmal.
Wäre c höchstens zweistellig, also d mindestens vierstellig, so wäre $c\leq 99$, $d\geq 1000$; wäre c mindestens vierstellig, d höchstens zweistellig, so wäre $c\geq 1000$, $d\leq 99$; beides im Widerspruch zu (1).
Also sind c und d beide dreistellig.

Die Hunderterziffer von c ist 4, da sonst d wegen (1) vierstellig wäre. Die Einerziffer von d ist wegen (1) gerade, also entweder 0 oder 8. Wäre sie 8, so müsste c wegen (1) (und da die 4 schon als Hunderterziffer von c vergeben ist) die Einerziffer 9 haben. Damit aber wäre die Hunderterziffer von d weder 8 noch 9, was wegen der Hunderterziffer 4 von c im Widerspruch zu (1) steht.

Daher hat d die Einerziffer 0 und folglich c die Einerziffer 5. Die Zehnerziffer von c ist weder 7 noch 9; denn wegen (1), also $2\cdot 475=950$ bzw. $2\cdot 495=980$, käme die Ziffer 5 bzw. 9 zweimal vor.
Hiernach und wegen (1) verbleibt nur die Möglichkeit $c=485$, $d=970$. (2)

II. Diese beiden Zahlen haben die geforderten Ziffern, und sie erfüllen auch (1), also $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=1$.
Mit I. und II. ist gezeigt, dass genau der mit den Zahlen (2) gebildete Bruch $\frac{485}{970}$ die Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

III. Runden 3 & 4

Aufgabe V10833:
In einem Eisenbahnabteil sitzen vier Schüler, die von einem Ferienaufenthalt zurückkehren. Ein Schüler wohnt in Berlin, einer in Dresden, einer in Leipzig und einer in Jena. Ihre Vornamen sind Anton, Bruno, Conrad und Dietrich. (Die Reihenfolge der Namen entspricht nicht der Reihenfolge der Wohnorte.)
Aus Gesprächsfetzen entnehmen wir folgendes:
a) Zwei Schüler, und zwar Anton und der Berliner, sind begeisterte Fußballspieler.
b) Zwei Schüler, und zwar Conrad und der Dresdner, spielen nicht Fußball.
c) Dietrich ist älter als der Berliner.
d) Conrad ist jünger als der Jenaer.
Wo wohnen Anton, Bruno, Conrad und Dietrich?
Wer von ihnen sind die Fußballspieler?
Wie hast du die Lösung gefunden?

Lösung von Steffen Polster:
Nach a) und b) sind Anton oder Conrad kein Berliner oder Dresdner.

	Berlin	Dresden	Leipzig	Jena
Anton	-	-		
Bruno				
Conrad	-	-		
Dietrich				

Nach c) ist Dietrich kein Berliner, so dass Bruno Berliner sein muss sowie Dietrich aus Dresden kommt.

	Berlin	Dresden	Leipzig	Jena
Anton	-	-		
Bruno	$\oplus$	-	-	-
Conrad	-	-		
Dietrich	-	$\oplus$	-	-

Nach d) ist Conrad als der Jenenser, muss also aus Leipzig kommen. Anton ist dann aus Jena.

	Berlin	Dresden	Leipzig	Jena
Anton	-	-	-	$\oplus$
Bruno	$\oplus$	-	-	-
Conrad	-	-	$\oplus$	-
Dietrich	-	$\oplus$	-	-

Anton wohnt in Jena, Bruno in Berlin, Conrad in Leipzig und Dietrich in Dresden. Anton und Bruno sind die Fußballspieler.

Aufgabe 010834:
Wer hat den Ring?

Ruth, Fritz, Ewald, Brigitte und Erika spielen ein Pfänderspiel. Ruth verlässt das Zimmer; inzwischen versteckt eines der anderen Kinder einen Ring bei sich. Ruth kehrt zurück und soll feststellen, wer den Ring hat. Nun macht jedes Kind drei Aussagen. Von diesen Aussagen sind zwei richtig und eine falsch. Ruth soll auf Grund dieser Aussagen, ohne zu raten, finden, wer den Ring hat.

Ewald:	1.	Ich habe den Ring nicht.
	2.	Fritz hat den Ring.
	3.	Ich habe dieses Spiel schon oft gespielt.
Fritz:	1.	Ich habe den Ring nicht.
	2.	Ewald irrt sich, wenn er meint, dass ich den Ring habe.
	3.	Erika hat den Ring.

Jetzt unterbricht Ruth und sagt: „Ich muss nachdenken, vielleicht finde ich jetzt schon, wer den Ring hat.“ Und nach wenigen Minuten sagt Ruth, wer den Ring hat. Wie konnte sie das feststellen?

Lösung von Carsten Balleier:
Die Idee ist herauszufinden, welche Aussagen von Ewald und Fritz sich widersprechen, da dann eine davon falsch sein muss.

Da Fritz’ Aussagen 1 und 2 gleichbedeutend sind, können sie nur gleichzeitig wahr oder falsch sein. Letzteres ist ausgeschlossen, da Fritz nur eine falsche Aussage macht. Also ist seine 3. Aussage falsch; weder er noch Erika haben den Ring.
Ewalds 2. Aussage widerspricht Fritz’ erster (die wahr ist), also ist sie falsch.

Also muss Ewalds 1. Aussage stimmen, es bleibt nur noch Brigitte übrig. Folglich hat sie den Ring.

Aufgabe 040833:
Von den 31 Schülern einer 4. Klasse können 21 schwimmen, 24 Rad fahren und 19 Schlittschuh laufen. Für einen Wettkampf werden Schüler gebraucht, die

a) schwimmen und Rad fahren,

b) schwimmen und Schlittschuh laufen,

c) Rad fahren und Schlittschuh laufen,

d) schwimmen und Rad fahren und Schlittschuh laufen können.

Wie viel Schüler der Klasse stehen jeweils bei a), b), c) und d) mindestens, wie viel höchstens zur Verfügung?

Lösung von Manuela Kugel:
Maximal stehen zur Verfügung

a) 21, da es nur 21 Schwimmer gibt, b) 19, da es nur 19 Schlittschuhläufer gibt, c) 19, da es nur 19 Schlittschuhläufer gibt, d) 19, da es nur 19 Schlittschuhläufer gibt.

Minimal stehen zur Verfügung
a) 14 wegen 24+21-31=14, b) 9 wegen 21+19-31=9,
c) 12 wegen 24+19-31=12, d) 2 wegen 24+21+19-31-31=2.

Aufgabe 080832:
Von fünf äußerlich gleichen Kugeln haben genau drei gleiches Gewicht; die beiden übrigen, die untereinander gleich schwer sind, haben jeweils ein anderes Gewicht als jede der erstgenannten.

Beweise, dass in jedem Fall (d. h. bei jedem möglichen Resultat der durchgeführten Wägungen) drei Wägungen ausreichen, um die beiden letztgenannten Kugeln herauszufinden, wenn als Hilfsmittel nur eine zweischalige Waage ohne Wägestücke zur Verfügung steht!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Zum Beweis wird ein Verfahren angegeben, das nach drei Wägungen sicher zum Ziel führt:
Wir bezeichnen die Kugeln mit $K_1 ... K_5$.
Bei der ersten Wägung lege man je eine Kugel, etwa K_1 und K_2, auf eine Waagschale, bei der 2. Wägung nehme man zwei weitere, bisher nicht gewogene Kugeln, etwa K_3 und K_4. Dann können die ersten beiden Wägungen folgende Resultate haben (in der Übersicht ist Gleichgewicht mit Gl. und nicht Gleichgewicht mit n. Gl. symbolisiert):

	1. Wägung	2. Wägung
a)	Gl.	Gl.
b)	Gl.	n. Gl.
c)	n. Gl.	Gl.
d)	n. Gl.	n. Gl.

Im Fall a) vergleiche man in der 3. Wägung eine Kugel der 1. Wägung, etwa K_1 mit der 5. Kugel. Herrscht Gleichgewicht, so sind K_3 und K_4 die gesuchten Kugeln, andernfalls sind es K_1 und K_2.

Die Fälle b) und c) lassen sich durch Umnummerierung aufeinander zurückführen. Es genügt also, einen dieser Fälle zu betrachten, es sei der Fall b).
Man vergleiche in der dritten Wägung eine der beiden Kugeln K_1 oder K_2 mit einer der Kugeln K_3 oder K_4.
Es werde z. B. K_1 mit K_3 verglichen. Herrscht Gleichgewicht, so sind K_4 und K_5 die gesuchten Kugeln, herrscht kein Gleichgewicht, so sind es K_3 und K_5.

Im Fall d) vergleiche man schließlich eine der gewogenen Kugeln, etwa K_1, mit der 5. Kugel. Es sei o. B. d. A. die Kugel K_1 leichter als K_2. Ebenso sei o. B. d. A. K_3 leichter als K_4.
Herrscht nun beim Vergleich mit K_5 Gleichgewicht, so sind K_2 und K_4 die gesuchten Kugeln; herrscht kein Gleichgewicht, so sind es K_1 und K_3. In jedem Falle (und andere Fälle gibt es nicht) hat man die beiden gesuchten Kugeln mit drei Wägungen ermittelt.

Aufgabe 100835:
Fritz behauptet seinen Mitschülern gegenüber:
(1) In unserem Haus wohnen mehr Erwachsene als Kinder.
(2) Es gibt in unserem Haus mehr Jungen als Mädchen.
(3) Jeder der Jungen hat wenigstens eine Schwester.
(4) Kinderlose Ehepaare wohnen nicht in unserem Haus.
(5) Alle in unserem Haus wohnenden Ehepaare haben ausschließlich schulpflichtige Kinder.
(6) Außer den Ehepaaren mit ihren schulpflichtigen Kindern wohnt niemand in unserem Haus.
Brigitte entgegnet darauf: „Diese Aussagen können aber nicht sämtlich wahr sein."

Untersuche, ob Brigitte mit diesem Einwand recht hat!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, die Aussagen (1), (2), (3), (4), (5), (6) wären sämtlich wahr. Dann hätte wegen (3) und (4) jedes Ehepaar wenigstens 1 Mädchen.
Wegen (1), (4), (5) und (6) müsste folglich die Anzahl der Jungen kleiner sein als die Anzahl der Ehepaare und damit erst recht kleiner als die Anzahl der Mädchen, im Widerspruch zu (2).
Brigitte hat also mit ihrem Einwand recht.

Aufgabe 120831:
Die FDJ-Gruppe der Klasse 8a einer Oberschule führte einen Sportwettkampf durch. Vor Beginn des Wettkampfes sollte jeder Teilnehmer einen Tipp darüber abgeben, welche drei Teilnehmer in welcher Reihenfolge das beste Gesamtergebnis erzielen würden.

Als man die Tippscheine auswerte, stellte sich heraus, dass ausschließlich Annekatrin, Bernd und Claudia auf den ersten drei Plätzen erwartet wurden. Dabei wurde die Reihenfolge Bernd - Annekatrin - Claudia genau fünfmal getippt. Außerdem wurden noch die Reihenfolge Bernd - Claudia - Annekatrin und Claudia - Annekatrin - Bernd erwartet, und zwar einer dieser beiden Tipps genau vier- und der andere genau dreimal. Eine andere Reihenfolge wurde nicht getippt.

Für die Voraussagen wurden Punkte vergeben, und zwar für jeden richtig vorausgesagten Platz ein Punkt. Maximal waren also drei Punkte mit einem Tippschein erreichbar. Die Summe aller so vergebenen Punkte betrug 17. Bernd gewann, entgegen den meisten Voraussagen, nicht den Wettkampf, aber die ersten drei Plätze wurden tatsächlich von Annekatrin, Bernd und Claudia belegt.

Wer gewann den Wettbewerb? Wer belegte den zweiten und wer den dritten Platz? Wie oft wurde der Tipp Bernd - Claudia - Annekatrin insgesamt abgegeben?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Im folgenden seien die Namen der auf den Tippzetteln vermerkten drei Wettkampfteilnehmer mit A, B, C abgekürzt und die Platzverteilung durch die Reihenfolge dieser drei Buchstaben angegeben.
Da A, B und C die ersten drei Plätze belegten und B nicht Erster wurde, kommen nur die folgenden Platzverteilungen in Frage: (1) ABC, (2) ACB, (3) CAB, (4) CBA.

Nun lässt sich in einer Tabelle angeben, wie viele Punkte in den Fällen (1) bis (4) bei jeder der laut Aufgabenstellung möglichen Tippverteilungen hätten vergeben werden können:

1. Möglichkeit der Tippverteilung

Platzverteilung	ABC	ACB	CAB	CBA
Tipp BAC 5mal	0+0+5	0+0+0	0+5+0	0+0+0
Tipp BCA 4mal	0+0+0	0+4+0	0+0+0	0+0+4
Tipp CAB 3mal	0+0+0	0+0+3	3+3+3	3+0+0
Summe	5	7	14	7

2. Möglichkeit der Tippverteilung

Platzverteilung	ABC	ACB	CAB	CBA
Tipp BAC 5mal	0+0+5	0+0+0	0+5+0	0+0+0
Tipp BCA 3mal	0+0+0	0+3+0	0+0+0	0+0+3
Tipp CAB 4mal	0+0+0	0+0+4	4+4+4	4+0+0
Summe	5	7	17	7

Wie die Tabelle zeigt, wird die Gesamtpunktzahl 17 genau dann erreicht, wenn Claudia den Wettbewerb gewann, Annekatrin den zweiten und Bernd den dritten Platz erreichte sowie der Tip BCA genau 3mal abgegeben wurde.

Aufgabe 130831:
Anja, Brigitte, Cathrin, Daja und Eva trugen mehrere Spiele für vier Personen unter sich aus. In jedem Spiel gab es einen Gewinner und drei Verlierer. Jedes der Mädchen spielte gleich viele Male. Nach Abschluss aller Spiele stellte man fest:

(1) Cathrin gewann genau die Hälfte, Daja genau ein Drittel und Eva genau ein Viertel der Spiele, an denen sie beteiligt waren.

(2) Die Anzahl der Siege des Mädchens, das das drittbeste Ergebnis erzielte, war eine Primzahl.

(3) Keines der Mädchen verlor alle Spiele.

Ermittle die genaue Anzahl aller Spiele, die ausgetragen wurden, und gib an, wie viele Spiele jedes Mädchen insgesamt gewann!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Sei z die Gesamtzahl aller Spiele. Da jedes Mädchen von jeweils 5 Spielen genau 4 mitspielte, spielte jedes Mädchen in $\frac{4}{5}z$ aller Spiele mit. Diese Anzahl ist nach (1) durch 3 und 4, also durch 12 teilbar. Daher gibt es eine natürliche Zahl n mit $\frac{4}{5}z = 12n$; hieraus folgt $z = 15n$.
Von den $15n$ Spielen gewann nach (1) Cathrin genau $6n$, Daja genau $4n$, Eva genau $3n$ Spiele.

Somit gewannen Anja und Brigitte zusammen genau $2n$ aller Spiele. Daraus folgt, dass Eva wegen $6n > 4n > 3n > 2n$ das drittbeste Ergebnis erzielte. Da die Anzahl $3n$ von Evas Siegen nach (2) eine Primzahl war, gilt $n = 1$.

Es wurden mithin genau 15 Spiele ausgetragen; Cathrin gewann genau 6, Daja genau 4, Eva genau 3 dieser Spiele, und Anja und Brigitte gewannen nach (3) jeweils genau 1 Spiel.

Aufgabe 140831:
Um Peters Fähigkeiten im Knobeln zu erproben, werden ihm an einem Zirkelnachmittag über fünf Schüler sieben Aussagen mitgeteilt, unter denen, wie ihm ebenfalls gesagt wird, genau eine falsch ist. Er soll diese falsche Aussage herausfinden und außerdem die Namen der Schüler dem Alter nach ordnen.
Die Aussagen lauten:

(1) Anton ist älter als Elvira.

(2) Berta ist jünger als Christine.
(3) Dieter ist jünger als Anton.
(4) Elvira ist älter als Christine.
(5) Anton ist jünger als Christine.
(6) Elvira ist älter als Dieter.
(7) Christine ist jünger als Dieter.

Ermittle die falsche Aussage, und ordne die Namen der Schüler dem Alter nach (beginnend mit dem Jüngsten)!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Das Alter eines jeden Schülers sei mit dem Anfangsbuchstaben seines Vornamens bezeichnet. Angenommen, (5) wäre wahr. Dann folgte erstens, dass (1) und (4) nicht beide wahr sein könnten; zweitens folgte auch, dass (7) und (3) nicht beide wahr sein könnten.

Es gäbe also unter den Aussagen (1) bis (7) mehr als eine falsche. Damit ist die Annahme, (5) wäre wahr, widerlegt; d. h., (5) ist die falsche Aussage, und (1), (2), (3), (4), (6) und (7) sind wahr.
Aus (2) folgt $B < C$, aus (7) folgt $C < D$, aus (6) folgt $D < E$, aus (1) folgt $E < A$.
Die verlangte Reihenfolge der Schüler lautet mithin: Berta, Christine, Dieter, Elvira, Anton.

Aufgabe 140834:
Achim, Bernd, Christian und Detlef waren die vier Teilnehmer der Endrunde eines Schachturniers. Es hatte jeder gegen jeden genau zweimal zu spielen. Für jede gewonnene Partie wurden ein Punkt, für jede unentschiedene ein halber Punkt, für jede verlorene 0 Punkte vergeben.

Ein Wandzeitungsartikel über dieses Turnier enthält folgende Angaben:

- Bernd und Christian erzielten zusammen genau einen Punkt mehr als Achim und Detlef zusammen.
- Christian und Detlef erzielten zusammen genau 7 Punkte.
- Achim und Christian konnten zusammen genau 5 Punkte weniger erreichen als Bernd und Detlef zusammen.

Es wird gefragt, wie viele Punkte jeder der vier Teilnehmer erhielt. Ermittle auf diese Fragen alle Antworten, die den genannten Angaben entsprechen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es wurden genau je 2 Spiele der folgenden Zusammenstellung gespielt: AB, AC, AD, BC, BD, CD. Daher wurden insgesamt 12 Partien gespielt und mithin 12 Punkte vergeben.

Wenn nun bei einer Punktverteilung, die den Angaben entspricht, Achim, Bernd, Christian und Detlef in dieser Reihenfolge a, b, c, d Punkte erzielten, so gilt:

$$a + d + 1 = b + c \qquad (1)$$
$$c + d = 7 \qquad (2)$$
$$b + d = a + c + 5 \qquad (3)$$

Weil 12 Punkte insgesamt vergeben wurden, d. h. $a+b+c+d = 12$ gilt, kann man aus dem entstandenen Gleichungssystem von 4 Gleichungen der Reihe nach die Unbekannten zu eliminieren und dann der Reihe ermitteln.

Es ergibt sich $a = 1$, $d = 4{,}5$, $b = 4$ und $c = 2{,}5$. Daher kann nur die Antwort, Achim erhielt 1 Punkt, Bernd 4 Punkte, Christian 2,5 Punkte und Detlef 4,5 Punkte, den Angaben entsprechen.

In der Tat erfüllt diese Antwort alle Bedingungen der Aufgabe. Denn wie die folgende Tabelle zeigt, gibt es Beispiele für eine Verteilung der Partieausgänge, bei der die in der Antwort genannte Punktverteilung entsteht.

	A	B	C	D	
A	-	1	0	0	1
B	1	-	2	1	4
C	2	0	-	0,5	2,5
D	2	1	1,5	-	4,5

Ferner erhielten bei ihr Bernd und Christian zusammen 6,5 Punkte, also genau einen Punkt mehr als die 5,5 Punkte von Achim und Detlef. Weiterhin erhielten Christian und Detlef zusammen genau 7 Punkte. Schließlich erreichten Achim und Christian zusammen 3,5 Punkte, also genau 5 Punkte weniger als die 8,5 Punkte von Bernd und Detlef.

In jedem Fall steht die Anzahl der Punkte, die der in der jeweiligen Zeile stehende Spieler beim Spiel gegen den in der entsprechenden Spalte stehenden Spieler erzielte.

Aufgabe 150831:
Vor vielen Jahren war ein Wanderer auf dem Wege von Altdorf nach Neudorf. Als er unterwegs nach dem Weg fragte, erklärte ihm ein Ortskundiger:

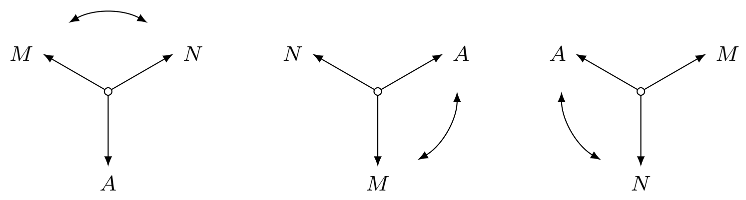
> „Ihr seid auf dem richtigen Weg und werdet bald an einer Weggabelung einen Wegweiser mit drei Richtungsschildern sehen. Diese weisen auf die Wege nach Altdorf, Neudorf und Mittendorf. Ich mache Euch aber darauf aufmerksam, dass genau zwei dieser Richtungsschilder falsch beschriftet worden sind.“

Der Wanderer bedankte sich, gelangte zum Wegweiser und las ihn.

Untersuche, ob der Wanderer mit den erhaltenen Informationen den Weg nach Neudorf mit Sicherheit ermitteln konnte!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Nach den Erklärungen des Ortskundigen würden alle drei Richtungsschilder auf den richtigen Weg weisen, wenn die beiden falschen Schilder miteinander ausgetauscht würden, da genau zwei der drei Schilder falsch und folglich genau eines richtig beschriftet waren. Weil der Wanderer aus Altdorf kam, konnte er leicht feststellen, ob das Richtungsschild, das nach Altdorf wies, richtig oder falsch beschriftet war.

Wenn es richtig beschriftet war (a), mussten die beiden anderen falsch sein, und er ging den Weg, auf welchen das Schild „Mittendorf“ wies.



(a) (b) (a)

Wenn es aber falsch beschriftet war (b), (c), konnte er sich dieses Schild mit dem Richtungsschild „Altdorf“ vertauscht denken, und dann wiesen alle drei Schilder - auch das nach Neudorf - in die richtige Richtung.

Aufgabe 160831:
Uwe hatte zum Einkauf genau 41 Mark bei sich, ausnahmslos in gültigen Münzen der DDR. Darunter befand sich keine Münze mit einem geringeren Wert als 1 Mark. Bei seinem Einkauf hatte Uwe nun genau 31 Mark zu bezahlen. Dabei stellte er fest, dass er diese Summe nicht „passend“ hatte, also nicht ohne zu wechseln bezahlen konnte.

Ermittle alle Möglichkeiten dafür, welche Anzahlen der Münzen einer jeden Sorte (zu 1 M, 2 M, 5 M, 10 M, 20 M) Uwe hiernach bei sich haben konnte!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn eine Möglichkeit für derartige Anzahlen von Münzen vorliegt, so gilt:

1) Wäre unter den Münzen, die Uwe bei sich hatte, eine 10-Mark-Münze gewesen, so folgte der Widerspruch, dass die übrigen Münzen zusammen genau 31 M ergeben hätten.

2) Wäre keine 10-Mark-Münze, aber eine 5-Mark-Münze dabei gewesen, so ließen sich die restlichen 36 M nicht nur aus 20-Mark-Münzen zusammenstellen; mindestens 16 M müssten in 5-M-, 2-M- und 1-M-Münzen vorliegen.

a) Wäre unter diesen eine weitere 5-M-Münze, so ergäbe sie zusammen mit der zuvor genannten 5-M-Münze 10 M, und es folgte wie in 1) ein Widerspruch.

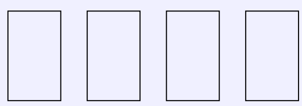
b) Wären es aber nur 2-M- und 1-M-Münzen, so wären es entweder mindestens fünf 2-M-Münzen, womit wieder 10 M zusammenkämen, oder es wären höchstens vier 2-M-Münzen, also mindestens acht 1-M-Münzen. Aus fünf von ihnen und der 5-M-Münze erhielte man ebenfalls 10 M, so dass wiederum ein Widerspruch vorliegt.

3) Wäre unter den Münzen, die Uwe bei sich hatte, keine 10-M- und keine 5-M-Münze, aber eine 2-M-Münze oder zwei 1-M-Münzen gewesen, so ließen sich die restlichen 39 M nicht nur aus 20-M-Münzen zusammenstellen; mindestens 19 M müssten in 2-M- und 1-M-Münzen vorliegen.
Darunter wären entweder mindestens fünf 2-M-Münzen oder aber höchstens vier 2-M-Münzen und dann folglich mindestens elf 1-M-Münzen, womit in jedem Falle wiederum 10 M zusammengestellt werden könnten.

4) Also hatte Uwe höchstens eine 1-M-Münze und sonst nur 20-M-Münzen bei sich. Unter diesen Bedingungen lassen sich aber 41 M nur so zusammensetzen, dass genau eine 1-M-Münze und genau zwei 20-M-Münzen vorliegen.

Diese Zusammensetzungsmöglichkeit erfüllt die Bedingungen der Aufgabe, da sich aus diesen Münzen nur die Beträge 1 M, 20 M, 21 M, 40 M und 41 M zusammenstellen lassen, also nicht 31 M.

Aufgabe 200834:
Auf einem Tisch liegen vier Spielkarten mit der Bildseite nach unten. Sie sind von links nach rechts in einer Reihe angeordnet, mit gleichgroßen Abständen jeweils zwischen unmittelbar benachbarten Karten (siehe Abbildung).



Den Mitspielern werden folgende Angaben mitgeteilt: Die vier Karten sind ein Bube, eine Dame, ein König und ein As, jede Karte in einer der vier Farben Kreuz, Pik, Herz, Karo, wobei jede dieser Farben genau einmal vertreten ist. Ferner gilt:

(1) Die Dame ist weiter vom As entfernt als das As vom König.

(2) Der Bube liegt näher am As als der König.

(3) Von der Herzkarte bis zur Karokarte ist der Abstand geringer als von der Kreuzkarte bis zur Herzkarte.

(4) Die Karokarte liegt weiter entfernt von der Herzkarte als von der Pikkarte.

(5) Die Pikkarte liegt unmittelbar benachbart links neben der Dame.

Beweise, dass aus diesen Angaben eindeutig hervorgeht, um welche Karten es sich handelt und in welcher Reihenfolge von links nach rechts sie auf dem Tisch liegen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Bube, Dame, König, As seien mit B, D, K bzw. A bezeichnet, die Kreuz-, Pik-, Herz-, Karokarte mit Kr, Pk, Hz bzw. Ka.
Wenn eine Reihenfolge von Karten den Angaben entspricht, so folgt: Zwischen K und A liegt wegen (2) mindestens eine Karte; denn sonst könnte der Abstand zwischen B und A nicht kleiner sein als der zwischen A und K. Aus (1) folgt daher:
Zwischen D und A liegen (mindestens zwei, also genau) die beiden anderen Karten, d. h., die Reihenfolge ist eine der vier in (6), (7) genannten:

$$DBKA, \quad DKBA, \quad (6) \qquad ; \qquad ABKD, \quad AKBD \quad (7)$$

Die in (6) genannten weisen links von D keine Karte auf, widersprechen also (5) und scheiden daher aus. Von den in (7) genannten Reihenfolgen entspricht nur

$$ABKD \qquad (8)$$

der Bedingung (2).
Weiter folgt: Zwischen Ka und Hz liegt wegen (4) mindestens eine Karte, zwischen Kr und Hz wegen (3) daher die beiden anderen Karten, d. h., die Reihenfolge ist eine der vier in (9), (10) genannten:

$$KrPkKaHz, HzPkKaKr, \quad (9) \qquad ; \qquad KrKaPkHz, HzKaPkKr \quad (10)$$

Davon entsprechen nur die in (10) genannten Reihenfolgen der auf (8) angewandten Bedingung (5). Von den Reihenfolgen (10) entspricht nur

$$KrKaPkHz$$

der Bedingung (4). Damit ist bewiesen, dass aus den Angaben eindeutig hervorgeht: Auf dem Tisch liegen die Karten Kreuz-As, Karo-Bube, Pik-König, Herz-Dame von links nach rechts in dieser Reihenfolge.

Aufgabe 270832:
Bei einem Schachturnier spielte jeder der acht Teilnehmer gegen jeden anderen genau eine Partie; die von den einzelnen Spielern erreichten Punktzahlen waren sämtlich voneinander verschieden. Bernd, der den zweiten Platz belegte, gewann so viele Punkte, wie die vier Letztplatzierten zusammen. Gerd wurde Dritter und Uwe belegte den siebenten Platz.

Untersuche, ob aus diesen Voraussetzungen eindeutig folgt, mit welchem Ergebnis die Partie zwischen Gerd und Uwe endete! Ist dies der Fall, dann gib das Ergebnis an!

Hinweis: Im Schachsport erhält der Spieler für einen Sieg 1 Punkt, spielt er unentschieden, bekommt er $\frac{1}{2}$ Punkt. Für eine Niederlage gibt es 0 Punkte.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Aus den Voraussetzungen folgt, dass Bernd höchstens 6 Punkte erreicht hat; denn entweder hat der Sieger des Turniers alle seine sieben Partien gewonnen, also auch die gegen den Zweitplazierten Bernd, oder der Sieger hat höchstens 6 Punkte erreicht und Bernd aus diesem Grunde (als Zweitplazierter mit davon verschiedener Punktzahl) höchstens 6 Punkte.

Daher haben nach Voraussetzung die vier Letztplazierten zusammen ebenfalls höchstens 6 Punkte erreicht. Sie haben aber unter sich bereits 6 Partien gespielt und müssen daher bereits in diesen Partien zusammen 6 Punkte erhalten haben.
Also haben sie alle ihre Spiele gegen die ersten vier verloren. Insbesondere hat der Siebente gegen den Dritten verloren; d. h., es folgt eindeutig; dass Gerd seine Partei gegen Uwe gewann.

Aufgabe 270835:
Eine quadratförmige schachbrettartige Tabelle bestehe aus 15 mal 15 Feldern. Eine der beiden Diagonalen des Quadrates sei d genannt. In jedes der 225 Felder der Tabelle kann eine der Zahlen 1 bis 15 so eingetragen werden, dass die folgenden Forderungen (1) und (2) erfüllt sind:

(1) Jede (waagerechte) Zeile enthält jede der 15 Zahlen genau einmal.

(2) Für je zwei Felder, die symmetrisch zu d liegen, gilt: Die Zahlen in diesen Feldern sind einander gleich.

Für jede Eintragung kann man die Summe aus denjenigen Zahlen bilden, die in den 15 von der Diagonale d durchquerten Feldern stehen.

Beweise, dass diese Summe durch die Voraussetzungen (1) und (2) eindeutig bestimmt ist, und ermittle diese Summe!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Für jede Eintragung, die die Voraussetzungen (1), (2.) erfüllt, gilt:

Wegen (1) kommt jede der Zahlen 1, 2, ..., 15 in der Eintragung genau 15 mal vor.
Wegen (2) kommt jede der Zahlen 1, 2, ..., 15 außerhalb der von d durchquerten Felder in einer geraden Anzahl vor, da diese Felder stets mit der Symmetrie bezüglich d - zu zweien gekoppelt auftreten.

Also kommt jede der Zahlen 1, 2, ..., 15 in den von d durchquerten Feldern in einer ungeraden Anzahl und somit mindestens einmal vor. Da für diese 15 Zahlen aber nur 15 von d durchquerte Felder zur Verfügung stehen, kann jede dieser Zahlen auch nicht mehr als einmal vorkommen.

Damit ist bewiesen: In den von d durchquerten Feldern kommt jede der Zahlen 1, 2, ..., 15 genau einmal vor; ihre Summe ist somit eindeutig bestimmt, sie beträgt $1 + 2 + ... + 15 = 120$.

Aufgabe 310832:
Sechs Spieler trugen ein Schachturnier aus, in dem jeder Spieler gegen jeden anderen genau eine Partie spielte. Wie üblich gab es bei einem unentschiedenen Spiel für jeden der beiden Spieler einen halben Punkt und sonst für den Gewinner 1 Punkt, für den Verlierer 0 Punkte. Nach dem Abschluss des Turniers machte ein Beobachter die Feststellung, dass keine zwei der sechs Spieler die gleiche Punktzahl erreicht hatten.

Gesucht ist die größtmögliche Punktzahl, die in einem solchen Turnier für den Letztplatzierten (d. h. für den Spieler mit der niedrigsten Punktzahl) erreichbar ist.

a) Nenne diese Zahl und beweise, dass für den Letztplatzierten keine größere Punktzahl möglich ist, wenn nur vorausgesetzt wird, dass die Feststellung des Beobachters zutrifft!

b) Zeige ferner - z. B. mit einer möglichen Ergebnistabelle der einzelnen Spiele -, dass es Ergebnisse geben kann, bei denen (die Feststellung des Beobachters zutrifft und) der Letztplatzierte die von dir genannte Punktzahl wirklich erreicht!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die größtmögliche für den Letztplazierten erreichbare Punktzahl beträgt 1.

Beweis:
a) Hätte der Letztplazierte 1,5 Punkte oder mehr erreichen können, so wären nach der Feststellung des Beobachters für die anderen Spieler der Reihe nach mindestens $2; 2{,}5; 3; 3{,}5; 4$ Punkte erreichbar.
Damit müssten in dem Turnier insgesamt mindestens $1{,}5+2+2{,}5+3+3{,}5+4 = 16{,}5$ Punkte zu vergeben sein. Da aber jeder der 6 Spieler gegen 5 andere spielte und da in dem Produkt $6 \cdot 5 = 30$ jede Partie zweimal erfasst ist, waren insgesamt nur $30 : 2 = 15$ Partien zu spielen und folglich auch nur 15 Punkte zu vergeben.
Dieser Widerspruch beweist, dass eine größere Punktzahl als 1 für den Letztplazierten nicht möglich ist.

b) Ein Beispiel für Ergebnisse der einzelnen Spiele mit der Punktzahl 1 für den Letztplazierten zeigt die Tabelle

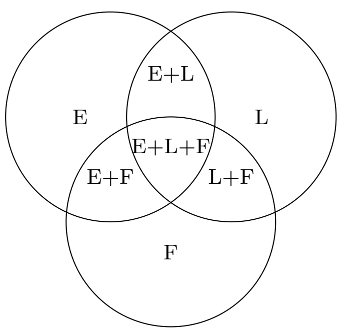
	A	B	C	D	E	F	Punktzahl
A	-	1	1	1	1	1	5
B	0	-	1	1	1	0	3
C	0	0	-	1	0,5	1	2,5
D	0	0	0	-	1	1	2
E	0	0	0,5	0	-	1	1,5
F	0	1	0	0	0	-	1

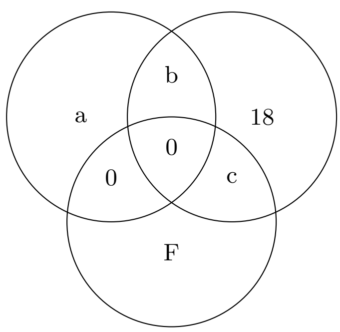
Aufgabe 330831:
In der Sprachfix-Schule zu Lernhausen sind 120 Schüler. Jeder von ihnen lernt mindestens eine der Sprachen Englisch, Latein, Französisch. Der Reporter Schreibklug erfährt folgende Tatsachen:

(1) Für genau 102 der 120 Schüler gilt: Jeder von diesen 102 Schülern lernt mindestens eine der Sprachen Englisch, Latein.
(2) Für genau 75 der 120 Schüler gilt: Jeder von diesen 75 Schülern lernt mindestens eine der Sprachen Latein, Französisch.
(3) Genau 18 der 120 Schüler lernen nur Latein.
(4) Die Zahl der Schüler, die genau die beiden Sprachen Englisch und Latein lernen, ist um 9 größer als die Zahl der Schüler, die genau die beiden Sprachen Französisch und Latein lernen.
(5) Keiner der 120 Schüler lernt sowohl Englisch als auch Französisch.

Schreibklug möchte berichten, wie viele der Schüler je genau eine der drei Sprachen und wie viele der Schüler je genau zwei der drei Sprachen lernen. Sind diese beiden Zahlenangaben durch die Auskünfte (1) bis (5) eindeutig bestimmt? Wenn das der Fall ist, so ermittle diese beiden Zahlenangaben!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:





In der linken Abbildung sind die Schüler, die Englisch, Latein bzw. Französisch lernen, durch je einen Kreis zusammengefasst. Außerdem sind dort die möglichen Sprachenzusammenstellungen ersichtlich. Die Angaben in der rechten Abbildung bezeichnen die Schülerzahlen hierzu. Aus (3) und (5) folgen insbesondere die Eintragungen 18 und 0. Berücksichtigt man sie, so folgt weiter:

Wegen der Gesamtzahl 120 gilt $a + b + c + d + 18 = 120$ (6), wegen (1) gilt $a + b + d + 18 = 102$ (7), wegen (2) gilt $c + b + d + 18 = 75$ (8), wegen (4) gilt $b = 9 + d$ (9).
Aus (6) und (7) folgt $c = 18$ (10), aus (6) und (8) folgt $a = 45$ (11).

Damit erhält man aus (7) oder (8) $b + d = 39$.

Die gewünschten Zahlenangaben sind also eindeutig bestimmt; sie lauten:

Genau eine der drei Sprachen lernen insgesamt $a + c + 18 = 81$ Schüler,
genau zwei der drei Sprachen lernen insgesamt $b + d = 39$ Schüler.

Aufgabe 340831:
Auf 10 Kärtchen sind die Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 geschrieben, jede Ziffer auf genau einem Kärtchen. Anna wählt drei dieser Kärtchen und legt sie zweimal hintereinander auf den Tisch, das erste Mal als Zifferndarstellung der größten, das zweite Mal als Zifferndarstellung der zweitgrößten mit diesen drei Kärtchen erreichbaren Zahl.

Anna berichtet: Die Summe der beiden Zahlen, deren Zifferndarstellungen sie gelegt hat, beträgt 1233. Ermittle alle Möglichkeiten dafür, welche zwei Zahlen Anna hiernach gelegt haben kann!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Ziffern auf den von Anna gewählten Kärtchen seien so mit a, b, c bezeichnet, dass $a > b > c$ gilt. Dann hat Anna die Zahlen $100a + 10b + c$ und $100a + 10c + b$ gelegt. Daher gilt Annas Aussage genau dann, wenn diese Ziffern die Gleichung

$$200a + 11 \cdot (b + c) = 1233 \tag{1}$$

erfüllen.
I. Wenn (1) erfüllt wird, so folgt: Wegen $0 \leq < b \leq 8$ ist $1 \leq b + c \leq 15$, also

$$11 \leq 11 \cdot (b + c) \leq 165 \qquad ; \qquad 1233 - 165 \leq 1233 - 11 \cdot (b + c) \leq 1233 - 11$$

Aus (1) folgt daher $1068 \leq 200a \leq 1222$, wegen $1068 : 200 > 5$ und $1222 : 200 < 7$ also $a = 6$. (2)

Aus (1) und (2) folgt $11 \cdot (b + c) = 1233 - 1200$, also $b + c = 3$.
Dies kann von den Ziffern b, c mit $b > c$ nur dadurch erfüllt werden, dass entweder $b = 3$, $c = 0$ oder $b = 2$, $c = 1$ (3) gilt.

II. Bei beiden in (2), (3) genannten Möglichkeiten für a, b, c wird (1) erfüllt.
Mit I. und II. ist gezeigt: Es gibt genau die beiden Möglichkeiten, dass Anna entweder die beiden Zahlen 630, 603 oder die beiden Zahlen 621, 612 gelegt hat.

Aufgabe 340832:
Lehrer Lehmann befragt die 26 Schüler seiner Klasse, in welchen der drei Arbeitsgemeinschaften, die in dieser Klasse besucht werden, sie sind. Wahrheitsgemäß ergibt sich:

- Auf die Frage, wer in der Arbeitsgemeinschaft Fotografie sei, melden sich genau 10 Schüler.
- Auf die Frage, wer in der Arbeitsgemeinschaft Technik sei, melden sich genau 8 Schüler.
- Auf die Frage, wer in der Arbeitsgemeinschaft Informatik sei, melden sich genau 7 Schüler.
- Genau 6 Schüler melden sich bei keiner dieser drei Fragen.

Auf dem Heimweg meint Uwe: „Genau 3 Schüler sind in allen drei Arbeitsgemeinschaften.“

Michael meint: „Genau 2 Schüler sind in genau je zwei der Arbeitsgemeinschaften.“

Jörg meint: „Genau 14 Schüler sind in genau je einer Arbeitsgemeinschaft.“

Zeige, dass alle drei Meinungen falsch sind!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Sind genau x Schüler in allen drei Arbeitsgemeinschaften, genau y Schüler in genau je zwei der Arbeitsgemeinschaften und genau z Schüler in genau je einer Arbeitsgemeinschaft, so gilt:
Die Anzahl aller Meldungen auf die Fragen des Lehrers ist $3x + 2y + z$; daher gilt

$$3x + 2y + z = 10 + 8 + 7 = 25 \tag{1}$$

Die Anzahl aller Schüler der Klasse ist $x + y + z + 6$; daher gilt

$$x + y + z = 26 - 6 = 20 \tag{2}$$

Subtrahiert man (2) von (1), so folgt $2x + y = 5$. Diese Gleichung hat in natürlichen Zahlen x, y nur die im folgenden angegebenen Lösungen, zu denen nach (2) nur die dazu

x	0	1	2
y	5	3	1
z	15	16	17

In keiner dieser Lösungen ist $x = 3$, also kann Uwes Meinung nicht zutreffen;
In keiner dieser Lösungen ist $y = 2$, also kann Michaels Meinung nicht zutreffen;
In keiner dieser Lösungen ist $z = 14$, also kann Jörgs Meinung nicht zutreffen.

Aufgabe 340834:
Ein Schachturnier wurde in „Runden“ ausgetragen. Diese Runden - anders als weithin üblich - so eingerichtet, dass in jeder Runde jeder Teilnehmer des Turniers genau eine Partie zu spielen hatte (es nahm also eine gerade Zahl von Spielern teil) und dass im gesamten Turnier für jeden Teilnehmer gegen jeden anderen genau eine Partie angesetzt wurde.

Michael und Robert nahmen 5 Runden lang an diesem Turnier teil, danach mussten sie leider ausscheiden. Um den übrigen Turnierablauf nicht weiter zu ändern, ließ man die Partien, die sie nach dem Turnierplan dann eigentlich noch zu spielen gehabt hätten, einfach ausfallen.

Michael erzählte seinen Freunden Herbert und Gerd, dass daher in dem gesamten Turnier (in dem sonst keine weiteren Ausfälle gab) insgesamt 38 Partien gespielt worden seien. Herbert meinte: „Diese Anzahl ist nicht möglich.“ Gerd entgegnet: „Doch, und wenn sie die richtige ist, so ist durch Michaels Angaben sogar eindeutig bestimmt, ob Michael und Robert in dem Turnier gegeneinander gespielt haben.“

Untersuche, ob Herberts oder Gerds Meinung zutrifft! Wenn Gerds Meinung zutrifft, haben dann Michael und Robert in dem Turnier gegeneinander gespielt?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Haben an dem Turnier außer Michael und Robert noch genau $2x$ Spieler teilgenommen, so hat von diesen jeder gegen jeden anderen genau eine Partie gespielt; das waren insgesamt

$$\frac{1}{2} \cdot 2x(2x-1) = x \cdot (2x-1)$$

Partien.
Wenn Michael und Robert in dem Turnier nicht gegeneinander gespielt haben, so haben sie in jeder der ersten 5 Runden zwei Partien gespielt. Dass zusammen mit diesen 10 Partien insgesamt

$$x \cdot (2x-1) + 10 = 38$$

Partien gespielt wurden, ist möglich; denn diese Gleichung hat (wie die Probe zeigt) die Lösung $x = 4$. Also trifft Herberts Meinung nicht zu.

Ferner gilt: Hätten Michael und Robert in dem Turnier gegeneinander gespielt, so hätten sie nur in 4 Runden je zwei Partien gespielt, in einer Runde dagegen nur die eine Partie gegeneinander. Dann wären, wenn die Gesamtzahl 38 der Partien die richtige ist, zusammen mit diesen 9 Partien insgesamt

$$x \cdot (2x - 1) + 9 = 38$$

Partien gespielt worden. Diese Gleichung hat aber keine natürliche Zahl x als Lösung, wie z. B. daraus folgt, dass für alle natürlichen Zahlen $x \leq 4$ sich $x(2x-1)+9 \leq 4 \cdot 7 + 9 = 37$ ergibt, für alle $x > 5$ dagegen $x \cdot (2x-1) + 9 \geq 5 \cdot 9 + 9 = 54$.

Also scheidet die Möglichkeit aus, dass Michael und Robert in dem Turnier gegeneinander gespielt haben könnten; d. h., aus den Angaben geht eindeutig hervor: Sie haben nicht gegeneinander gespielt; Gerts Meinung trifft zu.

Aufgabe 340841:
Die Bewohner des Planeten Quadron unterscheiden sich nach ihrem Geschlecht, und zwar gibt es, anders als auf der Erde, genau vier verschiedene Geschlechter. Politisch ist die Bevölkerung eingeteilt in genau vier Völkerstämme. Wenn der planetare Rat zusammentritt, entsendet jeder Völkerstamm genau vier Abgeordnete, von jedem Geschlecht einen.

Es ist dann eine Sitzordnung vorgeschrieben, bei der 16 Sitze in quadratförmiger Formierung zu vier Zeilen und vier Spalten angeordnet sind. In jeder Zeile und in jeder Spalte müssen alle vier Völkerstämme und alle vier Geschlechter vertreten sein.

Gib eine mögliche Sitzordnung an und bestätige, dass bei dieser Sitzordnung alle genannten Bedingungen erfüllt sind!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wir bezeichnen die Völkerstämme mit a, b, c und d, sowie die Geschlechter mit 1, 2, 3 bzw. 4, sodass also a1 den Abgeordneten von Völkerstamm a mit Geschlecht 1 bezeichne.
Dann gibt folgende Tabelle eine zulässige Sitzordnung an, wobei man sich leicht davon überzeugt, dass in jeder Zeile und jeder Spalte jeder Völkerstamm a bis d sowie jedes Geschlecht 1 bis 4 genau einmal vertreten ist und kein Abgeordneter mindestens zwei oder gar keinen Sitzplatz erhält:

$$\begin{array}{cccc} a1 & b2 & c3 & d4 \\ b3 & a4 & d1 & c2 \\ c4 & d3 & a2 & b1 \\ d2 & c1 & b4 & a3 \end{array}$$

III.III. Anzahlen berechnen

I. Runde 1

Aufgabe 080813:
Gerd und Bernd haben sich ein Kartenspiel ausgedacht. Sie schneiden 6 Pappkarten aus und nummerieren sie nacheinander mit den Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Sie vereinbaren folgende Spielregeln: Jeder bekommt nach dem Mischen drei dieser Karten. Dann spielt jeder nacheinander jeweils eine Karte aus. Wer die Karte mit einer größeren Zahl ausspielt, bekommt den „Stich“ und darf nun ausspielen. Nach drei in dieser Weise zustandegekommenen „Stichen“ ist die Runde beendet. Wer in einer Runde mindestens zwei „Stiche“ gewinnt, ist in dieser Runde Sieger. Um häufiger als Bernd Sieger zu werden, erklärt sich Gerd bereit, in jeder Runde als erster auszuspielen. Er nimmt an, dadurch mehr Möglichkeiten zum Gewinn zu haben.

Überprüfe anhand der möglichen Kartenverteilungen und der jeweils möglichen Spielverläufe, ob Gerds Annahme richtig war! Dabei wollen wir voraussetzen, dass jeder der Spieler stets für sich möglichst günstig spielt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wir bezeichnen im folgenden die Karten durch die auf ihnen stehenden Zahlen. Es gibt insgesamt 20 Möglichkeiten, aus 6 Karten 3 verschiedene auszuwählen, nämlich:

$$\begin{array}{cccc}
1,2,3 & 1,2,4 & 1,2,5 & 1,2,6 \\
 & 1,3,4 & 1,3,5 & 1,3,6 \\
 & & 1,4,5 & 1,4,6 \\
 & & & 1,5,6 \\
 & 2,3,4 & 2,3,5 & 2,3,6 \\
 & & 2,4,5 & 2,4,6 \\
 & & & 2,5,6 \\
 & & 3,4,5 & 3,4,6 \\
 & & & 3,5,6 \\
 & & & 4,5,6
\end{array}$$

Besitzt ein Spieler die Karten 5 und 6, dann erhält er stets (mindestens) 2 Stiche. Das gilt auch, wenn er die Karten 3, 4, 5 besitzt.
Ferner gewinnt er stets, wenn er die Karten 4 und 6, aber nicht 5 hat; denn hierzu braucht er z. B. nur zuerst die dritte Karte, die er außer 4 und 6 noch hat, aufzulegen. Auf diese Weise kann er stets erzwingen, dass entweder diese Karte oder seine 4 einen Stich gewinnt; ein weiterer Stich ist ihm durch die 6 sicher.
Schließlich gewinnen auch stets die Karten 2, 3, 6, da die 1 des Gegenspielers stete gestochen werden kann. Es muss nur so gespielt werden, dass das nicht mit der 6 geschieht, d. h., der Besitzer der 6 darf diese, wenn er auszuspielen beginnt, nicht als erste Karte ausspielen.

Verlieren muss auf jeden Fall daher der Spieler, der eine der folgenden Kartenzusammenstellungen besitzt:

$$1,2,3 \qquad 1,2,4 \qquad 1,2,5 \qquad 1,2,6 \qquad 1,3,4 \qquad 1,3,5 \qquad 1,4,5 \qquad 2,3,4 \qquad 2,3,5$$

Besitzt ein Spieler aber die Karten 1, 3, 6 bzw. 2, 4, 5, dann verliert er, wenn er zuerst ausspielen muss. Im 1. Fall sticht der Gegenspieler stets die 1, und zwar (wenn sie als erste Karte eines „Stiches“ ausgespielt wird) mit der 2, während er mit einer der Karten 4 und 5 die 3 stechen kann. Im 2. Fall darf der Gegenspieler nur (mit der 3) stechen, falls der Anspielende die 2 anspielt; andernfalls gibt er den ersten Stich durch Zugeben der 1 ab und kann dann bei dem erneuten Anspiel stets mit der Karte stechen, die die ausgespielte Karte gerade noch sticht. Dadurch erhält er aber auch noch den letzten Stich.
Der zuerst Anspielende hat also nur genau 9 (von 20) Möglichkeiten, eine für ihn günstige Kartenzusammenstellung zu erhalten.
Daher ist es nicht günstig für Gerd, wenn er stets zuerst ausspielt.

Aufgabe 090811:
Untersuche, ob es Vielecke mit einer der folgenden Eigenschaften gibt:

a) Die Anzahl der Diagonalen ist dreimal so groß wie die Anzahl der Eckpunkte.

b) Die Anzahl der Eckpunkte ist dreimal so groß wie die Anzahl der Diagonalen.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Formel für die Anzahl z der Diagonalen in einem konvexen n-Eck lautet: $z = \frac{n(n-3)}{2}$.

Begründung: Von jedem Eckpunkt geht je eine Diagonale zu denjenigen Eckpunkten, die von dem genannten Eckpunkt verschieden und auch nicht zu ihm benachbart sind. Daher gehen von jedem Eckpunkt genau $(n - 3)$ Diagonalen aus.

Addiert man diese für alle n Eckpunkte gebildeten Anzahlen, so hat man jede Diagonale des n-Ecks genau 2 mal gezählt. Daher gilt $2z = n(n-3)$, woraus die behauptete Formel folgt.

a) Angenommen, es gibt ein n-Eck der genannten Art. Dann gilt: $z = 3n \to 3n = \frac{n(n-3)}{2} \to 9n = n^2$
Daraus folgt wegen $n \neq 0$: $n = 9$.
Umgekehrt: Für $n = 9$ ergibt sich $z = 27 = 3n$. Also haben alle 9ecke und nur diese die Eigenschaft a).

b) Angenommen, es gibt ein n-Eck der genannten Art. Dann gilt:

$$z = \frac{n}{3} \to \frac{n}{3} = \frac{n(n-3)}{2} \to 11n = 3n^2$$

Es gibt also kein n-Eck mit der Eigenschaft b), weil die letzte Bedingung für keine positive ganze Zahl n erfüllbar ist.

Aufgabe 100811:
Ermittle die Anzahl aller sechsstelligen natürlichen Zahlen, in denen die Ziffernfolge 1970 (d. h. die Grundziffern 1, 9, 7, 0 in dieser Reihenfolge und ohne dazwischen stehende andere Ziffern) auftritt!

Wie lautet die kleinste und wie die größte dieser sechsstelligen Zahlen?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Bezeichnet man die beiden fehlenden Ziffern der gesuchten Zahl mit x und y, so können sechsstellige Zahlen der angegebenen Art nur die folgenden Formen haben:

a) $\overline{xy1970}$ mit $1 \leq x \leq 9$ und $0 \leq y \leq 9$,
b) $\overline{x1970y}$ mit $1 \leq x \leq 9$ und $0 \leq y \leq 9$,
c) $\overline{1970xy}$ mit $0 \leq x \leq 9$ und $0 \leq y \leq 9$.

Alle diese Zahlen sind voneinander verschieden; denn gehören zwei von ihnen zu derselben mit a), b) oder c) bezeichneten Gruppe, so ist diejenige von ihnen die kleinere, in der auch die aus $\overline{x}$ und $\overline{y}$ gebildete zweistellige Zahl $\overline{xy}$ die kleinere ist; gehören sie dagegen zu verschiedenen Gruppen, so unterscheiden sie sich (z. B.) in ihrer dritten Ziffer.

In Gruppe a) und b) gibt es nun jeweils genau so viele Zahlen der geforderten Art, wie es Zahlen $\overline{xy}$ mit $10 \leq \overline{xy} \leq 99$ gibt, das sind je genau 90 Zahlen, in Gruppe c) so viele, wie es Zahlen $\overline{xy}$ mit $0 \leq \overline{xy} \leq 99$ gibt, das sind genau 100 Zahlen.
Somit beträgt die gesuchte Anzahl $2 \cdot 90 + 100 = 280$.

Nach dem Vorherigen ist ferner jeweils die kleinste bzw. die größte Zahl
in Gruppe a) 101 970 bzw. 991 970,
in Gruppe b) 119 700 bzw. 919 709,
in Gruppe c) 197 000 bzw. 197 099.

Folglich ist die insgesamt kleinste der beschriebenen Zahlen 101970 und die insgesamt größte 991970.

Aufgabe 180812:
Über das Ergebnis einer Klassenarbeit ist folgendes bekannt:

- Es nahmen daran mehr als 20 und weniger als 40 Schüler teil.
- Das arithmetische Mittel aller Zensuren, die die Schüler in dieser Klassenarbeit erreichten, betrug 2,3125.

- Kein Schüler erhielt bei dieser Arbeit die Note „5“.
- Die Anzahl der „Zweien“ war eine ungerade Zahl und größer als 12.
- Die Anzahl der „Dreien“ war genau so groß wie die der„Zweien“.

a) Ermittle die Anzahl der Schüler, die an dieser Klassenarbeit teilnahmen!
b) Wie viele von ihnen erhielten hierbei die Note „1“?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Wegen $2{,}3125 = \frac{23125}{10000} = \frac{37}{16}$ und da 37 zu 16 teilerfremd ist, muss die Anzahl der Teilnehmer durch 16 teilbar sein. Die einzige (natürliche) Zahl, die (ganzzahliges) Vielfaches von 16 ist und zwischen 20 und 40 liegt, ist 32. Es waren also 32 Schüler an dieser Klassenarbeit beteiligt.

b) Die Summe der Zensuren ergibt 74, da $\frac{37}{16} \cdot 32 = 74$ ist.
Die Anzahl der „Zweien“ ist nicht größer als die Hälfte der Anzahl aller Schüler, sie kann also laut Aufgabe nur 13 oder 15 betragen haben. Falls 15 „Zweien“ und damit laut Aufgabe auch 15 „Dreien“ geschrieben worden wären, erhielte man als Summe dieser Zensuren 75, im Widerspruch zur oben ermittelten Summe 74.

Es wurden mithin 13 „Zweien“ und 13 „Dreien“ geschrieben. Folglich erhielten die restlichen 6 Schüler entweder eine „1“ oder eine „4“.
Da das arithmetische Mittel aller Zensuren weniger als 2,5 betrug, muss die Anzahl der „Einsen“ größer gewesen sein als die der „Vieren“. Damit verbleiben genau die folgenden Möglichkeiten:

1	2	3	4
6	13	13	0
5	13	13	1
4	13	13	2

Von ihnen ergibt nur der zweite Fall das angegebene arithmetische Mittel. Also erhielten 5 Schüler bei dieser Arbeit die Note „1“.

Aufgabe 210812:
Bei einem GST-Wettkampf im Luftgewehrschießen gaben Falk und Heiko je 5 Schuss ab. Auf den Scheiben wurden folgende Treffer ermittelt: Je genau einmal die 3, zweimal die 5, zweimal die 6, zweimal die 7, einmal die 8, einmal die 9, einmal die 10. Weiterhin ist bekannt:

(1) Falk erzielte mit seinen letzten vier Schüssen neunmal so viele Ringe wie mit seinem ersten Schuss.

(2) Falk schoss die 9.

Lassen sich nach diesen Angaben die folgenden beiden Fragen eindeutig beantworten?

a) Welcher der beiden Jungen erzielte das bessere Ergebnis?

b) Welcher der beiden Jungen schoss die 10?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Da die Treffer 3, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 8, 9, 10 erzielt wurden, konnte die Summe der Ringe bei vier Schüssen höchstens $7 + 8 + 9 + 10 = 34$ (*) betragen haben.
Hätte Falk mit seinem ersten Schuss eine 5 (oder eine höhere Ringzahl erzielt, dann hätte die Summe der vier anderen Ringzahlen wegen (1) gleich (oder größer als) 45 sein müssen, was im Widerspruch zu (*) steht.
Falk muss also mit seinem ersten Schuss die Ringzahl 3 erzielt haben, er erreichte somit 30 Ringe. Heiko war wegen $3 + 5 + 5 + 6 + 6 + 7 + 7 + 8 + 9 + 10 = 66$ und $66 - 30 = 36$ mit seiner Ringzahl von 36 der bessere Schütze von beiden.

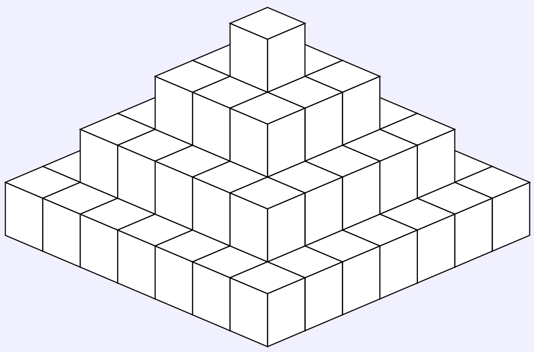
b) Falk schoss nach a) die 3 und wegen (2) die 9. Hätte er auch die 10 geschossen, müssten sich die restlichen $30 - 3 - 9 - 10 = 8$ Ringe als Summe zweier Treffer aus Ringzahlen $5, 5, 6, 6, 7, 7, 8$ darstellen lassen.
Dies ist jedoch nicht möglich (die beiden kleinsten ergeben bereits 10). Folglich schoss Heiko die 10.

Aufgabe 320812:
Ein Holzwürfel wurde mit den drei Farben Rot, Gelb und Blau angestrichen, jedes der sechs Quadrate seiner Oberfläche mit einer dieser Farben. Dabei wurde jede der drei Farben mindestens einmal verwendet. Anschließend wurde der Würfel in 27 kleine Würfel zersägt. Auf keinem dieser 27 Würfel waren nun die beiden Farben Blau und Gelb vorhanden.

Ist durch diese Angaben die Verteilung der Farben auf die Oberfläche des ursprünglichen Würfels eindeutig bestimmt? Wenn das der Fall ist, beschreibe diese Verteilung!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Aus den Angaben geht folgendermaßen eine eindeutig bestimmte Verteilung hervor:
Auf der Oberfläche des ursprünglichen Würfels war (mindestens) eines der sechs Quadrate blau angestrichen. Keines der vier benachbarten Quadrate war gelb angestrichen; denn sonst wäre beim Zersägen ein kleiner Würfel entstanden, auf dem Blau und Gelb vorhanden wären.
Da aber (mindestens) ein gelbes Quadrat vorkam, war es dasjenige, das dem genannten blauen Quadrat gegenüberlag. Für die vier anderen Quadrate, die ja nicht nur dem blauen, sondern auch dem gelben Quadrat benachbart waren, ist folglich auch die Farbe Blau auszuschließen.
Für diese Quadrate bleibt also nur die Farbe Rot übrig. Damit ist die Verteilung der Farben vollständig beschrieben.

Aufgabe 330814:
Ria baut aus Würfeln der Kantenlänge 2 cm einen pyramidenartigen Körper. Er besteht aus Schichten, die jeweils eine Quadratfläche vollständig bedecken. Die Abbildung zeigt das Prinzip seines Aufbaues. Die Gesamthöhe dieses Körpers beträgt 10 cm.



Als „Sichtfläche“ eines aus Würfeln zusammengesetzten Körpers sei die Gesamtheit aller von oben oder von den Seiten sichtbaren Teilflächen des Körpers verstanden. Zu dieser „Sichtfläche“ gehören also keine Flächen, die - wie die Grundfläche des von Ria gebauten Körpern - nur von unten zugänglich sind.

a) Aus wie vielen Würfeln besteht dieser Körper?

b) Ria streicht die „Sichtfläche“ dieses Körpers farbig an. In wie vielen der Würfel sind dann sechs, fünf, vier, drei bzw. zwei Flächen, eine bzw. keine Fläche farbig angestrichen?

c) Beate entfernt eine Anzahl derjenigen Teilwürfel, die mindestens eine farbig angestrichene Fläche haben. Sie wählt diese Teilwürfel so, dass der übrigbleibende Körper eine ebenso große „Sichtfläche“ hat wie der ursprüngliche Körper. Unter Einhaltung dieser Bedingung wählt Beate die Anzahl der zu entfernenden Teilwürfel aber möglichst groß. Wie groß ist diese Anzahl?

d) An dem von Beate übriggelassenen Körper streicht Ria von neuem dessen „Sichtfläche“ farbig an. Danach entfernt wiederum Beate nach denselben Bedingungen wie in c) eine möglichst große Anzahl von Teilwürfeln mit je mindestens einer farbigen Fläche. Wie groß ist diese Anzahl?

Hinweis: Zu b), c), d) werden nur Beschreibungen (gegebenenfalls auch Skizzen), aber keine Begründungen verlangt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Wegen der Gesamthöhe 10 cm und der Kantenlänge 2 cm der Würfel besteht der Körper aus fünf Schichten. Die Seiten der Quadratflächen, die von den Schichten bedeckt werden, werden der Reihe nach durch 1, 3, 5, 7, 9 Würfel gebildet.
Also besteht der Körper aus $1 + 9 + 25 + 49 + 81 = 165$ Würfeln.

b) In keinem Würfel beträgt die Anzahl der farbigen Flächen 6, 4 oder 1.
In genau 1 Würfel, nämlich im obersten, beträgt sie 5.
In den $4 \cdot 4 = 16$ Eckwürfeln der vier anderen Schichten beträgt sie 3.
In den übrigen $4 \cdot (1 + 3 + 5 + 7) = 64$ Kantenwürfeln dieser Schichten beträgt sie 2.
Die restlichen 84 Würfel haben keine farbige Fläche.

c) In den vier oberen Schichten sind von den Ecken- und Kantenwürfeln genau diejenigen stehenzulassen, die sich in den Kantenmitten befinden. Zu entfernen sind aus diesen Schichten die übrigen Ecken- und Kantenwürfel. Das sind, aufgezählt nach den Schichten in der Reihenfolge von oben nach unten, $4 \cdot (0 + 1 + 3 + 5) = 36$ Würfel.

d) In der zweiten bis vierten Schicht, von oben an gezählt, befinden sich nun außer den in c) als „stehenzulassen“ bezeichneten Würfeln solche Teilschichten, die wieder je eine Quadratfläche bedecken.
Von diesen sind wieder die Ecken- und Kantenwürfel mit Ausnahme der Würfel an den Kantenmitten zu entfernen, das sind $4 \cdot (0 + 1 + 3) = 16$ Würfel.

Aufgabe 340812:
Eine dreistellige natürliche Zahl werde genau dann „symmetrisch“ genannt, wenn ihre Hunderterziffer gleich ihrer Einerziffer ist.

a) Bilde alle diejenigen dreistelligen symmetrischen Zahlen, in denen nur Ziffern 0, 1, 2 vorkommen (jede eventuell auch mehrfach oder gar nicht)! Eine Begründung wird nicht verlangt.

b) Bilde alle diejenigen dreistelligen symmetrischen Zahlen, die durch 6 teilbar sind und in denen nur die Ziffern 2, 5, 8 vorkommen! Beweise, dass genau die von Dir angegebenen Zahlen die geforderten sind!

c) Ermittle die Anzahl aller dreistelligen symmetrischen Zahlen!

d) Ermittle die Summe aller dreistelligen symmetrischen Zahlen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) 101, 111, 121, 202, 212, 222.

b) I. Wenn eine Zahl die genannten Forderungen erfüllt, so folgt:
Da die Zahl durch 6, also auch durch 2 teilbar ist, ist ihre Einerziffer gerade, also entweder 2 oder 8. Daher können höchstens die Zahlen $222, 252, 282, 828, 858, 888$ (1) die Forderungen erfüllen.

II. Sie erfüllen die Forderungen; denn sie sind gerade, ihre Quersumme beträgt 6, 9, 12, 18, 21, 24, ist also durch 3 teilbar; also sind diese Zahlen durch 3 und damit auch durch 6 teilbar. Nach I. und II. erfüllen genau die Zahlen (1) die Forderungen.

c) Die Hunderter- und Einerziffer einer dreistelligen symmetrischen Zahl ist eine der neun Ziffern 1, 2, ..., 9, die Zehnerziffer ist eine der zehn Ziffern 0, 1, 2, ..., 9. Daher beträgt die Anzahl aller dieser Zahlen $9 \cdot 10 = 90$.

d) Jede der Hunderter- und Einerziffern 1, 2, ..., 9 kommt in den soeben aufgezählten Zahlen genau 10 mal vor, jede der Zehnerziffern 0, 1, 2, ..., 9 kommt genau 9 mal vor.
Zur insgesamt gesuchten Summe liefert daher die Summe der Einerziffern den Beitrag

$$10 \cdot (1 + 2 + \cdots + 9) = 450$$

die Summe der mit 10 multiplizierten Zehnerziffern liefert den Beitrag

$$9 \cdot 10(0 + 1 + 2 + \cdots + 9) = 4050$$

die Summe der mit 100 multiplizierten Hunderterziffern liefert den Beitrag

$$10 \cdot 100(1 + 2 + \cdots + 9) = 45000$$

Also ist die insgesamt gesuchte Summe $450 + 4050 + 45000 = 49500$.

II. Runde 2

Aufgabe 030823:
In einer Aula stehen 300 Stühle in mehreren gleichlangen Reihen hintereinander. Nimmt man für den Mittelgang aus jeder Querreihe 3 Stühle heraus und bildet aus diesen Stühlen 5 neue Querreihen (mit Mittelgang), so bleibt die Anzahl der Sitzplätze gleich.

Wie viel Stühle standen ursprünglich in jeder Querreihe? Begründe deine Behauptung!

Lösung von Steffen Polster:
r sei die Anzahl der Reihen und x die Anzahl der Stühle je Reihe. Dann ist zu Beginn $300 = r \cdot x$, d. h. $r = \frac{300}{x}$

Nach dem Umstellen der Stühle stehen $x-3$ Stühle in jeder, der nun $r+5$ Reihen, d. h. $300 = (r+5)\cdot(x-3)$.

Setzt man die erste Gleichung in die zweite ein, wird

$$300 = \left(\frac{300}{x} + 5\right) \cdot (x - 3)$$

Umstellen ergibt die quadratische Gleichung $x^2 - 3x - 180 = 0$ und mit der Lösungsformel

$$x_{1;2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 180} = \frac{3}{2} \pm \frac{27}{2}$$

Nur $x_1 = 15$ ist positiv und somit die Lösung. Folglich ist $r = \frac{300}{x} = \frac{300}{15} = 20$.
Am Anfang gab es 20 Reihen mit jeweils 15 Stühlen. Nach den Umstellen sind es 25 Reihen mit je 12 Stühlen.

Aufgabe 060821:
Klaus hat 7 Kugeln: 4 rote, 2 weiße und eine schwarze. Er soll sie in zwei Kästen A und B legen; in A drei, in B vier.

Gib sämtliche möglichen voneinander verschiedenen Verteilungen der Kugeln auf die zwei Kästen an! Die Reihenfolge, in der die Kugeln in den Kästen liegen, soll dabei nicht berücksichtigt werden.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es genügt, alle möglichen voneinander verschiedenen Verteilungen der Kugeln auf einen der Kästen (z. B. A) zu betrachten, da dadurch die Verteilung der restlichen Kugeln auf den Kasten B eindeutig bestimmt ist. Der Kasten A kann höchstens 1 schwarze, höchstens 2 weiße und höchstens 3 rote Kugeln enthalten.

Alle möglichen voneinander verschiedenen Verteilungen gibt daher das folgende Schema an:

	A	B	
1.	r r r	r s w w	Dabei bedeuten:
2.	r r s	r r w w	r - rote Kugel
3.	r r w	r r s w	s - schwarze Kugel
4.	r s w	r r r w	w - weiße Kugel
5.	r w w	r r r s	
6.	s w w	r r r r	

Aufgabe 070823:
Jemand würfelte mit n Würfeln bei einem einzigen Wurf zusammen die Augenzahl $3n + 4$, und zwar zeigte dabei jeder Würfel die gleiche Augenzahl.

Man ermittle sämtliche Werte von n, für die das möglich ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Augenzahl $3n + 4$ muss durch n teilbar sein.
$\frac{3n+4}{n} = 3 + \frac{4}{n}$ liefert nur für n als Teiler von 4, also nur für $n = 1$, $n = 2$, $n = 4$ ganzzahlige Ergebnisse.

$n = 1$ scheidet aus, da keine 7 gewürfelt werden kann.
Für $n = 2$ erhält man 10 Augen, d. h., es wurde zweimal eine 5 gewürfelt.
Für $n = 4$ ergeben sich 16 Augen, d. h., es wurde viermal eine 4 gewürfelt.
Es wurde also entweder mit 2 oder mit 4 Würfeln gewürfelt.

Aufgabe 090821:
Klaus und Horst spielen mit Würfeln. Sie benutzen bei jedem Wurf genau zwei verschieden große Würfel und addieren jedesmal die beiden Augenzahlen.

Klaus meint, dass unter allen möglichen verschiedenen Würfen solche mit der Summe 7 am häufigsten auftreten. Zwei Würfe heißen dabei genau dann gleich, wenn die Augenzahlen gleich großer Würfel jeweils übereinstimmen.

Begründe die Richtigkeit dieser Meinung!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Ordnet man z. B. die möglichen Würfe und die zugehörigen Summen der jeweiligen beiden Augenzahlen in Form nachstehender Tabelle an, so erkennt man, dass in der Tat die Summe 7 am häufigsten auftritt. (waagerecht ... großer Würfel, senkrecht ... kleiner Würfel):

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	**7**
2	3	4	5	6	**7**	8
3	4	5	6	**7**	8	9
4	5	6	**7**	8	9	10
5	6	**7**	8	9	10	11
6	**7**	8	9	10	11	12

Aufgabe 190821:
Eine Gruppe von 39 Schülern unterhält sich über ihre Zensuren in den Fächern Mathematik, Russisch und Deutsch. Dabei wird festgestellt:

(1) Genau 11 Schüler haben in Mathematik die Zensur „2“.
(2) Genau 19 Schüler haben in Russisch die Zensur „2“.
(3) Genau 23 Schüler haben in Deutsch die Zensur „2“.
(4) Genau ein Schüler hat in allen drei Fächern die Zensur „2“.
(5) Genau 4 Schüler haben in Mathematik und Deutsch, aber nicht in Russisch eine „2“.
(6) Genau 7 Schüler haben in Russisch und Deutsch, aber nicht in Mathematik eine „2“.
(7) Genau 2 Schüler haben in Mathematik und Russisch, aber nicht in Deutsch eine „2“.

Ermittle aus diesen Angaben, wie viel Schüler dieser Gruppe in genau einem und wie viel in keinem der angegebenen Fächer die Zensur „2“ haben!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Aus (1), (4), (5) und (7) folgt wegen $11 - 1 - 4 - 2 = 4$, dass genau 4 Schüler genau in Mathematik die Zensur „2“ haben.
Aus (2), (4), (6) und (7) folgt wegen $19 - 1 - 7 - 2 = 9$, dass genau 9 Schüler genau in Russisch die Zensur „2“ haben.
Aus (3), (4), (5) und (6) folgt, dass wegen $23 - 1 - 4 - 7 = 11$ genau 11 Schüler genau in Deutsch eine „2“ haben.
Wegen $4 + 9 + 11 = 24$ haben somit genau 24 Schüler dieser Gruppe in genau einem der genannten Fächer die Zensur „2“.
Da wegen (5), (6), (7) genau 13 Schüler in genau zwei der Fächer eine „2“ haben und wegen (4) noch ein weiterer Schüler hinzukommt, haben wegen $24 + 13 + 1 = 38$ mithin genau 38 Schüler in wenigstens einem der Fächer die Zensur „2“. Folglich hat genau ein Schüler dieser Gruppe in keinem der genannten Fächer die Zensur „2“.

Aufgabe 240821:
Klaus berichtet über alle Tage seines Aufenthaltes im Ferienlager:

(1) An jedem Vormittag war das Wetter entweder durchgehend sonnig oder durchgehend regnerisch.
(2) An jedem Nachmittag war das Wetter entweder durchgehend sonnig oder durchgehend regnerisch.
(3) An genau sieben Tagen kam regnerisches Wetter vor.
(4) Wenn es nachmittags regnete, war es vormittags sonnig.
(5) An genau fünf Nachmittagen war es sonnig.
(6) An genau sechs Vormittagen war es sonnig.

Stelle fest, ob sich aus diesen Angaben die Anzahl der Tage, die Klaus im Ferienlager war, eindeutig ermitteln lässt! Ist dies der Fall, so gibt diese Anzahl an! Gib ferner eine (nach den Angaben) mögliche Verteilung sonniger und regnerischer Vor- und Nachmittage an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es sei x die Anzahl der Tage, an denen es vormittags und nachmittags sonnig war,
y die Anzahl der Tage, an denen es vormittags sonnig und nachmittags regnerisch war,
z die Anzahl der Tage, an denen es vormittags regnerisch und nachmittags sonnig war.

Da es nach (4) keinen Tag gab, an dem es vormittags und nachmittags regnerisch war, folgt aus (1) und (2), dass jeder Tag genau eine der drei bei x, y und z genannten Wetterverteilungen aufwies. Die gesuchte Anzahl der Tage, die Klaus im Ferienlager war, ist somit $x + y + z$. Aus (3), (5) bzw. (6) folgt

$$y + z = 7, \qquad x + z = 5, \qquad x + y = 6$$

Addiert man diese drei Gleichungen, so ergibt sich $2 \cdot (x + y + z) = 18$, also $x + y + z = 9$. Die gesuchte Anzahl lässt sich also eindeutig ermitteln; sie beträgt 9.

Weiter folgt $x = 9 - 7 = 2$, $y = 9 - 5 = 4$, $z = 9 - 6 = 3$ und damit für die Wetterverteilung:
An genau 2 Tagen war es vormittags und nachmittags sonnig,
an genau 4 Tagen war es vormittags sonnig und nachmittags regnerisch,
an genau 3 Tagen war es vormittags regnerisch und nachmittags sonnig.

Wie eine Oberprüfung der Angaben (1) bis (6) zeigt, gelangt man mit diesen Anzahlen zu einer (nach den Angaben) möglichen Wetterverteilung, z. B. in der folgenden Tabelle:

Tag	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Vormittag	s	s	s	s	s	s	r	r	r
Nachmittag	s	s	r	r	r	r	s	s	s

Aufgabe 250823:
Ein Sicherheitsschloss besitze vier Rädchen, die jeweils mit den Ziffern 1 bis 9 versehen sind. Nur durch Einstellen genau einer Zahlenkombination (an jedem Rädchen eine bestimmte Ziffer) lässt sich das Schloss öffnen. Der Besitzer eines solchen Schlosses hat sich beim Kauf die genaue Zahlenkombination nicht gemerkt. Er weiß nur noch, dass in der Zahlenkombination jede der Ziffern 1, 4 und 6 genau einmal vorkommt. Die Reihenfolge der einzelnen Ziffern ist ihm ebenfalls entfallen.

a) Wie viele verschiedene Einstellungen sind im ungünstigsten Falle für das Öffnen des Schlosses auszuführen?

b) Wie viele verschiedene Einstellungen wären höchstens nötig, wenn der Besitzer noch weiß, mit welchem Rädchen er die Ziffer 4 einstellen muss?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Man beginne mit denjenigen Zahlenkombinationen, bei denen die Ziffern 1, 4, 6 in dieser Reihenfolge auftreten. Außer ihnen tritt noch jeweils eine nicht bekannte Ziffer x auf. Da x nicht mit den Ziffern 1, 4, 6 identisch ist, gibt es für x insgesamt sechs Möglichkeiten.
Weil x sowohl an der 1., 2., 3. bzw. 4. Stelle der Einstellungsfolge stehen kann, gibt es für die Reihenfolge 1, 4, 6 somit insgesamt $4 \cdot 6 = 24$ Möglichkeiten.

Analog verfährt man bei den weiteren fünf möglichen Reihenfolgen 1, 6, 4; 4, 1, 6; 4, 6, 1; 6, 1, 4; 6, 4, 1. Im ungünstigsten Falle sind also $6 \cdot 24 = 144$ Einstellungen auszuführen.

b) Man beginne mit denjenigen Zahlenkombinationen, bei denen die Ziffern 1, 6 in dieser Reihenfolge auftreten. Außer ihnen und der Ziffer 4 tritt noch jeweils eine nicht bekannte Ziffer x auf.
Wieder gibt es für x insgesamt sechs Möglichkeiten. Weil für x genau diejenigen drei Plätze in der Einstellungsfolge frei sind, an denen die Ziffer 4 nicht steht, gibt es für die Reihenfolge 1, 6 somit insgesamt $3 \cdot 6 = 18$ Möglichkeiten.

Analog verfährt man bei der anderen Reihenfolge 6, 1. Somit wären unter den Bedingungen der Aufgabe b) höchstens $2 \cdot 18 = 36$ Einstellungen nötig.

Aufgabe 270823:
Über ein Turnier in einer AG „Schach“ wird berichtet: Das Turnier wurde in mehreren Runden ausgetragen. In jeder Runde spielte jedes AG-Mitglied gegen jedes andere genau eine Partie. Auf diese Weise wurden in dem Turnier insgesamt 112 Partien gespielt. Es nahmen mehr als zwei Mitglieder teil.

Untersuche, ob ein Turnier möglich ist, bei dem diese Angaben zutreffen, und ob die Anzahl der Runden sowie die Anzahl der Teilnehmer eindeutig aus den Angaben folgen! Wenn dies der Fall ist, so ermittle diese Anzahlen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn ein solches Turnier möglich ist, müssen in jeder Runde gleich viele Partien gespielt werden; daher muss die Anzahl der Partien einer Runde ein Teiler von 112 sein, d. h. eine der Zahlen

$$1, 2, 4, 7, 8, 14, 16, 28, 56, 112$$

Die folgende Tabelle zeigt eine Ermittlung von Werten für die Anzahl der Partien einer Runde. Jeweils zu einer Teilnehmerzahl wird diese Partienzahl folgendermaßen gefunden:

Sind es drei Teilnehmer A, B, C, so ergeben sich drei Partien AB, AC, BC. Bei jeder Vergrößerung der Teilnehmerzahl um eins kommen so viele Partien hinzu, wie die vorhergehende Teilnehmerzahl angibt (da der neue Teilnehmer gegen alle vorigen zu spielen hat).

Teilnehmer	Partien	Teilnehmer	Partien
3	3	10	36+9=45
4	3+3=6	11	45+10=55
5	64+=10	12	55+11=66
6	10+5=15	13	66+12=78
7	15+6=21	14	78+13=91
8	21+7=28	15	91+14=105
9	28+8=36	16	105+15=120

Bei weiterer Fortsetzung der Tabelle ergeben sich nur noch größere Partienzahlen.
Als einzige Partienzahl, die ein Teiler von 112 ist, verbleibt daher 28. Damit und wegen $112 : 28 = 4$ ist bewiesen:

Ein Turnier der genannten Art ist möglich; aus den Angaben folgt eindeutig: Es wurden genau vier Runden gespielt; es nahmen genau acht AG-Mitglieder teil.

Aufgabe 300823:
Jemand möchte in einer Ebene eine Anzahl n von Punkten zeichnen. Sie sollen so gewählt werden, dass keine drei dieser Punkte auf einer gemeinsamen Geraden liegen. Anschließend will er Dreiecke suchen, deren sämtliche drei Ecken zu den gezeichneten n Punkten gehören.

Ermittle die kleinste Anzahl n solcher Punkte, für die es möglich ist, 120 verschiedene derartige Dreiecke zu finden!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Hat man n Punkte wie angegeben gezeichnet, so kann man zu jedem dieser n Punkte einen der übrigen $n-1$ Punkte aufsuchen und damit genau $n \cdot (n-1)$ geordnete Paare von Punkten erhalten.
Ebenso kann man zu jedem dieser Paare einen der darin nicht vorkommenden $n-2$ Punkte aufsuchen und damit genau $n \cdot (n-1) \cdot (n-2)$ geordnete Zusammenstellungen (Tripel) von je drei der n Punkte erhalten.

Mit diesen Zusammenstellungen wird die Eckenmenge jedes aufzufindenden Dreiecks erfasst, und zwar je 6 mal.
Sind nämlich A, B, C die Ecken eines solchen Dreiecks, so werden sie genau mit den 6 geordneten Zusammenstellungen ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA erfasst. Daher lassen sich insgesamt $\frac{1}{6} \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2)$ Dreiecke finden, deren sämtliche Ecken zu den n Punkten gehören.

Für $n = 10$ ist diese Anzahl 120, für $n < 10$ ist sie kleiner als 120. Die kleinste Anzahl n, für die es möglich ist, 120 derartige Dreiecke zu finden, beträgt daher $n = 10$.

III. Runden 3 & 4

Aufgabe 020833:
Rainer, der zur Fußballmannschaft der Schule gehört, schafft Ordnung in dem Schrank für Fußballschuhe. Er weiß, dass einige Schuhe zum Schuhmacher gebracht worden sind.
Er stellt fest, dass die Schuhe verschiedene Größen aufweisen, nämlich 37, 38, 39 und 40.

Sechs Paare sind ordnungsgemäß zusammengebunden, das sind Schuhe jeder Größe. Die meisten dieser Paare sind von der Größe 38.
Von den außerdem vorhandenen fünf rechten Schuhen ist keiner von der Größe 38, die meisten sind von der Größe 39.

Die außerdem noch vorhandenen acht linken Schuhe gehören zu jeder Größe, am meisten ist die Größe 40, am wenigsten die Größe 37 vertreten.

a) Wie viel Fußballschuhe sind beim Schuhmacher?

b) Was für Fußballschuhe sind das?

Begründe deine Antwort!

Lösung von Carsten Balleier:
Von jeder Größe gibt es mindestens einen; und von der 38 mehr als von jeder anderen.

Gäbe es 2 von der 38, müsste es von einer anderen Größe auch 2 geben. Es dürfte eine andere Größe gar nicht vorhanden sein. Also muss die 38 dreimal, die anderen je einmal unter den Paaren vertreten sein.

Bei den rechten Schuhen geht man analog vor: es gibt nur drei Größen, insgesamt aber einen Schuh weniger als bei den Paaren. Rainer hat also 3 rechte 39-er und je einen 37-er und 40-er vor sich.

Bei den linken weiß man, dass es wenigstens einen Schuh der 37 gibt und dass die anderen häufiger (d. h. mind. 2-mal) vorkommen. Da es nur 8 linke gibt, ist die 40 dreimal, die 39 und 38 je zweimal und die 37 einmal vertreten.

Wenn man schaut, welche linken und rechten noch zu Paaren gebunden werden können, stellt man fest, dass 2 rechte 38-er, ein linker 39-er und 2 rechte 40-er beim Schuhmacher sein müssen.

Aufgabe 050831:
Ermittle die Anzahl aller Zahlen zwischen 10000 und 99999, die wie z. B. 35453 vorwärts gelesen die gleiche Ziffernfolge wie rückwärts gelesen ergeben.

Lösung von Eckart Keller:
Die gesuchte Anzahl ist gleich der Anzahl aller dreistelligen Zahlen, da sich aus jeder dreistelligen Zahl genau eine derartige Zahl ergibt, wenn man die ersten beiden Ziffern der Zahl in umgekehrter Reihenfolge hinter die Zahl schreibt und man umgekehrt jede derartige fünfstellige Zahl aus einer dreistelligen erhält.

Da es 900 dreistellige Zahlen gibt, beträgt die gesuchte Anzahl 900.

Aufgabe 060834:
Von 10 Koffern und 10 Schlüsseln sei bekannt, dass jeder Schlüssel zu genau einem Koffer passt und zu jedem Koffer genau ein Schlüssel. Man weiß aber nicht, welcher Schlüssel zu welchem Koffer gehört.

Jemand ermittelt dies durch probieren, wobei jede Probe darin besteht, dass er für genau einen Koffer und genau einen Schlüssel feststellt, ob sie zusammenpassen oder nicht. Die Reihenfolge der Proben wird so gewählt, dass für jeden Koffer, sobald einmal an ihm eine Probe durchgeführt wurde, dann genau so viele Proben vorgenommen werden, bis der passende Schlüssel ermittelt ist.

Welches ist
a) die kleinste
b) die größte
Zahl von Proben, bei der es vorkommen kann, dass genau nach dieser Probenzahl zu jedem Koffer der richtige Schlüssel feststellbar ist?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Nach Aufgabenstellung müssen an dem Koffer, an dem die erste Probe durchgeführt wurde, genau so viel Proben vorgenommen werden, bis zu ihm der passende Schlüssel ermittelt ist. Das ist frühestens nach einer Probe, spätestens nach 9 Proben der Fall.

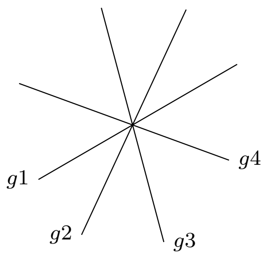
Sodann ist eine entsprechende Überlegung für die restlichen 9 Koffer und Schlüssel durchzuführen usw. bis zu 2 Koffern und Schlüsseln. Für diese sind mit genau einer Probe alle Zusammengehörigkeiten ermittelt. Also ist die kleinste Probenzahl der gesuchten Art $1+1+1+1+1+1+1+1+1 = 9$, die größte Probenzahl der gesuchten Art $9+8+7+6+5+4+3+2+1 = 45$.

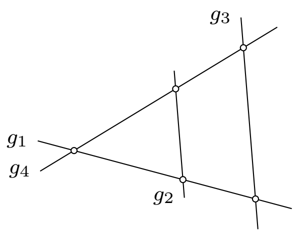
Aufgabe 110832:
Von sieben Schülern soll jeder auf sein Zeichenblatt vier voneinander verschiedene Geraden zeichnen. Dabei soll der erste Schüler die Geraden so zeichnen, dass kein Schnittpunkt, der zweite so, dass genau ein Schnittpunkt auftritt, der dritte so, dass genau 2 Schnittpunkte, der vierte so, dass genau 3 Schnittpunkte, der fünfte so, dass genau 4 Schnittpunkte, der sechste so, dass genau 5 Schnittpunkte, der siebente so, dass genau 6 Schnittpunkte auftreten. Schnittpunkte, die außerhalb des Zeichenblattes liegen werden hierbei mitgezählt.

Nach einer gewissen Zeit behaupten der zweite, der dritte und der sechste Schüler, dass ihre Aufgabe nicht lösbar sei.

Stelle fest, wer von den drei Schülern recht und wer nicht recht hat, und beweise deine Feststellung!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Der zweite und der sechste Schüler haben nicht recht: denn es gibt z. B. folgende Lösungen:





Der dritte Schüler hat recht.

Beweis: Angenommen, es gäbe 4 Geraden so, dass genau 2 Schnittpunkte auftreten. Da Schnittpunkte existieren, können die vier Geraden nicht sämtlich parallel zueinander sein.
O. B. d. A. mögen sich die Geraden g und g_2 im Punkt A schneiden. Von den beiden anderen Geraden muss mindestens eine nicht durch A gehen, da sonst nur A als Schnittpunkt aufträte.
Dies sei etwa die Gerade g_3. Sie hat also mit einer der beiden Geraden, etwa mit g_1, einen von A verschiedenen Schnittpunkt B.

Dann gilt $g_3 \parallel g_2$, weil sonst entgegen der Aufgabe g_3 mit g_2 einen weiteren von A und B verschiedenen Schnittpunkt hätte. Die vierte Gerade kann nun nicht ebenfalls zu g_2 und g_1 parallel sein, da sie dann g_1 in einem von A und B verschiedenen Punkt schneiden würde. Also hat sie einen Schnittpunkt A' mit g_2 und einen Schnittpunkt B' mit g_3.

Da sie von g_1 verschieden ist, kann nicht gleichzeitig $A = A'$ und $B = B'$ sein. Somit tritt außer A und B noch mindestens ein weiterer Schnittpunkt auf.

Dieser Widerspruch beweist, dass die Annahme, es gäbe 4 Geraden, für die genau 2 Schnittpunkte auftreten, falsch war.

Aufgabe 250832:
Brigade Schulz spielt im „Tele-Lotto (5 aus 35)“ nach einem sogenannten „vollmathematischen System mit n Zahlen“. Darunter versteht man, wenn n eine natürliche Zahl mit $5 < n \leq 35$ ist, folgendes System:

Es werden von der Brigade genau n Zahlen 1, 2,..., 35 ausgewählt, und dann werden in der Menge dieser n Zahlen alle verschiedenen Teilmengen aus je fünf Elementen ermittelt. Jede dieser Teilmengen wird als Tipp abgegeben.

a) Die Brigade spielt nach einem „vollmathematischen System mit 6 Zahlen“. Bei der nachfolgenden Ziehung im Tele-Lotto stellt sich heraus, das genau vier der fünf Gewinnzahlen unter den sechs von der Brigade in ihrem System verwendeten Zahlen vorkommen.

Ferner werden nach dieser Ziehung folgende Gewinnquoten bekanntgegeben: Für jeden Tip mit genau drei richtig getippten Zahlen gibt es 20 M, für jeden Tipp mit genau vier richtig getippten Zahlen gibt es 400 M, für jeden Tipp mit fünf richtig getippten Zahlen 3000M.

Ermittle den hiermit zustandekommenden Gewinn der Brigade!

b) Die Brigade spielt nach einem „vollmathematischen System mit 7 Zahlen“. Bei einer Ziehung wird festgestellt: Genau vier der fünf Gewinnzahlen kommen unter den sieben von der Brigade verwendeten Zahlen vor. Die Gewinnquoten sind dieselben wie in a).

Ermittle ebenfalls den Gewinn der Brigade!

Hinweis: Die Kosten, d. h. der Spieleinsatz, sollen in beiden Aufgaben nicht berücksichtigt werden.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) In der Menge der sechs von der Brigade verwendeten Zahlen gibt es genau sechs verschiedene Teilmengen aus je fünf Elementen; diese Teilmengen entstehen nämlich, indem man jeweils eine der sechs Zahlen weglässt.

Genau zwei der sechs Zahlen sind nicht Gewinnzahlen. Daher gibt es unter den von der Brigade abgegebenen Tipps genau die beiden folgenden Sorten (1), (2):

(1) Tipps mit genau einer Zahl, die nicht Gewinnzahl ist,
(2) Tipps mit den beiden Zahlen, die nicht Gewinnzahl sind.

Von der Sorte (1) gibt es genau zwei Tipps, nämlich genau diejenigen, in denen die vier Gewinnzahlen und eine der beiden anderen Zahlen stehen.
Von der Sorte (2) sind folglich genau die vier anderen Tipps des Systems. Somit ergibt sich der Gewinn $2 \cdot 400M + 4 \cdot 20M = 880M$.

b) In der Menge der sieben von der Brigade verwendeten Zahlen gibt es genau 21 verschiedene Teilmengen aus je fünf Elementen.
Diese entstehen nämlich, indem man jeweils genau zwei der sieben Zahlen weglässt, und das kann

- entweder die erste der sieben Zahlen und eine der sechs übrigen sein (sechs Möglichkeiten)
- oder die zweite und eine der fünf von der ersten und zweiten verschiedenen Zahlen (fünf Möglichkeiten)
- oder die dritte und eine der vier von der ersten bis dritten verschiedenen Zahlen (vier Möglichkeiten)
- oder die vierte und eine der drei von der ersten bis vierten verschiedenen Zahlen (drei Möglichkeiten)
- oder die fünfte und eine der zwei von der ersten bis fünften verschiedenen Zahlen (zwei Möglichkeiten)
- oder die sechste und die siebente Zahl (eine Möglichkeit);

die Anzahl dieser Teilmengen ist somit $6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21$.

Genau drei der sieben Zahlen sind nicht Gewinnzahlen. Daher gibt es unter den von der Brigade abgegebenen Tipps genau die drei folgenden Sorten (1), (2), (3):

(1) Tipps mit genau einer Zahl, die nicht Gewinnzahl ist,
(2) Tipps mit genau zwei Zahlen, die nicht Gewinnzahl sind,
(3) Tipps mit den drei Zahlen, die nicht Gewinnzahl sind.

Von der Sorte (1) gibt es genau drei Tipps, nämlich genau diejenigen, in denen die vier Gewinnzahlen und eine der drei anderen Zahlen stehen. Von der Sorte (3) gibt es genau sechs Tipps, nämlich genau diejenigen, in denen außer den drei Zahlen, die nicht Gewinnzahl sind, noch zwei der vier Gewinnzahlen stehen, und das sind entweder die erste und eine der drei anderen Gewinnzahlen (drei Möglichkeiten) oder die zweite und eine der beiden von der ersten und zweiten verschiedenen Gewinnzahlen (zwei Möglichkeiten) oder die dritte und vierte Gewinnzahl (eine Möglichkeit).

Von der Sorte (2) sind folglich genau die $21 - 3 - 6 = 12$ anderen Tipps des Systems.
Somit ergibt sich der Gewinn $3 \cdot 400M + 12 \cdot 20M = 1440M$.

Aufgabe 260834:
In einer Ebene seien 100 verschiedene Punkte so gelegen, dass folgende Voraussetzungen erfüllt sind:

(1) Es gibt genau eine Gerade, auf der mehr als zwei der 100 Punkte liegen.

(2) Auf dieser Geraden liegen genau drei der 100 Punkte.

Ermittle unter diesen Voraussetzungen die Anzahl derjenigen Geraden, die durch mehr als einen der 100 Punkte gehen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die drei in (2) genannten Punkte, die auf der in (1) genannten Geraden liegen, seien P_{98}, P_{99}, P_{100}, die übrigen der 100 Punkte seien P_1, P_2, ... , P_{97} genannt.

Eine Gerade geht genau dann durch mehr als einen der 100 Punkte, wenn sie

(a) entweder ein Paar verschiedener Punkte P_1, P_2, ... , P_{97} miteinander verbindet

(b) oder einen der Punkte P_1, P_2, ... ,P_{97} mit einem der Punkte P_{98}, P_{99}, P_{100} verbindet

(c) oder die Gerade durch P_{98}, P_{99}, P_{100} ist.

Jede in (a) genannte Gerade ist von jeder in (b) genannten Geraden verschieden. Ferner gilt: Jede in (a) genannte Gerade und jede in (b) genannte Gerade ist von der in (c) genannten Geraden verschieden.

Die Anzahl der in (a) genannten Geraden lässt sich folgendermaßen ermitteln:
Man kann jeden der 97 Punkte P_1, P_2, ... , P_{97} mit jedem der 96 anderen unter diesen Punkten durch eine Gerade verbinden. Dabei hat man jede in (a) genannte Gerade genau zweimal erfasst. Also beträgt deren Anzahl

$$\frac{97 \cdot 96}{2} = 97 \cdot 48$$

Die Anzahl der in (b) genannten Geraden beträgt $97 \cdot 3$. Also ist die gesuchte Anzahl $97 \cdot 48 + 97 \cdot 3 + 1 = 4948$.

Hinweis: Man kann auch eine schrittweise Überlegung durchführen:
Für 3 Punkte, die (1) und (2) (mit der Anzahl 3 statt 100) erfüllen, gibt es genau eine gesuchte Gerade. Jeder Punkt, der dann noch so hinzugefügt wird, dass (1) und (2) (mit der jeweils neuen Anzahl n der Punkte) erfüllt bleiben, erbringt genau $n-1$ neue Geraden hinzu. So kommt man auf die gesuchte Anzahl $1 + 3 + 4 + ... + 98 + 99 = 1 + (3 + 99) + (4 + 98) + ... + (50 + 52) + 51 = 1 + 48 \cdot 102 + 51 = 4948$.

Aufgabe 280834:
Für ein Schulsportfest möchte die Klasse $8c$ aus den sieben im 100-m-Lauf besten Schülern eine aus vier Schülern bestehende Mannschaft zum 4×100-m-Staffellauf auswählen.

a) Wie viel verschiedene Mannschaften könnten aus den sieben Schülern ausgewählt werden?
b) Wie viel verschiedene Mannschaften könnten aus den Schülern ausgewählt werden, wenn auf jeden Fall zwei bestimmte der sieben Schüler dabei sein sollen?
c) Wie viel verschiedene Mannschaften könnten aus den Schülern ausgewählt werden, wenn auf jeden Fall drei bestimmte der sieben Schüler dabei sein sollen?
d) In wie viel verschiedenen Reihenfolgen ihrer Starts lassen sich stets die vier Schüler einer Mannschaft zum Staffellauf aufstellen?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Um zunächst einen der sieben Schüler auszuwählen, hat man genau 7 Möglichkeiten.
Um dann einen zweiten Schüler auszuwählen, hat man zu jeder der 7 genannten Möglichkeiten genau 6 Fortsetzungsmöglichkeiten. Von den so gefundenen $7 \cdot 6$ Möglichkeiten führen aber je genau 2 zur gleichen Auswahl von zwei Schülern.
Also gibt es genau $\frac{7 \cdot 6}{2} = 21$ Möglichkeiten der Auswahl von zwei der sieben Schüler.

So kann man fortfahren. Um einen dritten Schüler auszuwählen, hat man zu jeder der 21 Möglichkeiten genau 5 Fortsetzungsmöglichkeiten. Von den so gefundenen $21 \cdot 5$ Möglichkeiten führen aber je genau 3 zur gleichen Auswahl; also gibt es genau 35 Möglichkeiten der Auswahl von drei der sieben Schüler.

Entsprechend findet man: Es gibt 35 Möglichkeiten der Auswahl von vier der sieben Schüler.

b) Sollen auf jeden Fall zwei bestimmte der sieben Schüler dabei sein, so hat man nur noch eine Auswahl von zwei der restlichen fünf Schüler zu treffen. Wie in a) gibt es hierfür genau 10 Möglichkeiten der Auswahl.

c) Sollen auf jeden Fall drei bestimmte der sieben Schüler dabei sein, so hat man nur noch einen der restlichen vier Schüler auszuwählen. Für diese Auswahl gibt es genau 4 Möglichkeiten.

d) Um zunächst den als Ersten startenden unter den vier Schülern auszuwählen, hat man genau 4 Möglichkeiten. In jeder dieser Möglichkeiten hat man für die Auswahl des als Zweiten startenden Schülers genau 3 Möglichkeiten. In jeder der entstandenen 12 Möglichkeiten hat man für den Dritten genau 2 Möglichkeiten; der Vierte steht dann jeweils fest. Also gibt es genau 24 Möglichkeiten der Startreihenfolge einer Mannschaft.

Aufgabe 300831:
Ermittle die Anzahl derjenigen natürlichen Zahlen, die jede der Ziffern 1, 2, 3, ... , 9 genau einmal enthalten und durch 45 teilbar sind!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Jede natürliche Zahl, die jede der Ziffern 1 bis 9 genau einmal enthält, hat wegen $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$ die Quersumme 45 und ist damit durch 9 teilbar.

Von diesen Zahlen sind folglich diejenigen, deren Anzahl gesucht ist, wegen $45 = 9 \cdot 5$ (sowie wegen der Teilerfremdheit von 9 und 5) genau die durch 5 teilbaren. Das sind genau diejenigen, deren letzte Ziffer 5 lautet, da die Ziffer 0 nach Aufgabenstellung nicht vorkommt.

Um die gesuchte Anzahl zu ermitteln, muss man somit untersuchen, wie viele verschiedene Anordnungen sich aus den restlichen acht Ziffern bilden lassen:

Unter Verwendung zweier Ziffern lassen sich genau zwei Anordnungen bilden (z. B. 12, 21).
Bei Hinzunahme einer dritten Ziffer kann diese an erster, zweiter oder dritter Stelle stehen. Folglich ergeben sich aus jeder der zwei Anordnungen (z. B. 12, 21) genau drei neue, insgesamt also $2 \cdot 3 = 6$ Anordnungen.
Nimmt man nun eine vierte Ziffer hinzu, kann diese wiederum an erster, zweiter, dritter oder vierter Stelle in jeder der schon ermittelten sechs Anordnungen aus drei Ziffern auftreten. Folglich sind bei vier Ziffern genau $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ Anordnungen möglich.

Setzt man diese Überlegung fort, kommt man zu dem Schluss, dass sich unter Verwendung von acht Ziffern genau $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 40320$ Anordnungen bilden lassen.
Die gesuchte Anzahl beträgt somit 40320.

Aufgabe 300836:
Im Raum seien zwölf Punkte derart gelegen, dass keine vier dieser Punkte in einer gemeinsamen Ebene liegen.

Ermittle die Anzahl aller derjenigen verschiedenen Tetraeder, deren vier Eckpunkte zu den zwölf gegebenen Punkten gehören!

Hinweis: Jedes Tetraeder ist durch die Menge seiner vier Eckpunkte (die nicht in einer gemeinsamen Ebene liegen) eindeutig bestimmt; irgendwelche Anforderungen an die Reihenfolge oder die gegenseitigen Abstände der Eckpunkte gibt es nicht.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Zu jedem der zwölf Punkte kann man einen der übrigen elf Punkte zusammenstellen und damit genau $12 \cdot 11$ geordnete Paare erhalten. Ebenso kann man genau $12 \cdot 11 \cdot 10$ bzw. $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9$ geordnete Zusammenstellungen von je 3 bzw. von je vier der zwölf Punkte erhalten.

Mit diesen Zusammenstellungen von je vier Punkten wird die Eckenmenge jedes der zu berücksichtigenden Tetraeders erfasst, und zwar je 24 mal. Sind nämlich A,B,C,D die Ecken eines der Tetraeder, so werden sie mit allen geordneten Zusammenstellungen dieser Punkte erfasst. Deren Anzahl kann man folgendermaßen ermitteln:

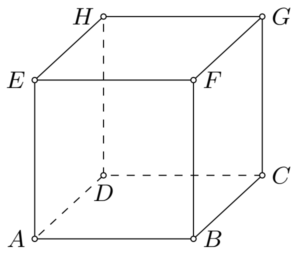
An den ersten Platz einer Zusammenstellung kann jeder der vier Punkte A,B,C,D gesetzt werden, bei jeder dieser Möglichkeiten bleibt für den zweiten Platz die Wahl unter drei der Punkte, und bei jeder der so entstandenen $4 \cdot 3$ Möglichkeiten bleibt für den dritten Platz die Wahl zwischen zwei Möglichkeiten, wonach in jeder der $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ erhaltenen Möglichkeiten auch der vierte Platz feststeht.
Die gesuchte Anzahl der Tetraeder beträgt somit

$$\frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{24} = 11 \cdot 5 \cdot 9 = 495$$

Aufgabe 330843:
Auf einer Ecke eines Würfels der Kantenlänge 1 cm sitzt eine Ameise. Längs jeder Kante des Würfels ist 1 g Honig verteilt. Die Ameise soll zum Endpunkt derjenigen Körperdiagonale gelangen, an deren Anfangspunkt sie sich befindet. Sie soll hierzu einen Weg von genau 7 cm Länge zurücklegen und dabei genau 7 Gramm Honig naschen.

Ermittle die Anzahl aller Wege, die unter diesen Bedingungen möglich sind!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



I. Die Ecken des Würfels seien wie in der Abbildung mit A,B,C,D,E,F,G,H bezeichnet.
Der Anfangspunkt der abzuzählenden Wege sei A, der Endpunkt folglich G.
Von A aus kann eine erste Kante nur entweder nach B oder D oder E gegangen werden. Es genügt, eine dieser Möglichkeiten, etwa die nach B, zu betrachten und die Anzahl der hiermit beginnenden Wege mit 3 zu multiplizieren.

II. Von B aus kann eine zweite Kante nur entweder nach C oder F folgen. Es genügt, etwa die für die Fortsetzung nach C gefundene Anzahl mit 2 zu multiplizieren. Von C aus gibt es wieder genau zwei Fortsetzungsmöglichkeiten:

III. Setzt man von C aus nach G fort, so ist man bereits nach einem Weg von 3 cm Länge im Zielpunkt. Also hat man noch einen Weg der Länge 4 cm von G nach G anzuschließen. Das ist nur durch Umlaufen einer Seitenfläche möglich. Die einzige G enthaltende Seitenfläche, bei der dies ohne Wiederholung einer schon durchlaufenen Kante möglich ist, ist $GHEF$.
Daher kommt man (nach dem Beginn über C,G) genau zu den 2 Wegen $ABCGHEFG$ und $ABCGFEHG$.

IV. Von C aus nach D gibt es genau die beiden Fortsetzungen:

a) Anfangsweg $ABCDH$.
Von H aus dann sofort nach G zu gehen, wäre nicht möglich, da man danach auf einem Weg von 2 cm wieder nach G kommen müsste, was ohne Kantenwiederholung nicht möglich ist. Also verbleibt nur der Weg $ABCDHEFG$.

b) Anfangsweg $ABCDA$.
Von A aus geht es eindeutig nach E. Von dort aus ist auf einem Weg von 2 cm nach G zu gelangen. Hierzu gibt es genau zwei Möglichkeiten; so erhält man die beiden Wege $ABCDAEFG$ und $ABCDAEHG$.

Die Anzahl der in III. und IV. gefundenen fünf Wege ist nach I. und II. mit 3 und 2 zu multiplizieren.
So ergibt sich: Die Anzahl der Wege, die unter den Bedingungen der Aufgabe möglich sind, beträgt $5 \cdot 3 \cdot 2 = 30$.

Aufgabe 330844:
Für ein Dreieck seien folgende Bedingungen gefordert:

(1) Alle drei Seitenlängen des Dreiecks haben, in Zentimetern gemessen, ganzzahlige Maßzahlen.
(2) Der Umfang des Dreiecks beträgt 50 cm.

Ermittle die größtmögliche Anzahl von Dreiecken, die diese Forderungen erfüllen und unter denen sich keine zwei zueinander kongruenten Dreiecke befinden!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Sind a, b, c mit $a \geq b \geq c$ die ganzzahligen Maßzahlen dreier Streckenlängen, so sind diese Längen genau dann die Seitenlängen eines Dreiecks, wenn $a < b + c$ gilt.
Zusammen mit der Bedingung (2) besagt diese Ungleichung $2a < a + b + c = 50$, $a < 25$. Aus $a \geq b \geq c$ folgt andererseits $3a \geq a + b + c > 48$, $a > 16$. Daher kann a nur eine der Zahlen 17, 18, ..., 24 sein.

In der folgenden Tabelle werden zu jeder dieser Zahlen a alle diejenigen Paare (b,c) aufgesucht, mit denen die Gleichung $b + c = 50 - a$ und die Ungleichungen $a \geq b \geq c$gelten:

Man beginnt mit $b = a$ (und folglich $c = 50 - 2a$), dann stellt man fest, ob durch Verkleinern von b um 1 und gleichzeitiges Vergrößern von c um 1 ein weiteres derartiges Paar (b,c) entsteht; dies ist so lange der Fall, bis die Bedingung $b \geq c$ nicht mehr erfüllt wird.
Anschließend wird in der Tabelle die Anzahl der gefundenen Paare vermerkt.

a	$b + c = 50 - a$	Paare (b,c)	Anzahl
17	$b + c = 33$	(17,16)	1
18	$b + c = 32$	(18,14), (17,15), (16,16)	3
19	$b + c = 31$	(19,12), (18,13), (17,14), (16,15)	4
20	$b + c = 30$	(20,10), (19,11), ..., 16,14), (15,15)	6
21	$b + c = 29$	(21,8), (20,9), ..., (16,13), (15,14)	7
22	$b + c = 28$	(22,6), (21,7), ..., (15,13), (14)14)	9
23	$b + c = 27$	(23,4), (22,5), ..., (15,12), (14,13)	10
24	$b + c = 26$	(24,2), (23,3), ..., (14,12), (13,13)	12

Damit enthält die Tabelle für jedes Dreieck der geforderten Art die Maßzahlen seiner Seitenlängen a,b,c. Wie ersichtlich ist, gibt es unter diesen Angaben auch keine zwei, die (wegen Übereinstimmung in allen drei Zahlen a,b,c) zu kongruenten Dreiecken führen würden.

Die gesuchte Anzahl beträgt somit $1 + 3 + 4 + 6 + 7 + 9 + 10 + 12 = 52$.

Aufgabe 340844:
Axel führt einen Kartentrick vor. Er benutzt dazu ein Skatspiel, bestehend aus jeweils 4 Karten der folgenden Arten, denen er folgende Augenwerte zuteilt:

Art der Karte	7	8	9	10	Bube	Dame	König	As
Augenwert	7	8	9	10	2	3	4	11

Seine Freunde sollen, während er nicht im Zimmer ist, nach folgender Vorschrift Kartenstapel bilden:

Für jeden Stapel wird zunächst eine Karte offen hingelegt, und der damit beginnende Stapel erhält so viele Punkte, wie der Augenwert dieser Karte angibt. Dann werden weitere Karten verdeckt auf den Stapel gelegt; für jede dieser Karten wird die Punktzahl des Stapels um 1 erhöht. Dies wird aber nur so lange durchgeführt, bis die Punktzahl 11 erreicht ist; der Stapel ist damit abgeschlossen. Er wird dann umgedreht, so dass die bisher unterste Karte nun verdeckt oben liegt.

1. Beispiel: 7 offen hinlegen vier Karten verdeckt darauf legen, Stapel umdrehen.
2. Beispiel: As offen hinlegen, umdrehen.

Solche Stapel werden einige Male gebildet und nebeneinander auf den Tisch gelegt. Falls am Ende Karten übrig bleiben, werden diese „Restkarten“ einzeln abzählbar und verdeckt neben den Stapel gelegt.

Dann wird Axel herein gerufen. Er behauptet, er könne aus der Anzahl der fertigen Stapel und der Anzahl der Restkarten die Summe der Augenwerte der nunmehr obersten Karten der Stapel finden. Wie ist das möglich?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Bevor der erste Stapel gebildet wurde, war die Anzahl der Restkarten 32. Es sei a_1 der Wert der für den ersten Stapel zu Beginn offen hingelegten Karte. Dann verringert sich die Anzahl der Restkarten um $1 + (11 - a_1) = 12 - a_i$, denn neben der einen aufgedeckten Karte mit Wert a_1 werden noch $11 - a_1$ weitere Karten auf diesen Stapel gelegt.
Analog reduziert jeder weiterer Stapel mit zuerst offen liegendem Kartenwert $a - i$ die Anzahl der nun noch vorhandenen Restkarten um den Wert $12 - a_i$.
Sieht also Axel n Stapel und r Restkarten, so weiß er

$$r = 32 - (12 - a_1) - \cdots - (12 - a_n) = 32 - n \cdot 12 + (a_1 + \cdots + a_n)$$

bzw. $a_1 + \cdots + a_n = n \cdot 12 + r - 32$,
kennt also die Summe der Kartenwerte der zuerst für jeden Stapel ofen ausgelegten Karten, die nach dem Umdrehen nun die obersten Karten eines jeden Stapels sind.

Aufgabe 340846:
Wie viele Paare (x, y) ganzer Zahlen x, y, die die Ungleichung

$$|x - 30| + |y - 10| < 100$$

erfüllen, gibt es insgesamt?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wir betrachten zuerst die Ungleichung (*) $a + b < 100$ und bestimmen die Anzahl der Lösungen von dieser Ungleichung mit nicht-negativen ganzen Zahlen a und b. Dabei unterscheiden wir, ob diese gleich 0 werden, oder verschieden davon sind:

Es gibt genau eine Lösung mit $a = b = 0$.
Für $a = 0$, $b \neq 0$ gibt es genau die 99 Lösungen $b = 1$ bis $b = 99$. Analog gibt es für $a \neq 0$, $b = 0$ genau 99 Lösungen.

Sei nun $a > 0$ und $b > 0$. Für festes a gibt es für b genau die Lösungen $1,2,\ldots,99 - a$, also $99 - a$ verschiedene. Insgesamt gibt es also

$$\sum_{a=1}^{99}(99 - a) = 99 \cdot 99 - \sum_{a=1}^{99} a = 99 \cdot 99 - \frac{99 \cdot 100}{2} = 99 \cdot (99 - 50) = 99 \cdot 49$$

Lösungen in diesem Fall.
Nun zurück zur Ungleichung aus der Aufgabenstellung:
Für jede Lösung (a,b) der Ungleichung (*) mit $a,b \neq 0$ erhält man vier Lösungen der Ungleichung der Aufgabenstellung, da man $x - 30 = \pm a$ und unabhängig davon $y - 10 = \pm b$ wählen kann. Ist einer oder sind beide Werte a, b aber gleich Null, so kann man hierbei nur ein Vorzeichen wählen und erhält $x - 30 = 0$ bzw. $y - 10 = 0$.

Zusammen ergeben sich also für die Ausgangsgleichung folgende Anzahlen von Lösungen:
Ist $a = b = 0$, so erhält man genau $1 \cdot 1 = 1$ Lösung für die Ausgangsgleichung.
Ist $a = 0$ und $b \neq 0$, oder umgekehrt, dann erhält man jeweils genau $99 \cdot 2$, in beiden Fällen zusammen also $99 \cdot 4$, Lösungen der Ausgangsgleichung.
Und sind sowohl a als auch b von 0 verschieden, erhält man daraus $(99 \cdot 49) \cdot 4 = 99 \cdot 196$ Lösungen der Ausgangsgleichung.

Insgesamt erhalten wir damit, dass die Ungleichung aus der Aufgabenstellung genau $99 \cdot 196 + 99 \cdot 4 + 1 = 19801$ ganzzahlige Lösungen besitzt.

IV. Zahlentheorie

IV.I. Primzahlen, Teilbarkeit

I. Runde 1

Aufgabe 010813:
Wenn die Summe von 4 beliebigen natürlichen (positiven ganzen) Zahlen eine ungerade Zahl ist, so ist ihr Produkt eine gerade Zahl.

Probiere es! Beweise die Behauptung!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Beispiel: $2 + 3 + 5 + 7 = 17$ und $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$.

Beweis: Die Summe von vier natürlichen Zahlen ist ungerade, wenn genau ein Summand gerade ist oder wenn genau drei Summanden gerade sind. Ist wenigstens ein Summand gerade, so wird das Produkt gerade.

Aufgabe 020811:
Kann die Summe von drei beliebigen, aber aufeinanderfolgenden natürlichen (positiven ganzen) Zahlen eine Primzahl sein?
Die Antwort ist zu begründen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Summe von drei aufeinander folgenden natürlichen Zahlen ist $n + (n + 1) + (n + 2) = 3n + 3$. Sie ist also durch 3 teilbar, aber verschieden von 3 wegen $n \geq 1$. Damit ist die Summe keine Primzahl.

Aufgabe 030813:
Gegeben sind drei beliebige natürliche Zahlen, die nicht durch 3 teilbar sind.

Beweise, dass entweder die Summe dieser drei Zahlen oder die Summe zweier von ihnen stets durch 3 teilbar ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Beweis: Fall 1:
Alle drei Zahlen lassen den gleichen Rest 1 bzw. 2 bei Division durch 3, dann lässt ihre Summe den Rest 3 bzw. 6, ist also durch 3 teilbar.

Fall 2:
Zwei Zahlen lassen den Rest 1 (bzw. 2) und die dritte den Rest 2 (bzw. 1), dann addiert man eine Zahl, die den Rest 1 lässt, und eine Zahl, die den Rest 2 lässt, und erhält wieder eine durch 3 teilbare Summe.

Da keine weiteren Fälle existieren, folgt somit die Behauptung.

Aufgabe 080814:
Beweise:

> Wenn eine Zahl $100a + b$ (a und b sind natürliche Zahlen) durch 7 teilbar ist, so ist auch die Zahl $a + 4b$ durch 7 teilbar!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Nach der Voraussetzung gilt $100a + b = 7k$ mit ganzem k. Um $4b$ zu erhalten, multipliziert man beide Seiten der Gleichung mit 4 und bekommt $400a + 4b = 4 \cdot 7k$.
Um auf den Term $a + 4b$ zu kommen, formt man folgendermaßen um:

$$\begin{aligned} 399a + a + 4b &= 4 \cdot 7k \\ 7 \cdot 57a + a + 4b &= 4 \cdot 7k \\ a + 4b &= 7(4k - 57a) \end{aligned}$$

Dieser Term $7(4k - 57a)$ ist durch 7 teilbar. Also ist auch $a + 4b$ durch 7 teilbar.

Alternativ-Lösung von cyrix:
Mit $100a+b$ ist auch $100a+b-7\cdot(14a-b) = 2a+8b = 2(a+4b)$ durch 7 teilbar und damit auch $a+4b$, da 2 und 7 teilerfremd sind.

Aufgabe 160813:
Beweise den folgenden Satz:

Wenn von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen die kleinste Zahl gerade ist dann ist das Produkt dieser drei Zahlen durch 24 teilbar.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die kleinste der drei Zahlen ist von der Form $2n$ mit natürlichem n. Von den Zahlen $n, n+1$ ist eine gerade, also ist $n(n+1)$ gerade; folglich ist das zu untersuchende Produkt

$$p = 2n(2n+1)(2n+2) = 2 \cdot 2 \cdot n(n+1)(2n+1)$$

durch 8 teilbar. Von den drei (in p als Faktoren auftretenden) aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist eine durch 3 teilbar; dies gilt somit auch für p. Da 3 und 8 teilerfremd sind, ist p folglich auch durch $3 \cdot 8 = 24$ teilbar, w. z. b. w.

Aufgabe 250813:
Beweise folgenden Satz: Die Summe zweier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen, die beide nicht durch 3 teilbar sind, ist stets durch 3 teilbar.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Für jede natürliche Zahl n gilt:
Entweder ist n durch 3 teilbar oder n lässt bei der Division durch 3 den Rest 1 oder 2. Gleichwertig hiermit ist jeweils die Aussage, dass es eine natürliche Zahl k mit $n = 3k$ bzw. $n = 3k+1$ bzw. $n = 3k+2$ gibt.

Es sei nun n die kleinere von zwei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, die beide nicht durch 3 teilbar sind. Dann folgt:
Da n nicht durch 3 teilbar ist, gibt es eine natürliche Zahl k mit $n = 3k+1$ oder $n3k+2$. Wäre $n = 3k+2$, so wäre die auf n folgende Zahl $n+1 = 3k+3 = 3\cdot(k+1)$ durch 3 teilbar; denn da k eine natürliche Zahl ist, ist auch $k+1$ eine natürliche Zahl.

Also verbleibt nur die Möglichkeit $n = 3k + 1$. Die Summe der beiden aufeinanderfolgenden Zahlen ist somit

$$n + n + 1 = 3k + 1 + 3k + 2 \cdot 6k + 3 = 3 \cdot (2k + 1)$$

Da k eine natürliche Zahl ist, ist es auch $2k+1$; somit ist der verlangte Beweis geführt, dass die genannte Summe durch 3 teilbar ist.

Aufgabe 280813:
Beweise die folgende Aussage!

Für je fünf unmittelbar aufeinanderfolgende natürliche Zahlen gilt: Unter diesen fünf Zahlen gibt es stets genau eine, die durch 5 teilbar ist.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Für jede natürliche Zahl gilt, dass sie entweder durch 5 teilbar ist oder bei der Division durch 5 einen der Reste 1, 2, 3 oder 4 lässt; d. h., es gilt, dass sie eine der Formen $5n$, $5n + 1$, $5n + 2$, $5n + 3$ oder $5n + 4$ hat, wobei n eine natürliche Zahl ist.

a) Ist nun von fünf unmittelbar aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen die kleinste k von der Form $k = 5n$, so ist sie durch 5 teilbar, und die übrigen vier Zahlen lassen bei der Division durch 5 der Reihe nach die Reste 1, 2, 3 und 4, sind also nicht durch 5 teilbar.

b) Ist die kleinste der fünf Zahlen von der Form $k = 5n + 1$, so ist die größte der Zahlen von der Form $5n + 1 + 4 = 5n + 5 = 5(n + 1)$, also durch 5 teilbar. Die übrigen vier Zahlen lassen bei der Division durch 5 wiederum der Reihe nach die Reste 1, 2, 3 und 4.

c) Ist k von der Form $k = 5n+2$, so ist die vierte der Zahlen von der Form $5n+2+3 = 5n+5 = 5(n+1)$, also durch 5 teilbar, während die vier übrigen Zahlen der Reihe nach bei der Division durch 5 die Reste 2, 3, 4 und 1 lassen.

d) Ist k von der Form $k = 5n+3$, so ist die dritte der Zahlen von der Form $5n+3+2 = 5n+5 = 5(n+1)$, also durch 5 teilbar, während die vier übrigen Zahlen der Reihe nach bei der Division durch 5 die Reste 3, 4, 1 und 2 lassen.

e) Ist k schließlich von der Form $k = 5n + 4$, so ist die zweite der Zahlen von der Form $5n + 4 + 1 = 5n + 5 = 5(n + 1)$, also durch 5 teilbar, während die übrigen vier Zahlen bei Division durch 5 der Reihe nach die Reste 4,1, 2 und 3 lassen.

Damit ist in jedem möglichen Fall der verlangte Beweis geführt.

II. Runde 2

Aufgabe 020821:
Zu beweisen ist folgender Satz:

Wenn sich der Bruch $\frac{a-b}{a+b}$ nicht kürzen lässt, dann ist stets auch $\frac{a}{b}$ unkürzbar.

Lösung von Carsten Balleier:
Man kann diesen Satz indirekt beweisen. Das bedeutet, dass man die äquivalente Umkehraussage beweist, also: Wenn $\frac{a}{b}$ kürzbar ist, dann ist auch $\frac{a-b}{a+b}$ kürzbar.

Die Voraussetzung bedeutet, dass a und b einen gemeinsamen Teiler haben, dieser sei m. Damit gilt $a = ma'$ und $b = mb'$, weiterhin

$$\frac{a}{b} = \frac{ma'}{mb'} = \frac{a'}{b'}.$$

Setzt man das in den Term der Behauptung ein, sieht man, dass er tatsächlich kürzbar ist:

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{ma'-mb'}{ma'+mb'} = \frac{m(a'-b')}{m(a'+b')} = \frac{a'-b'}{a'+b'}. \quad \square$$

Aufgabe 030822:
Beweise die folgende Behauptung:

Wenn bei einer sechsstelligen Zahl die ersten drei Ziffern mit den letzten drei Ziffern übereinstimmen (z. B. 781781), so ist die Zahl stets durch 7, 11 und 13 teilbar.

Lösung von Steffen Polster:
Eine sechsstellige Zahl z, mit den ersten drei und letzten drei Ziffern a,b,c, kann man darstellen als:

$$z = 100000 \cdot a + 10000 \cdot b + 1000 \cdot c + 100 \cdot a + 10 \cdot b + c.$$

$$= 100100 \cdot a + 10010 \cdot b + 1001 \cdot c = 1001 \cdot (100a + 10b + a)$$

Da 1001 die Primteiler 7, 11 und 13 besitzt, wird $z = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot (100a + 10b + a)$.
Damit ist z durch 7, 11 und 13 teilbar.

Aufgabe 070824:
Beweise den Satz: Unter n aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ($n \geq 2$) gibt es stets eine, die durch n teilbar ist.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wir bezeichnen die größte der n aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen mit g. Sie lasse bei der Division durch n den Rest r mit $0 \leq r \leq n-1$, es gelte also $g = qn + r$ (q ganzzahlig).
Daher gehört die durch n teilbare Zahl $g - r$ zu den n aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen.

Aufgabe 110821:
Beweise den folgenden Satz:

Wenn p eine Primzahl größer als 3 ist, dann ist genau eine der Zahlen $p-1$, $p+1$ durch 6 teilbar.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Vorüberlegungen:
Definition Primzahl: Eine Primzahl ist eine Zahl, die nur durch 1 und durch sich selbst teilbar ist.

Teilbarkeitssatz: Wenn eine Zahl durch 2 und durch 3 teilbar ist, dann ist sie auch durch 6 teilbar.

Man muss also beweisen, dass entweder $p-1$ oder $p+1$ durch 2 und durch 3 teilbar ist, um zu beweisen, dass entweder $p-1$ oder $p+1$ durch 6 teilbar ist.

Teilbarkeit durch 2:
p ist eine Primzahl und größer als 3, darf demnach nicht durch 2 teilbar sein, da eine Primzahl nur durch 1 und durch sich selbst teilbar ist. Da jedoch jede zweite Zahl durch 2 teilbar ist, müssen die Nachbarzahlen

von p ($p-1$ und $p+1$) beide durch 2 teilbar sein.

Teilbarkeit durch 3:
p kann nach der Definition von Primzahlen (s. oben) nicht durch 3 teilbar sein, da p eine Primzahl ist. Geht man davon aus, dass $p-1$ auch nicht durch 3 teilbar ist, muss $p+1$ aber durch 3 teilbar sein, da jede dritte Zahl durch 3 teilbar ist. Dies gilt auch für $p-1$, wenn $p+1$ nicht durch 3 teilbar ist. Es ist also entweder $p-1$ oder $p+1$ durch 3 teilbar.

$\Rightarrow$ Da $p-1$ und $p+1$ durch 2 und entweder $p-1$ oder $p+1$ durch 3 teilbar sind, ist entweder $p-1$ oder $p+1$ durch 6 teilbar.

Aufgabe 150822:
Ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen $n \geq 1$, für die unter den sechs Zahlen $n+1$, $n+2$, $n+3$, $n+4$, $n+5$, $n+6$ ein Paar gefunden werden kann, in dem die erste Zahl des Paares ein echter Teiler der zweiten Zahl des Paares ist!

Nenne (für jedes solche n) alle derartigen Paare!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn bereits das Doppelte der kleinsten der sechs Zahlen $(n+1)$ die größte $(n+6)$ übertrifft, also $2(n+1) > (n+6)$ und mithin $n > 4$ gilt, kann aus den sechs Zahlen sicher kein geordnetes Paar mit den geforderten Teilbarkeitseigenschaften gefunden werden.

Da aus $n > 4$ stets auch $2(n+1) > (n+6)$ folgt, kann n höchstens gleich $1, 2, 3, 4$ sein. Analog stellt man fest, dass höchstens für $n = 1$ eine der sechs Zahlen das Dreifache einer anderen sein kann und dass das Vierfache wegen $4(n+1) \geq (n+7) > (n+6)$ nicht auftreten kann. Aus analogen Gründen sind höhere Vielfache erst recht nicht möglich.

Es sei $n = 1$.
Unter den Zahlen 2, 3, 4, 5, 6, 7 gilt $2|4$, $2|6$ und $3|6$. Weitere Teilbarkeitsbeziehungen treten nicht auf. Folglich erhalten wir in diesem Fall genau die Zahlenpaare $(2;4), (2;6), (3;6)$.

Es sei $n = 2$.
Unter den Zahlen 3, 4, 5, 6, 7, 8 treten genau die Teilbarkeitsbeziehungen $3|6$ und $4|8$ auf. Man erhält mithin genau die Paare $(3;6), (4;8)$.

Es sei $n = 3$.
Dann erhält man aus den Zahlen 4, 5, 6, 7, 8, 9 genau das Paar $(4;8)$.

Es sei $n = 4$.
Aus den Zahlen 5, 6, 7, 8, 9, 10 erhält man genau das Paar (5;10). Damit sind alle gesuchten Paare ermittelt.

Aufgabe 200822:
Ermittle alle Paare $(a;\, b)$ natürlicher Zahlen mit $a < b$, die folgende Eigenschaften besitzen:

Die Summe der Zahlen a und b beträgt 192.
Der größte gemeinsame Teiler der Zahlen a und b ist 24.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn $(a;b)$ ein Paar natürlicher Zahlen mit den geforderten Eigenschaften ist, so folgt:

24 ist ein Teiler sowohl von a als auch von b, also gibt es natürliche Zahlen p, q mit $a = 24p$, $b = 24q$.
Da 24 sogar der größte gemeinsame Teiler von a und b ist, folgt ferner: p und q sind zueinander teilerfremd. (1)
Aus $a < b$ folgt weiter $24p < 24q$, also $p < q$; (2)
aus $a + b = 192$ folgt $24p + 24q = 192$, also $p + q = 8$. (3)

Nun werden die Forderungen (2) und (3) nur durch folgende natürliche Zahlen p,q erfüllt:

p	q
0	8
1	7
2	6
3	5

Forderung (1) ist hierbei nur für $p = 1, q = 7$ und für $p = 3, q = 5$ erfüllt. Daher können nur die Paare $(24; 168), (72; 120)$ die geforderten Eigenschaften besitzen.

Sie besitzen diese Eigenschaften; denn es gilt:
$24 < 168$, $72 < 120$; $24 + 168 = 192$, $72 + 120 = 192$.
Wegen $168 = 7 \cdot 24$ ist 24 der ggT von 24 und 168, wegen $72 = 3 \cdot 24$ und $120 = 5 \cdot 24$ ist 24 der ggT von 72 und 120, da 3 und 5 teilerfremd sind.

Aufgabe 280822:
Beweise die folgende Aussage! Unter je fünf unmittelbar aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen gibt es mindestens eine, höchstens aber zwei, die durch 3 teilbar sind.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Nach dem Satz, dass es unter drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen genau eine durch 3 teilbare gibt, folgt erstens, dass es erst recht unter je fünf aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen mindestens eine durch 3 teilbare Zahl gibt.

Ferner folgt, dass es unter je sechs, also erst recht unter fünf aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen höchstens zwei durch 3 teilbare Zahlen geben kann. Zu beiden Teilen der Aufgabenstellung ist damit der geforderte Beweis gebracht.

III. Runde 3

Aufgabe V10832:
Beweise: Das Produkt zweier ungerader Zahlen ist stets ungerade!

Lösung von Steffen Polster:
Jede ungerade Zahl lässt sich in der Form $2x + 1$, wobei x ein natürliche Zahl ist, darstellen. Es seien $a = 2m + 1, b = 2n + 1$, $m,n \in \mathbb{N}$. Dann wird für ihr Produkt

$$ab = (2m + 1)(2n + 1) = 4mn + 2n + 2m + 1 = 2(2mn + n + m) + 1$$

Da $2mn + m + n$ eine natürliche Zahl ist, ist das Produkt ungerade. w. z. b. w.

Aufgabe 030831:
Welches ist die kleinste achtstellige Zahl, die aus lauter verschiedenen Ziffern besteht und durch 36 teilbar ist? Begründe, dass es die kleinste derartige Zahl ist!

Lösung von Korinna Grabski:
Eine Zahl ist durch 36 teilbar, wenn sie durch 9 und 4 teilbar ist.
Eine Zahl ist durch 9 teilbar, wenn die Quersumme der Zahl durch 9 teilbar ist.
Eine Zahl ist durch 4 teilbar, wenn die Zahl der letzten 2 Ziffern durch 4 teilbar ist.

Die Zahl soll aus 8 verschiedenen Ziffern bestehen, 10 Ziffern (0-9) gibt es. Es müssen also 2 Ziffern weggelassen werden, so dass die Summe der restlichen Ziffern durch 9 teilbar ist. Dafür kommen nur die Zahlenpaare (0;9), (1;8), (2;7), (3;6) und (4;5) in Frage. Damit gibt es folgende minimal mögliche Zahlen:

$$(0;9) - 12345678 \qquad (1;8) - 20345679 \qquad (2;7) - 10345689$$
$$(3;6) - 10245789 \qquad (4;5) - 10236789$$

Das Paar (4;5) ermöglicht die kleinste Zahl, allerdings müssen die Ziffern so angeordnet werden, dass die Zahl durch 4 teilbar ist. Damit die Zahl möglichst klein ist, sollte die größeren Ziffern weiter hinten stehen. Die durch 4 teilbare Zahl aus den größtmöglichen 2 Ziffern ist dann 96. Es müssen also nur noch die letzten 4 Ziffern umsortiert werden.

Dies ergibt dann die Zahl 10237896.

Aufgabe 070834:
Es sei a eine positive ganze Zahl.

Zeige, dass der Bruch $\frac{a^2-a+1}{a^2+a-1}$ weder durch 2 noch durch 3 gekürzt werden kann!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(I) Ist a gerade, so ist a^2 gerade, also auch $a^2 - a$; folglich ist dann $a^2 - a + 1$ ungerade.
Ist a ungerade, so ist a^2 ungerade, also $a^2 - a$ gerade und folglich $a^2 - a + 1$ ungerade.
Daher ist der Zähler stets ungerade, also kann der Bruch nicht durch 2 gekürzt werden. (Entsprechend könnte man den Beweis auch durch alleinige Untersuchung des Nenners führen.)

(II) Ist a durch 3 teilbar, so auch a^2, also auch $a^2 - a$; folglich ist dann $a^2 - a + 1$ nicht durch 3 teilbar. (Ähnlich folgt: auch $a^2 + a - 1$ nicht.)
Lässt a bei Division durch 3 den Rest 1, so auch a^2; folglich ist dann $a^2 - a$ durch 3 teilbar, also $a^2 - a + 1$ nicht. (Ähnlich: auch $a^2 + a - 1$ nicht.)
Lässt a bei Division durch 3 den Rest 2, so lässt a^2 bei Division durch 3 den Rest 1; folglich ist dann $a^2 + a$ durch 3 teilbar, also $a^2 + a - 1$ nicht.

Daher ist von den beiden Zahlen $a^2 - a + 1$, $a^2 + a - 1$ stets (mindestens) eine nicht durch 3 teilbar, somit kann der Bruch nicht durch 3 gekürzt werden.

Aufgabe 090831:
Die Altersangaben (in vollen Lebensjahren ausgedrückt) einer Familie - Vater, Mutter und ihre zwei Kinder - haben folgende Eigenschaften:

Das Produkt aller vier Lebensalter beträgt 44950; der Vater ist 2 Jahre älter als die Mutter.

Wie alt sind die vier Familienmitglieder?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Zerlegung von 44 950 in Primfaktoren lautet $44950 = 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 29 \cdot 31$. Daher gibt es genau die folgenden

Möglichkeiten, 44950 in ein Produkt aus genau 4 natürlichen Zahlen zu zerlegen:

$$\begin{aligned}
&(1) \quad (2\cdot 5)\cdot 5\cdot 29\cdot 31 = 10\cdot 5\cdot 29\cdot 31,\\
&(2) \quad (2\cdot 29)\cdot 5\cdot 5\cdot 31 = 58\cdot 5\cdot 5\cdot 31,\\
&(3) \quad (2\cdot 31)\cdot 5\cdot 5\cdot 29 = 62\cdot 5\cdot 5\cdot 29,\\
&(4) \quad (5\cdot 5)\cdot 2\cdot 29\cdot 31 = 25\cdot 2\cdot 29\cdot 31,\\
&(5) \quad (5\cdot 29)\cdot 2\cdot 5\cdot 31 = 145\cdot 2\cdot 5\cdot 31,\\
&(6) \quad (5\cdot 31)\cdot 2\cdot 5\cdot 29 = 155\cdot 2\cdot 5\cdot 29,\\
&(7) \quad (29\cdot 31)\cdot 2\cdot 5\cdot 5 = 899\cdot 2\cdot 5\cdot 5
\end{aligned}$$

Da die Altersdifferenz der beiden Eltern 2 Jahre beträgt, können höchstens die Fälle (1) und (4) Lösung sein. Von ihnen ist der Fall (4) nicht real; denn nach ihm müsste die 29jährige Mutter ein 25jähriges Kind haben.
Somit verbleibt nur Möglichkeit (1); d. h., die gesuchten Altersangaben können nur 31, 29, 10, 5 sein. Umgekehrt erfüllen diese Angaben auch tatsächlich alle Bedingungen der Aufgabe.

Aufgabe 100834:
Es seien a, b natürliche Zahlen, und es gelte $a > b$.

Gib für a und b Bedingungen an, so dass folgendes gilt: Die Differenz der Quadrate von a und b ist genau dann eine Primzahl, wenn diese Bedingungen sämtlich erfüllt sind!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wegen $a > b$ gilt $a^2 - b^2 > 0$. Wegen $(a - b) \geq (a + b)$ ist $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ genau dann Primzahl, wenn $a - b = 1$ und $a + b$ Primzahl ist.

Aufgabe 120832:
Beweise den folgenden Satz:

Sind a, b, c ($a \geq b \geq c$) drei beliebige natürliche Zahlen, dann ist die Summe dieser Zahlen oder eine der aus zwei dieser Zahlen gebildeten Differenzen durch 3 teilbar.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es sind zwei Fälle zu unterscheiden:

Fall 1: Die bei der Division der Zahlen a, b, c durch 3 auftretenden Reste sind paarweise verschieden. Es lasse o. B. d. A. die Zahl a den Rest 0, die Zahl b den Rest 1 und die Zahl c den Rest 2. Dann lassen sich a, b, c in folgender Form schreiben:

$$a = 3m \qquad ; \qquad b = 3n + 1 \qquad ; \qquad c = 3s + 2$$

mit natürlichen Zahlen m, n, s. Nun gilt:

$$a + b + c = 3m + 3n + 1 + 3s + 2 = 3(m + n + s + 1)$$

d. h. $3|(a + b + c)$.

Fall 2: Es gibt unter den Zahlen a, b, c mindestens zwei Zahlen, die bei Division durch 3 den gleichen Rest r lassen. Das seien o. B. d. A. die Zahlen a und b.
Dann lassen sich diese Zahlen in folgender Form schreiben:

$$a = 3m + r \qquad ; \qquad b = 3n + r$$

mit natürlichen Zahlen m, n, r, wobei $0 \leq r \leq 2$ gilt. Nun gilt:

$$a - b = 3m + r - (3n + r) = 3(m - n) \qquad \text{d. h.} \qquad 3|(a - b)$$

Aufgabe 130832:
Zeige, dass für jede Primzahl $p > 5$ das Produkt $(p-2)(p-1)p(p+1)(p+2)$ durch 360 teilbar ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Von den fünf aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen $p-2$, $p-1$, p, $p+1$, $p+2$ ist eine durch 5 teilbar. Da p Primzahl ist und $p > 5$ gilt, ist p nicht durch 5 teilbar. Folglich ist eine der Zahlen $p-2$, $p-1$, $p+1$, $p+2$ durch 5 teilbar.

Da $p \neq 2$ ist, ist p ungerade. Daher ist jede der beiden Zahlen $p-1$ und $p+1$ gerade, und eine von beiden ist wenigstens durch 4 teilbar. Folglich ist ihr Produkt durch 8 teilbar.
Da $p \neq 3$ ist, ist p nicht durch 3 teilbar. Mithin sind entweder die beiden Zahlen $p-2$ und $p+1$ oder die beiden Zahlen $p-1$ und $p+2$ jeweils durch 3 teilbar. Also ist ihr Produkt durch 9 teilbar.

Aus all dem folgt, dass das Produkt $(p-2)(p-1)(p+1)(p+2)$ durch 5, 8 und 9 und, da diese Zahlen paarweise teilerfremd sind, auch durch $5 \cdot 8 \cdot 9 = 360$ teilbar ist, w. z. b. w.

Aufgabe 140832:
Von zwei Primzahlen wird folgendes gefordert:

a) Ihre Summe ist eine Primzahl.
b) Multipliziert man diese Summe mit dem Produkt der zuerst genannten beiden Primzahlen, so erhält man eine durch 10 teilbare Zahl.

Man gebe alle Primzahlen an, die diese Forderungen erfüllen.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, zwei Primzahlen P_1, P_2 haben die verlangten Eigenschaften. Eine der Primzahlen P_1 und P_2 muss wegen (a) 2 sein, da die Summe ungerader Primzahlen stets größer als 2 und durch 2 teilbar ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $P_1 = 2$.

Wegen (b) gibt es eine natürliche Zahl n, so dass

$$(2 + P_2) \cdot 2P_2 = 10n \qquad \text{also} \qquad (2 + P_2)P_2 = 5n$$

ist. Wegen der Eindeutigkeit der Zerlegung einer natürlichen Zahl in Primfaktoren gilt entweder $2 + P_2 = 5$, d. h. $P_2 = 3$ oder $P_2 = 5$.

Also erfüllen höchstens die Primzahlen $(2; 3)$ und $(2; 5)$ die Bedingungen. In der Tat haben sie die verlangten Eigenschaften; denn ihre Summen $P_1 + P_2$ sind 5 bzw. 7, jeweils also eine Primzahl.
Die Produkte $(P_1 + P_2)P_1P_2$ sind 30 bzw. 70, jeweils also durch 10 teilbar.

Aufgabe 150832:
Beweise, dass sich alle Primzahlen $p > 3$ in der Form $6n + 1$ oder $6n - 1$ schreiben lassen, wobei n eine von Null verschiedene natürliche Zahl ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Jede Primzahl $p > 3$ ist weder durch 2 noch durch 3 teilbar und daher von keiner der Formen

$$6n = 2 \cdot 3n; \qquad 6n+2 = 2(3n+1); \qquad 6n+3 = 3(2n+1); \qquad 6n+4 = 2(3n+2)$$

mit ganzzahligem n. Da sie aber wie jede ganze Zahl von einer der Formen $6n+r$ mit ganzzahligen n, r und $0 \leq r \leq 5$ ist, gilt entweder (1) $p = 6n+1$ (n ganzzahlig) oder $p = 6m+5 = 6(m+1)-1$ (m ganzzahlig), also mit $n = m+1$ und (2) $p = 6n-1$ (n ganzzahlig).

Wäre $n \leq 0$ in (1) oder (2), so ergäbe sich der Widerspruch $p \leq 1$ bzw. $p \leq -1$. Daher ist in beiden Fällen die ganze Zahl $n \geq 1$, w. z. b. w.

Aufgabe 180834:
Beweise folgenden Satz:

Ist p eine Primzahl größer als 3, so ist die Zahl $(p-1)(p+1)$ durch 24 teilbar.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die natürlichen Zahlen $p-1, p, p+1$ sind drei aufeinanderfolgende Zahlen. Von diesen ist genau eine durch 3 teilbar.
Die Zahl p kann dies als eine Primzahl $p > 3$ nicht sein, also muss es eine der Zahlen $p-1$, $p+1$ sein. Folglich ist das Produkt $(p-1)(p+1)$ durch 3 teilbar.

Da p eine Primzahl und größer als 3 ist, ist p ungerade; $p-1$ und $p+1$ sind daher zwei aufeinanderfolgende gerade Zahlen. Von diesen Zahlen ist stets genau eine durch 2 und die andere durch 4 teilbar. Folglich ist das Produkt $(p-1)(p+1)$ durch 8 teilbar.

Da 3 und 8 teilerfremd sind, ist somit $(p-1)(p+1)$ durch $3 \cdot 8 = 24$ teilbar, w. z. b. w.

Aufgabe 220831:
Cathrin fragt an einem Tag des Jahres 1981 ihren Großvater nach seinem Geburtsjahr. Der Großvater, ein Freund von Knobelaufgaben, antwortete:

> „Ich bin älter als 65 Jahre, aber jünger als 100 Jahre. Die Jahreszahl meiner Geburt ist weder durch 2 noch durch 3 noch durch 5 teilbar. Der Rest, der bei der Division dieser Jahreszahl durch 60 entsteht, ist keine Primzahl."

Untersuche, ob diese Angaben insgesamt für ein Geburtsjahr zutreffen können und ob sie das Geburtsjahr eindeutig festlegen! Wie lautet dann das Geburtsjahr des Großvaters?

Hinweis: Die Jahreszahl soll vollständig angegeben werden, also z. B. nicht 11 sondern 1911.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn die Angaben für ein Geburtsjahr zutreffen, so folgt:
Da der Großvater an einem Tag des Jahres 1981 älter als 65 Jahre und jünger als 100 Jahre war, ist er vor dem entsprechenden Datum des Jahres 1916 und nach dem entsprechenden Datum des Jahres 1881 geboren.
Die Jahreszahl seiner Geburt ist also eine der Zahlen 1881, 1882, ..., 1916.
Von diesen sind nur die folgenden weder durch 2 noch durch 3 noch durch 5 teilbar:

$$1883, 1889, 1891, 1897, 1901, 1903, 1907, 1909, 1913$$

Diese Zahlen lassen bei Division durch 60 folgende Reste: 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 49, 53.
Hiervon ist nur 49 keine Primzahl. Daher können die Angaben nur für das Geburtsjahr 1909 zutreffen.

II. Sie treffen hierfür zu; denn wenn der Großvater 1909 geboren wurde, so war er an einem Tag des Jahres 1981 entweder 7l oder 72 Jahre alt, also älter als 65 und jünger als 100 Jahre; ferner ist 1909 weder durch 2 noch durch 3 noch durch 5 teilbar und lässt bei Division durch 60 den Rest 49, der keine Primzahl ist.

Aus I. und II. folgt: Die Angaben können insgesamt zutreffen, und sie legen das Geburtsjahr eindeutig fest. Es lautet 1909.

Aufgabe 230834:
Ermittle die Anzahl aller derjenigen natürlichen Zahlen von 1 bis 1984, die durch 5, aber nicht durch 7 und nicht durch 11 teilbar sind!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Für jede natürliche Zahl $n > 0$ gilt:
Durchläuft man die natürlichen Zahlen von 1 bis 1984 der Reihe nach, so ist dabei immer wieder genau jede n-te Zahl durch n teilbar. Daraus folgt:
Die Anzahl der durch n teilbaren unter den Zahlen von 1 bis 1984 ergibt sich bei der Division von 1984 durch n mit Rest als dabei auftretender Quotient. Dies wird im folgenden wiederholt angewendet:

Wegen $1984 : 5 = 396{,}8$, gibt es unter den Zahlen von 1 bis 1984 genau 396 Zahlen, die durch 5 teilbar sind.
Unter ihnen sind aber auch solche Zahlen, die außer durch 5 auch durch 7 und mithin (da 5 und 7 teilerfremd sind) durch 35 teilbar sind. Wegen $1984 : 35 = 56, \dots$, sind das genau 56 Zahlen.
Ferner wurden bei den durch 5 teilbaren Zahlen alle diejenigen mitgezählt, die außer durch 5 auch durch 11 und mithin (da 5 und 11 teilerfremd sind) durch 55 teilbar sind. Wegen $1984 : 55 = 35, \dots$, sind das genau 36 Zahlen.

Subtrahiert man nun von der Anzahl 396 die anschließend soeben ermittelten Anzahlen 56 und 36, so werden diejenigen Zahlen zweimal erfasst, die sowohl durch 5 als auch durch 7 als auch durch 11 und mithin (wegen der paarweisen Teilerfremdheit von 5, 7 und 11) durch 385 teilbar sind. Wegen $1984 : 385 = 5, \dots$, sind das genau 5 Zahlen.

Folglich gibt es wegen $396 - 56 - 36 + 5 = 309$ unter den natürlichen Zahlen von 1 bis 1984 genau 309 Zahlen, die durch 5, aber nicht durch 7 und nicht durch 11 teilbar sind.

Alternativ-Lösung von cyrix:
Gesucht ist die Anzahl aller natürlichen Zahlen n der Form $n = 5k$, wobei $1 \leq k \leq 396$ eine natürliche Zahl, die weder durch 7 noch 11 teilbar ist, ist. (Die Größenbeschränkung an k folgt aus $1 \leq n \leq 1984$; die Teilbarkeitsaussagen aus der Teilerfremdheit von 5; 7 und 11.)
Unter den natürlichen Zahlen von 1 bis 396, die k durchlaufen kann, sind genau $\left[\frac{396}{7}\right] = 56$ durch 7, genau $\left[\frac{396}{11}\right] = 36$ durch 11 und genau $\left[\frac{396}{77}\right] = 5$ durch 77 teilbar. Dabei sei $[x]$ der ganzzahlige Anteil von x, also die größte ganze Zahl z, die $z \leq x$ erfüllt.
Insbesondere sind also von den natürlichen Zahlen k zwischen inklusive 1 und 396 genau $56+36-5 = 87$ durch mindestens eine der beiden Primzahlen 7 bzw. 11 und damit genau $396 - 87 = 309$ durch keine der beiden teilbar.
Damit sind auch genau 309 der natürlichen Zahlen $n = 5k$ zwischen inklusive 1 und 1984 durch 5, aber weder 7 noch 11 teilbar.

Aufgabe 260832:
Ermittle alle diejenigen Paare $(p;\ q)$ von Primzahlen, die die folgenden Bedingungen (1), (2), (3) erfüllen!

(1) Die Differenz $q - p$ ist größer als 0 und kleiner als 10.

(2) Die Summe $p + q$ ist das Quadrat einer natürlichen Zahl n.

(3) Addiert man zu dieser Zahl n die Summe von p und q, so erhält man 42.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

I. Wenn ein Paar $(p; q)$ von Primzahlen zusammen mit einer natürlichen Zahl n die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt, so folgt:

Nach (2) gilt $p+q = n^2$, nach (3) gilt $n+p+q = 42$, wegen der vorigen Gleichung also $n+n^2 = 42$, d. h. $n(n + 1) = 42$ (4).

Die einzigen Möglichkeiten, 42 als Produkt zweier natürlicher Zahlen darzustellen, sind (bis auf die Reihenfolge der Faktoren) $42 = 1 \cdot 42 = 2 \cdot 21 = 3 \cdot 14 = 6 \cdot 7$.

Von diesen Darstellungen enthält nur $6 \cdot 7$ zwei Faktoren der Gestalt n und $n + 1$, d. h. aus (4) (für natürliche Zahlen n) folgt $n = 6$.

Nach (2) gilt somit $p + q = 36$. Also ist p eine der Primzahlen kleiner als 36, d. h. eine der Zahlen 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, und q ist jeweils die entsprechende der Zahlen 34, 33, 31, 29, 25, 23, 19, 17, 13, 7, 5.

Von diesen Möglichkeiten scheiden alle außer $p = 17$, $q = 19$ aus, da für sie entweder $q - p \geq 10$ oder $q - p < 0$ wird, also (1) nicht erfüllt ist (einige auch deswegen, weil bei ihnen q keine Primzahl ist).

Also kann nur das Paar $(p; q) = (17; 19)$ alle Bedingungen der Aufgabe erfüllen.

II. Es erfüllt diese Bedingungen; denn 17 und 19 sind Primzahlen, es gilt $0 < 19 - 17 < 10$, $17 + 19 = 36 = 6^2$ und $6 + 17 + 19 = 42$. Also erfüllt genau das Paar $(17; 19)$ die Bedingungen der Aufgabe.

Andere Möglichkeiten, von (4) auf $n = 6$ zu schließen:

1. Für alle natürlichen Zahlen $n < 6$ ist $n(n + 1) < 6 \cdot 7$, für $n > 6$ ist $n(n + 1) > 6 \cdot 7$.

   Also kann unter den natürlichen Zahlen n nur $n = 6$ die Gleichung $n(n + 1) = 42$ erfüllen.

2. Bei Kenntnis der Lösungsformel quadratischer Gleichungen (oder nach Herleitung, etwa vermittels $(n + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} = 42$) erhält man:

   Von den beiden Lösungen
   $$n_{1;2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 42} = \frac{1}{2}(-1 \pm 13)$$
   der quadratischen Gleichung $n^2 + n - 42 = 0$ ist nur $n_1 = 6$ eine natürliche Zahl.

Aufgabe 300834:
Man beweise: Für jede natürliche Zahl $n > 0$ befindet sich stets unter den natürlichen Zahlen $n - 1$, n, $n + 1$ und $n^2 + 1$ eine Zahl, die durch 5 teilbar ist.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Jede natürliche Zahl n ist mit einer geeigneten natürlichen Zahl k von einer der Formen $5k$, $5k+1$, $5k+2$, $5k + 3$, $5k + 4$.
Ist $n = 5k$, so ist n durch 5 teilbar.
Ist $n = 5k + 1$, so ist $n - 1 = 5k$ durch 5 teilbar.
Ist $n = 5k + 2$, so ist $n^2 + 1 = 25k^2 + 20k + 5 = 5(5k^2 + 4k + 1)$ durch 5 teilbar.
Ist $n = 5k + 3$, so ist $n^2 + 1 = 25k^2 + 30k + 10 = 5(5k^2 + 6k + 2)$ durch 5 teilbar.
Ist $n = 5k + 4$, so ist $n + 1 = 5(k + 1)$ durch 5 teilbar.

Damit ist der verlangte Beweis geführt.

Alternativ-Lösung von cyrix:
Das Produkt dieser fünf natürlichen Zahlen ist $n^5 - n$, welches nach dem kleinen Satz von Fermat durch 5 teilbar ist, sodass es auch mindestens einer der Faktoren ist.

IV.II. (Dezimal-)Zahldarstellung, Reste

I. Runde 1

Aufgabe 040814:
Die Zahl 62**427 ist durch 99 teilbar.

Bestimme die fehlenden Ziffern, und gib an, wie du sie gefunden hast! Wie viel Lösungen gibt es?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Quersumme der bis jetzt vorhandenen Ziffern der Zahl $62 * *427$ beträgt 21. Da sie durch 9 teilbar ist, muss ihre Quersumme ebenfalls durch 9 teilbar sein, somit kommen folgende Quersummen in Frage: 27 und 36.

Folgende Zahlen ergeben eine dieser Quersummen:

$$6215427, 6251427, 6224427, 6242427, 6233427, 6269427, 6296427, 6278427, 6287427$$

Nun muss überprüft werden, welche dieser Zahlen zusätzlich durch die Zahl 11 teilbar sind. Somit erhält man genau eine Zahl die durch 99 teilbar ist, und zwar: 6224427.

Aufgabe 120811:
Ermittle alle dreistelligen natürlichen Zahlen z, von denen jede die folgenden Bedingungen erfüllt:

(1) Die Quersumme der Zahl z beträgt 12

(2) Die aus der Zehner- und aus der Einerziffer (in dieser Reihenfolge) der Zahl z gebildete zweistellige Zahl ist das Fünffache der aus der Hunderterziffer von z bestehenden (einstelligen) Zahl.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Hunderterziffer der gesuchten Zahl z kann nur eine der Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 sein.
Ermittelt man nach (2) dazu jeweils die beiden anderen Ziffern, so erhält man genau die Zahlen 105, 210, 315, 420, 525, 630, 735, 840, 945.
Von ihnen haben genau die Zahlen 525 und 840 die Quersumme 12, erfüllen somit auch (1) und sind damit die sämtlichen Lösungen der Aufgabe.

Aufgabe 130811:
Man ermittle alle Möglichkeiten, eine vierstellige ungerade (natürliche) Zahl z so anzugeben, dass sie folgende Eigenschaften hat:

(1) Die Zahl z hat vier verschiedene Ziffern.
(2) Das Produkt aus der zweiten und der dritten Ziffer von z ist 21 mal so groß wie das Produkt aus der ersten und der vierten Ziffer.
(3) Die kleinste der Ziffern von z steht an erster, die größte an zweiter Stelle.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Sind a, b, c, d in dieser Reihenfolge die Ziffern einer Zahl z mit den geforderten Eigenschaften, so gilt wegen (3) $a < d$ sowie $b > c$. Ferner gilt $1 \leq a,b,c,d \leq 9$ und somit wegen (1)

$$b \cdot c \leq 8 \cdot 9 = 72 \qquad \text{und} \qquad a \cdot d \geq 1 \cdot 2 = 2$$

Wäre $a \cdot d \geq 4$, so folgte nach (2) $b \cdot c = 21 \cdot a \cdot d \geq 84$. Also ist $2 \leq a \cdot d \leq 3$.

Da wegen $a < d$ im Falle $a \cdot d = 2$ nur $d = 2$ sein könnte, damit aber a gerade wäre, kann nur $a \cdot d = 3$ sein, was auf $a = 1$ und $d = 3$ führt. Dann gilt $b \cdot c = 63$, wegen $b > c$ also $b = 9$ und $c = 7$.

Daher kann nur die Zahl $z = 1973$ die geforderten Eigenschaften haben. Sie hat sie tatsächlich; denn sie ist ungerade, sie besteht aus vier verschiedenen Ziffern, das Produkt $9 \cdot 7$ ist 21 mal so groß wie das Produkt $1 \cdot 3$, und die kleinste ihrer Ziffern, 1, steht an erster, die größte, 9, an zweiter Stelle.

Aufgabe 190812:
Aus den Ziffern 0, 1, ..., 9 seien genau sieben ausgewählt, von denen keine zwei einander gleich sind.

Ermittle die Anzahl derjenigen (im dekadischen System) siebenstelligen Zahlen, die in ihrer (dekadischen) Zifferndarstellung jede der ausgewählten Ziffern enthalten!
Dabei werde
a) vorausgesetzt, dass die 0 nicht unter den ausgewählten Ziffern vorkommt,
b) vorausgesetzt, dass die 0 unter den ausgewählten Ziffern vorkommt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die genannten siebenstelligen Zahlen müssen in ihrer Zifferndarstellung jede der gegebenen Ziffern genau einmal enthalten.

Im Fall a) hat man für die Besetzung der ersten Stelle genau 7 Möglichkeiten. Bei jeder von ihnen verbleiben für die Besetzung der zweiten Stelle genau 6 Möglichkeiten. Daher gibt es insgesamt für die Besetzung der ersten beiden Stellen $7 \cdot 6$ Möglichkeiten.
So fortfahrend erhält man für die Besetzung aller 7 Stellen insgesamt $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$ Möglichkeiten.

Im Fall b) hat man für die Besetzung der ersten Stelle genau 6 Möglichkeiten: die weiteren Überlegungen verlaufen wie im Fall a). Daher erhält man hier insgesamt $6 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4320$ Möglichkeiten.
Die gesuchten Anzahlen sind also a) 5040; b) 4320.

Aufgabe 190813:
Gegeben seien die vier periodischen Dezimalbrüche

$$p = 0{,}\overline{3456}..., \qquad q = 0{,}3\overline{456}..., \qquad r = 0{,}34\overline{56}..., \qquad s = 0{,}345\overline{6}.$$

a) Ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen n, für die folgende Aussage gilt: In der n-ten Stelle nach dem Komma haben alle vier Dezimalbrüche p, q, r, s dieselbe Ziffer.

b) Ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen m, für die folgende Aussage gilt: In der m-ten Stelle nach dem Komma haben keine zwei der vier Dezimalbrüche p, q, r, s dieselbe Ziffer!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Für $n = 1, 2, 3$ (1) gilt die genannte Aussage. Wenn sie für eine natürliche Zahl

$$n = 4 + k \qquad \text{mit } k \geq 0$$

gilt, so folgt: In der n-ten Stelle nach dem Komma hat s die Ziffer 6. Diese Ziffer kommt aber in p bzw. q nur dann an der $(4+k)$-ten Stelle vor, wenn k durch 4 bzw. 3 teilbar ist. Also ist k durch die Zahlen 4 und 3 und folglich durch deren kgV 12 teilbar. Somit können (außer den Zahlen (1)) nur die Zahlen

$$n = 4 + 12g \qquad (g = 0,1,2,\dots) \tag{2}$$

die zu betrachtende Eigenschaft haben.
Sie haben diese Eigenschaft; denn da $12g$ durch 4, 3 und 2 teilbar ist, steht an der $(4+12g)$-ten Stelle in p, q und r wie in s die Ziffer 6.
Also erfüllen genau die Zahlen (1), (2) die in Aufgabe a) geforderte Bedingung.

b) Für $m = 1,2,3$ ist die genannte Aussage falsch. An der vierten Stelle beginnt bei allen Dezimalbrüchen p,q,r,s eine Periode mit der Ziffer 6. Nach dem in a) Gezeigten wiederholt sich dies nach jeweils 12 weiteren Stellen. Daher genügt es, die zwölf Zahlen

$$m = 4, 5, \dots, 15 \tag{3}$$

zu überprüfen. Was dabei für einen der Werte (3) (über die zu untersuchende Eigenschaft) festgestellt wurde, gilt dann auch für alle diejenigen Werte m, die aus dem betreffenden Wert durch Addition beliebiger ganzzahliger Vielfacher von 12 hervorgehen. (In der folgenden Tabelle ist das Vorkommen gleicher Ziffern durch Einrahmen gekennzeichnet. 1.Spalte = m-te Stelle in ...)

m	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
p	6	3	4	5	6	3	4	5	6	3	4	5
q	6	4	5	6	4	5	6	4	5	6	4	5
r	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5
s	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6

Es ergibt sich, dass unter den Zahlen (3) genau $m = 5$ die zu betrachtende Eigenschaft hat. Damit sind genau die Zahlen

$$m = 5 + 12h \qquad (h = 0, 1, 2, \dots)$$

die in Aufgabe b) gesuchten.

Aufgabe 230812:
Ermittle alle dreistelligen natürlichen Zahlen n mit folgenden Eigenschaften:

(1) Die Quersumme von n ist 17.

(2) Multipliziert man die erste Ziffer (d. h. die Hunderterziffer) von n mit 4, so erhält man eine zweistellige Zahl, und zwar gerade die aus den letzten beiden Ziffern von n gebildete Zahl.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Aus (2) folgt:
Für die Hunderterziffer der gesuchten Zahl n kommen nur $3, 4, ..., 9$ in Frage, für n hiernach nur die Zahlen $312; 416; 520; 624; 728; 832; 936$.
Die entsprechenden Quersummen sind: $6; 11; 7; 12; 17; 13; 18$.
Daraus ist ersichtlich, dass genau die Zahl 728 beide Bedingungen (1), (2) erfüllt.

Aufgabe 260812:
Uwe möchte mit einem Taschenrechner feststellen, ob 37 ein Teiler von 45679091 ist. Wenn er dabei den Rechner SR1 verwendet, könnte er folgendermaßen vorgehen: Er dividiert 45679091 durch 37. Der Rechner SR1 zeigt 1234570 an, also ein ganzzahliges Ergebnis. Zur Kontrolle multipliziert Uwe dieses Ergebnis, ohne es neu einzutippen, wieder mit 37. Der Rechner zeigt als Ergebnis wieder 45679091 an. (Du kannst dies mit einem SR1 selbst ausprobieren.)

Kann Uwe nun schließen, dass 37 ein Teiler von 45679091 ist?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Nein, der Schluss ist nicht möglich. Obwohl nämlich der SR1 für $z = 45679091 : 37$ das gerundete Ergebnis 1234570 anzeigte, hatte er dennoch einen genaueren Näherungswert gespeichert. Das kannst du feststellen, indem du nach folgendem Ablaufplan rechnest:

$$\boxed{45679091}\ \boxed{:}\ \boxed{37}\ \boxed{=}\ \text{Anzeige: } 1234570\ \boxed{-}\ \boxed{1234570}\ \boxed{=} \qquad (*)$$

Nun zeigt der Rechner nicht 0, sondern 0.03 als Ergebnis. Er hat also als Divisionsergebnis von $z = 45679091 : 37$ den Wert 1234570,03 gespeichert.

Uwe hatte folgendermaßen gerechnet:

$$\boxed{45679091}\ \boxed{:}\ \boxed{37}\ \boxed{=}\ \text{Anzeige: } 1234570\ \boxed{\cdot}\ \boxed{37}\ \boxed{=} \qquad (**)$$

Das danach angezeigt Ergebnis 45679091 ist somit (näherungsweise) das Produkt aus dem gespeicherten Wert 1234570,03 und 37; es ist nicht - wie Uwe gemeint hat - das Produkt aus dem angezeigten Wert 1234570 und 37. Deshalb ist Uwes Schlussweise falsch.

Weitere Hinweise: Um zu sehen, dass diese falsche Schlussweise hier auch tatsächlich zu einem falschen Ergebnis führt, gibt es mehrere Möglichkeiten:

A. Man kann sofort - ohne nochmalige Rechnerbenutzung - erkennen, dass $45679091 : 37$ nicht genau gleich 1234570 sein kann; denn $1234570 \cdot 37$ ist eine (ganze) Zahl mit der letzten Ziffer 0.

B. Man kann $45679091 : 37$ schriftlich berechnen und daraus entnehmen, dass das Ergebnis keine ganze Zahl ist.

C. Die richtige Antwort auf die Frage, ob 37 ein Teiler von 45679091 ist, kann man erhalten, indem man anstelle der Fortsetzung in (**), die Uwe zur Kontrolle gewählt hat, neu eintippt:

$$\boxed{1234570}\ \boxed{\cdot}\ \boxed{37}\ \boxed{=}$$

Danach zeigt der Rechner 45679090 an. (Das ist in der Tat, wie in A bemerkt, eine ganze Zahl mit der letzten Ziffer 0. Da diese Rechnung (***) bei der Rechengenauigkeit des SR1 nicht nur einen Näherungswert, sondern das genaue Produkt liefert, folgt:

Die Zahl 45679091 ist nicht durch 37 teilbar, sondern lässt bei Division durch 37 den Rest 1.

Aufgabe 270814:
Es soll die Summe der Quadrate zweier beliebiger natürlicher Zahlen gebildet werden. Dann ist eine „Division mit Rest“ durchzuführen, und zwar soll die oben genannte Summe durch 4 dividiert werden. Man will nun untersuchen, welche Zahlen bei einer derartigen Division als Rest auftreten können und welche nicht.

a) Bilde zunächst einige Beispiele, indem du jedesmal selbst zwei natürliche Zahlen wählst, die Summe ihrer Quadrate durch 4 dividierst und den auftretenden Rast notierst! Setze das Bilden solcher Beispiele so oft fort, bis es nur noch eine natürliche Zahl kleiner als 4 gibt, die in deinen Beispielen nicht als Rest auftrat!

b) Nun kann man vermuten, dass diese Zahl niemals als Rest auftritt, wenn die Summe der Quadrate zweier beliebiger natürlicher Zahlen durch 4 dividiert wird.

Beweise diese Vermutung!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Unter den zu bildenden Beispielen könnten etwa die folgenden auftreten:

$1^2 + 2^2 = 1 + 4 = 5$ lässt bei Division durch 4 den Rest 1
$2^2 + 6^2 = 4 + 36 = 40$ lässt bei Division durch 4 den Rest 0,
$3^2 + 5^2 = 9 + 25 = 34$ lässt bei Division durch 4 den Rest 2.

Unter den natürlichen Zahlen kleiner als 4, d. h. den Zahlen 0,1,2,3 trat in diesen drei Beispielen nur die Zahl 3 nicht als Rest auf.

b) Wenn die Summe der Quadrate zweier beliebiger natürlicher Zahlen a und b durch 4 dividiert wird, so gibt es nur die folgenden drei Möglichkeiten: (vollständige Fallunterscheidung)

1. a und b sind gerade.
   Dann gibt es natürliche Zahlen m, n, mit denen $a = 2m$ und $b = 2n$ gilt, und es folgt:
   $$a^2 + b^2 = (2m)^2 + (2n)^2 = 4m^2 + 4n^2 = 4(m^2 + n^2)$$
   ist durch 4 teilbar, lässt also bei Division durch 4 den Rest 0.
2. a und b sind ungerade.
   Dann gibt es, natürliche Zahlen m, n, mit denen $a = 2m + 1$ und $b = 2n + 1$ gilt, und es folgt:
   $$a^2 + b^2 = (2m + 1)^2 + (2n + 1)^2 = 4m^2 + 4m + 1 + 4n^2 + 4n + 1 = 4(m^2 + n^2 + m + n) + 2$$
   lässt bei Division durch 4 den Rest 2.
3. Von den Zahlen a, b ist eine gerade und eine ungerade.
   Wegen $a^2 + b^2 = b^2 + a^2$ genügt es, den Fall zu betrachten, dass a gerade und b ungerade ist. Mit $a = 2m$ und $b = 2n + 1$ folgt:
   $$a^2 + b^2 = (2m)^2 + (2n + 1)^2 = 4m^2 + 4n^2 + 4n + 1 = 4(m^2 + n^2 + n) + 1$$
   lässt bei Division durch 4 den Rest 1.

Damit ist bewiesen, dass bei der genannten Division niemals der Rest 3 auftritt.

Aufgabe 290814:
Zu jeder sechsstelligen natürlichen Zahl n, deren Einer-Ziffer von Null verschieden ist, kann man diejenige Zahl n' bilden, die man erhält, indem man die Ziffern von n in umgekehrter Reihenfolge schreibt. Anschließend kann man die Zahl $n + n'$ berechnen.

a) Bilde einige Beispiele! Stelle fest, ob es eine Primzahl gibt, durch die in deinen Beispielen die Zahl $n + n'$ teilbar ist! Äußere eine Vermutung!
b) Versuche, deine Vermutung zu beweisen!
c) Jetzt sei k eine beliebige gerade natürliche Zahl größer als Null. Auch zu jeder k-stelligen natürlichen Zahl n, deren Einerziffer von Null verschieden ist, kann man diejenige Zahl bilden, die man erhält, indem man die Ziffern von n in umgekehrter Reihenfolge schreibt.
Gilt für $n + n'$ dann auch eine entsprechende Aussage wie in a), b)?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Aus Beispielen wie etwa

$$110222 + 222071 = 332233 = 11 \cdot 30203$$
$$130333 + 333031 = 463364 = 11 \cdot 42124 = 2^2 \cdot 11 \cdot 10531$$
$$118862 + 268811 = 387673 = 11 \cdot 35243 = 11 \cdot 13 \cdot 2711$$

kann man zu der Vermutung gelangen:
Für jede sechsstellige natürliche Zahl n, deren Einerziffer von Null verschieden ist, ist $n + n'$ durch 11 teilbar.

b) Beweis dieser Vermutung:
Sind a, b, c, d, e, f in dieser Reihenfolge die Ziffern von n, so ist

$$\begin{aligned} n &= 100000a + 10000b + 1000c + 100d + 10e + f \\ n' &= 100000f + 10000e + 1000d + 100c + 10b + a \qquad \text{also} \\ n + n' &= 100001a + 10010b + 1100c + 1100d + 10010e + 100001f \\ &= 11(9091(a + f) + 910(b + e) + 100(c + d)) \end{aligned}$$

durch 11 teilbar.

c) Es sei $k = 2m$ mit einer natürlichen Zahl $m \geq 1$, und es sei n eine beliebige k-stellige natürliche Zahl, deren Einerziffer von Null verschieden ist. Sind $a_0, a_1, ..., a_{2m-1}$ in dieser Reihenfolge die Ziffern von n, so ist

$$\begin{aligned} n &= a_0 \cdot 10^{2m-1} + a_1 \cdot 10^{2m-2} + ... + a_{2m-2} \cdot 10 + a_{2m-1} \\ n' &= a_0 + a_1 \cdot 10 + ... + a_{2m-2} \cdot 10^{2m-2} + a_{2m-1} \cdot 10^{2m-1} \end{aligned}$$

Nach Addition und anschließendem Ausklammern von $a_0, a_1, ..., a_{2m-1}$ steht in $n + n'$

bei a_0 und bei a_{2m-1} der Faktor $10^{2m-1} + 1$,
bei a_1 und bei a_{2m-2} der Faktor $10^{2m-2} + 10 = 10(10^{2m-3} + 1)$, ...
bei a_{m-1} und bei a_m der Faktor $10^m + 10^{m-1} = 10^{m-1}(10 + 1)$.

Nun kann man beweisen, dass die hier auftretenden Zahlen $10 + 1$, $10^3 + 1$, ..., $10^{2m-3} + 1$, $10^{2m-1} + 1$ durch 11 teilbar sind:
Für $10 + 1$ ist das klar die weiteren Zahlen haben 1 als Anfangs- und Endziffer und dazwischen eine gerade Anzahl Ziffern 0. Subtrahiert man 11, so entsteht eine Zahl mit 0 als Endziffer und davor einer geraden Anzahl Ziffern 9.
Jede solche Zahl ist durch 11 teilbar; das ist damit auch für $n + n'$ bewiesen.

Aufgabe 330813:
Sebastian betrachtet eine dreistellige natürliche Zahl und stellt fest:

(1) Setzt man vor diese dreistellige Zahl eine Ziffer 5, so ist die entstandene vierstellige Zahl eine Quadratzahl.

(2) Hängt man aber an die (ursprüngliche dreistellige) Zahl eine Ziffer 1 an, so ist die entstandene vierstellige Zahl ebenfalls eine Quadratzahl.

Weise nach, dass es genau eine dreistellige Zahl gibt, mit der die Bedingungen (1) und (2) erfüllt werden; ermittle diese Zahl!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn die Bedingungen (1),(2) mit einer dreistelligen natürlichen Zahl z erfüllt werden, so folgt:
Da z dreistellig ist, gilt $100 \leq z \leq 999$. Für die nach (1) entstehende Quadratzahl n^2 gilt also $5100 \leq n^2 \leq 5999$.

Daraus sowie aus $71^2 = 5041 < 5100$ und $5999 < 6084 = 78^2$ folgt $71 < n < 78$. Die Quadrate der Zahlen $n = 72, 73, 74, 75, 76, 77$ sind $n^2 = 5184, 5329, 5476, 5625, 5776, 5929$.

Also kann z nur eine der Zahlen $184, 329, 476, 625, 776, 929$ sein; durch Anfügen einer Ziffer 1 entstehen die Zahlen $1841, 3291, 4761, 6251, 7761, 9291$.

Von diesen ist nur 4761 eine Quadratzahl, wie sich z. B. durch

$$\begin{aligned} 42^2 = 1764 < 1841 < 1849 = 43^2 \quad &; \quad 57^2 = 3249 < 3291 < 3364 = 58^2 \\ 69^2 = 4761 \quad &; \quad 79^2 = 6241 < 6251 < 6400 = 80^2 \\ 88^2 = 7744 < 7761 < 7921 = 89^2 \quad &; \quad 96^2 = 9216 < 9291 < 9409 = 97^2 \end{aligned}$$

bestätigen lässt. Somit kann nur die Zahl $z = 761$ die Bedingungen der Aufgabe erfüllen.

II. Sie erfüllt diese Bedingungen; denn sie ist dreistellig, und 5476 sowie 4761 sind Quadratzahlen. Damit ist der geforderte Nachweis geführt und die gesuchte Zahl ermittelt; sie lautet 476.

II. Runde 2

Aufgabe V10823:
In der Zahl □378□ sind an die Stelle der beiden Kästchen Ziffern zu setzen, so dass die entstehende Zahl durch 72 teilbar ist.
Wie hast du die fehlenden Ziffern ermittelt?

Lösung von Steffen Polster:
Wenn eine Zahl durch 72 teilbar sein soll, so muss sie auch durch 8 und durch 9 teilbar sein, denn $8 \cdot 9 = 72$. Um die fehlenden Ziffern zu ermitteln, wendet man die Teilbarkeitsregeln der 8 und 9 an. Man beginnt mit der Teilbarkeitsregel der 8, dadurch bekommt man die letzte Ziffer der Zahl. 78□ muss also durch 8 teilbar sein. $720 : 8 = 90$.
Die Zahl 64 ist die einzige zwischen 60 und 70, die durch 8 teilbar ist. Folglich muss die letzte Ziffer 4 sein.

Um die erste Ziffer zu erhalten, wende ich die Teilbarkeitsregel der 9 an. Die Quersumme der bekannten Ziffern ist $3 + 7 + 8 + 4 = 22$. Die Differenz bis 27, die folgende durch 9 teilbare Zahl, beträgt 5. Dies ist auch die fehlende Ziffer.
Die vollständige Zahl lautet 53784.

Aufgabe 040822:
Bilde aus einer beliebigen dreistelligen Zahl die Zahl mit der umgekehrten Ziffernfolge, und beweise, dass die Differenz beider Zahlen durch 99 teilbar ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Sind die Ziffern der dreistelligen Zahl a_2, a_1, a_0, so gilt:

$$a_0 + 10a_1 + 100a_2 - 100a_0 - 10a_1 - a_2 = 99a_2 - 99a_0 = 99(a_2 - a_0)$$

Da ein Faktor 99 ausgeklammert werden kann, ist die Differenz durch 99 teilbar.

Aufgabe 080822:
Gegeben sei eine dreistellige Zahl, deren Einerziffer nicht 0 ist. Man vertausche ihre 1. Und 3. Ziffer miteinander und denke sich die Differenz zwischen der ursprünglichen und der so entstandenen Zahl gebildet.

Wie kann man, ohne diese Differenz selbst ausrechnen zu müssen, alle diejenigen natürlichen Zahlen finden, die Teiler des Betrages dieser Differenz sind?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Hunderter-, Zehner- bzw. Einerziffer der ursprünglichen Zahl werde mit a, b bzw. c bezeichnet. Dann ist diese Zahl z_1 als $100a+10b+c$ und die zweite Zahl z_2 als $100c+10b+a$ darstellbar. Für die Differenz $d=z_1-z_2$ ergibt sich

$$d = 100a + 10b + c - (100c + 10b + a) = 99(a - c)$$

Genau die folgenden natürlichen Zahlen sind also Teiler von d:
(1) Alle natürlichen Teiler von 99, d.s. 1, 3, 9, 11, 33, 99,
(2) alle natürlichen Teiler von $|a-c|$,
(3) alle Produkte aus je einer unter (1) genannten mit je einer unter (2) genannten Zahl.

Ausführliche Aufzählung:
Für $|a-c|$ kommen (wegen $0 < a \leq 9$; $0 < c \leq 9$; a, c ganzzahlig) nur die Werte $0, ..., 8$ in Frage; man erhält:

$\|a-c\|$	natürliche Teiler von d
0	alle natürlichen Zahlen
1	1,3,9,11,33,99
2	1,2,3,6,9,11,18,22,33,66,99,198
3	1,3,9,11,27,33,99,297
4	1,2,3,4,6,9,11,12,18,22,33,36,44,66,99,132,198,396
5	1,3,5,9,11,15,33,45,55,99,165,495
6	1,2,3,6,9,11,18,22,27,33,54,66,99,198,297,594
7	1,3,7,9,11,21,33,63,77,99,231,693
8	1,2,3,4,6,8,9,11,12,18,22,24,33,36,44,66,72,88,99,132,198,264,396,792

Aufgabe 120823:
Als erste Quersumme einer natürlichen Zahl n sei die in üblicher Weise gebildete Quersumme verstanden. Ist die erste Quersumme von n eine Zahl mit mehr als einer Ziffer, so sei ihre Quersumme als zweite Quersumme von n bezeichnet. Ist die zweite Quersumme von n eine Zahl mit mehr als einer Ziffer, so heiße ihre Quersumme die dritte Quersumme von n.

a) Ermittle den größten Wert, der als dritte Quersumme einer 1972-stelligen Zahl auftreten kann!
b) Gib (durch Beschreibung der Ziffernfolge) die kleinste 1972-stellige natürliche Zahl an, die diese größtmögliche dritte Quersumme hat!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Unter allen 1972stelligen Zahlen hat diejenige die größte erste Quersumme, die aus 1972 Ziffern 9 besteht. Diese größte erste Quersumme beträgt somit $9 \cdot 1972 = 17748$.
Da hiernach die erste Quersumme einer 1972stelligen Zahl nicht größer als 17748 sein kann, erhält man die größte zweite Quersumme als größte aller Quersummen der Zahlen von 10 bis 17748 und folglich als Quersumme der Zahl 9999, d.i. 36.
Da hiernach die zweite Quersumme einer 1972stelligen Zahl nicht größer als 36 sein kann, erhält man die größte dritte Quersumme als größte aller Quersummen der Zahlen von 1 bis 36 und folglich als Quersumme der Zahl 29, d.i. 11.

b) Unter allen Zahlen von 10 bis 36 ist 29 die einzige mit der Quersumme 11. Unter allen Zahlen mit der Quersumme 29 findet man wegen $\frac{29}{9} = 3\frac{2}{9}$ die kleinste, indem man eine Zahl mit den letzten drei Ziffern 9 so bildet, dass die aus den vorangehenden Ziffern bestehende Zahl die kleinste mit der Quersumme 2 ist. Diese Zahl ist offenbar 2999.
Mit entsprechender Begründung findet man wegen $\frac{2999}{9} = 333\frac{2}{9}$ die kleinste 1972stellige Zahl A mit der Quersumme 2999, indem man eine Zahl mit den letzten 333 Ziffern 9 so bildet, dass die aus den vorangehenden $1972 - 333 = 1639$ Ziffern bestehende Zahl die kleinste 1639stellige mit der Quersumme 2 ist. So ergibt sich die Zahl

$$A = 1\underbrace{0...0}_{1637}1\underbrace{9...9}_{1637}$$

die der Reihe nach aus einer Ziffer 1, 1637 Ziffern 0, einer Ziffer 1 und 333 Ziffern 9 besteht.

Ist nun g irgendeine von der kleinsten Zahl 2999 verschiedene, also größere Zahl mit der Quersumme 29 und hat eine 1972stellige Zahl n die Zahl g als Quersumme, so gilt:

Wegen $\frac{g}{9} \geq \frac{3000}{9} = 333\frac{3}{9}$ hat die kleinste 1972stellige Zahl B mit der Quersumme g als ihre letzten 333 Ziffern je eine 9 und unter den davor stehenden 1639 Ziffern mindestens eine Ziffer ≥ 2. Folglich ist $B > A$ und demnach erst recht $n > A$.
Damit ist A als kleinste unter allen 1972stelligen Zahlen nachgewiesen, die irgendeine Zahl mit der Quersumme 29 als Quersumme haben, d. h. aber, die die dritte Quersumme 11 besitzen.

Aufgabe 180823:
Ermittle alle zweistelligen natürlichen Zahlen mit folgender Eigenschaft:

Addiert man 2 zu der gesuchten Zahl, so erhält man das Dreifache derjenigen Zahl, die durch Vertauschen der Ziffern der Ausgangszahl entsteht.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, es gibt eine derartige Zahl. Dann hat sie die Form $10x + y$, wobei x und y natürliche Zahlen mit $x,y \leq 9$ sind. Für diese gilt:

$$10x + y + 2 = 3(10y + x) \qquad \text{somit} \qquad y = \frac{7x + 2}{29}$$

Da y eine natürliche Zahl ist, ist $7x + 2$ ein Vielfaches von 29. Wegen $0 < x \leq 9$ ist $2 < 7x + 2 \leq 65$; deshalb kommen nur die Fälle $7x + 2 = 29$ und $7x + 2 = 58$ in Frage.
$7x + 2 = 29$ ist nicht in natürlichen Zahlen lösbar. Aus $7x + 2 = 58$ folgt $x = 8$; für y erhält man dann 2.

Also kann höchstens die Zahl 82 die Bedingungen der Aufgabe erfüllen. Sie erfüllt sie tatsächlich; denn es gilt $82 + 2 = 84 = 3 \cdot 28$.

Aufgabe 230821:
Ermittle alle diejenigen vierstelligen natürlichen Zahlen z, die folgende Bedingungen erfüllen:

(1) Die aus den ersten beiden Ziffern von z in dieser Reihenfolge gebildete zweistellige Zahl ist eine Quadratzahl.

(2) Die aus der ersten und vierten Ziffer von z in dieser Reihenfolge gebildete Zahl ist ebenfalls eine Quadratzahl.

(3) Die aus der zweiten und dritten Ziffer von z in dieser Reihenfolge gebildete Zahl ist ebenfalls eine Quadratzahl.

Hinweis: Unter der ersten Ziffer verstehen wir diejenige Ziffer von z, die an der Tausenderstelle steht.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Für die ersten beiden Stellen von z kommen wegen (1) nur die Quadratzahlen 16, 25, 36, 49, 64, 81 in Frage. Von diesen entfallen wegen (3) die Zahlen 25 und 49, da es keine zweistelligen Quadratzahlen mit der Anfangsziffer 5 bzw. 9 gibt.
Geht man von den verbliebenen Zahlen 16, 36, 64 bzw. 81 aus, dann können bei z an der dritten Stelle wegen (3) nur die Ziffern 4, 4, 9 bzw. 6 und an der vierten Stelle wegen (2) nur die Ziffern 6, 6, 4 bzw. 1 stehen.
Folglich können nur die vier Zahlen 1646, 3646, 6494 und 8161 alle geforderten Eigenschaften haben.

Sie haben diese Eigenschaften, da (für die ersten beiden Ziffern sowie ebenfalls für die erste und vierte Ziffer) 16, 36, 64, 31 und (für die zweite und dritte Ziffer) 64, 64, 49 und 16 sämtliche Quadratzahlen sind.

Aufgabe 250822:
Beweise folgenden Satz:

Das Produkt zweier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen, die beide nicht durch 3 teilbar sind, lässt bei Division durch 9 stets den Rest 2!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Jede nicht durch 3 teilbare natürliche Zahl ist von einer der Formen $3k+1$, $3k+2$ mit $k \in \mathbb{N}$. Hat eine solche Zahl die Eigenschaft, dass auch ihr Nachfolger nicht durch 3 teilbar ist, so muss sie von der Form $3k+1$ sein, da $3k+2$ die durch 3 teilbare Zahl $3k+3$ als Nachfolger hat. Der Nachfolger einer Zahl $3k+1$ ist $3k+2$, und das Produkt beider Zahlen ist

$$(3k+1)\cdot(3k+2) = 9k^2+3k+6k+2 = 9(k^2+k)+2$$

Da k eine natürliche Zahl ist, ist auch k^2+k eine natürliche Zahl und $9\cdot(k^2+k)$ das Neunfache einer natürlichen Zahl, also durch 9 teilbar. $9\cdot(k^2+k)+2$ lässt mithin bei der Division durch 9 den Rest 2, w. z. b. w.

Aufgabe 260824:

a) Ermittle alle diejenigen zweistelligen natürlichen Zahlen z, die folgende Bedingung erfüllen:

   Setzt man vor die beiden Ziffern von z eine dritte Ziffer, so entsteht eine dreistellige Zahl, die 29 mal so groß ist wie z.

b) Gib an, wie man weitere natürliche Zahlen z' bilden kann, die folgende Bedingung erfüllen:

   Setzt man vor die sämtlichen Ziffern von z' eine weitere Ziffer, so entsteht eine neue Zahl, die 29 mal so groß ist wie z'.

c) Ermittle alle diejenigen natürlichen, nicht durch 10 teilbaren Zahlen z'', die folgende Bedingung erfüllen:

   Setzt man vor die sämtlichen Ziffern von z' eine weitere Ziffer oder mehrere weitere Ziffern, so entsteht eine neue Zahl, die 29 mal so groß ist wie z''.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

a) Wenn z zusammen mit einer davorzusetzenden Ziffer a die Bedingungen der Aufgabenstellung erfüllt, so gilt $100a+z=29z$, also $z=\frac{25a}{7}$ (1),

   ferner ist z eine natürliche Zahl, also $25a$ durch 7 teilbar. Da 25 zu 7 teilerfremd ist, muss a durch 7 teilbar sein. Außerdem gilt $a \neq 0$ (denn aus $a=0$ ergäbe sich $z=0$ im Widerspruch zur Zweistelligkeit von z). Die einzige von 0 verschiedene durch 7 teilbare Ziffer ist aber $a=7$.

   Damit folgt aus (1), dass nur $z=25$ den Bedingungen der Aufgabenstellung genügen kann, und zwar zusammen mit der davorzusetzenden Ziffer $a=7$.

   In der Tat werden damit diese Bedingungen erfüllt; denn es gilt $725 = 29\cdot 25$

b) Man kann Zahlen z' mit der geforderten Eigenschaft z. B. dadurch bilden, dass man an die eben gefundene Zahl 25 eine beliebige Anzahl Nullen anhängt; denn es gilt $72500...0 = 29 \cdot 2500...0$.

c) Wenn z'' zusammen mit einer davorzusetzenden Ziffernfolge, die für sich genommen die natürliche Zahl b darstellt, die Bedingungen der Aufgabenstellung erfüllt und wenn z'' eine n-stellige natürliche Zahl ist, so gilt

$$10^n + b + z'' = 29z'' \qquad \Rightarrow \qquad z'' = \frac{10^n \cdot b}{28} \tag{2}$$

Ferner ist z'' eine natürliche Zahl, also $10^n \cdot b$ durch (28 und folglich durch) 7 teilbar. Da 10^n zu 7 teilerfremd ist, muss b durch 7 teilbar sein. Ferner ist $b \neq 0$; denn aus $b = 0$ ergäbe sich $z'' = 0$ im Widerspruch zu der in der Aufgabenstellung enthaltenen Bedingung, dass z'' nicht durch 10 teilbar sein soll.

Daraus, dass z'' eine n-stellige Zahl ist, folgt $z'' < 10^n$; hieraus und aus (2) ergibt sich $\frac{b}{28} < 1$, also $b < 28$.

Somit muss b eine der Zahlen 7, 14, 21 sein. In diesen drei Fällen ergibt sich

$$z'' = \frac{10^n}{4} = 10^{n-1} \cdot 25 \quad \text{bzw.} \quad z'' = \frac{10^n}{2} = 10^{n-1} \cdot 5 \quad \text{bzw.} z'' = \frac{10^n \cdot 3}{4} = 10^{n-2} \cdot 75$$

Das ist jeweils nur dann eine nicht durch 10 teilbare natürliche Zahl, wenn $n = 2$ bzw. $n = 1$ bzw. $n = 2$ gilt. Dies führt jeweils auf $z'' = 25$ bzw. $z'' = 5$ bzw. $z'' = 75$

Also können nur diese Zahlen den Bedingungen der Aufgabenstellung genügen, und zwar nur zusammen mit der davorzusetzenden Ziffernfolge $b = 7$ bzw. $b = 14$ bzw. $b = 21$.

In der Tat werden damit die Bedingungen erfüllt, denn die genannten Zahlen z'' sind nicht durch 10 teilbar, und es gilt
$725 = 29 \cdot 25$ bzw. $145 = 29 \cdot 5$ bzw. $2175 = 29 \cdot 75$.

Aufgabe 320821:
Herr Schulz, der in diesem Jahrhundert geboren wurde, stellt fest, dass er an seinem Geburtstag im Jahr 1992 ein Lebensalter erreicht, das (in Jahren gerechnet) gleich dem Vierfachen der Quersumme der Jahreszahl seines Geburtsjahres ist.

Untersuche, ob es genau ein Jahr gibt, mit dem als Geburtsjahr die Feststellung von Herrn Schulz zutrifft! Ist das der Fall, so nenne diese Jahreszahl!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Ist a die Einer- und b die Zehnerziffer der Jahreszahl eines Jahres aus diesem Jahrhundert, so sind a und b natürliche Zahlen mit $0 \leq a \leq 9$ und $0 \leq b \leq 9$, die Jahreszahl lautet $1900 + 10b + a$, ihre Quersumme beträgt $1 + 9 + b + a$.

Ist ein solches Jahr das Geburtsjahr von Herrn Schulz, so erreicht er im Jahr 1992 ein Lebensalter von $1992 - (1900 + 10b + a)$ Jahren.
Wenn die Feststellung von Herrn Schulz zutrifft, gilt daher

$$1992 - (1900 + 10b + a) = 4 \cdot (1 + 9 + b + a)$$

Hieraus folgt $92 - 10b - a = 40 + 4b + 4a$ und $52 - 14b = 5a$.

Wäre $b \geq 4$, so folgte $5a \leq 52 - 14 \cdot 4 < 0$ im Widerspruch zu $a \geq 0$. Wäre $b = 0$ oder $b = 1$ oder $b = 2$, so folgte $5a = 52$ bzw. $5a = 38$ bzw. $5a = 24$, was durch natürliche Zahlen a nicht erfüllbar ist.
Also kann nur $b = 3$ sein, wonach $5a = 10$, also $a = 2$ folgt.

Daher kann die Feststellung nur mit 1932 als Geburtsjahr zutreffen.

Sie trifft hiermit in der Tat zu; denn die Quersumme von 1932 ist $1+9+3+2=15$, und das im Jahr 1992 erreichte Lebensalter beträgt $1992-1932=60=4\cdot 15$. Also gibt es genau ein Jahr, mit dem die Feststellung zutrifft; es ist das Jahr 1932.

Aufgabe 340821:
Eine vierstellige natürliche Zahl heiße genau dann „symmetrisch“, wenn ihre Tausenderziffer gleich ihrer Einerziffer und ihre Hunderterziffer gleich ihrer Zehnerziffer ist. Tanja behauptet, dass jede vierstellige symmetrische Zahl durch 11 teilbar ist.

a) Überprüfe diese Teilbarkeit an drei selbstgewählten Beispielen!

b) Beweise allgemein Tanjas Behauptung!

c) Wie viele vierstellige symmetrische Zahlen gibt es insgesamt?

d) Wie viele geradzahlige vierstellige symmetrische Zahlen gibt es insgesamt?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(a) Man bestätigt zum Beispiel $3443:11=313$, $5555:11=505$, $9009:11=819$.

(b) Jede vierstellige symmetrische Zahl z ist mit zwei natürlichen Zahlen a, b von der Form

$$1000a+100b+10b+a=11\cdot(91a+10b) \tag{1}$$

also, da $91a+10b$ eine natürliche Zahl ist, durch 11 teilbar.

(c) In (1) gibt es für die Ziffer a die 9 Möglichkeiten 1, 2, ..., 9 und, unabhängig hiervon, für die Ziffer b die 10 Möglichkeiten 0, 1, 2, ..., 9 . Also gibt es insgesamt $9\cdot 10=90$ vierstellige symmetrische Zahlen.

(d) Da z genau dann gerade ist, wenn die Einerziffer a gerade ist, gibt es nun für a die 4 Möglichkeiten 2, 4, 6, 8. Für b hat man dieselben Möglichkeiten wie in (c). Also gibt es insgesamt $4\cdot 10=40$ geradzahlige vierstellige symmetrische Zahlen.

III. Runde 3

Aufgabe 010833:
Zu beweisen ist folgender Satz:

Die Summe zweier beliebiger aufeinanderfolgender gerader Zahlen ist nicht durch 4 teilbar!

Welcher Rest bleibt bei Division durch 4 ?

Lösung von Carsten Balleier:
Eine gerade Zahl kann stets als $2n$ (mit $n\in\mathbb{N}$) geschrieben werden, die darauf folgende gerade Zahl ist dann $2n+2$. Damit ist $2n+(2n+2)=4n+2$, also ist die Summe nicht durch vier teilbar, sondern lässt den Rest 2. □

Aufgabe 040831:
Vertauscht man die Ziffern einer zweistelligen Zahl n, so entsteht eine Zahl, die $\frac{8}{3}$ mal so groß wie n ist. Die Zahl n ist zu bestimmen.

Lösung von Manuela Kugel:
Es gilt

$$\frac{8}{3}(10x+y) = 10y + x \qquad ; \qquad 7x = 2y$$

Da x und y natürliche Zahlen kleiner als 10 sind, folgt $x = 2$ und $y = 7$. Die gesuchte Zahl ist demnach 27.

Aufgabe 050833:
Gib alle Quadrupel (z_1, z_2, z_3, z_4) zweistelliger Zahlen z_1, z_2, z_3, z_4 an, die folgende Eigenschaften haben. Für jedes Quadrupel gilt:

(1) $z_1 \cdot z_2 = z_3 \cdot z_4$,

(2) z_3 erhält man, wenn man z_1 rückwärts liest,

(3) z_4 erhält man, wenn man z_2 rückwärts liest, (Beispiel $24 \cdot 63 = 42 \cdot 36$)

(4) Unter den vier Ziffern von z_1 und z_2 gibt es keine zwei, die gleich sind,

(5) z_1 ist die kleinste der vier Zahlen.

Lösung von Eckart Keller:
Bezeichnet man die Ziffern von z_1 mit a und b, die von z_2 mit c und d (in dieser Reihenfolge), dann gilt laut Aufgabe $(10a+b)(10c+d) = (a+10b)(c+10d)$, also $99ac = 99bd$, woraus sich $ac = bd$ ergibt.

Wegen $1 \leq a$, b, e, $d \leq 9$ (ganz) und wegen (4) sowie wegen (5) erhält man die folgenden 10 Zahlenquadrupel, für die (1) gilt:

$$\begin{array}{llllllll}
(12, & 63, & 21, & 36) & (14, & 82, & 41, & 28) \\
(12, & 84, & 21, & 48) & (23, & 64, & 32, & 46) \\
(24, & 63, & 42, & 36) & (23, & 96, & 32, & 69) \\
(13, & 62, & 31, & 26) & (34, & 86, & 43, & 68) \\
(26, & 93, & 62, & 39) & (36, & 84, & 63, & 48).
\end{array}$$

Umgekehrt erkennt man, dass jedes dieser Quadrupel den gestellten Bedingungen genügt.

Aufgabe 060836:
Man denke sich das Produkt aller derjenigen ungeraden Zahlen gebildet, die größer als 30 und kleiner als 50 sind. Beantworte, ohne es vollständig zu berechnen, folgende Fragen:

a) Welche Ziffer steht an der Einerstelle des Produkts?

b) Ist das Produkt eine 18stellige Zahl?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

a) Multipliziert man eine Zahl, die auf 5 endet, mit einer beliebigen ungeraden Zahl, so erhält man wieder eine Zahl mit der Einerziffer 5. Das zu untersuchende Produkt enthält den Faktor 45, der auf 5 endet, und sonst nur ungerade Faktoren. Seine Einerziffer ist daher eine 5.

b) Man kann das Produkt in die Teilprodukte $31 \cdot 49$, $33 \cdot 47$, $35 \cdot 45$, $37 \cdot 43$ und $39 \cdot 41$ zerlegt denken. Jedes dieser Teilprodukte ist von der Form $(a-b)(a+b)$ mit $a = 40$ und $1 \leq b \leq 9$ und daher eine positive Zahl, die sicher kleiner als 2000 ist. Das gesamte Produkt ist also kleiner als 2000^5.

Nun ist aber

$$\begin{aligned} 2000^5 &= 2000 \cdot 2000 \cdot 2000 \cdot 2000 \cdot 2000 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1000 \cdot 1000 \cdot 1000 \cdot 1000 \cdot 1000 \\ &= 32 \cdot 1000000000000000 \end{aligned}$$

eine 17stellige Zahl. Daher kann das zu untersuchende Produkt keine 18stellige Zahl sein.

Aufgabe 070832:
Unter einer Quersumme einer natürlichen Zahl versteht man die Summe ihrer Ziffern: z. B. hat 1967 die Quersumme $1 + 9 + 6 + 7 = 23$.

Man ermittle die Summe aller Quersummen der natürlichen Zahlen von 1 bis einschließlich 1000!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wir nehmen 0 (mit der Quersumme 0) unter die zu berücksichtigenden Zahlen auf, schließen 1000 vorläufig aus und fassen jeweils die beiden Zahlen a und $999 - a$ $(0 \leq a \leq 499)$ zu einem Paar zusammen. Es sei

$$a = \alpha \cdot 10^3 + \beta \cdot 10 + \gamma \tag{*}$$

mit ganzen Zahlen α, β, γ, für die $0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq 9$ gilt.
Dann ist die Quersumme von a gleich $\alpha + \beta + \gamma$. Ferner ist

$$999 - a = 9 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10 + 9 - \alpha \cdot 10^2 - \beta \cdot 10 - \gamma = (9 - \alpha) \cdot 10^2 + (9 - \beta) \cdot 10 + (9 - \gamma)$$

und wegen (*) gilt auch $0 \leq 9 - \alpha, 9 - \beta, 9 - \gamma \leq 9$ und $9 - \alpha, 9 - \beta, 9 - \gamma$ sind ganz.
Daher ist die Quersumme dieser Zahl $(9 - \alpha) + (9 - \beta) + (9 - \gamma)$ und die Summe beider Quersummen dann

$$(9 - \alpha) + (9 - \beta) + (9 - \gamma) + \alpha + \beta + \gamma = 27$$

Es gibt genau 500 solcher Paare, also ist die Summe der Quersummen der hiermit erfassten Zahlen $500 \cdot 27 = 13500$. Dazu ist noch die Quersumme 1 von 1000 zu addieren.
Die gesuchte Summe beträgt mithin 13501. **Alternativ-Lösung von cyrix:**

In der Summe aller Quersummen wird jede Ziffer aller zu betrachtenden natürlichen Zahlen von 1 bis 1000 aufsummiert.
Inklusive ggf. führender Nullen taucht jede der Ziffern 0 bis 9 in den natürlichen Zahlen von 1 bis 999 jeweils genau 100 mal an einer Einer-, Zehner- bzw. Hunderter-Stelle auf, insgesamt also 300 mal. Damit ergibt sich eine Summe der Quersummen der nat. Zahlen von 1 bis 999 von $300 \cdot (0 + 1 + \cdots + 9) = 300 \cdot 45 = 13500$. Hinzu kommt noch die Quersumme 1 der Zahl 1000, sodass die gesuchte Summe den Wert 13501 besitzt.

Aufgabe 070836:
Gesucht ist eine zweistellige natürliche Zahl mit folgenden Eigenschaften:

1) Die Differenz ihrer Ziffern beträgt drei.
2) Vertauscht man ihre Ziffern, so ist die neue Zahl um neun kleiner als das Doppelte der ursprünglichen Zahl.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(I) Da die Zahl zweistellig sein soll, muss sie größer als 9 sein. Daraus folgt, dass ihr um 9 vermindertes Doppeltes größer sein muss als sie selbst.
Wegen der 2. Bedingung besagt dies, dass bei Umstellung der Ziffern aus der Zahl eine größere Zahl entstehen soll. Daher muss ihre erste Ziffer kleiner sein als ihre zweite.

(II) Ferner soll das um 9 verminderte Doppelte wieder zweistellig, also höchstens 99 sein.
Daraus ergibt sich, dass die Zahl höchstens 54 betragen kann. Wegen der 1. Bedingung verbleiben hiernach noch genau die folgenden Möglichkeiten: 14, 25, 36 und 47.
Von diesen erfüllt nur die Zahl 36 alle Bedingungen der Aufgabe.

Aufgabe 080833:
Es ist zu beweisen: Lässt die Quersumme einer natürlichen Zahl bei der Division durch 9 den Rest r, so lässt auch die Zahl selbst bei der Division durch 9 den Rest r.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Zahlen 1, 10, 100, 1000, ... lassen bei Division durch 9 jeweils den Rest 1, weil der Vorgänger jeder dieser natürlichen Zahlen durch 9 teilbar ist; die Zahlen 2, 20, 200, 2000, ..., die sich als 1 + 1, 10 + 10, 100 + 100, ... schreiben lassen, ergeben jeweils den Rest 2; die Zahlen 3, 30, 300, ... den Rest 3 usw., die Zahlen 8, 80, 800, ... den Rest 8, und 9, 90, 900, ... schließlich den Rest 0.

Nun lässt sich jede natürliche Zahl z in der Form

$$z = a_0 \cdot 10^0 + a_1 \cdot 10^1 + a_2 \cdot 10^2 + \cdots + a_n \cdot 10^n$$

schreiben (mit ganzen Zahlen a_i, für die $0 \leq a_i \leq 9$ gilt). Die Quersumme dieser Zahl lautet dann

$$Q(z) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

Bei Division durch 9 lässt nach dem Obigen $a_0 \cdot 10^0$ den gleichen Rest wie a_0, $a_1 \cdot 10^1$ den gleichen Rest wie a_1, ..., $a_n \cdot 10^n$ den gleichen Rest wir a_n.

Die Summe z der $a_i \cdot 10^i$ lässt daher bei Division durch 9 den gleichen Rest wie die Summe $Q(z)$ der a_i.
Alternativ-Lösung von cyrix:
Mit der Verwendung von Zahlenkongruenzen lässt sich dies kurz notieren:
Sei die natürliche Zahl z von der Form

$$z = a_0 \cdot 10^0 + a_1 \cdot 10^1 + a_2 \cdot 10^2 + \cdots + a_n \cdot 10^n,$$

dann ist ihre Quersumme $Q(z)$ gleich

$$Q(z) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

und es gilt

$$\begin{aligned} z &\equiv a_0 \cdot 1^0 + a_1 \cdot 1^1 + a_2 \cdot 1^2 + \cdots + a_n \cdot 1^n \\ &\equiv a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \\ &\equiv Q(z) \pmod 9, \end{aligned}$$

da $10 \equiv 1 \pmod 9$ ist. Insbesondere lassen also jeweils eine natürliche Zahl z und ihre Quersumme $Q(z)$ den gleichen Rest bei Division durch 9, $\square$.

Aufgabe 080835:
Fritz soll eine dreistellige natürliche Zahl z mit sich selbst multiplizieren. Er schreibt versehentlich als ersten Faktor eine um 5 kleinere Zahl hin. Darauf aufmerksam gemacht, sagt er: „Ich nehme als zweiten Faktor einfach eine um 5 größere Zahl, dann wird das Ergebnis richtig.“

a) Ist diese Behauptung wahr?

b) Gesetzt, sie sei falsch, zwischen welchen Grenzen bewegt sich der absolute Fehler, wenn z alle dreistelligen Zahlen durchläuft?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Fritz sollte rechnen: $z \cdot z = z^2$. Er rechnete: $(z-5)(z+5) = z^2 - 25$. Sein Weg ist also falsch.

b) Der absolute Fehler beträgt in jedem Falle: -25.
Er ist also nicht je nach der Zahl z verschieden, sondern konstant.

Aufgabe 090833:
Beweise die Richtigkeit der folgenden Teilbarkeitsregel:
Eine drei- oder mehrstellige natürliche Zahl ist stets dann durch 8 teilbar, wenn die aus der Hunderterziffer und der Zehnerziffer gebildete Zahl, vermehrt um die Hälfte der Anzahl der Einer, eine durch 4 teilbare ganze Zahl ist.
Beispiel: 37528 ist zu untersuchen. $52 + 4 = 56$ ist durch 4 teilbar, also ist 37528 durch 8 teilbar.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Sind a, b, c die Einer-, Zehner- bzw. Hunderterziffer einer natürlichen Zahl n, so lässt sich diese in der Form

$$n = 1000d + 100c + 10b + a$$

mit einer ganzen Zahl d darstellen. Vermehrt man dann die aus der Hunderterziffer und der Zehnerziffer gebildete Zahl um die Hälfte der Anzahl der Einer, so ergibt sich die Zahl

$$m = 10c + b + \frac{1}{2}a$$

Ist nun voraussetzungsgemäß m durch 4 teilbar, so ist $10c + b + \frac{1}{2}a = 4k$ mit einer ganzen Zahl k. Daraus folgt $20c + 2b + a = 8k$, also ist dann

$$n = 8k + 1000d + 80c + 8b = 8(k + 125d + 10c + b)$$

durch 8 teilbar, w. z. b. w.

Aufgabe 200832:
Ermittle alle dreistelligen natürlichen Zahlen n mit der Eigenschaft, dass das Produkt aus den einzelnen Ziffern von n gleich dem Fünffachen der Quersumme von n ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn eine dreistellige natürliche Zahl n die geforderte Eigenschaft hat, so gilt für ihre drei Ziffern, in irgendeiner Reihenfolge mit a, b, c bezeichnet,

$$abc = 5(a + b + c) \tag{1}$$

Wäre eine der Ziffern a, b, c gleich 0, so folgte $abc = 0$, nach (1) also $a + b + c = 0$, und hieraus wegen $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ weiter $a = b = c = 0$, im Widerspruch dazu, dass n dreistellig ist. Also gilt

$$1 \leq a \leq 9, \qquad 1 \leq b \leq 9, \qquad 1 \leq c \leq 9 \tag{2}$$

Nach (1) ist die Primzahl 5 ein Teiler von abc, also von (mindestens) einer der Ziffern a, b, c. Wegen (2) ist diese Ziffer gleich 5; wegen der beliebigen Wahl der Reihenfolge kann etwa $c = 5$ angenommen werden. Hiernach folgt aus (1)

$$ab = a + b + 5 \tag{3}$$

Aus (3) folgt

$$ab - a - b + 1 = 6 \qquad \Rightarrow \qquad (a-1)(b-1) = 6 \tag{4}$$

Nach (2) sind auch $a - 1$ und $b - 1$ natürliche Zahlen; wegen der beliebigen Wahl der Reihenfolge kann etwa $a \leq b$ angenommen werden, wonach es für (4) nur die beiden Möglichkeiten gibt, dass entweder
$a - 1 = 1$, $b - 1 = 6$, also $a = 2$, $b = 7$ (5) oder
$a - 1 = 2$, $b - 1 = 3$, also $a = 3$, $b = 4$ (6)

gilt. Berücksichtigt man nun noch alle Möglichkeiten der Reihenfolge von a, b, c, so ergibt sich, dass nur die Zahlen

$$257, 275, 527, 572, 725, 752, 345, 354, 435, 453, 534, 543$$

die geforderten Eigenschaften haben können. Sie haben diese, wie die Probe zeigt.

Aufgabe 210836:
Ermittle alle sechsstelligen natürlichen Zahlen z mit folgender Eigenschaft:

Setzt man die erste Ziffer von z an die letzte Stelle, während die Ziffernfolge der übrigen fünf Ziffern unverändert bleibt, so ist die entstehende Zahl z' dreimal so groß wie die ursprüngliche Zahl z.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn eine sechsstellige natürliche Zahl z die geforderte Eigenschaft hat, so folgt: Ist x die erste Ziffer von z, so ist $z = 100000x + y$ mit einer natürlichen Zahl y, für die $y < 100000$ gilt, sowie $z' = 10y + x$, und es gilt

$$(100000x + y) \cdot 3 = 10y + x, \qquad \text{also} \qquad 42857x = y$$

Wäre $x \geq 3$, so wäre $y \geq 42857 \cdot 3$ im Widerspruch zu $y < 100000$.
Daher (und weil x als erste Ziffer einer mehrstelligen Zahl größer als 0 ist) kann nur entweder $x = 1, y = 42857$ oder $x = 2, y = 42857 \cdot 2 = 85714$ sein.

Also können höchstens die Zahlen $z = 142857$ und $z = 285714$ die geforderte Eigenschaft haben.
Sie haben diese Eigenschaft; denn es gilt $3 \cdot 142857 = 428571$ und $3 \cdot 285714 = 857142$.
Daher haben genau diese beiden sechsstelligen natürlichen Zahlen die geforderte Eigenschaft.

Aufgabe 240831:
Ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen, deren sechste Potenz in ihrer dekadischen Zifferndarstellung genau je einmal die Ziffern 2, 4, 5, genau je zweimal die Ziffern 8, 9 und keine weitere Ziffer enthält!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn eine natürliche Zahl a die geforderten Eigenschaften hat, so folgt:
a^6 ist siebenstellig, also gilt $1000000 \leq a^6 \leq 9999999$.
Wegen $15^6 = (225 \cdot 15)^{>}3300^2 > 9999999$ folgt hieraus $10 \leq a \leq 14$.
Da 10^6 auf die Ziffer 0 endet, 11^6 auf die Ziffer 1 sowie 14^2 und daher auch $14^6 = (14^2)^3$ auf die Ziffer 6, kann a nur eine der Zahlen $12, 13$ sein.
Da $13^3 = 169 \cdot 13$ auf die Ziffernfolge ...97 und somit $13^6 = (13^3)^2$ auf die Ziffernfolge ...09 endet, verbleibt nur die Möglichkeit $a = 12$.

II. In der Tat ist $12^6 = 2985984$, woraus ersichtlich ist, dass die Zahl 12 alle geforderten Eigenschaften hat.

Aufgabe 250831:
Beweise folgenden Satz:

Es gibt keine Quadratzahl, die bei der Division durch 3 den Rest 2 lässt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Ist n eine natürliche Zahl, so gilt entweder $n = 3k$ oder $n = 3k+1$ oder $n = 3k+2$, wobei k eine natürliche Zahl ist.

Ist nun $n = 3k$, so ist $n^2 = 9k^2$ durch 3 teilbar.
Ist, jedoch $n = 3k + 1$, so lässt $n^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1$ bei Division durch 3 den Rest 1.
Ist schließlich $n = 3k + 2$, so lässt $n^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1$ bei Division durch 3 ebenfalls den Rest 1.

In den betrachteten Fällen sind die Quadrate aller natürlichen Zahlen erfasst. Der Rest 2 tritt also bei Division von Quadratzahlen durch 3 nicht auf, w. z. b. w.

Aufgabe 290835:
Aus einer sechsstelligen natürlichen Zahl n soll eine weitere Zahl errechnet werden, indem eine Addition, Subtraktion, Multiplikation oder Division mit einer höchstens dreistelligen natürlichen Zahl durchgeführt wird, wobei nur die Multiplikation mit 0 und die Division durch 0 nicht zugelassen sind. Auf das Ergebnis soll wieder eine der genannten Rechenoperationen angewandt werden, auf das neue Ergebnis ebenfalls usw. Erst wenn ein Ergebnis den Wert 0 hat, soll das Bilden weiterer Zahlen nicht mehr fortgesetzt werden.

a) Gibt es sechsstellige Zahlen n, von denen ausgehend das Ergebnis 0 bereits mit zweimaligem Ausführen derartiger Rechenoperationen erreichbar ist?

b) Beweise, dass von jeder sechsstelligen Zahl n aus, die nicht größer als 999000 ist, das Ergebnis 0 mit höchstens dreimaligem Ausführen derartiger Rechenoperationen erreichbar ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Es gibt solche Zahlen. Um dies zu beweisen, genügt es, für ein Beispiel einer sechsstelligen Zahl n die Erreichbarkeit von 0 mit zwei der Rechenoperationen nachzuweisen.

Ein solches Beispiel ist etwa $n = 100000$ wegen $100000 : 500 = 200$, $200 - 200 = 0$.

b) Nach Voraussetzung sei n eine natürliche Zahl mit $100000 \leq n \leq 999000$. (1)
Für die ganze Zahl g mit $g < \frac{n}{999} \leq g + 1$ gilt

$$999 \cdot g < n \leq 999 \cdot g + 999 \qquad (2)$$

Hieraus und aus (1) folgt $999 \cdot g + 999 \geq n \geq 100000 > 999$ und $999 \cdot g < n \leq 999000$, also $g > 0$ und $g < 1000$, also ist g eine höchstens dreistellige natürliche Zahl.

Aus (2) folgt ferner

$$0 < n - 999 \cdot g \leq 999$$

also ist auch $n - 999 \cdot g$ eine höchstens dreistellige natürliche Zahl. Mit diesen Zahlen führen daher die drei Rechenoperationen

$$n - (n - 999 \cdot g) = 999 \cdot g \quad ; \quad 999 \cdot g : 999 = g \quad ; \quad g - g = 0$$

in der behaupteten Weise zum Ergebnis 0.

Aufgabe 320831:
Sind a, b, c die Hunderter-, Zehner- bzw. Einerziffern einer dreistelligen natürlichen Zahl, so sei diese Zahl kurz durch $\overline{abc}$ bezeichnet. Ebenso sei jeweils eine zweistellige Zahl mit Zehner- bzw. Einerziffer b und c durch $\overline{bc}$ bezeichnet.

Ermittle alle diejenigen a, b, c, für die $\overline{abc}$ eine dreistellige und $\overline{bc}$ eine zweistellige Zahl ist, so dass die Gleichung $\overline{abc} = \left(\overline{bc}\right)^b$ gilt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn a,b,c Ziffern der geforderten Art sind, so folgt:
Es kann nicht $b = 0$ sein, da hierfür $\overline{bc}$ nicht zweistellig wäre. Es kann nicht $b = 1$ sein, da hierfür $\left(\overline{bc}\right)^b = \overline{bc}$ wäre, also nicht gleich der dreistelligen Zahl $\overline{abc}$ sein könnte.

Es kann nicht $b \geq 3$ sein, da hierfür $\left(\overline{bc}\right)^b \geq 30^3$ mindestens fünfstellig wäre, also nicht gleich der dreistelligen Zahl $\overline{abc}$ sein könnte. Also muss $b = 2$ sein und somit $\overline{abc} = \left(\overline{bc}\right)^2$ gelten.

Daher muss c die Einerziffer der Zahl c^2 sein. Wegen $2^2 = 4$, $3^2 = 9$, $4^2 = 16$, $7^2 = 49$, $8^2 = 64$, $9^2 = 81$ kann dies für $c = 2; 3; 4; 7; 8; 9$ nicht zutreffen, trifft also höchstens für $c = 0; 1; 5; 6$ zu.

Weiter ist an den Zehnerziffern von $20^2 = 400, 21^2 = 441, 26^2 = 676$ ersichtlich:
Die Zahl $\left(\overline{bc}\right)^2$ mit $b = 2$ hat für $c = 0; 1; 6$ nicht die durch $\overline{abc} = \left(\overline{bc}\right)^2$ geforderte Zehnerziffer 2; sie kann dies (unter den Möglichkeiten $c = 0; 1; 5; 6$) also nur für $c = 5$ haben.
Hiermit führt schließlich $25^2 = 625$ auf $a = 6$.

II. Von $a = 6$, $b = 2$, $c = 5$ wird wegen $625 = 25^2$ die geforderte Gleichung $\overline{abc} = \left(\overline{bc}\right)^b$ erfüllt.
Mit I. und II. ist gezeigt: Es sind genau $a = 6, b = 2, c = 5$ Ziffern der geforderten Art.

Aufgabe 330835:
Eine sechsstellige natürliche Zahl heiße genau dann eine „Spiegelzahl“, wenn ihre erste Ziffer gleich ihrer sechsten Ziffer, ihre zweite Ziffer gleich ihrer fünften Ziffer und ihre dritte Ziffer gleich ihrer vierten Ziffer ist.

a) Ermittle alle diejenigen „Spiegelzahlen“, die zwei Ziffern 2, zwei Ziffern 5 und zwei Ziffern 7 enthalten! Ermittle die Summe s aller dieser „Spiegelzahlen“! Welches ist der größte echte Teiler von s?

b) Beweise, dass für je drei Ziffern a, b, c von denen keine zwei einander gleich sind, folgende Aussage gilt!

Die Summe aller derjenigen „Spiegelzahlen“, die zwei Ziffern a, zwei Ziffern b und zwei Ziffern c enthalten, ist durch 111111 teilbar.

Hinweis: Als echter Teiler von s bezeichnet man alle diejenigen Teiler von s, die (positiv und) kleiner als s sind.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Für die Anordnung der drei Ziffern 2, 5, 7 gibt es genau sechs Möglichkeiten; dementsprechend sind alle „Spiegelzahlen“ der genannten Art die Zahlen 257752, 275572, 527725, 572275, 725527 und 752257. Als ihre Summe ergibt sich $s = 3111108$.

Die kleinste natürliche Zahl, die größer als 1 und Teiler von s ist, ist 2. Daher ist die Zahl $\frac{s}{2} = 1555554$ Teiler von s, kleiner als s und zugleich die größte Zahl mit diesen beiden Eigenschaften, also der größte echte Teiler von s.

b) Entsprechend gilt für je drei Ziffern a, b, c, von denen keine zwei einander gleich sind:
Um mit dem üblichen Additionsverfahren die Summe der im Aufgabentext genannten „Spiegelzahlen“ zu bilden, hat man beim Addieren an allen sechs Stellen (Einer-, Zehner-, ..., Hunderttausenderstelle) die Zahl $z = 2 \cdot a + 2 \cdot b + 2 \cdot c$ zu bilden. Daher beträgt diese Summe

$$z + 10 \cdot z + 10^2 \cdot z + 10^3 \cdot z + 10^4 \cdot z + 10^5 \cdot z = 111111 \cdot z$$

und ist folglich durch 111111 teilbar.

IV.III. Diophantische Gleichung

I. Runde 1

Aufgabe 140812:
Ermittle alle geordneten Paare $(x,\, y)$ natürlicher Zahlen $x,\, y$, für die die Gleichung $13x + 5y = 82$ gilt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(I) Angenommen, $(x; y)$ sei eines der gesuchten Paare. Dann gilt

$$y = \frac{82 - 13x}{5} \qquad \text{also} \qquad 2y = \frac{164 - 26x}{5} = 32 - 5x + \frac{4 - x}{5}$$

Da x und y natürliche Zahlen sind, folgt hieraus $5|4 - x$, d. h., es gibt eine ganze Zahl n mit $4 - x = 5n$, also $x = 4 - 5n$. Daraus folgt

$$y = \frac{82 - 13(4 - 5n)}{5} = 6 + 13n$$

Wegen $x \geq 0$ folgt $4 - 5n \geq 0$, also $n \leq \frac{4}{5}$ und, da n ganzzahlig ist, somit $n \leq 0$.
Wegen $y \geq 0$ folgt $6 + 13n > 0$, also $n \geq -\frac{6}{13}$ und, da n ganzzahlig ist, somit $n \geq 0$.
Daher ergibt sich $n = 0$, also $x = 4, y = 6$. Somit kann höchstens das Paar (4;6) die geforderten Eigenschaften haben.

(II) Tatsächlich ist $(4; 6)$ ein Paar natürlicher Zahlen, und es gilt $13 \cdot 4 + 5 \cdot 6 = 52 + 30 = 82$. Das Paar $(4; 6)$ erfüllt daher als einziges die Bedingungen der Aufgabe.

Aufgabe 240813:
Gesucht ist eine Zerlegung der Zahl 500 in vier Summanden, wobei folgende Bedingungen gefordert werden:

(1) Alle vier Summanden sind natürliche Zahlen.

(2) Wenn man zum ersten Summanden 4 addiert, so ergibt sich dasselbe Ergebnis, wie wenn man vom zweiten Summanden 4 subtrahiert. Ebenfalls dasselbe Ergebnis entsteht, wenn man den dritten Summanden mit 4 multipliziert, und auch dann, wenn man den vierten Summanden durch 4 dividiert.

Untersuche, ob es nur eine solche Zerlegung gibt! Ist dies der Fall, so ermittle sie und bestätige, dass sie die Eigenschaften (1), (2) hat!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn eine Zerlegung den Bedingungen (1) und (2) genügt und wenn dabei x das viermal in (2) genannte Ergebnis ist, so sind

$$x - 4, \quad x + 4, \quad \frac{x}{4}, \quad 4x$$

die vier Summanden, also gilt

$$x - 4 + x + 4 + \frac{x}{4} + 4x = 500 \qquad \Rightarrow \qquad x = 80$$

folglich kann nur die Zerlegung in die Summanden 76, 84, 20, 320 die geforderten Eigenschaften haben. Sie hat diese Eigenschaften; denn die Summanden sind natürliche Zahlen und erfüllen die Probe.

II. Runde 2

Aufgabe 190824:
Klaus sagt:

> „Ich denke mir drei natürliche Zahlen. Die zweite Zahl ist um 2 größer als die Hälfte der ersten Zahl. Die dritte Zahl ist um 2 größer als die Hälfte der zweiten Zahl. Das Produkt der drei gedachten Zahlen beträgt 1120.
>
> Welche Zahl habe ich mir als erste gedacht, welche als zweite und welche als dritte ?“

Kann diese Frage eindeutig beantwortet werden? Wenn das der Fall ist, so nenne die drei gedachten Zahlen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I) Wenn drei Zahlen die genannten Eigenschaften haben und n die erste Zahl ist, so lautet die zweite $\frac{n}{2}+2=\frac{n+4}{2}$ und die dritte $\frac{n+4}{4}+2=\frac{n}{4}+3$. Da auch dies eine natürliche Zahl ist, ist n durch 4 teilbar.

Wäre n eine (durch 4 teilbare) natürliche Zahl mit $n \leq 12$, so wären $\frac{n}{2}+2$ und $\frac{n}{4}+3$ natürliche Zahlen mit $\frac{n}{2}+2<8$ und $\frac{n}{4}+3<6$, also wäre ihr Produkt

$$n \cdot \left(\frac{n}{2}+2\right) \cdot \left(\frac{n}{4}+3\right) \leq 12 \cdot 8 \cdot 6 = 576$$

und daher kleiner als 1120. Wäre $n \geq 20$, so wäre $\frac{n}{2}+2>12$ und $\frac{n}{4}+3>8$, also das Produkt ≥ 1920, und daher größer als 1120.
Also kommt als erste Zahl nur $n=16$, als zweite nur $\frac{n}{2}+2=10$ und als dritte nur $\frac{n}{4}+3=7$ in Frage.

II) Diese Zahlen haben die geforderten Eigenschaften wie die Probe zeigt.
Also kann die Frage von Klaus eindeutig beantwortet werden. Er hat sich als erste Zahl 16, als zweite 10 und als dritte 7 gedacht.

Aufgabe 310821:
In einer Schulklasse ist jeder Schüler 13 oder 14 Jahre alt; beide Altersangaben kommen in dieser Klasse auch wirklich vor. Addiert man alle diese (ganzzahlig gerechneten) Altersangaben, so ergibt sich die Summe 325.

Untersuche, ob durch diese Feststellungen eindeutig bestimmt ist, wie viele Schüler in dieser Klasse sind! Ist das der Fall, so gib die Schülerzahl an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Ist x bzw. y die Anzahl der 13- bzw. 14-jährigen Schüler, so folgt

$$13x + 14y = 325 = 13 \cdot 25 \tag{1}$$

Somit ist $14y$ durch 13 teilbar, also auch y durch 13 teilbar. Nach den Feststellungen im Aufgabentext ist ferner $y>0$ sowie $x>0$, wegen (1) also $14y<325$ und folglich $14y<14\cdot 26$, $y<26$.

Daher verbleibt nur die Möglichkeit $y=13$ und aus (1), also $13\cdot(x+14)=13\cdot 25$; folgt $x+14=25$, $x=11$.
Also ist die Schülerzahl der Klasse eindeutig durch die Feststellungen bestimmt; sie beträgt $x+y=24$.

III. Runden 3 & 4

Aufgabe 070833:
Es seien a und b positive ganze Zahlen.

Gesucht sind alle ganzen Zahlen x, für die $\frac{a+x}{b-x} = \frac{b}{a}$ ist.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(I) Angenommen, x sei eine Zahl mit der genannten Eigenschaft, dann gilt

$$\frac{a+x}{b-x} = \frac{b}{a}$$

hieraus folgt $a^2 + ax = b^2 - bx$, also $(a+b)x = b^2 - a^2$. Da a und b positiv sind, ist $a + b \neq 0$, und es folgt weiter

$$x = \frac{b^2 - a^2}{a+b} = b - a$$

Somit kann höchstens die Zahl $x = b - a$ die genannte Eigenschaft haben.

(II) Durch Umkehrung dieser Schlüsse folgt, dass sie tatsächlich diese Eigenschaft besitzt.
Aus $x = b - a$ folgt $(a+b)x = b^2 - a^2$, hieraus $a(a+x) = b(b-x)$. Da ferner $a \neq 0$ gilt und mithin auch $b - x(= a) \neq 0$ ausfällt, ergibt sich weiter

$$\frac{a+x}{b-x} = \frac{b}{a}$$

Aufgabe 120836:
Untersuche, ob es eine kleinste positive rationale Zahl a gibt, zu der man eine natürliche Zahl x mit der Eigenschaft

$$\frac{25}{2}x - a = \frac{5}{8}x + 142$$

finden kann!

Wenn es ein solches kleinstes a gibt, so ermittle, welchen Wert x hierfür annimmt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, zu einer positiven rationalen Zahl a gebe es eine natürliche Zahl x, für die gilt:

$$\frac{25}{2}x - a = \frac{5}{8}x + 142 \qquad (1)$$

Dann gilt auch

$$100x - 8a = 5x + 1136 \qquad \text{bzw.} \qquad 95x = 1136 + 8a, \qquad \text{also} \qquad x = \frac{1136 + 8a}{95} \qquad (2)$$

Daher gibt es zu einer positiven rationalen Zahl a nur dann eine natürliche Zahl x mit der Eigenschaft (1), wenn $1136 + 8a$ durch 95 teilbar ist, wobei $8a > 0$ gilt.
Da 1136 bei Division durch 95 den Rest 91 lässt, erhält man die kleinste Zahl a für $8a = 4$, sie lautet also $a = \frac{1}{2}$.

Für sie ergibt sich nach (2) $x = 12$, also eine natürliche Zahl. Umgekehrt erfüllt $x = 12$ zusammen mit $a = \frac{1}{2}$ auch (1), wie man durch Einsetzen bestätigt. Also gibt es ein kleinstes a mit den geforderten Eigenschaften, und x nimmt hierfür den Wert 12 an.

Aufgabe 170835:
Man ermittle alle geordneten Tripel $(P_1; P_2; P_3)$ von Primzahlen P_1, P_2, P_3 mit $P_2 > P_3$, die der Gleichung genügen:

$$P_1(P_2 + P_3) = 165$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, es gibt drei derartige Primzahlen. Dann kann wegen $165 = 3 \cdot 5 \cdot 11$ die Primzahl P_1 nur eine der Zahlen 3, 5, 11 sein.

1. Fall: Es sei $P_1 = 3$, dann ist $P_2 + P_3 = 55$. (2)
Die Summe zweier natürlicher Zahlen ist nur dann ungerade, wenn ein Summand gerade, der andere aber ungerade ist. Deshalb, wegen $P_2 > P_3$ und weil 2 die einzige gerade Primzahl ist, kann höchstens $P_2 = 53$; $P_3 = 2$ die Lösung von (2) sein.
Da diese beiden Zahlen Primzahlen sind, ist das Tripel $(3; 53; 2)$ eine Lösung.

2. Fall: Es sei $P_1 = 5$, dann ist $P_2 + P_3 = 33$. (3)
Analog wie im Fall 1 ist höchstens $P_2 = 31$; $P_3 = 2$ Lösung von (3). Da 31 und 2 Primzahlen sind, ist das Tripel $(5; 31; 2)$ ebenfalls eine Lösung.

3. Fall: Es sei $P_1 = 11$, dann ist $P_2 + P_3 = 15$: (4)
Analog zum Fall 1 ist höchstens $P_2 = 13$; $P_3 = 2$ Lösung von (4). Da 13 und 2 Primzahlen sind, erfüllt auch das Tripel $(11; 13; 2)$ die Gleichung (1).
Somit sind genau die drei Tripel $(3; 53; 2)$, $(5; 31; 2)$, $(11; 13; 2)$ Lösung von (1).

Aufgabe 280833:
Beweise die folgende Aussage!

Stets, wenn irgendwelche sechs unmittelbar aufeinanderfolgende natürliche Zahlen vorliegen, ist es unmöglich, diese sechs Zahlen so in zwei Gruppen einzuteilen, dass das Produkt der Zahlen einer Gruppe gleich dem Produkt der Zahlen der anderen Gruppe ist.

Hinweis: Enthält bei einer Einteilung eine der zwei Gruppen nur eine Zahl, so gilt diese Zahl als das „Produkt“ der Zahlen dieser Gruppe.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Sechs unmittelbar aufeinanderfolgende natürliche Zahlen sind stets mit einer geeigneten natürlichen Zahl n von der Form n, $n + 1$, $n + 2$, $n + 3$, $n + 4$, $n + 5$.
Für jede Einteilung in zwei Gruppen bezeichne P das Produkt der Zahlen einer Gruppe und Q das Produkt der Zahlen der anderen Gruppe.

Ist $n = 0$, so ist eines der Produkte P, Q gleich 0, das andere nicht, also gilt dann $P \neq Q$.
Ist $n > 0$, so muss eine der vier Zahlen $n + 1$, $n + 2$, $n + 3$, $n + 4$ durch eine Primzahl $p > 3$ teilbar sein. Wären nämlich diese vier Zahlen durch keine anderen Primzahlen als 2 und 3 teilbar, so ergäbe sich folgendermaßen ein Widerspruch:

Im Fall eines geraden $n > 0$ müssten $n + 1$ und $n + 3$ ungerade, also Potenzen von 3, und außerdem größer als 1 sein; im Fall eines ungeraden n müsste dies für $n + 2$ und $n + 4$ gelten; es gibt aber keine zwei Potenzen von 3, die größer als 1 sind und sich nur um die Differenz 2 unterscheiden.

Wegen $p \geq 5$ folgt nun weiter, dass unter den sechs Zahlen n, $n+1$,..., $n+5$ keine andere als die genannte (der vier Zahlen $n + 1, \dots, n + 4$) durch p teilbar ist. Also ist eines der Produkte P, Q durch p teilbar, das andere nicht; somit ist ebenfalls $P \neq Q$ bewiesen.

Aufgabe 290834:
Ermittle alle diejenigen Tripel (a, b, c) natürlicher Zahlen a, b und c, die die folgenden Bedingungen (1), (2) und (3) erfüllen!

(1) Es gilt $a + b = c^3$.

(2) Es gilt $a + b + c = 130$.

(3) Die Zahl $a - b$ ist ein ganzzahliges Vielfaches von 19.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn ein Tripel (a,b,c) natürlicher Zahlen die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt, so folgt:
Mit (a,b,c) erfüllt auch (b,a,c) die Bedingungen (1), (2), (3). Daher kann o. B. d. A. vorausgesetzt werden, dass a,b,c außer (1), (2), (3) auch $a \geq b$ (4) erfüllen.

Wegen (1) und (2) gilt $c^3 + c = 130$. (5)
Wäre $c < 5$ oder $c > 5$, so wäre $c^3 + c < 125 + 5 = 130$ bzw. $c^3 + c > 130$, beides im Widerspruch zu (5). Als muss $c = 5$ (6) sein, und aus (2) folgt $a + b = 125$.(7)

Nach (3) gibt es eine ganze Zahl g mit $a - b = 19g$, also $a = 199 + b$ (8); wegen (4) ist dabei $g \geq 0$. (9)
Setzt man (8) in (7) ein, so folgt $19g + 2b = 125$. (10)
Wäre g gerade, so auch $19g + 2b$, im Widerspruch zu (10). Also ist g ungerade. Wäre $g \geq 7$, so folgte wegen $b \geq 0$, dass $199 + 2b \geq 19 \cdot 7 = 133$ wäre, ebenfalls im Widerspruch zu (10). Also ist g einer der Werte $g = 1,3,5$. (11)

Aus (10), also $b = \frac{125-19g}{2}$, ergibt sich jeweils hierzu $b = 53, 34, 15$ (12) und damit nach (7) jeweils $a = 72, 91, 110$. (13)

Daher und wegen (6) können (1), (2), (3), (4) nur von den Tripeln $(72, 53, 5)$, $(91, 34, 5)$, $(110, 15.5)$ erfüllt werden; wegen der Eingangsbemerkung über (b,a,c) können (1), (2), (3) zusätzlich nur noch von $(53, 72, 5)$, $(34, 91, 5)$, $(15, 110, 5)$ erfüllt werden.

II. Die (15) genannten Tripel erfüllen (1), (2), (3), wie die Probe zeigt. Damit ist bewiesen, dass (1), (2), (3) genau von den in (14) und (15) genannten Tripeln erfüllt werden.

Aufgabe 300832:
Gegeben seien drei verschiedene Sorten von Kugeln; von jeder Sorte seien 100 Stück vorhanden:

Sorte A: Kugeln mit einer Masse von 0,3 g je Stück,

Sorte B: Kugeln mit einer Masse von 1,5 g je Stück,

Sorte C: Kugeln mit einer Masse von 7,0 g je Stück.

Untersuche, ob es möglich ist, aus diesen Kugeln genau 100 so auszuwählen, dass ihre Gesamtmasse genau 100 g beträgt! Wenn das der Fall ist, so ermittle alle derartigen Möglichkeiten für die drei Anzahlen, die man jeweils aus Kugeln der Sorten A, B und C auszuwählen hat!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Bei jeder Auswahl von Kugeln A und B haben diese zusammen eine Masse m, die gemessen in Zehntelgramm eine durch 3 teilbare Maßzahl hat. Um hierzu eine der in der Aufgabe gesuchten Möglichkeiten zu erhalten, muss man also eine Anzahl z von Kugeln C so wählen, dass die Masse dieser Kugeln C eine

derartige Masse m zu 100 g ergänzt.

Die kleinste Anzahl z, für die das zutrifft, ist $z = 1$, wie aus $100g - 1 \cdot 7g = 93{,}0g$ ersichtlich ist.
Weitere derartige Anzahlen z von Kugeln C ergeben sich erst wieder, wenn man die Anzahl 1 um Vielfache von 3 erhöht. So entstehen die Anzahlen

$$z = 4, 7, 10, ... \tag{1}$$

mit den für Kugeln A und B übrigbleibenden Massen

$$m = 93g, 72g, 51g, 30g, ... \tag{2}$$

Jede Anzahl $z = 13 + n$ mit $n \geq 0$ ergäbe eine Masse m von höchstens $100 - (13 + n) \cdot 7 < 9 - 6{,}9 \cdot n$ Gramm. Selbst wenn man sie nur mit Kugeln A zusammenstellen würde, gäbe dies nicht mehr als $30 - 23n$ Kugeln A, also insgesamt nicht mehr als

$$(30 - 23n) + 0 + (13 + n) = 43 - 22n$$

Kugeln; bei Mitverwendung von Kugeln B wären es noch weniger.
Da hiermit keine Gesamtzahl 100 erreicht wird, verbleiben nur die jeweils in (1) und (2) genannten vier Anfangswerte.

Hiervon scheiden der 1., 3. und 4. Wert aus; denn um diese Werte durch y Kugeln B und folglich $(100 - z - y)$ Kugeln A zu erreichen, müsste

$$\begin{array}{lll} (99 - y) \cdot 0{,}3 + y \cdot 1{,}5 = 93, & y \cdot 1{,}2 = 63{,}3 & \text{bzw.} \\ (93 - y) \cdot 0{,}3 + y \cdot 1{,}5 = 51, & y \cdot 1{,}2 = 23{,}1 & \text{bzw.} \\ (90 - y) \cdot 0{,}3 + y \cdot 1{,}5 = 30; & y \cdot 1{,}2 = 3 & \end{array}$$

gelten. Da dies nicht mit ganzzahligen y möglich ist, verbleibt in (1) und (2) nur jeweils der 2. Wert.
Für ihn werden die Forderungen der Aufgabe genau dann erfüllt, wenn

$$(96 - y) \cdot 0{,}3 + y \cdot 1{,}5 = 72, \quad y \cdot 1{,}2 = 43{,}2, \quad y = 36, \quad 96 - y = 60$$

gilt. Damit ist bewiesen:
Es ist möglich, die Forderungen der Aufgabe zu erfüllen, und zwar werden sie genau mit 60 Kugeln A, 36 Kugeln 8, 4 Kugeln C erfüllt.

Aufgabe 310831:
Eine Schachtel B ist mit blauen Kugeln gefüllt, eine andere Schachtel R mit roten Kugeln. Die Anzahl der roten Kugeln beträgt $\frac{15}{17}$ der Anzahl der blauen Kugeln.

Aus der Schachtel B kann man $\frac{2}{5}$ ihres Inhalts herausnehmen; danach enthält sie immer noch mehr als 1000 Kugeln. Aus der Schachtel R kann man $\frac{3}{7}$ ihres Inhalts herausnehmen; danach enthält sie weniger als 1000 Kugeln.

Untersuche, ob durch diese Angaben die Anzahlen der Kugeln eindeutig bestimmt sind, die ursprünglich in den Schachteln waren! Wenn das der Fall ist, nenne diese beiden Anzahlen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Für die Anzahlen b bzw. r der blauen bzw. roten Kugeln gilt $r = \frac{15b}{17}$ also ist $15b$ durch 17 teilbar. Da 15 zu 17 teilerfremd ist, ist folglich auch b durch 17 teilbar; d. h., es gilt $b = 17n$ mit einer natürlichen Zahl n. Damit folgt weiter

$$r = \frac{15 \cdot 17n}{17} = 15n$$

Da $\frac{2b}{5}$ als (aus B entnehmbare) Anzahl vorausgesetzt wird, ist $2b$ durch 5 teilbar; wegen $2b = 2 \cdot 17n$ und der Teilerfremdheit von $2 \cdot 17$ zu 5 ist somit n durch 5 teilbar; d. h., mit einer natürlichen Zahl m gilt $n = 5m$, also

$$b = 17 \cdot 5m \qquad ; \qquad r = 15 \cdot 5m$$

Ebenso folgt aus der Voraussetzung von $\frac{3r}{7}$ als Anzahl sowie aus $3r = 3 \cdot 15 \cdot 5m$, dass m durch 7 teilbar ist. Mit einer natürlichen Zahl k gilt somit $m = 7k$,

$$b = 17 \cdot 5 \cdot 7k \qquad ; \qquad r = 15 \cdot 5 \cdot 7k$$

In B bzw. R befinden sich nach dem Herausnehmen von $\frac{2}{5}b$ bzw. von $\frac{3}{7}r$ noch $\frac{3}{5}b = 3 \cdot 17 \cdot 7k = 357k$ Kugeln bzw. noch $\frac{4}{7}r = 4 \cdot 15 \cdot 5k = 300k$ Kugeln. Für diese Anzahlen gilt nach Voraussetzung

$$357k > 1000 \qquad , \qquad 300k < 1000$$
$$k > \frac{1000}{357} > 2 \qquad , \qquad k < \frac{1000}{300} < 4$$

Damit ist eindeutig bestimmt: Es gilt $k = 3$, $b = 17 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 3 = 1785$, $r = 15 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 3 = 1575$.

Aufgabe 330846:
Untersuche, ob es ein Paar natürlicher Zahlen größer als Null gibt, deren Produkt genau zehnmal so groß wie ihre Summe ist! Wenn dies der Fall ist, ermittle alle derartigen Zahlenpaare!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Für natürliche Zahlen $x > 0$, $y > 0$ folgt aus der Bedingung $xy = 10 \cdot (x+y)$ (1), dass $xy = 10 \cdot (x+y) > 10y$, also $x > 10$ gilt; ebenso folgt $y > 10$. Also ist (1) nur erfüllbar, wenn

$$x = 10 + u \qquad , \qquad y = 10 + v \tag{2}$$

mit natürlichen Zahlen $u > 0$, $v > 0$ gilt. Hierfür ist (1) gleichbedeutend mit

$$(10 + u)(10 + v) = 10 \cdot (20 + u + v) \qquad ; \qquad uv = 100$$

Dies gilt genau dann, wenn $(u; v)$ eines der Paare

$$(1; 100), (2; 50), (4; 25), (5; 20), (10; 10), (20; 5), (25; 4), (50; 2), (100; 1)$$

ist; also werden die Bedingungen der Aufgabe genau von den Paaren erfüllt:

$$(11; 110), (12; 60), (14; 35), (15; 30), (20; 20), (30; 15), (35; 14), (60; 12), (110; 11)$$

Aufgabe 340842:
Ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen n, die den folgenden Bedingungen (1) und (2) genügen!

(1) Die Zahl n ist das Produkt von genau drei Primzahlen; je zwei dieser Primzahlen sind voneinander verschieden; jede dieser Primzahlen ist größer als 10.

(2) Die Zahl n kann als Produkt von zwei natürlichen Zahlen dargestellt werden, deren Summe 600 beträgt. Die Zahl n kann aber auch als das Produkt von zwei natürlichen Zahlen dargestellt werden, deren Summe 240 beträgt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn eine natürliche Zahl n den Bedingungen (1) und (2) genügt, so folgt:
Nach (1) gibt es Primzahlen p, q, r mit $p > 10$, $q > 10$, $r > 10$, $p \neq q$, $p \neq r$, $q \neq r$ und $n = p \cdot q \cdot r$. Alle Darstellungen von n als Produkt zweier natürlicher Zahlen sind daher

$$n = 1 \cdot pqr = p \cdot qr = q \cdot pr = r \cdot pq$$

Nach (2) ist folglich eine der Zahlen $1 + pqr$, $p + qr$, $q + pr$, $r + pq$ gleich 600, eine andere gleich 240.

Sowohl 599 als auch 239 sind Primzahlen. Dies folgt wegen $25^2 > 599$ bzw. $16^2 > 239$ daraus, dass 599 durch keine der Primzahlen 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 teilbar ist bzw. 239 durch keine der Primzahlen 2, 3, 5, 7, 11, 13.

Damit scheidet sowohl das Vorliegen von $1 + pqr = 600$ als auch das von $1 + pqr = 240$ aus.

Also kann die Reihenfolge der Bezeichnungen p, q, r so gewählt werden, dass die Gleichungen

$$p + qr = 600 \qquad , \qquad q + pr = 240 \tag{3}$$

gelten.
Daher gilt $pr < 240$, wegen der Voraussetzung $p \geq 11$ also $r < \frac{240}{11} < 22$ und wegen der Voraussetzung $r \geq 11$ ebenso $p < 22$. Folglich kommen für p und r nur die Primzahlen $11, 13, 17, 19$ in Frage.
Somit ist die Zahl $qr = 600 - p$ eine der Zahlen 589, 587, 583, 581. Von ihnen sind aber nur $589 = 19 \cdot 31$ und $583 = 11 \cdot 53$ das Produkt zweier Primzahlen größer als 10, während dies für die Primzahl 587 und für $581 = 7 \cdot 83$ nicht zutrifft.

Damit verbleiben nur die Möglichkeiten, dass
entweder $r = 19$, $q = 31$, $p = 600 - 589 = 11$, $n = 11 \cdot 31 \cdot 19 = 6479$
oder $r = 11$, $q = 53$, $p = 600 - 583 = 17$, $n = 17 \cdot 53 \cdot 11 = 9911$
gilt.

II. Für jede dieser beiden Zahlen n zeigt die angegebene Zerlegung, dass (1) erfüllt ist. Ferner zeigen die Proben, dass auch (2) erfüllt ist.
Mit I. und II. ist gezeigt, dass genau die beiden Zahlen $n = 6479$ und $n = 9911$ den Bedingungen (1) und (2) genügen.