Thematische Aufgabensammlung

Aufgaben und Lösungen der I. bis IV. Runde der Klassenstufe 9 der Mathematik-Olympiaden von 1960 bis 1994

Zentrales Komitee für die Olympiaden Junger Mathematiker

unter Nutzung von Manuela Kugels
`https://www.olympiade-mathematik.de/`

zusammengestellt von Steffen Polster
`https://mathematikalpha.de`
Chemnitz, 2019/22

bearbeitet von Christian Hercher
Flensburg, 2022

I Algebra

I.I Gleichungen

I Runde 1

Aufgabe V00902:
Wie kommt es zu der Formel?

$$x_{1;2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Lösung von Steffen Polster:
Lösungsformel der Normalform der quadratischen Gleichung mit den Parametern p und q:

$$\begin{aligned}
0 &= x^2 + px + q \\
0 &= x^2 + px + \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + q \\
\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 &= \frac{p^2}{4} - q \\
x + \frac{p}{2} &= \pm\sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \\
x &= -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}
\end{aligned}$$

Aufgabe 010911:
Berechnen Sie:

$$\left(\frac{9}{10}m^4 - 3\frac{211}{360}m^2 + 5\frac{1}{4}m - 4\frac{1}{2}\right) : \left(1\frac{1}{2}m^2 + 1\frac{2}{3}m - 6\right).$$

Lösung von Christiane Czech:
Mit Polynomdivision erhalten wir:

$$\begin{array}{l}
\left(\frac{9}{10}m^4 - 3\frac{211}{360}m^2 + 5\frac{1}{4}m - 4\frac{1}{2}\right) : \left(1\frac{1}{2}m^2 + 1\frac{2}{3}m - 6\right) = \frac{3}{5}m^2 - \frac{2}{3}m + \frac{3}{4}. \\
\underline{-\left(\frac{9}{10}m^4 + m^3 - 3\frac{3}{5}m^2\right)} \\
\qquad -m^3 + \frac{1}{72}m^2 + 5\frac{1}{4}m - 4\frac{1}{2} \\
\qquad \underline{-\left(-m^3 - 1\frac{1}{9}m^2 + 4m\right)} \\
\qquad\qquad 1\frac{1}{8}m^2 + 1\frac{1}{4}m - 4\frac{1}{2} \\
\qquad\qquad \underline{-\left(1\frac{1}{8}m^2 + 1\frac{1}{4}m - 4\frac{1}{2}\right)} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Aufgabe 040911:
Martina stellt ihrer Freundin in einem Jahr, das kein Schaltjahr ist, folgende Aufgabe:

„Wenn man zur Hälfte der Zahl der bis heute verflossenen Tage dieses Jahres ein Drittel der Zahl der restlichen Tage des Jahres addiert, erhält man die Zahl der verflossenen Tage. Den heutigen Tag habe ich zu den verflossenen gezählt.“

Geben Sie das Datum (Tag und Monat) an, an dem das geschieht!

Lösung von Steffen Polster:
a seien die verflossene Tage, b die noch übrigen Tage, wobei $a+b = 365$ gilt, da kein Schaltahr angenommen wird. Dann gilt nach Aufgabenstellung

$$\frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b = a \qquad \Rightarrow \qquad b = 1{,}5a$$

Einsetzen in die erste Gleichung ergibt $2{,}5a = 365$, also $a = 146$. Der 146. Tag des Jahres ist der 26. Mai.

Aufgabe 080911:
Eine FDJ-Versammlung wurde so stark besucht, dass genau 75 Prozent der FDJler Platz fanden. Daher wurde beschlossen, eine zweite Versammlung in einem anderen Raum zu veranstalten. Es gingen 150 der Jugendfreunde dorthin. Die übrigen blieben im ersten Raum. Dadurch wurden in diesem genau 5 Plätze frei.

Ermitteln Sie die Anzahl aller Jugendfreunde, die zu der ursprünglich angesetzten Veranstaltung erschienen waren!

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:
Nach der Aufgabenstellung ist $0{,}25 \cdot x + 5 = 150$. Also erschienen 580 Jugendliche, von denen zunächst 435 Platz fanden, bevor 150 gingen.

Aufgabe 090911:
Auf der Siegerehrung einer Kreisolympiade wurde folgendes mitgeteilt:

Genau ein Neuntel aller Teilnehmer an dieser Kreisolympiade errangen einen Preis. Genau ein Zehntel aller Teilnehmer der Kreisolympiade sind Mitglieder des Kreisklubs Junge Mathematiker. Von den Preisträgern stammen genau 75 Prozent aus dem Kreisklub. Genau 6 derjenigen Schüler, die an der Kreisolympiade teilnahmen und Mitglieder des Kreisklubs sind, erhielten keinen Preis.

Ermitteln Sie die Anzahl aller Teilnehmer an dieser Kreisolympiade!

Lösung von Steffen Polster:
T sei die Anzahl aller Teilnehmer der Kreisolympiade. Nach Aufgabenstellung sind $\frac{1}{9}$ der Teilnehmer Preisträger sowie 75%, also $\frac{3}{4}$, der Preisträger Klubmitglieder.
Einen Preis erhalten damit $\frac{1}{9} \cdot \frac{3}{4} \cdot T = \frac{1}{12} \cdot T$ der Klubmitglieder, d. h. ein Zwölftel der Teilnehmer sind folglich sowohl Preisträger als auch Klubmitglieder.

Die Anzahl der Klubmitglieder die einen Preis erhalten ($\frac{1}{12} \cdot T$) und derer die keinen Preis erhalten (6) ist gleich $\frac{1}{10}$ der Teilnehmer. Damit wird

$$\frac{1}{12} \cdot T + 6 = \frac{1}{10} \cdot T \qquad \text{und somit} \qquad T = 360$$

Die Anzahl der Teilnehmer an der Kreisolympiade war 360.

Aufgabe 180913:
In einem Zirkel Junger Mathematiker versuchen die Teilnehmer, folgende Aufgabe zu lösen:

> Die Zahl 30 soll dargestellt werden, indem dazu genau eine einziffrige Zahl genau neunmal benutzt wird, wobei noch die Zeichen der Grundrechenoperationen und Klammern erlaubt sind und die Potenzschreibweise zulässig ist.

Zeigen Sie, dass das für jede der einziffrigen Zahlen 1; 2; 3; 4, 5; 6; 7; 8 und 9 möglich ist! (Es genügt jeweils die Angabe eines Beispiels.)

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es gilt:

$$30 = (1+1)^{1+1+1+1+1+1} - 1 - 1 \qquad 30 = (2+2+2)^2 - 2 - 2 - 2 + 2 - 2$$

$$30 = 3^3 + 3 + 3 - 3 + 3 - 3 + 3 - 3 \qquad 30 = 4 \cdot 4 \left(\frac{4+4}{4}\right) - \frac{4}{4} - \frac{4}{4}$$

$$30 = 5 \cdot 5 + 5 + 5 - 5 + 5 - 5 + 5 - 5 \qquad 30 = 6 \cdot 6 - 6 + 6 - 6 + 6 - 6 + 6 - 6$$

$$30 = 7 + 7 + 7 + 7 + \frac{7+7}{7} + 7 - 7 \qquad 30 = 8 + 8 + 8 + 8 - \frac{8+8}{8} + 8 - 8$$

$$30 = 9 + 9 + 9 + \frac{9}{9} + \frac{9}{9} + \frac{9}{9}$$

Aufgabe 210913:
Elsa behauptet:

> „Man kann die Zahl 1981 folgendermaßen darstellen: Man schreibt die natürlichen Zahlen von 1 bis zu einer geeigneten Zahl n der Reihe nach auf und setzt zwischen je zwei dieser Zahlen jeweils genau eines der vier Operationszeichen $+$, $-$, $\cdot$, $:$. Dabei braucht nicht überall dasselbe Operationszeichen gewählt zu werden; es brauchen auch nicht alle vier Operationszeichen vorzukommen. An der Reihenfolge der natürlichen Zahlen darf nichts geändert werden; Klammern und weitere Rechenzeichen sollen nicht auftreten. Das Ergebnis der so aufgeschriebenen Rechenaufgabe ist 1981.“

Ist Elsas Behauptung wahr?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Elsas Behauptung ist wahr. Um das zu beweisen, genügt ein Beispiel. Derartige Beispiele lassen sich etwa durch folgende Überlegung zu finden:

Es gibt eine Zahl m so, dass die Summe der natürlichen Zahlen von 1 bis m die Zahle 1981 gerade übersteigt. Das ist bei $m = 63$ der Fall; denn er gilt

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 63 = \frac{63 \cdot 64}{2} = 2016$$

Wegen $2016 - 1981 = 35$ muss diese Summe um 35 verringert werden, um 1981 zu erreichen. Das kann z. B. dadurch geschehen, dass man die auf 63 folgenden 70 natürlichen Zahlen wechselweise addiert und subtrahiert, also

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 63 + 64 - 65 + 66 - 67 + - \cdots + 132 - 133 = 1981$$

bildet.

Ein anderer Weg besteht darin, dass man statt +17 die Zahl -17 einfügt, womit sich die Summe um 34 vermindert. Man erhält auf diese Weise

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 17 - 17 + 18 + \cdots + 64 = 1982$$

und gelangt durch Hinzufügen von +64 und -65 auf die gewünschte Zahl.

Ein weiteres Beispiel ist:

$$1+2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 : 6+7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11 : 12-13\cdot 14\cdot 15-16\cdot 17+18\cdot 19 = 1+20+4620-2870-272+342 = 1981$$

Aufgabe 230911:
Für die Multiplikation zweier natürlicher Zahlen a und b mit $5 \leq a \leq 10$ und $5 \leq b \leq 10$ gibt es folgende „Fingerregel“:

> Man streckt an der einen Hand so viele Finger aus, wie die erste Zahl a größer als 5 ist. Das gleiche macht man mit der anderen Hand für die zweite Zahl b. Die Gesamtzahl der ausgestreckten Finger wird mit 10 multipliziert. Die Zahl der nicht ausgestreckten Finger der einen Hand wird mit der Zahl der nicht ausgestreckten Finger der anderen Hand multipliziert und zu dem vorhergegangenen Produkt addiert. Die dabei erhaltene Summe ist das gesuchte Ergebnis $a \cdot b$.

Beweisen Sie, dass diese „Fingerregel“ für alle genannten a und b gilt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Nach der angegebenen Regel wird aus a und b die Zahl

$$z = ((a - 5) + (b + 5)) \cdot 10 + (10 - a)(10 - b)$$

berechnet. Man erhält

$$z = 10a + 10b - 100 + 100 - 10a - 10b + ab = ab$$

Damit ist die Gültigkeit der „Fingerregel“ für die genannten a und b bewiesen.

Aufgabe 280912:
Gibt es eine rationale Zahl, aus der man nach dem Bilden des Reziproken und anschließendem Verdoppeln wieder die ursprüngliche rationale Zahl erhält?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es gibt keine solche rationale Zahl. Dies kann folgendermaßen bewiesen werden:

Gäbe es eine solche Zahl x, so wäre für sie $\frac{1}{x} \cdot 2 = x$. Daraus würde $x^2 = 2$ folgen. Diese Gleichung hat aber nur die beiden Lösungen $\sqrt{2}$ und $-\sqrt{2}$, die bekanntlich beide irrational sind.

Aufgabe 320911:
Anne rechnet mit einem einfachen Taschenrechner. Als Ergebnis der Aufgabe 1 : 13 erhält sie die mit 6 Stellen nach dem Dezimalpunkt gezeigte Zahl 0.076923.

Britta meint: „Man kann den wahren Dezimalbruch finden, ohne das bekannte schriftliche Divisionsverfahren noch einmal von vorn zu beginnen; man braucht nur noch eine einfache Rechnung, z. B. mit diesem Taschenrechner, durchzuführen und muss dann ein wenig überlegen.“

Wie kann eine solche Rechnung und Überlegung verlaufen?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Man kann, ohne dass (wie bei dem Taschenrechnerergebnis für 1:13) die Möglichkeit eines Rundungsfehlers zu berücksichtigen wäre, $13 \cdot 76923 = 999999$ erhalten. Daraus folgt $1000000 - 13 \cdot 76923 = 1$ und weiter

$$1 : 13 - 0{,}076923 = 0{,}000001 : 13$$

Also muss das Divisionsverfahren für die Aufgabe 1:13, nachdem es die Anfangsziffern 0,076923 erbracht hat, wieder mit denselben aufeinanderfolgenden Ziffern fortgesetzt werden, mit denen es begonnen hat.

Das heißt: der wahre Dezimalbruch für 1:13 ist der periodisch-unendliche Dezimalbruch $0{,}\overline{076923}$.

Aufgabe 340915:
Geben Sie eine Gleichung in einer Unbekannten x so an, dass beide Seiten der Gleichung für alle reellen Zahlen x definiert sind, dass die Gleichung unendlich viele reelle Zahlen als Lösung hat, von denen aber keine ganzzahlig ist!

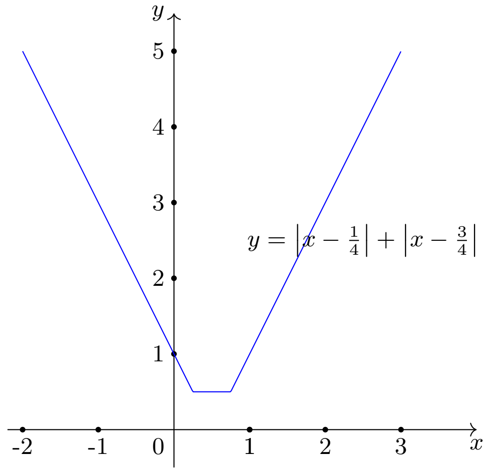
Zeigen Sie, dass die von Ihnen angegebene Gleichung diesen Bedingungen genügt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Zwei mögliche Beispiele sind:

I. Die Gleichung
$$\left|x - \frac{1}{4}\right| + \left|x - \frac{3}{4}\right| = \frac{1}{2}$$
Offenbar sind beide Seiten für alle reellen Zahlen x definiert. Beweis der übrigen Eigenschaften:

Für alle $x < \frac{1}{4}$ ist
$$\left|x - \frac{1}{4}\right| + \left|x - \frac{3}{4}\right| = \frac{1}{4} - x + \frac{3}{4} - x = 1 - 2x > 1 - 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$
für alle x mit $\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}$ ist
$$\left|x - \frac{1}{4}\right| + \left|x - \frac{3}{4}\right| = x - \frac{1}{4} + \frac{3}{4} - x = \frac{1}{2}$$
für alle $x > \frac{3}{4}$ ist
$$\left|x - \frac{1}{4}\right| + \left|x - \frac{3}{4}\right| = x - \frac{1}{4} + x - \frac{3}{4} = 2x - 1 > 2 \cdot \frac{3}{4} - 1 = \frac{1}{2}$$
Also sind genau alle x mit $\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}$ Lösung der Gleichung; keine dieser Zahlen ist eine ganze Zahl.

Eine andere Nachweismöglichkeit entsteht unter Verwendung des Graphen der durch $f(x) = \left|x - \frac{1}{4}\right| + \left|x - \frac{3}{4}\right|$ definierten Funktion f (siehe Abbildung).



II. Die Gleichung $\sin x = 1$. Wieder sind beide Seiten für alle reellen Zahlen x definiert; weiter gilt:

Alle Lösungen der Gleichung sind die Zahlen

$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi = \frac{4k+1}{2}\pi \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$$

Da π irrational ist und alle $\frac{4k+1}{2}$ rational und von 0 verschieden sind, sind alle Lösungen irrational, also nicht ganzzahlig.

II Runde 2

Aufgabe 010921:
Von den gesamten Kohlenvorräten der Welt liegen etwa $\frac{3}{5}$ in der Sowjetunion, $\frac{2}{9}$ der Vorräte der UdSSR betragen die Kohlenvorräte der USA, während die restlichen Länder 5 Billionen Tonnen weniger als die UdSSR besitzen.
a) Wie groß sind die Kohlenvorräte der Sowjetunion und die der USA?
b) Wie groß sind die Vorräte der ganzen Welt?

Lösung von Christiane Behns:
Ist x die Menge der Kohlevorräte der ganzen Welt in Billionen Tonnen, so lagern in der Sowjetunion $\frac{3}{5}x$ und in den USA $\frac{2}{9} \cdot \frac{3}{5}x = \frac{2}{15}x$. Die Kohlevorräte der übrigen Länder betragen dann

$$\left(1 - \frac{3}{2} - \frac{2}{15}\right) x = \frac{3}{5}x - 5$$

Umstellen der Gleichung ergibt, dass auf der ganzen Welt $x = 15$ Billionen Tonnen lagern, davon in der Sowjetunion 9 Billionen Tonnen und in den USA 2 Billionen Tonnen Kohle.

Aufgabe 020923:
Peter macht mit Jürgen eine Wette. Er will nach einem 10000 Schritte entfernten Ort hin- und zurückgehen, bevor Jürgen 150 Murmeln in ein Körbchen gesammelt hat.
Die Murmeln sollen dabei in einer Reihe mit je einem Schritt Abstand voneinander liegen und einzeln in das Körbchen gebracht werden, das in einem Schritt Abstand vor der ersten Murmel steht. Beide Jungen sollen genau gleich schnell gehen.
Wer gewinnt die Wette? Begründen Sie die Behauptung!

Lösung von André Lanka:
Peter gewinnt. Er muss $2 \cdot 10000 = 20000$ Schritte gehen.
Jürgen dagegen muss $2 \cdot (1 + 2 + 3 + ... + 150) = 2 \cdot 75 \cdot 150 = 22650$ Schritte gehen.

Aufgabe 040922:
Der ungarische Rechenkünstler Pataki berechnet das Produkt $95 \cdot 97$ auf folgende Weise:

1) Er addiert die Faktoren. $95 + 97 = 192$

2) Er streicht die erste Stelle der Summe. 92

3) Er bildet die Differenz jedes der beiden Faktoren und der Zahl 100 und multipliziert diese beiden Zahlen miteinander. $5 \cdot 3 = 15$

4) Er schreibt das Ergebnis von (3) hinter das Ergebnis von (2) und erhält 9215.

Untersuchen Sie, ob dieses Verfahren für alle Faktoren zwischen 90 und 100 gültig ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die beiden Faktoren seien $100 - a$ und $100 - b$, wobei gilt $0 < a < 10$ und $0 < b < 10$. Dann erhält man als Produkt

$$(100 - a)(100 - b) = 10000 - 100a - 100b + ab$$

Nach der Methode von Pataki erhält man schrittweise

$$100 - a + 100 - b = 200 - a - b \tag{1}$$

Wegen der Einschränkung für a und b hat diese Zahl an der Hunderterstelle eine Eins.

$$200 - a - b - 100 = 100 - a - b \tag{2}$$
$$ab \tag{3}$$
$$100(100 - a - b) + ab = 10000 - 100a - 100b + ab.$$

Also ist das Verfahren für derartige Faktoren gültig.

Aufgabe 050921:
Man ermittle sämtliche rationalen Zahlen a und b, für die $(a + b)^3 = a^3 + b^3$ gilt.

Lösung von Manuela Kugel:
Die Gleichung

$$(a + b)^3 = a^3 + b^3$$

ist wegen

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

mit jeder der folgenden Gleichungen äquivalent:

$$\begin{aligned} a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 &= a^3 + b^3 \\ 3a^2b + 3ab^2 = 3ab \cdot (a + b) &= 0 \\ ab \cdot (a + b) &= 0 \end{aligned}$$

Da ein Produkt genau dann gleich Null ist, wenn mindestens einer seiner Faktoren Null ist, gilt die angegebene Gleichung genau dann, wenn mindestens eine der drei Bedingungen erfüllt ist:

a) $a = 0$, b beliebig rational,

b) $b = 0$, a beliebig rational,

c) $a = -b$, b beliebig rational.

Aufgabe 050923:
Ein Bruder sagt zu seiner Schwester:
„Als Tante Katja so alt war, wie wir beide zusammen jetzt sind, warst du so alt, wie ich jetzt bin. Aber als Tante Katja so alt war, wie du jetzt bist, da warst du ...“

a) Wie alt war da die Schwester?
b) Wie viel mal so alt wie die Schwester ist Tante Katja jetzt?

Lösung von Matthias Lösche:
Größen: b = jetziges Alter des Bruders, s = jetziges Alter der Schwester, t = jetziges Alter der Tante.
„Als Tante Katja so alt war, wie wir beide zusammen jetzt sind, warst du so alt, wie ich jetzt bin“ bedeutet

$$s - (t - (b + s)) = b \Rightarrow t = 2s$$

„Aber als Tante Katja so alt war, wie du jetzt bist, da warst du ...“ ergibt

$$s - (t - s) = s - (2s - s) = s - s = 0$$

a) Die Schwester wurde gerade geboren.

b) Die Tante ist jetzt doppelt so alt wie die Schwester.

Aufgabe 160922:
Die Zahl $\frac{20}{21}$ soll so in zwei Summanden zerlegt werden, dass
a) die beiden Summanden Brüche mit gleichem, von 21 verschiedenem Nenner und mit unterschiedlichen Zählern sind,
b) die beiden Summanden Brüche mit gleichem Zähler und mit unterschiedlichen Nennern sind.
Dabei sollen in jedem Bruch, der als Summand auftritt, jeweils der Zähler und der Nenner natürliche Zahlen sein, die zueinander teilerfremd sind.
Geben Sie für a) und b) je ein Beispiel einer derartigen Zerlegung an, und weisen Sie nach, dass es alle verlangten Eigenschaften hat!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Die Zerlegung $\frac{20}{21} = \frac{11}{42} + \frac{29}{42}$ beispielsweise hat alle verlangten Eigenschaften.

Beweis: Die beiden Summanden haben denselben, von 21 verschiedenen Nenner 42 sowie die unterschiedlichen Zähler 11 und 29.
In $\frac{11}{42}$ sind Zähler und Nenner die teilerfremden natürlichen Zahlen 11 und 42, in $\frac{29}{42}$ die teilerfremden natürlichen Zahlen 29 und 42.

b) Die Zerlegung $\frac{20}{21} = \frac{2}{3} + \frac{2}{7}$ beispielsweise hat alle verlangten Eigenschaften.

Beweis: Die beiden Summanden haben denselben Zähler 2 sowie die unterschiedlichen Nenner 3 und 7. In $\frac{2}{3}$ sind Zähler und Nenner die teilerfremden natürlichen Zahlen 2 und 3, in $\frac{2}{7}$ die teilerfremden natürlichen Zahlen 2 und 7.

Aufgabe 170922:
Jens sagt zu Christa: „Ich kann die Zahl 30 durch einen Term darstellen, der genau dreimal die Zahl 5 und außerdem nur Zeichen von Grundrechenoperationen enthält.“
Nach kurzem Besinnen sagt Christa: “Man kann sogar für jede natürliche Zahl $n > 2$ die Zahl 30 durch einen Term darstellen, der genau n-mal die Zahl 5 und außerdem nur Zeichen von Grundrechenoperationen und Klammern enthält.“
Beweisen Sie, dass Christas Aussage wahr ist!

Lösung von cyrix:
Für $n = 3$ wählen wir $5 \cdot 5 + 5 = 30$, für $n = 4$ die Darstellung $55 - 5 \cdot 5 = 30$ und für jedes größere n ergänzen wir die Darstellung für $n - 2$ um „$+5 - 5$“, $\Box$.

Aufgabe 180922:
In einer Wiederholungsstunde über Zahlbereiche werden u. a. folgende Aussagen gemacht:
(1) Das Produkt zweier verschiedener irrationaler Zahlen ist stets wieder eine irrationale Zahl.
(2) Die Summe zweier verschiedener irrationaler Zahlen ist stets wieder eine irrationale Zahl.
(3) Die Summe einer rationalen und einer irrationalen Zahl ist stets eine irrationale Zahl.
Man entscheide von jeder dieser Aussagen, ob sie wahr oder falsch ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Zu (1): Die Zahlen $\sqrt{2}$ und die von ihr verschiedene Zahl $\sqrt{8}$ sind irrational, ihr Produkt $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}=4$ ist dagegen rational. Aussage (l) ist also falsch.
Zu (2): $\sqrt{2}$ und $-\sqrt{2}$ sind verschieden irrationale Zahlen. Ihre Summe ist 0. Das ist eine rationale Zahl. Aussage (2) ist also falsch.
Zu (3): Angenommen, es gäbe eine rationale Zahl r und eine irrationale Zahl x, deren Summe eine rationale Zahl wäre. Dann gäbe es ganze Zahlen a,b,c,d mit $b\neq 0$, $d\neq 0$ und

$$r=\frac{a}{b} \quad , \quad r+x=\frac{c}{d}$$

Daraus ergäbe sich

$$x=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}=\frac{bc-ad}{bd}$$

also der Widerspruch, dass x rational wäre; Damit ist bewiesen, dass Aussage (3) wahr ist.
Zum Beweis von (3) kann auch statt der rechnerischen Umformung von $x=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}$ als Satz zitiert werden, dass die Differenz zweier rationaler Zahlen stets wieder eine rationale Zahl ist. **Alternativ-Lösung von cyrix:**
Die ersten beiden Aussagen sind falsch, wie die Gegenbeispiele $\sqrt{2}\cdot(-\sqrt{2})=-2$ und $\sqrt{2}+(-\sqrt{2})=0$ zeigen.
Dagegen ist die dritte Aussage wahr: Wäre die Summe $s=r+x$ aus einer irrationalen Zahl x und einer rationalen Zahl r selbst rational, dann auch $s-r=x$, was einen Widerspruch liefert.

Aufgabe 250924:
Untersuchen Sie, ob es rationale Zahlen a und b gibt, für die $\sqrt{3}=a+b\sqrt{2}$ gilt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, es gäbe derartige Zahlen a und b. Aus dieser Annahme folgte dann

$$3=a^2+2ab\sqrt{2}+2b^2 \qquad ; \qquad 2ab\sqrt{2}=3-a^2-2b^2$$

(1) Im Fall $a\neq 0, b\neq 0$ folgt weiter

$$\sqrt{2}=\frac{3-a^2-2b^2}{2ab}$$

also der Widerspruch, dass $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl wäre. Daher scheidet dieser Fall aus.
(2) Im Fall $b=0$ folgte aus $\sqrt{3}=a+b\sqrt{2}$ der Widerspruch, dass $\sqrt{3}=a$ eine rationale Zahl wäre. Also ist auch dieser Fall nicht möglich.
(3)Im fall $a=0$ folgt $3=2b^2$ mit einer rationalen Zahl b, also mit $b=\frac{m}{n}$, wobei m und n natürliche Zahlen wären. Das führte auf

$$3=2\cdot\frac{m^2}{n^2} \qquad ; \qquad 3n^2=2m^2$$

Da in der Primfaktorzerlegung der Quadratzahlen n^2 und m^2 jeder Primfaktor in gerader Anzahl vorkommt, ergäbe sich der Widerspruch, dass der Primfaktor 3 auf der linken Seite in ungerader Anzahl vorkommen müsste, auf der rechten Seite aber in gerader Anzahl.
Die Annahme hat somit in jedem Falle auf einen Widerspruch geführt; damit ist bewiesen, dass es keine rationalen Zahlen a,b mit $\sqrt{3}=a+b\sqrt{2}$ gibt.

Aufgabe 280922:
In ein Quadrat mit 4×4 Feldern seien die Zahlen von 1 bis 16 so eingetragen, dass jede der Zahlen genau einmal auftritt und dass sich bei der Addition der Zahlen in jeder der vier Zeilen, der vier Spalten und der beiden Diagonalen jeweils dieselbe Summe s ergibt („Magisches Quadrat").
a) Beweisen Sie, dass in allen magischen Quadraten (mit den Zahlen von 1 bis 16 in 4×4 Feldern) derselbe Wert für s auftreten muss!
b) Beweisen Sie, dass in jedem magischen Quadrat von 4×4 Feldern die Summe der Zahlen in den vier Eckfeldern ebenfalls s sein muss!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Für jedes magische Quadrat, dessen Zahlen mit

a_1	a_2	a_3	a_4
b_1	b_2	b_3	b_4
c_1	c_2	c_3	c_4
d_1	d_2	d_3	d_4

bezeichnet sind, gilt:
a) Da die Summe aller Zahlen von 1 bis 16 der Wert 136 hat, muss in jeder der vier Zeilen die Summe $s = 136 : 4 = 34$ auftreten.
b) Nach den Bedingungen für ein magisches Quadrat ist

$$\begin{array}{rlrl} a_1+a_2+a_3+a_4=s & \text{1. Zeile} & d_1+d_2+d_3+d_4=s & \text{4. Zeile} \\ -a_2-b_2-c_2-d_2=-s & \text{2. Spalte} & -a_3-b_3-c_3-d_3=-s & \text{3. Spalte} \\ a_1+b_2+c_3+d_4=s & \text{Hauptdiagonale} & d_1+c_2+b_3+a_4=s & \text{Nebendiagonale} \end{array}$$

Die Addition dieser sechs Gleichungen ergibt $2(a_1 + a_4 + d_1 + d_4) = 2s$ und damit die Behauptung.

Aufgabe 330922:
Zum Mahlen einer Getreidemenge können zwei Mahlwerke A und B eingesetzt werden. Jedes Mahlwerk bewältigt in gleichen Zeiten gleiche Mengen.
Wenn man zunächst 8 Stunden lang nur mit dem Mahlwerk A mahlen würde und anschließend nur mit B, so würde B noch genau 18 Stunden benötigen, bis die gesamte Getreidemenge bewältigt ist.
Würde aber zunächst 10 Stunden lang nur mit A gemahlen und anschließend nur mit B, so würde B noch genau 15 Stunden benötigen, bis die gesamte Menge bewältigt ist.
Wie lange wird es dauern, die gesamte Menge zu bewältigen, wenn A und B von Anfang an zusammen eingesetzt werden?

Lösung von Steffen Polster:
Es seien x und y die prozentualen Leistungen des Mahlwerks je Stunde Arbeitszeit. Dann ergibt sich das System

$$\frac{8}{x} + \frac{18}{y} = 1 \qquad \text{und} \qquad \frac{10}{x} + \frac{15}{y} = 1$$

mit der Lösung $x = 20, y = 30$. Arbeiten beide t Stunden zusammen, wird damit $\frac{t}{20} + \frac{t}{30} = 1$ mit der Lösung $t = 12$. Beide Mahlwerke benötigen 12 Stunden, wenn sie von Anfang an gemeinsam arbeiten.

III Runden 3 & 4

Aufgabe V10931:
Der 1945 verstorbene polnische Mathematiker Stefan Banach war im Jahre x^2 gerade x Jahre alt. Wann ist er geboren?

Lösung von StrgAltEntf:
Die zwei größten Quadratzahlen bis 1945 sind $1936 = 44^2$ und $1849 = 43$.
Für $x = 44$ wäre Banach $1936 - 44 = 1892$ geboren worden, für $x = 43$ ergäbe sich $1849 - 43 = 1806$.
Banach wäre im zweiten Fall 139 Jahre alt geworden, d. h. diese Lösung entfällt.
Stefan Banach war 1936 44 Jahre alt.

Aufgabe 020932:
Eine Aufgabe aus dem Jahre 1494:
Oben auf einem Baum, der 60 Ellen hoch ist, sitzt eine Maus, unten auf der Erde eine Katze. Die Maus klettert jeden Tag $\frac{1}{2}$ Elle herunter und in der Nacht wieder $\frac{1}{6}$ Elle in die Höhe. Die Katze klettert jeden Tag 1 Elle hinauf und in der Nacht $\frac{1}{4}$ 4 hinunter.
Nach wie viel Tagen erreicht die Katze die Maus?

Lösung von André Lanka:
Sei x die Anzahl der Tage. Im Verlauf eines Tages (mit der Nacht) geht die Maus auf die Katze $\frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ Ellen zu.
Gleichzeitig nähert sich die Katze $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ Ellen. Insgesamt kommen sich Katze und Maus $\frac{13}{12}$ Ellen näher. Das ist aber nur bei den ersten $x-1$ Tagen so. Am letzten Tag darf die Nacht nicht mit eingerechnet werden.
An diesem letzten Tag geht die Maus auf die Katze $\frac{1}{2}$ Elle zu und die Katze auf die Maus 1 Elle. Daher muss gelten

$$\frac{13}{12}(x-a) + \frac{3}{2} \geq 60$$

was für $x \geq 55$ wahr ist. Am 55. Tag erreicht die Katze die Maus.

Aufgabe 030933:
Welche Punkte $P(x;0)$ sind von dem Punkt $P_1(a;0)$ doppelt so weit entfernt wie von $P_2(b;0)$?
Bestimmen Sie die Abszissen dieser Punkte! $(b > a)$

Lösung von Korinna Grabski:
Es gilt: $|P_1P| = 2 \cdot |P_2P|$ sowie $|x-a| = 2 \cdot |x-b|$

1. Fall: $x \leq a < b$ tritt nicht auf, da P weiter von P_1 entfernt sein soll als von P_2.
2. Fall: $a \leq x \leq b$: $x - a = 2 \cdot (b - x) \Rightarrow x = a + (b-a) \cdot \frac{2}{3}$
3. Fall: $a < b \leq x$: $x - a = 2 \cdot (x - b) \Rightarrow x = 2 \cdot b - a$

Die Punkte $(a + \frac{2}{3}(b-a); 0)$ und $(2 \cdot b - a; 0)$ sind von dem Punkt $P_1(a;0)$ doppelt so weit entfernt wie von $P_2(b;0)$.

Aufgabe 040931:
Zwei Betriebe A und B übernahmen die Herstellung von Ersatzteilen für Traktoren. Die Arbeit sollte in 12 Tagen ausgeführt werden. Zwei Tage nach dem Beginn der Arbeiten, die in beiden Betrieben gleichzeitig begannen, wurden im Werk A umfangreiche Reparaturen durchgeführt, so dass es für die Fortführung der Arbeiten ausfiel.
In wie viel Tagen kann das Werk B allein den Auftrag abschließen, wenn seine Kapazität $66\frac{2}{3}\%$ von der des Werkes A beträgt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die auf den Auftrag bezogenen Tagesleistungen der beiden Betriebe seinen a und b, die herzustellende Gesamtmenge sei p. Dann gilt $12(a+b) = p$.
Die restlichen fünf Sechstel soll das Werk B in x Tagen schaffen. Da $a = 1{,}5b$ ist, gilt $12 \cdot 1{,}5b + 12b = p$. Daraus folgt $30b = p$.
Das heißt: Werk B hätte allein den Auftrag in 30 Tagen ausführen können. Die restlichen fünf Sechstel schafft es also in 25 Tagen. Die benötigten Teile stehen 27 Tage nach dem Beginn der Arbeiten in beiden Werken zur Verfügung.

Aufgabe 040932:
Die Glieder der folgenden Summe sind nach einer bestimmten Gesetzmäßigkeit gebildet.
Suchen Sie diese Gesetzmäßigkeit, und berechnen Sie x möglichst einfach!

$$x = \frac{6}{5\cdot 7} + \frac{6}{7\cdot 9} + \frac{6}{9\cdot 11} + \frac{6}{11\cdot 13} + ... + \frac{6}{31\cdot 33}$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Man klammert zunächst 3 aus. Jeder der Summanden von der Form $\frac{2}{a(a+2)}$ lässt sich als Differenz zweier Brüche schreiben:

$$\frac{2}{a(a+2)} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a+2}$$

Daher lautet die zu berechnende Summe

$$x = 3\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} \pm ... - \frac{1}{31} + \frac{1}{31} - \frac{1}{33}\right) = 3\cdot\frac{28}{165} = \frac{28}{55}$$

Aufgabe 050934:
Man ermittle für die reellen Zahlen a und b, $a \neq 0$, die dem Betrag nach kleinere Lösung der Gleichung

$$x^2 + 2ax - b^2 = 0$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die angegebene Gleichung hat die beiden Wurzeln

$$x_1 = -a + \sqrt{a^2+b^2} \qquad ; \qquad x_2 = -a - \sqrt{a^2+b^2}$$

Daraus folgt $|x_2| > |x_1|$ für $a > 0$ und $|x_1| > |x_2|$ für $a < 0$.

Aufgabe 050936:
Eine Mutter stellt ihren drei Kindern Jürgen, Renate und Christine eine Schüssel mit Kirschen auf den Tisch mit dem Bemerken, dass sich jeder nach der Rückkehr ein Drittel der Kirschen nehmen möge.
Jürgen, der als erster nach Hause kommt, nimmt sich, da die Zahl der Kirschen nicht durch 3 teilbar ist, zunächst eine Kirsche und dann von den Restlichen den dritten Teil.
Als Renate heimkommt, meint sie, die erste zu sein. Sie nimmt sich, da die Zahl der Kirschen nicht durch drei teilbar ist, zunächst zwei Kirschen und von den Übrigen den dritten Teil.
Auch Christine glaubt, als sie heimkehrt, erste zu sein, und nimmt sich den dritten Teil der in der Schüssel befindlichen Kirschen.
Die Mutter stellt danach fest, das insgesamt 42 Kirschen gegessen wurden.
Wie viel Kirschen waren anfangs in der Schüssel?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Bezeichnet man die ursprünglich vorhandene Anzahl Kirschen mit x, so kann man folgende Aufstellung machen: Jürgen nimmt

$$1 + \frac{x-1}{3} = \frac{x+2}{3}$$

es verbleiben

$$x - \frac{x+2}{3} = \frac{2x-2}{3}$$

Renate nimmt

$$2 + \left(\frac{2x-2}{3} - 2\right)\cdot\frac{1}{3} = \frac{2x+10}{9}$$

es verbleiben

$$\frac{2x-2}{3} - \frac{2x+10}{9} = \frac{4x-16}{9}$$

Christine nimmt

$$\frac{4x-16}{9} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4x-16}{27}$$

es verbleiben

$$\frac{4x-16}{9} - \frac{4x-16}{27} = \frac{8x-32}{27}$$

Laut Aufgabe gilt

$$x - \frac{8x-32}{27} = 42$$

und somit $x = 58$. Es befanden sich anfangs 58 Kirschen in der Schüssel.

Aufgabe 090933:
Für eine bestimmte Arbeit benötigt A genau m-mal so lange Zeit wie B und C zusammen; B benötigt genau n-mal so lange wie C und A zusammen und C genau p-mal so lange wie A und B zusammen.
Berechnen Sie p in Abhängigkeit von m und n!

Lösung von cyrix:
Wir betrachten die Leistungen a, b und c von A, B und C. Dann gilt nach Aufgabenstellung

$$a = \frac{1}{m}(b+c); \qquad b = \frac{1}{n}(a+c); \qquad c = \frac{1}{p}(a+b)$$

Die erste Gleichung ist äquivalent zu $c = am - b$, die zweite zu $c = bn - a$. Insbesondere ist also $am - b = bn - a$ bzw. $(m+1)a = (n+1)b$, also

$$b = \frac{m+1}{n+1} \cdot a \qquad \text{und} \qquad c = am - b = \frac{mn-1}{n+1} \cdot a$$

Ist $mn - 1 = 0$, also $c = 0$, dann leistet C keine Arbeit und also ist p nicht definiert. Andernfalls können wir im Folgenden durch $c \neq 0$ dividieren.
Mit der dritten Gleichung erhalten wir schließlich durch Einsetzen

$$p = \frac{a+b}{c} = \frac{\frac{n+1+m+1}{n+1} \cdot a}{\frac{mn-1}{n+1} \cdot a} = \frac{m+n+2}{mn-1}$$

Aufgabe 240934:
Bei einer Diskussion in der mathematischen Arbeitsgemeinschaft berichtet Norbert, er habe eine Quadratzahl $n^2 > 1$ als Summe von n natürlichen Zahlen dargestellt, von denen keine zwei einander gleich waren.
Anke meint: „Es gibt sogar unendlich viele Quadratzahlen $n^2 > 1$, die jeweils als Summe von n natürlichen Zahlen darstellbar sind, unter denen sich keine zwei gleichen befinden.“
Bernd fragt: „Gibt es auch Quadratzahlen $n^2 > 1$, die sich als Summe von $2n$ natürlichen Zahlen darstellen lassen, unter denen es keine zwei gleichen gibt?“
a) Beweise Ankes Aussage!
b) Beantworte Bernds Frage!

Lösung von cyrix:
a) Die Aussage gilt für jede natürliche Zahl $n > 1$, da $n^2 = 1 + 3 + \cdots + (2n-1)$ die Summe der ersten n ungeraden natürlichen Zahlen ist. (Dies stimmt offensichtlich für $n = 1$; und wenn es für n wahr ist, dann wegen

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 = n^2 + (2n+1) = 1 + 3 + \cdots + (2n-1) + (2n+1)$$

auch für $n+1$, also für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$.)

b) Solche Quadratzahlen $n^2 > 1$ kann es nicht geben, da die Summe von $2n$ paarweise verschiedenen positiven ganzen Zahlen mindestens so groß ist wie die Summe der kleinsten $2n$ positiven ganzen Zahlen, also

$$0 + 1 + \cdots + (2n-1) = \frac{(2n-1) \cdot 2n}{2} = n \cdot (2n-1) > n^2$$

für $2n - 1 > n$, also $n > 1$.

Aufgabe 250936:
a) Ist durch den Term

$$z = \sqrt{192 + 96 \cdot \sqrt{3}} + \sqrt{192 - 96 \cdot \sqrt{3}}$$

eine Zahl definiert?
b) Wenn dies der Fall ist, ist z rational?

Lösung von cyrix:
a) Es ist $192 - 96\sqrt{3} = 96 \cdot (2 - \sqrt{3}) > 0$, da $2 = \sqrt{4} > \sqrt{3}$, sodass z eine reelle Zahl beschreibt.
b) Es ist

$$z = \sqrt{16 \cdot (12 + 6\sqrt{3})} + \sqrt{16 \cdot (12 - 6\sqrt{3})} = 4 \cdot (\sqrt{12 + 6\sqrt{3}} + \sqrt{12 - 6\sqrt{3}})$$

genau dann rational, wenn es $0 \leq x := \frac{z}{4} = \sqrt{12 + 6\sqrt{3}} + \sqrt{12 - 6\sqrt{3}}$ auch ist. Es ist

$$x^2 = (12 + 6\sqrt{3}) + 2\sqrt{(12 + 6\sqrt{3}) \cdot (12 - 6\sqrt{3})} + (12 - 6\sqrt{3}) = 24 + 2\sqrt{144 - 36 \cdot 3} =$$

$$= 24 + 2\sqrt{36} = 24 + 2 \cdot 6 = 36 \qquad \text{also} \qquad x = 6 \text{ und } z = 24 \in \mathbb{Q}$$

Aufgabe 260934:
Beweisen Sie folgenden Satz:
Wenn a und b zwei von 0 verschiedene natürliche Zahlen sind, die nicht beide Quadratzahlen sind und für die $\frac{a}{b}$ ein so weit wie möglich gekürzter Bruch ist, dann ist $\sqrt{\frac{a}{b}}$ eine irrationale Zahl.

Lösung von cyrix:
Wir nehmen indirekt an, dass $\sqrt{\frac{a}{b}}$ eine rationale Zahl ist. Dann existieren teilerfremde positive ganze Zahlen p und q mit $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{p}{q}$, da $a > 0$ und $b > 0$ sind.
Nach Quadrieren und Beseitigen der Nenner folgt $aq^2 = bp^2$. Da p und q teilerfremd sind, ist auch $\text{ggT}(p^2, q^2) = 1$, also wegen $p^2 | bp^2$ und damit $p^2 | aq^2$ auch $p^2 | a$. Damit gibt es eine positive ganze Zahl c mit $a = c \cdot p^2$.
Analog folgert man auch die Existenz einer positiven ganzen Zahl d mit $b = d \cdot q^2$. Setzt man dies ein, so ergibt sich $c \cdot p^2 q^2 = d \cdot p^2 q^2$, also $c = d$. Dann jedoch sind a und b beide durch c teilbar, sodass der Bruch $\frac{a}{b}$ mit diesem Zähler und Nenner nur genau dann schon so weit wie möglich gekürzt war, wenn $c = 1$ ist. Dann jedoch sind sowohl $a = p^2$ als auch $b = q^2$ Quadratzahlen, was ein Widerspruch zur Voraussetzung aus der Aufgabenstellung ist.
Demzufolge kann $\sqrt{\frac{a}{b}}$ nicht rational, muss also irrational sein, $\Box$.

Aufgabe 300932:
Man ermittle alle Darstellungen der Zahl 1991 als Summe von mindestens drei aufeinanderfolgenden positiven natürlichen Zahlen.

Lösung von cyrix:
Es ist $1991 = 1001 + 990 = 11 \cdot (91 + 90) = 11 \cdot 181$, wobei 11 und 181 Primzahlen sind. Damit hat 1991 genau die vier Teiler 1, 11, 181 und 1991.
Es sei $n \geq 3$ die Anzahl der aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, deren Summe 1991 ergibt.

Fall 1: Es ist $n = 2m + 1$ eine ungerade Zahl. Sei $a - m$ der kleinste Summand. Dann lauten die weiteren also $a - (m - 1), a - (m - 2), \ldots ,a - 1,a,a + 1, \ldots ,a + (m - 1),a + m$ und wir erhalten

$$1991 = (a - m) + (a - (m - 1)) + \cdots + (a - 1) + a + (a + 1) + \cdots + (a + (m - 1)) + (a + m) = (2m + 1) \cdot a$$

Also müssen $n = 2m + 1$ und a Teiler von 1991 mit $0 < a - m = \frac{1991}{n} - \frac{n-1}{2}$ sein. Dies schließt $n = 1991$ und $n = 181$ aus; $n = 1$ fällt wegen $n \geq 3$ weg, sodass nur $n = 11$ und damit $a = 181$ verbleibt. Wir erhalten

$$1991 = 176 + 177 + 178 + 179 + 180 + 181 + 182 + 183 + 184 + 185 + 186$$

Fall 2: Es ist $n = 2m$ eine gerade Zahl mit $m \geq 2$. Sei $a - m$ der kleinste Summand. Dann lauten die weiteren $a - (m - 1), \ldots ,a + (m - 1)$, sodass wir

$$1991 = (a - m) + (a - (m - 1)) + \cdots + (a + (m - 1)) = 2m \cdot a - m = m \cdot (2a - 1)$$

erhalten. Diesmal müssen m und $2a - 1$ Teiler und Gegenteiler von 1991 sein, sodass $2a = \frac{1991}{m} + 1 = \frac{1991+m}{m}$ und damit $a = \frac{1991+m}{2m}$ gilt.
Wieder muss $0 < a - m = \frac{1991+m-2m^2}{2m}$, also $2m^2 - m < 1991$ gelten. Dies schließt $m = 1991$ und $m = 181$ aus, während $m = 1$ wegen $m \geq 2$ ausgeschlossen ist. Es verbleibt als einzige Lösung $m = 11$, woraus $2a - 1 = 181$ und $a = 91$ folgt. Wir erhalten die Darstellung

$$1991 = 80 + 81 + \cdots + 100 + 101.$$

Aufgabe 310932:
In einer Sammlung von Kuriositäten soll sich ein Gefäß mit folgender Aufschrift befunden haben:

Fünf Strich Zwei Null als Maß passt in mich, nach der ersten Ziffer lies „durch“ für den Strich! Oder dreh’ um, Null Zwei Fünf findest du, nach der ersten Ziffer ein Komma füg’ zu!

In der Tat ist $\frac{5}{20} = 0{,}25$.
Gibt es noch andere Zusammenstellungen von drei Ziffern, bei denen die Vorschrift, in gleicher bzw. in umgekehrter Reihenfolge jeweils nach der ersten Ziffer den Divisionsstrich bzw. das Dezimalkomma zu schreiben, auf zwei einander gleiche Zahlenwerte führt?

Lösung von cyrix:
Es seien a, b und c die drei Ziffern. Es ist also die Gleichung $\frac{a}{10b+c} = c + \frac{10b+a}{100}$ zu lösen.

Fall 1: $b = 0$.
Dann reduziert sich die Gleichung auf $\frac{a}{c} = c + \frac{a}{100}$ bzw. nach Multiplikation mit $c \neq 0$ auf $a = c^2 + \frac{ac}{100}$. Da auf der linken Seite eine ganze Zahl steht, muss auch die rechte Seite eine solche sein, also ac durch 100 teilbar. Wegen $0 \leq a,c < 10$ ist $0 \leq ac < 100$, sodass $ac = 0$ und wegen $c \neq 0$ (sonst wäre der Bruch $\frac{a}{c}$ nicht definiert) schließlich $a = 0$, aber daraus nach Einsetzen dann auch wieder $c = 0$ folgen würde, was ein Widerspruch ist, sodass es in diesem Fall keine Lösung gibt.

Fall 2: $b > 0$.
Dann ist $10b + c \geq 10 > a$, also $0 \leq \frac{a}{10b+c} < 1$. Da wegen $0 < 10b + a \leq 99 < 100$ auch $0 < \frac{10b+a}{100} < 1$ gilt und c eine nicht-negative ganze Zahl ist, ist c der Vorkomma-Anteil von $c + \frac{10b+a}{100}$, also wegen $\frac{a}{10b+c} = c + \frac{10b+a}{100}$ und $0 < \frac{10b+a}{100} < 1$ schließlich $c = 0$.

Dadurch vereinfacht sich die zu betrachtende Gleichung auf $\frac{a}{10b} = \frac{a+10b}{100}$ bzw. nach Multiplikation mit $100b$ auf $10a = ab + 10b^2$. Dabei kann a nicht null sein, da sonst $0 = 10 \cdot b^2$ folgen würde, was ein Widerspruch zur Fallannahme $b > 0$ wäre. Also sind sowohl a als auch b positiv, woraus $ab > 0$ und $10a > 10b^2$ bzw. $a > b^2$ folgt. Dies ist aber für $b \geq 3$ wegen $a \leq 9$ nicht möglich, sodass $b \in \{1,2\}$ folgt.

Fall 2.1: Es ist $b = 1$. Dann muss $10a = a + 10$ bzw. $9a = 10$ gelten, was keine Lösung in ganzen Zahlen hat.

Fall 2.2: Es ist $b = 2$. Dann muss $10a = 2a + 40$ bzw. $8a = 40$, also $a = 5$ gelten. Tatsächlich ist also das schon in der Aufgabenstellung genannte Tripel $(a,b,c) = (5,2,0)$ das einzig möglich.

Aufgabe 310935:
Man ermittle und zeichne in einem x,y-Koordinatensystem alle diejenigen Punkte, deren Koordinaten $(x;y)$ die Gleichung $|x + y| + |x - y| = 4$ erfüllen.

Lösung von cyrix:
Durch eine Punktspiegelung am Koordinatenursprung bzw. äquivalent einer Drehung um diesen um 180° geht jeder Punkt $(x_P; y_P)$ in den Punkt $(-x_P; -y_P)$ über. Erfüllt der erste Punkt die Bedingung, dann aufgrund der Beträge auch der zweite, und umgekehrt. Es genügt also die Figur im Bereich $x \geq 0$ zu konstruieren und sie dann durch diese Punktspiegelung bzw. Drehung fortzusetzen, sodass wir o. B. d. A. $x \geq 0$ annehmen können.

Weiterhin geht durch Spiegelung an der x-Achse jeder Punkt $(x_P; y_P)$ in den Punkt $(x_P; -y_P)$ über. Erfüllt der erste Punkt die Bedingung $|x_P + y_P| + |x_P - y_P| = 4$, dann wegen

$$|x_P - y_P| + |x_P + y_P| = |x_P + y_P| + |x_P - y_P| = 4$$

auch der zweite, und umgekehrt. Wir können also o. B. d. A. auch $y \geq 0$ annehmen und dann die Figur durch Spiegelung an der x-Achse fortsetzen.

Schließlich geht durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden des ersten Quadranten jeder Punkt $(x_P; y_P)$ in den Punkt $(y_P; x_P)$ über. Erfüllt der erste Punkt die Bedingung, dann aufgrund

$$|y_P + x_P| + |y_P - x_P| = |x_P + y_P| + |x_P - y_P|$$

auch der zweite, und umgekehrt. Wir können also o. B. d. A. $x \leq y$ annehmen und dann die Figur durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden des ersten Quadranten fortsetzen.

Zusammen haben wir also nun folgende Annahmen, die wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit treffen konnten: $0 \leq x \leq y$. Dann jedoch sind $x + y$ und $-(x - y)$ stets nichtnegativ, sodass die Gleichung übergeht in $(x + y) + (y - x) = 4$ bzw. $y = 2$. Zu zeichnen ist also der Abschnitt der Parallelen zur x-Achse durch $(0; 2)$, für welchen die x-Koordinaten der auf ihm liegenden Punkte nichtnegativ und ≤ 2 sind, also die Strecke vom Punkt $(0; 2)$ zum Punkt $(2; 2)$.

Durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden des ersten Quadranten erhält man die zusätzliche Strecke vom Punkt $(2; 2)$ zum Punkt $(2; 0)$. Durch Spiegelung an der x-Achse setzt sich diese Strecke bis zum Punkt $(2; -2)$ fort und man erhält als Spiegelung der ersten Teilstrecke noch die Strecke zwischen den Punkten $(2; -2)$ und $(0; -2)$. Die Punktspiegelung/ Drehung um den Koordinatenursprung schließlich ergänzt die Figur, sodass man abschließend genau das Quadrat (bzw. genauer: dessen Rand) mit den Eckpunkten $(\pm 2; \pm 2)$ als gesuchte Lösungsmenge erhält.

Aufgabe 330931:
Beweisen Sie, dass es unendlich viele Stammbrüche gibt, die sich als Summe zweier voneinander verschiedener Stammbrüche darstellen lassen!
Hinweis: Ein Bruch heißt genau dann ein Stammbruch, wenn sein Zähler 1 lautet und sein Nenner eine natürliche Zahl ist.

Lösung von Steffen Polster:
Es sei $n \neq 0$ eine natürliche Zahl. Wir betrachten:

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n(n-1)} = \frac{1}{n(n+1)}$$

Stellt man diese Gleichung um

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}$$

so erhält man für jedes $n > 0$ eine Darstellung für den Stammbruch $\frac{1}{n}$ als Summe zweier verschiedener Stammbrüche, also das Gesuchte.

Aufgabe 330945:
Bei Verwendung eines kartesischen Koordinatensystems werde ein Punkt der Ebene „rational“ genannt, wenn seine beiden Koordinaten rationale Zahlen sind; er werde „irrational“ genannt, wenn seine beiden Koordinaten irrationale Zahlen sind; er werde „gemischt“ genannt, wenn eine seiner Koordinaten rational und die andere irrational ist.
a) Gibt es in der Ebene Geraden, die nur Punkte einer Sorte enthalten?
Ermitteln Sie die Antwort auf diese Frage für jede der drei Sorten „rational“, „irrational“, „gemischt“!
b) Gibt es in der Ebene Geraden, in denen aus genau zwei Sorten (mindestens) je ein Punkt enthalten ist?
Ermitteln Sie die Antwort auf diese Frage für jede Zusammenstellung von zwei der drei Sorten!
c) Gibt es in der Ebene Geraden, in denen aus jeder der drei Sorten (mindestens) je ein Punkt enthalten ist?

Lösung von cyrix:
a) Es kann keine Gerade geben, die nur aus rationalen oder irrationalen Punkten besteht: Jede Gerade, die nicht parallel zur y-Achse verläuft, enthält für jede reelle Zahl x einen Punkt mit dieser x-Koordinate, also insbesondere Punkte mit rationaler und Punkte mit irrationaler x-Koordinate. Und für jede Parallele zu y-Achse gilt dieses Argument entsprechend mit den y-Koordinaten.

Auch kann keine Gerade nur gemischte Punkte enthalten: Gäbe es eine solche, so kann sie nicht parallel zur x-Achse verlaufen, denn sonst wäre entweder für alle Punkte auf dieser Geraden die y-Koordinate rational, oder für alle irrational, während sowohl Punkte mit rationaler als auch mit irrationaler x-Koordinate auf ihr liegen, also auf jeden Fall auch ein rationaler bzw. ein irrationaler Punkt.

Analog schließt man aus, dass es sich um eine Gerade handelt, die parallel zur y-Achse liegt. Für jede sonstige Gerade aber durchlaufen sowohl die x- als auch die y-Koordinaten der auf ihr liegenden Punkte alle reellen Zahlen, wobei jede nur genau einmal (als x- und einmal als y-Koordinate) angenommen. Lägen auf ihr nur gemischte Punkte, so müsste jeder Punkt mit irrationaler x-Koordinate eine rationale y-Koordinate besitzen, sodass es mindestens so viele rationale wie irrationale reelle Zahlen geben müsste. Tatsächlich sind aber die irrationalen Zahlen überabzählbar, während die rationalen nur abzählbar sind, was ein Widerspruch zur gerade gewonnenen Feststellung ist. Also gibt es keine Gerade, die nur aus gemischten Punkten besteht.

b) Für jede Kombination gibt es solche Geraden:
Auf der Geraden $y = 0$ liegen ausschließlich rationale Punkte (die mit rationaler x-Koordinate) und gemischte (die mit irrationaler x-Koordinate). Auf der Geraden $y = \sqrt{2}$ liegen ausschließlich irrationale Punkte (die mit irrationaler x-Koordinate) und gemischte (die mit rationaler x-Koordinate). Und auf der Geraden $y = x$ liegen ausschließlich rationale Punkte (die mit rationaler x-Koordinate) und irrationale (die mit irrationaler x-Koordinate).

c) Auch solche Geraden gibt es, z. B. $y = \sqrt{2} \cdot x$. Auf dieser Geraden liegt der rationale Punkt (0,0), der gemischte Punkt $(1,\sqrt{2})$ und der irrationale Punkt $(\sqrt{3}, \sqrt{6})$.

Aufgabe 340933:
Berechnen Sie die Zahl

$$123456785 \cdot 123456787 \cdot 123456788 \cdot 123456796 - 123456782 \cdot 123456790 \cdot 123456791 \cdot 123456793$$

ohne die Zahlenwerte der beiden Produkte einzeln zu berechnen!

Lösung von cyrix:
Mit $n := 123456789$ ist also die Differenz

$$D := (n-4) \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot (n+7) - (n-7) \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+4)$$

zu berechnen. Dabei ergeben sich beim Ausmultiplizieren der Produkte jeweils gleiche Vorzeichen bei den Termen mit geraden Exponenten von n und verschiedene bei ungeraden Exponenten von n. Es ergibt sich also

$$= 2n^3 \cdot (-4-2-1+7) + 2n \cdot (-8+56+28+14) = 180n = 22.222.222.020$$

I.II Bewegungs- & Verhältnis-Gleichungen

I Runde 1

Aufgabe V00906:
Wie tief taucht ein Würfel ($a = 30$ mm) aus Eisen ($\gamma_{\text{Fe}} = 7{,}5$ p·cm^{-3}) in Quecksilber ($\gamma_{\text{Hg}} = 13{,}6$ p·cm^{-3}) ein?

Lösung von Steffen Polster:
Es gilt für die Eintauchtiefe h des Körpers

$$\gamma_1 : \gamma_2 = h_{\text{Eintauchtiefe}} : h_{\text{Körper}}$$

Einsetzen der Werte ergibt $h_{\text{Eintauchtiefe}} \approx 16{,}54$, d. h. der Würfel taucht etwa 165 mm ein.

Aufgabe V10911:
Das neue Turboprop-Flugzeug der Deutschen Lufthansa vom Typ IL 18 fliegt um 8.05 Uhr in Berlin-Schönefeld ab und landet um 13.00 Uhr in Moskau. Der Rückflug beginnt um 14.55 Uhr und endet am 16.10 Uhr (beachte: 12.00 Uhr Mitteleuropäische Zeit entspricht 14.00 Uhr Moskauer Zeit).
a) Welche Durchschnittsgeschwindigkeit erreicht die IL 18 auf dem Hin- bzw. Rückflug?
b) Wie hoch ist die durchschnittliche Windgeschwindigkeit, wenn man annimmt, dass das Flugzeug auf dem Hinflug mit dem Winde, auf dem Rückflug aber gegen den Wind flog?
Die Flugstrecke beträgt 1630 km.

Lösung von Steffen Polster:
Berechnung der Flugzeiten: $2\frac{11}{12}$ bzw. $2\frac{1}{4}$ h.
Berechnung der Fluggeschwindigkeiten: 559 bzw. 502 km·h^{-1}.
Die Windgeschwindigkeit beträgt damit rund 28,5 km·h^{-1}.

Aufgabe 010912:
In der Ballistik verwendet man häufig den Begriff „mittlere Präzision“ p_m. Nimmt man p_m als Radius eines Kreises, dann liegen in diesem Kreis etwa 20 Prozent aller Treffer. Sämtliche Treffer erfasst man mit einem Kreis, der einen etwa $4\frac{1}{2}$mal so großen Radius hat. Westliche Militärexperten rechnen z. Zt. mit einer mittleren Präzision (bei Raketen) von $p_m = 0{,}5$ Prozent der Schussweite. Später wollen sie Werte von $p_m = 0{,}1$ Prozent und in ferner Zukunft sogar $p_m = 0{,}05$ Prozent erreichen.

a) Wie groß wäre bei diesen Werten der Radius des 20 Prozent-Kreises bzw. der des alle Treffer enthaltenden Kreises, wenn die Schussweite 12500 km beträgt?

b) Welche mittlere Präzision p_m wurde von der Sowjetunion erreicht, wenn man berücksichtigt, dass der Radius des alle Treffer enthaltenden Kreises bei den im Oktober 1961 durchgeführten Versuchen kleiner als 1 km war?

Lösung von Christiane Czech:

a) Der Wert p_m gibt den Prozentwert des Verhältnisses des Radius r_{20} des 20%-Kreises zur Schussweite an. Da für den Radius r_{100} des Kreises, in dem alle Treffer landen, $r_{100} = 4\frac{1}{2}r_{20}$ gilt, haben die Kreise für die angegebenen p_m die folgenden Radien:

p_m	0,5%	0,1%	0,05%
r_{20}	62,5 km	12,5 km	6,25 km
r_{100}	281,25 km	56,25 km	28,125 km

b) Ist $r_{100} < 1km$, so ist $r_{20} = \frac{2}{9}r_{100} < \frac{2}{9}km = 0{,}222km$. Somit ist das Verhältnis von r_{20} zur Schussweite kleiner als $\frac{0{,}222km}{12500km} \approx 0{,}000018$, also $p_m < 0{,}0018\%$.

Aufgabe 010913:
Um beim Zerspanen von Metallen die Schneidfähigkeit der Werkzeuge zu erhalten, wird vielfach mit einer Emulsion aus gefettetem Mineralöl (Dichte 0,98 g/cm^3) und möglichst weichem Wasser (Dichte 1,0 g/cm^3) gekühlt. Die Mischung muss für Schneidwerkzeuge höherer Festigkeit die Dichte 0,996 g/cm^3, bei Schleifarbeiten die Dichte 0,992 g/cm^3 haben. Wie viel Liter gefettetes Mineralöl und wie viel Liter weiches Wasser braucht man für jeweils 10 Liter Emulsion?

Lösung von Christiane Czech:
Die Dichte ϱ eines Stoffes ist der Quotient aus Masse m und Volumen V einer bestimmten Menge dieses Stoffes. Da man es hier mit einer Mischung zweier Stoffe zu tun hat, muss die *Mischungsregel* beachtet werden. Danach gilt für die Dichte ϱ_E der Emulsion

$$\varrho_\text{E} = \frac{\varrho_\text{Öl} \cdot V_\text{Öl} + \varrho_\text{W} \cdot V_\text{W}}{V_\text{Öl} + V_\text{W}},$$

wobei $\varrho_\text{Öl}$, $V_\text{Öl}$ Dichte und Volumen des verwendeten Öls sowie ϱ_W, V_W Dichte und Volumen des verwendeten Wassers sind. Da nach Aufgabenstellung das Gesamtvolumen $V = V_\text{Öl} + V_\text{W} = 10l = 10000cm^3$ gegeben ist, können wir in (1) $V_\text{Öl} = V - V_\text{W}$ ersetzen und erhalten nach Umstellen

$$V_\text{W} = \frac{\varrho_\text{E} - \varrho_\text{Öl}}{\varrho_\text{W} - \varrho_\text{Öl}} V.$$

Soll die Emulsion eine Dichte von 0,996 g/cm^3 haben, braucht man also 8 l Wasser und 2 l Öl. Für eine Emulsion mit einer Dichte von 0,992 g/cm^3 braucht man 6 l Wasser und 4l Öl.

Aufgabe 020911:
Für die Lagerung des Erdöls wurden im Rostocker Ölhafen Rolltanks aus der Sowjetunion aufgestellt. Ein solcher Tank hat die Form eines Zylinders mit dem Durchmesser $d = 23m$ und der Höhe $h = 21m$.

a) Berechnen Sie unter Vernachlässigung der Wanddicke das Volumen eines Tanks!

b) Wie viel Tonnen Erdöl fasst ein Rolltank (Dichte des Erdöls etwa 0,85 g/cm^3)?

c) Der in Leningrad für die DDR gebaute Tanker Leuna I hat ein Gesamtfassungsvermögen von 10200 t Erdöl. Seine vier Pumpen besitzen eine Leistung von je 250 t/h. In welcher Zeit wird der Tanker von ihnen leergepumpt?

d) Wie viel Zeit wird benötigt, um mit Hilfe dieser Pumpen einen Rolltank zu füllen?

Lösung von André Lanka:

a) $V = \frac{\pi}{4}d^2 \cdot h \approx 8725 \text{ m}^3$

b) $m = \varrho \cdot V = 0{,}85 \text{ g/cm}^3 \cdot 8725 \cdot 10^6 \text{ cm}^3 \approx 7416 \text{ t}$

c) $t = \frac{10200 \text{ t}}{4 \cdot 250 \text{ t/h}} = 10{,}2 \text{ h} = 10 \text{ h } 12 \text{ min}$

d) $t = \frac{7416 \text{ t}}{4 \cdot 250 \text{ t/h}} \approx 7{,}4 \text{ h} = 7 \text{ h } 24 \text{ min}$

Aufgabe 020912:
Im VEB Uhren- und Maschinenfabrik „Klement Gottwald“ senkte eine Jugendabteilung die Ausschussquote um 6 Prozent der Produktionsmenge, und sparte dabei fast 800 Arbeitsstunden ein. Danach betrug die Ausschussquote nur noch $\frac{2}{5}$ ihres bisherigen Wertes. Gleichzeitig entstand ein ökonomischer Nutzen von 3351,- M.

a) Wie viel Prozent der Produktionsmenge betrug der Ausschuss vorher?

b) Wie viel Prozent beträgt er jetzt?

c) Welchem Wert (in M) entspricht der Ausschuss jetzt noch?

Lösung von André Lanka:

a) Aus der Gleichung $x - 6\% = \frac{2}{5}x$ erhalten wir $\frac{3}{5}x = 6\%$. Also betrug die Ausschussquote vorher 10 %.

b) Demzufolge hat der Ausschuss jetzt einen Anteil von 4 % an der Produktionsmenge.

c) Die eingesparten 3351,- M entsprechen 6 %. Also hat der jetzt noch produzierte Ausschuss einen Wert von 2234,- M.

Aufgabe 030911:
Die erste Kosmonautin der Welt, Valentina Tereschkowa, startete mit ihrem Raumschiff Wostock 6 am 16. Juni 1963 um 10.30 Uhr und landete nach 48 Erdumkreisungen am 19. Juni 1963 um 9.20 Uhr. Die durchschnittliche Flughöhe betrug 200 km. (Mittlerer Erdradius $R = 6370$ km.)

a) Wie viel Kilometer legte die Kosmonautin auf ihrem Raumflug zurück? (Zur Vereinfachung sei angenommen, dass der Start- und Landeplatz übereinstimmten und der Flug auf einer Kreisbahn erfolgte.)

b) Wie groß war die durchschnittliche Geschwindigkeit während des Raumfluges?

Lösung von Sebastian Boesler:
a) Gegeben sind der mittlere Erdradius $R = 6370$ km, die durchschnittliche Flughöhe $h = 200$ km und die Anzahl n der Erdumkreisungen, $n = 48$. Die Umlaufbahn soll als kreisförmig angenommen werden, Start- und Landepunkt seien identisch.

Die zu ermittelnde Gesamtflugstrecke s setzt sich aus drei Teilstrecken zusammen: Der Startflugstrecke s_S zum Erreichen der Flughöhe nach dem Start, der Flugstrecke s_U, die während der Erdumkreisungen zurückgelegt wird, sowie der Landeflugstrecke s_L zum Verlassen der Flughöhe vor der Landung.

Wir wollen im folgenden vereinfachend annehmen, dass die Flughöhe bei Start und Landung senkrecht über dem Start- bzw. Landepunkt erreicht bzw. verlassen werde. Wie man schnell erkennt, gilt dann $s_S = s_L = h$.

Zur Berechnung der Strecke s_U ist es notwendig, den Umfang u des Umlaufkreises zu kennen – gilt doch offensichtlich $s_U = nu$. Der Umfang eines Kreises lässt sich aus seinem Radius r bestimmen; der Radius der Umlaufbahn ist natürlich die Summe aus Erdradius und Flughöhe, $r = R + h$.

Somit berechnet sich die Gesamtflugstrecke s wie folgt:

$$\begin{aligned} s &= s_S + s_U + s_L = h + nu + h \\ &= 2h + 2n\pi r = 2h + 2n\pi(R+h) \\ &= 2 \cdot 200 \text{ km} + 2 \cdot 48\pi(6370 \text{ km} + 200 \text{ km}) = 1982000 \text{ km} \end{aligned}$$

b) Der Flug begann am 16. Juni um 10:30 Uhr und endete am 19. Juni um 9:20 Uhr; er dauerte also 2 Tage, 22 Stunden und 50 Minuten. Die Flugzeit t beträgt somit 4250 Minuten.
Mit $s = 1982000$ km gemäß (a) ergibt sich die durchschnittliche Fluggeschwindigkeit v:

$$v = \frac{s}{t} = \frac{1982000 \text{ km}}{4250 \text{ min}} = 466\frac{\text{km}}{\text{min}} = 27980\frac{\text{km}}{\text{h}} = 7{,}77\frac{\text{km}}{\text{s}}$$

Aufgabe 030912:
Wolfgang befindet sich in einem Zug, dessen Eigengeschwindigkeit er mit 60 km/h gemessen hat. Er will die Geschwindigkeit eines entgegenkommenden Doppelstock-Gliederzuges ermitteln. Er weiß, dass dieser Doppelstock-Gliederzug einschließlich Lokomotive rund 120 m lang ist, und stoppt die Zeit, die der Zug zur Vorbeifahrt benötigt, mit genau 3,0 s.

Mit welcher Geschwindigkeit fährt der Gegenzug?

Lösung von Sebastian Boesler:
Die beiden Züge bewegen sich aufeinander zu. Insbesondere bewegen sich dabei der Punkt, an dem Wolfgang seine Messungen durchführt, und das Ende des Gegenzuges aufeinander zu und reduzieren ihren Abstand in der Zeit $t = 3{,}0s$ um $s = s_W + s_G = 120$ m, wobei s_W den Anteil der Strecke beschreibt, den Wolfgangs Zug zurücklegt, und s_W für die vom Gegenzug bewältigte Strecke steht.
Weiterhin ist die Geschwindigkeit v_W bekannt, mit der Wolfgangs Zug fährt: $v_W = 60\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Die gesuchte Geschwindigkeit v_G des Gegenzuges berechnet sich damit wie folgt:

$$v_G = \frac{s_G}{t} = \frac{s - s_W}{t} = \frac{s - v_W t}{t} = \frac{s}{t} - v_W = \frac{120 \text{ m}}{3{,}0 \text{ s}} - 60\frac{\text{km}}{\text{h}} = 84\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Aufgabe 050911:
Ein Dreher braucht zur Anfertigung eines bestimmten Werkstücks eine halbe Stunde. Da mehrere gleiche Teile anzufertigen sind, überlegt er, ob er eine Vorrichtung bauen soll, die es erlaubt, jedes solche Werkstück in 20 Minuten anzufertigen. Die Herstellung dieser Vorrichtung würde 4 Stunden dauern.

Wie groß müsste die Zahl der herzustellenden Werkstücke mindestens sein, damit der Bau der Vorrichtung eine Zeitersparnis bringen würde?

Lösung von Manuela Kugel:
Für den Bau ohne Vorrichtung werden für x Werkstücke 30 min benötigt. Für den Bau mit Vorrichtung 20 min plus der 240 min für den Bau der Vorrichtung.
Ab welcher Werkstückanzahl lohnt sich der Bau der Vorrichtung?

$$30x > 20x + 240 \rightarrow x > 24$$

Werden mehr als 24 Werkstücke hergestellt, bringt der vorherige Bau der Vorrichtung eine Zeitersparnis.

Aufgabe 120912:
Während einer GST-Übung schätzten Andreas und Frank die Länge einer Strecke. Wenn Andreas um 10 % weniger geschätzt hätte, hätte er die genaue Länge getroffen. Wenn Franks Schätzwert um 10 % höher gelegen hätte, hätte er die genaue Länge der Strecke getroffen.

Bei welcher der beiden Schätzungen ist der absolute Betrag des absoluten Fehlers geringer?

Lösung von Manuela Kugel:
Die genaue Länge der Strecke S liegt nach Andreas Schätzung A um 10% unter seinem Wert; also bei $\frac{9}{10}A = S$. Franks Schätzung F muss um 10% erhöht werden, um den genauen Wert S zu erhalten; also $\frac{11}{10}F = S$. Andreas Wert ist somit $A = \frac{10}{9}S$ und der Betrag des absoluten Fehlers $A = |\frac{10}{9}S - S| = \frac{1}{9}S$. Franks Wert ist $F = \frac{10}{11}S$ und der Betrag des absoluten Fehlers
$F = |\frac{10}{11}S - S| = \frac{1}{11}S$. Bei Franks Schätzwert ist der Betrag des absoluten Fehlers kleiner als bei Andreas Schätzwert ($\frac{1}{11}S < \frac{1}{9}S$).

Aufgabe 130912:
Jemand will aus einer Mischung, die zu 99 % aus Wasser besteht, eine neue Mischung mit einem Wasseranteil von 98 % dadurch herstellen, dass er aus der ursprünglichen Mischung Wasser entzieht.

Man ermittle, wie viel Prozent der in der ursprünglichen Mischung enthaltenen Wassermenge er ihr zu diesem Zweck insgesamt entziehen muss.

Lösung von Manuela Kugel:
Die ursprüngliche Mischung besteht am Anfang aus Wasser (w_1) und einem anderen Stoff (y). Die Gesamtmenge sei m_1, so dass sich folgende Gleichung aufstellen lässt: $m_1 = y + w_1$ (1), wobei der 99-prozentige Wasseranteil wie folgt einfließt: $w_1 = 0{,}99 \cdot m_1$ (2).

Für den Zustand nach dem Wasserentzug gilt für die veränderte Gesamtmenge m_2 bei konstantem Stoff y: $m_2 = y + w_2$ (3), wobei auch hier eine Aussage zum Wasseranteil getroffen wird: $w_2 = 0{,}98 \cdot m_2$ (4).

Gesucht wird der Anteil der entzogenen Wassermenge ($x_1 - x_2$) an der ursprünglichen Wassermenge (x_1) in Prozent. Dazu werden nun die Gleichungen (1) bis (4) genutzt. Zunächst werden (1) und (3) nach y umgestellt und gleichgesetzt und anschließend (2) und (4) genutzt: $y = m_1 - w_1 = m_2 - w_2 \Rightarrow m_1 - 0{,}99 \cdot m_1 = m_2 - 0{,}98 \cdot m_2 \Rightarrow 0{,}01 \cdot m_1 = 0{,}02 \cdot m_2$ bzw. $m_1 = 2 \cdot m_2$. Nun kann der gesuchte Anteil errechnet werden:

$$\frac{x_1 - x_2}{x_1} = \frac{0{,}99 \cdot m_1 - 0{,}98 \cdot m_2}{0{,}99 \cdot m_1} = \frac{1{,}98 \cdot m_2 - 0{,}98 \cdot m_2}{1{,}98 \cdot m_2} = \frac{m_2}{1{,}98 \cdot m_2} = \frac{1}{1{,}98} \approx 0{,}51$$

Der entzogene Anteil Wasser an der ursprünglichen Wassermenge beträgt also etwa 51%.

Aufgabe 180912:
Es seien a und b rationale Zahlen, für die folgendes gilt:

Vermindert man a um 10%, so erhält man 297.
Vergrößert man b um 10%, so erhält man 297.

Wieviel Prozent von a beträgt dann b? (Angabe des Prozentsatzes auf zwei Dezimalstellen gerundet.)

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Da 10 % von a gleich $\frac{a}{10}$ ist, gilt: $a - \frac{a}{10} = 297$, also $\frac{9}{10}a = 297$. Entsprechend gilt:

$$b + \frac{b}{10} = 297 \qquad \text{also} \qquad \frac{11}{20}b = 297 = \frac{9}{10}a$$

Daraus folgt $b = \frac{9}{11}a = 0{,}8182a$ (Dezimalbruch auf 4 Dezimalstellen gerundet); b beträgt also 81,82% von a (Prozentsatz auf 2 Dezimalstellen gerundet).

Aufgabe 300912:
Ein Betrieb hat in den letzten vier Jahren seine Produktion (jeweils gegenüber dem Vorjahr) um 8%, 11%, 9% bzw. 12% gesteigert. Peter meint, dass der Betrieb dann eine Produktionssteigerung von insgesamt 40% erreicht hat.

Weisen Sie nach, dass das nicht stimmt.

Bernd meint, der Betrieb hätte eine größere Steigerung erreicht, wenn er die Produktion viermal um 10% gesteigert hätte.

Stellen Sie fest, ob das richtig ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Dies Gesamtsteigerung errechnet sich durch Multiplikation des Anfangswertes mit der Zahlen $1{,}08 \cdot 1{,}11 \cdot 1{,}09 \cdot 1{,}12$. Wegen

$$1{,}08 \cdot 1{,}11 = 1{,}1988 > 1{,}19; \qquad 1{,}19 \cdot 1{,}09 = 1{,}2971 > 1{,}28; \qquad 1{,}29 \cdot 1{,}12 = 1{,}4448 > 1{,}4$$

ist folglich die Gesamtsteigerung größer als 40%. Daher hat Peter nicht recht.

Die Gesamtsteigerung bei viermaliger Steigerung um 10% errechnet sich durch Multiplikation des Anfangswertes mit der Zahl $1{,}1^4$. Wegen

$$1{,}08 \cdot 1{,}12 = 1{,}2096 < 1{,}21 = 1{,}1^2; \qquad 1{,}09 \cdot 1{,}11 = 1{,}2099 < 1{,}21 = 1{,}1^2 \qquad \text{also}$$

$$1{,}08 \cdot 1{,}11 \cdot 1{,}09 \cdot 1{,}12 < 1{,}1^4$$

führt eine viermalige Steigerung im 10% daher in der Tat zu einer größeren Gesamtsteigerung. Bernds Behauptung trifft also zu.

Hinweis: Mit Taschenrechnergenauigkeit ergibt sich

$$1{,}08 \cdot 1{,}11 \cdot 1{,}09 \cdot 1{,}12 \approx 1{,}463495 \qquad ; \qquad 1{,}1^4 = 1{,}4641$$

Rundet man diese Ergebnisse so, dass ganzzahlige Prozentangaben entstehen, also auf 1,46, so erhält man:

1. Die Gesamtsteigerung (bei Steigerungen um 8 %, 11 %, 9%, 12%) ist größer als 40 %. Allerdings ist der Beweis mit den so vorgenommenen Rundungsschritten nicht einwandfrei, da nicht untersucht wird, ob auch Aufrundungsschritte vorkommen.

2. Die viermalige Steigerung um 10% ergibt nur eine so wenige vergrößerte Gesamtsteigerung, dass man auch formulieren kann, sie sei „nicht wesentlich größer“, und „in diesem Sinne“ sei Bernds Behauptung nicht zutreffend.

Aufgabe 310914:
a) Eine Schule hat insgesamt 825 Schüler. Es wurde errechnet, dass während eines Schuljahres die Anzahl der Teilnehmer einer Interessengruppe um 4% ihres Anfangswertes zugenommen habe und, hiermit gleichbedeutend, die Anzahl der Nichtteilnehmer um 7% ihres Anfangswertes abgenommen habe.
Wenn das genau zutraf, wie groß war dann die Anzahl der Nichtteilnehmer zu Beginn des Schuljahres, und um welche Schülerzahl hat sie bis zum Ende des Schuljahres abgenommen?

b) Nachträglich wurde aber mitgeteilt, die Prozentangaben seien nur als Näherungswerte 4,0% bzw. 7,0% ermittelt worden, nämlich gemäß den Rundungsregeln auf eine Dezimale nach dem Komma genau gerundet.

Sind hiernach die die in a) gesuchten Anzahlen immer noch eindeutig bestimmt? Wenn das nicht der Fall ist, ermitteln Sie alle diejenigen Werte für in a) gesuchte Anzahlen, die ebenfalls auf die gerundeten Prozentangaben 4,0% und 7,0% führen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Zu Beginn der Schuljahres sei x die Anzahl der Teilnehmer, y die Anzahl der Nichtteilnehmer gewesen, Dann gilt $x + y = 825$ (1) und da die Zunahme der Teilnehmerzahl ebenso groß wie die Abnahme der Nichtteilnehmerzahl war, gilt

$$\frac{4}{100} \cdot x = \frac{7}{100} \cdot y \qquad (2)$$

Aus (1) folgt $x = 825 - y$; aus (2) folgt damit

$$4 \cdot (825 - y) = 7y \quad (3) \qquad ; \qquad 11y = 3300 \quad (4)$$

Also war die Anzahl der Nichtteilnehmer zu Beginn des Schuljahres $y = 300$ (5); sie nahm um 7 % dieses Wertes ab, d. h. um die Zahl $z = 21$.

b) Sind p und q die wahren, durch 4,0 und 7,0 angenäherten Werte, so liegt p zwischen 3,95 und 4,05 sowie q zwischen 6,95 und 7,05; ferner ist statt (3), (4), (5) nur bekannt, dass mit solchen Werten p,q

$$p \cdot (825 - y) = q \cdot y \qquad ; \qquad y = \frac{p \cdot 825}{p + q}$$

gilt. Das führt zunächst zu der Aussage, das y zwischen

$$\frac{3{,}95 \cdot 825}{4{,}05 + 7{,}05} = \frac{3258{,}75}{11{,}1} \quad \text{und} \quad \frac{4{,}05 \cdot 825}{3{,}95 + 6{,}95} = \frac{3341{,}25}{10{,}9} \quad \text{und}$$

also erst recht zwischen 293,58 und 306,54 liegen und folglich eine der Zahlen

$$294, 295, ..., 306 \qquad (6)$$

sein muss. Die Anzahl $z = \frac{q}{100}y$ der Schüler, um die sich y während des Schuljahres verringert hat, liegt daher zwischen $\frac{6{,}95}{100} \cdot 294 = 20{,}433$ und $\frac{7{,}05}{100} \cdot 306 = 21{,}573$, d. h. sie ist eindeutig bestimmt und beträgt $z = 21$.

II Runde 2

Aufgabe V10921:
Der sowjetische Flieger K. Kokkinaki hat mit der einmotorigen Turbodüsenmaschine E 66 einen neuen Weltrekord aufgestellt. Er flog 100 km in 170 s.
a) Wie groß war seine mittlere Geschwindigkeit in $\frac{km}{h}$?
b) Mit welchem möglichen Fehler ist dieser Wert behaftet, wenn die Entfernungsmessung genau war, die Zeitmessung aber mit einem Fehler von ±0,5 s behaftet war?

Lösung von J. Lehmann und W. Unze:
a1) Umrechnung von t: $170s = \frac{170}{3600}$h
a2) Berechnung der mittleren Geschwindigkeit

$$v = \frac{s}{t} = \frac{100 \cdot 3600}{170} = 2117{,}6 \approx 2118$$

Die mittlere Geschwindigkeit betrug 2118 km·h^{-1}.
b1) zeitliche Abweichung nach oben: $v = \frac{100 \cdot 3600}{170{,}5} = 2111{,}4 \approx 2111$.
b2) zeitliche Abweichung nach unten: $v = \frac{100 \cdot 3600}{169{,}5} = 2123{,}9 \approx 2124$. Bei einem Zweitfehler von ±0,5 s ist der Wert der mittleren Geschwindigkeit mit einem Fehler von etwa ±6 km·h^{-1} behaftet.

Aufgabe V10922:
Gemäß unseres Siebenjahrplans wird sich die Industrieproduktion der Deutschen Demokratischen Republik stark erhöhen. Die gesamte Industrieproduktion wächst von 1958 bis 1965 um 88%. Die Produktion von Produktionsmitteln (d.s. Rohstoffe, Maschinen, Ausrüstungen für die Industrie, Landwirtschaft und Verkehr usw.) wächst um 95%, dagegen die Produktion von Konsumgütern (d.s. Güter, die für den Bedarf der Bevölkerung bestimmt sind) um 77%.
Wie viel Prozent der gesamten Industrieproduktion betrug der Anteil der Produktion von Produktionsmitteln im Jahre 1958? Wie viel Prozent wird er 1965 betragen?

Lösung von J. Lehmann und W. Unze:

	1958	1965
Gesamte Industrieproduktion	100	188
Produktion von Produktionsmitteln	x	$\frac{195}{100}x$
Produktion von Konsumgütern	y	$\frac{177}{100}y$

Gesamte Industrieproduktion = Produktion von Produktionsmitteln + Produktion von Konsumgütern

$$100 = x + y \quad (1) \qquad 100 \cdot 108 = 195 \cdot x + 177 \cdot y \quad (2)$$

Aus (I)+(II) folgt: $195x + 177(100 - x) = 18800$, d. h. $x = 61{,}1$.
Im Jahre 1958 betrug der Anteil der Produktion von Produktionsmitteln rund 61,1% der gesamten Produktion. Aus der aufgestellten Tabelle ergibt sich:
Sei p der gefragte Prozentsatz für die Produktionsmitteln im Jahre 1965, dann muss gelten:

$$188 : 100 = \frac{195}{100} \cdot 61{,}1 : p \Rightarrow p = 63{,}4$$

Im Jahre 1965 beträgt der Anteil der Produktion von Produktionsmitteln 63,4 % der gesamten industriellen Produktion.

Aufgabe 010922:
a) Ein Hanfseil von 15 mm Durchmesser verträgt eine Belastung von 175 kp, ohne zu reißen.
Welcher Länge des Seiles entspricht diese Belastung, d. h., wann reißt das Seil unter seinem eigenen Gewicht, wenn ein Seil von 1 m Länge je mm^2 Querschnitt 1 p wiegt?

b) Ein Dederonseil vom gleichen Querschnitt hält eine weitaus größere Belastung aus, nämlich 400 kp.
Welcher Länge des Seils entspricht diese Belastung, wenn ein Seil von 1 m Länge je mm^2 Querschnitt 0,8 p wiegt?

Lösung von Christiane Behns:
a) Das Hanfseil hat eine Querschnittsfläche von $A = \frac{\pi}{4}d^2 = 176{,}7\ \text{mm}^2$, es wiegt also pro Meter 176,7 p. Somit kann es maximal

$$l_{max} = \frac{175000p}{176{,}7\frac{p}{m}} = 990{,}3m$$

lang sein, ohne unter seinem Eigengewicht zu reißen.

b) Für die maximale Länge des Dederonseils gilt hingegen: $l_{max} = 2829{,}4$ m.

Aufgabe 020921:
Bei dem Gruppenflug der sowjetischen Kosmonauten Andrijan Nikolajew und Pawel Popowitsch hatten die Raumschiffe Wostok III und Wostok IV zeitweilig einen Abstand von nur 6,5 km voneinander. Der Einfachheit halber sei angenommen, dass sie genau hintereinander flogen. Dabei legten sie eine Erdumrundung (41000 km) in rund 88 Minuten zurück.
Welchen Abstand müssten zwei mit einer Geschwindigkeit von 100 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ auf der Autobahn fahrende Autos haben, wenn ihr Zeitabstand der gleiche wie bei den Raumschiffen wäre?

Lösung von André Lanka:
Die beiden Raumschiffe haben eine Geschwindigkeit von

$$v = \frac{41000\ \text{km}}{88\ \text{min}} \cdot 60\frac{\text{min}}{\text{h}} \approx 27955\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

was einen Zeitabstand von

$$t_\Delta = \frac{6{,}5\ \text{km}}{27955\frac{\text{km}}{\text{h}}} \approx 0{,}0002325\ \text{h}$$

ergibt. Bei einer Geschwindigkeit von 100 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ entspricht das einer Entfernung von $0{,}0002325\ \text{h} \cdot 100\frac{\text{km}}{\text{h}} = 0{,}02325\ \text{km} = 23{,}25\ \text{m}$.

Aufgabe 020922:
Ein Auto fährt mit einer Geschwindigkeit von 100 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Es wird gebremst.
a) In welcher Zeit kommt es zum Stehen, wenn durch die Bremsung seine Geschwindigkeit in jeder Sekunde um 5 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ abnimmt?
b) Welchen Bremsweg legt es in dieser Zeit zurück?

Lösung von André Lanka:
a) Aus der Formel $v = at$ erhält man

$$t = \frac{v}{a} = \frac{\frac{100}{3{,}5}\frac{\text{m}}{\text{s}}}{5\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \approx 5{,}56\text{s}$$

b) Das Auto legt in dieser Zeit einen Weg von $s = \frac{a}{2}t^2 \approx 77{,}3$ m zurück.

Aufgabe 040921:
In einer Abteilung eines Werkes soll ein neues, zeitsparendes Arbeitsverfahren eingeführt werden. Wenn 4 Arbeiter der Abteilung nach diesem Verfahren arbeiten, erhöht sich die Produktion um 20 Prozent.
Wenn 60 Prozent der Arbeiter der Abteilung dieses Verfahren anwenden, kann die Produktion auf das Zweieinhalbfache gesteigert werden.

a) Wie viel Arbeiter hat die Abteilung?

b) Auf wie viel Prozent würde sich die Produktion erhöhen, wenn alle Arbeiter der Abteilung nach diesem Verfahren arbeiten würden? (Alle Arbeiter der Abteilung führen die gleiche Tätigkeit aus.)

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Wenn p die Produktion der Abteilung ist, so erreichen 4 Arbeiter eine Steigerung um 0,2 p. 60 Prozent der Arbeiter erreichen eine Steigerung um 1,5 p.
Daraus folgen: 60 % = 30 Arbeiter und 100 % = 50 Arbeiter. In der Abteilung sind 50 Arbeiter tätig.

b) Falls alle Arbeiter dieser Abteilung das neue Verfahren anwenden, lässt sich die Produktion auf 350 Prozent steigern.

Aufgabe 320923:
Beim Tanken eines Oldtimers mit Zweitaktmotor, der ein Öl-Kraftstoff-Gemisch von 1 : 50 benötigt, wurden zunächst versehentlich 7 Liter Kraftstoff ohne Öl getankt.
Wieviel Liter Gemisch mit dem noch lieferbaren Verhältnis 1 : 33 müssen nun hinzugetankt werden, damit sich das richtige Mischungsverhältnis von 1 : 50 ergibt?
Die gesuchte Literzahl ist auf eine Stelle nach dem Komma genau zu ermitteln.

Lösung von cyrix:
Es sei V das Volumen der noch nachzutankenden Menge in Litern.
Dann soll also $\frac{1}{34} \cdot V = \frac{1}{51} \cdot (V+7)$ gelten, also $\left(\frac{1}{34} - \frac{1}{51}\right) \cdot V = \frac{7}{51}$.
Es ist $51 = 3 \cdot 17$ und $34 = 2 \cdot 17$, also geht die Gleichung durch Multiplikation mit $17 \cdot 6$ über in $(3-2) \cdot V = V = 14$, sodass genau (auf beliebig viele Stellen nach dem Komma) 14 Liter vom 1 : 33-Gemisch nachzutanken sind.

III Runde 3

Aufgabe 010931:
In den ersten $2\frac{1}{2}$ Jahren des Siebenjahrplans erzeugten die Stahlwerker der Sowjetunion insgesamt 113 Prozent der gesamten italienischen Stahlproduktion des Jahres 1959 über den Plan hinaus.
Jährlich wurden dabei im Durchschnitt nur 310000 t Stahl weniger zusätzlich produziert als in einem halben Jahr (1959) in Italien.
Wie viel Tonnen Stahl produzierten die Stahlwerker der Sowjetunion zusätzlich?
Wie viel Tonnen Stahl wurde 1959 in Italien produziert?

Lösung von Christiane Behns:
Ist x die italienische Stahlproduktion von 1959 in Tonnen, so wurden in der Sowjetunion in den $2\frac{1}{2}$ Jahren 1,13x Tonnen Stahl über den Plan produziert. Im einem Jahr beträgt die Überproduktion in der Sowjetunion dann $\frac{1}{2}x - 310000$ Tonnen. Also ist

$$\frac{5}{2}\left(\frac{1}{2}x - 310000\right) = \frac{113}{100}x$$

also $x \approx 6500000$. Damit wurden 1959 in Italien ca. 6,5 Millionen Tonnen Stahl produziert und in den $2\frac{1}{2}$ Jahren in der Sowjetunion $1{,}13x = 7{,}3$ Millionen Tonnen Stahl über den Plan.

Aufgabe 010932:

Kurt fährt mit der Straßenbahn eine lange gerade Straße entlang. Plötzlich sieht er seinen Freund auf gleicher Höhe in entgegengesetzter Richtung auf dieser Straße gehen. Nach einer Minute hält die Straßenbahn. Kurt steigt aus und läuft doppelt so schnell wie sein Freund, jedoch nur mit einem Viertel der Durchschnittsgeschwindigkeit der Straßenbahn hinter seinem Freund her.
Nach wie viel Minuten holt er ihn ein? Wie haben Sie das Ergebnis ermittelt?

Lösung von Eckard Specht:
Seien v_F, v_S und v_K die Geschwindigkeiten des Freundes, der Straßenbahn bzw. von Kurt. Zunächst bewegen sich Freund und Straßenbahn mit der Relativgeschwindigkeit $v_S + v_F$ auseinander.
Zum Zeitpunkt des Aussteigens nach $t = 1$ min sind beide die Strecke $s = \frac{v_S+v_F}{t}$ voneinander entfernt.
Anschließend holt Kurt seinen Freund mit der Relativgeschwindigkeit $v_K - v_F$ wieder ein.
Laut Aufgabenstellung ist ferner $v_K = 2v_F = \frac{1}{4}v_S$. Somit gilt für die zum Einholen benötigte Zeit:

$$t' = \frac{s}{v_K - v_F} = \frac{v_S + v_F}{v_K - v_F}t = \frac{8v_F + v_F}{2v_F - v_F}t = 9t = 9 \text{ min}$$

Aufgabe 020934:
Ein Schnellzug legt die 120 km lange Teilstrecke Leipzig–Riesa–Dresden mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 60 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ zurück. Infolge Bauarbeiten muss der Zug während einiger Tage die erste Hälfte der Strecke (Leipzig–Bornitz) mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 50 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ zurücklegen.
Um den Zeitverlust möglichst wettzumachen, wird auf der zweiten Hälfte der Strecke (Bornitz–Dresden) die Durchschnittsgeschwindigkeit auf 70 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ erhöht.
Kommt der Zug pünktlich in Dresden an?

Lösung von André Lanka:
Wir benutzen die Gleichung $s = v \cdot t$ und erhalten für die erste Weghälfte

$$t_1 = \frac{60 \text{ km}}{50 \frac{\text{km}}{\text{h}}} = \frac{6}{5} \text{ h}$$

Für die zweite Weghälfte braucht der Zug

$$t_2 = \frac{60km}{70\frac{km}{h}} = \frac{6}{7}h$$

Insgesamt ergibt das eine Fahrzeit von $\frac{6}{5}$ h $+\frac{6}{7}$ h $= \frac{72}{35}$ h. Da $\frac{72}{35} > 2$ größer als 2 ist, kommt der Zug nicht pünktlich an.

Aufgabe 060935:
Auf dem Kreis k bewegen sich der Punkt A mit der gleichförmigen Geschwindigkeit v_1 und der Punkt B mit der gleichförmigen Geschwindigkeit v_2, wobei $v1 \neq v_2$ ist.
Bewegen sich beide Punkte im gleichen Umlaufsinn (etwa im Uhrzeigersinn), so überholt der Punkt A den Punkt B jeweils nach 56 min. Bewegen sich beide Punkte in verschiedenem Umlaufsinn, so begegnen sie einander jeweils nach 8 min. Dabei verringert bzw. vergrößert sich ihr auf der Kreislinie gemessener Abstand voneinander in je 24 s um 14 m.

a) Wie lang ist der Kreisumfang?

b) Wie groß sind die Geschwindigkeiten v_1 und v_2 (in m/min)?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

a) Nach den Bedingungen der Aufgabe gilt $v_1 > v_2$. Bei der Bewegung in verschiedenem Umlaufsinn erhält man die relative Geschwindigkeit von B bezüglich A durch Addition ihrer Geschwindigkeiten. Laut Aufgabe werden bei dieser relativen Geschwindigkeit jeweils 14 m in 24 s zurückgelegt, in 8 min also

$$\frac{14 \cdot 60 \cdot 8}{24} \text{ m} = 280 \text{ m}$$

Das ist die Länge des Kreisumfangs.

b) Nach dem Gesagten ist

$$v_1 + v_2 = \frac{14 \text{ m}}{24 \text{ s}} = 35 \frac{\text{m}}{\text{min}}$$

Bewegen sich die Punkte aber in gleichem Umlaufsinn, so erhält man die relative Geschwindigkeit von B bezüglich A durch Subtraktion der kleineren Geschwindigkeit v_2 von v_1. Laut Aufgabe und nach dem Ergebnis a) ist somit

$$v_1 - v_2 = \frac{280 \text{ m}}{56 \text{ min}} = 5 \frac{\text{m}}{\text{min}}$$

Die gesuchten Geschwindigkeiten betragen also $v_1 = 20 \frac{\text{m}}{\text{min}}$ und $v_2 = 15 \frac{\text{m}}{\text{min}}$.

Aufgabe 120934:
Zwei Fußgänger A und B legten dieselbe Strecke zurück. Sie starteten zur gleichen Zeit. Ein Beobachter stellte fest:
A ging die Hälfte der Strecke mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 4 $\frac{km}{h}$, den Rest mit 5 $\frac{km}{h}$. B ging während der Hälfte der von ihm für die ganze Strecke aufgewandten Zeit mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 4 $\frac{km}{h}$, während der übrigen Zeit mit 5 $\frac{km}{h}$.
Wer von den beiden erreichte zuerst das Ziel?

Lösung von StrgAltEntf:
Wir nutzen die Beziehung Geschwindigkeit = Strecke/Zeit bzw. Zeit = Strecke/Geschwindigkeit.
d sei die Länge der gesamten Strecke.
A benötigt für die Strecke d die Zeit $t_A = \frac{d/2}{4} + \frac{d/2}{5} = \frac{9}{40}d$.
d_1, d_2 seien die Strecken, bei denen sich B mit $4\frac{km}{h}$ bzw. $5\frac{km}{h}$ bewegt. Dann ist $d_1 + d_2 = d$. Für die Strecken benötigt B die Zeiten $t_1 = \frac{d_1}{4}$ bzw. $t_2 = \frac{d_2}{5}$.
Nach Voraussetzung ist $t_1 = t_2$, also $\frac{d_1}{4} = \frac{d_2}{5}$. Zusammen mit $d_1 + d_2 = d$ folgt hieraus $d_1 = \frac{4}{9}d$, $d_2 = \frac{5}{9}d$ und somit $t_1 = t_2 = \frac{1}{9}d$. Also benötigt B die Gesamtzeit $t_B = t_1 + t_2 = \frac{2}{9}d$.
Da $\frac{9}{40} > \frac{2}{9}$, ist B zuerst am Ziel.

I.III Ungleichungen

I Runde 1

Aufgabe 040914:
Von den natürlichen Zahlen p und q ist bekannt, dass $0 < p < q$ gilt.

a) Ordnen Sie die Zahlen 1, $\frac{p}{q}$ und $\frac{q}{p}$ der Größe nach! Beginnen Sie mit der kleinsten Zahl!

b) Stellen Sie fest, welche der beiden Zahlen $\frac{p}{q}$ und $\frac{q}{p}$ näher an 1 liegt!

Lösung von MontyPythagoras:

a) Es ist $p < q$. Teilt man durch q (erlaubt, weil $Q < 0$ ist) ergibt sich $\frac{p}{q} <$. Teilt man durch p wird $1 < \frac{q}{p}$ also

$$\Rightarrow \frac{p}{q} < 1 < \frac{q}{p}$$

b) Aus $p < q$ wird $p(q-p) < q(q-p)$. Teilt man durch pq ergibt sich

$$1 - \frac{p}{q} \quad < \quad \frac{q}{p} - 1$$

Dies bedeutet, dass der Abstand von $\frac{p}{q}$ zu Eins kleiner als der Abstand von $\frac{q}{p}$ zu Eins ist.

Aufgabe 050913:
Vergleichen Sie die beiden Zahlen!

$$A = \frac{5678901234}{6789012345} \quad \text{und} \quad B = \frac{5678901235}{6789012347}$$

Lösung von Manuela Kugel:
Setzt man den Zähler von A gleich x und den Nenner von A gleich y, so erhält man

$$A \quad = \quad \frac{x}{y} \text{ und } B = \frac{x+1}{y+2}$$

und weiter

$$A - B \quad = \quad \frac{x}{y} - \frac{x+1}{y+2} = \frac{xy + 2x - xy - y}{y(y+2)} = \frac{2x - y}{y(y+2)}.$$

Da $2x > y$ ist, folgt $2x - y > 0$ und wegen $y > 0$ weiter $A - B > 0$. Es gilt also $A > B$.

Aufgabe 220913:

a) Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen x, für die der Term $\frac{4x-4}{2x-3}$ definiert ist.

b) Ermitteln Sie unter den in a) gefundenen Zahlen x alle diejenigen, für die $0 < \frac{4x-4}{2x-3} < 1$ gilt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Der Term ist genau dann nicht definiert, wenn $2x - 3 = 0$ ist. Dies ist äquivalent mit $x = \frac{3}{2}$. Somit ist der Term genau für alle reellen x mit $x \neq \frac{3}{2}$ definiert.

Im Fall $x > \frac{3}{2}$ gilt also $2x - 3 > 0$. Daher führt das Multiplizieren einer Ungleichung mit $2x - 3$ zu einer jeweils äquivalenten Ungleichung. Somit sind die Ungleichungen

$$0 < \frac{4x-4}{2x-3} \qquad \text{und} \qquad \frac{4x-4}{2x-3} < 1$$

äquivalent mit

$$0 < 4x - 4 \qquad \text{und} \qquad 4x - 4 < 2x - 3$$

diese mit $4 < 4x$ und $2x < 1$ und diese mit $x > 1$ und $x < \frac{1}{2}$.
Diese beiden Ungleichungen widersprechen einander. Also gibt es kein $x > \frac{3}{2}$, das die in b) geforderte Ungleichung erfüllt.

Im Fall $x < \frac{3}{2}$ gilt $2x - 3 < 0$. Daher entsteht jeweils aus einer Ungleichung durch Multiplikation mit $2x - 3$ und Umkehrung des Ungleichheitszeichens eine äquivalente Ungleichung.

Somit sind die gegebenen Ungleichungen äquivalent mit

$$0 > 4x - 4 \qquad \text{und} \qquad 4x - 4 > 2x - 3 \qquad \text{d. h.} \qquad x < 1 \qquad \text{und} \qquad x > \frac{1}{2}$$

Diese beiden Ungleichungen werden genau von allen x mit $\frac{1}{2} < x < 1$ erfüllt. Für alle diese x gleich auch $x < \frac{3}{2}$.

Damit ist bewiesen: Die in b) geforderte Ungleichung gilt genau für alle reellen x mit $\frac{1}{2} < x < 1$.

Aufgabe 240914:
Drei Schüler diskutieren, welche Beziehung zwischen den Zahlen 1 und $\frac{2}{x-10}$ für reelle Zahlen $x \neq 10$ gilt. Sie stellen fest:

Für $x = 11$ ist $\frac{2}{x-10} = 2$, also $1 < \frac{2}{x-10}$;
für $x = 12$ ist $1 = \frac{2}{x-10}$;
für $x = 13$ ist $1 > \frac{2}{x-10}$.

Anschließend behauptet Marion: Die Gleichung $1 = \frac{2}{x-10}$ gilt genau für $x = 12$.
Norbert behauptet: Die Ungleichung $1 < \frac{2}{x-10}$ gilt genau für alle $x < 12$.
Petra behauptet: Die Ungleichung $1 > \frac{2}{x-10}$ gilt genau für alle $x > 12$.

Untersuchen Sie für jede dieser drei Behauptungen, ob sie wahr oder falsch ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Marions Behauptung ist wahr. Beweis:

(I) Wenn für eine reelle Zahl x die Gleichung $1 = \frac{2}{x-10}$ gilt, dann folgt $x - 10 = 2$, also $x = 12$.

(II) Für $x = 12$ gilt $\frac{2}{x-10} = \frac{2}{2} = 1$.

Norberts Behauptung ist falsch, da es unter den von Norbert genannten Zahlen x mit $x < 12$ auch solche gibt, für die $1 < \frac{2}{x-10}$ nicht gilt.

Zum Beweis gebügt es, ein Beispiel anzugeben. Ein solches Beispiel ist $x = 0$; denn diese Zahl erfüllt $x < 12$, und für sie gilt $\frac{2}{x-10} = -\frac{2}{10}$, also $1 > \frac{2}{x-10}$.

Petras Behauptung ist falsch, da es außer den von Petra genannten Zahlen x mit $x > 12$ noch weitere gibt, für die $1 > \frac{2}{x-10}$ gilt. Auch hierfür genügt ein Beispiel zum Beweis. Geeignet ist ebenfalls $x = 0$; denn diese Zahl erfüllt nicht $x > 12$, und für sie gilt $1 > \frac{2}{x-10}$.

II Runde 2

Aufgabe 120922:
Ermitteln Sie alle reellen Zahlen x, für die der Quotient $\frac{8-3x}{7x-2}$ negativ ist!

Lösung von Conny42:
Es ist $\frac{8-3x}{7x-2} < 0$ genau dann, wenn einer der folgenden beiden Fälle eintritt:

i) Es ist $8 - 3x < 0$ und $7x - 2 > 0$.
ii) Es ist $7x - 2 < 0$ und $8 - 3x > 0$.

Zu i): Aus $8 - 3x < 0$ folgt $x > \frac{8}{3}$ und aus $7x - 2 > 0$ folgt $x > \frac{2}{7}$. Wegen $\frac{8}{3} > \frac{2}{7}$ ist $x > \frac{2}{7}$ automatisch erfüllt, wenn $x > \frac{8}{3}$ erfüllt ist. Der erste Fall tritt also genau dann ein, wenn $x \in \left(\frac{8}{3},\infty\right)$.

Zu ii): Aus $7x-2<0$ folgt $x<\frac{2}{7}$ und aus $8-3x>0$ folgt $x<\frac{8}{3}$. Wegen $\frac{2}{7}<\frac{8}{3}$ ist $x<\frac{8}{3}$ automatisch erfüllt, wenn $x<\frac{2}{7}$ erfüllt ist. Der zweite Fall tritt also genau dann ein, wenn $x\in\left(-\infty,\frac{2}{7}\right)$.

Insgesamt folgt, dass der Quotient $\frac{8-3x}{7x-2}$ genau dann negativ ist, wenn $x\in\left(-\infty,\frac{2}{7}\right)\cup\left(\frac{8}{3},\infty\right)$.

Aufgabe 200922:
a) Nennen Sie zwei verschiedene ganze Zahlen x, die die Ungleichung $\frac{x+3}{x-1}<0$ erfüllen und bestätigen Sie das Erfülltsein dieser Ungleichung für die von Ihnen genannten Zahlen!
b) Ermitteln Sie die Menge aller derjenigen reellen Zahlen x, die diese Ungleichung erfüllen!

Lösung von cyrix:
a) Setzen wir $x=0$ in die Ungleichung ein, erhalten wir die wahre Aussage $\frac{3}{-1}=-3<0$. Setzen wir $x=-1$ in die Ungleichung ein, erhalten wir die wahre Aussage $\frac{2}{-2}=-1<0$.

b) Es ist $\frac{x+3}{x-1}=1+\frac{4}{x-1}$, die Ungleichung also äquivalent zu $\frac{4}{x-1}<-1$. Also muss $x-1$ negativ sein, sodas die Multiplikation mit diesem Term das Relationszeichen dreht und die Ungleichung unter der Einschränkung $x-1<0$, d. h., $x<1$, äquivalent ist zu $4>-(x-1)$ bzw. $-4<x-1$, d. h. $x>-3$. Die Ungleichung wird also genau von allen reelen Zahlen x mit $-3<x<1$ erfüllt.

Aufgabe 210923:
Beweisen Sie, dass reelle Zahlen x,y,z genau dann das System der drei Ungleichungen

$$\begin{aligned} x+y+z&>0,\\ x\cdot y\cdot z&>0,\\ xy+xz+yz&>0 \end{aligned}$$

erfüllen, wenn x,y und z positiv sind!

Lösung von cyrix:
Sind x, y und $z<$ allesamt positiv, so erfüllen sie offensichtlich alle drei Ungleichungen.
Gelten nun ab jetzt für die drei Variablen die drei Ungleichungen. Dann sind aufgrund der zweiten Ungleichung alle drei verschieden von 0 und entweder genau 0 oder genau 2 negativ. (Bei genau einer oder genau drei negativen Zahlen wäre ihr Produkt auch negativ, im Widerspruch zur zweiten Ungleichung.)

Nehmen wir nun an, dass genau zwei der drei Variablen negativ wären, d. h., wir nehmen o. B. d. A. $x>0$ und $y<0$ sowie $z<0$ an. Dann ist aufgrund der ersten Ungleichung $x>x+z>-y>0$ und analog $x>x+z>0$. Damit gilt $0<(x+y)(x+z)<x^2$.
Es ist aber wegen $0<x^2$ und der der dritten Ungleichung

$$x^2<x^2+xy+xz+yz=x^2+x(y+z)+yz=(x+y)(x+z)$$

was den gewünschten Widerspruch liefert.
Damit müssen alle drei Variablen x, y und z positiv sein, wenn sie die drei Ungleichungen gleichzeitig erfüllen, sodass die beiden Aussagen äquivalent sind, $\square$.

Aufgabe 240922:
Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen x mit $x\neq 5$, für die gilt:

$$\frac{x}{5-x}<4$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Für jedes reelle $x < 5$ ist das Bestehen der Ungleichung $\frac{x}{5-x} < 4$ äquivalent (wie das Multiplizieren mit der positiven Zahl $5 - x$ bzw. für die umgekehrte Schlussweise das Dividieren durch diese Zahl zeigt) mit $x < 20 - 4x$, dies mit $5x < 20$ und dies mit $x < 4$.

b) Für jedes reelle $x > 5$ ist das Bestehen der Ungleichung $\frac{x}{5-x} < 4$ äquivalent mit $x > 20 - 4x$, dies mit $x > 4$, was aber bereits für alle Zahlen $x > 5$ gilt, d. h. für diese mit der ursprünglichen Bedingung $x > 5$ äquivalent ist.
Da für jedes reelle $x \neq 5$ entweder $x < 5$ oder $x > 5$ gilt, ist mit a) und b) bewiesen:
Die gesuchten Zahlen sind genau diejenigen reellen Zahlen x, für die $x < 4$ oder $x > 5$ gilt.

Aufgabe 250923:
Es seien a, b, x und y positive reelle Zahlen, und es gelte $\frac{a}{b} < \frac{x}{y}$.
Beweisen Sie, dass aus diesen Voraussetzungen stets folgt

$$\frac{a}{b} < \frac{a+x}{b+y} < \frac{x}{y}$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Aus $\frac{a}{b} < \frac{x}{y}$ folgt durch die Multiplikation mit der positiven Zahl by: $ay < bx \quad (1)$.
Addiert man $a \cdot b$ folgt $a(b + y) < b(a + x)$. Dividiert man dies durch die positive Zahl $b(b + y)$, so folgt

$$\frac{a}{b} < \frac{a+x}{b+y} \tag{2}$$

Addiert man zu (1) xy ergibt sich durch Umformung

$$ay + xy < bx + xy$$
$$(a + x)y < x(b + y)$$
$$\frac{a+x}{b+x} < \frac{x}{y} \tag{3}$$

Mit (2) und (3) ist die geforderte Beziehung hergeleitet.

Aufgabe 260922:
Peter und Heinz erzählen, dass sie Dreiecke gezeichnet haben, deren Seitenlängen, gemessen in Zentimeter, die Maßzahlen

$$a = 3x + 9, \qquad b = 5x + 8, \qquad c = 4x + 1$$

hatten, wobei x eine zuvor gewählte von Null verschiedene natürliche Zahl war.
Anke behauptet: Für jede von Null verschiedene natürliche Zahl x gibt es ein Dreieck mit den so gebildeten Maßzahlen a, b, c seiner Seitenlängen.
Birgit behauptet: Es gibt eine von Null verschiedene Zahl x, für die ein Dreieck, das diese Seitenlängen hat, rechtwinklig ist.
Untersuchen Sie für jede dieser beiden Behauptungen, ob sie wahr ist!

Lösung von cyrix:
a) Offensichtlich gilt für jede reelle Zahl $x > 0$ (und damit auch für jede von Null verschiedene natürliche), dass $a + b = 8x + 17 > 4x + 1 = c$ und $a + c = 7x + 10 > 5x + 8 = b$ ist. Es gilt aber auch die dritte Dreiecksungleichung $b + c = 9x + 9 > 3x + 9 = a$, sodass sich für alle $x > 0$ jeweils ein entsprechendes Dreieck mit Kantenlängen a, b und c bilden lässt. Anke hat also recht.

b) Mit $x = 1$ ist $a = 12$, $b = 13$ und $c = 5$, was $a^2+c^2 = 144+25 = 169 = 13^2 = b^2$ erfüllt, sodass nach der Umkehrung des Satzes des Pythagoras bedeutet, dass es ein rechtwinkliges Dreieck mit Kathetenlängen a und c sowie Hypotenusenlänge b gibt. Also hat auch Birgit recht.

Aufgabe 270924:
Für je zwei natürliche Zahlen a, b, die die Ungleichungen

$$3a - 2b \leq 10 \quad (1) \qquad ; \qquad 3a + 8b \leq 25 \quad (2)$$

erfüllen, sei $S = a + 2b$.
Untersuchen Sie, ob es unter allen Zahlen S, die sich auf diese Weise bilden lassen, eine größte gibt! Wenn das der Fall ist, so ermitteln Sie diesen größtmöglichen Wert von S!

Lösung von cyrix:
Aus der zweiten Ungleichung folgt $b \leq 3$. Wir unterscheiden nun nach dem Wert, den b annimmt:

1. Fall: $b = 3$. Dann ist nach (2) $a \leq 0$, also $a = 0$ und $S = 6$.
2. Fall: $b = 2$. Dann folgt aus (2) $a \leq 3$, welche jeweils auch (1) erfüllen, und $S \leq 3 + 2 \cdot 2 = 7$.
3. Fall: $b \leq 1$. Dann folgt aus (1) $a \leq 4$, also $S \leq 4 + 2 \cdot 1 = 6$. Damit gilt in jedem Fall $S \leq 7$, welcher für das Paar $(a,b) = (3,2)$, dass beide Ungleichungen erfüllt, auch angenommen wird.

Aufgabe 300921:
Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen $x \neq 3$, für die die folgende Ungleichung (1) gilt!

$$\frac{2}{x-3} + \frac{1}{2} < \frac{5}{x-3} - \frac{1}{10}$$

Lösung von cyrix:
Die Ungleichung ist äquivalent zu $\frac{3}{5} < \frac{3}{x-3}$ bzw. $\frac{1}{5} < \frac{1}{x-3}$. Ist $x - 3$ negativ, so auch $\frac{1}{x-3}$, sodass die Ungleichung nicht erfüllt wäre. Also ist $x-3$ positiv und damit die Ungleichung äquivalent zu $5 > x-3 > 0$ bzw. $3 < x < 8$.

III Runden 3 & 4

Aufgabe 060933:
Beweisen Sie die folgende Behauptung:
In keinem rechtwinkligen Dreieck ist die Länge der Hypotenuse kleiner als das $\frac{1}{\sqrt{2}}$fache der Summe der Kathetenlängen.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Für ein beliebiges rechtwinkliges Dreieck seien die Kathetenlängen mit a,b bezeichnet, die Hypotenusenlänge mit c. Dann ist $(a-b)^2$ als Quadrat einer reellen Zahl nicht negativ, also gilt

$$c^2 = a^2 + b^2 = \frac{1}{2}(a+b)^2 + \frac{1}{2}(a-b)^2 \geq \frac{1}{2}(a+b)^2$$

Wegen $c > 0$ und $a + b > 0$ folgt hieraus die Behauptung $c \geq \frac{1}{2}(a+b)^2$.

Aufgabe 070933:
Man denke sich die natürlichen Zahlen von 1 bis 100, aufsteigend der Größe nach geordnet, angeschrieben.

Die dabei insgesamt aufgeschriebenen Ziffern denke man sich in unveränderter Reihenfolge zur Ziffernfolge der hiermit erklärten Zahl

$$123456789101112131 4...979899100$$

zusammengestellt. Aus ihr sollen genau 100 Ziffern so gestrichen werden, dass die restlichen Ziffern in gleicher Reihenfolge eine möglichst große Zahl bilden.
Wie lautet diese?

Lösung von Nuramon:
Zunächst beobachten wir, dass das Ergebnis immer die gleiche Anzahl an Ziffern hat, egal welche Ziffern man streicht.
Damit die Ergebniszahl mit mindestens fünf Neunen beginnt, muss man auf jeden Fall die Zahlen

$$1,2,...,8,10,11,...,18,20,21,...,28,30,...,38,40,41,...,48$$

und die Ziffer 4 von 49 streichen. Das sind $8 + 4 \cdot 19 = 84$ Ziffern.
Es ist nicht möglich, dass das Ergebnis mit sechs Neunen startet, denn dazu müsste man auch noch die Zahlen 50,51,...,58 und die Ziffer 5 von 59 streichen, das wären dann aber schon $84 + 19 > 100$ Ziffern.
Es ist auch nicht möglich, dass das Ergebnis mit den Ziffern 999998 beginnt, denn dazu müsste man zusätzlich noch 50,51,...,57 und die 5 von 58 streichen, also insgesamt $84 + 17 > 100$ Ziffern.
Durch zusätzliche Streichung der Zahlen 50,51,...,56 und der Ziffer 5 von 57 erhält man eine Zahl, die mit 999997 beginnt und hat bisher $84 + 15 = 99$ Ziffern gestrichen.
Streicht man danach auch noch die Ziffer 5 von 58, hat man 100 Ziffern gestrichen und erhält

$$\varepsilon := 999997859606162...99100$$

als Ergebnis.
Streicht man die Ziffer 5 von 58 nicht, so bekommt man eine Zahl, die mit 9999975 beginnt, also kleiner als ε ist.
Also ist ε die größtmögliche Zahl.

Aufgabe 070936:
Man ermittle alle reellen Zahlen x, die die Ungleichung erfüllen:

$$\frac{3}{2x-1} - \frac{2}{x-\frac{1}{2}} > -\frac{1}{3}$$

Lösung von cyrix:
Die Ungleichung ist wegen $\frac{2}{x-\frac{1}{2}} = \frac{4}{2x-1}$ äquivalent zu $-\frac{1}{2x-1} > -\frac{1}{3}$, also nach Multiplikation mit (-1) und Reziprokenbildung auch zu $2x - 1 > 3$ oder $2x - 1 < 0$, d. h. $x > 2$ oder $x < \frac{1}{2}$.

Aufgabe 110935:
Es seien a, b, c positive reelle Zahlen. Man beweise, dass dann

$$\frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab} \geq 2 \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)$$

gilt! Man gebe alle Fälle an, in denen Gleichheit eintritt!

Lösung von cyrix:
Durch Multiplikation mit $abc > 0$ geht die zu zeigende Ungleichung in die äquivalente

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 2\,(bc + ac - ab) \qquad \text{bzw.} \qquad a^2 + 2ab + b^2 - 2(a+b)c + c^2 \geq 0$$

also $(a+b-c)^2 \geq 0$, was offensichtlich wahr ist.

Aufgabe 140934:
Man beweise, dass für beliebige reelle Zahlen x, y, z die folgende Beziehung gilt: $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz$.
Ferner gebe man für x, y, z Bedingungen an, die gleichwertig damit sind, dass in der genannten Beziehung das Gleichheitszeichen gilt.

Lösung von cyrix:
Die genannte Ungleichung ist äquivalent zu

$$0 \leq 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2xz - 2yz = (x^2 - 2xy + y^2) + (x^2 - 2xz + z^2) + (y^2 - 2yz + z^2) =$$
$$= (x-y)^2 + (x-z)^2 + (y-z)^2$$

was offensichtlich erfüllt ist. Gleichheit tritt dabei nur genau dann ein, wenn alle drei Quadrate Null sind, also $x = y = z$ gilt.

Aufgabe 150936:
Beweisen Sie, dass für alle Tripel (a, b, c) positiver reeller Zahlen mit $abc = 1$ die Ungleichung

$$(1+a)(1+b)(1+c) \geq 8$$

gilt! Wann gilt das Gleichheitszeichen?

Lösung von cyrix:
Aufgrund der Ungleichung zwischen geometrischem und harmonischem Mittel ist $1 = \sqrt[3]{abc} \geq \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$, also $3 \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Daraus erhält man durch Multiplikation mit $abc = 1$ die Ungleichung $3 \leq bc + ac + ab$.
Weiterhin ist aufgrund der Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel auch $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} = 1$, also $a + b + c \geq 3$.
Zusammen ergibt sich

$$(1+a)(1+b)(1+c) = 1 + a + b + c + ab + ac + bc + abc \geq 1 + 3 + 3 + 1 = 8$$

wobei Gleichheit nur genau dann eintritt, wenn $a = b = c \ (= 1)$ gilt, da nur genau dann in den Mittel-Ungleichungen der Gleichheitsfall eintritt.

Aufgabe 160932:
Man beweise folgenden Satz:
Sind a und b positive reelle Zahlen, für die $ab = 1$ gilt, dann gilt

$$(a+1) \cdot (b+1) \geq 4 \qquad (1)$$

Untersuchen Sie ferner, in welchen Fällen in (1) das Gleichheitszeichen gilt!

Lösung von cyrix:
Aufgrund der Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel ist $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} = 1$, also

$$(a+1) \cdot (b+1) = ab + (a+b) + 1 \geq 1 + 2 + 1 = 4.$$

Dabei gilt Gleichheit genau für $a = b (= 1)$, da nur dann die Mittelungleichung den Gleichheitsfall liefert.

Aufgabe 170936:
Für jedes $i = 1, 2, 3$ seien x_i und y_i zwei beliebige voneinander verschiedene reelle Zahlen, und es sei mit d_i die größere der beiden Zahlen x_i und y_i bezeichnet.
a) Beweisen Sie:
Wenn $x_1 \leq x_2 + x_3$ und $y_1 \leq y_2 + y_3$ gilt, dann gilt $d_1 \leq d_2 + d_3$.
b) Stellen Sie fest, ob auch die folgende Aussage gilt.
Wenn $d_1 \leq d_2 + d_3$ gilt, dann gilt auch $x_1 \leq x_2 + x_3$.

Lösung von cyrix:
a) Es sind für alle i die Ungleichungen $x_i \leq d_i$ und $y_i \leq d_i$ nach Definition erfüllt. Also gilt sowohl $x_1 \leq x_2 + x_3 \leq d_2 + d_3$ als auch $y_1 \leq y_2 + y_3 \leq d_2 + d_3$. Da d_1 eine der beiden Zahlen x_1 oder y_1 ist, beide aber $\leq d_2 + d_3$ sind, gilt dies auch für d_1, $\Box$.

b) Dies ist offensichtlich nicht der Fall, wie etwa $x_1 = 1 = y_2 = y_3$ und $y_1 = 0 = x_2 = x_3$ zeigt. Dann ist nämlich $d_1 = d_2 = d_3 = 1$, also $d_1 \leq d_2 + d_3$, aber $x_1 > x_2 + x_3$.

Aufgabe 180931:
Beweisen Sie folgenden Satz!
Wenn a, b, c und d reelle Zahlen sind, für die $ab - cd \neq 0$ gilt, dann gilt $a^2 + b^2 > 0$ oder $c^2 + d^2 > 0$.

Lösung von cyrix:
Wäre $a^2 + b^2 = 0 = c^2 + d^2$, so wegen $x^2 = 0 \equiv x = 0$ für alle reellen Zahlen x auch $a = b = c = d = 0$ und damit auch $ab - cd = 0$ im Widerspruch zur Aufgabenstellung. Also muss $a^2 + b^2 > 0$ oder $c^2 + d^2 > 0$ gelten, $\Box$.

Aufgabe 200932:
Es seien a, b, c, d positive reelle Zahlen, für die $a > b > c > d$ sowie $a + d = b + c$ vorausgesetzt wird. Beweisen Sie, dass dann stets $a^2 + d^2 > b^2 + c^2$ gilt!

Lösung von cyrix:
Wegen $a > b$ existiert ein $x > 0$ mit $a = b + x$. Aufgrund $a + d = b + c$ ist dann $d = c - x$. Insbesondere ist

$$ad = (b + x)(c - x) = bc - (b - c)x - x^2 < bc \quad \text{also} \quad 2ad < 2bc$$

Wegen $a + d = b + c$ ist auch $(a + d)^2 = (b + c)^2$, also $a^2 + d^2 + 2ad = b^2 + c^2 + 2bc$.
Zieht man von dieser Gleichung nun links den kleineren Term $2ad$ und rechts den größeren $2bc$ ab, erhält man die Ungleichung $a^2 + d^2 > b^2 + c^2$, $\Box$.

Aufgabe 210933:
Beweisen Sie, dass die Ungleichung gilt:

$$1^1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot ... \cdot 998^{998} \cdot 999^{999} \cdot 1000^{1000} < 1000^{500000}$$

Lösung von cyrix:
Es ist $300^2 = 90.000 < 10^5$ und damit $300 < 1000^{\frac{5}{6}}$, also gilt

$$1^1 \cdot 2^2 \cdot \ldots \cdot 300^{300} < 300^1 \cdot 300^2 \cdot \ldots \cdot 300^{300} = 300^{1+2+\cdots+300} = 300^{\frac{300 \cdot 301}{2}} < 300^{300 \cdot 151} <$$

$$< 1000^{\frac{5}{6} \cdot 300 \cdot 151} = 1000^{37.750} < 1000^{40.000}$$

Weiterhin ist

$$301^{301} \cdot \ldots \cdot 1000^{1000} < 1000^{301} \cdot \ldots \cdot 1000^{1000} = 1000^{301+\cdots+1000} = 1000^{\frac{1000\cdot 1001}{2} - \frac{300\cdot 301}{2}} =$$
$$= 1000^{500.500-150\cdot 301} < 1000^{500.500-45.000}$$

also

$$1^1 \cdot \ldots \cdot 300^{300} \cdot 301^{301} \cdot \ldots \cdot 1000^{1000} < 1000^{40.000} \cdot 1000^{500.500-45.000} =$$
$$= 1000^{50.500+40.000-45.000} < 1000^{500.000}, \Box$$

Aufgabe 230934:
Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen x, für die gilt:

$$-5 \leq \frac{4x-3}{2x+1} < 6$$

Lösung von cyrix:
Es ist $\frac{4x-3}{2x+1} = 2 - \frac{5}{2x+1}$, die Ungleichungskette also äquivalent zu $-7 < -\frac{5}{2x+1} < 4$ bzw. $-4 < \frac{5}{2x+1} < 7$ sowie $-\frac{4}{5} < \frac{1}{2x+1} < \frac{7}{5}$.

Wir unterscheiden danach, ob $\frac{1}{2x+1}$ positiv oder negativ ist. (Verschwinden kann es aufgrund des positiven Zählers nicht.) Dabei ist $x \neq -\frac{1}{2}$, da sonst der Bruch nicht definiert wäre. Der Bruch ist dabei genau dann positiv, wenn $x > -\frac{1}{2}$ ist.

1. Fall: $x > -\frac{1}{2}$: Dann ist die erste Ungleichung automatisch erfüllt und die zweite nach Reziprokenbildung äquivalent zu $2x+1 > \frac{5}{7}$, also $x > -\frac{1}{7}$. Wegen $x > -\frac{1}{7} > -\frac{1}{2}$ erfüllen all jene x (und keine weiteren, die die Fallannahme erfüllen) beide Ungleichungen.

2. Fall: $x < -\frac{1}{2}$: Dann ist die zweite Ungleichung automatisch erfüllt und die erste nach Reziprokenbildung äquivalent zu $-\frac{5}{4} > 2x+1$, also $x < -\frac{9}{8}$. Wegen $x < -\frac{9}{8} < -\frac{1}{2}$ erfüllen all jene x (und keine weiteren, die die Fallannahme erfüllen) beide Ungleichungen.
Zusammenfassend wird also die Ungleichungskette der Aufgabenstellung genau von jenen reellen Zahlen x erfüllt, die kleiner als $-\frac{9}{8}$ oder größer als $-\frac{1}{7}$ sind.

Aufgabe 240935:
Beweisen Sie, dass für die Kathetenlängen a, b und die Hypotenusenlänge c jedes rechtwinkligen Dreiecks die Ungleichung $a^5 + b^5 < c^5$ gilt!

Lösung von cyrix:
Einerseits ist $a < c$ und $b < c$ und andererseits gilt nach dem Satz von Pythagoras $a^2 + b^2 = c^2$. Also gilt

$$a^5 + b^5 = a^3 \cdot a^2 + b^3 \cdot b^2 < c^3 \cdot a^2 + c^3 \cdot b^2 = c^3 \cdot (a^2 + b^2) = c^3 \cdot c^2 = c^5, \Box$$

Aufgabe 270932:
(I) Untersuchen Sie, ob der folgende Satz allgemein gilt:
Wenn a, b, c, d reelle Zahlen sind, für die $b \neq 0, b + c \neq 0$ und $b + d \neq 0$ gilt, so folgt aus

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c} \quad \text{stets auch} \quad \frac{a}{b} < \frac{a+d}{b+d}$$

(II) Untersuchen Sie, ob der folgende Satz allgemein gilt:

Wenn a, b, c, d positive reelle Zahlen sind, so folgt aus

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c} \qquad \text{stets auch} \qquad \frac{a}{b} < \frac{a+d}{b+d}$$

Lösung von cyrix:
(I) Die Aussage ist falsch, wie $a = 1$, $b = 2$, $c = 1$ und $d = 0$ zeigt, da dann die Voraussetzung $\frac{a}{b} = \frac{1}{2} < \frac{2}{3} = \frac{a+c}{b+c}$ erfüllt ist, die Schlussfolgerung wegen $\frac{a+d}{b+d} = \frac{a}{b}$ aber offensichtlich nicht.

(II) Die Aussage ist korrekt, da die Voraussetzung nach Multiplikation mit $b(b+c) > 0$ äquivalent ist zu $a(b+c) < b(a+c)$ bzw. $ab + ac < ab + bc$, also wegen $c > 0$ auch äquivalent zu $a < b$.
Dann ist aber wegen $d > 0$ auch $ab + ad < ab + bd$, also $a(b+d) < b(a+d)$, was nach Division durch $b(b+d) > 0$ genau auf die Folgerung in der Aufgabenstellung führt, $\square$.

Aufgabe 280934:
Beweisen Sie, dass für beliebige positive reellen Zahlen x und y stets die Ungleichung gilt:

$$\frac{\sqrt{x}}{y^6 \cdot \sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{x^6 \cdot \sqrt{x}} \geq \frac{1}{x^6} + \frac{1}{y^6}$$

Lösung von cyrix:
Die zu zeigende Ungleichung ist symmetrisch in x und y, sodass wir o. B. d. A. $y \geq x$ annehmen können. Durch Multiplikation mit $y^6 > 0$ geht sie äquivalent über in

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} + \frac{y^6 \cdot \sqrt{y}}{x^6 \cdot \sqrt{x}} \geq \frac{y^6}{x^6} + 1$$

bzw. nach der Substitution $t := \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{y}{x}} \geq 1$ in $t^{-1} + t^{13} \geq t^{12} + 1$. Da beide Seiten der Ungleichung offensichtlich positiv sind, ist Quadrieren eine Äquivalenzumformung, sodass die Ungleichung äquivalent ist zu $t^{-2} + 2 \cdot t^{-1} \cdot t^{13} + t^{26} \geq t^{24} + 2t^{12} + 1$ bzw. $t^{26} - t^{24} \geq 1 - t^{-2}$, also nach Multiplikation mit t^2 zu $t^{28} - t^{26} = t^{26} \cdot (t^2 - 1) \geq t^2 - 1$, was wegen $t \geq 1$ und damit sowohl $t^2 - 1 \geq 0$ auch $t^{26} \geq 1$ wahr ist, sodass auch die Ausgangsgleichung wahr ist, $\square$.

Aufgabe 290934:
Beweisen Sie, dass es zu je zwei beliebigen rationalen Zahlen a, b mit $a < b$ eine rationale Zahl x und eine irrationale Zahl y gibt, für die $a < x < y < b$ gilt!

Lösung von cyrix:
Wähle $x = a + \frac{1}{2} \cdot (b-a)$ und $y = a + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (b-a)$. Dann ist wegen $b - a > 0$ und $0 < \frac{1}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$ auch

$$a < a + \frac{1}{2} \cdot (b-a) = x < a + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (b-a) = y < a + 1 \cdot (b-a) = b$$

und mit $a,b \in \mathbb{Q}$ auch $x = a + \frac{1}{2} \cdot (b-a) \in \mathbb{Q}$ sowie wegen $\frac{b-a}{2} \in \mathbb{Q}$ und $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ auch $\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (b-a) \notin \mathbb{Q}$ und damit $y = a + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (b-a) \notin \mathbb{Q}$, $\square$.

Aufgabe 330942:
Ermitteln Sie alle diejenigen Tripel (a, b, c) positiver ganzer Zahlen a, b, c von denen keine größer als 100 ist und mit denen die Ungleichungen $a + b \geq 101$, $a + c \leq 101$, $a + b + c \geq 201$ gelten!

Lösung von cyrix:
Wäre $a+c<101$ oder $b<100$, so wegen $a+c \leq 101$ und $b \leq 100$ auch $a+c+b<101+100=201$, im Widerspruch zur letzten gegebenen Ungleichung. Also muss $a+c=101$ und $b=100$ gelten, sodass die letzten beiden Ungleichungen also in jedem Fall erfüllt sind.

Aus $a+c=101$ folgt für jedes positive ganze $1 \leq a \leq 100$, dass auch $c=101-a$ positiv ganz und nicht größer als 100 ist. Schließlich ist für alle diese a wegen $b=100$ auch $a+b \geq 101$, sodass alle Bedingungen erfüllt sind. Weitere Lösungen kann es nicht geben. Damit erfüllen genau die Elemente der Menge

$$\{(a,100,101-a) | a \in \mathbb{Z} \land 1 \leq a \leq 100\}$$

die Bedingungen der Aufgabenstellung.

I.IV Gleichungssysteme

I Runde 1

Aufgabe V00901:
Die Summe zweier Zahlen beträgt 20, die Summe ihrer Quadrate 202. Löse die Aufgabe rechnerisch.

Lösung von Steffen Polster:
x und y seien die zwei gesuchten Zahlen. Dann ergibt sich das Gleichungssystem

$$x+y=20 \quad (1) \qquad ; \qquad x^2+y^2=202 \qquad (2)$$

Umstellen von (1) nach y und Einsetzen in (2) ergibt

$$x^2+(20-x)^2=202 \Rightarrow 2x^2-40x+198=0 \Rightarrow x^2-20x+99=0$$

Diese quadratische Gleichung hat die Lösung $x_1=9$ und $x_2=11$ mit $y_1=11$ und $y_2=9$.
Die gesuchten Zahlen sind 9 und 11. Sie erfüllen die Bedingungen der Aufgabenstellung, wie die Probe bestätigt.

Aufgabe V00905:
An einem Stromkreis liegt eine Spannung von 120 V. Wird der Widerstand um 10 Ohm vergrößert, sinkt die Stromstärke um 1 Ampere.
Wie groß sind Stromstärke und Widerstand?

Lösung von Steffen Polster:
Es sei x der Werte Stromstärke I und y der Wert des Widerstandes. Dann wird mit der Gleichung zum Ohmschen Gesetz $U=R\cdot I$

$$xy=120 \qquad \text{(I)}$$
$$(y+10)(x-1)=120 \qquad (2)$$

Das Gleichungssystem hat die Lösung $x=4$ und $y=30$, d. h. die Stromstärke beträgt 4 Ampere und der Widerstand 30 Ohm.

Aufgabe 270914:
Für jedes Rechteck seien die Seitenlängen mit a, b bezeichnet, die Diagonalenlänge mit d und der Flächeninhalt mit A. Beweisen Sie mit diesen Bezeichnungen die folgende Aussage:

Es gilt $d=2a-b$ genau dann, wenn $A=\frac{3}{4}a^2$ gilt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn $d = 2a - b$ gilt, so folgt (da nach dem Satz des Pythagoras $d = \sqrt{a^2 + b^2}$ ist) $\sqrt{a^2 + b^2} = 2a - b$,

$$a^2 + b^2 = 4a^2 - 4ab + b^2 \tag{1}$$
$$4ab = 3a^2 \tag{2}$$

und hieraus (da nach der Formel für den Flächeninhalt des Rechtecks $A = ab$ ist)

$$4A = 3a^2 \tag{3}$$
$$A = \frac{3}{4}a^2 \tag{4}$$

II. Wenn $A = \frac{3}{4}a^2$ gilt, so folgt einerseits $ab = \frac{3}{4}a^2$, wegen $a > 0$ als $b = \frac{3}{4}a < 2a$.

Andererseits folgt (da die Schlüsse von (1) auf (2), (3), (4) umgekehrt werden können) $a^2 + b^2 = (2a - b)^2$. Wegen $b < 2a$, also $2a - b > 0$ kann man hieraus weiter auf $\sqrt{a^2 + b^2} = 2a - b$, d. h. $d = 2a - b$ schließen.

Mit I. und II. ist der verlangte Beweis geführt.

II Runde 2

Aufgabe 030924:
Geben Sie alle Paare reeller Zahlen an, deren Summe, Produkt und Quotient untereinander gleich sind!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Ist (a, b) ein Paar reeller Zahlen, für das

$$a + b = a \cdot b \quad (1) \qquad a \cdot b = \frac{a}{b} \quad (2)$$

gilt, so folgt aus (2), dass $b \neq 0$ ist, und danach aus (1), dass $a \neq 0$, und aus (2), dass $b^2 = 1$ ist. Also gilt $b_1 = +1$ oder $b_2 = -1$.
Der 1. Fall führt zu $a + 1 = a$ und damit zu einem Widerspruch.
Der 2. Fall ergibt $a - 1 = -a$ und damit $a = \frac{1}{2}$ als einzig mögliche Lösung.
Durch Einsetzen in (1) und (2) zeigt man, dass $\left(\frac{1}{2}, -1\right)$ Lösung und damit das einzige Paar reeller Zahlen ist, das alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

Aufgabe 050922:
28 Schüler einer Klasse beteiligten sich an einem Sportfest. Jeder nimmt an mindestens einer der drei Disziplinen Kugelstoßen, Weitsprung und 100-m-Lauf teil.
Die Anzahl derjenigen, die sowohl am Kugelstoßen als auch am Weitsprung, aber nicht am 100-m-Lauf teilnehmen, ist gleich der Zahl derer, die nur am Kugelstoßen beteiligt sind, und größer als 1.
Kein Teilnehmer tritt nur im Weitsprung oder nur im 100-m-Lauf an.
Sechs Schüler starten in den beiden Disziplinen Kugelstoßen und 100-m-Lauf und nehmen nicht am Weitsprung teil.
Die Anzahl derjenigen, die sowohl beim Weitsprung als auch beim 100-m-Lauf starten, ist fünfmal so groß wie die Anzahl derer, die in allen drei Disziplinen starten.
Die Anzahl derjenigen, die in allen drei Disziplinen teilnehmen, ist gerade, aber nicht Null.
Wie viele Schüler treten insgesamt in den einzelnen der drei Disziplinen an?

Lösung von Manuela Kugel:
Bezeichnet man die Anzahl der Teilnehmer an allen drei Disziplinen mit y, und die Anzahl derjenigen von ihnen, die nur am Kugelstoßen teilnehmen, mit x, so müssen x und y der folgenden Gleichung genügen:

$$2x + 5y + 6 = 28, \quad \text{also} \quad 2x + 5y = 22 \tag{1}$$

Daher muss y gerade sein. Da weiter nach Voraussetzung $y \neq 0$ und $x > 1$ gilt, ist (1) nur für $y = 2$ und $x = 6$ erfüllt. Die Anzahl der Teilnehmer betrug also:
Beim Kugelstoßen $2 \cdot 6 + 2 + 6 = 20$ Schüler, beim Weitsprung $5 \cdot 2 + 6 = 16$ Schüler und beim 100-m-Lauf $5 \cdot 2 + 6 = 16$ Schüler.

Aufgabe 070922:
Für zwei rationale Zahlen a und b gelten die vier Ungleichungen

$$a + b \neq 3; \quad a - b \neq 10; \quad a \cdot b \neq 5; \quad a : b \neq 18{,}75$$

Die Zahlen 3; 10; 5 und 18,75 stimmen jedoch (in anderer Reihenfolge) mit je einer der Zahlen $a + b$, $a - b$, $a \cdot b$ und $a : b$ überein.
Ermitteln Sie die Zahlen a und b!

Lösung von cyrix:
Da mit $a = \frac{(a+b)+(a-b)}{2} > 0$ auch $b = \frac{a \cdot b}{a}$ positiv ist, gilt $a - b < a + b$.
Insbesondere kann also $a - b$ nicht den größten der vier Werte annehmen. Es verbleiben zwei Fälle: $a - b = 5$ oder $a - b = 3$.
In beiden Fällen ist $a - b \in \mathbb{N}$. Wäre $a + b = 18{,}75$, so würde $a \cdot b = \frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{4} \notin \mathbb{N}$ folgen, da im Zähler dieses Bruchs von einer nicht ganzen eine ganze Zahl subtrahiert wird, also noch nicht einmal der Zähler eine ganze Zahl ist. Aber $a \cdot b \notin \mathbb{N}$ wäre ein Widerspruch, da die übrigen drei Ergebnisse alle natürlich sind. Also folgt in beiden Fällen $a + b \neq 18{,}75$.

1. Fall: $a - b = 5$.

   Dann verbleibt für $a + b$ als einziger Wert die 10, was zu $a = \frac{15}{2}$, $b = \frac{5}{2}$, $a \cdot b = \frac{75}{4} = 18{,}75$ und $a : b = 3$, also einer Lösung, führt.

2. Fall: $a - b = 3$.

   Wäre $a + b = 10$, so $a = \frac{13}{2}$, $b = \frac{7}{2}$ und $a \cdot b = \frac{91}{4}$, was nicht in der Liste vorkommt. Also verbleibt hier noch die Möglichkeit $a + b = 5$ zu prüfen, die aber auf $a = 4$, $b = 1$ und $a \cdot b = 4$, also auch keine Lösung, führt.

Es gibt also genau ein Lösungspaar, nämlich $(a,b) = \left(\frac{15}{2}, \frac{5}{2}\right)$.

Alternativ-Lösung von weird:
Ausgehend von der Gleichung

$$(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab \tag{*}$$

bleibt aufgrund der Tatsachen, dass 18.75 gemäß der Angabe unter den 3 Werten $a+b, a-b, ab$ vorkommen muss, aber $a \pm b = 18.75$ auf den Widerspruch führt, dass die linke Seite von (*) im Gegensatz zur rechten nicht ganzzahlig ist, nur mehr die Möglichkeit $ab = 18.75 = \frac{75}{4}$ übrig.
Insbesondere ist also dann $a + b > \sqrt{4 \cdot \frac{75}{4}} > 8$, womit von allen dann ganzzahligen Möglichkeiten für $a + b$ nur mehr $a + b = 10$ übrigbleibt, was dann wegen (*) auch sofort $a - b = 5$ zur Folge hat.
Die Auflösung von $a + b = 10$, $a - b = 5$ führt dann wieder auf die einzige Möglichkeit $a = \frac{15}{2}, b = \frac{5}{2}$, welche auch tatsächlich alle Vorgaben hier erfüllt.

III Runde 3

Aufgabe 080933:
Geben Sie alle Zahlentripel (a, b, c) an, die die Gleichungen

$$\begin{array}{ll} a+b+c=s_1 & a-b+c=s_3 \\ a+b-c=s_2 & a-b-c=s_4 \end{array}$$

unter der zusätzlichen Bedingung erfüllen, dass die Menge der vier Zahlen s_1, s_2, s_3, s_4 (ohne Rücksicht auf ihre Reihenfolge) mit der Menge der vier Zahlen 1, 2, 3, 4 übereinstimmt!

Lösung von ZePhoCa:
Addition der ersten und vierten Gleichung ergibt $2a = s_1 + s_4$.
Addition der zweiten und dritten Gleichung ergibt $2a = s_2 + s_3$.

Das geht nur, wenn $s_1 = 1$ und $s_4 = 4$ oder umgekehrt und $s_2 = 2, s_3 = 3$ oder umgekehrt. Daraus folgt $2a = 5$, also $a = \frac{5}{2}$.

Für $s_1 = 1$,$s_4 = 4$ folgt dann $b + c = -\frac{3}{2}$. Auflösen nach b und einsetzen in die zweite Gleichung ergibt $\frac{5}{2} + c + \frac{3}{2} + c = s_3$. Falls $s_3 = 2$ folgt $c = -1$, falls $s_3 = 3$ folgt $c = -\frac{1}{2}$. Einsetzen in die erste Gleichung ergibt $b = -\frac{1}{2}$ bzw. $b = -1$.
Für $s_1 = 4$,$s_4 = 1$ folgt $b + c = \frac{3}{2}$. Auflösen nach b und einsetzen in die zweite Gleichung ergibt $\frac{5}{2} + c - \frac{3}{2} + c = s_3$. Falls $s_3 = 2$ folgt $c = \frac{1}{2}$, falls $s_3 = 3$ folgt $c = 1$. Einsetzen in die erste Gleichung ergibt $b = 1$ bzw. $b = \frac{1}{2}$.

Es gibt also insgesamt die Möglichkeiten
$(a,b,c) = (\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, -1)$ (wenn $(s_1,s_2,s_3,s_4 = 1,3,2,4)$)
$(a,b,c) = (\frac{5}{2}, -1, -\frac{1}{2})$ (wenn $(s_1,s_2,s_3,s_4 = 1,2,3,4)$)
$(a,b,c) = (\frac{5}{2}, 1, \frac{1}{2})$ (wenn $(s_1,s_2,s_3,s_4 = 4,3,2,1)$)
$(a,b,c) = (\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, 1)$ (wenn $(s_1,s_2,s_3,s_4 = 4,2,3,1)$)
$(a,b,c) = (\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, -1)$ (wenn $(s_1,s_2,s_3,s_4 = 2,4,1,3)$)
$(a,b,c) = (\frac{5}{2}, -1, \frac{1}{2})$ (wenn $(s_1,s_2,s_3,s_4 = 2,1,4,3)$)
$(a,b,c) = (\frac{5}{2}, 1, -\frac{1}{2})$ (wenn $(s_1,s_2,s_3,s_4 = 3,4,1,2)$)
$(a,b,c) = (\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, 1)$ (wenn $(s_1,s_2,s_3,s_4 = 3,1,4,2)$)
und eine Probe ergibt, dass dies tatsächlich Lösungen sind.

Aufgabe 130935:
Beweisen Sie den folgenden Satz!
Wenn für rationale Zahlen a, b, c mit $a, b, c \neq 0$ und $a + b + c \neq 0$ die Gleichung

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$$

gilt, so sind zwei der Zahlen a, b, c zueinander entgegengesetzt.
(Rationale Zahlen x, y heißen genau dann zueinander entgegengesetzt, wenn $x = -y$ gilt.)

Lösung von cyrix:
Durch Multiplikation mit $abc(a + b + c)$ geht die Gleichung äquivalent über in

$$abc = (a+b+c) \cdot (bc+ac+ab) = abc + b^2c + bc^2 + a^2c + abc + ac^2 + a^2b + ab^2 + abc$$

bzw. nach Subtraktion von abc in

$$0 = a^2b + a^2c + abc + ac^2 + ab^2 + abc + b^2c + bc^2 = (a+b) \cdot (ab + ac + bc + c^2) = (a+b)(a+c)(b+c)$$

Dieses Produkt ist genau dann Null, wenn mindestens einer der Faktoren Null ist, also $a = -b$, $a = -c$ oder $b = -c$ gilt, sodass auf jeden Fall mindestens zwei der drei Zahlen a,b,c einander entgegengesetzt sind.

I.V Funktionen & Folgen

I Runde 1

Aufgabe 300911:
Drei Schüler wollen ein Spiel nach folgenden Regeln spielen:

1. Es wird (d. h. durch Auslosung der Reihenfolge) festgelegt, dass jeder der drei Schüler stets eine bestimmte Rechenoperation auszuführen hat, und zwar ein Schüler A die Subtraktion der Zahl 2, ein Schüler B die Division durch die Zahl 2, der dritte Schüler C das Ziehen der Quadratwurzel (z. B. mit dem Taschenrechner ermittelt).

2. Dann wird eine dreistellige natürliche Zahl zufallsbedingt gewählt (z. B. durch Auslosen unter allen dreistelligen natürlichen Zahlen) und als „Startzahl“ bezeichnet.

3. Nun führen die Schüler stets gleichzeitig jeweils ihre Rechenoperation aus. Beim ersten Mal wenden sie die Operation auf die „Startzahl“ an, jedes weitere Mal auf das zuvor erhaltene Resultat.

4. Sobald ein Schüler ein Resultat kleiner als 1 erhält, ist das Spiel beendet; dieser Schüler hat verloren.

Bei der Diskussion zur Vereinbarung der Regeln protestiert ein Schüler. Er meint, nach diesen Regeln ergäbe schon die Festlegung der Rechenoperationen zwangsläufig, wer verlieren müsse.

Stimmt das?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Diese Meinung stimmt. Man kann dies folgendermaßen begründen:

Der Schüler A erhält aus der Startzahl z der Reihe nach die Zahlen

$$z-2, z-2\cdot 2, z-3\cdot 2, \dots$$

allgemeine nach k-maliger Ausführung die Zahl $z-k\cdot 2$. Der Schüler B erhält entsprechend der Reihe nach

$$\frac{z}{2}, \frac{z}{2\cdot 2}, \frac{z}{2^3}, \dots$$

allgemein nach k-maliger Ausführung die Zahl $\frac{z}{2^k}$.

Wegen $z < 1000$ und $2^{10} > 1000$ ist daher spätestens nach 10-maliger Ausführung sein Resultat kleiner als 1. Für den Schüler A ist (wegen $z > 99$) für alle $k \leq 10$ das Resultat nach k-maliger Ausführung $z-k\cdot 2 > 99-20$ größer als 1.

Da schließlich für jede Zahl $x > 1$ auch $\sqrt{x} > 1$ ist, erreicht Schüler C niemals ein Resultat kleiner als 1. Also muss stets der Schüler V verlieren.

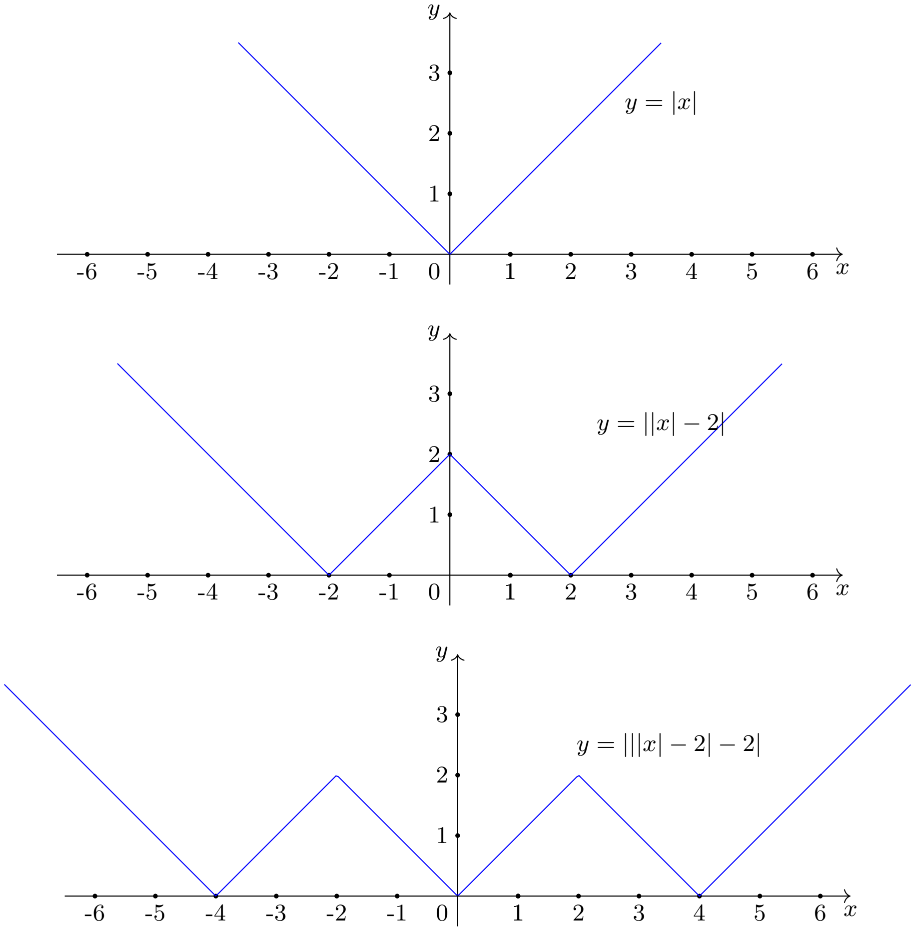
Aufgabe 340916:
Es seien Funktionen f_0, f_1, f_2, f_3, ... für alle reellen Zahlen x definiert durch

$$\begin{aligned} f_0(x) &= |x|, \\ f_1(x) &= ||x|-2|, \\ f_2(x) &= |||x|-2|-2|, \\ &\dots \end{aligned}$$

allgemein: $f_k(x) = |f_{k-1}(x) - 2|$ für alle ganzen Zahlen $k \geq 1$.

Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen f_0, f_1 und f_2! Beschreiben Sie allgemein das Aussehen des Graphen der Funktion f_k!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Abbildung zeigt die Graphen von f_0, f_1 und f_2.



Beschreibung des Graphen von f_k: Die Funktion hat $(k+1)$ Nullstellen, symmetrisch zum Nullpunkt gelegen und mit Abständen zu je 4 Einheiten voneinander. Jeweils in der Mitte zwischen zwei Nullstellen liegt ein lokales Maximum.

In den Intervallen, die durch diese Nullstellen und Maxima voneinander abgegrenzt werden, verläuft der Graph geradlinig, immer abwechselnd mit den Anstiegen -1 und 1.

Bemerkung: Ausgehend von f_0 kann man diese Graphen der Reihe nach folgendermaßen erhalten: Der Graph von f_k wird um 2 Einheiten nach unten verschoben, und dann werden alle Kurventeile, die dabei unterhalb von der x-Achse zu liegen kommen, an der x-Achse gespiegelt; so entsteht der Graph von f_{k+1}.

II Runde 2

Aufgabe 100923:
Gegeben seien zwei reelle Zahlen $m \neq 0$ und n. Ferner sei f die durch $f(x) = mx + n$ für alle reellen Zahlen definierte Funktion.

a) Ermitteln Sie für $m = 1$ und $n = 0$ alle Zahlen x_0, für die $2 \cdot f(x_0) = f(x_0 + 2)$ gilt (d. h. für die der Funktionswert an der Stelle $x_0 + 2$ doppelt so groß ist wie der an der Stelle x_0)!
b) Ermitteln Sie bei beliebig gegebenen reellen Zahlen $m \neq 0$ und n alle Zahlen x_0, für die $2 \cdot f(x_0) = f(x_0 + 2)$ gilt!

Lösung von cyrix:
a) Durch die Wahl von m und n ist $f(x) = x$ für alle reellen Zahlen x, d. h., es sind die Lösungen der Gleichung $2 \cdot x_0 = x_0 + 2$ gesucht, was genau für $x_0 = 2$ erfüllt wird.
b) Hier ist die Gleichung $2m \cdot x_0 + 2n = m \cdot x_0 + 2m + n$ zu lösen, was äquivalent ist zu $m \cdot x_0 = 2m - n$, also $x_0 = 2 - \frac{m}{n}$.

Aufgabe 170921:
Für jede reelle Zahl m und jede reelle Zahl n wird durch $y = f(x) = mx + n$ (x reell) eine Funktion f definiert, deren Graph eine Gerade g ist.
a) Es sei $m = \frac{1}{2}$ und n beliebig reell.
Ermitteln Sie die Koordinaten aller derjenigen Punkte auf g, deren Ordinate doppelt so groß ist wie ihre Abszisse!
b) Es seien m und n beliebig reell.
Ermitteln Sie die Koordinaten aller derjenigen Punkte auf g, deren Ordinate doppelt so groß ist wie ihre Abszisse! (Stellen Sie insbesondere fest, für welche m und n überhaupt ein solcher Punkt auf g existiert!)

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Ein Punkt hat genau dann die verlangten Eigenschaften, wenn für seine Koordinaten x, y sowohl die Gleichung $y = \frac{1}{2}x + n$ als auch die Gleichung $y = 2x$ gilt.
Ist dies der Fall, so folgt

$$2x = \frac{1}{2}x + n \qquad , \qquad x = \frac{2}{3}n \qquad , \qquad y = \frac{4}{3}n$$

Daher können nur diese Werte x, y die genannten Gleichungen erfüllen.
Wegen $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}n + n = \frac{4}{3}n$ und $2 \cdot \frac{2}{3}n = \frac{4}{3}n$ erfüllen sie in der Tat diese Gleichungen.
Also hat (jeweils für ein n) genau der Punkt mit dem Koordinatenpaar $\left(\frac{2}{3}n, \frac{4}{3}n\right)$ die verlangten Eigenschaften.

b) Ein Punkt hat genau dann die verlangten Eigenschaften, wenn für seine Koordinaten x, y sowohl die Gleichung $y = mx + n$ als auch die Gleichung $y = 2x$ gilt.
Ist $m = 2$ und $n = 0$, so trifft dies genau für alle Punkte der Geraden zu, die $y = 2x$ als Gleichung hat.
Ist $m = 2$ und n $\neq 0$, so gelten für kein Zahlenpaar (x, y) beide Gleichungen, also gibt es in diesem Fall keinen Punkt mit den verlangten Eigenschaften.
Ist $m \neq 2$, so gilt: Wenn x, y die geforderten Gleichungen erfüllen, so folgt $2x = mx + n$, $x = \frac{n}{2-m}$, $y = \frac{2n}{2-m}$. Daher können im Fall $m \neq 2$ nur diese Werte x, y die Gleichungen erfüllen.
Die Probe zeigt, dass jeweils für ein Paar (m, n) mit $m \neq 2$ genau der Punkt mit dem Koordinatenpaar $\left(\frac{n}{2-m}, \frac{2n}{n-m}\right)$ die verlangten Eigenschaften hat.

Aufgabe 270923:
Für jeden Quader seien die Kantenlängen mit a, b, c bezeichnet, die Länge der Raumdiagonale mit d und der Oberflächeninhalt mit A.
Beweisen Sie mit diesen Bezeichnungen die folgende Aussage:
Es gilt genau dann $d = \frac{1}{3} \cdot (a + b + c)$, wenn $A = 8 \cdot d^2$ gilt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es gilt genau dann $d = \frac{1}{3}(a+b+c)$, wenn $3d = a+b+c$ gilt. Wegen $d > 0$ und $a+b+c > 0$ ist dies äquivalent mit

$$9d^2 = (a+b+c)^2 \qquad \to \qquad 9d^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)$$

und dies wegen $d^2 = a^2+b^2+c^2$ und $A = 2(ab+ac+bc)$ mit $9d^2 = d^2 + A$, also auch mit $8d^2 = A$, w. z. b. w.

Aufgabe 270923:
Für jeden Quader seien die Kantenlängen mit a, b, c bezeichnet, die Länge der Raumdiagonale mit d und der Oberflächeninhalt mit A.
Beweisen Sie mit diesen Bezeichnungen die folgende Aussage:
Es gilt genau dann $d = \frac{1}{3} \cdot (a+b+c)$, wenn $A = 8 \cdot d^2$ gilt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es gilt genau dann $d = \frac{1}{3}(a+b+c)$, wenn $3d = a+b+c$ gilt. Wegen $d > 0$ und $a+b+c > 0$ ist dies äquivalent mit

$$9d^2 = (a+b+c)^2 \qquad \to \qquad 9d^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)$$

und dies wegen $d^2 = a^2+b^2+c^2$ und $A = 2(ab+ac+bc)$ mit $9d^2 = d^2 + A$, also auch mit $8d^2 = A$, w. z. b. w.

III Runde 3

Aufgabe 090936:
Es sei $f(x)$ die für alle reellen x definierte Funktion

$$f(x) = \frac{(x-1)x}{2}.$$

Ferner sei x_0 eine beliebig gegebene, von 0 verschiedene reelle Zahl. Wie üblich seien die Funktionswerte der Funktion $f(x)$ an den Stellen x_0+1 und x_0+2 mit $f(x_0+1)$ bzw. $f(x_0+2)$ bezeichnet.
Man beweise, dass dann gilt:

$$f(x_0+2) = \frac{(x_0+2)f(x_0+1)}{x_0}.$$

Lösung von cyrix:
Es ist

$$\frac{(x_0+2)f(x_0+1)}{x_0} = \frac{(x_0+2)\cdot\frac{x_0(x_0+1)}{2}}{x_0} = \frac{(x_0+2)(x_0+1)}{2} = f(x_0+2).$$

Aufgabe 240932:
In einem rechtwinkligen Koordinatensystem seien der Kreis k um den Ursprung mit dem Radius $\sqrt{2}$ und die Gerade g mit der Gleichung $y = -x + 10$ gezeichnet.
Ermitteln Sie Gleichungen für die beiden zu g parallelen Tangenten an k!

Lösung von cyrix:
Die zu g parallelen Geraden haben den gleichen Anstieg wie g, also -1. Darüber hinaus stehen die

Berührungsradien senkrecht auf den Tangenten, haben also den Anstieg 1 und verlaufen durch den Mittelpunkt des Kreises, besitzen also die Gleichung $y_r = x$, sodass sich die Berührungspunkte an den Koordinaten (1,1) bzw. (-1,-1) befinden. (Man rechnet leicht nach, dass diese den Abstand $\sqrt{2}$ vom Kreismittelpunkt, also dem Koordinatenursprung, besitzen und damit auf k liegen.)
Damit haben die beiden Tangenten die Gleichungen

$$y_{t_1} = -(x-1)+1 = -x+2 \qquad \text{und} \qquad y_{t_2} = -(x+1)-1 = -x-2$$

Aufgabe 290935:
a) Beweisen Sie, dass es zu jeder Funktion f, die für alle reellen Zahlen x die Gleichung

$$f(x-1) = (x^2-1)\cdot f(x+1) \tag{1}$$

erfüllt, unendlich viele verschiedene reelle Zahlen x mit $f(x) = 0$ gibt.
b) Beweisen Sie, dass es eine Funktion f gibt, die für alle reellen Zahlen x die Gleichung (1) erfüllt, bei der aber nicht jede reelle Zahl x den Funktionswert $f(x) = 0$ hat!

Lösung von cyrix:
a) Es ist für $x = 1$ laut (1) $f(0) = f(1-1) = (1^2-1)\cdot f(1+1) = 0\cdot f(2) = 0$. Für alle natürlichen Zahlen n gilt für $x = -2n+1$ wegen(1), dass $f(-2n-2) = ((-2n+1)^2-1)\cdot f(-2n)$ gilt. Aus $f(0) = 0$ folgt damit direkt $f(-2) = 0$, daraus $f(-4) = 0$ und sukzessive für alle negativen geraden ganzen Zahlen $f(-2n) = 0$, sodass die Funktion unendlich viele Nullstellen besitzt, $\square$.

b) Die Gleichung (1) setzt nur Funktionswerte von Argumenten in Beziehung, die sich um genau 2 unterscheiden. Es sei $2\mathbb{Z}+1$ die Menge der ungeraden ganzen Zahlen. Da für keine reelle Zahl $x \in \mathbb{R}\setminus(2\mathbb{Z}+1)$ gilt, dass $x+2$ oder $x-2$ eine ungerade ganze Zahl ist, ist die Wahl des Funktionswert für $f(x)$ unabhängig von der Wahl der Funktionswerte an den ungeraden ganzzahligen Stellen. Also kann man für alle x mit $x \in \mathbb{R}\setminus(2\mathbb{Z}+1)$ den Funktionswert $f(x) := 0$ festsetzen und unabhängig davon die für $x \in 2\mathbb{Z}+1$.

Setzt man nun $f(1) := 1$, so ergibt sich daraus ein eindeutiger Wert für $f(3)$, daraus ein eindeutiger Wert für $f(5)$ usw. für alle ungeraden natürlichen Zahlen. Umgekehrt folgt aber aus $f(1) = 1$ auch ein eindeutiger Wert, den $f(-1)$ annehmen muss, daraus einer für $f(-3)$ usw. für alle negativen ungeraden ganzen Zahlen.

Diese Funktion f ist wegen $f(1) \neq 0$ nicht konstant 0 ist, erfüllt damit für alle reellen Zahlen x die Funktionalgleichung (1), sodass es eine solche Funktion gibt, $\square$.

II Geometrie

II.I Dreiecke

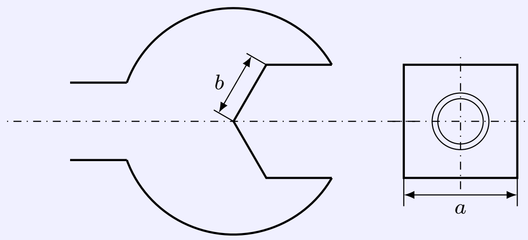
I Runde 1

Aufgabe V00903:
Aus dem Indischen nach dem Mathematiker Bhaskara (1114 n.d.Z.):
Eine Lotosblume ragt mit ihrer Spitze 4 Fuß aus einem Teiche hervor. Vom Winde gepeitscht, verschwindet sie 16 Fuß von ihrem früheren Standpunkt unter dem Wasser.
Wie tief war der Teich?

Lösung von Steffen Polster:
x sei die Länge der Lotosblume. Dann gilt $x^2 = (x-4)^2 + 16^2$ mit $x = 34$. Da die Lotosblume 4 m aus dem Teich hervorragt, ist der Teich 30 m tief.

Aufgabe V00913:

Eine Vierkantmutter (Kantenlänge 8) soll mit einem Sechskantschlüssel (Seitenlänge des Sechskants sei b) gelöst werden.
Welche Abmessungen muss b haben, damit der Schlüssel passt?



Lösung von Steffen Polster:
b ist die Länge der Schenkel eines gleichschenkligen Dreiecks, dessen Basis gleich a ist und dessen Basiswinkel 30° sind (Sechseck!). Damit wird

$$\cos 30° = \frac{\frac{a}{2}}{b} \qquad \Rightarrow \qquad b = \frac{a}{3}\sqrt{3} \approx 4{,}62$$

Aufgabe V00914:
Es sei r der Radius des in ein rechtwinkliges Dreieck eingeschriebenen Kreises, h die kleinste Höhe des Dreiecks.
Man beweise, dass für ein beliebiges rechtwinkliges Dreieck die Beziehungen $0{,}4 < \frac{r}{h} < 0{,}5$ gelten!

Lösung von MontyPythagoras:
Die kleinste Höhe steht senkrecht auf der Hypotenuse. Mit den gewöhnlichen Bezeichnungen im rechtwinkligen Dreieck gilt daher:

$$ch = ab \qquad ; \qquad h = \frac{ab}{c}$$

Für den Inkreisradius gilt

$$(a+b+c)r = ab \qquad ; \qquad r = \frac{ab}{a+b+c}$$

Das gesuchte Verhältnis ist

$$\frac{r}{h} = \frac{c}{a+b+c}$$

Wir untersuchen zunächst die „rechte“ Ungleichung der Aufgabenstellung. Es soll gelten:

$$\frac{c}{a+b+c} < \tfrac{1}{2}; \qquad c < \tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}b + \tfrac{1}{2}c; \qquad 2c < a+b+c; \qquad c < a+b$$

Dies ist die Dreiecksungleichung, womit diese Ungleichung erfüllt ist. Die „linke“ Ungleichung lautet:

$$\tfrac{2}{5} < \frac{c}{a+b+c}$$

$$\tfrac{2}{5}(a+b) < \tfrac{3}{5}c$$

$$2(a+b) < 3\sqrt{a^2+b^2}$$

Beide Seiten quadrieren:

$$4a^2 + 8ab + 4b^2 < 9a^2 + 9b^2$$

$$0 < 5a^2 - 8ab + 5b^2$$

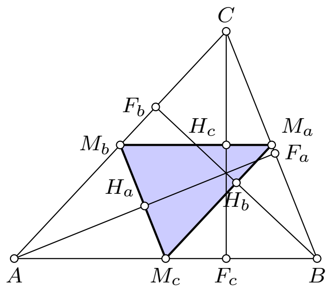
$$0 < a^2 + 4(a-b)^2 + b^2$$

Da rechts nur positive Terme stehen, ist auch diese Ungleichung immer gültig. q. e. d.

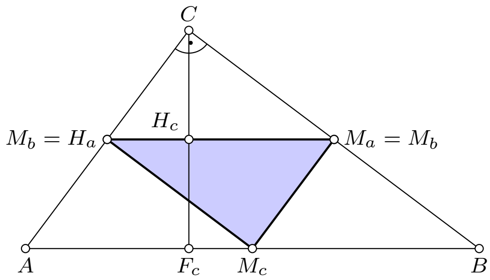
Aufgabe 010915:
Bei welchen Dreiecken liegen die Mitten der drei Höhen auf einer Geraden?

Die Behauptung ist zu beweisen!

Lösung von Carsten Balleier:
Das ist genau bei den rechtwinkligen Dreiecken der Fall (Bild b). In diesem Fall sind die beiden Katheten auch Höhen des Dreiecks. Die Verbindungslinie zwischen den Mitten der Katheten ist parallel zur Hypotenuse. Nach Strahlensatz wird die dritte Höhe auch in der Mitte geteilt.



a)



b)

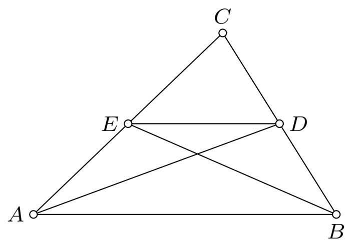
Aufwändiger ist es zu zeigen, dass die Behauptung für andere Dreiecke nicht zutrifft. Betrachten wir zuerst spitzwinklige Dreiecke (Bild a); die Bezeichnung sei so gewählt, dass h_a die längste Höhe ist. Die Fußpunkte der Höhen seien F_a, F_b und F_c, deren Mittelpunkte H_a, H_b und H_c. Die Seiten haben die Mittelpunkte M_a, M_b und M_c.
Dann ist der senkrechte Abstand von M_b, M_c und H_a zur Seite a gleich.

Weiterhin gilt $h_c < b$ und $h_b < c$ (Kathete kürzer als Hypotenuse), woraus $\overline{BH_b} < \overline{BM_c}$ und $\overline{CH_c} < \overline{CM_b}$ folgen. Damit ist der senkrechte Abstand von H_b und H_c zu a geringer als der von H_a. Weil h_a aber zwischen H_b und H_c liegt, kann H_a nicht auf der Geraden H_bH_c liegen.

Für stumpfwinklige Dreiecke gilt Ähnliches, allerdings ist dann der senkrechte Abstand von H_b und H_c zu a größer als der von H_a.

Aufgabe 020913:
Es ist zu beweisen, dass ein Dreieck, bei dem zwei Seitenhalbierende gleich groß sind, stets gleichschenklig ist!

Lösung von André Lanka:



Sei $\triangle ABC$ ein solches Dreieck und seien o. B. d. A. A und B die beiden Punkte, von denen zwei gleichlange Seitenhalbierende ausgehen. Die Seitenhalbierende von A aus schneide die Strecke $\overline{BC}$ in D und die Seitenhalbierende von B aus schneide die Strecke $\overline{AC}$ in E.

Dann sind die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle EDC$ ähnlich zueinander (SWS).

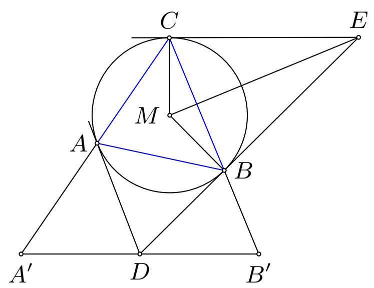
Mithin ist nach Strahlensatz $\overline{ED} \parallel \overline{AB}$. Das Viereck $ABDE$ ist daher ein Trapez.

Ein Trapez mit gleichlangen Diagonalen ist gleichschenklig. Daher ist $|\overline{AE}| = |\overline{DB}|$ und damit wegen Seitenhalbierenden $|\overline{AC}| = 2|\overline{AE}| = 2|\overline{DB}| = |\overline{CB}|$. Das Dreieck ist also gleichschenklig. $\square$

Aufgabe 020915:
Gegeben ist ein Dreieck ABC und sein Umkreis. Man konstruiere die Tangenten in A und B. Ihr Schnittpunkt sei D. Nun ziehe man durch D die Parallele zu der Tangente in C. Die Verlängerungen der Seiten CA und CB schneiden diese Parallelen in A' bzw. B'.
Es ist zu beweisen, dass

a) die Dreiecke $AA'D$ und $DB'B$ gleichschenklig sind und
b) es einen Kreis gibt, der durch A, A', B, B' geht!

Lösung von André Lanka:



a) Der Schnittpunkt der Tangenten durch B und C sei E. Es gilt, dass die Dreiecke $\triangle MCE$ und MBE kongruent sind nach SSW:
   (1) gemeinsame Seite $\overline{ME}$,
   (2) $\overline{MB} = \overline{MC} = r$ und
   (3) $\angle MCE = \angle MBE = 90°$.

   Mithin ist $\overline{CE} = \overline{BE}$ und daher ist das Dreieck $\triangle CBE$ gleichschenklig.

   Es gilt $\angle CBE = \angle B'BD$, da dies Scheitelwinkel sind.

   Ferner gilt: $\angle BDB' = \angle BEC$ wegen Wechselwinkeln an geschnittenen Parallelen.

   Analog gilt $\angle ECB = \angle DB'B$.

   Daraus resultiert, dass die beiden Winkel $\angle B'BD$ und $\angle DB'B$ gleichgroße Basiswinkel sind und das Dreieck $\triangle B'BD$ gleichschenklig ist.
   Analog kann man den Beweis auf das Dreieck $\triangle DAA'$ übertragen.

b) Mit der gleichen Überlegung wie zu Beginn von a) kann man sehen, dass die Strecken $\overline{AD}$ und $\overline{DB}$ gleichlang sind.

   Die Punkte A, A', B und B' haben so alle den gleichen Abstand vom Punkt D. Es existiert ein Kreis mit Mittelpunkt D und Radius $|\overline{AD}|$, der alle vier Punkte enthält.

Aufgabe 030915:
Beweisen Sie den folgenden Satz:

Im rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Katheten gleich der Summe der Durchmesser von Um- und Inkreis.

Lösung von Korinna Grabski:
Es ist zu beweisen: $a + b = d_U + d_I$

Der Mittelpunkt des Inkreises ist der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden. Der Inkreis berührt jede Seite des Dreiecks. Damit ist jede Seite des Dreiecks eine Tangente an den Inkreis, die Strecke zwischen Berührungspunkt und Mittelpunkt steht somit senkrecht auf der jeweiligen Seite.

Der Flächeninhalt des Dreiecks kann über das ganze Dreieck oder 3 Teildreiecke berechnet werden:

$$\begin{aligned} A &= a \cdot \frac{b}{2} = a \cdot \frac{r_I}{2} + b \cdot \frac{r_I}{2} + c \cdot \frac{r_I}{2} \\ a \cdot b &= (a + b + \sqrt{a^2 + b^2}) \cdot r_I \\ r_I &= \frac{a \cdot b}{a + b + \sqrt{a^2 + b^2}} \end{aligned}$$

Der Mittelpunkt des Umkreises ist der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten. Der Umkreis geht durch die Eckpunkte des Dreiecks. Die Katheten a und b bilden zusammen mit den Mittelsenkrechten ein Rechteck mit den Seitenlängen $a/2$ und $b/2$. Die Diagonale des Rechtecks beträgt r_U. Es gilt also:

$$r_U^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \qquad \Rightarrow \qquad r_U = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}$$

Und ferner:

$$\begin{aligned} a + b &= d_U + d_I = 2 \cdot \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2} + \frac{2ab}{a + b + \sqrt{a^2 + b^2}} \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} + \frac{2ab}{a + b + \sqrt{a^2 + b^2}} \\ &= \frac{(a + b) \cdot \sqrt{a^2 + b^2} + a^2 + b^2 + 2ab}{a + b + \sqrt{a^2 + b^2}} \\ &= \frac{(a + b) \cdot \sqrt{a^2 + b^2} + (a + b)^2}{a + b + \sqrt{a^2 + b^2}} \\ &= \frac{(a + b) \cdot (\sqrt{a^2 + b^2} + a + b}{a + b + \sqrt{a^2 + b^2}} \\ &= a + b \quad \square \end{aligned}$$

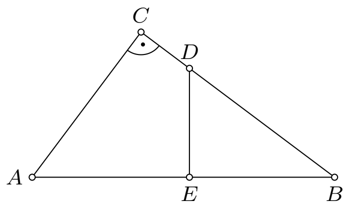
Aufgabe 040913:
Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck ABC, dessen Hypotenuse $\overline{AB}$ 25 mm und dessen Kathete $\overline{BC}$ 20 mm lang ist. Auf dieser Kathete wird die Strecke $\overline{BD}$ von der Länge 15 mm abgetragen, und vom Punkt D aus wird das Lot $\overline{DE}$ auf die Hypotenuse gefällt.

Berechnen Sie den Umfang des Dreiecks BDE!

Lösung von Manuela Kugel:
Es gilt $u = \overline{EB} + \overline{BD} + \overline{DE}$ mit $\overline{BD} = 15$.

Die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle DBE$ sind einander ähnlich mit 2 gleichen Winkeln:

$\measuredangle ABC = \measuredangle DBE$ sowie $\measuredangle ACB = \measuredangle DEB = 90°$.



Damit gilt nun:

$$\overline{EB} = \overline{BC} \cdot \overline{BD} : \overline{AB} = 20 \cdot 15 : 25 = 12$$

sowie nach dem Satz des Pythagoras

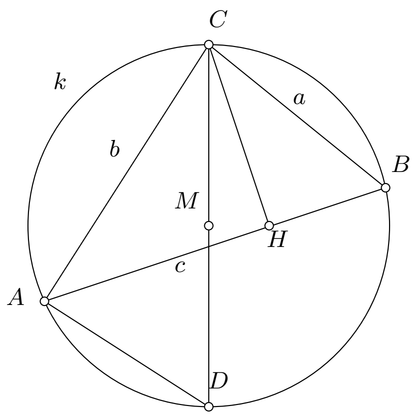
$$\overline{DE} = \sqrt{\overline{BD}^2 - \overline{EB}^2} = \sqrt{15^2 - 12^2} = \sqrt{225 - 144} = \sqrt{81} = 9.$$

Dadurch ergibt sich in obiger Gleichung: $u = 12 + 15 + 9 = 36$. Der Umfang des Dreiecks $\triangle BDE$ beträgt also 36 mm.

Aufgabe 050914:
Beweisen Sie folgenden Satz:

Der Flächeninhalt jedes Dreiecks ist gleich dem Produkt der Seiten dieses Dreiecks dividiert durch den vierfachen Umkreisradius des Dreiecks.

Lösung von Manuela Kugel:



Man bezeichne die Eckpunkte des Dreiecks so mit A, B und C, dass keiner der Dreieckswinkel größer als der bei C ist, und sodann die Längen der Dreiecksseiten wie üblich mit a, b und c (siehe Bild). Dann ist AC nicht Durchmesser des Umkreises k, weil sonst der Winkel bei B ein rechter und daher größer als der bei C wäre. Ist CD Durchmesser des Umkreises k, so ist $D \notin g_{AC}$.

H sei der Fußpunkt des Lotes von C auf g_{AB}. Dann gilt, wenn r der Umkreisradius ist, $|CD| = 2r$ und für den Flächeninhalt I des Dreiecks ABC, wenn noch $|HC| = h_c$ gesetzt wird

$$I = \frac{ch_c}{2}. \tag{1}$$

Nach Definition von H ist $|\angle BHC| = 90°$, und nach dem Satz von Thales gilt

$$|\angle DAC| = 90°. \tag{2}$$

Der Punkt B liegt auf derselben Seite von g_{AC} wie D, denn andernfalls lägen B und D nach dem obigen auf verschiedenen Seiten von g_{AC}. Dann wäre $ABCD$ ein nicht überschlagenes Sehnenviereck und daher nach folgendem Satz:

> $ABCD$ ist genau dann ein Sehnenviereck, wenn die Summe der Größen zweier gegenüberliegender Innenwinkel 180° beträgt, wenn also $|\angle ABC| + |\angle CDA| = 180°$ ist.

$$|\angle ABC| + |\angle ADC| = 180°. \tag{3}$$

Wegen (2) ist $|\angle ADC| < 90°$ und folglich wäre wegen (3) $|\angle ABC| > 90°$ im Widerspruch dazu, dass $\angle ACB$ größter Winkel im Dreieck ABC ist. Weiter gilt nach dem Peripheriewinkelsatz $\angle CBA \simeq \angle CDA$. Also gilt nach dem 1. Ähnlichkeitssatz $\triangle BCH \sim \triangle DCA$. Daraus folgt

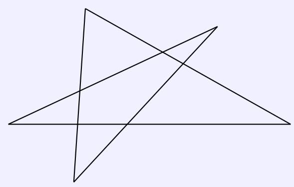
$$a : h \quad = \quad 2r : b, \quad \text{d. h.} \quad h_c = \frac{ab}{2r}.$$

Setzt man diesen Wert in die Flächeninhaltsformel (1) ein, so erhält man

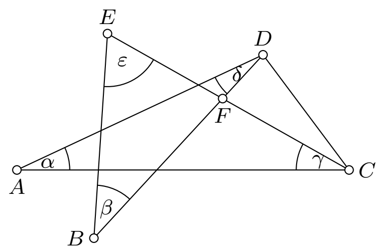
$$I \quad = \quad \frac{abc}{4r}.$$

Aufgabe 060911:

Ermitteln Sie ohne Messung die Summe der Größen der Innenwinkel an den fünf Spitzen des in der Abbildung dargestellten fünfzackigen Sternes.



Lösung von Manuela Kugel:



Es seien: $\alpha = \angle CAD$; $\beta = \angle EBD$; $\gamma = ACE$; $\delta = \angle BDA$; $\varepsilon = \angle BEC$.
Im Dreieck $\triangle ACD$ gilt dann nach Innenwinkelsummensatz:

$$180° = \alpha + \gamma + \angle ECD + \angle CDB + \delta$$

Unter Nutzung des Innenwinkelsummensatzes in Dreieck $\triangle CDF$:

$$= \quad \alpha + \gamma + \delta + (180° - \angle CFD)$$

Ferner gilt: $\angle BFE = \angle CFD$, weil sie zueinander Scheitelwinkel sind. Ferner gilt der Innenwinkelsummensatz im Dreieck $\triangle BFE$:

$$= \alpha + \gamma + \delta + 180° - \angle BFE = \alpha + \gamma + \delta + 180° - (180° - \beta - \varepsilon) = \alpha + \gamma + \delta + \beta + \varepsilon$$

Dies ist die Summe aller 5 Innenwinkel der Spitzen des fünfzackigen Sternes und beträgt somit 180°.

Aufgabe 110912:
Jede Seitenhalbierende eines Dreiecks zerlegt die Dreiecksfläche in zwei Dreiecksflächen, die gleich lange Grundseiten und gleich lange Höhen haben und somit inhaltsgleich sind. Der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden heißt Schwerpunkt des Dreiecks.

Untersuchen Sie, ob jede Gerade durch den Schwerpunkt S eines Dreiecks $\triangle ABC$ dessen Fläche in zwei inhaltsgleiche Teilflächen zerlegt!

Lösung von Manuela Kugel:
Im Dreieck $\triangle ABC$ sei CM die Seitenhalbierende der Seite AB und S der Schwerpunkt des Dreiecks. Dann gilt nach einem Satz über die Seitenhalbierenden

$$|SM| : |SC| = 1 : 2. \tag{1}$$

Wir zeigen nun, dass nicht jede Gerade durch S die Fläche des Dreiecks $\triangle ABC$ in zwei inhaltsgleiche Teilflächen zerlegt. Die Parallele g zu AB durch S schneide AC und BC in D bzw. E. Diese Punkte existieren stets, da AC und BC nicht parallel zu AB und damit auch nicht parallel zu g sind. Das Lot CG von C auf die Gerade durch A und B schneide g in F. Dieser Punkt existiert stets, da $CG \perp g$ gilt.

Nach den Strahlensätzen und wegen (1) ist dann

$$|DE| : |AB| = 2 : 3, \text{ d. h.} \tag{2}$$
$$|DE| = \frac{2}{3}|AB| \text{ und} \tag{3}$$
$$|CF| : |CG| = 2 : 3, \text{ d. h.} \tag{4}$$
$$|CF| = \frac{2}{3}|CG| \tag{5}$$

Also beträgt der Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle CDE$ nur $\frac{4}{9}$ von dem des Dreiecks $\triangle ABC$.
Damit ist gezeigt, dass nicht alle Geraden durch S die Dreiecksfläche in zwei inhaltsgleiche Teilflächen zerlegen.

Aufgabe 130911:
Zwei in gleicher Höhe über den Erdboden liegende Punkte A und B befinden sich in gleichem Abstand und auf derselben Seite von einer geradlinig verlaufenden hohen Wand. Die Strecke AB ist 51 m lang. Ein in A erzeugter Schall trifft in B auf direktem Wege um genau $\frac{1}{10}$s früher ein als auf dem Wege über die Reflexion an der Wand.

Man ermittle den Abstand jedes der beiden Punkte A und B von der Wand, wobei angenommen sei, dass der Schall in jeder Sekunde genau 340 m zurücklegt.

Lösung von Manuela Kugel:
Nach dem Reflexionsgesetz ist der Einfallswinkel gleich dem Reflexionswinkel. Es Sei C der Punkt an der Wand, in dem der von A kommende Schall nach B reflektiert wird. Dann ist wegen der erwähnten Winkelgleichheit und wegen der Gleichheit der Abstände der Punkte A und B von der Wand das Dreieck $\triangle ABC$ gleichschenklig mit $|AB| = |CB|$. Da der Schall auf dem Wege von A über C nach B genau $\frac{1}{10}$s länger braucht als auf direktem Wege und da laut Aufgabe der Schall in jeder Zehntelsekunde 34m zurücklegt, gilt

$$|AC| + |CB| \quad = \quad |AB| + 34m = 51m + 34m = 85m,$$

also $|AC| = |CB| = 42{,}5$ m.
Der Abstand des Punktes A von der Wand beträgt somit nach dem Satz des Pythagoras

$$\sqrt{42{,}5^2 - 25{,}5^2}m \quad = \quad 34m.$$

Aufgabe 140912:
Peter behauptet, man könne bei einem beliebig gegebenen Dreieck ABC, in dem D der Mittelpunkt der Seite AB ist, allein durch Längenvergleich der Seitenhalbierenden CD und der halben Seite AD feststellen, ob das Dreieck bei C einen spitzen, rechten oder stumpfen Innenwinkel hat.

Untersuchen Sie, ob Peters Behauptung richtig ist!

Lösung von Manuela Kugel:
Die Größen der Innenwinkel von $\triangle ABC$ bei A, B, C seien α, β, γ. Ist $|AD| = |DB| < |CD|$, so gilt, da im Dreieck der größeren Seite der größere Winkel gegenüberliegt, $|\angle ACD| < |\angle CAD|$ und $|\angle DCB| < |\angle CBD|$, also

$$\gamma \quad = \quad |\angle ACD| + |\angle DCB| < \alpha + \beta = 180° - \gamma$$

und daher $2\gamma < 180°$, woraus $\gamma < 90°$ folgt. Steht in der ersten Ungleichung das Gleichheitszeichen bzw. das Größerzeichen statt des Kleinerzeichens, so gilt dasselbe auch für die folgenden Ungleichungen.

Daher ist Peters Behauptung richtig: das Dreieck ABC hat bei C einen spitzen, rechten oder stumpfen Innenwinkel, je nachdem, ob $|AB|$ kleiner, gleich oder größer als $2|CD|$ ist.

Aufgabe 160913:
Es sei $\triangle ABC$ ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basis AB, der Länge $\overline{AB} = b$ und der Schenkellänge $2b$. Die Punkte D bzw. E seien die inneren Punkte von AC bzw. BC, in denen die Schenkel den Kreis mit dem Durchmesser AB schneiden. Man ermittle den Umfang des Vierecks $ABED$.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Der Mittelpunkt von AB sei M. Dann ist Dreieck DAM gleichschenklig mit $DM = AM = \frac{b}{2}$

Daher ist $\angle MDA = \angle MAD = \angle BAC = \angle ABC$, also $\triangle DAM \sim \triangle ABC$.

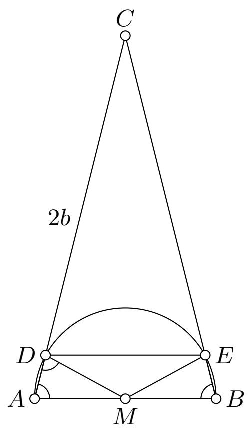
Folglich gilt $DA : AM = AB : BC = 1 : 2$, also $DA = \frac{1}{2}AM = \frac{b}{4}$ und daher

$$CD = AC - DA = 2b - \frac{b}{4} = \frac{7b}{4}$$

Ebenso erhält man $EB = \frac{b}{4}$ und $CA = \frac{7b}{4}$.

Also ist $DE \parallel AB$ und folglich $\triangle DEC \sim \triangle ABC$. Daraus ergibt sich $DE : AB = CD : AC = 8 : 7$, also $DE = \frac{7b}{8}$. Somit beträgt der gesuchte Umfang

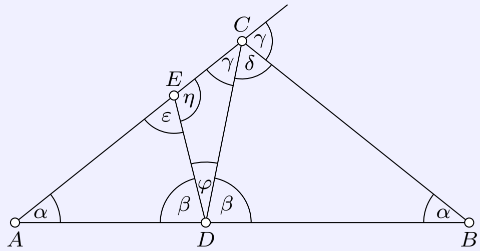
$$AB + BE + ED + DA = b + \frac{b}{4} + \frac{7b}{4} + \frac{b}{4} = \frac{19b}{8}$$



Aufgabe 190911:

In der dargestellten Figur sei die Größe δ des Winkels $\angle DCB$ bekannt. Ferner sei vorausgesetzt, dass gleichbezeichnete Winkel auch gleiche Größen haben.

Ermitteln Sie unter diesen Voraussetzungen die Winkelgrößen α, β, γ, ε, η und φ in Abhängigkeit von δ!



Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

(1) Wegen $\alpha + \beta + \delta = 180°$ (Winkelsumme im Dreieck $\triangle DBC$) und $\alpha + \beta + \varepsilon = 180°$ ((Winkelsumme im Dreieck $\triangle ADE$) gilt
$$\varepsilon = \delta$$

(2) Wegen $\delta + 2\gamma = 180°$ (gestreckter Winkelsumme bei C) gilt
$$\gamma = 90° - \frac{\delta}{2}$$

(3) Wegen $\gamma = 2\alpha$ (Außenwinkel der Dreieck ABC) gilt $\alpha = \frac{\beta}{2}$ und wegen (2) gilt dann
$$\alpha = 45° - \frac{1}{4}\delta$$

(4) Wegen $\eta + \varepsilon = 180°$ (Nebenwinkel) und wegen (1) gilt dann
$$\eta = 180° - \varepsilon \qquad ; \qquad \eta = 180° - \delta$$

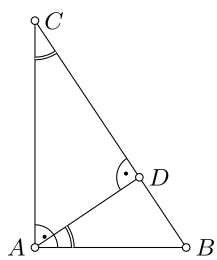
(5) Wegen $\gamma + \eta + \varphi = 180°$ (Winkelsumme im Dreieck $\triangle EDC$) gilt $\varphi = 180° - \gamma - \eta$, und unter Berücksichtigung von (2) und (4) gilt dann
$$\varphi = 180° - \left(90° - \frac{\delta}{2}\right) - (180° - \delta) = \frac{3}{2}\delta - 90°$$

(6) Wegen $2\beta + \varphi = 180°$ (gestreckter Winkel bei D) gilt $\beta = 90° - \frac{\varphi}{2}$, und unter Berücksichtigung von (4) gilt dann
$$\beta = 90° - \left(\frac{3}{4}\delta - 45°\right) = 135° - \frac{3}{4}\delta$$

Aufgabe 240913:
Es sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel bei A. Der Fußpunkt des Lotes von A auf BC sei D.

Beweisen Sie, dass dann stets $\overline{AB} \cdot \overline{CD} = \overline{AC} \cdot \overline{AD}$ gilt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Nach Voraussetzung gilt

$$\angle ADB = \angle CDA = 90° \tag{1}$$

und unter Berücksichtigung des Dreiecksinnenwinkelsatzes

$$\angle BAD = 90° - \angle CAD = \angle ACD$$

Aus (1) und (2) folgt $\triangle ABD \sim \triangle CAD$ und damit

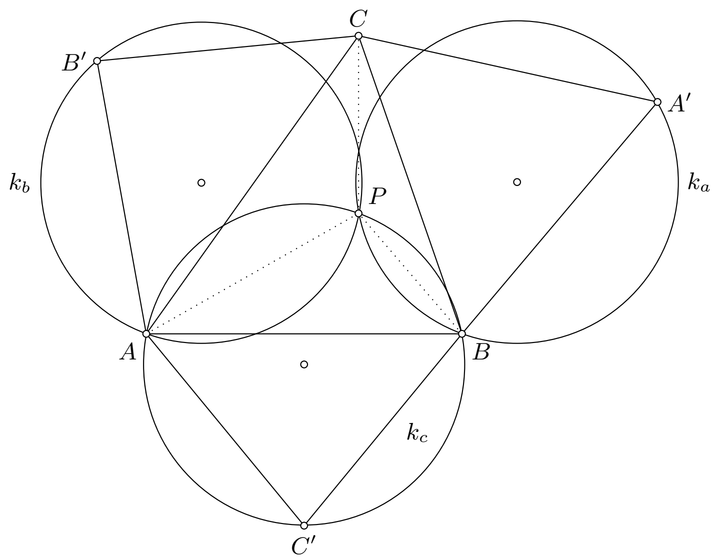
$$AB : BD = CA : CD \qquad \text{also} \qquad AB \cdot CD = AC \cdot AD \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Aufgabe 320914:
Über jeder Seite eines spitzwinkligen Dreiecks ABC werde nach außen dasjenige gleichschenklige Dreieck errichtet, dessen Basis die betreffende Seite von ABC ist und dessen Winkel an der Spitze ebenso groß ist wie der im Dreieck ABC der genannten Seite gegenüberliegende Innenwinkel.

Beweisen Sie, dass sich die Umkreise der drei so konstruierten neuen Dreiecke in einem Punkt schneiden!

Hinweis: Es darf ohne Beweis verwendet werden: Je zwei dieser drei Umkreise schneiden sich außer in einem Eckpunkt des Dreiecks ABC noch ein zweites Mal im Innern des Dreiecks ABC.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Die Innenwinkelgrößen des Dreiecks ABC seien wie üblich mit α, β,γ bezeichnet. Die über BC, CA bzw. AB errichteten Dreiecke seien BCA', CAB' bzw. ABC', ihre Umkreise k_a, k_b, k_c.

Nach dem Hinweis schneiden sich k_a und k_b außer in C in einem Punkt P, der im Innern des Dreiecks ABC liegt.

Nach Definition von BCA', CAB' und da $CPBA'$ und $CPAB'$ Sehnenvierecke sind, gilt

$$\angle CPB = 180° - \alpha \qquad , \qquad \angle CPA = 180° - \beta$$

Daraus sowie aus dem Innenwinkelsatz und der Definition von ABC' folgt

$$\begin{aligned} \angle APB &= 360° - (180° - \alpha) - (180° - \beta) = \alpha + \beta \\ &= 180° - \gamma = 180° - \angle AC'B \end{aligned}$$

Also ist auch $APBC'$ ein Sehnenviereck; d. h., P liegt auf dem Umkreis k_c von ABC'; d. h., k_a, k_b und k_c schneiden sich in dem Punkt P.

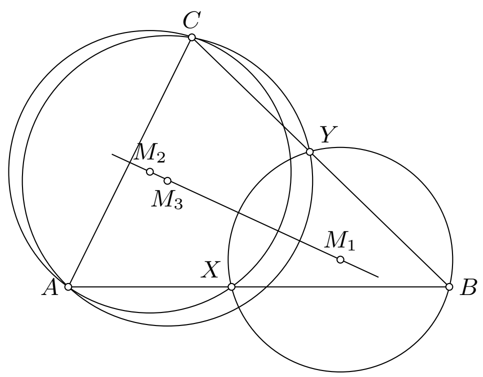
Aufgabe 340914:
Arne zeichnet ein Dreieck ABC und einen Kreis k_1, der so gewählt ist, dass er durch B geht, die Strecke AB in einem von B verschiedenen Punkt X schneidet und dass er die Strecke BC in einem von B verschiedenen Punkt Y schneidet. Dann konstruiert Arne den Umkreis k_2 des Dreiecks ACX und den Umkreis k_3 des Dreiecks ACY.

Nun stellt er fest, dass in seiner Zeichnung die Mittelpunkte M_1, M_2, M_3 der Kreise k_1, k_2, k_3 auf einer gemeinsamen Geraden liegen; das findet er erstaunlich.

Britta meint: Zu jedem Dreieck ABC gibt es für den Kreis k_1 unendlich viele Möglichkeiten, bei denen jeweils die drei genannten Mittelpunkte auf einer gemeinsamen Geraden liegen, und es gibt für k_1 auch unendlich viele Möglichkeiten, bei denen das nicht zutrifft.

Hat Britta recht?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



I. Um zu erreichen, dass M_1, M_2, M_3 auf einer gemeinsamen Geraden liegen, kann man folgendermaßen vorgehen (siehe Abbildung): Man wählt auf der Mittelsenkrechten von AC einen Punkt M_1, der so liegt, dass der um M_1 durch B konstruierte Kreis k, die Strecken AB und BC in Punkten $X \neq B$ bzw. $Y \neq B$ schneidet.

   Beweis, dass bei dieser Wahl M_1, M_2, M_3 auf einer gemeinsamen Geraden liegen:

   Da die Kreise k_2 und k_3 beide durch A und C gehen, also $M_2A = M_2C$ und $M_3A = M_3C$ gilt, liegen M_2 und M_3 auf der Mittelsenkrechten von AC. Auf dieser wurde auch M_1 gewählt.

   Damit sind unendlich viele derartige Wahlmöglichkeiten nachgewiesen.

II. Um zu erreichen, dass M_1, M_2, M_3 nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen, kann man folgendermaßen vorgehen:

   Man wählt M_1 außerhalb der Mittelsenkrechten von AC, dabei aber so, dass der Kreis k_1 um M_1 durch B die Strecken AB und BC in Punkten $X \neq B$ bzw. $Y \neq B$ schneidet. Durch eventuelle (genügend kleine) Änderung kann man auch erreichen, dass die Umkreise der beiden Dreiecke ACX

und ACY nicht miteinander übereinstimmen. Für eine so zu treffende Wahl von k_1 gibt es ebenfalls unendlich viele Möglichkeiten.

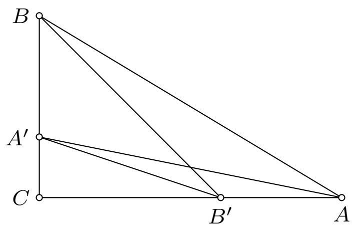
Beweis, dass bei jeder solchen Wahl M_1, M_2, M_3 nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen: Durch die zuletzt genannte Änderungsmöglichkeit wird erreicht, dass M_3, nicht mit M_2 zusammenfallen kann; hiernach (und weil M_2 und M_3 auf der Mittelsenkrechten von AC liegen) könnten M_1, M_2, M_3 nur dann auf einer gemeinsamen Geraden liegen, wenn auch M_1 auf der Mittelsenkrechten von AC läge, was durch die Wahl von M_1 ebenfalls verhindert wurde.

Damit ist gezeigt, dass Britta mit beiden Behauptungen recht hat.

II Runde 2

Aufgabe V10924:
Gegeben ist ein rechtwinkliges Dreieck ABC. Auf der Kathete a wird A', auf b wird B' beliebig gewählt. Durch Verbinden entsteht das Viereck $ABA'B'$. Für dieses Viereck gilt: Die Summe der Quadrate über den beiden Diagonalen ist gleich der Summe der Quadrate zweier Viereckseiten. Welche beiden Vierecksseiten sind das? Beweisen Sie diese Aussage!

Lösung von J. Lehmann und W. Unze:



Nach dem Lehrsatz von Pythagoras gilt:

I im Dreieck $A'B'C'$	$A'C^2 + B'C^2 = A'B'^2$
II im Dreieck $BB'C$	$BC^2 + B'C^2 = BB'^2$
III im Dreieck $AA'C$	$A'C^2 + AC^2 = AA'^2$
IV im Dreieck ABC	$BC^2 + AC^2 = AB^2$

Da die Aufgabe von der Summe der Diagonalenquadrate spricht, wird diese angesetzt (aus II und III):

$$(BB')^2 + (AA')^2 = (B'C)^2 + (BC)^2 + (A'C)^2 + (AC)^2$$

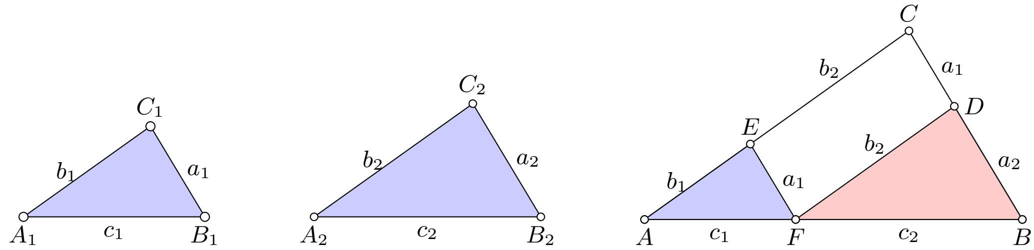
Rechts steht kein Quadrat einer Vierecksseite; die Aufgabe fordert aber die Summe zweier von ihnen. So wird versucht, je 2 der rechten Quadrate zu einem Viereckseitenquadrat zusammenzufassen.
Das gelingt nach I und IV:

$$(BB')^2 + (AA')^2 = (A'B')^2 + (AB)^2$$

Damit ist bewiesen, dass die Summe der Quadrate über den Diagonalen gleich ist der Summe der Quadrate über denjenigen Viereckseiten, die nicht auf den Ausgangskatheten liegen.

Aufgabe 010925:
Zeichnen Sie zwei ähnliche Dreiecke mit den Seiten a_1, b_1, c_1 bzw. a_2, b_2, c_2! Bilden Sie $a_1 + a_2, b_1 + b_2$ und $c_1 + c_2$!
Konstruieren Sie mit diesen Strecken ein Dreieck! Ist es zu den ursprünglichen Dreiecken ähnlich? Beweisen Sie Ihre Behauptung: a) geometrisch, b) arithmetisch!

Lösung von Carsten Balleier:
Das Dreieck aus den Seiten $a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2$ ist zu den beiden ursprünglichen Dreiecken ähnlich.



a) Geometrischer Beweis:
In linken Bild sind beide Dreiecke $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$ zu sehen, die, wenn sie ähnlich zueinander sein sollen, untereinander jeweils gleiche Innenwinkel haben müssen.
Im rechten Bild werden sie als $\triangle AFE$ und $\triangle FBD$ so aneinander gesetzt, dass A, F und B auf einer Geraden zu liegen kommen.
Werden nun die Strecken DF entlang FE und EF entlang FD parallel verschoben, so ist das entstehende Viereck $EFDC$ offenbar ein Parallelogramm, die Punkte A, E, C bzw. B, D, C liegen wegen gleicher Innenwinkel der Dreiecke AFE und FBD jeweils auf einer Geraden und es gilt:

$$\angle ACB = \angle ECD = \angle AEF = \angle FDB$$

Damit hat das Dreieck ABC die geforderten Seitenlängen $a_1+a_2, b_1+b_2, c_1+c_2$ und dieselben Innenwinkel wie die gegebenen Dreiecke.

b) Arithmetischer Beweis:
Nach Voraussetzung sind beide Dreiecke ähnlich, also gilt:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1}$$

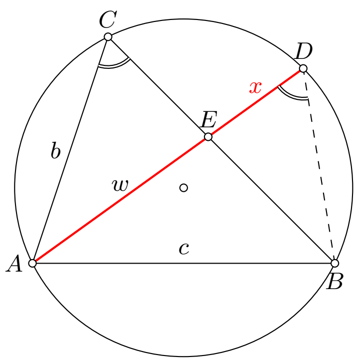
Nach Addition von 1 folgt daraus

$$1 + \frac{a_2}{a_1} = 1 + \frac{b_2}{b_1} = 1 + \frac{c_2}{c_1} \Rightarrow \frac{a_1 + a_2}{a_1} = \frac{b_1 + b_2}{b_1} = \frac{c_1 + c_2}{c_1}$$

Die letzte Gleichung besagt, dass auch das aus den Summen der Seitenlängen gebildete Dreieck diesen ähnlich ist.

Aufgabe 080922:
Von einem Dreieck $\triangle ABC$ seien die Längen zweier Seiten und die Länge der Winkelhalbierenden des von diesen beiden Seiten eingeschlossenen Winkels bekannt. Berechnen Sie die Länge derjenigen Sehne des Umkreises des Dreiecks, die durch Verlängerung der erwähnten Winkelhalbierenden entsteht!

Lösung von Nuramon:



Es seien die Seitenlängen c von AB und b von AC, so wie die Länge w der Winkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle BAC$ bekannt. Es sei E der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden mit der Seite BC und es sei D der Schnittpunkt der Verlängerung von w mit dem Umkreis. Gesucht ist die Länge x der Sehne AD.

Nach Umfangswinkelsatz gilt $\sphericalangle BCA = \sphericalangle BDA$.
Per Definition der Winkelhalbierenden w gilt außerdem $\sphericalangle BAD = \sphericalangle EAC$. Also stimmen die Dreiecke ABD und AEC in zwei Winkeln überein und sind somit ähnlich. Insbesondere gilt also $\frac{x}{c} = \frac{b}{w}$, d. h. $x = \frac{bc}{w}$.

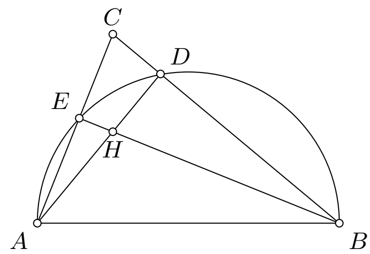
Aufgabe 130922:
In einem rechtwinkligen Dreieck ABC, in dem die Winkel ABC und BAC die Größe 90° bzw. 60° haben, schneide die Halbierende des Winkels BAC die Gegenseite im Punkt D.
Beweisen Sie, dass D die Seite BC im Verhältnis 1 : 2 teilt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Spiegelt man das Dreieck ABC an BC, wobei das Bild von A der Punkt A' sei, so erhält man das gleichseitige Dreieck $AA'C$. Darin ist BC Halbierende der Seite AA'.

Verlängert man AD über D hinaus bis zum Schnittpunkt S mit der Seite $A'C'$, dann ist AS Seitenhalbierende von $A'C'$, da im gleichseitigen Dreieck die Halbierende jedes Winkels mit der Halbierenden seiner Gegenseite zusammenfällt.
Da sich nun in jedem Dreieck die Seitenhalbierenden im Verhältnis 1 : 2 schneiden, ist die Behauptung bewiesen.

Aufgabe 140922:
Es sei $\triangle ABC$ ein spitzwinkliges Dreieck, H sei der Schnittpunkt seiner Höhen und D, E, F deren Fußpunkte, wobei D auf BC, E auf CA und F auf AB liegen mögen.
Man beweise, dass dann $AH \cdot HD = BH \cdot HE = CH \cdot HF$ gilt.

Lösung von Nuramon:



Da $\sphericalangle AEB = 90° = \sphericalangle ADB$ gilt, ist das Viereck $ABDE$ nach Umfangswinkelsatz ein Sehnenviereck. Nach Sehnensatz gilt daher $AH \cdot HD = BH \cdot HE$. Die andere Gleichung folgt analog.

Aufgabe 150924:
Bei der Lösung der Aufgabe, ein Dreieck ABC aus $AB = c$, $BC = a$ und $\angle BAC = \alpha$ zu konstruieren, seien zwei zueinander nicht kongruente Dreiecke ABC_1 und ABC_2 entstanden, die den Bedingungen genügen.
Ermitteln Sie unter diesen Voraussetzungen die Größe des Winkels $\angle AC_1B$, wenn außerdem bekannt ist, dass er viermal so groß ist wie der Winkel $\angle AC_2B$!

Lösung von cyrix:
Es ist das Dreieck BC_1C_2 gleichschenklig mit Basis C_1C_2. Damit ist

$$\angle BC_1C_2 = \angle C_1C_2B = \angle AC_2B$$

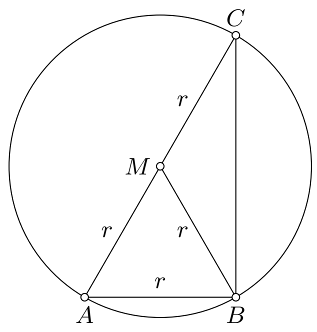
Da die Winkel $\angle AC_1B$ und $\angle BC_1C_2$ Nebenwinkel sind, ergänzen sie sich zu 180°. Zusammen mit $\angle AC_1B = 4 \cdot \angle AC_2B$ folgt $5\angle AC_2B = 180°$, also $\angle AC_2B = 36°$ und damit schließlich $\angle AC_1B = 4 \cdot 36° = 144°$.

Aufgabe 180923:
Von einem rechtwinkligen Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei B und $\angle BAC = 60°$ ist die Länge r des Umkreisradius gegeben.
Berechnen Sie Umfang und Flächeninhalt dieses Dreiecks sowie die Länge der auf seiner Hypotenuse senkrecht stehenden Höhe!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Nach der Umkehrung des Satzes von Thales liegt B auf dem Halbkreis über AC. Sei M der Mittelpunkt

von AC, dann ist der Kreis um M mit dem Radius $MA = MB = MC = r$ der Umkreis des Dreiecks ABC: Damit gilt $AC = 2r$.
Das gleichschenklige Dreieck ABM hat laut Voraussetzung einen Winkel mit der Größe 60°, ist also gleichseitig. Daraus folgt $AB = r$.
Nach dem Satz des Pythagoras erhält man $CB = r\sqrt{3}$. Damit gilt für den Umfang $u = 3r + r\sqrt{3} = r(3 + \sqrt{3})$ und für den Flächeninhalt

$$I = \frac{1}{2}AB \cdot BC = \frac{1}{2}r^2\sqrt{3}$$



Da der Flächeninhalt auch nach der Formel $I = \frac{1}{2}AC \cdot h = r \cdot h$, mit h als Länge der Höhe auf der Hypotenuse AC berechnet werden kann, folgt

$$h = \frac{I}{r} = \frac{1}{2}r\sqrt{3}$$

Aufgabe 260924:
Von einem rechtwinkligen Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei C wird gefordert, dass dieser rechte Winkel durch die Seitenhalbierende der Seite AB, die Winkelhalbierende des Winkels $\angle ACB$ und die auf der Seite AB senkrechte Höhe in vier gleichgroße Winkel zerlegt wird.
Untersuchen Sie, ob es ein Dreieck ABC gibt, das diese Forderungen erfüllt, und ob alle Dreiecke, für die das zutrifft, einander ähnlich sind!
Ermitteln Sie, wenn dies der Fall ist, die Größen der Winkel $\angle BAC$ und $\angle ABC$!

Lösung von cyrix:
Es sei W der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden mit AB, H der Fußpunkt der Höhe von C auf AB und M der Mittelpunkt der Strecke AB.

Da die Winkelhalbierende den rechten Winkel bei C in die beiden Winkel $\angle ACW = \angle WCB = 45°$ halbiert, müssen die Höhe und die Seitenhalbierende diese beiden Teilwinkel halbieren.
O. B. d. A. gelte, dass die Seitenhalbierende den Winkel $\angle ACW$ und die Höhe den Winkel $\angle WCB$ halbiert. (Den umgekehrten Fall erhält man durch Vertauschung der beiden Punkte A und B.)

Also gilt

$$\angle ACM = \angle MCW = \angle WCH = \angle HCB = 22{,}5°$$

Nach Definition ist $\angle BHC = 90°$, sodass aufgrund der Innenwinkelsumme im Dreieck $\triangle BHC$ gilt, dass

$$\angle CBA = \angle CBH = 180° - \angle HCB - \angle BHC = 67{,}5°$$

gilt.
Aufgrund der Innenwinkelsumme im Dreieck $\triangle ABC$ ist dann $\angle BAC = 180° - \angle ACB - \angle CBA = 22{,}5°$. Damit sind (bis auf Vertauschung) die beiden übrigen Innenwinkel des Dreiecks $\triangle ABC$ eindeutig bestimmt, sollte es überhaupt ein solches geben.

Sei also nun umgekehrt ein solches Dreieck $\triangle ABC$ mit $\angle BAC = 22{,}5°$, $\angle CBA = 67{,}5°$ und $\angle ACB = 90°$ gegeben und seien die Punkte H, W und M wie oben definiert. Dann sind also aufgrund der Definition der Winkelhalbierenden $\angle ACW = \angle WCB = \frac{90°}{2} = 45°$.
Nach dem Satz des Thales liegen C, A und B auf dem Kreis um M durch A, sodass also $|AM| = |BM| = |CM|$ gilt. Insbesondere ist das Dreieck $\triangle AMC$ gleichschenklig und es gilt

$$\angle ACM = \angle MAC = \angle BAC = 22{,}5° = \frac{90°}{4} \qquad \text{sowie} \qquad \angle MCW = \angle ACW - \angle ACM = 22{,}5° = \frac{90°}{4}$$

Im Dreieck $\triangle HCB$ gilt wie oben nach der Definition der Höhe $\angle BHC = 90°$, sodass sich aufgrund der Innenwinkelsumme in diesem Dreieck und $\angle CBH = \angle CBA$ wieder

$$\angle HCB = 180° - \angle BHC - \angle CBH = 180° - 90° - 67{,}5° = 22{,}5° = \frac{90°}{4}$$

Da das Dreieck $\triangle ABC$ keinen stumpfen Innenwinkel besitzt, liegt H auf der Strecke AB und es gilt abschließend auch

$$\angle WCH = \angle WCB - \angle HCB = 45° - 22{,}5° = 22{,}5° = \frac{90°}{4}$$

sodass tatsächlich, wie in der Aufgabenstellung gefordert, Seitenhalbierende, Winkelhalbierende und Höhe den rechten Winkel in vier gleich große Teile.
Es gibt also bis auf Vertauschung der Innenwinkel bei A und B (was natürlich die Ähnlichkeit erhält) genau eine Wahl der beiden weiteren Innenwinkel von $\triangle ABC$, nämlich die oben angegebene von 22,5° und 67,5°.

Aufgabe 280923:
In einem Dreieck ABC seien die Seitenlängen und Winkelgrößen wie üblich mit a, b, c und α, β, γ bezeichnet.
Die Winkelhalbierende von $\angle BAC$ schneide die Seite BC in einem Punkt D. Dabei sei $AD = b$.
Ferner sei vorausgesetzt, dass eine der drei Winkelgrößen α, β, γ das arithmetische Mittel der beiden anderen ist.
Ermitteln Sie unter diesen Voraussetzungen alle Möglichkeiten für die Winkelgrößen α, β, γ!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn die Winkelgrößen α, β, γ eines Dreiecks ABC die Voraussetzungen erfüllen, so folgt:
Wegen $AD = b$ ergibt nach dem Basiswinkelsatz $\angle ADC = \angle ACD = \gamma$. Da AD den Winkel $\angle BAC$ halbiert, folgt nach dem Innenwinkelsatz für $\triangle ACD$

$$\frac{\alpha}{2} = 180° - 2\gamma \quad ; \quad \alpha = 360° - 4\gamma \tag{1}$$

Nach dem Innenwinkelsatz für $\triangle ABC$ folgt damit

$$\beta = 180° - (360° - 4\gamma) - \gamma = 3\gamma - 180° \tag{2}$$

Für die Voraussetzung, dass eine der drei Winkelgrößen α, β, γ das arithmetische Mittel der beiden anderen ist, gibt es nur die folgenden Möglichkeiten:
1. Fall: $\alpha = \frac{1}{2}(\beta + \gamma)$
Dies führt nach (1), (2) auf

$$360° - 4\gamma = 2\gamma - 90°; \quad \gamma = 75°; \quad \alpha = 60°; \quad \beta = 45°$$

2. Fall: $\beta = \frac{1}{2}(\alpha + \gamma)$
Dies führt nach (1), (2) auf

$$3\gamma - 180° = 180° - \frac{3}{2}\gamma; \quad \gamma = 80°; \quad \alpha = 40°; \quad \beta = 60°$$

3. Fall: $\gamma = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$

Dies führt nach (1), (2) auf

$$\gamma = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}; \quad \gamma = 60^\circ; \quad \beta = 0^\circ$$

Der 3.Fall scheidet also aus.
II. Die Winkelgrößen des 1. bzw. des 2.Falles, d. h.

$$\alpha = 60^\circ; \quad \beta = 45^\circ; \quad \gamma = 75^\circ \quad (3) \quad \text{bzw.} \quad \alpha = 40^\circ; \quad \beta = 60^\circ; \quad \gamma = 80^\circ \qquad (4)$$

sind Innenwinkelgrößen von Dreiecken ABC (denn sie sind positiv und erfüllen $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$). Sie erfüllen auch die Bedingung, dass $AD = b$ für die Winkelhalbierende AD gilt; denn sie erfüllen die Gleichung $\frac{\alpha}{2} = 180^\circ - 2\gamma$, woraus nach dem Innenwinkelsatz $\angle ADC = \gamma$ und daher nach der Umkehrung des Basiswinkelsatzes $AD = AC$ folgt.
Mit I., II. ist gezeigt, dass in (3), (4) alle gesuchten Möglichkeiten für α, β, γ angegeben sind.

Aufgabe 320924:
Auf einer Geraden g seien A, B, C drei Punkte; B liege zwischen A und C.
Über der Strecke AC sei nach einer Seite von g das gleichseitige Dreieck ACP errichtet, über die Strecken AB und BC nach der anderen Seite von g die gleichseitigen Dreiecke ABQ und BCR.
Beweisen Sie, dass unter diesen Voraussetzungen (bei jeder Wahl der Streckenlängen $AB = a$ und $BC = b$) die Mittelpunkte L, M bzw. N der Dreiecke ACP, ABQ und BCR stets die Ecken eines ebenfalls gleichseitigen Dreiecks sind!

Lösung von cyrix:
Wir legen ein Koordinatensystem in die Ebene, sodass A im Punkt $(-a,0)$, B im Koordinatenursprung und C im Punkt $(b,0)$ liegt.
In jedem gleichseitigen Dreieck mit Kantenlänge s besitzt die Höhe genau die Länge $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot s$ und fällt mit der Mittelsenkrechten der gegenüberliegenden Seite zusammen. Gleichzeitig fällt sie mit der entsprechenden Seitenhalbierenden zusammen, welche vom Schwerpunkt im Verhältnis 2:1 geteilt wird, sodass der Mittelpunkt des gleichseitigen Dreiecks auf der Mittelsenkrechten einer Seite in der Höhe von $\frac{\sqrt{3}}{6} \cdot s$.

Wenden wir dies auf die gegebene Situation an, so haben die Punkte L, M und N demnach die Koordinaten $\left(\frac{b-a}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot (a+b)\right)$, $\left(-\frac{a}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6} \cdot a\right)$ bzw. $\left(\frac{b}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6} \cdot b\right)$.

Es ergeben sich nach dem Satz des Pythagoras die Quadrate der Streckenlängen zwischen je zwei dieser Punkte zu

$$\begin{aligned}
|LM|^2 &= \left(\frac{b-a}{2} - \left(-\frac{a}{2}\right)\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{6} \cdot (a+b) - \left(-\frac{\sqrt{3}}{6} \cdot a\right)\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{6} \cdot (2a+b)\right)^2 \\
&= \frac{b^2}{4} + \frac{3}{36} \cdot (4a^2 + 4ab + b^2) = \frac{9b^2 + 12a^2 + 12ab + 3b^2}{36} = \frac{a^2 + ab + b^2}{3} \\
|LN|^2 &= \left(\frac{b-a}{2} - \left(\frac{b}{2}\right)\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{6} \cdot (a+b) - \left(-\frac{\sqrt{3}}{6} \cdot b\right)\right)^2 = \left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{6} \cdot (a+2b)\right)^2 \\
&= \frac{a^2}{4} + \frac{3}{36} \cdot (a^2 + 4ab + 4b^2) = \frac{9a^2 + 3a^2 + 12ab + 12b^2}{36} = \frac{a^2 + ab + b^2}{3} \quad \text{und} \\
|MN|^2 &= \left(-\frac{a}{2} - \left(\frac{b}{2}\right)\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{6} \cdot a - \left(-\frac{\sqrt{3}}{6} \cdot b\right)\right)^2 = \left(-\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{6} \cdot (b-a)\right)^2 \\
&= \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} + \frac{3}{36} \cdot (a^2 - 2ab + b^2) = \frac{9a^2 + 18ab + 9b^2 + 3a^2 - 6ab + 3b^2}{36} = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}
\end{aligned}$$

sodass $|LM| = |LN| = |MN| = \sqrt{\frac{a^2+ab+b^2}{3}}$ gilt und damit das Dreieck $\triangle LMN$ gleichseitig ist, $\Box$.

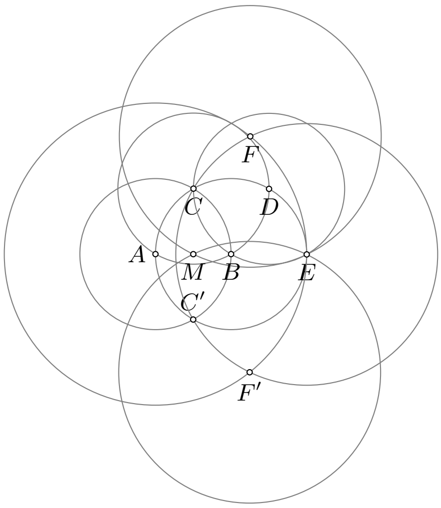
Aufgabe 330924:
Beweisen Sie, dass für jedes nicht gleichschenklige Dreieck ABC die folgende Aussage gilt! Ist X der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten von BC mit der Winkelhalbierenden durch A und ist Y der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten von AC mit der Winkelhalbierenden durch B, so liegen die vier Punkte A, B, X, Y auf einem gemeinsamen Kreis.

Lösung von cyrix:
Nach dem Südpolsatz liegen X und Y auf dem Umkreis des Dreiecks $\triangle ABC$, also insbesondere damit auch auf einem gemeinsamen Kreis mit A und B, $\Box$.

III Runden 3 & 4

Aufgabe V10934:
Man kann den Mittelpunkt M einer Strecke AB auf folgende Weise nur mit dem Zirkel konstruieren: Zeichnen Sie AB! Schlagen Sie um B mit AB einen Kreis und um A mit der gleichen Zirkelspanne ebenfalls einen Kreis, der den anderen Kreis in C bzw. C' schneidet! Um C schlagen Sie wiederum einen Kreis mit gleicher Zirkelspanne, der den Kreis um B in D schneidet! Schlagen Sie nun einen gleich großen Kreis um D!
Sie erhalten Punkt E als Schnittpunkt mit dem Kreis um B. Jetzt schlagen Sie um E mit CE und um A mit AE Kreise, die einander in F und F' schneiden!
Schlagen Sie schließlich noch um F und F' Kreise mit FE, dann erhalten Sie den Punkt M!
Beweisen Sie, dass M der Mittelpunkt von AB ist!

Lösung von Steffen Polster:



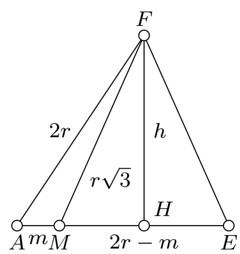
Es sei $AB = r$ der Radius des ersten Kreises. Weiterhin liege A im Koordinatenursprung und B bei $(r, 0)$.
Dann ergeben sich für die Punkte auf Grund der Konstruktion die Koordinaten:

$$A(0,0) \quad ; \quad B(r,0) \quad ; \quad C\left(\frac{r}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}r\right) \quad ; \quad E(2r,0)$$

Damit ergibt sich für den Abstand der Punkte C und E: $CE = \sqrt{3}r$, sowie $AE = 2r$. Für die Punkte F und F' wird mit der Konstruktion für das Dreieck AFE

$$AE = 2r \quad ; \quad AF = 2r \quad ; \quad EF = \sqrt{3}r$$

Der Schnittpunkt M der Kreise um F und F' mit dem Radius EF liegt aus Symmetriegründen auf der Strecke AE (1).



Für den Punkt $M(m; 0)$ ergibt sich dann in den zwei rechtwinkligen Dreiecken AHF und MFH für die Höhe h:

$$h^2 = (2r)^2 - \left(m + \frac{2r-m}{2}\right)^2 \qquad ; \qquad h^2 = (r\sqrt{3})^2 - \left(\frac{2r-m}{2}\right)^2$$

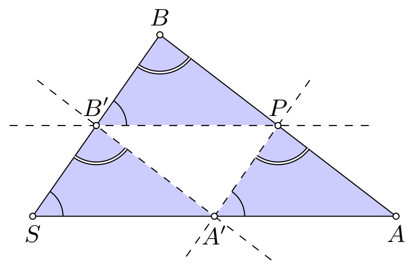
Gleichsetzen und Auflösen nach m ergibt:

$$m^2 + 4mr - 12r^2 = m^2 - 4mr - 8r^2 \qquad \Rightarrow \qquad m = \frac{r}{2}$$

Damit ist mit (1) M Mittelpunkt der Strecke AB. w. z. b. w.

Aufgabe 010934:
Gegeben seien ein Winkel mit dem Scheitelpunkt S sowie ein zwischen den Schenkeln dieses Winkels, aber nicht auf der Winkelhalbierenden liegender Punkt P.
Konstruieren Sie eine durch P verlaufende Gerade, die die Schenkel des Winkels in den Punkten A und B so schneidet, dass $PA = PB$ wird!
Die Konstruktion ist zu begründen!

Lösung von Carsten Balleier:



Konstruktion: Man ziehe die Parallelen zu beiden Schenkeln durch den Punkt P. Dadurch erhält man die Punkte A' und B' als Schnittpunkte mit den Schenkeln.
Verlängert man SA' und SB' über A' bzw. B' hinaus um ihre jeweilige eigene Länge, dann erhält man die Punkte A und B und damit die gesuchte Gerade.

Beweis:
Dass $PA = PB$ tatsächlich erfüllt ist, sieht man beim Vergleichen der Dreiecke $SA'B'$, $A'AP$ und $B'PB$. Es gilt nämlich
$\angle A'SB' = \angle AA'P = \angle PB'B$ (Stufenwinkel an den Parallelen $SA \parallel B'P$),
$\angle A'B'S = \angle APA' = \angle PBB'$ (Stufenwinkel an den Parallelen $SB \parallel A'P$) und
$\overline{SA'} = \overline{A'A}$ bzw. $\overline{SB'} = \overline{B'B}$ (per Konstruktion).
Damit sind die drei genannten Dreiecke kongruent, die Seiten PA und PB also gleich.

Aufgabe 070935:
Von einem Dreieck ABC seien die Seitenlängen a, b und c bekannt.
Berechnen Sie die Länge s_c der Seitenhalbierenden der Seite AB!

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:
Sei S der Mittelpunkt der Strecke AB. Mittels Kosinussatz in den Dreiecken ABC und ASC erhalten wir:

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \cos(\alpha) = \frac{b^2+\left(\frac{c}{2}\right)^2 - s_c^2}{2b\frac{c}{2}}$$

und somit

$$\frac{1}{2}(b^2+c^2-a^2) = b^2 + \frac{1}{4}c^2 - s_c^2 \iff s_c^2 = \frac{1}{4}(2a^2+2b^2-c^2)$$

Aufgabe 080934:
Gegeben ist ein gleichseitiges Dreieck $\triangle ABC$. Man ermittle das Verhältnis der Inhalte von In- und Umkreisfläche dieses Dreiecks zueinander!

Lösung von cyrix:
Im gleichseitigen Dreieck fallen Mittelsenkrechten, Winkelhalbierende und Seitenhalbierende zusammen, insbesondere also auch ihre Mittelpunkte. Der Schwerpunkt teilt die Seitenhalbierenden im Verhältnis 2:1, wobei der längere Abschnitt in Richtung der Eckpunkte liegt.
Demzufolge ist der Umkreisradius genau doppelt so groß wie der Inkreisradius und es ergibt sich ein Verhältnis von 4 zwischen Umkreisfläche und Inkreisfläche.

Aufgabe 090935:
Die Fläche des Dreiecks $\triangle ABC$ werde durch eine Parallele zur Seite AB in zwei inhaltsgleiche Teilflächen zerlegt.
Ermitteln Sie das Verhältnis, in dem die zur Seite AB gehörende Höhe des Dreiecks durch die Parallele geteilt wird!

Lösung von cyrix:
Es seien P und Q die Schnittpunkte der Parallelen mit den Seiten AC bzw. BC. Darüber hinaus seien h_{AB} und h_{PQ} die Längen der Höhen des Punktes C auf AB bzw. die Parallele PQ.
Nach Aufgabenstellung ist der Flächeninhalt A_{PQC} des Dreiecks $\triangle PQC$ genau halb so groß wie der Flächeninhalt A_{ABC} des Dreiecks $\triangle ABC$.
Also ist

$$\frac{1}{2}|PQ| \cdot h_{PQ} = A_{PQC} = \frac{1}{2}A_{ABC} = \frac{1}{4} \cdot |AB| \cdot h_{AB}$$

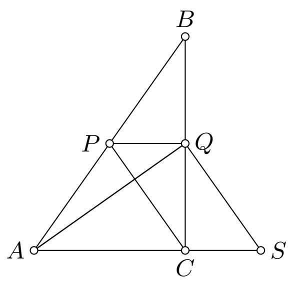
bzw.

$$2 = \frac{|AB|}{|PQ|} \cdot \frac{h_{AB}}{h_{PQ}}$$

Nach den Strahlensätzen ist $\frac{|AB|}{|PQ|} = \frac{h_{AB}}{h_{PQ}}$, also $h_{AB} = \sqrt{2} \cdot h_{PQ}$. Damit wird die Höhe h_{AB} im Verhältnis $1 : (\sqrt{2} - 1)$ durch die Parallele PQ zu AB geteilt.

Aufgabe 110933:
Beweisen Sie den folgenden Satz!
Verhalten sich die Seitenlängen eines Dreiecks $\triangle ABC$ wie $\sqrt{3} : \sqrt{2} : 1$, dann stehen zwei Seitenhalbierende dieses Dreiecks senkrecht aufeinander.

Lösung von cyrix:
Wegen $\sqrt{3}^2 = \sqrt{2}^2 + 1^2$ ist das Dreieck rechtwinklig. Im folgenden betrachten wir ein Dreieck ABC mit $|AB| = \sqrt{3}$, $|AC| = 1$ und $|BC| = \sqrt{2}$.



Wir verschieben die Seitenhalbierende CP parallel zu QS (PQ ist parallel zu AC). Das Dreieck AQS hat die Seitenlängen

$$|AS| = \frac{3}{2}, \quad |AQ|^2 = |AC|^2 + |CQ|^2 = \frac{3}{2}, \quad |QS|^2 = |QC|^2 + |CS|^2 = \frac{3}{4}$$

Diese erfüllen die Gleichung $|AS|^2 = |AQ|^2 + |QS|^2$. Daher sind die beiden Seitenhalbierenden AQ, CP orthogonal.

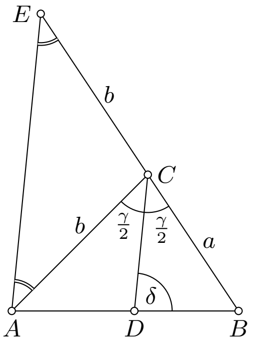
Aufgabe 150932:
Von einem Dreieck ABC seien die Seitenlängen $BC = a$ und die Höhenlänge $AD = h_a$ bekannt. Eine Gerade g verläuft so, dass BC auf g liegt.
Berechnen Sie das Volumen V des Körpers, der durch Rotation der Dreiecksfläche um die Gerade g beschrieben wird!

Lösung von cyrix:
Durch den ebenen Schnitt mit der Ebene, die senkrecht zu g durch A verläuft (und in der dann nach Konstruktion auch der Höhenfußpunkt D liegt), zerlegt den Rotationskörper in zwei gerade Kreiskegel: Beide besitzen den aus der Rotation der Strecke AD gebildeten Kreis als gemeinsame Grundfläche sowie B bzw. C als Spitze. Damit ist

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot h_a^2 \cdot (|BD| + |DC|) = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot h_a^2 \cdot a$$

Aufgabe 150935:
Beweisen Sie den folgenden Satz! In jedem Dreieck teilt die Halbierende jedes Innenwinkels die gegenüberliegende Seite im Verhältnis der beiden anliegenden Seiten.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Es sei ABC ein beliebiges Dreieck. Dabei seien a, b und c in dieser Reihenfolge die Längen der Seiten BC, AC bzw. AB und α, β und γ die Größen der Innenwinkel bei A, B und C.
Ferner schneide die Halbierende des Winkels $\angle ACB$ die Seite AB in D.
Da Jede Winkelhalbierende eines Dreiecks stets innerhalb des Dreiecks verläuft, liegt D zwischen A und B.
Es wird nun (o. B. d. A.) behauptet: $AD : BC = AC = BC$.

Beweis: Man verlängert BC über C hinaus um b bis zum Punkt E.
Wegen $AC = EC$ ist das Dreieck ACE gleichschenklig.
Also gilt $\angle CAE = \angle CEA$ (als Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck) und ferner $\angle CAE + \angle CEA = \gamma$ (nach dem Außenwinkelsatz).
Daraus folgt $\angle CAE = \frac{\gamma}{2}$.

Die Winkel $\angle CAE$ und $\angle ACD$ sind Wechselwinkel an geschnittenen Geraden und außerdem gleich groß.
Folglich sind die Geraden CD und AE parallel.
Daher gilt nach einem der Strahlensätze und wegen $AC = EC = b$

$$\frac{AD}{BD} = \frac{EC}{BC} = \frac{AC}{BC}$$

Aufgabe 160935:
Es sei $\triangle ABC$ ein beliebiges Dreieck. Von allen Geraden, die die Fläche des Dreiecks ABC in zwei Teilflächen zerlegen, seien diejenigen Geraden ausgewählt, die zwei zueinander inhaltsgleiche Teilflächen erzeugen.
Untersuchen Sie, ob es einen Punkt P gibt, durch den alle diese Geraden gehen!

Lösung von cyrix:
Nein, einen solchen Punkt gibt es nicht.
Da jede Seitenhalbierende das Dreieck in zwei flächengleiche Teilflächen zerlegt, sich diese aber allein im Schwerpunkt des Dreiecks schneiden, wäre der einzig in Frage kommende Punkt P eben der Schwerpunkt des Dreiecks.
Dieser teilt die Seitenhalbierenden im Verhältnis 2:1. Die Parallele zur Seite AB durch den Schwerpunkt schneide die Seiten AC und BC in D bzw. E.
Dann ist das Dreieck DEC ähnlich zum Dreieck ABC und es gilt nach dem Strahlensatz, dass der Streckungsfaktor $\frac{2}{3}$ ist.
Damit hat aber das Dreieck DEC nur $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} < \frac{1}{2}$ des Flächeninhalts vom Dreieck ABC. Demzufolge gibt es eine Parallele zur Seite AB, die näher an dieser liegt als die gerade betrachtete Parallele durch den Schwerpunkt, welche das Dreieck in zwei flächengleiche Stücke zerlegt. Diese neue Parallele verläuft dann aber nicht mehr durch den Schwerpunkt, sodass wir mit den drei Seitenhalbierenden und dieser Parallele vier Geraden, die die Bedingung der Aufgabenstellung erfüllen, gefunden haben, die keinen gemeinsamen Punkt besitzen.

Aufgabe 170933:
In einem Dreieck ABC sei $AC = b = 13$ cm und $BC = a = 15$ cm. Das Lot von C auf die Gerade durch A und B sei CD, und es gelte $CD = h_c = 12$ cm.
Ermitteln Sie für alle Dreiecke ABC, die diesen Bedingungen entsprechen, den Flächeninhalt I!

Lösung von cyrix:
Das Dreieck $\triangle ACD$ ist rechtwinklig mit rechtem Winkel bei D. Nach dem Satz von Pythagoras gilt also $|AD|^2 + |CD|^2 = |AC|^2$, also wegen $\sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{169 - 144} = \sqrt{25} = 5$ ist $|AD| = 5$ cm.
Auf analoge Weise im rechtwinkligen Dreieck $\triangle BCD$ erhält man wegen $\sqrt{15^2 - 12^2} = \sqrt{225 - 144} = \sqrt{81} = 9$, dass $|BD| = 9$ cm.

Liegen A und B auf der gleichen Seite von D auf der Geraden durch A und B (handelt es sich also beim Dreieck $\triangle ABC$ um ein stumpfwinkliges, sodass der Höhenfußpunkt D außerhalb liegt), so gilt $c = |AB| = |BD| - |AD| = 4$ cm und somit $I = \frac{1}{2} c \cdot h_c = 24\ cm^2$.
Liegen dagegen A und B auf verschiedenen Seiten von D auf der Geraden durch A und B (also D zwischen ihnen), dann ist $c = |AB| = |AD| + |BD| = 14$ cm und damit $I = 84\ cm^2$.

Aufgabe 180934:
In einem rechtwinkligen Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei C teile die von C auf die Hypotenuse AB gefällte Höhe diese im Verhältnis $1 : 3$.
Berechnen Sie die Größe der bei A bzw. B liegenden Innenwinkel des Dreiecks ABC!

Lösung von cyrix:
Es sei H der Fußpunkt der Höhe von C auf AB und es gelte $|HB| = 3 \cdot |AH|$. Weiterhin seien $\alpha := \angle BAC$ und $\beta := \angle ABC$.
Dann ist $|AB| = 4 \cdot |AH|$ und nach dem Kathetensatz $|BC| = \sqrt{|AH| \cdot |AB|} = 2 \cdot |AH|$.
Nach der Definition des Sinus im rechtwinkligen Dreieck ist $\sin \alpha = \frac{|BC|}{|AB|} = \frac{1}{2}$, also $\alpha = 30°$, da $0 < \alpha < 90°$ gilt.
Aus der Innenwinkelsumme im Dreieck erhält man schließlich $\beta = 180° - 90° - 30° = 60°$.

Aufgabe 180936:
Gegeben seien ein Dreieck ABC sowie zwei Punkte A_1 und B_2 im Innern dieses Dreiecks.
Bei der Verschiebung, die A in A_1 überführt, habe $\triangle ABC$ das Bilddreieck $A_1B_1C_1$.
Bei der Verschiebung, die B in B_2 überführt, habe $\triangle ABC$ das Bilddreieck $A_2B_2C_2$.
Der Durchschnitt der Dreiecksflächen (ABC) und $(A_1B_1C_1)$ sei die Fläche F_1. Der Durchschnitt der Dreiecksflächen (ABC) und $(A_2B_2C_2)$ sei die Fläche F_2.
Man beweise, dass F_1 entweder durch eine Verschiebung oder durch eine zentrische Streckung in F_2 überführt werden kann.
Hinweis: Ist XYZ ein Dreieck, so verstehen wir unter der Dreiecksfläche (XYZ) die Menge aller Punkte auf dem Rande und im Innern des Dreiecks XYZ.

Lösung von cyrix:
Durch Verschiebungen bleiben Richtungen erhalten, sodass Bildgeraden parallel zu ihren Urbildern sind. Insbesondere sind also die Geraden A_1C_1 und AC zueinander parallel und schneiden sich, da A_1 nicht auf AC liegt, nicht.
Es liegt A_1 in der bezüglich AB gleichen Halbebene wie der Punkt C, sodass der von A_1 ausgehende und durch C_1 verlaufende Strahl die Gerade AB nicht schneidet. Also muss die Strecke A_1C_1 wegen $A_1C_1 \parallel AC$ und $|A_1C_1| = |AC|$ die dritte Dreiecksseite BC schneiden.
Es sei S_C dieser Schnittpunkt. Analog erhält man, dass auch A_1B_1 nur genau die Seite BC schneidet und sei S_B dieser Schnittpunkt.
Dann ist $F_1 = (A_1S_BS_C)$. Aufgrund der Parallelitäten $A_1SB = A_1B_1 \parallel AB$, $A_1SC = A_1C_1 \parallel AC$ und $S_BSC = BC$ ist dabei $\triangle A_1S_BS_C \sim \triangle ABC$.

Analog erhält man $F_2 = (T_AB_2T_C)$ und $\triangle T_AB_2T_C \sim \triangle ABC$, wobei T_A und T_C die Schnittpunkte von A_2B_2 bzw. C_2B_2 mit AC seien. Auch hier gilt, dass entsprechende Seiten parallel sind.
Insbesondere sind die beiden F_1 und F_2 definierenden Dreiecke $\triangle A_1S_BS_C$ und $\triangle T_AB_2T_C$ zueinander ähnlich und entsprechende Seiten beider Dreiecke liegen jeweils parallel zueinander.

Wir betrachten nun die Geraden T_AA_1 und B_2S_B. Sind diese Geraden nicht parallel, so sei Z ihr Schnittpunkt und es gilt nach dem Strahlensatz mit Scheitelpunkt Z und geschnittenen Parallelen $A_1S_B \parallel T_AB_2$ die Beziehung $\frac{|ZT_A|}{|ZA_1|} = \frac{|ZB_2|}{ZS_B} =: f$. Die zentrische Streckung mit Zentrum Z und Faktor f bildet also A_1 auf T_A und S_B auf B_2 ab.

Da zentrische Streckungen Richtungen erhalten, muss durch diese Streckung auch S_C als Schnitt von Parallelen zu AB und BC durch S_B auch auf den Schnittpunkt der Parallelen zu diesen beiden Geraden durch B_2, also T_C abgebildet werden. Also bildet diese zentrische Streckung das Dreieck $\triangle A_1S_BS_C$ auf das Dreieck $\triangle T_AB_2T_C$ und damit auch F_1 auf F_2 ab.

Schneiden sich die Geraden T_AA_1 und B_2S_B dagegen nicht, sind aber verschieden, so bildet das Viereck $A_1S_BB_2T_A$ ein Parallelogramm. Insbesondere sind dann die beiden Strecken $|A_1S_B|$ und $|T_AB_2|$ kongruent und parallel, sodass auch die Figuren F_1 und F_2 kongruent sind und man F_2 aus F_1 durch die Verschiebung, die A_1 auf T_A abbildet, erhält.
Liegen abschließend T_A, A_1, B_2 und S_B auf einer Geraden g, dann unterscheiden wir die beiden Fälle, ob die Gerade T_CS_C diese schneidet, oder parallel dazu ist. (Identisch kann sie nicht sein, da sonst A_1, S_B und S_C auf einer Geraden lägen, was aufgrund der Definition der beiden letzteren als Schnittpunkte von verschiedenen von A_1 ausgehenden Strahlen mit der gleichen Gerade BC zum Widerspruch führen würde.)

Schneidet T_CS_C die Gerade g, so sei Z ihr Schnittpunkt und wegen $A_1S_C \parallel T_AT_C$ folgt aufgrund des Strahlensatzes $\frac{|ZT_A|}{|ZA_1|} = \frac{|ZT_C|}{|ZS_C|} =: f$, sodass durch eine zentrische Streckung mit dem Zentrum Z um den Faktor f die Punkte A_1 und S_C auf T_A bzw. T_C abgebildet werden. Analog oben schlussfolgert man nun, dass durch diese zentrische Streckung auch S_B auf B_2 und damit F_1 auf F_2 abgebildet wird.

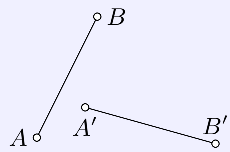
Sind dagegen g und T_CS_C parallel und verschieden, so bilden $T_AA_1S_CT_C$ und $B_2S_BS_CT_C$ Parallelogramme, sodass $|T_AA_1| = |T_CS_C| = |B_2S_B|$ gilt und die zugehörigen Geraden alle parallel zueinander sind, sodass F_2 aus F_1 durch die Verschiebung hervorgeht, die A_1 auf T_A abbildet.

Damit wurde in jedem Fall gezeigt, dass man F_2 aus F_1 durch eine Verschiebung oder eine zentrische Streckung erhalten kann. Beides zugleich ist aber nicht möglich, da eine Verschiebung die Kongruenz der Figuren voraussetzt, während jede zentrische Streckung um einen Faktor verschieden von ± 1 die Kongruenz zerstört und nur Ähnlichkeit erhält.

Eine Streckung um den Faktor -1 würde aber die Orientierung ändern, während der Umlaufsinn der entsprechenden Punkte $A_1S_BS_C$ bzw. $T_AB_2T_C$ identisch ist. Und eine Streckung um den Faktor 1 entspricht der Identitätsabbildung. Jedoch kann nicht $F_1 = F_2$ gelten, da B_2 im Innern des Dreiecks $\triangle ABC$ liegt, während der entsprechende Punkt S_B von F_2 sich auf dem Rand von $\triangle ABC$ befindet, also von B_2 verschieden ist.
Demnach gibt es für jeden Fall entweder eine Verschiebung oder eine zentrische Streckung, die F_2 auf F_1 abbildet, $\square$.

Aufgabe 190935:

Auf der Abbildung sind zwei zueinander kongruente Strecken AB und $A'B'$ gegeben. Gesucht ist ein Punkt Z der Zeichenebene mit folgender Eigenschaft:
Es gibt eine Drehung um Z, die A in A' und B in B' überführt.



Beschreiben und begründen Sie eine Konstruktion eines solchen Punktes Z (falls ein solcher existiert)! Untersuchen Sie, ob genau ein solcher Punkt Z existiert!

Lösung von cyrix:
Fallen die beiden Punkte A und A' zusammen, so gilt offenbar $Z = A$, da bei einer Drehung (um einen

von Vielfachen von 360° verschiedenen Drehwinkel) das Zentrum der einzige Fixpunkt ist. (Ansonsten bleiben alle Punkte fix, was genau dann der Fall wäre, wenn auch $B = B'$ gilt. Dann kann man jeden Punkt der Ebene als Z und den Drehwinkel 0° wählen.) Analog gilt für $B = B'$ und $A \neq A'$, dass man ausschließlich $Z = B$ als Drehzentrum wählen kann. In beiden Fällen (die nicht beide Punkte auf sich selbst abbilden) ist dann nicht nur das Drehzentrum Z, sondern auch der Drehwinkel zwischen 0° und 360° eindeutig bestimmt.

Sei ab nun $A \neq A'$ und $B \neq B'$, sodass die jeweiligen Geraden AA' und BB' auch existieren.
Wenn es einen solchen Punkt Z gibt, dann muss $|AZ| = |A'Z|$ und $|BZ| = |B'Z|$ gelten, sodass Z auf den Mittelsenkrechten von AA' und BB' liegen muss. Sind diese Mittelsenkrechten nicht parallel (was genau dann der Fall ist, wenn die Geraden AA' und BB' nicht parallel sind), dann ist dieser Punkt Z also eindeutig bestimmt.

In dem Fall sind die Dreiecke $\triangle ABZ$ und $\triangle A'B'Z$ nach dem Kongruenzsatz sss zueinander kongruent. Es ist also $\angle AZB = \angle A'ZB'$, also (ggf. mit vorzeichenbehafteten Winkeln zu lesen) $\angle AZA' = \angle AZB + \angle BZA' = \angle A'ZB' + \angle BZA' = \angle BZB'$, sodass bei einer Drehung um Z mit Drehwinkel $\angle AZA'$ nicht nur A auf A', sondern auch B auf B' abgebildet wird. Auch hier sind wieder Drehzentrum und Drehwinkel eindeutig bestimmt.

Sind dagegen die Mittelsenkrechten von AA' und BB' parallel, so kann es einen solchen Punkt Z nur dann geben, wenn diese beiden Mittelsenkrechten die gleiche Gerade bilden. Andernfalls gibt es keinen Punkt Z, der $|AZ| = |A'Z|$ und $|BZ| = |B'Z|$ erfüllt, was für die Eigenschaft, Drehzentrum zu sein, notwendig ist.

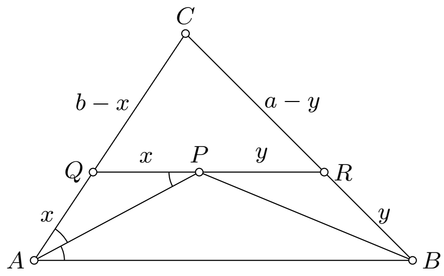
Seien also nun diese Mittelsenkrechten von AA' und BB' identisch und mit m bezeichnet. Dann muss jedes Drehzentrum Z auf m liegen. Sei Z ein solches Drehzentrum. Dann gilt $\angle AZA' = \angle BZB'$, sodass die gleichschenkligen Dreiecke $\triangle AA'Z$ und $\triangle BB'Z$ in ihren Nicht-Basiswinkeln übereinstimmen, also zueinander ähnlich sind. Demzufolge stimmen auch die zugehörigen Winkel $\angle ZAA'$ und $\angle ZBB'$ überein.

Da die beiden Schenkel AA' und BB' zueinander parallel sind, müssen es die entsprechend zweiten Schenkel der Winkel $\angle ZAA' = \angle ZBB'$ auch sein, was $ZA \parallel ZB$ nach sich zieht, sodass Z auch auf der Geraden AB liegen muss. Ist aber AB parallel zu und verschieden von m, gibt es keinen solchen Schnittpunkt und damit auch kein Drehzentrum.

Andernfalls ist Z nun als Schnitt zweier Geraden m und AB eindeutig bestimmt, da A nicht auf m, der Mittelsenkrechten von AA' liegen kann, da wir $A \neq A'$ vorausgesetzt haben. Da die Spiegelung an M A in A' und B in B' überführt, ist der Schnittpunkt Z von m und AB auch der von m und $A'B'$, sodass auch Z auf der Geraden $A'B'$ liegt und damit $\angle AZA' = BZB'$ gilt, sodass tatsächlich eine Drehung um Z mit diesem Winkel existiert, welche A auf A' und B auf B' abbildet.

Aufgabe 220936:
Von einem Dreieck ABC seien die Seitenlängen $AB = c$, $AC = b$ und $BC = a$ gegeben. Die Halbierenden der Winkel $\angle CAB$ und $\angle ABC$ mögen einander in P schneiden. Durch P sei die Parallele zu AB gelegt. Sie schneide AC in Q und BC in R.
Ermitteln Sie die Länge QR in Abhängigkeit von den drei gegebenen Seitenlängen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Es sei $x = PQ$, $y = PR$. Dann gilt nach Voraussetzung $\angle PAQ = \angle BAP = \angle QPA$ (Wechselwinkel an den Parallelen AB, PQ), also ist das Dreieck APQ gleichschenklig mit $AQ = PQ = x$. Entsprechend gilt $BR = PR = y$.

Wegen $QR \parallel AB$ folgt aus dem Strahlensatz

$$CA : CB = QA : RB, \qquad b : a = x : y, \qquad by = ax \qquad (1)$$

$$CA : CQ = AB : AR, \qquad b : (b-x) = c : (x+y), \qquad bx + by = bc - cx \qquad (2)$$

Setzt man (1) in (2) ein, so folgt $bx + ax = bc - cx$ und

$$x = \frac{bc}{a+b+c}$$

hieraus und aus (1) folgt $y = \frac{ax}{b} = \frac{ac}{a+b+c}$. Damit ergibt sich

$$QR = x + y = \frac{(a+b)c}{a+b+c}$$

Aufgabe 230935:
In einem Dreieck ABC schneide eine Parallele zu AB, über deren Lage sonst nichts vorausgesetzt werden soll, die Seite AC in einem Punkt A_1 zwischen A und C, und sie schneide die Seite BC in B_1. Ferner sei P auf AB ein Punkt zwischen A und B, über dessen Lage sonst ebenfalls nichts vorausgesetzt werden soll.
Der Flächeninhalt des Dreiecks ABC sei F_0, der Flächeninhalt des Dreiecks A_1B_1C sei F_1.
Ermitteln Sie den Flächeninhalt F des Vierecks A_1PB_1C in Abhängigkeit von F_0 und F_1!

Lösung von cyrix:
Die Dreiecke $\triangle A_1B_1C$ und $\triangle ABC$ sind aufgrund der Parallelität von A_1B_1 und AB zueinander ähnlich, da ihre entsprechenden Innenwinkel bei A_1 und A bzw. B_1 und B jeweils Stufenwinkel, also insbesondere gleich groß, sind. Damit gibt es eine reelle Zahl $k > 0$, sodass $\triangle A_1B_1C$ aus $\triangle ABC$ durch Streckung um den Faktor k mit Zentrum C hervorgeht.

Sei h die Länge der Höhe von C auf AB und h_1 die von C auf A_1B_1. Insbesondere gilt dann $h_1 = k \cdot h$ und $|A_1B_1| = k \cdot |AB|$, also $F_1 = k^2 \cdot F_0$, d. h. $k = \sqrt{\frac{F_1}{F_0}}$.

Die Diagonale A_1B_1 zerlegt das Viereck A_1PB_1C in die zwei Dreiecke $\triangle A_1B_1C$ und $\triangle A_1B_1P$, sodass sich sein Flächeninhalt als Summe der Flächeninhalte dieser beiden Teildreiecke ergibt.

Es sei h_2 die Länge der Höhe von P auf A_1B_1 und F der Fußpunkt von C auf AB sowie F_1 der Fußpunkt der Höhe von C auf A_1B_1. Da $A_1B_1 \parallel AB$ gilt, liegt F_1 auf CF und es gilt

$$h = |CF| = |CF_1| + |F_1F| = h_1 + |F_1F|$$

Wiederum wegen $A_1B_1 \parallel AB$ ist $h_2 = |F_1F|$, da F_1 auch der Fußpunkt der Höhe von F auf A_1B_1 ist. Insbesondere ist also $h_2 = h - h_1 = (1-k) \cdot h$.

Für das Dreieck $\triangle A_1B_1P$ ergibt sich also ein Flächeninhalt von

$$F_P := \frac{1}{2}|A_1B_1| \cdot h_2 = \frac{1}{2} \cdot k \cdot |AB| \cdot (1-k) \cdot h = F_0 \cdot (k - k^2)$$

und damit für den Flächeninhalt F des Vierecks A_1PB_1C

$$F = F_P + F_1 = F_0 \cdot (k - k^2 + k^2) = F_0 \cdot k = F_0 \cdot \sqrt{\frac{F_1}{F_0}} = \sqrt{F_1 \cdot F_0}.$$

Aufgabe 230936:
Drei Schüler X, Y, Z diskutieren über die Möglichkeiten, ein gleichseitiges Dreieck D in drei flächengleiche Dreiecke D_1, D_2, D_3 zu zerlegen.
X behauptet: Es gibt genau drei verschiedene derartige Zerlegungen.
Y behauptet: Es gibt genau vier verschiedene derartige Zerlegungen.
Z behauptet: Es gibt mehr als vier verschiedene derartige Zerlegungen.
Welcher der drei Schüler hat recht?
Hinweis: Zwei Zerlegungen von D (einmal in D_1, D_2, D_3, ein zweites Mal in D_1', D_2', D_3') werden dabei genau dann als verschieden bezeichnet, wenn es keine Reihenfolge der Bezeichnungen D_1', D_2', D_3' gibt, für die $D_1 \cong D_1', D_2 \cong D_2', D_3 \cong D_3'$ gilt.

Lösung von cyrix:
Y hat recht: Es gibt genau vier verschiedene derartige Zerlegungen, wie im Folgenden bewiesen wird.

Es sei D das gleichseitige Dreieck $\triangle ABC$ mit Kantenlänge $|AB| = |BC| = |CA| = a$. Dann muss jeder dieser drei Punkte A, B, C auch Eckpunkt mindestens eines der drei Teildreiecke D_1, D_2, D_3 sein.

Für jeden weiteren Eckpunkt P eines dieser drei Teildreiecke gilt, dass er auch Eckpunkt mindestens eines weiteren Teildreiecks sein muss. Also kann es höchstens $\frac{3\cdot 3-3}{2} = 3$ verschiedene weitere Eckpunkte der Teildreiecke geben.

Nehmen wir an, es gäbe drei und seien dies P_1, P_2 und P_3. Sie müssten dann Eckpunkte von je genau zwei der Teildreiecke sein, sodass A, B und C Eckpunkt von nur jeweils genau einem der Teildreiecke sind. Es sei A o. B. d. A. Eckpunkt von D_1. Da A nicht Eckpunkt eines weiteren Teildreiecks ist, muss der gesamte Winkel $\angle BAC$ durch D_1 abgedeckt werden. Also müssen die beiden anderen Eckpunkte von D_1 auf den Kanten AB und AC liegen.

Wäre auch B Eckpunkt von D_1, so müsste dessen dritter Eckpunkt analog auch auf BC liegen, also auf dem Schnittpunkt von AC und BC, sodass $D_1 = \triangle ABC = D$ folgen würde, was ein Widerspruch ist. Also liegt auf jedem Teildreieck genau einer der Eckpunkt von D und zwei der Punkte P_1, P_2, P_3, welche auf den vom entsprechenden Eckpunkt von D ausgehenden Kanten von D liegen müssen. Damit verbliebe aber in der Zerlegung das Dreieck $\triangle P_1P_2P_3$, welches nicht durch die Teildreiecke D_1, D_2, D_3 abgedeckt wird, sodass wieder ein Widerspruch entsteht.

Also können wir schlussfolgern, dass es höchstens zwei zusätzliche Eckpunkte gibt und damit auch mindestens eine der Seiten des Dreiecks D nicht durch einen zusätzlichen Eckpunkt der Teildreiecke zerlegt wird. Wir führen im Folgenden eine Fallunterscheidung danach durch, wie viele der Kanten von D durch zusätzliche Eckpunkte der Teildreiecke zerlegt werden:

Fall 1: Keine der Kanten AB, BC, AC wird durch einen zusätzlichen Eckpunkt zerlegt. Dann seien o. B. d. A. A, B Eckpunkte von D_1; B, C von D_2 und C, A von D_3. Da es nur höchstens zwei zusätzliche Eckpunkte geben kann, müssen die dritten Eckpunkte von mindestens zwei der drei Teildreiecke zusammenfallen. O. B. d. A. haben D_1 und D_2 den gemeinsamen dritten Eckpunkt P. Dann jedoch muss auch der dritte Eckpunkt von D_3 gleich P sein, da dieser auch Eckpunkt eines weiteren Teildreiecks sein muss.

Damit die drei Teildreiecke alle flächengleich sind, müssen sie, da sie D zerlegen, jeweils ein Drittel von dessen Flächeninhalt besitzen. Da D_1 mit AB auch eine Seitenkante der Länge a besitzt, muss P auf einer Parallelen zu AB im Abstand $\frac{1}{3}h$ liegen, wobei h die Länge der Höhe in D ist. Nach dem Strahlensatz und der Eigenschaft, dass der Schwerpunkt S eines Dreiecks jede Seitenhalbierende im Verhältnis $2:1$ teilt, liegt auch S auf dieser Parallele. Also muss P auf der Parallelen zu AB durch S liegen. Analog muss er wegen D_2 auch auf der Parallelen zu BC durch S liegen, sodass $P = S$ folgt. Abschließend ist dann aber auch die Höhe von $P = S$ auf AC in D_3 genau ein Drittel mal so lang wie die Höhe in D, sodass auch D_3 flächengleich zu D_1 und D_2 ist und diese drei Teildreiecke D vollständig zerlegen.

Wir erhalten also in diesem Fall die eindeutige Zerlegung, die durch die Verbindung des Schwerpunkts S von D mit seinen drei Eckpunkten entsteht. Die Teildreiecke D_1, D_2, D_3 sind paarweise kongruent.

Fall 2: Genau eine der Kanten von D, o. B. d. A. sei dies BC, wird durch mindestens einen zusätzlichen Eckpunkt zerlegt. O. B. d. A. sei damit die Kante AB vollständig in D_1 und AC vollständig in D_3 enthalten und seien deren dritte Eckpunkte mit P_1 bzw. P_3 bezeichnet. Mindestens einer von diesen beiden Punkte, o. B. d. A. P_1, muss auf BC liegen. Wir unterscheiden zwei Unterfälle, je nach dem, wo P_3 liegt.

Fall 2.1: Auch P_3 liegt auf BC. Da die Höhen von A auf die Gerade $BC = BP_1 = P_2C$ identisch sind mit der Höhe von A auf BC in D, besitzen D_1 und D_3 genau dann jeweils ein Drittel des Flächeninhalts von D, wenn $|BP_1| = |P_3C| = \frac{1}{3} \cdot |BC|$ gilt. Dann ist jedoch auch $|P_1P_3| = \frac{1}{3} \cdot |BC|$, sodass auch das entstehende Dreieck $D_2 = \triangle AP_1P_3$ flächengleich zu D_1 und D_3 ist, sowie diese drei Teildreiecke D vollständig zerlegen.

Wir erhalten also in diesem Fall die eindeutige Zerlegung, die durch Drittelung einer Seitenkante von D und Verbindung der dort entstehenden zwei Zwischenpunkte mit dem gegenüberliegenden Eckpunkt von D entsteht. Alle drei Teildreiecke besitzen eine Seite mit Länge $\frac{1}{3}a$, zwei dieser drei Teildreiecke (D_1 und D_3 in der obigen Bezeichnung) sind zueinander kongruent und besitzen als eine zweite Kantenlänge a, während das dritte gleichschenklig ist.

Fall 2.2: Der dritte Eckpunkt P_3 von D_3 liegt nicht auf BC und damit echt im Innern des Dreiecks D. Wie im Fall 2.1 folgt, dass $|BP_1| = \frac{1}{3}|BC|$ gelten muss. Das entstehende Dreieck $\triangle AP_1C$ muss nun in zwei flächengleiche Teildreiecke D_2 und D_3 zerlegt werden. Dies ist nur möglich, indem es durch eine Seitenhalbierende zerlegt wird. Damit muss P_3 Mittelpunkt einer der Seiten von $\triangle AP_1C$ sein. Da aber P_3 nach Fallannahme weder auf AC noch BC liegt, muss P_3 der Mittelpunkt von AP_1 sein.

Wir erhalten also in diesem Fall die eindeutige Zerlegung, die durch Einzeichnen eines Punkts P_1, der eine Seitenkante CB von D im Verhältnis 2:1 teilt, der Verbindung dieses Punkts mit dem gegenüberliegenden Eckpunkt A von D und dem Einzeichnen der Verbindung des Mittelpunkts P_3 von AP_1 mit dem dritten Eckpunkt C von D entsteht. Genau zwei der drei Teildreiecke besitzen eine Seite der Länge a, wobei genau eine davon eine zweite Kante der Länge $\frac{1}{3}a$ besitzt.

Fall 3: Genau zwei der drei Kanten von D werden durch zusätzliche Eckpunkte der Teildreiecke geteilt, seien dies o. B. d. A. P_1 auf BC und P_3 auf AC, sodass AB ungeteilt verbleibt und vollständig o. B. d. A. in D_1 enthalten ist. Dessen dritter Eckpunkt muss dann P_1 oder P_3 sein, wobei wir o. B. d. A. annehmen können, dass P_1 der dritte Eckpunkt von D_1 ist. Dann folgt analog Fall 2.1, dass $|BP_1| = \frac{1}{3} \cdot |BC|$ gelten muss und analog Fall 2.2, dass P_3 der Mittelpunkt einer Seite des Dreiecks $\triangle AP_1C$, hier also von AC ist. Man überprüft leicht, dass alle entstehenden Teildreiecke den gleichen Flächeninhalt besitzen.

Wir erhalten hier also die eindeutige Zerlegung, die entsteht, wenn analog zu Fall 2.1 erst ein Punkt P_1, der eine Seite CB von D im Verhältnis 2:1 teilt, sowie die Verbindung zum gegenüberliegenden Eckpunkt A von D eingezeichnet wird, während dann das entstehende Dreieck $\triangle AP_1C$ entlang der Seitenhalbierenden von AC halbiert wird. Es entstehen drei paarweise inkongruente Teildreiecke, wobei genau eines eine Seite mit Kantenlänge a und genau zwei je eine Seite mit Kantenlänge $\frac{1}{2}a$ besitzen.

Die Fallunterscheidung ist vollständig, sodass keine weiteren Zerlegungen möglich sind. Auch liefern keine zwei dieser (Unter-)Fälle gleiche Zerlegungen, da niemals alle drei Paare von Teildreiecken zweier verschiedener solcher Zerlegungen untereinander kongruent sind. Also gibt es genau diese vier verschiedenen Zerlegungen, $\square$.

Aufgabe 250935:
In einem beliebigen spitzwinkligen Dreieck ABC sei A' der Fußpunkt der durch A gehenden Höhe, B' der Fußpunkt der durch B gehenden Höhe und S der Schnittpunkt dieser beiden Höhen.
Beweisen Sie, dass unter diesen Voraussetzungen stets $AB : A'B' = AS : SB'$ gilt!

Lösung von cyrix:
Nach dem Satz von Thales, angewendet auf die rechtwinkligen Dreiecke $\triangle ABA'$ und $\triangle ABB'$, liegen die Punkte A, B, B' und A' (in dieser Reihenfolge) auf dem Kreis mit Durchmesser AB.

In diesem Kreis sind die beiden Peripheriewinkel $\angle BB'A'$ und $\angle BAA'$ über der gleichen Sehne BA' nach dem Peripheriewinkelsatz gleich. Weiterhin sind die beiden Winkel $\angle ASB$ und $\angle A'SB'$ Scheitelwinkel, also auch gleich, sodass die beiden Dreiecke $\triangle ABS$ und $\triangle A'B'S$ in zwei Innenwinkeln übereinstimmen, also ähnlich zueinander sind. Demnach stehen die entsprechenden Seitenlängen im gleichen Verhältnis und es gilt $|AB| : |A'B'| = |AS| : |SB'|$, $\square$.

Aufgabe 260932:
In einer Ebene e sei ein Dreieck ABC fest vorgegeben. Die Mittelpunkte der Dreiecksseiten BC, CA, AB seien U, V bzw. W in dieser Reihenfolge.
Weiter sei P ein beliebiger Punkt der Ebene e. Spiegelt man P sowohl an U, V als auch an W, so erhält man die Bildpunkte P_U, P_V bzw. P_W.
(Unter dem Bildpunkt P_S von P bei der Spiegelung an einem Punkt S versteht man denjenigen Punkt, für den gilt, dass S der Mittelpunkt der Strecke PP_S ist. Falls $P = S$ ist, ist $P_S = P$.)
Beweisen Sie, dass der Flächeninhalt des Dreiecks $P_U P_V P_W$ unabhängig von der Lage des Punktes P ist, und vergleichen Sie diesen Flächeninhalt mit dem des Dreiecks ABC!

Lösung von cyrix:
Es ist für jeden Punkt P der Ebene e das Dreieck $\triangle P_U P_V P_W$ kongruent zum Dreieck $\triangle ABC$. Insbesondere haben also die beiden Dreiecke auch den gleichen Flächeninhalt.

Zum Beweis der Kongruenz sei zuerst $P \notin \{U,V,W\}$. Dann sind nach der Umkehrung des Strahlensatzes wegen $\frac{|PP_U|}{|PU|} = 2 = \frac{|PP_V|}{|PV|}$ die Geraden $P_U P_V$ und UV zueinander parallel und nach dem Strahlensatz gilt $\frac{|P_U P_V|}{|UV|} = \frac{|PP_U|}{|PU|} = 2$, also $|P_U P_V| = 2 \cdot |UV|$.
Weiterhin gilt analog nach der Umkehrung des Strahlensatzes (mit Scheitelpunkt bei C), dass $UV \parallel AB$ und mit dem Strahlensatz an gleicher Stelle dann, dass $|AB| = 2 \cdot |UV|$ ist. Insgesamt ist also $|P_U P_V| = |AB|$. Analog folgt auch $|P_U P_W| = |AC|$ und $|P_V P_W| = |BC|$, sodass die Dreiecke $\triangle P_U P_V P_W$ und $\triangle ABC$ nach Kongruenzsatz sss zueinander kongruent sind.

Andernfalls gilt o. B. d. A. $P = W = P_W$. Dann ist aber direkt nach Definition $|P_U P_W| = 2 \cdot |UP| = 2 \cdot |UW| = |AC|$ und analog $|P_V P_W| = |BC|$.
Wie im ersten Fall können wir schließen, dass $|P_U P_V| = |AC|$ gilt, sodass sich die gewünschte Dreiecks-Kongruenz auf die gleiche Art und Weise ergibt, $\square$.

Aufgabe 310933:
a) Silke behauptet: Für jede natürliche Zahl $k \geq 2$ und jedes Dreieck ABC ist es möglich, die Fläche dieses Dreiecks durch geradlinige Schnitte in k^2 einander kongruente, zu ABC ähnliche Dreiecke zu zerlegen.
b) Hanka behauptet: Für jede natürliche Zahl $k \geq 2$ und jedes konvexe n-Eck $A_1A_2A_3...A_n$ $(n > 3)$ ist es möglich, die Fläche dieses n-Ecks durch geradlinige Schnitte in eine Anzahl t von Teilflächen zu zerlegen, aus denen sich k^2 einander kongruente, zu $A_1A_2A_3...A_n$ ähnliche n-Ecke zusammensetzen lassen, wobei zum Zusammensetzen jede der t Teilflächen nur einmal verwendet wird und keine übrigbleibt.

Untersuchen Sie, ob a) Silkes, b) Hankas Behauptung wahr ist!
Hinweis:
Eine Fläche F heißt genau dann konvex, wenn jede Strecke, deren Eckpunkte in F liegen, ganz in F liegt.

Lösung von cyrix:
Beide Behauptungen sind wahr, wie im folgenden bewiesen wird:

a) Unterteilt man die Strecken AB, BC und CA jeweils in k kongruente Abschnitte und zeichnet die Parallelen zu den Dreiecksseiten durch die entstandenen Unterteilungspunkte auf den Seiten, so wird das Dreieck $\triangle ABC$ in eine Vielzahl kleinerer Dreiecke zerlegt.
Wir nennen ein solches Dreieck „Elementardreieck", wenn es nicht weiter durch eine solche Parallele unterteilt wird. Die Seitenkanten eines jeden solchen Elementardreiecks sind parallel zu einer Seite des Dreiecks $\triangle ABC$ und haben aufgrund dieser Parallelitäten die gleichen Längen wie die entsprechenden Randabschnitte, also die $\frac{1}{k}$-fache Länge der entsprechenden Seite des Dreiecks $\triangle ABC$.
Insbesondere haben also alle Elementardreiecke die gleichen Seitenlängen, sind damit kongruent untereinander, und, da diese im gleichen Verhältnis stehen wie beim Dreieck $\triangle ABC$ sind sie auch alle ähnlich zu diesem.
Da der Ähnlichkeitsfaktor $\frac{1}{k}$ beträgt, ist der Flächeninhalt eines jeden solchen Elementardreiecks genau das $\frac{1}{k^2}$-fache des Flächeninhalts des Dreiecks $\triangle ABC$. Da dieses vollständig in Elementardreiecke zerlegt wird, gibt es davon also genau k^2 Stück, $\square$.

b) Da das n-Eck konvex ist, kann man es durch Diagonalen vollständig in Dreiecke zerlegen. Für jedes dieser Dreiecke führe man die Konstruktion aus Teilaufgabe a) durch.
Gegebenenfalls werden durch die Schnitte, die eines der Teildreiecke zerlegen, auch andere Teildreiecke und dortige Elementardreiecke zerlegt. Diese „fremden Schnitte" werden aber direkt durch Zusammenfassen der entsprechenden Teile zu den jeweiligen Elementardreiecken direkt wieder rückgängig gemacht.
Damit ist jedes der durch die Diagonalen des n-Ecks erzeugten „großen Teildreiecke" des n-Ecks in genau k^2 Elementardreiecke, die mit einem Ähnlichkeitsfaktor von $\frac{1}{k}$ ähnlich zum jeweiligen „großen Teildreieck" sind, zerlegt. Greift man sich nun aus jedem dieser „großen Teildreiecke" eines der dortigen Elementardreiecke heraus, so lässt sich daraus ein n-Eck, welches ähnlich zum Ausgangs-n-Eck mit dem Ähnlichkeitsfaktor $\frac{1}{k}$ ist, zusammenlegen.
Dies funktioniert aber unabhängig für jedes der k^2 Elementardreiecke jeder Sorte, sodass man also k^2 untereinander kongruente und zum Ausgangs-n-Eck mit dem Ähnlichkeitsfaktor $\frac{1}{k}$ ähnliche n-Ecke aus diesen zusammenlegen kann, ohne eines der Elementardreiecke doppelt zu verwenden oder übrig zu behalten, $\square$.

Aufgabe 310934:
Es sei ABC ein gleichseitiges Dreieck. Auf der Verlängerung von BA über A hinaus liege ein Punkt D, auf der Verlängerung CB über B hinaus ein Punkt E, und auf der Verlängerung von AC über C hinaus liege ein Punkt F.
Ferner werde vorausgesetzt, dass das Dreieck DEF gleichseitig sei.
Man beweise, dass aus diesen Voraussetzungen stets $AD = BE = CF$ folgt.

Lösung von cyrix:
In den gleichseitigen Dreiecken $\triangle ABC$ und $\triangle DEF$ sind alle Innenwinkel genau 60° groß. Also ist, da C, B und E sowie D, A und E in diesen Reihenfolgen jeweils auf einer Geraden liegen $\angle DBE = \angle ABE = 180° - \angle CBA = 180° - 60° = 120°$. Analog folgt auch $\angle ECF = 120°$ und $\angle FAD = 120°$, sodass diese drei Winkel alle gleich groß sind.

Weiterhin ist $\angle ADF = \angle FDE - \angle EDA = 60° - \angle EDB = 180° - 120° - \angle EDB = 180° - \angle DBE - \angle EDB = \angle BED$, wobei letzteres aus der Innenwinkelsumme im Dreieck $\triangle BED$ folgt. Analog folgt auch $\angle ADF = \angle BED = \angle CFE$.

Damit stimmen die Dreiecke $\triangle BED$, $\triangle CFE$ und $\triangle ADF$ jeweils in zwei Winkeln und einer Seitenlänge ($|DE| = |EF| = |FD|$, da das Dreieck $\triangle DEF$ n.V. gleichseitig ist) überein, sodass sie paarweise kongruent sind und die Längen entsprechender Seiten gleich groß sind, also insbesondere $|AD| = |BE| = |CF|$ gilt, $\square$.

Aufgabe 330946:
Ist P ein Punkt im Innern eines Dreiecks ABC, so kann folgende Konstruktion durchgeführt werden:
Die Parallele durch P zu CB schneidet AB in S_1, die Parallele durch S_1 zu AC schneidet BC in S_2, die Parallele durch S_2 zu BA schneidet CA in S_3. In dieser Weise kann man für $k = 1, 2, 3, ...$ fortsetzen:
Die Parallele durch S_{3k} zu CB schneidet AB in S_{3k+1}, die Parallele durch S_{3k+1} zu AC schneidet BC in S_{3k+2}, die Parallele durch S_{3k+2} zu BA schneidet CA in S_{3k+3}.
Beweisen Sie, dass für jedes Dreieck ABC und jeden Punkt P im Innern dieses Dreiecks eine der so konstruierten Parallelen wieder durch P gehen muss!

Lösung von cyrix:
Es sei S der Schnittpunkt der Parallelen durch P zu CB mit AC. Dann liegen S, P und S_1 in dieser Reihenfolge auf einer Parallelen zu CB. Wir zeigen im Folgenden, dass $S_6 = S$ gilt und damit die Gerade S_6S_7, welche nach Definition parallel ist zu CB und durch S_6 verläuft, identisch ist mit der Gerade SS_1, auf der auch P liegt.

Nach Konstruktion sind die Geraden $SC = AC$ und S_1S_2 sowie SS_1 und $CS_2 = CB$ jeweils zueinander parallel, sodass das Viereck SS_1S_2C ein Parallelogramm ist. Damit gilt insbesondere $|SC| = |S_1S_2|$.

Weiterhin sind analog auch die Vierecke $S_3S_4BS_2$ und $S_3S_4S_5C$ Parallelogramme (da jeweils gegenüberliegende Seiten nach Konstruktion parallel zueinander sind), sodass $|CS_5| = |S_3S_4| = |S_2B|$ folgt.

Es ist $S_6C = AC \parallel S_1S_2$ und es liegen C, S_5, S_2 und B auf einer Geraden, also ist $\angle S_6CS_5 = \angle S_1S_2B$, da es sich um Stufenwinkel handelt. Analog folgert man auch $\angle CS_5S_6 = \angle S_2BS_1$, sodass die beiden Dreiecke $\triangle S_6CS_5$ und $\triangle S_1S_2B$ nicht nur aufgrund der Übereinstimmung zweier Winkelgrößen zueinander ähnlich, sondern wegen dem zuvor gezeigten $|CS_5| = |S_2B|$ sogar kongruent sind. Insbesondere folgt damit $|S_6C| = |S_1S_2| = |SC|$. Also liegen S und S_6 beide auf der Strecke AC in gleicher Entfernung zu C, sodass sie identisch sind. Es folgt, wie oben beschrieben, dass P auf der Parallelen zu BC durch S_6 liegt, $\square$.

Aufgabe 340931:
Jürgen wählt auf einem Zeichenblatt drei Punkte A, B, C so aus, dass es keine Gerade gibt, auf der alle drei Punkte liegen, und dass die Strecke AB eine andere Länge hat als die Strecke BC.
Dann versucht er, einen Punkt X zu konstruieren, der weder auf der durch A und B gelegten Geraden g noch auf der durch B und C gelegten Geraden h liegt und der außerdem die beiden folgenden Bedingungen (1), (2) erfüllt:
(1) Der Punkt X hat von g den gleichen Abstand wie von h.
(2) Die Strecken AB und BC erscheinen von X aus unter gleichgroßen Winkeln; d. h. der Winkel $\angle AXB$ ist ebenso groß wie der Winkel $\angle BXC$.
Christa behauptet: Es gibt keinen solchen Punkt X; gleichgültig welche Wahl von A, B, C (mit den eingangs genannten Lagebedingungen) Jürgen getroffen hat.
Hat Christa recht?

Lösung von cyrix:
Ja, sie hat recht, wie im folgenden indirekt bewiesen wird:

Angenommen, es gäbe ein solches Dreieck $\triangle ABC$ und einen solchen Punkt X. Dann liegt nach (1) X auf der Winkelhalbierenden des Winkels $\angle CAB$, sodass die beiden Winkel $\angle CBX$ und $\angle XBA$ gleich groß sind.

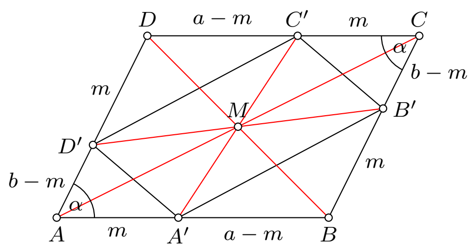
Da nach Annahme auch die Winkel $\angle AXB$ und $\angle BXC$ gleich groß sind, stimmen die beiden Dreiecke $\triangle AXB$ und $\triangle BXC$ in zwei Innenwinkeln überein und zusätzlich auch in der Strecke XB, die sie beide gemeinsam haben, zwischen diesen beiden Innenwinkeln, sodass diese Dreiecke kongruent sind.
Dann folgt aber direkt, da die Strecken gleichgroßen Winkeln gegenüberliegen, auch $|AB| = |CD|$, was den Widerspruch zur entsprechenden Bedingung in der Lage der drei Punkte A, B, C liefert. Also kann es kein solches nicht gleichschenklige Dreieck $\triangle ABC$ mit entsprechendem Punkt X geben, $\square$.

II.II Vier- & Vielecke

I Runde 1

Aufgabe V10914:
Zeichnen Sei ein Parallelogramm $ABCD$!
Tragen Sie von A aus auf AB die Strecke m ab, die kleiner als die kleinere Seite des Parallelogramms ist! Sie erhalten den Punkt A'! Tragen Sie von B aus auf BC, von C aus auf CD und von D aus auf DA dieselbe Strecke m ab! Sie erhalten die Punkte B', C' und D'!
Was für eine Figur stellt $A'B'C'D'$ dar? Beweisen Sie Ihre Feststellung!

Lösung von Steffen Polster:



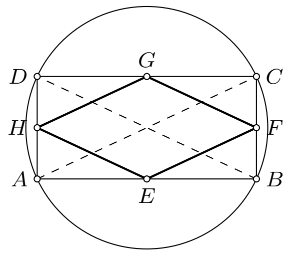
$A'B'C'D'$ ist ein Parallelogramm. Auf Grund der Punktsymmetrie des Parallelogramm $ABCD$ bezüglich des Mittelpunktes M und die Konstruktion der Punkte A',B',C' und D' sind die Dreiecke $AA'D'$ und $B'CC'$ sowie $A'BB'$ und $C'DD'$ paarweise zueinander kongruent und spiegelsymmetrisch in Bezug auf M.
Damit sind $A'D'$ und $B'C'$ sowie $A'B'$ und $C'D'$ jeweils gleichlang und zueinander parallel. $A'B'C'D'$ ist somit ein Parallelogramm.

Aufgabe 010916:
Schlagen Sie einen Kreis mit dem Radius $r = 3cm$! Konstruieren Sie in diesen Kreis ein beliebiges Parallelogramm so, dass dessen Eckpunkte auf der Kreisperipherie liegen! Halbieren Sie die Seiten des Parallelogramms und verbinden Sie die Halbierungspunkte fortlaufend!

Wie groß ist der Umfang der so entstehenden Figur? Die Behauptung ist zu beweisen!

Lösung von Carsten Balleier:
Ein Parallelogramm kann man sich als zwei kongruente Dreiecke vorstellen, die an einer Seite zusammen gefügt sind. Es geht bei Drehung um 180° in sich selbst über. Dies muss auch dann so sein, wenn seine Eckpunkte auf einer Kreisperipherie liegen.

Damit die Diagonalen des Parallelogramms aber in sich selbst übergehen, müssen sie Durchmesser des Kreises sein. Daher kann ein zulässiges Parallelogramm nur ein Rechteck $ABCD$ sein. Die dem Rechteck einbeschriebene Figur ist dann ein Rhombus $EFGH$.



Aufgabe 040915:
In den Eckpunkten eines Sehnenvierecks werden an den Umkreis die Tangenten gezeichnet.

a) Beweisen Sie, dass das so entstandene Tangentenviereck ein Rhombus ist, wenn das Sehnenviereck ein Rechteck ist!

b) Gilt die Umkehrung dieser Aussage ebenfalls?

Lösung von Kristin Steinberg:

a) Die Diagonalen des Rechtecks sind Durchmesser des Kreises und müssen sich somit im Mittelpunkt M des Kreises schneiden (Umkehrung des Satzes von Thales).

Die Dreiecke AMD und MBC sind gleichschenklig und kongruent (SSS: AD=BC, weil gegenüberliegende Seiten im Rechteck gleich groß sind und $AM = MD = BM = MC$, weil sich die Diagonalen (gleich lang) im Rechteck halbieren). Daraus folgt, dass die Winkel MAD, ADM, CBM und MCB gleich groß sind (Größe sei mit α bezeichnet).

Daraus wiederum folgt, da die Tangente jeweils senkrecht zu der Strecke zu M ist, dass die Winkel DAE, EDA, GBC und BCG $90°$ - α betragen und somit gleich groß sind. Also sind die Dreiecke EAD und BGC gleichschenklig und kongruent (WSW). Daraus folgt, dass $DE = EA = BG = GC$ ist.

Wenn man analog die Dreiecke ABM und DMC bzw. AFB und DCH betrachtet, folgt, dass $HD = AF = FB = CH$ ist.

Beide Gleichungen addiert ergibt: $DE + HD = EA + AF = BG + FB = GC + CH$ und somit: $HE = EF = FG = GH$.

Damit sind also die Seiten des Tangentenvierecks gleich lang - es ist also ein Rhombus.

b) Da in einem Rhombus, die gegenüberliegenden Winkel gleich groß sind, gilt, dass die Winkel AED und CGB gleich groß sind.

Betrachtet man nun die Vierecke $AMDE$ und $BGCM$, so fällt auf, dass sie kongruent zueinander sind (Drei Winkel gemeinsam: zwei rechte Winkel und $AED = CGB$).

Somit sind also jeweils die vierten Winkel der Vierecke gleich groß, was bedeutet, dass sie gleichzeitig Scheitelwinkel sind und somit die Strecken AC und BD keine Dreiecke und gleichzeitig die Durchmesser des Kreises sind.

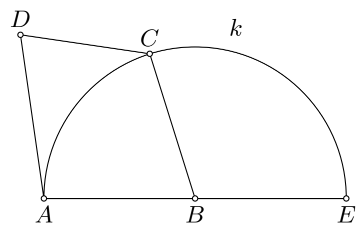
Durch den Satz des Thales folgt, dass die Winkel des Vierecks $ABCD$ alle rechtwinklig sind und es somit ein Rechteck ist.

Aufgabe 060913:
In einem Viereck $ABCD$ wird die Seite AB über B hinaus bis zum Punkt E so verlängert, dass $\overline{BE} = \overline{AB}$ ist.

Von jeder der folgenden Bedingungen ist zu untersuchen, ob sie dafür notwendig ist, dass der Winkel $\angle ACE$ ein rechter Winkel ist.

Das Viereck $ABCD$ hat
a) vier kongruente Winkel,
b) vier kongruente Seiten,
c) zwei Paare kongruenter Seiten,
d) zwei kongruente Seiten mit gemeinsamen Eckpunkt,
e) zwei kongruente Winkel.

Lösung von Manuela Kugel:



Aufgrund der Lage von A, B und E kann man feststellen, dass der Winkel $\angle ACE$ immer genau dann ein rechter Winkel ist, wenn sich C auf dem Kreis um B mit dem Radius $\overline{AB}$ befindet. Die Lage von C ist daher definiert, aber nicht eindeutig. Gleichzeitig kann man sagen, dass die Lage von D unabhängig zu den anderen Viereckecken ist.

a) vier kongruente Winkel $\Rightarrow$ falsch, da D beliebig
b) vier kongruente Seiten $\Rightarrow$ falsch, da D beliebig
c) zwei Paare kongruenter Seiten $\Rightarrow$ falsch, da D beliebig
d) zwei kongruente Seiten mit gemeinsamen Eckpunkt $\Rightarrow$ korrekt: gemeinsamer Punkt B und kongruente Seiten $\overline{AB} = \overline{BC}$ mit A und C auf dem Kreisbogen und B als Kreismittelpunkt
e) zwei kongruente Winkel $\Rightarrow$ falsch, da D beliebig.

Aufgabe 070913:
Für jede ganze Zahl $n \geq 3$ ist die größtmögliche Anzahl von rechten Winkeln zu ermitteln, die ein konvexes n-Eck haben kann.

Lösung von Annika Heckel:
In einem konvexen Polygon sind alle Innenwinkel kleiner als 180°. Ein konvexes n-Eck hat bekanntlich die Innenwinkelsumme $180° \cdot (n-2)$. Es habe k rechte Winkel.

(1) Sei $k = n$. Dann wird $90° \cdot n = 180° \cdot (n-2)$, also $n = 2n - 4$ und $n = 4$.

Dies ist also nur dann möglich, wenn $n = 4$ ist. $k = n = 4$ ist bei einem Rechteck erfüllt.

(2) Sei $k < n \Rightarrow n - k > 0$
Die restlichen $n-k$ Innenwinkel (die ja existieren, weil $n-k > 0$) sind alle kleiner als 180° (konvexes Polygon!). Folglich gilt:

$$\begin{aligned} 180° \cdot (n-2) &< 90° \cdot k + 180° \cdot (n-k) \\ -360° &< -90° \cdot k \\ 4 &> k \end{aligned}$$

Folglich kann in diesem Fall die natürliche Zahl k, die echt kleiner als 4 sein soll, höchstens 3 sein. Bei jedem $n > 4$ ist dies auch möglich. Zum Beispiel kann ein Polygon drei rechte Winkel und $n-3$ Winkel der Größe $(180° \cdot (n-2) - 270°)/(n-3)$ haben, die Winkel haben dann die Summe $180°(n-2)$.

$$\frac{180° \cdot (n-2) - 270°}{n-3} = 180° - \frac{90°}{n-3}$$

Das heißt: jeder dieser Winkel wäre kleiner als 180° und größer als 90°. Wäre ein weiterer Winkel 90°, so würde mindestens ein Winkel größer als 180° sein oder alle nicht-90°-Winkel wären gleich 180°:

$$\frac{180° \cdot (n-2) - 360°}{n-4} = 180°$$

Für $n = 3$ kann es maximal einen rechten Winkel geben, da sonst das Dreieck entartet.

Antwort:
Für $n = 3$ gibt es maximal einen rechten Winkel.
Für $n = 4$ gibt es maximal 4 rechte Winkel.
Für $n > 4$ gibt es maximal 3 rechte Winkel.

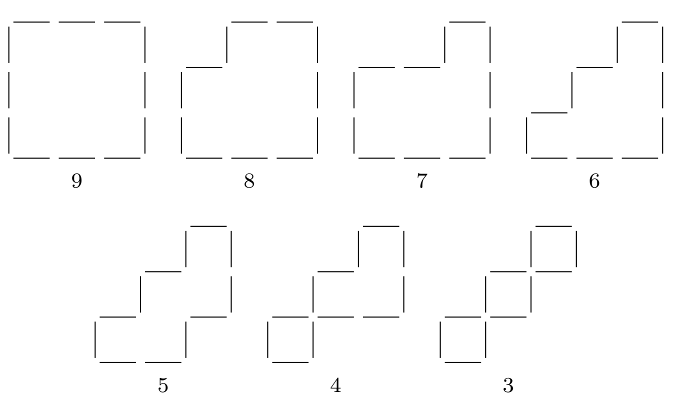
Aufgabe 090912:
Aus je 12 geradlinigen Hölzern von je 1 dm Länge sollen die Ränder ebener Figuren gelegt werden, deren Flächeninhalte der Reihe nach

$$I_1 = 9 \text{ dm}^2, \quad I_2 = 8 \text{ dm}^2, \quad I_3 = 7 \text{ dm}^2, \quad I_4 = 6 \text{ dm}^2, \quad I_5 = 5 \text{ dm}^2, \quad I_6 = 4 \text{ dm}^2, \quad I_7 = 3 \text{ dm}^2$$

groß sind. Dabei sollen in jedem Fall alle 12 Hölzer zur Herstellung der Berandung der betreffenden Figur gebraucht und keines geteilt oder geknickt werden; keine zwei Hölzer sollen (ganz oder teilweise) übereinanderliegen oder sich überkreuzen.

Geben Sie für jeden Fall eine Lösung an!

Lösung von Steffen Polster:



Für eine mögliche Lösungen, von denen es unendlich viele gibt, beginnt man mit einem $3 \cdot 3$ Quadrat mit der Fläche 9 welches sich mit $4 \cdot 3$ Hölzern beranden lässt. Danach klappt man schrittweise jeweils 2 Hölzchen nach innen.
Ab der Fläche 6 kann man auch ein rechtwinkliges Dreieck mit den Seitenlängen 3, 4 und 5 nutzen.

Aufgabe 110914:
In einer Ebene ε liege ein Rechteck $ABCD$. S sei ein Punkt der Senkrechten in A auf ε.

Ermitteln Sie die Größe des Winkels $\angle CDS$!

Lösung von Manuela Kugel:
Die Punkte A, D, S liegen in einer Ebene ε', die auf der Ebene ε durch A, B, C und D senkrecht steht; denn nach Voraussetzung ist $AD \perp AB$ und, falls $S \neq A$ ist, auch $SA \perp AB$.
Im Fall $S = A$ sei ε' die zu ε senkrechte Ebene durch A und D. Daher ist in jedem Fall $CD \perp \varepsilon'$ und somit $|\angle CDS| = 90°$.

Aufgabe 160911:
Frank und Jens spielen ein Spiel, das sie „Autorennen“ nennen. Sie haben dazu auf quadratisch-kariertem Papier eine Spielfläche durch einen Streckenzug $ABCDEFGA$ eingeschlossen, wobei A, B, C, D, E, F, G Gitterpunkte bezeichnen. Jeder Spieler soll von der „Startlinie“ AG zur „Ziellinie“ DE oder über sie hinaus gelangen, indem er nach folgenden Regeln einen Streckenzug $P_0P_1P_2 \dots P_n$ bildet, der den Weg des Fahrzeuges darstellen soll, wobei die P_0, P_1, ..., P_n Gitterpunkte sind. Keine der Teilstrecken P_0P_1, P_1P_2,... , $P_{n-1}P_n$ des Streckenzuges darf dabei die Randlinie des Spielfeldes (mit Ausnahme der Start- und Ziellinie) berühren oder schneiden. Unter einem „Zug“ wird der Übergang von einem Punkt P_k zu dem nächsten Punkt P_{k+1} verstanden. Die Spielregeln lauten:

(1) P_0 liegt auf AB

(2) Der erste „Zug“ besteht aus der Strecke P_0P_1, wobei $\overline{P_0P_1} = 1$ (Seitenlänge des Grundquadrates) ist.

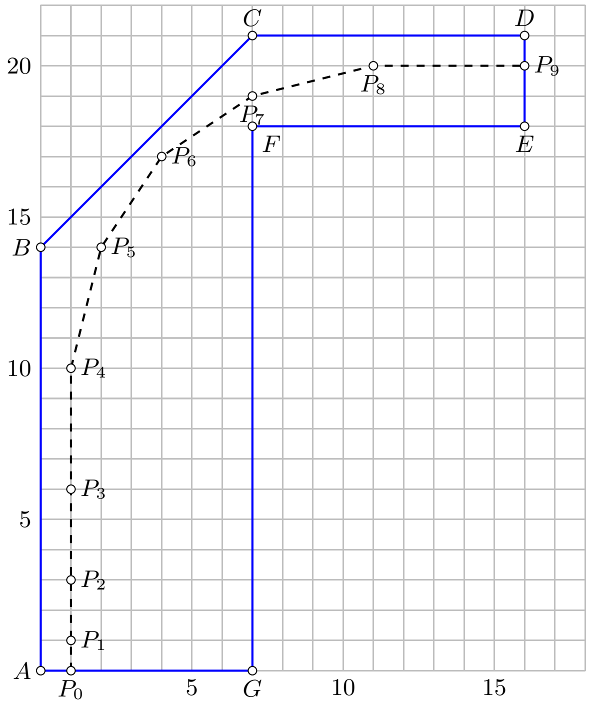
(3) Wenn bereits ein „Zug“ $P_{k-1}P_k$ ausgeführt wurde, so findet man den nächsten „Zug“ P_kP_{k+1} folgendermaßen:
   a) Man verlängert die Strecke $P_{k-1}P_k$ über P_k hinaus um sich selbst bis zu einem Punkt, der Q_k genannt sei.
   b) Man wählt entweder den Punkt Q_k oder einen seiner acht benachbarten Gitterpunkte als Punkt P_{k+1}.

   Hinweis: P_{k+1} muss innerhalb des Spielfeldes liegen, aber nicht notwendig Q_k.

Geben Sie für ein Spielfeld mit $A(0;0)$, $B(0;14)$, $C(7;21)$, $D(16;21)$, $E(16;18)$, $F(7;18)$, $G(7;0)$ einen „Fahrweg“, d. h. einen Streckenzug $P_0P_1P_2 \dots P_9$ an, bei dem die Ziellinie von der Teilstrecke P_8P_9 erreicht oder geschnitten wird!

Als Lösung genügt eine zeichnerische Darstellung oder die Angabe der Koordinaten der Punkte P_i $(i = 0, 1, 2, \dots, 9)$ ohne Begründung.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es gibt verschiedene Lösungen. Die Abbildung zeigt ein Beispiel.

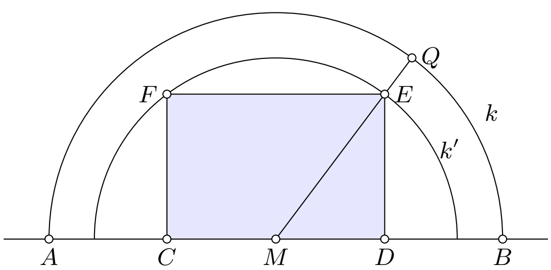


Aufgabe 170912:
Ein Fahrzeug, dessen Querschnitt vereinfacht als ein Rechteck angenommen werden soll, soll durch einen Tunnel mit halbkreisförmigem Querschnitt fahren, dessen Höhe 3 m beträgt.

Ermitteln Sie die größtmögliche Höhe des Fahrzeuges, wenn es eine Breite von 3 m hat und wenn bei der Durchfahrt überall ein Spielraum von mindestens einem halben Meter zwischen der Tunnelwand und dem Fahrzeug vorhanden sein soll, d. h. wenn jeder Punkt des Fahrzeuges einen Abstand von mindestens einem halben Meter zur Tunnelwand haben soll!

Hinweis: Unter dem Abstand eines Punktes P im Innern des Tunnels zur Tunnelwand versteht man die Länge der Strecke PQ, wobei Q folgendermaßen definiert ist: Man lege durch P einen Querschnitt des Tunnels, wobei dieser als ein Halbkreis k mit den Endpunkten A und B erscheint. Ist M der Mittelpunkt von AB, so sei Q der Schnittpunkt von k mit der Geraden durch M und P.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Es sei k ein halbkreisförmiger Querschnitt des Tunnels, das Halbkreisbogen k habe die Endpunkte A und B. Ferner sei M der Mittelpunkt von AB.

Ein Punkt P im Innern des Querschnitts erfüllt genau dann die Forderung, mindestens einen halben Meter Abstand zur Tunnelwand zu besitzen, wenn $MP \leq 2{,}5$ m gilt, d. h. genau dann, wenn P der Fläche des Halbkreises k' angehört, der den Mittelpunkt M, den Radius 2,5 m hat und in der Fläche des Halbkreises k liegt.

Angenommen nun, alle Punkte eines rechteckigen Fahrzeugquerschnitts $CDEF$ erfüllen diese Forderung, wobei C und D auf der Strecke AB liegen.

Dann gilt $ME \leq 2{,}5$ m und $MF \leq 2{,}5$ m. Ferner gilt $MC \geq 1{,}5$ m oder $MD \geq 1{,}5$ m; denn wäre

$MC < 1{,}5$, und $MD < 1{,}5$ m, so ergäbe sich $CD < 3$ m. Es sei o. B. d. A. $MD \geq 1{,}5$ m. Dann folgt

$$DE = \sqrt{ME^2 - MD^2} \leq \sqrt{2{,}5^2 - 1{,}4^2}m = 2m$$

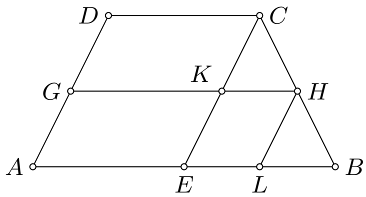
Daher kann ein Fahrzeug nur dann die Bedingungen der Aufgabe erfüllen, wenn es nicht höher als 2 m ist.

Umgekehrt lassen sich die Bedingungen der Aufgabe mit einem Fahrzeug (der Breite 3 m und) der Höhe 2 m erfüllen. Wählt man nämlich im Tunnelquerschnitt ein Rechteck $CDEF$ mit C und D auf AB und mit $CD = 3$ m, $DE = DF = 2$ m so, dass $MC = MD = 1{,}5$ m ist, so liegen E und F wegen $ME = MF = \sqrt{1{,}5^2 + 2^2}m = 2{,}5m$ auf k', also gehört das gesamt Rechteck $CDEF$ der Fläche des Halbkreises k' an.
Die gesuchte größtmögliche Fahrzeughöhe beträgt somit 2 m.

Aufgabe 230914:
Ein Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel DC$ und $\overline{AB} = a > \overline{CD} = c$ soll durch eine zu AB parallele Strecke GH in zwei flächeninhaltsgleiche Teile zerlegt werden.

Beweisen Sie, dass es genau eine solche Strecke GH gibt und dass ihre Länge $\overline{GH} = s$ eindeutig durch a und c bestimmt ist! Ermitteln Sie s in Abhängigkeit von a und c!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



(I) Wenn eine zu AB parallele Strecke GH (G auf AD, H auf BC) das Trapez in zwei flächeninhaltsgleiche Teile zerlegt, so folgt:

Es sei E der Punkt auf AB mit $AE = DC$. Die Strecken EC und GH schneiden sich in einem Punkt K.

Im Viereck $AEKG$ gilt somit außer $AE \parallel GH$ auch $AG \parallel EK$, folglich ist es ebenfalls ein Parallelogramm. Hiernach gilt $EB = a - c$ und $KH = s - c$.

Die Höhenlänge und der Flächeninhalt des Trapezes $ABCD$ seien h bzw. F, die Höhenlänge und der Flächeninhalt des Trapezes $GHCD$ seien h' bzw. F'. Dann sind h und h' auch Höhenlängen der Dreiecke EBC bzw. KHC; diesen sind wegen $EB \parallel KH$ zueinander ähnlich. Also gilt:

$$\frac{h}{h'} = \frac{EB}{KH} = \frac{a-c}{s-c}$$

$$\frac{F}{F'} = \frac{(a+c)h}{(a+c)h'} = \frac{a^2 - c^2}{s^2 - c^2} \tag{1}$$

Wegen $F = 2F'$ gilt somit

$$a^2 - c^2 = 2(s^2 - c^2) \tag{2}$$

$$a^2 = \frac{1}{2}(a^2 + c^2)$$

wegen $s > 0$ also

$$s = \sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + c^2)} \tag{3}$$

Wegen $c < \sqrt{\frac{1}{2}(a^2+c^2)} < a$ liegt der Punkt L auf AB mit $AL = \sqrt{\frac{1}{2}(a^2+c^2)}$ zwischen E und B. Für ihn ist $ALHG$ wegen $AL \parallel GH$ und $AL = GH$ ein Parallelogramm. Daher kann nur die durch $LH \parallel AD$ (und H auf BC) sowie $GH \parallel AB$ (und G auf AD) bestimmte Strecke GH die geforderten Eigenschaft haben.

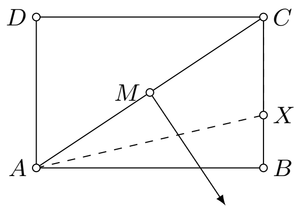
(II) Für diese Strecke ist $ALHG$ ein Parallelogramm, also gilt für ihre Länge (3) und folglich (2). Ferner kann man für sie wie in (I) wieder (1) herleiten.

Daraus folgt $F = 2F'$; also hat die Strecke GH die geforderte Eigenschaft.

Mit (I) und (II) ist bewiesen, dass es genau eine Strecke GH mit der geforderten Eigenschaft gibt. Ihre Länge ist in (3) angegeben; wie verlangt, eindeutig durch a und c bestimmt.

Aufgabe 280913:
Beweisen Sie, dass in jedem Rechteck $ABCD$ mit $\overline{AB} > \overline{BC}$ die Mittelsenkrechte auf der Diagonalen AC die Seite AB zwischen A und B schneidet!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



I. Es sei M der Mittelpunkt von AC. Derjenige Strahl auf der Mittelsenkrechten von AC, der von M ausgeht und in das Dreieck ABC hineinführt (siehe Abbildung), muss dieses Dreieck wieder in einem Punkt verlassen, der auf einer der Strecken AB, BC liegt (und von A sowie C verschieden ist; denn die Mittelsenkrechte schneidet AC nur in M).

Für jeden (von C verschiedenen) Punkt X der Strecke BC kann man aber beweisen, dass X nicht auf der Mittelsenkrechten liegt. Ist dieser Beweis geführt (siehe II.), so folgt, wie verlangt, dass die Mittelsenkrechte die Strecke zwischen A und B schneiden muss.

II. Durchführung des angekündigten Beweises:

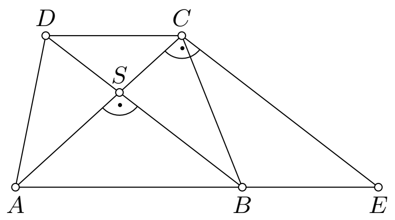
Für jeden Punkt X auf BC gilt: Entweder ist $X = B$, also $AX = AB$, oder $\triangle ABC$ ist ein rechtwinkliges Dreieck, das AX als Hypotenuse hat, womit $AX > AB$ folgt.

Wegen der Voraussetzung $AB > BC$ folgt somit in beiden Fällen $AX > BC$ und daher erst recht $AX > XC$. Da aber jeder Punkt der Mittelsenkrechten dieselbe Entfernung von A wie von C hat, liegt X folglich nicht auf der Mittelsenkrechten, wie gezeigt werden sollte.

Aufgabe 300913:
Beweisen Sie, dass in jedem Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$, dessen Diagonalen AC und BD aufeinander senkrecht stehen,

$$\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = (\overline{AB} + \overline{CD})^2 \quad \text{gilt!}$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Verlängert man AB um eine Strecke der Länge CD bis E, so sind in dem Viereck $BECD$ die Gegenseiten BE und CD zueinander parallel und gleichlang, also ist $BECD$ ein Parallelogramm. Daher gilt $BD = EC$ ind $BD \parallel EC$.

Für den Schnittpunkt S von AC und BD gilt nach Voraussetzung $\angle ASB = 90°$, nach dem Stufenwinkelsatz wegen $BS \parallel EC$ also auch $\angle ACE = 90°$. Daher folgt nach dem Satz des Pythagoras

$$AC^2 + EC^2 = AE^2 = (AB + BE)^2 \qquad \text{und damit} \qquad AC^2 + BD^2 = (AB + CD)^2$$

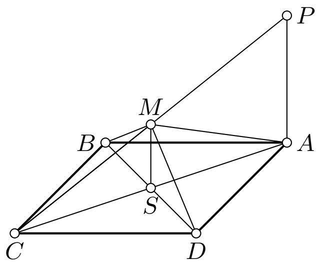
II Runde 2

Aufgabe 050924:
In einer Ebene ε ist ein Rechteck $ABCD$ gegeben. P sei ein beliebiger Punkt auf der Senkrechten zur Ebene ε durch A.
Es ist zu beweisen, dass die Punkte A, B, D auf der Kugel mit dem Durchmesser PC liegen.

Lösung von Manuela Kugel:
Der Mittelpunkt M der Strecke PC ist der Mittelpunkt der Kugel mit dem Durchmesser PC. Die Punkte A, B und D liegen genau dann auf dieser Kugel, wenn

$$|AM| = |BM| = |DM| = |CM| = \frac{1}{2}|PC|$$

ist (siehe Bild).



Zum Beweis dieser Gleichheiten fälle man das Lot von M auf ε. Sein Fußpunkt S liegt wegen $MS \parallel PA$ auf AC.
Ferner gilt nach dem 1. Strahlensatz wegen $|CM| = |MP|$

$$|CS| = |SA|$$

Also ist S der Schnittpunkt der Diagonalen des Rechtecks $ABCD$. Die Dreiecke CSM, ASM, BSM und DSM sind mithin nach dem Kongruenzsatz (sws) untereinander kongruent. Daher ist

$$|AM| = |BM| = |DM| = |CM| = \frac{1}{2}|PC|$$

Die Punkte A, B, C, D und P liegen also auf der Kugel mit dem Mittelpunkt M und dem Radius $\frac{1}{2}|PC|$, also mit dem Durchmesser PC.

Aufgabe 060923:
Beweisen Sie den folgenden Satz!
Die Diagonalen des ebenen konvexen Vierecks $ABCD$ schneiden einander genau dann rechtwinklig, wenn

$$a^2 + c^2 = b^2 + d^2$$

gilt, wobei a, b, c und d die Seitenlängen des Vierecks sind.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es ist zu beweisen, dass die Bedingung $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ notwendig und hinreichend ist. Also müsste gelten:

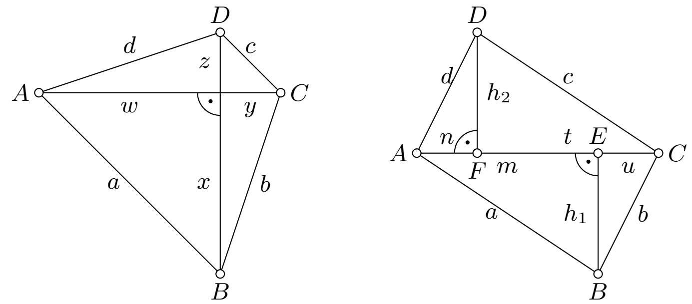
(1) Wenn $AC \perp DB$ ist, so ist $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$. In der linken Figur gilt nach dem Satz des Pythagoras:

$$a^2 = x^2 + w^2 \quad , \quad b^2 = x^2 + y^2 \quad , \quad c^2 = z^2 + y^2 \quad , \quad d^2 = w^2 + z^2$$

wobei x, w, z und y die Längen der Diagonalenabschnitte sind. Daraus folgt:

$$a^2 + c^2 = x^2 + y^2 + w^2 + z^2 = b^2 + d^2$$

Also gilt (1). Ferner müsste gelten:



(2) Wenn $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ ist, so ist $AC \perp DB$. Man betrachtet das Viereck $ABCD$, in dem die Diagonale AC eingezeichnet ist. Von den Punkten B und D werden die Lote auf AC gefällt, ihre Fußpunkte seien E und F.

Ferner sei $\overline{BE} = h_1$, $\overline{DF} = h_2$, $\overline{AF} = n$, $\overline{FC} = t$, $\overline{AE} = m$, $\overline{EC} = u$ (rechte Figur).

Dann gilt: (3) $m + u = n + t$. Ferner gilt nach dem Lehrsatz des Pythagoras:

$$a^2 = m^2 + h_1^2 \quad , \quad c^2 = t^2 + h_2^2 \quad , \quad b^2 = u^2 + h_1^2 \quad , \quad d^2 = n^2 + h_2^2$$

also nach Voraussetzung

$$a^2 + c^2 = h_1^2 + h_2^2 + m^2 + t^2 = h_1^2 + h_2^2 + u^2 + n^2 = b^2 + d^2$$

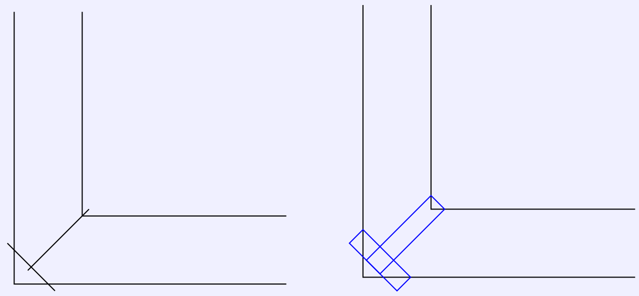
Daraus folgt: (4) $m^2 + t^2 = u^2 + n^2$ bzw. $m^2 - u^2 = n^2 - t^2$, oder

$$(m + u)(m - u) = (n + t)(n - t)$$

Wegen (3) folgt (5) $m - u = n - t$.

Aus (3) und (5) erhält man schließlich $m = n$, das heißt, die Punkte E und F sind identisch, D, E ($= F$) und B liegen auf derselben Gerade DB, die senkrecht zu AC verläuft. Der behauptete Satz ist also richtig. $\square$

Aufgabe 070923:

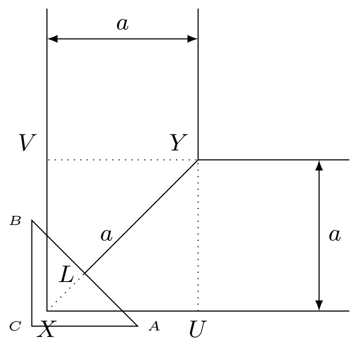


In einer alten Denksportaufgabe soll man einen Graben, der überall gleich breit ist und einen rechtwinkligen Knick macht, mit Hilfe von zwei Bohlen überqueren, die genau so lang sind, wie der Graben breit ist.
Die gesuchte Lösung (ohne Berücksichtigung der Breite der Bretter) ist die in der Abbildung gezeichnete.

a) Zeigen Sie durch eine Rechnung, dass diese Lösung richtig ist!
b) Die Breite des Grabens und die Länge der Bohlen sei a, die Breite der Bohlen sei b. Welchen Wert hat das Verhältnis $b : a$, wenn die Bretter die in der Abbildung gezeigte Lage haben?
Ein Durchbiegen der Bohlen und eine bedingte Tragfähigkeit des Grabenrandes sollen nicht berücksichtigt werden.

Lösung von Stefan Knott:
Zunächst ermitteln wir die maximale Entfernung, die durch die beiden Bretter mit der Länge a überbrückt werden kann.
Dazu setzten wir laut Aufgabenstellung voraus, dass die Breite der Bretter unberücksichtigt bleibt und das diese so wie auf der Abbildung dargestellt, im rechten Winkel zueinander liegen (rote durchgehenden Linien in der Planfigur). Mithin gilt:

$$AB = LY = a \qquad (1) \qquad AL = BL = \frac{a}{2} \tag{2}$$



Demnach ist das Dreieck ABC rechtwinklig mit der Strecke CL als Höhe. Nach dem Höhensatz gilt:

$$(CL)^2 = AL \cdot BL \tag{3}$$

Aus (2) und (3) folgt somit:

$$(CL)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \text{ und } AL = BL = \frac{a}{2} \Rightarrow CL = \frac{a}{2} \tag{6}$$

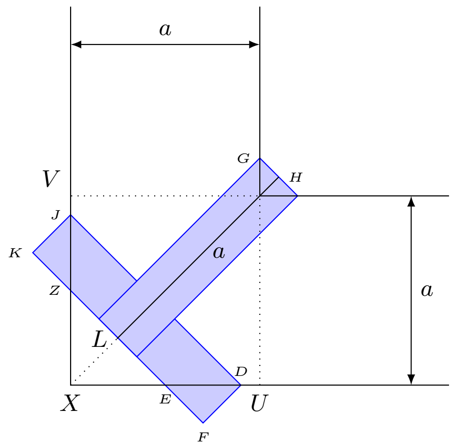
Wegen (2) und (6) ist damit aber auch $AL = BL = CL = \frac{a}{2}$. Damit beträgt die Länge der maximal überbrückbaren Strecke mit 2 Brettern:

$$a + \frac{a}{2} = \frac{3}{2}a \tag{8}$$

Berechnen wir nun die Entfernung der beiden Grabenecken (Punkte X und Y). Laut Aufgabenstellung stellt das Viereck $XUYV$ ein Quadrat mit der Seitenlänge a dar, die Strecke XY entspricht genau der Diagonalen dieses Quadrates. Für die Diagonale XY des Quadrates wird $XY = a\sqrt{2} \quad (10)$.

Vergleichen wir nun die maximal überbrückbare Strecke (8) mit der Entfernung der beiden Grabenecken (10). Es gilt $\frac{3}{2}a > a\sqrt{2}$, daher kann der Graben mit Hilfe der beiden Bretter überquert werden.

Aufgabenteil b)
Wie bereits im Aufgabenteil a) gezeigt, beträgt die Länge der Strecke $XY = a\sqrt{2}$. Weiterhin ist laut den Bedingungen der Aufgabenstellung das Dreieck ZEX rechtwinklig und gleichschenklig. In einem solchen Dreieck beträgt die Winkelgröße eines Basiswinkels genau 45°, so natürlich auch der Basiswinkel ZEX im Dreieck ZEX.



Die Winkel ZEX und DEF sind Scheitelwinkel, daher haben diese die gleiche Größe. Außerdem handelt es sich bei den verwendeten Bohlen um rechteckige Bretter, daher ist das Dreieck DEF ebenfalls gleichschenklig und rechtwinklig.
Mithin ist die Dreieckseite DF eben dieses Dreieckes die Breite b der verwendeten Bretter, daher gilt: $DF = EF = b$. Ein weiteres gleichschenklig rechtwinkliges Dreieck ist das Dreieck XEL, somit ist: $XL = EL$
Die Strecke FL besteht aus den Teilabschnitten EF und EL, entsprechend den gestellten Voraussetzungen beträgt ihre Länge $\frac{a}{2}$. Demnach ist:

$$\frac{a}{2} = FL = EF + EL$$

Daraus ergibt sich durch Substitution von EF und EL: $XL = \frac{a}{2} - b$.
Das Dreieck GYH ist ebenfalls gleichschenklig und rechtwinklig (rechter Winkel bei Punkt H). Außerdem entspricht, wie aus der Planfigur ersichtlich, die Länge der Kathete GH der halben Breite eines Brettes, d. h. $GH = YH = \frac{b}{2}$.
Die Länge der Strecke LY ergibt sich nun aus der Differenz der Strecken LH und YH, wobei LH der Gesamtlänge eines Brettes a entspricht: $LY = LH - YH = a - YH4$.YH ersetzen wir noch erhalten somit für LY: $LY = a - \frac{b}{2}$.

Betrachten wir wieder die Strecke XY. Diese setzt sich aus den Teilstrecken XL und LY zusammen, somit ist: $XY = XL + LY$.
Die Substitution der Teilstrecken XL und LY ergibt: $XY = \frac{3}{2}(a - b)$.
Wir haben nun zwei verschiedene Möglichkeiten erhalten, die Länge der Strecke XY zu berechnen. Um schließlich das gesuchte Verhältnis $b : a$ zu ermitteln, setzen wir wie folgt fort: $XY = \frac{3}{2}(a - b) = a\sqrt{2}$.
Auflösen nach $b : a$ ergibt

$$b : a = 1 - \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Das Verhältnis $b : a$ hat den Wert von $1 - \frac{2\sqrt{2}}{3}$, wenn die Bretter die in der Abbildung gezeigte Lage haben.

Aufgabe 090924:
Es ist zu beweisen:
Verbindet man in einem Parallelogramm $ABCD$ den Eckpunkt C mit den Mittelpunkten der Seiten AB und AD, so teilen diese Verbindungsstrecken die Diagonale BD in drei gleich lange Teilstrecken.

Lösung von cyrix:
Sei mit S der Diagonalenschnittpunkt des Parallelogramms, M der Mittelpunkt von AB und N der von AD bezeichnet.
Die Diagonalen AC und BD halbieren sich gegenseitig. Also ist BS Seitenhalbierende im Dreieck $\triangle ABC$, genauso wie CM. Damit schneiden diese sich im Schwerpunkt S_B des Dreiecks, sodass $|BS_B| = \frac{2}{3}|SB| = \frac{1}{3}|DB|$ gilt, da der Schwerpunkt eines Dreiecks jede seiner Seitenhalbierenden im Verhältnis $1:2$ teilt.
Analog ist DS Seitenhalbierende im Dreieck $\triangle ACD$, genauso wie CN. Damit schneiden sich diese beiden Geraden im Schwerpunkt S_D des Dreiecks, sodass wieder $|DS_D| = \frac{2}{3}|DS| = \frac{1}{3}|DB|$ gilt, was zu beweisen war.

Aufgabe 110923:
Eine Kreislinie sei in 30 gleich große Bögen geteilt. Die Teilpunkte seien der Reihe nach mit P_1 bis P_{30} bezeichnet.
Berechnen Sie die Größe jedes der vier Winkel, unter denen sich die Strecken P_7P_{18} und $P_{12}P_{21}$ schneiden!

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:
Wir ergänzen das 30-Eck zu einem 60-Eck mit Ecken $Q_1, \dots, Q_{60}$. Sei M der Mittelpunkt.
Dann ist $P_7P_{18} = Q_{14}Q_{36}$ orthogonal zu MQ_{25}, $25 = \frac{1}{2}(14+36)$ und $P_{12}P_{21} = Q_{24}Q_{42}$ orthogonal zu MQ_{33}, $33 = \frac{1}{2}(24+42)$.
Der Schnittwinkel der Geraden entspricht daher dem Winkel $\sphericalangle Q_{25}MQ_{33} = \frac{360°}{60}(33-25) = 48°$.

Aufgabe 120924:
Ein konvexes Tangentenviereck $ABCD$ (ein Viereck, in das ein Kreis so einbeschrieben werden kann, dass er jede der vier Seiten des Vierecks in je einem Punkt berührt) habe den Umfang u, der Radius seines Inkreises sei r.
Berechnen Sie den Flächeninhalt F dieses Tangentenvierecks!

Lösung von cyrix:
Sei M der Mittelpunkt und r der Radius des Inkreises. Dann zerfällt das Tangentenviereck in vier Teildreiecke ABM, BCM, CDM, ADM, so dass die Höhe der Dreiecke auf der äußeren Kante gerade der Inkreisradius ist. Daher gilt für den Flächeninhalt:

$$F = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} + \frac{dr}{2} = \frac{ur}{2} \ .$$

Aufgabe 130923:
Ein konvexes gleichschenkliges Trapez $ABCD$ ($AB \parallel CD$; $AD = BC$; $AB > CD$) soll folgende Eigenschaften haben:
Es soll sich einem Kreis mit dem Radius $r = 12$ cm umbeschreiben lassen; der Umfang des Trapezes soll $u = 100$ cm betragen.
Untersuchen Sie, ob es solche Trapeze gibt und berechnen Sie die Seitenlängen jedes derartigen Trapezes!

Lösung von cyrix:
Da das Trapez einen Inkreis hat, ist es ein Tangentenviereck, sodass die Summe der Längen jedes Paares seiner gegenüberliegender Seiten gleich ist. Also gilt $|AB|+|CD|=|AD|+|BC|=\frac{u}{2}=50$ cm. Aufgrund der Gleichschenkligkeit ist dann sogar schon $|AD|=|BC|=25$ cm bekannt.
Die Berührradien des Inkreises an AB sowie CD stehen jeweils senkrecht auf den Seiten, sodass sie aufgrund der Parallelität der beiden Seiten selbst parallel zueinander liegen.
Da beide Berührradien durch den Mittelpunkt des Inkreises verlaufen, ergänzen sie sich also zu einem Durchmesser, der senkrecht auf AB und CD steht, sodass diese beiden Parallelen den Abstand $2r=24$ cm haben. Insbesondere sind sie damit auch kürzer als $|AD|=|BC|=25$ cm.

Seien L_C und L_D die Fußpunkte der Lote von C bzw. D auf AB. dann sind diese Lote $|CL_C|$ und $|DL_D|$ jeweils auch gleich 24 cm, also gleich lang. Damit sind die rechtwinkligen Dreiecke $\triangle BL_CC$ und $\triangle AL_DD$ zueinander nach dem Kongruenzsatz Ssw kongruent. Da die beiden entsprechenden Seiten CL_C und DL_D zueinander parallel sind sowie die entsprechenden Seiten BL_C und AL_D beide auf der Geraden AB liegen, gibt es also nur zwei mögliche Lagebeziehungen:
Entweder sind auch die dritten Seiten AD und BC dieser beiden Dreiecke zueinander parallel, oder aber sie gehen durch Spiegelung an der Mittelsenkrechten der Strecke AB ineinander über, zeigen also in verschiedene Richtungen.

Im ersten dieser beiden Fälle sind aber im Viereck $ABCD$ jeweils gegenüberliegende Seiten parallel, sodass es sich um ein Parallelogramm handelt. Damit folgt dann auch $|AB|=|CD|$, was im Widerspruch zur Aufgabe steht.

Im zweiten Fall müssen die Lotfußpunkte L_C und L_D also beide außerhalb oder beide innerhalb der strecke AB liegen, wobei ersteres auf $|CD|>|AB|$ führen würde, was im Widerspruch zur Aufgabenstellung steht. Also befinden sich beide Lotfußpunkte im Inneren der Strecke AB. Es gilt damit $|AB|=|AL_D|+|L_DL_C|+|L_CB|=|L_DL_C|+2|L_CB|$, letzteres aufgrund der Kongruenz der Dreiecke $\triangle BL_CC$ und $\triangle AL_DD$.
Im Viereck L_DL_CCD sind aber nun gegenüberliegende Seiten parallel, sodass es sich um ein Parallelogramm handelt und $|L_DL_C|=|CD|$ folgt.

Es verbleibt, $|L_CB|$ zu berechnen. Im rechtwinkligen Dreieck $\triangle BL_CC$ gilt $|L_CC|^2+|BL_C|^2=|BC|^2$, also $|L_CB|=\sqrt{25^2-24^2}$ cm $=\sqrt{49}$ cm $=7$ cm.
Setzt man dies ein, erhält man $|AB|=|CD|+2\cdot 7$ cm und zusammen mit $|AB|+|CD|=50$ cm schließlich $|AB|=32$ cm und $|CD|=18$ cm. Für ein solches Trapez gilt damit, dass seine Kantenlängen $|AB|=32$ cm, $|BC|=25$ cm, $|CD|=18$ cm und $|AD|=25$ cm betragen.

Aufgabe 150923:
Gegeben seien die Seitenlänge a eines Quadrates $ABCD$ sowie eine Länge m, für die $m\leq a$ gilt. Es sei M derjenige Punkt auf der Seite CD, für den $MD=m$ gilt.
Gesucht ist ein Punkt N auf der Seite AD so, dass sich der Flächeninhalt des Dreiecks NMD zu dem des Quadrates $ABCD$ wie $1:7$ verhält.
Man ermittle alle diejenigen Werte von m, für die ein solcher Punkt N auf AD existiert, und hierzu jeweils die Länge der Strecke DN.

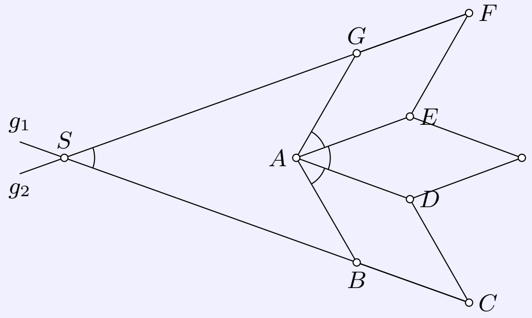
Lösung von cyrix:
Der Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle NMD$ beträgt

$$\frac{1}{2}|MD|\cdot|DN|=\frac{m}{2}\cdot|DN|$$

Damit dieser den von der Aufgabenstellung verlangten Wert von $\frac{1}{7}a^2$ annimmt, muss $|DN|=\frac{2a}{7m}\cdot a$ gelten. Damit der Punkt D auf der Seite AD des Quadrats liegt (und nicht nur auf der Gerade durch diese Seite), muss der Vorfaktor $\frac{2a}{7m}$ zwischen 0 und 1 liegen.

Wegen $a > 0$ und $m \geq 0$ ist auch immer $\frac{2a}{7m} > 0$. Schließlich ist die Ungleichung $\frac{2a}{7m} \leq 1$ äquivalent zu $m \geq \frac{2}{7}a$, sodass genau für solche Werte von m ein entsprechender Punkt N auf der Strecke AD existiert.

Aufgabe 160921:



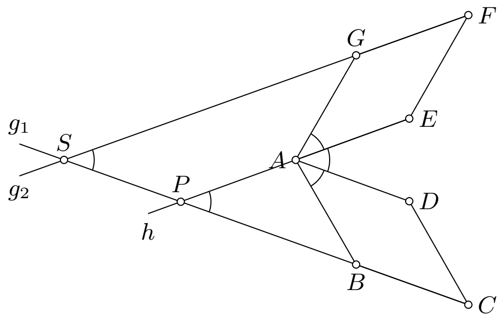
Karlheinz betrachtet die in der Abbildung dargestellte, aus drei kongruenten Rhomben bestehende Figur. Dabei stellt er fest, dass der Winkel $\angle BSG$ genau so groß ist wie jeder der Winkel $\angle BAD, \angle DAE, \angle EAG$.

Nach einigem Nachdenken behauptet er, dass der folgende Satz gilt:

„Sind zwei Parallelogramme $ABCD$ und $AEFG$, die genau den Punkt A gemeinsam haben, so gegeben, dass die Winkel $\angle BAD, \angle DAE$ und $\angle EAG$ gleich groß und kleiner als 120° sind, dann hat auch der Winkel $\angle BSG$, den die Gerade g_1 durch B und C mit der Geraden g_2 durch F und G einschließt, die gleiche Größe wie jeder dieser drei Winkel."

Beweisen Sie diesen Satz!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Es sei h die gerade durch A und E. Dann gilt $h \parallel g_2$, da $AEFG$ ein Parallelogramm ist. Folglich schneidet die zu g_2 nicht parallele Gerade g_1 die Geraden g_2 und h in S bzw. P. (siehe Abbildung)

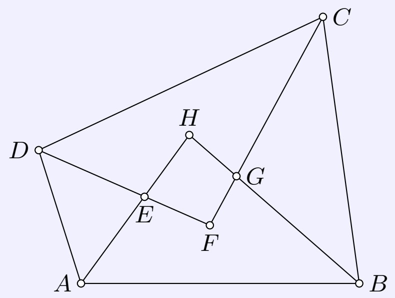
Nun sind $\angle BPA$ und $\angle BSG$ Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen und daher gleichgroß. Ebenso sind $\angle DAE$ und $\angle BPA$ Stufenwinkel an geschnittenen Paralellen und mithin gleichgroß. Folglich ist der Winkel $\angle BSG$, den g_1 mit g_2 einschließt, genau so groß wie jeder der Winkel $\angle BAD$, $\angle DAE$, $\angle EAG$.

Aufgabe 190923:

Von einem konvexen Viereck $ABCD$ werde folgendes vorausgesetzt:

Konstruiert man die Winkelhalbierenden seiner Innenwinkel, so entstehen Schnittpunkte E, F, G, H, die so auf den Winkelhalbierenden angeordnet sind, wie dies aus dem Bild ersichtlich ist.

Beweisen Sie, dass unter dieser Voraussetzung stets in dem Viereck $EFGH$ die Summe zweier gegenüberliegender Innenwinkel 180° beträgt!



Lösung von cyrix:
Es seien die Innenwinkel des Vierecks $ABCD$ wie üblich mit α bei A bis δ bei D bezeichnet.
Es ist $\angle FEH = \angle DEA = 180° - \frac{\alpha}{2} - \frac{\delta}{2}$ und analog $\angle HGF = \angle BGC = 180° - \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2}$, also

$$\angle FEH + \angle HGF = 360° - \frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2} = 180° \qquad \square.$$

Aufgabe 220923:
Von einem Quadrat $ABCD$ und vier Punkten P, Q, R, S wird folgendes vorausgesetzt:
(1) P liegt auf der Strecke AB zwischen A und B,
(2) Q liegt auf der Strecke BC zwischen B und C,
(3) R liegt auf der Strecke CD zwischen C und D,
(4) S liegt auf der Strecke DA zwischen D und A,
(5) es gilt $PR \perp QS$.
Untersuchen Sie, ob für jede Lage der Punkte, bei der die Voraussetzungen (1) bis (5) erfüllt sind, stets dieselbe der drei Aussagen $PR < QS$, $PR = QS$, $PR > QS$ gilt!
Wenn das der Fall ist, nennen Sie diese Aussage!

Lösung von cyrix:
Wir legen so ein Koordinatensystem in die Ebene des Quadrats, dass A im Koordinatenursprung, B im Punkt (1,0) und D im Punkt (0,1) zu liegen kommt. Dann liegt C im Punkt (1,1). Weiterhin existieren reelle Zahlen p,q,r,s, sodass P die Koordinaten (p,0), Q die Koordinaten (1,q), R die Koordinaten (r,1) und S die Koordinaten (0,s) besitzt.

Gilt dabei $p = r$, so liegt die Gerade PR parallel zur y-Achse und damit parallel zur y-Achse. Damit muss wegen (5) die Strecke QS parallel zur x-Achse liegen, sodass $q = s$ gilt. Damit ergibt sich für beide Strecken eine Länge von

$$|PR| = \sqrt{(r-p)^2 + (1-0)^2} = 1 = \sqrt{(1-0)^2 + (s-q)^2} = |QS|$$

Sonst hat die Gerade PR den Anstieg $m_1 = \frac{1-0}{r-p} = \frac{1}{r-p}$ und die Gerade QS den Anstieg $m_2 = \frac{s-q}{1-0} = s-q$. Nach (5) stehen die beiden Geraden senkrecht aufeinander, sodass sich ihre Anstiege zu (-1) multiplizieren. Es gilt also $\frac{1}{r-p} \cdot (s-q) = -1$ bzw. $s - q = -(r-p)$, also $(s-q)^2 = (r-p)^2$. Für die Längen der Strecken PR und QS erhalten wir damit wieder

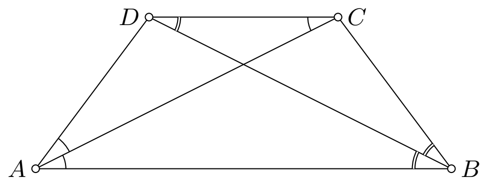
$$|PR| = \sqrt{(r-p)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{(1-0)^2 + (s-q)^2} = |QS|$$

sodass in jedem Fall $|PR| = |QS|$ gilt.

Bemerkung: Wir haben von den Bedingungen (1) bis (4) nur genutzt, dass die Punkte P bis S auf den angegebenen Geraden liegen. Damit kann die Zusatzvoraussetzung, die dort gefordert wird, dass die Punkte jeweils im Inneren der jeweiligen Quadratseiten liegen sollen, entfallen.

Aufgabe 230922:
Von einem Trapez $ABCD$ wird vorausgesetzt
(1) Es gilt $AB \parallel DC$.
(2) Es gilt $AB > DC$.
(3) Das Trapez besitzt einen Innenwinkel mit einer Größe von 110°.
(4) Die Diagonalen AC und BD sind die Halbierenden der Winkel $\angle DAB$ bzw. $\angle ABC$.
Zeigen Sie, dass durch diese Voraussetzungen die Größen aller Innenwinkel des Trapezes eindeutig bestimmt sind und ermitteln Sie diese Größen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Es gilt $\angle BAC = \angle DCA$ und $\angle ABD = \angle CD$ als Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen. Aus (4) und (1) folgt daher

$$\angle DAC = \angle DCA \qquad \text{bzw.} \qquad \angle DBC = \angle CDB \qquad (5)$$

Aus (5) folgt: $AD = DC = CB$ (6).
Wegen (2) ist $ABCD$ kein Parallelogramm, nach (6) daher ein gleichschenkliges Trapez. Seine stumpfen Innenwinkel liegen wegen (2) bei D und C, also gilt $\angle ADC = \angle DCB = 110°$ (7).
Die Innenwinkel bei A und B ergänzen (7) jeweils zu 180°, d. h., es gilt $\angle DAB = \angle ABC = 70°$ (8).
Mit (7) und (8) sind alle verlangten Winkelgrößen ermittelt.

Aufgabe 240923:
Es sei $ABCD$ ein Quadrat. Für zwei verschiedene Punkte E und F, die in irgendeiner Reihenfolge auf der Seite BC zwischen B und C liegen, gelte $BE = FC$ und $BE : EF = 41 : 11$.
Die Gerade durch A und E sei g, die Gerade durch D und F sei h, der Schnittpunkt von g und h sei S.
Untersuchen Sie, ob bei einer Lage von Punkten A, B, C, D, E, F, S, die diese Voraussetzungen erfüllt, das Dreieck EFS gleichseitig ist!

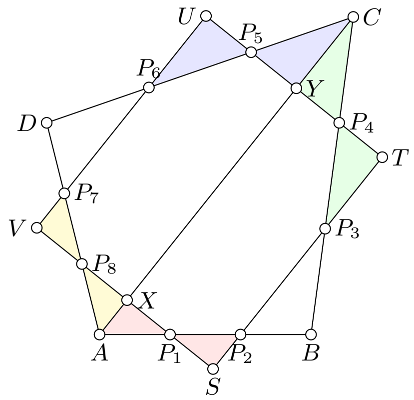
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Aus $AB = AC$, $\angle ABE = \angle DCF$ und $BE = FC$ folgt $\triangle ABE \cong \triangle DCF$, also $\angle BAE = \angle CDF$. Daher ist $\triangle ADS$ gleichschenklig mit $\angle DAS = \angle ADS$.
Wegen $\angle FES = \angle DAS$ und $\angle EFS = \angle ADS$ (entweder Stufenwinkel oder Wechselwinkel) ist folglich auch $\triangle EFS$ gleichschenklig mit $\angle FES = \angle EFS$.

a) Liegen die Punkte B, E, F, C in dieser Reihenfolge auf BC, so gilt $AS > AE$. Da ferner AE im rechtwinkligen Dreieck ABE als Hypotenuse die längste Seite ist, gilt erst recht $AS > AB = AD$. Somit ist das Dreieck ADS nicht gleichseitig; es gilt $60° = \angle ASD = \angle ESF$; also ist auch das Dreieck EFS nicht gleichseitig.

b) Liegen die Punkte B, F, E, C in dieser Reihenfolge auf BC, so gilt:
Wäre $\triangle EFS$ gleichseitig, also $\angle FES = \angle BEA = 60°$, so wäre für den Bildpunkt E' von E bei Spiegelung an AB (der wegen $EB \perp AB$ auf der Verlängerung von EB liegt($\triangle AEE'$ gleichseitig. Daher wäre $AE = E'E = 2 \cdot BE$.
Zerlegt man BE in 41 gleich lange Teilstrecken, von denen nach Voraussetzung 11 auf FE, also 30 auf BF kommen, so hätte $AB = BC = BF + FC = BF + BE$ die Länge von 71 Teilstrecken. Nach dem Satz des Pythagoras müsste dann $AB^2 + BE^2 = AE^2$, also $71^2 + 41^2 = (2 \cdot 41)^2$ gelten.
Es ist aber $71^2 + 41^2 = 6722$ und $(2 \cdot 41)^2 = 6724$.
Dieser Widerspruch beweist, dass $\triangle EFS$ nicht gleichseitig sein kann.

Aufgabe 250922:
Es sei $ABCD$ ein konvexes Viereck. Jede Seite dieses Vierecks werde durch zwei Teilpunkte in drei gleich lange Strecken geteilt. Durch je zwei solche Teilpunkte, die ein und derselben Ecke des Vierecks $ABCD$ am nächsten liegen, sei eine Gerade gezeichnet.
Auf diese Art kann man genau vier Geraden zeichnen, deren Schnittpunkte ein weiteres Viereck $STUV$ bilden.
Welches der beiden Vierecke $ABCD$ bzw. $STUV$ hat den größeren Flächeninhalt?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Die in der Aufgabe genannten Teilpunkte $P_1, P_2, ..., P_8$ und Schnittpunkte S, T, U, V sowie die Schnittpunkte X, Y von AC mit VS bzw. TU seien wie im Bild bezeichnet.
Nach Voraussetzung gilt: $BP_2 : BA = BP_3 : BC = 1 : 3$.
Nach Umkehrung des Strahlensatzes folgt hieraus $P_2P_3 \parallel AC$ und folglich $AX \parallel P_2S$. Nach dem Satz über Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen folgt hieraus $\angle P_1AX = \angle P_1P_2S$.
Da ferner $\angle AP_1X = \angle P_2P_2S$ (Scheitelwinkel) und $AP_1 = P_1P_2$ (nach Voraussetzung) ist, so folgt nach dem Kongruenzsatz wsw die Kongruenz der Dreiecke AP_1X und P_1P_2S und damit auch deren Flächengleichheit.
Analog folgt die Flächengleichheit der Dreiecke AP_8X und P_7P_8V, der Dreiecke CP_4Y und P_3P_4T sowie der Dreiecke CP_5Y und P_6P_5U. Die Viereckflächen $ABCD$ und $STUV$ haben die Achteckfläche $P_1P_2...P_9$ gemeinsam.
Vergleicht man die außerhalb dieser Achteckfläche liegenden Teilflächen, so zeigt sich, dass der Inhalt des Vierecks $ABCD$ um die Summe der Inhalte P_2BP_3 und P_6DP_7 größer ist als der Inhalt des Vierecks $STUV$.

Aufgabe 300922:
Man untersuche, ob es ein Rechteck $ABCD$ mit einander gegenüberliegenden Ecken A und C gibt, bei dem im Dreieck ABC die Winkelhalbierende des Innenwinkels $\angle ACB$ die Seite AB in deren Mittelpunkt schneidet.

Lösung von cyrix:
Die Winkelhalbierende von $\angle ACB$ im Dreieck $\triangle ABC$ teilt die gegenüberliegende Seite AB im Verhältnis der anliegenden Seiten AC und BC. Verläuft sie durch den Mittelpunkt von AB, so gilt also $|AC| = |BC|$, was aber im Rechteck $ABCD$ nicht sein kann, da das Dreieck $\triangle ABC$ rechtwinklig in B, die Hypotenuse AC also länger als die Kathete BC ist. Also kann die Winkelhalbierende nicht durch den Mittelpunkt der Seite AB verlaufen, $\square$.

Aufgabe 340923:
Ausgehend von einem Quadrat $ABCD$ kann man für je zwei positive ganze Zahlen x und y die folgenden Konstruktionen ausführen:
Die Seite AB wird über B hinaus um die Länge $x \cdot AB$ bis zum Punkt S verlängert,
die Seite BC wird über C hinaus um die Länge $y \cdot BC$ bis zum Punkt T verlängert,
die Seite CD wird über D hinaus um die Länge $x \cdot CD$ bis zum Punkt U verlängert,
die Seite DA wird über A hinaus um die Länge $y \cdot DA$ bis zum Punkt V verlängert.
Ermitteln Sie alle diejenigen Paare $(x; y)$ positiver ganzer Zahlen, für die das so erhaltende Viereck $STUV$ einen genau 11 mal so großen Flächeninhalt wie das Quadrat $ABCD$ hat!

Lösung von cyrix:
Das Viereck $STUV$ lässt sich zerlegen in das Quadrat $ABCD$ sowie die vier rechtwinkligen Dreiecke $\triangle VSA$, $\triangle STB$, $\triangle TUC$ und $\triangle UVD$.

Es habe das Quadrat $ABCD$ die Kantenlänge $|AB| = |BC| = |CD| = |DA| = 1$, sodass $|AV| = |CT| = y$, $|BS| = |DU| = x$ und also $|AS| = |CU| = 1 + x$ und $|BT| = |DV| = 1 + y$ gilt.
Damit können wir die Flächeninhalte der vier Dreiecke, des Quadrats und damit auch des Vierecks $STUV$ berechnen, denn dieser ist nun

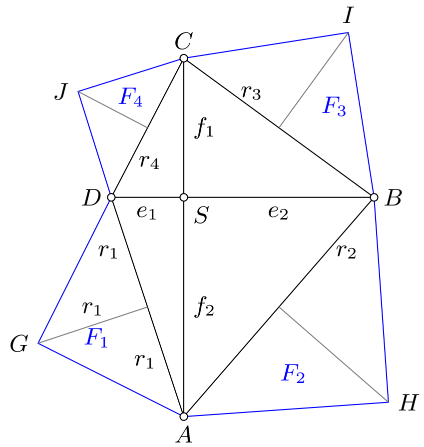
$$F = 1\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot y\cdot(1+x)+\frac{1}{2}\cdot x\cdot(1+y)+\frac{1}{2}\cdot y\cdot(1+x)+\frac{1}{2}\cdot x\cdot(1+y) = 1+y+xy+x+xy = 1+x+y+2xy$$

Nach Aufgabenstellung soll $F = 11$ sein, sodass die Gleichung $11 = 1+x+y+2xy$ bzw. $10 = x+y+2xy$ in positiven ganzen Zahlen x und y zu lösen ist. Da diese symmetrisch in x und y ist, können wir o. B. d. A. $x \leq y$ annehmen, sodass $10 = x + y + 2xy \geq 2x + 2x^2 = 2x(1 + x)$ gilt, also $x = 1$, da für alle $x \geq 2$ diese Ungleichung nicht erfüllt ist.
Dann ist aber $10 = 1 + y + 2y$, also $y = 3$, was schließlich auf die beiden Lösungen $(x; y) \in \{(1; 3),(3; 1)\}$ führt, für die dann der Flächeninhalt des Vierecks $STUV$ genau 11 mal so groß ist wie der des Quadrats $ABCD$.

III Runden 3 & 4

Aufgabe 020935:
Über den Seiten a, b, c und d eines konvexen Vierecks, dessen Diagonalen aufeinander senkrecht stehen, sind gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke mit den Flächeninhalten F_1, F_2, F_3 und F_4 in dieser Reihenfolge errichtet.
Beweisen Sie, dass $F_1 + F_3 = F_2 + F_4$ ist!

Lösung von André Lanka:



Mit den Bezeichnungen in der Abbildung gilt als gegeben: e (bestehend aus den Abschnitten e_1 und e_2) steht senkrecht auf f (bestehend aus den Abschnitten f_1 und f_2). Jedes der Dreiecke mit den Flächeninhalten F_1, F_2, F_3, F_4 ist gleichschenklig-rechtwinklig.
Damit teilt die Höhe in den Punkten G, H, I, J die Grundseite in zwei längengleiche Stücke, die zudem der Länge der Höhe entsprechen (Radius des jeweiligen Thaleskreises). Damit sind die Angaben r_1, r_2, r_3, r_4 in der Abbildung erklärt.
Der Flächeninhalt eines solchen Dreiecks ergibt sich dann als $F_i = r^2$ $(i \in 1, 2, 3, 4)$.
Gleichzeitig sind die Dreiecke $\triangle DAS, \triangle ABS, \triangle BCS, \triangle CDS$ rechtwinklig, so dass hier der Satz des Pythagoras angewandt werden kann:

$$4r_1^2 = e_1^2 + f_1^2 \quad ; \quad 4r_2^2 = e_2^2 + f_2^2 \quad ; \quad 4r_3^2 = e_3^2 + f_3^2 \quad ; \quad 4r_4^2 = e_4^2 + f_4^2$$

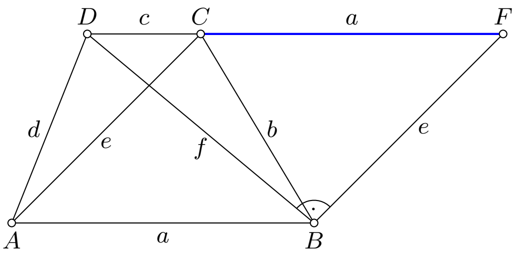
Dies kann nun zur Berechnung der Flächeninhaltssumme herangezogen werden:

$$\begin{aligned} F_1 + F_3 = r_1^2 + r_3^2 &= \frac{1}{4}(e_1^2 + f_2^2) + \frac{1}{4}(e_2^2 + f_1^2) \\ &= \frac{1}{4}(e_2^2 + f_2^2) + \frac{1}{4}(e_1^2 + f_1^2) \\ &= r_2^2 + r_4^2 = F_2 + F_4 \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

Aufgabe 030935:
Es ist der folgende Satz zu beweisen:
Wenn in einem Trapez die Diagonalen aufeinander senkrecht stehen, so ist die Summe der Quadrate der Diagonalen gleich dem Quadrat der Summe der Grundseiten (Parallelseiten).

Lösung von Manuela Kugel:



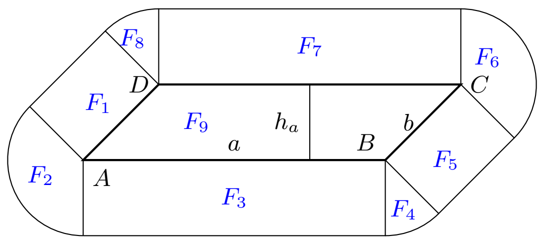
Beweis: In einem Trapez $ABCD$ seien die einander parallelen Grundseiten $AB = a$ und $CD = c$ und die Diagonalen $AC = e$ und $BD = f$. Die Parallele zu AC durch B schneidet die Gerade CD in F. Dann ist $CF = a$, also $DF = a + c$ und $BF = e$.
Da das Dreieck $\triangle BFD$ rechtwinklig ist, folgt aus dem Lehrsatz des Pythagoras $e^2 + f^2 = (a + c)^2$.

Aufgabe 050935:
In dem Parallelogramm $ABCD$ sei $AB = CD = a$, $BC = AD = b$, $(a > b)$ und $AE = h_a$, wobei E der Fußpunkt des vom Punkt A des auf die Seite CD bzw. ihre Verlängerung gefällten Lotes ist.
Ferner sei eine Kreisscheibe mit einem Radius der Länge r gegeben. Der Mittelpunkt der Kreisscheibe durchlaufe sämtliche Seiten des Parallelogramms.
Berechnen Sie den Inhalt der Fläche F, die von der Kreisscheibe überstrichen wird!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Für $2r \geq h_a$ wird die gesamte Parallelogrammfläche überstrichen.
2. Für $2r < h_a$ wird ein Teil der Parallelogrammfläche nicht überstrichen; es gilt nämlich, wenn h_b die zur Seite BC gehörige Höhenlänge des Parallelogramms $ABCD$ bezeichnet, $ah_a = bh_b$, und somit, weil $a > b$ vorausgesetzt ist, $h_a < h_b$, und daher auch $2r < h_b$.

Im Fall 1) lässt sich überstrichene Fläche F in die Teilflächen F_1 bis F_9 zerlegen.



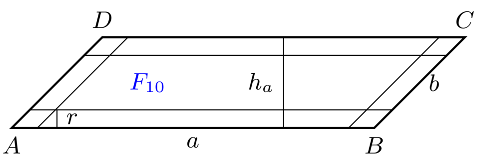
Dabei sind

- F_1 und F_5 Rechtecke mit den Seitenlängen a und r,
- F_3 und F_7 Rechtecke mit den Seitenlängen b und r,
- F_2, F_4, F_6 und F_7 Kreissektoren, die im Radius r übereinstimmen und deren Winkel sich zu einem Winkel der Größe 360° ergänzen. Daher kann man die vier Kreissektoren zu einer Kreisscheibe zusammensetzen.

Also gilt für den Flächeninhalt $I(F)$ der überstrichenen Fläche

$$I(F) = 2(I(F_1) + I(F_3)) + I(F_9) + \pi r^2 = 2(ar + br) + \pi r^2 + ah_a$$

Im Fall 2 entstehen außerhalb des Parallelogramms die gleichen Teilflächen wie im Fall 1. Die Fläche des Parallelogramms wird nicht völlig überdeckt. Es bleibt die Fläche F_{10} frei.



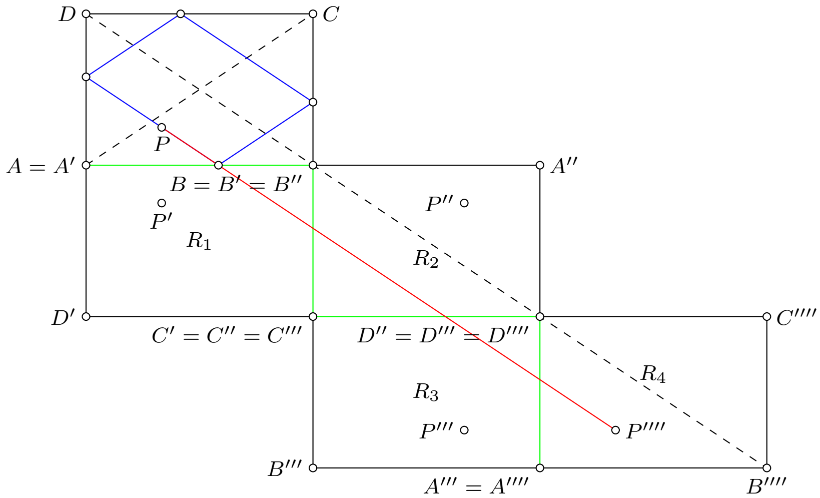
F_{10} ist ein Parallelogramm mit der Seitenlänge $(a - 2x)$ und der zugehörigen Höhe $(h_a - 2r)$, wobei x die Seitenlänge eines der Eckrhomben ist.
Nach dem 2. Strahlensatz gilt $x : r = b : h_a$ und damit $x = \frac{br}{h_a}$.
Also gilt für den Inhalt $F(F')$ der überstrichenen Fläche im Fall 2

$$I(F') = I(F) - I(F_{10}) = 2ar + 2br + \pi r^2 + ah_a - \left(ah_a - 2br - 2ar + \frac{4br^2}{h_a}\right) =$$

$$= 4\left(ar + br - \frac{br^2}{h_a}\right) + \pi r^2$$

Aufgabe 070932:
Auf einem rechtwinkligen Billardtisch $ABCD$ befindet sich im Punkt P eine Kugel.
Nach welchem Punkt von AB muss diese gestoßen werden, damit sie erst der Reihe nach genau je einmal an den Seiten AB, BC, CD und DA des Tisches reflektiert wird und dann genau wieder im Punkt P eintrifft?

Lösung von Nuramon:
Man muss auf den Schnittpunkt von AB mit der Parallelen zu BD durch P zielen. Dieser Punkt wird gefunden, indem man durch P eine zur Diagonalen BD parallele Gerade legt. (Dieser Schnittpunkt existiert nur, wenn P im Dreieck ABD liegt.) Zum Beweis reicht es aus, ein einfaches Bild zu malen:

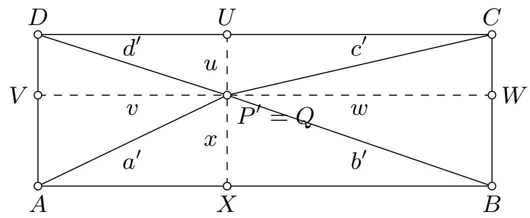


Man spiegele $ABCD$ an AB. Das dadurch erhaltene neue Rechteck R_1 spiegle man an der Seite, die BC entspricht und erhalte R_2.
R_2 wiederum spiegle man an der Seite von R_2, die CD entspricht. Das Spiegelrechteck sei R_3.
R_3 spiegelt man an der Seite, die DC entspricht und erhalte R_4.
Sei P' der Punkt in R_4, der P entspricht. (Man beobachte, dass R_4 durch Verschiebung von $ABCD$ parallel zur Diagonalen BD entsteht.)
Das Reflexionsgesetz sagt nun aus, dass wenn man die Kugel im Punkt P in die Richtung von P' stößt, man die Seiten in der gewünschten Reihenfolge trifft und anschließend wieder bei P landet.

Analog zeigt man, dass man auch zu Punkt P zurückkehrt, wenn man die Kugel parallel zur Diagonalen AC anstößt.

Aufgabe 080936:
Es sei $ABCD$ ein Rechteck, und es sei P ein Punkt, der nicht notwendig in der Ebene des Rechtecks zu liegen braucht. P habe vom Eckpunkt A den Abstand a, vom Punkt B den Abstand b und vom Punkt C den Abstand c.
Man berechne den Abstand d des Punktes P vom Eckpunkt D und zeige dabei, dass zur Ermittlung dieses Abstandes d die Kenntnis der drei Abstände a, b, c ausreicht.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Der Abstand des Punktes P von D sei d. Es sei PQ das Lot von P auf die Ebene des Rechtecks.
Die Parallele durch Q zu (AD) bzw. (AB) schneide die Gerade (AB) bzw. (AD) in (X) bzw. (V), die Gerade (DC) bzw. (BC) in (U) bzw. (W). Es sei $PQ = h$, $QX = x$, $QU = u$, $QV = v$, $QW = w$.

Dann erhält man nach jeweils zweimaliger Anwendung des Lehrsatzes des Pythagoras folgende Gleichungen:

$$a^2 = v^2 + x^2 + h^2 \quad ; \quad b^2 = w^2 + x^2 + h^2$$
$$c^2 = u^2 + w^2 + h^2 \quad ; \quad d^2 = u^2 + v^2 + h^2$$

Daraus folgt (nach Addition)

$$a^2 + c^2 = u^2 + v^2 + w^2 + x^2 + 2h^2 \quad \text{und} \quad b^2 + d^2 = u^2 + v^2 + w^2 + x^2 + 2h^2$$

Somit gilt $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ und damit $d^2 = a^2 - b^2 + c^2$ (also insbesondere $a^2 + c^2 \geq b^2$). Der Abstand des Punktes P von D beträgt folglich

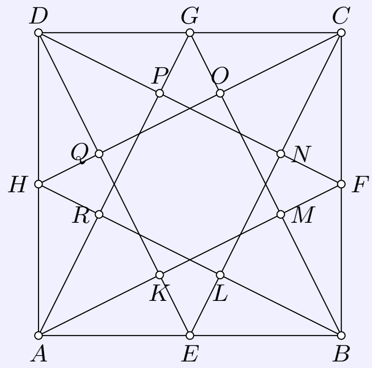
$$d = \sqrt{a^2 - b^2 + c^2}$$

Aufgabe 090931:
Es sei $ABCDEFGH$ ein regelmäßiges Achteck. Man denke sich alle Dreiecke gebildet, deren Ecken je drei der Punkte A, B, C, D, E, F, G, H sind.
Jemand will nun einige dieser Dreiecke aufschreiben, und zwar so, dass keine zwei der aufgeschriebenen Dreiecke einander kongruent sind.
Ermitteln Sie die größtmögliche Anzahl von Dreiecken, die er unter dieser Bedingung aufschreiben kann!

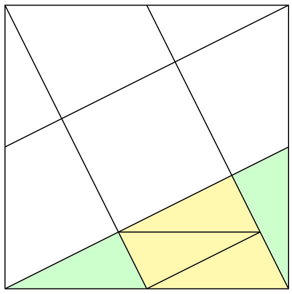
Lösung von StrgAltEntf:
Es gibt nur fünf verschiedene Sorten von Dreiecken, d. h. jedes mögliche Dreieck gehört zu genau einer dieser Sorten.
Begründung: Für ein Dreieck mit den Ecken $X,Y,Z \in \{A,...,H\}$ seien x,y und z die Abstände zwischen jeweils zwei Ecken. (Bei dem Dreieck mit den Ecken B,C,H wäre etwa $x = 1, y = 5, z = 2$.)
Zwei Dreiecke sind genau dann kongruent, wenn die Tripel der zugehörigen Abstände gleich sind. Dabei spielt es aber keine Rolle, in welcher Reihenfolge die Abstände stehen. (Etwa für das Dreieck E,G,D ist $x = 2, y = 5, z = 1$, und die Dreiecke E,G,D und B,C,H sind kongruent.)
Die Summe $x+y+z$ ist stets gleich 8. Folglich ist die Fragestellung dazu äquivalent, auf wie viele Weisen sich 8 als Summe dreier natürlicher Zahlen darstellen lässt, wobei die Reihenfolge der Summanden keine Rolle spielt.
Hierfür gibt es nur die fünf Möglichkeiten $1 + 1 + 6 = 1 + 2 + 5 = 1 + 3 + 4 = 2 + 2 + 4 = 2 + 3 + 3$

Aufgabe 100932:

In einem Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge a seien die Mittelpunkte der Seiten AB, BC, CD, DA mit E, F, G, H bezeichnet.
In dem Streckenzug $AFDECHBGA$ auftretenden Schnittpunkte seien so mit K, L, M, N, O, P, R bezeichnet, dass $AKELBMFNCOGPDQHR$ ein (nicht konvexes) Sechzehneck ist, auf dessen Seiten keine weiteren Schnittpunkte des obengenannten Streckenzuges mit sich selbst liegen (siehe Bild).
Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Sechzehnecks!



Lösung von cyrix:
Der Flächeninhalt des Sechzehnecks ergibt sich als Differenz der Fläche des Quadrats und der der acht (aus Symmetriegründen – Spiegelung an den Diagonalen bzw. den Mittelparallelen des Quadrats bzw. Hintereinanderausführungen davon überführt je zwei solche ineinander – kongruenten) Dreiecke AKL, ELB, BMF, FNC, COG, GPD, DQH und HRA.

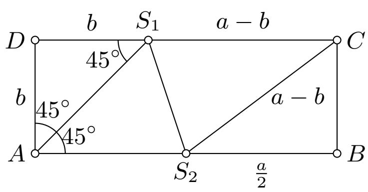


Der Flächeninhalt des Dreiecks AED beträgt $\frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2}{4}$. Dieses lässt sich zerlegen in das Dreieck AKE und das Dreieck DAK. Aufgrund der Parallelität der Geraden $AK = AF$ und $HQ = HC$ geht das Dreieck DAK durch Streckung mit Zentrum D um den Faktor 2 aus dem Dreieck DHQ hervor, da $|DA| = 2|DH|$ ist.

Sei mit x der Flächeninhalt des Dreiecks AKE bezeichnet. Dann hat also auch das Dreieck DHQ den Flächeninhalt x und das Dreieck DAK demnach den Flächeninhalt $2^2 \cdot x = 4x$.
Nach der Vorüberlegung ist der Flächeninhalt des Dreiecks AED gleich $4x + x = \frac{1}{4}a^2$, sodass jedes einzelne der betrachteten „kleinen Dreiecke“ den Flächeninhalt von $x = \frac{1}{20}a^2$ besitzt.
Der Flächeninhalt des Sechzehnecks beträgt demnach $a^2 - 8 \cdot \frac{1}{20}a^2 = \frac{3}{5}a^2$.

Aufgabe 110934:
In einem Rechteck $ABCD$ mit $AB = CD = a$ und $BC = DA = b$, $(a > b)$ schneide die Halbierende des Winkels $\angle BAD$ die Seite CD in S_1. Weiter sei S_2 der Mittelpunkt von AB.
Ermitteln Sie das Verhältnis $a : b$ der Seitenlängen eines solchen Rechtecks, bei dem die Halbierende des Winkels $\angle AS2C$ die Seite CD in S_1 schneidet!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Ein Rechteck $ABCD$ genügt genau dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn $angle AS_2S_1 \cong \angle S_1S_2C$ gilt. Da ferner in jedem Rechteck $\angle AS_2S_1 \cong \angle S_2S_1C$ (Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen) ist, so genügt ein genau dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn das Dreiecke $\triangle S_1S_2C$ gleichschenklig mit $S_1C = S_2C$ ist.
Nun ist das rechtwinkliges Dreieck $\triangle ADS_1$ stets gleichschenklig, da $\angle DAS_1$ eine Größe von 45° hat und somit $\angle DAS_1 \cong \angle AS_1D$ gilt. Daher gilt:
$DS_1 = DA = b$, und das Rechteck genügt genau dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn $S_2C = S_1C = a - b$ gilt. Da $\triangle S_2BC$ rechtwinklig ist, ist dies nach dem Satz des Pythagoras genau dann der Fall, wenn

$$(a-b)^2 = b^2 + \frac{a^2}{4}$$

oder, gleichbedeutend hiermit $a^2 - 2ab = \frac{a^2}{4}$, d. h. $\frac{3}{4}a^2 = 2ab$ gilt.
Wegen $a \neq 0$ trifft dies genau für $a : b = 8 : 3$ zu.

Aufgabe 130933:
Auf einer Geraden g seien in dieser Reihenfolge sechs Punkte A, B, C, D, E, F gelegen. Ein Punkt P außerhalb von g sei so gelegen, dass PC das Lot von P auf g ist. Dabei gelte $PC = AB = BC = CD = DE = EF$.
Man beweise, dass dann $\angle APF = 135°$ gilt.
Hinweis: Es genügt nicht, diese Gleichheit nur mit Rechentafelgenauigkeit nachzuweisen.

Lösung von cyrix:
Um die folgende Notation zu vereinfachen, setzen wir $|PC| = 1$. Durch den Satz von Pythagoras erhalten wir im rechtwinkligen Dreieck $\triangle ACP$ die Kantenlänge $|AP| = \sqrt{|AC|^2 + |PC|^2} = \sqrt{5}$ und analog im rechtwinkligen Dreieck $\triangle CFP$ die Kantenlänge $|FP| = \sqrt{|CF|^2 + |PC|^2} = \sqrt{10}$.

Der Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle AFP$ kann einerseits ermittelt werden zu $\frac{1}{2} \cdot |AF| \cdot |PC| = \frac{5}{2}$ und andererseits auch als $\frac{1}{2} \cdot |AP| \cdot |FP| \cdot \sin(\angle AFP) = \frac{5}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\angle AFP)$, sodass man $\sin(\angle AFP) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ erhält.
Es ist $|AF| = 5 = \sqrt{25} > \sqrt{10} = |FP| > \sqrt{5} = |AP|$, sodass AF die längste Seite im Dreieck $\triangle AFP$ ist. Ihr gegenüber liegt damit auch der größte Innenwinkel dieses Dreiecks, sodass $\angle AFP > 60° > 45°$ gilt. also muss $\angle AFP = 135°$ gelten, da dies der einzige weitere Wert im Intervall $[0, 180°]$ ist, an welchem der Sinus den Wert $\frac{\sqrt{2}}{2}$ annimmt, $\Box$.

Aufgabe 130934:
In einer Ebene sollen regelmäßige n-Ecke (mit einheitlicher Eckenzahl) so um einen Eckpunkt herum aneinandergelegt werden, dass die Summe der Größen der an diesem Eckpunkt liegenden Innenwinkel 360° beträgt.
Geben Sie alle natürlichen Zahlen n an, für die das möglich ist; geben Sie dabei jeweils die Anzahl der insgesamt benötigten n-Ecke an!

Lösung von cyrix:
Sei $n \geq 3$. Dann betragen die Innenwinkel im regelmäßigen n-Eck jeweils $\frac{n-2}{n} \cdot 180°$. Für $n = 3; 4; 5$ und 6 ergeben sich so Innenwinkel von 60°, 90°, 108° und 120°.

Offensichtlich ist wegen $\frac{n-2}{n} = 1 - \frac{2}{n}$ die Größe der Innenwinkel eine in n streng monoton steigende Funktion, sodass für alle $n > 6$ gilt, dass die Innenwinkel eines regelmäßigen n-Ecks größer als $120° = \frac{1}{3} \cdot 360°$, aber wegen $\frac{n-2}{n} < 1$ auch kleiner als $180° = \frac{1}{2} \cdot 360°$ sind.
Damit kann für diese n (also $n > 6$) keine Anzahl von regelmäßigen n-Ecken überschneidungsfrei an einer Ecke zusammengelegt werden. Ähnlich sieht es für $n = 5$ aus, da $\frac{360°}{108°} = \frac{10}{3} \notin \mathbb{Z}$ ist. Es verbleiben $n = 3; 4$ und 6, wo jeweils 6; 4 bzw. 3 regelmäßige n-Ecke überschneidungsfrei in einer Ecke aneinandergefügt werden können.

Aufgabe 140933:
Von einem beliebigen Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ seien die Längen $a = AB$, $c = CD$ seiner Parallelseiten sowie der Abstand h der diese beide Parallelseiten enthaltenen Geraden gegeben. Der Schnittpunkt der Diagonalen AC und BD sei S.
Man berechne aus den gegebenen Längen a, c, h die Flächeninhalte F_1, F_2, F_3, F_4 der Dreiecke ABS, BCS, CDS bzw. ADS.

Lösung von cyrix:
Es ist $F_{ABC} = F_{ABD} = \frac{1}{2}ah$, also $F_1 + F_2 = F_1 + F_4 = \frac{1}{2}ah$ und damit insbesondere $F_2 = F_4$.
Analog ist $F_{ACD} = F_{BCD} = \frac{1}{2}ch$, also $F_3 + F_4 = F_2 + F_3 = \frac{1}{2}ch$.

Die Winkel $\angle ASB$ und $\angle CSD$ sind Scheitelwinkel, also gleich groß. Genauso stimmen die Winkel $\angle BAS$ und $\angle DCS$ überein, da sie Wechselwinkel sind. Demnach stimmen die Dreiecke $\triangle ABS$ und $\triangle CDS$ in zwei Innenwinkeln überein, sind also ähnlich zueinander und es gilt $\frac{F_3}{F_1} = \left(\frac{|SC|}{|AS|}\right)^2$.
Es ist nach Strahlensatz $\frac{|AC|}{|AS|} = \frac{h}{h_S}$, wobei h_S die Länge der Höhe von S auf AB sei. Insbesondere ist damit

$$\frac{|SC|}{|AS|} = \frac{|AC| - |AS|}{|AS|} = \frac{|AC|}{|AS|} - 1 = \frac{h}{h_S} - 1 = \frac{F_{ABC}}{F_1} - 1 = \frac{F_2}{F_1}$$

Damit ergibt sich $\frac{F_3}{F_1} = \frac{F_2^2}{F_1^2}$ bzw. $\frac{F_3}{F_2} = \frac{F_2}{F_1}$.
Sei $x := \frac{F_3}{F_2}$. Dann gilt einerseits $F_2 + F_3 = (1+x)F_2 = \frac{1}{2}ch$ und andererseits $F_1 + F_2 = \left(1 + \frac{1}{x}\right) \cdot F_2 = \frac{1}{2}ah$.
Stellt man die erste dieser beiden Gleichungen nach F_2 um und setzt sie in die zweite ein, erhält man

$$\frac{1+x}{x} \cdot \frac{1}{2}ch \cdot \frac{1}{1+x} = \frac{1}{2}ah$$

bzw. $x = \frac{c}{a}$. Damit ergibt sich

$$F_2 = F_4 = \frac{1}{2}h \cdot \frac{ac}{a+c} \quad , \quad F_3 = \frac{1}{2}h \cdot \frac{c^2}{a+c} \quad \text{und} \quad F_1 = \frac{1}{2}h \cdot \frac{a^2}{a+c}$$

Aufgabe 160931:
Ein dem Einheitskreis einbeschriebenes n-Eck habe die Eigenschaft, dass es bei einer Drehung um 180° um den Mittelpunkt des Einheitskreises in sich übergeht. Auf der Peripherie des Einheitskreises sei irgendein Punkt P gegeben.
Ermitteln Sie unter diesen Voraussetzungen aus der gegebenen Zahl n die Summe s der Quadrate der Abstände des Punktes P zu allen Punkten des n-Ecks!

Lösung von cyrix:
Aufgrund der Punktsymmetrie ist $n = 2m$ gerade.
Seien die Eckpunkte des n-Ecks in mathematisch positiver Richtung mit $P_1, P_2, \ldots, P_{2m}$ durchnummeriert, sodass sich jeweils P_k und P_{m+k} gegenüberliegen. Diese bilden also jeweils einen Durchmesser des Einheitskreises und es gilt $|P_k P_{m+k}|^2 = 2^2 = 4$.
Nach dem Satz von Thales ist jedes Dreieck $P_k P_{k+m} P$ rechtwinklig bei P (oder P fällt mit einem der beiden Endpunkte des betrachteten Durchmessers zusammen).
In jedem Fall gilt aber nach Pythagoras (bzw. sofort durch Einsetzen)

$$|PP_k|^2 + |PP_{k+m}|^2 = |P_k P_{k+m}|^2 = 4$$

sodass sich für die gesuchte Summe s als Wert die Anzahl dieser Durchmesser ergibt, die $4m = 2n$ beträgt, da jeder der Eckpunkte des n-Ecks an genau einem Durchmesser des Einheitskreises beteiligt ist, und auf jedem solchen genau zwei der Eckpunkte des n-Ecks liegen.

Aufgabe 170934:
Für ein gleichschenkliges Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ gelte $BC = CD = DA = a$ sowie $AB > a$.
a) Beweisen Sie, dass die Diagonale AC den Innenwinkel $\angle DAB$ des Trapezes halbiert!
b) Berechnen Sie die Länge von AB für den Fall, dass $\angle DAB = 60°$ gilt!

Lösung von cyrix:
Bemerkung: Bei kanonischer Anordnung und Bezeichnung der Eckpunkte des Trapezes in mathematisch positiver Orientierung, ist der Innenwinkel bei A „falsch“ bezeichnet und müsste eigentlich $\angle BAD$ heißen, damit nicht der zugehörige Gegenwinkel gemeint ist. In der Lösung wird diese „korrekte“ Bezeichnung verwendet.

a) Es ist $|DA| = |DC|$, also das Dreieck $\triangle ACD$ gleichschenklig und es gilt $\angle CAD = \angle DCA$. Es sind nun aber $\angle DCA$ und $\angle BAC$ Wechselwinkel an den von AC geschnittenen Parallelen AB bzw. CD, also gleich groß, sodass sich direkt $\angle CAD = \angle BAC$ ergibt, also AC die Winkelhalbierende von $\angle BAD$ ist, $\square$.

b) Aufgrund von $\angle CAD = \angle DCA = \frac{1}{2}\angle BAD = 30°$ folgt mit der Innenwinkelsumme im Dreieck $\triangle ACD$, dass $\angle ADC = 180° - 2 \cdot 30° = 120°$ ist.
Sei M der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden von $\angle ADC$ mit der Strecke AB. Dann besitzt das Dreieck $\triangle AMD$ zwei Innenwinkel der Größe $60°$, ist also gleichseitig mit Kantenlänge $|AD| = a$.
Für das Dreieck $\triangle MCD$ gilt $|DM| = |DC| = a$, sodass es gleichschenklig ist und $\angle DCM = \angle CMD$ folgt. Da dessen dritter Innenwinkel $\angle MDC = \angle ADC - \angle ADM = 120° - 60° = 60°$ beträgt, ist auch dieses Dreieck gleichseitig mit Kantenlänge a.

Schließlich betrachten wir das Dreieck $\triangle MBC$. Auch hier sind nun zwei Seiten gleich lang: $|MC| = |BC| = a$, sodass die gegenüberliegenden Innenwinkel $\angle CBM$ und $\angle BMC$ gleich groß sind, wobei sich letzterer als Differenz des gestreckten Winkels $\angle BMA = 180°$ und den beiden Winkeln $\angle CMD = \angle DMA = 60°$, also zu $180° - 2 \cdot 60° = 60°$ ergibt, sodass auch das Dreieck $\triangle MBC$ gleichseitig mit Kantenlänge a ist.
Damit ergibt sich abschließend $|AB| = |AM| + |MB| = 2a$.

Aufgabe 190932:
Gegeben sei ein Rechteck $ABCD$, für das $AB = a\sqrt{2}$ und $BC = a$ gilt. Es sei F der Mittelpunkt der Seite CD.
Beweisen Sie, dass die Strecken AC und BF senkrecht zueinander verlaufen!

Lösung von cyrix:
2 Geraden verlaufen orthogonal zueinander, wenn das Produkt ihrer Steigungen -1 ergibt. Sei A der Ursprung (0,0). Dann ist $B(a\sqrt{2},0)$, $C(a\sqrt{2},a)$ und $F(\frac{a}{2}\sqrt{2},a)$.
Sei nun g die proportionale Funktion durch A und C. Diese hat offensichtlich die Steigung $m_1 = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Sei f die Gerade durch B und F. Für die Steigung gilt

$$m_2 = \frac{a}{\frac{a}{2}\sqrt{2} - a\sqrt{2}} = \frac{1}{-\frac{1}{2}\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$

Es gilt somit $m_1 \cdot m_2 = -1$. qed.

Aufgabe 200933:
Von einem Rechteck $ABCD$ und einem Punkt P in seinem Innern wird $PA = \sqrt{2}$ cm, $PB = \sqrt{3}$ cm, $PC = \sqrt{5}$ cm vorausgesetzt.
Beweisen Sie, dass die Länge PD durch diese Voraussetzungen eindeutig bestimmt ist, und ermitteln Sie diese Länge!

Lösung von cyrix:
Es sei a die Länge des Lots von P auf die Seite AB, b die des Lots von P auf BC, c die des Lots von P auf CD und d die des Lots von P auf DA.
Damit bilden jeweils ein Eckpunkt, die Lotfußpunkte auf den von diesem Eckpunkt ausgehenden Seiten des Rechtecks und P ein Quadrat, dessen Diagonalen „Eckpunkt-P“ die Längen

$$|AP| = \sqrt{a^2+b^2}, |BP| = \sqrt{b^2+c^2}, |CP| = \sqrt{c^2+d^2}, |DP| = \sqrt{d^2+a^2}$$

besitzen. Da nach Aufgabenstellung $|AP|^2 + |BP|^2 = |CP|^2$ gilt, folgt $a^2+b^2+b^2+c^2 = c^2+d^2$, also $a^2+2b^2 = d^2$ und damit

$$|DP| = \sqrt{a^2+d^2} = \sqrt{a^2+a^2+2b^2} = \sqrt{2\cdot(a^2+b^2)} = \sqrt{2}\cdot|AP| = 2cm$$

Aufgabe 210932:
Ist $ABCD$ ein Rechteck, für dessen Seitenlängen $b = AD = 6$ cm und $a = AB > b$ gilt, so seien E,G diejenigen Punkte auf CD und F,H diejenigen Punkte auf AB, für die $AFED$ und $HBCG$ Quadrate sind.
Beweisen Sie bei diesen Bezeichnungen, dass es genau eine Seitenlänge a gibt, für die $EH \perp AC$ gilt, und ermitteln Sie diese Seitenlänge!

Lösung von cyrix:
Offensichtlich ist die genaue Länge von b irrelevant. Wir legen in die Ebene des Rechtecks derart ein Koordinatensystem, dass A im Koordinatenursprung, B im Punkt $(a{,}0)$ und D im Punkt $(0{,}b)$ zu liegen kommt. Dann gilt nach Konstruktion für die übrigen Punkte, dass sie folgende Koordinaten besitzen: $C(a{,}b)$, $F(b{,}0)$, $E(b{,}b)$, $H(a-b{,}0)$ und $G(a-b{,}b)$.

Die Gerade AC hat den Anstieg $m_1 = \frac{b-0}{a-0} = \frac{b}{a}$, die Gerade EH den Anstieg $m_2 = \frac{b-0}{b-(a-b)} = \frac{b}{2b-a}$, sofern $a \neq 2b$ ist. (Wäre aber $a = 2b$, so würde H mit zusammenfallen, die Gerade EH wäre senkrecht zu AB, also insbesondere nicht senkrecht zu AC, sodass sich in diesem Fall keine Lösung ergibt. Deshalb können wir ab sofort $a \neq 2b$ annehmen.)

Zwei nicht zu den Koordinatenachsen parallele Geraden stehen genau dann senkrecht aufeinander, wenn sich ihre Anstiege zu -1 multiplizieren, d. h., es ist

$$EH \perp AC \Leftrightarrow m_1\cdot m_2 = -1 \Leftrightarrow -1 = \frac{b}{2b-a}\cdot\frac{b}{a} \Leftrightarrow b^2 = a\cdot(a-2b) = a^2-2ab \Leftrightarrow a^2-2ab+b^2 = 2b^2$$

$$\Leftrightarrow a-b = \sqrt{2}b \Leftrightarrow a = (1+\sqrt{2})b$$

sodass für festes b genau ein a existiert, sodass die beiden Geraden EH und AC senkrecht aufeinander stehen. Im konkreten Fall mit $b = 6$ cm ist dafür dann $a = (1+\sqrt{2})\cdot 6$ cm.

Aufgabe 260935:
Von einem Viereck $ABCD$ werde vorausgesetzt:
(1) $ABCD$ ist ein Trapez mit $AB \parallel CD$.
(2) Es gilt $AB > CD$.
(3) Die Summe der Größen der Innenwinkel $\angle BAD$ und $\angle CBA$ beträgt 90°.
Der Mittelpunkt von AB sei M, der Mittelpunkt von CD sei N.
Beweisen Sie, dass unter diesen Voraussetzungen stets $MN = \frac{1}{2}\cdot(AB-CD)$ gilt!

Lösung von cyrix:
Wegen (2) sind die Geraden AD und BC nicht parallel, schneiden sich also in einem Punkt S, der auf den Verlängerungen über D bzw. C hinaus liegt. Aufgrund der Innenwinkelsumme im Dreieck $\triangle ABS$

und (3) gilt dann $\angle ASB = 180° - \angle BAS - \angle SBA = 180° - (\angle BAD + \angle CBA) = 90°$, sodass das Dreieck $\triangle ABS$ rechtwinklig bei S ist. Nach dem Satz von Thales gilt dann

$$|SM| = |AM| = |BM| = \frac{1}{2} \cdot |AB|$$

Wegen (1) und der Umkehrung des Strahlensatzes liegen wegen $\frac{|AM|}{|MB|} = 1 = \frac{|DN|}{|NC|}$ die drei Punkte S, N und M auf einer Geraden, da auch S, D und A sowie S, C und B jeweils auf einer Geraden liegen. Insbesondere ist dann $\frac{|SN|}{|SM|} = \frac{|CD|}{|AB|}$ und damit

$$|MN| = |SM| - |SN| = |SM| \cdot \left(1 - \frac{|CD|}{|AB|}\right) = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot \frac{|AB| - |CD|}{|AB|} = \frac{1}{2} \cdot (|AB| - |CD|), \square$$

Aufgabe 270933:
Es sei $ABCD$ ein Sehnenviereck, dessen Seiten AB und CD so gelegen sind, dass sich die Verlängerung von AB über B hinaus und die Verlängerung von DC über C hinaus in einem Punkt T schneiden. Die Winkelhalbierende des Winkels $\angle ATD$ sei h. Der Schnittpunkt der Diagonalen AC und BD sei S; die Winkelhalbierende des Winkels $\angle ASD$ sei g.
Beweisen Sie:
Aus diesen Voraussetzungen folgt stets, dass g und h zueinander parallel sind.
Bemerkung: Auch in dem Spezialfall, dass g und h in dieselbe Gerade fallen, werden sie als zueinander parallel bezeichnet.

Lösung von cyrix:
Wir berechnen die Winkel, in denen g sowie h die Gerade BC schneiden, und zeigen, dass sie gleich sind. Daraus folgt dann sofort die zu zeigende Parallelität von g und h. Dazu betreiben wir eine Winkeljagd:

Nach Innenwinkelsumme im Dreieck $\triangle ASD$ ist $\angle ASD = 180° - (\angle SDA + \angle DAS)$. Da $\angle ASD$ und $\angle CSB$ Scheitelwinkel sind, sind sie auch gleich groß und besitzen die gleiche Winkelhalbierende. Sei S_1 der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden von $\angle ASD$, also auch von $\angle CSB$, mit BC. Dann ist $\angle S_1SB = \frac{1}{2} \cdot \angle CSB = 90° - \frac{1}{2} \cdot (\angle SDA + \angle DAS)$. Nach dem Peripheriewinkelsatz sind die beiden Peripheriewinkel $\angle DBC = \angle SBS_1$ und $\angle DAC = \angle DAS$ über der Sehne DC gleich groß, sodass aufgrund der Innenwinkelsumme im Dreieck $\triangle SS_1B$ folgendes gilt:

$$\angle BS_1S = 180° - \angle SBS_1 - \angle S_1SB = 180° - \angle DAS - 90° + \frac{1}{2} \cdot (\angle SDA + \angle DAS) = 90° + \frac{1}{2} \cdot (\angle SDA - \angle DAS)$$

Andererseits erhält man mit der Innenwinkelsumme im Dreieck $\triangle ATD$, dass $\angle ATD = 180° - \angle DAT - \angle TDA = 180° - \angle DAB - \angle CDA$ ist. Sei S_2 der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden von $\angle ATD$ mit BC. Dann ist $\angle BTS_2 = \angle ATS_2 = \frac{1}{2} \cdot \angle ATD = 90° - \frac{1}{2} \cdot (\angle DAB + \angle CDA)$.
Im Sehnenviereck $ABCD$ addieren sich gegenüberliegende Innenwinkel zu $180°$, sodass $\angle ABC = 180° - \angle CDA$ gilt. Da $\angle ABC$ und $\angle CBT = \angle S_2BT$ Nebenwinkel sind, gilt $\angle S_2BT = 180° - \angle ABC = \angle CDA$. Damit gilt aufgrund der Innenwinkelsumme im Dreieck $\triangle BTS_2$

$$\angle TS_2B = 180° - \angle S_2BT - \angle BTS_2 = 180° - \angle CDA - 90° + \frac{1}{2} \cdot (\angle DAB + \angle CDA) =$$

$$= 90° + \frac{1}{2} \cdot (\angle DAB - \angle CDA)$$

Es ist $\angle DAB = \angle DAC + \angle CAB$. Aufgrund des Peripheriewinkelsatzes sind die beiden Peripheriewinkel $\angle CAB$ und $\angle CDB$ über der Sehne CB gleich. Also gilt auch $\angle DAB = \angle DAC + \angle CDB$. Weiterhin ist $\angle CDA = \angle CDB + \angle BDA$, sodass sich

$$\angle DAB - \angle CDA = (\angle DAC + \angle CDB) - (\angle CDB + \angle BDA) = \angle DAC - \angle BDA = \angle DAS - \angle SDA$$

und damit

$$\angle TS_2B = 90° + \frac{1}{2} \cdot (\angle DAB - \angle CDA) = 90° + \frac{1}{2} \cdot (\angle DAS - \angle SDA) =$$

$$= 180° - (90° + \frac{1}{2} \cdot (\angle SDA - \angle DAS)) = 180° - \angle BS_1S$$

ergibt. Sei P ein Punkt auf dem von T ausgehenden Strahl durch S_2, nicht aber auf der Strecke TS_2, (also „nach S_2“) liegt. Dann sind $\angle TS_2B$ und $\angle BS_2P$ Nebenwinkel, sodass sich

$$\angle BS_2P = 180° - \angle TS_2B = \angle BS_1S$$

ergibt und damit g sowie h die Gerade BC im gleichen Winkel schneiden, also nach Umkehrung des Stufenwinkelsatzes zueinander parallel sind, □.

Aufgabe 280935:
Untersuchen Sie, ob es ein Rechteck $ABCD$ gibt, in dem die Winkelhalbierende von $\angle ACB$ durch den Mittelpunkt der Strecke AB geht!

Lösung von cyrix:
Es kann kein solches Rechteck geben:
Die Winkelhalbierende von $\angle ACB$ im Dreieck $\triangle ABC$ teilt die gegenüberliegende Seite AB im Verhältnis der anliegenden Seiten AC und BC. Verläuft sie durch den Mittelpunkt von AB, so gilt also $|AC| = |BC|$, was aber im Rechteck $ABCD$ nicht sein kann, da das Dreieck $\triangle ABC$ rechtwinklig in B, die Hypotenuse AC also länger als die Kathete BC ist. Also kann es kein solches Rechteck geben, □.

Aufgabe 330933:
Antje hat in einem älteren Geometriebuch folgende Näherungskonstruktion für regelmäßige Vielecke mit gegebener Seitenlänge s gefunden:
Man konstruiere ein gleichseitiges Dreieck ABC mit der Seitenlänge s. Dann konstruiere man den Mittelpunkt D von AB und verlängere die Strecke DC über C hinaus.
Auf dieser Verlängerung trage man fortgesetzt Strecken der Länge $\frac{s}{6}$ ab. Die dabei der Reihe nach erhaltenen Punkte seien mit M_7, M_8, M_9, ... bezeichnet.
Für $n > 6$ ist dann jeweils der durch A und B gehende Kreis um M_n näherungsweise der Umkreis eines regelmäßigen n-Ecks der Seitenlänge s.
Beate behauptet, speziell für $n = 12$ gelte das nicht nur näherungsweise, sondern sogar genau.
Beweisen Sie diese Behauptung!

Lösung von cyrix:
Nach Konstruktion ist die Gerade DC die Mittelsenkrechte der Strecke AB. Damit ist DC auch die Höhe im gleichseitigen Dreieck $\triangle ABC$, sodass $|DC| = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot s$ gilt.
Insbesondere ist das Dreieck $\triangle ADM_{12}$ rechtwinklig bei D und besitzt die Kantenlängen $|AD| = \frac{1}{2} \cdot s$ und

$$D_{M_1 2} = |DC| + (12-6) \cdot \frac{1}{6} \cdot s = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot s + s = \frac{\sqrt{3}+2}{2} \cdot s$$

sodass sich mit dem Satz des Pythagoras die Länge der Hypotenuse zu

$$|AM_{12}| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}+2}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} \cdot s = \frac{\sqrt{3+4\sqrt{3}+4+1}}{2} \cdot s = \frac{\sqrt{8+4\sqrt{3}}}{2} \cdot s = (\sqrt{2+\sqrt{3}}) \cdot s$$

ergibt. Aus Symmetriegründen ist auch $|BM_{12}| = |AM_{12}|$.

Es sei $\alpha = \angle AM_{12}B$. Wendet man den Kosinussatz auf das Dreieck $\triangle ABM_{12}$ an, erhält man

$$|AB|^2 = |AM_{12}|^2 + |BM_{12}|^2 - 2|AM_1 2| \cdot |BM_{12}| \cdot \cos\alpha$$

bzw. nach Einsetzen

$$s^2 = (2+\sqrt{3})s^2 + (2+\sqrt{3})s^2 - 2 \cdot (2+\sqrt{3})s^2 \cdot \cos\alpha$$

sowie $1 = 2(2+\sqrt{3}) \cdot (1-\cos\alpha)$, also

$$1-\cos\alpha = \frac{1}{2(2+\sqrt{3})} = \frac{2-\sqrt{3}}{2(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = \frac{2-\sqrt{3}}{2\cdot(4-3)} = \frac{2-\sqrt{3}}{2} = 1-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

und also $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30°$. Da für α als Innenwinkel eines Dreiecks $0° < \alpha < 180°$ gilt und der Cosinus in diesem Bereich streng monoton fallend ist, ist also $\angle AM_{12}B = \alpha = 30° = \frac{1}{12} \cdot 360°$ der Zentriwinkel eines regelmäßigen Zwölfecks, sodass M_{12} der Mittelpunkt des Umkreises eines solchen ist, von dem AB eine Kante ist, welches damit die Kantenlänge $|AB| = s$ besitzt, $\Box$.

Aufgabe 330936:
Man beweise, dass für jedes konvexe Viereck $ABCD$ die folgende Aussage gilt:
Sind M_1, M_2, M_3, M_4 die Mittelpunkte der Seiten AB, BC, CD, DA und M_5, M_6 die Mittelpunkte der Diagonalen AC, BD so gehen die drei Strecken M_1M_3, M_2M_4 und M_5M_6 durch einen gemeinsamen Punkt.
Hinweis: Ein Viereck ist genau dann konvex, wenn alle seine Innenwinkel kleiner als 180° sind.

Lösung von cyrix:
Wir stellen zuerst fest, dass genau im Fall, dass $ABCD$ ein Parallelogramm ist, die Mittelpunkte M_5 und M_6 beider Diagonalen zusammenfallen und somit keine echte Stecke M_5M_6 existiert. In diesem Fall jedoch sind die Mittellinien M_1M_3 und M_2M_4 jeweils parallel zu den Seitenkanten des Parallelogramms und verlaufen durch die Mittelpunkte der Seiten, schneiden sich also auch im Diagonalenschnittpunkt $M_5 = M_6$, sodass die Behauptung für diesen Fall als gezeigt gelten kann.

Sei ab nun $ABCD$ ein konvexes Nicht-Parallelogramm. Dann fallen die Punkte M_5 und M_6 nicht zusammen (sowie auch keine weiteren der Mittelpunkte M_1 bis M_4 verschiedener Seiten, auch nicht mit M_5 oder M_6, die echt im Innern des konvexen Vierecks liegen).

Wir zeigen zuerst folgendes Lemma:
Verbindet man im echten Dreieck $\triangle PQR$ die Mittelpunkte X von PQ und Y von PR miteinander, so ist die entstehende Strecke XY parallel zur Strecke QR.

Beweis: Dies zeigt direkt die Umkehrung des Strahlensatzes (von P aus gesehen).

Wenden wir dieses Lemma auf die Situation der Aufgabe an, so folgt einerseits im Dreieck $\triangle ABC$, dass $M_1M_2 \parallel AC$ gilt, und andererseits im Dreieck $\triangle CDA$, dass $M_3M_4 \parallel AC$, insbesondere also $M_1M_2 \parallel M_3M_4$ gilt. Analog folgt auch $M_2M_3 \parallel BD \parallel M_1M_4$. Damit ist das Viereck $M_1M_2M_3M_4$ ein Parallelogramm, sodass sich dessen Diagonalen M_1M_3 und M_2M_4 im gemeinsamen Mittelpunkt schneiden.

Wenden wir das Lemma auf das Dreieck $\triangle ACD$ an, so folgt $M_3M_5 \parallel DA$. Und wenden wir es auf das Dreieck $\triangle ABD$ an, erhalten wir $M_1M_6 \parallel AD$, also insbesondere $M_3M_5 \parallel M_1M_6$. Wenden wir es auf das Dreieck $\triangle BCD$ an, erhalten wir $M_3M_6 \parallel BC$ und im Dreieck $\triangle ABC$ schließlich $M_1M_5 \parallel BC$, sodass $M_1M_6M_3M_5$ wieder ein Parallelogramm ist und sich dessen Diagonalen M_1M_3 und M_5M_6 im gemeinsamen Mittelpunkt schneiden.

Damit haben alle drei Geraden M_1M_3, M_2M_4 und M_5M_6 einen Punkt gemeinsam, der Mittelpunkt jeder dieser drei Strecken ist, $\Box$.

Bemerkung: Die Konvexität wurde hier nicht benutzt, sodass der Satz auch für konkave und überschlagene Vierecke gilt, sofern keine der Punkte A bis D und M_1 bis M_6 zusammenfallen.

Aufgabe 330943:
Zu einem regelmäßigen Achteck werde ein Quadrat so konstruiert, dass der Mittelpunkt des Achtecks ein Eckpunkt des Quadrates ist und dass zwischen der Seitenlänge a des Achtecks und der Seitenlänge b des Quadrats die Ungleichung $b \geq \frac{4}{3}a$ gilt.
Dann bezeichne f den Flächeninhalt desjenigen Flächenstücks, das dem Achteck und dem Quadrat gemeinsam ist.
Man beweise, dass zu gegebenem Achteck für alle Quadrate, die dieser Beschreibung entsprechen, f denselben Wert hat.

Lösung von cyrix:
Das Achteck sei im mathematisch positiven Sinne als $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7P_8$ bezeichnet, sein Mittelpunkt mit A und sein Umkreisradius mit r.
Da das Achteck regelmäßig ist, gilt $\angle P_1AP_2 = \frac{360°}{8} = 45°$, sodass mit dem Kosinussatz im Dreieck $\triangle P_1P_2A$ wegen $|AP_1| = |AP_2| = r$ und $|P_1P_2| = a$ die Beziehung

$$a^2 = r^2 + r^2 - 2r \cdot r \cdot \cos(45°) = 2r^2 - 2r^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \left(2 - \sqrt{2}\right) \cdot r^2$$

bzw.

$$r^2 = \frac{1}{2-\sqrt{2}} \cdot a^2 = \frac{2+\sqrt{2}}{2^2-2} \cdot a = \frac{4+2\sqrt{2}}{4} \cdot a^2 \qquad \text{und damit} \qquad r = \frac{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{2} \cdot a$$

folgt. Damit ist

$$r < \frac{4}{3} \cdot a \Leftrightarrow \sqrt{4+2\sqrt{2}} < \frac{8}{3} \Leftrightarrow 4 + 2\sqrt{2} < \frac{64}{9} \Leftrightarrow 2\sqrt{2} < \frac{28}{9}$$

was wegen $2\sqrt{2} = \sqrt{8} < \sqrt{9} = 3 < \frac{28}{9}$ der Fall ist. Also ist die Kantenlänge des Quadrats größer als der Umkreisradius des Achtecks.

Seien die Eckpunkte des Quadrats, wie üblich, in mathematisch positiver Orientierung mit A, B, C und D bezeichnet. Dann schneiden also die Kanten AB und AD den Umkreis des Achtecks, sodass die dazu parallelen Kanten CD bzw. BC echt außerhalb des Umkreises des Achtecks verlaufen und somit weder diesen noch das Achteck selbst schneiden.

Die Kante AB des Quadrats schneide o. B. d. A. das Achteck in einem vom Punkt P_2 verschiedenen Punkt S_1 der Kante P_1P_2. (Gegebenenfalls müsste man die Nummerierung der Eckpunkte des Achtecks zyklisch vertauschen, bis diese Situation eintritt.)
Dann gilt $0° \leq \angle P_1AS_1 < 45°$. Damit ist $0° < \angle S_1AP_2 \leq 45°$, also

$$\angle S_1AP_3 = \angle S_1AP_2 + \angle P_2AP_3 \leq 45° + 45° = 90° \qquad \text{und}$$

$$\angle S_1AP_4 = \angle S_1AP_2 + \angle P_2AP_4 > 0° + 90° = 90°$$

sodass die Kante AD des Quadrats wegen $90° = \angle BAD = \angle S_1AS_2$ das Achteck in einem vom Punkt P_4 verschiedenen Punkt S_2 der Kante P_3P_4 schneidet.

Das gemeinsame Flächenstück von Achteck und Quadrat ergibt sich also als das n-Eck, welches (in dieser Reihenfolge) durch die Punkte $AS_1P_2P_3S_2$ begrenzt wird, wobei ggf. P_3 und S_2 zusammenfallen.

Die beiden (ggf. entarteten) Dreiecke $\triangle AP_1S_1$ und $\triangle AP_3S_2$ besitzen den gleichen Flächeninhalt: Ist $S_1 = P_1$, so auch $S_2 = P_3$, sodass beide Dreiecke den Flächeninhalt 0 besitzen. Sonst stimmen die beiden (nun echten) Dreiecke in der Seitenlänge $|AP_1| = |AP_3|$, dem Winkel

$$\angle AP_1S_1 = \angle AP_1P_2 = \frac{1}{2} \cdot (180° - 45°) = \angle AP_3P_4 = \angle AP_3S_2$$

(Innenwinkelsumme in den gleichschenkligen Dreiecken $\triangle AP_1P_2$ und $\triangle AP_3P_4$) und dem Winkel

$$\angle P_1AS_1 = 45° - \angle S_1AP_2 = 45° - (\angle S_1AS_2 - \angle P_2AS_2) = 45° - 90° + \angle P_2AP_3 + \angle P_3AS_2 = \angle P_3AS_2$$

überein, sind also kongruent und damit insbesondere flächengleich.

Das gemeinsame Flächenstück von Achteck und Quadrat $AS_1P_2P_3S_2$ lässt sich zerlegen in die (ggf. entarteten) Dreiecke $\triangle AS_1P_2$, $\triangle AP_2P_3$ und $\triangle AP_3S_2$. Letzteres ist – wie gerade bewiesen – flächengleich zum Dreieck $\triangle AP_1S_1$, sodass das gemeinsame Flächenstück von Achtecke und Quadrat den gleichen Flächeninhalt besitzt wie die Figur, die sich aus den Dreiecken $\triangle AP_1S_1$, $\triangle AS_1P_2$ und $\triangle AP_2P_3$ zusammensetzt, also dem Viereck $AP_1P_2P_3$.
Dessen Flächeninhalt ist aber von der Lage des Quadrats $ABCD$ unabhängig, sodass das gemeinsame Flächenstück für jede Lage des Quadrats den gleichen Flächeninhalt (nämlich ein Viertel des Flächeninhalts des Achtecks) besitzt, $\square$.

Aufgabe 340943:
Auf der Seite AB des Quadrates $ABCD$ werde ein Punkt $X \neq A$ gewählt. Dann werde das Quadrat durch die Strecken AC und XD in vier Teilflächen zerlegt.
Ermitteln Sie alle Möglichkeiten, die Wahl von X so zu treffen, dass es natürliche Zahlen p, q und r gibt, für die die Flächeninhalte dieser Teilflächen in geeigneter Reihenfolge im Verhältnis $1 : p : q : r$ stehen!

Lösung von cyrix:
Wir legen so ein Koordinatensystem in die Ebene des Quadrats, dass A im Koordinatenursprung liegt und C die Koordinaten (1,1) besitzt. Dann liegt B bei (1,0) und D bei (0,1). Weiterhin sei $0 < a \leq 1$ eine relle Zahl und der Punkt X habe die Koordinaten (a,0). Dann liegt X auf der Strecke AB, ist aber verschieden von A.

Die Gerade XD lässt sich beschreiben durch die Funktionsgleichung $f(x) = \frac{0-1}{a-0} \cdot x + 1 = -\frac{1}{a} \cdot x + 1$ und die Gerade AC durch $g(x) = x$. Für den Schnittpunkt S beider Geraden und den Koordinaten (x_S,y_S) gilt $f(x_S) = g(x_S)$, also $-\frac{1}{a}x_S + 1 = x_S$ bzw. $1 = \left(1 + \frac{1}{a}\right) \cdot x_S = \frac{a+1}{a} \cdot x_S$, also $y_S = x_S = \frac{a}{a+1}$.

Damit hat die Höhe h_a von S auf AB die Länge $h_a = y_s = \frac{a}{a+1}$ und die Höhe h_d von s auf AD die Länge $h_d = x_s = \frac{a}{a+1}$. Es ergibt sich für das Dreieck $\triangle ASX$ der Flächeninhalt von

$$F_1 = \frac{1}{2} \cdot |AX| \cdot h_a = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a}{a+1} = \frac{a^2}{2(a+1)}$$

und analog für das Dreieck $\triangle ASD$ der Flächeninhalt

$$F_4 = \frac{1}{2} \cdot |AD| \cdot h_d = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{a}{a+1} = \frac{a}{2(a+1)}$$

Da das Dreieck $\triangle ACD$ den Flächeninhalt von $\frac{1}{2}$ besitzt und von der Strecke DS in die beiden Dreiecke $\triangle ASD$ und $\triangle DCS$ zerlegt wird, gilt für den Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle DCS$

$$F_3 = \frac{1}{2} - F_4 = \frac{(a+1) - a}{2(a+1)} = \frac{1}{2(a+1)}$$

Analog gilt für den Flächeninhalt des Vierecks $XBCS$

$$F_2 = \frac{1}{2} - F_1 = \frac{(a+1) - a^2}{2(a+1)} = \frac{a+1-a^2}{2(a+1)}$$

Insgesamt ist also $F_1 : F_2 : F_3 : F_4 = a^2 : a + 1 - a^2 : 1 : a$.

Da $0 < a \leq 1$ ist, ist $1 \geq a \geq a^2$, also auch $1 - a^2 \geq 0$ und damit $a + 1 - a^2 \geq a$. Also ist a^2 der kleinste der hier auftretenden Werte. Kürzt man das Verhältnis mit a^2, erhält man

$$F_1 : F_2 : F_3 : F_4 = 1 : \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} - 1 : \frac{1}{a^2} : \frac{1}{a}$$

Die Werte $\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} - 1$, $\frac{1}{a^2}$ und $\frac{1}{a}$ müssen dann in irgendeiner Reihenfolge den natürlichen Zahlen p, q und r entsprechen. Insbesondere muss also $0 < \frac{1}{a} = r$ eine natürliche Zahl, also $a = \frac{1}{r}$ sein. Dann ist aber

$$F_1 : F_2 : F_3 : F_4 = 1 : r + r^2 - 1 : r^2 : r = 1 : p : q : r$$

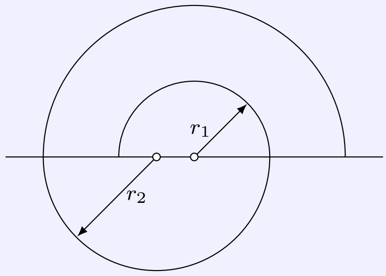
mit $p := r + r^2 - 1$ und $q := r^2$, von der gewünschten Form.
Zusammenfassend erhalten wir also genau dann ein Verhältnis der Flächeninhalte der vier Teilflächen, wie es von der Aufgabenstellung gefordert wird, wenn die Strecke AB ein positives ganzzahliges Vielfaches der Strecke AX ist bzw. $|AX| = \frac{1}{r} \cdot |AB|$ mit einer positiven ganzen Zahl r gilt.

II.III Kreise

I Runde 1

Aufgabe V00910:

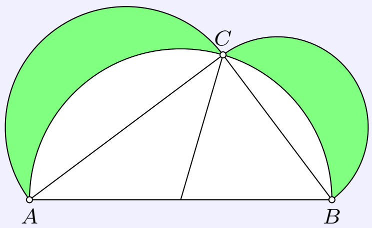
Eine Schar von Halbkreisen bildet eine Spirale.
a) Wie groß ist der 10. Halbkreisbogen, wenn $r_1 = 1$ cm, $r_2 = 1{,}5$ cm usw. ist?
b) Wie groß ist die Gesamtlänge der Spirale bis zum 10. Bogen?



Lösung von Steffen Polster:
a) Es wird $r_{10} = 1 + 9 \cdot 0{,}5 = 5{,}5$. Der 10.Radius ist 5,5 cm groß.

b) $(r_1 + r_2 + ... + r_{10}) \cdot \pi \approx 102{,}1$ cm.

Aufgabe V00915:



Beweisen Sie folgenden Satz:
„Die Summe der beiden Mondsicheln AC und BC über den Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks ist gleich der Fläche des Dreiecks ABC.“ (Hippokrates, 440 v. u. Z. in Athen).

Lösung von svrc:
Wir führen die folgenden Bezeichnungen ein:

$$\begin{aligned}
A_{\text{Dreieck}} &: \text{ Flächeninhalt des Dreiecks } ABC,\\
A_{\text{Halbkreis},\overline{AC}} &: \text{ Flächeninhalt des Halbkreises über der Kathete } b = \left|\overline{AC}\right|,\\
A_{\text{Halbkreis},\overline{BC}} &: \text{ Flächeninhalt des Halbkreises über der Kathete } a = \left|\overline{BC}\right|,\\
A_{\text{Halbkreis},\overline{AB}} &: \text{ Flächeninhalt des Halbkreises über der Hypotenuse } c = \left|\overline{AB}\right|,\\
A_{\text{grün}} &: \text{ Flächeninhalt der grün markierten Mondsichel.}
\end{aligned}$$

Es gilt

$$A_{\text{Dreieck}} + A_{\text{Halbkreis},\overline{AC}} + A_{\text{Halbkreis},\overline{BC}} = A_{\text{Halbkreis},\overline{AB}} + A_{\text{grün}}. \tag{1}$$

Nach dem Satz des Pythagoras gilt

$$a^2 + b^2 = c^2$$

und somit

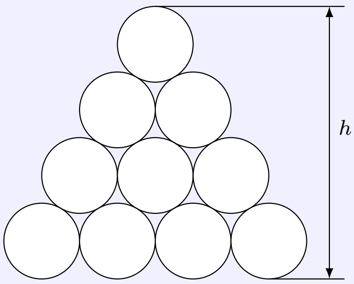
$$A_{\text{Halbkreis},\overline{AC}} + A_{\text{Halbkreis},\overline{BC}} = \frac{\pi b^2}{8} + \frac{\pi a^2}{8} = \frac{\pi c^2}{8} = A_{\text{Halbkreis},\overline{AB}}.$$

Damit folgt aus (1)

$$A_{\text{Dreieck}} = A_{\text{grün}},$$

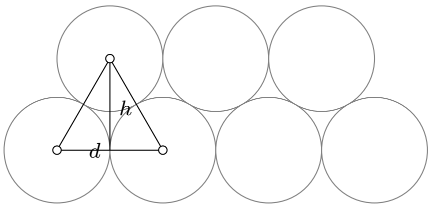
was die Behauptung beweist.

Aufgabe V00916:



Ein Stapel von zylindrischen Eisenfässern mit dem Durchmesser von 52 cm besteht aus vier Schichten. Wie hoch ist der Stapel?

Lösung von Steffen Polster:



Die Mittelpunkte der Grundkreise der untersten Lage liegen $\frac{d}{2}$ über der Grundfläche. Die zweite Lage Kreise befinden sich $\frac{d}{2} + h$ über dem Boden, wobei die Höhe h die Höhe eines gleichseitigen Dreiecks der Kantenlänge d ist. Damit ergibt sich für die Gesamthöhe

$$\frac{d}{2} + 3 \cdot h + \frac{d}{2} = d + 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} d \approx 187 \text{ cm}$$

Allgemein gilt für n Schichten Fässer mit einem Durchmesser d für die Gesamthöhe H

$$H = d + \left(\frac{n-1}{2}\right) \cdot d \cdot \sqrt{3}$$

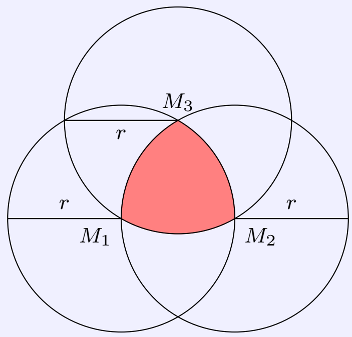
Aufgabe V00917:
In den Berliner Metallhütten- und Halbwerkzeugen VEB werden Kupferrohre (äußerer Durchmesser 32 mm, innerer Durchmesser 29 mm) von 3 m Länge zu Rohren mit einem äußeren Durchmesser von 27 mm und einem inneren Durchmesser von 25 mm gezogen.
Wie lang sind die gezogenen Rohre?

Lösung von Steffen Polster:
Es seien $d_a = 32$ mm, $d_i = 29$ mm, $l = 3$ m die Maße der ursprünglichen Rohre und $d'_a = 27$ mm, $d'_i = 25$ mm, $l' = x$ m der gezogenen Rohre. Da das Volumen der Rohre konstant bleibt, gilt

$$\left(\frac{\pi}{4}d_a^2 - \frac{\pi}{4}d_i^2\right) \cdot l = V = \left(\frac{\pi}{4}{d'}_a^2 - \frac{\pi}{4}{d'}_i^2\right) \cdot x$$
$$(d_a^2 - d_i^2) \cdot l = ({d'}_a^2 - {d'}_i^2) \cdot x$$
$$x = \frac{d_a^2 - d_i^2}{{d'}_a^2 - {d'}_i^2} \cdot l$$

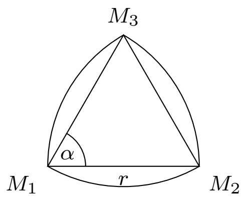
Einsetzen der Werte ergibt $x \approx 5{,}28$ m.

Aufgabe V10913:



Berechnen Sie die Fläche, das Volumen und das Gewicht eines Stanzbleches von 3 mm Dicke der abgebildeten (farbigen) Form. Der Radius r beträgt 20 mm, $\gamma = 7{,}8$ p·cm^{-3}.

Lösung von Steffen Polster:



$$F = F_{\triangle M_1M_2M_3} + 3F_{\text{Segmente}} = \frac{r^2}{4}\sqrt{3} + 3\left(\frac{\pi \cdot \alpha}{180} - \sin\alpha\right) \cdot \frac{r^2}{2} \approx 0{,}845 cm^3$$
$$G \approx 6{,}6p$$

Aufgabe 030916:

a) Auf einem Kreisumfang liegen 5 verschiedene Punkte beliebig verteilt. Wie viel Strecken kann man einzeichnen, die je zwei Punkte miteinander verbinden?

b) Welche Anzahl von Strecken wird ermittelt, wenn 10 Punkte auf dem Kreisumfang liegen?

c) Die Anzahl der Punkte sei n. Wie viel Strecken lassen sich einzeichnen? (Begründung!)

Lösung von Sebastian Boesler:

c) Es seien $P_i, i \in \{1, ..., n\}$ die n Punkte auf dem Kreisumfang. Jeder Punkt P_i kann mit $n-1$ Punkten $P_j, j \in \{1, ..., i-1, i+1, ..., n\}$ verbunden werden. Somit ergibt sich $n(n-1)$ als Gesamtzahl möglicher gerichteter Punkt-zu-Punkt-Verbindungen.

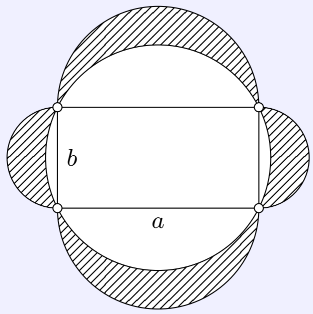
Strecken sind keine gerichteten Verbindungen zweier Punkte. Daher besitzt ein Paar $(\overrightarrow{P_iP_j}, \overrightarrow{P_jP_i})$ entgegengesetzt gerichteter Verbindungen zweier Punkte nur eine zugehörige Strecke, $\overline{P_iP_j}$. Die Gesamtzahl möglicher Strecken ist somit die Hälfte der Gesamtzahl möglicher gerichteter Verbindungen, also $\frac{n(n-1)}{2}$.

a) Mit c) ergibt sich für $n = 5$ eine Anzahl von $\frac{n(n-1)}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ möglichen Strecken.

b) Mit c) ergibt sich für $n = 10$ eine Anzahl von $\frac{n(n-1)}{2} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 4$ möglichen Strecken.

Aufgabe 080912:

Gegeben sei ein Rechteck mit den Seitenlängen a und b. Über jeder Seite werde außerhalb des Rechtecks ein Halbkreis gezeichnet. Ferner konstruiere man den Umkreis des Rechtecks (siehe Abbildung).



Berechnen Sie die Summe der Flächeninhalte der vier schraffierten sichelförmigen Flächen!

Lösung von Manuela Kugel:
Die Summe der Flächeninhalte der vier Halbkreisflächen über den Rechteckseiten beträgt

$$A_1 = \pi \left(\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} \right).$$

Der Flächeninhalt des Umkreises beträgt

$$A_2 = \pi \left(\frac{\sqrt{(a^2 + b^2)}}{2} \right) = \pi \left(\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} \right).$$

Der Flächeninhalt des Rechtecks A ist also $A_3 = ab$. Der gesuchte Flächeninhalt A ist also

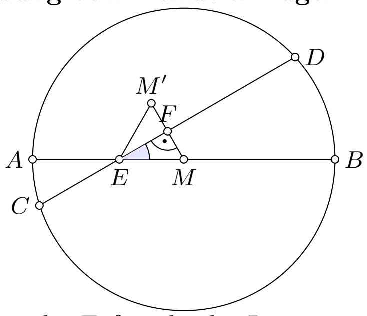
$$A = A_1 + A_3 - A_2 = \pi \left(\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} \right) + ab - \pi \left(\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} \right).$$

Die Summe der Flächeninhalte der sichelförmigen Fläche ist somit gleich dem Flächeninhalt des Rechtecks.

Aufgabe 120913:
Ein Durchmesser AB eines Kreises werde von einer Sehne CD in einem Punkt E geschnitten, der AB innen im Verhältnis $2:5$ teilt. Dabei schneide die Sehne CD den Durchmesser AB unter einem Winkel von $30°$.

Ermitteln Sie den Abstand der Sehne vom Mittelpunkt M des Kreises, wenn die Länge d des Durchmessers gegeben ist!

Lösung von Manuela Kugel:



Bei geeigneter Wahl der Bezeichnungen A, B gilt nach Voraussetzung

$$|AE| = \frac{2}{7}d \qquad \text{und} \tag{1}$$

$$|EB| = \frac{5}{7}d, \qquad \text{also} \tag{2}$$

$$|EM| = \frac{1}{2}d - \frac{2}{7}d = \frac{3}{14}d. \tag{3}$$

F sei der Fußpunkt des Lotes von M auf CD. Dann ist $\triangle EMF$ rechtwinklig mit $|\angle MEF| = 30°$ (nach Voraussetzung), also

$$|\angle FME| = 60°. \tag{4}$$

Man spiegele nun $\triangle MEF$ an CD. Für das dadurch erhaltene rechtwinklige Dreieck $\triangle EFM'$ gilt dann

$$|\angle FEM'| = 30° \text{ und } |\angle EM'F| = 60° \tag{5}$$

Nach (4) und (5) ist das Dreieck $\triangle EMM'$ gleichseitig und daher der Höhenfußpunkt F auch der Mittelpunkt von MM'. Unter Berücksichtigung von (3) folgt daraus $|MF| = \frac{3}{28}d$. Der Abstand der Sehne CD vom Mittelpunkt des Kreises beträgt also $\frac{3}{28}d$, wenn d die Durchmesserlänge des Kreises ist.

Aufgabe 250914:
Drei Kreise mit dem gegebenen Radius r mögen so in einer Ebene liegen, dass jeder die beiden anderen berührt. An je zwei dieser drei Kreise werde diejenige gemeinsam Tangente gelegt, die keinen Punkt mit dem dritten Kreis gemeinsam hat. Mit diesen drei Tangenten hat man ein gleichseitiges Dreieck konstruiert.

Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks in Abhängigkeit von r!

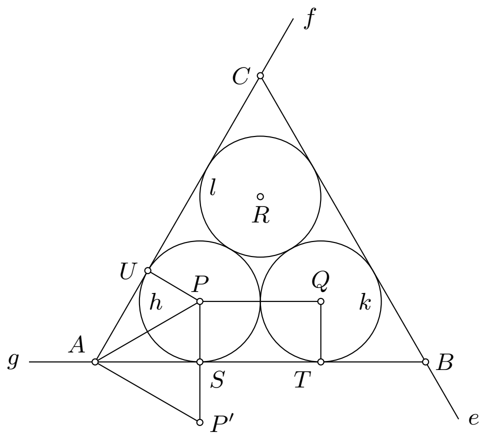
Hinweis: Für Zahlenwerte, die bei der Flächeninhaltsangabe auftreten, ist eine Verwendung von Näherungswerten zugelassen (aber nicht gefordert); dann jedoch mit einer Angabe - und Begründung -, auf wie viele Dezimalstellen der Näherungswert genau ist.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Kreise seien h, k, l ihre Mittelpunkte P, Q, R. Die genannte gemeinsame Tangente an k,l bzw. an l,h bzw. an h,k sein e bzw. f bzw. g. Der Schnittpunkt von f mit g bzw. von g mit e bzw. von e mit f sei A bzw. B bzw. C. Das Dreieck mit dem zu berechnenden Flächeninhalt ist dann $\triangle ABC$.

Das Lot von P bzw. Q auf g hat als Fußpunkt S bzw. T den Berührungspunkt von g mit h bzw. k, das Lot von P auf f hat las Fußpunkt U den Berührungspunkt von f mit h (siehe Abbildung).

Daher ist $STQP$ ein Rechteck mit $PS = QT = r$, $PQ = ST = 2r$, und die Dreiecke APS, APU sind nach dem Kongruenzsatz ssw (wobei der Winkel $\angle ASP$ bzw. $\angle AUP$ als rechter Winkel der größten Seite gegenüberliegt) zueinander kongruente rechtwinklige Dreiecke, woraus $\angle PAS = \angle PAU$ folgt.

Da die Summe dieser beiden Winkelgrößen die Innenwinkelgröße $\angle BAC = 60°$ des gleichseitigen Dreiecks ABC ergibt, folgt $\angle PAS = \angle PAU = 30°$ und damit nach dem Innenwinkelsatz $\angle APS = 60°$.



Somit ist für den bei der Spiegelung an g aus P entstehenden Bildpunkt P' das Dreieck APP' gleichseitig. Die zur Seite PP' gehörende Höhe AS ist zugleich Seitenhalbierende; d. h., es folgt $AP = PP' = 2PS = 2r$ und damit (nach dem Satz des Pythagoras oder nach der Formel für die Höhenlänge im gleichseitigen Dreieck) $AS = r\sqrt{3}$. Entsprechend erhält man $BT = r\sqrt{3}$.

Daher hat das Dreieck ABC die Seitenlänge

$$a = r\sqrt{3} + 2r + r\sqrt{3} = 2r(1+\sqrt{3})$$

und somit nach der Flächeninhaltsformel für gleichseitige Dreiecke der Flächeninhalt

$$F = \frac{1}{4}a^2\sqrt{3} = \frac{1}{4} \cdot 4r^2(1+\sqrt{3})^2 = r^2 \cdot (4\sqrt{3}+6)$$

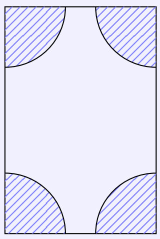
Beispiel für die Verwendung von Näherungswerten:

Es gilt auf drei Dezimalen nach dem Komma genau $\sqrt{3} \approx 1{,}732$. Daraus folgt $1{,}7315 < \sqrt{3} < 1{,}7325$ und hieraus $12{,}296 < 4\sqrt{3} + 6 < 12{,}93$. Somit ist $F \approx 12{,}93r^2$, und der hier angegebene Zahlenwert 12,93 ist auf zwei Dezimalen nach dem Komma genau.

Aufgabe 330914:
Von der Fläche eines Rechtecks mit Seitenlängen a, b sollen die Flächen von vier Viertelkreisen abgeschnitten werden. Diese sollen alle vier den gleichen Radius r haben, mit dem die Voraussetzung erfüllt ist, dass von den Rechtecksseiten noch Teilstrecken übrigbleiben (siehe Abbildung).

a) Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen x, zu denen es Längen a, b, r der vorausgesetzten Art gibt, so dass genau x Prozent der Rechteckfläche abgeschnitten werden!

b) Ermitteln Sie alle diejenigen Verhältniswerte $k = \frac{b}{a} \geq 1$, für die es möglich ist, einen Radius r der vorausgesetzten Art so zu wählen, dass genau die Hälfte der Rechteckfläche abgeschnitten wird!



Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die von a, b, r zu erfüllende Voraussetzung besagt: Wenn o. B. d. A. die Bezeichnungen so gewählt werden, dass $0 < a \leq b$ gilt, so erfüllt r die Ungleichung $0 < r < \frac{a}{2}$.

a) I. Wenn x eine reelle Zahl ist, so dass die abgeschnittenen Flächen genau x Prozent des Rechteckfläche betragen, so folgt:

Der Flächeninhalt der abgeschnitten vier Viertelkreise ist gleich dem Flächeninhalt eines Kreises von Radius r, also gleich πr^2. Da dies x Prozent der Rechteckfläche sind, gilt

$$x = \frac{\pi \cdot r^2}{a \cdot b} \cdot 100 \tag{1}$$

Wegen $0 < a \leq b$ und der Voraussetzung $0 < r < \frac{a}{2}$ folgt $0 < x < \frac{\pi}{a^2} \cdot \frac{a^2}{4} \cdot 100 = 25\pi$

II. Wenn $0 < x < 25\pi$ gilt, so folgt: Für beliebiges $a > 0$ für $b = a$ und $r = \sqrt{\frac{x \cdot ab}{100\pi}}$ ist einerseits

$$0 < r < \sqrt{\frac{25\pi \cdot a^2}{100\pi}} = \frac{a}{2}$$

so dass a,b,r Längen der vorausgesetzten Art sind; andererseits gilt (1), also werden genau x Prozent der Rechteckflächen abgeschnitten.

Mit I. und II. ist bewiesen: Die gesuchten Zahlen x sind genau alle reellen Zahlen x mit $0 < x < 25\pi$ ($\approx 78{,}5398$).

b) I. Wenn für einen Wert $k = \frac{b}{a} \geq 1$ vier Viertelkreise mit einem Radius $r < \frac{a}{2}$ genau die Hälfte der Rechteckfläche abschneiden, so ist der Flächeninhalt des Rechtecks doppelt so groß wie der Flächeninhalt eines Kreises vom Radius r, also $ab = 2\pi \cdot r^2 \quad (2)$.

Wegen $r < \frac{a}{2}$ folgt $ab < 2\pi \cdot \frac{a^2}{4}$ und damit $1 \leq k = \frac{ab}{a^2} < 2\pi \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi}{2}$

II. Wenn $1 \leq k < \frac{\pi}{2}$ gilt, so folgt: Für Längen a,b, > 0 mit $\frac{b}{a} = k$ und $r = \sqrt{\frac{ab}{2\pi}}$ ist einerseits

$$r = \sqrt{\frac{a \cdot ak}{2\pi}} < \sqrt{\frac{a^2}{2\pi} \cdot \frac{\pi}{2}} = \frac{a}{2}$$

so dass a,b,r Längen der vorausgesetzten Art sind; andererseits gilt (2), also wird genau die Hälfte der Rechteckfläche abgeschnitten.

Mit I. und II. ist bewiesen: Die gesuchten Zahlen k sind genau alle reellen Zahlen x mit $1 \leq k < \frac{\pi}{2}$ ($\approx 1{,}5708$)

II Runde 2

Aufgabe V10923:
Inge zeichnet 5 konzentrische Kreise und fängt mit dem kleinsten an ($r_1 = 2$ cm).
Wie muss sie die Radien wählen, wenn der Ausgangskreis und die entstehenden Kreisringe alle flächengleich sein sollen?

Lösung von J. Lehmann und W. Unze:
Radius des kleinsten Kreises ist $r_1 = 2$ cm. Die Radien der übrigen konzentrischen Kreise, deren entsprechende Kreisringe flächengleich mit dem Ausgangskreis sein sollen, seien r_2, r_3, r_4 und r_5. Es ist gefordert, dass

$$F_1 = \pi r_1^2 = F_2 = \pi(r_2^2 - r_1^2) = F_3 = \pi(r_3^2 - r_2^2) = F_4 = \pi(r_4^2 - r_3^2) = F_5 = \pi(r_5^2 - r_4^2)$$

sein soll. Das heißt aber $\pi r_1^2 = \pi(r_2^2 - r_1^2)$; bei Division durch π ergibt sich dann

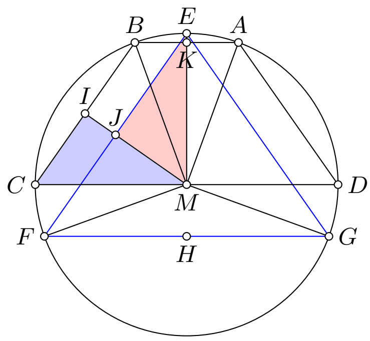
$$r_1^2 = r_2^2 - r_1^2 \Rightarrow 2r_1^2 = r_2^2 \Rightarrow r_2 = r_1\sqrt{2}$$
$$r_2^2 - r_1^2 = r_3^2 - r_2^2 \Rightarrow 2r_2^2 - r_1^2 = r_3^2 \Rightarrow r_3 = r_1\sqrt{3}$$
$$r_3^2 - r_2^2 = r_4^2 - r_3^2 \Rightarrow 2r_3^2 - r_2^2 = r_4^2 \Rightarrow r_4 = r_1\sqrt{4}$$
$$r_4^2 - r_3^2 = r_5^2 - r_4^2 \Rightarrow 2r_4^2 - r_3^2 = r_5^2 \Rightarrow r_5 = r_1\sqrt{5}$$

Inge muss für die Konstruktion folgende Radien wählen: $r_1 = 2$ cm, $r_2 = 2\sqrt{2} \approx 2{,}8$ cm, $r_3 = 2\sqrt{3} \approx 3{,}5$ cm, $r_4 = 2\sqrt{4} = 4$ cm und $r_5 = 2\sqrt{5} \approx 4{,}5$ cm.

Aufgabe 020924:
Gegeben sei ein Kreis. In diesem Kreis seien ein Trapez und ein Dreieck so einbeschrieben, dass eine Seite des Trapezes ein Durchmesser des Kreises ist und die Seiten des Dreiecks parallel zu den Trapezseiten verlaufen.
Es ist zu beweisen, dass Trapez und Dreieck in diesem Falle gleichen Flächeninhalt haben!

Lösung von André Lanka:
J sei der Höhenfußpunkt im Dreieck $\triangle MFE$ von Punkt M auf der Seite EF. Dann gilt $\triangle MFJ \cong \triangle MEJ$ nach SSW:

(1) $MF = ME = r$
(2) MJ in beiden Dreiecken enthalten
(3) $\angle MJF = \angle MJE = 90°$



Analog sei I der Höhenfußpunkt im Dreieck $\triangle MBC$ von Punkt M auf der Seite BC. Die Punkte M, I und J liegen auf einer Geraden, da die Winkel $\angle MJF$ und $\angle MIC$ gleich groß und die Strecken $EF \parallel BC$ sind.

Sei Winkel $\angle BCD := \alpha$. Dann gilt auch $\angle EFG = \alpha$ (Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen). Nach Innenwinkelsatz im Dreieck $\triangle EFH$ gilt dann für Winkel $\angle FEH = 90° - \alpha$ und nach Innenwinkelsummensatz im Dreieck $\triangle MEJ : \angle JME = \alpha$. Demzufolge gilt $\triangle MEJ \cong \triangle MCI$ nach WWS:

(1) $ME = MC = r$
(2) $\angle JME = \angle MCB = \alpha$
(3) $\angle MJE = \angle MIC = 90°$

Damit hat man sogar 4 kongruente Dreiecke:

$$\triangle FMJ \cong \triangle MEJ \cong \triangle MCI \cong \triangle MBI$$

Nun bleibt zu zeigen, dass gilt: $\triangle FHM \cong \triangle MBK$, wobei H und K die Höhenfußpunkte in den Dreiecken $\triangle FGM$ und $\triangle MAB$ wie in der Zeichnung ersichtlich sind.
Dazu betrachte man zuerst Winkel

$$\angle MFG = 180° - \angle FHM - \angle MFE - \angle FEM = 180° - 90° - 2 \cdot \angle MFE$$

wobei $\angle MFE = 180° - 90° - \alpha = 90° - \alpha$ im Dreieck $\triangle JFM$ gilt.
Damit ergibt sich $\angle MFG = 90° - 2 \cdot (90° - \alpha) = 2 \cdot \alpha - 90°$.
Als nächstes wird Winkel $\angle BMK$ betrachtet:

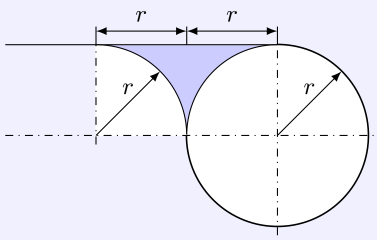
$$\angle BMK = 90° - \angle CMI - \angle CMI = 90° - 2 \cdot (180° - 90° - \alpha) = 2 \cdot \alpha - 90°$$

Beide Dreiecke $\triangle FHM$ und $\triangle MBK$ sind nach WWS kongruent:

(1) $MF = MB = r$
(2) $\angle MFG = \angle BMK = 2 \cdot \alpha - 90°$
(3) $\angle MHF = \angle BKM = 90°$

Mithin ist eine Hälfte des Dreiecks aus den Teilflächen $\triangle FHM, \triangle MFJ$ und $\triangle JME$ flächengleich zu einer Trapezhälfte, die aus den Teilflächen $\triangle MBK$, $\triangle BMI$ und $\triangle CMI$ besteht.

Aufgabe 020926:



An der Endstation einer Straßenbahnlinie soll eine Gleisschleife gebaut werden. Sie wird so angelegt, dass die gerade Strecke in einen Kreis mündet, dessen letztes Viertel als Gegenkurve zur geraden Strecke zurückführt.
a) Berechnen Sie die Gleislänge von Weichenspitze bis wieder zur Weichenspitze!
b) Wie groß ist das Flächenstück, das von der Schleife eingeschlossen wird?

Lösung von André Lanka:
a) Die Gleislänge ist $2r + 2\pi r$.

b) Das Flächenstück beinhaltet einen Kreis mit der Fläche πr^2 und die Fläche des Rechtecks mit den Seitenlängen $2r$ und r abzüglich der Fläche der beiden Viertelkreise. Als eingeschlossene Fläche erhält man

$$\pi r^2 + 2r^2 - \frac{\pi r^2}{2} = 2r^2 + \frac{\pi r^2}{2}$$

Aufgabe 040923:
Gegeben sind drei verschiedene, nicht auf einer Geraden liegende Punkte. Um jeden dieser Punkte ist ein Kreis so zu konstruieren, dass sich diese Kreise paarweise außen berühren.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Man bezeichnet die drei Punkte mit A, B und C und fasst sie als die Ecken eines Dreiecks mit den Seiten a, b, c auf. Die Radien der drei Kreise um A, B und C seien (in dieser Reihenfolge) x, y und z. Dann gilt:

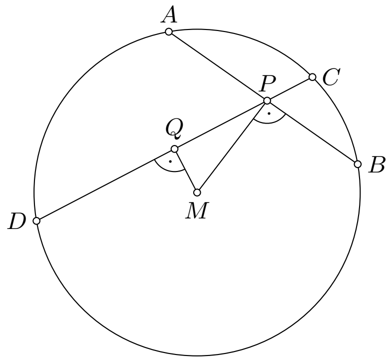
$$x + y = c; \qquad y + z = a; \qquad z + x = b$$

Daraus folgen:

$$x = \frac{-a + b + c}{2}; \qquad y = \frac{a - b + c}{2}; \qquad z = \frac{a + b - c}{2}$$

Aufgabe 060922:
Innerhalb eines Kreises k mit dem Mittelpunkt M und dem Radius von der Länge r liege der von M verschiedene Punkt P.
Konstruieren Sie unter allen Sehnen durch P die kürzeste!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Konstruktion:
Man verbindet P mit dem Mittelpunkt M des Kreises und konstruiert die Senkrechte zu MP in P. Sie schneide die Kreislinie in den Punkten A und B. AB ist die gesuchte Sehne.

Beweis:
Zum Nachweis, dass AB die kürzeste durch P verlaufende Sehne des Kreises ist, legen wir eine beliebige andere Sehne durch P. Sie schneide die Kreislinie in den Punkten C und D. Dann ist der Abstand der Sehne CD von M kleiner als MP. Enthält CD den Punkt M, dann ist der Abstand der Strecke CD von M gleich Null. Enthält aber CD den Punkt M nicht, dann fällen wir das Lot von M auf CD und nennen seinen Fußpunkt Q.

Im rechtwinkligen Dreieck $\triangle MQP$ ist MP die Hypotenuse, und daher gilt $\overline{MQ} < \overline{MP}$. Nach dem Satz, dass von Sehnen eines Kreises mit unterschiedlichen Abständen von Mittelpunkt diejenige die kürzere ist, die den größeren Abstand vom Mittelpunkt hat, folgt $\overline{AB} < \overline{CD}$.
Da CD (durch P) beliebig angenommen wurde, muss AB die kürzeste durch P verlaufende Sehne dieses Kreises sein. Da es stets genau eine Gerade durch M und P gibt, ist die Konstruktion stets ausführbar und eindeutig. $\square$

Aufgabe 170923:
Gegeben seien ein Kreis k und ein Durchmesser AB von k. Der Mittelpunkt von k sei M. Sind C und D so auf k gelegen, dass $ABCD$ ein konvexes Viereck mit $AB \parallel DC$ ist, so sei α die Größe des Winkels $\angle CMB$ und β die Größe desjenigen spitzen Winkels, den die Sehne DC mit der Tangente t an k in D einschließt.
Man ermittle diejenigen Werte des Abstandes zwischen AB und CD, für die
a) $2\alpha = \beta$ und b) $\alpha = \beta$ gilt.

Lösung von cyrix:
Wegen $|MB| = |MC|$ ist das Dreieck $\triangle MBC$ gleichschenklig und es gilt

$$\angle CBM = \angle MCB = \frac{180° - \angle BMC}{2} = 90° - \frac{\alpha}{2}$$

Da $|DM| = |CM|$ ist, liegt M auf der Mittelsenkrechten der Strecke CD, welche wegen $AB \parallel DC$ und $|AM| = |MB|$ gleich der Mittelsenkrechten der Strecke AB ist. Demzufolge geht bei Spiegelung an dieser A in B, M in sich selbst und C in D über. Also ist $\angle MAD = \angle CBM = 90° - \frac{\alpha}{2}$.
Nach dem Peripherie-Zentriwinkel-Satz, angewendet auf die Sehne BC, ist

$$\angle MAC = \angle BAC = \frac{1}{2}\angle BMC = \frac{\alpha}{2} \quad \text{also}$$

$$\angle CAD = \angle MAD - \angle MAC = 90° - \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} = 90° - \alpha$$

Und nach dem Sehnen-Tangentenwinkel-Satz, angewendet auf die Sehne CD, ist dies gleich β.
Es gilt also allgemein $\alpha + \beta = 90°$.
Weiterhin ist aufgrund der Definition des Sinus im Einheitskreis der Abstand h der beiden Parallelen gleich $h = \sin\alpha \cdot |MB|$.
a) Aus $2\alpha = \beta$ folgt dann $\alpha = 30°$ und also $h = \frac{1}{2}|MB|$.
b) Aus $\alpha = \beta$ folgt dann $\alpha = 45°$ und also $h = \frac{\sqrt{2}}{2}|MB|$.

Aufgabe 200923:
Von zwei Kreisen k_1 und k_2 seien die Radien r_1 bzw. r_2 gegeben, wobei $r_1 > r_2$ gelte.
Weiterhin sei vorausgesetzt, dass sich beide Kreise von außen berühren, also genau eine gemeinsame innere Tangente besitzen. Diese innere Tangente schneide die eine gemeinsame äußere Tangente beider Kreise in P und die andere gemeinsame Tangente in Q.
Ermitteln Sie unter diesen Voraussetzungen aus r_1 und r_2 die Länge PQ!

Lösung von cyrix:
Es sei S der Schnittpunkt der beiden äußeren Tangenten, M_1 der Mittelpunkt von k_1, M_2 der Mittelpunkt von k_2, B ihr Berührpunkt, B_1 der Berührpunkt von k_1 mit der Tangenten t, auf der P liegt, und B_2 der von k_2 mit der gleichen Tangenten t.

Dann sind M_1B_1 und M_2B_2 parallel, da sie als Berührungsradien beide senkrecht auf der Tangenten t stehen. Nach dem Strahlensatz gilt dann $\frac{|SM_1|}{|SM_2|} = \frac{|M_1B_1|}{|M_2B_2|} = \frac{r_1}{r_2}$.
Insbesondere ist $|SM_1| > |SM_2|$, also, da S, M_2, B und M_2 aus Symmetriegründen auf einer Geraden liegen, $|SM_1| = |SM_2| + |M_2B| + |BM_1| = |SM_2| + r_1 + r_2$. Setzt man dies in die eben erhaltene Verhältnisgleichung ein, erhält man

$$\frac{|SM_2| + r_1 + r_2}{|SM_2|} = 1 + \frac{r_1 + r_2}{|SM_2|} = \frac{r_1}{r_2} \quad \text{also}$$

$$|SM_2| = r_2 \cdot \frac{r_1 + r_2}{r_1 - r_2} \quad \text{und} \quad |SM_1| = r_1 \cdot \frac{r_1 + r_2}{r_1 - r_2}$$

Es ist $\triangle M_1SB_1$ rechtwinklig bei B_1, sodass sich nach dem Satz von Pythagoras

$$|SB_1| = \sqrt{|SM_1|^2 - |M_1B_1|^2} = \sqrt{r_1^2 \cdot \frac{(r_1 + r_2)^2}{(r_1 - r_2)^2)} - r_1^2} = r_1 \cdot \sqrt{\frac{(r_1 + r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2}{(r_1 - r_2)^2}}$$

$$= \frac{r_1}{r_1 - r_2} \cdot \sqrt{4r_1r_2} = r_1 \cdot \frac{2\sqrt{r_1r_2}}{r_1 - r_2}$$

und analog $|SB_2| = r_2 \cdot \frac{2\sqrt{r_1r_2}}{r_1 - r_2}$ ergibt. Damit ist

$$|B_1B_2| = |SB_1| - |SB_2| = \frac{2\sqrt{r_1r_2}}{r_1 - r_2} \cdot (r_1 - r_2) = 2\sqrt{r_1r_2}$$

Der Punkt P liegt auf zwei Tangenten an k_1, sodass die Tangentenabschnitte $|PB_1|$ und $|PB|$ gleich lang sind. Aus gleichem Grund (Tangenten an k_2) ist auch $|PB| = |PB_2|$ und damit P der Mittelpunkt der Strecke B_1B_2. Insbesondere ist also $|PB| = \frac{1}{2}|B_1B_2| = \sqrt{r_1r_2}$.
Aus Symmetriegründen ist $|QB| = |PB|$, und da Q, B und P nach Voraussetzung auf einer Geraden liegen, ist

$$|PQ| = 2|PB| = 2\sqrt{r_1}r_2$$

Aufgabe 340924:
Über der Seite AB des gleichseitigen Dreiecks ABC mit gegebener Seitenlänge a werde nach außen das Quadrat $ABPQ$ errichtet.
Anschließend stellt man sich dieses Quadrat beweglich vor. Es soll in mathematisch positivem Drehsinn um das Dreieck ABC herum „rollen, ohne zu gleiten“.
(Zu Anfang bleibt also nur der Punkt B fest, die anderen Punkte bewegen sich, bis die Strecke BP in die Lage von BC kommt; dann bleibt C fest usw.).
a) Auf diese Weise werde das Quadrat so lange gerollt, bis es zum ersten Mal wieder eine mit AB zusammenfallende Seite hat (dies muss nicht die Seite sein, die zu Anfang AB war).
Wie lang ist dabei der Weg, den
- der Punkt A,

- der Mittelpunkt M des Quadrates $ABCD$,
- der Mittelpunkt H der Seite AB des Quadrates

zurücklegt?

b) Ausgehend von dem Anfangszustand $ABPQ$ wurde nicht nur eine in a) beschriebene „volle Umrundung des Dreiecks ABC“ durchgeführt, sondern in Fortsetzung hierzu wurde das Quadrat weitergerollt.

Dies wurde erst dann beendet, als zum ersten Mal jeder der vier Punkte A, B, P, Q seine ursprünglich Lage wieder erreicht hatte.

- Wie viele volle Umrundungen des Dreiecks ABC fanden vom Anfangszustand bis zum geschilderten Ende dabei insgesamt statt?
- Wie viele volle Umdrehungen des Quadrats, bezogen auf seien eigenen Mittelpunkt M wurden dabei insgesamt ausgeführt?

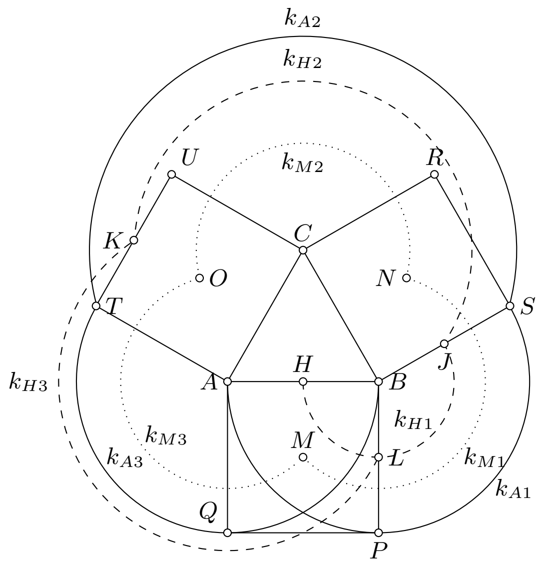
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

(a) Die volle Umrundung des Dreiecks ABC findet in drei Teilbewegungen statt (siehe Abbildung):

Die erste ist die Drehung um B durch den überstumpfen Winkel $\angle PBC$ der Größe $360° - 60° - 90° = 210°$; dabei gehen P, Q, A, M, H und C, R, S, N, J über.

Die zweite Teilbewegung ist die Drehung um C durch 210°; dabei gehen R,S,B,N,J in A,T,U,O,K über.

Die dritte Teilbewegung ist die Drehung um A mit 210°; dabei gehen T, U, C, O, K in B, P, Q, M, L über.



Der Weg von A besteht demnach aus den drei Kreisbögen $k_{A1} = APS$, $k_{A2} = ST$m $k_{A3} = TQB$. Sie sind Bögen zu Zentriwinkeln der Größe 210° in Kreisen mit den Radien $a, a\sqrt{2}, a$. Also legt A einen Weg der Länge

$$\frac{\pi a \cdot 210°}{180°} \cdot (1 + \sqrt{2} + 1) = (2 + \sqrt{2}) \cdot \frac{7}{6}\pi a \approx 12{,}5137a$$

zurück. Der Weg von M besteht aus $k_{M1} = MN$, $k_{M2} = NO$, $k_{M3} = OM$; Bögen zu Zentriwinkeln von 210° in Kreisen des Radius $\frac{a}{2}\sqrt{2}$; also legt M einen Weg der Länge

$$\frac{\pi a \cdot 210°}{180°} \cdot (3 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}) = \frac{7}{4}\sqrt{2}\pi a \approx 7{,}7750a$$

zurück. Für den Weg von H, bestehend aus $k_{H1} = HLJ$, $k_{H2} = JK$, $k_{H3} = KL$, ergibt sich entsprechend die Länge

$$(1 + 2 \cdot \sqrt{5}) \cdot \frac{7}{12}\pi a \approx 10{,}0282a$$

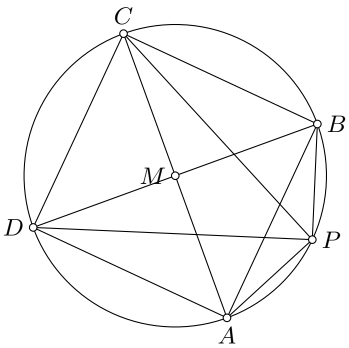
(b) Bei der ersten Umrundung gehen die Punkt A, B, P, Q wie in (a) beschrieben, in B, P, Q, A über, d. h., sie haben dieselbe Lage wie nach einer Vierteldrehung um M erreicht. Um zu bewirken, dass sie erstmals in ihre Anfangslage übergehen, muss eine solche Umrundung daher insgesamt 4 man durchgeführt werden.

Die Strecke MQ geht bei der ersten in (a) genannten Teilbewegung in die Strecke NR über. Bezogen auf den Mittelpunkt des rollenden Quadrats ist das eine Drehung von der Größe des überstumpfen Winkels $\angle QBR = 210°$.
Entsprechendes gilt für die weiteren Teilbewegungen, also findet bezogen auf den Mittelpunkt des Quadrats bei der ersten Umrundung eine Drehung um $3 \cdot 210°$ statt. Bei den festgestellten 4 Umrundungen ist dies eine Drehung um $12 \cdot 210° = 2520° = 7 \cdot 360°$, das sind 7 volle Umdrehungen.

III Runde 3

Aufgabe 020933:
Von einem Punkt P auf der Peripherie eines Kreises gehen zwei Sehnen aus, die einen Winkel von 135° miteinander bilden. Zwei weitere Sehnen, die ebenfalls von P ausgehen, zerlegen diesen Winkel in 3 Winkel von je 45°.
Beweisen Sie, dass die 4 Endpunkte der Sehnen (außer P) die Eckpunkte eines Quadrates sind!

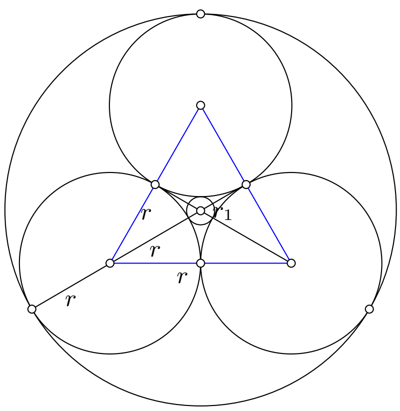
Lösung von André Lanka:



Der Peripheriewinkel $\angle CPA$ über der Strecke AC ist 90°. Damit ist nach Umkehrung des Thalessatzes AC ein Durchmesser des Kreises. Genauso ist BD ein Durchmesser. Beide Durchmesser schneiden sich im Punkt M, dem Mittelpunkt des Kreises. Die beiden Diagonalen des Vierecks sind also gleich lang.
Der Peripheriewinkel $\angle CPD = 45°$. Der Zentriwinkel über BC ist also $\angle CMD = 90°$. Die beiden Diagonalen sind nicht nur gleich lang, sondern stehen auch senkrecht aufeinander.
Das Viereck $ABCD$ muss ein Quadrat sein.

Aufgabe 030932:
Jeder von vier Kreisen in einer Ebene habe mit den drei anderen genau je einen Punkt gemeinsam. Drei von ihnen haben den gleichen Radius r.
a) Führen Sie die Konstruktion durch ($r = 3$ cm) und geben Sie eine Konstruktionsbeschreibung!
b) Berechnen Sie den Radius des vierten Kreises (Fallunterscheidungen)!

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:



Die beiden Lösungsmöglichkeiten entnehme man der Abbildung.
a) Die Mittelpunkte der 3 Kreise mit den Radien r bestimmen ein gleichseitiges Dreieck. Der Mittelpunkt der gesuchten Kreise ist der Schnittpunkt der Höhen bzw. der Seitenhalbierenden dieses Dreiecks.
Daraus ergibt sich die Konstruktion.

b) Da sich die Seitenhalbierenden im Verhältnis 1 : 2 teilen, ergibt sich:

$$r + r_1 = \frac{2}{3} r\sqrt{3} \qquad \text{bzw.} \qquad r_1 = \frac{2}{3} r\sqrt{3} - r$$

oder $r_1 = r\left(\frac{2}{3}\sqrt{3} - 1\right) \approx 0{,}15r$.
$r_2 = 2r + r_1$ oder $r_2 = r\left(\frac{2}{3}\sqrt{3} + 1\right) \approx 2{,}15r$.

Aufgabe 120935:
Es sei $ABCD$ ein Sehnenviereck, k sein Umkreis, und es gelte für die Bogenlänge derjenigen zwischen den Eckpunkten des Sehnenvierecks liegenden Kreisbögen von k, auf denen jeweils kein anderer Eckpunkt liegt, die Gleichung

$$\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{DA}$$

Man beweise, dass dann $AC \perp BD$ gilt!

Lösung von cyrix:
Da die Bogenlänge proportional zum entsprechenden Zentriwinkel ist, folgt aus der Bedingung auch $\angle AMB + \angle CMD = \angle BMC + \angle DMA = 180°$, wobei M der Mittelpunkt von k sei und die vier Zentriwinkel den Vollwinkel bei M bilden.
Nach dem Peripherie-Zentriwinkelsatz sind die Peripheriewinkel über einem Bogen genau halb so groß wie der zugehörige Zentriwinkel, also

$$\angle ADB + \angle CAD = \frac{1}{2}(\angle AMB + \angle CMD) = \frac{1}{2} \cdot 180° = 90°$$

Sei S der Schnittpunkt der Geraden AC und BD. Dann gilt für das Dreieck $\triangle ASD$ aufgrund der Innenwinkelsumme

$$\angle DSA = 180° - \angle SAD - \angle ADS = 180° - (\angle CAD + \angle ADB) = 180° - 90° = 90°$$

Damit stehen die beiden Geraden AC und BD in s senkrecht aufeinander, $\square$.

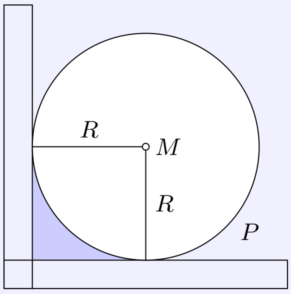
Aufgabe 140935:
Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei C. Auf dem Umkreis k des Dreiecks liege auf dem Kreisbogen $\overset{\frown}{AB}$, der C nicht enthält, ein von A und B verschiedener Punkt P.
Symmetrisch zu P bezüglich der Geraden durch A und C bzw. der durch B und C mögen die Punkte P_1 und P_2 liegen.
a) Man beweise, dass C auf der Geraden g durch P_1 und P_2 liegt.
b) Man beweise, dass g genau dann die Tangente im Punkt C an den Umkreis k ist, wenn $CP \perp AB$ gilt.

Lösung von cyrix:
a) Die Hintereinanderausführung zweier Spiegelungen zu sich schneidenden Spiegelachsen ist eine Drehung um ihren Schnittpunkt um einen Drehwinkel, der dem Doppelten des Winkels zwischen den Spiegelachsen entspricht.
Da P_1 durch Spiegelung an AC auf P abgebildet wird und dieser Punkt durch Spiegelung an BC auf P_2, gilt $\angle P_1CP_2 = 2\angle ACB = 180°$, sodass P_1, C und P_2 auf einer Geraden liegen.

b) Sei M der Mittelpunkt von k. Nach dem Satz des Thales ist M damit auch gleichzeitig Mittelpunkt der Strecke AB. Weiterhin sei M_1 der Bildpunkt von M bei der Spiegelung an AC. Dann ist $|CM| = |CM_1| = |AM| = |AM_1|$, sodass es sich beim Viereck $AMCM_1$ um eine Raute, also insbesondere ein Parallelogramm handelt. Damit gilt $CM_1 \parallel AM = AB$.

Es ist die Gerade P_1C gleich g eine Tangente an k genau dann, wenn $P_1C \perp CM$ gilt. Bei Spiegelung an AC geht P_1C in PC und CM in CM_1 über, sodass g eine Tangente an k genau dann ist, wenn auch $PC \perp CM_1$ gilt. Letztere Gerade ist aber parallel zu AB, sodass diese Bedingung äquivalent zu $PC \perp AB$ ist, $\square$.

Aufgabe 160936:
Zwei Holzleisten sind so aneinandergeleimt, dass sie einen rechten Winkel bilden. In diesen rechten Winkel ist eine kreisförmige Pappscheibe P gelegt, die beide Schenkel des rechten Winkels berührt; der Radius R dieser Scheibe ist bekannt (siehe Abbildung).



In den farbigen Teil zwischen dem rechten Winkel und der Pappscheibe P soll eine weitere Pappscheibe gelegt werden, die die Schenkel des rechten Winkels und die Scheibe P berührt.
a) Man zeige: Es gibt genau einen Punkt für die Lage des Mittelpunktes der zweiten Pappscheibe.
b) Man ermittle den Radius dieser Pappscheibe.

Lösung von cyrix:
a) Bei Spiegelung an der Winkelhalbierenden des rechten Winkels gehen die beiden Schenkel ineinander über. Da die Pappscheibe beide Schenkel nur in je einem Punkt P bzw. Q berührt, müssen auch diese Berührpunkte zueinander Spiegelpunkte sein.

Da der Mittelpunkt N der kleinen Kreisscheibe mit Radius r in gleicher Entfernung zu beiden Berührpunkten liegt, muss dieser sich auf der Mittelsenkrechten der Strecke PQ befinden. Dies ist aber genau die Spiegelachse, also die Winkelhalbierende des rechten Winkels. Also liegt N (und analog auch M) auf dieser Geraden.

Lässt man (beginnend beim Scheitelpunkt des Winkels) N auf der Winkelhalbierenden in Richtung M wandern, so vergrößert sich streng monoton seine Entfernung zu beiden Schenkeln (beginnend bei 0). Umgekehrt sinkt seine Entfernung zu M (beginnend bei einem positiven Wert, bis sie 0 erreicht, wenn N auf M liegt). Demzufolge gibt es genau eine Stelle dazwischen, wo die Entfernungen r von N zu den Schenkeln des Winkels und $|MN| - R$ identisch sind. In dem Fall berührt der Kreis um N mit Radius r beide Schenkel und den Kreis um M mit Radius R, also die Pappscheibe P.

b) Sei S der Scheitelpunkt des Winkels. Es stehen die Berührradien NP und NQ senkrecht auf den Schenkeln, sodass das Viereck $SPNQ$ drei (und damit auch vier) rechte Innenwinkel besitzt, also ein Rechteck ist. Da $|NP| = |NQ| = r$ gilt, ist es sogar ein Quadrat.

Dessen Diagonale SN hat damit die Länge $|SN| = \sqrt{2}r$. Auf analoge Weise erhält man $|SM| = \sqrt{2}R$, also $r + R = |NM| = |SM| - |SN| = \sqrt{2}(R - r)$, also $r \cdot (1 + \sqrt{2}) = R \cdot (\sqrt{2} - 1)$ bzw.

$$r = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \cdot R = \frac{(\sqrt{2}-1)^2}{2-1} \cdot R = (3 - 2\sqrt{2})R$$

Aufgabe 220932:
Über zwei Kreise k_1, k_2 und ihre Mittelpunkte M_1 bzw. M_2 wird vorausgesetzt, dass der Kreis k_2 durch den Punkt M_1 geht und den Kreis k_1 in zwei Punkten schneidet. Ferner sei der Schnittpunkt von k_1 mit demjenigen Strahl, der den Anfangspunkt M_1 hat und durch M_2 geht, S genannt.
Die Berührungspunkte, die eine gemeinsame Tangente der beiden Kreise k_1 und k_2 mit diesen Kreisen hat, seien P_1 und P_2 genannt.
Beweisen Sie, dass unter diesen Voraussetzungen stets P_2S auf M_1S senkrecht steht!

Lösung von cyrix:
Es seien r_1 sowie r_2 die Längen der Radien von k_1 und k_2 sowie g die Gerade M_1M_2.

Da die Berührradien senkrecht auf die Tangente stehen, sind sowohl M_1P_1 als auch M_2P_2 senkrecht auf P_1P_2 und damit zueinander parallel.

Ist $P_1P_2 \parallel M_1M_2$, so ist das Viereck $M_1M_2P_2P_1$ ein Parallelogramm, sodass gegenüberliegende Seiten gleich lang sind, also $r_1 = |M_1P_2| = |M_2P_2| = r_2$ und damit $S = M_2$ gilt. Insbesondere ist dann $P_2S = P_2M_2 \perp P_1P_2 \parallel M_1M_2 = M_1S$, also $P_2S \perp M_1S$.

Seien ab nun die Geraden P_1P_2 und $g = M_1M_2$ nicht parallel (was gleichbedeutend mit $r_1 \neq r_2$ ist) und X ihr gemeinsamer Schnittpunkt. Da $M_1P_1 \parallel M_2P_2$ ist, gilt nach dem Strahlensatz $\frac{|XM_1|}{|XM_2|} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{|XP_1|}{|XP_2|}$.

Ist $r_1 < r_2$, so folgt $|XM_1| < |XM_2|$, sodass X auf dem von M_1 ausgehenden Strahl auf g liegt, der M_2 nicht enthält. Insbesondere ist $|XM_2| = |XM_1| + |M_1M_2| = |XM_1| + r_2$, also $\frac{r_2}{|XM_2|} = 1 - \frac{r_1}{r_2}$.
Für $r_1 < r_2$ ist auch $|XP_1| < |XP_2|$, sodass P_1 zwischen X und P_2 liegt. Damit ist

$$|P_1P_2| = |XP_2| - |XP_1| = |XP_2| \cdot \left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right) \quad \text{also} \quad |P_1P_2| = \frac{|XP_2| \cdot r_2}{|XM_2|}$$

Ist dagegen $r_1 > r_2$, so ist $|XM_1| > |XM_2|$ und M_2 liegt zwischen X und M_1, sodass sich $|XM_2| = |XM_1| - |M_1M_2| = |XM_1| - r_2$, also $\frac{r_2}{|XM_2|} = \frac{r_1}{r_2} - 1$ ergibt.
Für $r_2 > r_1$ ist auch $|XP_1| > |XP_2|$, sodass P_2 zwischen X und P_1 liegt. Damit ist $|P_1P_2| = |XP_1| - |XP_2| = |XP_2| \cdot \left(\frac{r_1}{r_2} - 1\right)$, also genauso wie im Fall $r_1 < r_2$ wieder

$$|P_1P_2| = \frac{|XP_2| \cdot r_2}{|XM_2|}$$

Das Dreieck $\triangle XM_2P_2$ ist rechtwinklig in P_2, da der Berührungsradius M_2P_2 senkrecht auf der Tangente XP_2 steht. Den Flächeninhalt F dieses Dreiecks kann man damit einerseits als das halbe Produkt der Längen seiner Katheten bestimmen, sodass $2F = |XP_2| \cdot |P_2M_2| = |XP_2| \cdot r_2$ gilt.
Andererseits kann man den Flächeninhalt dieses Dreiecks auch als halbes Produkt der Länge der Hypotenuse $|XM_2|$ und der Länge h der zugehörigen Höhe von P_2 auf XM_2 bestimmen, sodass auch $2F = |XM_2| \cdot h$ gilt. Insbesondere ist also $1 = \frac{2F}{2F} = \frac{|XP_2| \cdot r_2}{|XM_2| \cdot h}$ und damit

$$|P_1P_2| = \frac{|XP_2| \cdot r_2}{|XM_2|} = h$$

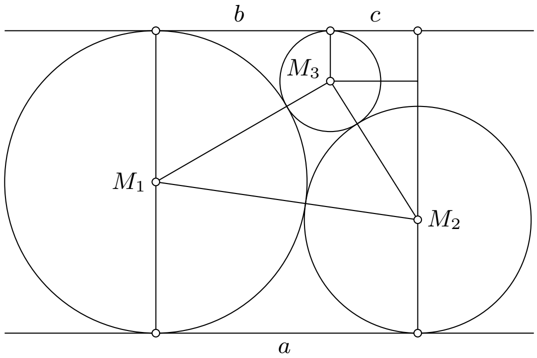
Sei H der Fußpunkt der Höhe von P_2 auf XM_2. Dann ist also $|P_2P_1| = |P_2H|$. Weiterhin ist $XM_2 \perp HP_2$, also gilt wegen nun $XM_2 = M_1H$ nun $\angle M_1HP_2 = 90° = \angle P_2P_1M_1$.
Und schließlich gilt $|P_2M_1| = |P_2M_1|$, sodass die beiden Dreiecke $\triangle M_1P_1P_2$ und $\triangle M_1HP_2$ in zwei Seiten und einem Winkel übereinstimmen. Da zusätzlich noch die größere der beiden Seiten (es ist M_1P_2 die Hypotenuse in beiden rechtwinkligen Dreiecken) dem (rechten) Winkel gegenüberliegt, sind diese beiden Dreiecke damit kongruent und insbesondere sind auch die dritten Seiten gleich, sodass $|M_1P_1| = |M_1H| = r_1$ gilt und H auch auf dem Kreis k_1 liegt.
Und da H nach Konstruktion innerhalb von k_2 liegt, gilt schließlich $H = S$, sodass $P_2S = P_2H \perp HM_1 = SM_1$, also $P_2S \perp SM_1$ gilt, $\square$.

Aufgabe 240936:
Es sei AB eine Strecke und P ein Punkt auf der Verlängerung von BA über A hinaus. Von P werden an alle diejenigen Kreise, die AB als Sehne haben, die Tangenten gelegt.
Beweisen Sie, dass es dann einen Kreis um P gibt, auf dem die Berührungspunkte aller dieser Tangenten liegen!

Lösung von cyrix:
Es sei B' einer dieser Berührungspunkte einer Tangente durch P mit einem Kreis durch A und B. Dann gilt nach dem Sekanten-Tangenten-Satz, dass $|PB'|^2 = |PA| \cdot |PB|$ gilt. Insbesondere ist also $|PB'|$ unabhängig von der Wahl des konkreten Punktes B', sodass jeder Berührpunkt auf dem Kreis um P mit Radius $\sqrt{|PA| \cdot |PB|}$ liegen muss, $\square$.

Aufgabe 290936:
Es seien k_1 und k_2 zwei Kreise, die einander von außen berühren. Für ihre Radien r_1 bzw. r_2 gelte $r_1 > r_2$.
Eine Gerade, die k_1 und k_2 in zwei voneinander verschiedenen Punkten berührt, sei t. Die von t verschiedene und zu t parallele Tangente an k_1 sei u.
Ermitteln Sie in Abhängigkeit von r_1 und r_2 den Radius r_3 desjenigen u berührenden Kreises k_3, der k_1 und k_2 von außen berührt!

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:



Seien M_1, M_2, M_3 die Mittelpunkte der Kreise und a, b, c die Projektionen der Strecken M_1M_2, M_1M_3 und M_2M_3 auf die Tangenten. Dann erhalten wir mittels Pythagoras

$$a^2 + (r_1 - r_2)^2 = (r_1 + r_2)^2$$
$$b^2 + (r_1 - r_3)^2 = (r_1 + r_3)^2$$
$$c^2 + (2r_1 - r_2 - r_3)^2 = (r_2 + r_3)^2$$

Aus den ersten beiden Gleichungen erhalten wir $a = 2\sqrt{r_1 r_2}$ und $b = 2\sqrt{r_1 r_3}$. Mit $c = |a - b|$ ergibt dann die dritte Gleichung

$$4(\sqrt{r_1 r_2} - \sqrt{r_1 r_3})^2 + (2r_1 - r_2 - r_3)^2 = (r_2 + r_3)^2$$

Nach Ausmultiplizieren und zusammenfassen der Terme ist dieses äquivalent zu $4r_1^2 = 8r_1\sqrt{r_2 r_3}$ und somit

$$r_1^2 = 4r_2 r_3 \Rightarrow r_3 = \frac{r_1^2}{4r_2}$$

Aufgabe 320933:
Gegeben ist eine Gerade g und auf ihr drei Punkte A, B, C, in dieser Reihenfolge angeordnet.
a) Ermitteln Sie in Abhängigkeit von den Längen $a = AB$, $b = BC$ den Radius eines Kreises k, der durch A und B geht und eine durch C gehende Tangente besitzt, die auf g senkrecht steht!
b) Beweisen Sie, dass es einen Kreis c um C gibt, auf dem alle Berührungspunkte der Tangente liegen, die von C an alle diejenigen Kreise k gelegt werden, die durch A und B gehen!

Lösung von cyrix:
a) Da k durch A und B verläuft, liegt dessen Mittelpunkt auf der Mittelsenkrechten von AB. Diese ist parallel zu der durch C gehenden Senkrechten zu g, welche im Abstand $r := b + \frac{a}{2}$ zu dieser liegt. Es sei P der Berührungspunkt von k mit dieser Senkrechten.
Dann ist der Berührungsradius MP senkrecht auf der Tangenten, sodass diese Strecke genau das Lot von M auf die Tangenten ist, also die Länge r hat. Damit gilt $|MP| = r$, sodass der Radius von k genau den Wert $r = b + \frac{a}{2}$ besitzt.

b) Es sei P ein Berührungspunkt eines Kreises k durch A und B mit einer Tangenten durch C. Nach dem Sekanten-Tangenten-Satz ist dann $|CP|^2 = |CA| \cdot |CB| = (a+b) \cdot b$, also mit $r := \sqrt{(a+b) \cdot b}$ schließlich $|CP|^2 = r^2$ bzw. $|CP| = r$.
Dabei ist r vom gewählten Kreis k unabhängig, sodass all diese Berührungspunkte auf dem Kreis c um C mit Radius r liegen, $\square$.

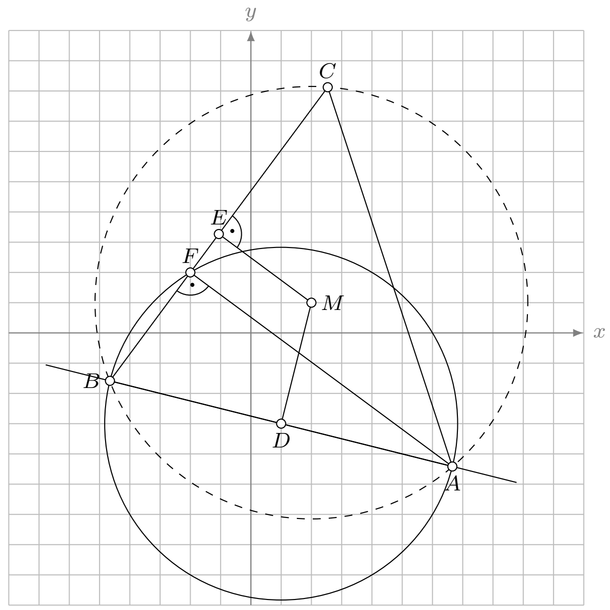
II.IV Konstruktionen

I Runde 1

Aufgabe V00912:
Es ist ein Dreieck zu konstruieren, für das die Koordinaten folgender Punkte gegeben sind:
a) Fußpunkt F der Höhe $h_a(-2;+2)$
b) Mittelpunkt D der Seite $AB = c(+1;-3)$
c) Mittelpunkt M des Umkreises $(+2;+1)$
Beschreiben Sie die Konstruktion! Messen Sie die Seiten des Dreiecks auf Millimeter genau! (1 cm $\cong$ 1 Einheit im Koordinatensystem)

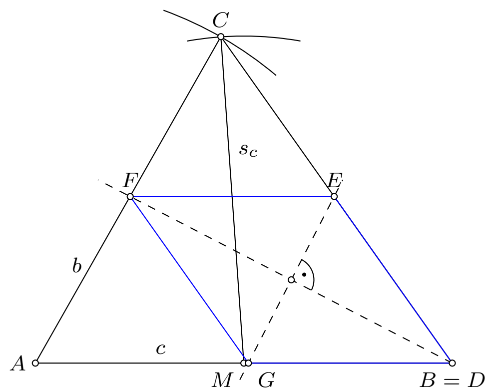
Lösung von Steffen Polster:
Konstruktion:
(1) Zeichne die Punkte D, F, M in ein Koordinatensystem ein.
(2) Der Höhenfußpunkt F liegt dann auf dem Thaleskreis über AB, d. h. einem Kreis mit dem Mittelpunkt D und dem Radius gleich DF. Zeichne diesen Kreis.
(3) Der Umkreismittelpunkt M liegt auf der Mittelsenkrechten von AB. Zeichne DM und konstruiere dazu eine Senkrechte s.
(4) Diese Senkrechte s schneidet den Thaleskreis über AB in den Punkten A und B. Konstruiere A und B.
(5) Verbinde A mit dem Höhenfußpunkt F und konstruiere zu AF eine Senkrechte. Auf dieser Senkrechten liegt der Mittelpunkt der Strecke BC. Da M auf der Mittelsenkrechten von BC liegt, erhält man den Mittelpunkt E der Strecke BC indem man das Lot von M auf die Senkrechte durch F fällt. Der Lotfußpunkt ist E.
(6) Der Punkt C ist dann das Ergebnis einer Punktspiegelung von B an E.

Dreiecksseiten: $c = 11{,}7$ cm, $a = 12{,}3$ cm, $b = 13{,}3$ cm.



Aufgabe V10915:
Konstruieren Sie ein Dreieck aus: $s_c = 5{,}4$ cm, $c = 6{,}9$ cm, $b = 6{,}2$ cm.
In dieses Dreieck ist ein Rhombus so zu konstruieren, dass er mit dem Dreieck den Winkel β gemeinsam hat und dass die Gegenecke des Rhombus auf der Seite b liegt. (Hilfslinien müssen erkennbar sein.)

Lösung von Steffen Polster:



Konstruktion des Dreiecks ABC:
(1) Zeichne die Strecke $AB = c$. Konstruiere den Mittelpunkt M von AB.
(2) Zeichne einen Kreisbogen um M mit dem Radius s_c. Zeichne einen Kreisbogen um A mit dem Radius b. Beide Kreisbögen schneiden sich in dem Punkt C. Der zweite Schnittpunkt der Kreisbögen (auf der anderen Seite von AB) erzeugt ein kongruentes Dreieck ABC_2.

Konstruktion des Rhombus $DEFG$:
(1) Der D gegenüberliegende Punkt F muss auf der Winkelhalbierenden von β liegen. Konstruiere diese Winkelhalbierende. Ihr Schnittpunkt mit AC ist der Punkt F.
(2) Konstruiere den Mittelpunkt von DF und errichte in ihm die Senkrechte zu DF. Die Schnittpunkte dieser Senkrechten mit den Seiten BC und AC sind die gesuchten Punkte E und G. $DEFG$ ist der gesuchte Rhombus.

Aufgabe 030913:

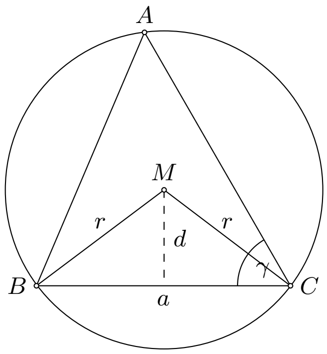
a) Konstruieren Sie ein Dreieck aus $a = 5{,}6$ cm, $r = 3{,}5$ cm (Radius des Umkreises) und $\gamma = 60°$!

b) Beschreiben Sie die Konstruktion!

c) Berechnen Sie den Abstand des Umkreismittelpunktes von der Seite a!

d) Untersuchen Sie, für welche Maße des Umkreisradius die Konstruktion eines Dreiecks mit $a = 5{,}6$ cm und $\gamma = 60°$ nicht möglich ist!

Lösung von Carsten Balleier:



a) s. Bild.
b) Man beginne mit der Seite a und bezeichne ihre Endpunkte mit B und C. Dann zeichne man Kreisbögen mit Radius r um die beiden Endpunkte von a, so dass ein Schnittpunkt entsteht. Dieser ist dann der Umkreismittelpunkt des gesuchten Dreiecks; er heiße M.

Dann konstruiere man den Kreis um M mit Radius r, auf ihm muss der Punkt A liegen. Letzterer ensteht, wenn der Winkel γ an a in C so angetragen wird, dass γ ein Innenwinkel des erhaltenen Dreiecks ABC ist.

c) Das Dreieck BCM ist gleichschenklig. Aus dem Satz des Pythagoras folgt dann für die Höhe auf a, die gleichzeitig der gesuchte Abstand d ist: $d = \sqrt{r^2 - (a/2)^2} = 2{,}1cm$.

d) Das Dreieck BCM muss existieren, d. h. seine Dreiecksungleichung muss erfüllt sein: $2r \geq a$ oder $r \geq 2{,}8cm$.

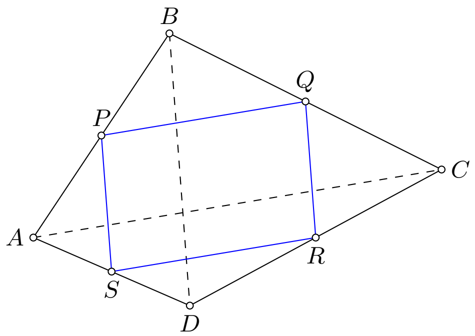
Aufgabe 070911:
Gegeben sei ein beliebiges konvexes Viereck.

Konstruieren Sie ein Parallelogramm, das die folgenden Bedingungen erfüllt!

(1) Je zwei gegenüberliegende Seiten des Parallelogramms sind parallel zu einer Diagonalen des Vierecks, und jede von ihnen ist halb so lang wie diese.

(2) Die Eckpunkte des Parallelogramms liegen auf den Seiten des Vierecks.

Lösung von Manuela Kugel:



Sei das konvexe Viereck $ABCD$ gegeben. Die Diagonalen sind demnach $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$.
Durch die Angabe, dass 2 Seiten des (vermeintlichen) Parallelogramms parallel zu $\overline{AC}$ und auch halb so groß wie $\overline{AC}$ sind, sind die 4 Eckpunkte des (vermeintlichen) Parallelogramms schon bestimmt. Denn es existiert genau eine solche Strecke im Dreieck ABC und eine im Dreieck ACD.
Die eine Strecke sei $\overline{PQ}$ mit P auf $\overline{AB}$ und Q auf $\overline{BC}$, die andere $\overline{RS}$ mit R auf $\overline{CD}$ und S auf $\overline{AD}$.

Wir wissen nach Voraussetzung, dass $\overline{PQ} = \overline{RS} = \frac{1}{2}\overline{AC}$ gilt und dass diese Strecken parallel sind. Wenn wir jetzt noch zeigen können, dass $\overline{PS} = \overline{QR} = \frac{1}{2}\overline{BD}$ gilt und dass auch diese Strecken parallel sind, dann sind wir fertig.

Nach Strahlensatz gilt:

$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{AC}} = \frac{1}{2} = \frac{\overline{PB}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB} - \overline{AP}}{\overline{AB}} = 1 - \frac{\overline{AP}}{\overline{AB}}$$

Daraus folgt $\overline{AP} = \frac{1}{2}\overline{AB}$. Der Punkt P halbiert also die Seite auf der er liegt. Gleiches lässt sich für Q, R und S schließen.
Es gilt also $\frac{\overline{AP}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AS}}{\overline{AD}} = \frac{1}{2}$ und $\frac{\overline{CQ}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{CR}}{\overline{CD}} = \frac{1}{2}$. Aus der Umkehrung des 1. Strahlensatzes folgt damit, dass $\overline{PS}$, $\overline{QR}$ und $\overline{BD}$ zueinander parallel sind. Mit dem 2. Strahlensatz folgt direkt $\frac{\overline{PS}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{QR}}{\overline{BD}} = \frac{1}{2}$.

Aufgabe 080913:
Konstruieren Sie ein Trapez aus a, b, c und d!

Dabei seien a die Länge der Seite AB, b die Länge der Seite BC, c die Länge der Seite CD und d die Länge der Seite DA. Weiterhin soll $AB \parallel CD$ und $a > c$ gelten.

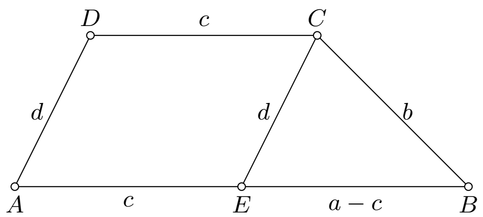
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

a) Angenommen, $ABCD$ sei ein Trapez, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht. Zieht man durch C die Parallele zu DA, dann schneidet diese AB, da $a > c$ ist. Der Schnittpunkt sei E. Es entstehen das Dreieck $\triangle EBC$ mit $EB = a - c$ und das Parallelogramm $AECD$ mit $|CE| = d$.

$\triangle EBC$ ist konstruierbar aus $a - c$, b, d nach Kongruenzsatz (sss).

$\triangle ABC$ ist konstruierbar aus $|CB|$, $\angle CBE$, a nach Kongruenzsatz (sws).

$\triangle ACD$ ist konstruierbar aus $|AC|$, c, d nach Kongruenzsatz (sss).



b) Daraus ergibt sich, dass ein Trapez nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:
   - Man zeichne die Strecke EB der Länge $a - c$.
   - Punkt C liegt dann auf dem Kreis um B mit dem Radius b und auf dem Kreis um E mit dem Radius d.
   - Punkt A liegt auf der Verlängerung von BE über E hinaus und auf dem Kreis um B mit dem Radius a.
   - Punkt D liegt auf dem Kreis um C mit dem Radius c und auf dem Kreis um A mit dem Radius d, und zwar ist D derjenige der beiden Schnittpunkte dieser Kreise, der nicht auf derselben Seite der Geraden AC wie E liegt.

c) Beweis, dass ein so konstruiertes Trapez den Bedingungen der Aufgabe entspricht: nach Konstruktion gilt $|AB| = a$, $|BC| = b$, $|CD| = |AE| = c$, $|DA| = |CE| = d$. Also ist $AECD$ ein Parallelogramm, und es gilt $AE \parallel CD$ und damit auch $AB \parallel CD$. Weiterhin gilt nach Voraussetzung $a > c$.

d) Die Konstruktion ist genau dann ausführbar, wenn $\triangle EBC$ konstruierbar ist, und zwar dann auf genau eine Weise. Zur Konstruierbarkeit von $\triangle EBC$ ist notwendig nd hinreichend, dass die Dreiecksungleichungen erfüllt sind:

$$a - c < b + d, \qquad b < a - c + d, \qquad d < a - c + b.$$

Ist eine dieser Bedingungen verletzt, so existiert kein der Aufgabe entsprechendes Trapez.

Aufgabe 150913:
Gegeben seien zwei verschiedene zueinander parallele Geraden g und h. Außerhalb des von ihnen eingeschlossenen Streifens seien ferner zwei voneinander verschiedene Punkte A und B so gegeben, dass auch kein Punkt der Strecke AB in diesem Streifen liegt und dass der Abstand von A zu g kleiner ist als der Abstand von A zu h. Für jeden Punkt P auf h bezeichne A' bzw. B' den Schnittpunkt von g mit PA bzw. PB.

Konstruieren Sie alle diejenigen Punkte P auf h, für die mit diesen Bezeichnungen $\overline{A'P} = \overline{B'P}$ gilt!

Begründen Sie die Konstruktion; diskutieren Sie, ob alle Punkte P mit der genannten Eigenschaft erhalten werden können und wie viele solcher Punkte es je nach der Lage der gegebenen g, h, A, B geben kann!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Angenommen, ein Punkt P auf h habe die Eigenschaft $A'P = B'P$. Dann folgt:

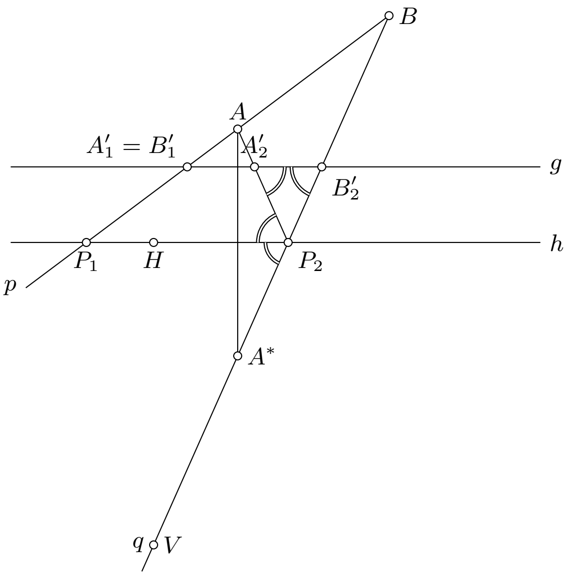
1. Ist $A' = B'$, so geht die durch P und A gelegte Gerade p auch durch $(A' =)B'$, also auch durch B.
2. Ist $A' \neq B'$, so gilt, wenn H einen näher an A als an B' gelegenen Punkt auf h und V einen Punkt der Verlängerung von BP über P hinaus bezeichnet,

$\angle APH = \angle PA'B'$ (Wechselwinkel an Parallelen)

$= \angle PB'A'$ (Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck)

$= \angle VPH$ (Stufenwinkel an Parallelen)

Daher liegt der durch Spiegelung von A an h entstandene Punkt A^* auf der Geraden q durch P und B.



II. Hiernach hat ein Punkt P nur dann die geforderte Eigenschaft, wenn er als einer der Punkte P_1, P_2 durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

1. Man konstruiere die Gerade p durch A und B.
2. Schneiden sich p und h, so sei P_1 ihr Schnittpunkt.

3. Man konstruiere den durch Spiegelung von A an h entstehenden Punkt A^*.
4. Man konstruiere die Gerade q durch A^* und B.
5. Schneiden sich q und h, so sei P_2 ihr Schnittpunkt.

III. Jeder so konstruierte Punkt P hat die geforderte Eigenschaft.

Beweis:

1. Ist $P = P_1$ nach II.1.2 konstruiert, so gilt:

   Die Strecken PA und PB liegen beide auf p. Daher schneiden beide die Gerade q im demselben Punkt, d. h. es gilt $A' = B'$ und somit $A'P = B'P$.

2. Ist $P = P_2$ nach II.3.4.5. konstruiert, so gilt:

   a) Ist $A' = B'$, so gilt $A'P = B'P$.

   b) Ist $A' \neq B'$, so gilt, wenn H einen näher an A' als an B' gelegenen Punkt auf h bezeichnet,

   $\angle PA'B = \angle ABH$ (Wechselwinkel an Parallelen)

   $= \angle A^*PH$ (da A^* Spiegelpunkt von A an h ist)

   $= \angle PB'A'$ (Stufenwinkel an Parallelen)

   also ist $\triangle PA'B'$ gleichschenklig mit $A'P = B'P$.

V. Konstruktionsschritt II.1. ist eindeutig ausführbar. Konstruktionsschritt II.2. führt genau dann auf keinen Punkt P_1, wenn $p \parallel h$ ist, anderenfalls auf genau einen Punkt P_1.

Konstruktionsschritt II.3. und 4. sind stets eindeutig ausführbar, ebenfalls Konstruktionsschritt II.5., da A^* auf B auf verschiedenen Seiten der Geraden h liegen.

Es gilt genau dann $P = P_2$, wenn der Spiegelpunkt A^* auf der Geraden p durch A, B liegt. Da die Gerade durch A, A^* stets auf h senkrecht steht, gilt somit $P_1 = P_2$ genau im Falle $p \perp h$.

Damit ist gezeigt:

1. Ist die Gerade durch A, B parallel zu h, so existiert genau ein gesuchter Punkt P, und er kann durch die Konstruktion II.3. bis 5. gefunden werden.
2. Ist die Gerade durch A, B senkrecht zu h, so existiert genau ein gesuchter Punkt P, und er kann durch die Konstruktion II.1.2. oder durch die Konstruktion II.3. bis 5. gefunden werden.
3. Ist die Gerade durch A, B weder parallel noch senkrecht zu h, so existieren genau zwei gesuchte Punkte P_1, P_2; sie können durch die Konstruktion II.1.2. bzw. II.3. bis 5. gefunden werden.

Aufgabe 180914:
Gegeben seien zwei Punkte A_0 und A_1. Ihr Abstand voneinander werde mit a bezeichnet.

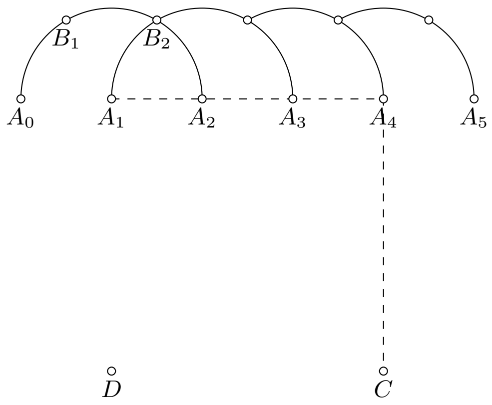
Man konstruiere die Eckpunkte eines Quadrats mit der Seitenlänge $3a$ unter alleiniger Benutzung eines Zirkels!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Man schlägt um A_0 und A_1 Kreise mit dem Radius a. Einer ihrer Schnittpunkte sei B_1 genannt. Man schlägt um A_1 und B_1 Kreise mit dem Radius a. Ihr von A_0 verschiedener Schnittpunkt sei B_2 genannt. Man schlägt um A_1 und B_2 Kreise mit dem Radius a. Ihr von B_1 verschiedener Schnittpunkt sei A_2 genannt.

Da die Dreiecke $A_0A_1B_1$, $B_1A_1B_2$ gleichseitig sind, haben die Winkel $\angle A_0A_1B_1$, $\angle B_1A_1B_2$ und $\angle B_2A_1A_2$ jeweils eine Größe von 60° und bilden zusammen einen gestreckten Winkel.

Damit liegen die Punkte A_0, A_1 und A_2 auf derselben Geraden, und es ist $A_0A_1 = A_1A_2 = a$.

Durch eine Fortsetzung dieses Verfahrens lässt sich eine beliebig große Menge von Punkten A_n konstruieren, die alle auf derselben Geraden liegen und von denen je zwei benachbarte den Abstand a haben.



Man konstruiert auf diese Weise eine Folge von Punkten $A_0, A_1, ..., A_5$. Dann ist $A_0A_5 = 5a$, $A_1A_4 = 3a$ und $A_0A_4 = 4a$.

Man schlägt nun den Kreis um A_4 mit dem Radius $3a$ und um A_0 den Kreis mit dem Radius $5a$. Beide Kreise schneiden einander, einer der beiden Schnittpunkte sei C.

Wegen $(3a)^2 + (4a)^2 = (5a)^2$ ist nach der Umkehrung des Satzes von Pythagoras das durch die Punkte A_0, A_4, C bestimmte Dreieck rechtwinklig, und A_4 ist der Scheitelpunkt des rechten Winkels.

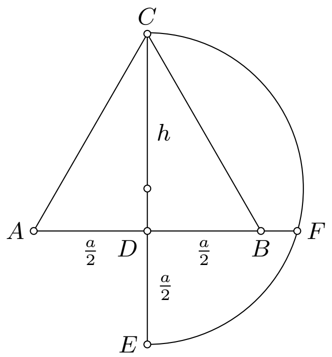
Man schlägt nun den Kreis um C mit dem Radius $3a$ und um A_1 den Kreis mit dem gleichen Radius. Ihr von A_4 verschiedener Schnittpunkt sei D genannt. Wegen $A_1A_4 = A_4C = CD = DA_1 = 3a$ und der Tatsache, dass der Innenwinkel bei A_4 ein rechter ist, sind A_1,A_4,C und D Eckpunkte eines Quadrats mit der Seitenlänge $3a$.

Aufgabe 190914:
Gegeben sei ein gleichseitiges Dreieck ABC.

Beschreiben Sie eine Konstruktion einer Seite eines Quadrates, das denselben Flächeninhalt wie das Dreieck ABC hat!

In der Konstruktionsbeschreibung sollen wie üblich nur solche Konstruktionsschritte auftreten, die sich unter alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal ausführen lassen. Dass bei der Durchführung der Konstruktion (nach der von Ihnen gegebenen Beschreibung) eine Seite eines zu dem gegebenen Dreieck ABC flächeninhaltsgleichen Quadrates entsteht, ist zu beweisen.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



I. Konstruktionsbeschreibung:

(1) Man fällt das Lot CD von C auf AB.

(2) Man verlängert dieses Lot über D hinaus bis zu einem Punkt E, für den $DE = AD$ gilt.

(3) Man konstruiert einen Halbkreis über CD. Er schneidet die Gerade durch A und B in einem Punkt F. Die Strecke DF hat die verlangte Eigenschaft.

II. Beweis, dass ein Quadrat mit der Seitenlänge DF denselben Flächeninhalt hat wie das Dreieck ABC (1):

Es sei $AB = a$, $CD = h$. Nach Konstruktionsschritt (1) ist CD eine Höhe und folglich auch Seitenhalbierende im gleichseitigen Dreieck ABC, also gilt $AD = \frac{a}{2}$. Nach (2) gilt daher ebenfalls $DE = \frac{a}{2}$.

Nach (3) und nach dem Satz von Thales ist das Dreieck DEF bei F rechtwinklig; in diesem Dreieck ist FD nach (1) und (2) die Höhe auf der Hypotenuse. Folglich gilt nach dem Höhensatz

$$DF^2 = \frac{a}{2} \cdot h$$

Der Flächeninhalt eines Quadrates mit der Seitenlänge DF ist mithin gleich dem Flächeninhalt $\frac{a}{2} \cdot h$ des Dreiecks ABC, w. z. b. w.

Aufgabe 200914:
Gegeben seien ein Kreis k_1 mit dem Mittelpunkt M_1 und dem Radius $r_1 = 4{,}5$ cm sowie ein Kreis k_2 mit dem Mittelpunkt M_2 und dem Radius $r_2 = 2{,}5$ cm. Es sei $\overline{M_1M_2} = 7$ cm.

Konstruieren Sie sämtliche gemeinsamen Tangenten der Kreise k_1 und k_2! Beschreiben und begründen Sie Ihre Konstruktion!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Da laut Aufgabe $M_1M_2 = r_1 + r_2$ gilt, berühren sich beide Kreise von außen. Daher haben sie genau eine innere gemeinsame Tangente s. Diese geht durch den Berührungspunkt A der beiden Kreise k_1 und k_2 und steht senkrecht auf M_1M_2. Daraus ergibt sich ihre Konstruktion.

(I) Es sei nun t eine gemeinsame äußere Tangente der Kreise k_1 und k_2, ihre Berührungspunkte mit diesen Kreisen seien T_1 bzw. T_2. Die Parallele zu t durch M_2 schneidet M_1T_1 in einem Punkt, der F genannt sei. Dann ist $T_1T_2M_2F$ ein Rechteck, es gilt $M_1T_1 = r_1$ sowie $M_2T_2 = r_2$, also $M_1F = r_1 - r_2$.

Der Punkt F liegt daher erstens auf dem Kreise um M_1 mit $r_1 - r_2$ als Radius und wegen $\angle M_1FM_2 = 90°$ zweitens auf einem der Halbkreise über M_1M_2.

(II) Daraus ergibt sich folgende Konstruktion für eine äußere gemeinsame Tangente der Kreise k_1 und k_2:

(1) Man konstruiere den Kreis um M_1 mit $r_1 - r_2$ als Radius.

(2) Man konstruiert einen Halbkreis über M_1M_2. Sein Schnittpunkt mit dem in (1) konstruierten Kreis sei F genannt.

(3) Man zieht den Strahl aus M_1 durch F. Sein Schnittpunkt mit dem Kreis k_1 sei T_1 genannt.

(4) Man zieht die Parallele t zu M_2 durch T_1.

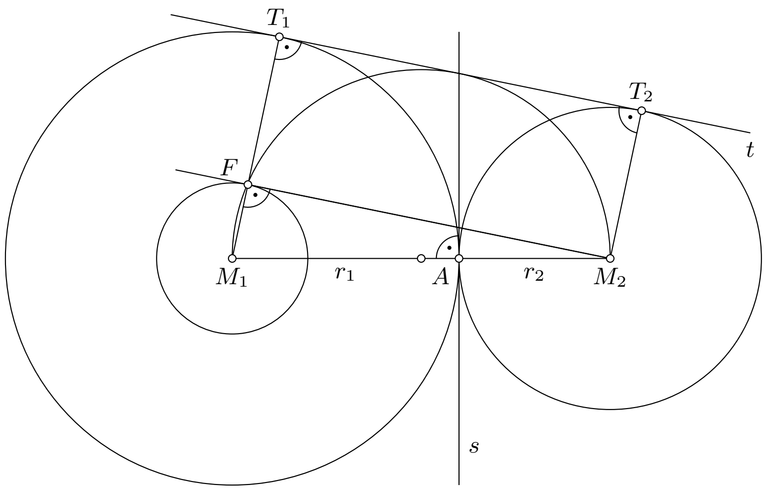
(III) Beweis, dass jede so konstruierte Gerade t Tangente an k_1 und k_2 ist:

Es sei T_2 der Schnittpunkt der Parallelen zu FT_1 durch M_2 mit t. Laut Konstruktion ist t parallel zu FM_2. Folglich gilt $\angle M_1FM_2 = \angle FT_1T_2 = 90°$ (als Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen).

Ferner gilt $\angle FT_1T_2 + \angle M_2T_2T_1 = 180°$ (als entgegengesetzt liegende Winkel an geschnittenen Parallelen), also $\angle M_2T_2T_1 = 180° - FT_1T_2 = 180° - 90° = 90°$. Mithin ist $FT_1T_2M_2$ eine Rechteck, und es folgt $FT_1 = M_2T_2 = r_2$.

Daher ist t Tangente an k_1 und k_2.

(IV) In Konstruktionsschritt (2) gibt es genau zwei Möglichkeiten für die Konstruktion des Halbkreises. Alle anderen Konstruktionsschritte sind eindeutig ausführbar. Also gibt es für jeden der beiden Halbkreise über M_1M_2 genau eine Tangente t, insgesamt also genau zwei gemeinsame äußere Tangenten von k_1 und k_2.



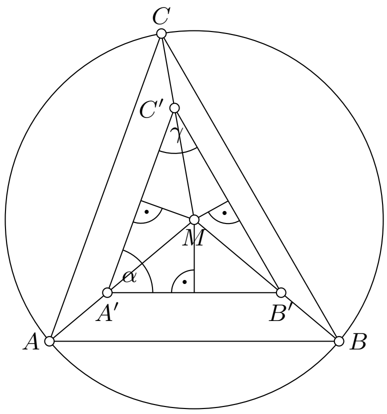
Aufgabe 210914:
Konstruieren Sie ein Dreieck ABC aus $\overline{\angle BAC} = \alpha = 70°$, $\overline{\angle ACB} = \gamma = 50°$ und $r = 5$ cm, wobei r der Radius des Umkreises des Dreiecks ABC ist!

Beschreiben und begründen Sie Ihre Konstruktion! Untersuchen Sie, ob durch die gegebenen Stücke ein Dreieck ABC bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Angenommen, ein Dreieck ABC erfüllt die Bedingungen der Aufgabe. Der Mittelpunkt seines Umkreises sei M; dann gilt $MA = MB = MC = r$.

Ist $A'B'C'$ ein Dreieck mit $\angle B'A'C' = \alpha$ und $\angle A'C'B' = \gamma$, so ist es zu $\triangle ABC$ ähnlich, kann also durch eine Bewegung in eine solche Lage gebracht werden, dass es aus dem Dreieck ABC durch eine zentrische Streckung mit dem Streckzentrum M und einem Streckungsfaktor $k > 0$ hervorgeht.

Dann gilt $MA' = MB' = MC' = kr$. Also ist M auch der Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks $A'B'C'$, d. h. der Schnittpunkt seiner Mittelsenkrechten.



II. Daher entspricht ein Dreieck nur dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(1) Man konstruiert ein Dreieck $A'B'C'$, in dem $\angle B'A'C' = \alpha$ und $\angle A'C'B' = \gamma$ gilt.

(2) Man konstruiert den Schnittpunkt M seiner Mittelsenkrechten.

(3) Man trägt auf den von M durch A', B' und C' gehenden Strahlen von M aus jeweils die Strecke der Länge r ab. Die erhaltenen Endpunkte bezeichnet man mit A, B bzw. C und verbindet sich untereinander.

III. Beweis, dass jedes so konstruierte Dreieck ABC den Bedingungen der Aufgabe genügt:

Nach (3) gilt $MA = MB = MC = r$, also ist r der Umkreisradius des Dreiecks ABC. Nach (2) folgt weiter, dass M der Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks $A'B'C'$ ist, demnach gilt $MA' = MB' = MC'$. Also gelten mit einer Zahl $k > 0$ die Gleichungen $MA' = MB' = MC' = kr$; folglich geht $\triangle ABC$ aus $\triangle A'B'C'$ durch eine zentrische Streckung hervor. Somit sind beide Dreiecke einander ähnlich und es gilt

$$\angle BAC = \angle B'A'C' = \alpha \qquad ; \qquad \angle ACB = \angle A'C'B' = \gamma$$

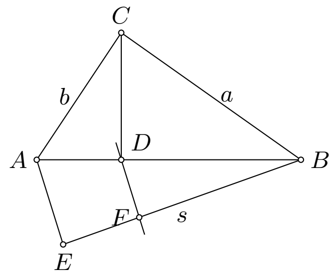
IV. Konstruktionsschritt (1) ist (bei den gegebenen Werten von α und γ) ausführbar, aber nicht eindeutig; jedoch sind je zwei nach (1) zu erhaltende Dreiecke $A_1'B_1'C_1'$, $A_2'B_2'C_2'$ zueinander ähnlich. Also kann stets $A_2'B_2'C_2'$ durch eine Bewegung in eine solche Lage gebracht werden, dass es aus $A_1'B_1'C_1'$ durch eine zentrische Streckung mit dem Streckungszentrum M hervorgeht.

Hiernach ist die Figur aus den drei in (3) konstruierten Strahlen bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt. Somit ist auch das in (3) anschließend konstruierte Dreieck ABC durch die gegebenen Stücke bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.

Aufgabe 260912:
Es seien a, b, s drei gegebene Streckenlängen. Peter soll eine Strecke der Länge s im Verhältnis $a^2 : b^2$ teilen. Er gibt folgende Konstruktion an:
(1) Man konstruiert ein rechtwinkliges Dreieck aus $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ und $\overline{\angle ACB} = 90°$
(2) Von C fällt man das Lot auf AB, sein Fußpunkt sei D.
(3) In B trägt man an BA einen Winkel an, dessen Größe zwischen 0° und 180° liegt. Auf den freien Schenkel dieses Winkels wird von B aus die Strecke der Länge s abgetragen, ihr anderer Endpunkt sei E.
(4) Die Parallele zu EA durch D schneide BE in einen Punkt, der F genannt sei.

a) Führen Sie die beschriebene Konstruktion durch!
b) Beweisen Sie:
Wenn eine Strecke BE und ein Punkt F nach Peters Beschreibung konstruiert werden, dann teilt F die Strecke BE in Verhältnis $\overline{BF} : \overline{FE} = a^2 : b^2$.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



a) Die Abbildung zeigt die geforderte Konstruktion.

b) Wenn A, B, C, D, E, F nach der Beschreibung konstruiert werden, so folgt:
Nach (1) und (2) ist $\angle ACB = 90° = \angle CDB$. Ferner ist $\angle ABC = \angle CBD$. Daher gilt $\triangle ABC \sim \triangle CBD$, also

$$AB : BC = CB : BD \qquad ; \qquad BD \cdot AB = BC^2 = a^2$$

Nach (3) und (4) folgt damit aus dem Strahlensatz

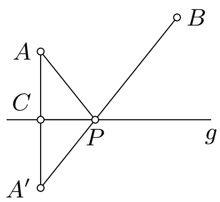
$$BF : FE = BD : DA = a^2 : b^2$$

w. z. b. w.

II Runde 2

Aufgabe 020925:
Zeichnen Sie eine Gerade g und auf derselben Seite von g zwei Punkte A und B, die verschiedenen Abstand von g haben und deren Verbindungsstrecke verlängert die Gerade g nicht unter einem rechten Winkel schneidet!
Konstruieren Sie auf g einen Punkt P, für den der Winkel zwischen AP und g gleich dem Winkel zwischen BP und g ist! Begründen Sie die Konstruktion!

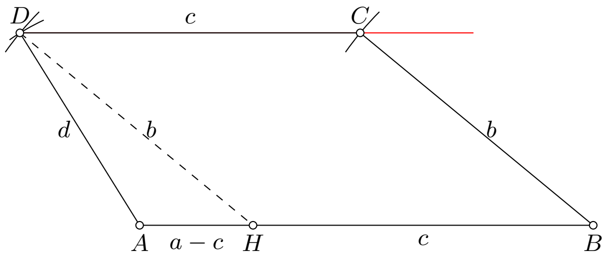
Lösung von André Lanka:



Man spiegelt zuerst den Punkt A an der Geraden g und erhält den Punkt A'. Der Schnittpunkt von g mit AA' sei C. Der Schnittpunkt von g mit $A'B$ sei P.
Dann sind die beiden Dreiecke $\triangle ACP$ und $\triangle A'CP$ wegen SWS kongruent zueinander. Demnach ist $\angle A'PC = \angle CPA$. Außerdem ist auch $\angle A'PC$ genauso groß wie der Winkel zwischen g und PB, weil es sich um Wechselwinkel handelt.
Der gefundene Punkt P erfüllt also die Anforderungen.

Aufgabe 030921:
Von einem Trapez $ABCD$ mit den parallelen Seiten AB und CD sind gegeben:
$AB = 6$ cm, $BC = 4$ cm, $CD = 4{,}5$ cm, $DA = 3$ cm.
Konstruieren Sie das Trapez und begründen Sie die Konstruktion!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Planfigur: Sei $a > c$. Wählt man auf der Seite $|AB| = a$ einen Punkt H so, dass $|HB| = c$, erhält man durch die Verbindung $|HD|$ das Parallelogramm $HBCD$.

Damit ergibt sich folgende Konstruktion:

1. Lege durch die Strecke $|AB| := a$ die Punkte A und B fest.
2. Trage auf $|AB|$ vom Startpunk B die Strecke c ab; Endpunkt sei H.
3. Beschreibe einen Kreis (H, b) um H vom Radius b. Beschreibe einen Kreis (A, d) um A vom Radius d. Schnittpunkt beider Kreise ist die Ecke D so dass, A,H,D im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen werden.
4. Lege durch D eine Parallele zu $|AB|$.
5. Beschreibe einen Kreis (B, b) um B vom Radius b. Schnittpunkt des Kreises mit der Parallelen ist die Ecke C.
6. Erhalte durch entsprechende Verbindung der Punkte A,B,C,D das Trapez $ABCD$.

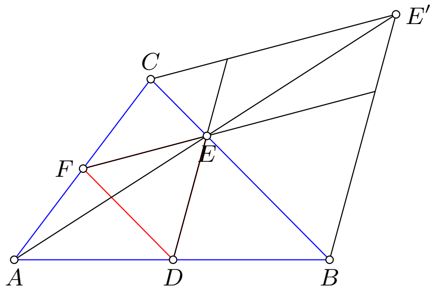
Aufgabe 030923:
Einem spitzwinkligen Dreieck ABC soll ein gleichseitiges Dreieck so einbeschrieben werden, dass eine seiner Seiten parallel zur Seite BC verläuft und die Eckpunkte des einbeschriebenen Dreiecks auf den Seiten des Dreiecks ABC liegen.
Begründen Sie die Konstruktion!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Analyse
Angenommen, D, E, F genügen allen Bedingungen der Aufgabe. Bezeichnet E' den auf der anderen Seite von g_{BC} wie A gelegenen Eckpunkt des gleichseitigen Dreiecks mit der Seite BC, dann ist E der Schnittpunkt von AE' mit g_{BC}.

Beweis: Nach Voraussetzung ist $FD \parallel CB$ und $|\angle DFE| = 60°$, und nach Definition $|\angle BCE'| = 60°$. Da E und E' auf derselben Seite von g_{FD} liegen wie gCB, folgt $CD' \parallel FE$ und entsprechend $FE \parallel BE'$.
Die Gerade g_{AE} schneidet $g_{CE'}$ in einem Punkt, der P genannt sei, und die Gerade $g_{BE'}$ in einem Punkt, der Q genannt sei. Dann gelten nach dem 1. Strahlensatz die Beziehungen

$$|AD| : |AB| = |AF| : |AC|, \qquad |AD| : |AB| = |AE| : |AQ'|, \qquad |AF| : |AC| = |AE| : |AF|$$

Aus diesen Gleichungen folgt $|AE| : |AP| = |AE| : |AQ|$, also $|AP| = |AQ|$ und damit $P = Q = E'$. Daher ist $\triangle CPB$ gleichseitig; denn jeder der Winkel $\angle BCP, \angle CBP$ hat entweder die Größe 60° oder 120°, und 120° kommt nicht in Frage, weil die Winkelgrößensumme im Dreieck 180° beträgt.
Daher können E, F, D nur dann allen Bedingungen der Aufgabe genügen, wenn sie auf folgende Weise konstruierbar sind.



II. Konstruktion:
Man konstruiere über CB das gleichseitige Dreieck CBE', dessen Ecke E' nicht auf derselben Seite von g_{BC} wie A liegt. Dann schneidet die Strecke AE' die Gerade g_{BC} in einem Punkt E.
F sei der Schnittpunkt von g_{AC} mit der Parallelen zu CE' durch E; D der Schnittpunkt von g_{AB} mit der Parallelen zu BE' durch E.

III. Satz:
Wenn E, F, D gemäß II. konstruiert sind, genügt $\triangle EFD$ allen Bedingungen der Aufgabe.

Beweis:
a) Man überzeugt sich zunächst davon, dass E auf BC liegt: Da nach Voraussetzung $\triangle ABC$ spitz ist und A und E' auf verschiedenen Seiten von g_BC liegen, gilt

$$|\angle ABE'| = |\angle ABC| + |\angle CBE'| \leq 90° + 60° < 180°$$

und entsprechend $|\angle ACE'| < 180°$. Daher kann E nicht mit B oder C zusammenfallen.
Läge E nicht auf BC, so läge BC auf ein und derselben Seite von $g_{AE'}$. Dann wäre einer der beiden Winkel $\angle EBE'$ oder $\angle ECE'$ Außenwinkel zum Dreieck BCE'.
O. B. d. A. kann angenommen werden, dass dies der Winkel $\angle EBE'$ ist. Da A und E' auf verschiedenen Seiten von g_{EC} liegen, läge B im Innern des Dreiecks $AE'C$ und es wäre

$$360° = |\angle ABE'| + |\angle E'BC| + |\angle CBA| \qquad \text{also}$$

$$|\angle CBA| = 360° - |\angle ABE'| - |\angle E'BC| > 360° - 180° - 60° = 120°$$

d. h. $\triangle ABC$ wäre nicht spitzwinklig.

b) Läge F nicht auf AC, so lägen A und C auf derselben Seite von g_{EF}, und zwar wegen $g_{EF} \parallel g_{CE'}$ auf derselben Seite wie E', so dass AE' keinen Punkt mit g_{EF} gemeinsam hätte. Das ist ein Widerspruch, weil E auf AE' und g_{EF} liegt.

c) Entsprechend zeigt man, dass D auf AB liegt.

d) Wegen $g_{EF} \parallel g_{E'C}$ und $g_{ED} \parallel g_{E'B}$ folgt nun nach dem 1. Strahlensatz $|AD| : |AB| = |AE| : |AE'| = |AF| : |AC|$ und aus $|AD| : |AB| = |AF| : |AC|$ nach Umkehrung des 1. Strahlensatzes $DF \parallel BC$.

e) Da EE' die Gerade g_{AC} nicht schneidet (denn der Schnittpunkt von $g_{EE'}$ mit g_{AC} ist A, und A liegt nicht auf EE', weil E auf AE' liegt), liegen E und E' auf derselben Seite von g_{AC}.
Daher gilt $\angle AFE \cong \angle ACE'$, wegen $FE \parallel CE'$.
Entsprechend ergibt sich, da DB auf derselben Seite von g_{AC} liegt wie EE', $\angle AFD \cong \angle ACB$ und weiter $|\angle DFE| = |\angle BCE'| = 60°$.
Analog folgt, dass auch die anderen Innenwinkel von $\triangle DEF$ je die Größe 60° haben, so dass $\triangle DEF$ gleichseitig ist.

IV. Determination:
Da jeder Konstruktionsschritt stets ausführbar ist, und zwar genau auf eine Weise, gibt es stets genau ein Dreieck DEF, das allen Bedingungen der Aufgabe genügt.

Aufgabe 210924:
Gegeben sei ein beliebiges Dreieck ABC.
Konstruieren Sie eine Parallele zu BC so, dass sie die Dreieckseiten AB und AC in Punkten D bzw. E schneidet, für die $ED = DB + EC$ gilt!
Beschreiben und begründen Sie Ihre Konstruktion!
Untersuchen Sie, ob es (zu dem gegebenen Dreieck ABC) genau eine Parallele der verlangten Art gibt!

Lösung von cyrix:
Konstruktion:
1) Man konstruiere die Winkelhalbierende w des Winkels $\angle BAC$ und deren Schnittpunkt W mit der Seite BC.
2) Der Kreis um C durch W schneide die Gerade AC in zwei Punkten, wobei genau einer nicht auf der gleichen Seite von C wie A liegt. Dieser Schnittpunkt heiße X.
3) Die Parallele zur Geraden XW durch C schneide w in S.
4) Die Parallele zur Geraden BC durch S schneide die Geraden AB in D und AC in E.

Begründung:
Da A, E und C in dieser Reihenfolge auf einer Geraden liegen, gilt $|AE| + |EC| = |AC|$, also

$$\frac{|AE| + |EC|}{|ES|} = \frac{|AC|}{ES}$$

Da die Geraden ES und CW nach Konstruktion parallel sind, gilt nach dem Strahlensatz $\frac{|ES|}{|AS|} = \frac{|CW|}{|AW|}$, also $|ES| = |CW| \cdot \frac{|AS|}{|AW|}$. Setzt man dies ein, erhält man

$$\frac{|AE| + |EC|}{|ES|} = \frac{|AC|}{ES} = \frac{|AC|}{|CW|} \cdot \frac{|AW|}{|AS|}$$

Da die Geraden CS und XW nach Konstruktion parallel sind, gilt nach dem Strahlensatz $\frac{|AW|}{|AS|} = \frac{|AX|}{|AC|}$. Setzt man dies ein, erhält man

$$\frac{|AE| + |EC|}{|ES|} = \frac{|AC|}{|CW|} \cdot \frac{|AW|}{|AS|} = \frac{|AC|}{|CW|} \cdot \frac{|AX|}{|AC|} = \frac{|AX|}{|CW|}$$

Nach Konstruktion ist $|AX| = |AC| + |CW|$, also

$$\frac{|AE| + |EC|}{|ES|} = \frac{|AX|}{|CW|} = \frac{|AC| + |CW|}{|CW|} = 1 + \frac{|AC|}{|CW|}$$

Da die Geraden ES und CW parallel sind, gilt nach dem Strahlensatz $\frac{|AC|}{|CW|} = \frac{|AE|}{|ES|}$. Setzt man das ein, erhält man

$$\frac{|AE| + |EC|}{|ES|} = 1 + \frac{|AC|}{|CW|} = 1 + \frac{|AE|}{|ES|} = \frac{|AE| + |ES|}{|ES|} \qquad \text{also} \qquad |EC| = |ES|$$

Da die Geraden ED und CB parallel sind, gilt $\frac{|SD|}{|ES|} = \frac{|WB|}{|WC|}$. Da W der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden von $\angle BAC$ mit der gegenüberliegenden Seite ist, gilt $\frac{|WB|}{|WC|} = \frac{|AB|}{|AC|}$, da eine Winkelhalbierende in einem Dreieck die gegenüberliegende Seite im Verhältnis der angrenzenden Seiten teilt. Zusammen gilt also

$$\frac{|SD|}{|ES|} = \frac{|AB|}{|AC|} \quad \text{bzw.} \quad |SD| = |ES| \cdot \frac{|AB|}{|AC|}$$

Setzt man hierin $|ES| = |EC|$ und $|EC| = |AC| - |AE|$ ein, erhält man

$$|SD| = (|AC| - |AE|) \cdot \frac{|AB|}{|AC|} = |AB| - |AB| \cdot \frac{|AE|}{|AC|}$$

Da die Geraden ED und CB parallel sind, gilt nach dem Strahlensatz $\frac{|AE|}{|AC|} = \frac{|AD|}{|AB|}$. Setzt man dies ein, erhält man

$$|SD| = |AB| - |AB| \cdot \frac{|AE|}{|AC|} = |AB| - |AB| \cdot \frac{|AD|}{|AB|} = |AB| - |AD| = |DB|$$

Damit gilt $|ED| = |ES| + |SD| = |EC| + |DB|$, wie gefordert.

Zur Eindeutigkeit:
Für eine Parallele p zu BC bezeichne E' und D' deren Schnittpunkte mit den Geraden AC bzw. AB. Bewegt man diese Parallele p beginnend mit $p = BC$ kontinuierlich soweit, bis sie durch A verläuft, dann ist die Länge der zugehörigen Strecke $E'D'$ beginnend mit dem Wert $|BC|$ streng monoton auf 0 gesunken.
Umgedreht wachsen in diesem Prozess die Streckenlängen $|D'B|$ und $|E'C|$ von 0 beginnend bis $|AB|$ bzw. $|AC|$, sodass für deren Summe $|D'B| + |E'C|$ gilt, dass sie streng monoton von 0 bis $|AB| + |AC| > |AB|$ wächst, wobei die letzte Ungleichung die Dreiecksungleichung ist.
Also gibt es genau eine Position der Parallelen p in diesem Bereich, an dem Gleichheit zwischen den beiden Werten $|E'D'|$ und $|D'B| + |E'C|$ Gleichheit herrscht. Damit ist die Position der Parallelen eindeutig bestimmt. (Außerhalb des betrachteten Bereichs schneidet p nicht mehr die Dreiecksseiten, was nach Aufgabenstellung gefordert war.)

Aufgabe 310922:
Gegeben seien zwei beliebige, voneinander verschiedene Punkte A und B.
Konstruieren Sie nur mit dem Zirkel einen von A und B verschiedenen Punkt C, für den $\angle ABC$ ein rechter Winkel ist!
Beschreiben Sie Ihre Konstruktion!
Beweisen Sie: Wenn ein Punkt C nach Ihrer Beschreibung konstruiert wird, dann ist $\angle ABC$ ein rechter Winkel!
Hinweis:
Man sagt, eine Konstruktion sei „nur mit dem Zirkel“ ausgeführt, wenn jeder Konstruktionsschritt darin besteht, dass um einen Punkt M ein Kreis konstruiert wird, dessen Radius gleich dem Abstand zweier Punkte P, Q ist (für die auch $M = P$ oder $M = Q$ sein darf), wobei die Punkte M, P, Q entweder gegebene oder beliebig gewählte oder zuvor konstruierte Punkte sind.
Als „nur mit dem Zirkel konstruiert“ gilt dann jeder Punkt, der als gemeinsamer Punkt von (mindestens) zwei solchen Kreisen zu erhalten ist.

Lösung von cyrix:
Wir führen folgende Konstruktion durch:
1) Kreis k_1 um B durch A, Kreis k_2 um A durch B
2) Schnittpunkte von k_1 und k_2 seien P_1 und P_5
3) Kreis k_3 um P_1 durch A, Schnittpunkt von k_1 und k_3 seien A und P_2
4) Kreis k_4 um P_2 durch P_1
5) Schnittpunkte von k_4 und k_1 seien P_1 und P_3
6) Kreis k um P_3 durch A, Kreis ℓ um A durch P_3
7) Schnittpunkte von k und ℓ seien C und C'

Beweis, dass $\angle ABC = 90°$ ist:
Nach Konstruktion besitzen die Kreise k_1 und k_2 den gleichen Radius $|AB|$, sodass das Dreieck $\triangle ABP_1$ gleichseitig mit Kantenlänge $|AB|$ ist. Insbesondere ist $\angle ABP_1 = 60°$.
Auf analoge Weise erhält man auch die Gleichseitigkeit der Dreiecke $\triangle P_1BP_2$ und $\triangle P_2BP_3$, sodass sich auch $\angle P_1BP_2 = \angle P_2BP_3 = 60°$ und damit

$$\angle ABP_3 = \angle ABP_1 + \angle P_1BP_2 + \angle P_2BP_3 = 60° + 60° + 60° = 180°$$

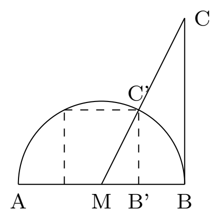
ergibt, sodass die Punkte A, B und P_3 auf einer Geraden liegen, wobei B zwischen A und P_3 liegt.

Weiterhin haben alle drei betrachteten gleichseitigen Dreiecke die Kantenlänge $|AB|$, sodass auch $|BP_3| = |AB|$ gilt und damit B der Mittelpunkt der Strecke AP_3 ist.
Abschließend schneiden sich die beiden Kreise k und ℓ auf dem Mittellot dieser Strecke AP_3, also insbesondere in einem Punkt C mit $\angle ABC = 90°$, da das Mittellot von AP_3 natürlich durch dessen Mittelpunkt B verläuft und senkrecht auf der Geraden $AP_3 = AB$ steht, $\square$.

III Runde 3

Aufgabe 040933:
Konstruieren Sie zu einem gegebenen Halbkreis mit dem Radius r das einbeschriebene Quadrat!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



$ABCD$ sei das geforderte Quadrat, M der Mittelpunkt des Halbkreises und E ein Endpunkt des Durchmessers. Es gilt $MB : BC = 1 : 2$.
Die Senkrechte zu AE in E schneidet die Verlängerung von MC im Punkt P.
Dann gilt $\triangle MBC \sim \triangle MEF$. Daraus folgt:

$$ME : EF = MB : BC = 1 : 2$$

Also gilt $EF = 2ME$.

Konstruktion:
Man errichtet auf dem Durchmesser in E die Senkrechte und trägt auf ihr $EF = 2ME$ ab.
Man verbindet M mit F und erhält C als Schnittpunkt von MF mit dem Halbkreis. Danach ist das Quadrat leicht zu konstruieren.

2.Lösung:
Seien A, B die Ecken des Halbkreises und M der Mittelpunkt, Konstruiere in B eine Strecke der Länge $|AB| = 2r$ senkrecht zur Gerade AB mit Endpunkt C.
Der Schnittpunkt der Gerade MC und des Halbkreises ist eine Ecke des gesuchten Quadrats. Mittels Spiegelung und Lot erhalten wir die anderen 3 Ecken.
Wenn C' der so konstruierte Schnittpunkt der Gerade MC mit dem Halbkreis ist und B' der Fußpunkt des Lots durch C' auf der Strecke AB ist, dann ist MB' genau halb so groß wie $B'C'$ nach Strahlensatz und es entsteht das gesuchte Quadrat.

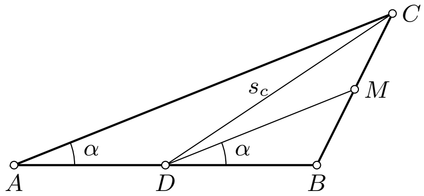
Aufgabe 050932:

a) Konstruieren Sie das Dreieck $\triangle ABC$, wenn α, a und s_c gegeben sind. Dabei bedeutet α das Maß des Winkels $\angle CAB$, a die Länge der Seite BC und s_c die Länge der Seitenhalbierenden CD, wobei D der Mittelpunkt der Seite AB ist.

b) Beschreiben und diskutieren Sie die Konstruktion!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Analyse:
Angenommen, ABC sei ein Dreieck der verlangten Art, dann bestehen folgende Lagebeziehungen. Bezeichnet M den Mittelpunkt von BC und D der Mittelpunkt von AB, dann liegt D

1) auf dem Kreis k um C mit dem Radius s_c.
2) auf einem zu α gehörigen Ortskreisbogen $\widehat{\text{b}}$ über BM.



Beweis:
1) gilt auf Grund der Definition des Kreises
2) Nach der Umkehrung des 1. Strahlensatzes gilt $DM \parallel AC$ und somit $\angle BDM \cong \angle BAC$ (als Stufenwinkel an Parallelen), so dass nach der Umkehrung des Peripheriewinkelsatzes D auf $\widehat{\mathrm{b}}$ liegt.
Der Punkt A liegt
1) auf dem von B ausgehenden Strahl durch D (ausschließlich B)
2) auf dem Kreis um D mit dem Radius $|BD|$.

Beide Aussagen folgen unmittelbar daraus, dass D Mittelpunkt von AB ist. Daher können AmB, C nur dann die Ecken eines allen Bedingungen der Aufgabe genügenden Dreiecks sein, wenn sie auf folgende Weise konstruierbar sind.

II. Konstruktion
Man zeichne die Strecke BC der gegebenen Länge a. Danach konstruiere man den Mittelpunkt M von BC. Um C schlage man den Kreis k mit dem gegebenen Radius s_c, und über BM errichte man einen zu α gehörigen Ortskreisbogen $\widehat{\mathrm{b}}$.
Ist D ein gemeinsamer Punkt von k und $\widehat{\mathrm{b}}$, so trage man auf dem von B ausgehenden Strahl durch D von D aus nach der B nicht enthaltenden Seite eine Strecke der Länge $|BD|$ ab, deren zweiter Endpunkt A sei.

III. Satz:
Sind A, B, C gemäß II. konstruierbar, so bilden sie die Ecken eines allen Bedingungen der Aufgabe genügenden Dreiecks.

Beweis:
Nach Konstruktion ist $|BC| = a$, D Mittelpunkt von AB und $|CD| = s_c$. Nach dem Peripheriewinkelsatz gilt $|\angle BDM| = \alpha$ und nach dem 1. Strahlensatz und dem Satz über Winkel an geschnittenen Parallelen $\angle BDM \cong \angle CAB$, so dass $|\angle CAB| = \alpha$ ist.

IV. Determination:
Sämtliche Konstruktionsschritte in II. sind, falls D existiert, ausführbar.
Der Punkt D existiert, wenn

$$\begin{array}{ll} 1) & \alpha \geq 90°; \quad \frac{a}{2} < s_c < a \\ 2) & \alpha < 90°; \quad d - r \leq s_c < d + r \end{array}$$

In allen anderen Fällen existiert D nicht, und es gibt daher kein Dreieck, das allen Bedingungen der Aufgabe genügt.

Aufgabe 060936:
In einer Ebene sind ein Kreis k, eine Gerade g sowie ein Punkt A auf g gegeben.
Man konstruiere einen Kreis k', der erstens k berührt und zweitens g in A berührt.
Man untersuche, wie viele solcher Kreise k' es bei den verschiedenen Lagemöglichkeiten von k, g und A geben kann.

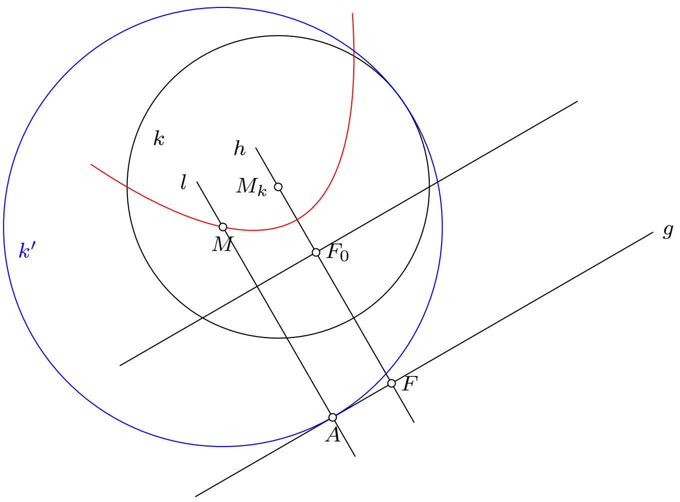
Lösung von ZePhoCa:
Wir geben zunächst eine Konstruktionsvorschrift für den Mittelpunkt M von k' an falls A nicht auf g

liegt und untersuchen dann, wie viele Möglichkeiten es gibt.

Wir konstruieren zunächst die zu g senkrechte Gerade h durch den Mittelpunkt von k.

Wir verschieben nun g entlang dieser Senkrechten um den Radius von k. Wir konstruieren nun die Ortslinie aller Punkte, die von der verschobenen Gerade und dem Mittelpunkt denselben Abstand haben. Dies ist eine Parabel, die symmetrisch bzgl. h ist.
Damit k' nicht nur g berührt, sondern dies auch in A tut, konstruieren wir die zu g senkrechte Gerade l durch A.
Weil l zu h parallel ist, hat diese genau einen Schnittpunkt mit der oben konstruierten Parabel. Dieser Schnittpunkt ist Mittelpunkt eines gewünschten Kreises (denn der Abstand von M zum Mittelpunkt von k ist gleich dem Abstand von M zu A plus dem Radius des Kreises k).

Nun zum eigentlichen Beweis. Wir unterscheiden drei Fälle:



1. g ist Passante von k. Dann kann k' sowohl g als auch k nur dann berühren, wenn k' in derselben Halbebene bzgl. g liegt wie k.

   Der Mittelpunkt M von k' muss außerdem auf einer zu g senkrechten Geraden durch A liegen, damit k' die Gerade g in A berührt. Es gibt nun zwei prinzipielle Möglichkeiten, wie sich k und k' berühren können:

   Äußerlich (dann muss der Abstand von M zum Mittelpunkt von k gleich dem Abstand von M zu A plus dem Radius des Kreises k sein) oder innerlich (dann muss der Abstand von M zum Mittelpunkt von k gleich dem Abstand von M zu A minus dem Radius des Kreises k sein). Beide Fälle treten genau je einmal auf (für das äußerliche Berühren zeigt das die Konstruktion von oben, dass innerliche Berühren lässt sich analog begründen, hier muss nur g zu Beginn anders verschoben werden), es gibt also genau zwei Möglichkeiten für k'.

2. g ist Tangente an k. Ist A der Berührungspunkt von k und g, so gibt es unendliche viele Möglichkeiten für k' (jeder Kreis der g in A berührt, berührt auch k).

   Ist A nicht der Berührungspunkt von k und g, so gibt es genau eine Möglichkeit für k:

   Es gibt nämlich theoretisch wieder die Fälle des inneren und äußeren Berührens wie oben, das äußere Berühren tritt genau einmal auf, dass innere Berühren jedoch nicht, denn hier liegt A auf der verschobenen Gerade, die konstruierte Ortslinie ist hier eine Senkrechte durch den Mittelpunkt von k und diese hat mit der Senkrechten zu g durch A keinen Schnittpunkt.

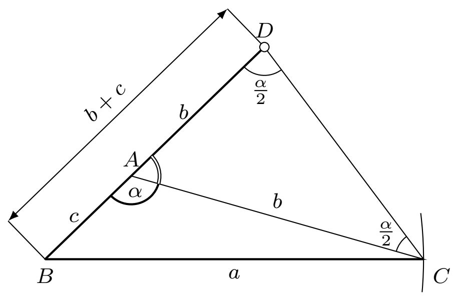
3. g ist Sekante an k. Ist A einer der Schnittpunkte von k und g so gibt es keine Möglichkeit für k' (denn jeder Kreis, der g in A berührt schneidet k in A).

Liegt A außerhalb von k, so gibt es genau zwei Möglichkeiten (hier kann nämlich, anders als in Fall 1, der Kreis k' in einer beliebigen Halbebene bzgl. g liegen, da A außerhalb von k liegt ist aber nur äußeres Berühren möglich).

Analog dazu gibt es im Fall, dass A in k liegt auch genau zwei Möglichkeiten.

Aufgabe 080932:
Konstruieren Sie ein Dreieck $\triangle ABC$ aus $a, b+c$ und α!
Dabei sind a, b, c die Längen der Dreiecksseiten und α die Größe des Winkels $\angle BAC$.

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:

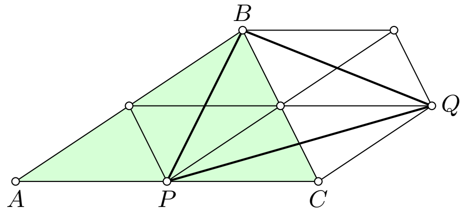


Wird die Seite c eines Dreieck ABC um die Strecke b verlängert, Endpunkt sei D, erhält man die gegebene Strecke $b+c$.
Durch die Verbindung von D und C entsteht das gleichschenklige Dreieck ACD mit dem Winkel $180° - \alpha$ an der Spitze A und zufolge mit dem Basiswinkel $\frac{\alpha}{2}$ und Schenkeln der Länge b.

Damit ergibt sich folgende Konstruktion:
(1) Ziehe die Strecke $b+c = BD$, womit die Punkte B und D festgelegt werden.
(2) Lege eine Gerade h durch D, die mit BD den Winkel $\frac{\alpha}{2}$ einschließt.
(3) Beschreibe einen Kreis (B,a) um B vom Radius a.
Hier hängt es von der Größe des Winkels α ab, ob es zwischen h und (B,a) keinen oder zwei Schnittpunkte (C_1 und C_2) oder einen Berührungspunkt (C_1) gibt.
(4) Lege durch die Schnittpunkte aus (3) jeweils eine Gerade, die mit h den Winkel $\frac{\alpha}{2}$ einschließt; welche die Strecke BD im Punkt A_1 bzw. in den Punkten A_1 und A_2 schneidet.
(5) Durch Verbindung A_1BC_1 bzw. A_1BC_1 und A_2BC_2 erhält man eine bzw. zwei Lösungen für das gesuchte Dreieck.

Aufgabe 090932:
Konstruieren Sie ein Dreieck $\triangle ABC$ aus $s_a = 9{,}6$ cm, $s_b = 12{,}6$ cm und $s_c = 11{,}1$ cm! Dabei sind s_a, s_b und s_c die Längen der drei Seitenhalbierenden des Dreiecks.
Beschreiben und diskutieren Sie die Konstruktion!

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:



Die Seitenmittelpunkte unterteilen das Dreieck ABC in 4 kongruente Teildreiecke. Durch hinzufügen weiterer Kopien erhalten wir das Dreieck BPQ, dessen Seiten gerade die Längen s_a,s_b,s_c haben - dieses ist an geeigneten Parallelogrammen einsehbar.
BPQ kann wie üblich konstruiert werden. Die Seitenhalbierenden des Dreiecks BPQ sind parallel zu den Seiten des gesuchten Dreiecks ABC. Daher erhalten wir dieses mittels parallele Geraden durch B und P. Insbesondere ist das Dreieck konstruierbar, falls s_a,s_b,s_c die Dreieckungleichungen erfüllen.

Aufgabe 100936:
Es sei ein Dreieck $\triangle ABC$ aus $a+b+c, \angle, \gamma$ zu konstruieren. Dabei bedeuten wie üblich a, b, c die Längen der Seiten BC, AC, AB und α, γ die Größen der Winkel $\angle CAB, \angle ACB$.
Beschreiben, begründen und diskutieren Sie Ihre Konstruktion!

Lösung von cyrix:

1) Man zeichne zuerst ein beliebiges Dreieck mit den Innenwinkeln α und γ, indem man ausgehend von zwei Punkten A und C' an die Strecke AC' in A den Winkel α und in C' den Winkel γ in entsprechender Orientierung, dass sich ein Dreieck $AB'C'$ mit B' als Schnittpunkt der freien Schenkel der gezeichneten Winkel ergibt.
2) Auf einer Geraden durch A, welche weder B' noch C' enthält, konstruiere man einen Punkt S' mit $AS' = AC' + AB' + B'C'$, indem man zuerst die Strecke AC' an A, dann AB' an den so erhaltenen ersten Zwischenpunkt und schließlich die Strecke $B'C'$ an den gerade erhaltenen zweiten Zwischenpunkt auf der Geraden anträgt.
3) Auf dem von A ausgehenden Strahl, der S enthält, konstruiere man auch den Punkt S mit $AS = a+b+c$.
4) Man konstruiere nun die Parallele zu $B'S'$ durch S. Diese schneide die Gerade AB' in B.
5) Analog sei der Schnittpunkt der Parallelen zu $C'S'$ durch S mit der Geraden AC' mit C bezeichnet.

Dann ist $\triangle ABC$ das gesuchte Dreieck.

Beweis: Das Dreieck $\triangle AB'C'$ ist ähnlich zum zu konstruierenden Dreieck, da es nach Konstruktion in zwei Innenwinkeln mit diesem übereinstimmt. Also gibt es einen Streckungsfaktor k, sodass alle Seitenlängen des Dreiecks $\triangle AB'C'$ um den gleichen Faktor k gestreckt werden müssen, um die Seitenlängen des gesuchten Dreiecks zu erhalten.
Demzufolge ist auch der Umfang des Dreiecks $\triangle AB'C'$ um den Faktor k zu klein. Dieser Umfang ist durch die Strecke AS' gegeben; der Umfang des zu konstruierenden Dreiecks mit AS, der Streckungsfaktor also durch $\frac{AS}{AS'}$.

Nach den Strahlensätzen ist aber nach Konstruktion $\frac{AB}{AB'} = \frac{AS}{AS'}$ und analog $\frac{AC}{AC'} = \frac{AS}{AS'}$, da die von A ausgehenden Strahlen AB, AC und AS von den Parallelen BS und $B'S'$ bzw. CS und $C'S'$ geschnitten werden. Damit ist $\triangle ABC$ das gesuchte Dreieck.

Aufgabe 170932:
Es sei $ABCD$ ein nicht überschlagenes Viereck, das die Seitenlängen $AB = 9$ cm, $BC = 6$ cm, $CD = 11$ cm, $AD = 8$ cm hat und in dem der Innenwinkel bei B die Größe 110° hat.
Untersuchen Sie durch Konstruktion, ob durch diese Angaben der Flächeninhalt von $ABCD$ eindeutig bestimmt ist!
Von einem Rechteck $EFGH$ werden nun folgende Eigenschaften gefordert:
(1) Das Rechteck $EFGH$ ist flächengleich dem Viereck $ABCD$.
(2) A liegt auf der Rechteckseite EH zwischen E und H, und C liegt auf der Rechteckseite FG.
(3) Die Rechteckseite EH steht auf AC senkrecht.
Begründen und beschreiben Sie, wie sich alle diejenigen Punkte konstruieren lassen, die als Eckpunkt E eines Rechtecks $EFGH$ mit den geforderten Eigenschaften (1), (2), (3) auftreten können!

Lösung von cyrix:
Nach dem Kongruenzsatz sws ist das Dreieck $\triangle ABC$ und damit nach Kongruenzsatz sss das Dreieck $\triangle ACD$, also auch das Viereck $ABCD$ und schließlich genauso sein Flächeninhalt eindeutig bestimmt. Man kann das Viereck $ABCD$, wie folgt, konstruieren:

An die Strecke AB trage man in B den gegebenen Winkel und auf dem zweiten Schenkel die Strecke BC ab, sodass man den Punkt C erhält. Um diesen schlage man einen Kreis mit Radius $|CD|$ und um A einen mit Radius $|DA|$. Diese beiden Kreise liefern zwei Schnittpunkte, wobei aber nur einer ein – in dieser Reihenfolge der Punkte – nicht überschlagenes Viereck $ABCD$ liefert.

Für die Gerade EH gilt nach (3), dass sie orthogonal zu AC, und nach (2) auch durch A verläuft, sodass es das eindeutig bestimmte Lot von A auf AC ist. Da im Rechteck $EFGH$ die Gerade FG parallel zur Geraden EH ist, muss nach (2) die Gerade FG das eindeutig bestimmte Lot von C auf AC sein, da auch C auf FG liegt. Damit legt ein Punkt E auf EH eindeutig den Punkt F auf FG wegen $EH \perp EF$ fest und es gilt in jedem Fall $|EF| = |AC|$.

Es seien L_B und L_D die Lotfußpunkte von B bzw. D auf AC. Dann gilt für den Flächeninhalt I vom Viereck $ABCD$:

$$I = I_{\triangle ABC} + I_{\triangle ACD} = |AC| \cdot \frac{|BL_B| + |DL_D|}{2}$$

Konstruiert man also die beiden Lote von B und D auf AC, trägt deren Längen auf einer Strecke hintereinander ab und halbiert die so entstandene Summe, hat man die zweite Kantenlänge $|EH| := \frac{|BL_B|+|DL_D|}{2}$ des Rechtecks $EFGH$ konstruiert.

Damit A nach (2) zwischen E und H liegt, muss $|EA| < |EH|$ gelten. Jeder dieser Punkte erfüllt dann aber die gewünschte Eigenschaft. Man findet alle diese Punkte E dann auf dem Lot zu AC durch A, welche innerhalb des Kreises um A mit Radius $|EH|$ liegen.

(Der Punkt H ist dann der eindeutig bestimmte Punkt auf diesem Lot, der die Entfernung $|EH|$ von E hat und auf der gleichen Seite wie A von E liegt. Die Punkte F und G ergeben sich als Schnitte der Parallelen zu AC durch E bzw. H mit dem Lot zu AC durch C. Der Flächeninhalt eines solchen Rechtecks EGH berechnet sich dann nach Konstruktion zu

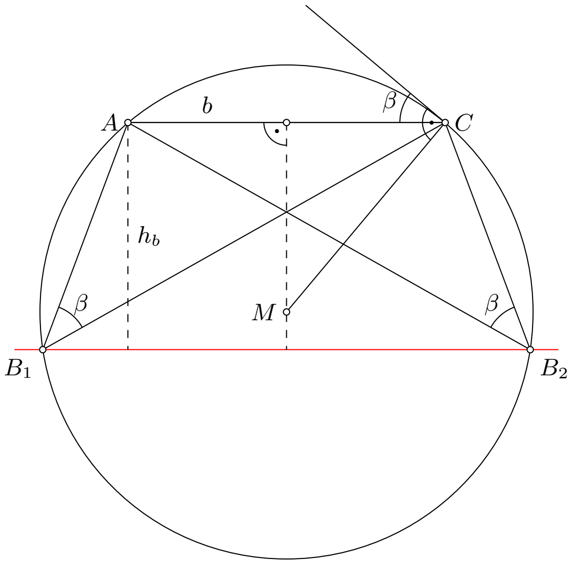
$$|EF| \cdot |EH| = |AC| \cdot \frac{|BL_B| + |DL_D|}{2} = I$$

Aufgabe 200936:
Konstruieren Sie ein Dreieck ABC aus $b = 7$ cm, $\beta = 40°$ und $h_b = 5$ cm!
Dabei sollen b die Länge der Seite AC, β die Größe des Winkels $\angle CBA$ und h_b die Länge der von B ausgehenden Höhe bedeuten.
Beschreiben und begründen Sie Ihre Konstruktion!
Untersuchen Sie, ob es bis auf Kongruenz genau ein Dreieck ABC gibt, das die geforderten Größen b, β und h_b aufweist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(I) Angenommen, ein Dreieck ABC erfüllt die Bedingungen der Aufgabe. Dann liegt der Punkt B erstens auf dem Umkreis des Dreiecks ABC und zweitens auf einer Parallelen zu AC im Abstand h_b.
Der Mittelpunkt M des Umkreises liegt erstens auf der Mittelsenkrechten von AC und zweitens auf der Senkrechten, die in C auf der in C an den Umkreis gelegten Tangente errichtet wird. Auf dieser Tangente bildet derjenige von C ausgehende Strahl, der nach der Seite von AC hin verläuft, in der B nicht liegt, mit dem Strahl aus C durch A einen Winkel der Größe β.

(II) Daraus ergibt sich, dass ein Dreieck ABC nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(1) Man zeichnet einen Winkel der Größe β, der Scheitelpunkt sei C genannt.
(2) Auf dem einen Schenkel des Winkels trägt man von C aus eine Strecke der Länge b ab. Der andere Endpunkt der Strecke sei A genannt.
(3) Auf dem anderen Schenkel des Winkels errichtet man in C die Senkrechte s.
(4) Man konstruiert die Mittelsenkrechte zu AC. Schneidet sie die Senkrechte s, so sei M dieser Schnittpunkt.
(5) Um M zeichnet man einen Kreis mit dem Radius MC.
(6) Man zeichnet die Parallele zu AC im Abstand h_b auf derjenigen Seite von AC, in die hinein der in (1) konstruierte Winkel nicht verläuft. Schneidet diese Parallele den in (5) konstruierten Kreis um M, so sei B einer der Schnittpunkte.



(III) Jedes so konstruierte Dreieck ABC genügt den Bedingungen der Aufgabe.

Beweis: Laut Konstruktion gilt $AC = b$. Nach dem Satz über Sehnentangentenwinkel und nach Konstruktion gilt $\angle CBA = \beta$.
Ebenfalls nach Konstruktion hat B von AC den Abstand h_b damit hat die von B ausgehende Höhe des Dreiecks die Länge h_b.

(IV) Die Konstruktionsschritte (1) bis (5) sind bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar. Da der in (1) gezeichnete Winkel spitz ist, existiert genau ein Schnittpunkt der Senkrechten von (3) und (4).
Für die gegebenen Werte von b, β, h_b schneidet die in (6) konstruierte Parallele den in (5) konstruierten Kreis in genau zwei Punkten B_1, B_2.
Es entstehen daher zwei Dreiecke AB_1C, AB_2C. Die in (4) konstruierte Mittelsenkrechte ist Symmetrieachse sowohl von AC als auch von dem in (5) konstruierten Kreis als auch von der in (6) konstruierten Parallelen.
Daher geht das Dreieck AB_1C bei Spiegelung an dieser Mittelsenkrechten in das Dreieck CB_2A über; es gilt $\triangle AB_1C \cong \triangle CB_2A$. In diesem Sinne gibt es bis auf Kongruenz genau ein Dreieck ABC, das die geforderten Größen aufweist.

Aufgabe 210934:
Konstruieren Sie ein Dreieck ABC aus $\alpha = 50°$, $r = 4$ cm und $h_a = 6$ cm!
Dabei bezeichne α die Größe des Winkels $\angle BAC$, r den Umkreisradius und h_a die Länge der auf BC senkrechten Höhe des Dreiecks ABC.

Beschreiben und begründen Sie Ihre Konstruktion! Untersuchen Sie, ob ein Dreieck ABC durch die gegebenen Stücke bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist! Dabei sollen Dreiecke ABC, $A'B'C'$ auch dann als kongruent bezeichnet werden, wenn sie miteinander mit beliebiger Reihenfolge der Eckpunkte zur Deckung gebracht werden können.

Lösung von cyrix:
1) Man zeichne einen Kreis um einen Punkt M mit Radius r. Auf dessen Rand markiere man einen beliebigen Punkt B und zeichne den zugehörigen Radius BM ein.
2) An diesen Radius trage man den Winkel 2α ab und bestimme den Schnittpunkt des zweiten Schenkels dieses Winkels mit dem Kreis. Der Schnittpunkt heiße C.
3) Man zeichne eine Parallele zu BC im Abstand h_a in der Halbebene von BC, in der auch M liegt. Diese Parallele schneidet den Kreis in zwei Punkten, wovon man einen A und den anderen A' nennt.

Dann sind das Dreieck $\triangle ABC$ und das dazu kongruente Dreieck $A'BC$ das Gesuchte.

Begründung:
Es müssen alle Punkte auf einem Kreis mit Radius r liegen, da dies der Umkreisradius des gesuchten Dreiecks ist. Über der Sehne BC ist $\angle BAC$ ein Peripheriewinkel, sodass der zugehörige Zentriwinkel $\angle BMC$ genau doppelt so groß sein muss. Schließlich liegen A und M in der gleichen Halbebene bezogen auf die Gerade BC, da $\alpha < 90°$ ist. Da h_a senkrecht auf BC steht, muss also A auf einer Parallelen zu BC in diesem Abstand liegen.
Die entstehenden beiden Schnittpunkte A und A' erfüllen dabei gleichermaßen die Bedingungen, was man auch daran sieht, dass sie durch Spiegelung an der Mittelsenkrechten der Strecke BC ineinander übergehen (sowie B in C und umgekehrt), sodass die beiden Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle A'BC$ zueinander kongruent sind.

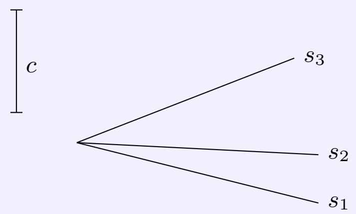
Aufgabe 290931:
Beschreiben und begründen Sie für die folgende Aufgabe eine Konstruktion, die ausführbar ist, indem außer gezeichnet vorgegebenen Strecken nur Lineal und Zirkel (zum Konstruieren von Geraden und Kreisen, nicht zur Nutzung von Millimeter- oder Grad-Skalen) verwendet werden.
Gezeichnet vorgegeben seien zwei Strecken AB und AC, die einen Winkel $\angle BAC$ der Größe $7°$ bilden. Zu konstruieren ist eine Zerlegung dieses Winkels in 7 gleich große Teile.
Das zeichnerische Ausführen der beschriebenen Konstruktion wird nicht verlangt.

Lösung von cyrix:
Zur Konstruktion: 1) Man zeichne einen Kreis k um A, der beide Strecken AB und AC schneidet. Die Schnittpunkte mit AB und AC seien mit P_0 und P_7 bezeichnet, die Streckenlänge $|P_0P_7|$ mit r_7.
2) Der Kreis um P_7 mit Radius r_7 schneide den Kreis k außer in P_0 noch in einem zweiten Punkt P_{14}; der Kreis um P_{14} mit Radius r_7 außer in P_7 noch in einem zweiten Punkt P_{21}, usw. Man erhält auf diese Weise sukzessive die Punkte P_{7n} auf k mit $n = 0, 1, \dots, 13$, insbesondere also den Punkt P_{91}.
3) Man errichte das Lot l auf AB durch A und als Schnittpunkt des Lots l mit dem von P_0 ausgehenden Halbkreisbogen von k, auf dem auch P_7 liegt, den Punkt P_{90}. Der Abstand $|P_{90}P_{91}|$ sei mit r_1 bezeichnet.
4) Der Kreis um P_0 mit Radius r_1 schneide den von P_0 ausgehenden Halbkreisbogen von k in P_1; der Kreis um P_1 den Kreis k neben P_0 in einem zweiten Punkt P_2; der Kreis um P_2 den Kreis k neben P_1 in einem zweiten Punkt P_3; usw., bis man den Punkt P_6 erhält.
5) Die Strahlen AP_i mit $i \in \{1,2,3,4,5,6\}$ zerlegen den Winkel $\angle P_0AP_1 = \angle BAC$ in sieben gleich große Teile.

Begründung:
Die Indizes der Punkte sind so gewählt, dass für jedes i der Winkel $\angle P_0AP_i$ genau $i°$ groß ist. Dies ist für P_0 und P_7 aufgrund der gezeichneten Strecken und dem von diesen aufgespannten Winkel der Fall. Da die Bögen auf k zwischen P_{7n} und $P_{7(n+1)}$ alle genauso groß sind wie der zwischen P_0 und P_7, gilt auch $\angle P_{7n}AP_{7(n+1)} = 7°$ und damit sukzessive auch $\angle P_0AP_{7n} = 7n°$.

Für P_{90} gilt $\angle P_0AP_{90} = 90°$, da dieser Punkt auf dem Lot zu AP_0 durch A liegt. Insbesondere ist nun $\angle P_{90}AP_{91} = \angle P_0AP_{91} - \angle P_0AP_{90} = 1°$.
Nach Konstruktion ist der Bogen zwischen P_i und P_{i+1} für $i \in \{0,1,2,3,4,5\}$ immer genauso groß wie der zwischen P_{90} und P_{91}, sodass für diese i jeweils $\angle P_iAP_{i+1} = 1°$ gilt und damit sukzessive $\angle P_0AP_i = i°$ für alle $i \in \{1,2,3,4,5,6\}$, was das Gewünschte zeigt, da man dadurch eine entsprechende Unterteilung in 7 Teilwinkel der Größe von je einem Grad erhält.

Aufgabe 300936:
Gegeben seien drei von einem Punkt S ausgehenden Strahlen s_1, s_2, s_3.
Dabei habe der von s_1 und s_3 gebildete Winkel $\angle(s_1, s_3)$ eine beliebige Größe kleiner als 60°, und der Strahl s_2 sei ein beliebiger von S aus in das Innere des Winkels $\angle(s_1, s_3)$ hinein verlaufender Strahl (siehe Abbildung).



Gegeben sei ferner eine beliebige Streckenlänge c.

a) Wählen Sie derartige Vorgaben c, s_1, s_2, s_3 (dabei s_2 nicht als Winkelhalbierende von $\angle(s_1, s_3)$ und konstruieren Sie dann drei von S verschiedene Punkte A auf s_1, B auf s_2 und C auf s_3 so, dass sie die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks ABC der Seitenlänge c sind!

b) Beschreiben Sie Ihre Konstruktion!

c) Beweisen Sie, dass das nach Ihrer Beschreibung konstruierte Dreieck ABC gleichseitig ist und dass seine Ecken A, B, C auf s_1, s_2 bzw. s_3 liegen.

Eine Untersuchung, wieviele Dreiecke mit den geforderten Eigenschaften es außerdem noch gibt, wird nicht verlangt.

Lösung von cyrix:
Wir geben zuerst an, wie man zu einer gegebenen Strecke PQ einen Kreis k durch P und Q konstruiert, sodass der Peripheriewinkel in diesem Kreis über der Sehne PQ einem vorgegebenen Winkel α entspricht:

Man trage in P und Q an die Strecke PQ in die gleiche Halbebene bezüglich der Geraden PQ den Winkel $\frac{180°-\alpha}{2}$ ab, der sich leicht aus α konstruieren lässt. Der Schnittpunkt der beiden freien Schenkel dieser beiden Winkel sei R. Nach der Innenwinkelsumme im Dreieck $\triangle PQR$ gilt dann $\angle QRP = 180° - 2 \cdot \frac{180°-\alpha}{2} = \alpha$, sodass der Umkreis des Dreiecks $\triangle PQR$ der gesuchte Kreis ist.

Nun zur eigentlichen Konstruktion:

- Man konstruiere ein gleichseitiges Dreieck $\triangle A'B'C'$ der Kantenlänge c.
- Über der Strecke $A'B'$ konstruiere man den Kreis k durch A' und B', für den die Peripheriewinkel $\angle A'PB'$ der Punkte P auf k, die in der gleichen Halbebene bezüglich $A'B'$ wie C' liegen, genau so groß ist wie der Winkel zwischen s_1 und s_2.
- Analog konstruiere man über der Strecke $A'C'$ den Kreis ℓ durch A' und C', sodass die entsprechenden Peripheriewinkel zu Punkten, die in der gleichen Halbebene bezüglich $A'C'$ wie B' liegen, die Größe des Winkels zwischen s_1 und s_3 haben.
- Der neben A' zweite Schnittpunkt der beiden Kreise k und ℓ sei mit M bezeichnet, der Schnittpunkt der drei Strahlen s_1, s_2, s_3 mit S.

- Trage von S aus auf s_1 die Streckenlänge $|A'M|$ ab und erhalte A, trage von S aus auf s_2 die Streckenlänge $|B'M|$ ab und erhalte B und trage schließlich von S aus auf s_3 die Streckenlänge $|C'M|$ ab und erhalte C.

Dann ist $\triangle ABC$ ein gesuchtes Dreieck.

Beweis:
Nach Konstruktion[1] ist $\angle A'MB' = \angle ASB$, $\angle A'MC' = \angle ASC$ und $\angle B'MC' = \angle A'MC' - \angle A'MB' = \angle ASC - \angle ASB = \angle BSC$.
Also sind die beiden Dreiecke $\triangle A'MB'$ und $\triangle ASB$, die beiden Dreiecke $\triangle A'MC'$ und $\triangle ASC$ sowie die beiden Dreiecke $\triangle B'MC'$ und $\triangle BSC$ jeweils zueinander kongruent, da sie jeweils in einem Winkel und den beiden anliegenden Seiten übereinstimmen.
Also gilt auch $|AB| = |A'B'| = c = |A'C'| = |AC| = |B'C'| = |BC|$. Also ist das Dreieck $\triangle ABC$ gleichseitig mit Kantenlänge c, wobei nach Konstruktion A auf s_1, B auf S_2 und C auf s_3 liegt, $\square$.

II.V Raumgeometrie

I Runde 1

Aufgabe V00911:
Einer Kugel mit dem Radius $r_u = 1$ ist ein Würfel einzubeschreiben. Wie lang wird dessen Kante a? Dem Würfel ist wieder eine Kugel einzubeschreiben. Wie lang wird deren Radius r_i?

Lösung von Steffen Polster:
Die Kugel ist für den Würfel die sogenannte Umkugel, bei der die Würfelpunkte auf der Kugel liegen. Damit ist der Radius r_u gleich der halben Länge der Raumdiagonale des Würfels, d. h.

$$\frac{\sqrt{3a^2}}{2} = r_u = 1 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

Der Durchmesser der Inkugel ist gleich der Kantenlänge des Würfels, d. h.

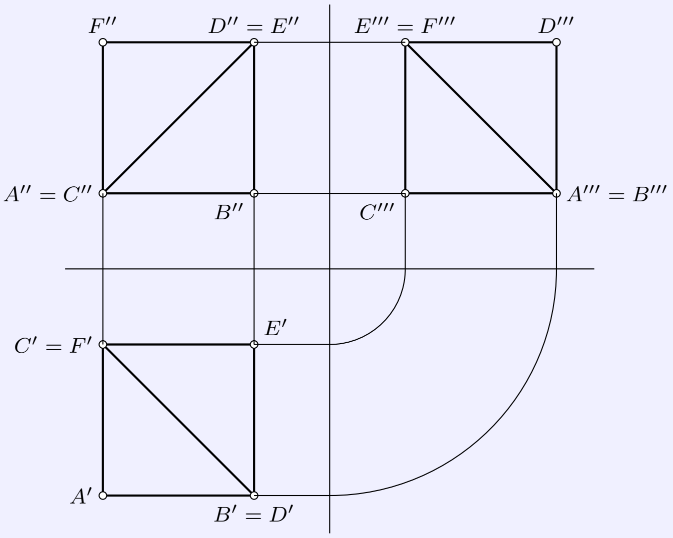
$$r_i = \frac{a}{2} = \frac{\frac{2}{3}\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

Aufgabe 090913:
In der Abbildung ist ein konvexer, durch ebene Flächen begrenzter Körper im Grund-, Auf- und Seitenriss dargestellt.

Ein durch ebene Flächen begrenzter Körper K heißt konvex, wenn für jede seiner Begrenzungsflächen F gilt: Ist ε die Ebene, in der F liegt, so befindet sich K ganz in einem der beiden Halbräume, in die der Raum durch ε zerlegt wird.
Die Umrisse des dargestellten Körpers sind im Grund-, Auf- und Seitenriss Quadrate mit der Seitenlänge a.

Bauen oder beschreiben Sie einen solchen Körper, und berechnen Sie sein Volumen!

[1] Die beiden Kreise k und ℓ sind verschieden, denn sonst würden sie mit dem Umkreis des Dreiecks $\triangle A'B'C'$ zusammenfallen, sodass die jeweiligen Peripheriewinkel jeweils 60° betragen würden, entgegen der Voraussetzung.



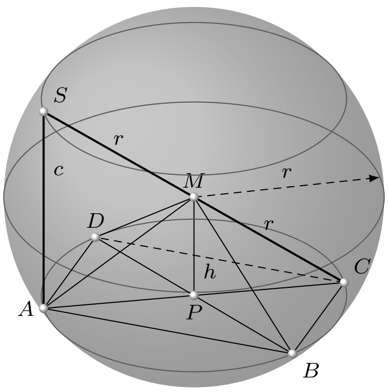
Lösung von Rainer Sattler:
Um die Lösung zu finden, ist es nützlich, sich den Körper einem Würfel einbeschrieben vorzustellen. Des weiteren liegen drei in der Projektion auf einer Geraden liegende Punkte im Original in einer Ebene (und wie man sich anhand der Abstände leicht klarmachen kann sogar auf Ecken). Die Flächendiagonalen machen nach erfolgreicher Bestimmung einiger Seitenbelegungen das Problem schnell eindeutig.

Das Volumen des nichtregulären Oktaeders ist das zweier vierseitiger Pyramiden über der Fläche $a \cdot \sqrt{2} \cdot a$ mit den Höhen der halben Flächendiagonalen also $2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot a \cdot \sqrt{2}a = \frac{2}{3} \cdot a^3$.

Aufgabe 100912:
Es seien a, b, c positive reelle Zahlen. In einer Ebene ε liege ein Rechteck $ABCD$ mit den Seitenlängen $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$. Ferner sei S ein Punkt der in A auf ε errichteten Senkrechten, wobei $\overline{AS} = c$ gelte.

Man beweise, dass es dann genau eine Kugel gibt, auf der die Punkte A, B, C, D, S liegen, und berechne aus den gegebenen Längen a, b, c die Länge des Durchmessers dieser Kugel!

Lösung von Manuela Kugel:



a) Angenommen, k sei eine Kugel der verlangten Art, und M sei ihr Mittelpunkt. Dann haben sie Strecken MA, BM, MC, MD, MS alle die gleiche Länge, die mit r bezeichnet sei. Ist P der Fußpunkt und h die Länge des Lotes von M auf ε, so ist nach dem Satz des Pythagoras

$$|PA|^2 = |PB|^2 = |PC|^2 = |PD|^2 = r^2 - h^2,$$

also $|PA| = |PB| = |PC| = |PD|$. Daher ist P der Diagonalenschnittpunkt des Rechtecks $ABCD$. Der Punkt M, der somit auf der in P auf ε errichteten Senkrechten s liegt, muss demnach in der Ebene ε_1 liegen, die durch die Punkte A, C und S geht; denn diese Ebene enthält die auf ε senkrechte Strecke AS, steht also auf ε senkrecht und geht durch P, sie enthält also die Gerade s.

Daher und wegen $|MA| = |MC| = |MS|$ ist M der Umkreismittelpunkt des Dreiecks $\triangle ACS$. Da dieses wegen $\varepsilon_1 \perp \varepsilon$, also $AS \perp AC$ bei A rechtwinklig ist, ist M der Mittelpunkt seiner Hypotenuse CS.

b) Umgekehrt hat in der Tat diejenige Kugel k, deren Mittelpunkt der Mittelpunkt M der Strecke CS ist und die durch C geht, die verlangte Eigenschaft. Zunächst geht k nämlich außer durch C wegen $|MC| = |MS|$ auch durch S. Ist ferner P der Diagonalenschnittpunkt des Rechtecks $ABCD$, so ist

$$\triangle MPA \simeq \triangle MPB \simeq \triangle MPC \simeq \triangle MPD.$$

Also ist $|MA| = |MB| = |MD|$, und daher geht die Kugel k auch durch A, B und D.

c) Die Länge des Durchmessers der Kugel k beträgt nach dem Satz des Pythagoras

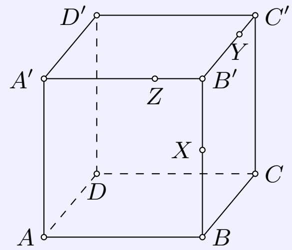
$$|CS| = \sqrt{|AC|^2 + |AS|^2} = \sqrt{|AB|^2 + |BC|^2 + AS|^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Aufgabe 120911:
Zeigen Sie, dass es für jede ganze Zahl $n \geq 4$ einen ebenflächig begrenzten Körper mit genau n Ecken und genau n Flächen gibt! (Es genügt die Angabe je eines Beispiels.)

Lösung von Manuela Kugel:
Jede Pyramide, deren Grundfläche ein $(n-1)$-Eck ist, hat genau n Ecken (nämlich die $n-1$ Ecken der Grundfläche und die Spitze) und genau n Flächen (nämlich die $n-1$ Mantelflächen und die Grundfläche).

Aufgabe 140911:
Gegeben sei ein Würfel mit den Eckpunkten A, B, C, D, A', B', C', D' und der Kantenlänge a (siehe Abbildung). Auf BB' liege ein Punkt X, auf $B'C'$ ein Punkt Y und auf $A'B'$ ein Punkt Z, wobei diese Punkte beliebig gelegen, aber von B' verschieden sein sollen.

Wir betrachten dann für jede solche Wahl von X, Y, Z den geschlossenen Streckenzug $XYZX$. Als Länge dieses Streckenzuges bezeichnet man die Summe der Längen $\overline{XY}$, $\overline{YZ}$ und $\overline{ZX}$.



a) Ermitteln Sie, ob es unter diesen Streckenzügen einen mit größter Länge gibt!

b) Ermitteln Sie, ob es unter diesen Streckenzügen einen mit kleinster Länge gibt!

c) Falls es bei a) oder b) einen solchen Streckenzug gibt, so ermitteln Sie seine Länge!

Lösung von Manuela Kugel:

I. Für alle der Aufgabenstellung entsprechenden Punkte X, Y, Z gilt: Setzt man $|B'X| = x$, $|B'Y| = y$, $|B'Z| = z$, so ist $0 < x,y,z \leq a$. Ferner ist nach dem Satz des Pythagoras

$$|XY| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad |YZ| = \sqrt{y^2 + z^2}, \quad |ZX| = \sqrt{x^2 + z^2}.$$

Daraus folgt

$$0 < |XY| + |YZ| + |ZX| \leq 3\sqrt{2a^2}.$$

II. Bei der laut Aufgabenstellung zulässigen Wahl $X = B$, $Y = C'$, $Z = A'$ ergibt sich $x = y = z = a$, also

$$|XY| + |YZ| + |ZX| = 3\sqrt{2a^2}.$$

III. Wählt man zu beliebigen der Aufgabenstellung entsprechenden Punkten X, Y, Z einen ebenfalls der Aufgabenstellung entsprechenden Punkt $X*$ zwischen B' und X und setzt man $|B'X*| = x*$, so ist $0 < x* < x$, also

$$|X*Y| + |YZ| + |ZX*| = \sqrt{x*^2 + y^2} + \sqrt{y^2 + z^2} + \sqrt{z^2 + x*^2} < |XY| + |YZ| + |ZX|.$$

Aus I. und II. folgt:

a) Es gibt unter den in der Aufgabe genannten Streckenzügen einen mit größter Länge, nämlich den für $X = B$, $Y = C'$, $Z = A'$ entstehenden.

c) Seine Länge beträgt $3a\sqrt{2}$.

Aus III folgt:

b) Zu jedem der genannten Streckenzüge gibt es einen mit einer kleineren Länge, d. h., es gibt keinen mit kleinster Länge.

Aufgabe 160914:
Stellen Sie fest, ob Körper existieren, für die folgendes gilt!

	Kantenlänge bzw. Durchmesser in cm	Oberflächeninhalt in cm^2	Volumen in cm^3
Würfel	a	b	b
Kugel	c	d	d
reguläres Tetraeder	e	f	f

Ermitteln Sie alle reellen Zahlen a, c, e, die diesen Bedingungen genügen! Dabei bezeichnen gleiche Buchstaben gleiche reelle Zahlen, während verschiedene Buchstaben nicht notwendig verschiedene Zahlen bezeichnen müssen.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, es gibt solche Körper, dann muss gelten 1) für den Würfel

$$b = 6a^2$$
$$b = a^3 \quad \text{und damit} \quad a^3 = 6a^2$$
$$a = 6$$

Tatsächlich hat ein Würfel mit der Kantenlänge 6 cm den Oberflächeninhalt 216 cm^2 und das Volumen 216 cm^3.

2) für die Kugel

$$d = \frac{\pi}{6}c^3$$
$$d = \pi c^2 \quad \text{und damit} \quad \frac{\pi}{6}c^3 = \pi c^2$$
$$c = 6$$

Tatsächlich hat eine Kugel mit dem Durchmesser 6 cm einen Oberflächeninhalt von 36 cm^2 und ein Volumen von 36 cm^3.

3) für das reguläre Tetraeder

$$\begin{aligned} f &= e^2\sqrt{3} \\ f &= \frac{e^3}{12}\sqrt{2} \quad \text{und damit} \quad \frac{e^3}{12}\sqrt{2} = e^2\sqrt{3} \\ e &= \frac{12\sqrt{3}}{2} \\ e &= 6\sqrt{6} \end{aligned}$$

Tatsächlich hat ein reguläres Tetraeder mit der Kantenlänge $6\sqrt{6}$ cm einen Oberflächeninhalt von $216\sqrt{3}$ cm^2 und ein Volumen von $216\sqrt{3}$ cm^3.

Also erfüllen genau die folgenden Zahlen die gestellten Bedingungen:

$$a = 6, \quad c = 6 \quad \text{und} \quad e = 6\sqrt{6}$$

Aufgabe 220914:
In einer Ebene ε befinde sich ein n-Eck mit den Eckpunkten A_1, A_2, ..., A_n. Dieses sei die Grundfläche einer Pyramide mit der Spitze S. Das Volumen der Pyramide sei V_P. Die Mittelpunkte der Kanten A_1S, A_2S, ..., A_nS seien M_1, M_2, ..., M_n. Ferner sei B_1 ein beliebiger Punkt in der Ebene ε.

Die zu M_1B_1 parallele Gerade jeweils durch einen der Punkte M_2, M_3, ..., M_n schneide ε in B_2, B_3, ..., B_n. Der Körper K mit den Eckpunkten B_1, B_2, ..., B_n, M_1, M_2, ..., M_n habe das Volumen V_K.

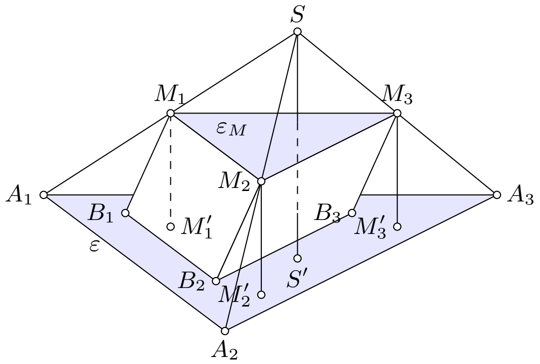
a) Beweisen Sie, dass alle Punkte M_1, M_2, .., M_n in einer gemeinsamen zu ε parallelen Ebene liegen und K daher ein Prisma ist!

b) Beweisen Sie, dass V_K durch V_P eindeutig bestimmt ist, und ermitteln Sie V_K in Abhängigkeit von V_P!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Fußpunkte der Lote von $S, M_1, M_2, ..., M_n$ auf ε seien $S', M_1', M_2', ..., M_n'$. Für alle $i = 1,2,...,n$ gilt wegen $M_iM_i' \parallel SS'$: Die Ebene durch A_i, S, S' geht auch durch M_i und M_i'. Auf ihrer Schnittgeraden mit ε liegen folglich A_i, M_i' und S'. Somit gilt nach einem der Strahlensätze

$$M_iM_i' : SS' = A_iM_i : A_iS = 1 : 2$$

Also haben alle Punkte M_i denselben Abstand $M_iM_i' = \frac{1}{2}SS'$ von ε. Folglich liegen sie in einer gemeinsamen zu ε parallelen Ebene ε_M.



b) Hiernach schneiden die von dem gemeinsamen Punkt S ausgehenden Geraden jeweils durch A_i und M_i die beiden zueinander parallelen Ebenen ε und ε_M in zwei ähnlichen Vielecken $A_1A_2...A_n$ bzw. $M_1M_2...M_n$.

Für jeweils entsprechende Seiten A_iA_j, M_iM_j gilt $A_iA_j \parallel M_iM_j$, also nach einem der Strahlensätze

$$A_iA_j : M_iM_j = SA_i : SM_i = 2 : 1$$

Also stehen die Flächeninhalte F_P und F_L der Vielecke $A_1A_2...A_n$ bzw. $M_1M_2...M_n$ im Verhältnis

$$F_P : F_K = 4 : 1$$

Nach a) gilt für die Höhenlängen $h_P = SS'$ und $h_K = M_1M_1'$ der Pyramide bzw. des Prismas $h_K = \frac{1}{2}h_P$.

Daher und wegen der Volumenformel $V_K = F_K \cdot h_K, V_P = \frac{1}{3}F_P \cdot h_P$ für Pyramide bzw. Pyramide ergibt sich

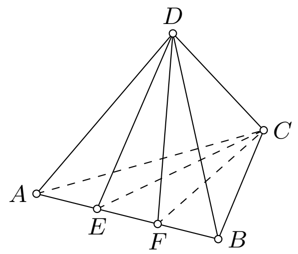
$$V_K = \frac{1}{4}F_P \cdot \frac{1}{2}h_P = \frac{1}{8}F_P \cdot h_P = \frac{3}{8}V_P$$

Aufgabe 230913:
Ein regelmäßiges Tetraeder soll in drei volumengleiche (nicht regelmäßige) Tetraeder zerlegt werden.

a) Geben Sie zwei Möglichkeiten einer solchen Zerlegung an!

b) Beweisen Sie, dass die beiden von Ihnen angegebenen Zerlegungen verschieden sind! Dabei wird eine Zerlegung in drei Tetraeder T_1, T_2, T_3 verschieden von einer Zerlegung in drei weitere Tetraeder genannt, wenn sich diese nicht so als T_1', T_2', T_3' bezeichnen lassen, dass $T_1 \cong T_1'$, $T_2 \cong T_2'$ und $T_3 \cong T_3'$ gilt.

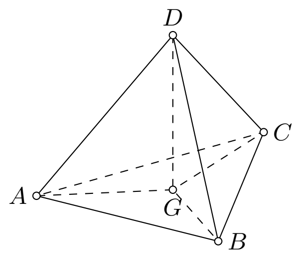
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Zwei Möglichkeiten sind beispielsweise die folgenden:



- Die Kante AB eines regelmäßigen Tetraeders $ABCD$ werde durch E und F in drei gleichlange Teilstrecken zerlegt (Abbildung 1). Dann wird $ABCD$ in die Tetraeder

$$AECD, \quad EFCD, \quad FBCD \tag{1}$$

zerlegt, und diese sind volumengleich; denn die Grundflächen AEC, EFC, FBC sind flächeninhaltsgleich (gleichlange Grundlinien AE, EF, FB, gemeinsame Höhe; Lot von C auf AB), und die zugehörige Höhe ist gemeinsam (Lot von D auf die Ebene durch A, B, C).



- Es sei G der Mittelpunkt des gleichseitigen Dreiecks ABC (Abbildung 2).

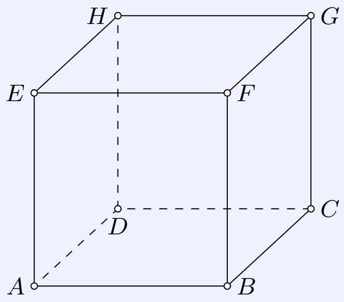
Dann wird $ABCD$ in

$$ABGD, \quad BCGD, \quad CAGD \tag{2}$$

zerlegt, und auch diese Tetraeder sind volumengleich (übereinstimmende Höhe GD zu den Grundflächen ABG, BCG, CAG mit gleichlangen Grundlinien $AB = BC = CA = a$ und gleichlangen Höhe $\frac{a}{6}\sqrt{3}$, wegen der Übereinstimmung von Höhe und Seitenhalbierender ein Drittel der Höhenlänge $\frac{a}{2}\sqrt{3}$).

b) Im Tetraeder $EFCD$ aus (1) gilt $EF < a$, $EC = ED = FC = FD < a$, es hat also nur eine Kante der Länge a. In allen Tetraedern aus (2) kommen dagegen drei kanten der Länge a vor. Daher ist $EFCD$ zu keinem Tetraeder aus (2) kongruent. Daraus folgt die Verschiedenheit der Zerlegungen (1), (2).

Aufgabe 290914:



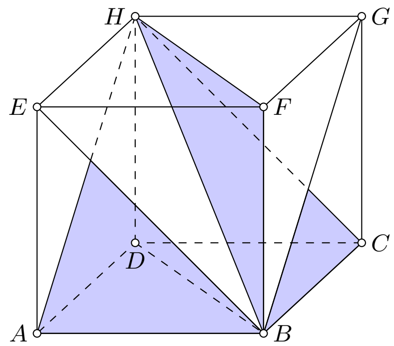
Die Eckpunkte eines Würfels seien wie im Bild bezeichnet.

a) Fertigen Sie mit verdoppelten Streckenlängen, aber gleichen Winkeln eine weitere Zeichnung an, die zunächst nur die Eckpunkte des Würfels wiedergibt! Zeichnen Sie nun die Dreiecksflächen BHA, BHC, BHD, BHE, BHF und BHG (durch Wiedergabe ihrer Seitenkanten) ein! Berücksichtigen Sie dabei die Sichtbarkeitsverhältnisse, indem Streckenteile, die durch mindestens eine davor liegende Dreiecksfläche verdeckt sind, gestrichelt wiedergegeben werden!

Die Seitenflächen und für die Dreiecke nicht benötigten Seitenkanten des Würfels selbst sollen nicht berücksichtigt werden.
(Abschließend können Sie die Anschaulichkeit der Zeichnung noch durch Schraffur oder Farbe erhöhen.)

b) Beweisen Sie, dass die genannten Dreiecke sämtlich untereinander kongruent sind!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Jedes dieser Dreiecke hat als Seitenlängen die Längen einer Seitenkante, einer Flächendiagonale und einer Raumdiagonale des Würfels. Da beim Würfel alle Seitenkanten bzw. Flächen- bzw. Raumdiagonalen jeweils untereinander gleichlang sind, sind somit die genannten Dreiecke nach dem Kongruenzsatz sss sämtlich untereinander kongruent.

Aufgabe 330915:
Bei einer oben offenen Blechdose von der Form eines geraden Kreiszylinders mit dem Grundkreisradius r und der Höhe h seien A und B die Endpunkte eines Durchmessers der Grundfläche. Dabei liege A außerhalb und B innerhalb der Dose. Die Dicke des Bleches werde vernachlässigt.

Eine Ameise bewegt sich von A nach B

a) nur auf Mantellinien und einem Durchmesser der Grundfläche,

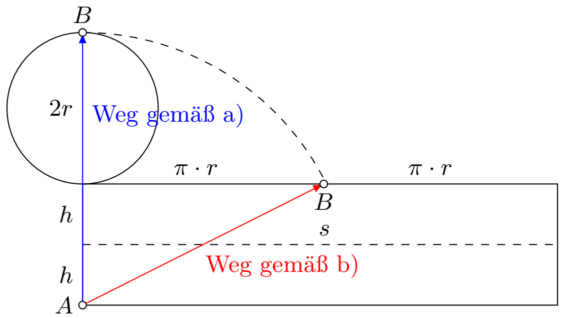
b) auf einem möglichst kurzen Weg, den es unter allen Wegen von A nach B gibt, die die äußere und die innere Mantelfläche nicht verlassen.

Ermitteln Sie einen Wert des Verhältnisses $h : r$, für den die beiden in a) und b) beschriebenen Wege einander gleichlang sind!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Der in a) beschriebene Weg hat die Länge $2h + 2r$.

Denkt man sich die Mantelfläche längs der durch A gehenden Mantellinie aufgeschnitten und in die Zeichenebene abgewickelt, so geht der obere Rand der Mantelfläche in eine Strecke s der Länge $2\pi \cdot r$ über. Denkt man sich ferner die Innenseite der so abgewickelten Mantelfläche als ein zweites Exemplar auf der Rückseite der Zeichenebene, das sich nun um die Strecke s als Drehachse in die Vorderseite der

Zeichenebene hineindrehen lässt, so entsteht ein Rechteck mit den Seitenlängen $2h$ und $2\pi \cdot r$, in dem A eine Ecke und B der Mittelpunkt derjenigen Seiten ist, die A nicht enthält und $2\pi \cdot r$ lang ist (siehe Abbildung; die Grundfläche der Dose wurde ebenfalls in die Zeichenebene gebracht).



Bei diesen Veränderungen haben sich die Weglängen auf der Mantelfläche nicht geändert. Ein in b) genannter möglichst kurzer Weg von A nach B muss daher nun geradlinig verlaufen und somit nach dem Satz des Pythagoras die Länge

$$\sqrt{4h^2 + \pi^2 r^2}$$

haben. Die beiden Wege sind folglich einander gleichlang, wenn

$$2h + 2r = \sqrt{4h^2 + \pi^2 r^2}$$

gilt. Dies ist der Fall, wenn

$$\begin{aligned} 4^2 + 8hr + 4r^2 &= 4h^2 + \pi^2 r^2 \\ 8h &= (\pi^2 - 4) \cdot r \end{aligned}$$

gilt. Damit ist als ein gesuchter Wert ermittelt:

$$h : r = \frac{\pi^2 - 4}{8} \qquad (\approx 0{,}7337)$$

II Runde 2

Aufgabe 070924:
Einem regelmäßigen Oktaeder ist eine Kugel umschrieben.
Berechnen Sie das Verhältnis der Oberflächeninhalte beider Figuren!

Lösung von Stefan Knott:
Um das Verhältnis der Oberflächeninhalte der beiden Figuren zu bestimmen, müssen diese Flächen bekannt sein. Für den Oberflächeninhalt einer Kugel gilt

$$A_{\text{Kugel}} = 4\pi r^2$$

Die Formel zur Berechnung des Oberflächeninhaltes eines regelmäßigen Oktaeders lautet:

$$A_{\text{Okta}} = 2a^2\sqrt{3}$$

Nun müssen wir den Zusammenhang zwischen dem Radius r der Kugel und der Kantenlänge a des Oktaeders herstellen. Halbiert man den Oktaeder genau zwischen den beiden Spitzen, so erhält man als Schnittfläche ein Quadrat mit der Seitenlänge a, die ja auch gleichzeitig der Kantenlänge des vorgegebenen Oktaeders entspricht.
Der Radius r der umschreibenden Kugel entspricht nun genau der Hälfte der Länge der Diagonalen dieses Schnittflächenquadrates, d. h. $r = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Wir ersetzen zur Bestimmung des Oberflächeninhaltes der Kugel den Radius r und erhalten somit für die Oberfläche der Kugel:

$$A_{\text{Kugel}} = 2\pi a^2$$

Das gesuchte Verhältnis wird zu

$$\frac{A_{\text{Okta}}}{A_{\text{Kugel}}} = \sqrt{3} : \pi$$

Der Oberflächeninhalt des regelmäßigen Oktaeders verhält sich zum Oberflächeninhalt der umschreibenden Kugel wie $\sqrt{3}$ zu π.

Aufgabe 090922:
Gegeben sei ein Würfel mit der Kantenlänge a_1 und dem Volumen V_1 sowie ein reguläres Tetraeder mit der Kantenlänge a_2 und dem Volumen V_2. Für die Kantenlängen gelte $a_1 : a_2 = 1 : \sqrt{2}$.
Berechnen Sie das Verhältnis $V_1 : V_2$!

Lösung von cyrix:
Es ist

$$V_1 = a_1^3 \qquad \text{und} \qquad V_2 = \frac{1}{12} \cdot \sqrt{2} \cdot a_2^3 = \frac{1}{12} \cdot \sqrt{2} \cdot (\sqrt{2}a_1)^3 = \frac{1}{3}a_1^3 = \frac{1}{3}V_1$$

sodass das Verhältnis $V_1 : V_2$ genau $3 : 1$ beträgt.

Bemerkung:
Das Volumen V eines regulären Tetraeders mit Kantenlänge a ergibt sich (wie für jede Pyramide) zu $V = \frac{1}{3} \cdot A_G \cdot h$, wobei A_G der Flächeninhalt der Grundfläche und h die Länge der zugehörigen Höhe ist.
Als Grundfläche ergibt sich ein gleichseitiges Dreieck mit Kantenlänge a. Dessen Fläche lässt sich (wie in jedem Dreieck) via $A_G = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_g$ berechnen, wobei h_g die Länge einer Höhe im Dreieck ist.
Da die Höhen im gleichseitigen Dreieck mit den Seitenhalbierenden zusammenfallen, teilt eine solche das gleichseitige Dreieck in zwei rechtwinklige, wobei eine der Katheten eines solchen Dreiecks die Höhe h_g, die zweite eine halbe Grundseite und die Hypotenuse die ungeteilte Dreiecksseite ist.
Es ergibt sich nach dem Satz von Pythagoras $h_g^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2$, also $h_g = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ und damit $A_G = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$.

Für die Höhe im regulären Tetraeder beachte man, dass sie mit der entsprechenden Schwerelinie (Verbindung eines Eckpunkts mit dem Schwerpunkt der gegenüberliegenden Seitenfläche) zusammenfällt. So ergibt sich ein rechtwinkliges Dreieck mit „Spitze des Tetraeders“, „Schwerpunkt der Grundfläche“ und einem Eckpunkt der Grundfläche als Eckpunkte.
Dessen Hypotenuse ist eine Kante des regulären Tetraeders, eine Kathete die Höhe h und die zweite Kathete der Abschnitt der Seitenhalbierenden in der Grundfläche zwischen Schwerpunkt und Eckpunkt.
Da der Schwerpunkt die Seitenhalbierenden im Verhältnis $2 : 1$ teilt, wobei der Abschnitt zwischen Eckpunkt und Schwerpunkt der längere ist, und da im gleichseitigen Dreieck die Höhen und Seitenhalbierenden zusammenfallen, ist dieser Abschnitt hier also $\frac{2}{3} \cdot h_g = \frac{\sqrt{3}}{3}a$ lang.

Es ergibt sich für das betrachtete rechtwinklige Dreieck zwischen Spitze, Schwerpunkt und Eckpunkt nach dem Satz von Pythagoras nun also $h^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2 = a^2$, also $h^2 + \frac{3}{9}a^2 = a^2$ bzw. $h = \sqrt{\frac{2}{3}}a = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{3}a$.

Zusammen mit der zuvor berechneten Grundfläche ergibt sich nun

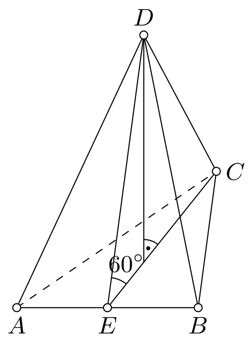
$$V = \frac{1}{3} \cdot A_G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{3}a = \frac{\sqrt{2}}{3 \cdot 4}a^3$$

was wir oben verwendet haben.

Aufgabe 100924:
Eine regelmäßige gerade dreiseitige Pyramide ist eine Pyramide, deren Grundfläche eine gleichseitige Dreiecksfläche ist und deren Höhenfußpunkt mit dem Schwerpunkt der Grundfläche zusammenfällt.
In der regelmäßigen Pyramide mit den Ecken A, B, C, D und der Spitze D sei der Neigungswinkel zwischen jeder der drei Seitenflächen und der Grundfläche $60°$ groß. Die Grundfläche habe die Seitenlänge a.
Berechnen Sie das Volumen V dieser Pyramide!

Anmerkung: Haben zwei ebene Flächen eine gemeinsame Kante und ist P ein von den Endpunkten verschiedener Punkt dieser Kante, dann ist der Winkel, den zwei in P auf der Kante errichtete und in den beiden Flächen gelegene senkrecht stehende Strecken miteinander bilden, gleich dem Neigungswinkel der beiden Flächen zueinander.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Für das Volumen V der Pyramide mit den Ecken A, B, C, D gilt $V = \frac{1}{3}Gh$, wobei G der Inhalt der Grundfläche und h die Länge der Pyramidenhöhe ist. Laut Aufgabe ist die Grundfläche die Fläche des gleichseitigen Dreiecks $\triangle ABC$. Für den Flächeninhalt G dieses Dreiecks gilt $G = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$.



Es sei F der Fußpunkt der Pyramidenhöhe. Da F nach Voraussetzung mit dem Schwerpunkt des Dreiecks $\triangle ABC$ zusammenfällt, schneidet der von C ausgehende Strahl durch F die Seite AB in deren Mittelpunkt, der mit E bezeichnet sei. Damit ist CE Seitenhalbierende und wegen der Gleichseitigkeit von $\triangle ABC$ auch Höhe dieses Dreiecks. Folglich gilt

$$|AE| = |EB| \qquad \text{(1)sowie} \qquad |FE| = \frac{1}{3}|CE| = \frac{a}{6}\sqrt{3}$$

Da $\triangle DFA \cong \triangle DFB$ (sws) ist, gilt $|AD| = |BD|$, also ist $\triangle ABD$ gleichschenklig. Wegen (1) ist folglich DE Höhe in diesem Dreieck.
Der Winkel $\angle FED$ ist daher der Neigungswinkel zwischen der Grundfläche und einer Seitenfläche der Pyramide und somit laut Aufgabe $60°$. Da $\angle EFD$ ein rechter Winkel ist, lässt sich die Fläche des Dreiecks $\triangle EFD$ als die Hälfte der Fläche eines gleichseitigen Dreiecks auffassen. Also gilt

$$|DE| = 2|EF| = \frac{a}{3}\sqrt{3}$$

Nach dem Lehrsatz des Pythagoras gilt nun

$$h = |DF| = \sqrt{|DE|^2 - |EF|^2} = \sqrt{\frac{a^2}{3} - \frac{a^2}{12}} = \frac{a}{2}$$

Damit ergibt sich für das Volumen V der Pyramide der Wert

$$V = \frac{1}{3}Gh = \frac{a^3}{24}\sqrt{3}$$

Alternativ-Lösung von cyrix:
Es sei M der Mittelpunkt der Strecke AB. Dann ist das Dreieck $\triangle CAM$ rechtwinklig mit Hypotenuse CA und es gilt

$$|CM| = \sqrt{|CA|^2 - |AM|^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

Damit ist $A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |CM| \cdot |AB| = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$.
Sei S der Schwerpunkt der Grundfläche. Da der Schwerpunkt die Seitenhalbierenden im Verhältnis 2:1 teilt und CM eine Seitenhalbierende in der Grundfläche ist, gilt $|SM| = \frac{1}{3}|CM| = \frac{1}{2\cdot\sqrt{3}}a$.
Die drei Punkte D, S und M bilden ein rechtwinkliges Dreieck mit rechtem Winkel bei S und $\angle SMD = 60°$, da sowohl $SM = CM$ als auch DM senkrecht auf AB stehen. (Es ist das Dreieck $\triangle ABD$ gleichschenklig mit $|AD| = |BD|$, also die Seitenhalbierende DM auf AB gleich der Höhe von D auf AB, also DM orthogonal zu AB.)
Nach der Definition des Tangens im rechtwinkligen Dreieck $\triangle DMS$ ist $\tan\angle SMD = \frac{|SD|}{|SM|}$, also $|SD| = \tan 60° \cdot |SM| = \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2\cdot\sqrt{3}}a = \frac{a}{2}$.
Damit ergibt sich für das Volumen V der Pyramide

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_{ABC} \cdot |SD| = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \cdot \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{3}}{24}a^3$$

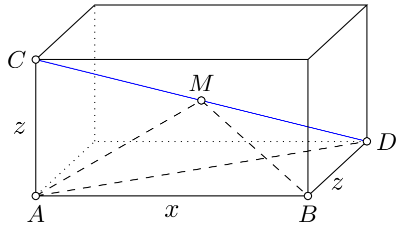
Aufgabe 110921:
Bei einem geraden Kreiszylinder sollen die Maßzahlen des Umfangs seiner Grundfläche (in cm), des Inhalts seiner Mantelfläche (in cm^2) und seines Volumens (in cm^3) untereinander gleich sein.
Ermitteln Sie den Grundkreisradius und die Höhenlänge jedes derartigen Zylinders!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, ein gerader Kreiszylinder entspreche den Bedingungen der Aufgabe. Mit r sei die Maßzahl des (in Zentimeter gemessenen) Radius seiner Grundfläche und mit h die Maßzahl seiner Höhenlänge bezeichnet.
Dann beträgt die Maßzahl des Umfangs seiner Grundfläche (in cm): $2\pi r$, die Maßzahl des Inhalts seiner Mantelfläche: $2\pi r \cdot h$ und die Maßzahl seines Volumens (in cm^3): $\pi r^2 \cdot h$, und es gilt: $2\pi r = 2\pi r \cdot h$, woraus wegen $r > 0$ $h = 1$ folgt.

Ferner gilt: $2\pi r \cdot h = \pi r^2 \cdot h$, woraus wegen $r = 2$ folgt.
Also kann höchstens ein gerader Kreiszylinder mit einem Radius von 2 cm und einer Höhenlänge von 1 cm den Bedingungen der Aufgabe entsprechen.
Tatsächlich ist in diesem Falle der Umfang der Grundfläche 4π cm, der Mantelflächeninhalt $4\pi\text{cm}^2$ und das Volumen $4\pi\text{cm}^3$.

Aufgabe 140924:
AB sei eine in der Ebene ε gegebene Strecke der Länge a. In ε sei g die Gerade durch A, die senkrecht zu AB ist.
In B sei die Senkrechte s auf die Ebene ε errichtet. Schließlich seien C ein von A verschiedener Punkt auf g und D ein von B verschiedener Punkt auf s.
a) Man beweise, dass es eine Kugel gibt, die durch die Punkte A, B, C und D geht.
b) Man berechne den Radius einer solchen Kugel für den Fall, dass $CA = a\sqrt{2}$ und $BD = a\sqrt{3}$ gilt.

Lösung von Steffen Polster:



a) Behauptung: Der Mittelpunkt M der Strecke CD hat von den Punkten A,B,C,D jeweils den gleichen Abstand und kann somit als Mittelpunkt der gesuchten Kugel gewählt werden.

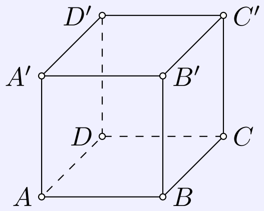
Die Strecken x, y und z stehen nach Aufgabenstellung paarweise aufeinander senkrecht. Damit spannen sie einen Quader mit den Kantenlängen x, y und z auf.
Die Strecke CD ist dann die Raumdiagonale des Quaders mit der Länge $d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Der Mittelpunkt von CD hat per Definition von C und D den gleichen Abstand. Als Symmetriezentrum des Quaders liegt M aber auch auf den Raumdiagonalen durch A bzw. B. Alle Raumdiagonalen eines Quaders haben die gleiche Länge, so dass $MA = MB = BC = MD$ folgt.
Damit ist M der Mittelpunkt einer Kugel auf deren Peripherie A, B, C und D liegen.

b) Setzt man $x = a$, $y = a\sqrt{2}$ und $z = a\sqrt{3}$ in die Gleichung des Radius r der Kugel ein, so wird

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 2a^2 + 3a^2} = \frac{a}{2}\sqrt{6}$$

Aufgabe 160923:

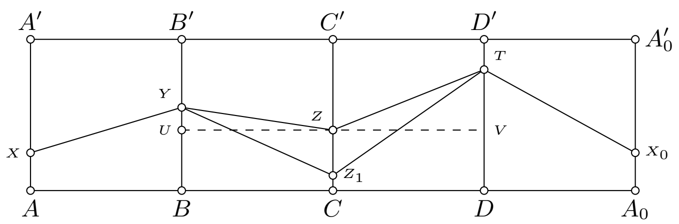


Gegeben sei ein Würfel $ABCDA'B'C'D'$ (siehe Abbildung). Wir betrachten alle geschlossenen Streckenzüge $XYZTX$, wobei X, Y, Z und T in dieser Reihenfolge beliebige innere Punkte der Kanten AA', BB', CC' bzw. DD' seien.
Untersuchen Sie, ob es eine Lage derartiger Punkte X, Y, Z, T so gibt, dass der Streckenzug $XYZTX$ unter allen betrachteten Streckenzügen
a) minimale,
b) maximale
Gesamtlänge besitzt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Gesamtlänge der Streckenzüge wird nicht verändert, wenn wir den „Mantel“ aus den vier zu AA' parallelen Seitenflächen des Würfels wie folgt in die Ebene abwickeln:
Für den dabei zweimal (als X und X_0) auftretenden Punkt X gilt $XX_0 \parallel AA_0$.

a) Zu jedem solchen X ergibt sich als Möglichkeit für Y, Z, T mit minimaler Gesamtlänge von $XYTZX_0$ die Wahl von Y, Z, T auf der Strecke XX_0, da diese die kürzeste Verbindung zwischen X und X_0 ist und da sie so bestimmten Punkte Y, Z, T wegen $AX = BY = CZ = DT = A_oX_o$ im Innern von BB', CC' bzw. DD' liegen.
Die so zu je einem X gehörende minimale Gesamtlänge von $XYZTX_0$ ist $XX_0 = AA_0$, also für alle X dieselbe Länge.
Daher ist dies unter allen betrachteten Streckenzügen überhaupt die minimale Gesamtlänge, deren Existenz somit nachgewiesen ist.

b) Es sei $XYZTX$ ein beliebiger zu betrachtender Streckenzug.
Für ihn sei durch geeignete Wahl in der Reihenfolge der Bezeichnungen A, B, C, D sowie gleichzeitig A', B', C', D' und X, Y, Z, T erreicht, dass $CZ \leq BY$ und $CZ \leq DT$ gilt.



Nach der Abwicklung schneidet die Parallele zu AA_0 durch Z dann BB' und CC' in Punkten U bzw. V auf BY bzw. DT. Daher ist $\angle CZY \geq \angle CZU = 90°$ und $\angle CZT \geq \angle CZV = 90°$.
Wählt man nun einen Punkt Z_1 zwischen C und Z, so gehört auch XYZ_1TX zu den betrachteten Streckenzügen. Ferner ist im Dreieck Z_1ZY der Innenwinkel bei Z größer als der bei Z_1, also gilt $YZ_1 > YZ$.
Ebenso folgt $Z_1T > ZT$. Daher hat XYZ_1TX eine größere Gesamtlänge als $XYZTX$. Folglich gibt es unter den betrachteten Streckenzügen keinen mit maximaler Gesamtlänge.

Aufgabe 210922:
Gegeben sei ein beliebiger Quader, für dessen Kantenlängen a, b und c die Beziehung $a < b < c$ gilt. Untersuchen Sie, ob es einen ebenen Schnitt durch diesen Quader so gibt, dass die Schnittfigur ein Quadrat ist!

Lösung von cyrix:
Ja, dies ist möglich.
Es sei $ABCDA'B'C'D'$ der Quader mit Grundfläche $ABCD$, Deckfläche $A'B'C'D'$, sodass jeder Eckunkt P der Grundfläche mit seinem entsprechenden Eckpunkt P' der Deckfläche durch eine Kante verbunden sei. Weiterhin gelte $|AB| = b$, $|AA'| = a$ und $|AD| = |A'D'| = c$.

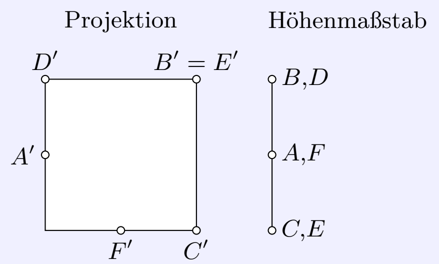
Auf den Kanten $A'D'$ sowie $B'C'$ seien so die Punkte K bzw. L markiert, dass $|A'K| = |B'L| = \sqrt{a^2 - b^2}$ gilt. Dies ist wegen $\sqrt{a^2 - b^2} < \sqrt{a^2} = a < c = |A'D'|$ immer möglich. Dann ist die Strecke KL parallel zur Strecke $A'B'$, also auch zu AB, sodass die vier Punkte $ABLK$ in einer Ebene liegen. Weiterhin gilt damit $|KL| = |AB| = a$ und aufgrund der Symmetrie $|AK| = |BL|$.

Das Dreieck $\triangle AKA'$ ist rechtwinklig in A', sodass sich nach dem Satz von Pythagoras

$$|AK| = \sqrt{|AA'|^2 + |A'K|} = \sqrt{b^2 + (a^2 - b^2)} = a$$

ergibt. Damit ist das Viereck $ABLK$ eine Raute.
Aufgrund der Symmetrie (Spiegelung an der zur Seitenfläche $ADD'A'$ parallelen Ebene durch den Mittelpunkt von AB überführt sowohl den Quader in sich selbst und bildet K auf L sowie A auf B ab) sind aber dessen Diagonalen gleich lang, sodass es sich um ein Quadrat handelt. Der Schnitt des Quaders durch $ABKL$ liefert also das Gewünschte, $\Box$.

Aufgabe 290924:

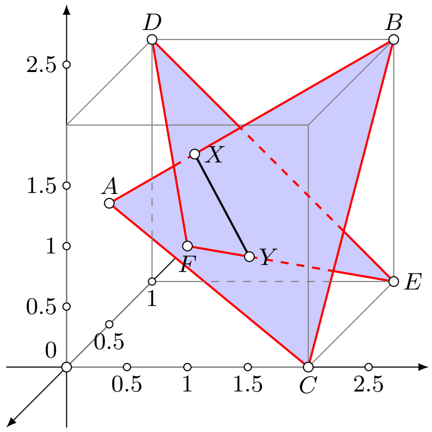


Die Abbildung stellt sechs Punkte A, B, C, D, E, F in senkrechter Eintafelprojektion mit zugehörigem Höhenmaßstab dar.
Die Punkte C', B', D' und ein vierter nicht bezeichneter Punkt sind in dieser Reihenfolge die Eckpunkte eines Quadrates mit der Seitenlänge $a = 6$ cm.
Die Punkte A' und F' sind die Mittelpunkte der in der Abbildung ersichtlichen Quadratseiten. Im Höhenmaßstab haben A, F von B, D den Abstand 3 cm und C, E von B, D den Abstand 6 cm.

a) Zeichnen Sie in schräger Parallelprojektion, wobei mit den üblichen Bezeichnungen $\alpha = 45°$, $q = \frac{1}{2}$ sei, eine Darstellung desjenigen Würfels, zu dem die Eckpunkte B, C, D, E gehören, und dazu die Punkte A und F!
b) Zeichnen Sie anschließend die Dreiecksflächen ABC und DEF durch Wiedergabe ihrer Seitenkanten sowie der Schnittstrecke XY, die diese beiden Dreiecksflächen miteinander gemeinsam haben!
Berücksichtigen Sie in a) und b) die Sichtbarkeitsverhältnisse, indem Streckenteile, die durch eine davor liegende Dreiecksfläche verdeckt sind, gestrichelt wiedergegeben werden!
Eine Verdeckung durch davor liegende Seitenflächen des Würfels soll dagegen nicht berücksichtigt werden (diese Flächen sind als „nicht vorhanden“ oder „durchsichtig“ zu betrachten).
Verdeutlichen Sie die sichtbaren Teile der Dreiecksflächen durch Schraffur, im Dreieck ABC parallel zu CB, im Dreieck DEF in dichterer Schraffur parallel zu DE!
c) Geben Sie für die Schnittstrecke XY eine Herleitung der - von Ihnen in b) verwendeten - Konstruktion der Bildpunkte von X und Y!
Beschreiben Sie diese Konstruktion!

Lösung von cyrix:
a), b): Eine Darstellung der beschriebenen Situation (mit Ausnahme der geforderten Schraffuren) findet sich in folgendem Bild, wobei hierfür eine Längeneinheit als 3 cm gewählt wurde.

Dabei ist genau der Teil des Dreiecks $\triangle ABC$ nicht sichtbar, welcher durch das Viereck $FYXS$ verdeckt wird, wobei S der Schnittpunkt in der Schrägbilddarstellung von DF und AX ist. Vom Dreieck $\triangle DEF$ ist genau jenes Viereck, „der von D ausgehende Bereich bis zur Geraden AB“ und „der von E ausgehende Bereich bis zur Geraden BC“ sichtbar.



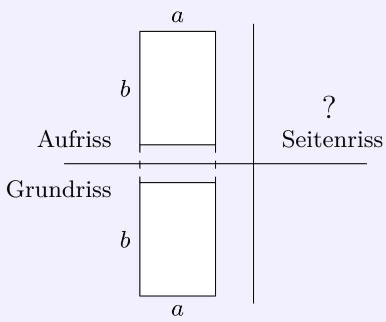
c) Jeder der beiden Endpunkte der Strecke XY muss auf dem Rand mindestens einer der beiden Dreiecksflächen liegen, findet sich also dort, wo eine Kante einer Fläche die andere durchstößt. Offenbar schneidet die Strecke AB das Dreieck $\triangle DEF$ und die Strecke EF das Dreieck $\triangle ABC$, während die übrigen Seitenkanten dieser beiden Dreiecke das jeweils andere Dreieck nicht schneiden. Es sind also genau diese beiden Schnittpunkte zu bestimmen.

Jeder Punkt auf der Geraden AB besitzt für ein bestimmtes $t \in \mathbb{R}$ die Koordinaten $(0 + t \cdot (2-0), 1 + t \cdot (2-1), 1 + t \cdot (2-1)) = (2t, 1+t, 1+t)$. (Dies erhält man aus der Zweipunktform zur Aufstellung der Gleichung einer Geraden durch zwei gegebene Punkte.) Weiterhin gilt für jeden Punkt (x,y,z) auf der Ebene durch die Punkte D, E und F, dass $x + z = 2$ ist. Für den Schnittpunkt X der Geraden mit der Ebene muss also $2t + 1 + t = 2$ bzw. $t = \frac{1}{3}$ gelten, sodass X die Koordinaten $\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$ besitzt.

Analog gilt für jeden Punkt auf der Geraden FE, dass er für ein reelles t die Koordinaten $(1 + t \cdot (2-1), 0 + t \cdot (2-0), 1 + t \cdot (0-1)) = (1+t, 2t, 1-t)$ besitzt, sowie für jeden Punkt (x,y,z) auf der Ebene durch A, B und C, dass $y = z$ gilt. Also muss der Schnittpunkt Y dieser beiden Objekte die Bedingung $2t = 1 - t$ bzw. $t = \frac{1}{3}$ erfüllen, sodass Y die Koordinaten $\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ besitzt.

Kennt man die Koordinaten beider Punkte X und Y, kann man sie leicht in das Schrägbild eintragen. (Streckenlängen von einem Drittel bzw. Vielfache davon kann man mit dem Strahlensatz konstruieren.)

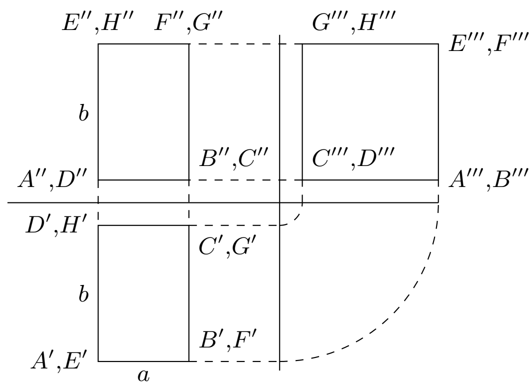
Aufgabe 310923:



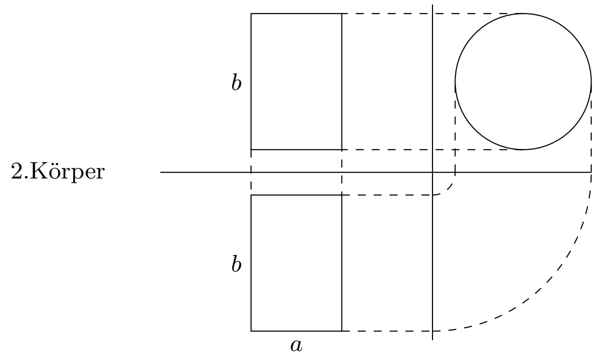
Wenn bei der Abbildung eines Körpers in Zweitafelprojektion die Grund- und Aufrissbilder nicht für eine eindeutige Festlegung ausreichen, kann man einen Seitenriss hinzufügen und damit zur Dreitafelprojektion übergehen.
Die Abbildung zeigt zwei Rechtecke (mit gegebenen Seitenlängen a, b) als Grund- und Aufriss eines Körpers. (Es wird nicht gefordert, dass der Körper nur von ebenen Flächen begrenzt wird.)
Ergänzen Sie die Risse in drei verschiedenen Zeichnungen so durch Seitenrisse, dass die Bilder von drei Körpern entstehen, von denen keine zwei das gleiche Volumen haben!
Bezeichnen Sie in Ihren Darstellungen alle an den Körpern auftretenden Ecken! (Grund-, Auf- und Seitenriss eines Punktes P bezeichne man mit P', P'' bzw. P'''; eventuell auftretende Kanten, die von Flächen verdeckt sind, zeichne man gestrichelt.)
Geben Sie in Abhängigkeit von a und b die Volumina der drei dargestellten Körper an!
Eine Begründung wird nicht verlangt.

Lösung von cyrix:

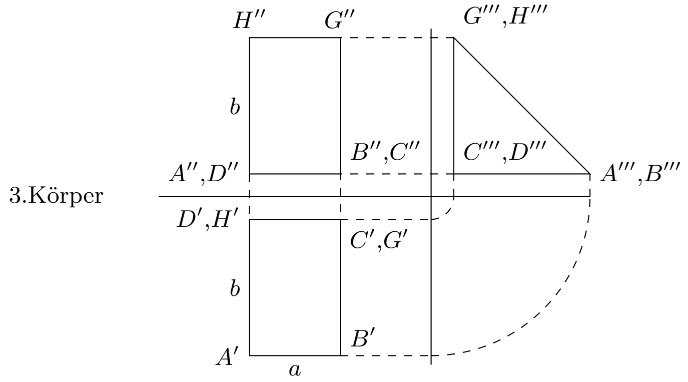
1.Körper



Der 1. Körper ist ein Quader mit den Seitenlängen a, b und b. Der Seitenriss ist ein Quadrat der Kantenlänge b. Das Volumen des Körpers ist damit $V = ab^2$.



Der 2. Körper ist ein „liegender“ Zylinder (Grund- und Deckfläche sind Kreise mit Durchmesser b, die „Höhe“, also eher die Länge ist a). Der Seitenriss ist ein Kreis dem mit Durchmesser b. Das Volumen wird $V = \frac{\pi}{4} a b^2$.



Der 3. Körper ist ein dreiseitiges Prisma mit der Höhe a und einem rechtwinklig-gleichschenkligen Dreieck als Grundfläche, dessen Katheten b sind. Der Seitenriss ist ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck. Das Volumen des Körpers ist damit $V = \frac{1}{2} a b^2$.

III Runden 3 & 4

Aufgabe V10932:
Das Volumen eines Holzmastes für Telegrafenleitungen wird nach der folgenden Formel berechnet.

$$V = \frac{\pi h}{12}(d_1^2 + d_1 d_2 + d_2^2)$$

Dabei sind h die Höhe, d_1 der untere Durchmesser und d_2 der obere Durchmesser.
In der Praxis rechnet man aber meist mit der folgenden Näherungsformel:

$$V' = \frac{\pi h}{4} d^2$$

wobei d der mittlere Durchmesser des Holzmastes ist

$$d = \frac{d_1 + d_2}{2}$$

a) Berechnen Sie das Volumen eines Holzmastes, für den folgende Werte gegeben sind, nach der genauen und nach der Näherungsformel:
$h = 10$ m, $d_1 = 20$ cm, $d_2 = 14$ cm!
b) Wie viel Prozent beträgt der Fehler, wenn man mit der Näherungsformel rechnet?
c) Stellen Sie eine Formel für $\frac{V - V'}{V}$ an, indem Sie $d_1 = d + \delta$ und $d_2 = d - \delta$ setzen!
Welchen Wert ergibt dieser Ausdruck bei Benutzung der unter a) genannten Werte?

Lösung von MontyPythagoras:
a) Die Volumina betragen $V = 229{,}336\text{cm}^3$ und $V' = 226.980\text{cm}^3$.
b) Der Fehler beträgt 1,03%.

c) Setzt man die Formeln für d_1 und d_2 in die Gleichung für V ein, erhält man

$$V = \frac{\pi h}{12}\left((d+\delta)^2 + (d+\delta)(d-\delta) + (d-\delta)^2\right)$$

$$V = \frac{\pi h}{12}\left(d^2 + 2d\delta + \delta^2 + d^2 - \delta^2 + d^2 - 2d\delta + \delta^2\right)$$

$$V = \frac{\pi h}{12}\left(3d^2 + \delta^2\right) = \frac{\pi h}{4}d^2 + \frac{\pi h}{12}\delta^2$$

Der relative Fehler ist dann

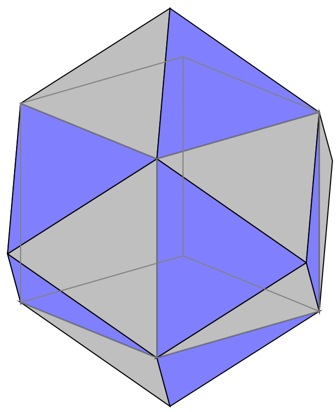
$$\frac{V - V'}{V} = \frac{\frac{\pi h}{12}\delta^2}{\frac{\pi h}{12}\left(3d^2 + \delta^2\right)} = \frac{\delta^2}{3d^2 + \delta^2}$$

Das ergibt in diesem Fall $\frac{3}{292}$, was den 1,03% von oben entspricht.

Aufgabe 040936:
Auf die Flächen eines Würfels sind Pyramiden aufgesetzt, deren Grundflächen den Flächen des Würfels kongruent sind und deren Seitenflächen mit der Grundfläche Winkel von 45° bilden.

1. Wie viel Flächen hat der neue Körper, und welche Form haben diese Flächen?
2. Geben Sie das Volumen des zusammengesetzten Körpers als Funktion der Würfelkante a an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Da es sich jeweils um eine gerade Pyramide mit quadratischer Grundfläche der Seitenlänge a handelt, ist jede Mantelfläche jeder der Pyramiden ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basislänge a, und die Dreiecke sind alle untereinander kongruent.



Wir berechnen die Größe des Winkels zwischen zwei Dreiecksflächen, die dieselbe Würfelkante als Basis haben. Der Winkel setzt sich zusammen aus

1. dem Winkel zwischen einer Dreiecksfläche und der Grundfläche der zugehörigen Pyramide.
2. dem rechten Winkel zwischen zwei benachbarten Seitenflächen des Würfel und
3. dem Winkel zwischen der anderen Dreiecksfläche und der Grundfläche der zugehörigen Pyramide. Seine Größe ist mithin $45° + 90° + 45° = 180°$.

Die beiden benachbarten Dreiecke liegen in also derselben Ebene, und weil sie einander kongruent und gleichschenklig sind und eine gemeinsame Seite besitzen, bilden ihre Schenkel die Seiten eine Rhombus.
Da der Würfel 12 Kanten hat, besitzt der zusammengesetzte Körper 12 Rhombusflächen als Seitenflächen; denn keine zwei zu verschiedenen Kanten gehörende Rhomben liegen in einer Ebene. Die Rhomben sind untereinander kongruent.

Wir zeigen noch, dass die Rhomben keine Quadrate sind. Die Höhen der aufgesetzten Pyramiden haben; wegen des Winkels zwischen Mantel- und Grundfläche jeder Pyramide von der Größe 45°; die Länge $\frac{a}{2}$.
Die Höhen der die Mantelflächen bildenden Dreiecksflächen haben nach dem Satz des Pythagoras die Länge $\sqrt{2(\frac{a}{2})^2}$, d. h. $\frac{a}{2}\sqrt{2}$.
Damit haben die Diagonalen der Rhomben unterschiedliche Länge, nämlich a und $a\sqrt{2}$.

Jede der aufgesetzten Pyramiden hat das Volumen $\frac{1}{3}(a^2\frac{a}{2})$, d. h. $\frac{a^3}{6}$.
Die sechs aufgesetzten Pyramiden haben somit zusammen mit dem Würfel das Volumen $2a^3$.

Aufgabe 060932:
Beweisen Sie die folgende Behauptung:
Sind bei einem (nicht notwendigerweise regelmäßigen) Tetraeder $ABCD$ die Umfänge aller seiner vier Seitenflächen untereinander gleich, dann sind diese Flächen zueinander kongruent.

Lösung von Philipp Weiß:
Der Umfang sei u, die Seitenlängen seinen a, b, c, d, e, f, so dass

$$u = a + b + c = a + e + f = b + d + f = c + d + e$$

Addiere die ersten beiden Umfänge und ziehe die anderen beiden Umfänge ab, und wir erhalten:

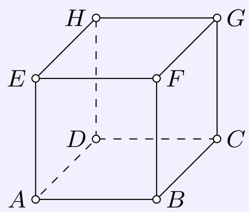
$$0 = u + u - u - u = a + b + c + a + e + f - b - d - f - c - d - e = 2a - 2d$$

also $a = d$. Analog erhält man $b = e$ und $c = f$. Also haben alle vier Dreiecke Seiten mit Längen a, b und c. Dreiecke mit den gleichen Seitenlängen sind bekanntlich kongruent.

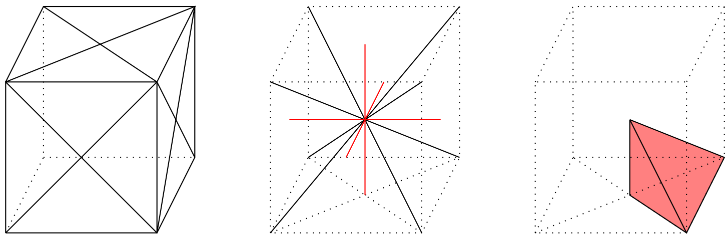
Aufgabe 100935:
Eine dreiseitige Pyramide mit den Ecken A, B, C, D und der Spitze D habe die Kantenlängen $AB = 4$ cm, $AC = 3$ cm, $BC = 5$ cm, $BD = 12$ cm, $CD = 13$ cm, und $\angle ABD$ sei ein rechter Winkel.
Man berechne das Volumen V dieser Pyramide.

Lösung von cyrix:
Da $AB^2 + AC^2 = BC^2$ gilt, ist nach der Umkehrung des Satzes des Pythagoras das Dreieck $\triangle ABC$ rechtwinklig, wobei AB und AC seine Katheten sind.
Also beträgt sein Flächeninhalt $A = \frac{1}{2}AB \cdot AC = 6cm^2$. Da $\angle ABD = 90°$ beträgt, ist die Strecke BD auch gleichzeitig die Höhe der Spitze D über der Grundfläche ABC. Also beträgt das Volumen V der Pyramide genau $V = \frac{1}{3}A \cdot BD = 24cm^3$.

Aufgabe 120933:
Ein Würfel mit der Kantenlänge a und den Eckpunkten A, B, C, D, E, F, G, H (siehe Abbildung) wird von sechs Ebenen geschnitten, die jeweils durch die Punkte A, B, G, H; D, C, F, E; A, D, G, F; B, C, H, E; A, E, G, C und B, H, F, D gehen.
Man ermittle die Anzahl der Teilkörper, in die der Würfelkörper dadurch zerlegt wird. Außerdem gebe man das Volumen der einzelnen Teilkörper an.



Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:



Jede der Ebenen wird von zwei Raumdiagonalen des Würfels aufgespannt. Da es $\binom{4}{2} = 6$ ungeordnete Paare von Raumdiagonalen gibt, entsprechen diese genau den Ebenen. Der Mittelpunkt des Würfels ist gemeinsamer Schnitt aller Raumdiagonalen und liegt somit in allen Ebenen. Eine Ebene schneidet die Oberfläche des Würfels in zwei diagonal gegenüberliegenden Kanten und den dazugehörigen Flächendiagonalen. Daher ergibt die linke Skizze den Schnitt aller Ebenen mit der Würfeloberfläche.

Falls zwei Ebenen eine gemeinsame Raumdiagonale haben, ist diese bereits die Schnittgerade. Falls zwei Ebenen keine gemeinsame Raumdiagonale haben, ist die Schnittgerade durch die Mittelpunkte zweier gegenüberliegender Flächen gegeben (rote Strecken). Somit stellt die mittlere Skizze sämtliche Schnitte zwischen den Ebenen dar.

Die linke und mittlere Zeichnung ergeben daher alle möglichen Kanten, der gesuchten Teilkörper an. Daher ist ein Teilkörper eine Pyramide mit einer dreieckigen Grundfläche und dem Mittelpunkt der Würfels als Spitze. Insgesamt zerfällt der Würfel in $6 \cdot 4 = 24$ Teilkörper. Da eine Seitenfläche in 4 kongruente Teildreiecke unterteilt wird und alle Pyramiden dieselbe Höhe besitzen, haben diese alle das gleiche Volumen $V = \frac{a^3}{24}$.

Aufgabe 130936:
Gegeben sei ein regelmäßiges Tetraeder mit den Eckpunkten A, B, C, D und der Kantenlänge a. Ein Punkt D' soll folgende Eigenschaften haben:
a) Das Tetraeder mit den Eckpunkten A, B, C, D' ist volumengleich zu dem gegebenen Tetraeder,
b) $BD' = CD' = a$, c) $AD' \neq a$.

Man untersuche, ob es solche Punkte D' gibt, und ermittle für jedes solche D' die Länge der Kante AD'.

Lösung von cyrix:
Ist h die Höhe des Tetraeders $ABCD$, so folgt aus Eigenschaft a), dass D' in einer zur Grundfläche ABC parallelen Ebene ε mit Abstand h liegt. Prinzipiell sind dabei zwei Möglichkeiten denkbar: Entweder es liegt ε im gleichen von der Grundfläche erzeugten Halbraum wie D (dann liegt D auf ε), oder die Ebene ε liegt im entsprechend anderen Halbraum. Da aber die weiteren Bedingungen nicht davon abhängen, welche der beiden Fälle eintritt, ergeben sich symmetrische Strukturen, sodass wir o. B. d. A. annehmen können, dass ε im oberen Halbraum zusammen mit D liegt, sodass D und D' beides Punkte auf ε sind.

Nach Bedingung b) liegt D' auf der Oberfläche der beiden Kugeln um die Punkte B und C mit Radius a. Da $h < a$ gilt, werden diese beiden Kugeln durch ε geschnitten (und nicht nur berührt), sodass sich zwei Kreise $k_B; k_C$ als Schnittfiguren in der Ebene ε ergeben. Diese beiden Kreise schneiden sich nun in bis zu zwei Punkten, wovon einer D ist (da auch $|BD| = |CD| = a$ gilt) und der andere (falls existent) D'.

Einen zweiten Schnittpunkt gäbe es nur dann nicht, wenn sich die Kreise in D nur berühren würden. Da die Mittelpunkte M_B und M_C der beiden Kreise wie die Kugelmittelpunkte B und C den Abstand a haben (da ε parallel zur Grundfläche ist), müssten deren gleich große Radien sich also zu a addieren und so würde im rechtwinkligen Dreieck $\triangle BM_BD$ nach dem Satz des Pythagoras die Beziehung $|BM_B|^2 + |M_BD|^2 =$

$|BD|^2$ bzw. $h^2 + \frac{a^2}{4} = a^2$, also $h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ folgen. Im regelmäßigen Tetraeder ist aber $h = \frac{\sqrt{6}}{3}a$, sodass sich die Kreise also nicht nur berühren und es also neben D noch einen zweiten Punkt D' gibt, der die Bedingungen a) und b) erfüllt.

Da $|AD| = a$ ist, kommt nach Bedingung c) auch nicht $D = D'$ Frage. Berechnen wir nun für den zweiten Schnittpunkt D' der beiden Kreise den Abstand zu A:

Die beiden Schnittpunkte zweier Kreise liegen symmetrisch zur Verbindungsgeraden der beiden Mittelpunkte. Da die Ebene ε_1, die senkrecht zur Grundfläche und durch die Gerade BC verläuft, auch senkrecht auf ε steht sowie dort durch die Gerade $M_B M_C$ verläuft, geht also D durch Spiegelung an ε_1 in D' über. Aufgrund der Orthogonalität von ε_1 sowohl zu ε wie auch zur Grundfläche geht damit aber auch der Lotfußpunkt L_D von D auf die Grundfläche durch Spiegelung an ε_1 in den Lotfußpunkt $L_{D'}$ von D' auf die Grundfläche über: Die Lote sind jeweils parallel zur Spiegelungsebene. Bei Betrachtung nur in der Grundfläche geht also L_D durch Spiegelung an der Geraden BC in $L_{D'}$ über.

Da im gleichseitigen Dreieck $\triangle ABC$ die Seitenhalbierenden und Höhen zusammenfallen und L_D der Schwerpunkt dieses Dreiecks ist, steht die Gerade AL_D als Seitenhalbierende und zugleich Höhe senkrecht auf BC und verläuft durch deren Mittelpunkt M. Insbesondere liegt also auch der Spiegelungspunkt $L_{D'}$ auch auf dieser Geraden und es gilt

$$|AL_{D'}| = |AL_D| + 2 \cdot |L_D M| = \frac{2}{3}s + 2 \cdot \frac{1}{3}s = \frac{4}{3}s$$

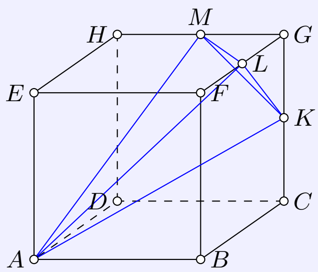
wobei s die Länge der Seitenhalbierenden im gleichseitigen Dreieck mit Kantenlänge a sei. Für diese gilt im rechtwinkligen Dreieck $\triangle ABM$ die Beziehung $s^2 + \frac{a^2}{4} = a^2$ und damit $s^2 = \frac{3}{4}a^2$. Einsetzen liefert $|AL_{D'}|^2 = \frac{16}{9}s^2 = \frac{4}{3}a^2$.

Im rechtwinkligen Dreieck $\triangle AL_{D'}D'$ gilt abschließend nun

$$|AD'|^2 = |AL_{D'}|^2 + |L_{D'}D'|^2 = \frac{4}{3}a^2 + h^2 = \frac{4}{3}a^2 + \frac{2}{3}a^2 = 2a^2$$

also $|AD'| = \sqrt{2}a$.

Aufgabe 140936:



In einem Würfel mit den Eckpunkten A, B, C, D, E, F, G, H (siehe Abbildung) und der Kantenlänge a seien K, L, M die Mittelpunkte der Seiten CG, FG bzw. HG. Man ermittle das Volumen des Pyramidenkörpers mit den Eckpunkten A, K, L, M.

Lösung von cyrix:
Eine Rotation des Würfels um die Raumdiagonale AG um den Winkel 120° bildet den Würfel wieder auf sich selbst ab, wobei die Punkte K, L und M zyklisch vertauscht werden. Demnach geht die Ebene, die durch diese drei Punkte definiert wird, durch die Drehung in sich selbst über und steht also senkrecht auf der Raumdiagonalen AG.

Sei S der Schnittpunkt der Raumdiagonalen mit der Ebene durch K, L und M. Dann ist also SG die Höhe von G auf diese Ebene.
Sei V das Volumen des Tetraeders $KLMG$. Dann gilt einerseits $V = \frac{1}{3}A_{\triangle KLM} \cdot |SG|$ und andererseits

$$V = \frac{1}{3}A_{\triangle MGL} \cdot |GK| = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}|MG| \cdot |LG| \cdot |KG| = \frac{1}{48}a^3$$

Da

$$A_{\triangle KLM} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot |KL| = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{8}a^2$$

gilt, da $\triangle KLM$ ein gleichseitiges Dreieck mit Kantenlänge $\frac{\sqrt{2}}{2}a$ ist, folgt

$$|SG| = \frac{1}{48}a^3 : \frac{\sqrt{3}}{24}a^2 = \frac{1}{2\sqrt{3}}a = \frac{\sqrt{3}}{6}a$$

Damit ergibt sich für das gesuchte Volumen V_P des Pyramidenkörpers mit den Eckpunkten A,K,L,M:

$$V_P = \frac{1}{3}A_{\triangle KLM} \cdot |AS| = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}a^2 \cdot \left(\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right) a = \frac{5\sqrt{3}}{36}a^3$$

Aufgabe 160933:
Wir betrachten die Menge aller Tetraeder, für die folgendes gilt:
(1) Eine der Flächen des Tetraeders ist die Fläche eines gleichseitigen Dreiecks.
(2) Von den Kanten des Tetraeders haben drei die (gegebene) Länge a und drei die Länge $a\sqrt{2}$.
a) Zeigen Sie, dass zwei zueinander nicht kongruente Tetraeder existieren, die dieser Menge angehören!
b) Geben Sie für jedes dieser Tetraeder den Oberflächeninhalt an!

Lösung von cyrix:
a) T_1 entsteht, indem die drei Kanten der Länge a die Grundfläche $\triangle ABC$ bilden und die drei Kanten AD, BD, CD zur Spitze D jeweils die Länge $a\sqrt{2}$ besitzen. Dann sind beide Bedingungen erfüllt und neben dem gleichseitigen Dreieck mit Kantenlänge a sind die anderen drei Seitenflächen von T_1 gleichschenklige Dreiecke mit Basislänge a und Schenkellänge $a\sqrt{2}$.
Der Tetraeder T_2 entsteht analog, nur dass diesmal die Kanten mit Länge $\sqrt{2}a$ die Grundfläche bilden, während die Kanten zur Spitze die Länge a erhalten. Dann sind wieder beide Bedingungen erfüllt und neben dem gleichseitigen Dreieck mit Kantenlänge $a\sqrt{2}$ sind die drei anderen Seitenflächen von T_2 gleichschenklige Dreiecke mit Basislänge $a\sqrt{2}$ sowie Schenkellänge a.
Insbesondere sind die Seitenflächen von T_1 und T_2 nicht kongruent, also auch nicht die Tetraeder selbst.

b) Für ein gleichschenkliges Dreieck mit Basislänge g und Schenkellänge s gilt, dass die Höhe auf die Basis gleichzeitig eine Seitenhalbierende ist. Insbesondere gilt also für deren Länge h aufgrund des rechten Winkels am Höhenfußpunkt $h^2 + \left(\frac{g}{2}\right)^2 = s^2$ bzw. $h = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4s^2 - q^2}$ und damit $A = \frac{1}{2}gh = \frac{1}{4} \cdot g\sqrt{4s^2 - q^2}$.
Für ein gleichseitiges Dreieck mit Kantenlänge s folgt damit insbesondere

$$A = \frac{1}{4} \cdot s\sqrt{4s^2 - s^2} = \frac{\sqrt{3}}{4}s^2$$

Damit beträgt der Oberflächeninhalt von T_1

$$O_{T_1} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 + 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot a\sqrt{4(\sqrt{2}a)^2 - a^2} = \frac{1}{4}a^2 \cdot (\sqrt{3} + 3\sqrt{8-1}) = \frac{\sqrt{3} + 3\sqrt{7}}{4} \cdot a^2$$

und der von T_2

$$O_{T_2} = \frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{2}a)^2 + 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \sqrt{2}a \cdot \sqrt{4a^2 - (\sqrt{2}a)^2} = \frac{1}{4}a^2 \cdot (2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{4-2}) = \frac{2\sqrt{3} + 6}{4}a^2$$

Aufgabe 180933:
Gegeben sei ein Würfel, dessen Volumen mit V_1 bezeichnet sei.
Verbindet man den Mittelpunkt je einer Seitenfläche dieses Würfels mit den Mittelpunkten aller benachbarten Seitenflächen, so erhält man die Kanten eines regelmäßigen Oktaeders. Das Volumen dieses Oktaeders sei V_2 genannt.
Verbindet man nun wieder den Schwerpunkt je einer Seitenfläche dieses Oktaeders mit den Schwerpunkten aller benachbarten Seitenflächen, so erhält man die Kanten eines zweiten Würfels. Sein Volumen sei V_3 genannt.
Berechnen Sie das Verhältnis $V_1 : V_2 : V_3$!

Lösung von cyrix:
Es habe der Ausgangswürfel die Kantenlänge a, der Oktaeder die Kantenlänge b und der innere Würfel die Kantenlänge c. Dann gilt $V_1 = a^3$.

Der Oktaeder lässt sich als Vereinigung zweier gerader Pyramiden mit identischer quadratischer Grundfläche auffassen. Deren Spitzen bilden die Mittelpunkte gegenüberliegender Seitenflächen des Ausgangswürfels, sodass sich als Höhe h einer dieser Pyramiden der Wert $h = \frac{1}{2}a$ ergibt. Diese quadratische Grundfläche beider Pyramiden liegt in der Ebene durch die Mittelpunkte der vier übrigen Seiten des Ausgangswürfels. Jede die Kanten dieser Grundfläche entsteht in dieser Schnittfigur als Hypotenuse eines gleichschenklig rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten die Länge $\frac{1}{2}a$ haben. Also gilt $b = \frac{\sqrt{2}}{2}a$ und $V_2 = 2 \cdot \frac{1}{3}b^2 \cdot h = \frac{1}{6}a^3$.

Verbindet man die Mittelpunkte zweier benachbarter Kanten der quadratischen Grundfläche der beiden Pyramiden miteinander, entsteht eine Strecke der Länge $\frac{\sqrt{2}}{2}b = \frac{1}{2}a$. Der Schwerpunkt der von der Spitze der Pyramide ausgehenden und in einer solchen Seitenfläche des Oktaeders verlaufenden Seitenhalbierenden teilt diese im Verhältnis $2 : 1$, sodass sich nach dem Strahlensatz für die Länge c der Strecke zwischen den Schwerpunkten benachbarter Oktaederflächen $\frac{c}{\frac{a}{2}} = \frac{2}{3}$ bzw. $c = \frac{a}{3}$ und damit $V_3 = \frac{1}{27}a^3$ ergibt. Damit gilt

$$V_1 : V_2 : V_3 = 1 : \frac{1}{6} : \frac{1}{27} = 54 : 9 : 2$$

Aufgabe 200935:
Beweisen Sie, dass man den Körper eines regulären Tetraeders $ABCD$ so durch eine Ebene schneiden kann, dass die Schnittfläche ein Quadrat ist!
Berechnen Sie aus der gegebenen Kantenlänge a des Tetraeders $ABCD$ den Flächeninhalt I eines solchen Quadrates!
Hinweis: Unter dem Körper eines regulären Tetraeders $ABCD$ versteht man denjenigen Körper, der von den Flächen der Dreiecke ABC, ABD, ACD und BCD begrenzt wird, wobei $AB = AC = AD = BC = BD = CD$ gilt.

Lösung von cyrix:
Bei einem regulären Tetraeder sind alle Seitenflächen gleichseitige Dreiecke gleicher Kantenlänge. Insbesondere betragen alle Innenwinkel auf den Seitenflächen jeweils 60°.

Es seien M_{AB}, M_{AC}, M_{DB} und M_{DC} die Mittelpunkte der Strecken AB, AC, DB und DC. Dann sind die Dreiecke $\triangle M_{AB}M_{AC}A$, $\triangle M_{DB}M_{DC}D$, $\triangle M_{AB}M_{DB}B$ und $\triangle M_{AC}M_{DC}C$ allesamt gleichschenklig, wobei die beiden Schenkel einen Innenwinkel von 60° einschließen, sodass diese Dreiecke sogar alle gleichseitig mit Kantenlänge $\frac{a}{2}$ sind. Insbesondere ist also

$$|M_{AB}M_{AC}| = |M_{DB}M_{DC}| = |M_{AB}M_{DB}| = |M_{AC}M_{DC}| = \frac{a}{2}$$

Nach der Umkehrung des Strahlensatzes mit Zentrum A ist $M_{AB}M_{AC} \parallel BC$ und analog bei Betrachtung mit Zentrum D ist $M_{DB}M_{DC} \parallel BC$, sodass diese beiden Geraden und damit die vier Punkte in einer gemeinsamen Ebene liegen.

Damit ist das Viereck $M_{AB}M_{AC}M_{DC}M_{DB}$ eine Raute.

In den gleichseitigen Dreiecken $\triangle ABC$ und $\triangle DBC$ fallen die Mittelsenkrechten der Strecke BC mit den Höhen von A bzw. D auf diese zusammen. Damit steht die Gerade BC senkrecht auf der Ebene ε, die durch A, D und den Mittelpunkt M_{BC} von BC verlaufe, sodass bei der Spiegelung an ε wegen $|BM_{BC}| = |CM_{BC}|$ die Punkte B und C jeweils aufeinander abgebildet werden, während A und D fix bleiben. Das bedeutet, dass bei dieser Spiegelung die Strecken $M_{AB}M_{DC}$ und $M_{AC}M_{DB}$ aufeinander abgebildet werden, also gleich lang sind.
Das bedeutet aber, dass in der Raute $M_{AB}M_{AC}M_{DC}M_{DB}$ die Diagonalen gleich lang sind, sodass es sich um ein Quadrat handelt. Dieses Quadrat hat die Kantenlänge $\frac{a}{2}$ und also den Flächeninhalt $I = \frac{1}{4}a^2$.

Aufgabe 210936:
Bei einem Tetraeder $ABCD$ seien die Kantenlängen $AB = 10$ cm, $BC = 6$ cm, $AC = 8$ cm, $AD = 13$ cm, $BD = 13$ cm geben, das Lot von D auf die Fläche des Dreiecks ABC sei 12 cm lang.
Beweisen Sie, dass durch diese Angaben die Länge der Kante CD eindeutig bestimmt ist, und ermitteln Sie diese Kantenlänge!

Lösung von cyrix:
Es sei L der Fußpunkt des Lots von D auf die Fläche des Dreiecks $\triangle ABC$. Dann sind die Dreiecke $\triangle ADL$ und $\triangle BDL$ rechtwinklig in L und es gilt

$$|AL| = \sqrt{|AD|^2 - |DL|^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} \text{ cm} = \sqrt{25} \text{ cm} = 5 \text{ cm}$$

sowie analog $|BL| = 5$ cm. Da $|AB| = 10$ cm die Summe dieser beiden Strecken ist, liegt L auf der Strecke AB und bildet dessen Mittelpunkt.

Da $|AB|^2 = |BC|^2 + |AC|^2$ gilt, ist das Dreieck $\triangle ABC$ rechtwinklig in C. Damit gilt nach der Umkehrung des Satzes von Thales $|AL| = |BL| = |CL| = 5$ cm.
Das Dreieck $\triangle CDL$ ist rechtwinklig in L. Also gilt nach dem Satz von Pythagoras

$$|CD| = \sqrt{|CL|^2 + |DL^2|} = \sqrt{5^2 + 12^2} \text{ cm} = 13 \text{ cm}$$

Aufgabe 220935:
Auf der Oberfläche einer Kugel vom Radius 1 seien k_1 und k_2 zwei beliebige voneinander verschiedene Großkreise. Ihre Schnittpunkte seien P und Q.
Beweisen Sie, dass für jeden Punkt S der Kugeloberfläche die Summe $PS^2 + QS^2$ denselben Wert hat! Ermitteln Sie diesen Wert!
Hinweis:
1. Unter einem Großkreis versteht man einen Kreis, der sich als Schnitt der Kugeloberfläche mit einer durch den Mittelpunkt der Kugel gehenden Ebene ergibt.
2. Streckenlängen, z. B. PS, PQ seien geradlinig gemessen, nicht etwa auf der Kugeloberfläche. Dabei sei stets dieselbe Maßeinheit gewählt, aber der Einfachheit halber nur die Maßzahl angegeben.

Lösung von cyrix:
Es seien ε_1 und ε_2 die Ebenen, die die beiden Großkreise beinhalten. Da diese verschieden sind, sind auch die Ebenen verschieden, schneiden sich also in einer Geraden. Da beide Ebenen den Mittelpunkt der Kugel enthalten, ist dieser auch in der Schnittgeraden enthalten, sodass P und Q sowohl auf der Kugeloberfläche als auch einer Geraden durch den Kugelmittelpunkt liegen. Sie bilden also einen Durchmesser der Kugel und es gilt $|PQ| = 2$.

Ist $S = P$ oder $S = Q$, so vereinfacht sich die Summe $|PS|^2 + |QS|^2$ zu $|PQ|^2 + 0^2 = 2^2 = 4$.

Sei ab nun S verschieden von P und Q ein Punkt auf der Kugeloberfläche. Da PQ ein Durchmesser der Kugel ist, liegt S also nicht auf der Geraden durch P und Q, sodass genau eine Ebene ε existiert, auf der die drei Punkte liegen. Mit P und Q liegt auch ihr Mittelpunkt, was der Kugelmittelpunkt ist, in dieser Ebene, sodass der Schnitt von ε mit der Kugeloberfläche ein Großkreis ist, insbesondere also ein Kreis mit Durchmesser PQ, auf dem S liegt.

Nach dem Satz von Thales ist damit das Dreieck $\triangle PQS$ rechtwinklig in S und nach dem Satz von Pythagoras gilt $|PS|^2 + |QS^2| = |PQ|^2 = 2^2 = 4$, sodass diese Summe unabhängig von der Lage immer den Wert 4 annimmt, $\square$.

Aufgabe 240933:
Es sei $ABCD$ ein regelmäßiges Tetraeder mit der Kantenlänge a. Der Mittelpunkt der Kante AB sei M, der Mittelpunkt der Kante CD sei N.
a) Beweisen Sie, dass die Gerade durch M und N sowohl auf der Geraden g durch A und B als auch auf der Geraden h durch C und D senkrecht steht!
b) Ermitteln Sie den Abstand MN zwischen M und N!
c) Beweisen Sie, dass für jeden Punkt X auf g und jeden Punkt Y auf h der Abstand XY zwischen X und Y die Ungleichung $XY \geq MN$ erfüllt!

Lösung von cyrix:
a) Es ist CM eine Höhe im gleichseitigen Dreieck $\triangle ABC$ und steht damit senkrecht auf g. Analog ist DM eine Höhe im gleichseitigen Dreieck $\triangle ABD$, die damit auch senkrecht auf g ist. Da beide Geraden durch M verlaufen, liegen sie in der eindeutig bestimmten Ebene ε, welche zu g senkrecht ist und durch M verläuft. Damit liegen auch C und D, also auch ihre Verbindungsgerade und damit auch N auf ε. Da alle Geraden auf ε, die g schneiden, senkrecht zu dieser verlaufen, gilt dies auch für die Gerade MN, die g in M schneidet.

Da im regulären Tetraeder keine Eckpunkte oder Seitenkanten voneinander ausgezeichnet sind, folgt aus Symmetriegründen völlig analog auch $MN \perp h$.

b) Wie gerade nachgewiesen, ist das Dreieck $\triangle MND$ rechtwinklig in N. Dabei ist $|ND| = \frac{1}{2}a$, da N der Mittelpunkt der Kante CD mit Länge a ist. Weiterhin ist $|MD| = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, da dies die Länge einer Seitenhalbierenden im gleichseitigen Dreieck $\triangle ABD$ mit Kantenlänge a ist. Also gilt nach dem Satz des Pythagoras $|MN|^2 = |MD|^2 - |ND|^2 = \frac{3}{4}a^2 - \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{2}a^2$, also $|MN| = \frac{\sqrt{2}}{2}a$.

c) Die Geraden g und h sind windschief, denn lägen sie in einer Ebene, so auch die Punkte A, B, C und D, die auf ihnen liegen, sodass diese keinen Tetraeder bilden würden. Damit gibt es die zwei parallelen Ebenen ϕ_g und ϕ_h die g bzw. h beinhalten und jeweils parallel zur anderen Geraden sind. Nach Aufgabenteil b) haben diese beiden Ebenen wegen Teil a) den Abstand $|MN|$.

Sei für einen beliebigen Punkt X auf ϕ_g der Bildpunkt bezüglich Projektion auf ϕ_h mit P bezeichne. Dann ist also $|XP| = |MN|$. Ist Y nun ein beliebiger Punkt auf ϕ_h, so kann entweder $Y = P$ gelten, sodass dann $|XY| = |XP| = |MN|$ gilt, oder aber es ist $Y \neq P$.
Dann ist das Dreieck $\triangle XYP$ rechtwinklig in P und es gilt $|XY|^2 = |XP|^2 + |YP|^2$, also $|XY| > |XP| = |MN|$, sodass in jedem Fall, insbesondere auch für X auf g und Y auf h die Ungleichung $|XY| \geq |MN|$ erfüllt ist, $\square$.

Aufgabe 250933:
Das Volumen eines regelmäßigen Tetraeders sei V_T, das Volumen seiner Umkugel sei V_K.
Berechnen Sie das Verhältnis $V_K : V_T$ und runden Sie es ganzzahlig (d. h. ermitteln Sie die zu $V_K : V_T$ nächstgelegene ganze Zahl)!
Dabei können die (auf eine bzw. zwei Dezimalen nach dem Komma genauen) Näherungswerte $\sqrt{3} \approx 1{,}7$ und $\pi \approx 3{,}14$ verwendet werden.

Lösung von cyrix:
Im regulären Tetraeder mit Kantenlänge a sind alle Seitenflächen gleichseitige Dreiecke mit Kantenlänge a. Die Seitenhalbierende s in einem solchen Dreieck verläuft durch den Mittelpunkt der entsprechenden Seite und steht orthogonal auf dieser, besitzt also die Länge $s = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ und die Seitenfläche einen Flächeninhalt von $A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot s = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$.

Der Schwerpunkt eines Dreiecks teilt dessen Seitenhalbierenden im Verhältnis 2:1, sodass die Entfernung eines Eckpunkts zum Schwerpunkt der entsprechenden Seitenfläche genau $\frac{\sqrt{3}}{3}a$ beträgt.
In einem regulären Tetraeder steht die Schwerelinie (d. h. Verbindungsstrecke eines Eckpunkts mit dem Schwerpunkt der gegenüberliegenden Seitenfläche) senkrecht auf der entsprechenden Seitenfläche, sodass diese eine Länge von $h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{3}}a = \frac{\sqrt{6}}{3}a$.

Damit hat der Tetraeder ein Volumen von

$$V_T = \frac{1}{3} \cdot A \cdot h = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{6}}{3 \cdot 4 \cdot 3}a^3 = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3$$

Der Umkugelmittelpunkt es regulären Tetraeders fällt mit dessen Schwerpunkt zusammen. Dieser teilt die Schwerelinien im Verhältnis 3:1, sodass sich als Umkugelradius r der Wert $r = \frac{3}{4} \cdot h = \frac{\sqrt{6}}{4}a$ ergibt.
Damit hat die Umkugel ein Volumen von

$$V_K = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{4 \cdot 6\sqrt{6}}{3 \cdot 4^3} \cdot \pi \cdot a^3 = \frac{\sqrt{6}}{8} \cdot \pi \cdot a^3$$

sodass

$$V_K : V_T = \frac{\sqrt{6} \cdot 12}{8 \cdot \sqrt{2}} \cdot \pi = \frac{\sqrt{3} \cdot 3}{2} \cdot \pi \approx \frac{1{,}7 \cdot 3}{2} \cdot \pi = 2{,}55 \cdot \pi \approx 2{,}55 \cdot 3{,}14 = 8{,}007 \approx 8$$

ist.

Aufgabe 260936:
a) Ein regelmäßiges Tetraeder $ABCD$ soll durch eine Ebene e, die durch den Punkt A geht, in zwei Tetraeder T_1, T_2 zerlegt werden.
Skizzieren Sie eine derartige Zerlegung, z. B. in Kavalierperspektive, und beschreiben Sie, welche Lage e in Bezug auf die drei Punkte B, C, D bei derartigen Zerlegungen haben muss!
b) Beweisen Sie, dass es unter den in a) genannten Ebenen genau drei gibt, bei denen T_1 volumengleich zu T_2 wird!

Lösung von cyrix:
a) Da die Schnittfläche von e mit dem Tetraeder Seitenfläche beider Teiltetraeder T_1 und T_2 wird, muss sie insbesondere selbst dreieckig sein. Da sie a enthält, muss die Ebene e noch genau zwei weitere Schnittpunkt mit Kanten von $ABCD$ besitzen.

Da mit einem weiteren Punkt auf einer von A ausgehenden Kante gleich die gesamte weitere Gerade, auf der diese Kante liegt, in e liegen würde, also auch der Endpunkt der entsprechenden Kante, der B, C oder D ist, können wir o. B. d. A. annehmen, dass e das Dreieck $\triangle BCD$ in einer Strecke schneidet. (Die Endpunkte dieser strecke sind dann genau die beiden weiteren Eckpunkte der Schnittfläche von e mit dem Tetraeder $ABCD$.)

Diese Strecke s kann aber keine der Seitenkanten des Dreiecks $\triangle BCD$ sein, da sonst der gesamte Tetraeder $ABCD$ in einem der beiden von e aufgespannten Halbräume läge, also diesen nicht in zwei Teiltetraeder zerlegen würde. also muss s innere Punkte von $\triangle BCD$ enthalten und dieses in zwei Teilfiguren zerlegen.

Die beiden Teilkörper vom Tetraeder $ABCD$, die beim Schnitt entlang e entstehen, besitzen die beiden Teilfiguren, in die s das Dreieck $\triangle BCD$ zerlegt, als Grundfläche sowie A als Spitze. Da die Teilkörper Tetraeder sind, muss also deren Grundfläche jeweils ein Dreieck sein, sodass s das Dreieck $\triangle BCD$ in zwei Teildreiecke zerlegt.

Dies ist aber durch eine Strecke s nur genau dann möglich, wenn sie durch einen Eckpunkt des Dreiecks verläuft und die gegenüberliegende Seite in deren Innern schneidet.
Also muss e durch A sowie genau einen der drei übrigen Eckpunkte B, C oder D sowie das Innere der Strecke aus den übrigen beiden Punkten verlaufen. Dies beschreibt eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass e den Tetraeder $ABCD$ in zwei Teiltetraeder T_1 und T_2 zerlegt. Verläuft e o. B. d. A. durch B und S, wobei S ein innerer Punkt der Strecke CD ist, dann sind die beiden Tetraeder gegeben durch $ABCS$ und $ABDS$.

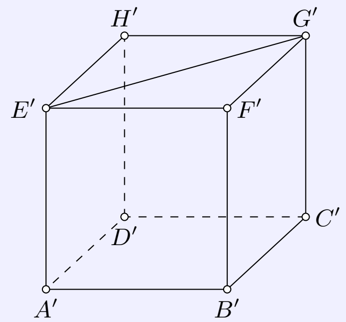
b) Es verlaufe o. B. d. A. die Ebene e durch B und den inneren Punkt S der Strecke CD. Die beiden übrigen Fälle, dass e durch C bzw. D verlaufe, sind hierzu völlig analog.

Da in beiden Teiltetraedern $ABCS$ und $ABDS$ die Höhe der Spitze A auf die Grundflächenebene $\varepsilon_{BCS} = \varepsilon_{BDS} = \varepsilon_{BCD}$ identisch ist, genauso wie in der Grundfläche die Höhe von B auf die Gerade CD der gegenüberliegenden Dreiecksseiten CS bzw. DS, verhalten sich die Volumina der beiden Tetraeder wie die Längen der Grundseiten $|CS|$ bzw. $|DS|$ in ihren Grundflächen. Insbesondere sind sie genau dann volumengleich, wenn $|CS| = |DS|$ gilt, also S der Mittelpunkt von CD ist.

Zusammenfassend erhält man also genau dann eine Zerlegung in zwei volumengleiche Tetraeder, wenn die Ebene e durch A verläuft sowie eine Seitenhalbierende des Dreiecks $\triangle BCD$ enthält. (Damit ist e eindeutig bestimmt.) Da keine zwei der Seitenhalbierenden mit A in einer gemeinsamen Ebene liegen und das Dreieck $\triangle BCD$ genau drei Seitenhalbierende besitzt (je eine durch jeden seiner Eckpunkte), gibt es also genau drei Ebenen, die A enthalten und das Tetraeder $ABCD$ in zwei volumengleiche Teiltetraeder T_1 und T_2 zerlegt, $\Box$.

Aufgabe 270936:

Auf dem Arbeitsblatt ist das Bild $A'B'C'D'E'F'G'H'$ eines Würfels $ABCDEFGH$ bei einer schrägen Parallelprojektion gegeben. Diese ist so gewählt, dass die Fläche $ABFE$ ohne Verzerrung in wahrer Größe $A'B'F'E'$ erscheint.



a) Beweisen Sie folgende Aussage:
Es gibt auf der Strecke EG genau einen Punkt P_0 mit der Eigenschaft, dass die Summe $CP_0 + P_0F$ kleiner ist als die Summe $CP + PF$ für jeden anderen Punkt P auf EG.

b) Leiten Sie eine Möglichkeit her, das Bild P_0' dieses Punktes P_0 bei der Parallelprojektion auf dem Arbeitsblatt zu konstruieren!
Führen Sie die Konstruktion durch! Beschreiben Sie ihre Konstruktion!
Hinweis: CP_0, P_0F, CP, PF bezeichnen Strecken im Raum, nicht ihre Bildstrecken in der Zeichenebene.

Lösung von cyrix:
a) Dreht man das Quadrat $EFGH$ um die Achse EG so um $90°$, dass der Bildpunkt $\tilde{F}$ von F nun senkrecht „über“ dem Mittelpunkt von EG liegt, dann liegt $\tilde{F}$ nun mit in der gleichen Ebene wie A, C, G und E. Da EG als Drehachse bei der Drehung fix blieb, gilt für jeden Punkt P auf dieser, dass $|PF| = |P\tilde{F}|$ gilt.
Es ist also P_0 derjenige Punkt auf EG (falls existent und eindeutig bestimmt), für den $|CP_0| + |P_0\tilde{F}|$ minimal wird. Dies ist aber aufgrund der Dreiecksungleichung genau dann der Fall, wenn P_0 auf der Geraden $\tilde{F}C$ liegt, denn dann ist diese Summe gleich $|C\tilde{F}|$, sonst größer. Da C und $\tilde{F}$ auf verschiedenen Seiten von EG liegen, schneiden sich die beiden Geraden EG und $C\tilde{F}$ in genau einem Punkt P_0, der die Aussage in der Aufgabenstellung erfüllt, sodass dieser existiert und eindeutig bestimmt ist, $\square$.

b) Zur Konstruktion von P_0' genügt es also $\tilde{F}'$ zu konstruieren, da auch für die Bildgeraden $E'G'$ und $C'\tilde{F}'$ gilt, dass sie sich in P_0' schneiden.

Es liegt $\tilde{F}$ senkrecht über dem Schnittpunkt M der Diagonalen des Quadrats $EFGH$ in einer Höhe von $h = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot |EF|$. Da $|E'F'| = |EF|$ gilt, kann man h leicht durch eine Hilfskonstruktion erhalten, indem etwa in das schon gegebene Quadrat $A'B'F'E'$ der Kantenlänge $|EF|$ die beiden Diagonalen eingezeichnet und der Diagonalenschnittpunkt N' ermittelt wird. Dann gilt $|E'N'| = h$.

Da die Strecke $M\tilde{F}$ parallel zu AE ist, wird also auch diese unverzerrt dargestellt, sodass man zuerst M' als Schnittpunkt der Diagonalen $E'G'$ und $H'F'$ erhält und dann dort in M' die Streckenlänge h auf einer Geraden durch M', die parallel zu $A'E'$ ist, „nach oben“ abträgt. Der damit erhaltene Punkt ist $\tilde{F}'$ und der Schnittpunkt der Geraden $E'G'$ und $C'\tilde{F}'$ schließlich der gesuchte Punkt P_0'.

Aufgabe 280933:
Untersuchen Sie, ob es zu jeder geraden Pyramide $P = ABCDS$ mit quadratischer Grundfläche $ABCD$ eine Ebene e so gibt, dass die Schnittfigur von P mit e ein gleichseitiges Dreieck ist!
Hinweis: Gibt es nicht zu jeder Pyramide P eine solche Ebene e, so ist für eine Pyramide P diese Unmöglichkeit zu beweisen; gibt es aber zu jeder Pyramide eine solche Ebene e, so ist anzugeben, wie eine Ebene e gefunden werden kann und dass jede so gefundene Ebene e die geforderte Bedingung erfüllt.

Lösung von cyrix:
Es gibt zu jeder solcher Pyramide eine solche Ebene:
Da P eine gerade Pyramide ist, sind alle dreieckigen Seitenflächen von P zueinander kongruente gleichschenklige Dreiecke. Es sei a die Kantenlänge des Quadrats $ABCD$ (und damit Basislänge in den gleichschenkligen Dreiecken $\triangle ABS$ und $\triangle DAS$) sowie $0° < \alpha < 45°$ die Größe des Basiswinkels in den Seitenflächen.
Damit ist die Länge h der Höhe von S in den „Seitendreiecken“ nach der Definition des Tangens im rechtwinkligen Dreieck gleich $h = \frac{a}{2} \cdot \tan\alpha > 0$, da die Höhe mit der Seitenhalbierenden zusammenfällt, und die Länge s der von der Spitze S der Pyramide ausgehenden Kanten mit dem Satz des Pythagoras gleich $s = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} > 0$.

Es sei $0 \leq \beta \leq 90°$ der Winkel, der $\sin\beta = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{2}}$ erfüllt. Wegen $0 < \alpha < 45°$ ist $0 < \sin\alpha < \frac{\sqrt{2}}{2}$, also $0 < \sin\beta < \frac{1}{2}$ und damit sogar $0 < \beta < 30°$. Insbesondere ist auch

$$180° > \gamma := 180° - \alpha - \beta > 180° - 45° - 30° = 105°$$

sodass sich ein stumpfwinkliges Dreieck mit den Innenwinkeln α, β und γ bilden lässt. Außerdem gilt wegen $90° < \gamma < 180°$, dass $\cos\gamma$ negativ ist. Schließlich sei f eine reelle Zahl, die definiert ist als $f := \sqrt{3 - 2\sqrt{2}\cos\gamma}$, was wegen $\cos\gamma < 0$ eine wohldefinierte, positive reelle Zahl ist.

Es sei nun $0 < x < a$ eine Länge mit $f \cdot x < s$. Wir betrachten die Punkte S_1 auf der Strecke AB und S_2 auf der Strecke DA mit $|AS_1| = |AS_2| = x$. (Wegen $0 < x < a$ liegen diese Punkte im Innern der jeweils entsprechenden Strecke.) Dann gilt (wegen des rechten Winkels bei A) offenbar $|S_1S_2| = \sqrt{2}x$.

Schließlich sei S_3 der Schnittpunkt des Kreises in der Ebene der Seitenfläche SAB um S_1 mit Radius $\sqrt{2}x$ und dem von A ausgehenden und durch S verlaufenden Strahl. (Ein solcher Schnittpunkt muss wegen $|AS_1| = x < 2\sqrt{x}$ existieren und ist dann auch aufgrund der nur einen betrachteten Richtung der von A ausgehenden Strahlen auch eindeutig bestimmt.)
Liegt S_3 im Innern der Strecke AS, so erhält man mit einem ebenen Schnitt entlang der durch S_1, S_2, S_3 definierten Ebene e genau das nach Konstruktion gleichseitige Dreieck $\triangle S_1S_2S_3$ mit Kantenlänge $\sqrt{2}x$, da nicht nur $|S_1S_2| = \sqrt{2}x = |S_3S_1|$, sondern aus Symmetriegründen auch $|S_3S_2| = |S_3S_1| = \sqrt{2}x$ gilt.

Wir zeigen nun, dass S_3 im Innern der Strecke AS liegt, indem wir das Dreieck $\triangle AS_1S_3$ betrachten und die Streckenlänge $|AS_3|$ berechnen. Dazu berechnen wir erst dessen Innenwinkel:

Es ist $\angle S_1AS_3 = \angle BAS = \alpha$ und nach dem Sinussatz

$$\frac{\sin \angle AS_3S_1}{|AS_1|} = \frac{\sin \angle S_1AS_3}{|S_1S_3|}.$$

Setzt man hierin die schon bekannten Größen $|AS_1| = x$, $|S_1S_3| = \sqrt{2}x$ und $\angle S_1AS_3 = \alpha$ ein, erhält man

$$\sin \angle S_1AS_3 = \frac{x}{\sqrt{2}x} \cdot \sin \alpha = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{2}} = \sin \beta,$$

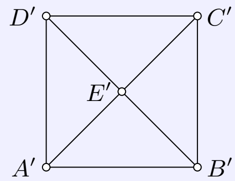
also wegen $\beta < \alpha < 90°$ (der kleineren Seite $|AS_1| = x < \sqrt{2}x = |S_1S_3|$ liegt auch der kleinere Winkel gegenüber) auch $\angle S_1AS_3 = \beta$. Nach der Innenwinkelsumme im Dreieck $\triangle AS_1S_3$ ist damit schließlich auch $\angle S_3S_1A = \gamma$, sodass wir seine drei Innenwinkel schon kennen.
Nach dem Kosinussatz in diesem Dreieck gilt dann

$$|AS_3| = \sqrt{|AS_1|^2 + |S_1S_3|^2 - 2 \cdot |AS_1| \cdot |S_1S_3| \cdot \cos \gamma} = \sqrt{x^2 + 2x^2 - 2 \cdot x \cdot \sqrt{2}x \cdot \cos \gamma} =$$

$$= x \cdot \sqrt{3 - 2\sqrt{2} \cos \gamma} = f \cdot x < s = |AS|,$$

sodass S_3 tatsächlich im Innern der Strecke AS liegt und man durch S_1, S_2 und S_3 die Ebene e definieren kann, die beim Schnitt mit P die Schnittfläche des gleichseitigen Dreiecks $\triangle S_1S_2S_3$ erzeugt, $\square$.

Aufgabe 290933:



Von einem ebenflächig begrenzten Körper werden folgende Bedingungen gefordert:
(1) Der Körper hat genau fünf Eckpunkte A, B, C, D, E.
(2) Bei senkrechter Parallelprojektion auf eine Bildebene sind die Bildpunkte A', B', C', D', E' die Eckpunkte bzw. der Mittelpunkt eines Quadrates mit gegebener Seitenlänge a.
Blickt man in Projektionsrichtung auf die Bildebene (diese Blickrichtung sei als Richtung von „oben“ nach „unten“ bezeichnet), so sind die Eckpunkte und Kanten in gleicher Weise unverdeckt sichtbar, wie in der Abbildung angegeben.
(3) Die durch A, B, C gehende Ebene ε ist parallel zu der in (2) genannten Bildebene.
(4) Der Punkt D liegt „oberhalb“ der Ebene ε im Abstand $\frac{a}{2}$ von ihr.
(5) Der Punkt E liegt „oberhalb“der Ebene ε im Abstand a von ihr.
(6) Der Körper hat das Volumen $\frac{1}{4}a^3$.
Zeigen Sie, dass der Körper durch diese Bedingungen eindeutig bestimmt ist, und zeichnen Sie diesen Körper in schräger Parallelprojektion!

Lösung von cyrix:
Da laut Bedingung (3) die Ebene ε parallel zur Bildebene ist und sonst in den weiteren Bedingungen nur von ε die Rede ist, können wir o. B. d. A. die Bildebene mit ε – und diese mit der xy-Ebene – identifizieren. Legen wir dort noch A in den Koordinatenursprung sowie B und C geeignet, dass sie die weiteren Eckpunkte des Quadrats darstellen, erhalten wir also aus den Bedingungen (2) bis (5) die Koordinaten aller fünf Punkte A bis E, die im Folgenden angegeben werden:

$$A(0{,}0{,}0), \quad B(a{,}0{,}0), \quad C(a{,}a{,}0), \quad D\left(0{,}a{,}\frac{a}{2}\right), \quad E\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, a\right)$$

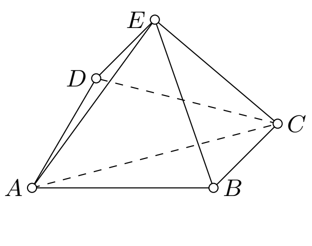
Aus der Zeichnung ergibt sich, dass alle vier Punkte A bis D jeweils mit E durch eine Kante verbunden sind. Damit lässt sich der aus allen fünf Punkten bestehende Körper auffassen als die Vereinigung der beiden Tetraeder $ABCE$ und $ACED$. Diese beiden Tetraeder besitzen die gemeinsame Fläche $\triangle ACE$, jedoch keine gemeinsamen inneren Punkte, sodass sich das Volumen des Gesamtkörpers aus der Summe der Volumina der beiden Tetraeder berechnet.

Zur Berechnung des Volumens des Tetraeders $ABCE$ betrachten wir zuerst desen Grundfläche $\triangle ABC$. Dieses ist gleichschenklig rechtwinklig mit Kathetenlänge a, sodass es einen Flächeninhalt von $\frac{1}{2} \cdot a \cdot a = \frac{1}{2} \cdot a^2$ besitzt.
Die Spitze E dieses Tetraeders hat nach (5) eine Höhe von a über der Ebene, in der die Grundfläche liegt, sodass sich für den Tetraeder ein Volumen von $V_1 = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot a^2\right) \cdot a = \frac{1}{6} \cdot a^3$ ergibt.

Zur Berechnung des Volumens des Tetraeders $ACED$ betrachten wir zuerst dessen Grundfläche $\triangle ACE$. Dieses hat eine Grundseite AC der Länge $\sqrt{2} \cdot a$ und eine Höhe des dritten Punkts E auf diese Seite der Länge a, also einen Flächeninhalt von $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot a \cdot a = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot a^2$. Die Ebene durch die Punkte A, C und E verläuft parallel zur Projektionsrichtung, sodass das Lot von D auf diese Ebene parallel zur Bildebene – und damit der xy-Ebene – verläuft, also die gleiche Länge besitzt wie die dazu parallele Strecke $D'E'$, da das Viereck $D'E'LD$, wobei L der Lotfußpunkt von D ist, ein Rechteck darstellt. Also besitzt die Spitze D des Tetraeders $ACED$ eine Höhe von $\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot a$ über der Grundfläche $\triangle ACE$, sodass sich für diesen Tetraeder ein Volumen von $V_2 = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot a^2\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot a = \frac{1}{6} \cot a^3$ ergibt.

Damit hat der Gesamtkörper $ABCDE$ das Volumen $V = V_1 + V_2 = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right) \cdot a^3 = \frac{1}{3} \cdot a^3$, im Widerspruch zu Bedingung (6). Es gibt also keinen solchen Körper.

Bemerkung:
Wäre in den Bedingungen (4) und (5) nicht eine Beschreibung der Lage von D und E relativ zur Ebene ε durch A, B und C gegeben, sondern relativ zur Bildebene, so wären die Höhen von D und E über ε – und damit der xy-Ebene – noch nicht eindeutig bestimmt.
Da die Bildebene „unterhalb“ (oder auf) der Ebene ε liegen muss, damit die Kanten des Dreiecks $\triangle ABC$ sichtbar sind und E „oberhalb“ (oder auf) der Ebene ε liegen muss, damit die Kanten AE, BE und CE sichtbar sind, gilt dann, dass E die Höhe h „über“ ε besitzt, wobei $0 \leq a - h \leq a$ der Abstand der Ebene ε zur Bildebene sei.
Der Tetraeder $ABCE$ hätte dann nur noch das Volumen $V_1 = \frac{1}{6} \cdot a^2 \cdot h$ und der Tetraeder $ACED$ analog das Volumen $V_2 = \frac{1}{6} \cdot a^2 \cdot h$, sodass sich für den Gesamtkörper ein Volumen von $V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h$ ergäbe, was mit Bedingung (6) auf $h = \frac{3}{4} \cdot a$ und damit die eindeutig bestimmten Koordinaten $E\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{3}{4} \cdot a\right)$ und $D\left(0{,}a{,}\frac{a}{4}\right)$ führt.
Eine Darstellung dieses Körpers kann man nun leicht aus den Koordinaten seiner Eckpunkte erhalten.



Aufgabe 340936:
Es sei $ABCD$ ein (nicht notwendig regelmäßiges) Tetraeder, bei dem die vier Tetraederflächen ABC, ABD, ACD und BCD alle einander kongruent sind.
Ferner sei h die Länge der auf einer der vier Tetraederflächen senkrechten Höhe, und P sei ein Punkt im Innern des Tetraeders $ABCD$.
Man beweise, dass unter diesen Voraussetzungen stets die folgende Aussage gilt:
Die Summe der Abstände von P zu den vier Tetraederflächen beträgt h.
Hinweis:
Der Abstand eines Punktes zu einer begrenzten ebenen Fläche werde definiert als die Länge des Lotes von diesem Punkt auf die ebene, in der die Fläche liegt. Das gelte auch dann, wenn der Fußpunkt des Lotes (zwar in der Ebene, aber) außerhalb der Begrenzung der ebenen Fläche liegt.
In diesem Sinne wird auch die auf einer Tetraederfläche senkrechte Höhe stets als Lot von der Gegenecke auf die Ebene verstanden, in der die Tetraederfläche liegt.

Lösung von cyrix:
Es sei A der Flächeninhalt einer (und damit jeder der) Tetraederfläche(n) und V das Volumen des Tetraeders $ABCD$. Dann gilt $V = \frac{1}{3} \cdot A \cdot h$.

Das Tetraeder $ABCD$ lässt sich durch die Verbindungsstrecken von P zu den vier Eckpunkten vollständig in die vier Tetraeder $ABCP$, $ABDP$, $ACDP$ und $BCDP$ zerlegen, deren Volumina V_1, V_2, V_3 und V_4 bezeichnet seien. Dann gilt $V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4$.
Seien weiterhin h_1, h_2, h_3 und h_4 die Längen der Höhen von P auf die Tetraederflächen ABC, ABD, ACD bzw. BCD, so gilt wegen der Kongruenz dieser vier Tetraederflächen $V_i = \frac{1}{3} \cdot A \cdot h_i$ für alle $i = 1,2,3,4$. Insbesondere ist also

$$\frac{1}{3} \cdot A \cdot h = V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = \frac{1}{3} \cdot A \cdot (h_1 + h_2 + h_3 + h_4)$$

und damit wegen $A \neq 0$ schließlich $h = h_1 + h_2 + h_3 + h_4$, $\square$.

Aufgabe 340945:
Einem regelmäßigen Tetraeder $ABCD$ wird die Inkugel K einbeschrieben (das ist diejenige Kugel, die alle vier Dreiecksflächen ABC, ABD, ACD, BCD berührt).
Dieser Kugel wird ein zweiter regelmäßiger Tetraeder $PQRS$ einbeschrieben (d. h., seine Ecken P, Q, R, S liegen alle auf der Oberfläche der Kugel K).
Welches Verhältnis $V_2 : V_1$ bildet das Volumen V_2 eines solchen Tetraeders $PQRS$ mit dem Volumen V_1 von $ABCD$?

Lösung von cyrix:
In- und Umkugelmittelpunkt eines regelmäßigen Tetraeders fallen mit dem Schnittpunkt seiner Schwerelinien zusammen. Da sich diese im Verhältnis 3:1 schneiden und senkrecht auf den jeweiligen Seitenflächen stehen, ist also der Umkugelradius eines Tetraeders genau dreimal so groß wie sein Inkugelradius.

Da der Inkugelradius r_1 von $ABCD$ genau dem Umkugelradius von $PQRS$ entspricht, beträgt also dessen Inkugelradius r_2 genau $\frac{1}{3}r_1$.
Mittels Strahlensatz folgt schnell, dass die Kantenlängen und Inkugelradien von regelmäßigen Tetraedern im gleichen Verhältnis stehen, ihre Volumina aber in der dritten Potenz dieses Verhältnisses. Also gilt

$$V_2 : V_1 = (r_2 : r_1)^3 = (1 : 3)^3 = 1^3 : 3^3 = 1 : 27$$

III Kombinatorik

III.I Kryptogramme; Zahlen in Figuren eintragen

I Runde 1

Aufgabe 010914:
Jeder Buchstabe entspricht einer der Ziffern von 0 bis 9, gleiche Buchstaben bedeuten gleiche, verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern.

```
 OTTO    MAIS    OTTO    MAIS    OTTO
-ROSE   -SALZ   -SALZ   -ROSE   -MAIS
 4709    2963    3497    4175     534
```

Lösung von Christiane Czech:
In der letzten Gleichung muss es beim Übergang von der 2. zur 1. Stelle einen Übertrag geben, da $M \neq 0$. Also ist $M + 1 = O$. Da die Subtraktion in der letzten Stelle der ersten Gleichung eine 9 ergibt, gilt $O + 1 = E$. Die Betrachtung der nachfolgenden Stelle ergibt $S + 1 = T$. Wegen $L \neq T$ gibt es in der 3. Gleichung beim Übergang von der 4. zur 3. Stelle keinen Übertrag, also gilt $T + 1 = L$ und $7 + Z \leq 9$. Also ist $Z \in \{0, 1, 2\}$. Wäre $Z = 2$, so ist $O = 7 + Z = 9$ und $E = O + 1 = 10$, was nicht möglich ist.
Wäre $Z = 1$, so wäre $O = 7+Z = 8$, wegen der 2. Gleichung $S = 4$ und mit obigen Betrachtungen $T = 5$ und $L = 6$. Die 3. Gleichung hätte dann die Form

$$8558 - 4A61 = 3497$$

Dann gäbe es keine Möglichkeit für A. Damit bleibt für den Wert von Z nur 0 übrig. Dies führt zunächst zu $O = 7$, $S = 3$, $M = 6$, $E = 8$, $T = 4$ und $L = 5$ und die Gleichungen erhalten die Form

```
 7447    6913    7447    6913    7447
-2738   -3950   -3950   -2738   -6913
 4709    2963    3497    4175     534
```

Also gilt weiterhin $R = 2$, $I = 1$ und $A = 9$.

Aufgabe 020916:
Bei der folgenden Divisionsaufgabe sind die fehlenden Ziffern zu ergänzen! Wie wurden die Ziffern ermittelt? (Begründung!)

```
* * * * * * * *  :  * * *  =  * * * * *
  * * *
      * * * *
        * * *
        * * * *
        8 * * *
              0
```

Lösung von André Lanka:

```
  * * * * * * * *  :  * * *  =  * * * * *
    * * *
→       * * * *
          * * *
          * * * *
          8 * * *
                0
```

Aus der markierten Zeile und den beiden nächsten können wir schlussfolgern:

$$\begin{array}{cccccccccccccccccc}
\ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & : & \ast & \ast & \ast & = & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast \\
 & \ast & \ast & \ast & & & & & & & & & & & & & & \\ \cline{1-4}
 & & & 1 & \ast & \ast & \ast & & & & & & & & & & & \\
 & & & & \ast & \ast & \ast & & & & & & & & & & & \\ \cline{4-7}
 & & & & \ast & \ast & \ast & \ast & & & & & & & & & & \\
 & & & & 8 & \ast & \ast & \ast & & & & & & & & & & \\ \cline{5-8}
 & & & & & & & 0 & & & & & & & & & &
\end{array}$$

Und daraus wiederum:

$$\begin{array}{cccccccccccccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & \ast & \ast & \ast & \ast & : & \ast & \ast & \ast & = & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast \\
 & 9 & 9 & 9 & & & & & & & & & & & & & & \\ \cline{1-4}
 & & & 1 & \ast & \ast & \ast & & & & & & & & & & & \\
 & & & & \ast & \ast & \ast & & & & & & & & & & & \\ \cline{4-7}
 & & & & \ast & \ast & \ast & \ast & & & & & & & & & & \\
 & & & & 8 & \ast & \ast & \ast & & & & & & & & & & \\ \cline{5-8}
 & & & & & & & 0 & & & & & & & & & &
\end{array}$$

Für den Teiler kommen sind nur noch 333, 666 und 999 möglich. Wegen der eingetragenen 8 fallen die ersten beiden Möglichkeiten heraus.

$$\begin{array}{cccccccccccccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & \ast & \ast & \ast & \ast & : & 9 & 9 & 9 & = & 1 & 0 & 0 & \ast & 9 \\
 & 9 & 9 & 9 & & & & & & & & & & & & & & \\ \cline{1-4}
 & & & 1 & \ast & \ast & \ast & & & & & & & & & & & \\
 & & & & 9 & 9 & 9 & & & & & & & & & & & \\ \cline{4-7}
 & & & & \ast & \ast & \ast & \ast & & & & & & & & & & \\
 & & & & 8 & 9 & 9 & 1 & & & & & & & & & & \\ \cline{5-8}
 & & & & & & & 0 & & & & & & & & & &
\end{array}$$

Und schließlich:

$$\begin{array}{cccccccccccccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 8 & 9 & 8 & 1 & : & 9 & 9 & 9 & = & 1 & 0 & 0 & 1 & 9 \\
 & 9 & 9 & 9 & & & & & & & & & & & & & & \\ \cline{1-4}
 & & & 1 & 8 & 9 & 8 & & & & & & & & & & & \\
 & & & & 9 & 9 & 9 & & & & & & & & & & & \\ \cline{4-7}
 & & & & 8 & 9 & 9 & 1 & & & & & & & & & & \\
 & & & & 8 & 9 & 9 & 1 & & & & & & & & & & \\ \cline{5-8}
 & & & & & & & 0 & & & & & & & & & &
\end{array}$$

Aufgabe 080914:
In

$$\begin{array}{cccccc}
1 & \ast & \ast & . & \ast & \ast \\ \hline
 & \ast & \ast & \ast & 1 & \\
 & & \ast & \ast & \ast & 1 \\ \hline
 & \ast & \ast & \ast & 1 & \ast
\end{array}$$

sind die Sternchen durch (nicht notwendig einander gleiche) Ziffern so zu ersetzen, dass eine richtig gelöste Multiplikationsaufgabe entsteht.

Geben Sie alle Möglichkeiten hierfür an!

Lösung von Manuela Kugel:
Ansatz:

$$\begin{array}{cccccc}
1 & a & b & \cdot & c & d \\ \hline
 & e & f & g & 1 & \\
 & & h & i & j & 1 \\ \hline
 & k & \ell & m & 1 & n
\end{array}$$

Dabei sind $a, \dots ,n$ jeweils Ziffern 0 bis 9, wobei unterschiedliche Variablen denselben Wert haben dürfen. Offensichtlich muss dann $n = 1$ und $g = 0$ gelten, d. h., eine Teilaufgabe lautet $1ab \cdot d = ef01$. Welche Zahlen erfüllen diese Bedingungen?

Die Ziffern b und d müssen jeweils ungerade sein, weil nur das Produkt zweier ungerader Zahlen wieder ungerade ist. Das Produkt zweier natürlicher Zahlen ≤ 9 endet auf 1 in genau den Fällen: $1 \cdot 1 = 1$, $3 \cdot 7 = 21$, $7 \cdot 3 = 21$, $9 \cdot 9 = 81$.

Nun werden die obigen Fälle diskutiert:

1. $b = 1$, $d = 1$
   $1a1 \cdot 1 = ef01 \Rightarrow e = 0, a = 0, f = 1 \Rightarrow 101 \cdot 1 = 0101$
   $101 \cdot c = hij1 \Rightarrow c = 1, h = 0, i = 1, j = 0 \Rightarrow 101 \cdot 1 = 0101$

2. $b = 3$, $d = 7$
   $1a3 \cdot 7 = ef01 \Rightarrow a = 4, e = 1, f = 0 \Rightarrow 141 \cdot 7 = 1001$
   $143 \cdot c = hij1 \Rightarrow c = 7, h = 1, i = 0, j = 0 \Rightarrow 141 \cdot 7 = 1001$

3. $b = 7$, $d = 3$
   $1a7 \cdot 3 = ef01 \Rightarrow a = 6, e = 0, f = 5 \Rightarrow 167 \cdot 3 = 0501$
   $167 \cdot c = hij1 \Rightarrow c = 3, h = 0, i = 5, j = 0 \Rightarrow 167 \cdot 3 = 0501$

4. $b = 9$, $d = 9$
   $1a9 \cdot 9 = ef01 \Rightarrow a = 8, e = 1, f = 7 \Rightarrow 189 \cdot 9 = 1701$
   $189 \cdot c = hij1 \Rightarrow c = 9, h = 1, i = 7, j = 0 \Rightarrow 189 \cdot 9 = 1701$

Damit lauten die 4 Lösungen wie folgt:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 1 & \cdot & 1 & 1 \\ \hline & 0 & 1 & 0 & 1 & \\ & & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{cccccc} 1 & 4 & 3 & \cdot & 7 & 7 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 1 & \\ & & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline & 1 & 8 & 7 & 1 & 1 \end{array}$$

sowie

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 8 & 9 & \cdot & 9 & 9 \\ \hline & 1 & 7 & 0 & 1 & \\ & & 1 & 7 & 0 & 1 \\ \hline & 1 & 8 & 7 & 1 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{cccccc} 1 & 6 & 7 & \cdot & 3 & 3 \\ \hline & 0 & 5 & 0 & 1 & \\ & & 0 & 5 & 0 & 1 \\ \hline & 0 & 5 & 5 & 1 & 1 \end{array}$$

Aufgabe 130913:
In das nebenstehende Quadrat sollen die Zahlen 1, 2, 3 und 4 so eingetragen werden, dass in jeder Zeile, in jeder Spalte und in jeder der beiden Diagonalen jede der vier Zahlen genau einmal vorkommt. An drei Stellen sind bereits Zahlen eingetragen und sollen unverändert stehenbleiben.

Man untersuche, ob eine solche Eintragung möglich ist und ob nur eine einzige Eintragungsmöglichkeit existiert. Ist dies der Fall, so führe man die Eintragung durch.

Hinweis: Zur Beschreibung des Lösungsweges sind die am Rand des Quadrates eingetragenen Buchstaben zu benutzen.

Beispiel: Im Feld bC ist bereits die Zahl 2 eingetragen.

a	1			
b			2	
c				3
d				
	A	B	C	D

Lösung von Manuela Kugel:

Für die Zahl 2 kommt in Reihe a nur das Feld Ba in Frage, da Ca wegen Spalte und Da wegen Diagonale nicht 2 sein kann. Dann muss die Zahl 3 in das Kästchen Ca, weil sie nicht in $Ba = 2$ und Da (Spalte) stehen kann. Die 4 kommt dann in Da. Das sieht so aus:

a	1	2	3	4
b	0	0	2	0
c	0	0	0	3
d	0	0	0	0
	A	B	C	D

Es folgt (eindeutig) $Dd = 2$ (Dd kann nicht 1 wegen Diagonale und 3 bzw. 4 wegen Spalte sein). Db wird 1 (Spalte). Außerdem folgt $Ad = 3$ ($Ad \neq 1$ wegen Spalte, $Ad \neq 2$ wegen Zeile, $Ad \neq 4$ wegen Diagonale) und $Bc = 1$ (Diagonale). Das sieht dann so aus:

a	1	2	3	4
b	0	0	2	1
c	0	1	0	3
d	3	0	0	2
	A	B	C	D

Weiterhin muss $Ab = 4$ ($Ab \neq 1$, $Ab \neq 3$ wegen Spalte; $Ab \neq 2$ wegen Zeile) und $Ac = 2$ (Spalte) gelten. Entsprechend folgt $Bb = 3$ (Zeile) und $Bd = 4$ (Spalte). Dann gilt aber auch $Cc = 4$ (Zeile) und $Cd = 1$ (Spalte). Die vollständige und eindeutige Lösung sieht dann so aus:

a	1	2	3	4
b	4	3	2	1
c	2	1	4	3
d	3	4	1	2
	A	B	C	D

Es existieren übrigens ganze 48 Möglichkeiten, ein 4×4 Quadrat mit den genannten Eigenschaften (ohne die Vorbelegung) zu konstruieren.

Aufgabe 150912:

In

$$\begin{array}{ccccc} & \text{H} & \text{A} & \text{U} & \text{S} \\ & \text{H} & \text{A} & \text{U} & \text{S} \\ \hline \text{S} & \text{T} & \text{A} & \text{D} & \text{T} \end{array}$$

sollen die Buchstaben so durch Ziffern ersetzt werden, dass eine richtig gelöste Additionsaufgabe entsteht. Dabei sollen für gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und für verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern eingesetzt werden.

Geben Sie alle Lösungen dafür an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

I. Angenommen, bei einer Ersetzung entstehe eine Lösung.
Dann gilt für diese Ersetzung $S = 1$; denn die fünfstellige natürliche Zahl „STADT" kann nicht mit 0 beginnen, und die Summe zweier vierstelliger Zahlen ist kleiner als 20000.
Ferner gilt $S + S = T$, also $T = 2$. Somit muss $H + H = 12$ gelten; denn würde dazu noch ein Übertrag von der Hunderterspalte treten, denn könnte dieser nur 1 sein, was stets auf eine ungerade, also von 12 verschiedene Summe $H + H + 1$ führen würde.

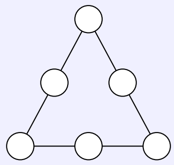
Also gilt $H = 6$. Damit gilt $A \leq 4$, da sonst ein Übertrag in die Tausenderspalte auftreten würde.
Wäre nun mit Übertrag aus der Zehnerspalte $A + A + 1 = A$, so würde $A = -1$ folgen. Also kann kein solcher Übertrag auftreten, und man erhält $A + A = A$, also $A = 0$ sowie $U \leq 4$.
Da verschiedene Buchstaben verschiedenen Ziffern entsprechen und von den Zahlen 0, 1, 2. 3, 4 bereits 0, 1, 2 vergeben sind, kann nur $U = 3$ oder $U = 4$ sein. Für $U = 3$ erhielte man $D = 6$, was wegen $H = 6$ den Regeln der Aufgabe widerspricht. Also gilt $U = 4$ und $D = 8$.
Somit kann nur die Ersetzung $A = 0$, $D = 8$, $H = 6$, $S = 1$, $T = 2$, $U = 4$ zu einer Lösung führen.

II. In der Tut sind bei dieser Ersetzung verschiedene Buchstaben stets durch verschiedene Ziffern ersetzt, und da ferner die entstehende Additionsaufgabe

$$\begin{array}{ccccc} & 6 & 0 & 4 & 1 \\ & 6 & 0 & 4 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 0 & 8 & 2 \end{array}$$

richtig gelöst ist, erfüllt diese Ersetzung alle gestellten Forderungen.

Aufgabe 270911:



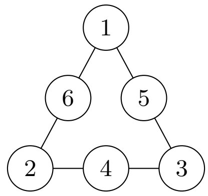
In die Kreisfelder der Figur sollen die Zahlen 1 bis 6 so eingetragen werden, dass jede Zahl genau einmal vorkommt, und dass die Zahlen auf jeder Dreiecksseite die gleiche Summe ergeben.

Geben Sie eine solche Eintragung an! Überprüfen Sie, ob die von Ihnen angegebene Eintragung alle geforderten Bedingungen erfüllt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Abbildung zeigt z. B. eine solche Lösung, da jede Zahl genau einmal vorkommt und für die Summen gilt:

$$1 + 6 + 2 = 1 + 5 + 3 = 2 + 3 + 4$$

Es gibt weitere Lösungen.



Aufgabe 280911:
In ein Quadrat mit 4×4 Feldern sollen die Zahlen von 1 bis 16 so eingetragen werden, dass jede der Zahlen genau einmal auftritt und dass sich bei der Addition der Zahlen in jeder der vier Zeilen, der vier Spalten und der beiden Diagonalen jeweils dieselbe Summe ergibt!

Versuchen Sie, eine solche Eintragung zu finden!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Eine Lösung zeigt die Abbildung.

Bemerkung: Solche Quadrate nennt man magische Quadrate. Sie sind schon lange bekannt. Im Hintergrund des 1514 geschaffenen Kupferstichs „Die Melancholie“ hat Albrecht Dürer z. B. dieses magische Quadrat eingetragen.

Schon im 17. Jahrhundert wusste man, dass es 880 verschiedene derartige Quadrate gibt.

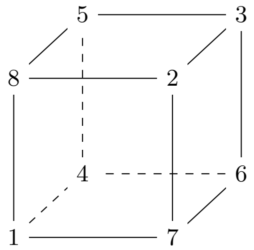
Aufgabe 310911:
Denkt man sich an jede Ecke eines räumlichen Körpers eine Zahl geschrieben, so bezeichnen wir für jede Seitenfläche dieses Körpers als „Flächensumme“ dieser Seitenfläche die Summe aus den Zahlen, die an die Ecken dieser Seitenflächen geschrieben wurden.

a) Stellen Sie fest, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist:

Wenn man an die Ecken eines Tetraeders $ABCD$ in irgendeiner Reihenfolge die Zahlen 1, 2, 3, 4 schreibt, so sind alle vier Flächensummen des Tetraeders einander gleich.

b) Untersuchen Sie, ob es möglich ist, an die Ecken eines Würfels die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 in einer solchen Reihenfolge zu schreiben, dass alle sechs Flächensummen des Würfels einander gleich sind!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Die genannte Aussage ist falsch; denn eine Seitenfläche des Tetraeders muss die Flächensumme $1+2+3=6$ haben, eine anderen Seitenfläche z. B. die Flächensumme $1+2+4=7$.



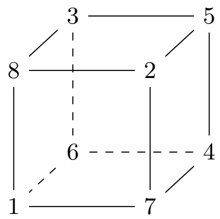
b) Es ist möglich, die Zahlen in der genannten Weise an die Ecken eines Würfels zu schreiben; eine solche Möglichkeit zeigt die Abbildung; denn bei ihr entstehen die Flächensummen

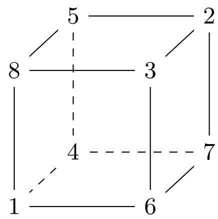
$$\begin{array}{lcl} 1+7+6+4=18 & ; & 1+7+2+8=18 \\ 7+6+3+2=18 & ; & 6+4+5+3=18 \\ 4+1+8+5=18 & ; & 8+2+3+5=18 \end{array}$$

Bemerkung:

Um eine solche Reihenfolge zu finden, kann man zunächst berücksichtigen, dass das Sechsfache der einheitlichen Flächensumme s gleich dem Dreifachen von $1+2+3+4+5+6+7+8=36$ sein muss, da beim Addieren der sechs einander gleichen Flächensummen jede Ecke genau dreimal erfasst wird. Also muss $s=18$ sein.

Dann kann man alle Zerlegungen von 18 in eine Summe aus vier verschiedenen unter den Zahlen 1, 2, ..., 8 bilden und eine Verteilung suchen, bei der sechs solche Zerlegungen als Flächensummen auftreten. Man kann zeigen, dass es bis Spiegelung und Drehung genau die drei Verteilungen (obere Abbildung und folgende zwei Abbildungen) gibt.





Aufgabe 310912:
Werner beschäftigt sich mit dem Herstellen von Kryptogrammen in Gestalt einer Additionsaufgabe. Bei einem solchen Kryptogramm sollen - unter Verwendung des dekadischen Zahlensystems - gleiche Buchstaben durch gleiche Ziffern und ungleiche Buchstaben durch ungleiche Ziffern ersetzt werden, so dass dann eine richtig gerechnete Addition vorliegt.

Werner betrachtet die folgenden drei Kryptogramme:

$$\begin{array}{cccccc} & J & A & C & K & E \\ + & & H & O & S & E \\ \hline = & A & N & Z & U & G \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} & M & A & N & N \\ + & F & R & A & U \\ \hline = & P & A & A & R \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} & & M & I & R \\ + & E & M & I & R \\ \hline = & R & E & I & M \end{array}$$

Stellen Sie für jedes dieser drei Kryptogramme fest, ob es eine Lösung hat, und ermitteln Sie, wenn das der Fall ist, alle Lösungen des betreffenden Kryptogramms!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

a) Dieses Kryptogramm hat keine Lösung, da es mehr als 10 ungleiche Buchstaben enthält.

b) Angenommen, eine Ersetzung der Buchstaben durch Ziffern sei eine Lösung des Kryptogramms. Dann folgt für sie:

Es ist $N \neq 0$, da sich in der Einerstelle aus $N = 0$ der Widerspruch $U = R$ ergäbe.

Also kann die in der Zehnerstelle auszuführende Addition von N, A und einem eventuellen Übertrag nur dann zu einer Zahl mit der letzten Ziffer A führen, wenn ein solcher Übertrag aus der Einerstelle vorliegt und $N = 9$ ist.

Das führt aber zu einem Übertrag aus der Zehnerstelle in die Hunderterstelle, und die dort auszuführende Addition kann nur dann zu einer Zahl mir der letzten Ziffer A führen, wenn auch $R = 9$ ist. Damit hat die Annahme einer Ersetzung, die Lösung ist, zu einem Widerspruch geführt; folglich hat das Kryptogramm keine Lösung.

c) I) Angenommen, eine Ersetzung sei eine Lösung des Kryptogramms. Dann folgt für sie:

An der Tausenderstelle liegt wegen $E \neq R$ ein Übertrag aus der Hunderterstelle vor; es gilt $M + M \geq 9 \quad (1)$ sowie $E + 1 = R \quad (2)$.

Aus (1) folgt $M > 4$; ferner ist an der Einerstelle ersichtlich, dass M gerade ist, also $M = 6$ oder $M = 8$ sein muss. Führt man für diese Werte die Addition an der Hunderterstelle durch (und zwar entweder ohne oder mit Übertrag aus der Zehnerstelle) und wendet dann noch (2) an, so erhält man: Es gibt höchstens die folgenden Möglichkeiten:

M	E	R
6	2	3
6	3	4
8	6	7
8	7	8

Von ihnen widersprechen aber die zweite, dritte und vierte den Angaben an der Einerstellen. Die vierte enthält auch den Widerspruch $M = R$. Also kann nur die erste Möglichkeit vorliegen. Bei ihr entsteht kein Übertrag aus der Einerstelle in die Zehnerstelle; somit hat die Zahl $I + I$ die letzte Ziffer I, was nur für $I = 0$ zutrifft.

Also kann nur die Ersetzung $M = 6$, $E = 2$, $R = 3$, $I = 0$ das Kryptogramm lösen.

II) Sie erfüllt die Gleichheits- und Ungleichheitsforderungen, und die Addition

$$\begin{array}{ccccc} & & 6 & 0 & 3 \\ + & 2 & 6 & 0 & 3 \\ \hline = & 3 & 2 & 0 & 6 \end{array}$$

ist richtig gerechnet.

Damit ist gezeigt, dass das Kryptogramm genau diese Lösung hat.

II Runde 2

Aufgabe 150922:

	A	B	C	D	E
a	1	2	3		
b					
c				5	
d					4
e					

In das abgebildete Quadrat sollen die Ziffern 1, 2, 3, 4 und 5 so eingetragen werden, dass in jeder Zeile und Spalte und in den beiden Diagonalen jede der Ziffern von 1 bis 5 genau einmal vertreten ist. Die bereits eingetragenen Ziffern sollen dabei nicht verändert werden.
a) Geben Sie eine den Bedingungen entsprechende Eintragung an!
b) Untersuchen Sie, ob voneinander verschiedene den Bedingungen entsprechende Eintragungen möglich sind, und ermitteln Sie, wenn dies zutrifft, alle derartigen Eintragungen!
Die Buchstaben an den Rändern des Quadrates sollen die Beschreibungen des Lösungsweges erleichtern. So steht z. B. im Feld cD bereits die Ziffer 5, Kurzschreibweise cD:5.

Lösung von cyrix:
aD:4 (Zeile a, Spalten ABC besetzt; dE:4)
aE:5 (Zeile a, Spalten ABCD besetzt)
bB:5 (Hauptdiagonale: aA:1, cC:$\neq$ 5 wegen cD:5, dd:$\neq$ 5 wegen cD:5, eE:$\neq$ 5 wegen aE:5)
eC:5 (Zeile e, eA:$\neq$ 5 wegen aE:5, eB:$\neq$ 5 wegen bB:5, eD:$\neq$ 5 wegen cD:5, eE:$\neq$ 5 wegen aE:5)
dA:5 (Zeile d; in allen Spalten BCDE gibt es schon Fünfen).
cC:4 (Hauptdiagonale: aA, bB besetzt, dD:$\neq$ 4 wegen aD:4, eE:$\neq$ 4 wegen dE:4)
eB:4 (Spalte B, Zeielen ab besetzt, cB:$\neq$ 4 wegen cC:4, cd:$\neq$ 4 wegen dE:4)
bA:4 (Spalte A, in allen anderen Zeilen schon Vieren vorhanden)

Skizze:

	A	B	C	D	E
a	1	2	3	4	5
b	4	5			
c			4	5	
d	5				4
e		4	5		

Wäre bD:1, dann eA:$\neq$ 1 (Hauptdiagonale) und eD:$\neq$ 1, also eE:1 (da eB und eC schon besetzt). Dies ist aber ein Widerspruch zu aA:1 auf der Hauptdiagonalen. Also ist bD:$\neq$ 1.

eD:1 (Spalte D, bD:$\neq$ 1, aD, cD besetzt, dD:$\neq$ 1 wegen aA:1)
dB:1 (Nebendiagonale, aE, cc besetzt, bD:$\neq$ 1 wegen eD:1, eA:$\neq$ 1 wegen aA:1)
cE:1 (Zeile c, Spalten CD besetzt, Spalten AB verboten, da dort schon Einsen)
bC:1 (Zeile b, in allen anderen Spalten schon Einsen)

Skizze:

	A	B	C	D	E
a	1	2	3	4	5
b	4	5	1		
c			4	5	1
d	5	1			4
e		4	5	1	

dC:2 (Spalte C, Zeilen abce besetzt) ; dD:3 (Zeile d, Spalten ABCE besetzt)
bD:2 (Spalte D, Zeilen acde besetzt) ; bE:3 (Zeile b, Spalten ABCD besetzt)
eE:2 (Spalte E, Zeilen abcd besetzt) ; eA:3 (Zeile e, Spalten BCDE besetzt)
cA:2 (Spalte A, Zeilen abde besetzt) ; cB:3 (Zeile c, Spalten ACDE besetzt)

Damit ergibt sich notwendigerweise folgende Tabelle:

	A	B	C	D	E
a	1	2	3	4	5
b	4	5	1	2	3
c	2	3	4	5	1
d	5	1	2	3	4
e	3	4	5	1	2

Dass diese auch alle Bedingungen der Aufgabenstellung genügt, zeigt die Probe. Es existiert also nur genau diese eine Variante, die Tabelle gemäß den Vorgaben auszufüllen.

Aufgabe 160924:
In der folgenden Anordnung von Zeichen

$$\begin{array}{ccccc} \text{ab} & \text{X} & \text{ab} & = & \text{cad} \\ \text{Y} & & \text{Y} & & \text{Z} \\ \text{ae} & \text{X} & \text{ae} & = & \text{ffe} \\ \hline \text{ff} & \text{Y} & \text{ff} & = & \text{gg} \end{array}$$

sollen die einzelnen Symbole so durch Elemente des jeweiligen Grundbereichs ersetzt werden, dass jeweils wahre Aussagen entstehen.
Dabei ist der Grundbereich für die Kleinbuchstaben b, d, e die Menge der Ziffern von 0 bis 9, für a, c, f, g die Menge der Ziffern von 1 bis 9, und der Grundbereich für die Großbuchstaben X, Y, Z ist die Menge der Operationszeichen „+“, „–“, „·“ und „:“. Gleiche Symbole bedeuten dabei gleiche, verschiedene Symbole verschiedene Elemente des jeweiligen Grundbereichs.
Untersuchen Sie, ob eine solche Ersetzung möglich ist, und ermitteln Sie, wenn dies zutrifft, alle Ersetzungen mit den geforderten Eigenschaften!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
1) Angenommen, eine Ersetzung habe die geforderten Eigenschaften. Dann kann X nicht für das Pluszeichen stehen; denn wenn die Summe zweier zweistellige Zahlen eine dreistellige Zahl ist, dann muss deren erste Ziffer eine 1 sein; die Ergebnisse von

$$\text{abXab} = \text{cad} \quad \text{und} \quad \text{aeXae} = \text{ffe}$$

beginnen jedoch mit verschiedenen Ziffern.
Da ferner weder die Differenz noch der Quotient zweier zweistelliger Zahlen eine dreistellige Zahl ergeben kann, muss X für das Zeichen $\cdot$ stehen.
Aus ffYff = gg folgt wegen $ff - ff = 0$ und $ff : ff = 1$, dass Y weder das Zeichen $-$ noch das Zeichen $:$ bedeuten kann. Y steht für das Zeichen $+$.
Aus cadZffe=gg folgt, dass Z nicht für das Zeichen : stehen kann, da der Quotient zweier dreistelliger Zahlen nicht eine zweistellige Zahl sein kann. Z steht für das Zeichen $-$. Damit ergibt sich bisher

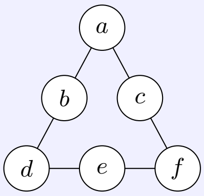
$$\begin{array}{ccccc} \text{ab} & \cdot & \text{ab} & = & \text{cad} \\ + & & + & & \text{-} \\ \text{ae} & \cdot & \text{ae} & = & \text{ffe} \\ \hline \text{ff} & + & \text{ff} & = & \text{gg} \end{array}$$

Wegen $32^2 > 1000$ ergibt sich aus ae $\cdot$ ae = ffe, dass die durch ae dargestellte Zahl höchstens 31 betragen kann. Da die Endziffern der drei Zahlen übereinstimmen, kann e nur eine der Zahlen 0, 1, 5 oder 6 darstellen.
Aus ab+ae=ff folgt, dass e nicht 0 sein kann, weil sonst b und f die gleichen Zahlen darstellen müssten.
Von den somit für ae in Frage kommenden Zahlen 15, 16, 21, 25, 26 und 31 erfüllen nur die Zahlen 15 und 21 die Bedingungen, dass an der Hunderterstelle und an der Zehnerstelle ihres Quadrates die gleiche Ziffer steht.
Wäre nun $a = 1$ und $e = 5$, dass müsste wegen ab+ae=ff mithin $f = 3$ und $b = 8$ sein. Wegen $18^2 = 324$ folgt dann aud ab $\cdot$ ab=cad der Widerspruch $a = 2$.
Für $a = 2$ und $e = 1$ folgt $f = 4$ und $b = 3$, Also kann nur die Ersetzung

$$\begin{array}{ccccc} 23 & \cdot & 23 & = & 529 \\ + & & + & & \text{-} \\ 21 & \cdot & 21 & = & 441 \\ \hline 44 & + & 44 & = & 88 \end{array}$$

allen Bedingungen der Aufgabenstellung genügen.

Aufgabe 270921:



In die Felder auf den Ecken und Seitenmittelpunkten eines gleichseitigen Dreiecks (siehe Abbildung) sollen für a, b, c, d, e, f die Zahlen von 1 bis 6 so eingetragen werden, dass jede Zahl genau einmal vorkommt und dass auf jeder Dreiecksseite die gleiche Summe entsteht.
Ermitteln Sie alle voneinander verschiedenen Eintragungen, die diese Bedingungen erfüllen!

Dabei heißen zwei Eintragungen genau dann voneinander verschieden, wenn sie weder durch Drehung noch durch Spiegelung ineinander überführt werden können.

Lösung von cyrix:
Wenn eine Eintragung die Bedingungen der Aufgabe erfüllt, dann gilt, wenn man die genannte Summe mit s bezeichnet

$$a+b+d=s \quad (1); \qquad a+c+f=s \quad (2); \qquad d+e+f=s \quad (3)$$

$$\text{sowie} \qquad a+b+c+d+e+f=1+2+3+4+5+6=21$$

Hiernach folgt durch Addition von (1), (2), (3)

$$21+a+d+f=3s \qquad ; \qquad 7+\frac{a+d+f}{3}=s \quad (4)$$

Da s (nach (1)) ganzzahlig ist, muss $a+d+f$ durch 3 teilbar sein. Das ist unter den Bedingungen der Aufgabe nur möglich, wenn für a, d, f eine der in der folgenden Tabelle genannten Angaben vorliegt. Dabei genügt es, nur die dort genannte Reihenfolge zu nehmen, da jede Umordnung der Eckfelder durch Drehung oder Spiegelung erreicht werden kann.

Anschließend enthält die Tabelle jeweils den Wert $a+d+f$, den Wert s aus (4), die Werte

$$b=s-a-d \quad (5); \qquad c=s-a-f \quad (6); \qquad e=s-d-f \quad (7)$$

sowie die Angabe, ob die Bedingung über das Vorkommen der Zahlen von 1 bis 6 erfüllt ist.

a	d	f	$a+d+f$	s	b	c	e	kommen 1 bis 6 vor ?
1	2	3	6	9	6	5	4	ja
1	2	6	9	10	7	3	2	nein
1	3	5	9	10	6	4	2	ja
1	5	6	12	11	5	4	0	nein
2	3	4	9	10	5	4	3	nein
2	4	6	12	11	5	3	1	ja
3	4	5	12	11	4	3	2	nein
4	5	6	15	12	3	2	1	ja

Da (5), (6), (7) zu (1), (2), (3) äquivalent sind, ist damit gezeigt, dass die vier mit „ja" gekennzeichneten Eintragungen alle Bedingungen der Aufgabe erfüllen.
Da sie sich in den überhaupt als a, d, f auftretenden Zahlen voneinander unterscheiden, sind sie auch sämtlich im Sinne der Aufgabenstellung voneinander verschieden. Somit sind genau diese vier (oder vier von ihnen nicht verschiedene) Eintragungen die gesuchten.

Aufgabe 230923:

$$\begin{array}{cccccc} & & \square & \square & \square & \square \\ + & & \square & \square & \square & \square \\ \hline & \square & \square & \square & \square & \square \end{array}$$

In das Schema einer Additionsaufgabe soll in jedes Kästchen eine Ziffer so eingetragen werden, dass jede der zehn Ziffern (des dekadischen Zahlensystems) genau einmal auftritt und in den vorderen Kästchen keine 0 steht. Außerdem soll genau dreimal ein Übertrag auftreten.
Ermitteln Sie alle diejenigen vierstelligen Zahlen, die unter diesen Bedingungen als dritte Zeile (Summe) dieser Aufgabe möglich sind!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn eine Eintragung die geforderten Eigenschaften hat, so folgt:
(1) Die vorderste Ziffer der gesuchten Summe kann, da die 0 dafür nicht zugelassen ist, nur die 1 sein; denn die Summe zweier dreistelliger Zahlen ist kleine als 2000.
Die 9 kann in der Summe nicht auftreten, weil die Summe zweier einstelliger Zahlen unter den gegebenen Bedingungen nicht 19 werden kann, während andererseits sowohl bei der Addition in der Einer- als auch bei der in der Zehner- und der in der Hunderterstelle ein Übertrag, also ein Additionsergebnis ≥ 10 gefordert ist.
Die 9 kann in den Summanden nicht als Zehner oder Hunderter auftreten, weil dann unter Berücksichtigung des Übertrags (der nur 1 sein kann) die Zehner bzw. Hunderterziffer des anderen Summanden wieder in der Summe auftreten würde.

(2) Daraus folgt, dass die 9 in einem der Summanden als Einer stehen muss, o. B. d. A. stehe sie also im ersten Summanden.

(3) Die 0 darf in keinem Summanden vorkommen, da sonst kein Übertrag auftreten würde. Als Zwischenergebnis halten wir fest: Im zweiten Summanden kann als Einer nicht stehen:
0 wegen (3), 1 wegen (1), 9 wegen (2), 2, denn sonst erhält man in der Summe eine 1.
Wegen (2) und (3) kann die Summe nicht auf 0 enden.

(4) Damit im Zehner oder Hunderter der Summe ein 0 auftritt, müssen zwei Ziffern (bei der Addition der Zehner- oder der Hunderterspalten) als Summe 9 ergeben. Damit verbleiben höchstens die folgenden Möglichkeiten:
Die in der letzten Spalte angegebenen Zahlen ergeben sich jeweils aus den einzigen Möglichkeiten, die drei verbleibenden Ziffern so zu kombinieren, dass die Summe von zweien um 9 größer ist als die dritte. (In den Fällen * und ** gibt es keine solchen Möglichkeiten.)

Einer des zweiten Summanden	Einer in der Summe	restliche Ziffern	mögliche Summe 9 aus zwei Summanden	möglich dritte Zeile des Schemas
3	2	0,4,5,6,7,8	4+5	1062 oder 1602
4	3	0,2,5,6,7,8	2+7	1053 oder 1503
5	4	0,2,3,6,7,8	2+7 oder 3+6	*
6	5	0,2,3,4,7,8	2+7	1035 oder 1305
7	6	0,2,3,4,5,8	4+5	1026 oder 1206
8	7	0,2,3,4,5,6	4+5 oder 3+6	**

Damit ist gezeigt, dass nur die acht in der letzten Spalte der Tabelle angegebenen Zahlen als dritte Zeile (Summe) auftreten können.

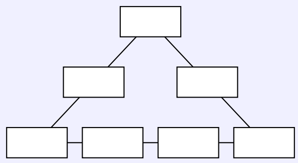
II. Sie können (unter Einhaltung aller Bedingungen der Aufgabenstellung) auftreten, wie z. B. die folgenden Eintragungen zeigen:

$$\begin{array}{cccc} & 7 & 4 & 9 \\ + & 8 & 5 & 3 \\ \hline 1 & 6 & 0 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} & 4 & 7 & 9 \\ + & 5 & 8 & 3 \\ \hline 1 & 0 & 6 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} & 8 & 2 & 9 \\ + & 6 & 7 & 4 \\ \hline 1 & 5 & 0 & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} & 2 & 9 & 9 \\ + & 7 & 6 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 5 & 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} & 4 & 2 & 9 \\ + & 8 & 7 & 6 \\ \hline 1 & 3 & 0 & 5 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} & 2 & 4 & 9 \\ + & 7 & 8 & 6 \\ \hline 1 & 0 & 3 & 5 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} & 3 & 4 & 9 \\ + & 8 & 5 & 7 \\ \hline 1 & 2 & 0 & 6 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} & 4 & 3 & 9 \\ + & 5 & 8 & 7 \\ \hline 1 & 0 & 2 & 6 \end{array}$$

Somit gibt es genau die acht in der letzten Spalte angegebenen Ergebnisse.

Aufgabe 310924:



In die Felder der Abbildung sollen die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 so eingetragen werden, dass jede Zahl genau einmal vorkommt und dass die Zahlen auf jeder Dreiecksseite die gleiche Summe ergeben. Ermitteln Sie alle derartigen Eintragungen, die nicht durch Spiegelung ineinander überführt werden können!

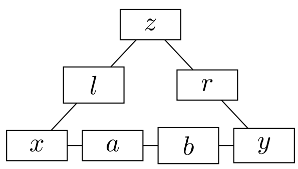
Lösung von cyrix:
Zuerst bemerken wir, dass die beiden mittleren Felder der Basis immer vertauscht werden können, ohne, dass die Figur durch Spiegelung in sich selbst überführt wird. Wir wollen deshalb im Folgenden auch o. B. d. A. voraussetzen, dass die Zahl im zweiten Feld der Basis kleiner ist als im dritten und die im ersten kleiner als die im vierten.

Sei x die Zahl, die im ersten Feld der Basis, y diejenige im vierten Feld der Basis und z diejenige in der Spitze des Dreiecks steht sowie s die Summe der Zahlen an einer Seite dieses Dreiecks. Dann ist $3s = 1+2+3+4+5+6+7+x+y+z = 28+x+y+z$, da genau die Eckfelder an zwei Seiten beteiligt sind und alle anderen Zahlen an genau einer. Wegen $6 = 1+2+3 \leq x+y+z \leq 5+6+7 = 18$ ist $34 \leq 3s \leq 46$, also, da s eine ganze Zahl ist, $12 \leq s \leq 15$.

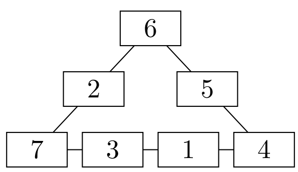
In der folgenden Tabelle geben wir für jeden möglichen Wert für s den Wert, den die Summe der Eckfelder $x+y+z$ dann annehmen muss, sowie dessen Zerlegungen in drei paarweise verschiedene Summanden zwischen 1 und 7 an:

s	x+y+z
12	8=1+2+5=1+3+4
13	11=1+3+7=1+4+6=2+3+6=2+4+5
14	14=1+6+7=2+5+7=3+4+7=3+5+6
15	17=4+6+7

Seien weiterhin mit l die Zahl im Mittelfeld des linken, r die Zahl im Mittelfeld des rechten Schenkels und mit a sowie b die Zahlen im zweiten und dritten Feld der Basis bezeichnet:



Fall 1: $s = 15$. Dann ist $x+y+z = 4+6+7$ in irgendeiner Reihenfolge. Es können aber wegen $s-6-7 = 2 < 1+2$ nicht 6 und 7 beide in der Basis stehen, sodass $y = 4$ folgt. Weiterhin kann dann wegen $s-7-4 = 4$ nicht $z = 7$ gelten, sodass $x = 7$ und $z = 6$ folgt. Dann muss $l = s-x-z = 2$ und $r = s-y-z = 5$ gelten. Es verbleiben für a und b die Zahlen 3 und 1. Tatsächlich ist dann $x+a+b+y = 15 = s$, sodass dies eine Lösung ist (bzw. durch Vertauschung von 1 und 3 dann zwei Lösungen).

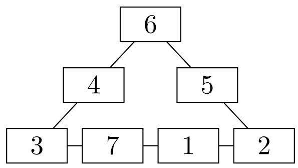


Fall 2: $s = 14$.
Dann ist $x + y + z = 14 = s$ und es müsste $l = s - x - z = y$ haben, was zu einer Doppelbelegung mit der Zahl y führen würde. Also gibt es in diesem Fall keine Lösung.

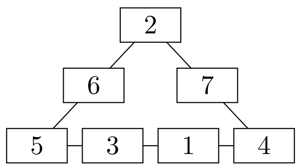
Fall 3: $s = 13$.
Fall 3.1: Es ist in irgendeiner Reihenfolge $x + y + z = 1 + 3 + 7$. Dann sind insbesondere $x + z$ und $y + z$ gerade, aber s ungerade, sodass sowohl l als auch r beide ungerade sein müssten. Es ist aber nur noch die einzige noch nicht verwendete ungerade Zahl 5, sodass in diesem Fall keine Lösung existiert.

Fall 3.2: Es ist in irgendeiner Reihenfolge $x + y + z = 1 + 4 + 6$. Dann können nicht 4 und 6 an der Basis stehen, da $s - 4 - 6 = 3 < 2 + 3$, da die 1 ja schon für ein Eckfeld vergeben wurde. Also muss $y = 1$ gelten. Es kann nicht $z = 6$ gelten, denn sonst wäre $r = s - y - z = 13 - 1 - 6 = 6 = z$. Es kann aber auch nicht $z = 4$ gelten, denn sonst wäre $r = s - y - z = 13 - 1 - 4 = 8 > 7$. Also gibt es in diesem Fall keine Lösung.

Fall 3.3: Es ist in irgendeiner Reihenfolge $x + y + z = 2 + 3 + 6$. Dann können nicht 3 und 6 in der Basis stehen, da $s - 6 - 3 = 4 < 1 + 4$, da 1 und 4 die kleinsten noch nicht vergebenen Zahlen sind. Also muss 2 in der Basis stehen und damit $y = 2$ gelten. Dann kann nicht $z = 3$ sein, da sonst $r = s - y - z = 13 - 2 - 3 = 8 > 7$ wäre. Also muss $z = 6$, $r = 5$ und $x = 3$ gelten, woraus wegen $l = s - x - z = 13 - 3 - 6 = 4$ folgt. Es verbleiben für a und b die Ziffern 7 und 1, und tatsächlich gilt auch $x + 7 + 1 + y = 3 + 7 + 1 + 2 = 13 = s$, sodass auch hier eine Lösung (bzw. nach Vertauschen von 7 und 1 eine zweite) entsteht.

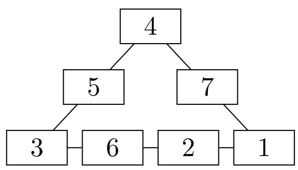


Fall 3.4: Es ist in irgendeiner Reihenfolge $x + y + z = 2 + 4 + 5$.
Dann können weder 4 noch 5 in der Spitze z stehen, da sonst $y = 2$ und $l = s - x - z = 13 - 4 - 5 = 4$ folgen würde. Also muss $z = 2$, $x = 5$ und $y = 4$ sein, woraus sofort $l = 6$ und $r = 7$ folgt, sodass für a und b noch die Ziffern 3 und 1 verbleiben. Auch hier gilt wieder $x + a + b + y = 5 + 3 + 1 + 4 = 13 = s$, sodass auch dies eine (bzw. nach Vertauschen von 3 und 1 eine zweite) Lösung ist.



Fall 4: $s = 12$.
Fall 4.1: Es ist in irgendeiner Reihenfolge $x + y + z = 1 + 2 + 5$.
Dann kann nicht die 5 in der Spitze z stehen, weil sonst $x = 2$ und $l = s - x - z = 12 - 2 - 5 = 5 = z$ folgen würde. Also ist $x = 5$. Aus analogem Grund kann dann nicht $z = 2$ sein, sodass $z = 1$ und $y = 2$ folgt, was aber auf den Widerspruch $r = s - y - z = 12 - 2 - 1 = 9 > 7$ führt. Also gibt es in diesem Fall keine Lösung.

Fall 4.2: Es ist in irgendeiner Reihenfolge $x + y + z = 1 + 3 + 4$.
Dann kann nicht 4 in der Basis stehen, da sonst $x = 4$ und $y + z = 1 + 3$, also $r = s - y - z = 12 - 1 - 3 = 8 > 7$ folgen würde. Also muss $z = 4$ und damit $x = 3$ sowie $y = 1$ gelten, woraus $l = s - x - z = 12 - 3 - 4 = 5$ und $r = s - y - z = 12 - 1 - 4 = 7$ folgt. Es verbleiben für a und b noch die Ziffern 6 und 2 und wieder ist $x + a + b + y = 3 + 6 + 2 + 1 = 12 = s$, sodass wir auch hier eine (bzw. nach Vertauschen von 6 und 2 eine zweite) Lösung erhalten:



Damit gibt es, da die Fallunterscheidung vollständig war, bis auf Vertauschung der Felder a und b (sowie Spiegelung an der Mittelsenkrechten der Basis) genau vier verschiedene Lösungen.

Aufgabe 330923:

$$\begin{array}{cccccc} & & M & O & R & D \\ + & & R & A & U & B \\ \hline = & K & R & I & M & I \end{array}$$

Das „Kryptogramm“ stellt die Aufgabe, die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzen, dass eine richtig gerechnete Additionsaufgabe entsteht.
Dabei soll auch die Regel beachtet werden, dass als Anfangsziffer (für M, R und K) nicht die Ziffer Null auftreten darf.
Gleiche Buchstaben sind durch gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern zu ersetzen.
a) Geben Sie eine Lösung an!
b) Beweisen Sie, dass es mindestens 15 Lösungen gibt, von denen keine zwei einander gleich sind!

Hinweise:
1. Zwei Lösungen heißen genau dann einander gleich, wenn in der einen dieser Lösungen jeder Buchstabe durch dieselbe Ziffer ersetzt wird wie in der anderen dieser Lösungen.
2. Die Ähnlichkeit des Buchstabens O mit der Ziffer 0 (Null) soll keine Bedeutung haben; d. h., der Buchstabe O darf auch durch eine von Null verschiedene Ziffer ersetzt werden.

Lösung von cyrix:
a)

$$\begin{array}{cccccc} & & 9 & 6 & 3 & 8 \\ + & & 3 & 4 & 5 & 2 \\ \hline = & 1 & 3 & 0 & 9 & 0 \end{array}$$

b) Man kann aus der in a) gefundenen Lösung insgesamt $2^4 = 16$ Lösungen erhalten, indem man unabhängig voneinander folgende Entscheidungen trifft, die aus einer Lösung eine weitere erzeugen:

*) Ziffern von O und A tauschen (oder nicht)
*) Ziffern von D und B tauschen (oder nicht)
*) Ziffern von (O und A) mit denen von (D und B) tauschen (oder nicht)
*) Ziffern von R und U tauschen (oder nicht).

Jede solche Tauschoperation erzeugt aus einer gültigen Lösung des Kryptogramms eine gültige Lösung. Auch sind je zwei dieser so erzeugten 16 Lösungen verschieden, da sie sich in wenigstens einer Ziffernzuweisung unterscheiden.
Es gibt also mindesten 16 und damit auch mindestens 15 verschiedene Lösungen, $\Box$.

Bemerkung: Eine vollständige Fallunterscheidung bei der Konstruktion dieser Lösungen zeigt, dass dies tatsächlich alle Lösungen des Kryptogramms sind.

Aufgabe 340922:
Jonas beschäftigt sich mit der Lösung des Kryptogramms

$$\begin{array}{ccccc} & E & I & N & S \\ + & A & C & H & T \\ \hline = & N & E & U & N \end{array}$$

d. h., er versucht, die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzen, dass eine (im dekadischen Positionssystem) richtig gerechnete Additionsaufgabe entsteht.
Gleiche Buchstaben sind durch gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern zu ersetzen. Ferner ist auch die Regel einzuhalten, dass in jeder Zeile als Anfangsziffer nicht die Ziffer Null auftritt.
Nach einer Stunde behauptet Jonas, er habe immerhin schon 25 verschiedene Lösungen gefunden. Felix bezweifelt, dass es überhaupt so viele verschiedene Lösungen gibt.
Hat Felix mit seinem Zweifel recht?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Felix hat nicht recht. Dies kann z. B. folgendermaßen gezeigt werden: Es gibt die Lösungen

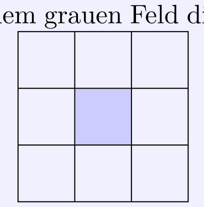
$$\begin{array}{ccccc} & 3 & 4 & 9 & 2 \\ + & 5 & 8 & 1 & 7 \\ \hline = & 9 & 3 & 0 & 9 \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} & 8 & 0 & 9 & 4 \\ + & 1 & 7 & 3 & 5 \\ \hline = & 9 & 8 & 2 & 9 \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} & 7 & 0 & 9 & 1 \\ + & 2 & 6 & 4 & 8 \\ \hline = & 9 & 7 & 3 & 9 \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} & 3 & 0 & 9 & 1 \\ + & 6 & 2 & 5 & 8 \\ \hline = & 9 & 3 & 4 & 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} & 8 & 3 & 9 & 2 \\ + & 1 & 4 & 6 & 7 \\ \hline = & 9 & 8 & 5 & 9 \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} & 4 & 0 & 9 & 1 \\ + & 5 & 3 & 7 & 8 \\ \hline = & 9 & 4 & 6 & 9 \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} & 4 & 1 & 9 & 3 \\ + & 5 & 2 & 8 & 6 \\ \hline = & 9 & 4 & 7 & 9 \end{array}$$

In jeder dieser Lösungen kann man die Ziffern für S und T miteinander vertauschen, ebenso (unabhängig hiervon) die Ziffern für I und C.
Da sich je zwei der Lösungen in der Ziffer für U voneinander unterscheiden, ergeben sich hiermit bereits $4 \cdot 7 = 28$ verschiedene Lösungen.

III Runde 3

Aufgabe 110932:
In die Figur sollen neun aufeinanderfolgende natürliche Zahlen so eingetragen werden, dass in jedem Feld genau eine steht und die drei „Zeilensummen“, die drei „Spaltensummen“ und die zwei „Diagonalsummen“ sämtlich einander gleich sind (magisches Quadrat).
Beweisen Sie, dass eine derartige Belegung genau dann möglich ist, wenn in dem grauen Feld die fünfte der der Größe nach geordneten Zahlen steht!



Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die neun aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen seien mit $n, n+1, \dots, n+8$ bezeichnet. Ihre Summe beträgt dann $9n + 36$.
Da die drei „Zeilensumme“ gleich sein sollen, muss jede von ihnen $3n + 12$ betragen. Lauf Aufgabe gilt das auch für die übrigen fünf Summen.
Unter ausschließlicher Verwendung der gegebenen Zahlen lässt sich diese Summe auf genau 8 verschiedene Weisen aus je 3 verschiedenen Summanden bilden, nämlich auf folgende Weisen:

$$\begin{array}{lll} n + (n+4) + (n+8) & n + (n+5) + (n+7) & (n+1) + (n+3) + (n+8) \\ (n+1) + (n+4) + (n+7) & (n+1) + (n+5) + (n+6) & (n+2) + (n+3) + (n+7) \\ (n+2) + (n+4) + (n+6) & (n+3) + (n+4) + (n+5) & \end{array}$$

In den Summen kommen die Summanden $n, n+2, n+6$ und $n+8$ genau zweimal, die Summanden $n+1, n+3, n+5$ und $n+7$ genau je dreimal und es kommt nur der Summand $n+4$ genau viermal vor.

Bei dem Bilden der Zeilen- Spalten- und Diagonalsummen wird nur das farbige Feld genau viermal belegt. Daher muss im farbigen Feld die Zahl $n+4$, das ist die fünfte der der Größe nach geordneten Zahlen $n,\dots,n+8$, stehen, und wenn sie dort steht, gibt es die angegebenen Möglichkeiten.

Aufgabe 200931:
In dem folgenden Schema sind die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzen, dass eine richtig gerechnete Divisionsaufgabe ohne Rest entsteht. Dabei können verschiedene Buchstaben auch durch gleiche Ziffern ersetzt werden. Wie üblich darf eine mehrstellig geschriebene Zahl nicht die Anfangsziffer 0 haben.
Beweisen Sie, dass es genau eine Ersetzung dieser Art gibt, die den Anforderungen der Aufgabe genügt! Ermitteln Sie diese Ersetzung!

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
a & b & c & 5 & 5 & : & 5 & d & e & = & f & 5 & g \\
h & i & 5 & & & & & & & & & & \\
\cline{1-3}
j & k & m & n & & & & & & & & & \\
p & 5 & q & r & & & & & & & & & \\
\cline{1-4}
 & s & t & u & v & & & & & & & & \\
 & w & x & y & z & & & & & & & &
\end{array}$$

Lösung von cyrix:
Wegen $5de \geq 500$ und damit $2\cdot 5de \geq 1000$, aber $0 < hi5 < 1000$ ist $f=1$ und $hi5 = 5de$, also $h=5$, $d=i$ und $e=5$.

Wegen $500 < 5d5 < 600$ ist $2500 < 5\cdot 5d5 < 3000$, also $p=2$. Damit ist $5\cdot 5d5 < 2600$, d. h. $5d5 < 520$, also $d \in \{0{,}1\}$. Außerdem endet $5\cdot 5d5$ in der Einerziffer 5, sodass auch $r=5$ gilt. Damit ergibt sich insbesondere als Einerziffer der Differenz $u=0$.

Aufgrund des Vorgehens bei der schriftlichen Division muss $v=5$ gelten. Damit kein Rest bleibt, muss $wxyz = stuv$ sein.
Trägt man alle bisher gefundenen Informationen ein, erhält man

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
a & b & c & 5 & 5 & : & 5 & d & 5 & = & 1 & 5 & g \\
5 & d & 5 & & & & & & & & & & \\
\cline{1-3}
j & k & m & 5 & & & & & & & & & \\
2 & 5 & q & 5 & & & & & & & & & \\
\cline{1-4}
 & s & t & 0 & 5 & & & & & & & & \\
 & s & t & 0 & 5 & & & & & & & &
\end{array}$$

Wäre $d=0$, dann müsste $st05 = g\cdot 505$ gelten. Dies ist aber ein Widerspruch zu $s\neq 0$, da die Zehnerziffer von $g\cdot 505$ nur für die positive Ziffer $g=1$ den Wert 0 hat.

Also muss $d=1$ sein. Dann ist $st05 = g\cdot 515$, was genau für die Ziffer $g=7$ erfüllt ist, denn dann ist $7\cdot 515 = 3605$. Auch ergibt sich $25q5 = 5\cdot 515 = 2575$, also $q=7$ und damit $jkm5 = 2575+360 = 2935$ sowie abschließend $abc = 515+293 = 808$, sodass man die korrekt berechnete und eindeutig bestimmte Divisionsaufgabe

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
8 & 0 & 8 & 5 & 5 & : & 5 & 1 & 5 & = & 1 & 5 & 7 \\
5 & 1 & 5 & & & & & & & & & & \\
\cline{1-3}
2 & 9 & 3 & 5 & & & & & & & & & \\
2 & 5 & 7 & 5 & & & & & & & & & \\
\cline{1-4}
 & 3 & 6 & 0 & 5 & & & & & & & & \\
 & 3 & 6 & 0 & 5 & & & & & & & &
\end{array}$$

erhält, wie man leicht nachrechnet, $\square$.

Aufgabe 230933:

$$\begin{array}{cccc} & \square & \square & \square \\ + & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \end{array}$$

In dem Schema soll in jedes Kästchen genau eine der zehn Ziffern (des dekadischen Zahlensystems) so eingetragen werden, dass jede der Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 einmal vorkommt und dass eine richtig gerechnete Additionsaufgabe entsteht.
Beweisen Sie, dass es nicht möglich ist, durch eine solche Eintragung auch noch die zusätzliche Forderung zu erfüllen, dass bei der Ausführung der Addition genau zwei Überträge auftreten!

Lösung von cyrix:
Wir nehmen indirekt an, es gäbe eine solche Eintragung mit genau zwei Überträgen.

Die Tausenderstelle der Summe s kann nur durch einen Übertrag entstanden sein. Da nur zwei Summanden s_1 und s_2 addiert werden, kann wegen $9+9+1=19<20$ ein Übertrag nur 1 lauten. Insbesondere ist die Tausenderstelle von s also eine 1.

Wir denken uns nun zur Vereinfachung der Notation die beiden Summanden um eine Tausenderstelle 0 ergänzt, sodass alle drei Zahlen die gleiche Stellenanzahl besitzen.
Es sei q_1 die Quersumme des ersten Summanden, q_2 die des zweiten und q die der Summe. Dann gilt offenbar $q_1+q_2+q=45$, da jede der Ziffern 1 bis 9 insgesamt genau einmal (und die 0 nun genau dreimal) in diesen Zahlen vorkommt.

Weiterhin entsteht eine Ziffer in s durch die Addition der beiden entsprechenden Ziffern in s_1 und s_2, sofern kein Übertrag in dieser oder der vorhergehenden Stelle auftritt. Entstand ein Übertrag in der vorhergehenden Stelle, erhöht sich der Wert der gerade betrachteten Ziffer von s gegenüber der Summe der entsprechenden Ziffern von s_1 und s_2 um den Übertrag von 1. Entsteht (ggf. dadurch) nun in der betrachteten Stelle ein Übertrag, ist die Ziffer in s um genau 10 kleiner als die Summe (und die nächste Ziffer in s erhöht sich um den Übertrag von 1).

Summiert man nun alle diese Summen der entsprechenden Ziffern von s_1 und s_2, erhält man wieder q_1+q_2, da jede Ziffer von s_1 sowie s_2 dabei genau einmal betrachtet wird. Andererseits ergibt dies nach der eben erfolgten Beobachtung $q_3+k\cdot(10-1)$, wobei k die Anzahl der Überträge ist, da dann an genau k Stellen die Ziffer in s durch einen Übertrag um 1 erhöht und auch an genau k Stellen um genau 10 gegenüber dem Wert der Summe der entsprechenden Ziffern (+ ggf. Übertrag aus vorheriger Stelle) verringert wurde.

Laut Aufgabenstellung soll $k=2$ gelten, sodass man $q_1+q_2=q_3+18$ erhält. Setzt man dies in $q_1+q_2+q_3=45$ ein, erhält man $2q_3+18=45$ bzw. den Widerspruch $q_3=\frac{27}{2}\notin\mathbb{Z}$. Also kann es keine solche Eintragung mit genau 2 Überträgen geben, $\square$.

Aufgabe 280932:
In jedes der 16 Felder eines 4×4-Quadrates (siehe Abbildung) soll eine der Zahlen 0 und 1 so eingetragen werden, dass in jeder Zeile, in jeder Spalte und in jeder der beiden Diagonalen zweimal die 0 und zweimal die 1 vorkommt.
Ermitteln Sie alle verschiedenen Eintragungen, die diese Bedingungen erfüllen!
Dabei seien zwei Eintragungen genau dann voneinander verschieden genannt, wenn es keine Spiegelung gibt, die die eine Eintragung in eine andere überführt.

Lösung von cyrix:
Die Felder des Quadrats seien mit a_1 bis d_4 bezeichnet.
Dann kann nicht in drei Eckfelder des Quadrats die gleiche Zahl eingetragen werden. Andernfalls wären o. B. d. A. $a_1 = a_4 = d_4 = 0$. Dann folgt in Zeile a, dass $a_2 = a_3 = 1$ und analog in Spalte 4, dass $b_4 = c_4 = 1$ sein muss. In der Diagonale a_1–d_4 gilt aber auch $b_2 = c_3 = 1$, sodass sich in Zeile b schließlich $b_1 = b_3 = 0$ und in Zeile c $c_1 = c_2 = 0$ ergibt, womit man in Spalte 1 den Widerspruch $a_1 = b_1 = c_1 = 0$ erhält.

Also müssen in je zwei der vier Eckfelder des Quadrats die Zahl 0 und in die zwei anderen die Zahl 1 eingetragen werden. Wir unterscheiden danach, ob sich die beiden Felder mit der 0 gegenüberliegen, oder ob sie benachbart sind:

Fall 1: Die beiden Eckfelder mit Eintrag 0 liegen einander diagonal gegenüber, d. h., nach ggf. erfolgter Spiegelung gilt o. B. d. A. $a_1 = d_4 = 0$ und $a_4 = d_1 = 1$. Es folgt auf den Diagonalen automatisch $b_2 = c_3 = 1$ und $b_3 = c_2 = 0$, man erhält also

0			1
	1	0	
	0	1	
1			0

Fall 1.1: Es ist $a_2 = 0$. Dann ist zwangsweise $a_3 = 1$, $d_2 = 1$ und $d_3 = 0$. Man erhält

0	0	1	1
	1	0	
	0	1	
1	1	0	0

Fall 1.1.1: Es ist $b_1 = 0$. Dann ist zwangsweise $b_4 = 1$, $c_1 = 1$ und $c_4 = 0$, sodass man die folgende (wie man leicht überprüft) Lösung erhält:

0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0

Fall 1.1.2: Es ist $b_1 = 1$. Dann ist zwangsweise $b_4 = 0$, $c_1 = 0$ und $c_4 = 1$, sodass man die folgende Lösung erhält:

0	0	1	1
1	1	0	0
0	0	1	1
1	1	0	0

Fall 1.2: Es ist $a_2 = 1$. Dann ist zwangsweise $a_3 = 0$, $d_2 = 0$ und $d_3 = 1$. Wäre $b_1 = 0$, so könnte man dies durch Spiegelung auf den Fall 1.1.2 zurückführen. Also muss $b_1 = 1$ sein, was auf $b_4 = 0$, $c_1 = 0$ und $c_4 = 1$, sodass man die folgende Lösung erhält:

0	1	0	1
1	1	0	0
0	0	1	1
1	0	1	0

Fall 2: Die beiden Eckfelder mit Eintrag 0 liegen auf einer gemeinsamen Kante, d. h., es gilt nach ggf. erfolgter Spiegelung o. B. d. A. $a_1 = a_4 = 0$ und $d_1 = d_4 = 1$. Es folgt sofort $a_2 = a_3 = 1$ und $d_2 = d_3 = 0$, sodass man folgende Situation erhält:

0	1	1	0
1	0	0	1

Fall 2.1: Es ist $b_2 = 0$. Dann ist zwangsweise $b_3 = 1$ und aufgrund der Diagonalen a_1–d_4 auch $c_3 = 1$, was sofort $b_3 = 0$, also in Zeile b auch $b_1 = b_4 = 1$ sowie in Zeile c analog $c_1 = c_4 = 0$ nach sich zieht, sodass man die folgende Lösung erhält:

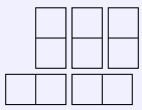
0	1	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1

Fall 2.2: Es ist $b_1 = 1$. Dann ist zwangsweise $b_3 = 0$ und aufgrund der Diagonalen a_1–d_4 auch $c_3 = 0$, was sofort $b_3 = 1$, also in Zeile b auch $b_1 = b_4 = 0$ sowie in Zeile c analog $c_1 = c_4 = 1$ nach sich zieht, sodass man die folgende Lösung erhält:

0	1	1	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	0	1

Die Fallunterscheidung ist vollständig und die fünf erhaltenen Eintragungen (von denen man jeweils schnell überprüft, dass sie alle geforderten Eigenschaften erfüllen) gehen paarweise nicht durch Spiegelung auseinander hervor, bilden also die gesuchte Lösungsmenge.

Aufgabe 290932:



Aus einem Satz von Dominosteinen soll eine Zusammenstellung von möglichst vielen nebeneinanderliegenden Figuren gebildet werden. Jede dieser Figuren soll die in der Abbildung gezeigte Gestalt haben, ferner soll sie die folgende Bedingung erfüllen:
Liest man in jeder Zeile die drei bzw. vier Zeichen als Zifferndarstellung einer Zahl, so gibt die Figur eine richtig gerechnete Additionsaufgabe an (erste Zeile + zweite Zeile = dritte Zeile). Wie üblich ist die Null als Anfangsziffer nicht zugelassen.
Ermitteln Sie die größtmögliche Anzahl von nebeneinanderliegenden Figuren der geforderten Art, die sich aus einem Satz von Dominosteinen bilden lassen!

Hinweis: Jeder Dominostein enthält auf jeder seiner beiden Teilflächen genau eines der Zahlzeichen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Der Satz von Dominosteinen (aus dem die Steine für das Bilden der Figuren auszuwählen sind) enthält jeden Stein $\boxed{x \mid y}$ mit $0 \leq x \leq y \leq 6$ genau einmal; beim Bilden der Figuren ist für die Lage der Steine jede Reihenfolge der beiden Zahlen eines verwendeten Steines zugelassen.

Lösung von cyrix:
Da mindestens ein Übertrag notwendig ist, um aus der Summe zweier dreistelliger Zahlen eine vierstellige Zahl zu erhalten, muss pro Figur mindestens einer der Dominosteine 6-6, 6-5, 6-4 oder 5-5 beteiligt sein. Da aber $6 + 4 = 5 + 5 = 10$ ist, können nicht alle vier jeweils einzeln in einer eigenen Figur liegen, da sonst die ersten beiden stellen der Figuren mit diesen beiden Dominosteinen 1-0 lauten würden, dieser Dominostein aber nur einmal verwendet werden darf.
Also können höchstens drei solche Figuren gebildet werden. Dass dies möglich ist, wird durch folgendes Beispiel gezeigt:

$$\begin{array}{cccc} & 6 & 0 & 6 \\ + & 6 & 5 & 4 \\ \hline 1 & 2 & 6 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} & 6 & 0 & 0 \\ + & 5 & 3 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 3 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} & 5 & 2 & 1 \\ + & 5 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 0 & 4 & 4 \end{array}$$

Aufgabe 330934:

$$\begin{array}{ccccc} & \mathrm{Z} & \mathrm{W} & \mathrm{E} & \mathrm{I} \\ + & \mathrm{D} & \mathrm{R} & \mathrm{E} & \mathrm{I} \\ \hline = & \mathrm{F} & \ddot{\mathrm{U}} & \mathrm{N} & \mathrm{F} \end{array}$$

Das obenstehende „Kryptogramm“ stellt die Aufgabe, die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzten, dass eine richtig gerechnete Additionsaufgabe entsteht.
Dabei soll auch die Regel beachtet werden, dass als Anfangsziffer (für Z, D und F) nicht die Ziffer Null auftreten darf. Gleiche Buchstaben sind durch gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern zu ersetzen.
a) Geben Sie eine Lösung an!
b) Untersuchen Sie, ob es mehr als fünf Lösungen gibt, von denen keine zwei einander gleich sind!

Hinweis:
Zwei Lösungen heißen genau dann einander gleich, wenn in der einen dieser Lösungen jeder Buchstabe durch dieselbe Ziffer ersetzt wird wie in der anderen dieser Lösungen.

Lösung von cyrix:
a)

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & 2 & 4 & 3 \\ + & 5 & 7 & 4 & 3 \\ \hline = & 6 & 9 & 8 & 6 \end{array}$$

b) In der Lösung aus a) können Z und D sowie unabhängig davon W und R vertauscht werden, sodass man drei weitere Lösungen erhält.
Schließlich gibt es die davon (wegen $N = 0 \neq 8$) verschiedene Lösung

$$\begin{array}{ccccc} & 2 & 7 & 5 & 3 \\ + & 4 & 1 & 5 & 3 \\ \hline = & 6 & 9 & 0 & 6 \end{array}$$

für welche die gleichen Vertauschungen auch möglich sind, sodass es mindestens 8 verschiedene Lösungen, also insbesondere mehr als 5 verschiedene gibt.

III.II Mengen; Logik

I Runde 1

Aufgabe 040912:
Beim Schulsportfest hatten sich Christian (C), Bernd (B), Alfred (A) und Dieter (D) für den Endlauf über 100 m qualifiziert. Auf Grund der Vorlaufzeiten rechnete man mit einem Einlauf ins Ziel in der Reihenfolge $CBAD$. Damit hatte man aber weder den Platz eines Läufers noch ein Paar direkt aufeinanderfolgender Läufer richtig vermutet. Der Sportlehrer erwartete die Reihenfolge $ADBC$. Das war gut geschätzt; denn es kamen zwei Läufer auf den erwarteten Plätzen ein.

In welcher Reihenfolge gingen die Läufer ins Ziel?

Lösung von Manuela Kugel:
Es gibt 6 Fälle zu untersuchen, wenn man die Erwartung des Sportlehrers zugrunde legt, da 2 Plätze stimmen. Die restlichen beiden Plätze entstehen nämlich, indem man die Erwartung des Sportlehrers dieser beiden Plätze vertauscht.

Fallunterscheidung:
1. ADCB - entfällt, da laut allgemeiner Erwartung die Reihenfolge AD nicht vorkommen kann.
2. ACBD - entfällt, da D dann in der 1. Schätzung richtig wäre.
3. ABDC - entfällt, da B dann in der 1. Schätzung richtig wäre.
4. CDBA - entfällt, da C dann in der 1. Schätzung richtig wäre.
5. BDAC - entfällt, da A dann in der 1. Schätzung richtig wäre.
6. DABC - einzige Lösung.

Aufgabe 060914:
Bei einem Schachturnier mit 8 Teilnehmern spielte jeder gegen jeden genau eine Partie. Am Ende des Turniers haben alle Teilnehmer verschiedene Punktzahlen erzielt. Der Spieler auf dem zweiten Platz hat genau so viele Punkte gewonnen wie die letzten vier zusammen. Dabei erhielt man für einen Sieg 1 Punkt, für jedes Unentschieden $\frac{1}{2}$ Punkt und für eine Niederlage keinen Punkt.

Wie endete die Partie zwischen den Spielern, die den 4. bzw. 6. Platz belegten?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Jeder Teilnehmer spielte genau 7 Partien und konnte maximal 7 Punkte erreichen (wenn er alle Partien gewann).

Die vier Schachspieler, die die letzten 4 Plätze belegten, mussten unter sich genau 6 Partien ausspielen. Die dabei zu verteilenden 6 Punkte teilten sie also unter sich auf.

Da der Spieler, der den zweiten Platz belegte, laut Aufgabe genau so viele Punkte gewonnen hat wie die letzten vier zusammen, hat er mindestens 6 Punkte erreicht. Er kann aber auch nicht mehr als 6 Punkte erreicht haben; denn besiegte er außer den anderen Spielern auch den Ersten, würde er Erster, und spielte er gegen diesen (bei Siegen gegen alle übrigen Spieler) unentschieden, so hätten erster und zweiter Spieler entgegen der Voraussetzung gleiche Punktzahl.

Somit müssen die letzten vier Spieler zusammen genau 6 Punkte erzielt haben, d. h. sie haben alle Partien gegen die ersten vier Spieler verloren. Infolgedessen hat auch der vierte Spieler den sechsten Spieler besiegt. Außerdem sind alle Bedingungen der Aufgabe miteinander verträglich, wie z. B. folgendes Schema zeigt:

	1	2	3	4	5	6	7	8
1		1	1	1	1	1	1	1
2	0		1	1	1	1	1	1
3	0	0		1	1	1	1	1
4	0	0	0		1	1	1	1
5	0	0	0	0		1	1	1
6	0	0	0	0	0		1	1
7	0	0	0	0	0	0		1
8	0	0	0	0	0	0	0	

Aufgabe 070914:
Vier Mannschaften A, B, C und D tragen ein Fußballturnier aus. Dabei spielt jede Mannschaft genau einmal gegen jede andere, und es werden den einzelnen Mannschaften für ein gewonnenes, unentschieden ausgegangenes bzw. verlorenes Spiel 2, 1 bzw. 0 „Pluspunkte“ gegeben.
Am Tag nach dem Abschluss des Turniers hört Peter den Schluss einer Radiomeldung: „... Vierter wurde die Mannschaft D. Damit erhielten keine zwei Mannschaften gleiche Punktzahl. Das Spiel A gegen B endete als einziges unentschieden.“

Peter ist enttäuscht, dass seine Lieblingsmannschaft in diesem Teil der Meldung überhaupt nicht erwähnt wurde. Dennoch kann er aus den gehörten Angaben und der Kenntnis des Austragungsmodus nicht nur die Platzierung, sondern auch den Punktstand dieser Mannschaft ermitteln.
Wie ist das möglich?

Lösung von Manuela Kugel:
Da A gegen B das einzige unentschieden ausgegangene Spiel ist, haben A und B je eine ungerade, C und D je eine gerade Punktzahl. Die Summe dieser Punktzahlen ist zwölf, da genau sechs Spiele mit je zwei vergebenen Punkten ausgetragen wurden. Die Zahl Eins kann nicht vergeben worden sein, weil sonst D als letzte Mannschaft und, mit gerader Punktzahl versehen, null Punkte erhalten hätte. Also hätte D jedes Spiel verloren und daher jede andere Mannschaft mindestens zwei Punkte gewonnen.

Mithin lautet die Punkteverteilung 0, 3, 4, 5, da keine Mannschaft mehr als sechs Punkte und keine zwei Mannschaften gleiche Punktzahl erhalten haben. Da D die letzte Mannschaft ist, hat D Null Punkte. Folglich errang C, Peters Lieblingsmannschaft (denn sie ist als einzige nicht in dem Bericht erwähnt), vier Punkte und damit den zweiten Platz.

Aufgabe 100914:
In einer alten Aufgabensammlung wird das *Urteil des Paris* folgendermaßen beschrieben:

Die Göttinnen Hera, Aphrodite und Athene fragen den klugen Paris, wer von ihnen die Schönste sei. Sie machen dabei folgende Aussagen:

Aphrodite:	*Ich bin die Schönste.*	(1)
Athene:	*Aphrodite ist nicht die Schönste.*	(2)
Hera:	*Ich bin die Schönste.*	(3)
Aphrodite:	*Hera ist nicht die Schönste.*	(4)
Athene:	*Ich bin die Schönste.*	(5)

Paris, der am Wegrand ausruht, hält es nicht der Mühe wert, das Tuch, das seine Augen vor den Sonnenstrahlen schützt, zu entfernen. Er soll aber genau eine der drei Göttinnen als die Schönste feststellen. Dabei setzt er voraus, dass alle Aussagen dieser Schönsten wahr, alle Aussagen der beiden anderen Göttinnen jedoch falsch sind.

Kann Paris unter dieser Voraussetzung die von ihm geforderte Feststellung erhalten? Wenn ja, wie lautet diese?

Lösung von Manuela Kugel:
Die Aussagen 1., 3. und 5. bringen Paris nicht weiter, denn sie lauten gleich, sind wahr, wenn von der Schönsten ausgesprochen und falsch, wenn von einer anderen Göttin ausgesprochen.
Nun Fallunterscheidung und Prüfung der Aussagen 2. und 4.:

1. Fall: Aphrodite ist die Schönste. Wenn Athene dies leugnet (2.) und Aphrodite Hera wahrheitsgemäß als nicht die Schönste bezeichnet, so ergibt sich kein Widerspruch. ⇒ Aphrodite kann die Schönste sein.

2. Fall: Athene ist die Schönste. Die 4. Aussage müsste dann aber falsch sein, da nicht von der Schönsten ausgesprochen, was bedeutet, dass Hera die Schönste sei und ein Widerspruch zur Voraussetzung ist.

3. Fall: Hera ist die Schönste. Die 2. Aussage müsste dann aber falsch sein, da nicht von der Schönsten ausgesprochen, was bedeutet, dass Aphrodite die Schönste sei und ein Widerspruch zur Voraussetzung ist.

Damit ergibt sich die eindeutige Lösung, dass Aphrodite die Schönste ist, wenn die von Paris getroffenen Voraussetzungen genutzt werden.

Aufgabe 140914:
Bettina und Axel sind beide Briefmarkensammler, nun schlägt Axel Bettina folgendes Spiel um Briefmarken vor:

Jeder schreibt, unabhängig von dem anderen (ohne dem anderen Einsicht zu gewähren) genau eine der drei Zahlen 1, 2 oder 3 auf einen Zettel. Danach werden die Zettel aufgedeckt. Ist nun die von Axel notierte Zahl kleiner oder gleich der von Bettina notierten, so wird die von Axel notierte Zahl von der von Bettina notierten Zahl subtrahiert, in den anderen Fällen werden die Zahlen addiert.

Ist die so entstandene Zahl kleiner als 3, so darf sich Axel so viele Briefmarken von Bettina nehmen, wie diese Zahl angibt; in den anderen Fällen darf sich entsprechend Bettina von Axel Briefmarken nehmen. Nachdem sich Bettina diese komplizierten Regeln genau durchdacht hat, sagt sie zu Axel, dass dieses Spiel keinen Zweck hätte. Es könne nämlich jeder von beiden so spielen, dass er mit Sicherheit nicht verliert. Das würde aber bedeuten, dass keiner vom anderen eine Marke nehmen dürfte.

Ist diese Meinung Bettinas richtig?

Lösung von Manuela Kugel:
Bettina hat recht. Wenn nämlich Axel auf seinen Zettel 1 schreibt, so ist seine Zahl in keinem Fall größer als die Bettinas, es ist also die Differenz zu bilden. Diese ist kleiner als 3, daher darf sich Bettina keine Marke von Axel nehmen. Wenn Bettina ebenfalls 1 notiert, sind folgende 3 Fälle möglich: Axel schreibt 1, 2 oder 3. Im ersten Fall ist die Differenz zu bilden. Sie ist 0, also darf sich Axel keine Marke von Bettina nehmen. Wenn mithin Axel nd Bettina beide 1 schreiben, geht jeder von beiden sicher, keine Marke zu verlieren.

Aufgabe 150914:
Als Herr T. am 30.12.1973 seinen Geburtstag beging, sagte er zu seiner Frau: „Jetzt bin ich genau 8 mal so alt wie unser Sohn, wenn ich als Altersangabe jeweils nur die vollen (vollendeten) Lebensjahre rechne.“

Darauf entgegnete seine Frau: „Im Jahre 1974 wird der Fall eintreten, dass du 5 mal so alt wie unser Sohn bist, wenn auch ich nur die vollen Lebensjahre berücksichtige.“

Untersuchen Sie, ob es genau ein Datum gibt, für das - als Geburtsdatum des Sohnes - alle diese Angaben zutreffen! Ist das der Fall, so geben Sie das genaue Geburtsdatum des Sohnes an (Tag, Monat, Jahr)!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Angenommen, für ein Geburtsdatum des Sohnes seien alle Angaben zutreffend.

Dann gilt:

Ist x das in vollen (vollendeten) Lebensjahren ausgedrückte Alter des Sohnes am 30. 12. 1973, so kann es im Jahre 1974 nur die Werte $x, x+1$, $x+2$ annehmen, und davon den letzten nur dann, wenn der Sohn am 31. 12. Geburtstag hat.

Ferner ist $8x$ das in vollen Lebensjahren ausgedrückte Alter des Vaters am 30. 12. 1973, und dies kann im Jahre 1974 nur die Werte $8x, 8x+1$ annehmen.

Daher gilt für eine der Zahlen $a=0,1,2$ und eine der Zahlen $b=0,1$ die Gleichung $5\cdot(x+a)=8x+b$, also $5a-b=3x$.

Nun zeigt die folgende Tabelle der Werte $5a-b$,

b	$a=0$	1	2
0	0	5	10
1	-1	4	9

dass $5a-b$ nur für $a=2, b=1$ durch 3 teilbar ist, was dann auf $x=3$ führt. Also können die Angaben in der Aufgabe nur dann zutreffen, wenn der Sohn am 31. 12. Geburtstag hat, am 30. 12. 73 noch 3 Jahre alt war, am 31. 12. 1973 also 4 Jahre alt wurde und folglich am 31. 12. 1969 geboren war.

II. Dieses Geburtsdatum des Sohnes, zusammen mit dem daraus folgenden Alter des Vaters von 24 Jahren am 30. 12. 1973, erfüllt in der Tat alle Angaben; denn bei diesen Daten war am 30. 12. 1973 der Vater 8 mal so alt wie sein Sohn; am 31. 12. 1974 aber, als der Sohn 5 Jahre alt wurde, war der Vater 25 Jahre alt, also 5 mal so alt wie sein Sohn.

Daher treffen die Angaben genau für den 31. 12. 1969 als Geburtsdatum des Sohnes zu.

Aufgabe 170914:
Ein Rechenautomat sei in der Lage, nach bestimmten Regeln „Zeichenreihen“ umzuformen. Eine „Zeichenreihe“ sei eine Aneinanderreihung der Zeichen A, B, S, a, b in beliebiger Reihenfolge und mit beliebiger Häufigkeit. Es seien folgende Regeln zur Umformung zugelassen:

(1) S wird ersetzt durch A.
(2) A wird ersetzt durch aAB.
(3) A wird ersetzt durch a.
(4) B wird ersetzt durch b.

Der Automat wendet bei jedem Umformungsschritt genau eine dieser Regeln auf genau ein Zeichen der Zeichenreihe an. Ist es möglich, dass auf eine vorliegende Zeichenreihe mehrere Regeln angewendet werden könnten, so entscheidet der Automat zufällig darüber, welche der Regeln angewendet wird. Ist keine der angegebenen Regeln auf eine Zeichenreihe anwendbar, so bleibt der Automat stehen und gibt die letzte Zeichenreihe aus.

Wir geben dem Automaten das Zeichen S ein.

a) Ist es möglich, dass der Automat 10 Umformungsschritte ausführt, ohne danach stehenzubleiben? Wenn das möglich ist, dann geben Sie für einen solchen Fall an, welche der Regeln bei diesen 10 Umformungsschritten angewendet wurden und wie oft dies für jede dieser Regeln der Fall war!

b) Wie viele Umformungsschritte wurden von dem Automaten insgesamt durchgeführt, falls er eine Zeichenreihe aus genau 5 Zeichen ausgibt?

c) Geben Sie alle Zeichenreihen aus 5 Zeichen an, die vom Automaten ausgegeben werden könnten!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Eine solche Möglichkeit besteht z. B. darin, erst (1) und dann nur noch Schritte der Art (2) ausführen zu lassen. Dies ist nämlich stets fortsetzbar, da im Ergebnis von (2) stets wieder ein Zeichen A auftritt. Hierbei wird also (1) einmal und (2) neunmal angewendet.

Möglichkeiten sind z. B.:

Anzahl der Anwendungen der Regel				Anzahl der Anwendungen der Regel			
(1)	(2)	(3)	(4)	(1)	(2)	(3)	(4)
1	8	0	1	1	8	1	0
1	7	0	2	1	7	1	1
1	6	0	3	1	6	1	2
1	5	0	4	1	5	1	3

b) Bei den Schritten (1), (3), (4) bleibt die Anzahl der Zeichen unverändert, bei (2) vergrößert sie sich um genau 2. Daher kann nur dann die Anzahl 5 entstehen, wen nach dem zwangsläufigen Anfangsschritt (1), der S durch A ersetzt, unter den dann noch möglichen Schritten (2), (3), (4) genau 2 Schritte der Art (2) vorkommen. Die Anzahl der großen Buchstaben wird bei (2) um genau 1 größer, bei (3) und (4) um je genau 1 kleiner.

Da eine Zeichenreihe genau dann vom Automaten ausgegeben wird, wenn sie keinen großen Buchstaben enthält, folgt daraus:

Wenn der Automat eine Zeichenreihe aus genau 5 Zeichen ausgibt, so ist dies nur möglich nach Umformungsserien, in denen die Anzahl der Schritte (3) oder (4) genau 3 und somit die Anzahl der insgesamt ausgeführten Schritte genau 6 beträgt.

c) Die in b) genannten Umformungen sind nur in folgender Weise möglich: Da die Anzahl der Zeichen A bei Schritten der Art (2) und (4) gleich bleibt und sich bei (3) um 1 verringert, tritt der Schritt (3) genau einmal auf, und zwar erst, nachdem beide Schritte der Art (2) ausgeführt sind.

Da ferner die Anzahl der Zeichen B bei Schritten der Art (2) jeweils um 1 zunimmt, bei (3) gleich bleibt und bei (4) um je 1 abnimmt, können zu jedem Zeitpunkt höchstens so viele Schritte (4) ausgeführt werden, wie bereits Schritte (2) vorangegangen waren. Daher verbleiben genau die folgenden Möglichkeiten, die Schritte anzuordnen:

$$\begin{aligned} I: &\quad (1),(2),(2),(3),(4),(4) \\ II: &\quad (1),(2),(2),(4),(3),(4) \\ III: &\quad (1),(2),(2),(4),(4),(3) \\ IV: &\quad (1),(2),(4),(2),(3),(4) \\ V: &\quad (1),(2),(4),(2),(4),(3) \end{aligned}$$

Bei den Möglichkeiten I, II, III entsteht in den ersten drei Schritten die Zeichenreihe $aaABB$, danach wird die Teilreihe ABB durch abb ersetzt.

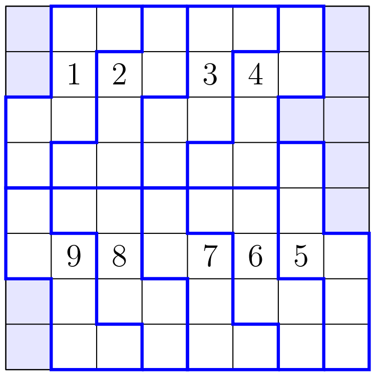
Bei den Möglichkeiten IV und V entsteht in den ersten vier Schritten die Zeichenreihe $aaABb$, danach wir die Teilreihe AB durch ab ersetzt. Somit gibt es genau eine Zeichenreihe aus 5 Zeichen, die vom Automaten ausgegeben werden kann, nämlich die Reihe $aaabb$.

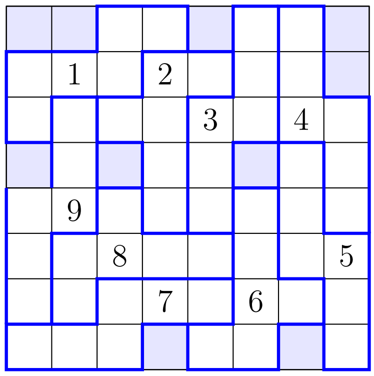
Aufgabe 180911:
Aus einer quadratischen Papptafel von 8 dm Seitenlänge sollen 9 Würfelnetze, die nicht kongruent zueinander zu sein brauchen, ausgeschnitten werden. Aus jedem dieser Würfelnetze soll ein Würfel von 1 dm^3 Rauminhalt gefaltet werden können.

Zeigen Sie an einem Beispiel, dass es möglich ist, 9 derartige Netze auf einer solchen Tafel einzuzeichnen!

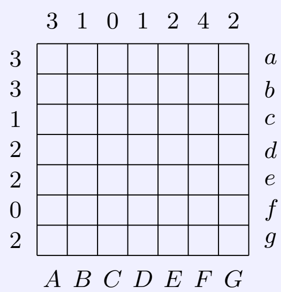
Es genügt eine solche Zeichnung; Beschreibung und Begründung werden nicht verlangt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angaben von zwei verschiedenen Möglichkeiten:





Aufgabe 190912:
Von den 49 Feldern in der Abbildung sollen einige angekreuzt werden. Je zwei angekreuzte Felder dürfen dabei höchstens einen Eckpunkt gemeinsam haben. In jeder Zeile und in jeder Spalte der Abbildung sollen genau so viele Felder angekreuzt werden, wie durch die am Rande stehenden Zahlen jeweils angegeben ist.



Ermitteln Sie für die anzukreuzenden Felder alle diejenigen Verteilungen, die diesen Forderungen entsprechen!

(Benutzen Sie zur Beschreibung des Lösungsweges die angegebenen Buchstaben! So erhält z. B. das erste Feld links oben die Bezeichnung aA.)

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Hinweis: In den Abbildungen 1 und 2 sind diejenigen Felder, von denen gesichert ist, dass die frei bleiben mit einem Kreis gekennzeichnet.

1)

	3	1	0	1	2	4	2	
3			○		○	×	○	a
3			○	○		○		b
1	○	○	○	○	○	×	○	c
2			○			○		d
2			○		○	×	○	e
0	○	○	○	○	○	○	○	f
2			○		○	×	○	g
	A	B	C	D	E	F	G	

2)

	3	1	0	1	2	4	2	
3			○	×	○	×	○	a
3			○	○	×	○	×	b
1	○	○	○	○	○	×	○	c
2	○	○	○	○	×	○	×	d
2	×	○	○	○	○	×	○	e
0	○	○	○	○	○	○	○	f
2	×	○	○	○	○	×	○	g
	A	B	C	D	E	F	G	

(1) Da in Spalte F genau 4 Felder anzukreuzen sind, können das nur folgende Felder sein: aF, cF, eF, gF.

(2) Als Nachbarfelder bleiben somit frei: $aE, aG, cE, cG, eE, eG, gE, gG, bF, dF$ und fF.

(3) Da in Spalte C und in Zeile f keine Felder anzukreuzen sind, bleiben frei:
$aC, bC, cC, dC, eC, fC, gC, fA, fB, fD, fE$ und fG.

(4) Da in Zeile c bereit ein Feld angekreuzt ist, bleiben die übrigen frei, also (siehe Abbildung 1): cA, cB und cD.

(5) In Spalte E sind nur noch zwei Felder frei; demnach sind anzukreuzen: bE und dE.

(6) Als Nachbarfelder dazu bleiben frei: bD und dD.

(7) In Spalte G sind nur noch zwei Felder frei, es sind demnach anzukreuzen: bG und dG.

(8) In Zeile a sind nich zwei Felder anzukreuzen, eines davon muss sein: ad.

(9) In Spalte D ist bereits ein Feld angekreuzt, also bleiben frei: eD und gD.

(10) In Zeile d sind zwei Felder angekreuzt, die restlichen bleiben frei, d. h.: dA und dB.

(11) In Spalte A sind anzukreuzen: gA und eA damit bleiben als Nachbarfelder frei (siehe Abbildung 2): gB und eB.

(12) Für die übriggebliebenen Felder bestehen genau zwei Möglichkeiten:
Es werden angekreuzt aA und bB oder bA und aB. Damit gibt es genau zwei Verteilungen der geforderten Art.

1)

	3	1	0	1	2	4	2	
3	×			×		×		a
3		×			×		×	b
1						×		c
2					×		×	d
2	×					×		e
0								f
2	×					×		g
	A	B	C	D	E	F	G	

2)

	3	1	0	1	2	4	2	
3		×		×		×		a
3	×				×		×	b
1						×		c
2					×		×	d
2	×					×		e
0								f
2	×					×		g
	A	B	C	D	E	F	G	

Aufgabe 190913:
Den Ecken eines ebenflächig begrenzten Körpers sollen Zahlen zugeordnet werden. Ist n die Anzahl der Ecken des Körpers, so soll dabei jeder Ecke genau eine der Zahlen $1, ..., n$ zugeordnet werden. Ferner soll erreicht werden: Wenn zu jeder Seitenfläche des Körpers die Summe derjenigen Zahlen gebildet wird, die den Ecken dieser Seitenfläche zugeordnet wurden, so erhält man für jede Seitenfläche des Körpers die gleiche Summe.

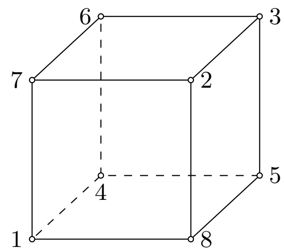
Beweisen Sie, dass eine solche Zuordnung möglich ist, wenn der Körper ein Würfel ist, dagegen nicht beim Tetraeder und nicht beim Oktaeder!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Bei Tetraeder gehört jede Ecke genau drei Seitenflächen an, beim Oktaeder genau vier. Wenn es für diese Körper eine Zuordnung der genannten Art gäbe, so müsste folglich beim Tetraeder das Dreifach, beim Oktaeder das Vierfache der Summe aller vorkommenden Zahlen $1, ..., n$ durch die Anzahl der Seitenflächen teilbar sein.

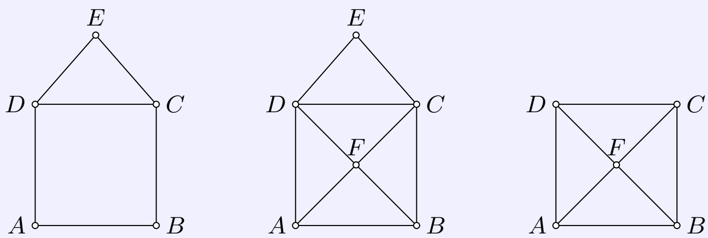
Für das Tetraeder ist diese Bedingung nicht erfüllt; denn die Anzahl der Ecken ist $n = 4$, die Summe der Zahlen von 1 bis 4 ist 10, und das Dreifache dieser Summe ist nicht durch die Anzahl 4 der Seitenflächen teilbar.

Auch für das Oktaeder ist diese Bedingung nicht erfüllt, denn die Anzahl der Ecken ist $n = 6$, die Summe der Zahlen von 1 bis 6 ist 21, und das Vierfache dieser Summe ist nicht durch die Anzahl 8 der Seitenflächen teilbar.

Damit sind die für das Tetraeder und Oktaeder verlangten Beweise geführt. Die Aussage, dass für den Würfel eine Zuordnung der genannten Art möglich ist, kann durch Angabe eines Beispiels bewiesen werden, wie es etwa die Abbildung zeigt.



Aufgabe 200911:
Entscheiden Sie für jede der drei abgebildeten Figuren a, b, c, ob sie in einem Zuge gezeichnet werden kann!



(a) (b) (c)

„In einem Zuge“ soll bedeuten, dass beim Zeichnen jede Strecke genau einmal durchlaufen wird, keine anderen Linien als die in der Figur enthaltenen gezeichnet werden und der Bleistift während des Zeichnens nicht abgesetzt werden muss.

Ist ein solches Zeichnen möglich, so genügt als Lösung die Angabe einer Reihenfolge, in der die mit Buchstaben bezeichneten Punkte nacheinander erreicht werden können, um die gestellte Bedingung zu erfüllen. Anderenfalls ist die Nichtausführbarkeit zu begründen.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Figur in Abbildung (a) kann in einem Zuge gezeichnet werden, z. B. D, A, B, C, D, E, C.

Die Figur in Abbildung (b) kann in einem Zuge gezeichnet werden, z. B. A, F, C, B, F, D, E, C, D, A, B

Die Figur in Abbildung (c) kann nicht in einem Zuge gezeichnet werden.

Begründung: Um die Bedingung zu erfüllen, müsste es für jeden mit einem Buchstaben bezeichneten Punkt zu jeder Strecke, die zu ihm hinführt auch einen solche geben, die von ihm wegführt, damit man diesen Punkt, den man erreicht hat, auch wieder verlassen kann. Ausgenommen davon wäre lediglich Anfangs- und Endpunkt der Zeichnung.

Das heißt mit Ausnahme höchstens zweier Punkte müsste für jeden bezeichneten Punkt gelten, dass die Anzahl der in ihm zusammentreffenden Linien gerade ist. Diese Bedingung ist jedoch nicht erfüllt, da in den Punkten A, B, C und D jeweils 3 Linien zusammentreffen.

Aufgabe 200912:
Zwei Personen, A und B, spielen ein Würfelspiel nach folgenden Regeln:

Zunächst wird eine ganze Zahl Z vereinbart. Dann würfelt jeder mit 4 Würfeln, von denen jeder, wie üblich, die Augenzahlen 1 bis 6 trägt. Gelingt es einem Spieler, unter Benutzung der von ihm mit den vier Würfeln gewürfelten Zahlen (wobei die Zahl auf jedem Würfel genau einmal zu benutzen ist) die vereinbarte Zahl Z zu bilden, so erhält er einen Gewinnpunkt.

Dabei ist gestattet, die vier Zahlen unabhängig von ihrer Reihenfolge durch die Grundrechenarten zu verknüpfen, die Potenzschreibweise zu benutzen, in beliebiger Weise Klammern zu setzen und auch, die auftretenden Zahlen als Ziffern benutzend, aus ihnen mehrstellige Zahlen zu bilden.

Als bei einer Durchführung dieses Spieles die vereinbarte Zahl $Z = 12$ lautete, ergab sich:

Die von A gewürfelten Zahlen waren vier unmittelbar aufeinanderfolgende natürliche Zahlen. Die von B gewürfelten Zahlen waren alle vier gleich ein und derselben natürlichen Zahl.

Zeigen Sie, dass für alle möglichen Würfe, die diesen Bedingungen entsprechen, sowohl der Spieler A als auch der Spieler B einen Gewinnpunkt erreichen konnte!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
A hatte einen der Würfe 1, 2, 3, 4; 2, 3, 4, 5; 3, 4, 5, 6;

B hatte einen der Würfe 1, 1, 1, 1; 2, 2, 2, 2; ...; 6, 6, 6, 6 erhalten. Die Zahl $Z = 12$ kann aus diesen Würfen in der verlangten Weise z. B. folgendermaßen gebildet werden:

$1 \cdot 2^3 + 4 = 12$	$2 \cdot (4 + 5 - 3) = 12$	$6 \cdot (3 + 4 - 5) = 12$
$1 \cdot 11 + 1 = 12$	$2 \cdot (2 + 2 + 2) = 12$	$3 + 3 + 3 + 3 = 12$
$4 \cdot (4 - 4 : 4) = 12$	$(55 + 5) : 5 = 12$	$6 + 6 + 6 - 6 = 12$

Aufgabe 210911:
Während einer Fußballmeisterschaft spielten im Halbfinale die vier Mannschaften A, B, C und D. Über den Ausgang der Spiele und damit die Ermittlung der beiden Mannschaften für das Endspiel machten Kenner der vier Mannschaften folgende Voraussagen:

(1) Das Endspiel wird lauten: B gegen C.

(2) Das Endspiel wird nicht lauten: A gegen B.

(3) Das Endspiel wird lauten: C gegen D.

(4) Wenn A das Endspiel erreicht, dann erreicht B nicht das Endspiel.

(5) Das Endspiel wird von zwei der Mannschaften B, C, D bestritten.

Nach dem Halbfinale stellte sich heraus, dass genau zwei der Voraussagen (1) bis (5) falsch waren.

Zeigen Sie, dass es aufgrund dieser Angaben möglich ist, die beiden Mannschaften zu ermitteln, die das Endspiel erreichten!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wäre (2) falsch, so hätte das Endspiel A gegen B gelautet, und dann wären auch alle Aussagen (1), (3), (4), (5) falsch, in Widerspruch dazu, dass nur zwei falsche Aussagen auftreten.

Daher ist (2) wahr. Daraus folgt, dass auch (4) wahr ist; denn aus der Voraussetzung, A werde das Endspiel erreichen, ergibt sich wegen der Wahrheit von (2) die Schlussfolgerung, dass B nicht das Endspiel erreichte.

Wäre (5) falsch, so wäre auch (1) und (3) falsch, im Widerspruch dazu, dass genau zwei Aussagen (1) bis (5) falsch sind. Also ist (5) wahr.

Da (2), (4) und (5) wahr sind, sind genau die beiden Aussagen (1) und (3) falsch. Hiernach verbleibt von den Möglichkeiten, (5) zu erfüllen, genau die, dass das Endspiel B gegen D lautete.

Aufgabe 210912:
Herr Schulze trifft nach langer Zeit Herrn Lehmann und lädt ihn zu sich nach Hause ein. Unterwegs erzählt er Herrn Lehmann, dass er Vater von drei Kindern ist. Herr Lehmann möchte wissen, wie alt diese sind; ihm genügen Angaben in vollen Lebensjahren.

Herr Schulze antwortet: „Das Produkt der drei Altersangaben beträgt 72. Die Summe der drei Altersangaben ist meine Hausnummer. Wir sind gerade an unserem Haus angekommen; Sie sehen meine Nummer.“ Darauf erwidert Herr Lehmann: „Aus diesen Angaben kann man aber die drei Altersangaben nicht eindeutig ermitteln.“ „Das stimmt“, meint Herr Schulze, „aber irgendwann zwischen der Geburt des zweiten und des dritten Kindes hat der Bau dieses Hauses stattgefunden. Ein Jahr und einen Tag lang haben wir an dem Haus gebaut.“ „Vielen Dank! Nun kann man die Altersangaben eindeutig ermitteln“, beschließt Herr Lehmann das Gespräch.

Untersuchen Sie, ob es eine Zusammenstellung von drei Altersangaben gibt, für die alle Aussagen dieses Gespräches zutreffen! Untersuchen Sie, ob es nur eine solche Zusammenstellung, gibt! Wenn das der Fall ist, ermitteln Sie diese!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Aussage über das Produkt der drei Altersangaben trifft genau für die folgenden Zusammenstellungen zu:

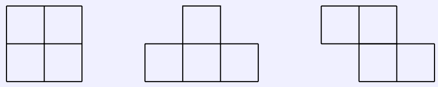
1. Kind	72	36	24	18	12	9	18	12	9	**6**	8	6
2. Kind	1	2	3	4	6	8	2	3	4	**6**	3	4
3. Kind	1	1	1	1	1	1	2	2	2	**2**	3	3

Herrn Lehrmanns Aussage „Aus diesen Angaben kann man aber die drei Altersangaben nicht eindeutig ermitteln“ trifft hiernach genau dann zu, wenn die Hausnummer 14 beträgt. Die nächste Aussage von Herrn Schulte trifft genau dann zu, wenn das 3. Kind um mindestens ein Jahr jünger ist als das 2. Kind.

Daher trifft die abschließende Aussage von Herrn Lehmann genau dann zu, wenn die Altersangaben 6, 6 und 2 lauten.

Daher ist gezeigt: Es gibt eine Zusammenstellung der drei Altersangaben, für die alle Aussagen des Gesprächs zutreffen; es gibt auch nur eine solche Zusammenstellung; sie lautet 6, 6 und 2.

Aufgabe 220912:
Ist n eine natürliche Zahl mit $n \geq 2$, so bezeichne F_n eine quadratische Fläche, die wie ein Schachbrett in n gleich große quadratische Felder unterteilt ist. Ferner sei von Papptäfelchen der abgebildeten Formen (a), (b), (c) jeweils eine beliebige Anzahl vorhanden.



(a) (b) (c)

(Jedes dieser Täfelchen besteht aus vier gleich großen quadratischen Feldern, deren jedes den n^2 Feldern von F_n kongruent ist.)

Die Fläche F_n soll mit derartigen Täfelchen lückenlos bedeckt werden, und zwar soll dabei von jeder der Sorten (a), (b), (c) mindestens ein Täfelchen verwendet werden. Außerdem soll kein Feld von F_n mehrfach überdeckt werden und kein Täfelchen über F_n hinausragen.

a) Beweisen Sie, dass diese Bedingungen für alle ungeraden n und für alle $n \leq 4$ nicht erfüllbar sind!

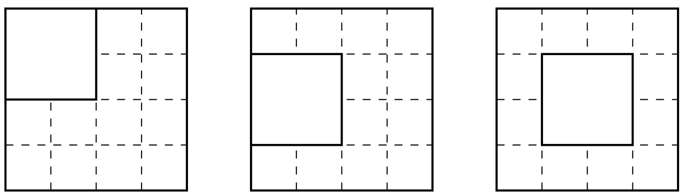
b) Zeigen Sie, dass die Bedingungen für $n = 6$ erfüllbar sind!

c) Untersuchen Sie, für welche geraden Zahlen $n \geq 8$ die Bedingungen erfüllbar sind!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Für ungerades n ist die Anzahl n^2 der Felder von F_n ungerade, während bei beliebiger Zusammenstellung von Täfelchen stets eine durch 4 teilbare, also gerade Anzahl von Feldern entsteht. Daher sind die Bedingungen für ungerades n nicht erfüllbar.

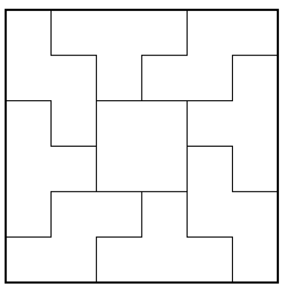
Kommt in einer Fläche F_n von jeder Sorte (a), (b), (c) mindestens ein Täfelchen vor, so muss $n^2 \geq 12$ sein. Also sind die Bedingungen für $n \leq 3$ nicht erfüllbar.

Für $n = 4$ gilt: Wären die Bedingungen erfüllbar, so käme auch ein Täfelchen der Form (a) vor. Hierfür gäbe es o. B. d. A. nur die drei angegebenen Möglichkeiten in der Abbildung:

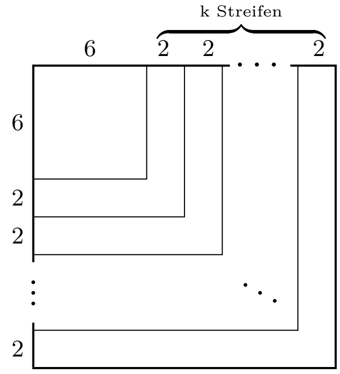


In allen drei Fällen kann die verbleibende Restfläche nicht so in Täfelchen der Formen (a), (b) oder (c) zerlegt werden, dass dabei die Formen (b) und (c) auch vorkommen. Daher sind die Bedingungen für $n = 4$ ebenfalls nicht erfüllbar.

b) Die Abbildung zeigt eine Belegung von F_6 die alle Bedingungen erfüllt.



c) Jede gerade Zahl $n \geq 8$ lässt sich in der Gestalt $n = 6 + 2k$ ($k = 1,2,3,...$) darstellen. Hiernach kann die Fläche F_n in eine 6×6 Feld und k Streifen der Breite 2 aufgeteilt werden. (siehe Abbildung)

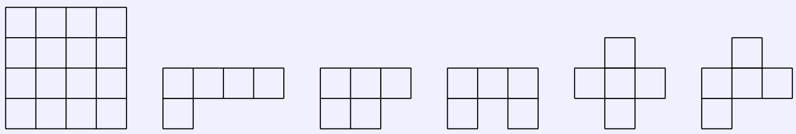


Diese lassen sich durch Täfelchen der Form (a) überdecken. Daher und nach b) kann insgesamt F_n in der geforderten Weise überdeckt werden.

Aufgabe 240911:

a) Ein quadratisches Feld aus 25 Einheitsquadraten (Bild a) soll so zerlegt werden, dass jedes Teilstück zu einer der (aus jeweils fünf Einheitsquadraten bestehenden) Figuren in Bild b bis f kongruent ist und dass dabei auch jede dieser Figuren mindestens einmal vorkommt. Geben Sie eine derartige Zerlegung an!

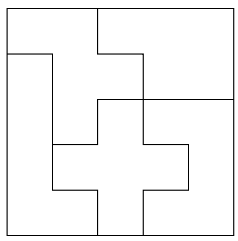
b) Ermitteln Sie alle diejenigen natürlichen Zahlen $n > 0$, für die eine solche Zerlegung eines $n \times n$-Feldes möglich ist!



(a) (b) (c) (d) (e) (f)

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

a) Ein Beispiel einer gesuchten Zerlegung zeigt die Abbildung.



b) (I) Wenn für eine natürliche Zahl $n > 0$ eine solche Zerlegung des quadratischen Feldes möglich ist und wenn dabei k die Anzahl der entstehenden Teilstücke ist, so besteht das Feld aus $5k$ Einheitsquadraten, also gilt $n^2 = 5k$. Daher ist n^2 durch 5 teilbar und folglich, weil 5 Primzahl ist, auch n durch 5 teilbar.

(II) Wenn n durch 5 teilbar ist, so kann man die Seitenlänge des quadratischen Feldes in Teilstrecken zerlegen, deren jede eine Länge von 5 Einheitsstrecken hat; somit kann man dass das quadratische Feld in quadratische Teilfelder einer Seitenlänge von jeweils 5 Einheitsstrecken zerlegen.

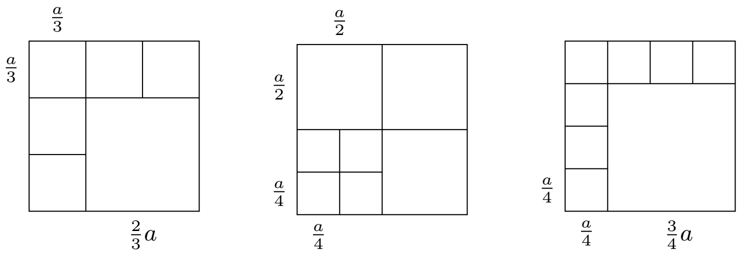
Jedes dieser Teilfelder lässt sich nach (a) auf die geforderte Weise zerlegen; damit existiert auch für das gesamte Feld eine derartige Zerlegung.

Mit (I) und (I) ist bewiesen: Die gesuchten Zahlen $n > 0$ sind genau alle diejenigen, die durch 5 teilbar sind.

Aufgabe 250913:
Man beweise:

Für jede natürliche Zahl n mit $n \geq 6$ ist es möglich, eine Quadratfläche in n (nicht notwendig kongruente) Teilquadratflächen zu zerlegen.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Eine Zerlegung einer Quadratfläche in 6, 7 bzw. 8 Teilquadratflächen ist möglich, wie die Abbildung zeigt.

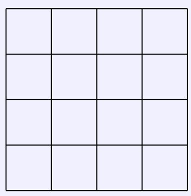


Da man durch Weiterzerlegen einer Teilquadratfläche in 4 kongruente neue Teilquadratflächen die Anzahl der Teilquadratflächen jeweils um 3 erhöhen kann, erhält man so fortlaufend die Zerlegung einer Quadratfläche in n Teilquadratflächen mit

$$n = 6 + 3 = 9, \qquad n = 7 + 3 = 10, \qquad n = 8 + 3 = 11, \qquad n = 9 + 3 = 12, \qquad \text{usw.}$$

Damit ist der verlangte Beweis geführt.

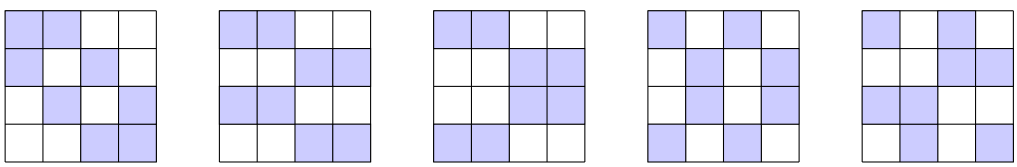
Aufgabe 260911:



In dem abgebildeten Quadrat mit 4×4 Teilquadraten sollen 8 von diesen 16 Teilquadraten so gekennzeichnet werden, dass in jeder Zeile, in jeder Spalte und in den beiden Diagonalen genau zwei Teilquadrate gekennzeichnet sind.

Geben Sie fünf voneinander verschiedene Lösungen der Aufgaben an, d. h. Lösungen, von denen sich keine zwei durch Spiegelung oder Drehung ineinander überführen lassen! Eine Begründung wird nicht verlangt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Abbildung zeigt fünf voneinander verschiedene Lösungen der Aufgabe. (Man kann auch beweisen, dass es keine von diesen verschiedene Lösung gibt)



Aufgabe 280914:
Drei Werkstücke W_1, W_2, W_3 durchlaufen eine Taktstraße mit vier Bearbeitungsmaschinen M_1, M_2, M_3, M_4. Dabei muss jedes Werkstück die Maschinen in der Reihenfolge M_1, M_2, M_3, M_4 durchlaufen, und an jeder Maschine soll die Reihenfolge der drei Werkstücke dieselbe sein.

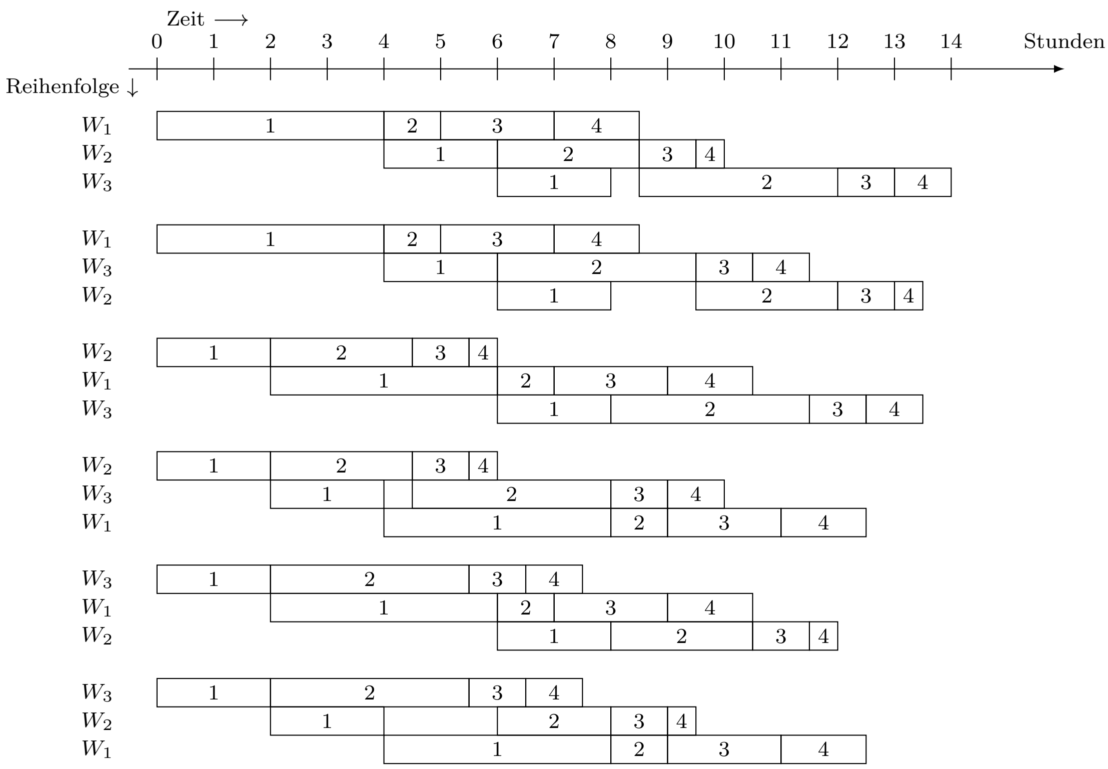
Die Bearbeitungszeiten der Werkstücke auf den einzelnen Maschinen sind (in Stunden) in der folgenden Tabelle angegeben:

	M_1	M_2	M_3	M_4
W_1	4	1	2	1,5
W_2	2	2,5	1	0,5
W_3	2	3,5	1	1

Es können niemals zwei Werkstücke gleichzeitig auf derselben Maschine bearbeitet werden. Die Zeiten zum Wechseln der Werkstücke an den Maschinen seien so klein, dass sie vernachlässigt werden können.

Geben Sie eine Reihenfolge der drei Werkstücke für das Durchlaufen der Taktstraße so an, dass die Gesamtzeit (das ist die Zeit vom Eintritt des zuerst eingegebenen Werkstücks in die Maschine M1 bis zum Austritt des zuletzt bearbeiteten Werkstücks aus der Maschine M4) so klein wie möglich ist! Zeigen Sie, dass die von Ihnen angegebene Reihenfolge mit ihrer Gesamtzeit die jeder anderen Reihenfolge unterbietet!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



(Maschinenbezeichnung kurz 1,2,3,4 statt M_1, M_2, M_3, M_4)

In den Darstellungen des zeitlichen Ablaufs wird für jede der sechs möglichen Reihenfolgen dreier Werkstücke die Gesamtzeit ermittelt, die sich ergibt, wenn man in jede Maschine das jeweils nächste Werkstück (der vorgesehenen Reihenfolge) möglichst bald einführt.

Beim Vergleich dieser Darstellungen ergibt sich:

Die Reihenfolge W_3, W_1, W_2 unterbietet mit ihrer Gesamtzeit die jeder anderen Reihenfolge.

Hinweise:

Möglich ist auch ein sehr argumentierendes Vorgehen. Beispielsweise kann man zuerst feststellen, für welche Reihenfolge sich bei der Berechnung der

- Summe der Zeiten des ersten und des zweiten Werkstücks in M_1 plus Summe der Zeiten des dritten Werkstücks in M_1,M_2,M_3 und M_4 (1)

ein möglichst kleiner Wert ergibt. Statt der Summe (1) kann man einfacher

- die Summe der Zeiten des dritten Werkstücks in M_2, M_3 und M_4 (2)

heranziehen. Nach der Tabelle im Aufgabentext hat diese Summe genau für W_2 als drittes Werkstück den kleinsten Wert (nämlich 4; dagegen für W_1 den Wert 4,5 und für W_3 den Wert 5,5). Dann kann man untersuchen, ob bei einer der Reihenfolgen mit W_2 als drittem Werkstück gilt, dass

- W_2 die Maschinen M_1, M_2, M_3, M_4 ohne Wartezeiten durchlaufen kann. (3)

Ist das der Fall, so folgt: Diese Reihenfolge unterbietet mit ihrer Gesamtzeit die Gesamtzeiten aller Reihenfolgen, die (1) bzw. (2) nicht so klein wie möglich machen.

(Man beachte: Ohne die Aussage (3) wäre ein solcher Schluss nicht gesichert!) Schließlich ist dann noch eine Reihenfolge, die (3) erfüllt, mit der anderen, in der auch W_2 als drittes Werkstück läuft, zu vergleichen. Die Untersuchung auf (3) sowie der eben genannte Vergleich kann z. B. durch die zwei obenstehenden Darstellungen zu W_1,W_3,W_2 und W_3,W_1,W_2 erfolgen. Die Überlegung zu (1), (2) hat also vier solche Darstellungen eingespart.

Aufgabe 290913:
Bei einem Abzählspiel stehen 11 Kinder in einem Kreis. Eines dieser Kinder sagt den Abzählvers auf; dabei wird im Uhrzeigersinn bei jeder Silbe ein Kind weiter gezählt. Auch der Spieler, der den Abzählvers aufsagt, wird in das Abzählen einbezogen. Der Abzählvers hat 15 Silben. Das Kind, auf das die letzte Silbe trifft, verlässt den Kreis; beim nachfolgenden Kind wird das Abzählen wieder mit dem Anfang des Abzählverses fortgesetzt. Dieses Abzählen und Ausscheiden erfolgt so lange, bis nur noch ein Spieler im Kreis ist; dieser Spieler hat gewonnen.
a) Bei welchem Kind muss der abzählende Spieler beginnen, wenn er selbst gewinnen will? (Um die Antwort zu formulieren, nummeriere man die Kinder und gebe etwa dem abzählenden Spieler die Nummer 1.)
b) Falls Sie die Möglichkeit haben, an einem (Klein-)Computer zu arbeiten, sollten Sie ein Programm schreiben, mit dem sich Aufgabe a) für Abzählspiele mit k Kindern und einem Abzählvers aus s Silben lösen lässt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) I. Man kann zunächst zur Vereinfachung die Silbenzahl durch jeweils möglichst kleine positive Werte ersetzen. Wegen $15 = 1 \cdot 11 + 4$ wird nämlich beim Anzählen die Runde der Kinder erst 1 mal ganz durchlaufen, und danach verbleiben nur noch 4 Silben. Auf diese Weise folgt: Wenn im Kreis jeweils nur noch

$$11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2$$

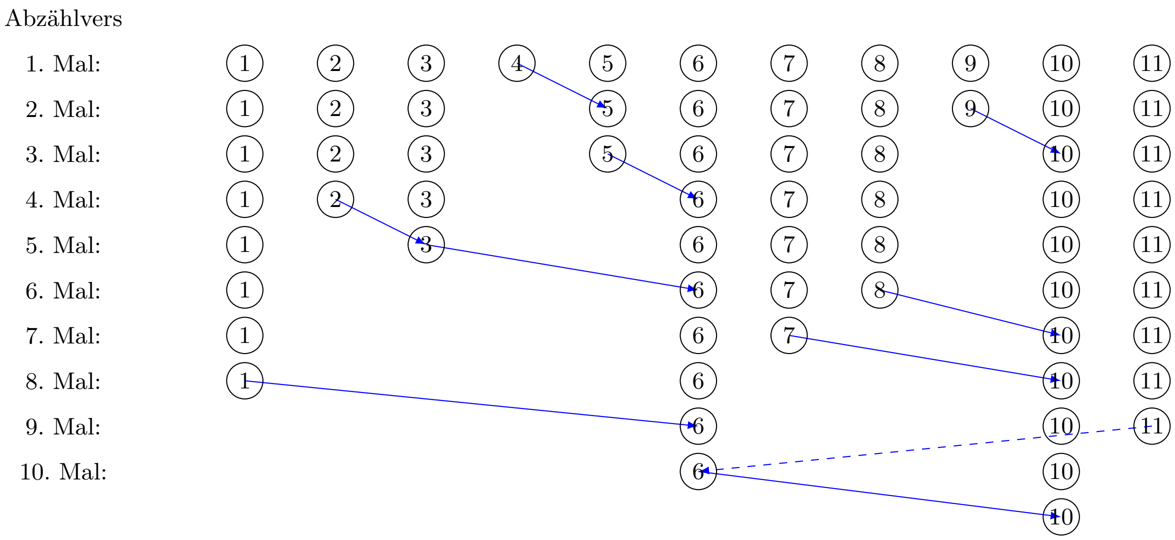
Kinder stehen, so kann wegen

$$15 = 1\cdot 11+4 = 1\cdot 10+5 = 1\cdot 9+6 = 1\cdot 8+7 = 2\cdot 7+1 = 2\cdot 6+3 = 2\cdot 5+5 = 3\cdot 4+3 = 4\cdot 3+3 = 7\cdot 2+1$$

die Silbenzahl ersetzt werden durch

$$4, 5, 6, 7, 1, 3, 5, 3, 3, 1$$

II. Nun kann man (mit der Vereinfachung I. oder ohne sie) das Anzählen mit einem bei Kind 1 beginnenden „Probespiel“ verfolgen:



III. Es bleibt also dasjenige Kind übrig, das ausgehend von Kind 1 durch Weiterzählen um 9 (in der ursprünglichen Aufstellung) zu erreichen wäre. Der Spielbeginn, der zum gewünschten Übrigbleiben von Kind 1 führt, wird daher gefunden, indem man in der ursprünglichen Aufstellung von Kind 1 an um 9 zurückzählt. Damit findet man:

Wenn Kind 1 gewinnen soll, so muss das Auszählen bei Kind 3 beginnen.

b) Die Aufgabe wird z. B. durch folgendes BASIC-Programm gelöst:

```
100 INPUT "Kinderzahl"; K
110 INPUT "Silbenzahl"; S
120 DIM M(K)
130 FOR N=K TO 2 STEP -1
140   T = S - N * INT(S/N)
150   IF T = 0 THEN T = N
160   FOR I = 1 TO T
170    GOSUB 300
180   NEXT I
190   M(A) = 1
200 NEXT N
210 GOSUB 300
220 B = 2 - A
230 IF B < 1 THEN B = B+K
240 PRINT "Beginne bei Kind"; B; "!"
250 END
300 REM ABZAEHLEN
310 A = A+1
320 IF A > K THEN A = 1
330 IF M(A)= 1 THEN 310
340 RETURN
```

Bedeutung der Variablen: K Anzahl der Kinder, S Anzahl der Silben, A Nummer des beim Abzählen erreichten Kindes, $M(A)$ Marke 0 oder 1: Kind A ist noch im Spiel oder ausgeschieden, N Anzahl der noch im Spiel befindlichen Kinder, T Ersatzwert für die Silbenzahl, I Zählschritt

Programmteile:

100 bis 120 Eingeben, Speicher reservieren,

300 bis 340 Unterprogramm „Weiterzählen zum nächsten noch im Spiel befindlichen Kind“

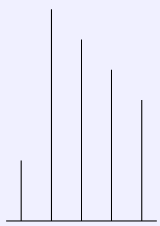
130 bis 210 „Probespiel„:

140 bis 150 Division von S durch N mit Rest T ergibt die vereinfachte Silbenzahl T; nur ist 0 durch N zu ersetzen

160 bis 210 Nach T Zählschritten scheidet das erreichte Kind aus. Am Ende des „Probespieles“ noch ein Zählschritt bis zum einzigen noch im Spiel befindlichen Kind.

220 bis 240 Ermittlung und Ausgabe der Antwort: Statt um $A-1$ vorwärts, ebenso viel zurückzählen bis $1-(A-1)=2-A$; dies ggf. um K korrigieren.

Aufgabe 300914:
Ansgar, Bernd und Christoph sehen auf einer Wanderung die Schornsteine eines Kraftwerkes aus genau südlicher Richtung und später aus genau westlicher Richtung. Ansgar fertigte jeweils eine maßstabsgerechte Skizze an. Dabei war in beiden Fällen niemals ein kleinerer Schornstein genau vor einem größeren zu sehen (siehe Abbildungen).
Während der Wanderung stellen die Freunde außerdem fest, dass das Kraftwerk genau sieben Schornsteine hat, von denen keine zwei die gleiche Höhe haben.


Blick aus südlicher Richtung

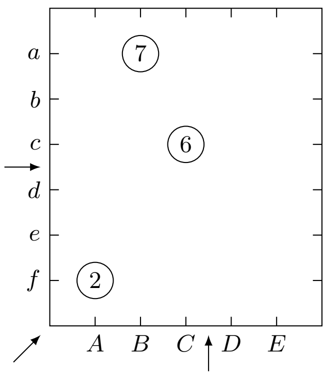

Blick aus westlicher Richtung

Bernd meint: „Aus südwestlicher Richtung waren nur vier Schornsteine zu sehen.“ Christoph korrigierte ihn: „Es waren genau fünf Schornsteine, einer von ihnen stand vor einem größeren.“

Schließlich bemerken sie, dass der drittkleinste Schornstein aus keiner der drei Beobachtungsrichtungen (südlich, westlich, südwestlich) zu sehen war, sondern jeweils durch einen größeren verdeckt wurde.

Ermitteln Sie alle Anordnungen von Schornsteinen auf einem Gelände, die nach diesen Beobachtungen möglich sind! Dabei sei angenommen, dass die Korrektur von Bernds Aussage durch Christoph den Tatsachen entspricht.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Bezeichnen wir die Schornsteine - beim kleinsten beginnend - mit 1 bis 7 und die möglichen Standorte nach der Abbildung durch Buchstabenpaare (Aa) bis (Ef), so ergeben sich aus den Abbildungen der Aufgabenstellung sofort die Standorte für 2, 6, 7.



Ferner müssen 5 und 4 aus westlicher Richtung durch 6 oder 7 verdeckt sein; hiernach und wegen der linken Aufgabenabbildung kann 5 nur aus (Da) oder (Dc) und 4 nur auf (Ea) oder (Ec) stehen.

Da 3 aus westlicher Richtung von einem größeren Schornstein verdeckt ist, scheiden nun für 3 die waagerechten Reihen b, d, e, f aus. Da 3 auch aus südwestlicher Richtung verdeckt ist, scheiden (Ca), (Da), (Dc), (Ec) aus, also muss 3 auf (Ea) stehen.

Damit 3 dann auch aus südlicher Richtung verdeckt ist, folgt: 4 steht auf (Ec).

Hiernach sind aus südwestlicher Richtung bereits 7, 6, 2, 4 zu sehen, und für 5 scheidet (Da) aus, also steht 5 auf (Dc).

Nun folgt weiter:

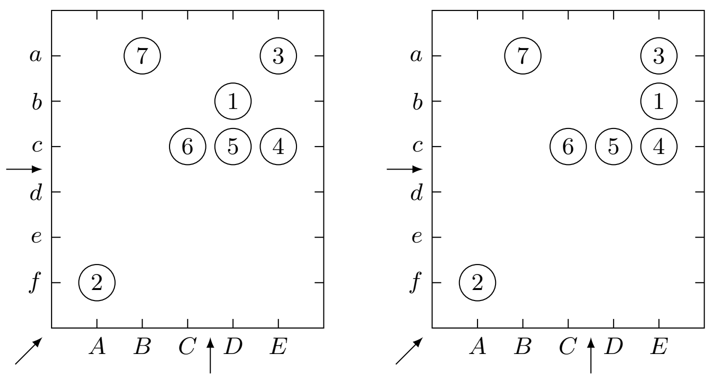
1 muss auf Linie b stehen.

Stünde 1 auf (Ab), so wären aus SW zwei kleinere vor einem größeren Schornstein zu sehen.

Stünde 1 auf (Bb), so wäre aus S ein kleinerer vor einem größeren Schornstein zu sehen.

Stünde 1 auf (Cb), so wären aus SW fünf Schornsteine nebeneinander zu sehen.

Steht 1 auf (Db) oder (Eb), so sind alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt. Also sind genau díe beiden Anordnungen der nachfolgenden Abbildung möglich.



Aufgabe 310913:
Beweisen Sie die folgende Aussage!

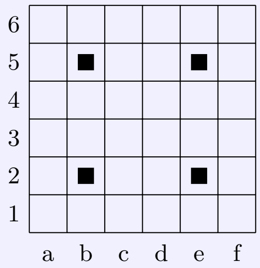
Wenn ein ebenflächig begrenzter Körper eine Oberfläche besitzt, die ausschließlich aus Dreiecksflächen zusammengesetzt ist, so kann deren Anzahl nicht ungerade sein.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Anzahl der Dreiecksflächen, aus denen die Oberfläche eines Körpers zusammengesetzt ist, sei f. Die Anzahl der Kanten, die an der Oberfläche dieses Körpers auftreten, sei k. Zählt man zu jeder der f Flächen ihre drei Kanten auf, so ergibt sich eine Aufzählung von insgesamt $3f$ Kanten. In dieser Aufzählung ist jede Kante genau zweimal erfasst, da an jeder Kante genau zwei der Dreiecksflächen zusammenstoßen. Also gilt:

$$3f = 2k$$

somit ist $f = 2(k - f)$ eine gerade Zahl, w. z. b. w.

Aufgabe 320913:



Auf einem 6×6-Felder-Brett (siehe Abbildung) sind die Felder b2, b5, e2 und e5 besetzt, die anderen Felder sind frei. Ein Springer des Schachspiels soll (in seiner Gangart) so geführt werden, dass er jedes freie Feld genau einmal erreicht.

a) Geben Sie einen solchen Weg an, der auf a1 beginnt und auf f1 endet!
b) Geben Sie einen solchen Weg an, der auf einem Feld endet, von dem aus das Anfangsfeld des Weges mit einem einzigen Springerzug erreichbar ist!

c) Besetzen Sie nun vier andere Felder des Brettes so, dass es für den Springer keinen Weg gibt, der jedes freie Feld genau einmal erreicht! Begründen Sie, dass es (bei Ihrer Wahl besetzter Felder) keinen solchen Weg gibt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

7	2	5
4	■	8
1	6	3

Ein Teilfeld wie in der Abbildung kann auf dem Weg 1 - 2 - ... - 8 oder umgekehrt 8 - 7 - ... - 1 oder auf einem durch Spiegelung oder Drehung entstehenden Weg durch laufen werden.

a) Daher ist z. B. das Durchlaufen der Teilfelder (links unten) - (links oben) - (rechts oben) - (rechts unten) so möglich, dass dabei jeweils in den Teilfeldern (a1 - ... - c2) - (b4 - ... - c6) - (d4 - ... - f5) - (e3 - ... - f1) auftreten.

b) Ebenso ist beispielsweise der Weg (c1 - ... - b3) - (a5 - ... - c4) - (d6 - ... - e4) - (f2 - ... - d3) - c1 möglich.

c) Denkt man sich die Felder wie auf einem Schachbrett abwechselnd schwarz und weiß gefärbt, so besteht jeder Weg eines Springer abwechselnd aus schwarzen und weißen Feldern. Von seinen 32 Feldern müssen also 16 schwarz und 16 weiß sein.

Besetzt man daher vier Felder so, dass nicht je 16 schwarze und weiße Felder frei bleiben, so existiert kein Weg der genannten Art. Beispielsweise wird dies erreicht, wenn a1, a3, c1, c3 als besetzte Felder gewählt werden.

Aufgabe 330911:
Christa und Jürgen spielen ein Spiel nach folgenden Regeln:

Die Spieler legen abwechselnd je einen Dominostein auf ein streifenförmiges Spielbrett aus 9 Feldern (siehe Skizze). Jeder Dominostein soll genau zwei Felder belegen; kein Feld darf mehrfach belegt werden. Das Spiel ist beendet, sobald ein Spieler nicht mehr legen kann; dieser Spieler hat dann verloren.

Das Spiel macht den beiden bald keinen Spaß mehr. Woran kann das liegen?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Der nachziehende Spieler kann stets den Gewinn erzwingen.

Setzt nämlich das anziehende Spieler seinen ersten Stein auf eines der Felderpaare (1,2), (2,3), (3,4), (4,5), so kann der Nachziehende auf (6,7) setzen, und danach hat jeder der beiden Spieler noch genau eine Setzmöglichkeit, was für den Anziehenden den Verlust zur Folge hat. Dasselbe gilt, wenn der Nachziehende eine der Anfangsmöglichkeiten (8,9), (7,8), (6,7), (5,6) mit (3,4) beantwortet.

Aufgabe 340911:
Frank und Felix denken sich das *kleinste Schach der Welt* aus:
- Das Spielfeld hat 2×4 Felder.
- Weiß spielt mit den Figuren König, Dame und zwei Bauern; Schwarz ebenso.
- Zu Anfang werden die Figuren wie in der Abbildung aufgestellt.
- Dann wird nach den Regeln des üblichen Schachspiels verfahren, sofern der Platz für ihre Anwendung ausreicht. (Erkundigen Sie sich nötigenfalls nach den Regeln!)

Frank stellt drei Behauptungen auf: Es sei möglich, so zu spielen, dass
a) das Spiel unentschieden endet,
b) Weiß gewinnt,
c) Schwarz gewinnt.

Beweisen Sie, dass die drei Behauptungen zutreffen.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Zum Beweis genügt es, je ein Beispiel einer Partie anzugeben:

a) **1.** a2:b3, Da4:b3, **2.** Da1:a3+, Db3:a3, **3.** b2:a3+, Kb4:a3 Remis, da nur noch die Könige auf dem Brett sind.

b) **1.** a2:b3, a3:b2, **2.** Da1:a4 matt.

c) **1.** a2:b3, Kb4:a3, **2.** b2:a3, Da4:a3, **3.** Da1-a2+, Da3:a2 matt.

II Runde 2

Aufgabe V10925:
Wie kann man unter 9 gleichgroßen Kugeln, unter denen sich eine befindet, deren Gewicht mit dem der anderen nicht übereinstimmt, bei nur 3 Wägungen diese Kugel herausfinden und gleichzeitig feststellen, ob sie leichter oder schwerer als die anderen Kugeln ist?

Lösung von J. Lehmann und W. Unze:
1. Wägung: Vergleich (1) (2) (3) mit (4) (5) (6), bei Gleichheit
2. Wägung: Vergleich (7) und (8),
- bei Ungleichheit ist (7) leichter (schwerer) als (8) und mit 3. Wägung Vergleich (7) und (1) ist bei Gleichheit (8) schwerer (leichter) als alle anderen Kugeln. Bei Ungleichheit ist (7) leichter (schwerer) als alle anderen Kugeln.
- bei Gleichheit der 2. Wägung folgt 3. Wägung: (9) und (1). Hiermit ergibt sich, ob (9) leichter oder schwerer als (1) und damit aller anderen Kugeln ist.

1. Wägung: Vergleich (1) (2) (3) mit (4) (5) (6) und Ungleichheit, d. h. (1) (2) (3) leichter (schwerer) als (4) (5) (6)
2. Wägung: (1) (2) (3) und (7) (8) (9)
bei Gleichheit 3. Wägung (4) und (5), bei Gleichheit ist (6) schwerer (leichter) als die anderen Kugeln.
Bei Ungleichheit von (1) (2) (3) und (7) (8) (9) folgt 3. Wägung (1) und (2).
Bei Gleichheit ist (3) leichter (schwerer) als die anderen, bei Ungleichheit, d. h. (1) leichter oder schwerer als (2) ergibt sich, welche dieser beiden leichter oder schwerer als die anderen ist.

Aufgabe 010935:
In einem Abteil des Pannonia-Express sitzen sechs Fahrgäste, die in Berlin, Rostock, Schwerin, Erfurt, Cottbus und Suhl ihren Wohnsitz haben. Die Anfangsbuchstaben ihrer Namen sind A, B, C, D, E, und F (die Reihenfolge der Namen entspricht nicht der Reihenfolge der Wohnsitze). Aus Gesprächsfetzen entnehmen wir folgende Tatsachen:

(a) Zwei Fahrgäste, und zwar A und der Berliner, sind Ingenieure.
(b) Zwei Fahrgäste, und zwar E und der Rostocker, sind Dreher.
(c) Zwei Fahrgäste, und zwar C und der Schweriner, sind Kranführer.
(d) B und F sind aktive Sportler, der Schweriner treibt nicht Sport.
(e) Der Fahrgast aus Cottbus ist älter als A, der Fahrgast aus Suhl ist jünger als C.
(f) Zwei Fahrgäste, und zwar B und der Berliner, wollen in Prag aussteigen. Zwei Fahrgäste, und zwar C und der Cottbusser, wollen bis Budapest fahren.

Welches sind die Namen, Berufe und Wohnsitze der einzelnen Fahrgäste?

Lösung von Christiane Behns:

	A	B	C	D	E	F
Berlin	☐		☐		☐	
Rostock	☐		☐		☐	
Schwerin	☐		☐		☐	
Cottbus						
Suhl						
Erfurt						

a-c)

	A	B	C	D	E	F
Berlin	☐	☐	☐		☐	
Rostock	☐		☐		☐	
Schwerin	☐	☐	☐		☐	☐
Cottbus	☐		☐			
Suhl			☐			
Erfurt						

a-f)

	A	B	C	D	E	F
Berlin	☐	☐	☐	☐	☐	☒
Rostock	☐	☐	☒	☐	☐	☐
Schwerin	☐	☐	☐	☒	☐	☐
Cottbus	☐	☐	☐	☐	☒	☐
Suhl	☒	☐	☐	☐	☐	☐
Erfurt	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Wegen d) und f) kommt B weder aus Schwerin noch aus Berlin. Da er aber einen der drei Berufe aus a)–c) haben muss, kommt er aus Rostock.
Wegen b) und c) kommt C weder aus Rostock, noch aus Berlin oder Schwerin, wegen e) nicht aus Suhl und wegen f) nicht aus Cottbus. Also muss er aus Erfurt kommen.
A kommt wegen a)–c) weder aus Berlin noch aus Rostock oder Schwerin. Wegen e) kommt er nicht aus Cottbus und aus Erfurt kommt bereits C. Also kommt A aus Suhl.
Da E wegen a)–c) weder aus Berlin noch aus Schwerin kommt und alle übrigen Städte bereits zugeordnet sind, kommt er aus Cottbus.
Da alle 6 Personen in verschiedenen Städten wohnen, ergibt sich nun leicht die folgende Aufstellung: A ist Ingenieur aus Suhl, B ist Dreher aus Rostock, C ist Kranführer aus Erfurt, D ist Kranführer aus Schwerin, E ist Dreher aus Cottbus und F ist Ingenieur aus Berlin.

Aufgabe 030925:
a) Wie müssen 1023 Kugeln auf 10 Säckchen verteilt werden, damit man jede Anzahl von 1 bis 1023 Kugeln zusammenstellen kann, ohne ein Säckchen zu öffnen.
b) Wie viel Säckchen werden mindestens benötigt, damit man jede Anzahl von 1 bis 3 000 Kugeln zusammenstellen kann?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Bei der Verteilung der Kugeln auf die Säckchen kann man sich am Binärsystem orientieren, da man für jeden Sack nur 2 Möglichkeiten bei der Zusammenstellung einer Anzahl hat, man nimmt ihn, oder man nimmt ihn nicht.
Die Säckchen müssen damit den Zweierpotenzen entsprechen.
Das ergibt folgende Kugelverteilung:

$$1 - 2 - 4 - 8 - 16 - 32 - 64 - 128 - 256 - 512$$

b) Um nach demselben Verfahren Anzahlen bis 3000 darstellen zu können, müssen 2 weitere Säckchen hinzugenommen werden, gefüllt mit 1024 und 2048 Kugeln.

Aufgabe 040924:
Jutta, Günter und Klaus nehmen an der zweiten Stufe der Mathematikolympiade teil.

(1) Sie arbeiten (nicht notwendig in dieser Reihenfolge) in den Räumen 48, 49, 50.

(2) Jutta und Günter sind gleichaltrig, Klaus ist ein Jahr älter als Jutta.

(3) Ihre drei Mathematiklehrer, Herr Adler, Herr Bär und Herr Drossel, führen in diesen drei Räumen während der Arbeit Aufsicht, keiner jedoch in dem Raum, in dem sein Schüler arbeitet.

(4) Herr Bär hat den gleichen Vornamen wie sein Schüler.

(5) Die Nummer des Raumes, in dem Herr Drossel Aufsicht führt, entspricht dem Eineinhalbfachen seines Alters.

(6) Günters Raum hat eine höhere Nummer als der von Klaus.

(7) Die drei Schüler sind zusammen gerade so alt, wie die Nummer des Raumes angibt, in dem Jutta arbeitet.

(8) Jutta kennt Herrn Drossel nicht.

Welchen Vornamen hat Herr Bär? In welchem Raum führt er Aufsicht? (Bei der Altersangabe sind nur die vollen Jahre berücksichtigt worden.)

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Aus den Angaben (1) bis (8) folgt:

(9) Herr Drossel führt Aufsicht in Raum 48. (wegen (1) und (5))

(10) Jutta arbeitet in Raum 49. (wegen (1), (2) und (7))

(11) Günter arbeitet in Raum 50, Klaus in 48. (wegen (1), (10) und (6))

(12) Günter ist Schüler von Herrn Drossel. (wegen (8), (9) und (11))

(13) Klaus ist Schüler von Herrn Bär. (wegen (12) und (4))

(14) Jutta ist Schülerin von Herrn Adler. (wegen (12) und (13))

(15) Herr Adler führt Aufsicht in Raum 50. (wegen (3), (9), (10), (14))

(16) Herr Bär heißt Klaus und führt Aufsicht in Raum 49. (wegen (4), (13) und (9) und (15)).

Aufgabe 060924:
Die Schülerinnen Brigitte, Christina, Dorothea, Eva, Inge und Monika und die Schüler Anton, Fred, Günter, Helmut, Jürgen und Kurt einer Laienspielgruppe wollen einen Tanz aufführen. Dabei wird zu Paaren getanzt.

1) In keinem Paar soll der männliche Partner kleiner als der weibliche sein.

Außerdem haben einige Teilnehmer noch verschiedene Wünsche:

2) Christina möchte nicht mit Anton tanzen, der kleiner als Brigitte ist.

3) Jürgen möchte nur mit Dorothea oder Monika tanzen.

4) Fred, der größer als Helmut, aber kleiner als Anton ist, möchte nur mit Eva oder Monika tanzen.

5) Kurt, der weiß, dass Eva größer als Anton ist, versucht, eine Einteilung zu finden, die allen Wünschen gerecht wird.

Geben Sie alle Möglichkeiten der Zusammenstellung dieser Schüler zu Tanzpaaren an, die die genannten Wünsche und Bedingung (1) erfüllen!

Die Aufgabe ist dahingehend zu verstehen, dass sämtliche Zusammenstellungen zu Tanzpaaren angegeben werden sollen, die auf Grund der Angaben nicht als unverträglich mit einer oder mehreren der gestellten Bedingungen (1) bis (5) ausgeschlossen werden müssen.

Lösung von MontyPythagoras:
Da Fred < Anton, und Anton < Eva, ist Fred < Eva. Daraus folgt das Paar Fred mit Monika. und Jürgen mit Dorothea. Aus Anton < Brigitte und Anton < Eva folgt, dass Christina mit Anton kein Paar bildet, d. h. Anton mit Inge.

Da Helmut < Anton < Eva und Helmut < Anton < Brigitte bildet Helmut mit Christina ein Paar.
Es verbleiben genau zwei Möglichkeiten für Günter, Kurt und Brigitte, Eva, und zwar die folgenden:

1. Fred und Monika, Jürgen und Dorothea, Anton und Inge, Helmut und Christina, Günter und Brigitte, Kurt und Eva.

2. Fred und Monika, Jürgen und Dorothea, Anton und Inge, Helmut und Christina, Günter und Eva, Kurt und Brigitte.

Aufgabe 080924:
Vier Personen A, B, C und D machen je drei Angaben über eine gleiche Zahl x. Nach Vereinbarung soll bei jedem mindestens eine Angabe wahr und mindestens eine Angabe falsch sein.

A sagt:
(1) Das Reziproke von x ist nicht kleiner als 1.
(2) x enthält in der dekadischen Darstellung keine 6.
(3) Die 3. Potenz von x ist kleiner als 221.
B sagt:
(1) x ist eine gerade Zahl.
(2) x ist eine Primzahl.
(3) x ist ein ganzzahliges Vielfaches von 5.
C sagt:
(1) x ist irrational.
(2) x ist kleiner als 6.
(3) x ist Quadrat einer natürlichen Zahl.
D sagt:
(1) x ist größer als 20.
(2) x ist eine positive ganze Zahl, deren dekadische Darstellung mindestens 3 Stellen enthält.
(3) x ist nicht kleiner als 10.
Ermitteln Sie x.

Lösung von Nuramon:
Da eine der Aussagen von B wahr ist, muss x eine ganze Zahl sein.
Wäre Aussage D2 wahr, so wären es auch D1 und D3. Also ist D2 falsch, d. h. es muss $x < 100$ sein.
Da D1 die Aussage D3 impliziert und mindestens eine der Aussagen D1 bzw. D3 wahr sein muss, ist D3 wahr. Also ist x eine ganze Zahl mit $x \geq 10$.
C1 ist falsch, da x ganz ist. C2 ist falsch, da $x \geq 10$ ist.
Also muss C3 wahr sein, d. h. x ist eine Quadratzahl.
Aussage A1 ist falsch, denn $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{10} < 1$. Aussage A3 ist falsch, denn $x^3 \geq 10^3 > 221$.
Also ist A2 wahr. Damit bleiben nur noch die Möglichkeiten 25,49 oder 81 für x übrig. Da x Quadratzahl ist, ist B2 falsch. Also muss x gerade oder durch 5 teilbar sein. Somit bleibt als einzige Option $x = 25$ übrig. Tatsächlich erfüllt $x = 25$ die Anforderungen der Aufgabe: A1, B1, C1, D2 sind falsch und A2, B3, C3, D1 sind wahr.

Aufgabe 090921:
Bei einem Klassenfest stellen die Schüler ihrem Mathematiklehrer die folgende Aufgabe:
Die Schüler teilen ihrem Lehrer mit, dass sie sich insgeheim so in drei Gruppen aufgeteilt haben, dass jeder Schüler der Klasse genau einer Gruppe angehört. Die Schüler der ersten Gruppe nennen sich die „Wahren“, weil sie jede Frage wahrheitsgemäß beantworten.
Die Schüler der zweiten Gruppe nennen sich die „Unwahren“, weil sie jede Frage falsch beantworten.
Die Schüler der dritten Gruppe schließlich nennen sich die „Unbeständigen“, weil jeder von ihnen Serien aufeinanderfolgender Fragen alternierend (abwechselnd) wahr und falsch beantwortet; dabei ist aber ungewiss, ob er jeweils die erste Frage einer Serie wahr oder falsch beantwortet.

Jeder Schüler antwortet auf eine gestellte Frage nur mit ja oder nur mit nein; Fragen, die andere Antworten erfordern, werden nicht zugelassen. Der Lehrer soll nun von einem beliebigen Schüler der Klasse durch Fragen, die er an diesen Schüler richtet und die sich nur auf die Zugehörigkeit zu einer der genannten Gruppe beziehen, feststellen, ob der Schüler ein „Wahrer“, ein „Unwahrer“ oder ein „Unbeständiger“ ist.

a) Welches ist die kleinste Anzahl von Fragen, die dazu ausreicht?
b) Geben Sie eine Möglichkeit an, die Zugehörigkeit eines Schülers mit dieser kleinsten Anzahl von Fragen zu ermitteln!

Lösung von cyrix:
a) Eine Frage genügt nicht, da damit nur zwei Fälle („ja“– vs. „nein“-Antwort) unterschieden werden können, es aber drei Gruppen gibt. Dass es mit zwei Fragen geht, zeigt Teil b).

b) Man stelle zwei mal die gleiche Frage „Bist du ein ‚Unbeständiger‘?“.
Ein „Wahrer“ wird darauf zwei mal mit „nein“ antworten, ein „Unwahrer“ zwei mal mit „ja“ und ein „Unbeständige“ einmal mit „ja“ und einmal mit „nein“ (in irgendeiner Reihenfolge).

Aufgabe 100921:
Vier Freunde A, B, C und D verstecken einen Brief. Einer von ihnen nimmt ihn an sich. Anschließend macht jeder von ihnen die folgenden genannten drei Aussagen, von denen wenigstens je zwei wahr sind.

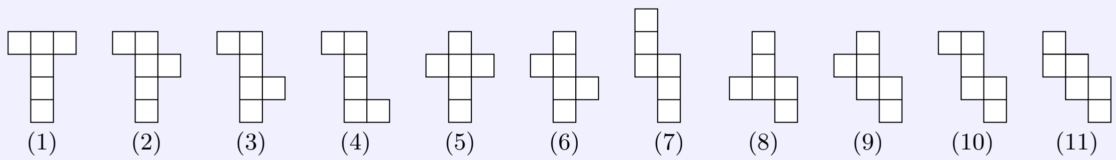
A	(1)	„Wenn ich den Brief nicht habe, dann hat ihn C.“
	(2)	„Ich habe den Brief nicht.“
	(3)	„Mein Freund hat den Brief.“
B	(1)	„Entweder A oder C hat den Brief.“
	(2)	„Alle Aussagen von A sind wahr.“
	(3)	„D hat den Brief nicht.“
C	(1)	„Wenn ich den Brief nicht habe, dann hat ihn B.“
	(2)	„Ich habe den Brief.“
	(3)	„B macht keine falschen Aussagen.“
D	(1)	„Ich habe den Brief nicht.“
	(2)	„Entweder hat A den Brief, oder er hat ihn nicht.“
	(3)	„B hat das Spiel ausgedacht.“

Wer hat den Brief?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, C hätte den Brief nicht. Dann wäre C (2) falsch. Also folgt, da laut Aufgabe von den drei Aussagen, die C gemacht hat, wenigstens zwei wahr sind, dass C (3) wahr sein müsste.
Daher wären alle Aussagen, von B und wegen B (2) auch alle Aussagen von A wahr. Wegen B (1) und A (2) müsste mithin doch C den Brief haben. Dieser Widerspruch beweist, dass die Annahme, C hätte den Brief nicht, falsch war.
Also verbleibt als einzige Möglichkeit nur die Annahme: C hat den Brief.

Alternativ-Lösung von cyrix:
A kann den Brief nicht haben, da sonst seine Aussagen A (2) und A (3) falsch wären. (Er wird sich nicht als sein eigener Freund bezeichnen.) Auch B kann den Brief nicht haben, da sonst die Aussage A (1) und damit neben B (1) auch B (2) falsch wären. Gleiches gilt, wenn D den Brief hätte.
Es verbleibt die Frage, ob C den Brief haben kann. In dem Fall sind die Aussagen A (1) bis A (3) richtig, da C ein Freund von A ist. Damit sind auch alle Aussagen B (1) bis B (3) von B wahr sowie alle drei Aussagen von C. (Man beachte dazu bei C (1), dass die Voraussetzung der Implikation, dass C den Brief nicht selbst hätte, in diesem Fall nicht erfüllt ist, die Implikation also wahr ist.) Schließlich sind die Aussagen D (1) und D (2) (letzteres, da es eine Tautologie ist) wahr; über D (3) können wir keine Aussage treffen. Also trifft jeder der vier Freunde in diesem Fall mindestens zwei korrekte Aussagen, sodass tatsächlich C den Brief haben muss.

Aufgabe 170924:
Die folgende Abbildung zeigt 11 Würfelnetze
a) Ermitteln Sie davon diejenigen, die sich in einem Zuge zeichnen lassen, d. h. als ein zusammenhängender Streckenzug, bei dem jede im Netz auftretende Strecke genau einmal durchlaufen wird!
b) Geben Sie für diese Netze je einen Anfangs- und Endpunkt eines solchen Streckenzuges an!



Lösung von cyrix:
Ein solcher Streckenzug lässt sich genau dann zeichnen, wenn es entweder genau null oder genau zwei Punkte in dem Netz gibt, an dem eine ungerade Anzahl von Strecken zusammenstoßen.
(An einem solchen Punkt kann man nur starten oder enden, da man an jedem zwischen Knoten für jede Strecke, auf den man ihn erreicht, auch wieder eine benötigt, auf dem man ihn wieder verlässt. Die Anzahl der Strecken, die sich in einem Punkt, der weder Start- noch Endpunkt des Streckenzugs ist, treffen, muss also gerade sein. Andererseits kann eine zusammenhängende Struktur, wo sich – bis auf ggf. an genau zwei Stellen – in allen Punkten jeweils eine gerade Anzahl an Strecken treffen, auch immer als durchgehender Streckenzug gezeichnet werden.)

In Netz (1) gibt es 6 Punkte, in denen sich je 3 Strecken treffen, in Netz (2) sind es 4, in Netz (3) auch, in Netz (4) sind es 6, in Netz (5) und 6 jeweils genau 2, in Netz (7) sind es 6, in Netz (8) sind es 4, in Netz (9) genau 2, in Netz (10) sind es 4 und in Netz (11) wieder genau 2. Damit lassen sich genau die Netze (5), (6), (9) und (11) in einem Streckenzug zeichnen.
Dabei sind jeweils die beiden Punkte, an denen sich in diesen Netzen je drei Strecken treffen, Anfangs- bzw. Endpunkt des entsprechenden Streckenzugs.

Bemerkung: Im Kontext der Graphentheorie fasst man die Strecken als Kanten und deren Endpunkte als Knoten auf. Die Fragestellung, ob sich alle Kanten in einem Weg zusammenfügen lassen, der jede Kante genau einmal enthält, wird auch als Frage bezeichnet, ob der Graph einen Euler-Weg enthält. (Vgl. Königsberger-Brücken-Problem.)

Aufgabe 190921:
An einer Kreuzung standen in einer Reihe hintereinander genau 7 Fahrzeuge. Jedes dieser Fahrzeuge war entweder ein Personenkraftwagen oder ein Lastkraftwagen. Über ihre Reihenfolge sei bekannt:
(1) Kein LKW stand direkt vor oder hinter einem anderen LKW.
(2) Genau ein PKW befand sich unmittelbar zwischen zwei LKW.
(3) Genau ein LKW befand sich unmittelbar zwischen zwei PKW.
(4) Genau drei PKW standen unmittelbar hintereinander.
Ermitteln Sie alle Möglichkeiten, in welcher Reihenfolge diese 7 Fahrzeuge gestanden haben können!

Lösung von cyrix:
Wir kürzen LKW mit „L“ und PKW mit „P“ ab, sodass z. B. „PPLP“ einer Reihenfolge von zwei PKW, einem LKW und einem PKW entspricht.
Nach (2) muss LPL Teil der Fahrzeugkolonne sein. Wäre der vordere L nicht das erste Fahrzeug, so müsste nach (1) ein P vor ihm gestanden haben, analog hinter dem zweiten L, falls dieser nicht das letzte Fahrzeug ist. Dann erhielte man den die Wagenfolge PLPLP, welche (3) widerspricht. Also muss der erste L der erste Wagen oder der zweite L der letzte Wagen sein, wobei nicht beides zugleich geht.

1. Fall: Sei der erste L das erste Fahrzeug, sodass die Fahrzeugkolonne mit LPLP beginnt. Da nach (4) die Wagenfolge PPP vorkommen muss, kann diese nur noch an den Positionen 4-6 oder 5-7 liegen. Letzteres ist aber unmöglich, da sonst 4 P an den Positionen 4-7 hintereinander stünden, was (4) widerspricht. Also lautet die Wagenfolge LPLPPPL; wobei aus analogem Grund auf Position 7 kein P stehen kann.

2. Fall: Sei der zweite L das letzte Fahrzeug. Dann folgt auf analoge Weise zum 1. Fall (diesmal von hinten nach vorn argumentiert), dass die Wagenfolge LPPPLPL lauten muss.
Beide Reihenfolgen erfüllen offenbar alle Kriterien, sind also genau die gesuchten Lösungen.

Aufgabe 210921:
In der Divisionsaufgabe $a : b = c$ sind a, b, c, so durch natürliche Zahlen zu ersetzen, dass eine richtig gerechnete Divisionsaufgabe entsteht, wobei nur die Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, und zwar jede genau einmal, verwendet werden sollen.
Ermitteln Sie alle Tripel $(a; b; c)$ natürlicher Zahlen, die diesen Anforderungen genügen!

Lösung von cyrix:
Da für drei Zahlen 5 Ziffern zur Verfügung stehen, muss mindestens eine einstellig sein. Da der Dividend a bei einer Divisionsaufgabe (im Bereich der natürlichen Zahlen) der größte Wert ist, muss a mindestens zweistellig sein. Wären b und c einstellig, so würde ihr Produkt a höchstens $5 \cdot 4 = 20$ betragen, sodass nicht alle fünf Ziffern verwendet werden würden. Also muss a zweistellig und noch genau einer der beiden Werte b bzw. c zweistellig sein, während der andere einstellig ist.

Da die Ziffer 5 nur genau einmal verwendet werden darf, kann sie nicht als Einerziffer verwendet werden, da dann auch die entsprechende Zahl durch 5 teilbar wäre, was die Teilbarkeit durch 5 mindestens einer weiteren der drei Zahlen nach sich ziehen würde. Dies ist aber aufgrund der nicht weiter zur Verfügung stehenden Endziffern 0 bzw. einer weiteren 5 nicht möglich.
Also muss die Ziffer 5 als Zehnerziffer verwendet werden. Dies kann aber nicht die Zehnerziffer des Quotienten oder Divisors sein, weil sonst dieser Wert mindesten 51 wäre, während für den notwendigerweise größeren Dividenden nur noch maximal die Zahl 43 möglich wäre. Also muss die 5 der Zehner von a sein.

Es kann weder b noch c gleich 1 sein, da sonst der andere Wert gleich a sein müsste, was eine doppelte Nutzung von Ziffern nach sich ziehen würde.

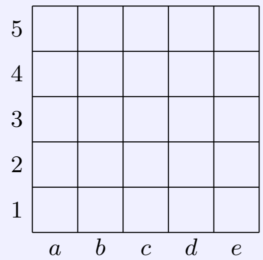
Da 53 eine Primzahl ist und $51 = 3 \cdot 17$ als einzige nicht-triviale Zerlegung die nicht vorhandene Ziffer 7 verwendet, scheiden diese beiden Möglichkeiten für a aus. Es verbleiben zwei Fälle:

1. Fall: $a = 52$. Dann gibt es wegen $52 = 2 \cdot 26 = 4 \cdot 13$ genau die beiden Möglichkeiten $b = 4$ und $c = 13$ bzw. umgekehrt $b = 13$ und $c = 4$. Andere Zerlegungen gibt es in diesem Fall nicht.

2. Fall: $a = 54$. Dann gibt es wegen $54 = 2 \cdot 27 = 3 \cdot 18 = 6 \cdot 9$ als einzig möglichen, nicht-trivialen Zerlegungen keine den Anforderungen der Aufgabenstellung genügenden Divisionsaufgaben.

Es gibt also genau zwei solche Tripel, nämlich $(a,b,c) \in \{(52,4,13), (52,13,4)\}$.

Aufgabe 220924:



Die Abbildung zeigt ein Quadrat, das in 25 zueinander kongruente quadratische Felder $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5$, zerlegt ist.
Von diesen Feldern sollen genau fünf so durch Schwarzfärbung markiert werden, dass in jeder Zeile, in jeder Spalte und in jeder der beiden Diagonalen genau ein markiertes Feld auftritt.
Ermitteln Sie alle voneinander verschiedenen Markierungen, die diese Bedingungen erfüllen!
Dabei gelten zwei Markierungen genau dann als nicht verschieden, wenn sie auseinander durch eine Drehung, eine Spiegelung oder mehrere solcher Abbildungen hervorgehen.

Lösung von cyrix:
Wir konstruieren alle zulässigen Färbungen schrittweise durch eine Fallunterscheidung.

Fall 1: Mindestens eines der vier Eckfelder a_1, e_1, e_5 oder a_5 ist markiert.
Dann können wir ggf. durch Drehung um den Mittelpunkt des Quadrats erzwingen, dass das Feld a_1 markiert ist. Nun können die Felder b_1 und b_2 sowie a_2 jeweils nicht markiert sein, da sonst in Zeile 1, der Diagonalen durch a_1 bzw. der Spalte b zwei Felder markiert wären.
Durch ggf. erfolgende Spiegelung an der Diagonalen durch a_1 kann man erzwingen, dass die Zeilennummer des in Spalte b markierten Feldes höchstens so groß ist wie die „Spaltennummer“ des in Zeile 2 markierten Feldes. Dabei sei unter der „Spaltennummer“ die Zahl gemeint, die bei der Übersetzung $b = 2$, $c = 3$, $d = 4$, $e = 5$ aus der Spalte entsteht. Es ergeben sich nun für das in Spalte b markierte Feld folgende Unterfälle:

Fall 1.1: In Spalte b ist das Feld b_3 markiert.
Dann können folgende Felder alle nicht markiert sein: a_5 und e_1 wegen gleicher Spalte/ Zeile mit a_1 sowie b_4 und c_3 wegen gleicher Spalte/ Zeile mit b_3. Dann sind von der Diagonalen durch a_5 aber vier Felder schon unmarkiert, sodass das fünfte Feld d_2 markiert werden muss. In der 5. Zeile dürfen aber die Felder a_5 und e_5 wegen gleicher Spalte/ Diagonale mit a_1 sowie b_5 und d_5 wegen gleicher Spalte mit b_3 bzw. d_2 nicht markiert werden, sodass nur c_5 verbleibt und damit abschließend aufgrund des einzig freien Feldes in Zeile 4 auch das Feld e_4 markiert werden muss. Wir erhalten die Lösung

$$(a_1, b_3, c_5, d_2, e_4)$$

Fall 1.2: In Spalte b ist das Feld b_4 markiert.
Da die Spaltennummer des in Zeile 2 markierten Felds nun mindestens 4 beträgt, muss es in Spalte d oder e liegen. Das Feld d_2 liegt aber wie b_4 in der Diagonalen durch a_5, sodass es unmarkiert bleiben muss. Es folgt, dass e_2 markiert ist. In Zeile 3 sind folgende Felder sicher unmarkiert: a_3 und c_3 wegen gleicher Spalte/ Diagonale wie a_1 sowie b_3 und e_3 wegen gleicher Spalte mit b_4 bzw. e_2. Also muss d_3 markiert sein und damit auch c_5 als letztes freies Feld der Zeile 5. Wir erhalten die Lösung

$$(a_1, b_4, c_5, d_3, e_2)$$

Fall 1.3: In Spalte b ist das Feld b_5 markiert.
Dann muss aufgrund der Bedingung an die Spaltennummer des in Zele 2 markierten Felds dieses e_2 sein. Dies führt aber zum Widerspruch, da dann alle Felder der Diagonale durch a_5 unmarkiert sein müssen: a_5, e_1 und c_3 wegen gleicher Spalte/ Zeile/ Diagonale mit a_1 sowie b_4 wegen gleicher Spalte mit b_5 und d_2 wegen gleicher Zeile mit e_2. In diesem Unterfall gibt es also keine Lösung.

Fall 2: Alle Eckfelder sind unmarkiert.
Es kann nicht sowohl in Spalte a als auch in Spalte e die dritte Zeile markiert sein. Also kann man durch ggf. erfolgende Spiegelung an Spalte e erzwingen, dass das Feld a_3 unmarkiert ist. Da auch a_1 und a_5 (sowie e_1 und e_5) unmarkiert sind, verbleiben in Spalte a nur die beiden Felder a_2 und a_4, die markiert sein können.
Durch ggf. erfolgende Spiegelung an Zeile 3 kann man erzwingen, dass dies a_2 sein muss. Damit müssen die Felder b_2 und d_2 unmarkiert sein, sodass auf den beiden Diagonalen nur noch die Felder c_3 und d_4 für die eine bzw. b_4 und c_3 für die andere markiert werden können.

Wäre also c_3 unmarkiert, müssten sowohl d_4 als auch b_4 markiert werden, die beide in der gleichen Zeile liegen, was zu einem Widerspruch führt. Also muss c_3 markiert sein. Damit dürfen aber nun weder b_4 noch b_4 markiert sein, da sie beide auf den Diagonalen durch c_3 liegen. Weiterhin ist auch a_4 sowie c_4 ausgeschlossen, da sie in den gleichen Spalten wie a_2 und c_3 liegen, sodass e_4 in Zeile 4 das markierte Feld sein muss.

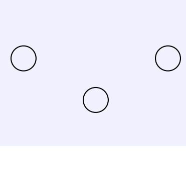
Es verbleiben in Zeilen 1 und 5 noch die freien Felder in den Spalten b und c, sodass sich zwei durch Rotation um den Mittelpunkt des Quadrats um 180° ineinander überführbare Lösungen

$$(a_2, b_1, c_3, d_5, e_4) \quad \text{und} \quad (a_2, b_5, c_3, d_1, e_4)$$

ergeben.

Tatsächlich sind diese drei Lösungen (wenn man in Fall 2 nur eine der beiden betrachtet) auch jeweils nicht durch Drehungen, Spiegelungen und Kombinationen daraus ineinander überführbar: In der Lösung von Fall 2 ist kein Eckfeld markiert, in denen aus Fall 1 aber schon, sodass die Lösung aus Fall 2 nicht in eine aus Fall 1 überführt werden kann. Da bei diesen das markierte Eckfeld gleich ist, muss dieses Fixpunkt einer potentiell überführenden Abbildung sein.
Bei Drehungen kann dies aber nur der Mittelpunkt sein. Also müsste es eine Spiegelung durch dieses Eckfeld a_1 geben, die die Lösung aus Fall 1.1 in die von Fall 1.2 überführt, was nur die Spiegelung entlang der Diagonalen durch a_1 sein kann. Man sieht aber schnell, dass diese Spiegelung bei Anwendung auf die Lösung aus Fall 1.1 eine andere Lösung als die aus Fall 1.2 erzeugt, da das in der ersten Lösung markierte Feld b_3 auf das in der zweiten Lösung unmarkierte Feld c_2 abgebildet würde.

Aufgabe 290922:
Auf die Felder der Abbildung sollen drei weiße und drei schwarze Steine verteilt werden, auf jedes Feld ein Stein. Ferner wird eine natürliche Zahl $a \geq 1$ fest vorgegeben.
Nun soll, beginnend mit dem farbigen Feld, im Uhrzeigersinn umlaufend, Stein für Stein weitergezählt werden, von 1 bis a.
Der Stein, der dabei die Nummer a erhält, wird weggenommen.



Anschließend beginnt das Abzählen wieder mit 1 bei dem im Uhrzeigersinn folgenden Stein, und wieder wird der Stein, der die Nummer a erhält, weggenommen.
Dann schließt sich noch eine dritte Durchführung dieses Abzählens und Wegnehmens an. Bei diesen Fortsetzungen ist zu beachten, dass leere Felder nicht mitgezählt, sondern übersprungen werden.
a) Es sei $a = 4$. Wie sind zu Beginn die Steine zu verteilen, damit am Ende die drei weißen Steine übrigbleiben?
b) Jemand vermutet: „Wenn man a durch $a + 6$ ersetzt, so führt die gleiche Anfangsverteilung der Steine ebenfalls zum Übrigbleiben der drei weißen Steine.“
Widerlegen Sie die Vermutung, indem Sie sie für $a = 4$ nachprüfen!
c) Beweisen Sie, dass es eine Zahl z gibt, mit der für jedes $a \geq 1$ die folgende Aussage wahr ist: „Wenn man a durch $a + z$ ersetzt, so führt die gleiche Anfangsverteilung der Steine - auch bei Abzählbeginn im farbigen Feld - ebenfalls zum Übrigbleiben der drei weißen Steine.“

Lösung von cyrix:
a) Weggenommen werden die Steine auf den Feldern, die bei der ursprünglichen Nummerierung vor der ersten Wegnahme die Nummern 4, 2 und 1 hatten. Dabei wurde allein im dritten Durchgang das schon leere Feld mit ursprünglicher Nummerierung 4 übersprungen. Also sind auf jenen die schwarzen und auf die anderen die weißen Steine zu legen, damit am Ende die weißen übrig bleiben.

b) Für $a = 10$ wird zuerst auch der Stein auf dem Feld mit ursprünglicher Nummer $10 - 6 = 4$ entfernt, im zweiten Durchlauf aber der Stein auf dem Feld mit ursprünglicher Nummer 3, da nun der zweite Umlauf durch die noch übrigen 5 Felder nach 10 Schritten mit dem letzten besetzten Feld vor Beginn dieses zweiten Durchlaufs (also dem mit ursprünglicher Nummer 3) abgeschlossen wird. Da für $a = 4$ aber nicht der Stein auf dem Feld mit ursprünglicher Nummer 3 entfernt wurde, unterscheiden sich also diese beiden Ergebnisse.

c) Die Aufgabenstellung schließt $z = 0$ nicht aus, was eine Triviallösung wäre. Wir zeigen aber auch, dass es unendlich viele weitere positive natürliche Zahlen z gibt, die die Aussage der Aufgabenstellung erfüllen.
Damit die ersten Züge für a und $a+z$ den gleichen Stein entfernen, müssen a und $a+z$ den gleichen Rest bei der Teilung durch 6 lassen, also z durch 6 teilbar sein, da dann zwar ggf. verschieden viele Umläufe um die anfänglich 6 belegten Felder durchgeführt werden, aber an der gleichen Stelle die Zählung stoppt, sodass der gleiche erste Stein entfernt wird.

Damit darauf aufbauend die zweiten Züge für a und $a + z$ den gleichen zweiten Stein entfernen, müssen a und $a + z$ auch den gleichen Rest bei der Teilung durch 5 lassen, also z auch durch 5 teilbar sein, da dann analog wieder ggf. unterschiedlich viele Umläufe durch die 5 noch verbliebenen besetzten Felder durchgeführt werden, aber wieder an der gleichen Stelle gestoppt und damit auch der gleiche zweite Stein entfernt wird. Für den dritten Zug folgt analog, dass z durch 4 teilbar sein muss.
Tatsächlich erfüllen alle z, die durch $60 = 6 \cdot 10 = 5 \cdot 12 = 4 \cdot 15$ teilbar sind, die Aussage der Aufgabenstellung, dass für a und $a+z$ die gleichen Steine (sogar in der gleichen Reihenfolge) entfernt werden.

Aufgabe 300924:
Für jede natürliche Zahl $m \geq 2$ sei folgendes Vorhaben betrachtet:
Jemand möchte m verschiedene von einem Punkt P ausgehende Strahlen zeichnen.
Dann möchte er alle diejenigen Winkelgrößen zwischen 0° und 360° feststellen, die bei Messung eines Winkels jeweils von einem dieser Strahlen in mathematisch positivem Drehsinn zu einem anderen dieser Strahlen auftreten können. Er möchte die m Strahlen so zeichnen, dass sich dabei
a) möglichst wenige,
b) möglichst viele
verschiedene Winkelgrößen feststellen lassen.
Ermitteln Sie in Abhängigkeit von m die kleinst- bzw. größtmögliche Anzahl verschiedener Winkelgrößen, die so erreichbar sind!

Lösung von cyrix:
Auf jedem Strahl liege ein von P verschiedener Punkt P_i, $i = 0,\ldots,m-1$, sodass diese in mathematisch positivem Drehsinn den Punkt P durchlaufen.

a) Nach Konstruktion sind die Winkel $\angle P_0PP_i$ für alle $i = 1,\ldots,m-1$ paarweise verschieden. Also gibt es wenigstens $m-1$ verschiedene Winkel. Ordnet man die Strahlen so an, dass $\angle P_0PP_i = \frac{i}{m}\cdot 360°$ gilt, so werden nur Winkel von dieser Form angenommen, da für $i < j$ dann $\angle P_iPP_j = \angle P_0PP_j - \angle P_0PP_i = \frac{j-i}{n}\cdot 360°$ bzw. $\angle P_jPP_i = 360° - \angle P_iPP_j = \frac{m-(j-i)}{m}\cdot 360°$ gelten. Also sind minimal $m-1$ verschiedene Winkelgrößen möglich.

b) Die maximal mögliche Anzahl verschiedener Winkelgrößen erhielte man, wenn für je zwei verschiedene Indizes $i \neq j$ mit $0 \leq i,j \leq m-1$ die Winkel $\angle P_iPP_j$ alle paarweise verschieden wären. Dann erhielte man $m\cdot(m-1)$ verschiedene Winkelgrößen.
Um zu zeigen, dass dies möglich ist, ordne man die Strahlen so an, dass $\angle P_0PP_i = \frac{3^i}{3^m}\cdot 360°$ für alle $i = 1,\ldots,m-1$ gilt. Dann ist offenbar $\angle P_iPP_j < 180°$, wenn $i < j$ und $\angle P_iPP_j > 180°$, wenn $j > i$. Es können also zwei solche Winkel $\angle P_iPP_j$ und $\angle P_kPP_\ell$ nur dann gleich sein, wenn $i < j$ und $k < \ell$, oder $i > j$ und $k > \ell$ gilt.
Im zweiten Fall sind dann aber auch die entsprechenden Winkel in der jeweils anderen Orientierung gleich, sodass wir o. B. d. A. $i < j$ und $k < \ell$ voraussetzen können. Aus $\angle P_iPP_j = \angle P_kPP_\ell$ folgt dann $3^j - 3^i = 3^\ell - 3^k$.
Die linke Seite der Gleichung ist eine durch 3^i, aber keine größere Dreierpotenz teilbare natürliche Zahl, die rechte Seite analog eine durch 3^k, aber keine größere Dreierpotenz teilbare natürliche Zahl.
Aufgrund der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung gilt damit $i = k$, woraus sofort auch $j = \ell$ folgt, sodass es sich nicht um Winkel zwischen verschiedenen Strahl-Paaren gehandelt haben kann, also tatsächlich alle Winkel zwischen je zwei verschiedenen Strahlen verschiedene Größen haben. Damit kann man also maximal $m\cdot(m-1)$ verschiedene Winkelgrößen erhalten.

Aufgabe 340921:
Die Bewohner des Planeten Trion unterscheiden sich nach ihrem Geschlecht, und zwar gibt es, anders als auf der Erde, genau drei verschiedene Geschlechter. Politisch ist die Bevölkerung eingeteilt in genau drei Völkerstämme.
Wenn der planetare Rat zusammentritt, entsendet jeder Völkerstamm genau drei Abgeordnete, von jedem Geschlecht einen.
Es ist dann eine Sitzordnung vorgeschrieben, bei der 9 Sitze in quadratförmiger Formierung zu drei Zeilen und drei Spalten angeordnet sind. In jeder Zeile und jeder Spalte müssen alle drei Völkerstämme und alle drei Geschlechter vertreten sein.
Geben Sie eine mögliche Sitzordnung an und bestätigen Sie, dass bei dieser Sitzordnung alle genanten Bedingungen erfüllt sind!

Lösung von cyrix:
Wir bezeichnen die Völkerstämme mit a, b und c, sowie die Geschlechter mit 1, 2 bzw. 3, sodass also a1 den Abgeordneten von Völkerstamm a mit Geschlecht 1 bezeichne.
Dann gibt folgende Tabelle eine zulässige Sitzordnung an, wobei man sich leicht davon überzeugt, dass in jeder Zeile und jeder Spalte jeder Völkerstamm a bis c sowie jedes Geschlecht 1 bis 3 genau einmal vertreten ist und kein Abgeordneter mindestens zwei oder gar keinen Sitzplatz erhält:

$$\begin{array}{ccc} a1 & b2 & c3 \\ b3 & c1 & a2 \\ c2 & a3 & b1 \end{array}$$

III Runden 3 & 4

Aufgabe 030936:
Bei einem Spiel verstecken drei Schülerinnen Anna, Brigitte und Claudia in ihren Handtaschen je einen Gegenstand, und zwar einen Ball, einen Bleistift und eine Schere. Dieter soll feststellen, wer den Ball, wer den Bleistift und wer die Schere hat.
Auf seine Fragen erhält er folgende Antworten, von denen verabredungsgemäß nur eine wahr, die beiden anderen aber falsch sind:

(1) Anna hat den Ball.
(2) Brigitte hat den Ball nicht.
(3) Claudia hat die Schere nicht.

Wer hat den Ball, wer den Bleistift und wer die Schere?

Lösung von Manuela Kugel:

1. Fall: Die 1. Aussage ist richtig, dann hat Anna den Ball. Brigitte kann also den Ball nicht haben, womit die 2. Aussage ebenfalls wahr ist. Dies steht jedoch im Widerspruch zur Verabredung.

   Somit ist die Annahme, dass die 1. Aussage wahr ist, falsch.

2. Fall: Die 2. Aussage ist richtig, dann hat Brigitte den Ball nicht. Laut Verabredung sind die anderen beiden Aussagen falsch, also gilt deren Umkehrung: Anna hat den Ball nicht, sowie: Claudia hat die Schere.

   Wenn nun Anna und Brigitte den Ball nicht haben, muss ihn Claudia haben, was allerdings im Widerspruch zur Aussage, dass Claudia die Schere hat, steht. Damit ist auch die 2. Annahme falsch.

3. Fall: Die 3. Aussage ist richtig, dann hat Claudia die Schere nicht. Nun müssen die 1. und 2. Aussage umgekehrt werden, damit sie richtig sind: Anna hat den Ball nicht. Brigitte hat den Ball.

   Dies bedeutet, dass Anna die Schere und Claudia den Bleistift hat. Hierin steckt kein Widerspruch, weshalb dieser Fall die Lösung ist.

Aufgabe 040935:
Bei einem Rätselnachmittag wird dem besten Jungen Mathematiker der Klasse die Aufgabe gestellt, eine bestimmte reelle Zahl zu erraten. Dazu werden von seinen Mitschülern nacheinander Eigenschaften dieser Zahl genannt:

Klaus: „Die Zahl ist durch 4 ohne Rest teilbar.“
Inge: „Die Zahl ist der Radius eines Kreises, dessen Umfang die Länge 2 hat.“
Günter: „Die Zahl ist kleiner als 3.“
Monika: „Die Zahl ist die Länge der Diagonalen eines Quadrates, dessen Seite die Länge 2 hat.“
Bärbel: „Die Zahl ist irrational.“
Peter: „Die Zahl ist der Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks, dessen Seite die Länge 2 hat.“
Ferner erfährt er, dass von den Schülern Klaus und Inge, Günter und Monika sowie Bärbel und Peter jeweils genau einer die Wahrheit gesagt hat.
Wie heißt die Zahl?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn Peter die Wahrheit gesagt hätte, müsste Bärbels Feststellung falsch sein, da von beiden genau einer die Wahrheit gesagt haben soll.
Diese Annahme führt zum Widerspruch, da auch Peter die Zahl als irrational charakterisiert hat. Also hat Bärbel die Wahrheit gesagt.
Demnach ist die Aussage von Klaus falsch und Inges Angabe stimmt. Aus ihr folgt: $x = \frac{1}{\pi}$

Die Aussagen von Günter und Monika sind überflüssig.

Aufgabe 150933:
Über eine Zahl x werden die folgenden vier Paare (A_1,A_2), (B_1,B_2), (C_1,C_2), (D_1,D_2) von Aussagen gemacht, von denen genau eine wahr und genau eine falsch ist.
Untersuchen Sie, ob es eine Zahl x gibt, die dieser Forderung genügt! Ermitteln Sie, wenn das der Fall ist, jede solche Zahl x!
A_1) Es gibt außer x keine Zahl, die der Forderung dieser Aufgabe genügt.
A_2) x ist eine natürliche Zahl, in deren (dekadischer) Darstellung eine Ziffer zweimal auftritt.
B_1) $x - 5$ ist eine ganze, durch 6 teilbare Zahl.
B_2) $x + 1$ ist eine ganze, durch 12 teilbare Zahl.
C_1) x ist eine natürliche Zahl, deren (dekadische) Darstellung mit der Ziffer 3 beginnt.
C_2) x ist die Zahl 389.
D_1) x ist eine dreistellige Primzahl mit $300 < x < 399$, also eine der Zahlen $307, 311, 313, 317, 331, 337, 347, 349, 353, 359, 367, 373, 379, 383, 389, 397$.
D_2) x ist eine natürliche Zahl, die aus drei gleichen Ziffern besteht.

Lösung von cyrix:
Da aus C_2 direkt C_1 folgt, aber nicht beide Aussagen wahr sein dürfen, muss C_2 falsch und C_1 wahr sein. Es ist also x, sofern es existiert, eine natürliche Zahl, die mit der Ziffer 3 beginnt, nicht aber die 389.

Wäre die Aussage D_2 nun wahr, müsste es sich um die Zahl 333 handeln. Dies widerspricht aber beiden Aussagen B_1 und B_2, da weder 328 durch 6 noch 334 durch 12 teilbar sind. Also muss D_2 falsch und D_1 wahr sein, sodass x eine der von 389 verschiedenen Primzahlen in der angegebenen Liste sein muss.

Wäre die Aussage B_2 wahr, dann wäre $x + 1$ insbesondere auch durch 6 teilbar, also auch $x + 1 - 6 = x - 5$, sodass die Aussage B_1 auch erfüllt wäre. Demnach muss also $x - 5$ durch 6 teilbar sein, während $x + 1 = (x - 5) + 6$ nicht durch 12 teilbar sein darf. Das geht aber nur, wenn schon $x - 5$ durch 12 teilbar war. In der Liste erfüllen das nur 317 und 353, sodass x eine dieser beiden Zahlen sein muss.

Wäre A_2 wahr, dann wäre es eindeutig als 353 identifiziert, da nur in dieser noch möglichen Zahl zwei gleiche Ziffern vorkommen. Dann wäre aber auch aufgrund der nun gezeigten Eindeutigkeit auch die Aussage A_1 wahr, was ein Widerspruch zur Bedingung der Aufgabenstellung darstellt.
Ist dagegen A_2 falsch, dann darf in der Darstellung von x keine Ziffer zwei mal auftreten. Dies schließt die 353 aus, sodass 317 die eindeutige Lösung ist, sodass Aussage A_1 wahr ist.
Damit erfüllt $x = 317$ genau die jeweils ersten Aussagen, während die jeweils zweiten falsch sind; und es ist auch die einzige Zahl, die der Aufgabenstellung genügt.

Aufgabe 190933:
Von n Kartons (n eine beliebige natürliche Zahl größer als 0) werde vorausgesetzt, dass ihre Abmessungen folgende Eigenschaften haben:
Der erste Karton kann in den zweiten gelegt werden (falls $n \geq 2$ ist); die ersten beiden Kartons können nebeneinander in den dritten gelegt werden (falls $n \geq 3$ ist); die ersten drei Kartons können nebeneinander in den vierten gelegt werden (falls $n \geq 4$ ist); ...; die ersten $n - 1$ Kartons können nebeneinander in den n-ten gelegt werden.
Beweisen Sie, dass es möglich ist, derartige n Kartons so ineinanderzulegen, dass folgende Forderungen erfüllt sind: (1) Jeder Karton enthält in seinem Innern eine gerade Anzahl anderer Karton (wobei auch 0 als gerade Zahl zugelassen ist).
(2) Es gibt höchstens zwei Kartons, die in keinem anderen Karton enthalten sind.
(3) Betrachtet man für jeden Karton die Menge aller in seinem Inneren enthaltenen Kartons, so gibt es auch in dieser Menge höchstens zwei Kartons, die in keinem anderen Karton dieser Menge enthalten sind.

Lösung von cyrix:
Für $n = 1$ und $n = 2$ sind die Forderungen leicht erfüllbar: Man stelle den einen bzw. die zwei Kartons leer nebeneinander. Sei ab nun $n > 2$ und es existiere eine Anordnung der ersten $n - 2$ Kartons, die den Anforderungen genügt. Wir unterscheiden, ob in dieser Anordnung ein oder zwei äußere Kartons, die in keinem anderen enthalten sind, existieren.

1. Fall: Die ersten $n - 2$ Kartons sind so verpackt, dass nur ein äußerer Karton existiert. Dann packe man den $n - 2$-ten und den $n - 1$-ten Karton nebeneinander in den n-ten. Im $n - 1$-ten sind dann 0 und im $n - 2$-ten eine gerade Anzahl an Kartons, also auch im n-ten. Die Forderungen (2) und (3) sind offensichtlich erfüllt.

2. Fall: Die ersten $n - 2$ Kartons sind so verpackt, dass zwei äußere Kartons existieren. Dann packe man diese beiden in den $n-1$-ten Karton und lege daneben den leeren n-ten Karton. Im $n-1$-ten Karton sind dann die gerade Anzahl an Kartons in den beiden äußeren Kartons der Anordnung der ersten $n-2$ sowie diese beiden äußeren Kartons, also auch eine gerade Zahl; im n-ten Karton ist keiner. Die Bedingungen (2) und (3) sin nach Konstruktion offensichtlich auch erfüllt.

Damit gibt es in jedem Fall auch mit n Kartons eine Anordnung, die der Aufgabenstellung genügt, $\square$.

Aufgabe 190936:
Für geeignete natürliche Zahlen n gibt es ebenflächig begrenzte Körper mit n Ecken und weniger als n Flächen. Zum Beispiel ist für $n = 8$ ein Quader ein solcher Körper, da er genau 8 Ecken hat und von genau 6 ebenen Flächen (Rechtecken) begrenzt wird.
Untersuchen Sie, ob eine natürliche Zahl N die Eigenschaft hat, dass es für jede natürliche Zahl $n \geq N$ einen ebenflächig begrenzten Körper mit n Ecken gibt, der von weniger als n ebenen Flächen begrenzt wird!
Wenn dies der Fall ist, ermitteln Sie die kleinste natürliche Zahl N mit dieser Eigenschaft!

Lösung von cyrix:
Sei $m \geq 3$ eine natürliche Zahl. Dann hat das gerade Prisma, dessen Grund- und Deckfläche ein regelmäßiges m-Eck ist, genau $n = 2m$ Eckpunkte und besitzt $m + 2 < m + m = n$ Seitenflächen. Für gerade Zahlen $n \geq 6$ gibt es also solche Körper.

Setzt man auf eine der rechteckigen Seitenflächen eines solchen Prismas eine vierseitige Pyramide mit entsprechender Grundfläche auf, so erhöht sich die Eckenanzahl des nun neuen Körpers auf $2m + 1$ (die Spitze der Pyramide ist hinzugekommen) und die Anzahl der Seitenflächenanzahl auf $(m+2)-1+4 = m+5$ (die eine Seitenfläche liegt als Grundfläche der Pyramide nun im Inneren des neuen Körpers, verschwindet also, während durch die Pyramide 4 neue Seitenflächen hinzukommen), was für $m \geq 5$ noch immer kleiner ist als die Eckpunktanzahl $n = 2n+1$. Damit gibt es also auch für ungerade $n \geq 11$ jeweils solche Körper.

Für $n = 9$ betrachte man einen geraden dreiseitigen Pyramidenstumpf. Dieser besitzt sowohl in Grund- als auch Deckfläche je 3 Punkte, insgesamt also 6, und neben Grund- und Deckfläche noch 3 weitere Seitenflächen, insgesamt also 5. Verklebt man nun zwei kongruente solche Pyramidenstümpfe an ihren Grundflächen, erhöht sich die Eckpunktanzahl des neuen Körpers auf 6+3=9 und die Anzahl der Seitenflächen auf 5-1+3+1=8. Also existiert auch für $n = 9$ ein solcher Körper.

Für $n = 7$ betrachte man ein regelmäßiges Fünfeck $ABCDE$ sowie die durch Verschiebung der Höhe von A auf die gegenüberliegende Seite CD senkrecht zur Ebene des Fünfecks entstehenden Strecke PQ. Verbindet man die Punkte C und D mit Q sowie A, B und E mit P, entsteht ein ebenflächig begrenzter Körper mit den 7 Eckpunkten A, B, C, D, E, P und Q sowie den Flächen $ABCDE$, CDQ, $BCQP$, $EDQP$, ABP und AEP; also mit 6 Seitenflächen. Damit existiert auch für $n = 7$ ein solcher Körper.

Also kann $N = 6$ gewählt werden, da für jedes $n \geq 6$ ein entsprechender Körper mit n Eckpunkten und weniger Seitenflächen existiert.

Man kann aber nicht $N < 6$ wählen, da kein solcher Körper mit $e := n = 5$ Eckpunkten existiert:
Da von jedem dieser Eckpunkte mindestens 3 Kanten ausgehen, muss die Summe dieser Anzahlen also mindestens 15 betragen. Da dabei jede Kante doppelt gezählt wird (sie verbindet ja genau zwei Eckpunkte), muss es also mindestens $k \geq \frac{15}{2}$, und damit auch $k \geq 8$, Kanten in dem Körper geben.
Sei f die Anzahl von dessen Flächen. Dann gilt nach dem Eulerschen Polyedersatz $e - k + f = 2$. Mit $e = 5$ und $k \geq 8$ folgt somit $f = 2 - e + f \geq 2 - 5 + 8 = 5$, sodass es keinen solchen Körper mit 5 Eckpunkten aber weniger als 5 Flächen geben kann.
Also ist tatsächlich $N = 6$ der kleinste solche Wert.

Aufgabe 210931:
Über eine natürliche Zahl x werden vier Paare von Aussagen gemacht:

Paar A:	(1) x ist eine zweistellige Zahl.
	(2) x ist kleiner als 1000.
Paar B:	(1) Die zweite Ziffer der Zahl x ist eine 0.
	(2) Die Quersumme der Zahl x ist 11.
Paar C:	(1) x wird mit genau drei Ziffern geschrieben, und zwar mit drei gleichen Ziffern.
	(2) x ist durch 37 teilbar.
Paar D:	(1) Die Quersumme der Zahl x ist 27.
	(2) Das Produkt der Zahlen, die durch die einzelnen Ziffern von x dargestellt werden, beträgt 0.

Untersuchen Sie, ob es natürliche Zahlen x mit $x \neq 0$ gibt, für die in jedem der vier Paare A, B, C, D eine Aussage wahr und eine Aussage falsch ist!
Gibt es solche Zahlen x, so ermitteln Sie alle diese Zahlen!

Lösung von cyrix:
Da jede zweistellige Zahl auch kleiner ist als 1000, kann nicht A(1) wahr sein, da sonst auch A(2) wahr wäre. Demzufolge ist x nicht zweistellig, aber kleiner als 1000, also ein- oder dreistellig.
Sie kann aber nicht einstellig sein, da sonst sowohl C(1) (x wird mit drei gleichen Ziffern geschrieben) als auch C(2) (x ist durch 37 teilbar) wegen $x > 0$ falsch wären. Also ist x eine dreistellige natürliche Zahl.

Wäre C(1) war, so gäbe es eine Ziffer n mit $x = n \cdot 111 = n \cdot 3 \cdot 37$, sodass auch C(2) wahr wäre, was ein Widerspruch zur Aufgabenstellung ist. Also ist x durch 37, nicht aber durch 3 teilbar. Damit ist auch die Quersumme von x nicht durch 3 teilbar, also nicht 27, sodass D(1) falsch ist und D(2) wahr sein muss. Demzufolge ist eine der Ziffern von x gleich Null. Dies kann nicht die führende Ziffer sein, da sonst die Zahl nicht dreistellig wäre.

Wir unterscheiden nun zwei Fälle, welche Ziffer von x gleich Null ist.

1. Fall: Die zweite Ziffer (Zehnerziffer) von x ist Null. Dann ist B(1) wahr und B(2) muss falsch sein, sodass x eine dreistellige, durch 37 aber nicht 3 teilbare Zahl mit 0 an zweiter Stelle und Quersumme verschieden von 11 ist. Die dreistelligen Vielfachen von 37 lauten

$$111, 148, 185, 222, 259, 296, 333, 370, 407, 444, 481, 518, 555, 592, 629, 666, 703, 740, 777, 814,$$

$$851, 888, 925, 962 \text{ und } 999$$

Von diesen haben genau die Zahlen 407 und 703 die Zehnerziffer 0, aber 407 die Quersumme 11, sodass nur $x = 703$ eine Lösung für diesen Fall ist.

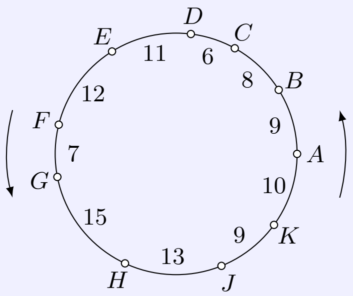
2. Fall: Die zweite Ziffer von x ist verschieden von Null. Dann muss die Einerziffer von x Null sein und, da B(1) falsch ist, muss B(2) wahr sein und die Zahl eine Quersumme von 11 besitzen. Da die Einerziffer von x gleich 0 ist, ist x also nicht nur durch 37, sondern auch durch 10, also wegen ggT(37,10) = 1 auch durch 370, teilbar.

Damit gibt es nur die beiden Möglichkeiten 370 oder 740 für x im zu betrachtenden Intervall, wobei die erste Möglichkeit wegen ihrer Quersumme 10 ausgeschlossen ist. Es verbleibt die einzige Lösung $x = 740$ für diesen Fall.

Man bestätigt leicht durch die Probe, dass tatsächlich beide Werte 703 und 740 jeweils genau eine der Aussagen eines jeden Paares A, B, C und D erfüllen.

Aufgabe 220933:

Auf einer kreisförmig verlaufenden Straße vom 1000 km Länge (Rundkurs) stehen 10 Autos $A, B, C, D, E, F, G, H, J$ und K. Sie haben Kraftstoffvorräte von 8; 10; 6; 13; 5; 13; 9; 16; 6 bzw. 14 Litern bei sich.
Diese 100 Liter würden gerade dafür ausreichen, dass ein beliebiges der zehn Autos die 1000 km einmal zurücklegen kann. Die Anordnung der Autos, die Fahrtrichtung und die Weglängen zwischen den Autos sind aus dem Bild ersichtlich.



Untersuchen Sie, ob es mindestens ein Auto gibt, das bei dieser Ausgangsstellung der Autos die 1000 km dadurch zurücklegen kann, dass es unterwegs den Kraftstoff der übrigen Autos, die an ihren Stellen stehenbleiben, übernimmt! (Verluste beim Übernehmen seien unberücksichtigt.)
Ist das der Fall, so ermitteln Sie alle diejenigen Autos, für die eine solche Fahrt möglich ist!

Lösung von cyrix:
Äquivalent zur Aufgabenstellung können wir annehmen, dass jedes Auto mit einem Kraftstoffvorrat von 0 startet, dafür aber an jeder Station ein Kanister mit der angegebenen Menge an Litern Kraftstoff zur Verfügung steht. (Dies hebt die Asymmetrie der Startstation im Vergleich zu allen anderen Stationen auf.)
Ein Auto kann also genau dann den Rundkurs schaffen, wenn das Volumen seines aktuell zur Verfügung stehenden Kraftstoffs nie negativ wird, also an jeder Station (nach Auffüllen) mindestens so groß ist, wie bis zur nächsten Station benötigt wird.

Erreicht man eine der Stationen B, C, D, F, H oder K, so kann man immer mindestens eine Station weiterfahren, da man dort mindestens so viel Kraftstoff erhält, wie man bis zur nächsten Station benötigt. An den Stationen A, E, G und J ist dies nicht der Fall, sodass die vier dort startenden Autos nicht einmal bis zur nächsten Station kommen können.

Hat man also Station B erreicht, so kann man bis E durchfahren und hat auf dieser Teilstrecke in B, C und D insgesamt 29 Liter Kraftstoff auftanken können, während man von B bis E nur 25 Liter verbraucht hat, sodass man nun 4 Liter mehr zur Verfügung hat als zum Zeitpunkt, indem man in B war.
(Startete man in B, C oder D, sind es nun also höchstens 4 Liter, weil man nicht notwendigerweise den Überschuss an noch nicht besuchten Stationen, da sie „vor“ dem eigenen Start lagen, erhalten hat.)
Da aber an Station E nur 5 zusätzliche Liter zu erhalten sind, aber 12 benötigt werden, erreichen die in B, C oder D gestarteten Autos die Station F nicht, während „vor“ B gestartete dies nur tun, wenn sie in B noch mindestens einen Kraftstoffvorrat von 3 Litern hatten.

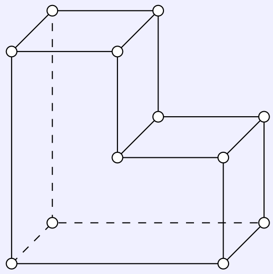
Dazu musste man in A noch mindestens $3 + 9 - 8 = 4$ Liter (vor Nachtanken) und in K mindestens $4 + 10 - 14 = 0$ Liter (vor Nachtanken) an Kraftstoffvorrat haben. Dies bedeutet, dass jedes Auto, dass bis K kommt, dann bis Station F durchfahren kann, und danach (vor Nachtanken) genauso viel Kraftstoff noch besitzt, wie vor dem Nachtanken in K. (Da nur noch die Autos F, H und K den Rundkurs ggf. absolvieren können, starten auch alle spätestens bei H und sind frühestens bei F am Ziel.)

Wer F erreicht hat (und noch nicht am Ziel ist), erhält man zusätzliche 13 Liter, benötigt aber bis G nur 7, sodass man auf jeden Fall noch mindestens 6 Liter Kraftstoffvorrat hat. Mit den zusätzlichen 9 Litern bei G kann man also in jedem Fall die Strecke bis H absolvieren und hat danach (vor Nachtanken) einen so hohen Kraftstoffvorrat wie in F (vor Nachtanken).

Analog gilt auch, dass für jedes der drei verbleibenden Autos, dass aus dem Erreichen von H (sofern dies noch nicht das Ziel war) das Erreichen von K folgt, da man in H zusätzliche 16 Liter erhält, bis J aber nur 13 benötigt, also in J noch mindestens 3 Liter übrig hat, die mit den dort erhaltenen 6 gerade für die benötigten 9 nach K ausreichen.

Damit gilt, dass genau die drei Autos an den Stationen F, H und K den Rundkurs absolvieren können, wobei ihnen an diesen drei Stationen auch immer gerade der Sprit ausgeht und sie sich mit dem letzten Tropfen in dieses (Zwischen-)Ziel schleppen.

Aufgabe 230932:
In der Abbildung ist ein Körper K skizziert. Er besteht aus drei Würfeln der Kantenlänge 1 cm, die in der angegebenen Anordnung fest zusammengefügt sind.
Aus genügend vielen Körpern dieser Gestalt K soll ein (vollständig ausgefüllter) Würfel W (Kantenlänge n Zentimeter) zusammengesetzt werden.
Ermitteln Sie alle diejenigen natürlichen Zahlen $n > 0$, für die das möglich ist!



Lösung von cyrix:
Da das Volumen von K 3 ist, folgt direkt, dass nur für $n = 3k$ ein Würfel der Kantenlänge n gefüllt werden kann. Ein Würfel der Kantenlänge $3k$ zerfällt in k^3 Würfel der Kantenlänge 3. Daher reicht es für $n = 3$ eine Lösung anzugeben. Eine Möglichkeit ist

1	1	3
1	2	3
2	2	4

5	6	3
6	6	7
8	4	4

5	5	7
8	9	7
8	9	9

wobei hier die drei Ebenen angegeben sind und eine Ziffer einen K-Block beschreibt.

Aufgabe 250931:
a) Beweisen Sie, dass es eine natürliche Zahl N gibt, für die folgende Aussage (1) gilt!
(1) Für jede natürliche Zahl n für die $n \geq N$ ist, kann eine Quadratfläche F in genau n Teilquadrate $T_1, ..., T_n$ zerlegt werden.
(Dabei sollen die Flächen $T_1, ..., T_n$ die Fläche F vollständig ausfüllen; sie brauchen nicht untereinander kongruent sein.)

b) Ermitteln Sie die kleinste natürliche Zahl N, für die die Aussage (1) gilt!

Lösung von cyrix:
Es sei die Kantenlänge der Quadratfläche F gleich a.

a) Wir geben zuerst Lösungen für $n = 6$, $n = 7$ und $n = 8$ an:
Für $n = 6$ zerlege man das Quadrat F in 3×3 Quadrate der Kantenlänge $\frac{1}{3} \cdot a$ und fasse davon 2×2 Teilquadrate wieder zu einem der Kantenlänge $\frac{2}{3}$ zusammen. Dieses sei mit T_1 bezeichnet, die übrigen $9 - 4 = 5$ Teilquadrate mit T_2 bis T_6.

Für $n = 7$ zerlege man das Quadrat F in 2×2 Quadrate der Kantenlänge $\frac{1}{2} \cdot a$ und bezeichne drei davon mit T_1 bis T_3. Das vierte Teilquadrat zerlege man in 2×2 Quadrate der Kantenlänge $\frac{1}{4} \cdot a$ und bezeichne diese mit T_4 bis T_7.

Für $n = 8$ zerlege man das Quadrat F in 4×4 Quadrate der Kantenlänge $\frac{1}{4} \cdot a$ und fasse davon 3×3 wieder zu einem Quadrat der Kantenlänge $\frac{3}{4} \cdot a$ zusammen, welches mit T_1 bezeichnet sei. Die übrigen $16 - 9 = 7$ Teilquadrate seien mit T_2 bis T_8 bezeichnet.

Aus einer Zerlegung von F in n Teilquadrate $T_1, \dots, T_n$ erhält man leicht eine in $n + 3$ Teilquadrate, indem man das Teilquadrat T_n weiter unterteilt in 2×2 Teilquadrate halber Kantenlänge. Dadurch erhöht sich die Anzahl der Teilquadrate um $4 - 1 = 3$.
Also lässt sich für jedes $n \geq 6 =: N$ die Quadratfläche F in genau n Teilquadrate zerlegen, $\square$.

b) Es bleibt noch zu zeigen, dass keine Unterteilung in genau 5 Teilquadrate möglich ist, damit $N = 6$ der kleinste Wert ist, der die Aussage (1) der Aufgabenstellung erfüllt.

Nehmen wir also indirekt an, dass es eine Unterteilung von F in genau 5 Teilquadrate gäbe. Dann können keine zwei Eckpunkte von F im gleichen Teilquadrat liegen, da dieses sonst allein ganz F überdecken (oder darüber hinausragen) würde. Tatsächlich müssen alle Kanten von Teilquadraten senkrecht bzw. parallel zu Kanten von F verlaufen, da sich an allen Eckpunkten, also insbesondere denen von F, die Innenwinkel der dort zusammentreffenden Quadrate nur auf Vielfache von $90°$ addieren können.
Es seien T_1 bis T_4 die Teilquadrate, die je einen der vier Eckpunkte von F enthalten. Deren Kantenlängen seien mit a_1 bis a_4 gekennzeichnet. Dann kann nur höchstens eines dieser Teilquadrate eine größere Kantenlänge als $\frac{1}{2} \cdot a$ besitzen, da sich sonst die beiden entsprechenden Teilquadrate mit größerer Kantenlänge überschneiden würden.

Gilt, dass an drei Kanten von F die entsprechenden Teilquadrate aus T_1 bis T_4 direkt benachbart sind, also z. B. $a_1 + a_2 = a_2 + a_3 = a_3 + a_4 = a$, so auch $a_4 + a_1 = (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) - (a_2 + a_3) = 1$, d. h., auch an der vierten Kante von F sind die beiden zugehörigen Teilquadrate aus T_1 bis T_4 direkt benachbart. Dann folgt jedoch $a_1 = a_3$ und $a_2 = a_4$, sodass für alle vier Kantenlängen gilt, dass sie kleiner oder gleich $\frac{1}{2} \cdot a$ sein müssen, da sonst wenigstens zwei größer als dieser Wert wären, was gerade ausgeschlossen wurde. Wäre aber auch nur eine dieser Kantenlängen echt kleiner als $\frac{1}{2} \cdot a$, würden dann die Gleichungen nicht mehr gelten, sodass $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = \frac{1}{2} \cdot a$ folgt. Dies steht aber im Widerspruch dazu, dass genau 5 Teilquadrate existieren, denn nun decken T_1 bis T_4 die Fläche F schon vollständig ab.

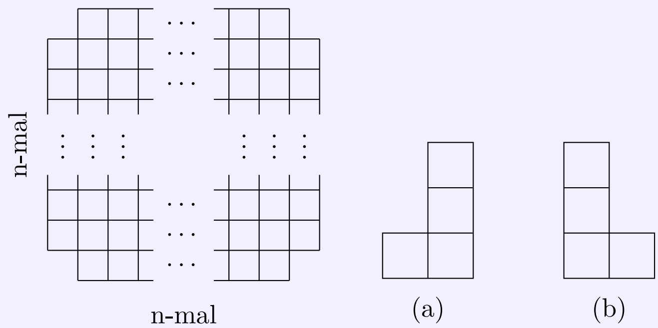
Also gibt es mindestens zwei Kanten von F, an denen die entsprechenden Teilquadrate aus T_1 bis T_4 nicht direkt benachbart sind, sodass zwischen ihnen bisher nicht abgedeckte Bereiche der Quadratfläche F existieren. Diese müsste aber T_5 gemeinsam überdecken, sodass T_5 Punkte von zwei verschiedenen Kanten von F beinhalten müsste. Liegen diese Kanten einander in F gegenüber, ergibt sich sofort ein Widerspruch, da T_5 die Kantenlänge a haben müsste, und so allein F überdecken würde. Aber auch wenn die beiden Kanten von F, auf denen Punkte liegen, die T_5 beinhalten soll, nicht parallel sind, sondern sich in einem Eckpunkt von F schneiden, folgt schnell der Widerspruch, da dann auch T_5 diesen Eckpunkt enthalten müsste, sich damit aber mit dem Teilquadrat aus T_1 bis T_4 überschneiden würde, was diesen Eckpunkt von F bereits enthält.
Demnach führt jeder Fall zum Widerspruch und es gibt keine Zerlegung von F in genau 5 Teilquadrate, sodass $N = 6$ der minimal mögliche Wert ist, der die Aussage (1) erfüllt.

Aufgabe 270934:
Jens zeichnet auf ein Blatt Papier einige Punkte, von denen keine drei auf einer gemeinsamen Geraden liegen. Er verbindet einige Male irgend zwei dieser Punkte durch eine Strecke.
Dabei kommt es auch vor, dass Punkte jeweils mit mehr als einem anderen Punkt verbunden sind.
Dirk zählt nun die von jedem Punkt ausgehenden Strecken und ermittelt dann die Anzahl A aller derjenigen Punkte, von denen jeweils eine ungerade Anzahl von Strecken ausgeht.
Christa behauptet dann, ohne zu wissen, wie viele Punkte Jens gezeichnet hat und welche Punkte er mit welchen anderen verbunden hat, die Anzahl A müsse in jedem Fall eine gerade Zahl sein.
Trifft das zu?

Lösung von cyrix:
Ja, dies trifft zu: Zählt man die von jedem Punkt ausgehenden Strecken, so muss dies die doppelte Anzahl aller Strecken sein, da jede Strecke an ihren beiden Endpunkten jeweils einen Summanden von 1 beiträgt.

Insbesondere ist diese Anzahl also gerade. Damit ist die Summe, die entsteht, wenn man für alle Punkte P die Anzahl der von P ausgehenden Strecken addiert, gerade, muss also geradzahlig viele (ggf. auch null) ungerade Summanden besitzen.
Dabei ist A genau diese Anzahl ungerader Summanden, also selbst gerade, $\Box$.

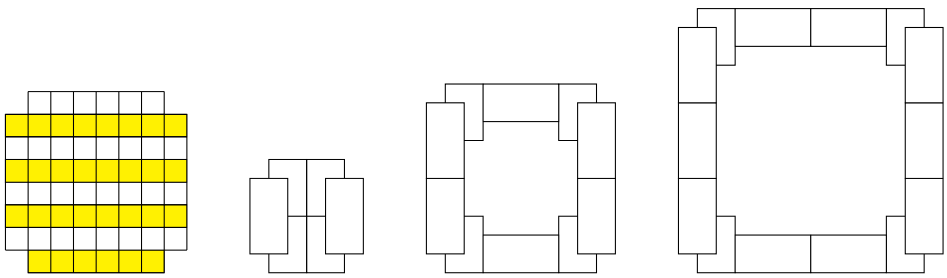
Aufgabe 280936:
Ermitteln Sie alle diejenigen Zahlen $n \geq 3$, für die es möglich ist, ein $n \times n$-Brett ohne die vier Eckfelder (siehe Abbildung) vollständig so in Teile zu zerlegen, dass jedes Teil aus einer der Flächen (a), (b) durch Verschiebung und Drehung zu erhalten ist!
Hinweis: Es ist auch zugelassen, dass in einer Zerlegung sowohl Teile (a) als auch Teile (b) vorkommen.



Lösung von Nuramon:
Da (a) und (b) beide Fläche 4 haben, muss damit so eine Lösung existiert notwendigerweise $n^2 - 4$ durch 4 teilbar sein, d. h. es muss n gerade sein. Für gerades n können wir die Zeilen des Brettes abwechselnd mit weiß und grün einfärben (siehe Skizze unten). Diese Färbung hat die Eigenschaft, dass egal wie man die Teile (a) bzw. (b) auf dem Brett positioniert, genau 1 Feld des Teils grün und die anderen 3 weiß (Typ A) bzw. genau 1 Feld weiß und die anderen 3 grün (Typ B) sind.

Da die Anzahl der weißen Felder gleich der Anzahl der grünen Felder ist, folgt, dass in einer zulässigen Zerlegung die Anzahl der Teile vom Typ A gleich der Anzahl der Teile vom Typ B sein muss. Also muss $n^2 - 4$ sogar durch 8 teilbar sein, also muss n von der Form $n = 4k + 2$ mit $k \in \mathbb{N}$ sein.

Diese Bedingung ist auch hinreichend: Für $n = 2$ ist eine Zerlegung offensichtlich möglich (von einem 2×2-Brett wurden alle vier Felder entfernt.).
Außerdem ist klar, dass man 2×4-Rechtecke in genau zwei Teile zerlegen kann.
Hat man eine Zerlegung eines Brettes der Größe $n = 4k + 2$ gefunden, dann kann man diese zu einer Zerlegung eines Brettes der Größe $4k+6$ erweitern, indem man wie in der Skizze vier Teile in den Ecken des bereits zerlegten Brettes positioniert und die beiden horizontalen Seiten dann noch mit k 2×4-Rechtecken auffüllt und die beiden vertikalen Seiten mit $k + 1$ 2×4-Rechtecken ergänzt:



Aufgabe 300931:
Zwei Spieler A und B spielen das folgende Spiel:
Auf dem Tisch liegen aufgedeckt 50 Spielkarten. Jede ist mit genau einer der Zahlen von 1 bis 50 beschriftet, jede dieser Zahlen steht auf genau einer der Karten. Weitere unbeschriftete Karten stehen zur Verfügung.
Die Spieler sind, beginnend mit A, abwechselnd am Zug.
Wer am Zug ist, wählt zwei beliebige der beschrifteten Karten und nimmt sie aus dem Spiel. Dann beschriftet er eine der unbeschrifteten Karten mit dem Absolutbetrag der Differenz der Zahlen auf

den weggenommenen Karten, legt die so neu beschriftete Karte auf den Tisch und bringt sie damit ins Spiel.
Das Spiel endet, wenn nur noch eine Karte im Spiel ist. Steht auf dieser eine gerade Zahl, so hat A gewonnen, andernfalls B.
Kann einer der Spieler das Spiel so gestalten, dass er mit Sicherheit gewinnt?

Lösung von cyrix:
Egal, wie gespielt wird, B gewinnt immer. (Damit kann sich A eine beliebige Strategie festlegen, das Spiel so gestalten, und gewinnt mit Sicherheit.)

Beweis: Seien a und b mit o. B. d. A. $a \geq b$ die Zahlen, die in einem Zug von einem Spieler auf aus dem Spiel genommenen Karten stehen. Dann verringert sich die Gesamtsumme aller Zahlen auf im Spiel befindlichen Karten um $a + b$, erhöht sich aber durch die neu ins Spiel gebrachte Karte um $a - b$.
Insgesamt verringert sich also die Gesamtsumme um $a + b - (a - b) = 2b$, also eine gerade Zahl, sodass sich die Parität der Gesamtsumme aller im Spiel befindlichen Zahlen nie ändert. Da das Spiel endlich ist (mit jedem Zug sinkt die Anzahl der im Spiel befindlichen Karten um 1), ist irgendwann nur noch eine Karte im Spiel, d. h., die darauf befindliche Zahl ist dann gleichzeitig der Gesamtsumme aller im Spiel befindlichen Zahlen.
Diese ist demnach genau dann gerade, wenn es auch die Summe aller Zahlen zu Spielbeginn war, welche $1 + 2 + \cdots + 50 = \frac{50 \cdot 51}{2} = 25 \cdot 51$, also ungerade ist. Damit bleibt in jedem Fall am Ende eine Karte mit einer ungeraden Zahl übrig, sodass B sicher gewinnt, $\Box$.

Aufgabe 300933:
Man beweise, dass es 40 im Innern oder auf dem Rand eines Würfels der Kantenlänge 10 cm liegende Punkte gibt, von denen keine zwei einen Abstand kleiner als 4 cm voneinander haben.

Lösung von cyrix:
Wir beginnen mit einem Quadrat der Kantenlänge 10 cm und positionieren darauf Punkte, von denen keine zwei einen Abstand von 4 cm oder weniger haben. Dazu beginnen wir auf einer Kante des Vierecks und positionieren je einen Eckpunkt in deren Endpunkte und einen auf ihren Mittelpunkt.
Dies wollen wir eine „Dreier-Strecke“ nennen. Die Parallele zu dieser Kante im Abstand von $\frac{1}{3} \cdot 10$ cm vierteln wir und positionieren auf den beiden äußeren Teilungspunkten je einen Punkt. Dies wollen wir eine „Zweier-Strecke“ nennen.
Wieder auf der Parallelen zur Grundkante im Abstand $\frac{2}{3} \cdot 10cm$ positionieren wir analog der Grundkante eine „Dreierstrecke“ und abschließend auf der gegenüberliegenden Kante im Abstand $\frac{3}{3} \cdot 10$ cm wieder eine „Zweier-Strecke“.

Auf jeder Strecke haben je zwei ausgewählte Punkte den Abstand von mindestens 5 cm. Je zwei benachbarte der ausgewählten Punkte auf einer solchen Strecke spannen mit einem ausgewählten Punkt „zwischen ihnen“ auf einer benachbarten Strecke ein gleichseitiges Dreieck mit Basislänge 5 cm und Länge der Höhe auf die Basis von $\frac{1}{3} \cdot 10$ cm auf.
Damit haben die beiden Schenkel nach dem Satz von Pythagoras die Länge

$$\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{10}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{100}{9}} > \sqrt{\frac{24}{4} + \frac{90}{9}} = \sqrt{6 + 10} = \sqrt{16} = 4cm$$

sodass auch keine zwei ausgewählte Punkte auf verschiedenen Strecken einen Abstand von 4 cm oder geringer haben.

Auf dem Quadrat haben wir so $3 + 2 + 3 + 2 = 10$ Punkte ausgewählt, von denen keine zwei einen Abstand von 4 cm oder weniger haben. Ein solches Quadrat nennen wir „gut gefüllt“ und „mit Dreier-Strecke beginnend“.
Spiegeln wir es, indem wir Grundkante und deren gegenüberliegende Kante aufeinander abbilden, so entsteht wieder ein „gut gefülltes“ Quadrat, nun aber in der Reihenfolge „Zweier-Strecke“, „Dreier-Strecke“,

„Zweier-Strecke“, „Dreier-Strecke“. Dieses wollen wir als „mit Zweier-Strecke beginnendes, gut gefülltes Quadrat“ bezeichnen.

Starten wir nun mit der Grundfläche des Würfels und legen in diese ein „mit Dreier-Strecke beginnendes, gut gefülltes„ Quadrat.
In das Quadrat, welches als Schnitt der zur Grundfläche parallelen Ebene im Abstand $\frac{1}{3} \cdot 10$ cm mit dem Würfel entsteht, legen wir – bezüglich der gleichen Orientierung – ein „mit Zweier-Strecke beginnendes, gut gefülltes Quadrat„. In das Quadrat, welches als Schnitt der zur Grundfläche parallelen Ebene im Abstand $\frac{2}{3} \cdot 10$ cm mit dem Würfel entsteht, legen wir wieder ein „mit Dreier-Strecke beginnendes, gut gefülltes Quadrat“ und schließlich in die Deckfläche, welche zur Grundfläche parallel im Abstand $\frac{3}{3} \cdot 10$ cm liegt, wieder ein „mit Zweier-Strecke beginnendes, gut gefülltes Quadrat“.
Auf diese Weise sind in alle drei Richtungen die ausgewählten Punkte jeweils „versetzt“ angeordnet.

Zwei Punkte innerhalb eines solchen „gut gefüllten Quadrats“ haben, wie oben schon gesehen, niemals einen Abstand von 4 cm oder weniger. Da wir vier „gut gefüllte Quadrate“ in oder auf den Würfel gelegt haben, die sich paarweise nicht überschneiden (da sie in verschiedenen, zueinander parallelen Ebenen liegen), beträgt die Gesamtanzahl der so markierten Punkte also $4 \cdot 10 = 40$.
Jedoch bilden auch die so markierten Punkte auf den Schnitten, die durch Ebenen parallel zu den anderen Seitenflächen des Würfels im Abstand $\frac{i}{3} \cdot 10$ cm zu diesen für jedes $i = 0{,}1{,}2{,}3$ „gut gefüllte Quadrate“, sodass auch hier keine zwei Punkte einen Abstand von 4 cm oder weniger besitzen.
Also haben zumindest all diejenigen Paare verschiedener markierter Punkte, die in einer gemeinsamen zu einer Seitenfläche des Würfels parallelen Ebene liegen, jeweils einen Abstand von mehr als 4 cm zueinander. Zwei Punkte, die aber in keiner gemeinsamen solchen Ebene liegen, haben in jeder Richtung einen Abstand von mindestens $\frac{1}{3} \cdot 10$ cm, also nach dem Satz von Pythagoras einen Abstand von mindestens

$$\sqrt{\left(\frac{10}{3}\right)^2 + \left(\frac{10}{3}\right)^2 + \left(\frac{10}{3}\right)^2} = \sqrt{3 \cdot \frac{100}{9}} > \sqrt{\frac{300}{10}} = \sqrt{30} > \sqrt{16} = 4cm$$

also mehr als 4 cm. Damit haben je zwei verschiedene der angegebenen markierten Punkte einen Abstand von mehr als 4 cm, $\square$.

Aufgabe 310931:
Denkt man sich an jede Ecke eines räumlichen Körpers eine Zahl geschrieben, so bezeichnen wir für jede Seitenfläche dieses Körpers als „Flächensumme“ dieser Seitenfläche die Summe aus den Zahlen, die an die Ecken dieser Seitenfläche geschrieben werden.
Untersuchen Sie, ob es möglich ist, an die Ecken eines Oktaeders die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 in einer solchen Reihenfolge zu schreiben, dass alle acht Flächensummen des Oktaeders einander gleich sind!

Lösung von cyrix:
Nein dies ist nicht möglich:
Gäbe es eine solche Verteilung, dann müsste die Summe aller acht Flächensummen einerseits das Vierfache der Summe der sechs Zahlen, also $4 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 4 \cdot 21 = 84$, betragen, da jede jeder Eckpunkt an genau vier Flächen beteiligt ist, aber andererseits natürlich durch acht teilbar sein, da die acht Flächensummen alle gleich groß sein sollen.
Es ist aber 84 nicht durch 8 teilbar, sodass es eine solche Verteilung der Zahlen an die Eckpunkte, die die Bedingung der Aufgabenstellung erfüllt, nicht möglich ist, $\square$.

Aufgabe 320931:
In einem Land gibt es nur zwei Sorten von Menschen: Edelmänner und Schurken.
Jeder Edelmann macht nur wahre Aussagen, jeder Schurke nur falsche Aussagen. Ein nicht aus diesem Land stammender Reporter berichtet, er habe folgendes Gespräch dreier Einwohner A, B und C dieses Landes gehört:
A sagt zu B: „Wenn C ein Edelmann ist, dann bist du ein Schurke.“
C sagt zu A: „Du bist von anderer Sorte als ich.“

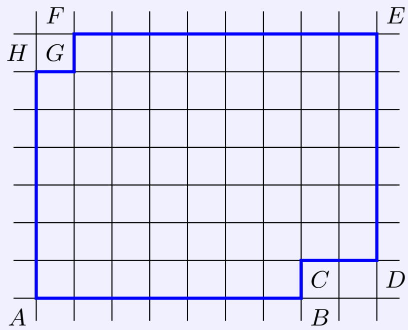
Kann ein solches Gespräch stattgefunden haben?
Wenn das der Fall ist, geht dann aus dem Gespräch für jeden der drei A, B, C eindeutig hervor, ob er Edelmann oder Schurke ist, und zu welchen Sorten gehören dann A, B und C?

Lösung von cyrix:
Wir betrachten zuerst C und seine Aussage. Wäre er ein Schurke, so also auch A, der mit seiner Aussage also eine falsche Aussage getroffen hätte. Nun ist aber die Voraussetzung „Wenn C ein Edelmann ist" seiner Aussage nicht erfüllt, diese also automatisch immer wahr, was ein Widerspruch ist.

Also kann in einem solchen Gespräch C kein Schurke, muss also ein Edelmann sein. Dann jedoch ist seine Aussage wahr und A ein Schurke. Dessen Aussage ist damit falsch, sodass (aufgrund der diesmal erfüllten Voraussetzung der Aussage von A) auch B ein Edelmann sein muss.

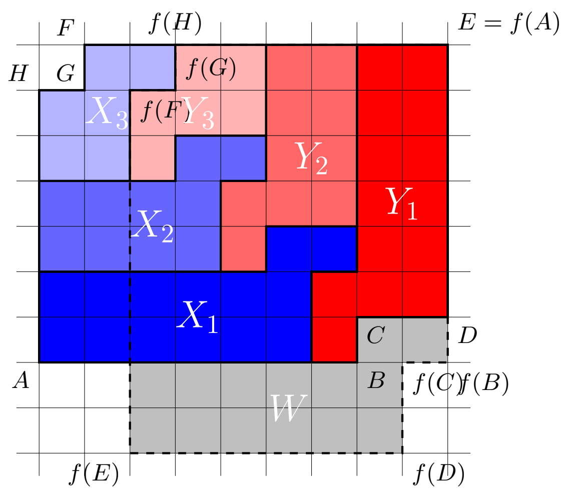
In dieser Konstellation kann das Gespräch stattgefunden haben und es ist eindeutig bestimmt, welcher Sorte jeweils A, B und C angehören, nämlich B und C den Edelmännern und A den Schurken.

Aufgabe 320935:
Auf kariertem Papier (eingeteilt in quadratische Karos) ist ein Achteck $ABCDEFGH$ wie in der Abbildung gezeichnet.
Jemand will es in zwei kongruente Teilflächen zerschneiden, und zwar sollen sich diese Teilflächen so miteinander zur Deckung bringen lassen, dass dabei A mit E zur Deckung kommt.
Die Schnittkurve soll ein zusammenhängender Streckenzug sein, der sich selbst nicht überkreuzt und der nur aus Teilstrecken zusammengesetzt ist, die auf dem karierten Papier vorgegeben sind.



Beweisen Sie, dass es genau einen Streckenzug gibt, mit dem das Achteck wie gewünscht zerschnitten werden kann!

Lösung von Nuramon:



Angenommen das Achteck $Z := ABCDEFGH$ ist in zwei Flächen X,Y mit den geforderten Eigenschaften zerlegt, wobei $A \in X$ und $E \in Y$. Es sei f diejenige (affin lineare) Abbildung, durch die X mit Y zur Deckung kommt und die $f(A) = E$ erfüllt.

f muss das Kästchen links unten in Z (das mit der Ecke A) auf das Kästchen rechts oben in Z (das mit Ecke E) abbilden, wobei $f(A) = E$. Es gibt nur zwei Abbildungen mit dieser Eigenschaft, die in Frage kommen:
- eine ist die Drehung um 180° um den Mittelpunkt der Strecke AE,
- die andere erhält man, indem man Z zuerst parallel verschiebt, so dass der Punkt A auf E zu liegen kommt und anschließend an derjenigen Gerade spiegelt, die Z nur im Punkt E schneidet und mit EF einen Winkel von 45° einschließt.

f kann nicht die Drehung sein, denn dann wäre $f \circ f = \mathrm{id}$ und somit hätte $Z = X \cup Y = X \cup f(X) = f \circ f(X) \cup f(X) = f(f(X) \cup X) = f(Z)$ eine Punktsymmetrie.
Also muss f die andere genannte Abbildung sein. Da die Abbildung f bijektiv ist und X auf Y abbildet, muss gelten: (1): Für alle Punkte $p \in Z$ gilt $f(p) \in Y$ genau dann, wenn $p \in X$ gilt.

Es sei $f(Z)$ das Achteck $f(A)f(B)f(C)f(D)f(E)f(F)f(G)f(H)$, dass man erhält, wenn man f auf das Achteck $Z = ABCDEFGH$ anwendet.

Es sei $W := f(Z) \setminus Z$. Für jeden Punkt $p \in Z = X \cup Y$ mit $f(p) \in W$ gilt dann insbesondere $f(p) \notin Y$ und nach (1) gilt somit $p \in Y$.
Daher ist die Menge $Y_1 := \{p \in Z \mid f(p) \in W\}$ eine Teilmenge von Y.
Wiederum nach (1) muss dann die Menge $X_1 := \{p \in Z \mid f(p) \in Y_1\}$ eine Teilmenge von X sein.

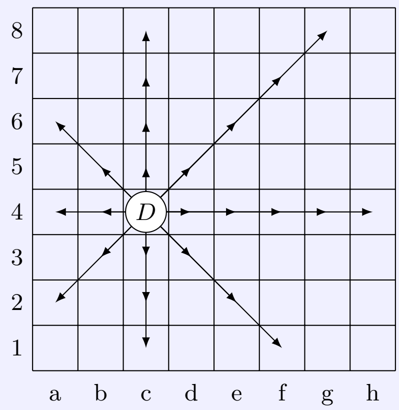
Als nächstes betrachten wir $Y_2 := \{p \in Z \mid f(p) \in X_1\}$. Wieder folgt aus (1), dass Y_2 eine Teilmenge von Y ist.
Somit ist auch $X_2 := \{p \in Z \mid f(p) \in Y_2\}$ eine Teilmenge von X.

Schließlich sei $Y_3 := \{p \in Z \mid f(p) \in X_2\} \subset Y$ und $X_3 := \{p \in Z \mid f(p) \in Y_3\} \subset X$.
Wir stellen fest, dass $X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup Y_1 \cup Y_2 \cup Y_3$ bis auf einige Gitterlinien schon ganz Z ist.
Also muss X der Abschluss von $X_1 \cup X_2 \cup X_3$ sein und Y der Abschluss von $Y_1 \cup Y_2 \cup Y_3$ sein.

Tatsächlich erfüllen die so konstruierten Flächen alle gewünschten Eigenschaften. Damit ist sowohl die Eindeutigkeit als auch die Existenz von X,Y bewiesen.

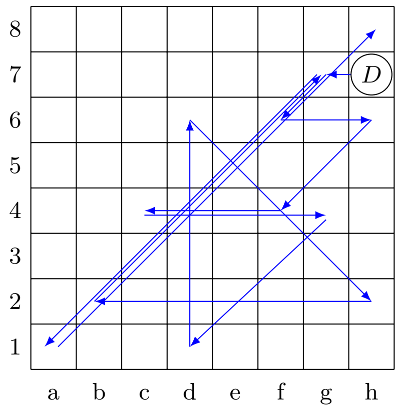
Aufgabe 330941:

Auf einem Schachbrett wird eine Figur „Dame“ betrachtet, die wie im Schachspiel ziehen kann, also in den acht Richtungen parallel zum Brettrand oder diagonal, jeweils beliebig viele Felder. (siehe z. B. in der Abbildung alle von c4 aus möglichen Züge.)
Als Länge eines Zuges werde stets die Streckenlänge vom Mittelpunkt des Anfangsfeldes zum Mittelpunkt des Zielfeldes bezeichnet. Dabei werde die Seitenlänge jedes der 64 quadratischen Felder als Längeneinheit genommen. Gesucht wird eine Zugfolge, die den folgenden Bedingungen genügt:



(1) Bei jedem Zug der Zugfolge - mit Ausnahme des letzten - soll der Zug, der sich anschließt (d. h. als Startfeld das eben erreichte Zielfeld hat), eine größere Länge haben als der Zug, an den er sich anschließt.
(2) Das Zielfeld des letzten Zuges soll dem Startfeld des ersten Zuges benachbart sein (und zwar eine Seite mit ihm gemeinsam haben, nicht nur eine Ecke).
(3) Die Zugfolge soll in der Summe der Längen ihrer Züge von keiner Zugfolge, die den Bedingungen (1) und (2) genügt, übertroffen werden.
Geben Sie eine Zugfolge an und beweisen Sie, dass sie die Bedingungen (1), (2) und (3) erfüllt!

Lösung von cyrix:



Es ist $1 < \sqrt{2} < 2 < 2\sqrt{2} < 3 < 4 < 3\sqrt{2} < 5 < 4\sqrt{2} < 6 < 7 < 5\sqrt{2} < 6\sqrt{2} < 7\sqrt{2}$.

Wenn es einen Weg gibt, der alle diese Streckenlängen erfüllt, dann muss er in einem Eckfeld enden, o. B. d. A. h8. Der Zug davor muss dann in a1 starten, der davor in g7 und der davor in b2. Dann jedoch wäre zuvor kein Zug der Länge 7 möglich gewesen, da man dazu am Rand des Schachbretts stehen und auch ankommen muss. Also kann nicht jede der Längen ≥ 7 in der Zugfolge vorkommen.

Streichen wir den Zug der Länge 7, so machen wir hierbei die Summe um den kleinstmöglichen Wert kleiner, bleiben also maximal (unter der Voraussetzung, dass alle kürzeren Züge nun möglich sind). Wir benötigen also einen Zug der Länge 6, der in b2 endet. Dies kann sowohl b8 als auch h2 sein. Da beide symmetrisch zur Hauptdiagonalen liegen (auf der sich auch das Zielfeld h8 des letzten Zug befindet), können wir o. B. d. A. h2 als dessen Ausgangsfeld wählen.
Dort muss nun ein Zug der Länge $4\sqrt{2}$ ankommen, der also nur in d6 gestartet sein kann. Der davor erfolgende Zug der Länge 5 muss dann von Feld d1 ausgegangen sein. Dort muss ein Zug der Länge $3\sqrt{2}$ sein Ziel gefunden haben, der damit von a4 oder g4 gestartet sein muss.

Wir geben im folgenden einen Weg an, der in h7 startet, aufsteigend alle Längen von 1 bis $7\sqrt{2}$, mit Ausnahme der Länge 7, durchläuft und im Nachbarfeld h8 von h7 endet:

h7 – g7 – f6 – h6 – f4 – c4 – g4 – d1 – d6 – h2 – b2 – g7 – a1 – h8

Diese Zugfolge hat maximale Länge unter Einhaltung der Bedingungen (1) und (2), ist also eine gesuchte.

Aufgabe 340934:
Ein Quadrat $ABCD$ sei in 25 kongruente Teilquadrate aufgeteilt.
Ist n eine positive ganze Zahl mit $n \leq 25$, so seien n verschiedene Farben gewählt, und von jeder dieser Farben seien 25 Blättchen von der Größe der Teilquadrate zur Verfügung gestellt.
Von diesen $n \cdot 25$ Blättchen sollen dann 25 ausgewählt und so auf das Quadrat $ABCD$ gelegt werden, dass jedes Teilquadrat von genau einem der ausgewählten Blättchen bedeckt wird.
Eine Zahl n werde genau dann eine „freundliche“ Zahl genannt, wenn für sie folgendes gilt:
Bei jeder Auswahl von 25 der $n \cdot 25$ Blättchen, bei der jede der n Farben mit mindestens einem Blättchen vertreten ist, kann man die Verteilung auf die Teilquadrate so vornehmen, dass das bedeckte Quadrat $ABCD$ als farbiges Muster symmetrisch bezüglich der Geraden durch A und C ist.
Ermitteln Sie unter den positiven ganzen Zahlen $n \leq 25$ alle „freundlichen“ Zahlen!

Lösung von cyrix:
Für jede symmetrische Belegung gilt, dass die 10 Teilquadrate oberhalb der Diagonalen AC jeweils die gleiche Farbe wie die 10 Teilquadrate unterhalb dieser Diagonalen haben müssen, während die Farben der 5 Diagonalfelder beliebig sind. Dies ist auch hinreichend. Aus einer Auswahl von 25 Blättchen lässt sich also genau dann keine zu AC symmetrische Belegung erzeugen, wenn sie keine 10 paarweise disjunkte

Paare von gleichfarbigen Blättchen besitzt.

Seien $a_1, a_2, \ldots, a_n$ die Anzahl der Blättchen der Farbe 1, 2, ..., n unter den 25 ausgewählten, dann lassen sich aus diesen maximal

$$P := \left[\frac{a_1}{2}\right] + \left[\frac{a_2}{2}\right] + \cdots + \left[\frac{a_n}{2}\right]$$

solcher Paare bilden. Wegen $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 25$ ist $P = \frac{25-u}{2}$, wobei u die Anzahl der ungeraden Zahlen unter $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ist. (Dann ist, da 25 ungerade ist, auch u ungerade und somit P eine ganze Zahl.) Aus diesen Blättchen lässt sich also genau dann keine bezüglich AC symmetrische Belegung bilden, wenn es mehr als 5, also mindestens 7 ungerade Blättchenanzahlen unter $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gibt.

Dafür muss aber $n \geq 7$ sein. Dies bedeutet, dass alle $n \leq 6$ „freundlich" sind. Ist jedoch $n = 7$, so kann man $a_1 = a_2 = \cdots = a_6 = 1$ und $a_7 = 19$, bzw. für $n > 7$ schließlich $a_1 = a_2 = \cdots = a_7 = 1$ (und Rest beliebig ≥ 1) auswählen, sodass bei dieser Wahl jeweils keine bezüglich AC symmetrischen Belegungen möglich sind. Also sind alle $7 \leq n \leq 25$ „unfreundlich".

Aufgabe 340941:
Die Bewohner des Planeten Quadron unterscheiden sich nach ihrem Geschlecht, und zwar gibt es, anders als auf der Erde, genau vier verschiedene Geschlechter. Politisch ist die Bevölkerung eingeteilt in genau vier Völkerstämme.
Wenn der planetare Rat zusammentritt, entsendet jeder Völkerstamm genau vier Abgeordnete, von jedem Geschlecht einen.
Es ist dann eine Sitzordnung vorgeschrieben, bei der 16 Sitze in quadratförmiger Formierung zu vier Zeilen und vier Spalten angeordnet sind. In jeder Zeile und in jeder Spalte müssen alle vier Völkerstämme und alle vier Geschlechter vertreten sein.
Gib eine mögliche Sitzordnung an und bestätige, dass bei dieser Sitzordnung alle genannten Bedingungen erfüllt sind!

Lösung von cyrix:
Wir bezeichnen die Völkerstämme mit a, b, c und d, sowie die Geschlechter mit 1, 2, 3 bzw. 4, sodass also a1 den Abgeordneten von Völkerstamm a mit Geschlecht 1 bezeichne.
Dann gibt folgende Tabelle eine zulässige Sitzordnung an, wobei man sich leicht davon überzeugt, dass in jeder Zeile und jeder Spalte jeder Völkerstamm a bis d sowie jedes Geschlecht 1 bis 4 genau einmal vertreten ist und kein Abgeordneter mindestens zwei oder gar keinen Sitzplatz erhält:

$$\begin{array}{cccc} a1 & b2 & c3 & d4 \\ b3 & a4 & d1 & c2 \\ c4 & d3 & a2 & b1 \\ d2 & c1 & b4 & a3 \end{array}$$

Aufgabe 340944:
Axel führt einen Kartentrick vor. Er benutzt dazu ein Skatspiel, bestehend aus jeweils 4 Karten der folgenden Arten, denen er folgende Augenwerte zuteilt:

Art der Karte		7	8	9	10	Bube	Dame	König	As
Augenwert		7	8	9	10	2	3	4	11

Seine Freunde sollen, während er nicht im Zimmer ist, nach folgender Vorschrift Kartenstapel bilden:
Für jeden Stapel wird zunächst eine Karte offen hingelegt, und der damit beginnende Stapel erhält so viele Punkte, wie der Augenwert dieser Karte angibt.
Dann werden weitere Karten verdeckt auf den Stapel gelegt; für jede dieser Karten wird die Punktzahl des Stapels um 1 erhöht. Dies wird aber nur so lange durchgeführt, bis die Punktzahl 11 erreicht ist; der Stapel ist damit abgeschlossen.
Er wird dann umgedreht, so dass die bisher unterste Karte nun verdeckt oben liegt.
1. Beispiel: 7 offen hinlegen vier Karten verdeckt darauf legen, Stapel umdrehen.

2. Beispiel: As offen hinlegen, umdrehen.
Solche Stapel werden einige Male gebildet und nebeneinander auf den Tisch gelegt. Falls am Ende Karten übrig bleiben, werden diese „Restkarten“ einzeln abzählbar und verdeckt neben den Stapel gelegt.
Dann wird Axel herein gerufen. Er behauptet, er könne aus der Anzahl der fertigen Stapel und der Anzahl der Restkarten die Summe der Augenwerte der nunmehr obersten Karten der Stapel finden. Wie ist das möglich?

Lösung von cyrix:
Bevor der erste Stapel gebildet wurde, war die Anzahl der Restkarten 32. Es sei a_1 der Wert der für den ersten Stapel zu Beginn offen hingelegten Karte. Dann verringert sich die Anzahl der Restkarten um $1 + (11 - a_1) = 12 - a_i$, denn neben der einen aufgedeckten Karte mit Wert a_1 werden noch $11 - a_1$ weitere Karten auf diesen Stapel gelegt.
Analog reduziert jeder weiterer Stapel mit zuerst offen liegendem Kartenwert $a - i$ die Anzahl der nun noch vorhandenen Restkarten um den Wert $12 - a_i$.
Sieht also Axel n Stapel und r Restkarten, so weiß er

$$r = 32 - (12 - a_1) - \cdots - (12 - a_n) = 32 - n \cdot 12 + (a_1 + \cdots + a_n)$$

bzw. $a_1 + \cdots + a_n = n \cdot 12 + r - 32$,
kennt also die Summe der Kartenwerte der zuerst für jeden Stapel ofen ausgelegten Karten, die nach dem Umdrehen nun die obersten Karten eines jeden Stapels sind.

III.III Berechnen von Anzahlen, Wahrscheinlichkeiten

I Runde 1

Aufgabe V00909:
Wie viel verschiedene Würfe lassen sich mit
a) zwei Würfeln,
b) drei Würfeln
machen, wenn zwei Würfe als verschieden gelten, sofern wenigstens einer der zwei bzw. drei Würfel bei einem Wurf andere Augenzahl zeigt, als beim anderen Wurf?
Wie wurde die Lösung gefunden?

Lösung von Steffen Polster:
Zeigt der 1. Würfel eine „1“, so kann der zweite 6 Werte anzeigen, zeigt der 1. Würfel eine „2“ verbleiben für den zweiten noch 5 Werte, usw. Damit gibt es bei 2 Würfeln genau 21 verschieden Würfe.
Bei drei Würfeln ergeben sich analog 56 verschiedene Würfe.

Aufgabe V10912:
Wie viel zueinander verschiedene Stellungen können ein weißer und ein schwarzer Stein auf einem Schachbrett (64 Felder) einnehmen?

Lösung von Steffen Polster:
Zu jeder Stellung des schwarzen Steines gibt es 63 Möglichkeiten für die Stellung des weißen Steines. Der schwarze Stein kann 64 verschiedene Felder besetzen. Mithin gibt es $63 \cdot 64 = 4032$ zueinander verschiedene Stellungen.

Aufgabe 050912:
Es ist zu beweisen, dass 77 Telefone nicht so miteinander verbunden werden können, dass jedes mit genau 15 anderen verbunden ist.

Lösung von Manuela Kugel:
Angenommen, diese Verbindung wäre realisierbar. Wir stellen uns vor, dass jede Verbindung durch eine gesonderte Leitung erfolgt. Dann müssten auf jedem Telefon genau 15 Anschlüsse vorhanden sein, insgesamt also $77 \cdot 15$.

Da die Verbindung von Telefon A zu Telefon B stets gleichzeitig Verbindung von Telefon B zu Telefon A ist, müsste die Gesamtzahl der Anschlüsse durch 2 teilbar sein.
Das ist jedoch unmöglich, da $77 \cdot 15$ eine ungerade Zahl ergibt.

Aufgabe 110911:
Jörg schreibt die folgende Gleichung auf:

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{c+d} = \frac{1}{(a+b)(c+d)} \tag{1}$$

Michael meint, dass sie „falsch“ sei. Jörg, der sich nicht so leicht „überzeugen“ lässt, wählt für die Variablen a, b, c und d Zahlen, setzt sie in die Gleichung (1) ein und erhält zu Michaels Überraschung eine wahre Aussage.

Ermitteln Sie alle Möglichkeiten, nur aus den Zahlen –1, 0, 1 für a, b, c und d je eine so auszuwählen, dass die Gleichung (1) erfüllt wird!

Lösung von Manuela Kugel:
Addiert man die Quotienten auf der linken Seite der Gleichung, so folgt, dass die Gleichung gleichbedeutend ist mit

$$\frac{c+d+a+b}{(a+b)(c+d)} = \frac{1}{(a+b)(c+d)}.$$

Diese Gleichung ist genau dann eine wahre Aussage, wenn $a+b+c+d=1$ und $a \neq -b$ sowie $c \neq -d$ gelten. Wählt man für a eine der Zahlen -1, 0 oder 1, so verbleiben für b wegen $a \neq -b$ je genau zwei Zahlen , nämlich die in der untenstehenden Tabelle genannten.

Von den erhaltenen Zahlen sind die mit $a+b=-2$ und die mit $a+b=1$ auszuschließen, da sich aus $a+b+c+d=1$ für sie $c+d=3$ bzw. $c+d=0$ ergibt, was durch Wahl von c und d aus den Zahlen -1, 0, 1 nicht zu erreichen ist bzw. im Widerspruch zu $c \neq -d$ steht.

In jeder der nun verbliebenen Möglichkeiten ergibt sich genau eine Zahl für $c+d$, die durch Wahl von c und d aus den Zahlen -1, 0, 1 durch genau die folgenden Zahlen erreicht werden kann:

a	-1	-1	0	0	1	1	1
b	-1	0	-1	1	0	1	1
a+b	-2	-1	-1	1	1	2	1
c+d	3	2	2	0	0	-1	-1
c	-	1	1	-	-	-1	0
d	-	1	1	-	-	0	-1

Die 2., 3., 6. und 7. Spalte genügen als einzige allen Bedingungen der Aufgabe, wie man durch Einsetzen erkennt.

Aufgabe 250911:
Aus den Ziffern 1, 9, 8, 5 seien alle möglichen vierstelligen Zahlen gebildet, wobei jede der Ziffern in jeder dieser Zahlen genau einmal vorkommen soll.

Ermitteln Sie die Anzahl aller derartigen Zahlen, die
a) durch 2,
b) durch 3,
c) durch 4,
d) durch 5,
e) durch 6
teilbar sind, und geben Sie diese Zahlen jeweils an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Durch 2 sind von den genannten vierstelligen Zahlen genau diejenigen teilbar, die auf eine geradzahlige Ziffer, also auf 8 enden. Mit den restlichen 3 Ziffern kann man 6 verschiedene Zahlen bilden, also gibt es genau 6 derartige durch 2 teilbare Zahlen, nämlich 1598, 1958, 5198, 5918, 9158 und 9518.

b, e) Da die Quersumme von 1985 nicht durch 3 teilbar ist, und das auch für alle durch Umordnung zu bildenden Zahlen gilt, ist keine der Zahlen durch 3 und damit auch keine durch 7 teilbar.

c) Eine Zahl ist genau dann durch 4 teilbar, wenn die von den letzten beiden Ziffern gebildete Zahl durch 4 teilbar ist. Aus den Ziffern 1, 5, 8 und 9 kann aber keine solche zweistellige Zahl gebildet werden; denn sie müsste gerade sein, also auf 8 enden, und die Zahlen 18, 58 und 98 sind nicht durch 4 teilbar. Folglich gibt es keine derartigen durch 4 teilbaren Zahlen.

d) Durch 5 sind von diesen Zahlen genau diejenigen teilbar, die auf 5 enden. Mit den restlichen 3 Ziffern kann man 6 verschiedene Zahlen bilden. Also sind genau 6 derartige Zahlen durch 5 teilbar, nämlich 1895, 1985, 8195, 8915, 9185 und 9815.

Aufgabe 250912:
Ermitteln Sie die Anzahl aller derjenigen Paare (a, b) einstelliger natürlicher Zahlen a und b, für die

$$a < \overline{a,b} < b \quad \text{gilt!}$$

Dabei gilt die 0 als einstellige Zahl, und mit $\overline{a,b}$ sei diejenige Dezimalzahl bezeichnet, die die Ziffer a vor dem Komma und die Ziffer b nach dem Komma hat.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

I Wenn ein Paar (a,b) einstelliger natürlicher Zahlen die verlangte Eigenschaft hat, so folgt: Es gilt

$$a < b \tag{1}$$

II Wenn ein Paar (a,b) einstelliger natürlicher Zahlen die Ungleichung (1) erfüllt, so folgt wegen der Ganzzahligkeit von a und b, dass

$$a + 1 \leq b \tag{2}$$

gilt. ferner ist $a \geq 0$, nach (2) also $b \geq 1$; daher gilt für die einstellige Zahlen b

$$1 \leq b \leq 9 \qquad \text{also} \qquad a + \frac{1}{10} \leq a + \frac{b}{10} \leq a + \frac{9}{10}$$

und somit erst recht

$$a < a + \frac{b}{10} < a + 1 \tag{3}$$

Da $a + \frac{b}{10}$ die mit $\overline{a,b}$ bezeichnete Zahl ist, folgt aus (3) und (2) die geforderte Eigenschaft $a < \overline{a,b} < b$.

III Mit I. und II. ist bewiesen, dass genau diejenigen Paare (a,b) einstelliger natürlicher Zahlen die verlangte Eigenschaft haben, die (1) erfüllen.

Ist $a = 0$, so wird (1) genau für die neun Zahlen $b = 1, \ldots, 9$ erfüllt;

Ist $a = 1$, so wird (1) genau für die acht Zahlen $b = 2, \ldots, 9$ erfüllt;

...

Ist $a = 8$, so wird (1) genau für die eine Zahl $b = 9$ erfüllt;

Ist $a = 9$, so wird (1) genau für keine einstellige natürliche Zahl b erfüllt.

Folglich haben genau $9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 45$ Paare die geforderte Eigenschaft.

Alternativ-Lösung von cyrix:
Offenbar gilt $a \leq \overline{a{,}b} < a + 1$, wobei Gleichheit nur genau für $b = 0$ erfüllt ist. Also muss, um die in der Aufgabenstellung geforderte Ungleichung zu erfüllen, $a < b$ gelten; und wann immer dies gilt, ist auch die geforderte Ungleichung erfüllt.
Damit ist die Anzahl aller Paare (a,b) mit $a < b$ und $a,b \in \{0; 1; \ldots; 9\}$ zu bestimmen. Für jede der $\binom{10}{2} = \frac{10\cdot 9}{2} = 45$ Möglichkeiten aus dieser Menge eine zwei-elementige Teilmenge $\{a; b\}$ auszuwählen, gibt es genau eine, in der $a < b$ gilt. Also gibt es genau 45 solche Paare, die die Bedingung der Aufgabenstellung erfüllen.

Aufgabe 260913:
Ermitteln Sie die Anzahl aller verschiedenen Tripel ganzer Zahlen (x, y, z), für die

(1) $x \leq y \leq z$ und

(2) $xyz = 1986$ gilt!

Hinweis: Zwei Tripel (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2) heißen genau denn voneinander verschieden, wenn mindestens eine der Ungleichungen $x_1 \neq x_2$; $y_1 \neq y_2$; $z_1 \neq z_2$ gilt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wegen der Primfaktorzerlegung $1986 = 2 \cdot 3 \cdot 331$ gibt es genau die folgenden fünf verschiedenen Tripel natürlicher Zahlen, die (1) und (2) erfüllen:

$$(1,1,1986), \quad (1,2,993), \quad (1,3,662), \quad (1,6,331), \quad (2,3,331)$$

Alle weiteren Tripel ganze Zahlen, die (1) und (2) erfüllen, erhält man, indem man in jeweils einem der genannten Tripel jeweils genau zwei Zahlen durch ihre entgegengesetzten Zahlen ersetzt und die Reihenfolge der entstandenen Zahlen gemäß (1) wählt.

Ausgehend von (1,1,1986) führt dies auf genau zwei weitere Tripel

$$(-1986, -1,1), \qquad (-1, -1,1986)$$

Ausgehend von jeweils einem Tripel (x,y,z) mit $0 < x < y < z$ führt dies dagegen, unter Beachtung von $-z < -y < -x < x < y < z$, genau auf die drei weiteren Tripel

$$(-z, -y,x), \quad (-z, -x,y), \quad (-y, -x,z)$$

Daher ergibt sich als gesuchte Anzahl $5 + 2 + 4 \cdot 3 = 19$.

Aufgabe 270912:
Bei einem Dominospiel mit den Zahlen 0, 1, ..., 6 ist jeder Spielstein in zwei Hälften eingeteilt, jede Hälfte trägt eine der Zahlen. In einem Dominospiel kommen alle Kombinationen von je zwei der Zahlen 0, 1, ..., 6 je genau einmal vor (und zwar auch diejenigen, bei denen auf den beiden Hälften eines Steines dieselbe Zahl steht).

Eine „Kette“ entsteht, wenn man mehrere Steine in einer Folge so nebeneinanderlegt, dass benachbarte Hälften nebeneinanderliegender Steine stets einander gleiche Zahlen tragen (Domino-Spielregel).

Eine Kette heißt „geschlossen“, wenn auch die beiden Steinhälften an den beiden freien Enden der Kette einander gleiche Zahlen tragen (so dass man die Kette, wenn sie aus genügend vielen Steinen besteht, an ihren Anfang zurückführen und dort schließen kann).

a) Ermitteln Sie die Anzahl aller zu einen Dominospiel gehörenden Steine!

b) Ermitteln Sie die größte Zahl solcher Steine eines Dominospiels, aus denen sich eine geschlossene Kette bilden lässt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Es gibt genau 7 Steine, bei denen auf den beiden Hälften des Steins dieselbe Zahl steht.

Um die anderen Steine zu beschreiben, kann man für ihr erstes Feld eine der 7 Zahlen wählen und für das zweite Feld jeweils eine der 6 anderen Zahlen. Dabei hat man jeden Stein der genannten Art genau 2 mal erfasst. Die Anzahl der Steine beträgt folglich $\frac{7\cdot 6}{2} = 21$.
Die Anzahl aller zu einem Dominospiel gehörenden Steine beträgt somit $7 + 21 = 28$.

b) Man kann aus alle Steinen eines Dominospieles eine geschlossene Kette bilden, z. B.

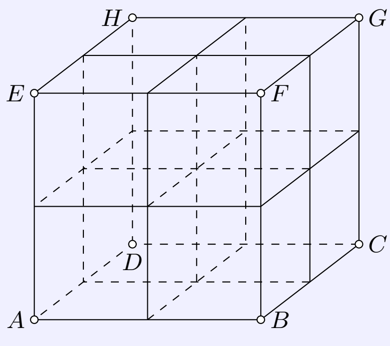
00 / 01 / 11 / 12 / 22 / 23 / 33 / 34 / 44 / 45 / 55 / 56 / 66 / 61 / 13 / 35 / 51 / 14 / 46 / 62 / 24 / 40 / 02 / 25 / 50 / 03 / 36 / 60

Die gesuchte größte Zahl für eine geschlossene Kette beträgt folglich 28.

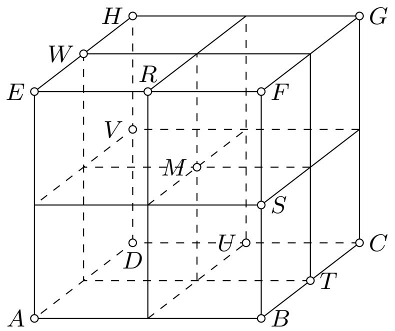
Aufgabe 340912:
Die Abbildung zeigt ein aus Strecken zusammengesetztes Gitter. Diese Strecken sind - nach Zerlegung eines Würfels $ABCDEFGH$ in acht einander gleichgroße Teilwürfel - die Kanten dieser Teilwürfel.
Eine Ameise, die sich nur auf diesen Strecken bewegen kann, soll auf einem möglichst kurzen Weg von A nach G gelangen. Wie viele verschieden Wege gibt es hierfür insgesamt,

a) wenn alle Strecken des Gitters zugelassen sind.

b) wenn nur solche Strecken des Gitters zugelassen sind, die der Oberfläche des Würfels $ABCDEFGH$ angehören?



Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



a) Zur eindeutigen Kennzeichnung eines möglichst kurzen Weges von A nach G ist insgesamt 6 mal die Richtung der nächsten Strecke anzugeben, je 2 mal nach rechts, nach hinten und nach oben. Daher gibt es ebenso viele verschiedene Wege, wie es verschiedene Reihenfolgen der Buchstaben **r, r, h, h, o, o** gibt.
Die Anzahl dieser Reihenfolgen ist bekanntlich

$$\frac{6!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = \frac{720}{2 \cdot 2 \cdot 2} = 90$$

b) Ein Weg bleibt genau dann nicht nur auf der Oberfläche des Würfels $ABCDEFGH$, wenn er über den Punkt M führt (siehe Abbildung). Von A nach M gibt es genau $3! = 6$ Wege (Reihenfolgen von **r, h, o**), ebenso von M nach G. Also beträgt die Anzahl der auszuschließenden Wege $6 \cdot 6 = 36$. Die Anzahl der Wege nur auf der Oberfläche ist somit 54.

Aufgabe 340913:
Karin und Rolf sammeln Straßenbahnfahrscheine. Jeder Fahrschein hat eine Nummer aus 6 Ziffern. Ist darin die Summe der ersten drei Ziffern gleich der Summe der letzten drei Ziffern, so heißt der Schein ein *Glücksschein.*

Um die Chance hierfür abzuschätzen, wollen Karin und Rolf wissen, wieviel Prozent aller Fahrscheine *Glücksscheine* sind. Dabei wird vorausgesetzt, dass jede Nummer von 000000 bis 999999 gleich oft vorkommt.

Karin schreibt ein einfaches Computerprogramm, mit dem die gesuchte Prozentzahl dadurch ermittelt wird, dass eine Anweisungsfolge 1000000 mal abläuft. Da das lange dauert, schreibt Rolf ein Programm, in dem eine (andere) Anweisungsfolge nur 1000 mal ablaufen muss (und sonst nur wenige weitere Anweisungen zu durchlaufen sind).

Schreiben Sie je ein solches Programm und erläutern Sie, warum damit die gesuchte Prozentzahl gefunden wird! (Die Wahl der Programmiersprache ist natürlich freigestellt.)

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Zwei Beispiele für Programme der genannten Art sind:

1. Programm:
```
1 z = 0
2 for a = 0 to 9
3   for b = 0 to 9
4     for c = 0 to 9
5       for d = 0 to 9
6         for e = 0 to 9
7           for f = 0 to 9
8             if a+b+c = d+e+f then z = z+1
9           next
10         next
11       next
12     next
13   next
14 next
15 print z/10000
```

2. Programm:
```
1 dim n(27)
2 for s = 0 to 27
3   n(s) = 0
4 next
5 for a = 0 to 9
6   for b = 0 to 9
7     for c = 0 to 9
8       s = a+b+c
9     next
10   next
12 next
13 z = 0
14 for s = 0 to 27
15   z = z + n(s)*n(s)
16 next
17 print z/10000
```

Im 1. Programm läuft die Anweisung 8, wenn die Schleifen 2 - 7, 9 - 14 verfolgt werden, 1000000 mal ab; es wird einfach jede der Nummern von 000000 bis 999999 auf die Eigenschaft $a + b + c = d + e + f$

untersucht. Liegt sie vor, so wird die (zu Beginn in 1 auf 0 gesetzte) Zählvariable z um 1 erhöht. Sie gibt am Ende also die Anzahl aller „Glücksschein"-Nummern an, so dass in 15 das Hundertfache von $z/1000000$ als die gesuchte Prozentzahl ausgegeben wird.

Das 2. Programm beruht auf folgender Überlegung: Für jede Nummer von 000000 bis 999999 ist die Summe $s = a+b+c$ der ersten drei Ziffern a, b, c eine der Zahlen von 0 bis 27. Kommt ein solcher Wert s unter allen 1000 Dreiergruppen der ersten drei Ziffern genau $n(s)$ mal als Summe vor, so kommt er unter allen Dreiergruppen der letzten drei Ziffern d, e, f ebenfalls genau $n(s)$ mal als Summe vor.

Für genau $(n(s) \cdot n(s))$ Nummern liegt daher die Eigenschaft $a + b + c = d + e + f$ speziell so vor, dass gerade für diesen Wert s die beiden Gleichungen $a + b + c = s$ und $d + e + f = s$ gelten. Damit ist bewiesen:

Die Anzahl z aller „Glücksschein"-Nummern ist die Summe aller für $s = 0, \dots, 27$ gebildeten Produkte $(n(s) \cdot n(s))$.

Eben diese Summe rechnet das 2. Programm aus: Die Ermittlung der Häufigkeiten $n(s)$ geschieht beim Durchlaufen 5 - 7, 10 - 12 der Anweisungsfolge 8, 9, in der für jede der 1000 Dreiergruppen abc von 000 bis 999 jeweils die Anzahl $n(s)$ der betreffenden Summe $s = a+b+c$ um 1 erhöht wird. (Zur Vorbereitung hierfür wurden zu Beginn in l - 4 alle $n(s)$ auf 0 gesetzt.) In 13 - 16 wird aus den so erhaltenen Werten $n(s)$ die Summe der Produkte $(n(s) \cdot n(s))$ gebildet.

Der errechnete Prozentwert lautet 5,5252 %.

II Runde 2

Aufgabe 030922:
Bei einem Preisschießen hat ein Schütze mit 5 Schuss auf einer Zehner-Ringscheibe 40 Ringe erzielt.
Bei jedem Schuss hat er mindestens 7 Ringe getroffen.
Wie viele Möglichkeiten gibt es für die bei den einzelnen Schüssen erzielten Ringe?

Anmerkung: Die Reihenfolge ist zu berücksichtigen. So gelten z. B. 7, 7, 7, 9, 10 und 7, 7, 7, 10, 9 als verschiedene Möglichkeiten.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Ohne Berücksichtigung der Reihenfolge gibt es folgende Möglichkeiten:

1. $7, 7, 7, 9, 10$; 2. $7, 7, 8, 8, 10$; 3. $7, 7, 8, 9, 9$; 4. $7, 8, 8, 8, 9$
5. $8, 8, 8, 8, 8$

und nur diese.
Die Beobachtung der Reihenfolge führt zur Berechnung der Anzahl von sogenannten Anordnungen (Permutationen) mit Wiederholung.

1. Wären alle 5 Zahlen verschieden, so gäbe es $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ verschiedene Möglichkeiten der Anordnung. Da jedoch die 7 dreimal auftritt, fallen $3 \cdot 2 \cdot 1$ Möglichkeiten in eine einzige zusammen, so dass $\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1} = 20$ Möglichkeiten übrig bleiben.
2. und 3. analoge Überlegungen führen zu $\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{2\cdot1\cdot2\cdot1} = 30$ Möglichkeiten.
4. wie 1.
5. 1 Möglichkeit.
Insgesamt gibt es $20 + 30 + 30 + 20 + 1 = 101$ Möglichkeiten.

Aufgabe 070921:
Man ermittle die Anzahl aller Paare zweistelliger natürlicher Zahlen (m, n), für die $m + n = 111$ gilt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die gesuchten Paare lassen sich in 2 Gruppen aufteilen:

1. Gruppe: Die Summe der Einer der beiden zweistelligen Zahlen beträgt 1, die Summe ihrer Zehner beträgt 11.
Bezeichnet man die Ziffern der Zahlen eines Paares, das dieser Bedingung entspricht, der Reihe nach mit $(a; b)$, $(c; d)$, dann erfüllen auch die Paare $(a; d)$, $(c; b)$; $(e; b)$, $(a; d)$ und $(c; d)$, $(a; b)$ die gleiche Bedingung.
Wegen $0 + 1 = 1$ und $9 + 2 = 11$; $8 + 3 = 11$; $7 + 4 = 11$; $6 + 5 = 11$ gibt es genau 6 derartige Paare.

2. Gruppe: Die Summe der Einer beträgt 11, die der Zehner 10.
Das ergibt wegen $9 + 1 = 10$; $8 + 2 = 10$; $7 + 3 = 10$; $6 + 4 = 10$ und $5 + 5 = 10$ aus dem oben genannten Grunde genau 72 derartige Paare.
Insgesamt erhält man mithin genau 88 Zahlenpaare, die den Bedingungen der Aufgabe entsprechen.

Aufgabe 120923:
Zu Dekorationszwecken sollen gleich große Konservenbüchsen verschiedener Sorten so in mehreren Reihen übereinander aufgebaut werden, dass folgende Bedingungen erfüllt sind:
(1) Jede Reihe soll genau eine Büchse mehr enthalten als die Reihe unmittelbar über ihr.
(2) Die oberste Reihe enthält genau eine Büchse.
(3) Es werden genau drei verschiedene Sorten Büchsen verwendet.
(4) Von jeder der drei Sorten findet genau dieselbe Anzahl von Büchsen Verwendung.
(5) Jede Reihe besteht aus Büchsen von genau einer Sorte.
(6) Keine zwei unmittelbar übereinanderstehenden Reihen enthalten Büchsen derselben Sorte.
Ermitteln Sie die kleinste Anzahl von Büchsen, für die es möglich ist, die Bedingungen (1) bis (6) gleichzeitig zu erfüllen!

Lösung von StrgAltEntf:
Die kleinste Anzahl von Büchsen ist 36. Je 12 Büchsen der Sorten A, B und C können wie folgt zu einer Pyramide gestapelt werden:

A
B B
A A A
B B B B
C C C C C
B B B B B B
C C C C C C C
A A A A A A A A

Begründung, warum es mit weniger als 36 Büchsen nicht funktioniert:
Die Anzahl k der Büchsen muss eine Dreieckszahl, also von der Form $k = 1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$ sein. k muss den Teiler 3 enthalten.

Also kommen für $k < 36$ höchstens die Zahlen $3 = 1 + 2$, $6 = 1 + 2 + 3$, $15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$ und $21 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$ infrage.
Die Summanden 1,2,...,n müssen dann auf drei Teilsummen aufgeteilt werden, die jeweils $\frac{k}{3}$ ergeben.
Bei $k = 3 = 1 + 2$ oder $k = 6 = 1 + 2 + 3$ ist solch eine Aufteilung nicht möglich, da der größte Summand (2 bzw. 3) bereits größer als $\frac{k}{3}$ ist, also in keine Teilsumme passt.

Bei $k = 15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$ können die Summanden nur auf eine Weise aufgeteilt werden, sodass sich jeweils die Teilsumme $\frac{k}{3} = 5$ ergibt: $1 + 4 = 2 + 3 = 5$. Diese Aufteilung widerspricht aber der Bedingung (6), da dann die zweite und die dritte Reihe dieselben Büchsensorten enthalten würden.

Bei $k = 21 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$ können die Summanden ebenfalls nur auf eine Weise aufgeteilt werden, sodass sich jeweils die Teilsumme $\frac{k}{3} = 7$ ergibt: $1 + 6 = 2 + 5 = 3 + 4$. Und auch hier erhalten wir zwei benachbarte Zahlen in einer der Teilsummen, nämlich 3 und 4.

Mit $k = 36 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8$ schließlich funktioniert es:
$\frac{k}{3} = 12 = 1 + 3 + 8 = 2 + 4 + 6 = 5 + 7$.

Aufgabe 130921:
Eine Turmuhr zeigt genau 13 Uhr an. Stellen Sie fest, wie oft insgesamt bei gleichförmiger Zeigerbewegung der Minutenzeiger und der Sekundenzeiger innerhalb der nächsten 12 Stunden einen rechten Winkel miteinander bilden!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
In 12 Stunden macht der Minutenzeiger genau 12 Umdrehungen, der Stundenzeiger genau eine Umdrehung. Der Stundenzeiger wird während dieser einen Umdrehung vom Minutenzeiger genau 11 mal überrundet.
Zwischen je zwei Überrundungen bilden die Zeiger genau zweimal einen rechten Winkel. In 12 aufeinanderfolgenden Stunden bilden daher die Zeiger 22 mal einen rechten Winkel miteinander.

Aufgabe 140921:
An einer Fußballmeisterschaft der DDR beteiligen sich 14 Mannschaften der Oberliga. In der ersten Halbserie spielen je zwei dieser Mannschaften genau einmal gegeneinander.
Es ist zu beweisen, dass es in der Zeit dieser Halbserie nach jedem Spieltag zwei Mannschaften der Oberliga gibt, die die gleiche Anzahl von Spielen ausgetragen haben.

Lösung von StrgAltEntf:
Es seien a_1,a_2,...,a_{14} die Anzahlen der Spiele, die die 14 Mannschaften zu einem bestimmten Zeitpunkt absolviert haben. Für die Gesamtzahl K der Spiele aller 14 Mannschaften gilt dann $K = \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + ... + a_{14})$. (Der Faktor $\frac{1}{2}$ ergibt sich daraus, dass bei der Summe jedes Spiel doppelt gezählt wird.)
Wir nehmen nun an, dass keine zwei Mannschaften dieselbe Anzahl von Spielen ausgetragen haben, dass also alle Werte a_i verschieden sind. Da alle Werte a_i der Menge $\{0,1,2,...,13\}$ angehören und diese Menge 14 Elemente hat, muss jeder Wert aus $\{0,1,2,...,13\}$ von genau einem der Werte a_i angenommen werden.
Folglich ist

$$K = \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + ... + a_{14}) = \frac{1}{2}(0 + 1 + 2 + ...13) = \frac{13 \cdot 14}{4} = \frac{91}{2}$$

Hier erhalten wir einen Widerspruch, da $\frac{91}{2}$ keine ganze Zahl ist. Somit war unsere obige Annahme falsch, und es gibt zwei Mannschaften, die exakt gleich viele Spiele ausgetragen haben.

Alternativ-Lösung von cyrix:
Da zu jedem Zeitpunkt der betrachteten Halbserie jede Mannschaft gegen jede andere höchstens einmal gespielt hat, ist die Anzahl der Partien, an der eine Mannschaft beteiligt war, immer durch $14 - 1 = 13$ nach oben beschränkt. Damit gibt es aber nur 14 verschiedene mögliche Anzahlen an Spielen, die eine Mannschaft gespielt haben kann.

Hätten zu einem Zeitpunkt keine zwei Mannschaften dieselbe Anzahl an Spielen, ginge das also nur, wenn jede der 14 möglichen Anzahlen auch vorkommt. Dann müsste es aber sowohl eine Mannschaft geben, die gegen keine andere gespielt hat, wie auch eine, die gegen alle 13 anderen gespielt hat. Beides zugleich kann aber nicht eintreten, was den gewünschten Widerspruch erzeugt und die Behauptung beweist.

Bemerkung: Dieser Ansatz nutzt nicht die konkrete Anzahl beteiligter Mannschaften und lässt sich auf beliebige Anzahlen > 1 verallgemeinern.

Aufgabe 200924:
a) Ermitteln Sie alle diejenigen natürlichen Zahlen $n \geq 3$, für die die folgende Aussage gilt!
„Jedes Prisma, das ein konvexes n-Eck als Grundfläche hat, hat genau $20n$ Diagonalen.“
b) Ermitteln Sie für jedes Prisma, für das die in a) genannte Aussage gilt, die Anzahl der Flächendiagonalen und die der Raumdiagonalen!
Hinweis: Ein n-Eck heißt genau dann konvex, wenn jeder seiner Innenwinkel kleiner als 180° ist.

Lösung von cyrix:
Als „Diagonalen“ eines Prismas werden alle Strecken zwischen je zwei seiner Eckpunkte bezeichnet, die keine Kante des Prismas sind.

a) Für jeden der $2n$ Eckpunkte eines Prismas mit konvexem n-Eck als Grundfläche gilt, dass von ihm Kanten zu genau drei anderen Eckpunkten des Prismas ausgehen. Es ist also Endpunkt von genau $2n - 3 - 1 = 2n - 4$ Diagonalen. (Von diesem Eckpunkt geht nur keine Diagonale zu den drei Eckpunkten, durch die es mit einer Kante verbunden ist, sowie zu sich selbst, aus.)
Da jede Diagonale genau zwei Eckpunkte miteinander verbindet, gibt es also in einem solchen Prisma mit einem konvexen n-Eck als Prisma genau $\frac{1}{2} \cdot 2n \cdot (2n-4) = n \cdot (2n-4)$ Diagonalen. Damit dies genau $20n$ sind, muss also $2n - 4 = 20$, d. h. $n = 12$ gelten.
Da keine Voraussetzungen über die Form des Prismas gemacht wurde, erfüllen genau alle Prismen, deren Grundfläche ein konvexes 12-Eck ist, die Aussage.

b) Raumdiagonalen seien unter den Diagonalen genau jene, die nicht in einer Seitenfläche des Prismas verlaufen. Das bedeutet, dass diese durch je einen Eckpunkt der Grund- und Deckfläche begrenzt sind, welche aber nicht gemeinsam in einer Seitenfläche des Prismas liegen.

Für jeden der n Eckpunkte der Grundfläche gilt, dass er mit genau einem der Eckpunkte der Deckfläche durch eine Kante verbunden ist und mit genau zwei weiteren jeweils in einer gemeinsamen Seitenfläche liegt. Also gibt es von diesem Eckpunkt der Grundfläche genau $n-3$ ausgehende Raumdiagonalen, sodass es insgesamt $n \cdot (n-3)$ Raumdiagonalen gibt, was im konkreten Fall mit $n = 12$ auf genau $12 \cdot 9 = 108$ Raumdiagonalen bedeutet.
Die übrigen der $20n = 240$, also 132 (bzw. allgemein $n \cdot (2n-4) - n \cdot (n-3) = n \cdot (n-1)$), sind dann die Flächendiagonalen.

Aufgabe 240921:
Eine Schule hat 510 Schüler. Beim Anfertigen einer Schülerliste stellt jemand die Frage, ob auf derartigen Listen von 510 Personen mehrmals das gleiche Datum (Tag- und Monatsangabe, ohne Berücksichtigung der Jahresangabe) als Geburtstag auftreten wird.
Anke behauptet: „Auf jeder Liste, die sich durch Zusammenstellung von 510 Personen bilden lässt, befinden sich zwei Personen, die das gleiche Datum als Geburtstag haben.“
Bertold behauptet: „Auf jeder Liste, die sich durch Zusammenstellung von 510 Personen bilden lässt, befinden sich drei Personen, die das gleiche Datum als Geburtstag haben.“
Untersuchen Sie sowohl für Ankes als auch für Bertolds Behauptung, ob sie wahr oder falsch ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Ankes Behauptung ist wahr. Dies kann folgendermaßen bewiesen werden:

Gäbe es eine Liste, in der 510 Personen stehen, von denen keine zwei das gleiche Datum als Geburtstag haben, so gäbe es mindestens 510 verschiedene Daten, d. h. mindestens 510 verschiedene Tage im Jahr. Da das nicht zutrifft, gibt es keine solche Liste, w. z. b. w.

Bertolds Behauptung ist falsch.
Beispielsweise kann man eine Liste von 510 Personen so zusammenstellen, dass jeder der ersten 255 Tage des Jahres das Geburtsdatum von genau 2 dieser Personen ist. Auf einer solchen Liste befinden sich dann keine drei Personen mit gleichem Geburtstag, w. z. b. w.

Aufgabe 270922:
Bei einem „ungarischen Dominospiel“ mit den Zahlen 0, 1, ..., 9 ist (abgesehen von dieser größeren Zahl in der vom „gewöhnlichen Dominospiel“ bekannten Weise) jeder Spielstein in zwei Hälften eingeteilt, jede Hälfte trägt eine der Zahlen.
In einem Spiel kommen alle Kombinationen von je zwei der Zahlen 0, 1, ..., 9 je genau einmal vor (und zwar auch diejenigen, bei denen auf den beiden Hälften eines Steines dieselbe Zahl steht).
Eine „Kette“ entsteht, wenn man mehrere Steine so nebeneinanderlegt, dass benachbarte Hälften nebeneinanderliegender Steine stets einander gleiche Zahlen tragen (Domino-Spielregel).
Eine Kette heißt „geschlossen“, wenn auch die beiden Steinhälften an den beiden freien Enden der Kette einander gleiche Zahlen tragen (so dass man die Kette, wenn sie aus genügend vielen Steinen besteht, an ihren Anfang zurückführen und dort schließen kann).
a) Ermitteln Sie die Anzahl aller zu einem „ungarischen Dominospie“ gehörenden Steine!
b) Ermitteln Sie die größte Anzahl solcher Steine eines Spiels, aus denen sich eine geschlossene Kette bilden lässt!

Lösung von cyrix:
a) Wir fordern o. B. d. A., dass die erste Ziffer auf einem Dominostein größer oder gleich der zweiten Ziffer ist. Dann gibt es genau einen Dominostein mit erster Ziffer 0 (nämlich 0-0, genau zwei mit erster Ziffer 1 (nämlich 1-0 und 1-1), ... , genau zehn Dominosteine mit erster Ziffer 9 (nämlich 9-0, 9-1, ..., 9-9). Insgesamt gibt es also $1 + 2 + \cdots + 10 = 55$ verschiedene Dominosteine.

b) Jede Ziffer kommt auf diesen 55 Dominosteinen insgesamt elfmal vor, nämlich neunmal mit je einer anderen Ziffer und zweimal auf dem Dominostein, der auf beiden Seiten die betreffende Ziffer enthält. Jedoch ist jede Ziffer in einer geschlossenen Kette geradzahlig oft enthalten, nämlich jeweils paarweise auf aneinanderstoßenden Hälften zweier benachbarter Dominosteine. Damit kann also in einer geschlossenen Kette jede Ziffer nur maximal zehnmal vorkommen, sodass in der geschlossenen Kette maximal 50 Steine Verwendung finden können.

Eine Kette lässt sich auch wie folgt erhalten:
0-0, 0-1, 1-1, 1-2, 2-2, 2-3, 3-3, 3-4, 4-4, 4-5, 5-5, 5-6, 6-6, 6-7, 7-7, 7-8, 8-8, 8-9, 9-9, 9-0, 0-2, 2-4, 4-6, 6-8, 8-1, 1-3, 3-5, 5-9, 9-7, 7-0, 0-3, 3-6, 6-9, 9-2, 2-5, 5-1, 1-7, 7-4, 4-8, 8-0, 0-4, 4-1, 1-9, 9-3, 3-7, 7-5, 5-8, 8-2, 2-6, 6-0

Dabei wurden die Dominosteine 0-5, 1-6, 2-7, 3-8 und 4-9 nicht und alle anderen genau einmal verwendet.

Aufgabe 290921:
Kann man in einer Ebene eine Figur bilden, die aus genau 1989 Geraden besteht und dadurch mehr als 2 Millionen Schnittpunkte enthält?

Lösung von cyrix:
Nein, kann man nicht:
Je zwei Geraden haben höchstens einen Schnittpunkt, sodass für jede der $\frac{1989 \cdot 1988}{2} < 1000 \cdot 1989 < 2 \cdot 10^6$ Möglichkeiten, aus den 1989 Geraden zwei auszuwählen, höchstens ein Schnittpunkt in der Figur enthalten ist. Es gibt also in jedem Fall weniger als 2 Millionen Schnittpunkte.

Aufgabe 300923:
a) Wie viele dreistellige natürliche Zahlen, bei denen (wie z. B. 921) die Zehnerziffer größer als die Einerziffer, aber kleiner als die Hunderterziffer ist, gibt es insgesamt?
b) Wie viele sechsstellige Zahlen insgesamt lassen sich dadurch herstellen, dass man zwei verschiedene der unter a) beschriebenen Zahlen auswählt und die größere dieser beiden Zahlen hinter die kleinere schreibt?
c) Die kleinste unter allen denjenigen in b) beschriebenen sechsstelligen Zahlen, bei denen die zweite der genannten dreistelligen Zahlen genau um 1 größer ist als die erste, ist die Telefonnummer des Senders Potsdam. Wie lautet sie?

Lösung von cyrix:
a) Jede Auswahl von 3 verschiedenen Ziffern ohne Beachtung der Reihenfolge führt auf genau eine solche dreistellige Zahl. Also gibt es $\binom{10}{3} = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2\cdot 1} = 120$ solcher dreistelligen Zahlen.

b) Jede Auswahl von 2 verschiedenen solchen dreistelligen Zahlen ohne Beachtung der Reihenfolge liefert genau eine solche sechsstellige Zahl. Also gibt es genau $\binom{120}{2} = \frac{120\cdot 119}{2\cdot 1} = 60 \cdot 119 = 7140$ solcher sechsstelligen Zahlen.

c) Damit die Zahl möglichst klein ist, sollten die ersten Ziffern möglichst klein sein. Minimal möglich ist für eine dreistellige Zahl aus a) der Wert 210. Dann ist aber die um 1 größere Zahl nicht von der in a) beschriebenen Form.
Dafür muss die um 1 erhöhte Einerziffer immer noch kleiner als die Zehnerziffer sein, sodass diese mindestens 2 und damit die Hunderterziffer mindestens 3 betragen muss. Tatsächlich ist die minimale Möglichkeit dafür 320321, sodass dies die gesuchte Telefonnummer ist.

Aufgabe 320922:
In der Ebene seine vier paarweise verschiedene Geraden gegeben.
a) Welches ist die größtmögliche Anzahl derjenigen Punkte, die Schnittpunkt von (jeweils mindestens) zwei der gegebenen Geraden sind?
b) Stellen Sie fest, welche der Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 als Anzahl solcher Schnittpunkte möglich ist und welche nicht!

Lösung von cyrix:
Es seien a,b,c,d die vier Geraden.
a) Wenn keine zwei der Geraden parallel sind und sich keine drei in einem gemeinsamen Punkt schneiden, dann besitzen a und b, a und c, a und d, b und c, b und$d$ sowie c und d jeweils einen Schnittpunkt, der von den übrigen verschieden ist. Da zwei verschiedene Geraden nur höchstens einen Punkt gemein haben können, ist dies also die Maximalzahl möglicher verschiedener Schnittpunkte.

b) Wir haben gerade gesehen, dass sich genau 6 Schnittpunkte erzeugen lassen, indem keine zwei der Geraden parallel sind und sich keine drei in einem Punkt schneiden.

Sind a und b parallel, aber c und d weder zueinander noch zu a (und b) parallel, haben c und d mit a und b je zwei Schnittpunkte. Ist der Schnittpunkt von c und d keiner dieser vier, so gibt es insgesamt 5.
Sind in der Konstruktion von eben nun c und d doch parallel, so gibt es nur die vier Schnittpunkte mit den Parallelen a und b.
Sind a, b und c paarweise parallel zueinander, d aber nicht, so schneiden sich a, b und c paarweise nicht, während jede von diesen mit d genau einen Schnittpunkt besitzt, wobei keine zwei dieser Schnittpunkte zusammenfallen, es also insgesamt genau 3 gibt.
Sind alle vier Geraden paarweise parallel zueinander, so gibt es gar keinen, also 0, Schnittpunkte.

Verlaufen alle vier Geraden durch einen gemeinsamen Punkt P, gibt es genau einen Schnittpunkt, nämlich P. Weitere kann es nicht geben, da zwei verschiedene Geraden sich in höchstens einem Punkt schneiden.

Bleibt noch zu zeigen, dass genau zwei Schnittpunkte nicht möglich sind:
Angenommen, es gäbe eine solche Konstellation. Dann können die drei Geraden a, b und c nicht paarweise parallel zueinander sein, da es sonst (s.o.) mit d genau 0 oder genau 3 Schnittpunkte gäbe.
Auch können sie sich nicht in einem gemeinsamen Punkt P schneiden, da es sonst (wenn d durch P verläuft) genau 1 oder (wenn d nicht durch P verläuft) genau $1+3=4$ Schnittpunkte geben würde.
Auch können die drei Geraden nicht paarweise nicht parallel sein, da aus dem Zusammenfallen von zwei ihrer drei Schnittpunkte sofort folgen würde, dass der dritte mit diesem auch identisch ist, man sich also im vorherigen Fall befindet.
Also sind von den drei Geraden a, b und c genau zwei parallel und die dritte dazu nicht parallel. O. B. d. A. sei $a \parallel b$ und $b \nparallel c$. Analog kann man nun die drei Geraden b, c und d betrachten, von denen wieder zwei parallel und die dritte nicht dazu parallel sein muss. Im Fall $b \parallel d$ erhalten wir den Widerspruch $a \parallel b \parallel d$ analog oben mit genau 3 Schnittpunkten und im verbleibenden Fall $c \parallel d$ erhält man genau 4 Schnittpunkte (s.o.), also auch nicht genau 2.
Es lässt sich also jede Schnittpunktanzahl von 0 bis 6 mit Ausnahme der 2 realisieren.

III Runden 3 & 4

Aufgabe 020936:
In einem Schaufenster sind bunte, gleichgroße Bälle zu einer dreiseitigen regelmäßigen Pyramide aufgeschichtet. Die Bälle der untersten Schicht werden durch 3 verbundene Latten am Wegrollen gehindert.
Die Bälle der anderen Schichten liegen jeweils in den Vertiefungen der darunter liegenden Schicht. In der untersten Schicht zählt man an jeder Seite 8 Bälle.
Wie viele Bälle liegen in den einzelnen Schichten und wie viel in der ganzen Pyramide?

Lösung von André Lanka:

1. Schicht: $8+7+6+5+4+3+2+1=36$
2. Schicht: $7+6+5+4+3+2+1=28$
3. Schicht: $6+5+4+3+2+1=21$
4. Schicht: $5+4+3+2+1=15$
6. Schicht: $4+3+2+1=10$
7. Schicht: $3+2+1=6$
8. Schicht: $2+1=3$
9. Schicht: $1=1$

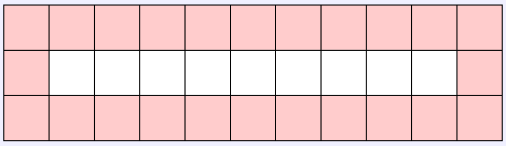
Insgesamt liegen in der Pyramide 120 Bälle.

Aufgabe 100931:
Günter verbrachte in seinen Ferien eine Anzahl von Tagen mit seiner FDJ-Gruppe in einem Lager. An jedem Tage wurden aus seiner Gruppe genau zwei Schüler vormittags und genau zwei Schüler nachmittags zum Tischdienst eingeteilt. Im Laufe der Tage wurden alle Schüler seiner Gruppe gleich oft zu diesem Tischdienst eingesetzt.
Ferner ist folgendes bekannt:

(1) Günter war an genau 6 Tagen zum Tischdienst eingeteilt.
(2) Wenn er nachmittags Tischdienst hatte, hatte er vormittags keinen.
(3) Er hatte an diesen Tagen genau 13 mal nachmittags keinen Tischdienst.
(4) Er hatte an diesen Tagen genau 11 mal vormittags keinen Tischdienst.
Aus wie viel Schülern bestand Günters Gruppe?

Lösung von cyrix:
Nach (3) und (4) hatte er genau zwei mal öfter vormittags als nachmittags Tischdienst, und da er nach (2) niemals sowohl vormittags als auch nachmittags Tischdienst hatte, war er mit (1) an genau vier Tagen vormittags, an zweien nachmittags und an 13-4=11-2=9 gar nicht beschäftigt.
Das Lager dauerte damit 9+4+2=15 Tage, sodass $15 \cdot 4 = 60$ Schüler-Tischdienst-Einsätze notwendig waren. Günther war zu 6 davon eingeteilt, sodass also insgesamt seine Gruppe aus $\frac{60}{6} = 10$ Schülern bestand.

Aufgabe 120932:



Karlheinz will aus gleich großen roten und weißen Quadratflächen lückenlos eine Rechteckfläche derartig zusammensetzen, dass sämtliche an den Rand dieses Rechtecks grenzenden Quadratflächen rot sind (in der Abbildung gestrichelt gezeichnet), während alle übrigen (im Innern gelegenen) Quadratflächen weiß sein sollen. Dabei soll die Anzahl der roten Quadratflächen gleich der der weißen sein.

Geben Sie (durch Angabe der Anzahl der in je einer Zeile und in je einer Spalte angeordneten Quadratflächen) alle Rechteckflächen an, die Karlheinz unter diesen Bedingungen bilden könnte!

Lösung von cyrix:
Sei $m > 0$ die Anzahl der Quadratflächen, die in einer Zeile liegen und $n > 0$ die, derer sich in einer Spalte befindlichen. O. B. d. A. können wir $m \geq n$ annehmen.
Weiterhin sei r die Anzahl der roten und w die Anzahl der weißen Quadratflächen. Wäre $n \leq 2$, bestände das Rechteck nur aus Randquadraten, sodass $r > 0 = w$ folgen und damit die Bedingung der Aufgabenstellung nicht erfüllen würde. Sei also ab jetzt $m \geq n \geq 3$.
Es folgt $r = 2(m+n)-4$ und $w = (m-1)(n-1)$, zusammen mit $r = w$ also $2m+2n-4 = mn-m-n+1$ bzw. $-5 = mn-3m-3n = (m-3)(n-3)-9$, also $(m-3)(n-3) = 4$. Da beide Faktoren nicht negativ sind und $m \geq n$ gilt, kann nur einer der beiden folgenden Fälle auftreten:

1. Fall: $m-3 = 4$ und $n-3 = 1$, also $m = 7$ und $n = 4$, oder
2. Fall: $m-3 = n-3 = 2$, also $m = n = 5$. In beiden Fällen bestätigt die Probe, dass dies wirklich Lösungen sind.

Karlheinz kann also ein 5×5-Quadrat, ein 7×4-Rechteck oder ein 4×7-Rechteck legen, was den Bedingungen der Aufgabenstellung genügt.

Aufgabe 170931:
Ermitteln Sie die Anzahl der natürlichen Zahlen von 1 bis 1000 (einschließlich dieser Grenzen), die weder durch 2 noch durch 3 noch durch 5 teilbar sind!

Lösung von cyrix:
Es ist $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$, sodass sich alle 30 Zahlen das Schema, welche Reste sie bei der Teilung durch 2, 3 bzw. 5 lassen, wiederholt. Von je 30 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen sind genau 15 ungerade. Von diesen 15 aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen sind genau fünf durch 3, genau drei durch 5 und genau eine durch 15 teilbar, sodass genau $15-5-3+1 = 8$ Zahlen eines solchen 30er-Blocks weder durch 2, 3 noch 5 teilbar sind.
Also finden sich in den 33 30er-Blöcken von 1 bis $33 \cdot 30 = 990$ genau $33 \cdot 8 = 264$ weder durch 2, 3 noch 5 teilbare Zahlen. Hinzukommen noch die 991 und 997, da die übrigen ungeraden Zahlen von 991 bis 1000 durch 3 teilbar (993, 999) oder durch 5 teilbar (995) sind.
Es gibt also insgesamt 266 solche Zahlen im zu betrachtenden Intervall.

Aufgabe 250934:
Die acht Zahlen 1, 2, ..., 8 sollen so auf die Eckpunkte eines Würfels verteilt werden, dass dabei folgende Bedingungen erfüllt sind:

(1) Jedem Eckpunkt des Würfels wird genau eine der acht Zahlen zugeteilt, jede dieser Zahlen soll in der Verteilung vorkommen.
(2) Addiert man auf jeder Seitenfläche des Würfels die vier Zahlen an den Eckpunkten dieser Seitenfläche, so ergibt sich auf allen sechs Seitenflächen dieselbe Summe.

Es sollen möglichst viele Verteilungen der acht Zahlen auf die Eckpunkte so zusammengestellt werden, dass jede dieser Verteilungen die Bedingungen (1), (2) erfüllt und dass keine zwei dieser Verteilungen zueinander kongruent sind, d. h. durch Drehung oder Spieglung ineinander übergeführt werden können.
Ermitteln Sie die Anzahl der Verteilungen, die in einer solchen Zusammenstellung auftreten!

Lösung von cyrix:
Die Eckpunkte des Würfels seien mit A bis H bezeichnet, wobei A, B, C und D in dieser Reihenfolge die Eckpunkte einer Fläche und E, F, G, H die Eckpunkte der dazu parallelen Seitenfläche seien, wobei A mit E, B mit F, C mit G und D mit H durch eine Kante verbunden seien. Weiterhin identifizieren wir einen Eckpunkt mit der Zahl, die an diesem Eckpunkt steht, schreiben also z. B. $A = 1$, wenn an Eckpunkt A die Zahl 1 steht. (Dies können wir, da nach Bedingung (1) jede der acht Zahlen an genau einem der Eckpunkte steht.)

Summiert man für alle sechs Seitenflächen jeweils deren Eckpunkt-Zahlen und bildet die Summe dieser sechs Summen, so erhält man eine Summe, die jede Eckpunktzahl genau dreimal enthält, nämlich je einmal pro Seitenfläche. Ist S die nach Bedingung (2) für alle Seitenfläche gleiche Summe ihrer Eckpunktzahlen, so gilt also $6 \cdot s = 3 \cdot (A + B + \cdots + H) = 3 \cdot (1 + 2 + \cdots + 8) = 3 \cdot \frac{8 \cdot 9}{2} = 3 \cdot 36 = 108$, also $S = \frac{108}{6} = 18$.

O. B. d. A. können wir durch ggf. erfolgende Drehung $A = 1$ annehmen.
Dann kann B nicht 2 sein, denn sonst müssten sowohl $C + D$ als auch $E + F$ den Wert $18 - 2 - 1 = 15$ haben. Diese Summe kann aber mit den Zahlen 1 bis 8 nur auf die eindeutige Weise $7+8$ erhalten werden, sodass – im Widerspruch zu (1) – $\{C,D\} = \{E,F\}$ folgen würde. Analog schließt man auch $D = 2$ sowie $E = 2$ aus: 1 und 2 können nicht benachbart sein.

Fall 1: Die 2 in einer Seitenfläche mit 1. Dies geht nur, wenn sie in dieser Seitenfläche der 1 diagonal gegenüberliegt. Also können wir hier durch ggf. erfolgende Drehung o. B. d. A. $C = 2$ annehmen. Es muss dann $B + D = 18 - 2 - 1 = 15 = 8 + 7$, also durch ggf. erfolgende Spiegelung o. B. d. A. $B = 8$ und $D = 7$ gelten. Damit $A + B + E + F = 18$ gilt, muss $E + F = 9$ und analog $G + H = 9$ gelten, was sich jeweils nur durch $4 + 5 = 9$ bzw. $3 + 6 = 9$ mit noch nicht verwendeten Zahlen realisieren lässt. Weiterhin ist auch $B + C + F + G = 18$, also $F + G = 18 - 8 - 2 = 8$, was sich nur als $3 + 5$ noch realisieren lässt.

Fall 1.1: Es ist $F = 3$. Dann folgt $G = 5$, $E = 6$ und $H = 4$. Man überprüft schnell, dass diese Verteilung beide Bedingungen erfüllt. (Hier hat die 1 die Nachbarn 6, 7 und 8.)

Fall 1.2: Es ist $F = 5$. Dann folgt $G = 3$, $E = 4$ und $H = 6$. Auch hier überprüft man schnell, dass es sich um eine Lösung handelt. (Hier hat die 1 die Nachbarn 4, 7 und 8.)

Fall 2: Die 2 liegt nicht in einer gemeinsamen Seitenfläche mit 1. Dann verbleibt aber nur noch als einziger Eckpunkt G, der damit gleich 2 sein muss. Damit folgt, dass 1 und 3 in einer gemeinsamen Seitenfläche liegen müssen, o. B. d. A. nach ggf. erfolgender Drehung um die Raumdiagonale AG also $3 \in \{B,C,D\}$.

Fall 2.1: Es ist $B = 3$ oder $D = 3$. Nach ggf. erfolgender Spiegelung an der Ebene, die durch A, C, E und G verläuft, können wir dann sogar o. B. d. A. $B = 3$ fordern. Es folgt aber wie oben, dass $C+D = E+F = 14$ gelten muss, was sich aber mit verschiedenen Summanden aus $\{1, \dots ,8\}$ nur mit $14 = 8 + 6$ realisieren lässt, sodass wieder im Widerspruch zu (1) $\{E,F\} = \{C,D\}$ folgen würde. Also gibt es in diesem Fall keine gültige Verteilung.

Fall 2.2: Es ist $C = 3$. Dann muss analog zum Fall 1 $B + D = 14$, also nach ggf. erfolgender Spiegelung $B = 8$ und $D = 6$ gelten. Wegen $A + B + E + F = 18$ folgt $E + F = 11$, was sich mit noch nicht verwendeten Zahlen nur als $11 = 4 + 7$ realisieren lässt, woraus $F \in \{4,7\}$ folgt. Andererseits ist auch $B+C+F+G = 18$, also $F = 18-8-3-2 = 5$, was ein Widerspruch ist, sodass es auch in diesem Fall keine gültige Lösung gibt.

Insgesamt gibt es also genau zwei verschiedene Anordnungen. Da in diesen die 1 verschiedene Nachbarn besitzt, können sie auch nicht durch Drehung oder Spiegelung ineinander überführt werden.

Aufgabe 310936:
Für die Reihenfolge, in der sich die neun Buchstaben $A, B, C, D, E, F, G, H, J$ von links nach rechts anordnen lassen, seien die folgenden sieben Bedingungen gefordert:
Es soll A links von B, A links von C, A links von D, E links von F, E links von G, E links von H, E links von J stehen.
Wieviele verschiedene Reihenfolgen, bei denen diese sieben Bedingungen erfüllt sind, gibt es insgesamt?
Hinweise:
In jeder der genannten Reihenfolgen soll jeder der neun Buchstaben genau einmal vorkommen.
Die Formulierung „X links von Y“ schließt nicht aus, dass zwischen X und Y noch andere der Buchstaben stehen.

Lösung von cyrix:
Wir unterteilen die neun Buchstaben in zwei Gruppen. Gruppe 1 enthält A, B, C und D, Gruppe 2 die übrigen fünf Buchstaben. Die Bedingungen vergleichen nur die Positionen von Buchstaben einer Gruppe miteinander, sodass jede beliebige Verteilung der neun Positionen auf die zwei Gruppen eine korrekte Anordnung aller neun Buchstaben liefert, wenn innerhalb beider Gruppen die Bedingungen alle erfüllt sind.

Es gibt in Gruppe 1 insgesamt 6 mögliche Anordnungen, die die drei ihr zugehörigen Bedingungen erfüllt: A muss ganz links (unter diesen vier Elementen) stehen, während die Reihenfolge der drei übrigen Buchstaben dieser Gruppe beliebig ist, also dafür alle $3! = 6$ Varianten möglich sind. Analog erhält man für Gruppe 2 nun $4! = 24$ mögliche Anordnungen (da dort E unter diesen ganz links stehen muss, während sich die restlichen vier Buchstaben von Gruppe 2 beliebig anordnen lassen).

Die neun Positionen lassen sich auf $\binom{9}{4} = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 126$ Arten auf die beiden Gruppen (ohne Beachtung der Reihenfolge der Verteilung der Positionen) verteilen. Für jede solche gibt es nun jeweils 6 mögliche Anordnungen der Elemente von Gruppe 1 untereinander auf den Positionen dieser Gruppe und jeweils 24 mögliche Anordnungen der Elemente von Gruppe 2 auf ihren Positionen untereinander, insgesamt also

$$126 \cdot 6 \cdot 24 = 126 \cdot 144 = 18144$$

mögliche Anordnungen.

Aufgabe 320932:
Wieviele Paare (x, y) natürlicher Zahlen für die $10x + y < 1993$ gilt, gibt es insgesamt?

Lösung von cyrix:
Für diese Aufgabe wird vorausgesetzt, dass 0 eine natürliche Zahl ist.
Dann gibt es für jedes natürliche $x \leq 199$ genau $1993 - 10x$ verschiedene Möglichkeiten y zu wählen (nämlich 0 bis $1993 - 10x - 1$), sodass die Ungleichung erfüllt ist. Summieren wir dies über alle x, so erhalten wir also insgesamt

$$\sum_{x=0}^{199}(1993-10x) = 200\cdot 1993 - 10\cdot\sum_{x=0}^{199} x = 200\cdot 1993 - 10\cdot\frac{199\cdot 200}{2} = 200\cdot 1993 - 1990\cdot 100 = 199600$$

Paare natürlicher Zahlen, die die Ungleichung aus der Aufgabenstellung erfüllen.

Aufgabe 340946:
Wie viele Paare (x,y) ganzer Zahlen x,y, die die Ungleichung $|x-30|+|y-10|<100$ erfüllen, gibt es insgesamt?

Lösung von cyrix:
Wir betrachten zuerst die Ungleichung (*) $a+b<100$ und bestimmen die Anzahl der Lösungen von dieser Ungleichung mit nicht-negativen ganzen Zahlen a und b. Dabei unterscheiden wir, ob diese gleich 0 werden, oder verschieden davon sind:

Es gibt genau eine Lösung mit $a=b=0$.
Für $a=0$, $b\neq 0$ gibt es genau die 99 Lösungen $b=1$ bis $b=99$. Analog gibt es für $a\neq 0$, $b=0$ genau 99 Lösungen.

Sei nun $a>0$ und $b>0$. Für festes a gibt es für b genau die Lösungen $1,2,\ldots,99-a$, also $99-a$ verschiedene. Insgesamt gibt es also

$$\sum_{a=1}^{99}(99-a)=99\cdot 99-\sum_{a=1}^{99}a=99\cdot 99-\frac{99\cdot 100}{2}=99\cdot(99-50)=99\cdot 49$$

Lösungen in diesem Fall.
Nun zurück zur Ungleichung aus der Aufgabenstellung:
Für jede Lösung (a,b) der Ungleichung (*) mit $a,b\neq 0$ erhält man vier Lösungen der Ungleichung der Aufgabenstellung, da man $x-30=\pm a$ und unabhängig davon $y-10=\pm b$ wählen kann. Ist einer oder sind beide Werte a, b aber gleich Null, so kann man hierbei nur ein Vorzeichen wählen und erhält $x-30=0$ bzw. $y-10=0$.

Zusammen ergeben sich also für die Ausgangsgleichung folgende Anzahlen von Lösungen:
Ist $a=b=0$, so erhält man genau $1\cdot 1=1$ Lösung für die Ausgangsgleichung.
Ist $a=0$ und $b\neq 0$, oder umgekehrt, dann erhält man jeweils genau $99\cdot 2$, in beiden Fällen zusammen also $99\cdot 4$, Lösungen der Ausgangsgleichung.
Und sind sowohl a als auch b von 0 verschieden, erhält man daraus $(99\cdot 49)\cdot 4=99\cdot 196$ Lösungen der Ausgangsgleichung.

Insgesamt erhalten wir damit, dass die Ungleichung aus der Aufgabenstellung genau $99\cdot 196+99\cdot 4+1=19801$ ganzzahlige Lösungen besitzt.

IV Zahlentheorie

IV.I Primzahlen, Teilbarkeit

I Runde 1

Aufgabe 030914:
Beweisen Sie, dass die Summe von 1000 beliebigen, aber aufeinanderfolgenden positiven ganzen Zahlen keine Primzahl ist!

Lösung von Burkhard Thiele:
Die erste der 1000 natürlichen Zahlen sei k. Dann erhält man folgende Summe: $k + (k + 1) + (k + 2) + \cdots + (k + 999)$. Sie besteht aus 500 geraden und 500 ungeraden Zahlen, ist also gerade.

Aufgabe 100913:
Man denke sich alle natürlichen Zahlen von 1 bis 1000 fortlaufend auf folgende Weise hintereinandergeschrieben:

$$12345678910111213...9989991000.$$

Es ist zu beweisen, dass die so entstandene Zahl nicht durch 1971 teilbar ist.

Lösung von Manuela Kugel:
Es gilt $9|1971$. Wenn die angegebene Zahl durch 1971 teilbar wäre, dann wäre sie mithin auch durch 9 teilbar. Ihre Quersumme lässt sich folgendermaßen ermitteln: Jede der Zahlen 2 bis 9 tritt in dieser Quersumme genau 300mal als Summand auf, da jede dieser Zahlen in den natürlichen Zahlen von 1 bis 1000 als Ziffer genau 100 mal an der Einerstelle, 100mal an der Zehnerstelle und 100 mal an der Hunderterstelle auftritt.

Die Eins tritt 301mal auf, da sie außerdem noch einmal in der Tausenderstelle vorkommt. Die Nullen bleiben unberücksichtigt, da sie für die Berechnung der Quersumme keine Bedeutung haben. Also erhält man

$$300 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) + 1 \quad = \quad 300 \cdot 45 + 1.)$$

Diese Zahl ist nicht durch 9 teilbar. Daher ist auch die angegebene Zahl nicht durch 9 und damit auch nicht durch 1971 teilbar.

Aufgabe 110913:
Ermitteln Sie alle natürlichen Zahlen a, für die der Term

$$t = \frac{a + 11}{a - 9}$$

eine natürliche Zahl ist!

Lösung von Manuela Kugel:
Für natürliche Zahlen $a < 9$ ist $t < 0$. Für $a = 9$ ist t nicht definiert. Ist $a > 9$ und setzt man $h = a - 9$,

so ist h stets eine natürliche Zahl, ferner $a = h + 9$ und

$$t = \frac{h+20}{h} = 1 + \frac{20}{h}.$$

Somit ist t genau dann eine natürliche Zahl, wenn h Teiler von 20 ist. Mithin ergeben sich die folgenden Möglichkeiten:

h	$a = h + 9$	t
1	10	21
2	11	11
4	13	6
5	14	5
10	19	3
20	29	2

Damit erfüllen genau die Zahlen 10, 11, 13, 14, 19 und 20 alle gestellten Bedingungen.

Aufgabe 120914:
Es ist die größte siebenstellige Zahl zu ermitteln, die mit paarweise verschiedenen Ziffern dargestellt werden kann und durch 72 teilbar ist.

Lösung von Manuela Kugel:
Es gilt:

a) Jede mit 9876 beginnende siebenstellige Zahl ist größer als jede *nicht* mit 9876 beginnende siebenstellige Zahl aus paarweise voneinander verschiedenen Ziffern. Denn eine solche beginnt
entweder nicht mit 9
oder zwar mit 9, aber nicht mit 98 und nicht mit 99,
oder zwar mit 98, aber nicht mit 987, nicht mit 988 und nicht mit 989,
oder zwar mit 987, aber nicht mit 9877, nicht mit 9878 und nicht mit 9879

b) Da 8 und 9 teilerfremd sind, ist eine Zahl genau dann durch 72 teilbar, wenn sie durch 8 und 9 teilbar ist.

c) Eine siebenstellige Zahl aus paarweise verschiedenen Ziffern ist genau dann durch 9 teilbar, wenn von den zehn verschiedenen Ziffern 0, 1, 2, ..., 9, deren Summe 45 beträgt, drei Ziffern weggelassen werden, deren Summe 9 beträgt.

d) Eine siebenstellige Zahl ist genau dann durch 8 teilbar, wenn die aus der Hunderter-, Zehner- und Einerziffer in dieser Reihenfolge gebildete Zahl durch 8 teilbar ist (wobei in diesem Zusammenhang mit dieser Regel auch Anfangsziffern 0 zulässig sind). Daher ist die gesuchte Zahl die größte unter denjenigen mit 9876 beginnenden Zahlen (falls es solche gibt), deren restliche Ziffern drei derart gewählte verschiedene der Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5 sind, dass d) gilt und

e) die weggelassenen Ziffern die Summe 9 haben oder, äquivalent hiermit, die restlichen Ziffern die Summe 6 haben.

Nun wird e) genau von den Tripeln (0,1,5), (0,2,4) und (1,2,3) erfüllt. Sämtliche geraden dreistelligen Zahlen, mit zugelassener Anfangsziffer 0, die sich aus diesen Tripeln bilden lassen, sind, der Größe nach geordnet, 510, 420, 402, 312, 240, 204, 150, 132, 042, 024. Unter ihnen ist 312 die größte durch 8 teilbare Zahl. Daher ist 9876312 die gesuchte Zahl.

Anderer Lösungsweg

Die größte siebenstellige Zahl mit paarweise voneinander verschiedenen Ziffern ist 9876543. Denn jede solche siebenstellige Zahl (usw. wie oben in a)).

Wegen $\frac{9876543}{72} = 137174\frac{15}{72}$ ist die größte durch 72 teilbare Zahl, die höchstens ebenso groß wie 9876543 ist, die Zahl

$$9876543 - 15 = 9876528.$$

Bildet man schrittweise zu jeder erhaltenen Zahl die größte darunter gelegene durch 72 teilbare Zahl, so erhält man der Reihe nach

$$9876528 - 72 = 9876456, \quad 9876456 - 72 = 9876384, \quad 9876384 - 72 = 9876312,...$$

Von den erhaltenen Zahlen ist 9876312 die größte, die aus paarweise voneinander verschiedenen Ziffern besteht. Daher ist sie die gesuchte Zahl.

Aufgabe 130914:
Unter $n!$ (gelesen n-Fakultät) versteht man das Produkt aller natürlichen Zahlen von 1 bis n; d. h., es gilt

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n-3) \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n.$$

Man ermittle für $n = 1000$ die Anzahl der Nullen, auf die die Zahl $n!$ endigt (Endnullen).

Lösung von Manuela Kugel:
Es sei x die gesuchte Anzahl der Endnullen der Zahl 1000!. Dann gilt $1000! = z \cdot 10^x$, wobei z eine natürliche Zahl ist, die nicht auf 0 endet. Wegen $10^x = 2^x \cdot 5^x$ ist die Anzahl der Endnullen gleich der kleineren unter den Anzahlen der Faktoren 2 bzw. 5, die in der Zahl 1000! enthalten sind. Da jede zweite natürliche Zahl gerade, aber nur jede fünfte natürliche Zahl durch 5 teilbar ist, enthält die Zahl 1000! mehr Faktoren 2 als Faktoren 5. Mithin ist die gesuchte Anzahl der Endnullen gleich der Anzahl der Faktoren 5, die 1000! enthält.

Nun gibt es unter den natürlichen Zahlen von 1 bis 1000 genau eine durch $625 = 5^4$ teilbare Zahl, unter den restlichen 999 Zahlen genau 8-1 durch $125 = 5^3$ teilbare Zahlen, nämlich die Zahlen $n \cdot 125$ mit $1 \leq n \leq 8$ und $n \neq 5$; unter den übrigen 992 Zahlen genau 40 - 8 durch $25 = 5^2$ teilbare Zahlen, nämlich die Zahlen $n \cdot 25$ mit $1 \leq n \leq 40$ mit $n \neq 5, 10, 15, ..., 40$, d. h. $n \neq k \cdot 5 (k = 1,...,8)$; schließlich unter den verbleibenden 960 Zahlen genau $200-40$ durch 5 teilbare Zahlen, nämlich die Zahlen $n \cdot 5$ mit $1 \leq n \leq 200$ und $n \neq k \cdot 5 (k = 1, ..., 40)$. Daher enthält die Zahl 1000! wegen

$$4 + 3(8-1) + 2(40-8) + (200-40) = 200 + 40 + 8 + 1 = 249$$

genau 249 Faktoren 5 und endet somit auf genau 249 Nullen.

Aufgabe 170911:
Beweisen Sie folgende Aussage!

Wenn sich zwei natürliche Zahlen (≥ 1) um 1977 unterscheiden, dann besitzt die (positive) Differenz ihrer Quadrate mindestens acht verschiedene natürliche Zahlen als Teiler.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die beiden Zahlen seien a und b, und es gelte o. B. d. A. $b < a$. Dann gilt für die positive Differenz d ihrer Quadrate

$$d = a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) = (a+b) \cdot 1977 = (a+b) \cdot 3 \cdot 659$$

Daher hat d mindestens die natürlichen Zahlen

$$1; 3; 659; 1977; a+b; (a+b) \cdot 3; (a+b) \cdot 659; d$$

als Teiler. Wegen $a+b > a-b$ (was aus $b > 0$ folgt), d. h. $a+b > 1977$, sind diese acht Teiler sämtlich voneinander verschieden.

Aufgabe 200913:

a) Kann der Bruch $\frac{1711}{3421}$ durch eine (von 1 verschiedene) natürliche Zahl gekürzt werden?

b) Beweisen Sie, dass für jede natürliche Zahl n der Zähler und der Nenner des Bruches $\frac{14n+1}{28n+5}$ zueinander teilerfremd sind!

Hinweis: Um die Rechnung zu erleichtern, kann man einen Satz über Teilbarkeit von Differenzen anwenden.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Wenn der Bruch $\frac{1711}{3421}$ durch eine natürliche Zahl t gekürzt werden kann, dann sind die Zahlen 1711 und 3421 durch t teilbar.

Mithin ist ebenfalls $2 \cdot 1711 = 3422$ durch t teilbar und daher auch die Differenz $3422 - 3421 = 1$. Die einzige natürliche Zahl, durch die 1 teilbar ist, ist aber $t = 1$.

Daher kann der Bruch $\frac{1711}{3421}$ durch keine natürliche Zahl gekürzt werden, die von 1 verschieden ist.

b) Ist eine natürliche Zahl t ein gemeinsamer Teiler von $14n+3$ und $28n+5$, so ist t ebenfalls ein Teiler von $2 \cdot (14n+3) = 28n+6$ und daher auch ein Teiler der Differenz $(28n+6) - (28n+5) = 1$. Also folgt wieder, dass $t = 1$ sein muss

Somit haben der Zähler und der Nenner des Bruches $\frac{14n+3}{28n+5}$ den größten gemeinsamen Teiler 1, d. h. sie sind teilerfremd zueinander, w. z. b. w.

Aufgabe 240912:
Beweisen Sie, dass die Zahl 91 nicht als Produkt von fünf verschiedenen ganzen Zahlen dargestellt werden kann!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wegen der Primfaktorzerlegung $91 = 7 \cdot 13$ ist eine Darstellung der Zahl 91 als Produkt von möglichst vielen ganzzahligen Faktoren nur so zu erhalten, dass man erstens zwei Faktoren der Beträge 7 bzw. 13 (also einen Faktor 7 oder -7 und einen zweiten Faktor 13 oder -13) nimmt und dann noch die beiden einzigen den Betrag einer Zahl nicht ändernden Faktoren 1 und -1 hinzufügt.

Also enthält jede Darstellung von 91 als Produkt aus verschiedenen ganzen Zahlen höchstens vier Faktoren.

Aufgabe 260914:
Untersuchen Sie, ob es natürliche Zahlen n derart gibt, dass die Lösung x der Gleichung $17x+n = 6x+185$ ebenfalls eine natürliche Zahl ist! Wenn das der Fall ist, so ermitteln Sie die kleinste derartige Zahl n und die zugehörige Lösung x der gegebenen Gleichung!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Für jede natürliche Zahl n gilt:

Die Gleichung $17x + n = 6x + 185$ lässt sich äquivalent umformen zu $11x = 185 - n$. Sie hat daher genau die Lösung

$$x = \frac{185 - n}{11} \tag{1}$$

Diese ist für genau diejenigen natürlichen Zahlen n selbst eine natürliche Zahl, für die $n \leq 185$ gilt und 11 ein Teiler von $185 - n$ ist.

Diese Bedingungen werden, da 185 bei Division durch 11 den Rest 9 lässt, genau von denjenigen natürlichen Zahlen $n = 9 + 11m$ mit ganzzahligem m erfüllt, für die $9 + 11m \leq 185$ gilt. Solche natürlichen Zahlen n gibt es; die kleinste von ihnen erhält man mit $m = 0$.

Die gesuchte kleinste Zahl n mit den genannten Eigenschaften ist also $n = 9$; nach (1) ist die zugehörige Lösung der in der Aufgabe gegebenen Gleichung die Zahl $x = 16$.

Aufgabe 270913:
Jemand möchte die Frage beantworten, ob 1987 eine Primzahl ist. Er hat unter seinen Rechenhilfsmitteln (Zahlentafel, Taschenrechner) zwar auch eine Primzahltabelle; sie enthält aber nur die Primzahlen unter 100.

Wie kann (ohne weitere Hilfsmittel), die Untersuchung geführt werden; welche Antwort erbringt sie?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn man zeigen kann, dass 1987 durch keine Primzahl p teilbar ist, für die $p \leq \sqrt{1987}$ gilt, dann ist 1987 als Primzahl nachgewiesen.

Wegen $\sqrt{1987} < 44$ genügt es hierzu also zu zeigen, dass 1987 durch keine der Zahlen 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43 teilbar ist. Diese Aussagen lassen sich in der Tat durch Ausrechnen bestätigen (z. B. kann man mit Hilfe eines Taschenrechners feststellen, dass keine der 14 Zahlen 1987 : 2, 1987 : 3, ..., 1987 : 4 eine ganze Zahl ist).

Damit ist die Antwort erbracht, dass 1987 eine Primzahl ist.

Aufgabe 290912:
Gibt es unter allen fünfstelligen Zahlen, die sich unter Verwendung genau der Ziffern 0, 1, 2, 3, 4 schreiben lassen, eine Primzahl?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Antwort: Ja, nämlich zum Beispiel 10243.

Es fehlt noch eine Begründung für diese Antwort. Außerdem seien einige hinführende Bemerkungen gegeben, die nicht notwendig zu einer vollständigen Lösung der Aufgabe gehören:

Wenn eine Primzahl die genannten Eigenschaften hat, so kann jedenfalls keine der Ziffern 0, 2, 4 ihre Einerziffer sein. Der Aufwand beim Überprüfen, ob eine Primzahl vorliegt, ist um so kleiner, je kleiner die zu überprüfende Zahl ist. Daher beginnt man zweckmäßig mit der kleinsten fünfstelligen Zahl, die sich mit den genannten Ziffern schreiben lässt und 1 oder 3 als Einerziffer hat, d. h. mit der Zahl 10243.

Diese Zahl ist als Primzahl nachgewiesen, wenn sie durch keine Primzahl, die kleiner als 10243 ist, teilbar ist. Dabei genügt es wegen $\sqrt{10243} < 102$, nur die Primzahlen ≤ 101 als Teiler zu überprüfen. Denn falls 10243 einen Teiler ≥ 102 hat, so muss er bei der Zerlegung von 10243 zusammen mit einem Faktor auftreten, der kleiner als 102 ist, dessen Primfaktoren also bereits überprüft sind.

Mit einer Primzahltabelle und dem SR 1 (oder anderen Rechenhilfsmitteln) stellt man schnell fest, dass keine der Primzahlen 2, 3, ..., 101 Teiler von 10243 ist. Damit ist die Antwort begründet.

Bemerkung: Sämtliche Primzahlen mit den genannten Eigenschaften sind: 10243, 12043, 20143, 20341, 20431, 23041, 24103, 30241, 32401, 40123, 40213, 40231, 41023, 41203, 42013, 43201.

Aufgabe 320912:
Drei natürliche Zahlen a, b, c mit $0 < a \leq b < c$, für die die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ gilt, nennt man ein pythagoreisches Zahlentripel.

Man beweise: In jedem pythagoreischen Zahlentripel a, b, c muss $a \neq 1$ sein.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
In jedem pythagoreischen Zahlentripel gilt

$$a^2 = c^2 - b^2 = (c - b) \cdot (c + b) \tag{1}$$

Wäre $a = 1$, so wäre (1) für die ganzen Zahl $c - b$ und $c + b$, die wegen $0 < b < c$ positiv sind, nur mir $c - b = 1$ und $c + b = 1$ möglich. Daraus folgte $b = 0$ im Widerspruch zu $0 < b$. Also muss $a \neq 1$ sein.

Aufgabe 330912:
Gibt es eine sechsstellige natürliche Zahl, die genau vierzehn verschiedene natürliche Zahlen als Teiler hat, unter denen sich auch die Zahl 14 befindet?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Eine derartige Zahl gibt es; denn die Zahl $z = 2 \cdot 7^6$ hat die genannten Eigenschaften.

Beweis: Diese Zahl lautet 235298, sie ist also sechsstellig. Ferner sind Teiler von z unter den natürlichen Zahlen genau die Zahlen 1, 7, 7^2, 7^3, 7^4, 7^5, 7^6 sowie das Zweifache dieser sieben Zahlen.

Keine zwei dieser vierzehn Zahlen sind einander gleich, und unter ihnen befindet sich auch die Zahl $2 \cdot 7 = 14$.

II Runde 2

Aufgabe 010923:
Man wähle zwei beliebige, aber verschiedene natürliche Zahlen und bilde ihre Summe, ihre Differenz und ihr Produkt.
Es ist zu beweisen, dass unter diesen drei Zahlen wenigstens eine durch 3 teilbar ist!

Lösung von Christiane Behns:
Ist eine der beiden Zahlen durch 3 teilbar, so auch das Produkt. Lassen die beiden Zahlen bei Division durch 3 denselben Rest, dann ist die Differenz durch 3 teilbar.
Lässt eine Zahl bei Division durch 3 den Rest 1, die andere den Rest 2, dann ist die Summe der beiden Zahlen ein Vielfaches von 3. Andere Möglichkeiten für die Reste gibt es nicht.

Aufgabe 010924:
Das Produkt von vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist gleich 93024.
Wie heißen die Zahlen?

Lösung von Christiane Behns:
Sei n die kleinste der vier Zahlen. Wegen $10^4 = 10000 < 93024$ und $20^4 = 160000 > 93024$ gilt $7 < n < 20$. Da 5 kein Teiler von 93024 ist, darf n bei Division durch 5 nur den Rest 1 lassen. Es kommt also nur $n = \{11, 16\}$ in Frage.
Wegen $93024 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 17 \cdot 19$ müssen 17 und 19 unter den Zahlen $n, n+1, n+2$ und $n+3$ vorkommen. Damit ist $n = 16$.
Probe: $16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 = 93024$.

Aufgabe 060921:
Geben Sie vier verschiedene Paare (a, b) positiver, ganzer Zahlen an, so dass die Differenz der Quadrate der beiden Zahlen jedes Paares 105 beträgt!
(Je zwei Paare (a, b) und (b, a) gelten dabei als nicht verschieden voneinander.)

Lösung von Felix Kaschura:
Durch die Aufgabenstellung ergibt sich folgende Gleichung:

$$105 = a^2 - b^2 = (a+b) \cdot (a-b) \qquad \text{3.Binomische Formel}$$

Nun wird substituiert: $x := a + b$ und $y := a - b$.
Damit gilt: $a = x - b = y + b$. Also ergibt sich:

$$b = \frac{x-y}{2} \tag{IV.1}$$

sowie

$$a = \frac{x+y}{2} \tag{IV.2}$$

105 hat die Teiler: 1, 3, 5, 7, 15, 21, 35, 105. Damit gibt es die folgenden möglichen Paare (x, y) mit $x \geq y$, da $a + b \geq a - b$, wenn $a, b \in N$: $(105, 1), (35, 3), (21, 5), (15, 7)$.
Nun wird wieder rücksubstituiert unter Verwendung der Gleichungen (1) und (2):

$$\begin{aligned}
\text{Fall 1:} \quad & x = 105, y = 1 \Rightarrow a = 53, b = 52 \\
\text{Fall 2:} \quad & x = 35, y = 3 \Rightarrow a = 19, b = 16 \\
\text{Fall 3:} \quad & x = 21, y = 5 \Rightarrow a = 13, b = 8 \\
\text{Fall 4:} \quad & x = 15, y = 7 \Rightarrow a = 11, b = 4
\end{aligned}$$

Aufgabe 080921:
Gesucht werden fünf aufeinanderfolgende natürliche Zahlen, deren jede größer als 1 ist und von denen die kleinste durch 2 und die nächstfolgenden der Reihe nach durch 3, durch 4, durch 5 und durch 6 teilbar sein sollen.
a) Nennen Sie ein Beispiel für fünf derartige Zahlen!
b) Wie kann man alle Lösungen der Aufgabe erhalten?

Lösung von ZePhoCa:
a) Ein Beispiel ist 2,3,4,5,6.

b) Nennen wir die erste Zahl n. n muss durch 2 teilbar, also gerade sein.
$n + 1$ muss durch 3 teilbar sein, also muss n bei Division durch 3 den Rest 2 lassen. $n + 2$ muss durch 4 teilbar sein. Da n gerade ist, ist $n + 2$ auch gerade und genau dann durch 4 teilbar, wenn n nicht durch 4 teilbar ist.
$n + 3$ muss durch 5 teilbar sein, also muss n bei Division durch 5 den Rest 2 lassen. $n + 4$ muss durch 6 teilbar sein. Durch 2 teilbar ist es auf jeden Fall, da n gerade ist. Da n bei Division durch 3 den Rest 2 lässt ist $n + 4$ auch durch 6 teilbar. Also muss n die folgenden Voraussetzungen erfüllen:

n muss gerade aber nicht durch 4 teilbar sein, bei Division durch 3 den Rest 2 lassen und bei Division durch 5 ebenfalls den Rest 2 lassen.

Aufgabe 090923:
Jemand hat sieben Kärtchen mit jeweils einer der Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6 und 7.
Man zeige, dass sich unter allen denjenigen siebenstelligen Zahlen, die unter Verwendung jeweils genau dieser sieben Kärtchen gelegt werden können (wobei ein z. B. durch Umdrehen bewirktes „Verwandeln“ der 6 in eine 9 verboten ist), keine zwei befinden, deren eine ein ganzzahliges Vielfaches der anderen ist!

Lösung von cyrix:
Wir nehmen indirekt an, es gäbe zwei solche Zahlen $a > b$, die sich so bilden lassen und für die a Vielfaches von b ist. Dann gäbe es eine natürliche Zahl $n > 1$ mit $a = n \cdot b$.

Da a und b aus den gleichen Ziffern gebildet werden, besitzen sie die gleiche Quersumme $1+2+\cdots+7 = 28$, lassen also wegen $28 - 3 \cdot 9 = 1$ jeweils den Rest 1 bei der Division durch 9.
Demnach muss auch n den Rest 1 bei der Teilung durch 9 lassen, damit dies auch für das Produkt $a = b \cdot n$ gilt. Also ist $n \geq 10$, sodass a mindestens eine Stelle mehr besitzen müsste als b, was ein Widerspruch ist.
Kurz: $a \equiv b \equiv 28 \equiv 1 \pmod 9$, also auch $n \equiv b \cdot n = a \equiv 1 \pmod 9$ und damit $n \geq 10$, Widerspruch.

Aufgabe 100922:
Jemand behauptet:
Wenn von zwei natürlichen Zahlen a und b jede die Eigenschaft hat, sich als Summe der Quadrate zweier natürlicher Zahlen darstellen zu lassen, dann hat auch das Produkt von a und b diese Eigenschaft.

a) Geben Sie ein Zahlenbeispiel an!
b) Beweisen Sie diesen Satz!

Lösung von cyrix:
a) $5 \cdot 25 = (1+4)(9+16) = 125 = 25 + 100 = 5^2 + 10^2$.

b) Seien a_1, a_2, b_1, b_2 natürliche Zahlen mit $a = a_1^2 + a_2^2$ und $b = b_1^2 + b_2^2$. Dann ist

$$ab = (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) = a_1^2 b_1^2 + a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 =$$

$$= (a_1 b_1)^2 - 2a_1 b_1 a_2 b_2 + (a_2 b_2)^2 + (a_1 b_2)^2 + 2a_1 b_2 a_2 b_1 + (a_2 b_1)^2 = (a_1 b_1 - a_2 b_2)^2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)^2$$

Bemerkung: Man erhält diese Identität, indem man a, b und ab als Betragsquadrate der komplexen Zahlen $z_1 := a_1 + i \cdot a_2$, $z_2 := b_1 + i \cdot b_2$ bzw. $z_1 \cdot z_2$ interpretiert.

Aufgabe 120921:
Beweisen Sie den folgenden Satz!
Die Summe der Kuben dreier beliebiger aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen ist durch 3 teilbar.

Lösung von Conny42:
Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann erhalten wir
$n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 = n^3 + (n+1) \cdot (n^2 + 2n + 1) + (n+2) \cdot (n^2 + 4n + 4)$
$= n^3 + n^3 + 2n^2 + n + n^2 + 2n + 1 + n^3 + 4n^2 + 4n + 2n^2 + 8n + 8$

$= 3n^3 + 9n^2 + 15n + 9$
$= 3 \cdot (n^3 + 3n^2 + 5n + 3)$.
Somit ist die Summe der Kuben dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen durch 3 teilbar.

Alternativ-Lösung von cyrix:
Es ist

$$(n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 = (n^3 - 3n^2 + 3n - 1) + n^3 + (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) = 3(n^3 + 2n)$$

durch 3 teilbar.

Bemerkung: Wegen

$$n^3 + 2n = (n^3 - 4n) + 6n = n(n^2 - 4) + 6n = (n-2)n(n+2) + 6n$$

folgt sogar, dass die Summe von 3 Kuben immer durch $3^2 = 9$ teilbar sein muss, da einer der drei Faktoren $n-2$, n oder $n+2$ durch 3 teilbar ist und damit auch $n^3 + 2$.

Aufgabe 140923:
Es ist die kleinste positive ganze Zahl zu ermitteln, deren dritte Potenz ein ganzzahliges Vielfaches von 588 ist.

Lösung von Steffen Polster:
Die Primfaktorzerlegung von 588 ist: $588 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7^2$. Ist z^3 die dritte Potenz einer positiven ganzen Zahl z, so muss z^3 jeden Primfaktor von z mindestens dreimal enthalten.
Das kleinste Vielfache mit je drei Primfaktoren der Zerlegung von 588 ist $2^3 \cdot 3^3 \cdot 7^3$. Dessen dritte Wurzel ist $2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$. $z = 42$ ist die gesuchte Zahl.

Aufgabe 190922:
Die Zahlen in einem Zahlentripel (p, q, r) seien genau dann „Primzahldrillinge“ genannt, wenn jede der drei Zahlen p, q, r eine Primzahl ist und wenn p, q, r in dieser Reihenfolge drei unmittelbar aufeinanderfolgende ungerade Zahlen sind.
Beweisen Sie, dass es genau ein Zahlentripel (p, q, r) gibt, das alle diese Bedingungen erfüllt!

Lösung von cyrix:
Es ist von drei aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen immer genau eine durch 3 teilbar. Da es alles Primzahlen sein sollen, muss also eine der drei Zahlen 3 sein. Da $3 - 2 = 1$ keine Primzahl ist, muss der kleinste Wert p gleich 3 sein, sodass sich das Tripel (3,5,7) ergibt, was offenbar alle Voraussetzungen erfüllt, also der einzige „Primzahldrilling“ nach Definition der Aufgabenstellung ist, $\square$.

Bemerkung: So wenig sinnvoll es wäre, „Primzahlzwilling“ als „direkt aufeinanderfolgende Primzahlen“ zu definieren (weil es dann nur den einen „Primzahlzwilling„ (2,3) gäbe), so ist es auch nicht sinnvoll, den Begrif „Primzahldrilling“ wie in der Aufgabenstellung zu definieren.
Im allgemeinen fordert man, dass $p < q < r$ alles Primzahlen mit $r = p + 6$ sind. Dabei wählt man den Wert 6 analog wie den Wert 2 bei der Definition von Primzahlzwillingen (p,q) mit $q = p + 2$, weil dies der kleinste Wert ist, für den nicht per se aufgrund Teilbarkeit durch kleine Zahlen ausgeschlossen ist, dass es mehr als ein solches Tupel gibt.
Ob es unendlich viele Primzahldrillinge nach dieser geeigneteren Definition gibt, ist bisher genauso unklar wie die Frage, ob es unendlich viele Primzahlzwillinge gibt.

Aufgabe 220921:
Man ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen n, die den folgenden Bedingungen (1) und (2) genügen:
(1) $n-9$ ist eine Primzahl.
(2) n^2-1 ist durch 10 teilbar.

Lösung von cyrix:
Wegen (2) ist n^2-1 gerade, also n^2 ungerade, also n ungerade, also $n-9$ gerade, also wegen (1) $n-9=2$ und damit $n=11$. Tatsächlich ist auch $11^2-1=120$ durch 10 teilbar.

Aufgabe 220922:
Beweisen Sie folgende Aussage!
Wenn x, y und z von 0 verschiedene natürliche Zahlen sind, dann sind

$$a=\frac{(x+y\sqrt{z})^2+(x-y\sqrt{z})^2}{2}$$
$$b=\frac{(x+y\sqrt{z})^2-(x-y\sqrt{z})^2}{2\sqrt{z}}$$
$$c=a^2-(x^2-y^2z)^2$$

natürliche Zahlen, und b ist ein Teiler von c.

Lösung von cyrix:
Es ist

$$a=\frac{1}{2}\cdot(x^2+2xy\sqrt{z}+y^2z+x^2-2xy\sqrt{z}+y^2z)=x^2+y^2z\in\mathbb{N}$$
$$b=\frac{1}{2\sqrt{z}}\cdot(x^2+2xy\sqrt{z}+y^2z-x^2+2xy\sqrt{z}-y^2z)=2xy\in\mathbb{N}\qquad\text{und}$$
$$c=(a-x^2+y^2z)\cdot(a+x^2-y^2z)=2y^2z\cdot 2x^2=4x^2y^2z=b\cdot 2xyz\in\mathbb{N}$$

und es gilt offensichtlich $b|c$, $\square$.

Aufgabe 230924:
Beweisen Sie:
Ist p eine Primzahl, dann ist $\sqrt{p}$ keine rationale Zahl.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Indirekter Beweis:
Angenommen, $\sqrt{p}$ wäre eine rationale Zahl. Dann gäbe es natürliche Zahlen m und n mit $\sqrt{p}=\frac{m}{n}$.
Dabei könnte erreicht werden, dass m und n teilerfremd sind. Daraus würde $pn^2=m^2$ folgen, die Primzahl p müsste also m teilen, d. h., es würde $m=px$ mit einer natürlichen Zahl x gelten.
Daraus ergäbe sich $pn^2=p^2\cdot x^2$, also $n^2=p\cdot x^2$, und daher müsste p auch n teilen, im Widerspruch zur Teilerfremdheit von n und m.
Also war die Annahme, dass $\sqrt{p}$ rational ist, falsch, d. h., $\sqrt{p}$ ist keine rationale Zahl.

Aufgabe 260921:
Beweisen Sie, dass für jede natürliche Zahl n auch

$$\frac{n^3-2n^2-4n+8}{n+2}\qquad\text{eine natürliche Zahl ist!}$$

Lösung von cyrix:
Es ist

$$\frac{n^3-2n^2-4n+8}{n+2}=\frac{n^3+2n^2-4n^2-8n+4n+8}{n+2}=\frac{(n^2-4n+4)\cdot(n+2)}{n+2}=n^2-4n+4\in\mathbb{N}, \square$$

Aufgabe 280921:
Ermitteln Sie die kleinsten vier Zahlen, die das Quadrat einer natürlichen Zahl und zugleich auch die dritte Potenz einer anderen natürlichen Zahl sind!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn eine Zahl des Quadrat einer natürlichen Zahl n und zugleich auch die dritte Potenz einer natürlichen Zahl m ist, so ist sie eine natürliche Zahl, bei deren Primfaktorzerlegung jeder Primfaktor in einer durch 2 und zugleich auch durch 3 teilbaren Anzahl vorkommt.
Daher (und weil 2 und 3 zueinander teilerfremd sind) muss jeder Primfaktor in einer durch 6 teilbaren Anzahl vorkommen, die Zahl muss also die sechste Potenz einer natürlichen Zahl sein. Ist außerdem noch die Bedingung $n \neq m$ zu erfüllen, so scheiden 0 und 1 aus, da diese Zahlen Quadrat und dritte Potenz nur von jeweils derselben Zahl sind.

II. Die Zahlen $2^6, 3^6, 4^6$ und 5^6 erfüllen alle diese Bedingungen, wie aus

$$216=8^2=4^3, \quad 3^6=27^2=9^3, \quad 4^6=64^2=16^3, \quad 5^6=125^2=25^3$$

ersichtlich ist.
Mit I. und II. (und weil alle k^6 mit $k>5$ größer als $2^6,...,5^6$ sind) ist gezeigt: Die vier gesuchten Zahlen sind $2^6=64$, $3^6=729$, $4^6=4096$, $5^6=15625$.

Aufgabe 280924:
a) Ermitteln Sie alle diejenigen Primzahlen, die sich als Summe zweier aufeinanderfolgender von Null verschiedener natürlicher Zahlen darstellen lassen!
b) Beweisen Sie, dass es keine Primzahl gibt, die sich als Summe von drei oder mehr aufeinanderfolgenden von Null verschiedenen natürlichen Zahlen darstellen lässt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Von je zwei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist stets eine ungerade, die andere gerade. Daher ist ihre Summe stets ungerade.
Also können höchstens die ungeraden, d. h. die von 2 verschiedenen Primzahlen eine Darstellung der genannten Art besitzen.
Für jede Primzahl $p \geq 3$ gibt es die Darstellung

$$p=\frac{p-1}{2}+\frac{p+1}{2}$$

und darin gilt: Da p ungerade ist, sind $p-1$ und $p+1$ gerade, also $\frac{p-1}{2}$ und $\frac{p+1}{2}$ ganze Zahlen. Wegen $p \geq 3$ ist $p-1 \geq 2$, also $\frac{p-1}{2} \geq 1$ eine von Null verschiedene natürliche Zahl.
Wegen $\frac{p-1}{2}+1=\frac{p+1}{2}$ ist $\frac{p+1}{2}$ die darauffolgende (und damit ebenfalls von Null verschiedene) natürliche Zahl.
Die gesuchten Primzahlen sind also genau alle Primzahlen $p \geq 3$.

b) Angenommen, es gäbe eine Primzahl p und für sie eine Darstellung $p=a_1+...+a_n \quad (1)$ mit $n \geq 3$ aufeinanderfolgenden von Null verschiedenen natürlichen Zahlen $a_1,...,a_n$.
Nach der bekannten Formel für die Summe aufeinanderfolgender Zahlen wären dann

$$p=\frac{1}{2}\cdot n\cdot(a_1+a_n)$$

Daher müsste mindestens eine der Zahlen n, $(a_1 + a_n)$ gerade sein. Ferner wäre $a_1 \geq 1$, $a_n \geq n$, also $a_1 + a_n \geq 1 + n$.
Wäre n gerade, so wäre wegen $n \geq 3$ sogar $n \geq 4$, also p in die ganzzahligen Faktoren $\frac{1}{2}n \geq 2$ und $a_1 + a_n > n \geq 4$ zerlegt.
Wäre $a_1 + a_n$ gerade, so wäre p in die ganzzahligen Faktoren $n \geq 3$ und

$$\frac{1}{2}(a_1 + a_n) \geq \frac{1}{2}(1+n) \geq \frac{1}{2}(1+n) \geq \frac{1}{2}(1+3) = 2$$

zerlegt. Damit ist die Annahme über (1) widerlegt, d. h. der verlangte Beweis geführt.

Aufgabe 320921:
Ein pythagoreisches Zahlentripel $(a; b; c)$ besteht aus drei von 0 verschiedenen natürlichen Zahlen a, b, c, für die $a^2 + b^2 = c^2$ gilt.
a) Geben Sie drei verschiedene Tripel $(a; b; c)$ mit $a \leq b$ an und bestätigen Sie, dass es pythagoreische Zahlentripel sind!
b) Warum gibt es kein pythagoreisches Zahlentripel mit $a = b$?

Lösung von cyrix:
a) Offensichtlich ist für jedes natürliche $n > 0$ das Tripel $(3n; 4n; 5n)$ wegen

$$(3n)^2 + (4n)^2 = 9n^2 + 16n^2 = 25n^2 = (5n)^2$$

ein pythagoreisches.

b) Wäre $a = b$, so also $c^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$, also $2 = \frac{c^2}{a^2}$ mit $\sqrt{2} = \frac{c}{a} \in \mathbb{Q}$, was ein Widerspruch ist.

III Runden 3 & 4

Aufgabe V10933:
Für alle ungeraden Zahlen n ist die Differenz $n^2 - 1$ durch 8 teilbar.
Beweisen Sie diese Aussage!

Lösung von svrc:
Da n eine ungerade ganze Zahl ist, gibt es eine ganze Zahl k so, dass $n = 2k + 1$ ist. Es gilt

$$n^2 - 1 = (2k+1)^2 - 1 = 4k^2 + 4k + 1 - 1 = 4k^2 + 4k = 4k\,(k+1)\,.$$

Da in dem Produkt die zwei aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen k und $k + 1$ auftauchen, ist genau eine davon auch durch 2 teilbar. Somit ist $n^2 - 1$ für alle ungeraden ganzen Zahlen n durch 8 teilbar.

Aufgabe 010933:
Es ist der Bruch zu finden, der gleich 0,4 ist und dessen Zähler und Nenner als Summe eine zweistellige Quadratzahl ergeben!
Wie haben Sie die Lösung gefunden?

Lösung von Christiane Behns:
Jeder Bruch, der gleich 0,4 ist, hat die Form $\frac{2n}{5n}$.
Die Summe $2n + 5n = 7n$ ist nur für $n = 7$ eine zweistellige Quadratzahl. Also ist der gesuchte Zähler gleich 14, der Nenner gleich 35.

Aufgabe 020931:
Vermindert man die siebente Potenz einer positiven ganzen Zahl um diese Zahl, so ist die Differenz stets durch die Summe aus der 1., 2. und 3. Potenz dieser Zahl teilbar.

Lösung von André Lanka:
Sei n eine beliebige ganze, positive Zahl. Dann gilt:

$$\begin{aligned} n^7 - n &= n(n^6 - 1) = n(n^3 + 1)(n^3 - 1) \\ &= n(n^3 + 1)(n - 1)(n^2 + n + 1) = (n^3 + 1)(n - 1)(n^3 + n^2 + n) \end{aligned}$$

Die ersten beiden Faktoren bilden ganze Zahlen. Daher ist $n^7 - n$ ohne Rest durch $n^3 + n^2 + n$ teilbar.

Aufgabe 030934:
Das Produkt von vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist 110355024.
Wie lauten die Zahlen? Der Lösungsweg ist ausführlich zu begründen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die natürlichen Zahlen seien $n, n + 1, n + 2, n + 3$.
Laut Voraussetzung ist $n(n+1)(n+2)(n+3) = 110355024$. Daraus folgt $n^4 < 111000000$, also $n < 104$.
Andererseits gilt $(n + 3)^4 > n(n + 1)(n + 2)(n + 3) > 100000000$, somit $n + 3 > 100$, also $n > 97$. Damit gilt $97 < n < 104$.
110355024 ist nicht durch 5 teilbar, folglich ist auch keine der gesuchten Zahlen durch 5 teilbar.
Dies trifft nur für $n = 101$ zu. Die gesuchten Zahlen lauten also $101, 102, 103, 104$.

Aufgabe 040934:
Ist die folgende Aussage richtig?
Vermehrt man das Produkt von vier beliebigen unmittelbar aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen um 1, so erhält man eine Quadratzahl.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Bezeichnet man die erste Zahl mit n, so erhält man

$$n \cdot (n + 1) \cdot (n + 2) \cdot (n + 3) + 1 = n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n + 1 = (n^2 + 3n + 1)^2$$

D. h., das Produkt vier beliebiger aufeinander folgender Zahlen vermehrt um eins ist ein Produkt, also ist die Aussage wahr.

Aufgabe 060931:
Zwei Primzahlen p_1 und p_2 (mit $p_1 > p_2$) heißen Primzahlzwillinge, wenn $p_1 - p_2 = 2$ gilt. Beweisen Sie, dass für alle Primzahlzwillinge p_1 und p_2, für die $p_2 > 3$ ist, stets die Summe $p_1 + p_2$ durch 12 teilbar ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Laut Aufgabe gilt $p_1 = p_2 + 2$. Also gilt

$$p_1 + p_2 = p_2 + 2 + p_2 = 2p_2 + 2 = 2(p_2 + 1)$$

Da jede Primzahl > 3 eine ungerade Zahl ist, ist $p_2 + 1$ gerade und $p_1 + p_2$ mithin durch 4 teilbar.
Ferner sind p_2, $p_2 + 1$ und $p_2 + 2 (= p_1)$ drei aufeinanderfolgende natürliche Zählen, von denen somit genau eine durch 3 teilbar ist.
Da aber p_1 und p_2 Primzahlen größer als 3 sind, sind diese beiden Zahlen nicht durch 3 teilbar. Also ist $p_2 + 1$ durch 3 teilbar und damit $p_1 + p_2 = 2(p_2 + 1)$ durch 12 teilbar. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Aufgabe 060934:
Zeigen Sie, dass es unter allen Zahlen der Form $2p+1$, wobei p eine Primzahl ist, genau eine Kubikzahl gibt!

Lösung von StrgAltEntf:
Sei $2p+1=a^3$. Dann ist a ungerade und es gilt

$$p=\frac{a^3-1}{2}=\frac{a-1}{2}(a^2+a+1)$$

Da p prim, muss $\frac{a-1}{2}=1$ oder $a^2+a+1=1$ gelten.
Da $a^2+a+1>1$ folgt $a=3$ und somit $p=13$. In der Tat ist 13 prim und es gilt $2\cdot 13+1=3^3$.

Aufgabe 080935:
Es ist zu beweisen, dass für jede ungerade Zahl n die Zahl $n^{12}-n^8-n^4+1$ durch 512 teilbar ist.

Lösung von ZePhoCa:
Sei $m=n^4$. Dann ist die Zahl m^3-m^2-m+1 zu untersuchen.
Es gilt $m^3-m^2-m+1=(m-1)^2(m+1)$.
Da n ungerade ist, gilt $n=2k+1$ und damit

$$m=(2k+1)^4=16k^4+32k^3+24k^2+8k+1$$

Damit ist $m+1$ durch 2 teilbar und es gilt

$$m-1=16k^4+32k^3+24k^2+8k=16(k^4+2k^3+k^2)+8(k^2+k)$$

Da $k^2+k=k(k+1)$ gerade ist, ist also $m-1$ durch 16 teilbar. Also ist m^3-m^2-m+1 durch $16\cdot 16\cdot 2=512$ teilbar.

Aufgabe 090934:
Man beweise:
Wenn zwei ganze Zahlen a und b die Bedingung erfüllen, dass die Zahl $11a+2b$ durch 19 teilbar ist, dann ist auch die Zahl $18a+5b$ durch 19 teilbar.

Lösung von cyrix:
Mit $11a+2b$ ist auch

$$12\cdot(11a+2b)-19\cdot(6a+b)=132a+24b-114a-19b=18a+5b$$

durch 19 teilbar.

Aufgabe 120931:
Man beweise, dass für jede natürliche Zahl n die Zahl n^6-n^2 durch 10 teilbar ist.

Lösung von ZePhoCa:
Es gilt $n^6-n^2=n^2(n^4-1)=n^2(n^2-1)(n^2+1)=n^2(n-1)(n+1)(n^2+1)$. Von den aufeinanderfolgenden Zahlen n und $n+1$ ist eine gerade, also ist n^6-n^2 durch 2 teilbar.

Wenn n bei Division durch 5 den Rest 0,1 oder 4 lässt, dann ist n bzw. $n-1$ bzw. $n+1$ durch 5 teilbar und das Produkt damit auch.
Lasse n nun bei Division durch 5 den Rest 2 oder 3, also $n = 5k+2$ oder $n = 5k+3$. Dann ist $n^2+1 = 25k^2+20k+5$ oder $n^2+1 = 25k^2+30k+10$ durch 5 teilbar. Also ist n^6-n^2 in jedem Fall durch 5 teilbar.
Da 2 und 5 teilerfremd sind ist damit n^6-n^2 auch durch 10 teilbar.

Alternativ-Lösung von cyrix:
Die letzte Ziffer einer Quadratzahl n^2 kann nur 0, 1, 4, 5, 6 oder 9 lauten, wie man leicht durch Nachrechnen überprüft. Für diese Ziffern gilt aber, dass die Kubikzahl einer auf eine solche Ziffer endende Zahl wieder auf diese Ziffer endet, wie man ähnlich leicht nachrechnet. Insbesondere enden also $n^6 = (n^2)^3$ und n^2 auf die gleiche Ziffer, sodass ihre Differenz auf die Ziffer 0 enden und sie somit durch 10 teilbar sein muss.

Aufgabe 130932:
Man gebe alle natürlichen Zahlen n an, für die $(n-1)^3+n^3+(n+1)^3$ durch 10 teilbar ist!

Lösung von cyrix:
Es ist $(n-1)^3+n^3+(n+1)^3 = 3n^3+6n = 3n(n^2+2)$. Weiterhin ist n^2+2 gerade genau dann, wenn auch n gerade ist. Wegen $(5k\pm1)^2+2 = 25k^2\pm10k+1+2 = 5\cdot(5k^2\pm2k)+3$ und $(5k\pm2)^2+1 = 25k^2\pm20k+4+1 = 5\cdot(5k^2\pm4k+1)$ ist n^2+2 genau dann durch 5 teilbar, wenn n den Rest 2 oder 3 bei der Teilung durch 5 lässt.
Damit ist $3n(n^2+2)$ genau dann durch 5 teilbar, wenn n den Rest 0 (dann ist n durch 5 teilbar), 2 oder 3 (dann ist n^2+2 durch 5 teilbar) bei der Teilung durch 5 lässt.
Außerdem ist $3n(n^2+2)$ genau dann durch 2 teilbar, wenn es n auch ist.

Zusammen folgt (wegen ggT(2,5) = 1), dass $(n-1)^3+n^3+(n+1)^3 = 3n(n^2+2)$ genau dann durch 10 teilbar ist, wenn es durch 2 und 5 teilbar ist, also n die Endziffer 0, 2 oder 8 besitzt.

Aufgabe 160934:
Beweisen Sie, dass für keine Primzahl $p \neq 3$ und für keine natürliche Zahl $n \geq 1$ die Zahl $(3n-1)\cdot p^2+1$ Primzahl ist!

Lösung von cyrix:
Da p eine von 3 verschiedene Primzahl ist, ist es nicht durch 3 teilbar und lässt sich schreiben als $3m+1$ oder $3m-1$ mit einer natürlichen Zahl m.
Dann ist

$$\begin{aligned}(3n-1)\cdot p^2+1 = (3n-1)(3m\pm1)^2+1 = (3n-1)(9m^2\pm6m+1)+1 = \\ = 3(9m^2n\pm6mn+n-3m^2\mp2m)-1+1\end{aligned}$$

also durch 3 teilbar, aber sicher größer als 3 (da $3n-1>1$ und $p^2\geq4$), also sicher keine Primzahl, $\Box$.

Aufgabe 170935:

Beweisen Sie folgende Aussage!
Vergrößert man das Produkt von vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen um 1, so erhält man das Quadrat einer natürlichen Zahl.

Lösung von cyrix:
Für eine natürliche Zahl n gilt:

$$\begin{aligned}n(n+1)(n+2)(n+3)+1 &= (n+1)(n+2)(n^2+3n)+1\\ &= (n+1)(n+2)[(n+1)(n+2)-2]+1\\ &= [(n+1)(n+2)]^2-2(n+1)(n+2)+1\\ &= [(n+1)(n+2)-1]^2\ .\end{aligned}$$

Aufgabe 230931:
Man ermittle alle Tripel (x, y, z) natürlicher Zahlen mit folgenden Eigenschaften:
(1) x, y und z sind Primzahlen.
(2) Jede Ziffer aus den Zifferndarstellungen von x, y und z (im dekadischen Zahlensystem) stellt eine Primzahl dar.
(3) Es gilt $x < y$.
(4) Es gilt $x + y = z$.

Lösung von cyrix:
Wegen (1) und (4) ist $z \geq 2+2 > 2$, also ungerade. Damit ist genau eine der beiden Summanden x bzw. y gerade, also wegen (1) gleich 2, sodass wegen (3) $x = 2$ gilt, da dies die kleinste Primzahl ist. Damit sind y und z Primzahlzwillinge.
Mehrstellige Primzahlzwillinge besitzen aber die Endziffern (9 und 1), (1 und 3) oder (7 und 9), da die Endziffer 5 zur Teilbarkeit durch 5 und damit (und wegen der Mehrstelligkeit) zum Widerspruch zu (1) führen würde. Also ist $y < z$ einstellig und es ergeben sich die Lösungstripel (2,3,5) und (2,5,7).

Aufgabe 240931:
Beweisen Sie, dass es keine vierstellige Quadratzahl z mit den folgenden Eigenschaften (1) und (2) gibt!
(1) Die erste und die dritte Ziffer von z sind einander gleich.
(2) Die zweite und die vierte Ziffer von z sind einander gleich.

Lösung von cyrix:
Nehmen wir an, es gäbe eine solche Zahl z und bezeichnen ihre erste Ziffer mit a sowie ihre zweite mit b. Dann ist $z = 1000 \cdot a + 100 \cdot b + 10 \cdot a + b = 101 \cdot (10a + b)$.
Da $z > 0$ eine Quadratzahl ist, aber 101 eine Primzahl, die z teilt, muss auch $101^2 > 10000$ die Zahl z teilen, was ein Widerspruch zur Vierstelligkeit von z ist. Demnach gibt es keine vierstellige Quadratzahl z, die die Bedingungen (1) und (2) erfüllt, $\square$.

Aufgabe 270935:
Untersuchen Sie, ob es eine natürliche Zahl $n \geq 1$ gibt, für die $2^{n+2} + 3^{2n+1}$ eine Primzahl ist!

Lösung von cyrix:
Da für $n \geq 1$ die Zahl $z := 2^{n+2} + 3^{2n+1} > 3^2 = 9 > 7$, aber wegen

$$z = 4 \cdot 2^n + 3 \cdot 9^n \equiv 4 \cdot 2^n + 3 \cdot 2^n = 7 \cdot 2^n \equiv 0 \pmod 7$$

durch 7 teilbar und damit keine Primzahl ist, gibt es keine solche Zahl.

Aufgabe 280931:
Man nennt drei von 0 verschiedene natürliche Zahlen a, b, c genau dann ein pythagoreisches Zahlentripel, wenn sie die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ erfüllen.
Beweisen Sie, dass in jedem pythagoreischen Zahlentripel mindestens eine der drei Zahlen durch 5 teilbar ist!

Lösung von cyrix:
Sind a und b nicht durch 5 teilbar, lassen sie aber wegen $(5k \pm 1)^2 = 25k^2 \pm 10k + 1$ und $(5k \pm 2)^2 = 25k^2 \pm 20k + 4$ beide die Reste 1 oder 4 bei der Division durch 5.
Damit lässt $a^2 + b^2$ also einen der Reste $1 + 1 = 2$, $1 + 4 = 4 + 1 = 5$ – also 0 – oder $4 + 4 = 8$ – also 3 – bei der Division durch 5. Da aber auch c^2 als Quadratzahl nur einen der Reste 0, 1 oder 4 bei der Division durch 5 lassen kann, fallen der erste und der letzte Fall für den Rest der Summe $a^2 + b^2$ weg und $a^2 + b^2 = c^2$ muss durch 5 teilbar sein, $\square$.

Aufgabe 330935:
Ermitteln Sie alle positiven ganzen Zahlen n mit der Eigenschaft, dass die drei Zahlen $n+1$, $n+10$ und $n+55$ einen gemeinsamen Teiler größer als 1 haben!

Lösung von cyrix:
Sei g ein gemeinsamer Teiler der drei Zahlen. Dann ist auch g ein Teiler von $(n+10)-(n+1)=9$. Damit die drei Zahlen also einen gemeinsamen Teiler größer 1 haben, müssen sie alle drei durch 3 teilbar sein. Dies ist genau für $n=3m-1$ mit einer beliebigen positiven ganzen Zahl m der Fall, denn dann ist $n+1=3m$, $n+10=3m+9=3(m+3)$ und $n+55=3m+54=3(m+18)$; sonst ist keine der Zahlen durch 3 teilbar, sodass insbesondere $n+10$ und $n+1$, also auch alle drei Zahlen gemeinsamen, teilerfremd sind. Die gesuchten Zahlen sind also die der Form $3m-1$ mit positiven ganzen Zahlen m.

Aufgabe 340932:
Beweisen Sie, dass es keine natürliche Zahl n gibt, für die die Zifferndarstellung der Zahl 9^n+1 auf mehr als eine Null enden würde!

Lösung von cyrix:
Würde 9^n+1 auf mindestens zwei Nullen Enden, so wäre es durch 4 teilbar. Es ist aber $9^n-1=9^n-1^n$ durch $9-1=8$, also insbesondere durch 4 teilbar, sodass $9^n+1=(9^n-1)+2$ nie durch 4 teilbar sein kann, $\square$.

Aufgabe 340935:
Man ermittle alle diejenigen positiven ganzen Zahlen n, für die jede der sechs Zahlen

$$n, \quad n+2, \quad n+6, \quad n+8, \quad n+12, \quad n+14$$

eine Primzahl ist.

Lösung von cyrix:
Es ist genau eine der Zahlen n, $n+6=5+(n+1)$, $n+2$, $n+8=5+(n+3)$ und $n+14=10+(n+4)$ durch 5 teilbar, da auch genau eine der fünf aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen n bis $n+4$ durch 5 teilbar ist.

Die sechs Zahlen können also nur dann allesamt Primzahl sein, wenn die 5 unter ihnen ist. Da $n>0$ gilt, kommt dafür nur n oder $n+2$ in Frage. Wäre aber $n+2=5$, so wäre $n+12=15$ keine Primzahl. Also verbleibt nur $n=5$, was wegen $n+2=7$, $n+6=11$, $n+8=13$, $n+12=17$ und $n+14=19$ tatsächlich eine Lösung ist. Es gibt also nur genau ein solches n, nämlich $n=5$.

Aufgabe 340942:
Zeigen Sie, dass die Zahl $z=7+7^3+7^5+7^7+...+7^{93}+7^{95}$ durch 336 teilbar ist!

Lösung von cyrix:
Es ist $z=7\cdot(1+7^2+7^4+7^6+\cdots+7^{94})$ offensichtlich durch 7 teilbar und

$$\frac{z}{7}=49^0+49^1+49^2+49^3+\cdots+49^{47}\equiv 1^0+1^1+1^2+\cdots+1^{47}=48\equiv 0 \pmod{48}$$

durch 48 teilbar, also z durch $7\cdot 48=336$ teilbar, $\square$.

IV.II (Dezimal-)Zahldarstellung, Endziffern, (quadratische) Reste

I Runde 1

Aufgabe V00904:
Für eine Reihe technischer Anwendungen, z. B. für des Rechnen mit elektronischen Rechenmaschinen, ist es erforderlich, die Zahlen im Zweiersystem (Dualsystem), also als Summe von Potenzen der Zahl 2, auszudrücken. Drücken Sie die Zahl 413 im Dualsystem aus!
Verwenden Sie folgende Anleitung!

$$\begin{array}{cccccccccc}
270 = & 1\cdot 2^8 & +0\cdot 2^7 & +0\cdot 2^6 & +0\cdot 2^5 & +0\cdot 2^4 & +1\cdot 2^3 & +1\cdot 2^2 & +1\cdot 2^1 & +0 \\
 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
 & \mathrm{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{L} & \mathrm{L} & \mathrm{L} & 0
\end{array}$$

Lösung von Steffen Polster:
Lösung: $413 = [110011101]_2$

Aufgabe V00907:
Die Quersumme einer zweistelligen Zahl ist 12. Subtrahiert man von dieser Zahl die Zahl, die dieselben Ziffern in umgekehrter Reihenfolge enthält, so erhält man 54. Wie heißt die Zahl?

Lösung von Steffen Polster:
Die gesuchte Zahl z sei $z = 10a + b$. Dann wird für die Ziffern a und b

$$a + 5 = 12 \qquad \text{(I)}$$
$$(10a + 5) - (10b + a) = 54 \qquad \text{(II)}$$

Das Gleichungssystem hat die Lösung $a = 9$ und $b = 3$. Da $93 - 39 = 54$ die Probe besteht, ist 93 die gesuchte Zahl.

Aufgabe V00908:
Zu entziffern ist:

$$a \cdot c \cdot \overline{ac} = \overline{ccc}$$

Gleiche Buchstaben stellen gleiche Ziffern dar.

Lösung von Steffen Polster:
Die Gleichung wird, da $c > 0$ sein muss, zu

$$(10a + c) \cdot a \cdot c = 100c + 10c + c$$
$$(10a + c) \cdot a = 111 = 3 \cdot 37$$

Da $a < 10$ ist, muss somit $a = 3$ sein. Damit ergibt sich $c = 7$. Es ergibt sich somit $3 \cdot 7 \cdot 37 = 777$.

Aufgabe 020914:
Welche zweistelligen Zahlen xy haben ein Quadrat von der Form zxy (x, y und z sind eine der Ziffern 0 bis 9)?

Es ist zu beweisen, dass die Lösung vollständig ist!

Lösung von André Lanka:
Die Ziffer y muss eine der Ziffern 1, 5 oder 6 sein, denn nur bei diesen Ziffern endet ihr Quadrat auf sich selbst ($1 \cdot 1 = 1$, $5 \cdot 5 = 25$ und $6 \cdot 6 = 36$).

Ferner gilt als Obergrenze $xy \leq 31$, da $32^2 = 1024$ und damit vierstellig statt wie gefordert dreistellig.

Als Lösungen für die Aufgabe kommen daher nur die Zahlen 11,15,16,21,25,26 und 31 in Frage. zxy muss als Quadrat auch durch xy teilbar sein, d. h. $z00$ muss ebenfalls durch xy teilbar sein. Damit entfallen 11, 21, 26 und 31. Durch Ausprobieren der drei verbleibenden Zahlen 15, 16 und 25 erhält man die einige Lösung: 25.

Aufgabe 060912:
Bildet man von einer natürlichen Zahl die Quersumme und von dieser (wenn möglich) wieder die Quersumme usw., so erhält man schließlich eine einstellige Zahl, die wir die „letzte Quersumme“ nennen wollen. Dabei wird die Quersumme einer einstelligen Zahl nach Definition der Zahl gleichgesetzt.

Berechnen Sie, wie viel natürliche Zahlen von 1 bis 1000 die „letzte Quersumme“ 9 haben!

Lösung von Manuela Kugel:
Die erste Quersumme Q_n einer ein-, zwei- oder dreistelligen Zahl n kann maximal 27 sei, nämlich für eine Zahl ausschließlich bestehend aus der größten Ziffer 9 $\Rightarrow Q_{999} = 9 + 9 + 9 = 27$. Dies ist gleichzeitig die einzige Zahl, die diese Quersumme hat und ist eine der gesuchten Zahlen, da $Q_{27} = 9$.

Die nächstkleinere erste Quersumme, deren letzte Quersumme 9 ist, ist 18. Danach folgt nur noch die Quersumme 9, deren letzte Quersumme natürlich auch 9 ist. Wir müssen nun also noch alle Zahlen finden, deren Quersumme 9 oder 18 ist.

Im Bereich der ein- und zweistelligen Zahlen sind 9, 18, 27, ..., 81, 90 die einzigen Zahlen mit Quersumme 9 und 99 die einzige Zahle mit Quersumme 18. Dies sind in Summe 11 Zahlen.
Im Bereich 100 bis 199 kommen wir ebenfalls auf 11 solche Zahlen: 108, 117, 126, ..., 171, 180 mit Quersumme 9 sowie 189 und 198 mit Quersumme 18.

Diese Bildungsvorschrift setzt sich in jedem Hunderterbereich mit 11 Zahlen, deren Quersumme 9 oder 18 ist, fort.
Damit ergeben sich $10 \cdot 11 + 1$ Zahlen, deren Quersumme 9, 18 oder 27 und damit deren letzte Quersumme 9 ist.

Alternativ-Lösung von cyrix:
Da eine natürliche Zahl genau dann durch 9 teilbar ist, wenn es ihre Quersumme auch ist, ist die „letzte Quersumme“ einer positiven ganzen Zahl genau dann 9, wenn sie selbst durch 9 teilbar ist. Dies trifft auf genau $\frac{999}{9} = 111$ Zahlen im vorgegebenen Bereich zu, sodass dies die gesuchte Anzahl ist.

Aufgabe 070912:
Es ist x eine (im Dezimalsystem) sechsstellige Zahl, die mit der Ziffer 5 endet. Setzt man diese Ziffer von der sechsten an die erste Stelle, also vor die unverändert gebliebenen fünf übrigen Ziffern, so erhält man eine sechsstellige Zahl, die viermal so groß ist wie x.

Wie lautet die Zahl im Dezimalsystem?

Lösung von MontyPythagoras:
Sei y ein fünfstellige Zahl (f gesuchte Ziffern). Es ist $x = 10y + 5$ Dann gilt:

$$4 \cdot (10y + 5) = 500000 + y \qquad \to \qquad 39y = 499980 \qquad \to \qquad y = 12820$$

Damit lautet die Zahl im Dezimalsystem 128205.

Aufgabe 090914:
Als erste Quersumme einer natürlichen Zahl z sei die in üblicher Weise gebildete Quersumme verstanden. Ist die erste Quersumme von z eine Zahl mit mehr als einer Ziffer, so sei ihre Quersumme als die zweite Quersumme von z bezeichnet.

Beispiele: Die erste Quersumme von 98 ist $9 + 8 = 17$, die zweite Quersumme von 98 ist $1 + 7 = 8$. Die erste Quersumme von 43 ist $4 + 3 = 7$, eine zweite Quersumme von 43 wird nicht erklärt.

Ist die zweite Quersumme von z eine Zahl mit mehr als einer Ziffer, so heiße deren Quersumme die dritte Quersumme von z. In entsprechender Weise werden gegebenenfalls höhere Quersummen erklärt.

a) Ermitteln Sie die Anzahl der natürlichen Zahlen von 10 bis 1000, für die keine zweite Quersumme erklärt ist!

b) Ermitteln Sie die Anzahl der natürlichen Zahlen von 10 bis 1000, für die die zweite, aber nicht die dritte Quersumme erklärt ist!

c) Ermitteln Sie die kleinste natürliche Zahl, für die eine vierte Quersumme erklärt ist!

Lösung von Julia Erhard:

a) Damit die 2. Quersumme nicht erklärt ist, muss die 1. Quersumme kleiner als 10 sein. Betrachtet man nun alle Zahlen, die aus 3 Ziffern gebildet werden können (jeweils alle Ziffern von 0 bis 9), so sind damit auch alle ein- und zweistelligen Zahlen enthalten. Die folgenden Ziffern führen zu einer Quersumme von 0 bis 9:
{0,0,0}, ... {0,0,9} $\Rightarrow$ 10 Möglichkeiten {0,1,1}, ... {0,1,8} $\Rightarrow$ 8 Möglichkeiten
{0,2,2}, ... {0,2,7} $\Rightarrow$ 6 Möglichkeiten {0,3,3}, ... {0,3,6} $\Rightarrow$ 4 Möglichkeiten
{0,4,4}, ... {0,4,5} $\Rightarrow$ 2 Möglichkeiten {1,1,1}, ... {1,1,7} $\Rightarrow$ 7 Möglichkeiten
{1,2,2}, ... {1,2,6} $\Rightarrow$ 5 Möglichkeiten {1,3,3}, ... {1,3,5} $\Rightarrow$ 3 Möglichkeiten
{1,4,4} $\Rightarrow$ 1 Möglichkeit {2,2,2}, ... {2,2,5} $\Rightarrow$ 4 Möglichkeiten
{2,3,3}, ... {2,3,4} $\Rightarrow$ 2 Möglichkeiten {3,3,3} $\Rightarrow$ 1 Möglichkeit
Von diesen 53 Möglichkeiten gibt es 4 Varianten mit 3 gleichen Ziffern, 26 Varianten mit einem gleichen Ziffernpaar und 23 Varianten mit sämtlich unterschiedlichen Ziffern. Die Kombination aus unterschiedlichen Ziffern ergibt jeweils $6 = 3!$, also $23 \cdot 6 = 138$ verschiedene Zahlen; bei einem gleichen Zahlenpaar gibt es je $3 = 3!/2!$, also $26 \cdot 3 = 78$ Zahlen. Insgesamt erhält man somit (da 0 bis 9 nicht, 1000 dafür aber auch noch gezählt wird) die folgende Anzahl gesuchter Zahlen: $4 + 78 + 138 - 10 + 1 = 211$

b) 991 Zahlen werden überhaupt nur betrachtet. 211 bilden nur eine Quersumme. Also gibt es 991 - 211 = 780 Zahlen, die eine zweite Quersumme bilden. Es müssen nur noch die ausgeschlossen werden, die eine dritte Quersumme bilden. Die erste Quersumme kann maximal $27 = 9+9+9$ sein, d. h. die 2. Quersumme ist maximal 10 (genau dann, wenn die 1. Quersumme 19 ist). Und auch nur genau in diesen Fällen ist die 3. Quersumme erklärt. Wir müssen also alle die Zahlen ausschließen, deren 1. Quersumme 19 ist.

Keine zweistellige Zahl hat als Quersumme 19. Die gesuchten Zahlen sind also sämtlich dreistellig. Die Ziffern der gesuchten Zahlen bestehen aus folgenden Kombinationen und deren Vertauschungen: {9,9,1}, {9,8,2}, {9,7,3}, {9,6,4}, {9,5,5}, {8,8,3}, {8,7,4}, {8,6,5}, {7,7,5}, {7,6,6}. Unter diesen 10 Möglichkeiten gibt es je 5 mit verschiedenen Ziffern und mit einem gleichen Ziffernpaar. Damit ergeben sich analog zu a) die daraus zu bildenden Zahlen: $5 \cdot 6 + 5 \cdot 3 = 30 + 15 = 45$ verschiedene Zahlen mit 3. Quersumme.

Die Summe der Zahlen, die eine 2. aber keine 3.Quersumme bilden ist also 780 - 45 = 735

c) Die kleinste natürliche Zahl, für die eine vierte Quersumme erklärt ist, lautet:
19.999.999.999.999.999.999.999

Es gibt keine kleinere, da die Quersumme möglichst gering gehalten werden muss, damit auch die Zahl möglichst klein bleibt. Die kleinste 2.Quersumme kann nur 19 sein, da sie die kleinste 2-stellige Zahl ist, die wieder eine 2-stellige Quersumme hat. Also muss die 1.Quersumme selbst eine Quersumme von 19 haben, wobei wiederum keine kleinere Zahl als 199 dies erfüllen kann. Die 1.Quersumme wird durch Addition aller Ziffern der Zahl gebildet. Die kleinste Zahl, die diese Quersumme bilden kann hat also möglichst wenig Stellen, d. h. von rechts her sind möglichst viele 9er aufzufüllen. Dies führt zu einer Zahl mit 1 beginnend und 22 Neunen.

Aufgabe 100911:
Auf die Frage nach seinem Alter sagte Herr X:

„Die Quersumme der Anzahl meiner Lebensjahre beträgt genau ein Drittel dieser Anzahl. Das Quadrat der Quersumme der Anzahl meiner Lebensjahre ist genau dreimal so groß wie die Anzahl meiner Lebensjahre."

Können die Angaben von Herrn X zutreffen? Wenn ja, wie alt ist Herr X? (Angaben in vollen Lebensjahren)

Lösung von Manuela Kugel:

a) Wenn die Angaben von Herrn X zutreffen, ist das Quadrat der erwähnten Quersumme genau dreimal so groß wie die Anzahl der Lebensjahre und diese wiederum dreimal so groß wie die erwähnte Quersumme. Daher ist das Quadrat dieser Quersumme genau neunmal so groß wie die Quersumme selbst. Daraus folgt, dass 9 die Quersumme und somit 27 Jahre das Alter von Herrn X ist.

b) Ist 27 Jahre das Alter von Herrn X, so ist 9 die Quersumme der Anzahl seiner Lebensjahre, also ein Drittel dieser Anzahl. Ferner ist dann das Quadrat 81 der Quersumme genau dreimal so groß wie die Anzahl der Lebensjahre des Herrn X. Daher treffen die Angaben von Herrn X zu.

Aus b) folgt, dass die Angaben von Herrn X zutreffen können. Hierzu und aus a) folgt: Herr X ist 27 Jahre alt.

Aufgabe 140913:
An eine im dekadischen System geschriebene natürliche Zahl z werden folgende Forderungen gestellt:

(1) Die Quersumme von z soll 11 betragen.

(2) Die Ziffern von z sollen paarweise verschieden sein.

(3) Die Zahl z soll durch 11 teilbar sein.

Ermitteln Sie alle Zahlen z, die die Forderungen (1) bis (3) erfüllen!

Lösung von Manuela Kugel:
Die Teilbarkeitsregel für die Zahl 11 besagt: eine Zahl ist genau dann durch 11 teilbar, wenn ihre alternierende Quersumme durch 11 teilbar ist. Da die Quersumme der Zahl genau 11 sein muss, folgt daraus, dass die alternierende Quersumme 0 oder 11 ist.

Damit kann die gesuchte Zahl nicht zweistellig sein, denn wäre die alternierende Quersumme Null, so müssten beide Ziffern gleich sein, was (2) widerspricht; und die alternierende Quersumme 11 kann bei einer zweistelligen Zahl nicht erreicht werden.

Die gesuchten Zahlen können aber dreistellig sein: genau dann, wenn die mittlere Ziffer Null ist, erhält man für die alternierende Quersumme den Wert der Quersumme $\Rightarrow$ Regel: die erste und dritte Ziffer müssen zusammen 11 ergeben. Dies gilt für 209, 308, 407, 506, 605, 704, 803, 902. Nach einer anderen Regel kann bei einer dreistelligen Zahl keine alternierende Quersumme von 11 bei einer Quersumme von 11 erreicht werden.

Die alternierende Quersumme Null bei einer dreistelligen Zahl mit der Quersumme 11 kann nicht auftreten, da folgendes gelten muss: $a_1 + a_2 + a_3 = 11 \Rightarrow a_1 + a_3 = 11 - a_2$ bzw. $a_1 + a_3 = a_2$. Dies ergibt zusammengefasst: $11 - a_2 = a_2 \Rightarrow a_2 = 5{,}5$.

Bei einer vier- und mehrstelligen Zahl mit Quersumme 11 kann eine alternierende Quersumme 11 nicht auftreten, da mindestens eine Ziffer ungleich Null mit einem negativen Vorzeichen behaftet wird.

Für eine vierstellige Zahl gilt allgemein für die Quersumme und die alternierende Quersumme Null wieder: $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 11 \Rightarrow a_1 + a_3 = 11 - a_2 - a_4$ bzw. $a_1 + a_3 = a_2 + a_4$. Und zusammengefasst: $11 - a_2 - a_4 = a_2 + a_4 \Rightarrow a_2 + a_4 = 5{,}5$, was nicht auftreten kann.

Für eine fünfstellige Zahl gilt nun für die Quersumme und die alternierende Quersumme Null: $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 11 \Rightarrow a_1 + a_3 + a_5 = 11 - a_2 - a_4$ bzw. $a_1 + a_3 + a_5 = a_2 + a_4$. Und zusammengefasst: $11 - a_2 - a_4 = a_2 + a_4 \Rightarrow a_2 + a_4 = 5{,}5$, was nicht auftreten kann.

Die gesuchte Zahl kann nicht sechs- und mehrstellig sein, da bei 6 verschiedenen Ziffern die minimale Quersumme $0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ den Wert 11 übersteigt.

Damit sind die einzigen Lösungen die der dreistelligen Zahlen wie oben angegeben.

Aufgabe 150911:
Ermitteln Sie alle im dekadischen Zahlensystem geschriebenen vierstelligen natürlichen Zahlen, die gleichzeitig folgende Bedingungen erfüllen!

(1) Die Zahl wird mit vier Ziffern geschrieben, die, einzeln für sich gelesen, vier unmittelbar aufeinanderfolgende Zahlen bezeichnen. An die Reihenfolge dieser Ziffern werden hier keine Anforderungen gestellt.

(2) Die Zahl ist durch 99 teilbar.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn eine Zahl die genannten Bedingungen erfüllt, so gilt:
Wegen (1) wird die Zahl mit den Ziffern 0, 1, 2, 3 oder 1, 2, 3, 4 oder 2, 3, 4, 5 oder 3, 4, 5, 6 oder 4, 5, 6, 7 oder 5, 6, 7, 8, oder 6, 7, 8, 9 (in irgendeiner Reihenfolge geschrieben.

Wegen (2) muss die Zahl durch 9 teilbar sein, nach der Teilbarkeitsregel für die 9 muss also ihre Quersumme durch 9 teilbar sein.

Wegen $0 + 1 + 2 + 3 = 5$; $1 + 2 + 3 + 4 = 10$; $2 + 3 + 4 + 5 = 14$; $3 + 4 + 5 + 6 = 18$; $4 + 5 + 6 + 7 = 22$; $5+6+7+8 = 26$; $6+7+8+9 = 30$ trifft das nur zu, wenn die Zahlen die Ziffern 3, 4, 5, 6 (in irgendeiner Reihenfolge enthält.
Nun gilt es genau 24 solche Zahlen , nämlich:

3456, 3465, 3546, 3564, 3645, 3654, 4356, 4365, 4536, 4563, 4635, 4653, 5346, 5364, 5436, 5463, 5634, 5643, 6345, 6354, 6435, 6453, 6534, 6543.

Von ihnen sind nur die 8 Zahlen

3465, 3564, 4356, 4653, 5346, 5643, 6435, 6534, durch 11 teilbar.

II. Diese 8 Zahlen erfüllen die Bedingung (1).
Sie sind ferner durch 9 und 11 und damit da 9 und 11 teilerfremd sind, durch 99 teilbar, erfüllen also auch die Bedingung (2).

Aufgabe 160912:
Jemand behauptet, dass es möglich sei, aus 7 Papierstücken auf folgende Weise genau 1976 Stücke herzustellen:

Man teilt einige der 7 Papierstücke jeweils in genau 7 Teile, danach wieder einige der nunmehr vorhandenen Papierstücke jeweils in genau 7 Teile usw.

Ist es möglich, dass man auf diese Weise, indem man also das beschriebene Verfahren genügend lange fortsetzt, genau 1976 Papierstücke erhält?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen es wäre möglich, auf diese Weise genau 1976 Papierstücke zu erhalten.

Da bei jeder Teilung 6 Papierstücke hinzukommen würden, müsste sich die Zahl 1976 in der Form

$$1976 = 6k + 7 \qquad \text{mit } k \in \mathbb{N}$$

darstellen lassen, d. h. 1976 müsste bei Division durch 6 den gleichen Rest haben wie 7, nämlich 1.
Das ist nicht der Fall, also ist es nicht möglich, auf diese Weise aus 7 Papierstücken genau 1976 Papierstücke zu erhalten.

Oder: Bei der ersten Teilung kommen zu der ursprünglichen Anzahl von 7 Papierstücken 6 weitere hinzu. Da auch bei jeder weiteren Teilung genau 6 Papierstücke hinzukommen, ergibt sich als Summe aller Papierstücke stets eine ungerade Zahl, also niemals die gerade Zahl 1976. Die Behauptung ist somit falsch.

Aufgabe 170913:
Herr A kaufte in einer Buchhandlung einige gleiche Bücher. Er hätte für jedes dieser Bücher einen ganzzahligen Betrag in Mark zu zahlen gehabt, der genau so groß war wie die Anzahl der von ihm gekauften Bücher. Wegen seines Sammeleinkaufs erhielt er jedoch für jedes Buch eine Mark Preisnachlass.

Als er zahlen wollte, stellte er fest, dass er nur 10-Mark-Scheine bei sich hatte; zwar so viele, dass das zum Bezahlen gereicht hätte, doch betrug der Gesamtpreis kein ganzzahliges Vielfaches von 10 Mark. Der Verkäufer konnte ihm auch nicht herausgeben.

Herr B, ein Bekannter von Herrn A, hielt sich zur gleichen Zeit in der Buchhandlung auf. Auch er hatte einige (andere) gleiche Bücher gekauft, und auch bei ihm betrug der Preis jedes einzelnen Buches genau so viel Mark, wie die Anzahl der von ihm gekauften Bücher ausmachte. Er erhielt keinen Preisnachlass.

Da seine Rechnung zusammen mit der von Herrn A einen Betrag ergab, der ausnahmslos mit 10-Mark-Scheinen beglichen werden konnte, bezahlte Herr A denjenigen Teilbetrag für Herrn B mit, der diesem noch fehlte, nachdem er einen möglichst großen Anteil seiner Rechnung mit 10-Mark-Scheinen beglichen hatte.

Wieviel Mark hatte Herr A für Herrn B damit ausgelegt?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, Herr A habe a Bücher gekauft. Dann betrugt der ursprüngliche Preis eines Buches a Mark, nach dem Preisnachlass $(a-1)$ Mark. Herr A hatte demnach $a(a-1)$ Mark zu zahlen.

Nun enden die Produkte zweier aufeinanderfolgende natürlicher Zahlen stets auf eine der Ziffern 0, 2, oder 6, wie sich aus folgender Tabelle ergibt:

Endziffer $a-1$	Endziffer a	Endziffer $a(a-1)$	Endziffer $a-1$	Endziffer a	Endziffer $a(a-1)$
0	1	0	1	2	2
2	3	6	3	4	2
4	5	0	5	6	0
6	7	2	7	8	6
8	9	2	9	0	0

Da der Betrag mit 10-Mark-Scheinen allein nicht beglichen werden konnte, entstand ein Restbetrag von 2 oder 6 Mark.

Herr B hatte, wenn er b Bücher kaufte, insgesamt b^2 Mark zu zahlen. Da der von ihm zu zahlende Betrag zusammen mit dem von Herrn A ein Vielfaches von 10 M ergab, musste dieser Betrag mit der Ziffer 8 oder 4 enden.

Es gibt jedoch keine Quadratzahl mit der Endziffer 8, dagegen gibt es Quadratzahlen mit der Endziffer 4. Demnach hatte Herr B einen Betrag zu zahlen, dessen letzte Ziffer 4 war. Herr A hatte also 4 Mark für Herrn B ausgelegt.

Aufgabe 220911:
Uwe sagt zu Gert: „Ich habe hier eine zweistellige Zahl z, deren Ziffern beide von 0 verschieden sind. Wenn ich diese Ziffern in umgekehrter Reihenfolge schreibe und dahinter die Quersumme von z setze, dann erhalte ich das Quadrat von z.“

Gert findet ohne Benutzung der Zahlentafel eine Zahl z, die diese Eigenschaften hat.

Zeigen Sie, dass aus Uwes Angaben die Zahl z ohne Benutzung der Zahlentafel eindeutig ermittelt werden kann, und geben Sie z an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Zehner- bzw. Einerziffer einer Zahl z mit den geforderten Eigenschaften seien a bzw. b. Dann hat die Quersumme $a+b$ dieselbe Einerziffer wie die Zahl z^2 und daher auch wie die b^2. Somit muss a die Einerziffer von b^2-b sein.

Außer $b=0$ scheiden damit auch $b=1{,}5{,}6$ aus, da sie auf $a=0$ führen würden. Für die übrigen Möglichkeiten wird in der folgenden Tabelle geprüft, ob z^2 die durch Hintereinanderschreiben von b,a und $a+b$ erhaltene Zahl z' ist:

b	b^2	b^2-b	a	z	z^2	z'
2	4	2	2	22	484	224
3	9	6	6	63	3969	369
4	16	12	2	24	576	426
7	49	42	2	27	729	729
8	64	56	6	68	4624	8614
9	81	72	2	29	841	9211

Damit ist $z = 27$ als einzige Lösung ermittelt.

Aufgabe 230912:
Ermitteln Sie alle diejenigen zweistelligen natürlichen Zahlen x und y, die folgende Bedingungen erfüllen:

(1) Die Zahl y entsteht aus x durch Vertauschen der beiden Ziffern.

(2) Es gilt $x + y = 121$.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Bedingung (1) wird genau dann erfüllt, wenn

$$x = 10a + b, \qquad y = 10b + a \tag{3}$$

mit zwei natürlichen Zahlen a,b gilt, für die $1 \leq a \leq 9$ und $1 \leq b \leq 9$ (4) gilt. Hiermit wird (2) genau dann erfüllt, wenn a und b außer (4) auch

$$10a + b + 10b + a = 121 \qquad \text{oder, gleichwertig hiermit} \qquad 11 \cdot (a + b) = 121 \quad , \quad a + b = 11 \tag{5}$$

erfüllen.

Da (4) und (5) genau durch die in der folgenden Tabelle angegebenen natürlichen Zahlen a,b erfüllt werden, folgt nach (3), dass genau die anschließend angegebenen Zahlen x,y die geforderten Eigenschaften haben.

a	b	x	y	a	b	x	y
2	9	29	92	3	8	38	83
4	7	47	74	5	6	56	65
6	5	65	56	7	4	74	47
8	3	83	38	9	2	92	29

Aufgabe 290911:
Für das Quadrieren von zweistelligen Zahlen, die mit der Ziffer 5 enden, gibt es folgende einfache Regel:

Man multipliziere die Ziffer an der Zehnerstelle mit derjenigen Zahl, die um 1 größer ist, und schreibe hinter das Produkt die Ziffern 25.

Beispielsweise zur Berechnung von 25^2 führt die Regel wegen $2 \cdot 3 = 6$ auf das Ergebnis 625.

Beweisen Sie diese Regel!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Sind a, 5 die Ziffern der zu quadrierenden Zahl, so lautet diese $10a + 5$. Ihr Quadrat ist

$$(10a + 5)^2 = 100a^2 + 100a + 25 = 100 \cdot a \cdot (a + 1) + 25$$

also die nach der angegebenen Regel zu bildende Zahl.

Aufgabe 330916:
Bekanntlich gilt $2^{10} = 1024$.

Formulieren Sie ein Computerprogramm, mit dessen Hilfe man den kleinsten natürlichen Exponent $p > 10$ ermitteln kann, für den die Zahl 2^p ebenfalls auf die Ziffern $\dots 024$ endet! Begründen Sie, dass das von Ihnen formulierte Programm diese Aufgabe löst!

Hinweis: Es ist zu beachten, dass für die im Rechenweg vorkommenden Zahlen bei weithin üblicher Computernutzung Einschränkungen der Stellenzahl auftreten.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Ein BASIC-Programm der geforderten Art ist zum Beispiel: 10 P = 10
20 Z = 24
30 P = P+1
40 Z = Z*2
50 IF Z > 999 THEN Z = Z-1000
60 IF Z <> 24 THEN GOTO 30
70 PRINT P

Zu Werten des Exponenten p werden die letzten drei Ziffern der Potenz 2^p in Gestalt einer ganzen Zahl z mit $0 \leq z \leq 999$ gebildet. Ausgehend nämlich von den Anfangswerten $p = 10, z = 024$ (Zeilen 10, 20) werden die nächsten Werte schrittweise gefunden:

In jedem Schritt wird p um 1 erhöht (Zeile 30) und z verdoppelt (Zeile 40) sowie, falls dabei zunächst ein nicht mehr dreistelliger Wert entstand, nur dessen drei Endziffern beibehalten. Hierzu genügt es, 1000 zu subtrahieren (Zeile 50); denn wenn für den Vorgängerwert z schon $0 \leq z < 1000$ galt, so ist der in Zeile 40 zunächst entstandene Wert $2 \cdot z < 2000$, und galt für ihn außerdem $1000 \leq 2 \cdot z$, so erfüllt der durch Subtraktion von 1000 entstehende Wert nun wieder $0 \leq 2 \cdot -1000 < 1000$.

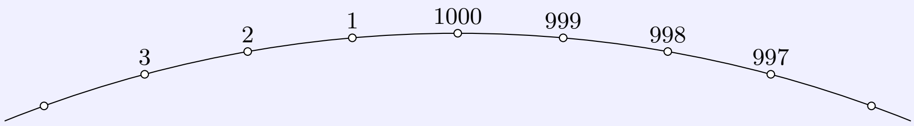
Durch das schrittweise Reduzieren werden die vielstelligen Zahlen 2^p vermieden, wie es nach dem „Hinweis“ erforderlich ist.

Diese Schritte werden wiederholt, solange die Ziffernfolge $z = 024$ nicht nicht wieder erreicht wurde (Zeile 60). Andernfalls endet der Ablauf mit der Ausgabe des gesuchten Exponenten p (Zeile 70).

Das Ende muss erreicht werden (es tritt keine „Endlos-Schleife“ auf). Man kann diese Feststellung als Ergebnis eines „Probelaufs mit Risiko“ erhalten (und damit zugleich den gesuchten Exponenten $p = 110$ finden); man kann auch beweisen, dass für jedes $p \geq 3$ die Ziffernfolge der drei Endziffern von 2^p bei einem größeren p wiederkehren muss.

II Runde 2

Aufgabe 130924:
Man denke sich eine Kreislinie in 1000 gleich lange Teilbögen zerlegt und jeden der 1000 Teilpunkte der Reihe nach mit den natürlichen Zahlen 1 bis 1000 bezeichnet.



Es sollen nun nacheinander die Zahl 1 und jede weitere 15. Zahl, also 1, 16, 31, 46, ..., durchgestrichen werden. Dabei sind bei wiederholten „Umläufen“ auch die bereits gestrichenen Zahlen mitzuzählen. Dieses Durchstreichen ist so lange fortzusetzen, bis nur noch Zahlen durchgestrichen werden müssten, die bereits gestrichen sind.
Ermitteln Sie die Anzahl aller Zahlen, die bei diesem Verfahren nicht durchgestrichen werden!

Lösung von cyrix:
Damit eine Zahl $1 \leq n \leq 1000$ gestrichen wird, muss es nicht-negative ganze Zahlen u und q geben, sodass $n + 1000 \cdot u = 1 + 15 \cdot q$ ist. Dabei beschreibt u die Anzahl der bisher vollständigen Umläufe um den Kreis und $1 + 15 \cdot q$ beschreibt jede 15. Zahl, beginnend mit 1, wenn einfach immer weiter gezählt wird.

Betrachtet man, welchen Rest beide Seiten dieser Gleichung bei der Teilung durch 5 lassen, so muss dies 1 sein, da $15q$ durch 5 teilbar ist. Da aber auch $1000u$ durch 5 teilbar ist, muss auch n den Rest 1 bei der Teilung durch 5 lassen. Es gibt also eine ganze Zahl k mit $0 \leq k < 200$, sodass $n = 5k + 1$ gilt. Setzt man dies in die Gleichung ein, erhält man, dass die Zahl $5k + 1$ genau dann gestrichen wird, wenn es nicht-negative ganze Zahlen q und u gibt, sodass $5k + 1 + 1000u = 1 + 15q$ bzw. nach Subtraktion von 1 und Division durch 5 die äquivalente Gleichung $k + 200u = 3q$ erfüllt ist.

Diese nicht-negativen ganzen Zahlen q und u existieren aber für jedes nicht-negative k: Ist k durch 3 teilbar, wähle man $u = 0$ und $q = \frac{k}{3}$. Lässt k den Rest 1 bei der Division durch 3, so ist $k + 200$ durch 3 teilbar und man kann $u = 1$ sowie $q = \frac{k+200}{3}$ wählen. Und lässt abschließend k den Rest 2 bei der Division durch 3, ist $k + 400$ durch 3 teilbar, sodass man $u = 2$ und $q = \frac{k+2\cdot 200}{3}$ wählen kann.

Zusammen erhält man also, dass genau die Zahlen $1 \leq n \leq 1000$ gestrichen werden, die sich als $n = 5k+1$ mit einer nicht-negativen ganzen Zahl k mit $0 \leq k < 200$ darstellen lassen. Das sind aber genau 200 Stück, sodass von den 1000 Zahlen genau 800 nicht gestrichen werden.

Aufgabe 180921:
Eine Familie fährt mit der Straßenbahn. Der Vater zieht an der Zahlbox vier Fahrscheine, die durch sechsstellige Zahlen fortlaufend nummeriert sind.
Der jüngste Sohn meint: „Gleichgültig, wie die erste der vier Zahlen lautet, eine unter diesen Zahlen muss eine durch 4 teilbare Quersumme haben.“
Der ältere Sohn behauptet dagegen, dass unter vier aufeinanderfolgenden sechsstelligen Zahlen nicht notwendig eine Zahl vorkommen muss, deren Quersumme durch 4 teilbar ist.
Wer von beiden hat recht?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es kommt z. B. unter den sechsstelligen Zahlen

$$1000008, \quad 100009, \quad 100010 \quad \text{und} \quad 10011$$

keine Zahl vor, deren Quersumme durch 4 teilbar ist. Also hat der ältere Sohn recht.

Aufgabe 180924:
Man ermittle alle dreistelligen natürlichen Zahlen z, die die folgenden Eigenschaften (1) bis (4) haben:
(1) z ist eine Primzahl.
(2) Jede Ziffer von z stellt eine Primzahl dar.
(3) Die Quersumme z' von z ist eine zweistellige Primzahl.
(4) Die Quersumme z'' von z' ist eine Primzahl.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, eine dreistellige Zahl z hat die Eigenschaften (1) bis (4).
Wegen (2) können dann in ihr nur folgende Zahlen als Ziffer vorkommen: 2, 3, 5 und 7.
Davon können wegen (1) die Zahlen 2 und 5 nicht als Endziffern auftreten. Also endet z auf eine Ziffer 3 oder 7.
Da die Quersumme z' eine zweistellige Primzahl ist, die als Summe von drei Summanden gebildet wird, von denen keiner größer als 7 ist, kann z' nur eine der Zahlen 11; 13 oder 17; 19 sein. Von ihnen hat nur $z' = 11$ eine Primzahl, nämlich die Zahl 2, als Quersumme.
Also gilt $z' = 11$.

Sei nun die letzte Ziffer von z die Zahl 7. Dann muss die Summe der durch die beiden ersten Ziffern dargestellten Zahlen 4 betragen. Von den möglichen Zerlegungen der Zahl vier in zwei natürliche Zahlen als Summanden (nämlich $0+4$; $1+3$; $2+2$; $3+1$ und $4+0$) erfüllt nur $2+2$ die Bedingung (2). Damit erhält man $z = 227$.

Sei nun 3 die letzte Ziffer von z. Dann muss die Summe der durch die ersten beiden Ziffern von z dargestellten Zahlen 8 betragen.
Von den möglichen Zerlegungen der Zahl 8 in zwei natürliche Zahlen als Summanden (nämlich $0+8$; $1+7$; $2+6$; $3+5$; $4+4$; $5+3$; $6+2$; $7+1$; $8+0$) erfüllen nur $3+5$ und $5+3$ die Bedingung (2).
Das führt auf die Zahlen $z = 353$ und $z = 533$.
Wegen $533 = 13 \cdot 14$ erfüllt die Zahl 533 nicht die Bedingung (1).
Also können höchstens die Zahlen 227 und 353 die Bedingungen der Aufgabe erfüllen.
Sie erfüllen sie tatsächlich; denn 227 und 353 sind Primzahlen. (Beweis: 227 ist durch keine Primzahl $p < 17$ teilbar, und es gilt $17^2 > 227$, 353 ist durch keine Primzahl $p < 19$ teilbar, und es gilt $19^2 > 353$.)
Ihre Ziffern 2, 2, 7 bzw. 3, 5, 3 sind ebenfalls Primzahlen. Das gilt auch für ihre Quersumme 11. Schließlich ist die Quersumme 2 von 11 eine Primzahl, wie es gefordert war.

Aufgabe 230921:
Ermitteln Sie alle diejenigen zweistelligen natürlichen Zahlen x, für die die Summe aus x und der durch Vertauschen der Ziffern von x entstehenden Zahl y eine Quadratzahl ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Sind a und b die Ziffern einer zweistelligen Zahl x, so gilt

$$1 \leq a \leq 9; \quad 0 \leq b \leq 9; \qquad \text{und} \qquad x = 10a + b \tag{1}$$

Durch Vertauschen der Ziffern entsteht daraus $y = 10b + a$. Die Summe

$$x + y = 11a + 11b = 11(a + b)$$

ist genau dann eine Quadratzahl, wenn der Primfaktor 11 und weitere Primfaktoren jeweils in gerader Anzahl in $a + b$ enthalten sind. Wegen (1), also $1 \leq a + b \leq 18$, kann $a + b$ außer dem Primfaktor 11 keinen weiteren Primfaktor enthalten. Also ist $x + y$ genau dann eine Quadratzahl, wenn $a + b = 11$ gilt.
Das trifft unter den Bedingungen (1) genau für die Wertetabelle $(a; b)$ der folgenden Tabelle zu. Daher haben genau die hierzu angegebenen Zahlen x die verlangte Eigenschaft.

a	2	3	4	5	6	7	8	9
b	9	8	7	6	5	4	3	2
x	29	38	45	56	65	74	83	92

Aufgabe 290923:
Man ermittle die kleinste natürliche Zahl n, für die (bei Darstellung im dekadischen Positionssystem) 5 sowohl Teiler der Quersumme von n als auch Teiler der Quersumme von $n + 1$ ist.

Lösung von cyrix:
Endet die Zahl n auf genau k Neunen und besitzt davor die Ziffer $z < 9$ (ggf. mit führender Null), so endet die Zahl $n+1$ auf genau k Nullen und besitzt davor die Ziffer $z+1 \leq 9$. (Die Ziffern vor z bzw. $z+1$ sind in beiden Zahlen identisch.) Seien q_n und q_{n+1} die Quersummen von n bzw. $n+1$. Dann gilt also $q_{n+1} = q_n - k \cdot 9 + 1$.

Damit beide Quersummen durch 5 teilbar sind, muss also $k \cdot 9 - 1$ durch 5 teilbar sein. Dies tritt zum ersten mal für $k = 4$ auf, sodass jede Zahl n, die der Aufgabenstellung genügt, auf mindestens vier Neunen enden muss.

Tatsächlich erfüllen die ersten dieser Zahlen, nämlich 9999, 19999, 29999 und 39999 nicht die Bedingung, dass ihre Quersumme durch 5 teilbar ist. Die nächste solche Zahl $n = 49999$ erfüllt aber die Aufgabenstellung, da sowohl ihre Quersumme 40 als auch die Quersumme 5 von $n+1 = 50000$ durch 5 teilbar sind.

Aufgabe 310921:
a) Geben Sie eine natürliche Zahl n an, für die (im dekadischen Positionssystem) die Bedingung erfüllt ist, dass sowohl die Quersumme von n als auch die Quersumme von $n+1$ durch 10 teilbar sind!
Überprüfen Sie, dass die von Ihnen angegebene Zahl diese Bedingung erfüllt!
b) Geben Sie die kleinste natürliche Zahl an, die die in a) genannte Bedingung erfüllt!
Beweisen Sie für die von Ihnen angegebene Zahl, dass es sich um die kleinste Zahl mit dieser Bedingung handelt!

Lösung von cyrix:
Endet die Zahl n nicht auf die Ziffer Neun, so ist die Quersumme von $n+1$ genau um eins größer als die von n, da sich nur die letzte Ziffer um eins erhöht und alle anderen gleich bleiben. Also können nicht beide Quersummen durch 10 teilbar sein. endet dagegen n auf genau k Neunen, so werden diese beim Übergang zu $n+1$ alle zu Nullen, während die Ziffer vor diesen Neunen (ggf. eine führende Null) um eins erhöht. Die Quersumme von $n+1$ erhält man also aus der von n durch Subtraktion von $k \cdot 9 - 1$.

Damit beide Quersummen durch 10 teilbar sind, muss also sowohl die von n als auch $k \cdot 9 - 1$ durch 10 teilbar sein. Das kleinste k, welches die letzte Bedingung erfüllt, ist, $k = 9$. Also muss n auf mindestens neun Neunen enden. Damit hat n mindestens die Quersumme 81, also, da es eine durch 10 teilbare Quersumme haben soll, von mindestens 90.

Die kleinste Zahl, die auf mindestens neun Neunen endet und Quersumme mindestens 90 hat, ist 9.999.999.999. Diese endet aber auf genau zehn Neunen, sodass die Quersumme ihres Nachfolgers sich auf 1 reduziert, was nicht durch 10 teilbar ist.

Die nächstgrößere, also zweitkleinste Zahl, die auf mindestens neun Neunen endet und Quersumme mindestens 90 hat, ist $n = 18.999.999.999$. Tatsächlich ist die Quersumme von n gleich $1 + 8 + 9 \cdot 9 = 90$ und die von $n+1 = 19.000.000.000$ gleich $1 + 9 + 9 \cdot 0 = 10$, sodass dieses n die Bedingung erfüllt und das kleinste solche ist.

Aufgabe 330921:
Multipliziert man eine dreistellige natürliche Zahl mit 7, so entsteht eine Zahl, die auf die Ziffern ...638 endet.
Wie heißt die dreistellige Zahl?

Lösung von Steffen Polster:
Die gesuchte Zahl sei [abc].

Die letzte Ziffer des Ergebnisses kann nur 8 sein, wenn mit einer $c = 4$ multipliziert wurde. Alle Produkte von 7 mit einer anderen einstelligen Zahl enden mit einer anderen Ziffer.
Der Zehner 3 enthält damit aus dem Produkt $7 \cdot 4 = 28$ einen Übertrag 2. Somit muss $b = 3$ sein. Analog schließt man auf $a = 2$. Die gesuchte Zahl ist 234 und es ist $234 \cdot 7 = 1638$.

III Runden 3 & 4

Aufgabe V10935:
Mit welcher Ziffer endet die Zahl 2^{100}? Begründen Sie das!

Lösung von svrc:
Es ist $2^{10} = 1024 \equiv 4 \pmod{10}$. Damit ist $2^{20} \equiv 16 \equiv 6 \pmod{10}$.
Dann gilt $2^{25} = 2^5 \cdot 2^20 \equiv 2 \cdot 6 \equiv 2 \pmod{10}$.
Damit folgt $2^{50} \equiv 4 \pmod{10}$ und somit $2^{100} \equiv 16 \equiv 6 \pmod{10}$.
Das bedeutet, dass die Zahl 2^{100} auf der Ziffer 6 endet.

Alternativ-Lösung von cyrix:
Es ist $2^4 = 16$, endet also auf die Ziffer 6. Da $6 \cdot 6 = 36$ auch auf die Ziffer 6 endet, gilt dies auch für jede Potenz einer Zahl, welche auch auf die Ziffer 6 endet, insbesondere also auch für $2^{100} = (2^4)^{25}$.

Aufgabe 030931:
Gesucht sind alle aus verschiedenen Ziffern bestehenden dreistelligen Zahlen, bei denen die Summe aller aus je zwei ihrer Ziffern zu bildenden zweistelligen Zahlen gleich dem Doppelten der Zahl ist.

Lösung von Manuela Kugel:
Die gesuchte Zahl z kann man aus ihren Ziffern wie folgt schreiben:

$$z = 100a + 10b + c \qquad (\text{mit } 0 \leq a, b, c \leq 9 \text{ sowie } a \neq 0)$$

Jede zweistellige Zahl aus den Ziffern von z ergibt sich als $10x + y$ mit $x \in a, b, c, y \in a, b, c$ und $x \neq y$.
Die Gleichung lautet nun mit den 6 zweistelligen Zahlen aus den Ziffern von z:

$$2 \cdot z = 2 \cdot (100a + 10b + c) = (10a + b) + (10a + c) + (10b + a) + (10b + c) + (10c + a) + (10c + b)$$

Zusammengefasst ergibt sich: $200a + 20b + 2c = 22a + 22b + 22c$ und weiter: $178a = 2b + 20c$ bzw. nach dem Kürzen: $89a = b + 10c$.
Schätzt man den rechten Term nach oben ab, d. h. setzt man $b = 9$ und $c = 9$, so kommt man auf die Ungleichung $89a \leq 99$ und mithin $a \leq 1$. Dies impliziert $a = 1$ und ergibt für die beiden restlichen Ziffern $b = 9$ sowie $c = 8$.
Die gesuchte Zahl lautet also $z = 198$ und ist die einzige Zahl, die den geforderten Bedingungen genügt.

Aufgabe 050931:
Beweisen Sie die folgende Behauptung!
Jede nicht durch 9 teilbare (ganzzahlige) Quadratzahl lässt bei Division durch 3 den Rest 1.

Lösung von Kitaktus:
Sei n^2 eine nicht durch 9 teilbare Quadratzahl. Dann ist n nicht durch 3 teilbar (sonst wäre n^2 durch 9 teilbar).
n lässt bei Division durch 3 also den Rest 1 oder 2 und lässt sich daher schreiben als

$$n = 3m + 1 \qquad \text{oder} \qquad n = 3m + 2$$

mit passend gewähltem ganzzahligem m. Dann ist

$$n^2 = (3m+1)^2 = 9m^2 + 6m + 1 = 3(3m^2 + 2m) + 1 \qquad \text{oder}$$

$$n^2 = (3m+2)^2 = 9m^2 + 12m + 4 = 3(3m^2 + 4m + 1) + 1$$

In beiden Fällen lässt n^2 bei Division durch 3 den Rest 1.

Aufgabe 050933:
Die positive ganze Zahl x ende auf die Ziffern a und b (in dieser Reihenfolge).
Man ermittle alle geordneten Paare (a, b), für die x^2 auf dieselben Ziffern a und b (auch in Bezug auf die Reihenfolge) endet!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es sei

$$x = 100c + d, \qquad d = 10a + b$$

und a, b, c natürliche Zahlen mit $0 \leq a \leq 9$, $0 \leq b \leq 9$. Dann gilt

$$(100c + d)^2 = 100e + d \qquad \text{, e natürliche Zahl}$$

$$10000c^2 + 200cd + d^3 = 100e + d$$
$$100e = 10000c^2 + 200cd + d^2 - d$$
$$e = 100c^2 + 2cd + \frac{d^2 - d}{100}$$

Es ist e genau dann ganzzahlig, wenn $d(d-1)$ durch 100 teilbar ist. Da d und $d-1$ nicht gleichzeitig durch 5 teilbar sein können, muss einer der beiden Faktoren durch 25 teilbar sein. Wegen $d < 100$ ergeben sich genau folgende Möglichkeiten dafür

d	$d-1$	$100\|(d^3-d)$	d	$d-1$	$100\|(d^3-d)$
0	-1	ja	1	0	ja
25	24	ja	26	25	nein
50	49	nein	51	50	nein
75	74	nein	76	75	ja

Folgende geordnete Paare (a,b) und nur diese erfüllen die gestellte Bedingung: $(0;0), (0;1), (2;5)$ und $(7;6)$.

Aufgabe 070931:
Es sind ohne Benutzung der Zahlentafel alle vierstelligen Quadratzahlen zu ermitteln, deren erste zwei und letzte zwei Grundziffern jeweils gleich sind.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es sei x die erste und y die letzte Ziffer einer derartigen Quadratzahl z. Dann gilt

$$z = 1000x + 100x + 10y + y = 1100x + 11y = 11(100x + y)$$

mit $1 \leq x \leq 9$ und $0 \leq y \leq 9$.
Daraus folgt $11|z$ und, da z Quadratzahl und 11 Primzahl ist, sogar $112|z$. Somit muss gelten $11|100x+y$.
Nun ist aber $100x + y = 99x + x + y$, und somit $11|x + y$.
Wegen der Einschränkungen für x und y kommt nur $1 \leq x + y \leq 18$ und damit $x + y = 11$ in Frage.

Daraus folgt $100x + y = 99x + x + y = 11(9x + 1)$ und somit $z = 11^2(9x + 1)$.

Da z Quadratzahl ist, muss auch $9x+1$ Quadratzahl sein. Wegen $1 \leq x \leq 9$ ist dies (wie man z. B. durch Berechnung der Zahlen $9x+1$ für $x = 1, ..., 9$ feststellen kann) nur für $x = 7$ der Fall.

Umgekehrt führt $x = 7$ in der Tat wegen $9 \cdot 7 + 1 = 64$ auf die Quadratzahl $z = 121 \cdot 64 = 7744 = 88^2$. Diese ist somit die einzige vierstellige Quadratzahl mit den geforderten Bedingungen.

Aufgabe 110931:
Günter erzählt:
„Die sechsstellige Telefonnummer unserer Schule merke ich mir folgendermaßen:
Ich schreibe unsere zweistellige Hausnummer hin. Dahinter schreibe ich die Quersumme der Hausnummer und füge nun jeweils die Summe aus den letzten beiden hingeschriebenen Zahlen an, bis sechs Ziffern dastehen. Übrigens kommt in der Telefonnummer unserer Schule keine Eins vor, und unsere Hausnummer ist eine durch 3 teilbare Zahl.“
Wie lautet Günters Hausnummer und wie die Telefonnummer seiner Schule?

Lösung von ZePhoCa:
Wenn die Quersumme der ersten beiden Zahlen zweistellig wäre, dann wäre sie höchstens 18 und damit enthielte die Telefonnummer eine 1, was nicht sein kann. Also ist die Quersumme einstellig. Da auch die Hausnummer keine 1 enthalten darf, bleiben für die Hausnummer noch die Möglichkeiten:
$24, 27, 30, 33, 36, 42, 45, 54, 60, 63, 72, 90$ mit den Quersummen $6, 9, 3, 6, 9, 6, 9, 9, 6, 9, 9, 9$ übrig.
In allen Fällen außer bei 30,33,60 und 90 ist die erste Ziffer der nächsten Summe eine 1, was nicht geht. Bei 33 ergibt sich 336915, bei 60 ergibt sich 606612 und bei 90 ergibt sich 909918 was nicht geht. Also ist die Hausnummer 30 und die Telefonnummer 303369.

Aufgabe 130931:
Wie man an Beispielen sehen kann, gibt es Paare (x, y), worin x und y je eine zweistellige natürliche Zahl mit folgender Eigenschaft sind:
Tauscht man die Ziffern dieser Zahl gegeneinander aus und addiert 9 zu der so entstandenen Zahl, so erhält man die andere Zahl des Paares. (Ein solches Paar ist z. B. (25; 61), denn es gilt 52+9 = 61 und 16+9 = 25.)
Hinweis: Entsteht beim Vertauschen der Ziffern eine mit 0 beginnende Ziffernfolge (etwa aus 30 die „03“), so ist statt dessen für die weiteren Operationen die (einstellige) Zahl zu nehmen, die nach dem Streichen der Null entsteht (in unserem Beispiel „3“).
Wir nennen die Zahlen x, y eines solchen Paares $(x; y)$ einander zugeordnet.

a) Geben Sie alle zweistelligen Zahlen an, die als Elemente solcher Paare auftreten können!
b) Ermitteln Sie alle zweistelligen Zahlen, die auf diese Weise sich selbst zugeordnet sind!

Lösung von cyrix:
a) Sind $10a + b$ und $10c + d$ mit a,b,c,$d \in \{0; 1; 2; \cdot; 9\}$ und $a \neq 0$, $c \neq 0$ (sonst würde es sich nicht um zweistellige Zahlen handeln) die beiden Zahlen eines solchen Paares, so gilt $10c + d = 10b + a + 9$. Wegen $1 \leq a < 10$ ist $10 \leq a + 9 < 19$, sodass die Zehnerziffer von $10b + a + 9$ also $b + 1$ und die Einerziffer $a + 9 - 10 = a - 1$ ist. Wir erhalten also $c = b + 1$ und $d = a - 1$. Da $a \geq 1$ ist, ist d auf jeden Fall eine Ziffer, sodass hier keine Zusatzbedingungen entstehen. Jedoch erhalten wir wegen $c = b + 1$, dass $b \leq 8$ sein muss, denn für $b = 9$ erhielte man $c = 10$, was keine Ziffer mehr ist.

Tatsächlich sind diese Bedingungen nicht nur notwendig, sondern sogar schon hinreichend: Wendet man das Verfahren auf $10c+d$ an, so erhält man die Zahl $10d+c+9 = 10(a-1)+(b+1)+9 = 10a-10+b+9+1 = 10a + b$; also die Ausgangszahl.
Es können also genau diejenigen zweistelligen Zahlen Elemente eines solchen Paares sein, die als Einerziffer keine 9 besitzen.

b) Mit obigen Bezeichnungen muss dann $a = c = b + 1$ und $b = d = a - 1$ gelten, sodass dies nur für die Zahlen 21; 32; 43; 54; 65; 76; 87 und 98 der Fall sein kann. Die Probe bestätigt jeweils, dass diese Zahlen sich auch jeweils selbst zugeordnet werden.

Aufgabe 140931:
Gesucht ist die kleinste natürliche Zahl x (wobei x nicht unbedingt einstellig sein soll), die folgende Eigenschaft hat:
Die Zahl $83 \cdot x$ (das Produkt aus 83 und x) hat als Darstellung die Ziffernfolge $3x8$ (d. h., vor die Ziffer oder Ziffernfolge der Zahl x ist eine 3, hinter die so gebildete Ziffernfolge eine 8 zu setzen).

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Genau dann ist x die gesuchte Zahl, wenn es die kleinste natürliche Zahl ist, zu der eine natürliche Zahl $n \geq 2$ mit $10^{n-2} \leq x < 10^{n-1}$ und

$$83x = 3 \cdot 10^n + 10x + 8$$

oder, äquivalent hierzu, mit $73x = 3 \cdot 10^n + 8$ existiert.
Untersucht man die Zahlen 308, 3008, 30008, 300008, 3000008 der Reihe nach auf Teilbarkeit durch 73, so ergibt sich, dass von ihnen nur die Zahl
Daher ist $x = 41096$ die gesuchte Zahl, und es gilt $83 \cdot 41096 = 3410968$.

Aufgabe 150934:
Man ermittle alle Möglichkeiten, die Zahl 60 als Summe von mindestens zwei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen darzustellen.

Lösung von cyrix:
1. Fall:
Die Anzahl der Summanden ist ungerade, d. h. $2k + 1$ für eine positive ganze Zahl k. Ist n der dann existierende mittlere Summand, so lässt sich die Summe schreiben als

$$(n-k) + (n-(k-1)) + \cdots + (n-1) + n + (n+1) + \cdots + (n+(k-1)) + (n+k) = n \cdot (2k+1)$$

Dabei muss $n \geq k$ gelten, damit auch der kleinste Summand $n - k$ eine nicht-negative ganze Zahl ist. Soll diese Summe den Wert 60 ergeben, muss also $2k + 1$ ein ungerader Teiler von 60 sein und $n = \frac{60}{2k+1} > k$ gelten.

Damit ergeben sich folgende Lösungen:
Für $2k + 1 = 3$ ist $n = 20 > 1$, also $60 = 19 + 20 + 21$ und
für $2k + 1 = 5$ ist $n = 12 > 2$, also $60 = 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15$.
Für den einzigen weiteren ungeraden Teiler $2k + 1 = 15$ von 60 erhält man $n = 4$, was aber kleiner ist als $k = 7$. Auf diese Weise erhielte man nur die Summe

$$60 = (-3) + (-2) + (-1) + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11$$

welche auch negative Summanden enthält, also keine Lösung im Sinne der Aufgabenstellung ist.

2. Fall:
Die Anzahl der Summanden ist gerade, d. h. $2k$ für eine positive ganze Zahl k. Insbesondere enthält die Summe dann k ungerade Summanden, ist also nur dann – wie 60 – gerade, wenn k auch gerade ist, sich also als $2m$ mit einer positiven ganzen Zahl m schreiben lässt. Die Summe besteht demnach aus $4m$ Summanden.
Sei der kleinste dieser Summanden mit $n - (2m - 1)$ bezeichnet, wobei $n \geq 2m - 1$ eine natürliche Zahl sei. Dann gilt

$$60 = (n - (2m-1)) + \cdots + (n + (2m-1)) + (n + (2m)) = 4mn + 2m = 2m(2n+1)$$

Insbesondere ist $2n+1$ ein ungerader Teiler von 60, sodass $2m = \frac{60}{2n+1} \leq n+1$ gilt. Dies liefert die folgende Lösung:
Für $2n+1 = 15$ ist $2m = 4 \leq 8$ und wir erhalten $60 = 4+5+6+7+8+9+10+11$.
Sonst ist $2n+1 \leq 5$, also $n \leq 2$, aber $2m = \frac{60}{2n+1} \geq 12$, sodass man wieder nur ganzzahlige, aber keine natürlichen Lösungen erhält.

Aufgabe 180932:
In der Aufgabe der 2. Stufe war zu zeigen, dass unter vier aufeinanderfolgenden sechsstelligen Zahlen nicht notwendig eine sein muss, deren Quersumme durch 4 teilbar ist.
Man ermittle die größte natürliche Zahl n, für die die folgende Aussage wahr ist:
„Es gibt n aufeinanderfolgende natürliche Zahlen, unter denen sich keine befindet, deren Quersumme durch 4 teilbar ist.“

Lösung von cyrix:
Die gesuchte Zahl n ist 6. Dazu zeigen wir zuerst, dass es 6 aufeinanderfolgende natürliche Zahlen gibt, deren Quersummen allesamt keine durch 4 teilbaren Zahlen sind, und dann, dass für je 7 aufeinanderfolgende natürliche Zahlen (mindestens) eine dieser eine durch 4 teilbare Quersumme besitzt.
Wir betrachten die natürlichen Zahlen 4997, 4998, 4999, 5000, 5001 und 5002. Diese 6 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen besitzen die Quersummen 29, 30, 31, 5, 6 und 7, welche alle nicht durch 4 teilbar sind.
Es können sich 7 aufeinanderfolgende natürliche Zahlen auf nur maximal zwei „Zehner“, also Intervalle der Form $[k\cdot 10+0; k\cdot 10+9]$ mit nicht-negativem ganzem k, aufteilen. Dann müssen aber in mindestens einem solchen Intervall 4 aufeinanderfolgende dieser Zahlen befinden, deren Quersummen 4 aufeinanderfolgende natürliche Zahlen sind, wovon eine durch 4 teilbar ist.

Aufgabe 180935:
Beweisen Sie, dass für jede Primzahl p der Rest, den p bei Division durch 30 lässt, entweder 1 oder eine Primzahl ist!

Lösung von cyrix:
Ist p gleich 2, 3 oder 5, so ist der Rest von p bei der Division durch 30 offensichtlich p selbst und damit eine Primzahl. Andernfalls ist p weder durch 2, 3 noch 5 teilbar.
Sei nun $p > 5$ eine solche Primzahl und $0 \leq r < 30$ sein Rest bei der Teilung durch 30. Also gibt es eine ganze Zahl q mit $p = 30\cdot q + r$. Dann kann wegen $30 = 2\cdot 3\cdot 5$ auch r nicht durch 2, 3 bzw. 5 teilbar sein, denn sonst wäre es $30\cdot q + r$, und damit p, auch.
Es verbleiben als mögliche Reste also nur diejenigen Zahlen $0 \leq r < 30$, die selbst weder durch 2, 3 noch 5 teilbar sind. Dies sind aber (wegen $7^2 = 49 > 30$) genau die Primzahlen und 1, $\Box$.

Aufgabe 190934:
a) Beweisen Sie, dass es im dekadischen Zahlensystem keine dreistellige Primzahl gibt, deren drei einzelne Ziffern sich so anordnen lassen, dass sie drei unmittelbar aufeinanderfolgende natürliche Zahlen darstellen!
b) Beweisen Sie, dass es für eine geeignete natürliche Zahl $n \geq 3$ im Zahlensystem mit der Basis n eine dreistellige Primzahl gibt, deren drei einzelne Ziffern sich so anordnen lassen, dass sie drei unmittelbar aufeinanderfolgende natürliche Zahlen darstellen!

Lösung von cyrix:
a) Es seien $a-1$, a, $a+1$ die drei aufeinanderfolgenden Ziffern der dreistelligen Zahl p in irgendeiner Reihenfolge. Dann ist die Quersumme von p gleich $(a-1)+a+(a+1) = 3a$ durch 3 teilbar, also auch p, sodass p keine Primzahl sein kann.

b) Es ist mit $n = 8$ die Zahl $123_8 = 1\cdot 8^2 + 2\cdot 8 + 3 = 83$ eine Primzahl.

Aufgabe 200934:
Ermitteln Sie alle Paare $(a;b)$ natürlicher Zahlen a, b mit $a > b$, für die die folgenden Aussagen (1), (2), (3) zutreffen!
(1) Die Zahl a ist (in dekadischer Ziffernschreibweise) zweistellig, die Zahl b ebenfalls.
(2) Vertauscht man die Ziffern von a miteinander, so erhält man b.
(3) Subtrahiert man b^2 von a^2, so erhält man eine Quadratzahl.

Lösung von cyrix:
Nach (1) und (2) existieren positive Ziffern $c > d$ mit $c,d \in \{1,2,\ldots,9\}$, sodass $a = 10c+d$ und $b = 10d+c$ gilt. Dann ist

$$a^2 - b^2 = (100c^2 + 20cd + d^2) - (100d^2 + 20dc + c^2) = 99(c^2 - d^2)$$

eine Quadratzahl, also wegen $9 = 3^2$ auch $11(c^2 - d^2) = 11(c-d)(c+d)$. Da 11 eine Primzahl ist, muss mindestens einer der Faktoren $(c-d)$ bzw. $(c+d)$ auch durch 11 teilbar sein, damit in der Primfaktorzerlegung des Produkts die Primzahl 11 nicht nur einmal vorkommt.

Da aber $0 < c-d \leq 9-1 = 8 < 11$ ist, muss $c+d$ durch 11 teilbar sein. Wegen $0 < c+d < 10+10 = 20 < 22$ muss damit $c+d = 11$ gelten. Dann ist $11 \cdot (c-d) \cdot 11 = 11^2 \cdot (c-d)$, sodass auch $c-d$ eine Quadratzahl sein muss. Wegen $0 < c-d \leq 9-1 = 8$ kommen also nur 1 und 4 als Quadratzahlen in Frage, sodass sich folgende zwei Fälle ergeben:

1. Fall: $c - d = 1$. Dann ist wegen $c + d = 11$ also $c = 6$ und $d = 5$. Es ergeben sich $a = 65$ und $b = 56$. Tatsächlich ist $a^2 - b^2 = 65^2 - 56^2 = 4225 - 3136 = 1089 = 33^2$ eine Quadratzahl, sodass $(a,b) = (65,56)$ eine Lösung ist.

2. Fall: $c - d = 4$. Dann wäre aber wegen $c + d = 11$ also $2c = (c+d) + (c-d) = 15$ die Ziffer c keine natürliche Zahl, was ein Widerspruch ist.
Demzufolge gibt es keine weitere neben der einen angegebenen Lösung.

Aufgabe 210935:
Beweisen Sie den folgenden Satz!
Die Summe zweier Quadratzahlen ist genau dann durch 11 teilbar, wenn jede dieser beiden Quadratzahlen durch 11 teilbar ist.

Lösung von cyrix:
Man überzeugt sich leicht durch Einsetzen der Zahlen ± 5, ± 4, ± 3, ± 2, ± 1 und 0, dass Quadratzahlen bei der Teilung durch 11 nur die Reste 3, 5, 9, 4, 1 und 0 lassen. Damit die Summe zweier Quadratzahlen durch 11 teilbar ist, muss die Summe ihrer Reste durch 11 teilbar sein.
Dies ist aber offenbar nur genau dann der Fall, wenn beide Quadratzahlen den Rest 0 lassen, also durch 11 teilbar sind, $\square$.

Aufgabe 220931:
Man ermittle alle diejenigen (im dekadischen System geschriebenen) dreistelligen Zahlen z, die die Gleichung $z = (a+b)^c$ erfüllen, wobei a, b und c in irgendeiner Reihenfolge die Ziffern von z sind.

Lösung von cyrix:
Es ist $c > 0$, da für alle a, b gilt, dass $(a+b)^0 = 1$, also nicht dreistellig ist. Es ist wegen $a + b \leq 18$ auch $c > 1$, da sonst $z = (a+b)^c$ nicht dreistellig wäre.

Ist $c = 2$, so folgt wegen $10^2 = 100 \leq z = (a+b)^2$, dass $10 \leq a+b \leq 18$ ist. Die auftretenden Quadratzahlen lauten $10^2 = 100$, $11^2 = 121$, $12^2 = 144$, $13^2 = 169$, $14^2 = 196$, $15^2 = 225$, $16 = 256$, $17^2 = 289$ und

$18^2 = 324$. Von diesen fallen 100, 144, 169 und 196 heraus, da sie keine Ziffer $c = 2$ enthalten. Für die übrigen ist zu prüfen, ob die anderen beiden Ziffern neben der Zwei (bzw. einer der Zweien) als a und b gewählt werden können. Dies ist weder bei $121 = 11^2$ (wegen $1 + 1 \neq 2$), $256 = 16^2$ (wegen $5 + 6 \neq 16$) noch $324 = 18^2$ (wegen $3+4 \neq 18$) der Fall, wohl aber bei $17^2 = 289$ (wegen $8+9 = 17$). Also ist $z = 289$ die einzige Lösung dieses Falls.

Ist $c = 3$, so folgt wegen $4^3 = 64 < z < 1000 = 10^3$, dass $5 \leq a + b \leq 9$ ist. Die betreffenden Kubikzahlen $5^3 = 125$, $6^3 = 216$, $7^3 = 343$, $8^3 = 512$ und $9^3 = 729$ enthalten bis auf $343 = 7^3$ keine Ziffer $c = 3$, können also keine Lösungen sein. Dagegen ist wegen $3 + 4 = 7$ tatsächlich $z = 343$ damit die einzige Lösung für diesen Fall.

Ist $c = 4$, so folgt wegen $3^4 = 81 < z < 6^4 = 1296$, dass $4 \leq a+b \leq 5$ ist. Die relevanten vierten Potenzen $4^4 = 256$ und $5^4 = 625$ enthalten keine Ziffer $c = 4$, sodass es hier keine Lösung gibt.

Ist $c = 5$, so folgt wegen $2^5 = 32 < z < 4^5 = 1024$, dass $a + b = 3$ sein müsste. Jedoch enthält $3^5 = 243$ keine Ziffer $c = 5$, sodass es in diesem Fall keine Lösung gibt.

Ist $c = 6$, so folgt wegen $2^6 = 64 < z < 4^6 = 4096$, dass $a + b = 3$ sein müsste, was aber wegen $3^6 = 729$, was keine Ziffer $c = 6$ enthält, zu keiner Lösung führt.

Ist $c \geq 7$, so folgt wegen $z < 1000 < 2187 = 3^7 \leq 3^c$, dass $a + b \leq 2$ sein muss. Da aber $1^c = 1 < 100 \leq z$ ist, muss immer auch $1 < a + b$, also in diesen Fällen zusammen immer $a + b = 2$ gelten. Wegen $2^{10} = 1024 > z$ muss also $c \leq 9$ sein, sodass noch die Fälle $2^7 = 128$, $2^8 = 256$ und $2^9 = 512$ zu betrachten, die jedoch keine Lösungen liefern, weil jeder der Potenzen jeweils nicht das zugehörige c als Ziffer enthält.

Also gibt es insgesamt genau zwei Lösungen, nämlich $z_1 = 289 = (8 + 9)^2$ und $z_2 = 343 = (3 + 4)^3$.

Aufgabe 220934:
Jens behauptet, dass man alle natürlichen Zahlen mit Ausnahme von endlich vielen als Summe von zwei Quadratzahlen darstellen kann.
Dirk behauptet dagegen, dass es unendlich viele natürliche Zahlen gibt, die man nicht als Summe von zwei Quadratzahlen darstellen kann.
Wer hat recht?

Lösung von cyrix:
Dirk hat recht:
Das Quadrat einer geraden Zahl ist immer durch 4 teilbar, das Quadrat einer ungeraden lässt aber wegen $(2m+1)^2 = 4m^2+4m+1 = 4(m^2+m)+1$ bei der Teileung durch 4 immer den Rest 1. Also lässt der Rest der Summe zweier Quadratzahlen bei der Teilung durch 4 immer den Rest $0 + 0 = 0$, $0 + 1 = 1 + 0 = 1$ oder $1 + 1 = 2$, nie aber den Rest 3, sodass alle unendlich vielen natürlichen Zahlen der Form $4k + 3$ sich nicht also Summe zweiter Quadratzahlen darstellen lassen.

Aufgabe 250932:
Ermitteln Sie alle diejenigen Paare (a, b) von zweistelligen Zahlen a und b, für die folgendes gilt:
Bildet man durch Hintereinanderschreiben von a und b in dieser Reihenfolge eine vierstellige Zahl z, so ist $z = (a + b)^2$.

Lösung von cyrix:
Es ist nach Aufgabenstellung $z = 100a + b = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ bzw. $a^2 + (2b - 100)a + b(b - 1) = 0$.
Für $b \geq 26$ ist aber

$$0 = a^2 + (2b - 100)a + b(b - 1) \geq a^2 - 48a + 26 \cdot 25 = (a - 24)^2 - 24^2 + 650 = (a - 24) + 650 - 576 > 0$$

was ein Widerspruch darstellt. Also muss $b \leq 25$ gelten.

Es ist b die aus den letzten zwei Stellen einer Quadratzahl gebildeten Zahl. Wegen $(10n+m)^2 = 100n^2 + 20nm + m^2$ und $0^2 = 00$, $1^2 = 01$, $2^2 = 04$, $3^2 = 09$, $4^2 = 16$, $5^2 = 25$, $6^2 = 36$, $7^2 = 49$, $8^2 = 64$ und $9^2 = 81$ ist die vorletzte Stelle einer Quadratzahl nur dann ungerade, wenn die letzte Stelle eine 6 ist. Ist die vorletzte Stelle gerade, verbleiben als mögliche Endziffern 0, 1, 4 und 5.

Damit schränken sich die Möglichkeiten für b auf die Elemente der Menge {16, 20, 21, 24, 25} ein. Diese werden nun der Reihe nach untersucht:
Wäre $b = 16$, so müsste $z = 100a + 16 = (a+16)^2 = a^2 + 32a + 256$ gelten, was äquivalent ist zu $a^2 - 68a + 240 = 0$ bzw. $a = 34 \pm \sqrt{34^2 - 240}$. Es ist $34^2 - 240 = (30+4)^2 - 240 = 900 + 240 + 16 - 240 = 916$, also $30 < \sqrt{34^2 - 240} < 31$, sodass es keine Lösung mit $b = 16$ gibt.

Wäre $b = 20$, so wäre $z = 100a + 20$ zwar durch 5, aber nicht 25 teilbar, was ein Widerspruch zu $z = (a+b)^2$ ist.

Für $b = 21$ müsste $100a + 21 = (a+21)^2 = a^2 + 42a + 441$, also $a^2 - 58a + 420 = 0$ und damit $a = 29 \pm \sqrt{29^2 - 420} = 29 \pm 841 - 420 = 29 \pm \sqrt{421}$ gelten, was wegen $20 < \sqrt{421} < 21$ wieder keine Lösung besitzt.

Wäre $b = 24$, dann $100a + 24 = (a+24)^2 = a^2 + 48a + 576$ und $a^2 - 52a + 552 = 0$, also $a = 26 \pm \sqrt{26^2 - 552}$. Es ist $26^2 - 552 = 900 - 2 \cdot 30 \cdot 4 + 4^2 - 552 = 900 - 240 + 16 - 552 = 124$, also $11 < \sqrt{26^2 - 552} < 12$, sodass es auch in diesem Fall keine Lösung gibt.

Abschließend sei $b = 25$. Dann ist $100a + 25 = (a+25)^2 = a^2 + 50a + 625$ und damit $a^2 - 50a + 600 = 0$, was die Lösungen $25 \pm \sqrt{25^2 - 600} = 25 \pm \sqrt{25} = 25 \pm 5$, d. h. $a_1 = 20$ und $a_2 = 30$ besitzt.
Tatsächlich ist $(20+25)^2 = 45^2 = 2025$ und $(30+25)^2 = 55^2 = 3025$, sodass $(a,b) \in \{(20, 25), (30, 25)\}$ die gesuchte Lösungsmenge ist.

Aufgabe 300934:
Man ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen n zwischen 100 und 400, für die die Summe s der Ziffern bei Darstellung von n im Dezimalsystem (die übliche „Quersumme") gleich der Summe t der Ziffern ist, die bei der Darstellung von n im System mit der Basis 9 auftreten.
Hinweis:
Um eine Summe von Ziffern bilden zu können, ist natürlich jede einzelne Ziffer als Zahl aufzufassen. Das ist ohne Missverständnis möglich, da die für das System der Basis 9 notwendige Ziffern 0, 1,... , 8 dort dieselben Zahlen darstellen wie im Dezimalsystem.

Lösung von cyrix:
Es sei $n = z_2 \cdot 10^2 + z_1 \cdot 10 + z_0$ die Darstellung von n im Dezimalsystem und $n = n_2 \cdot 9^2 + n_1 \cdot 9 + n_0$ die Darstellung im System zur Basis 9. Dabei reichen wegen $9^3 = 729 > 400 \geq n$ auch drei Ziffern aus. Dann ist $s = z_2 + z_1 + z_0$ und $t = n_2 + n_1 + n_0$.

Wegen $10 \equiv 1 \pmod 9$ ist $n \equiv z_2 \cdot 1^2 + z_1 \equiv 1 + z_0 = s \pmod 9$ und analog wegen $9 \equiv 1 \pmod 8$ auch $n \equiv n_2 \cdot 1^2 + n_1 \cdot 1 + n_0 = t \pmod 8$.

Gilt $s = t$, so ist also $n - s = n - t$ sowohl durch 9 als auch 8, also wegen ggT(9,8) = 1 auch durch $9 \cdot 8 = 72$ teilbar. Es folgt $n - s = n - t \in \{144,216,288,360\}$.
Es ist $n \leq 400 < 404 = 5 \cdot 81 - 1$, also $n < 488_9$. Damit gilt $t < 4 + 8 + 8 = 20$, also $t \leq 19$.

Fall 1: $n - s = n - t = 144$.

Dann ist $145 \leq n \leq 144 + 19 = 163$, also $s \leq 1 + 5 + 9 = 15$ und damit $145 \leq n \leq 144 + 15 = 159$. Es ist $145 = 171_9$ und $159 = 186_9$, also $9 \leq t \leq 16$. Damit ergibt sich $149 \leq n \leq 159$. Für $n = 149$ ist $s = 14$ und wegen $n = 175_9$ dann $t = 13$, also keine Lösung.
Für $n = 150 + z_0$ ist $s = 6 + z_0$. Ist $0 \leq z_0 \leq 2$, so $176_9 \leq n \leq 178_9$, also $s \leq 8$ und $t \geq 14$, sodass es keine Lösung gibt. Für $3 \leq z_0 \leq 9$ dagegen ist $n = 1 \cdot 9^2 + 8 \cdot 9 + (z_0 - 3)$, sodass sich $t = 1 + 8 + (z_0 - 3) = 6 + z_0 = s$ ergibt.
Also sind alle $n \in \{153,154,155,156,157,158,159\}$ Lösungen.

Fall 2: $n - s = n - t = 216$.
Dann ist $217 \leq n \leq 216 + 19 = 235$ und damit $s \leq 2 + 2 + 9 = 13$, d. h. $n \leq 216 + 13 = 229$. Es ist $217 = 261_9$ und $229 = 274_9$, also $9 \leq t$ und damit $225 \leq n \leq 229$.
Es ist $n = 220 + z_0$ mit $z_0 \geq 5$ und $n = 2 \cdot 9^2 + 7 \cdot 9 + (z_0 - 5)$, also $s = 2 + 2 + z_0 = 4 + z_0$ und $t = 2 + 7 + (z_0 - 5) = z_0 + 4 = s$, sodass alle Werte $n \in \{225,226,227,228,229\}$ Lösungen sind.

Fall 3: $n - s = n - t = 288$.
Dann ist $289 \leq n \leq 288 + 19 = 307$. Es ist $289 = 351_9$ und $307 = 371_9$, also $9 \leq t \leq 17$. Damit ist $297 \leq n \leq 305$. Ist $300 \leq n \leq 300$, so also $s \leq 3 + 0 + 5 = 8$, was wegen $t \geq 9$ keine Lösungen liefert.
Also ist $297 \leq n \leq 299$ und damit $s \geq 18$, während $297 = 360_9$ und $299 = 362_9$, also $t \leq 3 + 6 + 2 = 11$, sodass es hier keine Lösung gibt.

Fall 4: $n - s = n - t = 360$.
Dann ist $361 \leq n \leq 379$. Dann ist $s \geq 10$, also $370 \leq n \leq 379$, d. h. $n = 370 + z_0$ und $s = 10 + z_0$. Es ist $370 = 451_9$, also für $0 \leq z_0 \leq 7$ ist $n = 4 \cdot 9^2 + 5 \cdot 9 + (z_0 + 1)$ und $t = 4 + 5 + z_0 + 1 = 10 + z_0 = s$, sodass alle $n \in \{370,371,372,373,374,375,376,377\}$ Lösungen sind.
Ist dagegen $n = 370 + z_0$ mit $8 \leq z_0 \leq 9$, also weiterhin $s = 10 + z_0$, so ist $n = 4 \cdot 9^2 + 6 \cdot 9 + (z_0 - 8)$ und damit $t = 4 + 6 + z_0 - 8 = 2 + z_0 \neq s$, sodass es keine weiteren Lösungen gibt.

Zusammenfassend erfüllen genau die folgenden n die Bedingung der Aufgabenstellung:
$n \in \{153,154,155,156,157,158,159,225,226,227,228,229,370,371,372,373,374,375,376,377\}$

Aufgabe 320934:
Ist p eine Primzahl, so sei M_p die Menge aller derjenigen Zahlen z, die sich mit positiven ganzen Zahlen x und y in der Gestalt $z = x^2 + p \cdot y^2$ darstellen lassen.
Beweisen Sie, dass für jede Primzahl p die folgende Aussage $(*)$ gilt!
Wenn eine Zahl z der Menge M_p angehört, dann gehört auch die Zahl z^2 der Menge M_p an. $(*)$

Lösung von cyrix:
Es sei $z \in M_p$, sodass es also positive ganze Zahlen x und y mit $z = x^2 + p \cdot y^2$ gibt. Dann ist

$$z^2 = x^4 + 2px^2y^2 + p^2y^4 = x^4 - 2px^2y^2 + p^2y^4 + 4px^2y^2 = |x^2 - py^2|^2 + p \cdot (2xy)^2$$

Offensichtlich sind mit x und y auch $|x^2 - py^2|$ und $2xy$ ganze Zahlen. Mit $x,y > 0$ ist auch $2xy > 0$.
Nach Definition ist $|x^2 - py^2| \geq 0$. Es kann aber nicht $x^2 - py^2 = 0$ gelten, da sonst $p = \frac{x^2}{y^2}$, also $\sqrt{p} = \frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$ folgen würde, was ein Widerspruch ist.
Also ist $x^2 - py^2 \neq 0$ und damit $|x^2 - py^2| > 0$, sodass auch $z^2 \in M_p$ folgt, $\square$.

Aufgabe 330932:
Für jede positive ganze Zahl n denke man sich nach folgender Vorschrift eine weitere Zahl n' gebildet:
Aus der Zifferndarstellung von n im Dezimalsystem wird die erste Ziffer weggenommen und stattdessen hinter die letzte Ziffer angefügt.
Dann sei n' die Zahl mit der entstandenen Zifferndarstellung. Untersuchen Sie, ob es durch 7 teilbare Zahlen n gibt, für die $n' = n : 7$ gilt!

Lösung von Nuramon:
Wir schreiben n in der Form $n = a \cdot 10^x + b$, wobei $a \in \{1, \ldots, 9\}, x,b \in \mathbb{N}$ und $b < 10^x$ sei. Dann ist $n' = 10b + a$.
Damit $n' = n : 7$, also $7 \cdot (10b + a) = a \cdot 10^x + b$ gilt, muss demnach $a(10^x - 7) = 69b$ gelten.

Wir wählen $a = 1$ und suchen ein $x \in \mathbb{N}$, für das $10^x - 7$ durch $69 = 3 \cdot 23$ teilbar ist. Da $10^x - 7 \equiv 1^x - 1 \equiv 0 \pmod 3$ immer erfüllt ist, genügt es ein x zu finden mit $10^x \equiv 7 \pmod{23}$. Nach dem kleinen Satz von Fermat gilt $1 \equiv 10^{22} \pmod{23}$. Multiplikation mit 7 liefert $7 \equiv (7 \cdot 10) \cdot 10^{21} \equiv 10^{21} \pmod{23}$. Also können wir $x = 21$ wählen.

Für $b = \frac{10^x - 7}{69}$ gilt offenbar $b < 10^x$, so dass wir schließen können, dass $n = 10^{21} + \frac{10^{21} - 7}{69}$ eine Zahl mit den geforderten Eigenschaften ist.

Aufgabe 330944:
Jemand findet die Angabe

$$22! = 11240007277 * *607680000$$

Darin sind auch die zwei durch $*$ angedeuteten unleserlichen Ziffern. Er möchte diese Ziffern ermitteln, ohne die Multiplikationen vorzunehmen, die der Definition von 22! entsprechen.
Führen Sie eine solche Ermittlung durch und begründen Sie sie! Dabei darf verwendet werden, dass die angegebenen Ziffer korrekt sind.
Hinweis: Für jede positive ganze Zahl n wird $n!$ definiert als das Produkt aller positiven ganzen Zahlen von 1 bis n.

Lösung von cyrix:
Es sei a die vordere und b die hintere der beiden unleserlichen Ziffern. Da 22! durch 9 teilbar ist, muss ihre Quersumme durch 9 teilbar sein. Sie lautet $1+1+2+4+7+2+7+7+a+b+6+7+6+8 = 58+a+b$, sodass wegen $0 \leq a + b \leq 18$ dann $a + b \in \{5,14\}$ gilt.

Weiterhin ist 22! durch 11 teilbar, sodass ihre alternierende Quersumme durch 11 teilbar ist. Diese lautet $1-1+2-4+0-0+0-7+2-7+7-a+b-6+0-7+6-8 = -22-a+b$, sodass $a - b$ durch 11 teilbar ist, was wegen $-9 \leq a - b \leq 9$ auf $a - b = 0$ und damit $a = b$ führt.

Da es keine Lösung in natürlichen Zahlen für $a + b = 5$ und $a = b$ gibt, muss $a + b = 14$ und damit $a = b = 7$ gelten. Dies sind die gesuchten Ziffern.

IV.III Diophantische Gleichungen

I Runde 1

Aufgabe 330913:
Für welche ganzen, nicht negativen Zahlen t ist $z = \sqrt{t + \sqrt{t}}$ eine rationale Zahl, für welche nicht?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

I Für $t = 0$ ist $z = \sqrt{0 + \sqrt{0}} = 0$, also eine rationale Zahl.

II Angenommen, für eine ganze Zahl $t > 0$ wäre z rational. Aus dieser Annahme folgt, dass auch die Zahlen $z^2 = t + \sqrt{t}$ und somit $\sqrt{t} = z^2 - t$ rationale wären.

Also wäre $t = m^2$ mit einer positiven ganzen Zahl m. Mit dieser wäre demnach $z = \sqrt{m^2 + m}$, woraus ebenso folgt, dass auch $m^2 + m$ eine Quadratzahl sein müsste.

Wegen $m^2 < m^2+m < (m+1)^2$ liegt aber m^2+m zwischen zwei aufeinanderfolgenden Quadratzahlen und ist somit selbst keine Quadratzahl.

Dieser Widerspruch zeigt, dass die Annahme, z wäre rational, falsch war; d. h., es ist bewiesen: Für alle ganzen Zahlen $t > 0$ ist z keine rationale Zahl.

II Runde 2

Aufgabe 080923:
Geben Sie alle Paare (x, y) natürlicher Zahlen an, für die $x^3 - y^3 = 999$ ist!

Lösung von Nuramon:
Offenbar erfüllt jede Lösung $x > y$. Es gibt also ein positives $z \in \mathbb{N}$ mit $x = y + z$. Das führt zur äquivalenten Gleichung $z(z^2 + 3yz + 3y^2) = 999$.
Es muss also z ein Teiler von $999 = 3^3 \cdot 37$ sein. Da $z(z^2 + 3yz + 3y^2)$ genau dann durch 3 teilbar ist, wenn z durch drei teilbar ist und weil $z \leq z^2 + 3yz + 3y^2$ gilt, bleiben nur noch die Möglichkeiten $(z,z^2 + 3yz + 3y^2) = (3, 333)$ und $(z,z^2 + 3yz + 3y^2) = (9, 111)$ übrig.

1. Fall: $(z,z^2 + 3yz + 3y^2) = (3, 333)$
Dann gilt $9+9z+9y^2 = 333$, also $y^2+3y = 108$. Die einzige natürliche Lösung dieser Gleichung ist $y = 9$. Das führt zur Lösung $(x,y) = (12,9)$.

2. Fall: $(z,z^2 + 3yz + 3y^2) = (9, 111)$
Dann ist $81 + 27y + 3y^2 = 111$, also $y^2 + 9y = 10$, also $y = 1$. Somit ist $(x,y) = (10,1)$ eine Lösung.
Insgesamt gibt es also genau zwei Lösungspaare, nämlich (12,9) und (10,1).

Aufgabe 110922:
Ermitteln Sie alle geordneten Paare (a, b) ganzer Zahlen a und b $(b \neq 0)$ mit folgender Eigenschaft:
Ersetzt man den Zähler a des Bruches $\frac{a}{b}$ durch die Summe aus a und einer geeigneten natürlichen Zahl n $(n \neq 0)$ und ersetzt man zugleich den Nenner b dieses Bruches durch das Produkt aus b und der gleichen Zahl n, so erhält man einen Bruch, der dem zu Anfang genannten Bruch $\frac{a}{b}$ gleich ist.

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:
Gesucht sind Zahlentripel (a,b,n), die die Gleichung

$$\frac{a}{b} = \frac{a+n}{bn}$$

erfüllen. b kann gekürzt werden und ist somit beliebig wählbar. Nach Umformung erhalten wir

$$(a-1)(n-1) = 1.$$

Da Lösungen in $\mathbb{Z}$ gesucht sind, folgt daraus $a - 1 = n - 1 = \pm 1$. Also sind wegen $n \neq 0$ die Tripel durch $(2,b,2), b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ gegeben.

Aufgabe 110924:
Beweisen Sie den folgenden Satz!
Sind p_1 und p_2 Primzahlen, für die $3 < p_1 < p_2$ gilt, dann gibt es stets zwei natürliche Zahlen a und b, so dass die Gleichungen

$$(1) \quad a+b=p_2 \qquad \text{und} \qquad (2) \quad a-b=p_1$$

gleichzeitig erfüllt sind und das Produkt $a \cdot b$ durch 6 teilbar ist.

Lösung von ZePhoCa:
Addition von (1) und (2) ergibt $2a = p_1 + p_2$, Subtraktion ergibt $2b = p_2 - p_1$.

Setze also $a = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)$ und $b = \frac{1}{2}(p_2 - p_1)$.
Weil p_1,p_2 Primzahlen größer als 2 mit $p_2 > p_1$ sind, gilt $a,b \in \mathbb{N}$.

Außerdem ist $ab = \frac{1}{4}(p_1 + p_2)(p_2 - p_1)$. Da p_i Primzahlen mit $p_i > 3$ sind, sind die p_i nicht durch 2 teilbar. Dann ist aber entweder $p_1 + p_2$ oder $p_2 - p_1$ durch 3 teilbar. Außerdem ist einer der Faktoren $(p_2 \pm p_1)$ durch 4 und einer durch 2 teilbar.
Damit ist $(p_1 + p_2)(p_2 - p_1)$ durch 24 teilbar, also ab durch $24/4 = 6$.

Aufgabe 150921:
Klaus hat bei einer Hausaufgabe $4^2 - 3^2$ auszurechnen. Ihm fällt dabei auf, dass das Ergebnis 7 gleich der Summe der beiden benutzten Zahlen 4 und 3 ist. Als er seine Entdeckung an den Zahlen 10 und 11 überprüft, stellt er fest, dass auch hier $11^2 - 10^2 = 21 = 11 + 10$ ist.
Ermitteln Sie alle Paare (a, b) natürlicher Zahlen mit $a > b$, für die die (positive) Differenz der Quadrate der beiden Zahlen gleich der Summe beider Zahlen ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Laut Aufgabenstellung sind alle Paare (a,b) mit a, b natürlich und $a > b$ zu ermitteln, für die $a^2 - b^2 = a + b$ gilt.
Nun ist nach einer binomischen Formel $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$, und daher ist die geforderte Eigenschaft gleichwertig mit $(a + b)(a - b) = a + b$.
Wegen a, b natürlich und $a > b$, ist $a + b \neq 0$. Also ist die genannte Eigenschaft weiterhin gleichwertig mit $a - b = 1$, d. h. die gestellte Bedingung wird genau von den Paaren (a, b) natürlicher Zahlen erfüllt, für die a um 1 größer ist als b.

Aufgabe 190924:
Ermitteln Sie alle diejenigen natürlichen Zahlen x, für die folgendes gilt!
(1) x ist das Quadrat einer natürlichen Zahl.
(2) Vergrößert man x um 24, so erhält man das Quadrat einer natürlichen Zahl.
(3) Vermindert man x um 24, so erhält man das Quadrat einer natürlichen Zahl.

Lösung von cyrix:
Es sei nach (1) $x = n^2$ und nach (2) $x + 24 = n^2 + 24 = (n + s)^2 = n^2 + 2sn + s^2$ mit positiven ganzen Zahlen n und s. Es folgt $24 = 2sn + s^2$ und $s^2 = 24 - 2sn = 2(12 - sn)$, sodass s^2 und damit s gerade sowie $s \geq 2$ ist.
Weiterhin ist nach (3) $x \geq 24$, also $n \geq 5$ und damit $s^2 \leq 24 - 2 \cdot 2 \cdot 5 = 4$, also auch $s \leq 2$. Man erhält, dass $s = 2$ und damit $n = \frac{24-s^2}{2s} = \frac{20}{4} = 5$ sein muss. Es ist $x = n^2 = 25$ also die einzig mögliche Lösung.

Tatsächlich ist nicht nur $x = 25 = 5^2$ das Quadrat einer natürlichen Zahl (1), sondern auch $x^2 + 24 = 59 = 7^2$ (2) und $x^2 - 24 = 1 = 1^2$ (3), sodass $x = 25$ tatsächlich auch Lösung (und damit die einzige) ist.

Aufgabe 200921:
Ermitteln Sie die größte Primzahl p, für die ein Tripel (a, b, c) von natürlichen Zahlen a, b und c so existiert, dass $(a + p)(b + p)(c + p) = 1980$ gilt!
Ermitteln Sie zu dieser Primzahl p alle verschiedenen zugehörigen Tripel (a, b, c) mit der genannten Eigenschaft!

Lösung von cyrix:
Bemerkung: In dieser Lösung wird die Menge der natürlichen Zahlen mit $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ angenommen, wie es die Aufgabe vermutlich voraussetzt.

Es sei o. B. d. A. $a \leq b \leq c$ und damit auch $a + p \leq b + p \leq c + p$.
Es wird p maximal, wenn auch $a + p$ seinen größtmöglichen Wert annimmt. Wegen $13^3 = 169 \cdot 13 = 2197 > 1980$ muss dann $a + p < 13$, also $a + p \leq 12$ gelten. Es ist $1980 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$, sodass für $a + p = 12 = 2^2 \cdot 3$ auch $(b + p)(c + p) = 3 \cdot 5 \cdot 11$. Eine Zerlegung dieses Produkts in zwei Faktoren besitzt aber immer mindestens einen Faktor, der höchstens 11 beträgt, was im Widerspruch dazu steht, dass $a + p$ den kleinsten Wert der drei Faktoren $a + p$, $b + p$, $c + p$ annimmt. Also muss sogar $a + p \leq 11$ sein.

Ist $a + p = 11$, so verbleibt $(b + p)(c + p) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$, was sich etwa in $b + p = 2^2 \cdot 3 = 12 \geq a + p$ und $c + p = 3 \cdot 5 = 15 \geq a + p$ zerlegen lässt, sodass p maximal 11 gewählt werden kann.

Wählt man das p maximal, also $p = 11$, so ist also – unter der weiterhin angenommenen Sortierung der Variablen a, b und c – $a = 0$ und $(b + p)(c + p) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$. Dann ist genau einer der beiden Faktoren $b + p$ bzw. $c + p$ durch 5 teilbar.

Ist dieser auch durch 3 teilbar, so verbleiben für den anderen Faktor höchstens die Faktoren $2^2 \cdot 3 = 12$. Also darf der durch 5 teilbare Faktor neben dem einen Faktor 3 keinen weiteren (und auch keinen Faktor 2) enthalten, da sonst der andere Faktor ein echter Teiler von 12, also höchstens 6, wäre, was im Widerspruch zu $a + p \leq b + p \leq c + p$ steht.
Demzufolge gibt es in diesem Fall nur die eine Zerlegung in $12 \cdot 15$, sodass aufgrund der Anordnung $b + p = 12$ und $c + p = 15$, also $(a,b,c) = (0,1,4)$ gilt.

Ist der durch 5 teilbare Faktor nicht durch 3, aber durch 2 teilbar, so muss er wegen $5 \cdot 2 = 10 < 11$ auch durch den zweiten Faktor 2 teilbar sein. Dann ergibt sich aber für den zweiten Faktor, dass dieser höchstens $3^2 = 9$, also kleiner als $a + p = 11$ ist, was einen Widerspruch darstellt. Ein solcher ergibt sich auch, wenn der durch 5 teilbare Faktor weder durch 2 noch 3 teilbar ist, da er dann genau 5 beträgt und $5 < 11$ ist.

Also gibt es unter der Zusatzannahme $a \leq b \leq c$ genau ein Tripel (a,b,c) für das maximal mögliche $p = 11$. Lässt man die Zusatzannahme fallen, ergeben sich alle 6 möglichen Anordnungen dieses einen Tripels als Lösungen:

$$(a,b,c) \in \{(0,1,4);\ (0,4,1);\ (1,0,4);\ (1,4,0);\ (4,0,1);\ (4,1,0)\}$$

Aufgabe 240924:
Beweisen Sie: Sind a und b beliebige ganze Zahlen, wobei nur $b \neq 0$ vorausgesetzt wird, so ist die Zahl

$$z = a^5 + 3a^4b - 5a^3b^2 - 15a^2b^3 + 4ab^4 + 12b^5$$

das Produkt aus fünf ganzen Zahlen, von denen keine zwei einander gleich sind!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es gilt
$$z = (a - b) \cdot (a + b) \cdot (a - 2b) \cdot (a + 2b) \cdot (a + 3b) \tag{1}$$
was man durch Ausmultiplizieren bestätigen kann.
Von den in (1) auftretenden Faktoren sind keine zwei einander gleich; denn aus $a + nb = a + n'b$ (n, n' zwei verschiedene Zahlen -1, 1, -2, 2, 3) folgte $(n - n') \cdot b = 0$ und daraus wegen $n \neq n'$, also $b = 0$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

Aufgabe 250921:
Ermitteln Sie alle diejenigen Tripel (a, b, c) von natürlichen Zahlen a, b, c, für die $a \leq b \leq c$ und $a \cdot b \cdot c = 19 \cdot 85$ gilt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Primfaktorzerlegung von $19 \cdot 85 = 1615$ lautet $1615 = 5 \cdot 17 \cdot 19$. Für die zu ermittelnden Tripel gibt es daher genau die folgenden Möglichkeiten.
1. Genau die beiden Zahlen a und b sind gleich 1. Das führt auf das Tripel $(1, 1, 1615)$.
2. Genau die eine Zahl a ist gleich 1. Dann enthält b mindestens einen der Primfaktoren 5, 17, 19. Enthielte b mehr als einen dieser Faktoren, so wäre $b \geq 5 \cdot 17 = 85$. Andererseits enthielte c dann nur noch höchstens einen dieser Faktoren, also wäre $c \leq 19$. Das widerspricht der Bedingung $b \leq c$.
Also enthält b genau einen der Primfaktoren 5, 17, 19 und c enthält die beiden anderen. Das führt auf die Tripel $(1, 5, 323)$, $(1, 17, 135)$, $(1, 19, 85)$.
3. Keine der drei Zahlen a, b, c ist gleich 1, führt auf das Tripel $(5, 17, 19)$.
Somit sind genau die fünf in 1., 2., 3. angegebenen Tripel die gesuchten.

Aufgabe 260923:
Ermitteln Sie alle diejenigen Tripel $(a; b; c)$ natürlicher Zahlen a, b, c, die die folgenden Bedingungen (1) bis (5) erfüllen!
(1) Es gilt $b < c$.
(2) b und c sind zueinander teilerfremd.
(3) a ist von jeder der Zahlen 4; 9; 12 verschieden.
(4) b und c sind von jeder der Zahlen 13; 16; 21 verschieden.
(5) Jede Zahl, die die Summe zweier verschiedener Zahlen der Menge $A = \{4; 9; 12; a\}$ ist, ist in der Menge $B = \{13; 16; 21; b; c\}$ enthalten.

Lösung von cyrix:
Nach (5) sind die Summen $4+9 = 13$, $4+12 = 16$, $9+12 = 21$, $4+a$, $9+a$ und $12+a$ alle in B enthalten. Da nach (3) a verschieden von 4, 9 und 12 ist, ist in dieser Liste von sechs Additionsaufgaben doppelt. Da aber B nur höchstens fünf Elemente enthält, müssen mindestens zwei das gleiche Ergebnis besitzen. Nach (4) sind b und c von den sonstigen Elementen von B und nach (1) auch voneinander verschieden, sodass B tatsächlich genau fünf Elemente besitzt und damit von den drei obigen Summen, die a als Summand enthalten, genau eine einen schon vorhanden Wert 13; 16 oder 21 annimmt.

Fall 1: Es ist $4 + a \in \{13; 16; 21\}$. Dann kann $4 + a$ nicht 13 oder 16 sein, da sonst $a = 9$ bzw. $a = 12$ folgen würde; im Widerspruch zu (3). Also muss $a + 4 = 21$ und damit $a = 17$ gelten. Dann ist $a + 9 = 26 = b < a + 12 = 29 = c$, was auch (2) erfüllt, sodass man ein erstes Lösungstripel $(a,b,c) = (17,26,29)$ erhält.

Fall 2: Es ist $9 + a \in \{13; 16; 21\}$. Dann kann $9 + a$ nicht 13 oder 21 sein, da sonst $a = 4$ bzw. $a = 12$ folgen würde; im Widerspruch zu (3). Also muss $a + 9 = 16$ und damit $a = 7$ gelten. Dann ist $a + 4 = 13 = b < a + 12 = 19 = c$, was auch (2) erfüllt, sodass man ein zweites Lösungstripel $(a,b,c) = (7,13,19)$ erhält.

Fall 3: Es ist $12 + a \in \{13; 16; 21\}$. Dann kann $12 + a$ nicht 16 oder 21 sein, da sonst $a = 4$ bzw. $a = 9$ folgen würde; im Widerspruch zu (3). Also muss $a + 12 = 13$ und damit $a = 1$ gelten. Dann ist $a + 4 = 5 = b < a + 9 = 10 = c$. Dies widerspricht aber (2), sodass es in diesem Fall kein Lösungstripel gibt.

Zusammenfassend gibt es also genau zwei Lösungstripel, die die Aufgabenstellung erfüllen, nämlich (7,13,19) und (17,26,29).

III Runde 3

Aufgabe 070934:
Man ermittle alle geordneten Tripel (a, b, c) natürlicher Zahlen a, b und c, für die

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1 \qquad (1)$$

gilt. Zwei Tripel (a_1, b_1, c_1) und (a_2, b_2, c_2) heißen dabei genau dann gleich, wenn $a_1 = a_2, b_1 = b_2$ und $c_1 = c_2$ ist.

Lösung von Kitaktus:
Diese Aufgabe lässt sich mit Fallunterscheidung lösen.
Es seien $0 < a \leq b \leq c$ drei natürliche Zahlen mit $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$ (1).

1. Fall: $a = 1$.
$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > \frac{1}{a} = 1$ im Widerspruch zu (1). In diesem Fall gibt es keine Lösung.

2. Fall: $a \geq 3$
Wenn $c > 3$ ist, dann ist

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{c} < \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$$

im Widerspruch zu (1)
Wenn $c \leq 3$ ist, dann folgt wegen $3 \leq a \leq b \leq c \leq 3$, dass $a = b = c = 3$ gilt.
In diesem Fall ist tatsächlich $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$.

3. Fall: $a = 2$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2(c + b) = bc \qquad \text{(Multiplikation mit } 2bc > 0\text{)}$$

$$\Leftrightarrow 4 = bc - 2(b + c) + 4 = (b - 2)(c - 2) \qquad (2)$$

Wegen $b \geq= a$ muss $b \geq 2$ sein und $b = 2$ ist nicht möglich, weil $4 \neq (2 - 2)(c - 2) = 0$.
$5 \leq b \leq c$ ist auch nicht möglich, da dann $(b - 2)(c - 2) \geq (5 - 2)(5 - 2) = 9 > 4$ gilt, im Widerspruch zu (2).
Es kommen also nur die Fälle $b = 3$ und $b = 4$ in Betracht.

3.1. Fall: $b = 3$
(2) $\Leftrightarrow 4 = c - 2$, also $c = 6$. Tatsächlich ist $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$.
3.2. Fall: $b = 4$
(2) $\Leftrightarrow 4 = 2(c - 2)$, also $c = 4$. Tatsächlich ist $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$.

Es gibt also genau zehn Lösungstripel: (3,3,3), (2,3,6) und (2,4,4) sowie die Permutationen des 2. und 3. Tripels.

Aufgabe 080931:
Marlies erklärt Claus-Peter ein Verfahren, nach dem man, wie sie meint, die Quadrate der natürlichen Zahlen von 26 bis 50 leicht ermitteln kann, wenn man die Quadrate der natürlichen Zahlen bis 25 auswendig weiß.
„Wenn du beispielsweise das Quadrat von 42 berechnen willst, dann bildest du die Ergänzung dieser Zahl bis 50 und quadrierst sie. Das wäre in diesem Falle 64.
Davor setzt du die Differenz zwischen deiner Zahl und 25, in deinem Falle also 17.
Die so gebildete Zahl, hier also 1764, ist bereits das gesuchte Quadrat von 42.“
Prüfen Sie die Richtigkeit dieses Verfahrens für alle Zahlen des angegebenen Bereichs!

Lösung von ZePhoCa:
Wir betrachten drei Fälle. Sei immer x die betrachtete Zahl.

1. Das Quadrat der Ergänzung der Zahl zu 50 ist einstellig (d. h. $x \in \{47, \ldots ,50\}$). Da $(50 - x)^2$ einstellig ist, ist die gebildete Zahl dann $10(x - 25) + (50 - x)^2 = x^2 - 90x + 2250$.

   Das ist genau dann gleich x^2 wenn $x = 25$, dies liegt aber nicht im betrachteten Bereich. Für diese Zahlen funktioniert das Verfahren also nicht.

2. Das Quadrat der Ergänzung der Zahl zu 50 ist zweistellig (d. h. $x \in \{41, \ldots ,46\}$). Dann erhält man mit dem Verfahren die Zahl $100(x - 25) + (50 - x)^2 = x^2$, hier funktioniert das Verfahren also.

3. Das Quadrat der Ergänzung der Zahl zu 50 ist dreistellig (d. h. $x \in \{26, \ldots ,40\}$). Dann erhält man mit dem Verfahren die Zahl $1000(x - 25) + (50 - x)^2 = x^2 + 900x - 22500$ und dies ist genau dann gleich x^2 wenn $x = 25$, was nicht im betrachteten Bereich liegt.

Also geht das Verfahren genau dann, wenn x zwischen 41 und 46 liegt.

Aufgabe 100933:
Wenn x eine reelle Zahl ist, so bedeute $[x]$ die größte ganze Zahl, die nicht größer als x ist. (So ist z. B. $[3,7] = 3, [-3,7] = -4, [4] = 4$.)
Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen x, für die gilt:

$$\left[\frac{10 + 3x}{6}\right] = \frac{5x + 3}{7}$$

Lösung von cyrix:
Die Gleichung wird genau dann erfüllt, wenn die folgenden beiden Ungleichungen zugleich wahr sind: $\frac{5x+3}{7} \leq \frac{10+3x}{6}$ und $\frac{10+3x}{6} < \frac{5x+3}{7} + 1 = \frac{5x+10}{7}$.
Die erste Ungleichung ist äquivalent zu $\left(\frac{5}{7} - \frac{3}{6}\right) x \leq \frac{10}{6} - \frac{3}{7}$ bzw. $\frac{3}{14} \cdot x \leq \frac{26}{21}$, also $x \leq \frac{26}{21} \cdot \frac{14}{3} = \frac{52}{9}$.
Und die zweite Ungleichung ist äquivalent zu $\left(\frac{3}{6} - \frac{5}{7}\right) \cdot x < \frac{10}{7} - \frac{10}{6}$ bzw. $-\frac{3}{14} \cdot x < -\frac{5}{21}$, also $x > \frac{5}{21} \cdot \frac{14}{3} = \frac{10}{9}$.
Zusammengefasst erfüllen also genau die reellen Zahlen x mit $\frac{10}{9} < x \leq \frac{52}{9}$ die gegebene Betragsgleichung.

Aufgabe 100934:
Gesucht sind alle geordneten Tripel reeller Zahlen (x, y, z), welche Lösungen des Gleichungssystems sind:

$$(1) \quad x + y = 2 \qquad ; \qquad (2) \quad xy - z^2 = 1$$

Lösung von cyrix:
Aus der zweiten Gleichung erhält man $xy = 1 + z^2 \geq 1$ und damit

$$0 \leq (x - y)^2 = (x + y)^2 - 4xy = 2^2 - 4xy \leq 4 - 4 = 0$$

Also muss in dieser Ungleichungskette an jeder Stelle Gleichheit gegolten haben, sodass $x - y = 0$ und $xy = 1$, also $x = y = \pm 1$, und mit Gleichung (2) auch $z = 0$ folgt.
Es kann also nur zwei Lösungstripel (x,y,z) geben, nämlich $(-1,-1,0)$ und $(1,1,0)$. Die Probe bestätigt aber nur das zweite, sodass $(1,1,0)$ die einzige Lösung des gegebenen Gleichungssystems ist.

Aufgabe 110936:
Ermitteln Sie alle geordneten Paare (x, y) ganzer Zahlen x, y, die Lösungen der folgenden Gleichung sind!

$$2x^2 - 2xy - 5x - y + 19 = 0$$

Lösung von cyrix:
Mittels der Substitution $y = z - 3$ mit $z \in \mathbb{Z}$ geht die Gleichung über in

$$2x^2 - 2xz + 6x - 5x - z + 3 + 19 = 0 \qquad \text{also} \qquad 2x^2 - 2xz + x - z = -22$$

bzw. $(2x + 1)(x - z) = -22$.
Damit ist $2x+1$ ein ganzzahliger Teiler von -22. Da dieser Term auch ungerade ist, ergeben sich folgende vier Fälle:

1. Fall: $2x + 1 = 1$ und $x - z = -22$. Dann ist $x = 0$, $z = 22$ und $y = 19$.
2. Fall: $2x + 1 = -1$ und $x - z = 22$. Dann ist $x = -1$, $z = -23$ und $y = -26$.
3. Fall: $2x + 1 = 11$ und $x - z = -2$. Dann ist $x = 5$, $z = 7$ und $y = 4$.
4. Fall: $2x + 1 = -11$ und $x - z = 2$. Dann ist $x = -6$, $z = -8$ und $y = -11$.

Die Probe bestätigt alle Ergebnisse. Die Gleichung wird demnach genau von den ganzzahligen Paaren $(x,y) \in \{(-6,-11),(-1,-26),(0,19),(5,4)\}$ gelöst.

Aufgabe 120936:
a) Man ermittle die Anzahl aller verschiedenen Tripel (k, n, m) natürlicher Zahlen k, n, m, für die $k \cdot n^2 \cdot (2m + 1) = 3808$ gilt.
b) Man gebe von den unter a) genannten Tripeln alle diejenigen an, für die das Produkt knm den kleinsten Wert annimmt.

Lösung von ZePhoCa:
a) Es gilt $3808 = 2^5 \cdot 7 \cdot 17$. Da $2m + 1$ ein ungerader Teiler von 3808 sein muss kann dies nur 7,17 oder $119 = 7 \cdot 17$ sein. Damit gilt $m \in \{3,8,59\}$.
Für n^2 gibt es die Möglichkeiten $n^2 = 4^2 = 2^4$ oder $n^2 = 2^2$ oder $n^2 = 1^2$ (unabhängig davon, wie m gewählt wurde). Jede dieser Wahlen legt k eindeutig fest, also gibt es $3 \cdot 3 = 9$ Möglichkeiten.

b) Wählt man $n = 1$ oder $n = 2$ so enthält k den zu 4 fehlenden Faktor quadratisch, um ein möglichst kleines Produkt zu erhalten muss also $n = 4$ gewählt werden. Von den verbleibenden Möglichkeiten $(k,m,n) \in \{(34,4,3),(14,4,8),(2,4,59)\}$ hat das Produkt $34 \cdot 4 \cdot 3 = 408$ den kleinsten Wert.

Aufgabe 140932:
Man gebe alle geordneten Quadrupel (a_1, a_2, a_3, a_4) aus vier unmittelbar aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen a_1, a_2, a_3, a_4 mit $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$ an, die folgender Bedingung genügen:
Die Summe der dritten Potenz der ersten beiden Zahlen des Quadrupels ist gleich der Differenz der dritten Potenz der letzten und vorletzten Zahl des Quadrupels.

Lösung von cyrix:
Wir können für eine ganze Zahl n die Elemente des Quadrupels schreiben als $a_1 = n-1$, $a_2 = n$, $a_3 = n+1$ und $a_4 = n+2$. Damit geht die Bedingung über in die Gleichung

$$(n-1)^3 + n^3 = (n+2)^3 - (n+1)^3 \qquad \text{bzw.}$$

$$2n^3 - 3n^2 + 3n - 1 = n^3 + 6n^2 + 12n + 8 - (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) = 3n^2 + 9n + 7$$

also $2n^3 - 6n^2 - 6n - 8 = 0$ und damit $n^3 - 3n^2 - 3n - 4 = 0$.
Es ist 4 eine Lösung dieser Gleichung, sodass wir (3,4,5,6) als Lösungsquadrupel erhalten.
Für den Fall $n \neq 4$ können wir die Gleichung durch $n - 4$ teilen und erhalten $n^2 + n + 1 = 0$. Diese Gleichung hat aber keine ganzzahligen Lösungen, sodass auch keine weiteren Lösungsquadrupel existieren.

Aufgabe 150931:
Es sind drei aufeinanderfolgende ungerade natürliche Zahlen zu ermitteln, bei denen die Summe ihrer Quadrate eine vierstellige Zahl ist, die aus vier gleichen Ziffern besteht.

Lösung von cyrix:
Es seien $2n-1$, $2n+1$ und $2n+3$ die drei aufeinanderfolgenden ungeraden natürlichen Zahlen. Dann ist die Summe S ihrer Quadrate gleich

$$S = (2n-1)^2 + (2n+1)^2 + (2n+3)^2 = 4n^2 - 4n + 1 + 4n^2 + 4n + 1 + 4n^2 + 12n + 9 =$$

$$= 12n^2 + 12n + 11 = 12(n^2 + n + 1) - 1$$

Diese Summe soll eine vierstellige Zahl sein, die aus vier gleichen Ziffern z besteht. Also gilt $S = 1111 \cdot z$.
Es ist S ungerade, sodass auch z ungerade sein muss. Weiterhin lässt wegen $S = 1110z + z = 3 \cdot 370z + z$ die Summe S den gleichen Rest bei der Teilung durch 3 wie z selbst. Da aber S um 1 kleiner als ein Vielfaches von 12 (und damit auch von 3) ist, muss dieser Rest bei der Teilung durch 3 genau 2 betragen.
Als einzige Ziffer $1 \leq z \leq 9$ erfüllt $z = 5$ beide Bedingungen.
Demnach muss $S = 5555$ sein, woraus man $n^2 + n + 1 = \frac{5556}{12} = 463$ und $n = 21$ (bzw. $n = -22$, was aber wegen $2n - 1 \in \mathbb{N}$ entfällt) erhält, sodass die drei gesuchten aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen 41, 43 und 45 lauten.

Aufgabe 190931:
Beim Lösen einer Gleichung der Form $ax - 6 = bx - 4$ mit gegebenen natürlichen Zahlen a und b stellt Matthias fest:
(1) Die Gleichung hat eine natürliche Zahl x als Lösung.
(2) Die gleiche Zahl ergibt sich, wenn man - zur Durchführung der Probe - jeweils auf einer Seite dieser Gleichung die gefundene Lösung x einsetzt.
Ermitteln Sie alle Paare (a, b) natürlicher Zahlen, für die diese Feststellungen (1) und (2) zutreffen!

Lösung von cyrix:
Die Gleichung ist äquivalent zu $(a - b)x = 2$. Weiterhin ist nach (1) $x \in \mathbb{N}$, also $x \geq 0$, sodass auch $a - b \geq 0$ und also $a - b \in \mathbb{N}$ gilt. Insbesondere ist also x ein Teiler von 2, d. h., $x = 1$ oder $x = 2$.

1. Fall: $x = 1$. Dann ist nach (2) $a - 6 = b - 4 = 1$, also $a = 7$ und $b = 5$. Die Probe bestätigt, dass das Paar $(a,b) = (7,5)$ beide Eigenschaften erfüllt.

2. Fall: $x = 2$. Dann ist nach (2) $2a - 6 = 2b - 4 = 2$, also $a = 4$ und $b = 3$, was wieder durch die Probe bestätigt wird. Das zweite Paar (a,b), was die Aufgabenstellung erfüllt, lautet also (4,3), und weitere gibt es nicht.

Aufgabe 260931:
Ermitteln Sie alle diejenigen geordneten Paare (a, b) natürlicher Zahlen, für die die Gleichung

$$2(a+b) = ab$$

gilt!

Lösung von cyrix:
Es ist die Gleichung äquivalent zu $4 = ab - 2a - 2b + 4 = (a-2)\cdot(b-2)$, sodass $a-2$ und $b-2$ das gleiche Vorzeichen haben und Teiler sowie zugehöriger Gegenteiler von 4 sind. Da a und b natürliche Zahlen sind, gilt dabei $a - 2 \geq -2$ und $b - 2 \geq -2$, sodass keine ganzzahlige Zerlegung der 4 mit Faktor -4 in Frage kommt. Damit gilt $(a-2)\cdot(b-2) = 4\cdot 1 = (\pm 2)\cdot(\pm 2) = 1 \cdot 4$ und also

$$(a{,}b) \in \{(6{,}3), (0{,}0), (4{,}4), (3{,}6)\}.$$

Dass dies auch alles Lösungen der Ausgangsgleichungen sind, zeigt die Probe.

Aufgabe 260933:
Wenn eine reelle Zahl a gegeben ist, so werde jeder reellen Zahl x eine Zahl y, nämlich

$$y = \frac{x^3 + x^2 + ax + 1}{x^2 + 1}$$

zugeordnet.
(A) Ermitteln Sie, wenn $a = -3$ gegeben ist, zwei ganze Zahlen x, deren zugeordnete Zahlen y ebenfalls ganze Zahlen sind!
(B) Ermitteln Sie eine reelle Zahl a, für die die folgende Aussage (*) gilt!
(*) Wenn die Zahl a gegeben ist, so gibt es unendlich viele ganze Zahlen x, deren jeweils zugeordnete Zahlen y ebenfalls ganze Zahlen sind.
(C) Untersuchen Sie, ob es außer der in (B) ermittelten Zahl a noch eine andere reelle Zahl a gibt, für die die Aussage (*) gilt!

Lösung von cyrix:
Es ist für jedes $a \in \mathbb{R}$

$$y = \frac{x^3 + x + x^2 + 1 + (a-1)x}{x^2 + 1} = x + 1 + \frac{a-1}{x^2+1}$$

(A): Für $a = -3$ ist also $y = x + 1 + \frac{-4}{x^2+1} = x + 1 - \frac{4}{x^2+1}$. Damit ist für jede ganze Zahl x die Zahl y ganz, wenn auch $x + 1 - y = \frac{4}{x^2+1}$ eine ganze Zahl, also $x^2 + 1$ ein Teiler von 4 ist. Dies ist z. B. für $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$ der Fall. Tatsächlich ist $y(0) = 1$ und $y(1) = 0$.

(B)/(C): Damit für ein a die Aussage (*) gilt, muss also für unendlich viele ganze Zahlen x auch $y - (x+1) = \frac{a-1}{x^2+1}$ eine ganze Zahl sein. Da auch $x^2 + 1$ eine ganze Zahl ist, ist damit auch $a - 1 = (y - (x+1)) \cdot (x^2+1) \in \mathbb{Z}$ und es gilt $a - 1$ ist durch $x^2 + 1$ teilbar.
Insbesondere ist also $a-1$ durch unendlich viele verschiedene ganze Zahlen teilbar, was nur die ganze Zahl 0 erfüllt, sodass $a = 1$ sein muss. Für $a = 1$ ist aber $y = x + 1$ für jedes ganzzahlige x selbst ganzzahlig, insbesondere also auch für unendlich viele x. Damit ist $a = 1$ die einzige reelle Zahl, die (*) erfüllt.

Aufgabe 270931:
a) Beweisen Sie, dass die Gleichung

$$x_1^{11} + x_2^{11} + ... + x_{1987}^{11} = 1988 \tag{1}$$

keine reelle Lösung $(x_1, x_2, ..., x_{1987})$ besitzt, in der alle Zahlen $x_1, x_2, ..., x_{1987}$ natürliche Zahlen sind!

b) Beweisen Sie, dass die Gleichung (1) unendlich viele verschiedene Lösungen besitzt, in denen alle Zahlen ganze Zahlen sind!
Dabei heißen zwei Lösungen $(x_1, x_2, ..., x_{1987})$ und $(x'_1, x'_2, ..., x'_{1987})$ genau dann von einander verschieden, wenn mindestens eine der Ungleichungen gilt:

$$x_1 \neq x'_1, x_2 \neq x'_2, ..., x_{1987} \neq x'_{1987}$$

Lösung von cyrix:
a) Angenommen, es gäbe eine solche Lösung für die Gleichung (1) der Aufgabenstellung.
Wegen $x_i \geq 0$ für alle $i = 1, \ldots, 1987$ ist dann auch für alle diese Indizes i der Wert $x_i^{11} \geq 0$, sodass genauso für alle diese i die Abschätzung $x_i^{11} \leq 1987 < 2048 = 2^{11}$, also $x_i < 2$ und damit wegen $x_i \in \mathbb{N}$ schließlich $x_i \leq 1$, also auch $x_i^{11} \leq 1$, was dann aber wegen

$$x_1^{11} + x_2^{11} + \cdots + x_{1987}^{11} \leq 1987 < 1988$$

einen Widerspruch zu (1) erzeugen würde, $\square$.

b) Es sei k eine beliebige ganze Zahl. Setze $x_1 := x_2 := \cdots = x_{61} := -1$, $x_{62} := 2$, $x_{63} := k$, $x_{64} := -k$ und für alle $i \geq 65$ $x_i := 0$. Dann ist

$$x_1^{11}+x_2^{11}+\cdots+x_{1987}^{11} = (-1)^{11}\cdot(61)+2^{11}+k^{11}+(-k)^{11}+0^{11}\cdot(1987-64) = -61+2048+k^{11}-k^{11} = 1987$$

also eine Lösung der Gleichung (1) in ganzen Zahlen. Dabei unterscheiden sich je zwei solche Lösungen durch die verschiedenen Werte von k, sodass es unendlich viele verschiedene gibt.

Aufgabe 300935:
Ermitteln Sie alle diejenigen Tripel (x, y, z) natürlicher Zahlen, für die gilt:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{4}{5}$$

Lösung von cyrix:
O. B. d. A. gelte $0 < x \leq y \leq z$. Dann ist $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{y} \geq \frac{1}{z} > 0$ und damit $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{15} > \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$, also $x < 4$. Es ist auch $x > 1$, da sonst $x = 1$, also $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} > \frac{1}{x} = 1$ im Widerspruch zur Gleichung aus der Aufgabenstellung gelten würde. Es verbleiben zwei Möglichkeiten für x.

Fall 1: Es ist $x = 2$. Dann ist die folgende Gleichung zu lösen: $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{4}{5} - \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$. Wegen $y \leq z$ ist $\frac{1}{y} \geq \frac{1}{z}$, also $\frac{1}{y} \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{10} = \frac{3}{20} > \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$, sodass $y \leq 6$ folgt. Wegen $\frac{1}{3} > \frac{3}{10}$ ist auch $y \geq 4$, da sonst $\frac{1}{y} \geq \frac{1}{3}$ mit analogem Widerspruch wie oben folgen würde.

Fall 1.1: Es ist $y = 4$. Dann folgt $\frac{1}{z} = \frac{3}{10} - \frac{1}{4} = \frac{6-5}{20} = \frac{1}{20}$, also $z = 20$.

Fall 1.2: Es ist $y = 5$. Dann folgt $\frac{1}{z} = \frac{3}{10} - \frac{1}{5} = \frac{3-2}{10} = \frac{1}{10}$, also $z = 10$.

Fall 1.3: Es ist $y = 6$. Dann folgt $\frac{1}{z} = \frac{3}{10} - \frac{1}{6} = \frac{9-5}{30} = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$, sodass es hier keine Lösung gibt.

Fall 2: Es ist $x = 3$. Dann ist folgende Gleichung zu lösen: $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{4}{5} - \frac{1}{3} = \frac{12-5}{15} = \frac{7}{15}$. Dann ist wegen $\frac{1}{y} \geq \frac{1}{z}$ auch $\frac{1}{y} \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{15} = \frac{7}{30} > \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$, also $y \leq 4$. Wegen $y \geq x$ ist auch $y \geq 3$.

Fall 2.1: Es ist $y = 3$. Dann folgt $\frac{1}{z} = \frac{7}{15} - \frac{1}{3} = \frac{7-5}{15} = \frac{2}{15}$, sodass es hier keine Lösung gibt.

Fall 2.2.: Es ist $y = 4$. Dann folgt $\frac{1}{z} = \frac{7}{15} - \frac{1}{4} = \frac{28-15}{60} = \frac{13}{60}$, sodass es auch hier keine Lösung gibt.

Zusammenfassend erfüllen also genau die Tripel
$(3,4,20), (3,20,4), (4,3,20), (4,20,3), (20,3,4), (20,4,3), (3,5,10), (3,10,5), (5,3,10), (5,10,3), (10,3,5), (10,5,3)$
positiver ganzer Zahlen die Gleichung.

Aufgabe 320936:
a) Geben Sie drei ganze Zahlen x, y und z an, für die gilt:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 12y - 14z - 57 = 0 \tag{1}$$

b) Ermitteln Sie die Anzahl aller derjenigen Tripel (x, y, z) ganzer Zahlen x, y, z, die die Gleichung (1) erfüllen!

Lösung von cyrix:
Es ist

$$(x-2)^2+(y+6)^2+(z-7)^2 = x^2-4x+4+y^2+12y+36+z^2-14z+49 = x^2+y^2+z^2-4x+12y-14z+89,$$

also (1) äquivalent zu

$$(x-2)^2 + (y+6)^2 + (z-7)^2 - 89 - 57 = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad 146 = (x-2)^2 + (y+6)^2 + (z-7)^2$$

Es ist $146 = 12^2 + 1^2 + 1^2$, sodass man etwa $x - 2 = 12$, $y + 6 = z - 7 = 1$, also $(x,y,z) = (14, -5,8)$ wählen kann, was eine Lösung der Ausgangsgleichung liefert und Teilaufgabe a) löst.

Für b) stellen wir fest, dass die Anzahl der ganzzahligen Lösungen (x,y,z) der Ausgangsgleichung offenbar genau der Anzahl der ganzzahligen Lösungen (a,b,c) der Gleichung $146 = a^2 + b^2 + c^2$ entspricht, da man aus jeder Lösung der einen eindeutig eine Lösung der anderen via $x - 2 = a$, $y + 6 = b$ und $z - 7 = c$ erhält.
Es lässt sich die Zahl 146 auf ausschließlich folgende Weisen (ohne Beachtung der Reihenfolge) als Summe von drei Quadratzahlen darstellen:

$$146 = 144 + 1 + 1 = 121 + 25 + 0 = 121 + 16 + 9 = 81 + 64 + 1 = 81 + 49 + 16$$

Für die letzten drei Darstellungen gibt es je 6 mögliche Reihenfolgen der Summanden und unabhängig voneinander jeweils beide Wahlen für die Vorzeichen von a, b und c, also jeweils $6 \cdot 2^3 = 48$ Lösungen; für beide Darstellungen insgesamt also 144 Lösungen.

Für die zweite Darstellung $146 = 121+25+0$ gibt es wieder 6 mögliche Reihenfolgen der Summanden, aber nur noch für die von Null verschiedenen Quadrate je zwei mögliche Vorzeichen, also für diese Darstellung $6 \cdot 2^2 = 24$ Lösungen.

Und für die erste Darstellung gibt es wieder für jede der Variablen zwei mögliche Vorzeichen, dafür aber nur 3 mögliche Reihenfolgen der Summanden, also $3 \cdot 2^3 = 24$ Lösungen.
Insgesamt besitzt also $146 = a^2+b^2+c^2$ genau $144+24+24 = 192$ verschiedene ganzzahlige Lösungstripel, sodass dies auch die gesuchte Anzahl an Lösungen für die Ausgangsgleichung (1) ist.